



Universidad Nacional Autónoma de México

PROGRAMA DE POSGRADO EN ASTROFISICA

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

Propiedades de un campo escalar masivo y con autointeracción en la vecindad
de un agujero negro de Schwarzschild

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (ASTROFISICA)

P R E S E N T A :

ALEJANDRO AGUILAR NIETO

TUTOR

DR. DARIO NUÑEZ ZUÑIGA / Intituto de Ciencias Nucleares de
la UNAM

Cd. Mx. Diciembre 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

El modelo estándar de la cosmología Λ CDM ha sido muy importante para describir exitosamente las observaciones cosmológicas actuales. Sin embargo presenta problemas al querer explicar el sector oscuro del universo como lo son las llamadas energía y materia oscura, puesto que aún no se entiende la naturaleza de éstas[37][27][43]. Los campos escalares son un candidato viable para explicar el sector oscuro del universo, y su estudio es importante puesto que no son fluidos, por lo que forman distribuciones de materia muy diferentes a las que se estudia regularmente en la astrofísica o cosmología [51][38].

Esta tesis contiene una recopilación bibliográfica sobre las formas distintas en las que los campos escalares aparecen dentro del contexto astrofísico, tanto su importancia y mecanismos en cosmología, así como las distintas estructuras astrofísicas que pueden formar, además de una investigación original en el capítulo 4. El objetivo principal de esta tesis fue estudiar las distribuciones de un campo escalar de prueba en vecindades de agujeros negros de Schwarzschild incluyendo un parámetro de autointeracción del campo escalar dado por el término $\lambda|\phi|^4$, y entender el rol que tiene este término así como otros parámetros en la evolución temporal de las configuraciones.

Índice general

Resumen	I
1. Relatividad General	1
1.1. Ecuaciones de Einstein	1
1.2. Agujeros negros	5
1.2.1. Agujero Negro de Schwarzschild	5
1.2.2. Naturaleza de las singularidades	6
1.2.3. Otras soluciones de Agujeros Negros	11
2. Antecedentes del campo escalar	15
2.1. Teoría Clásica de Campos en espacio-tiempo plano	15
2.1.1. Teorema de Noether	18
2.2. Campo escalar en física de partículas	19
2.3. Campo escalar en cosmología	21
2.3.1. Inflación	23
2.3.2. Campos Escalares como energía oscura	24
Quintesencia	25
K-escencia	27
Teorías Escalar-Tensorial.	27
2.3.3. Materia oscura Escalar.	28
Campo escalar sin autointeracción.	29
Campo escalar con autointeracción.	32
2.4. Objetos compactos de campo escalar	34
2.4.1. Estrellas de bosones	34
2.4.2. ℓ -estrellas de bosones.	36
2.4.3. Teoremas de no pelo en Agujeros Negros.	40

2.5. Características y parámetros del campo escalar.	46
3. Peluca sin autointeracción	48
3.1. Ecuación de Klein-Gordon en fondo de Schwarzschild	48
3.2. Comportamiento asintótico de las soluciones y resonancias.	53
3.3. Evolución Temporal	60
4. Peluca con autointeracción	71
4.1. Ecuación de Klein-Gordon con autointeracción en fondo de Schwarzschild.	71
4.2. Caso $\ell = 0$	76
4.3. Caso $\ell = 1$	86
4.4. Evolución temporal	88
5. Conclusiones	92
Referencias	96

Capítulo 1

Relatividad General

La teoría de la Relatividad General, postulada por Einstein en 1915, es la teoría de gravitación más exitosa hasta el momento [39][45]. Esta teoría considera que la gravedad no es una fuerza, si no una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo debida a la materia, por lo cual es una teoría geométrica. Dicha información está contenida en la métrica del espacio-tiempo, la cual también nos da la estructura causal del espacio-tiempo. Es decir, la métrica $g_{\mu\nu}$ es la variable física que necesitaremos conocer para encontrar las ecuaciones que satisfacen la Relatividad General, donde los índices μ, ν son las componentes del sistema de coordenadas.

1.1. Ecuaciones de Einstein

Para obtener las ecuaciones de movimiento que nos den la relación entre la materia y la métrica necesitamos construir una acción, la cual se conoce como de acción Einstein-Hilbert, y está dada por

$$S_g = \int dx^4 \sqrt{-g} (R + \kappa \mathcal{L}_m), \quad (1.1)$$

donde g es el determinante del tensor métrico, R es el escalar de curvatura, κ la constante de acoplamiento, y \mathcal{L}_m es la densidad lagrangiana correspondiente a la materia que en principio puede depender de más variables además de la métrica, y $\kappa = 16\pi G$ la constante de acoplamiento de Einstein. Utilizando el principio de mínima acción y variando respecto a la métrica, y notando que [53]

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

se tiene que la variación de la acción es

$$\delta S_g = 0 = \int dx^4 \left(\sqrt{-g}(\delta R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R)\delta g^{\mu\nu}) + \delta(\sqrt{-g}\kappa\mathcal{L}_m) \right), \quad (1.3)$$

en donde

$$\int dx^4 \sqrt{-g}\delta R = \int dx^4 \sqrt{-g} (R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}). \quad (1.4)$$

Utilizando que la variación del tensor de Riemann está dada por

$$\delta R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \partial_\beta\delta\Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \partial_\nu\delta\Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \delta\Gamma^\alpha_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\alpha_{\beta\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \delta\Gamma^\alpha_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\beta\mu}, \quad (1.5)$$

y notando que la derivada covariante de $\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ está dada por

$$\nabla_\beta (\delta\Gamma^\alpha_{\nu\mu}) = \partial_\beta(\delta\Gamma^\alpha_{\nu\mu}) + \Gamma^\alpha_{\beta\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\beta\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\beta\mu}\delta\Gamma^\alpha_{\nu\lambda}, \quad (1.6)$$

es fácil ver que la variación del tensor de Ricci está dada por la diferencia de 2 derivadas covariantes, es decir

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = \nabla_\alpha (\delta\Gamma^\alpha_{\nu\mu}) - \nabla_\nu (\delta\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}), \quad (1.7)$$

por lo que la variación respecto al escalar de curvatura toma la forma de

$$\int dx^4 \sqrt{-g}\delta R = \int dx^4 \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\alpha (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\nu\mu}) \right), \quad (1.8)$$

siendo el segundo término una derivada total, y al usar el teorema de Stokes, se tiene que el último integrando de la expresión anterior no tiene contribución, por lo tanto la variación de la acción es

$$\delta S_g = 0 = \int dx^4 \left((R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}) + \kappa \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

De esta expresión se observa que el primer término es el tensor de Einstein, y definiendo al tensor de energía-momento como

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.10)$$

se tiene que las ecuaciones de movimiento de la teoría de relatividad general con constante cosmológica son

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

donde el tensor de Einstein es

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.12)$$

Además muchas veces se le puede agregar al lagrangiano un término de constante cosmológica -2Λ , haciendo así que aparezca un término $\Lambda g_{\mu\nu}$ en las ecuaciones de Einstein. Notemos que estas son 16 ecuaciones, de las cuales 10 son independientes debido a la simetría entre los índices. Además estas ecuaciones son ecuaciones parciales de segundo orden para $g_{\mu\nu}$. Por lo cuál es el término dinámico a resolver en estas ecuaciones. Además, para que la solución sea razonable físicamente se deben de satisfacer ciertas condiciones de energía dadas por

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0, \quad (1.13)$$

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + \frac{T}{2} \geq 0, \quad (1.14)$$

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0, \quad (1.15)$$

donde u^μ son las componentes de cualquier vector temporaloide y k^μ es un vector

nulo. Estas condiciones de energía se conocen como condición de energía débil (1.13), que implica que la densidad de energía de la materia es no-negativa, condición de energía fuerte (1.14), que dice que la suma de la densidad de energía sumada con las presiones principales es no-negativa, y condición de energía nula (1.15), que dice que la suma de la densidad de energía con alguna de las presiones principales es no-negativa respectivamente. Cabe mencionar que dichas condiciones de energía no son leyes físicas, y pueden presentar problemas al introducir campos cuánticos o campos escalares [24].

En el caso en el que el campo escalar complejo forma a la fuente de materia del universo, i.e.

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi^* + V(|\phi|^2) \quad (1.16)$$

se tendrá que su tensor de energía momento correspondiente estará dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi^* + \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi^* + V(|\phi|^2) \right] \right). \quad (1.17)$$

Si en el problema que se busque resolver se tiene una distancia característica R_0 , podemos realizar una transformación de coordenadas $\hat{x}^\mu \rightarrow x^\mu / R_0$ para adimensionalizar las ecuaciones de Einstein, de tal forma que el tensor de Einstein adimensional $\hat{G}_{\mu\nu}$ esté dado por

$$\hat{G}_{\mu\nu} = R_0^2 G_{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

y el tensor de energía-momento adimensional

$$\hat{T}_{\mu\nu} = R_0^2 \kappa T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi^* + \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi^* + R_0^2 V(|\phi|^2) \right] \right). \quad (1.19)$$

Por lo cual ahora las ecuaciones de Einstein son

$$\hat{G}_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

1.2. Agujeros negros

1.2.1. Agujero Negro de Schwarzschild

Los agujeros negros son regiones del espacio-tiempo donde la gravedad es tan fuerte tal que ni la materia ni la radiación pueden escapar de este. En el universo estos se forman cuando una estrella lo suficientemente masiva pierde el combustible necesario para generar reacciones termonucleares y así mantener su equilibrio, por lo que sufre un colapso gravitacional a través de su llamado radio gravitacional u horizonte de eventos, que es la frontera de esta región de la cuál ya ninguna información puede salir[45].

La primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein fue propuesta por Karl Schwarzschild en 1916, un año después de que Einstein publicara su teoría. Dicha solución describe el campo gravitacional alrededor de un cuerpo esférico, y para obtenerla se suponen las siguientes hipótesis:

1. El espacio-tiempo tiene simetría esférica, es decir la métrica es invariante ante rotaciones.
2. El espacio-tiempo es estacionario, esto es, existe un campo de Killing ζ tal que $\zeta^\alpha \zeta_\alpha < 0$, es decir es temporal, por lo que la métrica no tiene dependencia de la coordenada temporal.
3. El espacio-tiempo es estático, es decir, existe un vector de Killing temporal que es irrotacional, y además la métrica es invariante ante reflexiones temporales.
4. El espacio-tiempo es asintóticamente plano, es decir, lejos de la masa, la métrica que describe al espacio-tiempo es la métrica de Minkowski.
5. La solución es en vacío, es decir: $T_{\mu\nu} = 0$.

De esta última hipótesis la ecuación a resolver es

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (1.21)$$

Ahora, bajo las simetrías antes mencionadas, en una cierta elección de coordenadas la métrica solución a estas ecuaciones resulta ser

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 d\phi^2, \quad (1.22)$$

donde podemos escribir al ángulo sólido como $d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2 = d\Omega^2$. Dicha métrica se conoce como métrica de Schwarzschild, y describe objetos llamados agujeros negros. Además, como lo prueba el teorema de Birkhoff[39, 45], la métrica de Schwarzschild también es solución para espacio-tiempos con simetría esférica fuera de cualquier fuente de materia, pues en estos casos la región de vacío se encuentra en $r > 2M$, es decir, esta métrica puede ser solución para el campo gravitacional exterior producido por una estrella o planeta que satisfaga las condiciones mencionadas.

1.2.2. Naturaleza de las singularidades

Notamos que esta métrica tiene 2 regiones con singularidades, en $r = 0$ y $r = 2M$, sin embargo, de estas singularidades solo $r = 0$ es una singularidad física. La singularidad en $r = 2M$ aparece debido a que se está usando un sistema de coordenadas que no es adecuado. La región $r_S = 2M$ se conoce como radio de Schwarzschild r_S y coincide con el horizonte de eventos del agujero negro, el cuál marca la frontera de la región de no retorno para geodésicas nulas o temporales.

Para estudiar la naturaleza de estas singularidades basta con calcular un escalar de curvatura llamado escalar de Kretschmann y analizar su comportamiento al evaluarlo en dicha región. Es fácil ver que tanto el escalar de Ricci R , como el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ son cero, sin embargo existen componentes del tensor de Riemann distintas de cero, estas son:

$$R^t{}_{rrt} = 2R^\theta{}_{r\theta r} = 2R^\phi{}_{r\phi r} = \frac{2M}{r^2(2M-r)}, \quad (1.23)$$

$$2R^t{}_{\theta\theta t} = 2R^r{}_{\theta\theta r} = R^\phi{}_{\theta\phi\theta} = \frac{2M}{r}, \quad (1.24)$$

$$2R^t{}_{\phi\phi t} = 2R^r{}_{\phi\phi r} = -R^\theta{}_{\phi\phi\theta} = \frac{2M \sin^2(\theta)}{r}, \quad (1.25)$$

$$R^r{}_{trt} = -2R^\theta{}_{t\theta t} = -2R^\phi{}_{t\phi t} = \frac{2M(2M-r)}{r^4}. \quad (1.26)$$

Con esto podemos construir un nuevo escalar de curvatura, llamado escalar de Kretschmann, el cuál está dado por

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (1.27)$$

y observamos que al ser un invariante es válido en cualquier sistema de coordenadas. Es claro que para $r = 0$ este escalar diverge al infinito, lo que implica que el campo gravitacional es singular en esa región, mientras que para $r = 2M$ está bien definido. Esto es una indicación de que esta singularidad se debe a las coordenadas utilizadas.

Ahora analicemos el comportamiento de los conos de luz cerca de $r = 2M$. Para esto se necesita hacer un cambio de coordenadas, pues como se vio anteriormente, las coordenadas de Schwarzschild presentan problemas cerca de esta región, y para esto usaremos primero las llamadas coordenadas de Eddington-Finkelstein. Si se define un nuevo radio, r^* llamado radio de Regge-Wheeler o radio tortuga como

$$r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|, \quad (1.28)$$

se puede entonces definir una nueva coordenada V como

$$V = t + r^* = t + r + 2M \ln \left| \frac{1}{2M} - 1 \right|, \quad (1.29)$$

cuyo diferencial es

$$dV = dt + \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (1.30)$$

Elevando al cuadrado y sustituyendo términos en la métrica de Schwarzschild esta toma la forma de

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dV^2 + 2dVdr + r^2 d\Omega^2, \quad (1.31)$$

que es la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein. De esta métrica vemos que $r = 2M$ no es singular, por lo que las coordenadas de Eddington-Finkelstein se comportan mejor que las coordenadas de Schwarzschild en regiones cercanas al radio de Schwarzschild, sin embargo aún presentan un problema, este es, que la simetría temporal de las geodésicas ha desaparecido, esto es, las geodésicas entrantes se comportan de manera distintas a las salientes. Esto se puede arreglar haciendo otro cambio de coordenadas, pues esto nos permitirá analizar la estructura causal de este espacio-tiempo. Si ahora definimos una nueva coordenada U como

$$U = t - r^* = t - r - 2M \ln \left| \frac{1}{2M} - 1 \right|, \quad (1.32)$$

podemos escribir la métrica de Schwarzschild recuperando la simetría temporal, y la métrica toma la forma siguiente

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dUdV + r^2 d\Omega^2. \quad (1.33)$$

Esta forma de la métrica vuelve a tener problemas en $r = 2M$, pero esto se puede resolver definiendo unas nuevas coordenadas \bar{u} y \bar{v} como

$$\bar{u} = -e^{-\frac{U}{4M}}, \quad (1.34)$$

$$\bar{v} = e^{\frac{V}{4M}}, \quad (1.35)$$

al obtener el diferencial de estas coordenadas, elevando al cuadrado, y sustituyendo en la métrica de Schwarzschild esta toma la forma de

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r}e^{-\frac{r}{2M}}d\bar{u}d\bar{v} + r^2d\Omega^2. \quad (1.36)$$

Notemos que esta expresión es regular para $r > 0$, pero ahora como función de \bar{u} y \bar{v} . Sin embargo como estas coordenadas son nulas, podemos utilizarlas para construir unas nuevas coordenadas temporales y espaciales al definir

$$\bar{V} = \frac{\bar{v} - \bar{u}}{2}, \quad (1.37)$$

$$\bar{U} = \frac{\bar{v} + \bar{u}}{2}. \quad (1.38)$$

Estas coordenadas se conocen como coordenadas de Kruskal Szekeres. Haciendo el proceso análogo a lo que se hizo con las coordenadas de Eddington-Finkelstein, diferenciando y sustituyendo en la métrica esta toma la forma

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r}e^{-\frac{r}{2M}}(-d\bar{V}^2 + d\bar{U}^2) + r^2d\Omega^2, \quad (1.39)$$

que es la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal-Szkeres. Notemos que ahora que la singularidad en $r = 2M$ ha desaparecido, mientras que la singularidad en $r = 0$ se mantiene. Las coordenadas de Kruskal-Szekeres se relacionan con las coordenadas de Schwarzschild mediante las ecuaciones

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)e^{\frac{r}{2M}} = \bar{U}^2 - \bar{V}^2, \quad (1.40)$$

y

$$\bar{U}\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \bar{V}, \quad (1.41)$$

Con $r > 0$. Fijándonos en las geodésicas radiales nulas, $ds^2 = 0$, se tiene que

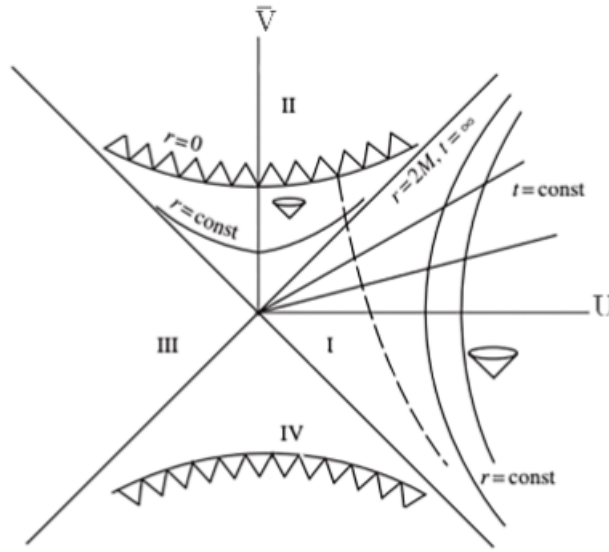


Fig. 1.2.1: Diagrama del agujero negro de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal [33].

$$0 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} (-d\bar{V}^2 + d\bar{U}^2) \implies -d\bar{V}^2 + d\bar{U}^2 = 0, \quad (1.42)$$

lo cual tiene como solución

$$\bar{V} = \pm \bar{U} + c. \quad (1.43)$$

Es decir, los conos de luz son líneas rectas a 45 grados en un diagrama de espacio-tiempo, al igual que en el espacio-tiempo de Minkowski. Esto tiene sentido, pues esta métrica es conforme, es decir, es la métrica de Minkowski multiplicada por una función escalar que depende de las coordenadas. El diagrama del espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal se muestra en la figura (1.2.1). Hay varios puntos importantes que podemos notar del diagrama de Kruskal y las relaciones entre estas coordenadas y las de Schwarzschild. Primero notemos que una curva de r constante corresponde a una hipérbola en el diagrama, horizontal para $r > 2M$ y vertical para $r < 2M$, esto significa que una vez que un observador cruza por $r = 2M$ de la región I a la región II ya no se podrá mantener en un radio constante y caerá en un tiempo coordenado finito hacia la singularidad $r = 0$,

además cualquier señal de luz que envíe dentro de esta región permanecerá en la misma y además esta también caerá a la singularidad. Por esta razón, a la región II se le conoce como agujero negro, mientras que a su frontera en $r = 2M$ se le conoce como el horizonte de eventos del agujero negro [53].

Notemos además que existen otras 2 regiones, III y IV, donde la región IV es equivalente a la II, pero invertida en el tiempo. A esta región se le conoce como agujero blanco, pues todo lo que esté dentro de ésta tendrá que escapar en un tiempo coordenado finito, mientras que la región III es análoga a la región I pero están causalmente desconectadas, es decir, no existe una curva temporal por la que estén unidas. Estas regiones son soluciones válidas a las ecuaciones de Einstein, sin embargo se consideran como soluciones no físicas, pues los agujeros negros se forman cuando una estrella lo suficientemente masiva colapsa gravitacionalmente, y estas regiones estarían dentro de la estrella, donde $T_{\mu\nu} \neq 0$, por lo que la solución de Schwarzschild ya no será válida en dicha región.

1.2.3. Otras soluciones de Agujeros Negros

Además de la solución de Schwarzschild existen más soluciones de agujeros negros en relatividad general, estas se obtienen si imponemos por ejemplo distintas simetrías. En el caso particular en el que añadimos un campo electromagnético (teoría de Einstein-Maxwell) y se mantiene la simetría esférica y la estaticidad, la solución estará dada por la métrica de Reissner-Nordstrom [44], que tiene la siguiente forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.44)$$

donde Q es la carga eléctrica del agujero negro. Vemos que si $Q = 0$, entonces la solución se reduce al espacio-tiempo de Schwarzschild. Este tipo de agujeros negros se caracterizan por tener 2 horizontes, dados por

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left(2M \pm \sqrt{(2M)^2 - 4(Q^2)} \right), \quad (1.45)$$

donde por la conjetura de la censura cósmica es necesario que $Q < M$, pues si no fuera así se tendría una singularidad desnuda. Además de esto, a diferencia del horizonte de eventos en Schwarzschild, al cruzarlo, la componente g_{rr} de la métrica vuelve a cambiar de signo, por lo que r vuelve a ser una coordenada espacial. Esto sugiere que la singularidad $r = 0$ es temporaloide en lugar de ser espacialoide como en el caso de Schwarzschild. Sin embargo estas soluciones no son realistas para un agujero negro astrofísico, pues observaciones cosmológicas encuentran que vivimos en un universo eléctricamente neutro, y de formarse alguno de estos agujeros, atraería carga opuesta y se neutralizaría rápidamente.

Otra solución de agujero negro se encuentra si se elimina la simetría esférica y se impone simetría axial, dicha solución a las ecuaciones de Einstein estará dada por la métrica de Kerr, y esta describe un espacio-tiempo estacionario con un agujero negro rotante. Dicha solución fue encontrada en 1963 por Roy Kerr [36], y está dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) c^2 dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\Sigma} c dt d\phi, \quad (1.46)$$

donde

$$a = \frac{J}{Mc}, \quad (1.47)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (1.48)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (1.49)$$

Con J el momento angular del agujero negro y a se le conoce como parámetro de Kerr. Vemos que si $J = 0$, entonces la solución se reduce a la solución de Schwarzschild. Al igual que el agujero negro de Reissner-Nordstrom, el agujero negro de Kerr presenta dos horizontes dados por

$$r_{H\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (1.50)$$

de donde se tiene la constricción de que $a \leq M$, pues de lo contrario se tendría una singularidad desnuda, lo cual puede violar la estructura causal del espacio-tiempo. Además de esto, se tiene otra región importante llamada ergosfera, la cual está delimitada por el horizonte de eventos exterior y un horizonte de Killing donde el vector de Killing asociado a la coordenada temporal se anula, por lo que la componente temporal de la métrica también se anula, esto es cuando

$$r_{erg\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2(\theta)}. \quad (1.51)$$

Un observador en esta región no podrá permanecer estático, pues el agujero lo obligará a rotar en su dirección. Sin embargo, es posible salir de esta región debido a que se encuentra fuera del horizonte de eventos, y esto es importante pues se puede usar para extraerle energía rotacional al agujero negro mediante el llamado proceso de Penrose [33]. A diferencia de los espacio-tiempos anteriores, el descrito por la métrica de Kerr no es estático debido a la rotación intrínseca del agujero negro.

Existe una solución de agujero negro dada por la métrica de Kerr-Newman, y esta describe el espacio-tiempo de un agujero negro rotante y cargado. Sin embargo, al igual que el agujero negro de Reissner-Nordstrom, no es una solución tan realista astrofísicamente. Se cree que físicamente el espacio-tiempo que mejor describe un agujero negro real es el espacio-tiempo de Kerr [7]. La existencia de los agujeros negros ha sido confirmada por observaciones indirectas en el movimiento de estrellas en la Vía Láctea, así como por la detección de discos de acreción que se forman al momento en que la materia cae en el agujero negro, como es el caso del agujero negro supermasivo Sagitario A que está en el centro de la Vía Láctea [8]. En 2015 se realizaron detecciones de ondas gravitacionales por el interferómetro LIGO [1, 2, 4], cuyo origen sabemos, proviene de la colisión de dos agujeros negros. Además de estas detecciones, en 2019 el telescopio “Event Horizon” tomó la

primera imagen directa de un agujero negro supermasivo ubicado en el centro de la galaxia Messier 87, y dicha imagen es consistente con lo que se esperaría de la sombra producida por un agujero negro de Kerr debido a su campo gravitacional [9]. La confirmación de estos objetos en el universo es un fenómeno más que se obtiene de estudiar la teoría de la Relatividad General, sin embargo, aún quedan preguntas abiertas acerca de su naturaleza. En particular, aún no está bien entendida la termodinámica de estos objetos, así como los problemas con la paradoja de la pérdida de información y otros fenómenos cuánticos .

Capítulo 2

Antecedentes del campo escalar

Un campo que representa una magnitud física, se define matemáticamente en todo punto del espacio y del tiempo. Estos pueden ser escalares, vectoriales, tensoriales, o espinoriales, y a pesar de que ha habido todo un debate filosófico sobre si realmente son componentes de la naturaleza o una herramienta matemática, estos han servido para describir varios fenómenos físicos que observamos en el universo. El concepto de campo surgió con la introducción del campo gravitacional en la teoría Newtoniana y posteriormente con el campo electromagnético en el electromagnetismo. En particular los campos escalares aparecen en áreas distintas de la física. En el modelo estándar de física de partículas son necesarios para darle masa a la partícula observada [30],[42]. De igual manera aparecen en el estudio de la cosmología al momento de modelar la etapa inflacionaria del universo, además de ser posibles candidatos a describir la materia oscura y energía oscura[37][54]. En este capítulo se explorará la idea de campos en distintas ramas de la física.

2.1. Teoría Clásica de Campos en espacio-tiempo plano

Las teorías de campo generalmente se obtienen utilizando un formalismo lagrangiano, el cuál consiste en utilizar el principio de Hamilton, de manera similar a lo que ocurre en mecánica clásica donde se usan coordenadas generalizadas $q_i(t)$, sin embargo ahora nuestra variable serán los campos $f_i(x^\mu)$, en donde el índice μ toma todos los valores del sistema de coordenadas en el espacio-tiempo. Primero se construye una acción S que se determina a partir de una densidad lagrangiana \mathcal{L} que depende de los campos escalares, sus coordenadas físicas, y las derivadas

del campo respecto a las coordenadas, la cual está dada por

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(f_i(x^\mu), \partial_\mu f_i(x^\mu)), \quad (2.1)$$

donde ∂_μ denota la derivada parcial respecto a la coordenada x^μ . y se busca la variación mínima de esta, es decir $\delta S = 0$ el cuál da origen a las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange dadas por

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu f_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_i} = 0. \quad (2.2)$$

Generalmente para que las teorías de campo se acerquen a ser físicamente válidas se necesita que sean locales, es decir, no puede existir un acoplamiento en el lagrangiano que relacione el mismo campo con dos sistemas de coordenadas distintos. Además de esto también se pide que se cumpla la invarianza de Lorentz, esto quiere decir que si hacemos la transformación de Lorentz $x \rightarrow \Lambda x$, donde Λ es la transformación, entonces el campo cambia como $f_i(x) \rightarrow f'_i(x) = f_i(\Lambda^{-1}x)$, y entonces si $f_i(x)$ es solución de las ecuaciones de movimiento, entonces necesariamente $f_i(\Lambda^{-1}x)$ también es solución de las ecuaciones de movimiento. O bien, la acción es también invariante ante transformaciones de Lorentz.

