



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**Matrices de Cartan simetrizables y álgebras canónicas sobre
campos arbitrarios**

T E S I S
QUE PARA OPTAR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

M. en C. DAVID REYNOSO MERCADO

DIRECTOR DE LA TESIS:

Dr. CHRISTOF GEISS HAHN

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

Dr. RAYMUNDO BAUTISTA RAMOS

Dr. DANIEL LABARDINI FRAGOSO

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA CD. MX., NOVIEMBRE

2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mi esposa Biviana, gracias por apoyarme en cada momento, no sólo durante el doctorado sino también en nuestro proyecto de vida, te amo.

A mis padres, gracias a sus enseñanzas me convertí en la persona que soy actualmente.

A mis amigos, Alejandro, Edgar, Mario, René y Roman, gracias por los buenos recuerdos formados durante el doctorado.

A Christof, gracias por el apoyo, por creer en mí y por darme ánimos cuando lo necesitaba.

A mis sinodales: la doctora Corina Saenz y los doctores Raymundo Bautista, Jan Schöer y Octavio Mendoza. Gracias por tomarse el tiempo de leer mi tesis, agradezco sus comentarios y sugerencias.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y en especial al Instituto de Matemáticas por todas las facilidades otorgadas para la realización de este trabajo.

Agradezco al CONACyT por otorgarme la beca para realizar mis estudios de Doctorado.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	7
1.1. Carcajes y álgebra de caminos	8
1.2. Representaciones de carcajes	11
1.3. Definición de H -álgebras	13
1.4. Campos cuasi-finitos	15
1.5. Las álgebras \widehat{H} y \widetilde{H}	18
1.6. Gráficas valuadas	22
1.7. Representaciones de las especies de tipo $(1, 4)$ sobre k	24
1.8. Notación	25
2. Carcajes torcidos y descenso de Galois	31
2.1. Descenso de Galois	32
2.2. Carcajes con automorfismos	36
2.3. Representaciones invariantes	37
2.4. El álgebra $K[\alpha_n]$	52
2.5. Clasificación de las representaciones	63
3. Álgebras canónicas de tipo $(1, 4)$	71
3.1. La definición de Ringel	72

3.2. Funciones adjuntas.	74
3.3. Las álgebras canónicas de Λ	83
3.4. Álgebras $\tilde{H}^{\text{tw}}(l, P)$	87
Bibliografía	95

Introducción

En [6] se inicia el estudio de carcajes con relaciones para matrices de Cartan simetrizables. Una de las motivaciones de este trabajo fue modelar con los módulos localmente libres sobre estas álgebras el comportamiento de las representaciones de álgebras hereditarias (especies en el sentido de Dlab y Ringel [4]), pero sobre campos que pueden ser algebraicamente cerrados. Recordemos, que las especies para una matriz de Cartan no simétrica necesariamente están definidas sobre un campo no algebraicamente cerrado con ciertas propiedades aritméticas.

Posteriormente, Ringel introdujo en esta generalidad las álgebras canónicas [12], motivado por la importancia de las álgebras canónicas definidas por él sobre campos algebraicamente cerrados, ver [11].

El propósito de este trabajo es introducir en el espíritu de [6] una noción de álgebra canónica que modele las álgebras canónicas de [12] sobre campos algebraicamente cerrados. Proponemos una construcción similar para las álgebras canónicas asociadas a un bimódulo de tipo $(1, 4)$. Inspirados por [7], primero encontramos las formas normales explícitas de las álgebras canónicas de este tipo sobre el campo de las series de Laurent complejas $\mathbb{C}((\varepsilon))$ y luego reducir módulo ε^l . Para encontrar las formas normales que mencionamos antes, necesitamos encontrar formas normales de las representaciones regulares simples de las especies de tipo $(1, 4)$ (o \tilde{A}_{11} usando la notación de [4]). Dado que $\mathbb{C}((\varepsilon))$ es un campo cuasi-finito, la técnica de descenso de Galois es una herramienta eficiente para este fin. Una gran parte de este trabajo consistió en entender las representaciones regulares simples de la especie de tipo $(1, 4)$

sobre el campo $\mathbb{C}((\varepsilon))$.

