



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

ESTUDIO DE LOS POLOS DE LA MATRIZ DE  
DISPERSIÓN EN UN MODELO SENCILLO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADA EN FÍSICA

PRESENTA:

**SELENE MARTÍNEZ VENTURA**

DIRECTOR DE TESIS:

CÉSAR FERNÁNDEZ RAMÍREZ



CIUDAD DE MÉXICO

2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*If it were true [that there are mathematical problems undecidable by the human mind] it would mean that human reason is utterly irrational in asking questions it cannot answer, while asserting emphatically that only reason can answer them. Human reason would then be very imperfect and, in some sense, even inconsistent, in glaring contradiction to the fact that those parts of mathematics which have been systematically and completely developed show an amazing degree of beauty and perfection. In these fields, by entirely unexpected laws and procedures, means are provided not only for solving all relevant problems, but also solving them in a most beautiful and perfectly feasible manner.*

KURT FRIEDRICH GÖDEL

# Agradecimientos

A Memé la bella, a Bonita, a Luna, a Niejim Jim y a todos los animalitos que he rescatado.

A mis padres, a quienes agradezco profundamente por todo el apoyo y la confianza que me han brindado a lo largo de mi vida, especialmente a mi madre.

A mis amigos y compañeros que me brindaron a lo largo de este camino de experiencias memorables y diversos puntos de vista.

A los buenos y excelentes profesores que tuve a lo largo de la carrera.

A todos aquellos que me han ayudado a ampliar mis panoramas.

Especialmente a mi asesor de tesis por brindarme la oportunidad de llevar a cabo este trabajo bajo su guía y por toda la paciencia que ha tenido conmigo.

Finalmente agradezco al proyecto PAPIIT/DGAPA/UNAM Número: IA101819 por el apoyo para realizar este trabajo.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Conceptos básicos de la teoría de dispersión</b>	<b>8</b>
2.1. Dispersión relativista . . . . .	10
2.1.1. Cinemática relativista para la dispersión de dos partículas . . . . .	11
2.1.2. Simetría de cruce . . . . .	15
2.2. Teoría de la Matriz de Dispersión . . . . .	16
2.2.1. Propiedades de la matriz $S$ . . . . .	17
2.2.2. Sección eficaz . . . . .	20
2.3. Propiedades analíticas de la amplitud de dispersión . . . . .	21
2.4. Expansión en ondas parciales . . . . .	24
2.5. Polos en la amplitud . . . . .	26
<b>3. Parametrización de las ondas parciales de dispersión</b>	<b>28</b>
3.1. Descripción del espacio de fases . . . . .	29
3.2. Modelo de la matriz $K$ . . . . .	30
3.3. Polos en la matriz $K$ . . . . .	31
3.3.1. Un polo en la matriz $K$ . . . . .	32
3.3.2. Dos polos en la matriz $K$ . . . . .	32
3.4. Continuación analítica a las hojas de Riemann . . . . .	33

<b>4. Programa para el cálculo de los polos y resultados</b>	<b>36</b>
4.1. Detalles del proceso computacional y obtención de datos . . . . .	38
4.2. Resultados: matriz $K$ con un polo . . . . .	40
4.3. Resultados: matriz $K$ con dos polos . . . . .	50
<b>5. Conclusiones</b>	<b>59</b>
<b>A. Notas de análisis complejo</b>	<b>62</b>
A.1. Argumento principal . . . . .	62
A.1.1. Corte de ramificación . . . . .	63
A.2. Hojas de Riemann . . . . .	64
A.3. Funciones analíticas . . . . .	65
A.3.1. Verificación de analiticidad . . . . .	66
A.3.2. Singularidades . . . . .	66
A.3.3. Residuos . . . . .	67
A.4. Integración en el plano complejo . . . . .	68
A.4.1. Integral de Cauchy . . . . .	68
A.4.2. Teorema del residuo . . . . .	68

# Capítulo 1

## Introducción

La *dispersión de partículas* está presente en casi cualquier evento físico, este fenómeno es producido por el contacto entre dos o más partículas mediante cualquier interacción física, las cuales pueden reducirse a cuatro interacciones fundamentales: La nuclear débil, la nuclear fuerte, la electromagnética y la gravitacional. Las primeras tres interacciones son descritas a través del Modelo estándar (ME) de partículas elementales, el cual fusiona el modelo electrodébil: que describe las interacciones electromagnética (electrodinámica cuántica, QED) y débil; con la cromodinámica cuántica (QCD) que explica la interacción fuerte, así como con el mecanismo de Higgs que dota de masa inercial a las partículas elementales. La interacción gravitacional no está incorporada en el marco del ME y es descrita por la teoría de la Relatividad General.

Dichas interacciones se describen a través de la teoría cuántica de campos, la cual surge de la síntesis de la mecánica cuántica y la relatividad especial, en la que las fuerzas se explican mediante el intercambio de partículas virtuales. En esta representación existen dos tipos de partículas elementales: los fermiones con espín  $1/2$ ; que a su vez se clasifican en *leptones y quarks* y que constituyen la base de toda la materia visible, y los bosones de norma con espín entero; los cuales son asociados a cada tipo de fuerza dentro del ME: el fotón  $\gamma$  para la interacción electromagnética, ocho gluones  $g$  para la interacción fuerte y los bosones  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$  para la interacción débil.

<b>Q U A R K S</b>	<i>Masa</i> <i>Carga</i> <i>Espin</i>	2.4 MeV 2/3 1/2 <b>u</b> Arriba	1.27 MeV 2/3 1/2 <b>c</b> Encanto	171.2 GeV 2/3 1/2 <b>t</b> Cima	0 0 1 <b>g</b> Gluón	125 GeV 0 0 <b>H</b> Bosón de Higgs	
		4.8 MeV -1/3 1/2 <b>d</b> Abajo	104 MeV -1/3 1/2 <b>s</b> Extraño	4.2 GeV -1/3 1/2 <b>b</b> Fondo	0 0 1 <b>γ</b> Fotón		
	<b>L E P T O N E S</b>		0.511 MeV -1 1/2 <b>e</b> Electrón	105.7 MeV -1 1/2 <b>μ</b> Muón	1.777 GeV -1 1/2 <b>τ</b> Tau	91.2 GeV 0 1 <b>Z<sup>0</sup></b> Bosón Z	<b>B O S O N E S</b> <b>N O R M A</b>
			<2.2 eV 0 1/2 <b>ν<sub>e</sub></b> Neutrino electrónico	<0.17 MeV 0 1/2 <b>ν<sub>μ</sub></b> Neutrino muónico	<15.5 MeV 0 1/2 <b>ν<sub>τ</sub></b> Neutrino tauónico	80.4 GeV ± 1 1 <b>W<sup>±</sup></b> Bosón W	

Figura 1.1: Partículas elementales del ME.

Para la QCD se tienen tres tipos distintos de *carga de color*:  $r$ ,  $g$  y  $b$  y sus respectivos anticolores, respecto a esta propiedad QCD es una teoría basada en la simetría de grupo local  $SU(3)$ , por lo cual se tienen ocho gluones (bosones mediadores) distintos según la configuración de carga color-anticolor que transporten.

Haciendo una comparación con los elementos análogos de la QED; el fotón y la carga eléctrica, las interacciones entre los elementos de la QCD son más complejas. Los gluones poseen carga de color, de modo que también tendrían que interactuar entre ellos, lo cual aumenta en gran medida la complejidad de la interacción fuerte. Los quarks son partículas elementales que se combinan bajo la interacción fuerte, de estos existen seis tipos distintos conocidos como *sabores*: arriba, abajo, extraño, encanto, cima y fondo, abreviados como  $u$ ,  $d$ ,  $s$ ,  $c$ ,  $t$ ,  $b$  por sus iniciales



en inglés ver la figura 1.1.

Dos conceptos muy importantes en QCD son el confinamiento y la libertad asintótica. El confinamiento es el principio de que el color no es un observable físico. Como consecuencia, los quarks y los gluones no pueden propagarse libremente, sino que han de estar ligados formando singletes de color, es decir hadrones; partículas que bajo la transformación de  $SU(3)$  no representan ningún color en particular externamente. Los hadrones se dividen en *bariones* y *mesones*, que son fermiones y bosones, respectivamente. Un determinado hadrón está compuesto por la combinación de todos los autoestados de quarks y gluones que produzcan los números cuánticos deseados para dicho hadrón, de acuerdo con las leyes de conservación, y que sean singletes de color. La forma más general de representar un hadrón es como una superposición de estados, por ejemplo para un mesón sería:

$$|\text{Mesón}\rangle = \alpha_0 |q\bar{q}\rangle + \alpha_1 |q\bar{q}g\rangle + \alpha_2 |q\bar{q}gg\rangle + \alpha_3 |q\bar{q}q\bar{q}\rangle + \dots,$$

en donde los coeficientes  $\alpha_j$  indican la amplitud de probabilidad de medir una componente concreta de esta expansión, de modo que  $\sum_j |\alpha_j|^2 = 1$ <sup>1</sup>. En la década de 1960 los trabajos de Gell-Mann, Ne'eman y Zweig [1, 2, 3] permitieron la agrupación sistemática de los hadrones conocidos como representaciones irreducibles del grupo  $SU(3)$ . Estos resultados permitieron establecer un orden entre las propiedades intrínsecas de estas partículas, tales como la extrañeza  $S$ , la masa  $m$ , el Isoespín  $I_3$ , o la carga bariónica  $B$ , a través de las simetrías, de manera que también fue posible hacer predicciones teóricas sobre las partículas (entonces desconocidas) que debían existir, tal como ocurrió con el barión  $\Omega^-$  el cual posee extrañeza  $S = -3$ ; esta partícula fue predicha por el modelo de quarks y su existencia fue confirmada posteriormente de forma experimental [4]. Ver la figura 1.2.

---

<sup>1</sup>Hay casos en los que el término  $\alpha_0 = 0$ , lo cual describe estados que no pueden ser explicados mediante combinaciones de tres quarks en el caso de los bariones o de combinaciones quark antiquark en el caso de los mesones, estos son conocidos como estados exóticos de QCD.



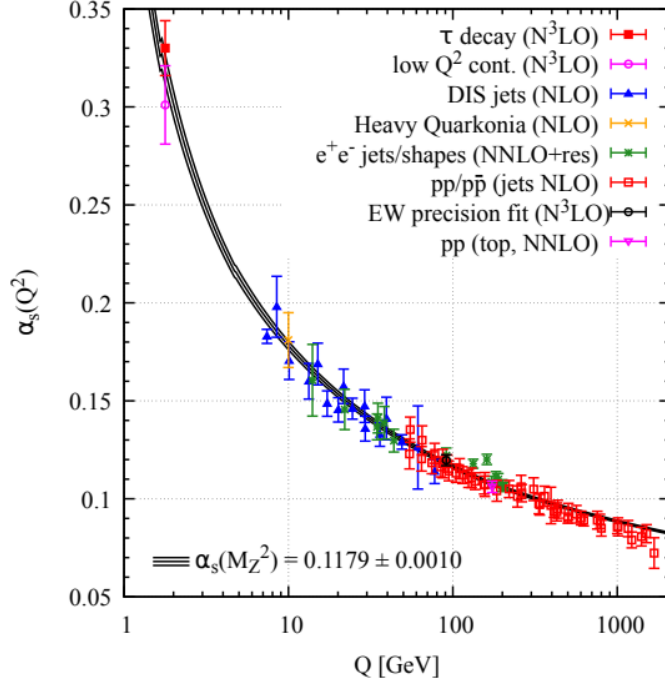


Figura 1.3: Resumen de las mediciones de la constante de acoplamiento  $\alpha_s$  como función de la escala energética  $Q$ . Figura tomada de [5]

de principios que se postulaban como suficientes para determinar dinámicamente la interacción fuerte, posteriormente este sería el formalismo más aceptado y que hasta la actualidad sigue vigente<sup>2</sup>.

La teoría de dispersión de la matriz  $S$  está basada en una cantidad mínima de principios fundamentales heredados de la naturaleza cuántica y relativista. Su uso ha permitido una amplia descripción de los procesos dispersivos a través del cálculo de las amplitudes de dispersión como elementos de dicha matriz, que a su vez proporcionan una interpretación del tipo de interacción y del espacio de fases de la colisión [7, 5]. A lo largo del mundo existen grandes laboratorios de física de partículas donde son realizados experimentos de colisión entre haces de partículas. Los resultados de estos experimentos contribuyen a revelar información acerca de los componentes primigenios de las partículas colisionadas, tales como nuevos estados de las partículas o la naturaleza de la interacción fundamental según sea el régimen energético de la colisión. A través

<sup>2</sup>Para consultar más acerca del desarrollo histórico de esta teoría, ver [6].

de la fenomenología se tiene una comparación entre los datos experimentales y las predicciones teóricas de la teoría de la matriz de dispersión. Esto permite el análisis acerca de la naturaleza de las estructuras derivadas de la colisión entre partículas.

Para el desarrollo de este trabajo se considera el proceso dispersivo mesón-barión entre los canales  $\bar{K}N$  y  $\pi\Sigma$ . De esta manera se puede estudiar un caso en el que las partículas involucradas tienen masas distintas y los procesos tienen umbrales de producción cercanos entre sí. De esta forma la fenomenología asociada a la apertura de los canales, así como los efectos de los *canales acoplados* (esto se detallará más en el capítulo 2) hacen que estos canales se afecten mutuamente.

El propósito de este trabajo es, haciendo uso de un modelo sencillo<sup>3</sup>, identificar e interpretar detalladamente la naturaleza de las estructuras observadas en la amplitud de dispersión de la colisión entre hadrones. La importancia de este ejercicio consiste en identificar algunas estructuras comunes, ejemplificar la creciente complejidad al encontrar más de una estructura en una amplitud de dispersión, así como una noción de lo limitada que es la comprensión de la interacción fuerte. Como ejemplo de la última frase se puede mencionar la discusión que aún persiste sobre la naturaleza de la resonancia  $\Lambda(1405)$  derivada de la dispersión de los canales que fueron tomados para este trabajo, a pesar de haber sido identificada hace más de cincuenta años [5].

En la actualidad, la espectroscopia hadrónica se centra en comprender la existencia de los hadrones, los cuales en su mayoría son resonancias resultado de la interacción entre quarks y gluones, el objetivo de estos estudios es brindar mayor comprensión sobre la interacción fuerte, por ello con este trabajo también se busca mostrar un preámbulo estos estudios.

La presente tesis se estructura en los siguientes capítulos:

**Capítulo 2:** Se presentan los principios básicos de la teoría de dispersión, necesarios para la descripción del problema de colisión entre partículas en canales  $2 \rightarrow 2$ , sin considerar el espín, ni el isoespín, en la región de la interacción fuerte a bajas energías. Se abordan las propiedades de analiticidad y unitariedad de la matriz  $S$ , así como los demás requisitos derivados de la descripción relativista y la interacción fuerte presentes en el problema principal. Se especifica

---

<sup>3</sup>Para estudios más realistas ver [8].

el sistema de referencia para la expansión en ondas parciales de la amplitud de dispersión y se relacionan los conceptos de amplitud de dispersión con la sección eficaz.

**Capítulo 3:** Se presenta el modelo de la matriz  $K$  mediante el cual se realizó el cálculo de los polos de las amplitudes de dispersión de onda parcial, se especifica la forma del espacio fase de dos partículas y su extensión analítica, necesarias para la descripción completa de la matriz  $K$ . Se muestran los cálculos requeridos para los casos que serán estudiados; añadiendo uno y dos polos en la matriz  $K$ . Se muestra la forma explícita de las funciones y su extensión analítica a las siguientes hojas de Riemann para su desarrollo computacional.

**Capítulo 4:** Se muestran los resultados de la simulación del proceso simplificado meson-barion considerando las masas de las partículas en los canales  $\bar{K}N$  y  $\pi \Sigma$ . Se obtienen las amplitudes de los canales elásticos y del canal inelástico. Se analizan e interpretan las estructuras observadas en las continuaciones analíticas de las amplitudes de dispersión.

**Capítulo 5:** Conclusiones del trabajo.

## Capítulo 2

# Conceptos básicos de la teoría de dispersión

*... when you find that the particles that are there in S-Matrix Theory ... satisfy all these conditions, all you are doing is showing that the S-Matrix is consistent with the world the way it is, ... you have not necessarily explained that they are there.*  
Low, 1966.

La teoría de dispersión en sistemas de partículas conserva una gran similitud descriptiva y conceptual con la dispersión de sistemas en mecánica clásica. Las diferencias surgen debido a la necesidad de introducir a la teoría los axiomas de la mecánica cuántica y la relatividad especial. En este capítulo se describirán brevemente los resultados más relevantes de interés para la interacción entre hadrones. Estudiar la dispersión de partículas es el camino natural a seguir en la búsqueda de información acerca de los componentes y propiedades fundamentales de la materia. A su vez, es uno de los eventos más recurrentes en la naturaleza, ya que una gran cantidad de fenómenos microscópicos tienen origen en la colisión de partículas. En general, un experimento de dispersión puede ser representado mediante el choque de dos objetos físicos; un haz de partículas o proyectil que incide sobre un segundo objeto nombrado blanco, el resultado de esta interacción es la producción de múltiples estados físicos

$$P(\text{Proyectil}) + B(\text{Blanco}) \rightarrow c_1 + \cdots + c_n. \quad (2.1)$$

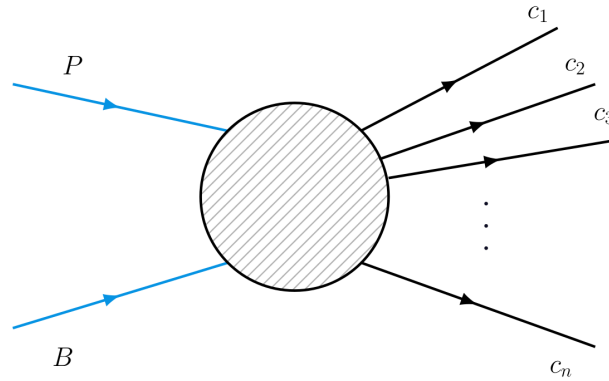


Figura 2.1: Esquema de colisión: Las flechas P y B representan el sistema proyectil - blanco respectivamente. La burbuja intermedia es una representación de la región de interacción sujeta a las condiciones de alguna interacción fundamental. Las flechas  $c_1, \dots, c_n$  son una representación múltiple de partículas que pueden resultar después de la interacción.

Los resultados de una única colisión son una variedad de opciones de estados finales distintos, a estas opciones se les denomina *canales*. Por ejemplo, de una configuración de dos partículas arbitrarias  $a$  y  $b$  se pueden tener resultados como los siguientes

$$a + b \rightarrow a + b, \quad (2.2a)$$

$$a + b \rightarrow c + d, \quad (2.2b)$$

$$a + b \rightarrow a + b' + c', \quad (2.2c)$$

$$\rightarrow \text{etc.}, \quad (2.2d)$$

entre estas posibilidades está el canal elástico (2.2a), donde las partículas iniciales son iguales a las partículas finales. También están los canales inelásticos, los cuales suelen ser modificaciones del estado interno de las partículas iniciales; tales como la producción de nuevas partículas, los decaimientos o la ionización.

Se conoce como *umbral* al valor de energía mínima para que se produzca una reacción. En el caso hipotético de dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  en el sistema de centro de masas (CMS), el primer umbral corresponde a la suma de dichas masas, en dicho valor de energía ocurre la “apertura” del primer canal de dispersión (el canal elástico), conforme dicha energía incrementa

pueden aparecer nuevos procesos dispersivos debido a la apertura de más *canales de reacción*.