Una de las acciones más simples de un solo campo escalar ϕ en un espacio-tiempo plano se puede escribir como

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - U(\phi) \right), \quad (2.3)$$

de donde $U(\phi)$ es el potencial del campo escalar. Realizando la variación mínima de esta acción respecto al campo escalar se obtiene que la ecuación de Klein-Gordon

$$\square \phi - \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0, \quad (2.4)$$

donde $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)$ es el D'Alembertiano. Análogamente, si el campo escalar es complejo se puede construir la acción dada por

$$S = \int d^4x \left(-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^*\partial_\nu\phi - U(|\phi|^2) \right), \quad (2.5)$$

de donde * denota que se trata del complejo conjugado. Variando esta acción mínimamente respecto al campo escalar complejo se tiene que la ecuación de Klein-Gordon resultante está dada por

$$\square\phi - \frac{dU}{d|\phi|^2}\phi = 0. \quad (2.6)$$

Regresando al caso en el que el campo es real por simplicidad, se puede escoger un potencial particular sencillo que corresponde a una masa, el cual está dado por $U = m^2|\phi|^2$. En este caso se puede escribir la solución de la ecuación de Klein-Gordon como una suma de los modos normales que se obtienen de una transformación de Fourier y se puede escribir como

$$\phi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-i\omega_p t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^* e^{i\omega_p t - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right), \quad (2.7)$$

en donde $a_{\mathbf{p}}^*$ y $a_{\mathbf{p}}$ son números complejos, y $\omega_{\mathbf{p}}$ la frecuencia del modo normal de oscilación dada por

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}, \quad (2.8)$$

y cada modo normal se puede ver como el de un oscilador armónico clásico en el espacio. Esto se puede extender al caso de campos escalares complejos, simplemente lo que sucede es que el coeficiente de amplitud compleja cambia a otro valor distinto y deja de ser el complejo conjugado de la amplitud real para que el complejo conjugado del campo sea consistente.

2.1.1. Teorema de Noether

Existe un teorema en teoría de campos conocido como el teorema de Noether, el cual dicta que para toda simetría continua que se tenga en el lagrangiano, entonces habrá una corriente conservada asociada j^μ . Es decir, se satisfecerá la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.9)$$

Consideremos una transformación continua infinitesimal en el campo dada por

$$\phi_a(x) \rightarrow \phi_a(x) + \delta\phi_a(x) = \phi_a(x) + X_a(\phi). \quad (2.10)$$

Decimos que esta transformación es una simetría si deja las ecuaciones de movimiento invariantes, o bien el lagrangiano puede cambiar a lo más por una derivada total dada por

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu, \quad (2.11)$$

para algún conjunto de funciones $F^\mu(\phi)$. Para derivar el teorema consideramos primero hacer otra transformación arbitraria en los campos $\delta\phi_a$, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} \delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \partial_\mu(\delta\phi_a) \\ &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \right] \delta\phi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \delta\phi_a \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Cuando se satisfacen las ecuaciones de movimiento entonces el primer término del lado derecho se anula, por lo que únicamente nos quedamos con

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \delta\phi_a \right), \quad (2.13)$$

pero por la simetría se tiene que $\delta\phi_a = X_a(\phi)$, y por definición se tiene que $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu$, con lo cual da como resultado $\partial_\mu j^\mu = 0$, con la corriente conservada dada

por

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} X_a(\phi) - F^\mu(\phi). \quad (2.14)$$

Aunado a esto, también se tendrá una carga local conservada asociada. Dicha carga estará dada por

$$Q = \int_V j^0 d^3x, \quad (2.15)$$

donde V es un volumen finito, y se observa fácilmente de tomar la derivada

$$\frac{dQ}{dx^0} = \int_V d^3x \frac{dj^0}{dx^0} = \int_V d^3x \partial_{ij} j^i = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (2.16)$$

Esta ecuación quiere decir que cualquier carga que salga del volumen V debe ser compensada por un flujo de corriente del 3-vector \vec{j} de fuera del volumen.

2.2. Campo escalar en física de partículas

El modelo estándar de física de partículas puede ser descrito exitosamente mediante el uso de la Teoría Cuántica de Campos. Dicha teoría hace usos de campos escalares y espinoriales, que pueden ser reales o complejos, que permean todo el universo. Esta teoría combina la Teoría Clásica de Campos con Relatividad Especial, y Mecánica Cuántica, y trata a las partículas como estados excitados de estos campos. Esto se puede ver como el resultado de promover las cantidades $a_{\mathbf{p}}^*$ y $a_{\mathbf{p}}$ a operadores de creación y aniquilación $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$ y $\hat{a}_{\mathbf{p}}$. Además se necesita una relación de conmutación con estos operadores para realizar la cuantización. Para esto se necesita el momento conjugado, dado por

$$\pi^a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}, \quad (2.17)$$

de donde se puede construir la densidad Hamiltoniana dada por

$$\mathcal{H} = \pi^a(x) \dot{\phi}_a(x) - \mathcal{L}, \quad (2.18)$$

y de aquí el Hamiltoniano

$$H = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (2.19)$$

Teniendo esto en cuenta, las relaciones de conmutación entre los operadores está dada por

$$[\phi_a(\vec{x}), \phi_b(\vec{y})] = [\pi^a(\vec{x}), \pi^b(\vec{y})] = 0 \quad (2.20)$$

$$[\phi_a(\vec{x}), \pi^b(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_a^b. \quad (2.21)$$

Con esto en cuenta podemos escribir al campo y al momento conjugado en términos de los operadores de creación y aniquilación, de donde se tiene que

$$\phi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-i\omega_p t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\omega_p t - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right), \quad (2.22)$$

$$\pi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \frac{\sqrt{\omega_p}}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-i\omega_p t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\omega_p t - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right). \quad (2.23)$$

Juntando las relaciones de conmutación de los operadores, se tiene que estas son equivalentes a

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}] = [\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \quad (2.24)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}). \quad (2.25)$$

Teniendo esto ahora se puede escribir al Hamiltoniano en términos de estos operadores de creación y aniquilación, dando como resultado

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}, \quad (2.26)$$

y este es el que se encarga de medir la energía de un sistema.

Por lo que entonces una partícula se puede ver como el resultado de aplicar un operador de creación $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$ al vacío $|0\rangle$, y tendrá eigenestados de energía

$$H \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = H |\mathbf{p}\rangle = \omega_{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle. \quad (2.27)$$

Ahora, se pueden tener estados de n-partículas simplemente si se actúa con n operadores distintos de creación sobre el vacío, es decir

$$\hat{a}_{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle = |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle, \quad (2.28)$$

y debido a que los operadores $\hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger$ conmutan entre si, esto significa que el estado es simétrico ante el intercambio de cualesquiera dos partículas, es decir $|\mathbf{p}\mathbf{q}\rangle = |\mathbf{q}\mathbf{p}\rangle$, lo cual significa que las partículas son bosónicas. Estos mismos resultados se pueden extender al caso en que los campos son complejos. Existen distintas teorías escalares que conforman el modelo estándar, entre las más populares se encuentra la teoría ϕ^4 , la cual modela una interacción entre 2 bosones y consiste en agregar este término de interacción $\lambda\phi^4$ al lagrangiano de la teoría, en donde la constante de acoplamiento λ debe satisfacer que $\lambda \ll 1$, pues las contribuciones de este término serán perturbaciones marginales. Además aquí no necesariamente se conserva el número de partículas, pues puede haber procesos de aniquilación. Otra de estas teorías da origen al bosón de Higgs, cuya existencia ya ha sido confirmada experimentalmente en 2013 [29]. Dicho bosón está descrito en forma de doblete, y presenta simetría $U(N)$ y $SU(N)$, además dicho bosón es vital para explicar porqué ciertas partículas tienen masa.

2.3. Campo escalar en cosmología

Las teorías de campo escalar no son únicas de la física de partículas, pues en el área de cosmología también son muy útiles para explicar nuestro universo actual. Para esto se tiene que añadir un campo escalar con su potencial a la acción, que además en este caso tendrá añadida la acción de Einstein-Hilbert que da origen a las ecuaciones de Relatividad General, es decir se tendrá necesariamente que $S = S_g + S_\phi$, donde la acción del campo escalar S_ϕ está dada por

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right), \quad (2.29)$$

en donde $\sqrt{-g}$ es el elemento de volumen que depende del determinante de la métrica de este espacio-tiempo, que en cosmología resulta ser la métrica de Friedmann-Robertson-Walker-Lemaitre, dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.30)$$

en donde $a(t)$ es el factor de escala del universo y k es la curvatura que tiene el universo al día de hoy y puede tomar los valores $-1, 0,$ y 1 . Por lo que $\sqrt{-g} = a^2(t)$, que es el factor de escala. Con esto en cuenta se tiene que la variación mínima de la acción respecto al campo da origen a la ecuación de Klein-Gordon, que en este caso se ve como

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0, \quad (2.31)$$

donde V' denota la derivada del potencial respecto al campo, $\dot{\phi}$ la derivada del campo respecto al tiempo, y $H = \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de Hubble. Además de esta ecuación se deben de satisfacer las ecuaciones de Friedmann

$$H^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (2.32)$$

$$\dot{H} = -4\pi G \sum_i (\rho_i + P_i), \quad (2.33)$$

donde ρ_i es la densidad de energía, y P_i la presión del fluido para cada componente del universo (materia bariónica, materia oscura, radiación, neutrinos, y el campo escalar), y Λ la constante cosmológica. Donde además cada fluido debe de satisfacer la ecuación de estado

$$P_i \equiv w\rho_i, \quad (2.34)$$

y la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho}_i = 3H(1 + w_i)\rho_i. \quad (2.35)$$

Además, para que exista una expansión acelerada se debe de satisfacer que la ecuación de aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3P_i) = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (1 + 3w_i)\rho_i, \quad (2.36)$$

sea positiva, es decir, si se trata de un solo fluido se necesita $w < -1/3$, donde esta w es la w efectiva del universo.

2.3.1. Inflación

Uno de estos campos escalares que son útiles en cosmología es el inflatón, el cuál explica la etapa inflacionaria en los primeros instantes del universo. Ahora, como se quiere que la inflación ocurra en las primeras etapas del universo, y suponiendo que la constante cosmológica únicamente afecta tardíamente, la ecuación para que se tenga una expansión acelerada se reduce a

$$\rho_\phi + 3P_\phi < 0, \quad (2.37)$$

en donde para el campo escalar la densidad de energía está dada por

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (2.38)$$

y la presión por

$$P_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (2.39)$$

Para que se tenga inflación, además de satisfacer las ecuación anterior, el potencial y el campo deben de seguir las condiciones de rodamiento suave, las cuales son

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V \quad (2.40)$$

$$3H\dot{\phi} \gg \ddot{\phi}, \quad (2.41)$$

o bien, en términos únicamente del potencial

$$\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \ll \sqrt{16\pi G} \quad (2.42)$$

$$\frac{V''(\phi)}{\phi} \ll \sqrt{24\pi G}. \quad (2.43)$$

Generalmente estas ecuaciones no tienen una solución analítica a menos de que se tenga un forma específica, por ejemplo $V \propto e^{-\alpha\phi}$, la cual da una aceleración exponencial, o bien $V \propto \phi^2$ y $V \propto \phi^4$, la cual también satisface las condiciones de rodamiento suave pero da como resultado una inflación caótica.

La inflación es necesaria en cosmología para resolver varios problemas que se tienen, como lo es el problema del horizonte, el cual busca determinar por que existen zonas del universo causalmente desconectadas que se encuentran en equilibrio termodinámico, y el problema de la planitud, el cual busca determinar por que el universo actualmente parece tener geometría 3-D plana. Esto se soluciona si en épocas tempranas del universo se tiene una expansión acelerada donde el número de e-folds $N \equiv \ln(a/a_i)$ es de al menos 60.[54] La época de inflación termina cuando en algún momento se dejan de satisfacer las condiciones de rodamiento suave, o bien cuando alcanza el valor mínimo del potencial. Al suceder esto el inflatón empieza a oscilar y su densidad de energía decae, y esta recalienta al universo, por lo que el universo al estar en su época dominada por la radiación empieza con esta temperatura de Recalentamiento T_R .

2.3.2. Campos Escalares como energía oscura

A pesar de que el modelo estándar de cosmología Λ CDM describe muy bien al universo siempre y cuando se tenga una inflación cósmica, tiene el problema de que no se entiende la naturaleza de la constante cosmológica que produce la expansión acelerada, pues inicialmente se teorizó que esta proviene de la energía del vacío. Sin embargo predicciones de la teoría cuántica de campos establecen una discordancia entre el valor medido y el predicho, pues se tiene una diferencia de 120 ordenes de magnitud[6]. Por este motivo se han buscado distintas formas de

explicar la energía oscura, que además en la época actual compone aproximadamente el 70% del universo [43]. En épocas tardías los campos escalares también pueden modelar el efecto de expansión acelerada y explicar así la energía oscura. Existen distintas formas de lograr esto, las cuales son introducir estos campos como una especie de materia exótica con presión negativa, o bien modificar las ecuaciones de Einstein al utilizar una teoría Escalar-Tensorial no mínimamente acoplada.

Quintescencia

Uno de estos modelos es el de Quintescencia, en la cual se tiene que la ecuación de estado

$$w \equiv \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2/2 - V(\phi)}{\dot{\phi}^2/2 + V(\phi)}, \quad (2.44)$$

es dinámica, a diferencia del caso en el que solo hay constante cosmológica, en donde $\omega = -1$. Tomando en cuenta que solo se quiere estudiar el universo en épocas tardías se pueden ignorar las contribuciones de fluidos relativistas así como la curvatura del universo, por lo cuál las ecuaciones de Friedmann se reducen a

$$3M_{pl}^2 H^2 = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi) + \rho_m, \quad (2.45)$$

$$-2M_{pl}^2 \dot{H} = \dot{\phi}^2 + (1 + w_m)\rho_m, \quad (2.46)$$

en donde estamos tomando $M_{pl}^2 = 8\pi G$. De aquí para entender la dinámica cosmológica, siguiendo lo realizado en [25], es conveniente introducir las variables adimensionales

$$x \equiv \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}M_{pl}H}, \quad y \equiv \frac{\sqrt{V(\phi)}}{\sqrt{3}M_{pl}H}. \quad (2.47)$$

De aquí, el parámetro de densidad del campo escalar $\Omega_\phi \equiv \rho_\phi/\rho_{crit}$, donde la densidad crítica se define como la densidad de energía que tiene el universo para que la curvatura k sea plana se puede escribir como $\Omega_\phi = x^2 + y^2$, y además satisface que el parámetro de densidad de materia se relaciona con el parámetro

de densidad del campo escalar mediante $\Omega_m = 1 - \Omega_\phi$. También la ecuación de estado cambia a $\omega = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$, y se puede definir la ecuación de estado efectiva como

$$w_{eff} \equiv -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} = -1 + 2x^2 + (1 + w_m)(1 - x^2 - y^2). \quad (2.48)$$

Tomando ahora las derivadas de x y y respecto a $N = \ln(a)$, se tiene que

$$\frac{dx}{dN} = -3x + \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda y^2 + \frac{3}{2}x[(1 - w_m)x^2 + (1 + w_m)(1 - y^2)], \quad (2.49)$$

$$\frac{dy}{dN} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda xy + \frac{3}{2}y[(1 - w_m)x^2 + (1 + w_m)(1 - y^2)], \quad (2.50)$$

donde λ se define como $\lambda \equiv -M_{pl}V'/V$, y caracteriza la pendiente del potencial del campo, y además satisface

$$\frac{d\lambda}{dN} = -\sqrt{6}\lambda^2(\Gamma - 1)x, \quad (2.51)$$

con $\Gamma \equiv VV''/V'^2$. Lo que se necesita ahora es determinar un potencial para encontrar los puntos fijos y conocer la dinámica, es decir, los puntos donde $dx/dN = 0$ y $dy/dN = 0$. El modelo mas sencillo (λ constante) corresponde a un potencial exponencial $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi/M_{pl}}$, donde se satisface que $\Gamma = 1$, y la dinámica está bien entendida y efectivamente da un universo con ecuación de estado que evoluciona y genera una expansión acelerada en épocas tardías.

Existen varios potenciales con λ no constante que satisfacen las condiciones para tener una expansión acelerada tardía en el universo, los cuales se pueden dividir en dos tipos: (1) modelos congelantes, y (2) modelos descongelantes [14].

En el primer tipo de modelos se tiene que el campo escalar estaba rodando a lo largo del potencial en el pasado, pero al alcanzar la fase de aceleración cósmica se va deteniendo pues el potencial es poco profundo. Ejemplos de estos potenciales son $V(\phi) = M^{4+n}\phi^{-n}$, con $n > 0$ y $V(\phi) = M^{4+n}\phi^{-n}e^{\alpha\phi^2/M_{pl}^2}$.

En el segundo tipo de modelos se tiene que el campo escalar de masa m_ϕ está casi congelado en épocas tempranas debido a la fricción de Hubble (el término $H\dot{\phi}$), y

empieza a evolucionar luego de que H desciende debajo de m_ϕ . Ejemplos de estos potenciales son $V(\phi) = V_0 + M^{4+n}\phi^n$ con $n > 0$ y $V(\phi) = M^4 \cos^2(\phi)$.

K-escencia

Otra forma de tener energía oscura con campos escalares se consigue mediante la k-escencia, la cual consiste en acoplar mínimamente un campo escalar, sin embargo, a diferencia de quintaescencia donde el término cinético en la acción del campo escalar será no canónico, es decir

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} P(\phi, X) \quad (2.52)$$

donde $X = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$, y P una función que también será la presión del campo escalar. En dicha teoría densidad de energía estará dada por

$$\rho_\phi = 2XP_{,X} - P, \quad (2.53)$$

en donde $_{,X}$ simboliza la derivada respecto a la cantidad x , y además la ecuación de estado por

$$\omega = \frac{P}{2XP_{,X} - P'} \quad (2.54)$$

y las ecuaciones de Friedmann permanecen sin cambio, únicamente sustituyendo los nuevos valores de presión y densidad del campo escalar. En este tipo de teorías la labor de la expansión acelerada es realizada por el término cinético del campo escalar en lugar del potencial. Sin embargo si el término cinético es negativo puede producir campos escalares fantasmas [14].

Teorías Escalar-Tensorial.

Los efectos de energía oscura también se pueden modelar mediante modificaciones a la teoría de Relatividad General utilizando campos escalares como lo puede ser la teoría de Brans-Dicke, la cual es una teoría escalar-tensorial. Estas teorías escalar-tensorial pueden estar acopladas mínimamente a la gravedad, esto ocurre

cuando la acción correspondiente al campo escalar no tiene términos relacionados con la curvatura, y se llaman no-mínimamente acoplados cuando existen estos términos. Estas teorías normalmente tienden a ser de más alto orden debido a su complejidad. En el caso de la teoría de Brans-Dicke, la acción está dada por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right), \quad (2.55)$$

donde ϕ es el escalar de Brans-Dicke, cuyo papel físico es cambiar el valor de la constante de gravitación en distintos lugares, y $\omega(\phi)$ es la función de acoplamiento de Brans-Dicke que también cambia para distintas regiones, y V el potencial del campo.

Las ecuaciones de movimiento para esta teoría están dadas por

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (2.56)$$

$$\square \phi = \frac{8\pi}{3 + 2\omega} T, \quad (2.57)$$

mientras que la "constante" gravitacional efectiva estará dada por el inverso del campo escalar. ($G_{eff} = \phi^{-1}$).

2.3.3. Materia oscura Escalar.

Además de modelar la inflación, y la energía oscura, los campos escalares también son útiles para modelar otras componentes del universo como lo es la materia oscura. La materia oscura es uno de los misterios mas interesantes de la cosmología moderna, pues es necesaria para explicar la formación de estructura a gran escala, y también la forma de la curva de rotación de galaxias, la cuál se observa que tiende a un valor constante para radios grandes de las galaxias en lugar de decrecer como $v(R) \approx R^{-1/2}$, que es lo que se espera de la teoría, lo cuál da como resultado que a esta distancia, la masa encerrada sea de

$$M(R) = \frac{v_0^2 R}{G}, \quad (2.58)$$

es decir, la masa sigue incrementando a pesar de que el disco ya no es visible. Es decir, la materia oscura forma la mayor parte del contenido de masa en las galaxias, y además compone aproximadamente el 25 % de toda el contenido energético del universo [43]. El modelo cosmológico estándar Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter), modela la materia oscura fría (velocidades no relativistas) y se ajusta bastante bien a la mayoría de las observaciones, sin embargo presenta ciertos problemas, pues mediante la búsqueda de esta materia oscura se han puesto límites muy fuertes en cuanto a cómo deben ser las interacciones entre materia oscura y materia ordinaria, lo que ha puesto a posibles candidatos a esta como los WIMPS (Weakly interacting massive particles) bajo mucha presión, por lo que se buscan otros posibles candidatos como lo pueden ser los campos escalares.

Campo escalar sin autointeracción.

La materia oscura de campo escalar se refiere a la hipótesis de que la materia oscura puede ser descrita mediante un campo escalar complejo ϕ con un potencial $V(\phi)$ adecuado. Para que el campo escalar se comporte como materia oscura se necesita que el potencial tenga un valor mínimo en algún valor crítico del campo ϕ_c , donde se puede definir la escala de masa del campo escalar con la relación

$$m_a^2 = \partial_\phi^2 V(\phi_c), \quad (2.59)$$

por lo que el potencial mas sencillo está dado por $V(\phi) = m^2 c^2 \phi^2 / \hbar^2$, y debido a las constricciones que se tienen se necesita que esta masa sea del orden de $10^{-22} eV / c^2$. Es decir, se trata de un campo escalar ultra ligero.

La formación de halos de materia oscura se puede describir muy bien con la aproximación no relativista, en donde la ecuación de Klein-Gordon y las ecuaciones de Einstein se reducen a las ecuaciones de Schrödinger-Poisson, dadas por

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi + m\phi\Phi \quad (2.60)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho, \quad (2.61)$$

donde ϕ es la función de onda que describe a los bosones que forman el campo escalar, Φ es el potencial gravitacional, y $\rho = m^2\phi^2$ la densidad de masa. Además este sistema tiene la simetría de escala dada por

$$\{t, x, \phi, \Phi\} \rightarrow \{\Lambda^{-2}t, \Lambda^{-1}\hat{x}, \Lambda^2\phi, \Lambda^2\Phi\}. \quad (2.62)$$

Se buscan las configuraciones de equilibrio esféricamente simétricas, cuyo ansatz está dado por

$$\phi = \varphi(r)e^{-i\gamma t}, \quad (2.63)$$

de donde entonces las soluciones se convierten en un problema de eigenvalores para

$$\nabla^2\varphi = 2(\Phi - \gamma)\varphi \quad (2.64)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\varphi, \quad (2.65)$$

y debido a la escala de simetría solo se necesita encontrar la solución que corresponde a $\varphi(0) = 1$ para determinar la familia completa de soluciones. Las diferentes soluciones numéricas clasificadas por el número de nodos se muestra en (2.3.1).

Existen cantidades físicas de energía las cuáles pueden ayudarnos a entender la evolución de la función de onda, las cuáles están dadas por

$$E = \int_V \text{Im}(\phi^* \partial_t \phi) dV = K + W \quad (2.66)$$

$$K = -\frac{1}{2} \int_V \text{Re}(\phi^* \nabla^2 \phi) dV \quad (2.67)$$

$$W = \int_V \Phi \phi^2 dV, \quad (2.68)$$

y si se tiene una configuración en equilibrio entonces se tiene que $K/|W| = 1/2$ y $E < 0$ y además la configuración está virializada.

A partir de realizar simulaciones de materia oscura de campo escalar, las cuales resuelven la ecuación de Schrödinger-Poisson en un contexto cosmológico, se

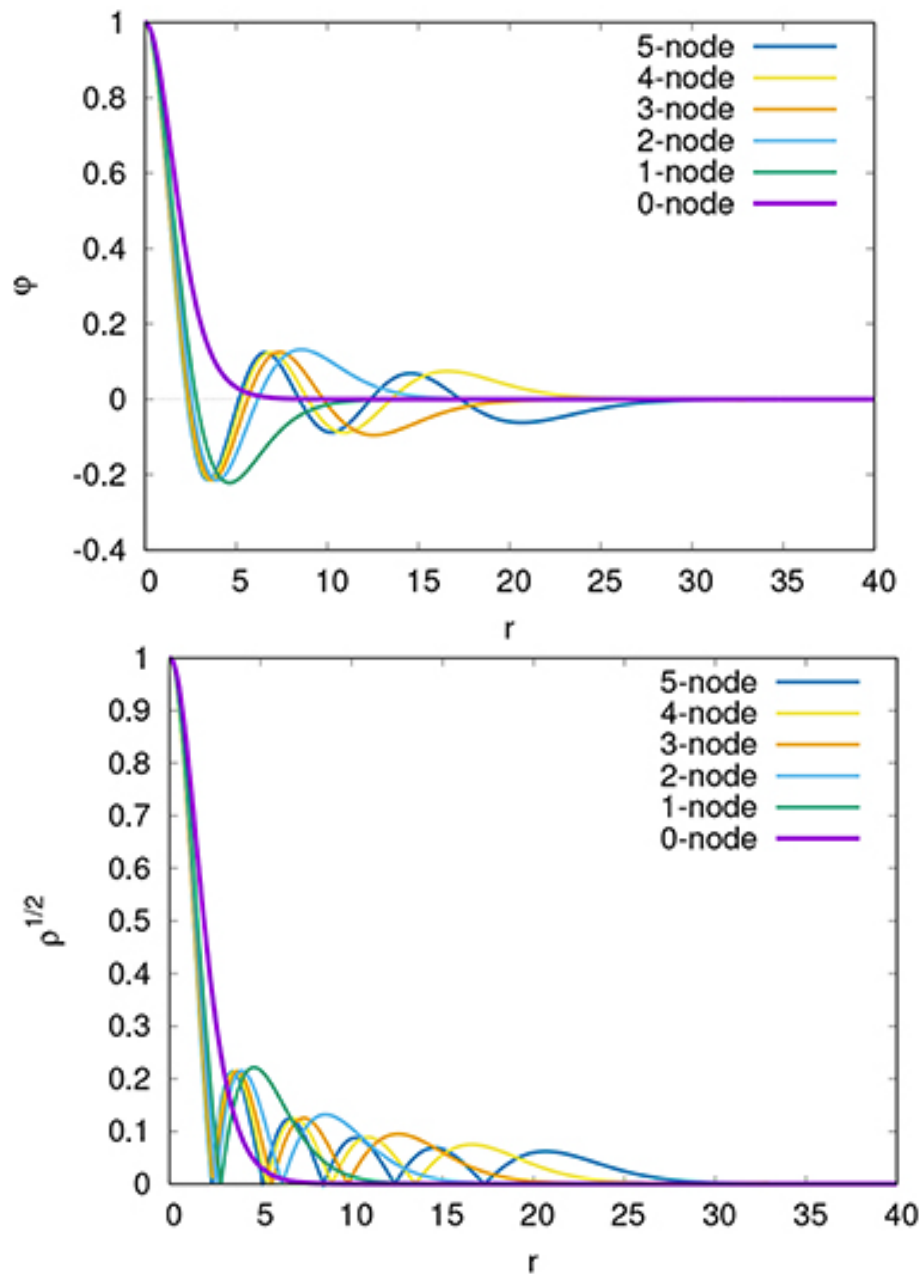


Fig. 2.3.1: El panel superior muestra la solución al sistema Schrödinger-Poisson con distintos nodos para la función de onda, mientras que el panel inferior muestra la raíz cuadrada de la densidad. [51]

encuentra que existe una estructura gravitacional que resulta ser un núcleo de solitón, que está rodeado de un patrón de interferencia que se asemeja al perfil de Navarro-Frenk-White (NFW) típico en las simulaciones de N-cuerpos de materia

oscura fría [51]. La presencia de solitones en el centro de las galaxias es muy difícil de detectar, sin embargo se pueden inferir restricciones teóricas a partir de las simulaciones. Una relación que se encuentra en estas simulaciones llamada núcleo-halo relaciona la masa del núcleo (M_c) con la del halo (M_h) como $M_c/M_h^{1/3}$, y esta a su vez sugiere la otra que relaciona la energía específica del solitón con la del halo como $E_s/M_s \approx E_h/M_h$. Dicha relación impone una restricción sobre la masa que pueda tener el campo.