Primero, recordemos de [12], que una representación M es de la forma (K^n, k^m, φ_M) , donde $\varphi_M : K \otimes_k k^m \rightarrow K^n$ es un morfismo K -lineal y $m, n \in \mathbb{N}$.

Usaremos la notación definida en la Sección 1.8. Una función que será de gran importancia en nuestro trabajo es $\phi_n : K[\alpha_n]_{\text{reg}} \rightarrow k_n$ definida por la asignación:

$$\alpha(\nu_0) + \alpha(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}} \mapsto -i \frac{\nu_2^2 - \nu_1\nu_3}{\nu_1^2 - \nu_3^2\varepsilon}.$$

Teorema 0.0.1. *Para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, tenemos que:*

1. *Para $R \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$ la representación $M(R)$ de Λ es regular simple si y sólo si $\phi_n(R) \in k_n$ es genérico. En este caso $\text{End}_\Lambda(R) \cong k_n$.*

Si $R, R' \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$, entonces $M(R) \cong M(R')$ si y sólo si $\phi_n(R) = \sigma_n^m(\phi_n(R'))$ para alguna $1 \leq m \leq n-1$.

2. *Las representaciones $M_{(1)}$ y $M_{(2)}$ (ver 2.5.2) son regulares simples, con $\text{End}_\Lambda(M_{(1)}) \cong k_2$ y $\text{End}_\Lambda(M_{(2)}) \cong k_4$.*
3. *Cada representación regular simple de Λ es isomorfa a una de las representaciones del tipo que aparece en 1. o 2.*

El teorema anterior será demostrado en la Sección 2.5 como el Teorema 2.5.4.

Denotamos por $\Omega = \Omega(\Lambda)$ al conjunto de clases de isomorfismos de las representaciones regulares simples Λ . El teorema de arriba, nos dice que los elementos de Ω son isomorfo a uno de los tres tipos: $M_{(1)}$, $M_{(2)}$ ó $M(R)$.

Para tener un mejor refinamiento de los representantes de las clases de tipo $M(R)$ definimos los elementos $R_n^{(j)}(s)$ en $K[\alpha_n]$, para $s \in k_n$, dependiendo de la paridad de n . La forma de estos elementos aparece en el Cuadro 2.1.

Definición 0.0.2. Las representaciones regulares de Λ , que no son isomorfas a $M_{(1)}$ ó $M_{(2)}$, las llamaremos \tilde{D}_4 -homogéneas.

Paridad de n	j	$R_n^{(j)}(s)$	$\phi_n[R_n^{(j)}(s)]$
$n \equiv 1 \pmod{2}$	1	$\alpha(s)\alpha_n^{\frac{n+1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{\pi i}{4}}\text{id}_n\varepsilon^{\frac{3}{4}}$	$\varepsilon^{\frac{1}{n}}s^2$
$n \equiv 1 \pmod{2}$	2	$e^{\frac{3}{4}\pi i}\text{id}_n\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(s)\varepsilon^{\frac{1}{2}}$	s^2
$n \equiv 2 \pmod{4}$	1	$\alpha(s)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \text{id}_n\varepsilon^{\frac{3}{4}}$	$i\frac{s}{s^2-\varepsilon}$
$n \equiv 2 \pmod{4}$	2	$i\alpha_n^{\frac{n}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{4}} + (1-i)\alpha(s)\alpha_n^{\frac{n}{2}+1}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \text{id}_n\varepsilon^{\frac{3}{4}}$	$\frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + (\varepsilon^{\frac{1}{n}}s)^2$
$n \equiv 0 \pmod{4}$	1	$\alpha(s)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha_n^{\frac{n}{4}}\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \text{id}_n\varepsilon^{\frac{3}{4}}$	$\frac{-i}{s-\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$

Cuadro 1: Ingredientes para la descripción de las representaciones regulares simples homogéneas.

Teorema 0.0.3. *Si M es una representación regular simple \tilde{D}_4 -homogénea de Λ con $\dim M = (n, 2n)$, entonces M es isomorfa a una representación de la forma $M_n^{(j)}(s)$ con $s \in I_n^{(j)}$ para alguna $j \in \{1, 2\}$.*

Este teorema será demostrado en el Capítulo 2 como Teorema 2.5.6, para la definición de los conjuntos $I_n^{(j)}$ ver 2.12.