En una configuración de dispersión típica, un estado inicial puede estar compuesto de dos o más partículas que interactúan, dando lugar a estados finales de dos o más partículas. Aunque en general los procesos dispersivos son multicanales, su estudio incrementa en complejidad según la cantidad de partículas que conformen al sistema. En lo posterior, el discurso de este trabajo se limitará al caso de estados iniciales y estados finales  $2 \rightarrow 2$ .

La colisión de hadrones se debe, principalmente, a la interacción fuerte cuyo potencial es de corto alcance, por lo tanto, es un potencial bien portado; decae más rápido que  $1/r^3$ , de modo que los estados asintóticos a tiempos  $t = \pm\infty$ , correspondientes a los estados antes y después de la colisión consisten únicamente de partículas libres [9, 10, 11]. Este resultado será retomado más adelante para la descripción del problema.

## 2.1. Dispersión relativista

Expresar la energía y el momento de una partícula como componentes de un cuadrivector relativista es de gran utilidad para poder representar estas cantidades en cualquier sistema de referencia. En términos de las unidades naturales,  $\hbar = c = 1$  dichos cuadrivectores son

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, \mathbf{p}), \quad (2.3a)$$

$$p^2 = p_\mu p^\mu = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2. \quad (2.3b)$$

En general, el estado de una partícula se determina por su masa  $m$ , su cantidad de momento, el tipo de partícula, el espín, la paridad u otros números cuánticos necesarios. En lo posterior, la descripción se simplificará considerando partículas sin espín.<sup>1</sup>

El estado de una sola partícula puede ser expresado como  $|p\rangle = |m, \mathbf{p}\rangle$ . Mediante la normalización relativista para una sola partícula libre, las relaciones de ortogonalidad y completitud

---

<sup>1</sup>Para una descripción general, considerando el espín, isospín y otras propiedades de las partículas, se pueden consultar [12, 13].



son

$$\langle p|p'\rangle = \langle m, \mathbf{p}|m', \mathbf{p}'\rangle = (2\pi)^3 2p_0 \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta_{mm'}, \quad (2.4)$$

$$\int |p'\rangle \frac{d^3\mathbf{p}'}{2p'_0(2\pi)^3} \langle p'|p\rangle = |p\rangle, \quad (2.5)$$

donde  $p'$  es la representación del estado final,  $\delta^{(3)}$  es la delta de Dirac,  $p_0$  es la energía de la partícula libre, de la ecuación (2.3b) se tiene que  $p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ , este factor se escoge de manera que la normalización sea un invariante de Lorentz [14, 13, 12].

De forma general, los estados de múltiples partículas pueden ser construidos a través del producto directo del estado de una sola partícula

$$|p_1, \dots, p_n\rangle = |p_1\rangle \otimes |p_2\rangle \otimes \dots \otimes |p_n\rangle. \quad (2.6)$$

### 2.1.1. Cinemática relativista para la dispersión de dos partículas

Para procesos de dispersión  $a + b \rightarrow c + d$  entre partículas con sus respectivas masas  $m$  y cuatrimomentos  $p$ , se expresa la conservación de la energía y el momento a través de la siguiente igualdad

$$p_a + p_b = p_c + p_d. \quad (2.7)$$

Se definen las variables de Mandelstam a partir de dichos cuatrimomentos como sigue

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2, \quad (2.8a)$$

$$t = (p_a - p_c)^2 = (p_b - p_d)^2, \quad (2.8b)$$

$$u = (p_a - p_d)^2 = (p_b - p_c)^2. \quad (2.8c)$$

Estas tres nuevas cantidades son invariantes de Lorentz, además son dependientes entre ellas según la relación cinemática [15, 16]

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2, \quad (2.9)$$

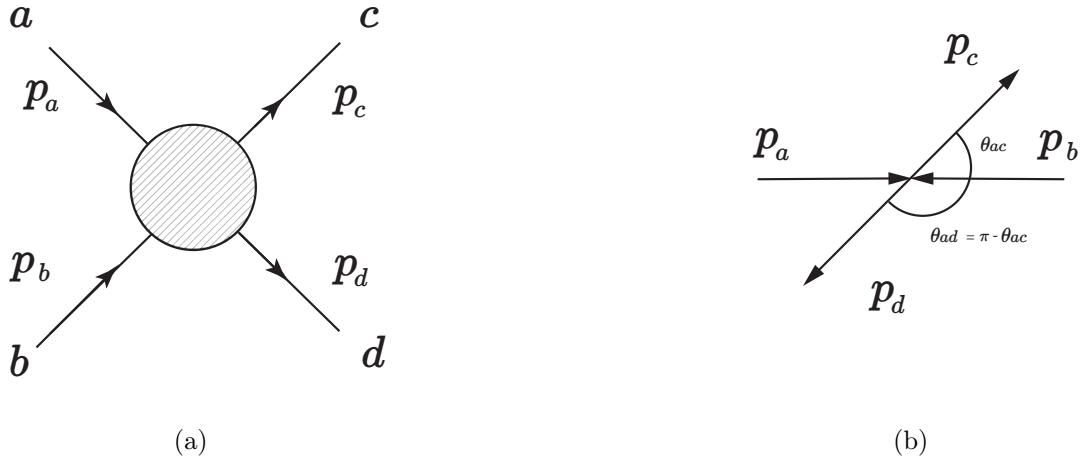


Figura 2.2: Esquemas de la colisión  $2 \rightarrow 2$ : (a) Colisión  $a + b \rightarrow c + d$ . (b) Cinemática de la dispersión de partículas 2 a 2 en el marco de referencia CMS

donde  $m_j$  es la masa en reposo de la  $j$ -ésima partícula. En el sistema de CMS se cumple la relación entre los 3-momentos de las partículas  $\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = 0$ , junto a la ecuación (2.8a) se obtiene que

$$s = [(E_a + E_b)^2 - (\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)^2] = (E_a + E_b)^2 = E_{Total}^2. \quad (2.10)$$

Físicamente, la variable  $s$  representa el valor al cuadrado de la energía total del sistema, en lo posterior esta variable será tratada en unidades de GeV, mientras que  $t$  y  $u$  están relacionados también con la transferencia de momento.

La relación cinemática conocida como función de Kallen o función triangular

$$\lambda(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx, \quad (2.11)$$

es una función simétrica ante el intercambio de índices y de comportamiento asintótico,  $\lambda(x, y, z) \rightarrow x^2$ , sí  $x \gg y, z$ . Esta función permite reescribir el 3-momento que, a partir de ahora se escribirá

como  $q_{ab}(s)$ , para cada par de partículas como

$$\begin{aligned}
q_{ab}^2(s, m_a^2, m_b^2) &= \frac{[s - (m_a + m_b)^2][s - (m_a - m_b)^2]}{4s} \\
&= \frac{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}{4s}, \\
q_{cd}^2(s, m_c^2, m_d^2) &= \frac{[s - (m_c + m_d)^2][s - (m_c - m_d)^2]}{4s} \\
&= \frac{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}{4s}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Como se describió antes, la colisión de hadrones se debe principalmente al potencial de corto alcance de la interacción fuerte, por esta razón se considera que la dispersión ocurre totalmente dentro de una esfera de radio finito. Al tomar como sistema de referencia el plano XZ orientado en la dirección de colisión, ver figura 2.2b, la cantidad de grados de libertad se reduce de tres a dos, y del producto escalar de los vectores  $\mathbf{p}_a$  y  $\mathbf{p}_c$  se obtiene la siguiente relación

$$|\mathbf{p}_a||\mathbf{p}_c| \cos \theta_{ac} = \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_c \tag{2.13}$$

la cual define una restricción sobre los dos grados de libertad restantes mediante el ángulo de dispersión de las partículas incidente y resultante. Debido a que particularmente en el CMS no hay dependencia entre la energía y el ángulo, en el caso de la dispersión  $2 \rightarrow 2$ , a partir de estas deducciones los cuadrimomentos de cada partícula se reescriben como vectores que dependen de la energía y del momento  $q_{ab}$

$$p_a = (E_a, q_{ab}), \tag{2.14a}$$

$$p_b = (E_b, -q_{ab}), \tag{2.14b}$$

$$p_c = (E_c, q_{cd}), \tag{2.14c}$$

$$p_d = (E_d, -q_{cd}). \tag{2.14d}$$

De modo que, los estados finales e iniciales en un proceso de dispersión de dos cuerpos dependen únicamente de dos invariantes Lorentz, que generalmente se eligen como dos de las

variables de Mandelstam. Así, cualquier proceso dispersivo podrá ser escrito como una función de estas variables [15]. Con estos resultados se reescriben las variables de Mandelstam como sigue

$$s = m_a^2 + m_b^2 - 2[E_a E_b + q_{ab}^2(s)], \quad (2.15a)$$

$$t = m_a^2 + m_c^2 - 2[E_a E_c - q_{ab}(s)q_{cd}(s) \cos(\theta_s)], \quad (2.15b)$$

$$u = m_a^2 + m_d^2 - 2[E_a E_d + q_{ab}(s)q_{cd}(s) \cos(\theta_s)]. \quad (2.15c)$$

La región física del canal  $s$  está dada por

$$s \geq \text{máx} \{ (m_a + m_b)^2, (m_c + m_d)^2 \}. \quad (2.16)$$

Mientras que el coseno del ángulo de dispersión corresponde a

$$\cos(\theta_s) = \frac{s(t - u) + (m_a^2 - m_b^2)(m_c^2 - m_d^2)}{\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_a^2, m_b^2)\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_c^2, m_d^2)}, \quad (2.17)$$

donde se ha renombrado el ángulo  $\theta_{ac}$  por  $\theta_s$  para la región de la variable del canal  $s$ . Las energías y los momentos de las partículas también se pueden expresar como una función de  $s$  y las masas de las partículas

$$E_a = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_a^2 - m_b^2), \quad (2.18a)$$

$$E_b = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s - m_a^2 + m_b^2), \quad (2.18b)$$

$$E_c = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_c^2 - m_d^2), \quad (2.18c)$$

$$E_d = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s - m_c^2 + m_d^2). \quad (2.18d)$$

Análogamente, se pueden escribir las energías y el ángulo de dispersión en términos de las variables  $t$  y  $u$ .

### 2.1.2. Simetría de cruce

La simetría de cruce es el resultado del intercambio entre partículas y antipartículas. Por ejemplo, considérese dos procesos en QED

- La dispersión elástica electrón-muón  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ .
- La producción de pares de muones  $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ .

La propiedad de cruce establece que estos dos procesos están relacionados entre sí, se puede observar que el primer ejemplo se puede obtener del segundo intercambiando el  $e^+$  incidente con el  $\mu^+$  emergente a través de sus antipartículas  $e^-$  y  $\mu^-$ . Para cualquier proceso de dispersión de partículas  $2 \rightarrow 2$

$$a + b \rightarrow c + d, \quad (2.19)$$

puede describirse desde distintos canales de reacción. En el canal  $s$ , la región física correspondiente a esta amplitud está definida por

$$s \geq 4m^2, t \leq 0, u \leq 0 \quad (2.20)$$

Desde la región del canal  $t$ , donde la energía en el CMS corresponde a  $\sqrt{t}$ , definida como

$$t \geq 4m^2, s \leq 0, u \leq 0, \quad (2.21)$$

que corresponde al proceso

$$a + \bar{d} \rightarrow \bar{b} + c. \quad (2.22)$$

O desde la región del canal  $u$ , con la energía en el CMS igual a  $\sqrt{u}$

$$u \geq 4m^2, t \leq 0, s \leq 0, \quad (2.23)$$

que corresponde al proceso

$$a + \bar{c} \rightarrow \bar{b} + c. \quad (2.24)$$

Retomando la ecuación (2.9) para masas iguales  $s + t + u = 4m^2$ , es posible dibujar (ver

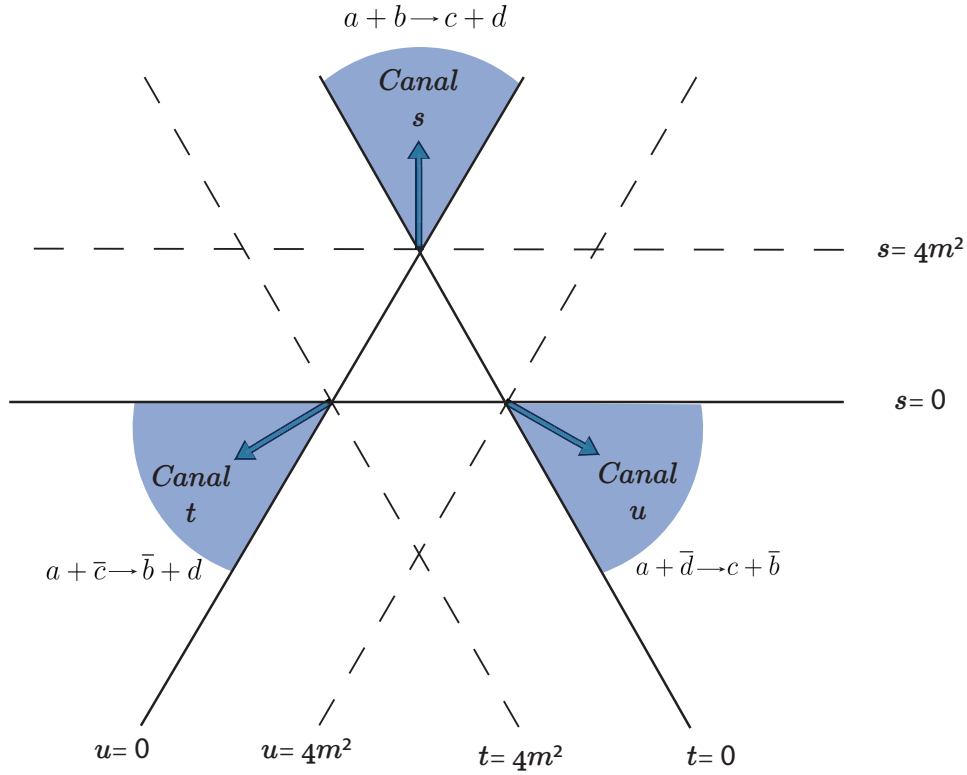


Figura 2.3: Diagrama de Mandelstam: Se muestran las regiones físicas (áreas sombreadas) en las cuales  $s$ ,  $t$  o  $u$  denotan la energía al cuadrado del CMS en el caso de masas iguales.

figura 2.3) la región física donde estos tres canales son posibles.

## 2.2. Teoría de la Matriz de Dispersión

Las interacciones entre sistemas de hadrones; objeto de nuestro interés, ocurren en el régimen no perturbativo de la interacción fuerte. Para estudiar estos procesos de dispersión existe la teoría de la matriz  $S$ , el objeto central de esta teoría es una transformación matemática que representa la conexión entre los estados de las partículas antes y después de la colisión, conocida como la *matriz de dispersión* o matriz  $S$  (del inglés *scattering*). Los elementos de matriz  $S$  contienen las amplitudes de dispersión procesos de colisión directamente observables. De este modo, cualquier

proceso de dispersión debido a la interacción fuerte puede ser descrito en términos de sus estados iniciales y finales. De modo que, en un tiempo pasado  $t \rightarrow -\infty$  las partículas existentes son descritas por el estado  $|i\rangle$ , y en el futuro  $t \rightarrow \infty$  los estados finales existentes son  $|f\rangle$ , entonces los elementos de matriz pueden ser denotados como:  $\langle f|S|i\rangle \equiv S_{if}$  [14]. Así, la probabilidad de que  $|f\rangle$  sea el estado final, dado un estado inicial  $|i\rangle$ , donde  $|f\rangle$  y  $|i\rangle$  son elementos del mismo espacio de Hilbert es

$$P_{fi} = \langle i|S^\dagger|f\rangle \langle f|S|i\rangle = |S_{fi}|^2. \quad (2.25)$$

### 2.2.1. Propiedades de la matriz $S$

La conexión entre la matriz  $S$  y la interacción fuerte está sustentada principalmente en ciertas propiedades básicas que el operador  $S$  debe poseer, estas son principalmente [14]

- Unitariedad o conservación de la probabilidad;
- Analiticidad, relacionada con la causalidad de los procesos físicos;
- Invariancia de Lorentz;
- Invariancia frente a inversión temporal (al tratarse de la interacción fuerte).

Para explicar la propiedad de unitariedad, supóngase que se tiene una base de los estados iniciales y finales, la cual es ortonormal y completa. Sean  $\alpha$  y  $\beta$  estados de dos partículas que interactúan, es decir

$$\begin{aligned} \langle \alpha|\beta\rangle &= \delta_{\alpha\beta}, \\ \sum_{\beta} |\beta\rangle \langle \beta| &= 1. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si  $|\beta\rangle$  denota el estado inicial de la interacción, el principio de superposición de la mecánica cuántica dice que cualquier estado intermedio puede ser escrito como  $S|\beta\rangle$ , es decir, una superposición de los estados iniciales. Entonces, la probabilidad de que una medida sobre el estado final corresponda al estado  $|\beta\rangle$  es  $|\langle \alpha|S|\beta\rangle|^2$ . Si extendemos esta descripción a un experimento

de dispersión, cuyo estado inicial está normalizado, dicho estado se puede expresar como una superposición a través de los números cuánticos que lo especifican de forma única, además la probabilidad total de que el sistema termine en algún otro estado debe ser la unidad, en consecuencia, para que la probabilidad total del sistema se conserve, la condición es que el operador  $S$  sea unitario [14], lo cual se expresa de la siguiente forma

$$SS^\dagger = S^\dagger S = \mathbb{I}. \quad (2.27)$$

La matriz  $S$  es un invariante relativista por definición, al escoger la normalización de la ecuación (2.4), una de las consecuencias es que para partículas sin espín los elementos de matriz dependen de los cuádrimomentos solo a través de sus productos invariantes. Cada elemento de matriz en la dispersión  $2 \rightarrow 2$ , es representado como sigue [12, 14].

$$\langle p_c, p_d | S | p_a, p_b \rangle = \langle p_a, p_b | S | p_c, p_d \rangle. \quad (2.28)$$

Durante el proceso dispersivo pueden ocurrir en dos escenarios posibles, que las partículas no interactúen en absoluto o que las partículas si interactúen. Por esta razón es conveniente escribir a la matriz  $S$  como sigue, definiendo el operador de transición  $T$  o matriz de reacción, el cual será necesario para calculos posteriores.

$$S = \mathbb{I} + iT, \quad (2.29a)$$

$$S_{fi} = \delta_{fi} + iT_{fi}. \quad (2.29b)$$

De esta forma, el operador  $S$  se separa en dos términos: La unidad matricial que indica la ausencia de cualquier interacción, lo cual es denotado con el término  $\delta_{fi}$  y representa a aquellos estados finales cuyo momento no sufrió de ninguna perturbación. Y el operador  $T$  que representa la interacción [14, 16].

Tomando en cuenta la conservación de los cuádrimomentos, se suele representar la matriz  $S$



como sigue

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) T_{fi}, \quad (2.30)$$

en la cual  $p_f$  y  $p_i$  representan la suma de los cuádrimomentos de los estados iniciales y finales respectivamente, y  $\delta^4(p_f - p_i)$  impone la conservación del cuádrimomento. Entonces, de las ecuaciones (2.28) y (2.30) los elementos de matriz  $T$  de la dispersión de dos partículas sin espín se pueden escribir como [14]

$$\langle p_c, p_d | T | p_a, p_b \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d) T. \quad (2.31)$$

Esta amplitud será discutida principalmente debido a que posee la propiedad de ser analítica en términos del análisis complejo, dicha propiedad esta vinculada con concepto de *causalidad*, este punto será descrito más adelante.