Recordando que en el contexto cosmológico las ecuaciones a resolver están dadas por (2.31-2.35) donde ahora las componentes importantes en el universo donde es relevante la materia oscura son los parámetros de densidad $\Omega_i = \rho_i/\rho_{crit}$ de la radiación Ω_r , neutrinos Ω_ν , materia bariónica Ω_b , y el campo escalar Ω_ϕ . Resolviendo estas ecuaciones para $m \approx 10^{-22}eV$, y usando como condiciones iniciales los parámetros de densidad medidos por WMAP $\Omega_r = 4 \times 10^{-5}$, $\Omega_\nu = 2 \times 10^{-5}$, $\Omega_b = 0.04$, $\Omega_\Lambda = 0.73$, $\Omega_{DM} = 0.22994$, se puede obtener la evolución de los parámetros de densidad, la cual se observa en la figura (2.3.2). De dicha figura se observa que con el campo escalar se recupera el mismo comportamiento que en el modelo estándar Λ CDM, y está de acuerdo con el comportamiento observado por WMAP. Además si se realiza un análisis de perturbaciones estas se ajustan a los picos acústicos del espectro de potencias de la radiación cósmica de fondo.

Campo escalar con autointeracción.

Si se añade un término de autointeracción $\lambda\phi^4/4\hbar c$ en el potencial, entonces la restricción que se tiene sobre el rango de masas para la materia oscura cambia y se pueden tener masas mayores, pues ahora la restricción está sobre el cociente λ/m^4 , y la ecuación diferencial en el caso Newtoniano se convierte en la ecuación de Gross-Pitaevskii-Poisson, la cuál están dadas por

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi + m\phi\Phi + g|\phi|^2\phi \quad (2.69)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho, \quad (2.70)$$

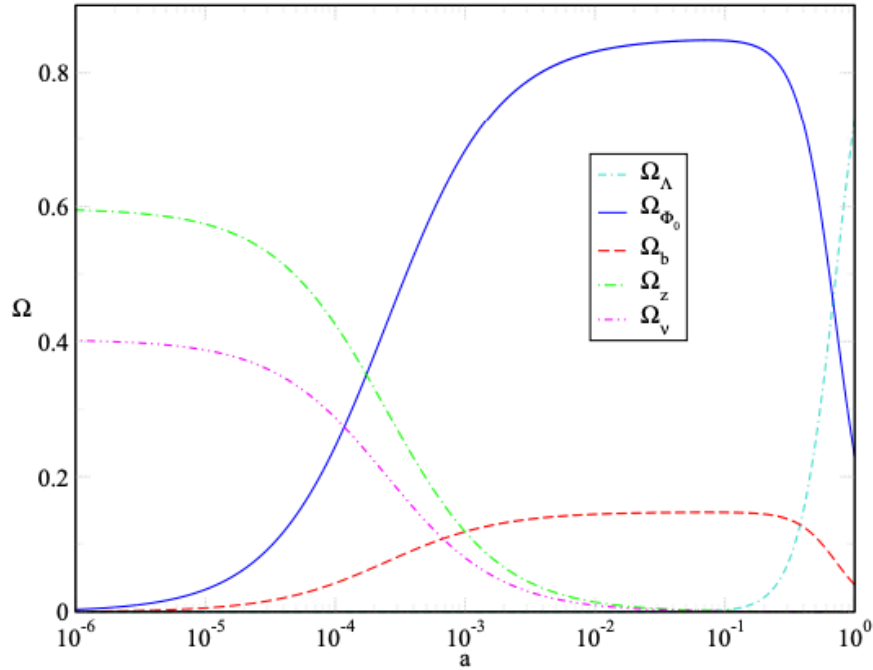


Fig. 2.3.2: Evolución para los parámetros de densidad de las distintas componentes del universo contra el factor de escala. [38]

donde $g \equiv \lambda \hbar^3 / (2m^2c)$, donde de manera similar al caso sin autointeracción se tiene la simetría de escala dada por simetría de escala dada por

$$\{t, x, \lambda, \phi, \Phi\} \rightarrow \{\Lambda^{-2}t, \Lambda^{-1}\hat{x}, \Lambda^2\phi, \Lambda^{-2}\lambda, \Lambda^2\Phi\}. \quad (2.71)$$

De forma similar al caso anterior se buscan las configuraciones esféricamente simétricas que estén en equilibrio los cuales son estados quasi-estacionarios, por lo que el ansatz dado en (2.63) sigue siendo válido. Debido a la simetría de escala ocurre algo similar al caso sin autointeracción al momento de encontrar soluciones, es decir, solo se necesita encontrar una solución $\phi(0) = 1$ para así determinar la familia completa de soluciones, esto para un valor fijo de λ . Sin embargo, debido a la no linealidad de las ecuaciones si se desea utilizar un valor distinto de λ es necesario resolver la ecuación diferencial de nuevo, pues estas no escalan.

Al igual que en el caso sin autointeracción se pueden construir las cantidades de energía que nos darán las relaciones entre el halo y núcleo del solitón, sin embargo

al tener ahora autinteracción, la energía va a estar dada por $E = K + W + U_{SI}$, donde U_{SI} es la energía asociada a la autointeracción y está dada por

$$U_{SI} = \int_V \frac{g}{2} |\phi|^4 dV, \quad (2.72)$$

y se encuentran las mismas relaciones que en el caso anterior para conocer cuando se da la virialización, además de que estas relaciones pueden usarse para hacer constricciones sobre los parámetros.

Simulaciones numéricas muestran que el modelo de materia oscura escalar con autointeracción (tanto el caso repulsivo $\lambda > 0$, como el caso negativo $\lambda < 0$) es una buena alternativa a la materia oscura fría pues evade ciertos problemas que se encuentran con la materia oscura tradicional, como lo son el problema de la cúspide de los halos. Además de que existen condiciones para que el solitón central colapse en un agujero negro supermasivo, lo cual sería una posible explicación sobre la generación de estos en los centros de las galaxias [41]. Analizando las distintas fenomenologías que puedan tener como los los perfiles de densidad galáctica se recuperan los perfiles NFW al exterior del solitón, mientras que evoluciones de los parámetros de densidad recuperan lo predicho por Λ CDM y se acoplan a las observaciones.

2.4. Objetos compactos de campo escalar

2.4.1. Estrellas de bosones

El campo escalar puede formar objetos masivos conocidos como estrellas de bosones. Dichos objetos son resultado de obtener la solución al sistema de ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon imponiendo simetría esférica, y además que la solución sea regular en todo punto y asintóticamente plana. La métrica del espacio tiempo que será solución de este sistema estará dada por

$$ds^2 = -\alpha^2(r)dt^2 + \gamma^2(r)dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.73)$$

donde $\gamma = 1 - 2M(r)/r$. Con esto en cuenta las componentes 00 y rr del tensor Einstein estarán dadas por

$$G_{00} = \frac{\alpha^2}{r^2} + 2\frac{\alpha^2}{r\alpha^3}\gamma' - \frac{\alpha^2}{r^2\gamma} \quad (2.74)$$

$$G_{rr} = -\frac{\gamma^2}{r^2} + \frac{2}{\alpha r}\alpha' + \frac{1}{r^2}, \quad (2.75)$$

en donde $'$ denota la derivada respecto a la coordenada radial. Considerando que el potencial del campo escalar corresponde a un potencial tipo masa ($V(|\phi|^2) = \mu^2|\phi|^2$), y además consideramos que el campo escalar tiene unidades adimensionales, entonces el inverso de esta masa μ tendrá unidades de distancia, y se le conoce a esta distancia $r_\phi = 1/\mu$ como longitud característica del campo escalar. Considerando esto, y tomando el cociente entre longitudes características como $\Gamma = R_0/r_\phi$, el tensor de energía momento adimensional (1.19) toma la forma de

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^* + \partial_\mu\phi^*\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi^* + \Gamma^2|\phi|^2 \right] \right). \quad (2.76)$$

Descomponiendo el campo escalar en su forma armónica $\phi = \phi(r)e^{-i\omega x_0}$ donde ω es la frecuencia, se tiene entonces que las componentes 00 y rr del tensor de energía momento adimensional están dadas por

$$T_{00} = \frac{1}{2}\omega^2\phi^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\phi'^2 + \Gamma\frac{\alpha^2}{2}\phi^2 \quad (2.77)$$

$$T_{rr} = \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}\omega^2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\phi^2 - \Gamma\frac{\gamma^2}{2}\phi^2. \quad (2.78)$$

Igualando estas componentes con sus respectivas contrapartes del tensor de Einstein, y multiplicando la componente 00 por $r\gamma^2/2\alpha^2$, y la componente rr por $r/2$, se tiene que las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1-\gamma^2}{2r} + \frac{r}{4} \left[\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\omega^2\phi^2 + \phi'^2 + \gamma^2\Gamma^2\phi^2 \right] \quad (2.79)$$

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma^2-1}{2r} + \frac{r}{4} \left[\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\omega^2\phi^2 + \phi'^2 - \gamma^2\Gamma^2\phi^2 \right]. \quad (2.80)$$

Aquí se tienen 2 ecuaciones que se deben de satisfacer para tener una solución, sin embargo falta una ecuación más para completar el sistema. Dicha ecuación es la ecuación de Klein-Gordon, la cual está dada para este caso por

$$\square\phi - \mu^2\phi = 0. \quad (2.81)$$

Esta ecuación con la métrica dada anteriormente y coordenadas adimensionales se puede escribir como

$$\phi'' - \phi' \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2}{r} \right) - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \omega^2 \phi + \gamma^2 \Gamma^2 \phi. \quad (2.82)$$

Teniendo ya todas ecuaciones que completan al sistema estas se pueden integrar numéricamente, dadas los valores de Γ y ω imponiendo como condición de frontera que $\gamma(0) = 1$, $\alpha(0) = \alpha_0 \neq 0$, $\phi(0) = \phi_0 \neq 0$, y $\phi'(0) = 0$, para que así la solución sea regular en todos los puntos y resulta ser un problema de eigenvalores. Dichas soluciones serán oscilantes y esto es lo que actuará en contra de la gravedad y será lo que las mantendrá estables. Además de esto se tiene que dichas estrellas de bosones poseen una masa crítica análoga al límite TOV, a partir de la cual colapsarán a un agujero negro, la cual depende de la solución. El comportamiento de las estrellas de bosones es similar al de los agujeros negros, además, al colisionar entre si pueden producir ondas gravitacionales, de donde al estudiarlas se podría encontrar una prueba de la existencia de estos objetos [22].

2.4.2. ℓ -estrellas de bosones.

Existen configuraciones de campo escalar que pueden formar otro tipo de estrellas de bosones mas generales. Estas configuraciones se construyen a partir de un número $N = 2l + 1$ impar de campos escalares complejos, los cuales mantienen la simetría esférica si es que los estados excitados con momento angular generalizado $\ell = (N - 1)/2$ tienen la misma amplitud que el estado base. El tensor de

energía momento para dicha distribución de campos escalares estará dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_i \left[\nabla_\mu \Phi_i^* \nabla_\nu \Phi_i + \nabla_\mu \Phi_i \nabla_\nu \Phi_i^* - g_{\mu\nu} (\nabla_\alpha \Phi_i \nabla^\alpha \Phi_i^* + \mu^2 \Phi_i \Phi_i^*) \right]. \quad (2.83)$$

Notemos que como la masa es la misma para los N campos y además no interactúan entre si, se tiene que esta expresión es invariante bajo las transformaciones $U(N)$ en sus espacios dados. Además se supone que cada campo satisface la ecuación de Klein-Gordon $(\nabla_\mu \nabla^\mu - \mu^2) \Phi_i = 0$. Además, ahora el campo escalar tendrá 2 nuevos parámetros ℓ y m asociados, en donde ℓ se relaciona con el número de momento angular fijo del campo y m toma el rol del índice i tomando los valores $-\ell, \ell + 1, \dots, \ell$. El análisis de esta nueva configuración es similar a la anterior, sin embargo ahora la expansión armónica de los campos escalares estará dada por

$$\Phi_m = \phi_\ell(r) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = \psi_\ell(r) e^{i\omega t} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi), \quad (2.84)$$

donde la amplitud para cada valor de m es la misma. Notamos que a pesar de que ahora aparece una parte angular, y distintos campos escalares, el tensor de energía momento sigue siendo esféricamente simétrico. Para probar esto partimos de la identidad dada por

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2\ell + 1}{4\pi}, \quad (2.85)$$

por lo que entonces se satisface que

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\theta, \varphi) \hat{\nabla}_A Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = 0, \quad (2.86)$$

donde $\hat{\nabla}_A$ y \hat{g}_{AB} son la derivada covariante y la métrica en la 2-esfera, es decir $A, B = \theta, \varphi$. Tomando otra derivada covariante sobre la expresión anterior se tiene que

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} \hat{\nabla}_B Y_{\ell,m}^* \hat{\nabla}_A Y_{\ell,m} = - \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}^* \hat{\nabla}_B \hat{\nabla}_A Y_{\ell,m}, \quad (2.87)$$

de donde sacando la traza, tomando en cuenta que

$$\hat{\nabla}_A \hat{\nabla}^A Y_{\ell,m} = -\ell(\ell+1)Y_{\ell,m}, \quad (2.88)$$

se tiene que

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} \hat{\nabla}^A Y_{\ell,m}^* \hat{\nabla}_A Y_{\ell,m} = \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{4\pi}. \quad (2.89)$$

Si ahora se saca la divergencia de (2.87), y usando la identidad (2.86), se tiene que

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} \hat{\nabla}^A Y_{\ell,m}^* \hat{\nabla}_A \hat{\nabla}_B Y_{\ell,m} = 0. \quad (2.90)$$

Y dicha ecuación implica que el campo tensorial simétrico y sin traza sobre la 2-esfera dado por

$$\tau_{AB} = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[\hat{\nabla}_B Y_{\ell,m}^* \hat{\nabla}_A Y_{\ell,m} - \frac{1}{2} \hat{g}_{AB} \hat{\nabla}^C Y_{\ell,m}^* \hat{\nabla}_C Y_{\ell,m} \right] \quad (2.91)$$

tiene divergencia cero. Además, todos los campos tensoriales simétricos, sin traza, y con divergencia cero en la 2-esfera son triviales tal que $\tau_{AB} = 0$, lo cual implica que

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} \hat{\nabla}_B Y_{\ell,m}^* \hat{\nabla}_A Y_{\ell,m} = \frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{4\pi} \hat{g}_{AB}. \quad (2.92)$$

Por lo que entonces el tensor de energía momento tiene la forma

$$T_{ab} = \frac{2\ell+1}{4\pi} \left[\partial_a \phi_\ell^* \partial_b \phi_\ell + \partial_b \phi_\ell^* \partial_a \phi_\ell - \bar{g}_{ab} (\partial_c \phi_\ell^* \partial^c \phi_\ell + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \mu^2 \right) |\phi_\ell|^2) \right], \quad (2.93)$$

$$T_{aB} = 0, \quad (2.94)$$

$$T_{AB} = -\frac{2\ell+1}{4\pi} r^2 \left[\bar{g}^{cd} \partial_c \phi_\ell^* \partial_d \phi_\ell + \mu^2 |\phi_\ell|^2 \right] \hat{g}_{AB}, \quad (2.95)$$

donde $a, b = t, r$, y \bar{g}_{ab} son las componentes de la parte temporal radial de la métrica $-\alpha^2 dt^2 + \gamma^2 dr^2$.

Teniendo la forma explícita del tensor de energía-momento, entonces el sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon se reduce a

$$M' = \frac{(2\ell + 1)r^2}{2} \left[\frac{\psi_\ell'^2}{\gamma^2} + \left(\mu^2 + \frac{\omega^2}{\alpha^2} + \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) \psi_\ell^2 \right], \quad (2.96)$$

$$\frac{(\alpha\gamma)'}{\alpha\gamma^3} = (2\ell + 1)r \left[\frac{\psi_\ell'^2}{\gamma^2} + \frac{\omega^2}{\alpha^2} \psi_\ell^2 \right] \quad (2.97)$$

$$\frac{1}{r^2\alpha\gamma} \left(\frac{r^2\alpha}{\gamma} \psi_\ell' \right)' = \left(\mu^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} + \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) \psi_\ell. \quad (2.98)$$

y se puede mostrar que el caso $\ell = 0$ coincide con el caso de estrellas de bosones estándar. Al igual que en el caso anterior, para encontrar la familia de soluciones se piden como condiciones de frontera que $\gamma(0) = 1$, $\alpha(0) = \alpha_0 \neq 0$, $\phi(0) = \phi_0 \neq 0$, y $\phi'(0) = 0$, pues tenemos libertad de reescalamiento, y el problema se convierte en uno de eigenvalores, el cual se puede resolver numéricamente mediante el método de shooting para encontrar las frecuencias ω que satisfagan el sistema.

Para un valor de momento angular ℓ dado, las configuraciones en equilibrio son catalogadas por la amplitud del campo ϕ_ℓ , el cual es un parámetro continuo, y un parámetro discreto n , el cual cataloga las soluciones del problema de eigenvalores. Cada una de estas configuraciones tiene además asociadas una frecuencia ω , una masa M , y un radio efectivo R_{99} , el cual es el radio a partir del cual se concentra el 99% de la configuración del campo escalar. La figura (2.4.1) muestra estas configuraciones de equilibrio para distintos valores de ℓ .

De la figura (2.4.1) se muestra claramente que este tipo de configuraciones de estrellas de bosones permite tener una mayor compacidad mientras se aumenta el valor del momento angular ℓ . La figura (2.4.2) muestra las configuraciones del punto B en la figura (2.4.1), y se grafican la función de onda ψ_ℓ , la densidad ρ , y los coeficientes de la métrica $\alpha(r)$ y $\gamma(r)$.

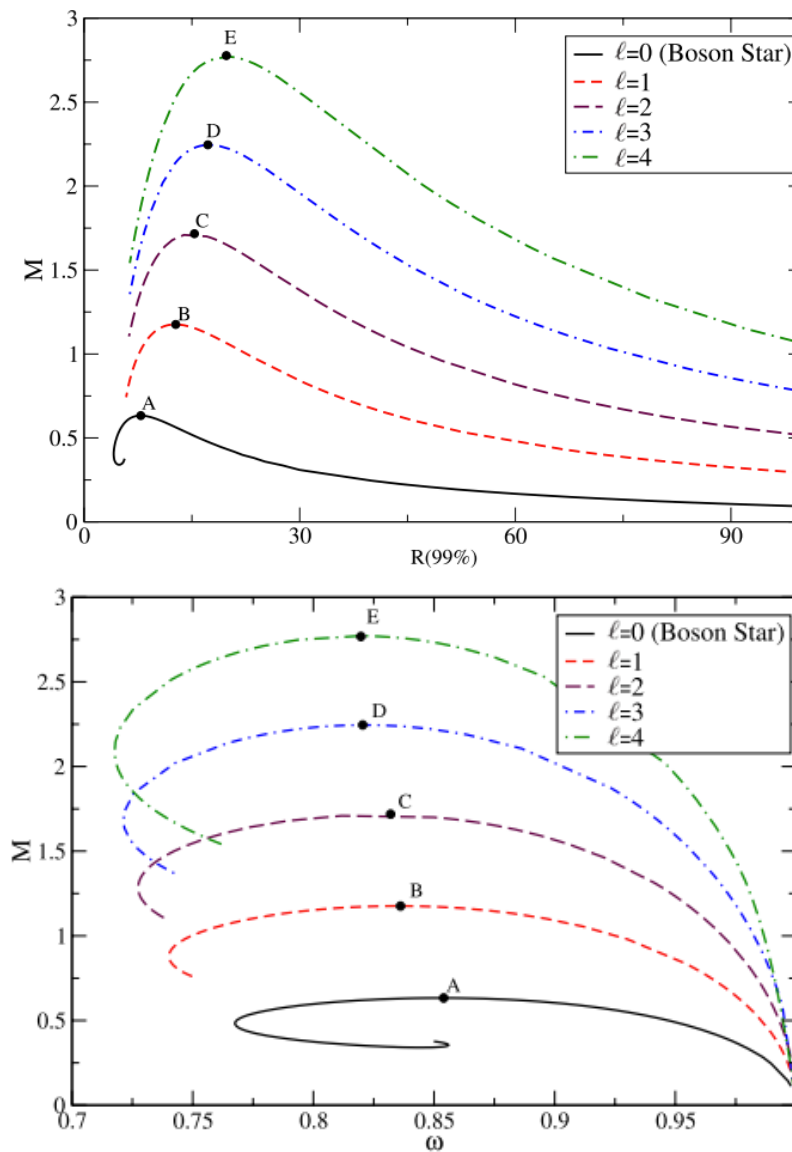


Fig. 2.4.1: El panel superior muestra la masa total vs el radio efectivo de las estrellas de Bosones para distintos ℓ donde cada punto de la curva es una solución distinta, mientras que el panel inferior muestra la masa vs la frecuencia de oscilación del campo que las conforma. [11]

2.4.3. Teoremas de no pelo en Agujeros Negros.

Los objetos mas compactos que existen en el universo son los agujeros negros, pero pueden ser descritos utilizando un campo escalar?

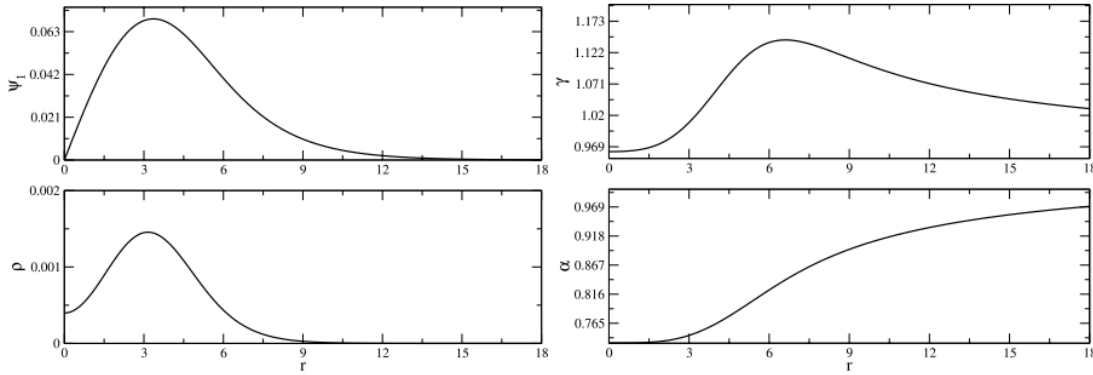


Fig. 2.4.2: El panel izquierdo muestra la función de onda $\psi_1(r)$, y la densidad de energía $\rho(r) = (2\ell + 1)\rho^{(\ell)}(r)/8\pi$ como funciones de la coordenada radial. Panel derecho: muestra los coeficientes de la métrica $\gamma(r)$ y $\alpha(r)$ como funciones de la coordenada radial. Notemos que aunque la función de onda se anula en el origen, la densidad de energía toma un valor distinto de cero en este punto. Esta es una característica de las configuraciones con $\ell = 1$. La regularidad de estos objetos es evidente en los perfiles de los coeficientes métricos. [11]

En gravitación, cuando se trata de un espacio tiempo de agujero negro con horizonte regular, estático, y asintóticamente plano existe un teorema llamado teorema de no-pelo, el cuál dice que ningún agujero negro puede ser caracterizado por más de 3 parámetros, los cuales son su masa, su carga, y su rotación. Es decir, si se tuviera un campo escalar en un espacio-tiempo que satisfaga las condiciones anteriores este sería acretado por el agujero negro o expulsado hasta infinito, no teniendo influencia alguna en la forma del espacio-tiempo.

Este teorema fue conjeturado por Jacob Bekenstein en 1968 luego de que Israel Werner probara que dentro de la teoría de Relatividad General, todo agujero negro, estático, asintóticamente plano, con horizonte de eventos regular, será descrito por un espacio-tiempo de Schwarzschild o un espacio-tiempo de Reissner-Nordstrom si hay un campo electromagnético. [34] Aunque esta conjetura ha sido probada para muchos casos, existen contraejemplos. En 1999 se descubrió que en teorías tipo Einstein-Yang-Mills, el agujero negro permite pelo dado por campos escalares y campos vectoriales no abelianos [52]. Posteriormente se hicieron más estudios de esta conjetura para distintos casos de materia.

Jacob Bekenstein [20] probó que una estrella que colapsa esféricamente en un agujero negro estático no puede tener campos clásicos escalares masivos o vectoriales en el exterior. En particular, para el caso del campo escalar masivo, utilizó un acoplamiento mínimo de la gravedad a un campo escalar, dado por la acción

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[R - \kappa \left(\frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + V(\phi) \right) \right], \quad (2.99)$$

donde $\kappa = 16\pi G$ es la constante de acoplamiento, ϕ el campo escalar, y $V(\phi)$ el potencial escalar.

Notamos que la acción de esta teoría tiene dos términos dinámicos, que son $g_{\mu\nu}$ y ϕ , por lo cuál al utilizar el principio de mínima acción se tienen que hacer 2 variaciones distintas, una respecto al campo y otra respecto al tensor métrico e igualar a cero para obtener las ecuaciones de movimiento, sin embargo, para la prueba del teorema de no-pelo formulada por Bekenstein solo es necesario obtener las ecuaciones de movimiento para el campo ϕ .

Haciendo la variación con respecto al campo escalar se obtiene

$$\delta S_\phi = 0 = \int dx^4 \sqrt{-g} \left(-\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \delta\phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta\phi \right), \quad (2.100)$$

de donde haciendo integración por partes en el primer término se tiene

$$0 = - \int dx^4 \sqrt{-g} \nabla_\mu (\nabla^\mu \phi \delta\phi) + \int dx^4 \sqrt{-g} \left(\nabla_\mu (\nabla^\mu \phi) \delta\phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta\phi \right), \quad (2.101)$$

y observando que el primer término de (2.101) es una derivada total se puede aplicar el teorema de Stokes, por lo que se produce un término de frontera que se anula en infinito, entonces la variación queda como

$$0 = \int dx^4 \sqrt{-g} \delta\phi \left(\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \right), \quad (2.102)$$

por lo que la ecuación de movimiento para el campo es

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (2.103)$$

Si suponemos que el espacio-tiempo corresponde a un agujero negro con simetría esférica, asintóticamente plano, globalmente hiperbólico, estático, y existe un horizonte de Killing que coincide con el horizonte de eventos y además es regular, es decir, una frontera entre regiones del espacio-tiempo donde el vector de Killing se anula, y además esta superficie será de bifurcación. Como el espacio-tiempo es estático y globalmente hiperbólico, existen hipersuperficies Σ espacialoides llamadas superficies de Cauchy. Entonces, si asociamos a t con el parámetro de Killing y lo usamos como coordenada temporal estas hipersuperficies estarán en $t = cte$. Si multiplicamos (2.103) por ϕ e integramos en un volumen en una región de espacio-tiempo cuya frontera está dada por el horizonte de Killing de bifurcación, 2 hipersuperficies espacialoides Σ_1 y Σ_2 , y la región asintótica como se observa en la figura(2.4.3), se tiene que

$$\int \sqrt{-g} \left(\phi \nabla^\mu \nabla_\mu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi \right) = 0. \quad (2.104)$$

Notamos que podemos integrar por partes el primer término de (2.104), lo cual queda como

$$\int \sqrt{-g} \nabla_\mu (\phi \nabla^\mu \phi) - \int \sqrt{-g} (\nabla_\mu \phi (\nabla^\mu \phi)), \quad (2.105)$$

de donde el primer término de (2.105) se anula en las fronteras de la región de integración, ésto porque el horizonte de Killing es de medida cero comparado con el resto de la región, y como el espacio-tiempo se supone asintóticamente plano, se tiene que asintóticamente $\phi \rightarrow 0$, por lo que se anula en esta frontera, mientras que los vectores normales de las hipersuperficies espaciales son antiparalelos por lo cual la suma de esas contribuciones se cancela teniendo signos opuestos.