Observación 0.0.4. Estas son las formas normales “débiles” de las representaciones regulares simples de Λ que son \tilde{D}_4 -homogéneas. Notemos, que existen a lo más $2n$ elementos diferentes en $I_n^{(j)}$ que dan la misma representación regular simple. El teorema

también implica que las representaciones regulares simples homogéneas son parametrizadas por $\text{Spec}(k[x])$. Aquí la idea es que para cada ideal no cero en $\text{Spec}(k[x])$ tenemos un polinomio monico irreducible $p(x)$. Si tomamos $\zeta \in k_n$ una raíz de $p(x)$, de la Proposición 2.4.8 y el Teorema 2.5.6 podemos encontrar un elemento $s_\zeta \in I_n^{(j)}$ para algún $j \in \{1, 2\}$ tal que $M_n^{(j)}(s_\zeta)$ es una representación regular simple.

Una vez que obtuvimos esta clasificación pudimos describir las álgebras canónicas correspondientes.

Como veremos en §3.1, se sigue de la definición de álgebras canónicas de Ringel [12], que existen dos grandes casos, a saber los de tipo (1, 4) y los de tipo (2, 2):

1. Tomando a K como un k - K -bimódulo, el cual corresponde a las especies de tipo (1, 4).
2. Tomando $k_n \oplus \sigma^n k_n$ como un k_n - k_n -bimódulo para cualquier $n \in \mathbb{N}$, estos casos corresponden a las especies de tipo (2, 2). Donde $\sigma^n k_n$ es el k_n - k_n -bimódulo, cuya multiplicación a izquierda es $x * y := \sigma_n(x)y$ para cualesquiera $x, y \in k_n$ mientras que la multiplicación a derecha es la multiplicación usual en k_n .

En nuestro trabajo sólo abordaremos el caso correspondiente a las álgebras canónicas de bimódulos de tipo (1, 4). Como veremos en el Capítulo 3, la respectiva especie puede ser descrita por el carcaj de la Figura 1.

Esta álgebra canónica está asociada a una familia M_1, M_2, \dots, M_t de representaciones regulares simples de Λ no isomorfas por pares. Donde V_i^+ y D_i son respectivamente el kernel y el anillo de endomorfismos de la i -ésima representación, y $U_i^* := \text{Hom}(k^{2n_i}, k)$. La álgebra canónica es el cociente \mathcal{T}/\mathcal{R} , donde \mathcal{T} es el álgebra tensorial de la Figura 1, y \mathcal{R} es el ideal de \mathcal{T} el cual es generado por los elementos de la forma

$$v \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{l_i-2} \otimes u - \sum_r v_r \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{l_1-2} \otimes u_r$$