El operador  $T$  posee toda la información sobre la dispersión, tomando las ecuaciones (2.27) y (2.29) se obtiene la siguiente relación

$$SS^\dagger = (\mathbb{I} + iT)(\mathbb{I} - iT^\dagger) = \mathbb{I} \quad (2.32a)$$

$$-i(T - T^\dagger) = TT^\dagger \quad (2.32b)$$

$$-i(T_{fi} - T_{fi}^*) = (2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_f - p_i) \langle f | T^\dagger | n \rangle \langle n | T | i \rangle. \quad (2.32c)$$

La interacción fuerte presenta invarianza ante inversión temporal, lo cual se traduce en la simetría de la matriz  $S$  [12]. De esto se obtiene el siguiente resultado

$$-i(T_{fi} - T_{if}^*) = 2\text{Im}T_{if} \quad (2.33a)$$

$$2\text{Im} \langle i | T | f \rangle = (2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_f - p_i) \langle f | T^\dagger | n \rangle \langle n | T | i \rangle, \quad (2.33b)$$

donde  $\text{Im}T_{if}$  denota la parte imaginaria del operador de reacción.

Por un lado, aun si las partículas tuviesen espín, la amplitud se podría expandir en términos de diferentes funciones escalares multiplicadas por factores que tienen en cuenta los efectos

de la introducción del espín. Ejemplos concretos son la dispersión  $\pi N \rightarrow \pi N$  que requiere dos funciones escalares independientes [17] o la fotoproducción de piones que requiere cuatro funciones escalares [18]. Dichas funciones escalares son las que han de cumplir las propiedades analíticas que serán más adelante. Por ello, aunque limitamos la discusión al caso sin espín, los resultados son generales.

### 2.2.2. Sección eficaz

Los experimentos de dispersión cuántica proporcionan una distribución de probabilidad. Dicha probabilidad se suele expresar en términos de *secciones eficaces*, las cuales son una medida de la tasa de transición entre la cantidad de partículas dispersadas por unidad de tiempo y la cantidad de partículas lanzadas contra un centro dispersor.

Suponiendo que  $N$  es el número total de colisiones registradas entre Proyectil y Blanco,  $N_P$  y  $N_B$  son respectivamente el número total de proyectiles y blancos, y  $T_s$  es la sección eficaz transversal del haz de proyectiles, entonces se tiene una relación

$$N \propto \frac{N_B N_P}{T_s}, \quad (2.34)$$

esto bajo ciertas condiciones ideales. Con esta idea en mente, la sección eficaz corresponde al factor de proporcionalidad que hace falta en la relación anterior [10]

$$\sigma = T_s \frac{N}{N_B N_P}. \quad (2.35)$$

La sección eficaz coincide con el área efectiva del blanco a través del cual las partículas dispersadas son detectadas, sus dimensiones corresponden a las de área, y suelen ser medidas en barn, donde  $1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$ .

Como se ha mencionado antes, la interacción fuerte es debida a un potencial central cuyos estados fuera de la región de interacción a tiempos  $t = \pm\infty$  consisten de partículas libres y cuya función de onda está compuesta por un término de onda plana más un segundo término de onda

esférica con una modulación conocida como *amplitud de dispersión*, dada por [19]

$$\psi = e^{ikz} + \mathfrak{F}(\theta) \frac{e^{ikz}}{r}. \quad (2.36)$$

Existe una relación general entre la sección eficaz total y la amplitud de dispersión, en estas ecuaciones la sección eficaz es proporcional a la integral del término que modula la amplitud de la parte esférica en la función de onda [10, 9, 11]

$$\sigma \propto \int |\mathfrak{F}(\theta)|^2 d\Omega. \quad (2.37)$$

La extensión de la sección eficaz para el problema relativista de una reacción de partículas  $a + b$  a  $N$  estados finales, está dada por

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{4|q_{ab}|\sqrt{s}} \sum_f (2\pi)^4 \delta^4(p^f - p^i) |\langle f | T | i \rangle|^2, \quad (2.38a)$$

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{2|q_{ab}|\sqrt{s}} \text{Im} T(s, t = 0), \quad (2.38b)$$

donde  $q_{ab}$  está definido como en (2.12). La ecuación (2.38b) relaciona la parte imaginaria de la amplitud de dispersión y la sección eficaz total para la dispersión mediante la ecuación (2.33b), esto se conoce como teorema óptico. Físicamente, el teorema óptico dice que el proceso de dispersión disminuye la intensidad directa del haz después de que cruza el objetivo y que esta atenuación es proporcional a la sección transversal, es decir, dicha atenuación es proporcional a la parte imaginaria de la amplitud. La sección eficaz total para el problema  $a + b \rightarrow c + d$  es

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{4|q_{ab}|\sqrt{s}} \delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d) |\langle cd | T | ab \rangle|^2. \quad (2.39)$$

### 2.3. Propiedades analíticas de la amplitud de dispersión

En teoría de dispersión, la causalidad puede expresarse como el requisito de que ninguna onda dispersada alcance un punto a una distancia  $r$  antes de un tiempo  $v/r$  (siendo  $v$  la velocidad del

paquete de ondas incidentes) después de que la onda incidente sea dispersada. Esta propiedad se traduce en la analiticidad de las amplitudes de dispersión.

Si  $T(s, t, u)$  es la amplitud relativista para el proceso de dispersión elástico entre partículas de masas distintas, de la ecuación de unitariedad (2.33b) se concluye que la parte imaginaria de la amplitud no desaparece por encima del primer umbral  $s_{t1} = (m_a + m_b)^2$  y hasta el infinito. Además, la apertura de más canales inelásticos (cruzados) contribuye a modificar la parte imaginaria de la amplitud como veremos más adelante. Como se desarrolló antes, se puede especificar la amplitud de dispersión para cada uno de los procesos en las regiones admisibles para los canales  $s$ ,  $t$  y  $u$ . Si la amplitud está escrita en el canal  $s$ , esta es analítica en el dominio de la región del canal  $s$  ver 2.3, aprovechando la unitariedad, la amplitud se puede continuar analíticamente fuera de la región física. Igualmente, esto se puede hacer si la amplitud está escrita en canal  $t$  o en el canal  $u$ , lo cual indica que estas tres funciones para cada canal son en realidad la misma función analítica, a esto se le conoce como la hipótesis de Mandelstam la cual es crucial en la descripción de los procesos hadrónicos [14].

Un resultado importante en la teoría del análisis complejo es el principio de reflexión de Schwarz: Sea  $D$  un dominio conexo y abierto tal que  $D \in \mathbb{C}$  el cual es simétrico respecto al eje real, y  $\Gamma$  un segmento del eje real; el cual interseca y divide al dominio  $D$  en dos partes  $D^+$  y  $D^-$  superior e inferior, respectivamente, por la simetría  $[D^+]^* = D^-$ . Para una función  $f(z)$  con  $z \in D$ , si se satisface

- $f(z)$  es analítica en  $D$
- $\text{Im}f(z) = 0$  en  $\Gamma$

entonces se debe satisfacer que  $f(z^*) = [f(z)]^*$ , es decir que se puede continuar analíticamente desde el plano superior hacia el plano inferior. Para  $T(s, t, u)$  se tiene que

$$T(s^*, t, u) = [T(s, t, u)]^*, \quad (2.40)$$

para cualquier  $s$  y  $s^*$  en el plano complejo  $s$ . De la ecuación (2.9) resulta que el dominio

de analiticidad de  $T(s, t, u)$  puede extenderse a todo el plano complejo  $s$ , de modo que, la ecuación (2.40) es válida solo si  $\text{Im}T(s, t, u) = 0$  cuando  $s$  toma valores reales [14, 16, 20].

Sin embargo, por la unitariedad esto no es así, para valores físicos de  $s$  por ejemplo para  $s > s_t$  la parte imaginaria debe ser distinta de cero; esta es una imposición física, de lo contrario la amplitud sería también real en todo el eje real. Entonces, la amplitud  $T(s, t, u)$  posee algunas singularidades en el plano  $s$ , que son de origen dinámico, es decir, que son debidas mayormente a la interacción fuerte en sí que a lo que ocurre durante la colisión. Estas singularidades pueden clasificarse como sigue

- Polos simples en el eje real de la primera hoja de Riemann u hoja física (ver apéndice A), que pueden asociarse a estados ligados; No pueden existir polos con parte imaginaria distinta de cero en dicha hoja, ya que físicamente se corresponderían con taquiones;
- El corte de unitariedad producidos por las discontinuidades de las partes imaginarias entre los valores  $+i\epsilon$  que aparecen con la apertura de un canal desde su umbral  $s_t$  hasta el  $\infty$ ;
- Polos simples en las hojas de Riemann no físicas que se asocian a resonancias.

En la dispersión  $a + b \rightarrow c + d$  los umbrales correspondientes serían  $s_{t1} = (m_a + m_b)^2$ ,  $s_{t2} = (m_c + m_d)^2$  para cada par de partículas, respectivamente, y definen dos cortes de unitariedad. De esta colisión se pueden obtener cuatro canales de dos partículas, dos canales elásticos y dos inelásticos que matricialmente se escribirían

$$\begin{bmatrix} a + b \rightarrow a + b & a + b \rightarrow c + d \\ c + d \rightarrow a + b & c + d \rightarrow c + d \end{bmatrix}.$$

Argumentos análogos se pueden aplicar a los canales  $t$  y  $u$ . Debe haber cortes a lo largo de los ejes  $t$  y  $u$  positivos reales, con puntos de ramificación en los umbrales físicos apropiados en estos canales y posiblemente polos asociados a estados ligados.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>La descripción general de la amplitud en cualquier canal se puede consultar en [14]

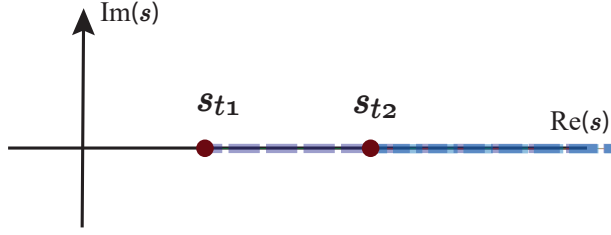


Figura 2.4: Estructura analítica de  $T(s, t, u)$  en el plano  $s$ , se muestra la apertura de los dos cortes de unitariedad en el caso de dispersión  $2 \rightarrow 2$ .

## 2.4. Expansión en ondas parciales

La conservación del momento angular implica que la amplitud de dispersión se puede expandir en una serie de amplitudes de onda parcial con momento angular definido, que son funciones de una sola de las variables de Mandelstam. Las amplitudes de onda parcial son muy útiles para identificar las resonancias que aparecen en un proceso de dispersión dado, ya que una determinada resonancia tiene un momento angular (espín) concreto.

En la dispersión de partículas de espín cero, la dependencia en  $t$  y  $u$  de la amplitud  $T(s, t, u)$  entra solo a través de los polinomios de Legendre, de modo que esta se puede reducir a una expresión con dichos polinomios. En la práctica solo se puede modelar un número finito de ondas parciales, como consecuencia se pierde la estructura analítica en las variables  $t$  y  $u$ , por esta razón, en lo posterior se escribirá la amplitud como  $T(s)$ . La expansión de ondas parciales es

$$T(s, z_s) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) T_l(s) P_l(z_s), \quad (2.41a)$$

$$T_l(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz_s P_l(z_s) T(s, t(z_s)), \quad (2.41b)$$

esta expansión de onda parcial se realiza en un solo canal; el canal  $s$  en el CMS. De las ecuaciones (2.15) y de la ecuación (2.17) se escogen las variables independientes  $s$  y  $z_s = \cos(\theta_s)$  de la amplitud. El término  $P_l(z_s)$  son los polinomios de Legendre y  $T_l$  son las ondas parciales de

momento angular  $l$  obtenidas a través de la transformada inversa definida en (2.41b), usando que  $-1 \leq \cos(\theta_s) \leq 1$ . En estas ondas parciales se encuentra codificada la física de los estados inestables de interés, estos estados aparecen como un polo simple ubicado en valores complejos de energía. Un aspecto interesante y que será útil más adelante es que cada una de las amplitudes de onda parcial; para la dispersión elástica, cumple la condición de unitariedad [21, 14]. El resultado análogo a la ecuación (2.33b) para cada amplitud de onda parcial es el que sigue

$$\text{Im}[T_l(s)] = T_l(s)\tau_{ab}(s)T_l(s)^*. \quad (2.42)$$

Aquí aparece el factor de espacio fase (que será descrito en el capítulo 3)  $\tau_{ab}(s) \propto q_{ab}(s)/\sqrt{s}$ , el cociente de la derecha contribuye al espacio fase solo con singularidades de tipo cinemático. Los índices  $ab$  indican el par de partículas arbitrario. De esta forma, es posible parametrizar a la matriz  $S$  como

$$S = \mathbb{I} + 2i\tau(s)^{1/2}T(s)\tau(s)^{1/2}. \quad (2.43)$$

La estructura analítica de las ondas parciales  $T_l(s)$  proviene por su definición en (2.41b) de la amplitud y de los polinomios de Legendre. La propiedad de la unitariedad debe satisfacerse en todas las regiones físicas. Por lo que, la analiticidad implica que cada amplitud de dispersión posee solo las singularidades asociadas con los umbrales físicos en cada una de las regiones en las que se describe la dispersión.

Como observación, a bajas energías, cuando la longitud de onda de De Broglie  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  es grande comparada con el rango de interacción, las ondas parciales para  $l$  grandes pueden ser despreciables para los propósitos de este trabajo, por lo que la onda S será la más relevante a la hora de hacer los cálculos (es decir cuando el momento angular  $l = 0$ ) [19, 10]. En los capítulos 3 y 4 los resultados obtenidos se calcularon asumiendo este hecho.

## 2.5. Polos en la amplitud

La unitariedad proporciona los medios para continuar analíticamente las ondas parciales en las siguientes hojas continuas de Riemann, donde viven las resonancias. La existencia de una parte imaginaria distinta de cero debido a este principio produce una función compleja de múltiples valores, que tiene un corte de rama físico producido por la unitariedad del canal  $s$ , dicho corte se extiende a lo largo del eje real por encima del primer umbral hasta el infinito. Es decir, el problema de búsqueda de polos se extiende a las regiones no físicas proporcionadas por la extensión analítica a las  $2^k$  hojas de Riemann, donde  $k$  indica la cantidad de canales de dispersión abiertos. Para escribir esta continuación analítica tomamos la discontinuidad de la amplitud entre la primera y la segunda hoja y así para las demás

$$T(s + i\epsilon) - T(s - i\epsilon) = 2i\tau(s)T(s + i\epsilon)T(s - i\epsilon) \quad (2.44a)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T^I(s + i\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T^{II}(s - i\epsilon) \quad (2.44b)$$

$$T^{II}(-) - T^I(-) = 2i\tau(+ )T^{II}(-)T^I(-). \quad (2.44c)$$

La ecuación (2.44a) indica las conexiones entre las distintas hojas; por encima del primer umbral se conectan la hoja física y la *segunda hoja de Riemann*

$$T^{II}(s) = \frac{T^I(s)}{\mathbb{I} - 2i\tau(s)T^I(s)}, \quad (2.45)$$

mientras que por encima del segundo umbral se conectan la hoja física y la *tercera hoja de Riemann*. Al considerar el límite  $\pm\epsilon$  cerca de la discontinuidad se obtiene la expresión que permite continuar analíticamente la amplitud a cualquier hoja de Riemann [7]

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [T(s + i\epsilon) - T(s - i\epsilon)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [T(s + i\epsilon) - T^*(s + i\epsilon)] \\ &= 2i \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\text{Im}T(s + i\epsilon)] = 2i\text{Im}T(s). \end{aligned} \quad (2.46)$$



En el caso en el que se centra este trabajo, cada una de estas amplitudes parciales puede ser continuada analíticamente hasta la cuarta hoja de Riemann. El cálculo de las amplitudes de dispersión que corresponden a cada proceso dispersivo es el siguiente

$$T(s) = \begin{pmatrix} T(s)_{a+b \rightarrow a+b} & T(s)_{a+b \rightarrow c+d} \\ T(s)_{c+d \rightarrow a+b} & T(s)_{c+d \rightarrow c+d} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

En esta ecuación se visualizan los dos canales elásticos y dos canales inelásticos que en realidad son el mismo canal debido a la simetría ante inversión temporal de la interacción fuerte[12]

$$T(s)_{a+b \rightarrow c+d} = T(s)_{c+d \rightarrow a+b}. \quad (2.48)$$

A través del formalismo de la matriz K se calculan los polos de las amplitudes de dispersión de onda parcial, lo cual será discutido más adelante [8]. El significado físico de los polos que pueden encontrarse se puede clasificar de la manera más sencilla en al menos dos tipos

- Resonancias.
- Estados ligados.

Los estados de resonancia corresponden a polos en las hojas no físicas dentro del plano complejo, ya que un polo complejo en la hoja física correspondería a taquiones. La parte real de un polo de este tipo corresponde al valor de la masa de la resonancia, mientras que la parte imaginaria está relacionada con el ancho de línea directamente relacionado con la vida media de la resonancia. Los estados ligados pueden aparecer como polos en el eje real en la hoja física, con valores por debajo del umbral. Sin embargo, en la realidad esta clasificación es muy limitada, aún hoy en día existe mucha especulación acerca del origen de algunos estados encontrados en los datos experimentales.

## Capítulo 3

# Parametrización de las ondas parciales de dispersión

*The possibility of analytically continuing a function into a certain region is a very mathematical notion, and to adopt it as a fundamental postulate rather than a derived theorem appears to us to be rather artificial.*  
Mandelstam, 1961

Para el análisis de los polos en las amplitudes de onda parcial se recurre al modelo de la matriz  $K$  [7, 8, 13], la cual es una matriz de valores reales, esta propiedad es importante, ya que garantiza que las propiedades de unitariedad que requiere la matriz  $T$  se satisfagan. Tomando en cuenta el resultado de la ecuación (2.43), a través de la matriz  $K$  se pueden parametrizar las amplitudes de onda parcial de la matriz  $T(s)$ , como sigue

$$T(s) = \frac{K(s)}{\mathbb{I} - i\rho(s)K(s)}. \quad (3.1)$$

Por construcción de la matriz  $T$  esta parametrización conserva la condición de unitariedad para cada onda parcial de la ecuación (2.42), dado que  $K(s)$  es una matriz simétrica real para  $s \in \mathbb{R}$ . Para construir el modelo de la ecuación (3.1) se requiere que  $\rho(s)$  sea la continuación analítica del espacio de fases, así como definir un modelo específico para la matriz  $K$ .

### 3.1. Descripción del espacio de fases

El espacio de fases expresa el número de estados accesibles a las partículas que se producen. En el caso de dos partículas, el espacio de fases en el canal- $s$  es

$$\tau_{ab}(s) = \frac{q_{ab}(m_a^2, m_b^2, s)}{\sqrt{s}} = \frac{1}{2s} \sqrt{\lambda(m_a^2, m_b^2, s)}. \quad (3.2)$$

El corte de unitariedad surge de las propiedades analíticas de la raíz cuadrada del espacio de fases, que a su vez provienen de los umbrales energéticos para cada par de partículas. Se define  $\rho_{ab}(s)$  como continuación analítica del espacio de fases, para extraer sus singularidades (2.43), (2.42).

Esta continuación analítica se realiza haciendo uso de una integral dispersiva sobre el espacio de fases  $\tau_{ab}(s)$  donde se supone que  $\text{Im} [i\rho_{ab}(s)] = \tau_{ab}(s)$ , ver figura 3.1

$$\begin{aligned} i\rho_{ab}(s) &= \frac{s - s_t}{\pi} PV \int_{s_t}^{\infty} \frac{\tau_{ab}(s')}{s' - s} \frac{ds'}{s' - s_t} + i\tau_{ab}(s) \\ &= \frac{s - s_t}{\pi} \int_{s_t}^{\infty} \frac{\tau_{ab}(s')}{s' - s} \frac{ds'}{s' - s_t}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

estas integrales dispersivas son conocidas como la representación de Chew-Mandelstam. La razón de escribir  $\rho(s)$  de este modo es para garantizar que tenga solo el punto de ramificación de raíz cuadrada exigido por la unitariedad [7, 14, 8].