Con esto, la integral obtiene la forma

$$\int \sqrt{-g} \left(-\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi \right) = 0, \quad (2.106)$$

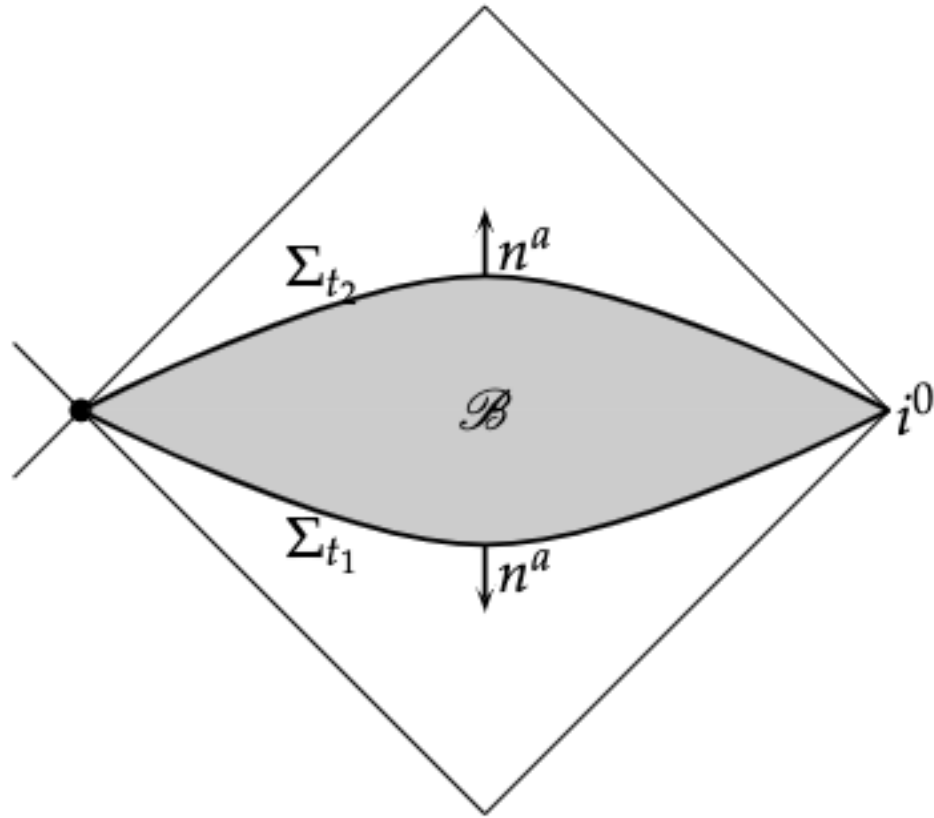


Fig. 2.4.3: Región de Integración en el espacio-tiempo

y si suponemos que el potencial tiene la forma de

$$V = \sum_{i=1}^n a_i \phi^{2i}, \tag{2.107}$$

con $a_i > 0$, entonces (2.106) se escribe como

$$\int \sqrt{-g} \left(-\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - \sum_{i=1}^n 2ia_i \phi^{2i} \right) = 0. \tag{2.108}$$

Ahora, debido a que se tiene simetría esférica $\phi = \phi(r)$ i.e. al campo escalar depende únicamente de la coordenada radial, y por la estaticidad, el término $(\nabla\phi)^2$ será estrictamente positivo pues $\nabla\phi$ será un vector espacialoide, por lo que (2.108) es estrictamente negativo, y solo se satisface si $\phi = 0$. Esto significa que dicho campo no puede existir en el exterior del agujero negro, por lo tanto la métrica que describe este espacio-tiempo será la métrica de Schwarzschild caracterizado

únicamente por su masa.

En teorías de gravedad escalar-tensorial no mínimamente acopladas también existe una formulación del teorema de no-pelo[48], que ha sido probada para teorías tipo Brans-Dicke con una acción general dada por (2.55). Ahora, haciendo una transformación conforme de la métrica de la forma

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}, \quad (2.109)$$

donde Ω es el factor conforme, el cuál es un mapeo suave que mapea el espacio-tiempo en el marco de Jordan M en un espacio-tiempo conforme en el marco de Einstein \bar{M} . Redefiniendo de manera no lineal el término escalar de Brans-Dicke como

$$\Phi = \int \sqrt{\frac{2\omega(\phi) + 3}{16\pi}} \frac{d\phi}{\phi}, \quad (2.110)$$

la acción pasa a la forma de

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left(\frac{\bar{R}}{16\pi} - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \Phi \bar{\nabla}_\nu \Phi - U(\Phi) \right), \quad (2.111)$$

donde la tilde denota las cantidades asociadas con la métrica reescalada $\bar{g}_{\mu\nu}$, y

$$U(\Phi) = \frac{V(\phi(\Phi))}{\phi^2(\Phi)}. \quad (2.112)$$

Es decir, ahora esta acción es la acción de un campo con acoplamiento mínimo a la gravedad, y se pueden usar los pasos realizados anteriormente para teorías de este tipo para probar la conjetura de no-pelo tal como se muestra en [27, 48].

Las pruebas del teorema de no-pelo son importantes, pues sugieren que los agujeros negros son indistinguibles en Relatividad General y teorías modificadas. En

particular, en esta sección nos hemos fijado en el caso particular de campos escalares, pues además de ser el caso más sencillo, muchas teorías alternativas a Relatividad General incluyen este tipo de campos, y las pruebas presentadas aquí pueden ser extendidas a otro tipo de teorías.

Si removemos la condición de estaticidad, entonces este teorema ya no es válido, y se pueden tener configuraciones de campo escalar que actúan como pelo o pseudo-pelo en el agujero negro[16]. De igual forma se puede poner un campo de prueba en este espacio-tiempo, esto quiere decir que el campo escalar no es auto-gravitante. El estudio de estos campos en vecindades de agujeros negros se verá a detalle en el siguiente capítulo.

2.5. Características y parametros del campo escalar.

Hemos visto que las teorías escalar-tensorial minimamente acopladas tienen una densidad lagrangiana con un campo real de la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi), \quad (2.113)$$

o bien, si se trata de un campo escalar complejo tiene la forma

$$\mathcal{L} = -\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi^* - V(|\phi|^2), \quad (2.114)$$

en donde el potencial $V(\phi)$ normalmente determina la dinámica del campo escalar, pues el campo tenderá al estado base en este potencial. En general se prefiere usar campos escalares complejos, puesto que estos presentan la simetría $U(1)$ y $O(2)$, además el campo escalar puede asociarse a partículas bosónicas de spin 0.

Normalmente el potencial se escribe como un término de masa del tipo $\mu^2\phi^2/2$, si se le añade una autointeracción al potencial del tipo $\lambda\phi^4$, la ecuación pierde la linealidad, además esta puede ser repulsiva o atractiva dependiendo de su signatura. La cantidad μ se puede asociar con la masa de este campo escalar mediante $\mu = m_\phi c/\hbar$, mientras que la constante de autointeracción se puede asociar con

una longitud de dispersión aunque no siempre es este el caso, y existen maneras de restringir que tipo de valores pueden tomar estas constantes dependiendo del papel que se espera que desempeñe el campo escalar en la naturaleza.

Es importante notar que a pesar de que las teorías que involucran campos escalares pueden estar asociadas a una partícula por medio de teoría cuántica de campos como lo son el inflatón o las partículas hipotéticas de materia y energía oscura, esto no es necesario, pues simplemente podemos estar describiendo algún tipo de materia que se describa con el campo escalar sin que tenga ninguna partícula asociada.

Además de eso el campo escalar no es un fluido, pues no se satisface la ecuación de estado $\rho = \omega P$, a pesar de que si se pueden obtener la densidad de energía y las presiones a partir del tensor de energía-momento. Y a pesar de que es un nuevo tipo de materia esta sigue estando dentro del marco de Relatividad General, pues las ecuaciones de Einstein no cambian, solo se añade un nuevo término al tensor de energía-momento que se sigue conservando. El papel de la presión para los campos escalares está dado por $P = \dot{\phi} - V(\phi)$, por lo que es importante que tenga una dependencia temporal, la cual generalmente estará dada por una oscilación, es decir $\phi(t, \vec{x}) = e^{i\omega t} \psi(\vec{x})$.

Capítulo 3

Peluca sin autointeracción

3.1. Ecuación de Klein-Gordon en fondo de Schwarzschild

La acreción de los campos escalares en las vecindades de los agujeros negros es un problema interesante, puesto que aunque el teorema de no-pelo nos dice que será acretado, este no nos habla de la escala de tiempo que tomará. Nos restringiremos al caso de un campo escalar de prueba en un fondo de Schwarzschild, cuyo lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L}_\phi = \left[\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi^* + \mu^2 \phi \phi^* \right], \quad (3.1)$$

en donde la variación respecto a ϕ^* e igualando a cero se obtiene la ecuación de Klein-Gordon

$$\square \phi - \mu^2 \phi = 0, \quad (3.2)$$

donde $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$, y la métrica será tipo Schwarzschild, i.e.

$$ds^2 = -N(r)dt^2 + \frac{dr^2}{N(r)} + r^2 d\Omega^2; \quad N(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (3.3)$$

con M la masa del agujero negro y $d\Omega^2$ el elemento de ángulo sólido estándar.

Utilizando la descomposición del campo escalar en armónicos esféricos:

$$\phi = \frac{1}{r} \sum_{\ell, m} \psi_{\ell, m}(r, t) Y_{\ell, m}(\theta, \varphi), \quad (3.4)$$

Podemos separar el D'Alembertiano en 2 componentes tal que $\square = \square_{tr} + \square_{\theta\varphi}$, y haciendo esto podemos analizar cada componente por separado, de tal forma que

$$\square_{\theta\varphi}\phi = -\sum_{\ell,m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \psi_{\ell,m} Y_{\ell m}, \quad (3.5)$$

Fijandonos ahora en \square_{tr} , se tiene que

$$\square_{tr}\phi = \sum_{\ell,m} Y_{\ell m} \left[\frac{1}{N(r)} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_{\ell,m}(t,r)}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 N(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_{\ell,m}(t,r)}{r} \right) \right) \right], \quad (3.6)$$

de donde el segundo término del lado derecho es

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 N(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_{\ell,m}(t,r)}{r} \right) \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(N(r) \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\ell,m}(t,r) \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{2M}{r^3} \psi_{\ell,m}(t,r) \right). \quad (3.7)$$

Juntando los resultados anteriores se tiene entonces que

$$\square\phi = \frac{1}{r} \sum_{\ell,m} Y_{\ell,m} \left[\left[-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{1}{N(r)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2M}{r^3} \right] \psi_{\ell,m} + \frac{\partial}{\partial r} \left(N(r) \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\ell,m} \right) \right], \quad (3.8)$$

por lo cual, dividiendo entre los factores comunes, se tiene que la ecuación de Klein-Gordon queda como

$$0 = \sum_{l,m} Y_{l,m} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(N(r) \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\ell,m} \right) - \frac{1}{N(r)} \frac{\partial^2 \psi_{\ell,m}}{\partial t^2} + \left[-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2M}{r^3} - \mu^2 \right] \psi_{\ell,m} \right). \quad (3.9)$$

Multiplicando por $Y_{\ell',m'}^* \sin(\theta)$ e integrando sobre θ y φ , usando la propiedad

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) Y_{\ell',m'}^*(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\theta d\varphi = \delta_{mm'} \delta_{\ell\ell'}, \quad (3.10)$$

la ecuación de Klein-Gordon se reduce a la familia de ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(N(r) \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\ell,m} \right) - \frac{1}{N(r)} \frac{\partial^2 \psi_{\ell,m}}{\partial t^2} = \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + \mu^2 \right] \psi_{\ell,m}. \quad (3.11)$$

Notemos que el término $\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + \mu^2$ es definido positivo y además es monótonamente decreciente con r . Además este término se compone del término centrífugo, una corrección por curvatura, y el último que viene de la ecuación de Klein-Gordon.

Para encontrar soluciones estacionarias hacemos una última descomposición de la función $\psi_{\ell,m}(t, r)$ tal que

$$\psi_{\ell,m}(t, r) = u_{\ell,m}(r) e^{i\omega_{\ell,m} t}, \quad (3.12)$$

con $\omega_{\ell,m}$ una frecuencia real y $u_{\ell,m}$ una función compleja. Para simplificar la notación omitiremos a partir de ahora los subíndices ℓ, m . Introduciendo este ansatz en la ecuación de Klein-Gordon esta toma la forma de

$$0 = \left[\frac{\omega^2}{N(r)} u(r) - \frac{\partial}{\partial r} \left(N(r) \frac{\partial}{\partial r} u(r) \right) + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + \mu^2 \right] u(r) \right] e^{i\omega t}. \quad (3.13)$$

Multiplicando todo por $N(r)$ y acomodando, se tiene finalmente

$$\left[-N(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(N(r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + V_{\text{eff}}(r) \right] u(r) = \omega^2 u(r), \quad (3.14)$$

donde

$$V_{\text{eff}}(r) = N(r) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + \mu^2 \right]. \quad (3.15)$$

Luego, utilizando la coordenada tortuga definida en (1.28) se puede reescribir la ecuación de Klein-Gordon como una ecuación de tipo Schrödinger

$$-\frac{\partial}{\partial r^{*2}} u(r) + V_{\text{eff}} u(r) = \omega^2 u(r), \quad (3.16)$$

donde se define implícitamente $r(r^*)$. Nótese que en el caso de mecánica cuántica no relativista se tendría ω en lugar de ω^2 , esto debido a que la ecuación de

Schrödinger usual es de primer orden en el tiempo mientras que la ecuación de Klein-Gordon es de segundo orden. Además (3.16) solo depende de los parámetros ℓ , μ , y ω .

En el límite de campo de prueba los campos escalares tienen la energía conservada $E = \sum_{\ell,m} E_{\ell,m}$, de donde

$$E_{\ell,m} = \int_{2M}^{\infty} \rho_E(r) dr, \quad (3.17)$$

con

$$\rho_E = \frac{1}{2N(r)} \left(\omega^2 u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r^*} \right)^2 + V_{eff} u^2 \right) \quad (3.18)$$

la densidad de energía integrada en la esfera salvo un término de frontera. Esta última expresión se obtiene del hecho de que siempre puedes construir una cantidad conservada

$$Q_a = \int_{\Sigma} k_a^\mu T_{\mu\nu} n^\nu \sqrt{\gamma} d\Sigma, \quad (3.19)$$

de un vector de Killing k_a . En esta expresión n^ν es el cuadrivector unitario temporal dirigido al futuro que es ortogonal a la hipersuperficie de Cauchy Σ , y $\sqrt{\gamma} d\Sigma$ es el elemento de volumen en Σ . En particular tomamos a $k_a = \partial_t$ y $\Sigma = \{t = const\}$. Es decir, se tiene que

$$\rho = -T_0^0 = \frac{1}{N(r)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^2 + N(r) \left| \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right|^2 + \mu^2 \phi^2, \quad (3.20)$$

de donde al hacer la descomposición en armónicos esféricos dada previamente por $\phi = \frac{1}{r} u(r) e^{i\omega t} Y_{\ell,m}$ se tiene que

$$\rho = \frac{\omega^2}{N(r)} \frac{u^2}{r^2} + N(r) \left| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \right|^2 + \left(\mu^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \frac{u^2}{r^2}. \quad (3.21)$$

Notemos que el término $N(r) \left| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \right|^2$ al expandirse se ve como $N(r) \left(\frac{u'^2}{r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u^2}{r} \right) \right)$, y si sumamos y restamos $N' \frac{u^2}{r} = \frac{-2M}{r^3} u^2$, se tiene que

$$\rho = \frac{\omega^2}{N(r)} \frac{u^2}{r^2} + N(r) \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 \frac{1}{r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(N(r) \frac{u^2}{r} \right) + \left(\mu^2 + \frac{2M}{r^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \frac{u^2}{r^2}, \quad (3.22)$$

de donde se obtiene $\rho_e = \int r^2 \rho d\Omega^2$, salvo el factor de integración $\frac{\partial}{\partial r} \left(N(r) \frac{u^2}{r} \right)$, el cual se anula al integrar en r , por lo tanto se puede omitir.

Para realizar el análisis numérico de la ecuación de Klein-Gordon se realiza el cambio de coordenadas $\hat{r} \rightarrow r/M$ y los parámetros de los cuales depende la solución son ahora ℓ , $M\mu$, y $M\omega$. Haciendo dicho reescalamiento se tiene que entonces la ecuación queda como

$$-\frac{\partial}{\partial \hat{r}^{*2}} u(r) + M^2 V_{eff}(\hat{r}) u(\hat{r}) = M^2 \omega^2 u(\hat{r}), \quad (3.23)$$

donde

$$M^2 V_{eff}(\hat{r}) = \left(1 - \frac{2}{\hat{r}} \right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2}{r^3} + M^2 \mu^2 \right], \quad (3.24)$$

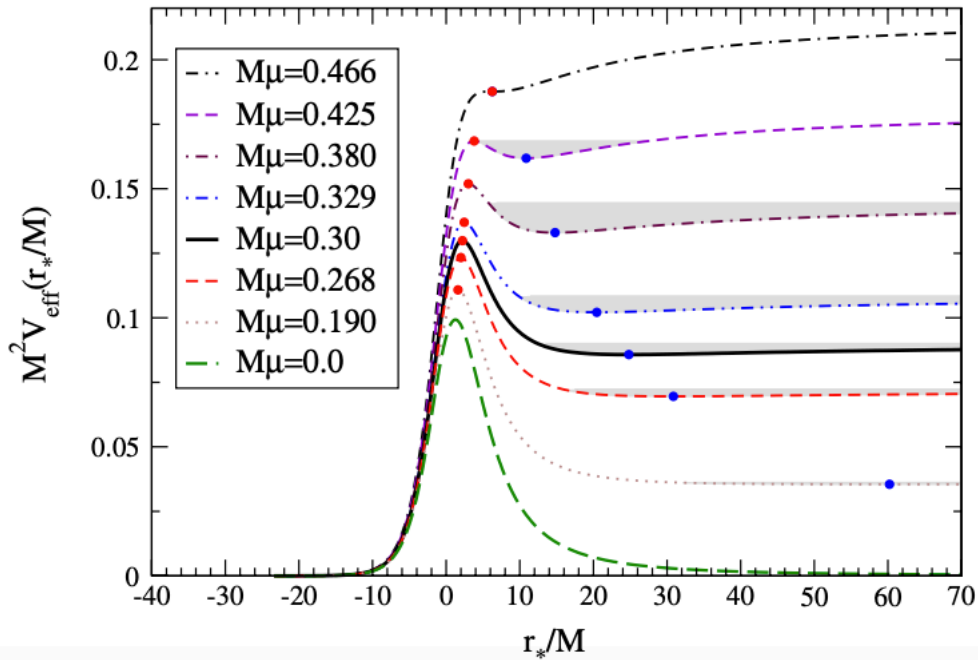
y

$$\hat{r}^* = \hat{r} + 2 \ln \left| \frac{\hat{r}}{2} - 1 \right|. \quad (3.25)$$

Además con esta transformación se tiene que la densidad está dada entonces por

$$M^2 \rho_{E\hat{r}} = \frac{1}{2(1 - \frac{2}{\hat{r}})} \left(M^2 \omega^2 u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \hat{r}^*} \right)^2 + M^2 V_{eff}(\hat{r}) u^2 \right). \quad (3.26)$$

A diferencia de lo que sucede en el caso de perturbaciones no masivas, el valor asintótico que toma V_{eff} para radios muy grandes no es 0, si no tiende a μ^2 , la forma del típica del potencial efectivo se puede ver en (3.1.1). Nótese que para $M\mu = 0$ y $M\mu \geq 0.466$ el mínimo local del potencial ya no aparece.


 Fig. 3.1.1: Potencial efectivo para $\ell = 1$ y distintos valores de $M\mu$. [16]

3.2. Comportamiento asintótico de las soluciones y resonancias.

Analizaremos ahora el comportamiento general de las soluciones. En el límite asintótico cuando $r^* \rightarrow \infty$ el potencial efectivo tiende a μ^2 , por lo que entonces la ecuación (3.16) se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^{*2}} + (\omega^2 - \mu^2)u = 0, \quad (3.27)$$

cuya solución está dada por una combinación lineal de funciones $u = e^{\pm i\sqrt{\omega^2 - \mu^2}r^*}$. Esta solución será física mientras se satisfaga que $0 < \omega^2 < \mu^2$, pues la solución decaerá exponencialmente ya que la raíz cuadrada será imaginaria, mientras que en el caso $\mu^2 < \omega^2$ esta será oscilatoria pues la raíz es real y la exponencial imaginaria puede escribirse como un coseno, lo cuál no queremos pues como condición se necesita que la solución sea asintóticamente plana. Ahora, en el límite asintótico izquierdo cuando $r^* \rightarrow -\infty$, el potencial efectivo tiende a 0, por lo que entonces

la ecuación (3.16) se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^{*2}} + \omega^2 u = 0, \quad (3.28)$$

por lo cuál las soluciones en este lado siempre serán oscilatorias para $|\omega|^2 > 0$ y serán de la forma $u \propto \cos(\omega r^* - \delta)$ para alguna fase δ . En particular estas soluciones no son normalizables puesto a que la integral de la solución en esta región tiende a infinito. Sin embargo este problema es debido únicamente al sistema de referencia, lo cuál se puede solucionar si simplemente se hace la transformación a coordenadas de Eddington-Finkelstein. Notemos que si $\omega^2 > \mu^2$, ambas soluciones asintóticas son oscilatorias, por lo cual el espectro es continuo y degenerado, pues se tienen dos soluciones linealmente independientes que están acotadas en $r^* \rightarrow \pm\infty$. En el caso de las soluciones con $0 < \omega^2 < \mu^2$ el espectro $0 < \omega^2 < \mu^2$ será continuo y no degenerado. Estas soluciones pueden pensarse como ondas planas que viajan desde $r^* \rightarrow -\infty$ y son completamente reflejadas por el potencial puesto que no tienen suficiente energía para llegar a $r^* \rightarrow \infty$, ya que en esta región decaen exponencialmente.

Es posible tener resonancias en las soluciones de $u(r)$ en el potencial efectivo V_{eff} si este presenta al menos un mínimo local que se encuentre debajo de μ^2 . Dicha resonancia se puede entender como ondas planas que viajan desde $r^* \rightarrow \infty$ y entran dentro del pozo de potencial mediante un tunelaje, y dentro del potencial, si es que tienen las frecuencias discretas adecuadas, su amplitud puede acumularse a través de múltiples reflejos en las paredes del pozo de potencial por lo que parecen quedarse estacionarias. Para determinar las condiciones que se necesitan para que exista un pozo de potencial se necesitan determinar los puntos críticos del potencial efectivo V_{eff} . Dichos puntos críticos corresponden a la raíces del polinomio de tercer orden

$$M\mu^2 r^3 - \ell(\ell + 1)r^2 + 3M(\ell^2 + \ell - 1)r + rM^2 = 0. \quad (3.29)$$

Este polinomio tiene tres soluciones reales si se satisface la condición que

$$(M\mu)^2 < -\frac{1}{32}(\ell^2 + \ell - 1)(\ell^2 + \ell + 1) + \frac{1}{288}\sqrt{3(3\ell^4 + 6\ell^2 + 5\ell^2 + 2\ell + 3)^3}. \quad (3.30)$$

Si esto se satisface entonces el potencial tendrá tres puntos críticos. Uno de estos corresponderá a valores de r negativo por lo cual no es de nuestro interés puesto que no es físico, mientras que los otros puntos críticos corresponden a un mínimo y máximo de V_{eff} .

Teniendo ya las condiciones para la existencia de un pozo de potencial, buscamos ahora a los modos que quedan atrapados en éste. Como se había dicho, estos modos estarán en el espectro $0 < \omega^2 < \mu^2$ y cabe mencionar que estos no tienen un valor finito para la expresión de energía definida en (3.17) debido a su comportamiento oscilatorio cerca del horizonte, Sin embargo, seguirán estando localizados en la vecindad del agujero negro, pues el campo escalar decae exponencialmente para grandes valores de r^* .

La región en el espacio de parámetros donde existe un pozo de potencial y pueden haber resonancias se llama banda de resonancias, y se muestra en la figura (3.2.1) para $\ell = 0$ y $\ell = 1$. Dicha región se encuentra en $V_{eff}^{min} < \omega^2 < \min(\mu^2, V_{eff}^{max})$, aunque no todos los estados en esta región serán resonantes, solo ciertos valores discretos lo serán.

Existen varias maneras de encontrar los valores discretos de ω que serán resonantes, los cuales serán aquellos que se fugen lentamente del pozo de potencial, o en otras palabras, se buscan aquellas soluciones tal que el cociente del máximo de la función $|u|$ fuera del potencial A_{out} y el máximo dentro del potencial A_{in} es mínimo. Es decir, dados una ℓ y μ , se resuelve numéricamente la ecuación (3.16) para los distintos valores de ω en la banda resonante ($0 < \omega^2 < \mu^2$) y se grafica el cociente A_{out}/A_{in} . Una de estas gráficas para el caso $\ell = 1$ y $\mu = 0.3$ se muestra en la figura (3.2.2).

De la gráfica (3.2.2) se muestra que el cociente A_{out}/A_{in} cae a valores muy bajos

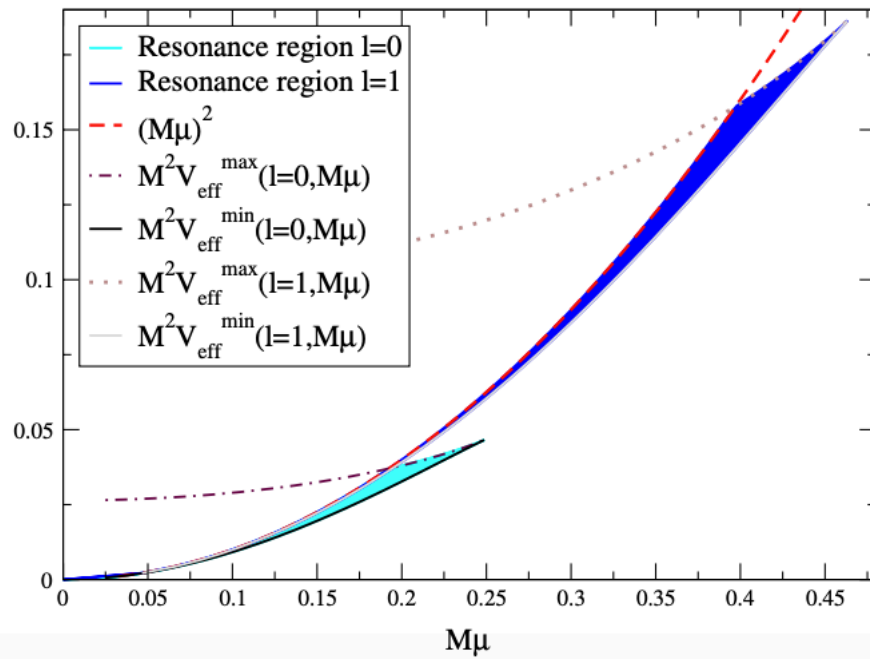


Fig. 3.2.1: Banda de resonancia en el espacio de parámetros de para $l = 0$ y $l = 1$. [16]

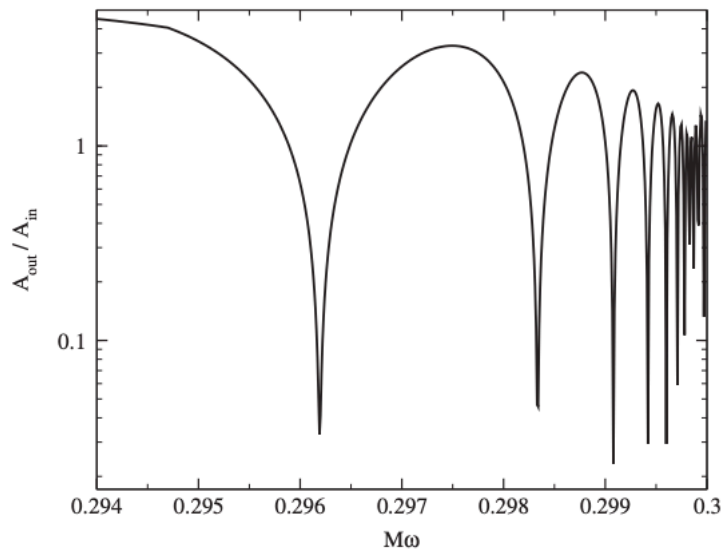


Fig. 3.2.2: Cociente de $A_{\text{out}} / A_{\text{in}}$ para encontrar las frecuencias resonantes. [16]

para un conjunto de frecuencias discretas, y dichas frecuencias resultan ser las frecuencias que darán lugar a una solución resonante. El primer estado resonante se encuentra cercano a $M\omega = 0.29619$, y además se tienen otros estados resonantes a frecuencias mayores que corresponderán a un mayor número de nodos en la

solución dentro del pozo de potencial. Se observa además, que mientras el valor de ω se acerca más a μ , las frecuencias resonantes aparecen cada vez mas pegadas, y parece que existe un número infinito de estas. Además hay que tener mas cuidado al analizar este tipo de perfiles, pues para obtener la solución numérica para valores de $M\omega$ cercanos a $M\mu$ se necesita una mayor resolución, así como valores mayores de r^*/M , pues estas soluciones se hacen cada vez mas amplias conforme se incrementa el número de nodos.