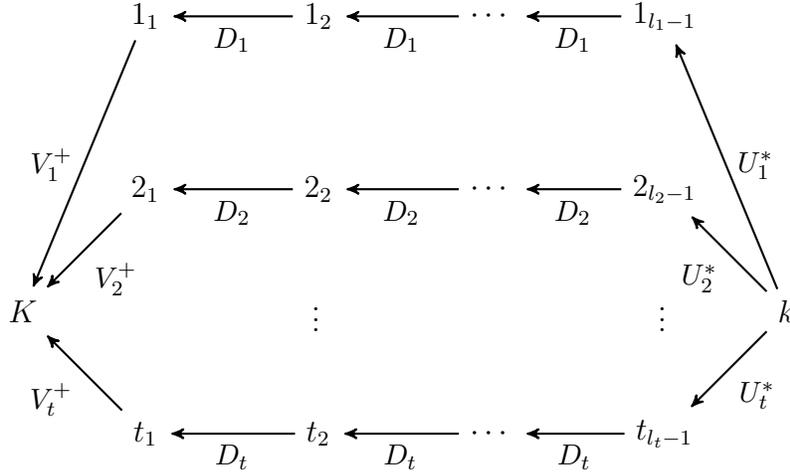


Figura 1: “Carcaj” de un álgebra canónica de tipo $(1, 4)$

con $v \in V_i^+$, $u \in U_i^*$, todo $v_r \in V_1^+$, $u_r \in U_1^*$, tales que $\widetilde{M}_i(v \otimes u) = \sum_r \widetilde{M}_1(v_r \otimes u_r)$. (Estos son elementos de $(V_i^+ \otimes D_i \otimes \cdots \otimes D_i \otimes U_i^*) \oplus (V_1^+ \otimes D_1 \otimes \cdots \otimes D_1 \otimes U_1^*)$). Donde $\widetilde{M}_i : V_i^+ \otimes U_i^* \rightarrow K$ es el morfismo adjunto de la representación M_i . Es fácil ver que \mathcal{R} esta completamente definida por $\{M_j\}_{1 \leq j \leq t}$ (ver Sección 3.3). Entonces podemos denotar la álgebra canónica \mathcal{T}/\mathcal{R} como $\mathcal{C}(l, \{M_j\}_{1 \leq j \leq t})$, donde $t \geq 1$ y $l := (l_1, l_2, \dots, l_t)$.

En el Capítulo 1 abordaremos varios temas que pueden ser conocido por varios de los lectores, pero los incluimos por los que no. Además introducimos gran parte de la notación que estaremos utilizando a lo largo de todo nuestro trabajo.

En el Capítulo 2 introducimos el descenso de Galois, el cual fue la herramienta para poder realizar nuestra clasificación de representaciones regulares simples. Veremos además los dos casos que no son considerados en el Cuadro2.1. También demostramos que cualquier representación regular simple para nuestro caso $(1, 4)$ es isomorfa a alguna que está en relación con las de nuestro cuadro o con alguna de los dos casos “especiales”.

Finalmente, en el Capítulo 3 hacemos una interpretación de la definición de álge-

bras canónicas de Ringel para los bimódulos de tipo $(1, 4)$ y caracterizamos las correspondientes funciones adjuntas para los representantes de las representaciones regulares simples.

Capítulo 1

Preliminares sobre álgebras asociadas con matrices de Cartan

A lo largo de todo nuestro escrito estaremos trabajando con el campo de series de Laurent sobre los complejos $k := \mathbb{C}((\varepsilon))$ y con extensiones finitas de él, las cuales denotaremos por $k_n := \mathbb{C}((\varepsilon^{\frac{1}{n}}))$. A menos que se especifique lo contrario estaremos haciendo producto tensorial sobre nuestro campo k .

En este capítulo abarcaremos diferentes tópicos. Comenzaremos con una breve introducción de carcajes, álgebras canónicas y representaciones de carcajes. Además recordaremos la definición de H -álgebras [6], \hat{H} y \tilde{H} álgebras de [7].

Veremos que k es un campo cuasi-finito, hecho que es importante pues implica que cualquier álgebra con división sobre k es isomorfa a k_n .

Un concepto que es fundamental para la definición de las álgebras canónicas es el de las representaciones de las especies, en nuestro caso las de tipo $(1, 4)$. Abordaremos la definición de representaciones para nuestra especie $(1, 4)$.

Ocuparemos la última sección de este capítulo para introducir notación que estaremos utilizando en nuestro trabajo. También incluimos la definición de que una matriz $R \in k_4[\alpha_n]$ sea regular, son precisamente las R matrices regulares que cumplen ciertas propiedades las representantes de las isoclases de las representaciones

regulares simples.

1.1. Carcajes y álgebra de caminos

Esta sección la usaremos para introducir conceptos básicos de carcajes y álgebras de caminos.

Un *carcaj* es una cuádrupla $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ la cual consiste de dos conjuntos: Q_0 (cuyos elementos son llamados *vertices*) y Q_1 (cuyos elementos son llamados *flechas*), y dos funciones $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ las cuales asocian a cada $\alpha \in Q_1$ su *origen* $s(\alpha) \in Q_0$ y su *termino (final)* $t(\alpha) \in Q_0$ respectivamente.

Denotaremos usualmente a una flecha $\alpha \in Q_1$ con $a = s(\alpha)$ y $b = t(\alpha)$ como $\alpha : a \rightarrow b$. Se dice que un carcaj Q es *finito* si tanto Q_0 como Q_1 son conjuntos finitos. El carcaj Q será *conexo* si este sigue siendo una gráfica conexa al olvidar la orientación de sus flechas.