Se define la matriz diagonal del espacio fase de todos los canales posibles de dos cuerpos  $i\rho(s)$

$$i\rho(s) = \begin{pmatrix} i\rho_{ab} & 0 \\ 0 & i\rho_{cd} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

donde los términos  $i\rho_{ab}$  e  $i\rho_{cd}$  en (3.4) indican las extensiones analíticas del espacio de fases para cada par de partículas.

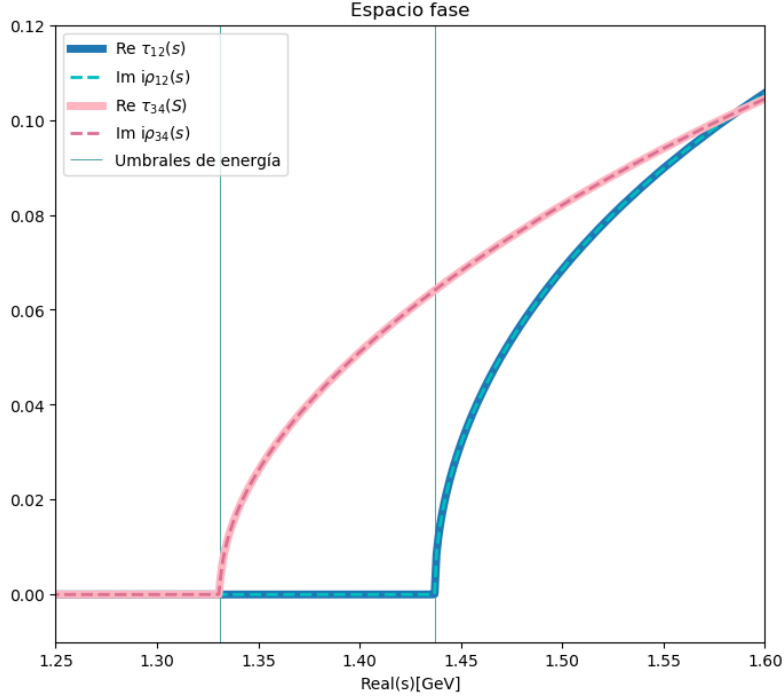


Figura 3.1: Las líneas continuas muestran la forma del espacio de fases con dos umbrales energéticos distintos, correspondientes a pares de partículas de masas distintas. Las líneas punteadas muestran la forma de la parte imaginaria de la continuación analítica de estos espacios de fases;  $\tau_{ab} = \text{Im}[i\rho_{ab}(s)]$ . En ella se aprecia una forma de raíz cuadrada que comienza a partir del respectivo umbral energético  $s_{t1} = (m_a + m_b)^2$ ,  $s_{t2} = (m_c + m_d)^2$ .

### 3.2. Modelo de la matriz $K$

Cuando se involucran múltiples ondas parciales o múltiples canales, la mejor forma de relacionar la energía con los elementos de la matriz de dispersión, es aproximando dichos elementos de matriz utilizando funciones de la energía que involucren una variedad de parámetros. Los valores de estos parámetros se pueden estimar mediante ajustes apropiados, utilizando un número suficientemente grande de energías diferentes. Este procedimiento ha sido estándar durante mucho tiempo en los análisis de ondas parciales de los experimentos con partículas.

Dado que es más fácil parametrizar una matriz simétrica real que una matriz unitaria, como lo es la matriz  $S$ , generalmente se emplea el método de la matriz  $K$ , la cual es real y simétrica. La matriz  $K$  fue introducida por primera vez por Wigner [22] y Wigner y Eisenbud [23] estudiando resonancias en reacciones nucleares. Su primer uso en física de partículas fue un análisis de la

producción de resonancia en la dispersión  $K^-p$  por Dalitz y Tuan [24].

La definición de la matriz  $K$  es genérica, particularmente la forma que se considera para este trabajo es la siguiente [8]

$$K = P(s) + \sum_{\lambda=1}^{\gamma} \frac{1}{M_{\lambda}^2 - s} \begin{pmatrix} x_{\lambda}^2 & x_{\lambda}y_{\lambda} \\ x_{\lambda}y_{\lambda} & y_{\lambda}^2 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

la cual algebraicamente, satisface las propiedades necesarias del operador  $K$ , fijamos el polinomio  $P(s)$  a cero con el fin de reducir la complejidad del modelo,  $\lambda$  representa la cantidad de polos que se pueden encontrar en cada amplitud de onda parcial, los elementos de matriz  $x_{\lambda}, y_{\lambda}$  son parámetros reales.

Para el desarrollo computacional de este problema se escribe la ecuación (3.1) como un producto de matrices, renombrando al denominador como  $D(s) = \mathbb{I} - i\rho(s)K$ . Así

$$T(s) = KD^{-1} = K \frac{Adj[D(s)]}{Det[D(s)]}. \quad (3.6)$$

Esta forma es muy útil, ya que al ser  $K$  una matriz compuesta únicamente de valores reales, la analiticidad de los elementos de la matriz  $T$  está codificada en la matriz inversa  $D(s)^{-1}$  mientras que la posición de los polos depende únicamente de su determinante. Esto reduce la cantidad de operaciones a realizar al momento de programar las funciones del modelo.

### 3.3. Polos en la matriz $K$

En general, se necesitan modelos de más de un polo en una onda parcial dada. A continuación se describen los dos primeros casos con  $\gamma = 1, 2$  polos.

### 3.3.1. Un polo en la matriz $K$

En el caso más sencillo con el valor de  $\gamma = 1$ , en (3.5) se obtiene el modelo para un único polo, la matriz  $K$  es

$$K = \frac{1}{M_1^2 - s} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 \\ x_1 y_1 & y_1^2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

del cual se obtiene la siguiente forma de la matriz  $T$

$$T_{un\ polo}(s) = \frac{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 \\ x_1 y_1 & y_1^2 \end{pmatrix}}{M_1^2 - s - i\rho_{ab}x_1^2 - i\rho_{cd}y_1^2}. \quad (3.8)$$

En esta ecuación se aprecia claramente que la estructura analítica de cada canal de dispersión se determina únicamente por el determinante de  $D(S)$ , ya que en este caso el producto  $K Adj[D(s)]$  se simplifica fácilmente como la matriz de los parámetros  $x$  e  $y$  de la matriz  $K$ . El determinante del modelo para un polo tendría la forma general

$$Det[D(s)] = [P_1(s) + Ai\rho_{ab}(s) + Bi\rho_{cd}(s)], \quad (3.9)$$

donde  $P_1(s)$  es un polinomio de la variable de Mandelstam  $s$ , el cual contribuye como un factor que modifica la posición del polo,  $A$  y  $B$  corresponden a los parámetros reales que determinan la amplitud del espacio fase en cada proceso dispersivo.

### 3.3.2. Dos polos en la matriz $K$

El segundo caso sencillo corresponde al término  $\gamma = 2$  en la matriz  $K$ , este caso adquiere una mayor dificultad de cálculo debido a la cantidad de productos matriciales realizados. En

este caso la matriz  $K$  es

$$K = \frac{1}{M_1^2 - s} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 \\ x_1 y_1 & y_1^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{M_2^2 - s} \begin{pmatrix} x_2^2 & x_2 y_2 \\ x_2 y_2 & y_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

De forma análoga al caso de un polo es posible expresar a la matriz  $T$  como un producto

$$T_{dos\ polos}(s) = \frac{\begin{pmatrix} A' & C' \\ C' & B' \end{pmatrix}}{Det[D(s)]}, \quad (3.11)$$

donde los elementos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  son productos de los parámetros  $x$  e  $y$  de (3.10), para este caso dichos parámetros resultan no ser constantes. El denominador para dos polos tiene la forma general

$$Det[D(s)] = [P_2(s) + A' i \rho_{ab}(s) + B' i \rho_{cd}(s) + C' i \rho_{ab}(s) i \rho_{cd}(s)]. \quad (3.12)$$

Para estos dos casos, se concluye que independientemente de la reacción en cuestión, las posiciones de los polos de la amplitud son las raíces del denominador de  $T$

$$s_p = (M - i\Gamma/2)^2 \quad (3.13)$$

Esencialmente, la posición de dichos polos en el plano complejo puede ser manipulada a través de los parámetros de masa  $M$ , y de los parámetros de  $x$  e  $y$  de la matriz  $K$ .

### 3.4. Continuación analítica a las hojas de Riemann

En principio debido a la construcción de este modelo, no es posible obtener polos complejos en la primera hoja de Riemann, también llamada hoja física, pero sí polos reales. La extensión analítica del espacio fase, al ser una raíz cuadrada, define cuatro hojas de Riemann distintas para dos canales acoplados.

Para obtener las expresiones de las cuatro hojas de Riemann se modifica la forma del deno-

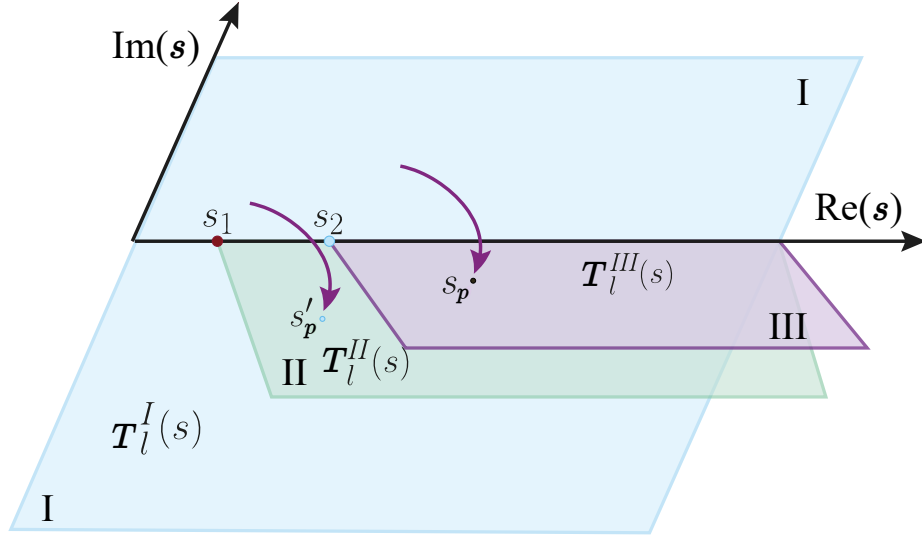


Figura 3.2: El diagrama muestra la conexión entre las primeras tres hojas de Riemann a partir de la aparición de los umbrales de dispersión  $s_1$  y  $s_2$ . La presencia de un polo  $s_p$  en la hoja III que impacta en la hoja II como un polo  $s'_p$ .

minador (3.9) añadiendo los términos de discontinuidad en cada proceso entre las distintas hojas de Riemann, tal como se plantea en la discontinuidad entre las hojas I y II en la ecuación (2.45), de forma explícita para el caso de un polo, estas modificaciones en el denominador son

$$D^I = P_1(s) + A' i \rho_{ab}(s) + B' i \rho_{cd}(s), \quad (3.14a)$$

$$D^{II} = P_1(s) + A' [i \rho_{ab}(s) + 2i \tau_{ab}(s)] + B' i \rho_{cd}(s), \quad (3.14b)$$

$$D^{III} = P_1(s) + A' [i \rho_{ab}(s) + 2i \tau_{ab}(s)] + B' [i \rho_{cd}(s) + 2i \tau_{cd}(s)], \quad (3.14c)$$

$$D^{IV} = P_1(s) + A' i \rho_{ab}(s) + B' [i \rho_{cd}(s) + 2i \tau_{cd}(s)]. \quad (3.14d)$$



Y para el caso de dos polos, se modifica la forma del denominador (3.12)

$$D^I = P_2(s) + A'i\rho_{ab}(s) + B'i\rho_{cd}(s) + C'i\rho_{ab}(s)i\rho_{cd}(s) \quad (3.15a)$$

$$D^{II} = P_2(s) + A'[i\rho_{ab}(s) + 2i\tau_{ab}(s)] + B'i\rho_{cd}(s) + C'[i\rho_{ab}(s) + 2i\tau_{ab}(s)]i\rho_{cd}(s) \quad (3.15b)$$

$$D^{III} = P_2(s) + A'[i\rho_{ab}(s) + 2i\tau_{ab}(s)] + B'[i\rho_{cd}(s) + 2i\tau_{cd}(s)] \\ + C'[i\rho_{ab}(s) + 2i\tau_{ab}(s)][i\rho_{cd} + +2i\tau_{cd}(s)] \quad (3.15c)$$

$$D^{IV} = P_2(s) + A'i\rho_{ab}(s) + B'[i\rho_{cd}(s) + +2i\tau_{cd}(s)] + C'i\rho_{ab}(s)[i\rho_{cd}(s) + 2i\tau_{cd}(s)] \quad (3.15d)$$

De esta forma, la búsqueda de polos se puede extender a las otras tres hojas de Riemann disponibles. Ver apéndice [A](#)

## Capítulo 4

# Programa para el cálculo de los polos y resultados

Habiendo construido la teoría de la matriz de dispersión, para tratar el problema no perturbativo de la interacción fuerte, procedo a mostrar algunos ejemplos de los perfiles de amplitud y sección eficaz derivados de la colisión  $2 \rightarrow 2$  entre hadrones. Para este modelo considero cuatro partículas de masas distintas, ver la tabla I. La dispersión de los canales acoplados comienza a partir de los umbrales energéticos  $s_{\pi\Sigma} = 1331 \text{ MeV}$  y  $s_{\bar{K}N} = 1437 \text{ MeV}$ . La razón para escoger estas partículas se debe a que los resultados experimentales son conocidos, estos indican la presencia de algunas resonancias ubicadas cerca de estos umbrales, entre ellas por ejemplo la resonancia  $\Lambda(1405)$ . La simplificación del estudio consiste en suponer las propiedades de espín e isoespín iguales a cero; tal como se desarrolló la teoría en los capítulos previos, además de calcular solo la onda parcial correspondiente a la onda S<sup>1</sup> Es decir, este no es el estudio del caso más simple, (por ejemplo el caso de partículas de masas iguales) sino un caso mínimamente complejo.

El programa computacional que utilizo para hacer estos cálculos es de mi autoría y fue

---

<sup>1</sup>Para el caso que se está tratando al tener resonancias cercanas a los umbrales es la onda S la que domina, esto ocurre en general salvo casos raros en los que las ondas parciales de momento angular mayores a cero contribuyen significativamente a la amplitud o incluso más que las de onda S ver [25, 26], además de la observación mencionada al final de la sección 2.4.

TABLA I: Masas de las partículas

Partícula	Masa (Gev)
$\pi$	0.139
$\bar{K}$	0.498
$\Sigma$	1.192
N	0.939

realizado como parte de mi servicio social, este consiste de una serie de subrutinas, escritas en lenguaje de programación FORTRAN.

Este programa realiza en general múltiples cálculos, para este documento solo son relevantes los siguientes:

- Calcula las integrales del espacio de fases (3.3).
- Obtiene los elementos de la matriz  $K$ .
- Obtiene los elementos de la matriz  $T$  (las amplitudes numéricas).
- Continúa analíticamente el denominador de la matriz  $T$ .
- Calcula los polos en cada una de las hojas de Riemann.

Se extrajeron los datos de las amplitudes numéricas en sus partes real e imaginaria, así como los polos de las amplitudes numéricas de cada hoja de Riemann, en este caso para los procesos de dispersión de los canales acoplados  $\bar{K}N$  y  $\pi\Sigma$ .

Para la descripción se usará la notación  $T_0(s) = T(s)$  para la matriz considerada en el modelo:

$$T(s) = \begin{pmatrix} T(s)_{\pi\Sigma \rightarrow \pi\Sigma} & T(s)_{\pi\Sigma \rightarrow \bar{K}N} \\ T(s)_{\bar{K}N \rightarrow \pi\Sigma} & T(s)_{\bar{K}N \rightarrow \bar{K}N} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Y se usará la siguiente notación para hacer referencia a los canales:

$$\begin{aligned} \pi\Sigma \rightarrow \pi\Sigma &\longrightarrow \pi\Sigma \text{ elástico} \\ \bar{K}N \rightarrow \bar{K}N &\longrightarrow \bar{K}N \text{ elástico} \\ \pi\Sigma \rightarrow \bar{K}N &\longrightarrow \text{inelástico} \end{aligned}$$

Los parámetros de entrada del programa son los números reales  $M_\lambda, x_\lambda, y_\lambda$  de la matriz  $K$  escritos en GeV, a través de los cuales es posible modificar la posición de los polos a conveniencia y mostrar los perfiles típicos de las amplitudes. La cantidad de polos que aparecen en cada una de las hojas de Riemann depende del término  $\lambda$  en la suma de la ecuación (3.5), tomando en cuenta esto se revisaron los casos generales de uno y dos polos en la matriz  $K$ .

Para mostrar resultados de distintos perfiles (semejantes a los que se pueden esperar experimentalmente), se escogieron distintos parámetros que reproducen cuatro perfiles de resonancias distintos, para cada uno de los dos casos generales. Como se puede apreciar en la ecuación (3.9), la posición de los polos del denominador para el caso de un polo dependen solo de estos parámetros de entrada, análogamente esto ocurre para el caso de dos polos ecuación (3.12).

## 4.1. Detalles del proceso computacional y obtención de datos

El desarrollo computacional comienza con la obtención de los elementos de la ecuación integral (3.3) para los dos pares de partículas, este cálculo fue realizado mediante la regla de 15 puntos de Gauss-Kronrod recursiva, considerando una tolerancia de  $10^{-8}$ . Los resultados de este cálculo fueron implementados para calcular los elementos de la matriz  $T$  escrita en la ecuación (4.1). La forma de esta ecuación permite extraer los polos de la amplitud directamente del denominador  $D(s)$ , la cual es una función analítica que puede extenderse al plano complejo, usando las ecuaciones (3.9) y (3.12) se escribieron los denominadores de las hojas de Riemann.

El programa de búsqueda de polos hace uso del método iterativo (1000 iteraciones) con una tolerancia de  $5 \times 10^{-6}$ , de la bisección en el plano complejo, el cuál se ajusta para realizar al menos 50 repeticiones con puntos iniciales diferentes y aleatorios dentro de la región energética de interés con el fin de tener certeza del resultado del polo. Los datos mostrados en las tablas III y V fueron obtenidos al truncar y redondear la expansión decimal de los valores de cada polo en el orden de  $10^{-4}$ , considerando la precisión numérica del cálculo del programa (que es del orden de  $10^{-6}$ ), es una buena aproximación. Los resultados de los polos obtenidos se tradujeron en términos de cantidades físicas; la masa del polo  $M_p = \text{Re}(\sqrt{s_p})$  y la anchura de línea  $\Gamma_p =$

$$-2\text{Im}(\sqrt{s_p}).$$

Los ejemplos que se consideraron para los dos casos generales fueron elegidos según las distintas representaciones de las posiciones de los polos en cada hoja. Estas representaciones varían según la posición de dichos polos dentro del plano complejo; por ejemplo, en función de la distancia entre las partes reales de cada polo en cada hoja, o de la magnitud de la parte imaginaria. Para obtener estos casos se utilizaron los parámetros reportados en las tablas II y IV. Además de las posiciones de los polos, se obtuvieron los resultados de las partes real e imaginaria de las amplitudes (hoja física), con los cuales se graficaron los valores absolutos de las amplitudes y que también se usaron para graficar los perfiles de la onda S ( $T_{l=0}$ ) de la amplitud mediante

$$T_{l=0}(s) = (\text{Re}[T(s)] + \text{Im}[T(s)])\tau_{ab}, \quad (4.2)$$

para el respectivo par  $ab$  de partículas. También mediante las amplitudes se obtuvieron las secciones eficaces totales de cada canal utilizando

$$\sigma(s) = \frac{4\pi|T(s)|^2}{q^2}. \quad (4.3)$$

Los cálculos de sección eficaz originalmente se obtuvieron en unidades naturales, es decir,  $\text{GeV}^{-2}$ , y fueron reescritos en términos de unidades de sección eficaz haciendo uso de la relación  $1 \text{ GeV}^{-2} = 2,56819^{-1} \text{ mb}$  [5].