En la figura (3.2.3) se muestran las soluciones numéricas a (3.16) para valores particulares de $M\omega$. La primer gráfica corresponde a la solución con $M\omega = 0.295$, la cual es una solución no resonante, pues a pesar de que se satisface que para $r^*/M < 0$ la solución es oscilatoria, la amplitud en esta zona es mayor que la amplitud dentro del pozo de potencial. La segunda gráfica corresponde a una solución con $M\omega = 0.29619$, dicha solución es muy cercana a la solución resonante, pues la amplitud que se encuentra dentro del pozo de potencial mucho mayor que la amplitud fuera de este, cosa que no sucede en el caso no resonante.

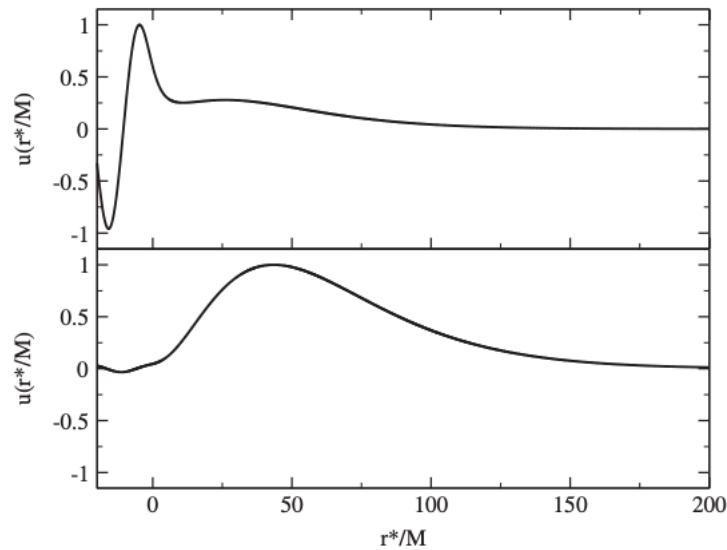


Fig. 3.2.3: Solución para distintos valores de $M\omega$. En el panel superior se muestra para un $M\omega$ no resonante y en el inferior para $M\omega$ resonante. Ambas soluciones fueron reescaladas tal que el máximo de la amplitud sea 1. [16]

Recapitulando lo anterior, lo que se está haciendo es resolver la ecuación de Klein-Gordon cerca del horizonte de eventos de un agujero negro, y se tiene una combinación de modos entrantes y salientes de la misma amplitud. Es decir, cualquier modo del campo escalar que escape del pozo de potencial (vía tunelaje cuántico), es compensado por otro modo saliente del horizonte. Dichas soluciones claramente no son físicas pues además de que no esperamos que este comportamiento ocurra en la vecindad de un agujero negro, las configuraciones de campo escalar, aun siendo resonantes tienen una energía divergente debido a su comportamiento oscilatorio cerca del horizonte. A pesar de esto podemos construir soluciones que sí sean físicas y se encuentren arbitrariamente cerca del horizonte. Para esto simplemente se necesita escoger alguna solución estacionaria que decaiga exponencialmente (i.e. $0 < \omega^2 < \mu^2$), y asignarle el valor de 0 en el intervalo $(2M, 2M + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$ pequeño. La configuración resultante puede verse como una combinación de la solución estacionaria más una perturbación cerca del horizonte de eventos, además será estacionaria en el dominio de dependencia $[2M + \epsilon, \infty)$. Para un valor dado de ϵ , existirá un valor $\Delta > \epsilon$, tal que a la perturbación le tomará un tiempo $t_\epsilon(2M + \Delta) = 2M \ln(\Delta/\epsilon) + (\Delta - \epsilon)$, para llegar a la coordenada radial $r = 2M + \Delta$. En el límite $\epsilon \rightarrow 0$, este tiempo parece que se puede hacer arbitrariamente grande, y además ϵ se puede hacer tan arbitrariamente pequeño como se pueda, pues a pesar de que se tenga una divergencia en la energía en $r \rightarrow 2M$, la ecuación de Klein-Gordon es lineal en ϕ , por lo cual uno puede reducir el valor de la amplitud del campo escalar arbitrariamente dado un valor de ϵ , sin embargo el precio a pagar es entonces que la distribución del campo escalar tiene a la mayor parte de su energía concentrada cerca del horizonte.

Si tomamos que la distancia $2M + \Delta$ es aproximadamente del tamaño de la distribución del campo escalar en la vecindad de un agujero negro de Schwarzschild, entonces $t_\epsilon(2M + \Delta)$ nos dará un mayor entendimiento de la duración de la vida de esa configuración de campo escalar en particular. Notemos además que t_ϵ nos da una cota inferior del tiempo de vida de estas configuraciones, pues existen

otras que pueden durar mas que este tiempo. Es decir, podemos construir configuraciones de campo escalar de alta duración y que sean cuasi-estacionarias en una región compacta fuera del agujero negro, las cuales van a corresponder a las soluciones resonantes.

Las configuraciones iniciales que corresponden a soluciones estáticas son construidas a partir de integrar numéricamente la ecuación (3.16) en la región $[R_{in} = 2M + \epsilon, R_{out}]$, donde $\epsilon \leq 0.05M$, usando un algoritmo de shooting. Como condiciones de frontera imponemos en $r = R_{out}$ la condición $u'(R_{out}) = -\sqrt{\omega^2 - \mu^2}u$, para asegurarnos que $u(r)$ caiga exponencialmente para valores grandes de r . Para la frontera izquierda imponemos $u(R_{in}) = 1$, y como la ecuación es homogénea siempre se puede reescalar en otro momento. Finalmente $u(r)$ es 0 para $r < R_{in}$. Esto introduce una discontinuidad en la configuración de campo escalar, pero el salto es muy pequeño comparado con el valor absoluto del máximo del campo escalar.

Las configuraciones iniciales entonces van a estar caracterizadas por los parámetros ℓ , ω , y μ . Y nos restringiremos a soluciones con $0 < \omega^2 < \mu^2$ que además estén dentro de la banda de resonancias, lo cuál nos dará 2 tipos de configuraciones iniciales posibles:

1. Configuraciones pseudoestacionarias construidas a partir de soluciones resonantes estacionarias, las cuales llamaremos estados pseudoresonantes.
2. Configuraciones pseudoestacionarias construidas a partir de soluciones no-resonantes estacionarias, las cuales llamaremos estados no-resonantes.

De este tipo de configuraciones posibles nos concentraremos mas en las de tipo 1, puesto que estas serán las que muestren distribuciones de campo escalar de alta duración en una región compacta fuera del agujero negro. La figura (3.2.4) muestra la densidad de energía de configuraciones de este tipo para los primeros 5 modos para $\ell = 1$ y $M\mu = 2$. La figura (3.2.5) muestra el primer modo $n = 1$ para configuraciones de este tipo con distintos valores de $m\mu$. Notemos que R_{99} , definido como el radio de la esfera que contiene al 99% de la energía del campo

escalar a $t = 0$, que nos da idea del tamaño de cada configuración incrementa conforme incrementa n o decrece $M\mu$.

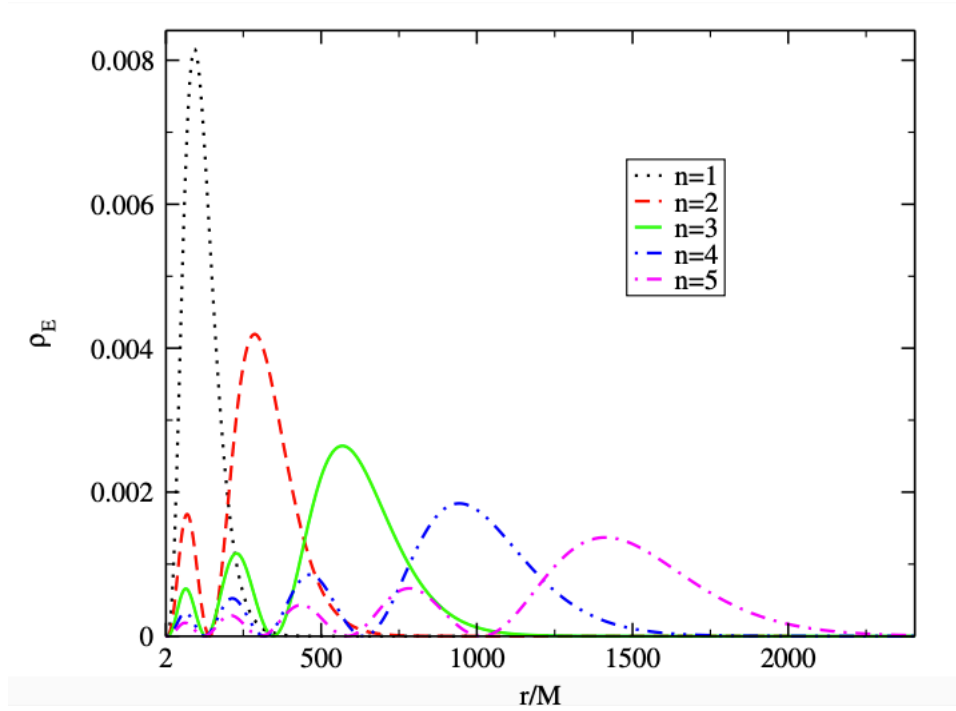


Fig. 3.2.4: Densidad de energía radial ρ_e para diferentes estados pseudoresonantes con $M\mu = 0.2$, $\ell = 1$. [16]

3.3. Evolución Temporal

Teniendo ya los conjuntos de datos iniciales queremos conocer algunas propiedades de su evolución. La evolución numérica se realizará con coordenadas penetrantes, por lo que cubre una región que llega dentro del horizonte de eventos, haciendo que evitemos dar condiciones de frontera en esta región. Usando coordenadas de Eddington-Finkelstein $(\bar{t}, r, \theta, \varphi)$, en donde $\bar{t} = t + 2M \ln(r/2M - 1)$, el elemento de línea se ve como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\bar{t}^2 + 4\frac{M}{r} dr d\bar{t} + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.31)$$

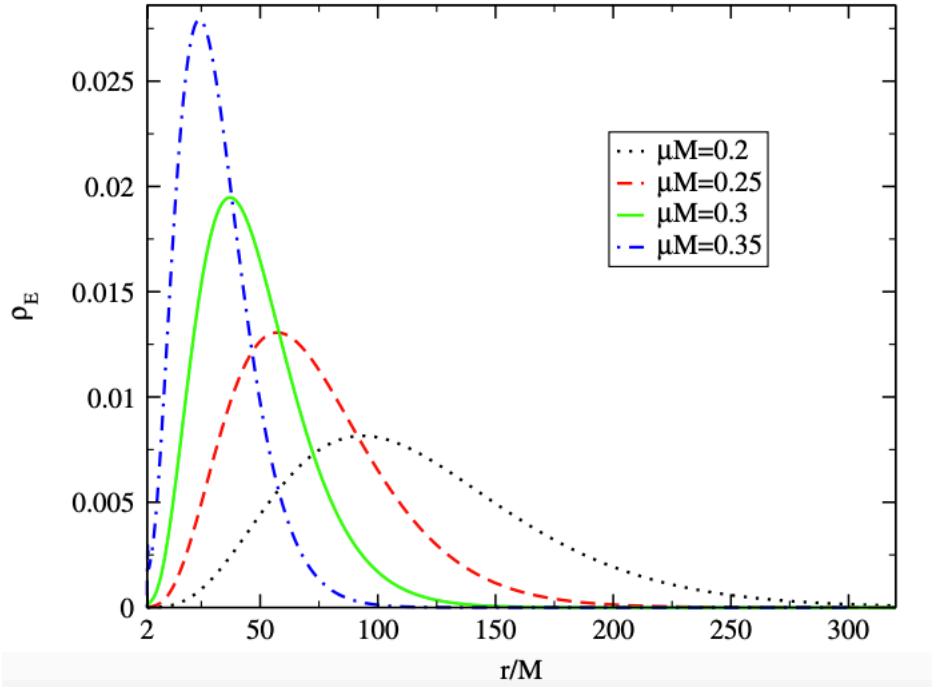


Fig. 3.2.5: Densidad de energía radial ρ_e para el primer estado resonante con $\ell = 1$ y distintos valores de $M\mu$. [16]

Este sistema de coordenadas cubre la región que incluye el interior del agujero negro, $r \in (0, \infty)$, y es regular en el horizonte. Notemos además, que las coordenadas temporales en Schwarzschild y Eddington-Finkelstein pueden considerarse como equivalentes, puesto que se evaluarán las escalas temporales a lo largo de observadores estacionarios, por lo que para simplificar la notación podemos simplemente escribir t en lugar de \bar{t} .

Si escribimos esto en el formalismo ADM [16], usando como variables la función lapso α , el vector de shift β^r , y la 3-métrica inducida, estas variables se pueden leer de (3.31) de donde se tiene que

$$\alpha = \sqrt{\frac{r}{r+2M}} \quad \beta^r = \frac{2M}{2M+r} \quad \gamma_{rr} = 1 + \frac{2M}{r}. \quad (3.32)$$

Para resolver numéricamente la ecuación de Klein-Gordon definimos las siguientes funciones auxiliares de primer orden:

$$\psi = \partial_r \phi \quad \pi = \alpha^2 (\partial_t \phi - \beta^r \psi) . \quad (3.33)$$

Utilizando esto, se tiene que la ecuación de Klein-Gordon es equivalente al sistema de ecuaciones de primer orden de evolución para ϕ , π y ψ dadas por

$$\begin{aligned} \partial_t \phi &= \frac{r}{r+2M} \left(\pi + \frac{2M}{r} \psi \right) , \\ \partial_t \psi &= \frac{2M}{2M+r} \partial_r \psi + \frac{r}{2M+r} \partial_r \pi + \frac{2M}{(2M+r)^2} (\pi - \psi) , \\ \partial_t \pi &= \frac{1}{2M+r} (2M\pi + r\psi) + \frac{2M}{(2M+r)^2} (\psi - \pi) \\ &\quad + \frac{2}{r(2M+r)} (r\psi + 2M\pi) - \phi \left[\ell(\ell+1) + \mu^2 \right] . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Estas ecuaciones de evolución son resueltas numéricamente utilizando un método de diferencias finitas de segundo orden en el espacio, y son evolucionadas en el tiempo usando un método de líneas con un integrador de Runge-Kutta de tercer orden. Como estamos usando coordenadas penetrantes colocamos la frontera izquierda r_{min} dentro del horizonte de eventos, dejando las condiciones de frontera libres en este punto, ya que esta región esta causalmente desconectada del exterior. Por otro lado, la frontera derecha r_{max} se coloca muy lejos y todos los modos entrantes son cero en esta zona.

La resolución usada varía dependiendo del dato inicial utilizado. Típicamente, la región que contiene la mayor parte del campo escalar (i.e., desde r_{min} hasta R_{99}) se cubre con 2000, llegando hasta 32 000 puntos de la cuadrícula. Entonces, el dominio es escogido de tal manera que $r_{max} \approx 4R_{99}$ o más grande. Estas resoluciones mas altas son necesarias se necesitan solo en pocos casos para disminuir el error del parámetro s que se calcula mas adelante en (3.37).

Para evaluar cuánto tiempo permanece la configuración de campo escalar en una región compacta fuera del horizonte de eventos evaluamos la energía $E_{\ell m}$ (De ahora en adelante ignoraremos los subíndices ℓ, m) integrando la densidad de energía sobre la foliación en coordenadas de Eddington-Finkelstein en lugar de

las usuales de Schwarzschild. Dicha energía está dada por

$$E(t) = \int_{2M}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{2M}{r}\right) \left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left|\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|^2 + \mathcal{U}_\ell |\phi|^2 \right], \quad (3.35)$$

donde

$$\mathcal{U}_\ell = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + \mu^2 \quad (3.36)$$

Las figuras (3.3.1, 3.3.2) muestran la evolución de la energía integrada del campo escalar $E(t)$ usando como datos iniciales configuraciones pseudoresonantes (tipo 1). Notemos que la energía está graficada en escala logarítmica, y muestra un decaimiento exponencial lento de la forma

$$E(t) = E_0 \exp(-st/M), \quad (3.37)$$

donde s es constante, excepto por algunas pequeñas oscilaciones que permarecen durante toda la evolución. Dado el decaimiento exponencial que domina el comportamiento general de la evolución, podemos realizar un ajuste lineal de $\ln(E/E_0)$ en función de t/M para calcular el parámetro s . En todos los casos considerados aquí no se observa ninguna energía que escape a infinito, pues toda cae dentro del agujero negro.

También se realizó la evolución para configuraciones pseudoestacionarias no resonantes (tipo 2). Dichos estados no resonantes no evolucionan de manera cuasiestacionaria, en cambio, pierden muy rápidamente una porción significativa de su energía, parte de la cual cae al agujero negro mientras que la otra parte es radiada hasta infinito. Es solo hasta que ha transcurrido un cierto tiempo que alcanzan a llegar a un estado cuasiestacionario, con una energía mucho menor de la que tenían originalmente. Una vez que llegan a este régimen cuasiestacionario, la caída de energía se vuelve similar a la que presentan los estados pseudoresonantes. Cada estado no resonante parece evolucionar, al menos después de cierto tiempo, como una combinación de modos pseudoresonantes.

Para entender este comportamiento se realiza un análisis espectral. Para esto se calcula la transformada de Fourier discreta en el tiempo de la evolución numérica

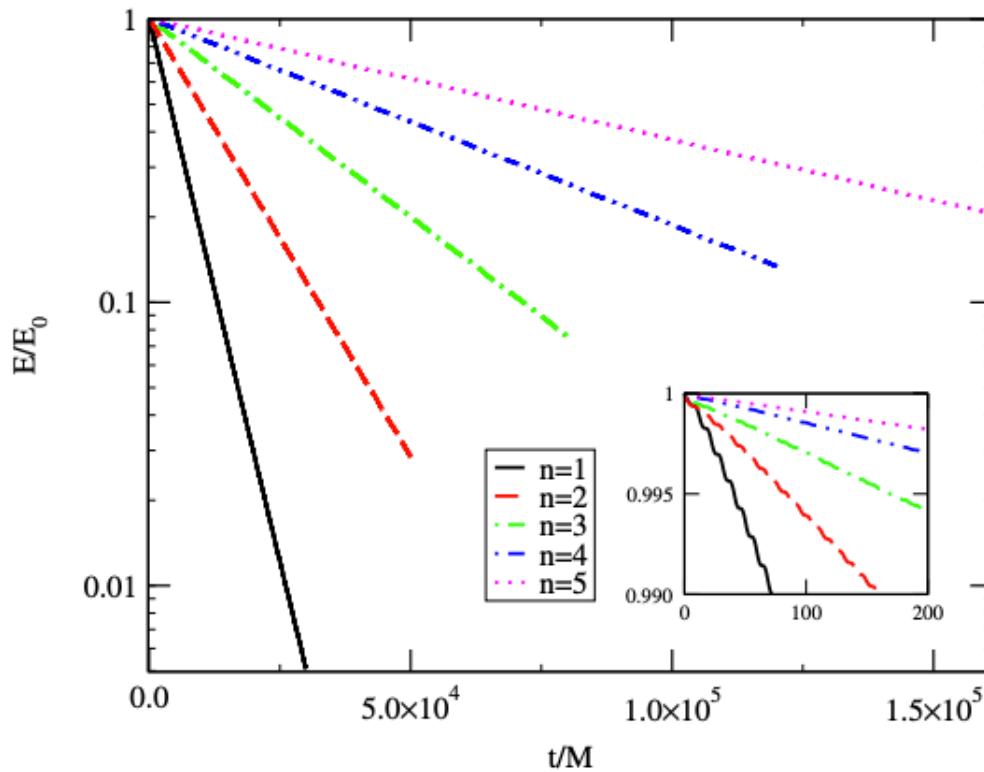


Fig. 3.3.1: Energía del campo escalar contra el tiempo de evolución para datos iniciales de configuraciones pseudoresonantes con $\ell = 1$, $M\mu = 0.35$, y modos $n = (1, 2, 3, 4, 5)$. Se puede ver que algunas evolucionan mas lentamente que otras, esto debido a que se eligió correr cada caso por un periodo de tiempo aproximadamente proporcional al tamaño de la distribución de campo escalar R_{99} . [16]

del campo escalar. Mas precisamente, se calcula la magnitud de la transformada de Fourier discreta en el tiempo del campo $\psi(t, r)$ en puntos espaciales fijos $r = r_j$, localizados aproximadamente en el extremo local $\psi(t = 0, r)$, y se presta atención a las posibles diferencias derivadas de usar distintos puntos de muestra r_j . La expresión de la transformada está dada por

$$F[\psi(t)](f) := \left| A \sum_P \psi(t_p, r_j) \exp(-2\pi i f t_p) \right|, \quad (3.38)$$

en donde A es una constante de normalización y t_p son los valores de tiempo discretos.

La transformada de Fourier para el modo $n = 2$ de un estado pseudoresonante (tipo 1) se muestra en la figura (3.3.3), mientras que en las figuras (3.3.4) y (3.3.5) se

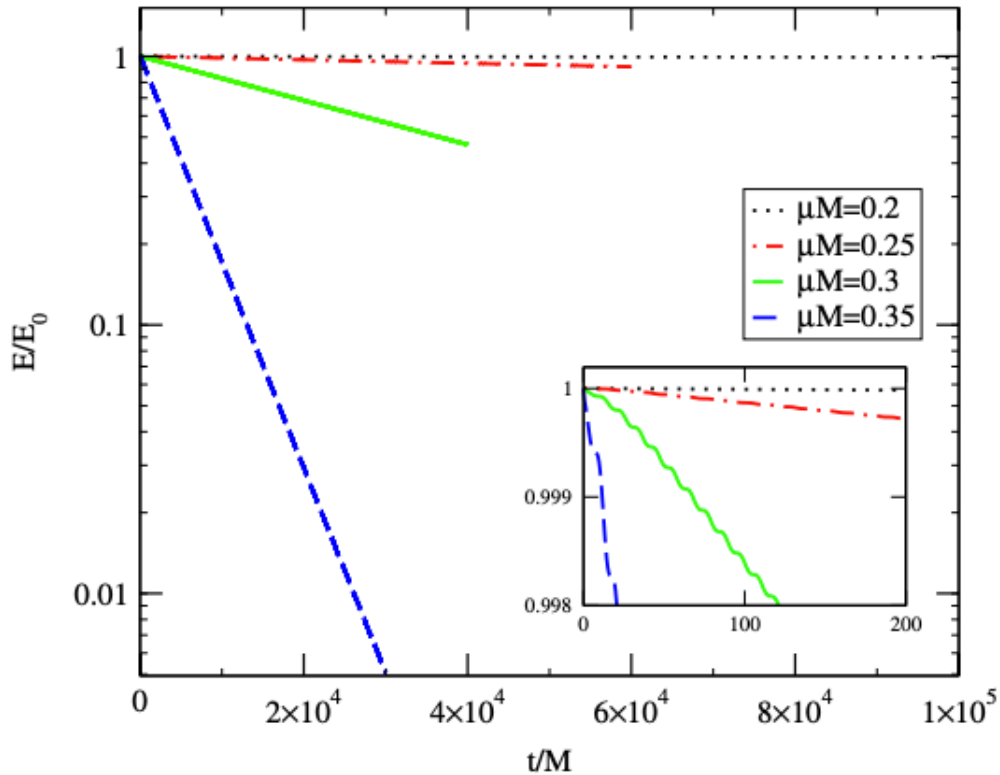


Fig. 3.3.2: Energía del campo escalar contra el tiempo de evolución para datos iniciales de configuraciones pseudoresonantes correspondientes al primer modo $n = 1$ con $\ell = 1$, y distintos valores de $M\mu = 0.2, 0.25, 0.3$, y 0.35 . [16]

muestran las transformadas para configuraciones no resonantes con frecuencias ω_x , donde esta frecuencia se encuentra entre el primer y segundo modo pseudoresonante ($\omega_1 < \omega_x < \omega_2$). Todos estos casos corresponden a $\ell = 1$ y $M\mu = 0.3$. Las figuras (3.3.3) y (3.3.4) muestran la transformada de Fourier en un solo punto de la muestra r_1 . Mientras los resultados mostrados en estas figuras son casi independientes del valor de r_1 , para el caso considerado en la figura (3.3.5) hubo pequeñas diferencias dependiendo de si el valor de r_j se escogió cerca del primer o segundo extremo local, por lo que se muestran ambos resultados en este caso. Notemos que las dos curvas en la figura (3.3.5) son cualitativamente idénticas, y los picos están localizados en las mismas frecuencias, por lo cual las conclusiones que podemos sacar de esta figura son independientes del punto de muestra r_j escogido.