Sean $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj y $a, b \in Q_0$. Un *camino* de *longitud* $l \geq 1$ de a a b es una sucesión de flechas $\alpha_l \cdots \alpha_1$, tales que $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para cada $1 \leq i \leq l$ y $t(\alpha_l) = b$, esté camino se puede ver como

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_l} a_l = b$$

Además, para cada vértice i tenemos el camino trivial ϵ_i , el cual inicia y termina en i y cuya longitud es 0.

Denotamos por Q_l al conjunto de todos los caminos en Q de longitud l . Existe una biyección entre los conjuntos de longitud 0 y 1 con los elementos de Q_0 y Q_1 , respectivamente.

Sean \mathbb{F} un campo y Q un carcaj. Se denota con $\mathbb{F}Q$ al *álgebra de caminos* de Q , el cual es la \mathbb{F} -álgebra cuya estructura de \mathbb{F} -espacio vectorial tiene como base el conjunto de todos los caminos de longitud $l \geq 0$ en Q y el producto de dos caminos

p y q esta definido por:

$$p \cdot q = \begin{cases} pq & \text{sí } t(q) = s(p) \\ 0 & \text{sí } t(q) \neq s(p), \end{cases}$$

el producto de los elemento de la base es extendido a cualquier elemento de $\mathbb{F}Q$ por la distributividad.

En otras palabras, existe una descomposición en sumandos directos

$$\mathbb{F}Q = \mathbb{F}Q_0 \oplus \mathbb{F}Q_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}Q_l \oplus \cdots$$

del \mathbb{F} -espacio vectorial $\mathbb{F}Q$, donde, para cada $l \geq 0$, $\mathbb{F}Q_l$ es el subespacio de $\mathbb{F}Q$ generado por el conjunto de todos los caminos de longitud l , el cual denotaremos por Q_l . Es fácil ver que $(\mathbb{F}Q_n) \cdot (\mathbb{F}Q_m) \subseteq \mathbb{F}Q_{n+m}$ para cualesquiera $n, m \geq 0$, dado que el producto de un camino de longitud n por un camino de longitud m es cero o un camino de longitud $n + m$.

Ejemplo 1.1.1. Sea Q el carcaj que consiste únicamente de un punto y un lazo

$$\alpha \curvearrowright \bullet$$

La base del álgebra de caminos $\mathbb{F}Q$ es $\{\epsilon_1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^l, \dots\}$ y la multiplicación de los vectores de la base está dada por

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \alpha^l &= \alpha^l \epsilon_1 = \alpha^l \text{ para toda } l \geq 0, \text{ y} \\ \alpha^l \alpha^k &= \alpha^{l+k} \text{ para cualesquiera } l, k \geq 0, \end{aligned}$$

donde $\alpha^0 = \epsilon_1$. Así $\mathbb{F}Q$ es isomorfo al álgebra de polinomios en una indeterminada t , $\mathbb{F}[t]$. El isomorfismo está dado por la asignación

$$\epsilon_1 \mapsto 1 \text{ y } \alpha \mapsto t.$$

Ejemplo 1.1.2. Sea Q el carcaj

$$\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet$$

La base del álgebra de caminos $\mathbb{F}Q$ es el $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha\}$ y su tabla de multiplicación es

	ϵ_1	ϵ_2	α
ϵ_1	ϵ_1	0	α
ϵ_2	0	ϵ_2	0
α	0	α	0

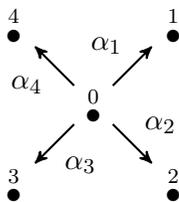
Claramente, $\mathbb{F}Q$ es isomorfo al álgebra de la matriz triangular superior de 2×2

$$\mathbb{T}_2(\mathbb{F}) = \left(\begin{array}{cc} \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ 0 & \mathbb{F} \end{array} \right) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & c \end{array} \right) \mid a, b, c \in \mathbb{F} \right\}$$

donde el isomorfismo es inducido por la función

$$\epsilon_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.1.3. Sea Q el carcaj



Con el mismo razonamiento que arriba, se puede mostrar fácilmente que existe un isomorfismo de \mathbb{F} -álgebras

$$\mathbb{F}Q \cong \begin{pmatrix} \mathbb{F} & 0 & 0 & 0 & \mathbb{F} \\ 0 & \mathbb{F} & 0 & 0 & \mathbb{F} \\ 0 & 0 & \mathbb{F} & 0 & \mathbb{F} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{F} \end{pmatrix}$$

con la función que asigna $\epsilon_i \mapsto E_{jj}$ para $0 \leq i \leq 4$ y $j \equiv i \pmod{5}$, y $\alpha_i \mapsto E_{l5}$ para $1 \leq i \leq 4$.