Las estructuras que se pueden visualizar en general serán estados ligados de partículas o resonancias, estas dos estructuras físicas son asociadas a la aparición de polos simples en amplitudes de dispersión de los canales acoplados. Los estados ligados aparecen como polos dentro de la hoja física por debajo de los umbrales energéticos, mientras que las resonancias aparecen como polos dentro de las siguientes hojas de Riemann en cualquier punto cerca de las regiones de interacción de dichos canales acoplados. La aparición de un polo en la hoja II debe impactar en la hoja III y así mismo en la hoja IV, y sus posiciones serán típicamente distintas. Con ello se toma en cuenta para la descripción de los resultados que los estados ligados son partículas cuya masa es menor a la suma de masas de las partículas que los componen, de modo que no

tienen la energía suficiente para decaer en las mismas partículas que los constituyen. Y que a las resonancias se les suele asociar como estados inestables según la vida media de este tipo de partículas, cuyas masas son mayores a la suma de las masas de las partículas que constituyen el primer umbral de producción.

## 4.2. Resultados: matriz $K$ con un polo

El valor de  $\lambda = 1$  la ecuación (3.5) provee de a lo más un polo en la matriz  $K$  en cada una de las hojas de la amplitud. En estos cálculos solo se consideraron los casos en los que no hay polos complejos en la primera hoja de Riemann, es decir, los físicamente razonables. Así mismo, se despreciaron casos de polos ubicados más allá de los 20 MeV fuera de la región energética, donde aparecen los umbrales de estos canales [1331-1437] MeV. Se buscaron ejemplos con polos en las hojas II, III y IV, sin embargo, los polos que aparecieron en la hoja IV fueron descartados, ya que estos se encontraban fuera de la región energética antes mencionada.

De acuerdo a la ecuación (3.1) las amplitudes de todos los canales comparten el mismo denominador, por ende comparten los mismos polos. Esta característica es particularmente importante, ya que ejemplifica el carácter universal de las resonancias; una independencia del canal. Sin embargo, los perfiles obtenidos varían de acuerdo a un numerador respectivo para cada canal, significándose como cada canal se acopla con distinta intensidad a cada resonancia, generando perfiles diferenciados. En el caso de un polo, estos numeradores son constantes y se pueden ver explícitamente en la ecuación (3.8), por lo que los perfiles de amplitud son idénticos en forma, salvo dichas constantes que modifican sus intensidades, ver la figura 4.5.

Las secciones eficaces son únicas para cada canal de dispersión, ya que matemáticamente dependen de forma implícita del factor de espacio fase  $\tau_{ab}(s)$  que distingue a cada canal físico, es decir, el valor de la sección eficaz debe ser nulo hasta que dicha función tome valores por encima del umbral energético, lo cual físicamente significa que no puede haber interacción hasta tener la cantidad de energía necesaria para que ocurra la apertura de cada canal, ver la figura 4.6.

A continuación se describen a detalle cuatro casos distintos, los parámetros utilizados para ajustar las posiciones de los polos aparecen en la tabla II. Las posiciones de los polos de cada caso se muestran en la tabla III.

TABLA II: Resumen de parámetros de masa  $M_1$  y los parámetros de acoplamiento  $x_1, y_1$  de la matriz  $K$  con un polo.

Casos	Parámetro de Masa M (GeV)	Acoplamiento $x_1$ canal $\pi\Sigma$	Acoplamiento $y_1$ canal $\bar{K}N$
1	1.41	0.19	0.12
2	1.27	0.15	0.169
3	1.47	0.19	0.119
4	1.1	0.25	0.26

TABLA III: Resumen de las posiciones de los polos con masas ( $M_p$ ) y anchuras de línea ( $\Gamma_p$ ) en MeV

Casos	Primera hoja (física)		Segunda hoja		Tercera hoja	
	$M_p$	$\Gamma_p$	$M_p$	$\Gamma_p$	$M_p$	$\Gamma_p$
1	—	—	1417	100	1337	91
2	—	—	1323	0.43	—	—
3	—	—	1450	78	1445	88
4	1313	—	—	—	—	—

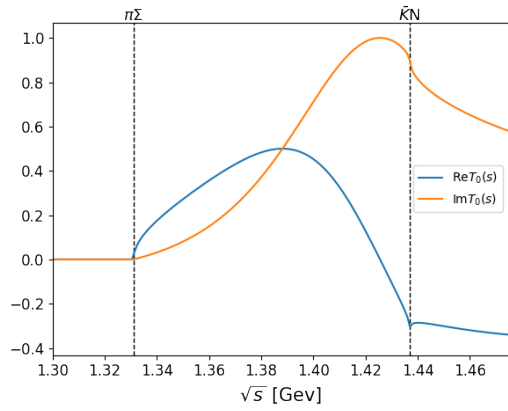
El Caso 1 muestra un polo en la segunda hoja y otro en la tercera con una diferencia de 80 MeV entre ellos, ambos por encima del primer umbral y por debajo del segundo umbral. Estos polos presentan anchos de línea de más de 90 MeV, en la figura 4.5a se observa que la amplitud es máxima en el canal  $\pi\Sigma$  elástico debido a que  $x_1 > y_2$ . La posición de los polos añade un pico entre los 1400 y 1425 MeV. La sección eficaz para este caso indica que la resonancia localizada

por debajo del segundo umbral solo puede ser observada al medir el canal  $\pi\Sigma$  elástico, pero no al medir el canal inelástico ni en el canal  $\bar{K}N$  ver figura 4.6a. Los saltos con forma de pico en el umbral  $\bar{K}N$  del canal inelástico y del canal  $\bar{K}N$  se conocen como picos de unitariedad que físicamente indican que debe haber una conservación de la probabilidad al abrirse un nuevo canal. De no ser posible medir el canal  $\pi\Sigma$ , los picos que se observan cerca del segundo umbral podrían indicar la posible existencia de una resonancia por debajo de esta energía, pero que no es visible en los canales medidos. Es importante resaltar desde este caso que la posibilidad de medir en el canal  $\pi\Sigma$  elástico permite confirmar la existencia de una resonancia y que no siempre se puede contar con esa información. En la figura 4.1a se puede ver un cambio en la dirección de las partes real e imaginaria de la onda S justo en donde se intersecan. La parte imaginaria toma la forma de un pico y siempre es positiva, mientras que la parte real forma un pico para después caer cruzando el eje hacia valores negativos. Mientras que las figuras 4.1b y 4.1c muestran que la onda S tiene una parte real negativa y una parte imaginaria positiva.

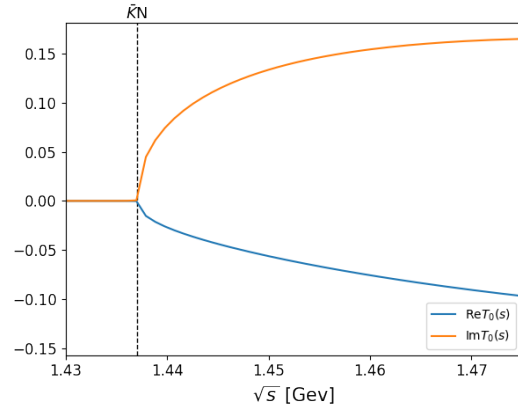
El Caso 2 representa un solo polo en la segunda hoja. Esta resonancia se posiciona apenas a 8 MeV por debajo del umbral  $\pi\Sigma$ , su ancho de línea es pequeño en comparación con el resto de los ejemplos, aunque no nulo, por lo cual este caso podría representar un estado ligado,  $\pi\Sigma$  además de un barión compacto de tres quarks. En la figura 4.5b el perfil de esta la amplitud aparece un pico bien definido cerca del umbral mencionado, la diferencia entre canales es apenas perceptible debido a la escala de la figura; sin embargo, la amplitud del canal  $\bar{K}N$  elástico es mayor a las amplitudes de los otros dos canales. La resonancia es percibida mayormente en el canal  $\pi\Sigma$  elástico como se puede observar en la sección eficaz de la figura 4.6b ya que se encuentra muy lejos del segundo umbral. El perfil de la onda parcial S en la figura 4.2a muestra un pico en la parte imaginaria y un valle con valores negativos en la parte real cerca de la posición del polo. Las figuras 4.2b y 4.2c muestran un comportamiento parecido al Caso 1.

El Caso 3 se trata de un perfil muy parecido al del Caso 1, a diferencia de este las posiciones de los polos es más cercana entre ellos y se sitúan por encima del segundo umbral, sus partes

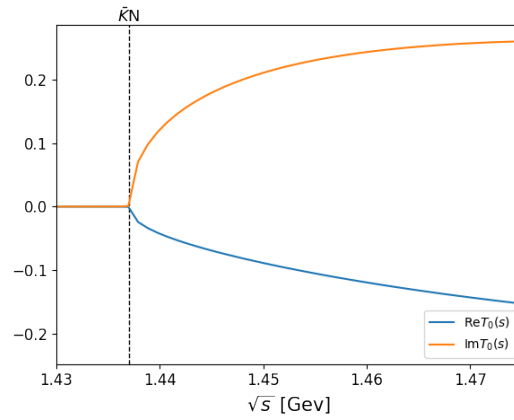




(a) canal  $\pi\Sigma$  elástico

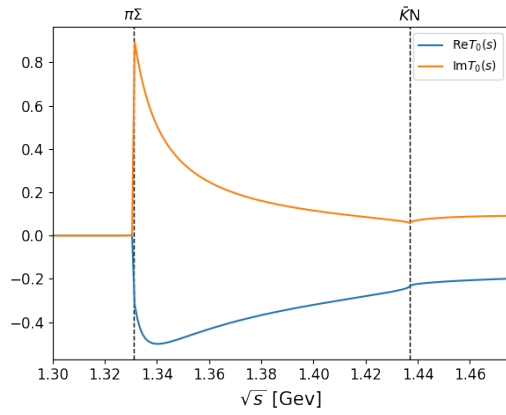


(b) canal  $\bar{K}N$  elástico

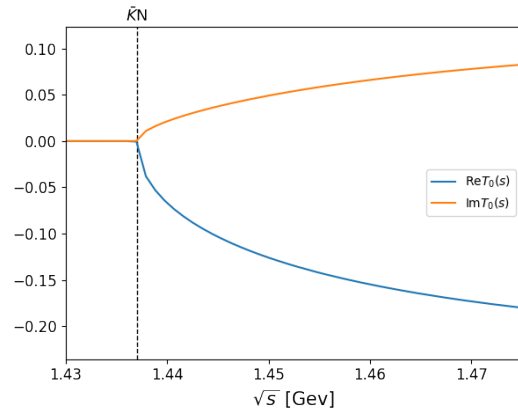


(c) canal inelástico

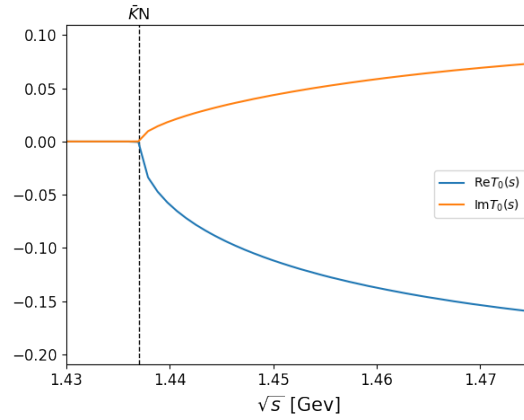
Figura 4.1: Ondas parciales del Caso 1.



(a) canal  $\pi\Sigma$  elástico



(b) canal  $\bar{K}N$  elástico

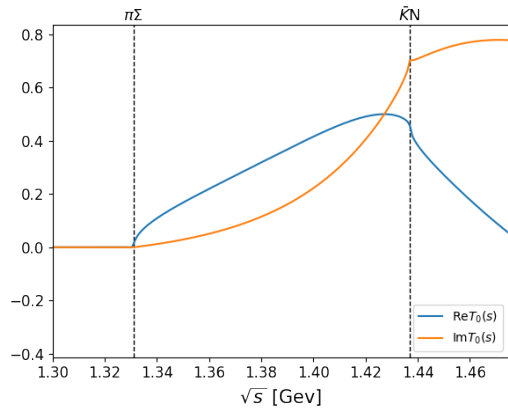


(c) canal inelástico

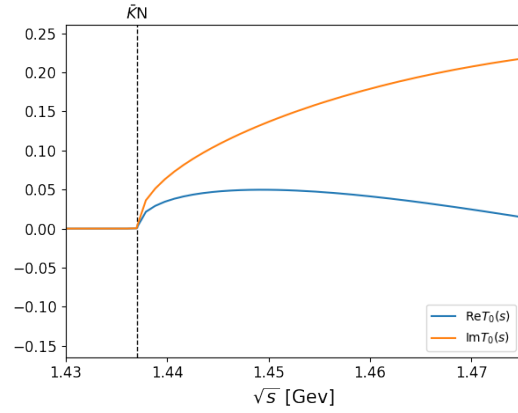
Figura 4.2: Ondas parciales del Caso 2.

imaginarias están cerca de los 80 MeV. La gráfica correspondiente a este caso en la figura 4.5c muestra un pico cerca del umbral  $\bar{K}N$  en todos los canales, el cual bien podría ser confundido con el pico de unitariedad. La sección eficaz, ver figura 4.6c, se muestra que tanto el canal inelástico y el  $\bar{K}N$  exhiben un pico en el umbral  $\bar{K}N$  muy parecido al Caso 1, sin embargo, al mirar el canal  $\pi\Sigma$  elástico, la forma de la sección eficaz no muestra la misma estructura que su análogo en el Caso 1, probablemente porque la resonancia está por encima de la región entre los dos umbrales y esto dificulta la observación de la resonancia encontrada. En la figura 4.3a se muestra un cambio en la dirección de las partes real e imaginaria de la onda S a partir de que intersecan la parte real decrece hacia valores negativos mientras que la parte imaginaria crece, por otro lado, en las figuras 4.3b y 4.3c se muestran el mismo comportamiento, esta vez ambas partes toman valores positivos, pero la parte real es más chica que la imaginaria, este comportamiento es distinto al de los casos 1 y 2.

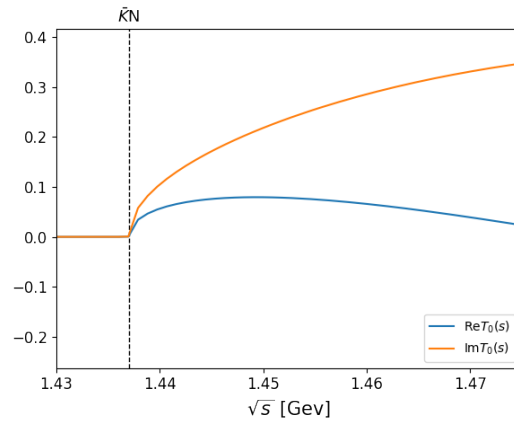
El Caso 4 representa un estado ligado que aparece como un polo real en la hoja física, su posición en el plano complejo lo dota de las características para considerarlo como tal, al tener una masa 18 MeV por debajo del primer umbral y una vida media nula (según la precisión del cálculo numérico). Este es un ejemplo peculiar análogo al caso del deuterón en la dispersión protón-neutrón. Las diferencias de las amplitudes de cada canal son imperceptibles, ver figura 4.5d. La sección eficaz en la figura 4.6d muestra los característicos picos de unitariedad en la apertura del segundo umbral, de la comparación entre las secciones eficaces de los casos 2 y 4 se puede observar que al medir las secciones eficaces no se puede decir si la estructura observada es un estado ligado o un polo, ya que ambas son muy parecidas salvo la escala que en el Caso 4 es menor, ya que este polo se encuentra a  $-10$  MeV más lejos del primer umbral que en el Caso 2. La figura 4.4a muestra las partes real e imaginaria de la onda S en las que resalta la tendencia de la parte real a tomar valores negativos. Las figuras 4.4b y 4.4c muestran un comportamiento parecido a los de los casos 1 y 2.



(a) canal  $\pi\Sigma$  elástico

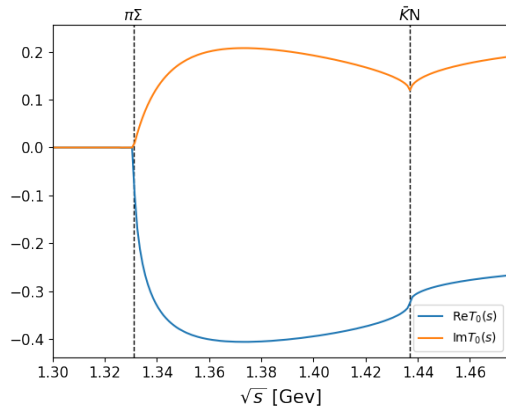


(b) canal  $\bar{K}N$  elástico

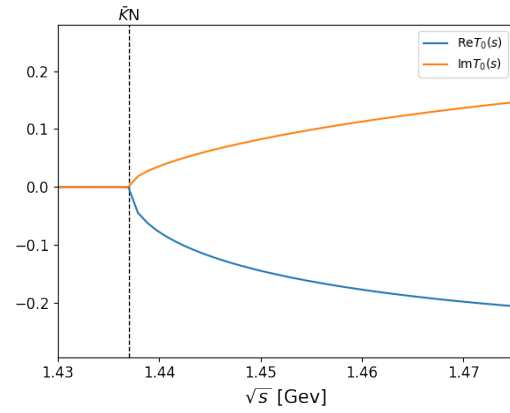


(c) canal inelástico

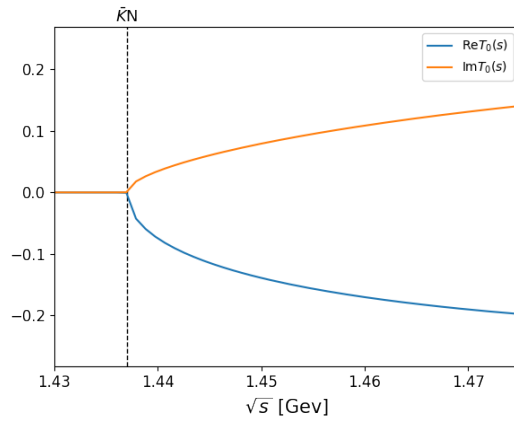
Figura 4.3: Ondas parciales del Caso 3.



(a) canal  $\pi\Sigma$  elástico



(b) canal  $\bar{K}N$  elástico



(c) canal inelástico

Figura 4.4: Ondas parciales del Caso 4.