Consideremos primero el espectro del modo pseudoresonante con frecuencia ω_2

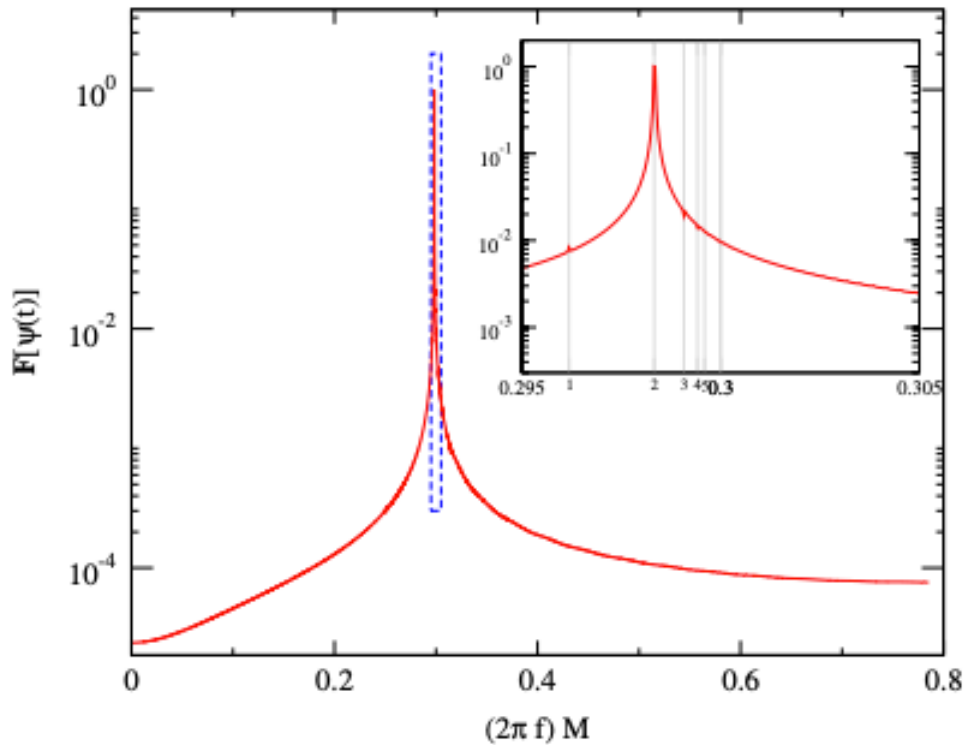


Fig. 3.3.3: Transformada de Fourier discreta vs frecuencia para la evolución de datos iniciales de tipo 1 con $M\mu = 0.3$, $\ell = 1$, y frecuencia ω_2 (correspondiente al segundo estado resonante). La figura superpuesta muestra con más detalle la región encerrada en el rectángulo. Y se muestran las primeras 5 frecuencias resonantes. [16]

mostrado en la figura (3.3.3), uno encuentra tal y como lo esperaría, un solo pico bien definido exactamente en la frecuencia ω_2 . Notemos que este resultado no es obvio a priori, puesto que se está evolucionando una versión truncada del estado estacionario actual. Considerando ahora los espectros de las configuraciones no resonantes con frecuencias ω_x mostrados en (3.3.4) y (3.3.5), se observa que a diferencia del caso pseudoresonante, no aparecen picos en el espectro para las frecuencias ω_x , sin embargo se pueden ver claramente los picos que aparecen para las distintas frecuencias resonantes ω_n . Notemos además, que los picos de estas frecuencias resonantes tienden a ser más grandes conforme más cerca de ω_x se encuentren. Por lo que pareciera que después de algún transcurso de tiempo, estos estados no resonantes evolucionan como combinación de estados pseudoresonantes. En este sentido parece ser que los estados pseudoresonantes puede jugar un

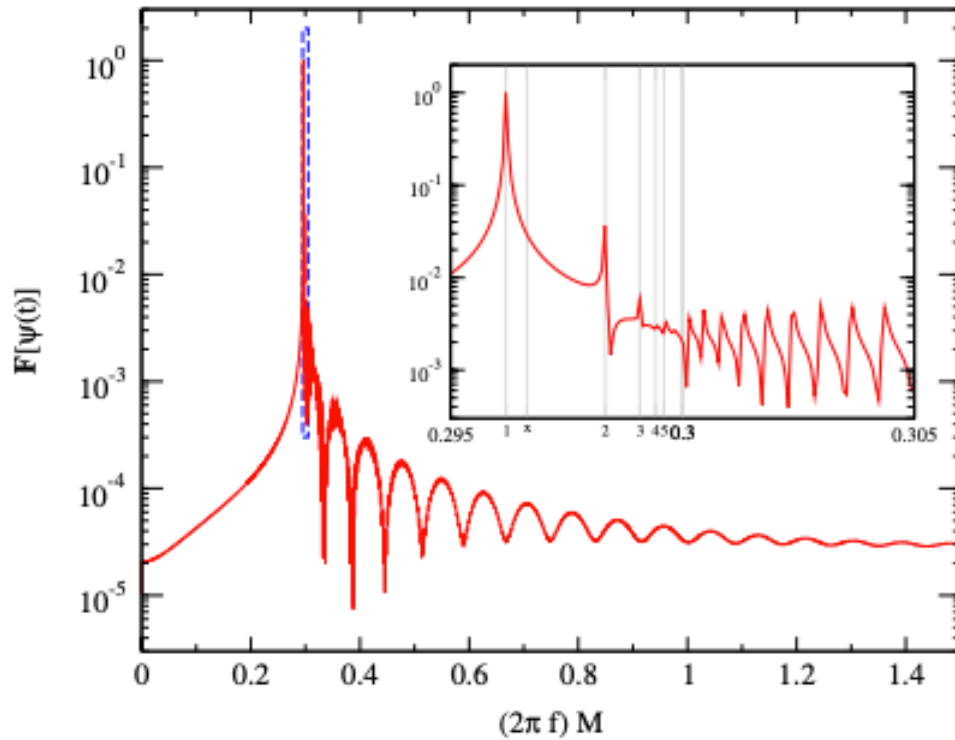


Fig. 3.3.4: Transformada de Fourier discreta vs frecuencia para la evolución de datos iniciales del tipo 2 con $M\mu = 0.3$, $\ell = 1$, y frecuencia $\omega_x = 0.29664794$. La figura superpuesta muestra con más detalle la región encerrada en el rectángulo. Y se muestran las primero 5 frecuencias resonantes y la frecuencia ω_x . [16]

rol similar al de los modos cuasinormales en el estudio de agujeros negros perturbados.

Las transformadas de Fourier fueron calculadas integrando sobre un intervalo de tiempo que va desde $t = 0$ hasta $t \approx 10^5 M$. Un intervalo tan grande es necesario para asegurar que el resultado final tenga suficiente resolución en la frecuencia como para poder distinguir las distintas frecuencias resonantes ω_n que están muy cerca unas de otras. Esto también implica que no se puede integrar sobre intervalos más cortos para poder evaluar las posibles variaciones temporales del espectro al inicio de la evolución, antes de que llegue al estado cuasiestacionario.

Fijándonos ahora de nuevo en la evolución de la configuración pseudoresonante, se puede ser más explícito en qué tanto van a durar estas configuraciones. Si el régimen exponencial observado se mantiene para todos los tiempos, el tiempo

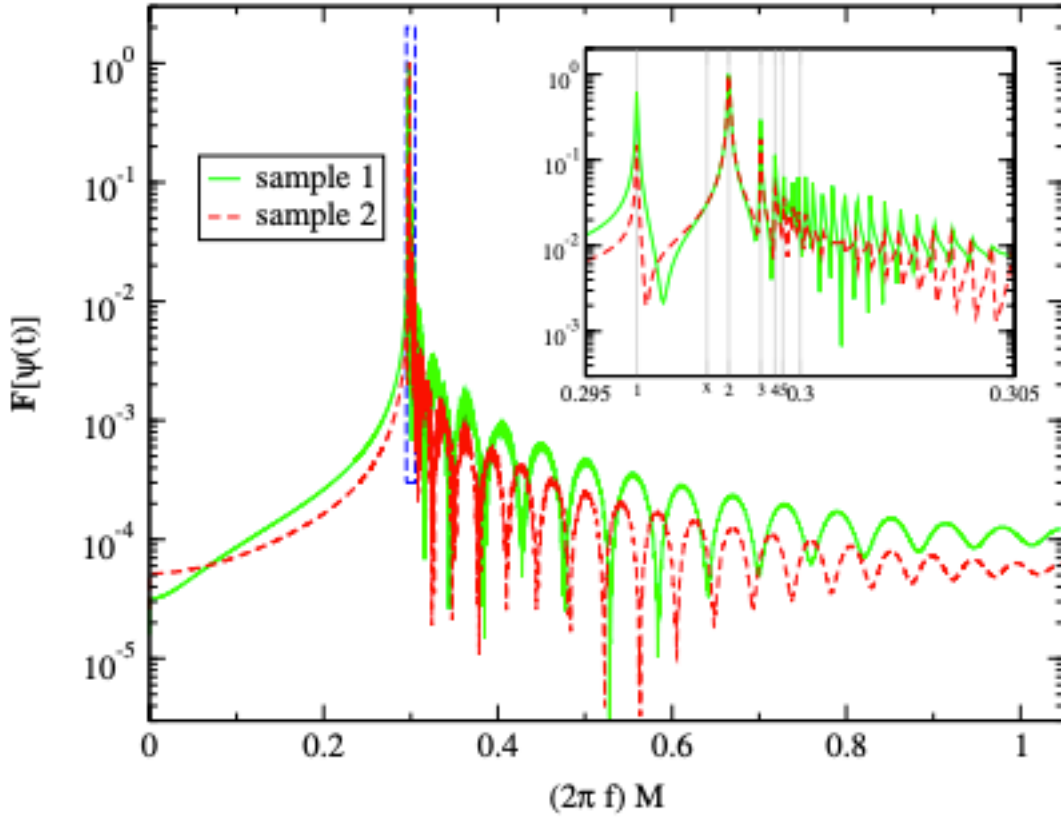


Fig. 3.3.5: Transformada de Fourier discreta vs frecuencia para la evolución de datos iniciales del tipo 2 con $M\mu = 0.3$, $\ell = 1$, y frecuencia $\omega_x = 0.29782545$. La figura superpuesta muestra con más detalle la región encerrada en el rectángulo. Y se muestran las primeras 5 frecuencias resonantes y la frecuencia ω_x . La curva verde sólida corresponde al punto de muestra localizado cerca del primer extremo, mientras que la línea roja discontinua corresponde al punto de muestra localizado cerca del segundo extremo. Cada muestra fue calculada en puntos r_j distinto. [16]

característico de estas configuraciones (su tiempo de vida media) va a estar dado por $t_{1/2} = \ln(2)M/s$, donde s es el parámetro para el decaimiento exponencial mencionado anteriormente. Notemos además que en algunos casos considerados aquí, se pudo evolucionar más allá de $t_{1/2}$, corroborando así que, al menos para estos parámetros, el régimen exponencial se sigue manteniendo.

Cambiando de regreso de las unidades geométricas, y considerando una masa de agujero negro de $10^8 M_\odot$, se tiene un tiempo característico de orden

$$t_{1/2} \approx \frac{680}{s} \text{segundos.} \quad (3.39)$$

La figura (3.3.6) muestra el tiempo de vida media $t_{1/2}$ para estados pseudoresonantes y estados no resonantes, para el caso $\ell = 1$ y distintos valores de $M\mu$. Se puede observar claramente que existe un cambio en la pendiente cuando se alcanza la masa crítica $M\mu = 0.466$, mostrando que los estados pseudoresonantes en efecto tienen un tiempo de vida mas largo que los no resonantes. Esto se realizó suponiendo una masa de $M = 10^8 M_\odot$. Además en esta figura se realiza una comparación con otros tiempos característicos, como lo es el tiempo de colapso t_c , el cual es el tiempo en el que una configuración de gas sin presión σ colapsa gravitacionalmente, y el tiempo característico t_e que fue definido previamente. El tiempo de colapso se define como $t_c := \sqrt{\sigma^3 / GM_g}$, en donde M_g es la masa del gas, que en nuestro caso será la masa del agujero negro $M_g = M$. Para poder comparar t_c con $t_{1/2}$, se escogió a σ como $R_{99}/2$, y claramente se observa de (3.3.6), que $t_{1/2}$ es mayor que los otros tiempos característicos, y en el caso de configuraciones pseudoresonantes, es de órdenes de magnitud mucho mayor.

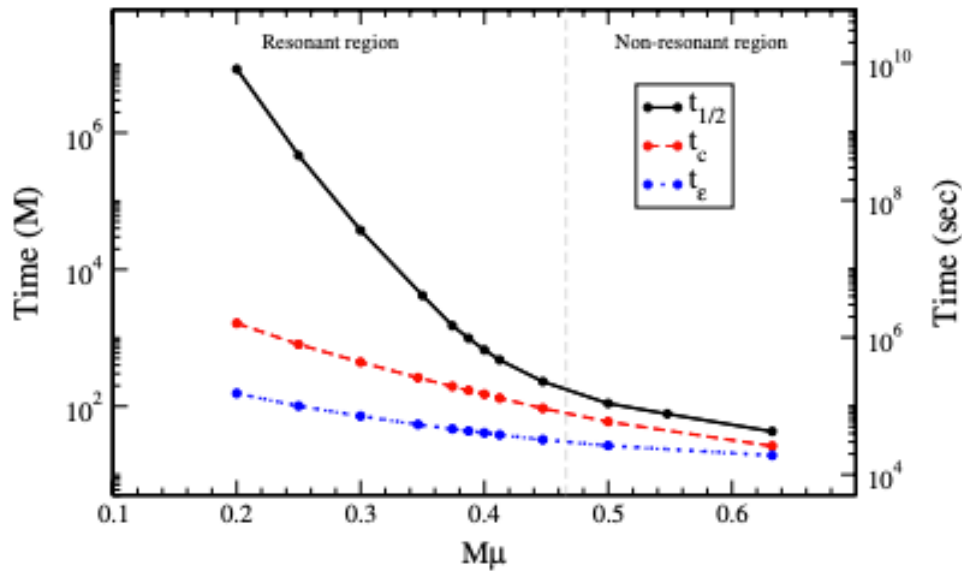


Fig. 3.3.6: Tiempo de vida media $t_{1/2}$ para estados pseudoresonantes y estados no resonantes, para el caso $\ell = 1$ y distintos valores de $M\mu$. [16]

Se puede objetar que en este tipo de configuraciones que dan origen a las soluciones cuasiresonantes se necesitan condiciones iniciales que difícilmente se darán

en la naturaleza, puesto que no necesariamente el campo escalar debe de estar oscilando en estas frecuencias específicas.

Capítulo 4

Peluca con autointeracción

4.1. Ecuación de Klein-Gordon con autointeracción en fondo de Schwarzschild.

Consideramos ahora introducir un término de autointeracción $\frac{1}{2}\eta\lambda|\phi|^4$ en el potencial del campo escalar, donde $\eta = \pm 1$, siendo $\eta = 1$ una autointeracción repulsiva, mientras que $\eta = -1$ es una autointeracción atractiva. En unidades geometrizadas ($G = c = 1$) el parámetro λ tiene unidades de (distancia)⁻², por lo que se le puede considerar como una longitud característica de autointeracción. Sin embargo puede mostrarse que en unidades físicas, λ tiene dimensiones de \hbar^{-1} , por lo que en unidades naturales donde $\hbar = 1 = c$, el parámetro de autointeracción es adimensional y puede calcularse desde las unidades naturales utilizando $\lambda_{\text{nat}} = \hbar\lambda$.

Para mantener una configuración que siga siendo esféricamente simétrica teniendo una autointeracción cuártica necesitamos cambiar la interpretación que se tiene del campo, ahora en vez de expandir cada campo en una suma de distintos armónicos esféricos se tendrá que el campo será especial con una ℓ fija, es decir, se tratará ahora de una ℓ -peluca. Consideremos un campo escalar descrito por un multiplete de $(2\ell + 1)$ componentes en un espacio-tiempo de Schwarzschild. El lagrangiano de dicho campo está dado por

$$\mathcal{L}_\phi = \left(\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi^\dagger - \mu^2 \phi \phi^\dagger - \eta \frac{1}{2} \lambda \phi \phi^\dagger (\phi \phi^\dagger) \right), \quad (4.1)$$

Haciendo la variación respecto a ϕ^\dagger se obtiene la ecuación de Klein-Gordon

$$\square\phi - \mu^2\phi - \eta\lambda\phi|\phi|^2 = 0, \quad (4.2)$$

tomando la descomposición de los campos en armónicos esféricos con

$$\phi = \frac{u(r)}{r} e^{i\omega t} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \begin{pmatrix} Y_{l-l} \\ \dots \\ Y_{l0} \\ \dots \\ Y_{ll} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

y

$$\phi^\dagger = \frac{u(r)}{r} e^{-i\omega t} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \left(Y_{l-l}^* \dots Y_{l0}^* \dots Y_{ll}^* \right), \quad (4.4)$$

es decir, cada campo es un multiplete escalar donde en cada entrada está dada por una componente del número m del armónico esférico. Ahora, el proceso de la obtención de la ecuación tipo Schrödinger es similar al caso interior, sin embargo ahora aparece un término de autinteracción. Dicho término se escribe como

$$\eta\lambda\phi(\phi\phi^\dagger) = \eta\frac{1}{r}u(r)\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}e^{i\omega t} \left(\frac{4\pi u^2}{(2\ell+1)r^2} \sum_{m'=-\ell}^{m'=+\ell} |Y_{\ell m'}|^2 \right) \begin{pmatrix} Y_{\ell-\ell} \\ \dots \\ Y_{\ell 0} \\ \dots \\ Y_{\ell\ell} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

y tomando en cuenta que $\sum_{m'=-\ell}^{m'+\ell} |Y_{\ell m'}|^2 = \frac{2\ell+1}{4\pi}$, entonces el término de interacción queda como

$$\eta\lambda\phi(\phi\phi^\dagger) = \eta\frac{1}{r}e^{i\omega t} \left(\frac{u^2}{r^2} \sqrt{\frac{4\pi}{(2\ell+1)}} \right) \lambda u(r) \begin{pmatrix} Y_{\ell-\ell} \\ \dots \\ Y_{\ell 0} \\ \dots \\ Y_{\ell\ell} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Juntando todos los términos de la ecuación de Klein-Gordon, y dividiendo entre los factores comunes, se tiene que la ecuación de Klein-Gordon queda como

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(N(r) \frac{\partial}{\partial r} u(r) \right) + \frac{\omega^2}{N(r)} u(r) + \left[-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2M}{r^3} - \mu^2 - \eta\lambda \left(\frac{u^2}{r^2} \right) \right] u(r). \quad (4.7)$$

Multiplicando todo por $N(r)$ y acomodando, se tiene finalmente

$$\left[-N(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(N(r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + V_{\text{eff}}(r) \right] u(r) = \omega^2 u(r), \quad (4.8)$$

donde

$$V_{\text{eff}}(r) = N(r) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + \mu^2 + \eta\lambda \left(\frac{u^2}{r^2} \right) \right]. \quad (4.9)$$

Otra manera análoga de obtener las mismas ecuaciones es cambiando la interpretación, donde en lugar de tener un multiplete se tengan $2\ell + 1$ campos escalares complejos, similar a la configuración de ℓ -estrellas de bosones mencionadas anteriormente, es decir, se tendrá que el lagrangiano estará dado por

$$\mathcal{L}_\phi = \sum_i \left(\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi_i \nabla^\mu \phi_i^* - \mu^2 |\phi_i|^2 - \eta \frac{1}{2} \lambda |\phi_i|^2 \sum_j |\phi_j|^2 \right), \quad (4.10)$$

en donde cada campo estará dada por

$$\phi_m = \frac{u(r)}{r} e^{i\omega t} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell,m}, \quad (4.11)$$

con m tomando los valores $-\ell, \ell+1, \dots, \ell$, mientras que

$$\phi_m^* = \frac{u(r)}{r} e^{-i\omega t} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell,m}^*, \quad (4.12)$$

y se recupera la ecuación de Klein-Gordon (4.8).

Vemos que en esta ecuación de Klein-Gordon, a diferencia del caso sin autointeracción, no se puede definir un potencial efectivo a priori, pues en este caso el potencial efectivo incluirá un término que depende de $u(r)$, por lo cual se tiene que resolver primeramente esta ecuación para conocer el potencial, además, ahora se tiene a λ como nuevo parámetro. Sin embargo, se espera que para valores pequeños de λ , el potencial efectivo se reduzca al caso sin autointeracción, por lo cual se espera que las banda de resonancias coincida en estos casos. La ecuación (4.8) es invariante bajo la transformación $(u, \lambda) \mapsto (\alpha u, \lambda/\alpha^2)$, la cual simplifica la tarea de explorar el espacio de soluciones si uno considera la variable

$$v(r) = \sqrt{\lambda} u(r), \quad (4.13)$$

Por lo cual ahora la ecuación se puede escribir como

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + N(r) \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2}{r^3} + M^2 \mu^2 + \eta \left(\frac{v^2}{r^2} \right) \right) \right] v(r^*) = M^2 \omega^2 v(r^*), \quad (4.14)$$

donde ahora $v(r)$ puede cuantificar la autointeracción. Notamos además que debido a la no linealidad de la ecuación, ahora no se puede hacer un reescalamiento del campo en la ecuación de Klein-Gordon, por lo cual la solución depende de la amplitud escogida. Además definiremos a la cantidad v_{\max} como al valor que alcanza el último máximo de la función v en la región $r^* > 0$, la cual nos permitirá

Tabla 4.1: Propiedades de reescalamiento de . (4.8)

R1	R2
$M \mapsto \alpha M$	$\lambda \mapsto \beta \lambda$
$r \mapsto \alpha r$	$(r, \mu, \omega, M) \mapsto (r, \mu, \omega, M)$
$(\mu, \omega) \mapsto \alpha^{-1}(\mu, \omega)$	$u \mapsto \beta^{-1/2}u$
$(u, \lambda) \mapsto (u, \lambda)$	

caracterizar a las soluciones más adelante debido a que también cuantifica a la autointeracción.

Si ahora hacemos el reescalamiento $\hat{r} = r/M$, entonces la ecuación de Klein-Gordon queda como

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \hat{r}^{*2}} + M^2 V_{\text{eff}}(\hat{r}) \right] v(\hat{r}) = M^2 \omega^2 v(\hat{r}). \quad (4.15)$$

con

$$M^2 V_{\text{eff}}(\hat{r}) = \left(1 - \frac{2}{\hat{r}} \right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}^3} + M^2 \mu^2 + \eta \left(\frac{v^2}{\hat{r}^2} \right) \right]. \quad (4.16)$$

Las propiedades de estos reescalamientos se muestran en (4.1)

La densidad de energía del campo, en el caso autointeractuante, al igual que en (3.18) se obtiene de $\rho = T_0^0$, y posteriormente se integra en la esfera, por lo que se tiene que $\rho_e = \int \rho r^2 d\Omega^2$

$$\begin{aligned} \rho_e(r) &= \frac{1}{2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right)} \left(\omega^2 u^2(r) + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + u^2(r) \left(\frac{2M}{r^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \mu^2 + \lambda \frac{u^2}{r^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.17)$$

de donde haciendo las transformaciones $u \rightarrow v\sqrt{1/\lambda}$ y $r \rightarrow \hat{r}M$, y tomando se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \lambda M^2 \rho_e(\hat{r}) &= \frac{1}{2 \left(1 - \frac{2}{\hat{r}} \right)} \left(M^2 \omega^2 v^2(\hat{r}) + \left(\frac{\partial v}{\partial \hat{r}^*} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + v^2(\hat{r}) \left(\frac{2}{\hat{r}^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{\hat{r}^2} + M^2 \mu^2 + \eta \frac{v^2}{\hat{r}^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

Primero analizaremos los comportamientos asintóticos que tienen que tener las

configuraciones del campo escalar. De aquí, al igual que en el caso sin autointeracción, se tiene que en el límite asintótico $r^* \rightarrow -\infty$, $N(r) \rightarrow 0$, por lo cuál la solución de (4.20) en esta región estará dada por

$$v(r^*) = A \cos(\omega r^* + \delta), \quad (4.19)$$

donde la amplitud A y la fase δ son reales. De igual forma en el otro límite asintótico $r^* \rightarrow \infty$, la solución estará dada de la forma

$$v(r^*) \propto e^{i\sqrt{\omega^2 - \mu^2}r^*},$$

la cual será válida cuando decaiga de forma exponencial, cosa que solo se cumple si $0 < \omega^2 < \mu^2$. Es decir al igual que el caso anterior se trata de modos salientes oscilantes cerca del agujero negro que tienen un decaimiento exponencial en el exterior. Ahora se buscan las configuraciones que sean resonantes, es decir, aquellos modos que permanezcan estáticos debido a una amplitud que resuene en las paredes del potencial efectivo. Sin embargo este como se había mencionado no puede obtenerse a priori, puesto que depende de la solución. Estas soluciones se analizarán en los casos $\ell = 0$ y $\ell = 1$. El comportamiento asintótico para una $M\mu$ y $M\omega$ dada se puede observar en la figura (4.1.1).

4.2. Caso $\ell = 0$

Para el caso $\ell = 0$, se tiene una distribución esféricamente simétrica de campo escalar, y la ecuación (4.20) toma la forma de

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + N(r) \left(\frac{2}{r^3} + M^2\mu^2 + \eta \frac{v^2}{4\pi r^2} \right) \right] v(r^*) = M^2\omega^2 v(r^*). \quad (4.20)$$

Dado que ya conocemos los comportamientos asintóticos podemos integrar numéricamente a (4.20) mediante un método de shooting. Para esto necesitamos dar un valor fijo de η y $M\mu$ y escoger alguna $M\omega$ en el rango correspondiente, así

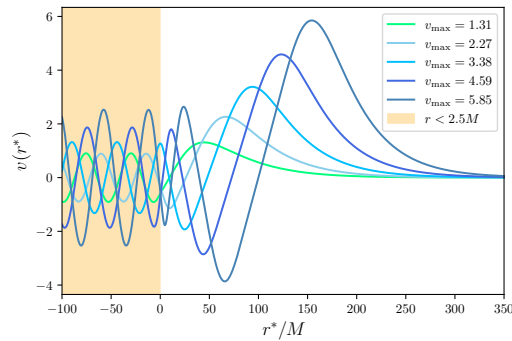


Fig. 4.1.1: Muestra de soluciones a (4.20) con un decaimiento exponencial en infinito. En la región cerca del horizonte ($r^* \rightarrow -\infty$), las soluciones se comportan de acuerdo al comportamiento dado en Eq. (4.19), la máxima amplitud en esta región determina el valor de A . El valor en la frontera derecha también determina el valor de v_{\max} .

como ajustar $v(r)$ en algún punto para parametrizar la solución y así conocer el valor de la constante de autointeracción.

Para ilustrar dicha parametrización tomaremos a $M\omega = 0.14$, y ajustaremos la amplitud del campo escalar cerca del horizonte de eventos del agujero negro $v(R_0) = A$ y encontraremos un valor para la fase δ . Además de eso se tomará el valor v_{\max} y dicho valor servirá para caracterizar a la solución. Dichas parametrizaciones se muestran en las figuras (4.2.1) y (4.2.2) para autointeracciones negativas y positivas respectivamente.

De las figuras anteriores observamos que existen soluciones distintas donde los valores de A coinciden a pesar de ser diferentes soluciones puesto que v_{\max} cambia, por lo cuál A no es un buen parámetro para determinar a la solución. Llamaremos a la región donde $v_{\max} \rightarrow 0$ como el régimen de autointeracción es débil, además esta región tiende a $\lambda = 0$. Conforme se incrementa el valor de v_{\max} la solución se aleja de este régimen lineal y el factor de v^2 en (4.20) toma mayor importancia.

Caracterizaremos a la familia de soluciones mediante la cantidad v_{\max} , la cual funciona de manera análoga a la cantidad A_{in} definida en el caso no autointeractuante, por lo cuál nos puede ayudar a cuantificar cuanto campo escalar se acumula en la región exterior con respecto a la amplitud A cerca del horizonte calculando el cociente A/v_{\max} .

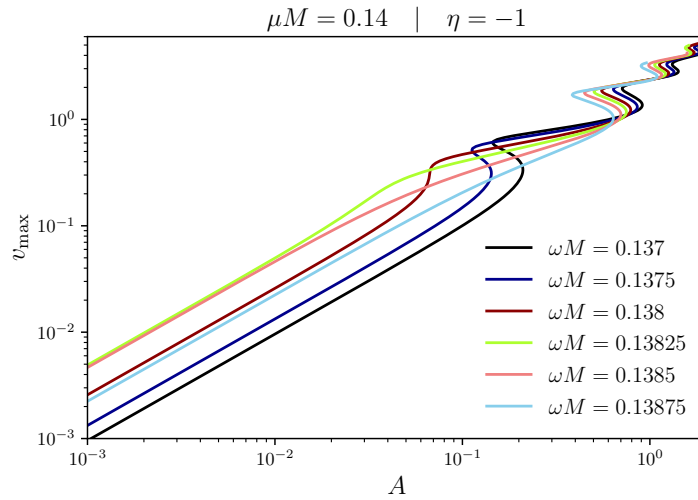


Fig. 4.2.1: Espacio de soluciones para el caso con $\lambda < 0$.

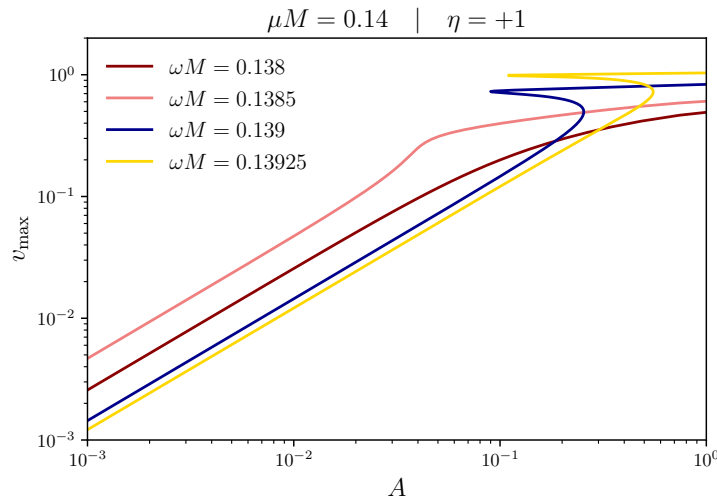


Fig. 4.2.2: Espacio de soluciones para el caso con $\lambda > 0$.

Es decir, nos puede ayudar a encontrar los estados que son resonantes. Las condiciones para tener una frecuencia que sea resonante no son exactamente las mismas que en el caso no autointeractuante, puesto que para conocer si el potencial efectivo tiene un mínimo se necesita obtener la solución a-priori. Obteniendo las soluciones y calculando el cociente A/v_{\max} nos ayuda a encontrar las configuraciones de campo escalar que más tiempo viven alrededor de un agujero negro estático, es

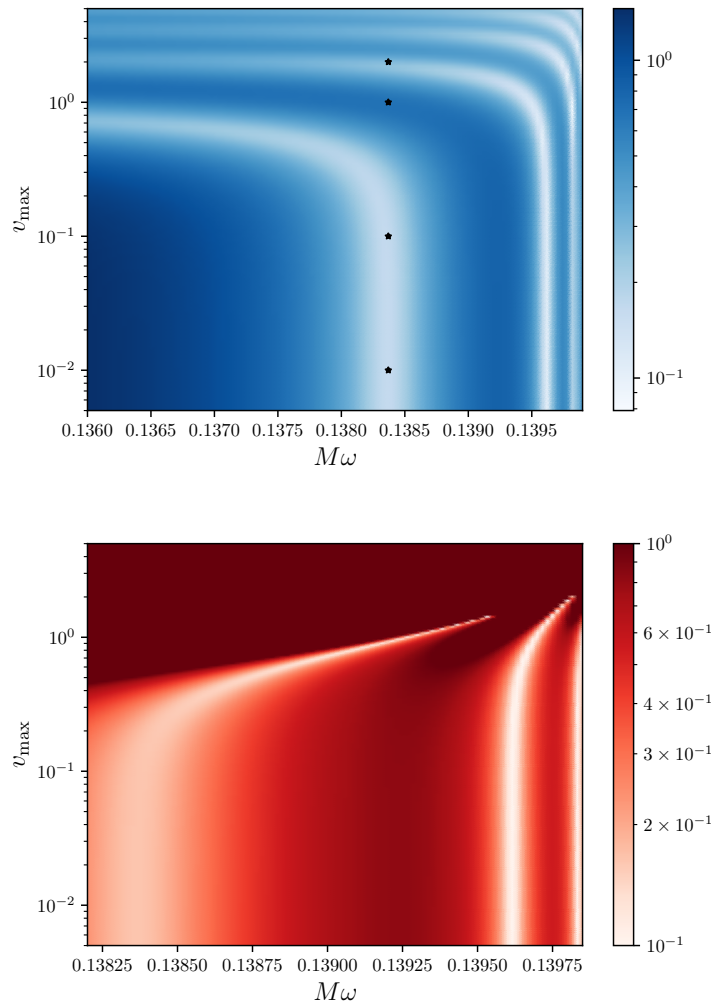


Fig. 4.2.3: Cociente de A/v_{\max} el espacio de parámetros $\omega M \times v_{\max}$. Las bandas blancas corresponden a los estados resonantes. El panel superior muestra el caso $\eta = -1$ y el panel inferior el caso $\eta = 1$.

decir, las soluciones que serán resonantes. Para encontrar estas soluciones se hace un procedimiento análogo al realizado en el caso sin autointeracción, y se buscan los parámetros $M\omega$ discretas y v_{\max} , tal que el cociente A/v_{\max} sea un mínimo. Esto se muestra en la figura (4.2.3) para $M\mu = 0.14$.

De (4.2.3), se observa que cuando v_{\max} , parámetro que ahora cuantifica la autointeracción, es pequeño, entonces los estados resonantes tenderán a valores constantes de $M\omega$, los cuales son consistentes con los valores de $M\omega$ resonantes en el

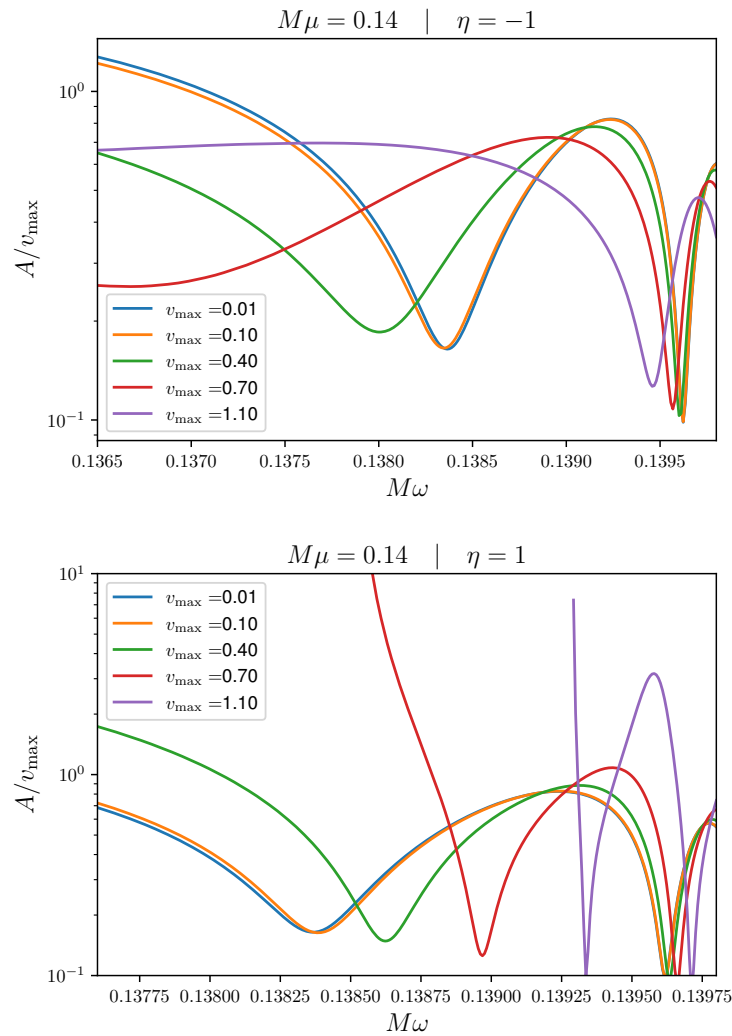


Fig. 4.2.4: Cociente de A/v_{\max} para distintos valores de v_{\max} . Panel superior: $\eta = -1$, panel inferior $\eta = +1$

caso $\lambda = 0$, en donde el primer estado resonante se encuentra en $M\omega = 0.13837$. En la figura (4.2.4) se muestra el cociente A/v_{\max} para distintos valores de v_{\max} . De esta figura se observa que conforme se aumenta el valor de la autointeracción, o bien la cantidad v_{\max} , entonces cambia también la frecuencia a las que serán resonantes, haciéndose menores en el caso de autointeracción atractiva $\eta = -1$, y mayores en el caso de autointeracción repulsiva $\eta = 1$, lo cual se corrobora también de (4.2.3). También de aquí observamos que existe un valor máximo de v_{\max}

para el cuál se tienen ciertas soluciones resonantes, pues se observa que cada solución tiende a un valor máximo donde es asintótico. Para el caso $\eta = 1$ se tiene que para el primer estado resonante el límite es $v_{max} \approx 1.5$, mientras que para el caso $\eta = -1$ se tiene que el límite es $v_{max} \approx 0.8$.

En las figuras (4.2.5) y (4.2.6) se grafican la soluciones y los perfiles de densidad normalizados de las distribuciones del campo escalar en el caso $\eta = -1$ y $\eta = 1$, dejando a $M\omega = 0.13837$ fijo y cambiando el parámetro de autointeracción v_{max} comparadno con el caso $\lambda = 0$. Es decir, serían puntos a lo largo de la vertical en (4.2.3)

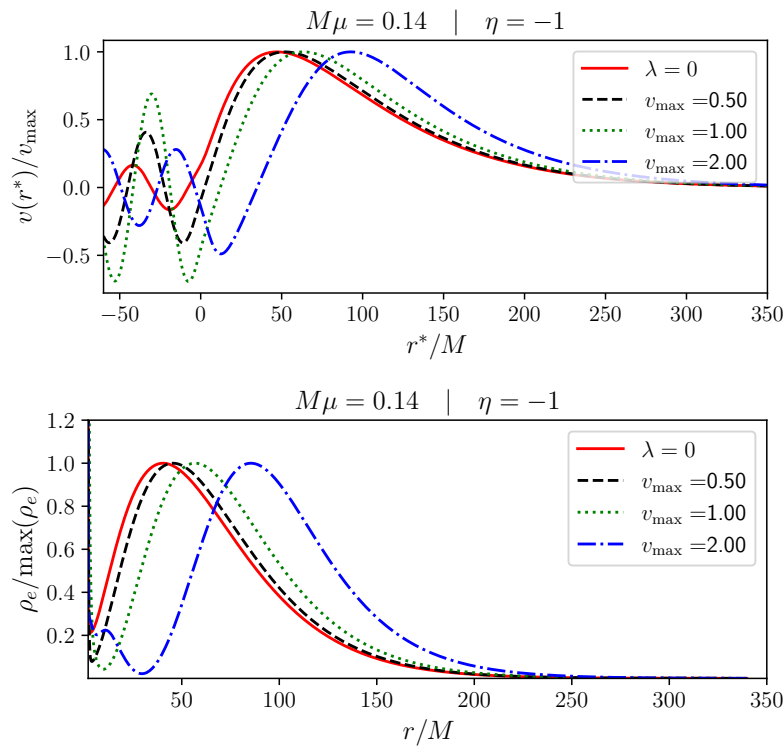


Fig. 4.2.5: Caso $\eta = -1$ panel superior: perfil normalizado de las configuraciones de campo escalar para un $\omega M = 0.13837$ fijo utilizando distintos valores de v_{max} . Panel inferior: Densidad de energía normalizada de las mismas configuraciones del campo escalar.

De la figuras (4.2.5) y (4.2.6) se observa que las soluciones parecen alejarse del horizonte del agujero negro en el caso $\eta = -1$ conforme se aumenta v_{max} , sin

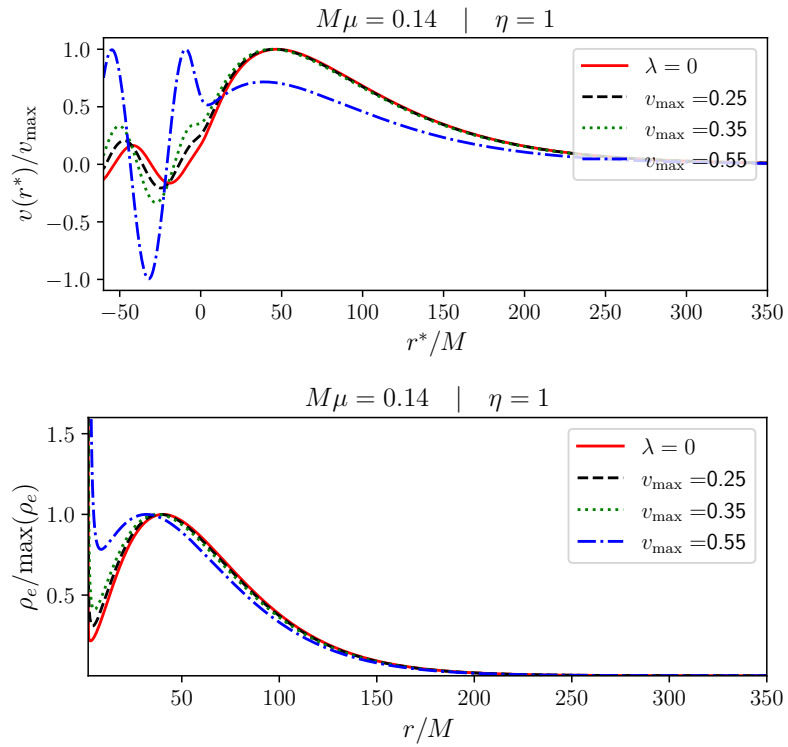


Fig. 4.2.6: Caso $\eta = 1$ panel superior: perfil normalizado de las configuraciones de campo escalar para un $\omega M = 0.13837$ fijo utilizando distintos valores de v_{\max} . Panel inferior: Densidad de energía normalizada de las mismas configuraciones del campo escalar.

embargo este comportamiento es debido a que como se observa de (4.2.3), las soluciones están tendiendo a sobretonos de estados resonantes, por lo cuál tendrán mas nodos en la densidad de energía. Dichas soluciones al no ser el estado base resonante tenderán a ser mas amplias como se vio en el capítulo anterior. En el caso $\eta = 1$ se observa el comportamiento contrario, y para entenderlo se puede recurrir al estudio de los potenciales efectivos, los cuales se muestran en la figura (4.2.7). De dichos potenciales se observa que en el caso $\eta = 1$ el potencial se hace cada vez menos profundo y su mínimo se acerca al horizonte, por lo cual el campo tenderá concentrarse en esta zona hasta que deje de existir la solución, mientras el caso $\eta = -1$ comienza a tener mas de un solo pozo, esto debido a que para estos valores de v_{\max} se tiene mas de un nodo en la densidad el cual está afectando al potencial efectivo.

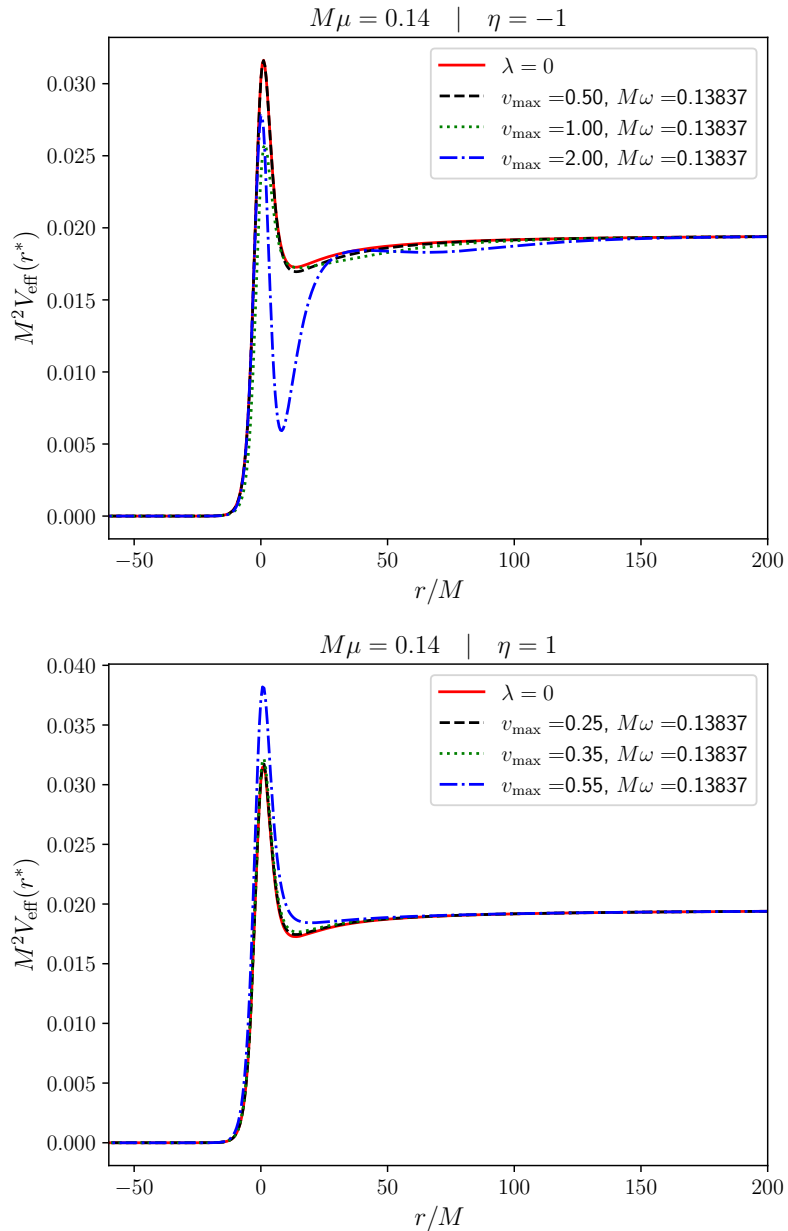


Fig. 4.2.7: Potencial efectivo para el caso $\eta = -1$ y $\eta = 1$, $M\mu = 0.14$ y $M\omega = 0.13837$ y distintos valores de v_{\max} .

Como se mencionó anteriormente, de (4.2.3) se observa que cuando el factor de autointeracción empieza a influir, entonces cambiarán también las frecuencias discretas en las cuales se tienen estados resonantes, disminuyendo cuando $\eta = -1$, e incrementando cuando $\eta = 1$. Es decir las frecuencias resonantes para el caso $\eta = -1$ toman valores mas pequeños mientras que las frecuencias resonantes en

el caso $\eta = 1$ toman valores mas grandes. Notemos que no todo el conjunto de soluciones será físico, puesto que se tienen modos entrantes y salientes del agujero negro, lo cual no se espera. Sin embargo las soluciones que sean resonantes serán mas realistas y cercanas a las soluciones físicas, puesto que se espera que se concentre el campo escalar lejos del horizonte de eventos.

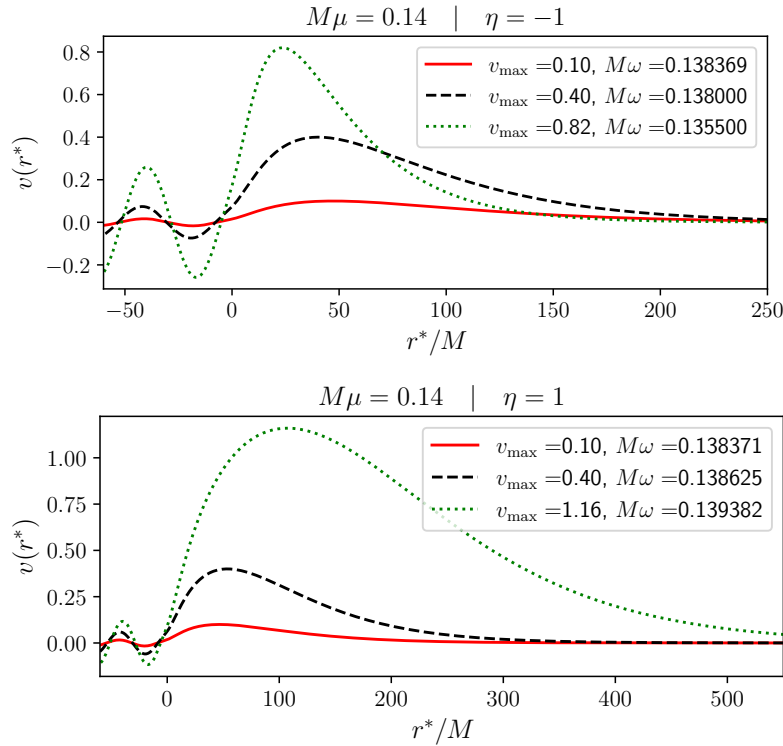


Fig. 4.2.8: Panel superior: Configuración de estados base para $\eta = -1$ y distintos valores de v_{max} . Panel inferior: Lo mismo para $\eta = 1$.

Fijándonos ahora en como cambia la solución del primer estado resonante, se grafican ahora los perfiles para distintos valores de $M\omega$ y v_{max} que siguen la banda blanca del estado resonante base que se muestra en (4.2.3) para $\eta = -1$ y $\eta = 1$. Dichas soluciones están graficadas en (4.2.8), y de esta figura se observa claramente que todas estas soluciones tienen la misma fase δ . Las densidades de energía de estos estados nos dan una mayor comprensión del rol de la autointeracción en la configuración del campo, pues de se observa que conforme se aumenta la autointeracción, los máximos de la densidad se acercan mas al horizonte en el caso de

$\eta = -1$, es decir, la distribución de campo escalar es atraída. Mientras que para el caso $\eta = 1$ el comportamiento de la solución cambia, pues la distribución del campo se aleja cada vez más del agujero negro.

En la figura (4.2.9) se muestra la densidad del campo escalar para distintos valores de v_{max} y $M\omega$, y de acuerdo a la naturaleza del potencial, se muestra que la densidad de energía se reduce conforme incrementa el parámetro de autinteracción en el caso $\eta = 1$, mientras que en el caso $\eta = -1$ ésta incrementa. Notemos que de igual forma que en la solución se aprecia que la distribución de campo escalar se acerca al agujero negro en el caso $\eta = -1$, y se aleja en el caso $\eta = 1$.

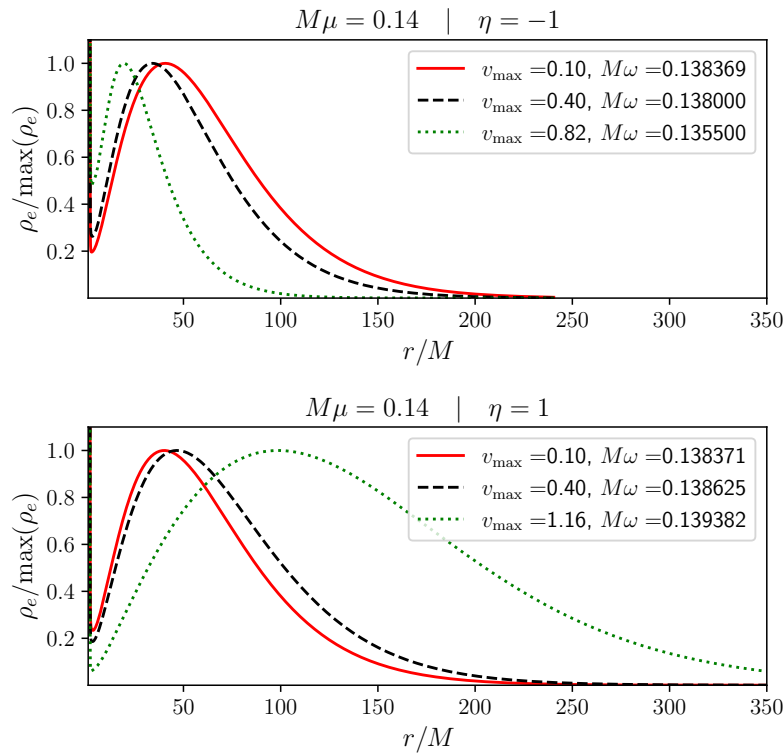


Fig. 4.2.9: Panel superior: Densidad de energía normalizada para el primer estado resonante con $\eta = -1$ y diferentes valores de v_{max} y $M\omega$. Panel inferior: densidad de energía normalizada para el primer estado resonante con $\eta = 1$ y diferentes valores de v_{max} y $M\omega$.

Fijémonos ahora en la segunda solución resonante. La densidad de energía normalizada se muestran en la figura (4.2.10), y al igual que en el estado base se tiene que las configuraciones se mueven hacia el agujero negro conforme aumenta v_{max}

si la autointeracción es atractiva ($\eta = -1$), o bien se alejan si es repulsiva ($\eta = 1$), además debido a que es la segunda solución resonante ahora se tiene 1 nodo.

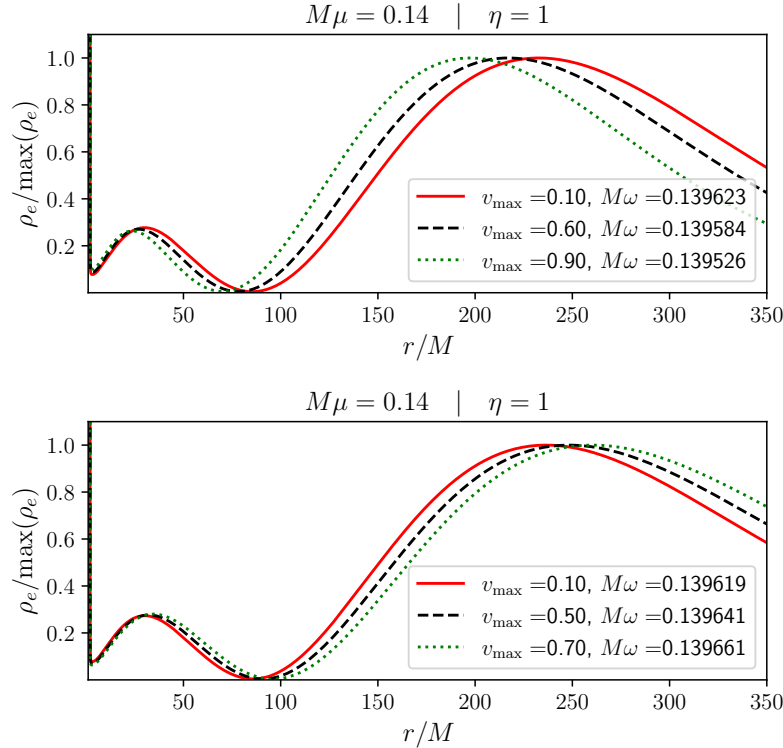


Fig. 4.2.10: Panel superior: Densidad de energía normalizada para el segundo estado resonante con $M\mu = 0.14, \eta = -1$ y diferentes valores de v_{\max} y $M\omega$. Panel inferior: densidad de energía normalizada para el segundo estado resonante con $M\mu = 0.14, \eta = 1$ y diferentes valores de v_{\max} y $M\omega$.

4.3. Caso $\ell = 1$

Se espera que para los casos $\ell \neq 0$ el comportamiento de las soluciones y el rol del parámetro de autointeracción sea similar al caso donde $\ell = 0$, para esto analizaremos el caso $\ell = 1$ y $M\mu = 0.3$ y lo compararemos con el caso sin autointeracción estudiado en el capítulo anterior. Al igual que en el caso con $\ell = 0$ se tratan de buscar los estados resonantes cuando A/v_{\max} sea un mínimo y se tiene el mismo tipo de comportamiento asintótico. En la figura (4.3.1) se muestra esta cantidad para distintos valores de v_{\max} .

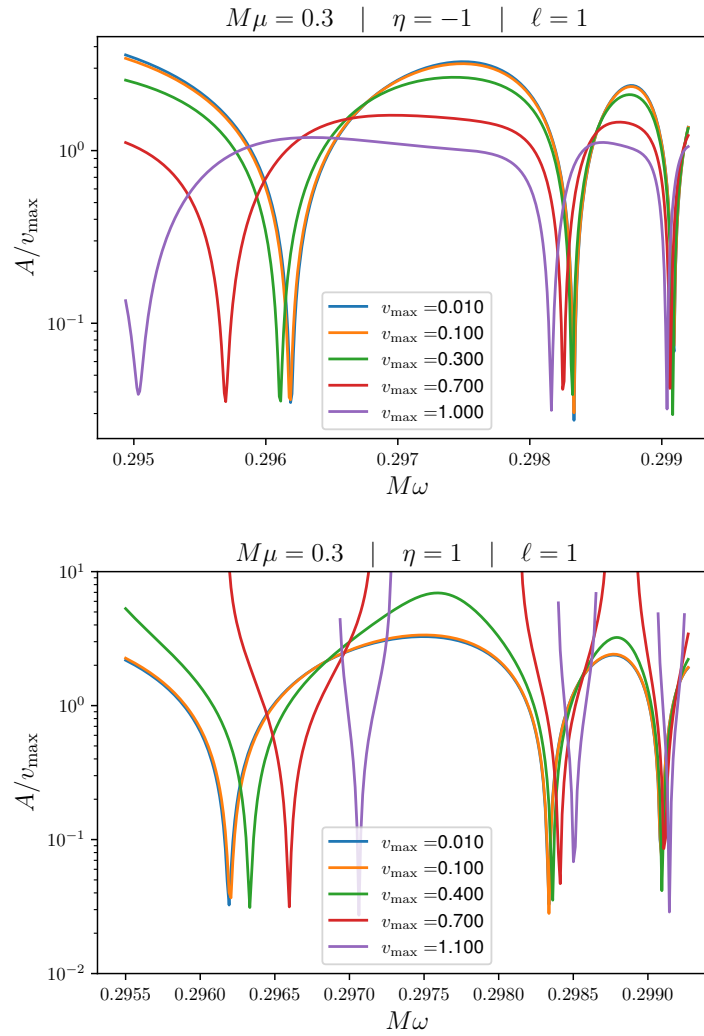


Fig. 4.3.1: Cociente de A/v_{\max} para distintos valores de v_{\max} . Panel superior: $\eta = -1$, panel inferior $\eta = +1$

De esta figura se observa lo mismo que sucedía en el caso $\ell = 0$, es decir, para $\eta = -1$ las frecuencias resonantes se hacen menores conforme aumenta λ , mientras que para $\eta = 1$ las frecuencias se hacen mayores conforme aumenta el parámetro de autointeracción, además de que existen regiones de v_{\max} en donde ya no se tiene una solución. Las soluciones para el primer estado resonante para distintos valores de v_{\max} y ωM se muestran en (4.3.2), mientras que la densidad de energía para dichas configuraciones se muestra en (4.3.3).