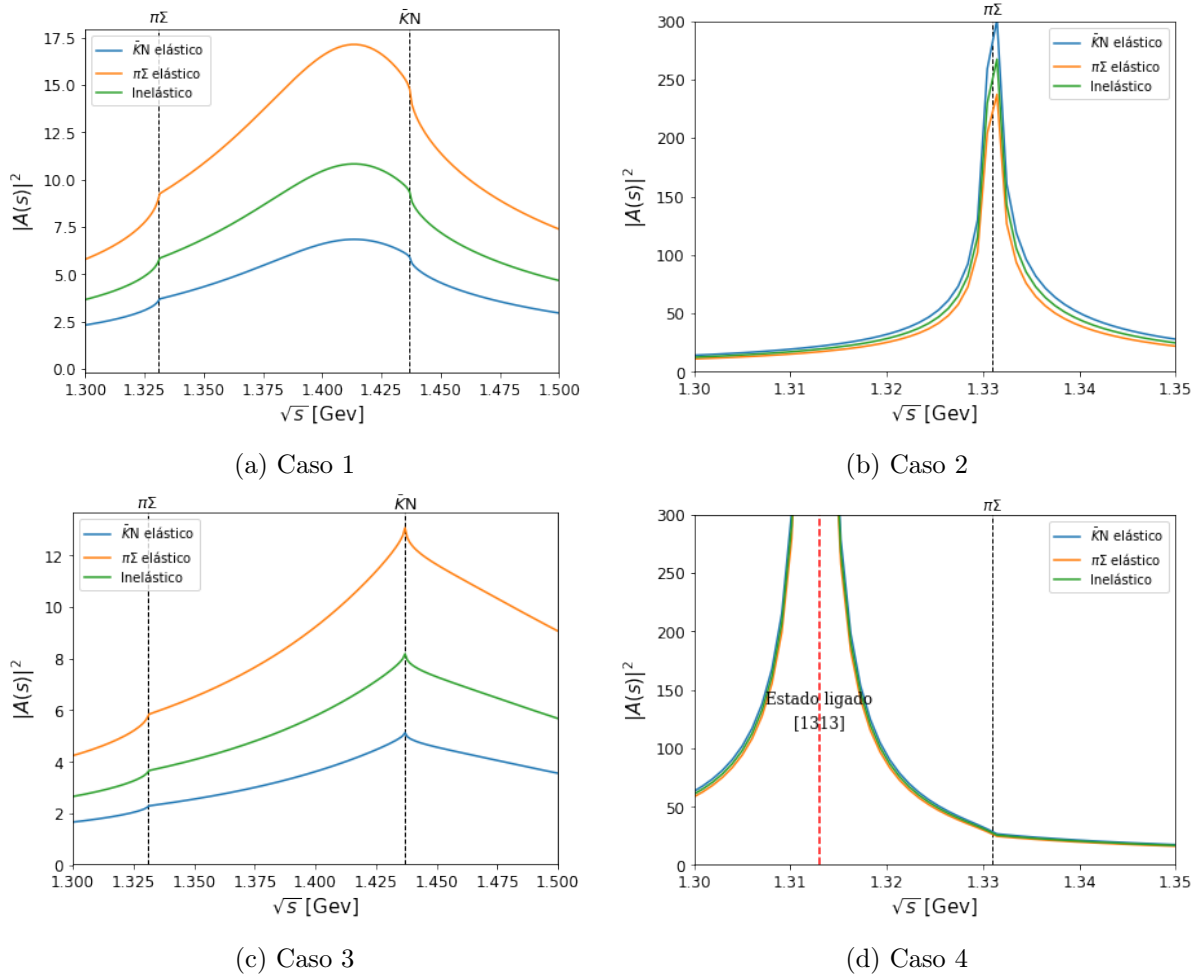
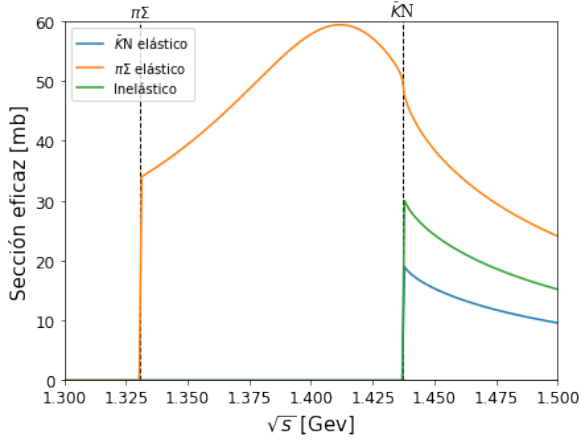
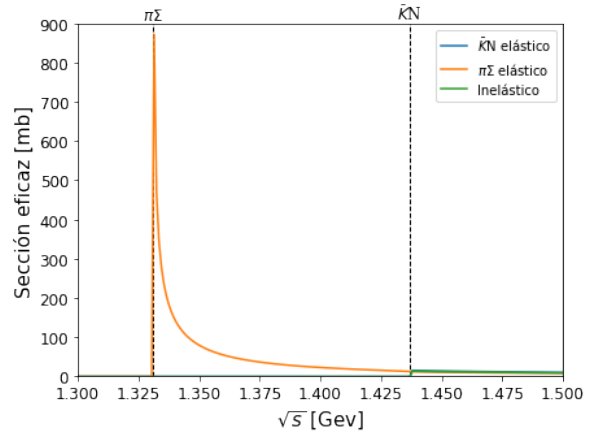


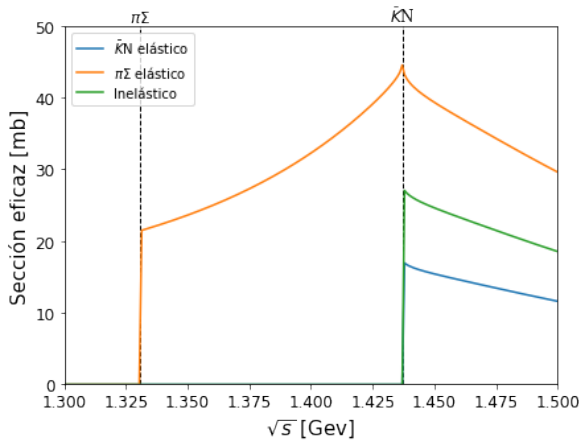
Figura 4.5: Modelo de la matriz  $K$  de un polo: Se muestran los valores absolutos de la amplitud (hoja física) al cuadrado para cada caso. Cada gráfica muestra los dos canales elásticos (azul y naranja) y el canal inelástico (verde), las líneas punteadas indican la posición de los umbrales energéticos de  $\pi\Sigma$  y  $\bar{K}N$  en 1331 y 1437 MeV respectivamente. Las gráficas de la izquierda muestran casos de polos en las hojas II y III; el Caso 1 con polos por encima del primer umbral pero por debajo del segundo umbral, el Caso 3 con polos por encima del segundo umbral. Las gráficas de la derecha muestran casos con un polo en una sola hoja; el Caso 2 es el ejemplo de una resonancia pura por debajo del primer umbral, el Caso 4 muestra un polo en la hoja física, la línea roja punteada indica la posición de un estado ligado.



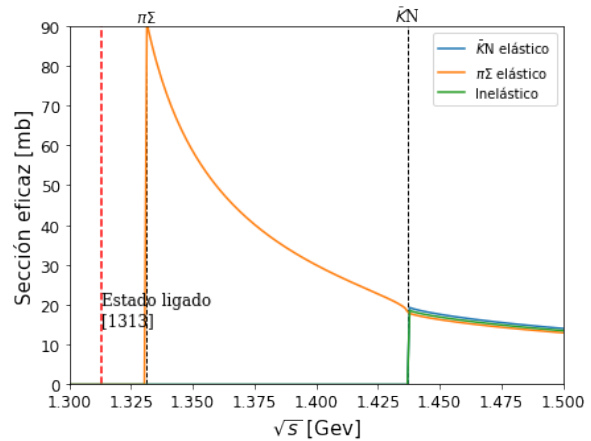
(a) Caso 1



(b) Caso 2



(c) Caso 3



(d) Caso 4

Figura 4.6: Modelo de la matriz  $K$  de un polo: Se muestran las secciones eficaces de cada caso. Cada gráfica muestra las dos secciones eficaces correspondientes a los canales elásticos (azul y naranja) y la sección eficaz del canal inelástico (verde). A la izquierda el Caso 1 exhibe la presencia de una resonancia por debajo del umbral  $\pi\Sigma$ , el Caso 3 tiene un comportamiento muy parecido al Caso 1, sin embargo, no se aprecia con exactitud la posición de la resonancia. A la derecha el Caso 2 el pico cerca del umbral  $\pi\Sigma$  indica la posible presencia de una resonancia detectada mayormente por el canal  $\pi\Sigma - \pi\Sigma$ , en el Caso 4 se observa el efecto del estado ligado en la sección eficaz del canal  $\pi\Sigma - \pi\Sigma$  y el efecto sobre los otros dos canales.

### 4.3. Resultados: matriz $K$ con dos polos

De acuerdo al modelo, se espera la presencia de exactamente dos polos dentro de cada hoja de Riemann tomando  $\lambda = 2$  en la ecuación (3.5). Al igual que en los cálculos para un polo, se despreciaron los casos de polos ubicados lejos de la región energética entre los umbrales. Se buscaron ejemplos de polos dentro de las hojas II, III y IV, descartando los polos encontrados en la hoja IV al encontrarse muy lejos de la región de interacción. En el caso de dos polos en la matriz  $K$ , los perfiles de las amplitudes varían de acuerdo a un numerador respectivo para cada canal, dichos numeradores ya no son necesariamente constantes como lo fueron en el caso de un solo polo, ya que al añadir más polos al modelo aumenta la complejidad no solo de los cálculos, sino también de los resultados, significándose como cada canal se acopla con distinta intensidad a cada resonancia, generando perfiles diferenciados, en este caso tanto en amplitud como en forma, ver figura 4.11.

A partir del modelo con dos polos se puede observar un efecto importante que aparece en los datos reales; la formación de algunos valles en las distintas figuras que se muestran en cada caso. En la realidad es raro ver resonancias aisladas en los datos, por ello aumentar la cantidad de polos en el modelo puede ayudar a mejorar la precisión de los resultados. La posición de valles que tocan el cero de la amplitud puede indicar la presencia de dos polos aledaños, ya que un cambio abrupto en la forma de la amplitud solo puede deberse a la posición de los umbrales o la existencia de polos alrededor de dichos valles.

En estos casos se obtuvieron resultados con anchos de línea desde 5 hasta 337 MeV lo cual se refleja en los anchos de línea de las gráficas de las amplitudes y las secciones eficaces. ver figuras 4.11 y 4.12.

A continuación se describen a detalle los cuatro casos distintos que se buscaron para el modelo de dos polos, los parámetros utilizados para ajustar las posiciones de dichos polos aparecen en la tabla IV. Las posiciones de los polos de cada caso se muestran en la tabla V.



TABLA IV: Resumen de parámetros  $M_\lambda, x_\lambda, y_\lambda$  de la matriz  $K$  con dos polos.

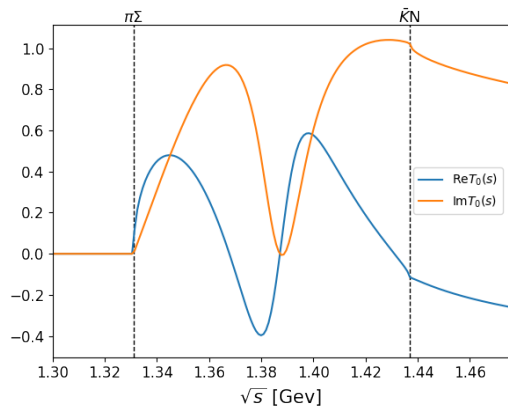
Casos	Parámetro de Masa	Acoplamientos $x_1$ y $x_2$		Acoplamientos $y_1$ e $y_2$
	M (GeV)	canal $\pi\Sigma$		canal $\bar{K}N$
1	1.36	0.19		0.07
	1.42	0.20		0.085
2	1.40	0.23		0.06
	1.48	0.25		0.095
3	1.41	0.20		0.09
	1.45	0.25		0.095
4	1.41	0.20		0.09
	1.56	0.25		0.095

TABLA V: Resumen de las masas ( $M_p$ ) y las anchuras de línea ( $\Gamma_p$ ) en MeV

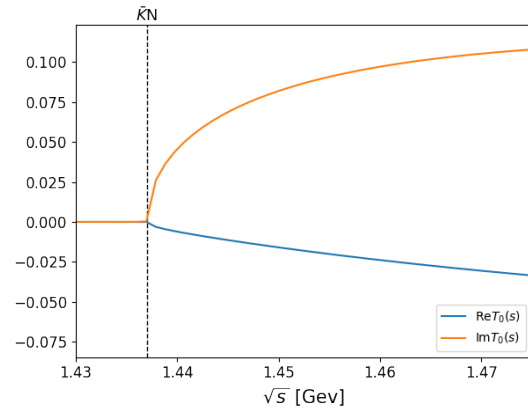
Casos	Primer hoja (física)		Segunda hoja		Tercer hoja	
	$M_p$	$\Gamma_p$	$M_p$	$\Gamma_p$	$M_p$	$\Gamma_p$
1	—	—	1387	22	1391	16
	—	—	1337	127	—	—
2	—	—	1442	13	1441	12
	—	—	1294	188	—	—
3	—	—	1425	4	1426	5
	—	—	1318	233	—	—
4	—	—	1457	64	1468	55
	—	—	1381	347	1262	3

El Caso 1 presenta dos polos en la hoja II y uno solo en la hoja III, todos por debajo del segundo umbral. La figura 4.11a muestra las amplitudes al cuadrado, cada perfil de amplitud muestra un valle en medio de la región entre los dos umbrales. Se observa que la posición de estos valles es distinta para cada canal, y que las formas de las amplitudes de los canales  $\bar{K}N$  y el inelástico son muy parecidas, así mismo se puede decir que los dos polos encontrados impactan menos sobre el canal  $\bar{K}N$ , una posible explicación es que el polo de masa 1337 MeV de la hoja II se encuentra a solo 6 MeV del primer umbral, es decir mucho más cerca del primer umbral. Al ver la figura 4.12a se aprecia que en efecto el mayor impacto en la sección eficaz ocurre en el canal  $\pi\Sigma$  elástico y que prácticamente podrían pasar desapercibidos en los otros dos canales, mínimamente en el otro canal elástico. La figura 4.7a muestra un perfil de onda parcial más complejo que cuando se considera un solo polo en el modelo, aquí tanto la parte real como la imaginaria de la onda S forman valles que cruzan el cero y vuelven a cambiar de signo, en este caso estas partes intersecan al menos tres veces. Las ondas parciales de los otros dos canales 4.7b y 4.7c tienen el mismo comportamiento entre sí.

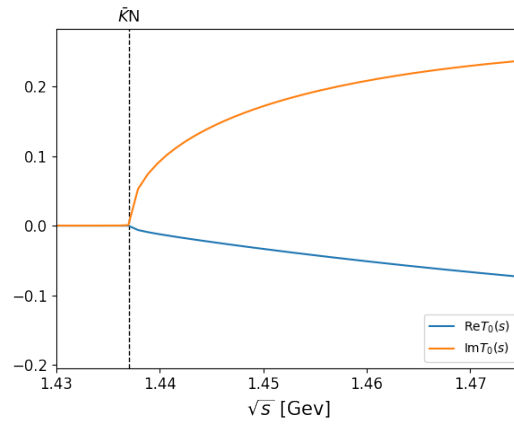
El Caso 2 es especial, ya que es el primer ejemplo en el que se muestran estructuras de resonancias bien definidas por encima del segundo umbral, en la figura 4.11b se muestra que la presencia del polo de masa 1294 MeV prácticamente no impacta en el canal  $\bar{K}N$  elástico al encontrarse bastante lejos de este umbral, esto puede explicar el porqué solo se aprecia un pico como si se tratase de una resonancia aislada. Por otro lado, en los demás canales se aprecian valles en cada una de las amplitudes, lo cual indica dos resonancias aledañas que se pueden percibir al medir dichos canales. Las secciones eficaces de los tres canales, ver 4.12b muestran cada una un pico bien definido después del umbral  $\bar{K}N$ , donde se distingue claramente que la amplitud crece por la presencia de un polo en esta región y no debido al efecto de unitariedad al abrirse el segundo umbral. Por otro lado, la sección del canal  $\pi\Sigma$  elástico muestra un valle, poco antes de abrirse el segundo canal, en este canal el efecto de ambos polos pueden observarse. Este ejemplo muestra como la presencia de los polos modifica la estructura de la onda S, los tres perfiles de la figura 4.8 muestran picos e intersecciones a lo largo de las regiones energéticas



(a) canal  $\pi\Sigma$  elástico



(b) canal  $\bar{K}N$  elástico



(c) canal inelástico

Figura 4.7: Ondas parciales del Caso 1

donde se encontraron polos, y se observa también el cambio en las direcciones de las partes real e imaginaria.

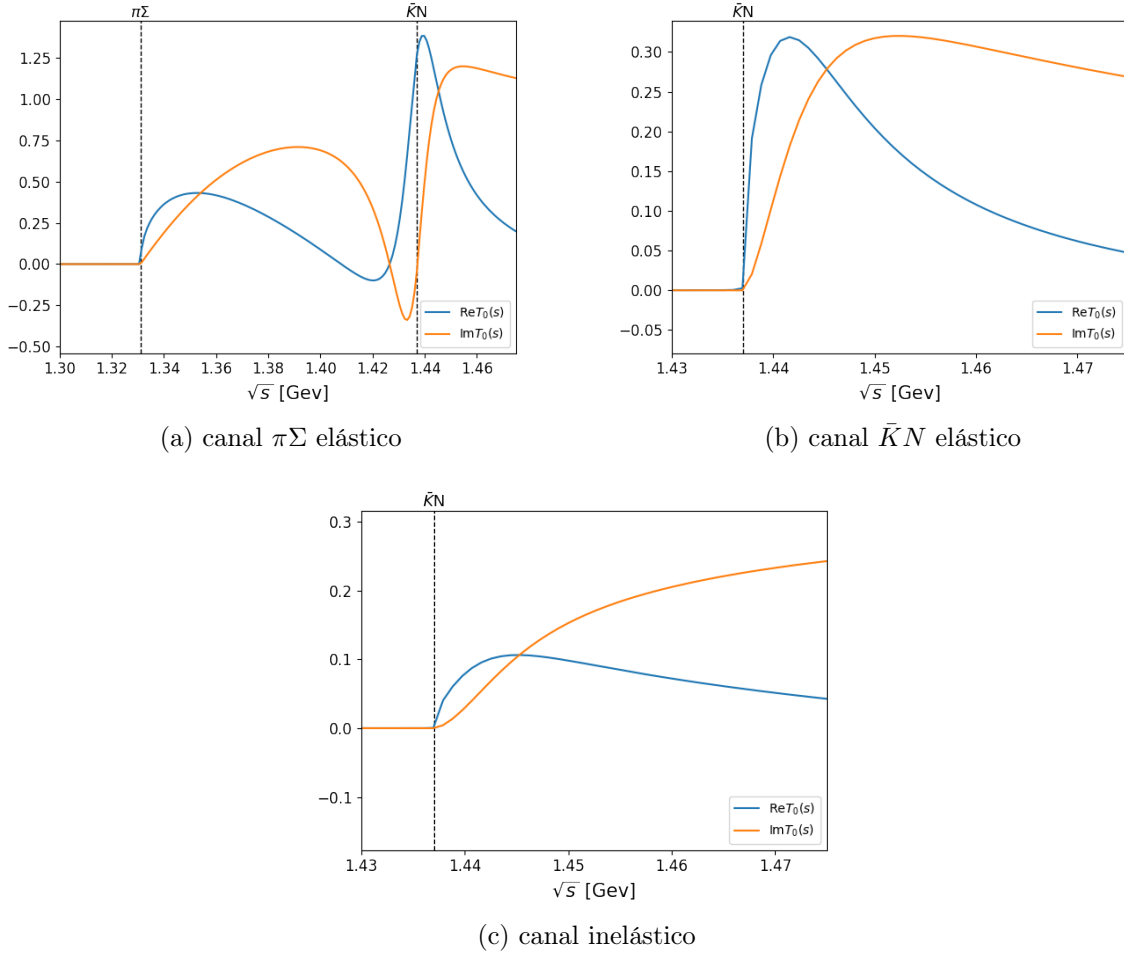


Figura 4.8: Ondas parciales del Caso 2

En el Caso 3 se tienen dos polos en las hojas II y III muy cercanos entre sí, por debajo del segundo umbral, y otro más en la hoja II a 18 MeV debajo del primer umbral. Los perfiles de las amplitudes son muy parecidos a los del Caso 2, con la diferencia de que en este se puede caso se aprecian valles en los tres canales, aunque el valle del canal  $\bar{K}N$  elástico apenas se percibe. Las amplitudes de los otros dos canales muestran valles mejor definidos, ver 4.11c. En la figura 4.12c se ve claramente el efecto de la apertura del umbral, lo cual también se percibe en

las amplitudes y se distingue de los picos de las resonancias, así mismo en el canal  $\pi\Sigma$  elástico se aprecia un valle y los dos picos aledaños por debajo del segundo umbral. En cuanto a la onda S, el perfil de mayor interés es el del canal  $\pi\Sigma$  elástico, ver 4.9a donde se aprecian al menos tres intersecciones de las partes real e imaginaria, dos de ellas muy cercanas entre sí, este un resultado puede relacionarse con la cercanía de los polos de masas 1425 y 1426 MeV en las hojas II y III.

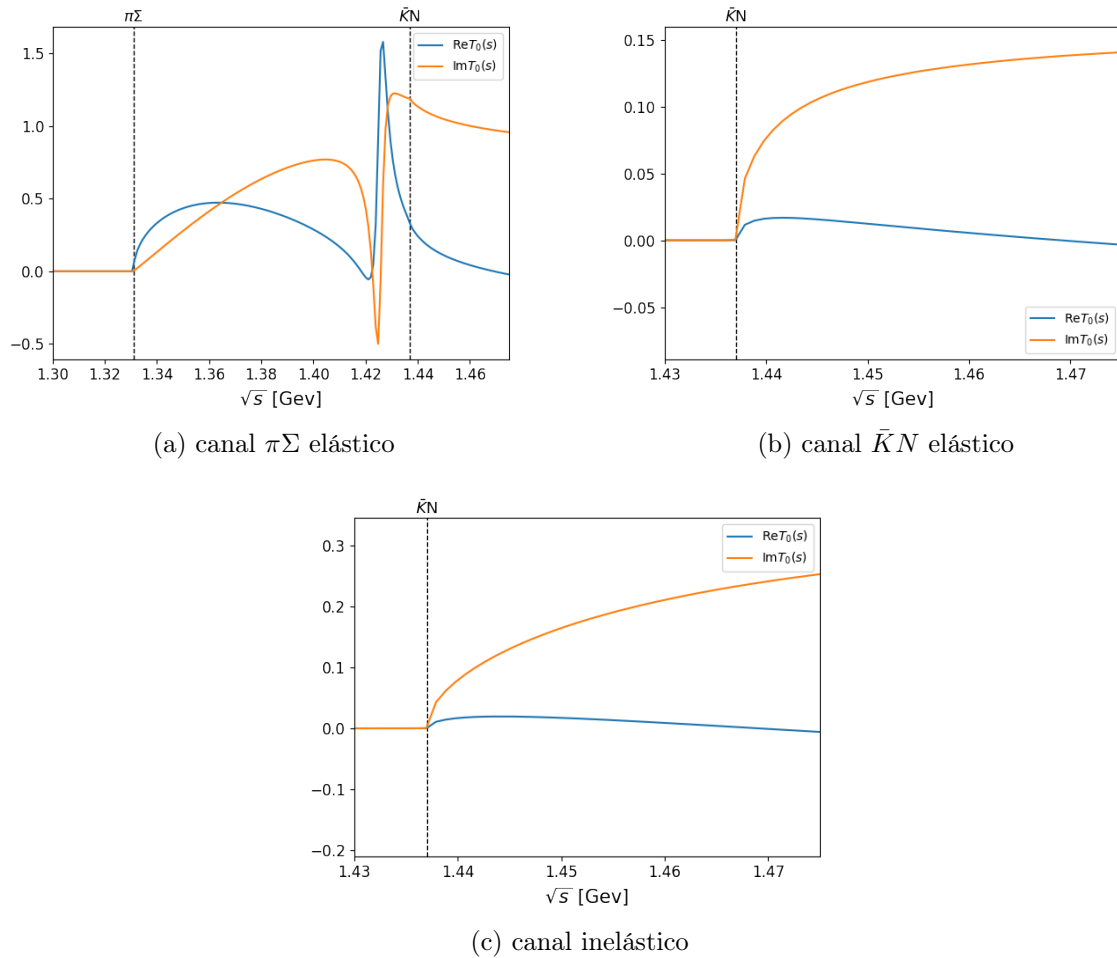


Figura 4.9: Ondas parciales del Caso 3

En el Caso 4 se tiene el primer par de polos en las hojas II y III por encima del segundo umbral. Los otros dos polos aparecen bastante separados entre sí, uno casi a la mitad de los umbrales en la hoja II y el otro 69 MeV por debajo del primer umbral en la hoja III. Se puede

observar en la figura 4.11d que el segundo par de polos prácticamente no causan efecto alguno en las amplitudes. Solo los primeros polos modifican la forma de las amplitudes, por encima del segundo umbral estos definen valles que cruzan el cero del eje vertical en distintos, aunque relativamente cercanos, valores de energía. En la figura 4.12d se puede ver que la posición de los las resonancias de mayor masa impactan en las tres secciones eficaces casi con la misma intensidad, pero en el canal  $\pi\Sigma$  elástico si se puede apreciar una estructura importante debido a los polos que están debajo del segundo umbral. Al igual que en el Caso 2, los tres perfiles de onda S, ver 4.10 muestran estructuras de interés debido a que se tienen polos entre los umbrales y por encima del segundo umbral.

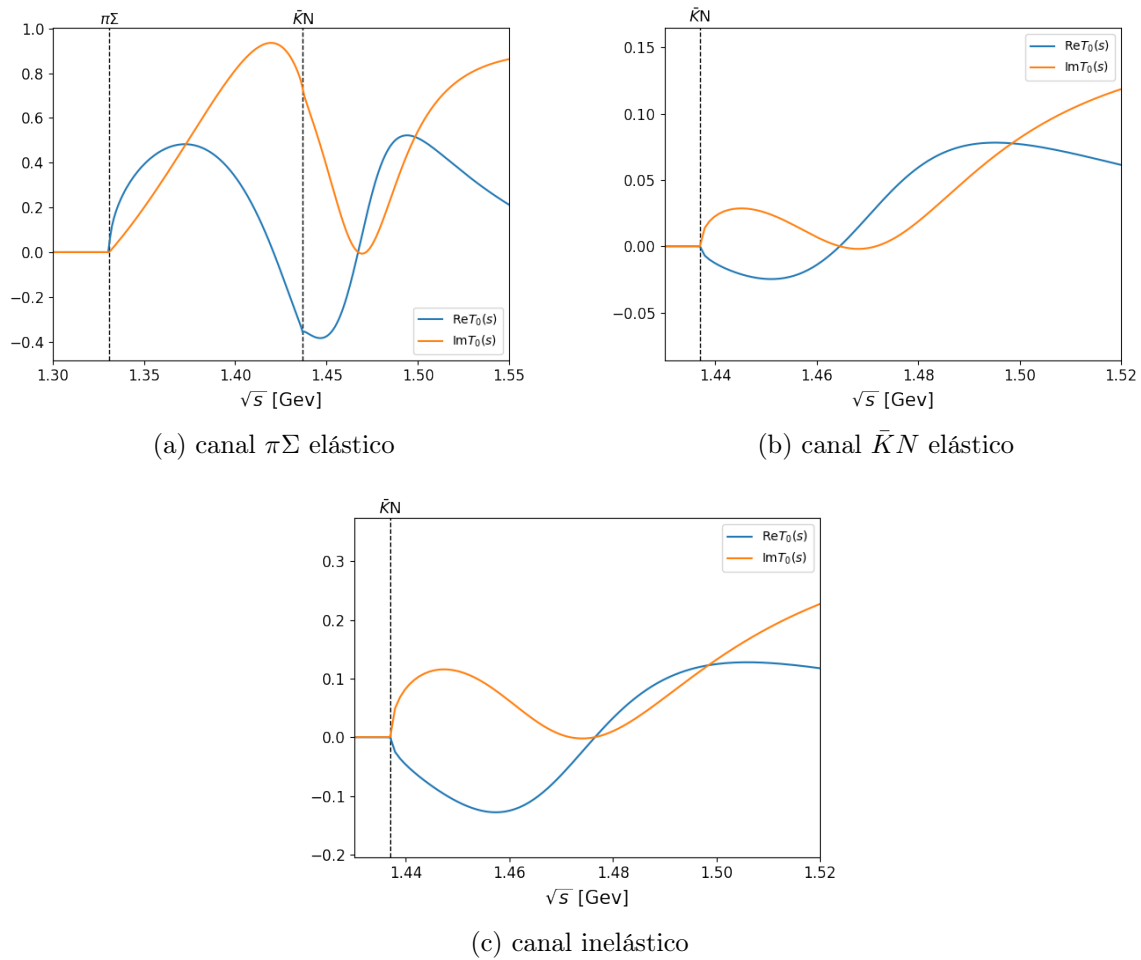
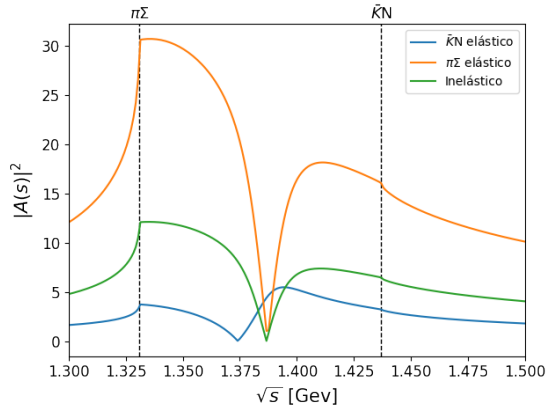
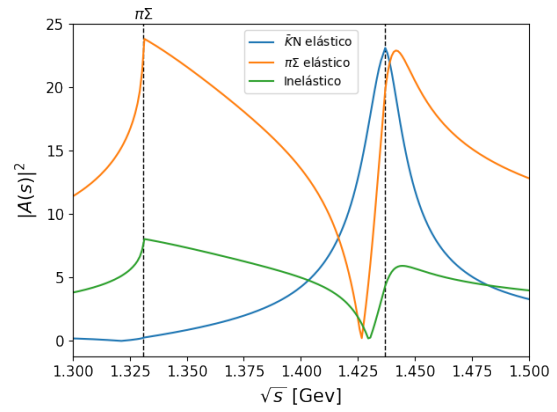


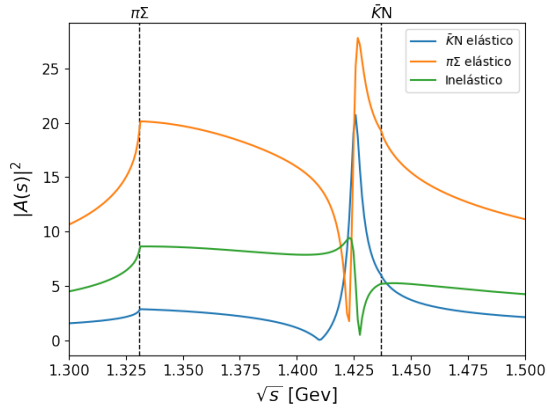
Figura 4.10: Ondas parciales del Caso 4



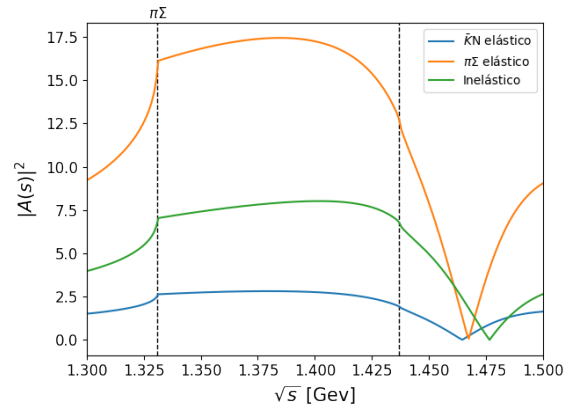
(a) Caso 1



(b) Caso 2

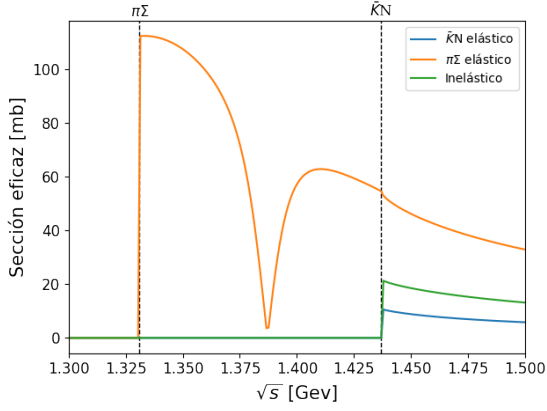


(c) Caso 3

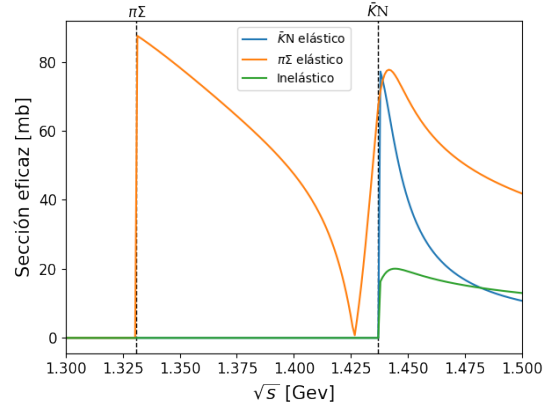


(d) Caso 4

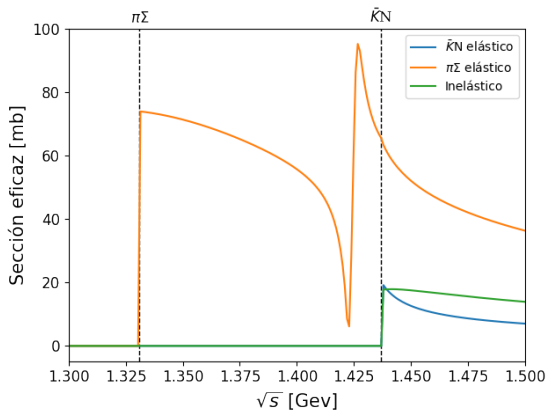
Figura 4.11: Modelo de la matriz  $K$  de dos polos: Se muestran los valores absolutos de la amplitud (hoja física) al cuadrado para los cuatro casos. Cada gráfica muestra los dos canales elásticos (azul y naranja) y el canal inelástico (verde), las líneas punteadas indican la posición de los umbrales energéticos  $\pi\Sigma$  y  $\bar{K}N$  a 1331 y 1437 en MeV respectivamente. A la izquierda, los casos 1 y 3, a la derecha los casos 2 y 4



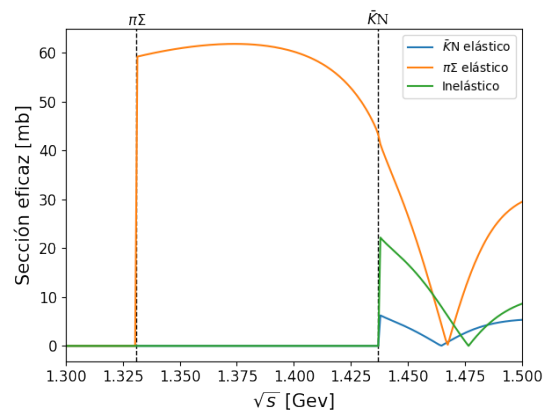
(a) Caso 1



(b) Caso 2



(c) Caso 3



(d) Caso 4

Figura 4.12: Modelo de la matriz  $K$  de dos polos: Se muestran las secciones eficaces de cada caso. Cada gráfica muestra las dos secciones eficaces correspondientes a los canales elásticos (azul y naranja) y la sección eficaz del canal inelástico (verde). A la izquierda, el Caso 1 y el Caso 3, así como el Caso 2 a la derecha, exhiben un valle entre los umbrales  $\pi\Sigma$  y  $\bar{K}N$ . En contraste, el Caso 4 exhibe un valle por cada canal por encima del umbral  $\pi\Sigma$ . Los valles indican la posible existencia de resonancias a sus alrededores. En el Caso 1 se aprecia el impacto en el canal  $\bar{K}N - \pi\Sigma$  y no en los otros dos. En el Caso 2 se aprecia el impacto en la sección eficaz por encima del umbral  $\bar{K}N$ .



## Capítulo 5

# Conclusiones

La física hadrónica es un campo de investigación muy activo en la actualidad, el cual estudia la estructura y las propiedades de los estados físicos formados por quarks, es decir, hadrones. La materia prima de esta son los resultados experimentales de las colisiones de partículas. Conseguir resultados requiere del análisis de las amplitudes de dispersión, para las cuales se emplean diversos modelos basados esencialmente en la matriz de dispersión  $S$ , entre ellos uno de los más utilizados, el de la matriz  $K$ , el utilizado en esta tesis.

Realizar este trabajo me permitió reconocer la importancia de describir los fenómenos de la física a través de teorías construidas con una cantidad de principios mínima, como lo es la teoría de dispersión de la matriz  $S$ . Entre las propiedades de esta teoría se encuentra la de analiticidad de las amplitudes de dispersión, como un requerimiento fundamental que está vinculado a la causalidad de los eventos físicos y que permite la extensión analítica al plano complejo, con lo que hace posible buscar polos fuera de la región física (de valores reales); en donde solo pueden vivir estados ligados. La segunda propiedad de importancia es la unitariedad, la cual está vinculada a la conservación de la probabilidad y el cual es un principio de la física cuántica que es heredado a cada una de las ondas parciales de la amplitud. Esta propiedad produce cortes en los umbrales de dispersión que a su vez generan las distintas hojas de Riemann que permiten buscar las resonancias resultantes de las colisiones más allá de la hoja física. Las demás propiedades de la matriz  $S$  son las propiedades básicas derivadas de la naturaleza de los hadrones (además de la

unitariedad antes mencionada), tales como la invarianza de Lorentz, la simetría ante inversión temporal al tratarse de la interacción fuerte, las cuales prevalecen en el desarrollo matemático de la teoría de dispersión.

Para mostrar el alcance del modelo de la matriz  $K$  consideré un caso sencillo de colisión  $2 \rightarrow 2$  de canales acoplados con las partículas  $\pi$ ,  $\Sigma$ ,  $\bar{K}$  y  $N$ ; las cuatro de masas distintas, sin tomar en cuenta el espín e isospín, limitando la exploración a la onda parcial S de la amplitud de dispersión. Como ejercicio se realizaron dos casos del modelo de la matriz  $K$ , añadiendo uno y dos polos. Los polos simples en la hoja física se clasificaron como estados ligados y en el resto de hojas como resonancias. El modelo de un polo mostró ejemplos muy claros donde las resonancias y estados ligados impactan en la hoja física, como picos cerca de los umbrales de dispersión. En el caso de dos polos, solo se mostraron perfiles de resonancias, y se observó que el impacto de estas sobre la hoja física producen no solo picos, sino también valles en las distintas regiones energéticas donde se ubican. Por esto es importante darse cuenta de que las resonancias hadrónicas no se presentan necesariamente como picos en los datos experimentales, sino que pueden expresarse en estructuras más complejas.