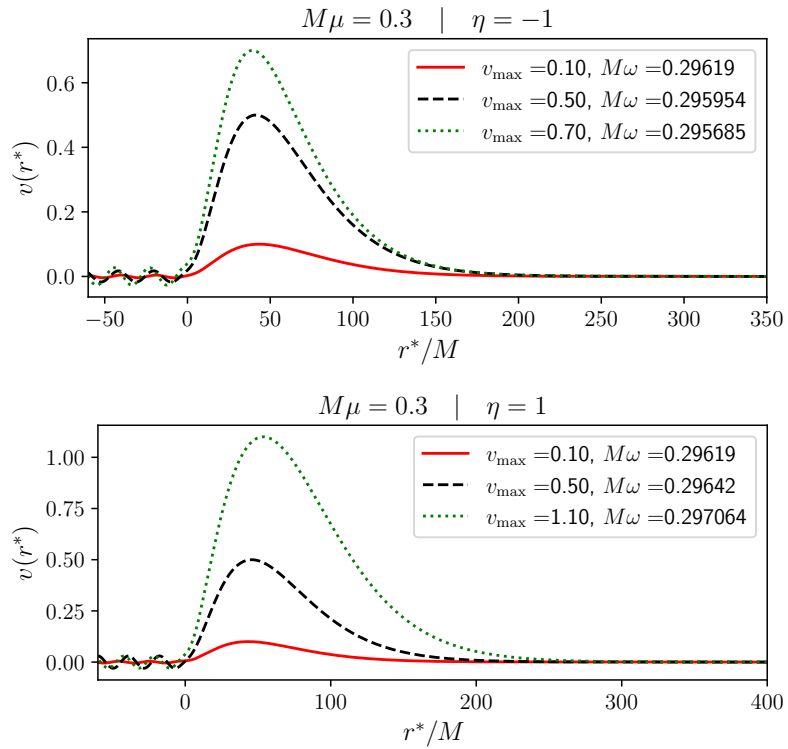


Fig. 4.3.2: Configuración del primer estado resonante con $\ell = 1$ y $M\mu = 0.3$ para distintos valores de v_{\max} y ωM . Panel superior: $\eta = -1$, panel inferior $\eta = 1$

De la figura (4.3.3) se muestra el mismo cambio en la morfología de la configuración que ocurría en el caso $\ell = 0$, es decir conforme se aumenta el parámetro de autointeracción se tiene que la distribución se acerca al agujero negro en el caso $\eta = -1$, y se aleja de este en el caso $\eta = 1$.

4.4. Evolución temporal

En esta sección se analizará el tiempo de decaimiento de los estados resonantes para el caso $\ell = 0$, pues esperamos que el comportamiento sea similar para valores de ℓ distintas ya que como se observó anteriormente el comportamiento de la autointeracción es muy similar. Pasando a coordenadas de Eddington-Finkelstein

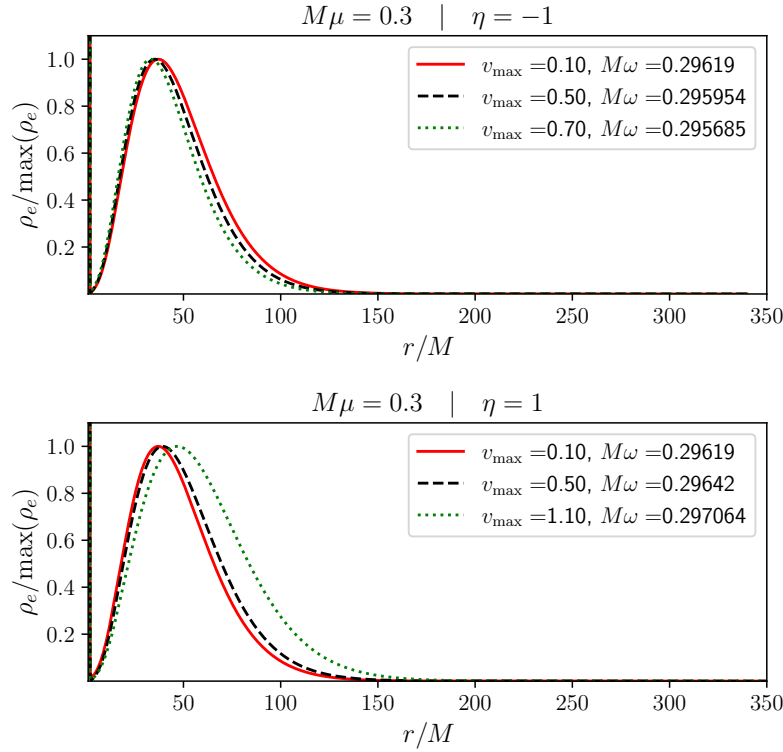


Fig. 4.3.3: Panel superior: Densidad de energía normalizada para el primer estado resonante con $\ell = 1$, $M\mu = 0.3$, $\eta = -1$ y diferentes valores de v_{max} y $M\omega$. Panel inferior: densidad de energía normalizada para el primer estado resonante con $\ell = 1$, $M\mu = 0.3$, $\eta = 1$ y diferentes valores de v_{max} y $M\omega$.

y usando las variables ADM de manera similar al caso sin autointeracción se obtiene el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned}
 \partial_t \phi &= \frac{r}{r+2M} \left(\pi + \frac{2M}{r} \psi \right), \\
 \partial_t \psi &= \frac{2M}{2M+r} \partial_r \psi + \frac{r}{2M+r} \partial_r \pi + \frac{2M}{(2M+r)^2} (\pi - \psi), \\
 \partial_t \pi &= \frac{1}{2M+r} (2M\pi + r\psi) + \frac{2M}{(2M+r)^2} (\psi - \pi) \\
 &\quad + \frac{2}{r(2M+r)} (r\psi + 2M\pi) - \phi \left(\mu^2 + \eta \lambda |\phi|^2 \right). \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

De donde la energía total de la configuración de campo escalar en coordenadas de Kerr-Schild se puede escribir como

$$E = 4\pi \int \rho(r) \alpha r^2 dr, \quad (4.22)$$

donde

$$\rho(r) = \frac{1}{2} \left(\alpha^2 \pi^2 + 2\pi\psi\beta^2 + \gamma^{rr}\psi^2 + \mu^2\phi^2 + \frac{1}{2}\lambda\phi^4 \right). \quad (4.23)$$

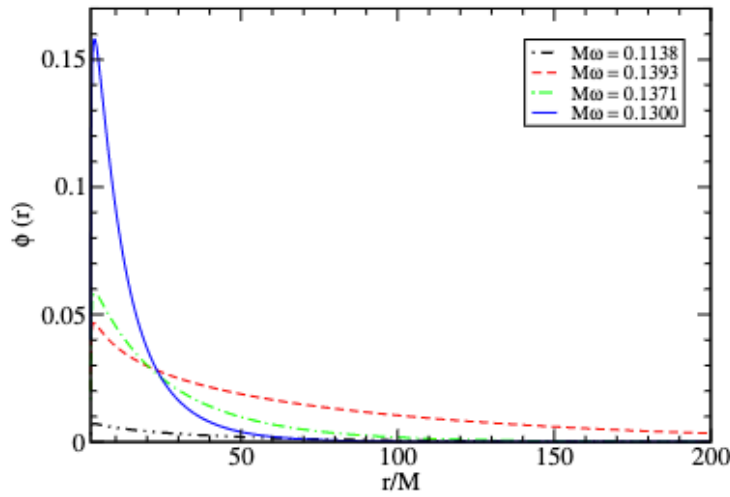


Fig. 4.4.1: Perfiles iniciales del campo escalar que corresponden a un estado resonante regularizado con $M\mu = 0.14$. Los parámetros del campo escalar son $\ell = 0$, $\eta\lambda = 1$, $M\mu = 0.14$.

También se consideraron los modos resonantes con otros valores del acoplamiento $M\mu$ y se determinaron las tasas del decaimiento de la energía para cuantificar el efecto que tiene el parámetro de autointeracción λ .

Dichos resultados se muestran en la tabla 4.2. A pesar de que la morfología de los estados del campo escalar son diferentes para configuraciones con $\eta = +1$ y $\eta = -1$, la tasa de decaimiento es similar para un valor dado de $M\mu$. Por lo cual se puede concluir que el efecto de λ en la tasa de decaimiento es subdominante comparada con el efecto de $M\mu$.

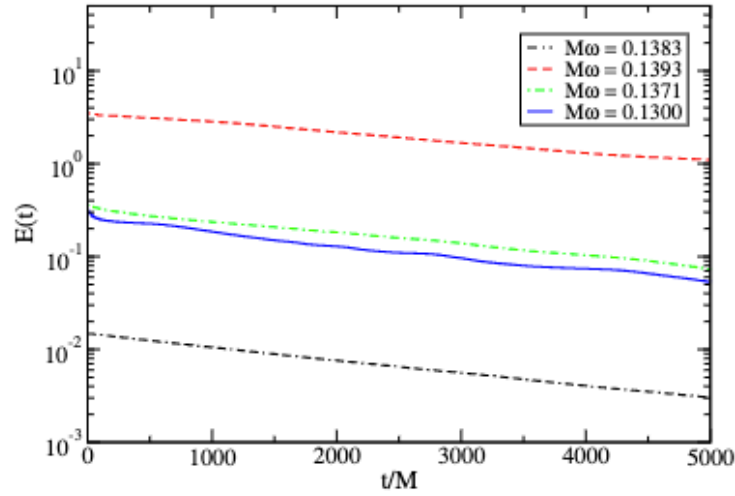


Fig. 4.4.2: Energía de los estados del campo escalar durante su evolución. Después de un decaimiento rápido inicialmente, la energía decae de manera exponencial en el tiempo. La tasa de decaimiento s se muestra en la tabla 4.2.

$M\mu$	$M\omega$	régimen	η	s
0.12	0.1192	débil	+1	1.16×10^{-4}
0.12	0.1196	fuerte	+1	8.9×10^{-5}
0.12	0.1180	débil	-1	1.2×10^{-4}
0.12	0.1100	fuerte	-1	1.9×10^{-4}
0.14	0.13837	débil	+1	3.20×10^{-4}
0.14	0.13930	fuerte	+1	2.64×10^{-4}
0.14	0.1371	débil	-1	3.03×10^{-4}
0.14	0.1300	fuerte	-1	3.25×10^{-4}
0.16	0.1580	débil	+1	7.05×10^{-4}
0.16	0.1590	fuerte	+1	4.3×10^{-4}
0.16	0.1560	débil	-1	6.9×10^{-4}
0.16	0.1500	fuerte	-1	5.5×10^{-4}
0.18	0.1780	débil	+1	1.41×10^{-3}
0.18	0.1790	fuerte	+1	5.82×10^{-4}
0.18	0.1750	débil	-1	1.45×10^{-3}
0.18	0.1700	fuerte	-1	9.6×10^{-4}

Tabla 4.2: Parámetros de los estados cuasi resonantes usados en la evolución temporal. La última columna corresponde a s , la pendiente de la línea $\ln(E(t)/E_0) = -st$ in Fig. 4.4.2.

Capítulo 5

Conclusiones

Se hizo una recopilación bibliográfica sobre las formas distintas en las que aparecen los campos escalares dentro del contexto astrofísico. El estudio del campo escalar es importante, pues se ha demostrado que funciona muy bien para explicar los efectos observados en un contexto cosmológico, ya que pueden describir adecuadamente lo que se conoce como energía oscura mediante la Quintaesencia, la cual causa la expansión acelerada del universo. Y dicho campo escalar puede recuperar los efectos que ocurren en la cosmología estándar Λ CDM, que es el modelo cosmológico que más se acerca a las observaciones actuales. Además, el campo escalar resuelve un problema que ocurría al momento de introducir la constante cosmológica, la cual se asocia con la energía del vacío, y resulta en una discrepancia de 120 órdenes de magnitud.

También existe un tipo de campo escalar llamado inflatón que sirve para explicar la etapa inflacionaria del universo que ocurrió en épocas tempranas y sirve para explicar los problemas de planitud y del horizonte, en el cual distintas áreas del universo causalmente desconectadas tienen la misma temperatura y no se necesitan condiciones iniciales específicas para que el universo evolucione hasta su estado actual. La inflación es necesaria para resolver estos problemas y para poder tener un modelo cosmológico consistente.

Por último en el contexto astrofísico, los campos escalares también son candidatos viables para explicar el efecto de materia oscura que observamos en el universo, el cual permite la formación de estructuras a gran escala y explica el comportamiento de las curvas de rotación de galaxias. Además el potencial más utilizado que se acerca a las observaciones actuales y reproduce Λ CDM es un potencial donde se

tiene un término masivo y además una autointeracción.

Es importante recalcar que los campos escalares son un tipo distinto de materia a la que se usa regularmente en contextos cosmológicos y astrofísicos, puesto que estos no son un fluido, esto debido a que no cumplen con una ecuación de estado que tienen los fluidos, además de que en los campos escalares no se tiene una temperatura claramente definida. Además de esto es importante decir que los campos escalares no necesariamente se deben describir como relacionados a una partícula, aunque pueden estarlo si se hace un análisis en el contexto de la teoría cuántica de campos. A diferencia de otras teorías que hacen modificaciones a la teoría estándar de la gravedad, los campos escalares siguen estando dentro del marco de Relatividad General, ya que las ecuaciones de Einstein siguen siendo válidas, pues simplemente es otro tipo de materia, por lo que se añade otro término al tensor de energía-momento que sigue satisfaciendo su conservación.

El objetivo principal de esta tesis fue entender al campo escalar en un marco astrofísico y analizar el tipo de configuraciones que pueden llegar a formar. En particular se analizó el caso donde un campo escalar de prueba está en una vecindad de un agujero negro, que es lo que se espera que ocurra en el centro de las galaxias donde existen agujeros negros supermasivos. Existen configuraciones especiales de estos campos escalares llamadas resonantes, en las cuales la oscilación del campo resuena con su potencial si tienen la frecuencia adecuada, por lo que la amplitud se mantiene en dicha región, lo cual actúa como una especie de presión que contrarresta a la gravedad producida por el agujero negro central haciendo que el campo escalar se mantenga por escalas de tiempo del orden de la edad del universo, sin terminar de caer totalmente al agujero negro. Se mostró que para configuraciones con $M\mu$ más pequeñas, la tasa de decaimiento del campo escalar será menor, además de que forma configuraciones más grandes. Este tipo de configuraciones son importantes, puesto que si el campo escalar realmente modela a la materia oscura que observamos en el universo podríamos cuantificar la masa de la configuración rodeando al agujero negro central. Esto se puede conocer

observacionalmente, ya que las imágenes del Event Horizon Telescope[8] muestran la sombra del agujero negro a partir de la cual se puede encontrar la masa de este, luego se puede hacer un análisis de la órbita de una estrella alrededor del agujero negro central y, a partir de esta, calcular la masa del objeto que está orbitando y medir si hay discrepancias. Si es que las hay, esta masa extra provendría de materia alrededor del agujero negro, que podría ser materia oscura y podría ser descrita por el campo escalar, además de que observamos que dependiendo de los nodos que tenga el campo escalar, pueden existir configuraciones de materia a distintas distancias del agujero negro central.

Finalmente, como investigación original, se hizo una modificación en el potencial del campo escalar, añadiendo un término de autointeracción dada por $\lambda\phi^4$, tanto para una configuración de campo escalar esféricamente simétrica y para $2\ell + 1$ campos escalares que forman una llamada ℓ -peluca. Se encontró que la autointeracción, tanto la repulsiva ($\eta = 1$), como la atractiva ($\eta = -1$) cambian la distribución del campo escalar dependiendo de los valores del parámetro v_{\max} y $M\omega$. Siendo la distribución con autinteracción repulsiva mas extendida espacialmente que en el caso atractivo o el no autointeractuante. Esto debido a que la configuración tiende a alejarse del agujero negro, mientras que la autointeracción atractiva las acerca aún más al agujero negro. Sin embargo este parámetro nuevo no tiene un efecto notable en la tasa de decaimiento del campo escalar. Además de esto se observó que las frecuencias de oscilación en donde el campo es resonante también cambian, siendo menores para el caso de autointeracción atractiva y mayores para la autinteracción repulsiva, por lo cual se tiene un rango mas grande de frecuencias que puedan ser resonantes. Simplemente se tiene que encontrar el valor de v_{\max} adecuado, es decir, este parámetro de autointeracción tiene que ser lo suficientemente grande.

Introducir este parámetro de autointeracción es importante, pues en el contexto de materia oscura permite un rango de masas mayor para el campo escalar, además de que es uno de los potenciales mas usados para describir a la materia

obscura, ya que simula mejor las observaciones actuales, por lo que es importante entender como es su dinámica en vecindades de agujeros negros supermasivos en los centros de las galaxias.

Como trabajo a futuro, siguiendo con esta línea de investigación, se propone analizar el caso autogravitante y autointeractuante, el cuál formaría una estrella de bosones fuera del agujero negro. Además, también se puede cambiar el agujero negro central por alguna estrella masiva y analizar si existen efectos observacionales que dichos campos escalares puedan tener, o bien analizar el caso donde el agujero negro es un agujero negro de Kerr.

Referencias

- [1] B. P. Abbott y col. «GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence». En: *Phys. Rev. Lett.* 116 (24 jun. de 2016), pág. 241103.
- [2] B. P. Abbott y col. «GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2». En: *Phys. Rev. Lett.* 118 (22 jun. de 2017), pág. 221101.
- [3] B. P. Abbott y col. «GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral». En: *Phys. Rev. Lett.* 119 (16 oct. de 2017), pág. 161101.
- [4] B. P. Abbott y col. «Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger». En: *Phys. Rev. Lett.* 116 (6 feb. de 2016), pág. 061102.
- [5] Eduardo Nahmad Achar. *Differential Topology and Geometry with Applications to Physics*. IOP Publishing, 2018.
- [6] Ronald J. Adler, Brendan Casey y Ovid C. Jacob. «Vacuum catastrophe: An elementary exposition of the cosmological constant problem». En: *American Journal of Physics* 63.7 (jul. de 1995), págs. 620-626. DOI: 10.1119/1.17850.
- [7] Kazunori Akiyama y col. «First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole». En: *Astrophys. J. Lett.* 875 (2019), pág. L1. DOI: 10.3847/2041-8213/ab0ec7. arXiv: 1906.11238 [astro-ph.GA].
- [8] Kazunori Akiyama y col. «First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole». En: *Astrophys. J. Lett.* 875.1 (2019), pág. L6. DOI: 10.3847/2041-8213/ab1141. arXiv: 1906.11243 [astro-ph.GA].

- [9] Kazunori Akiyama y col. «First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way». En: *Astrophys. J. Lett.* 930.2 (2022), pág. L12. DOI: 10.3847/2041-8213/ac6674.
- [10] Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford, 2006.
- [11] Miguel Alcubierre y col. « ℓ -boson stars». En: *Classical and Quantum Gravity* 35.19 (sep. de 2018), 19LT01. DOI: 10.1088/1361-6382/aadcb6. URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6382/aadcb6>.
- [12] Miguel Alcubierre y col. «Extreme ℓ -boson stars». En: *Classical and Quantum Gravity* 39.9 (abr. de 2022), pág. 094001. DOI: 10.1088/1361-6382/ac5fc2. URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac5fc2>.
- [13] Miguel Alcubierre y col. «On the linear stability of ℓ -boson stars with respect to radial perturbations». En: *Classical and Quantum Gravity* 38.17 (ago. de 2021), pág. 174001.
- [14] Luca Amendola y Shinji Tsujikawa. *Dark Energy: Theory and Observations*. Cambridge University Press, ene. de 2015. ISBN: 978-1-107-45398-2.
- [15] Alexandre Arbey, Julien Lesgourgues y Pierre Salati. «Galactic halos of fluid dark matter». En: *Phys. Rev. D* 68 (2 jul. de 2003), pág. 023511. DOI: 10.1103/PhysRevD.68.023511. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.68.023511>.
- [16] Juan Barranco y col. «Are black holes a serious threat to scalar field dark matter models?» En: *Phys. Rev. D* 84 (8 oct. de 2011), pág. 083008. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.083008. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.083008>.
- [17] Juan Barranco y col. «Schwarzschild Black Holes can Wear Scalar Wigs». En: *Phys. Rev. Lett.* 109 (8 ago. de 2012), pág. 081102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.081102. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.081102>.

- [18] Juan Barranco y col. «Schwarzschild scalar wigs: Spectral analysis and late time behavior». En: *Phys. Rev. D* 89 (8 abr. de 2014), pág. 083006. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.083006. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.083006>.
- [19] Juan Barranco y col. «Self-gravitating black hole scalar wigs». En: *Phys. Rev. D* 96 (2 jul. de 2017), pág. 024049. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.024049. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.024049>.
- [20] Jacob Bekenstein. «Nonexistence of Baryon Number for Static Black Holes». En: *Phys. Rev. D* 5 (mar. de 1972). DOI: 10.1103/PhysRevD.5.1239.
- [21] C. L. Bennett y col. «The Microwave Anisotropy Probe Mission». En: 583.1 (ene. de 2003), págs. 1-23. DOI: 10.1086/345346. arXiv: astro-ph/0301158 [astro-ph].
- [22] Miguel Bezares y col. «Gravitational waves and kicks from the merger of unequal mass, highly compact boson stars». En: *Phys. Rev. D* 105 (6 mar. de 2022), pág. 064067. DOI: 10.1103/PhysRevD.105.064067. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.064067>.
- [23] Belen Carvente y col. «Observational constraints on complex quintessence with attractive self-interaction». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 503.3 (mar. de 2021), págs. 4008-4015. ISSN: 0035-8711. DOI: 10.1093/mnras/stab650. eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/503/3/4008/36900628/stab650.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stab650>.
- [24] Belen Carvente y col. «Traversable ℓ -wormholes supported by ghost scalar fields». En: *Classical and Quantum Gravity* 36.23 (nov. de 2019), pág. 235005. DOI: 10.1088/1361-6382/ab4dfb. URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab4dfb>.
- [25] Edmund J. Copeland, Andrew R. Liddle y David Wands. «Exponential potentials and cosmological scaling solutions». En: *Phys. Rev. D* 57 (8 abr. de

- 1998), págs. 4686-4690. DOI: 10.1103/PhysRevD.57.4686. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.57.4686>.
- [26] Valerio Faraoni. *Cosmology in scalar tensor gravity*. 2004. ISBN: 978-1-4020-1988-3. DOI: 10.1007/978-1-4020-1989-0.
- [27] Valerio Faraoni. «Jordan frame no-hair for spherical scalar-tensor black holes». En: *Physical Review D* 95.12 (jun. de 2017).
- [28] Valerio Faraoni y Salvatore Capozziello. *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*. Dordrecht: Springer, 2011.
- [29] James S. Gainer y col. «Spherical Parametrization of the Higgs Boson Candidate». En: *Phys. Rev. Lett.* 111 (4 jul. de 2013), pág. 041801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.041801. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.041801>.
- [30] W. Greiner y J. Reinhardt. *Field quantization*. 1996.
- [31] Norman Gürlebeck. «No-Hair Theorem for Black Holes in Astrophysical Environments». En: *Physical Review Letters* 114.15 (abr. de 2015).
- [32] Eréndira Gutiérrez-Luna y col. «Scalar field dark matter with two components: Combined approach from particle physics and cosmology». En: *Phys. Rev. D* 105 (8 abr. de 2022), pág. 083533. DOI: 10.1103/PhysRevD.105.083533. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.083533>.
- [33] James B. Hartle. *An Introduction to Einstein's General Relativity*. Pearson Education, 2003.
- [34] Werner Israel. «Event Horizons in Static Vacuum Space-Times». En: *Phys. Rev.* 164 (5 dic. de 1967), págs. 1776-1779.
- [35] Victor Jaramillo y col. «Dynamical ℓ -boson stars: Generic stability and evidence for nonspherical solutions». En: *Phys. Rev. D* 101 (12 jun. de 2020), pág. 124020. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.124020. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.124020>.

-
- [36] Roy P. Kerr. «Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics». En: *Phys. Rev. Lett.* 11 (5 sep. de 1963), págs. 237-238.
- [37] Edward W Kolb y Michael Stanley Turner. *The early universe*. Frontiers in Physics. Boulder, CO: Westview Press, 1990.
- [38] Juan Magaña y Tonatiuh Matos. «A brief Review of the Scalar Field Dark Matter model». En: *Journal of Physics: Conference Series* 378 (ago. de 2012), pág. 012012.
- [39] Charles Misner, Kip Thorne y John Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman y Company, 1973.
- [40] Houjun Mo, Frank C. van den Bosch y Simon White. *Galaxy Formation and Evolution*. 2010.
- [41] Luis E. Padilla y col. «Core-halo mass relation in scalar field dark matter models and its consequences for the formation of supermassive black holes». En: *Phys. Rev. D* 103 (6 mar. de 2021), pág. 063012.
- [42] Michael Edward Peskin y Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p. Westview Press, 1995.
- [43] Planck Collaboration y col. «Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results». En: 571 (nov. de 2014).
- [44] H. Reissner. «Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie». En: *Annalen der Physik* 355.9 (ene. de 1916), págs. 106-120.
- [45] Bernard F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [46] K. Schwarzschild. «On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory». En: *Abh. Konigl. Preuss. Akad. Wissenschaften Jahre 1906,92, Berlin, 1907* 1916 (ene. de 1916), págs. 189-196.

- [47] Paul R Shapiro, Taha Dawoodbhoy y Tanja Rindler-Daller. «Cosmological structure formation in scalar field dark matter with repulsive self-interaction: the incredible shrinking Jeans mass». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 509.1 (oct. de 2021), págs. 145-173. ISSN: 0035-8711. DOI: 10.1093/mnras/stab2884. eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/509/1/145/41103328/stab2884.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stab2884>.
- [48] Thomas P Sotiriou. «Black holes and scalar fields». En: *Classical and Quantum Gravity* 32.21 (oct. de 2015), pág. 214002.
- [49] Abril Suárez y Pierre-Henri Chavanis. «Cosmological evolution of a complex scalar field with repulsive or attractive self-interaction». En: *Phys. Rev. D* 95 (6 mar. de 2017), pág. 063515. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.063515. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.063515>.
- [50] Abril Suárez y Pierre-Henri Chavanis. «Hydrodynamic representation of the Klein-Gordon-Einstein equations in the weak field limit: General formalism and perturbations analysis». En: *Phys. Rev. D* 92 (2 jul. de 2015), pág. 023510. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.023510. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.023510>.
- [51] L. Arturo Ureña-López. «Brief Review on Scalar Field Dark Matter Models». En: *Front. Astron. Space Sci.* 6 (2019), pág. 47. DOI: 10.3389/fspas.2019.00047.
- [52] Mikhail S. Volkov y Dmitri V. Galtsov. «Gravitating non-Abelian solitons and black holes with YangMills fields». En: *Physics Reports* 319.1-2 (oct. de 1999), págs. 1-83.
- [53] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [54] Steven Weinberg. *Cosmology*. 2008. ISBN: 978-0-19-852682-7.