Si bien el sistema que se consideró fue uno muy sencillo, esto no implica que la física reproducida fuese limitada, por el contrario, los resultados del capítulo 4 muestran ejemplos de estructuras muy parecidas a las que se pueden observar en publicaciones de trabajos más exhaustivos [8, 21], tales como los efectos de los umbrales en las amplitudes de dispersión debidos a la unitariedad, o las formas de picos y valles producidos por las resonancias aledañas, ya que esencialmente los perfiles de las amplitudes y de las secciones eficaces son típicos.

Es decir, los resultados descritos en este trabajo son la base de casos más complejos, con esto no quiero decir que esos casos exhaustivos sean sencillos de analizar, por el contrario, según lo descrito en los resultados, añadir más polos al modelo puede aproximar mejor los resultados. Pero también añadir más complejidad, a la vez que en la realidad los sistemas no son tan ideales como el caso de las colisiones  $2 \rightarrow 2$ , en donde no resulta tan sencillo determinar la naturaleza de los polos calculados con datos experimentales.

No siempre será posible encontrar toda la información de una colisión, si solo podemos medir

un único canal, puede ser confuso distinguir el efecto producido por una resonancia, ya que la amplitud a su vez puede ser afectada tanto por los demás polos como por la apertura de los umbrales. Identificar la intensidad del acoplamiento en cada canal resulta muy útil en estos casos, puesto que en general, la posibilidad de medir todos los canales disponibles facilita en gran medida determinar si lo que se observa se trata de una o varias resonancias, por supuesto, esta ventaja no se tiene en la realidad. Por otra parte, según la cercanía de varios polos entre sí, se pueden mostrar traslapes entre estos, no distinguiéndose si se trata de una, dos o más resonancias distintas, en los casos mostrados en esta tesis no tenemos esta confusión; sin embargo, este es uno de los resultados más comunes en la realidad que impide determinar la cantidad de partículas que se observan en los datos experimentales y que a su vez implica un desconocimiento de la estructura de algunas resonancias derivadas de la colisión de hadrones.

# Apéndice A

## Notas de análisis complejo

### A.1. Argumento principal

A continuación se mencionarán algunos resultados y propiedades importantes del análisis complejo utilizadas para la extensión analítica del espacio de fases utilizado en este trabajo. Para ser breve se darán por entendidas las propiedades básicas de los números complejos, y los resultados más generales del cálculo de varias variables.

Un número complejo puede expresarse de forma cartesiana  $z = x + iy$  o en su forma polar  $z = Re^{i\phi}$ . Se dice que el argumento de un número  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  representa un conjunto de valores:

$$\arg(z) = \{\phi + 2k\pi : \operatorname{Re}z = |z|\cos\phi, \operatorname{Im}z = |z|\sin\phi\}, \quad (\text{A.1})$$

con  $k = 0, \pm 1, \pm 2 \pm \dots$ , mientras que el argumento principal denotado por  $\operatorname{Arg}(z) = \phi$  es único y puede estar comprendido entre  $[0, 2\pi)$ , de este modo cada número complejo  $z$  distinto de cero tiene un argumento inequívocamente definido. Es claro que añadiendo  $2\pi$  se obtendrá el mismo número cada vez.

La función argumento es una función que al ser aplicada a números complejos resulta en una infinidad de valores, por esta razón este tipo de objetos son conocidos como *funciones multivaluadas*, aunque este es un término ambiguo del análisis complejo, por lo que se adopta la

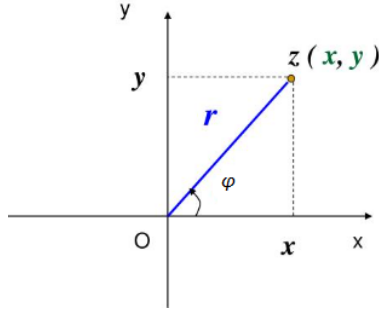


Figura A.1: Representación polar de un número complejo

notación  $F(z)$  con mayúsculas para diferenciarlas de funciones verdaderas (ya que una función es estrictamente univaluada) denotadas por letras minúsculas como  $f$  o  $g$ . Ejemplos de funciones multivaluadas:

- Función logaritmo:

$$\log(z) = \log(re^{i\phi}) = \log(r) + \log(e^{i\phi}) = \log(r) + i\phi = \log(r) + i(\phi + 2k\pi)$$

- Función raíz cuadrada:

$$z^{1/2} = (re^{i\phi})^{1/2} = r^{1/2}(e^{i(\phi+2k\pi)})^{1/2}$$

### A.1.1. Corte de ramificación

Un ejemplo muy común de función multivaluada es la raíz  $n$ -ésima, para cada  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  obtenemos como resultado como el siguiente:

$$z^{1/n} = |R|^{1/n} e^{i\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , fijando  $k$  obtenemos una función univaluada, continua a lo largo de su dominio, a esta función se les conoce como determinación continua o *rama continua*.

Por ejemplo, para la raíz cuadrada  $n = 2$  y  $k = 0, 1$ , en general cualquier determinación del ángulo que recorra un valor de  $|2\pi|$  será válida, en este ejemplo se ha elegido la determinación desde 0 a  $2\pi$ . Sea  $|z| = 1$  para  $k = 0$

$$\sqrt{z} = e^{i\phi/2}, \quad (\text{A.3})$$

obsérvese que esta función nunca se anula, además si evaluamos:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} e^{i\phi/2} = e^0 = 1 \quad (\text{A.4a})$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 2\pi} e^{i\phi/2} = e^{i\pi} = -1 \quad (\text{A.4b})$$

ahora, con  $k = 1$ ,

$$\sqrt{z} = e^{\frac{i(\phi+2\pi)}{2}} \quad (\text{A.5})$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} e^{\frac{i(\phi+2\pi)}{2}} = e^{i\pi} = -1 \quad (\text{A.6a})$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 2\pi} e^{\frac{i(\phi+2\pi)}{2}} = e^{i2\pi} = 1 \quad (\text{A.6b})$$

Como se puede observar los límites en los dos casos son distintos, aun cuando esencialmente esencialmente 0 y  $2\pi$  equivalen al mismo ángulo. Esta discontinuidad en el ángulo se interpreta como el *corte de ramificación* y su posición depende de la forma en la que se elige el recorrido  $2\pi$  del argumento, en la figura A.2 se puede ver como distintas determinaciones del ángulo definen distintos cortes de rama, en este ejemplo el corte de rama se define como sigue [27]:

$$\{z = x + iy : x \geq 0, y = 0\}, \quad (\text{A.7})$$

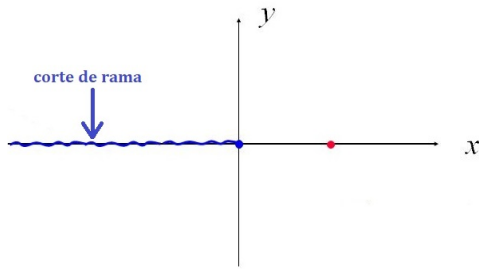
en conclusión este corte de rama produce una rama continua y además no pertenece al dominio de dicha rama.<sup>1</sup>

## A.2. Hojas de Riemann

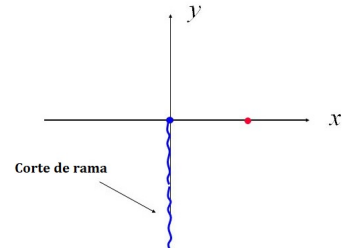
Una superficie de Riemann es una superficie continua que combina diferentes ramas de una función multivaluada, en este trabajo estas ramas hacen referencia a las hojas de Riemann. La

---

<sup>1</sup>En este trabajo se menciona el término *corte derecho* el cual hace referencia a la posición del corte de rama que fue elegida a su vez es llamado corte de unitariedad



(a) Corte de rama resultante con la determinación  $-\pi < \phi < \pi$



(b) Corte de rama resultante con la determinación  $-\pi/2 < \phi < 3\pi/2$

Figura A.2: Determinaciones del argumento, definen la posición del corte de rama evaluando en este ejemplo la función raíz cuadrada.

técnica para la visualización de estos mapeos de funciones complejas se atribuye a Bernhard Riemann. En el ejemplo de la raíz cuadrada se puede notar que [A.6a](#) = [A.4b](#), este resultado hace referencia a las ecuaciones [2.44c](#), [2.45](#) ya que por arriba la primera hoja de Riemann se conecta desde el argumento  $2\pi$  con la segunda hoja con el argumento  $0$ , y a su vez los otros dos extremos [A.4a](#) y [A.6b](#) también se conectan. Es decir, la superposición de estas hojas crea una superficie continua, la cual se logra extendiendo el dominio de la función multivaluada a través de la extensión del argumento principal. Como se puede ver en las figuras [A.4](#) y [A.3](#), muestran la superficie de Riemann de la función logaritmo, la cual en general tendrá  $k$  hojas de Riemann, y en el caso de la raíz cuadrada se tendrán 2 hojas de Riemann <sup>2</sup>. La extensión analítica es una técnica empleada para extender el dominio de una función analítica tal como el ejemplo que se detalló con la raíz cuadrada, con el fin de definir valores adicionales de la función.

### A.3. Funciones analíticas

Las siguientes definiciones se emplearán para comprender el contexto de la extensión analítica. Se dice que una función  $f(z)$  es analítica u holomorfa si existe su derivada en cualquier punto  $z = z_0$  de  $\Omega$ , siendo  $\Omega$  un conjunto abierto y conexo [[28](#), [29](#)].

<sup>2</sup>En particular para este trabajo resulta de interés el resultado de las 2 hojas de la función raíz cuadrada, ya que esta es la función que modela al espacio de fases de los cálculos desarrollados

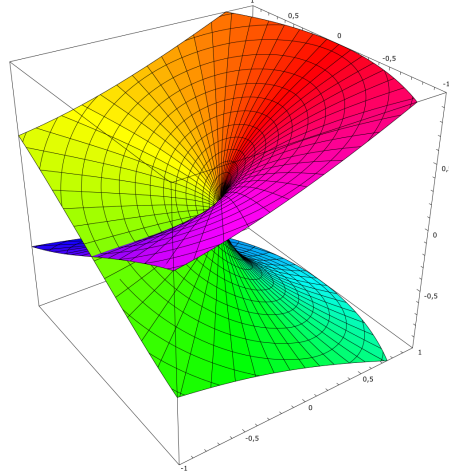


Figura A.3: Hojas de Riemann de  $\sqrt{z}$

### A.3.1. Verificación de analiticidad

Las derivadas de Wirtinger definidas a continuación son los operadores lineales parciales de primer orden para funciones en el plano complejo, y se relacionan con las ecuaciones de Cauchy-Riemann mismas que también se emplean para verificar la analiticidad de una función compleja:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (\text{A.8a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (\text{A.8b})$$

A través de estas derivadas podemos ver el siguiente resultado:  $f(z)$  es analítica  $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  (es decir, si es independiente de  $\bar{z}$ ) y, por otro lado,  $\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$ . [30]

### A.3.2. Singularidades

Se llaman singularidades de  $f(z)$  a aquellos puntos  $z_0$  en los cuales  $f(z)$  no es analítica, sin embargo,  $f(z)$  sigue siendo analítica en algún punto en torno a  $z_0$ . Escribiendo a la función como una serie de Laurent en un entorno de  $z_0$

$$f(z) = \dots + a_{-2}(z - z_0)^{-2} + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (\text{A.9})$$



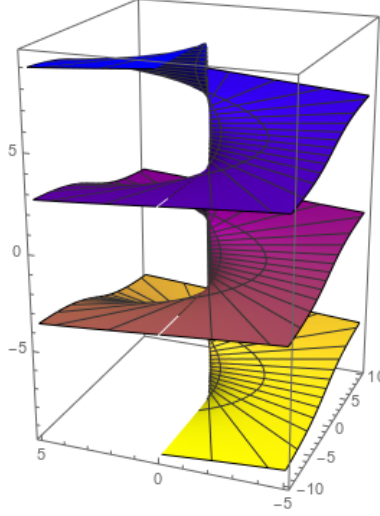


Figura A.4: Hojas de Riemann de  $\log(z)$

Se pueden exhibir los siguientes tipos de singularidades:

- **Evitable:** Si todos los coeficientes  $a_j$  con  $(j < 0)$  son cero, entonces la serie está definida y es continua en  $z_0$ , por lo cual  $f(z)$  se puede extender a una función analítica.
- **Esencial:** Si existe una infinidad de coeficientes  $a_j$  para  $(j < 0)$  distintos de cero.
- **Polos:** Si existe una cantidad finita de coeficientes  $a_j$  para  $(j < 0)$  distintos de cero pero un  $a_i = 0$  para el cual  $-i < -n$ , entonces  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

### A.3.3. Residuos

Si una función  $f(z)$  tiene un polo en  $z = z_0$  entonces el coeficiente  $a_{-1}$  de la serie de Laurent centrada en  $z_0$ , en una región de convergencia donde  $z_0$  es un punto límite, se denomina *residuo* de  $f(z)$  en  $z = z_0$ , en general si una función tiene un polo de orden  $n$  es decir,

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \quad (\text{A.10})$$

Multiplicando con  $(z - z_0)^n$  y derivando  $n$ -veces, se obtiene el residuo:

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \right\} \quad (\text{A.11})$$

## A.4. Integración en el plano complejo

### A.4.1. Integral de Cauchy

Este teorema establece que si  $f(z)$  es una función analítica con derivada  $f'(z)$  continua en todos los puntos dentro y sobre una curva cerrada simple  $\gamma$  entonces:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0 \quad (\text{A.12})$$

La fórmula integral de Cauchy dice que si  $f(z)$  es analítica dentro y sobre un contorno de

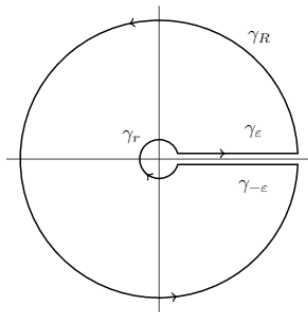


Figura A.5: Contorno de una curva cerrada evitando una singularidad. El teorema de Cauchy dice que la integral de una función analítica definida en una curva cerrada como esta siempre será cero.

integración simple y conexo  $\gamma$ , si  $z_0$  está en el interior del contorno definido por  $\gamma$  entonces

$$\oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi f(z_0)a_{-1} \quad (\text{A.13})$$

### A.4.2. Teorema del residuo

Sea  $\gamma$  una curva en el plano complejo orientada positivamente, y sea  $f(z)$  una función derivable en el interior de  $\gamma$  excepto por una cantidad finita de puntos singulares aislados  $z_0, z_1, \dots, z_n$  entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2i\phi \sum_{i=1}^n a_{-1}^i, \quad (\text{A.14})$$

donde  $i$  denota el índice de la singularidad. En conclusión, este resultado generaliza los dos resultados anteriores, si la función  $f$  es analítica en la región dentro de  $\gamma$  una curva cerrada y simple, a excepción de una cantidad finita de polos  $z_i$ , por el teorema de Cauchy su integral sobre  $\gamma$  es igual a la suma de las integrales sobre los radios alrededor de los polos  $z_i$  encerrados por  $\gamma$ , donde cada integral de  $f$  en un círculo pequeño centrado en  $z_i$  es  $2i\pi$  veces el residuo de  $f$  en  $z_i$  [28, 30, 29].

# Bibliografía

- [1] Murray Gell-Mann. Symmetries of baryons and mesons. *Phys. Rev.*, 125:1067–1084, 1962.
- [2] Yuval Ne’eman. Derivation of strong interactions from a gauge invariance. *Nucl. Phys.*, 26:222–229, 1961.
- [3] G. Zweig. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1. *CERN-TH-401*, 1 1964.
- [4] V. E. Barnes et al. Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three. *Phys. Rev. Lett.*, 12:204–206, 1964.
- [5] P.A. Particle Data Group:Zyla et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2020(8):083C01, 2020.
- [6] James T. Cushing. *Theory Construction and Selection in Modern Physics: The S Matrix*. Cambridge University Press, Massachusetts, 1 edition, 1990.
- [7] Ian J. R. Aitchison. Unitarity, Analyticity and Crossing Symmetry in Two- and Three-hadron Final State Interactions. <https://arxiv.org/abs/1507.02697>, 7 2015.
- [8] C. Fernández-Ramírez et al. Coupled-Channel Model for  $\bar{K}N$  Scattering in the Resonant Region. *Physical Review D*, 93:034029, 2016.
- [9] C. Diu B., Cohen-Tannoudji and F. Laloë. *Mécanique Quantique, Vol. II*. EDP-Sciences, 2 edition, 2018.

- [10] L. de la Peña. *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de Cultura Económica, 1 edition, 2014.
- [11] A. Galindo and R. Pascual. *Quantum Mechanics II*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 1991.
- [12] Michelle Maggiore. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, Oxford University Press Inc., New York, 2005.
- [13] Jacobo Ruiz de Elvira. *Study of the properties and nature of the lightest scalar mesons and their relation to spontaneous chiral symmetry breaking*. PhD thesis, UCM, Madrid, Dept. Phys., Madrid U., 2013.
- [14] R.J. Eden et al. *The analytic S-matrix*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.
- [15] E. Byckling and K. Kajantie. *Particle Kinematics*. John Wiley and Sons, 1986.
- [16] A.D. Martin and T.D. Spearman. *Elementary particle theory*. North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1970.
- [17] V. Mathieu et al. Toward Complete Pion Nucleon Amplitudes. *Phys. Rev. D*, 92(7):074004, 2015.
- [18] V. Mathieu et al. Structure of Pion Photoproduction Amplitudes. *Phys. Rev. D*, 98(1):014041, 2018.
- [19] Jun John Sakurai and Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Quantum physics, quantum information and quantum computation. Cambridge University Press, 10 2020.
- [20] V. Gribov. *Strong interactions of hadrons at high energies: Gribov lectures on Theoretical Physics*. Cambridge University Press, y. dokshitzer and j. nyiri edition, 2009.
- [21] Miguel JPAC Collaboration: Albaladejo et al. Novel approaches in hadron spectroscopy. <https://arxiv.org/abs/2112.13436>, 2021.

- [22] Eugene P. Wigner. Resonance Reactions and Anomalous Scattering. *Phys. Rev.*, 70:15–33, 1946.
- [23] E. P. Wigner and L. Eisenbud. Higher Angular Momenta and Long Range Interaction in Resonance Reactions. *Phys. Rev.*, 72:29–41, 1947.
- [24] R. H. Dalitz and S. F. Tuan. The phenomenological description of KN reaction processes. *Annals Phys.*, 10:307–351, 1960.
- [25] G. F. Chew and F. E. Low. Effective range approach to the low-energy p wave pion - nucleon interaction. *Phys. Rev.*, 101:1570–1579, 1956.
- [26] Hironari Miyazawa. Interaction of P- and S-Wave Pions with Fixed Nucleons. *Phys. Rev.*, 104:1741–1746, 1956.
- [27] Weisstein, Eric W. principal branch from mathworld—a wolfram web resource. <https://mathworld.wolfram.com/PrincipalBranch.html>. 2022-11-08.
- [28] Hoffman M. J. Marsden J. E. *Basic Complex Analysis*. W. H. Freeman, 1999.
- [29] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag, 01 1978.
- [30] Friedrich Haslinger. *Complex Analysis: A Functional Analytic Approach*. De Gruyter, 01 2018.