Notemos que $\mathbb{F}Q$ es un álgebra asociativa finitamente generada y que los ϵ_a para $a \in Q_0$ forman un conjunto completo de idempotentes primitivos.

1.2. Representaciones de carcajes

Sean \mathbb{F} un campo y Q un carcaj finito. Decimos que $M := (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ es una **representación** \mathbb{F} -lineal de Q , ó que M es una **representación** de Q si cumple que:

1. (a) Para cada elemento $a \in Q_0$, M_a es un \mathbb{F} -espacio vectorial.
2. (b) Para cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ en Q_1 , $\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b$ es una función \mathbb{F} -lineal.

Normalmente denotaremos a M por (M_a, φ_α) . Diremos que la representación es de **dimensión finita** si cada uno de los espacios vectoriales M_a son de dimensión finita.

Sean $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ y $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ dos representaciones de Q . Un **morfismo** (de representaciones) $f : M \rightarrow M'$ es una familia de morfismos \mathbb{F} -lineales $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ (donde $f_a : M_a \rightarrow M'_a$) que son compatibles con la estructura de los morfismos φ_α , es decir, para cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$, tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M_a & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_b \\ \downarrow f_a & & \downarrow f_b \\ M'_a & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_b \end{array}$$

Diremos que M y M' son isomorfas si y solo si cada f_a es un isomorfismo.

Sean $f : M \rightarrow M'$ y $g : M' \rightarrow M''$ dos morfismos de representaciones de Q , donde $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ y $g = (g_a)_{a \in Q_0}$. Su composición esta definida por la familia $gf = (g_a f_a)_{a \in Q_0}$, es fácil ver que gf es un morfismo de M en M'' .

Así tenemos definida una categoría $\text{Rep}(Q)$ de las representaciones \mathbb{F} -lineales de Q . Denotamos por $\text{rep}(Q)$ a la subcategoría plena de $\text{Rep}(Q)$ que consiste de todas las representaciones de dimensión finita.

Ejemplo 1.2.1. Sea Q el carcaj de *Kronecker* $\bullet \xleftarrow{\quad} \bullet$. Una representación M de Q está dada por

$$\mathbb{F}^2 \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \mathbb{F} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \mathbb{F}^2$$

Otra representación M' esta dada por

$$\mathbb{F}^2 \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{F}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \mathbb{F}^2$$

Ambas son representaciones de dimensión finita. Tenemos un morfismo $M \rightarrow M'$ definido por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^2 & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & \mathbb{F} \\ \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{F}^2 & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & \mathbb{F}^2 \\ & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & \end{array}$$

De hecho, se verifica fácilmente que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede demostrar fácilmente que tanto $\text{Rep}_{\mathbb{F}}(Q)$ como $\text{rep}_{\mathbb{F}}(Q)$ son \mathbb{F} -categorías abelianas. Se puede ver una demostración del siguiente lema en [2, 1.3. Lemma].

Lema 1.2.2. *Sean Q un carcaj finito y \mathbb{F} un campo. Entonces $\text{Rep}_{\mathbb{F}}(Q)$ y $\text{rep}_{\mathbb{F}}(Q)$ son \mathbb{F} -categorías abelianas.*

La suma directa de dos representaciones esta dada por

$$M \oplus M' := (M_a \oplus M'_a, \varphi_\alpha \oplus \varphi'_\alpha).$$

Es bien sabido que existe una equivalencia de categorías entre la categoría de los $\mathbb{F}Q$ -módulos de dimensión finita y la categoría $\text{rep}_{\mathbb{F}}(Q)$. La idea es, si tomamos una

$\mathbb{F}Q$ -representación de Q , digamos $M = (M_a, \varphi_\alpha)$. Sea $\mathcal{M} := \bigoplus_{a \in Q_0} M_a$ el cual tiene estructura de $\mathbb{F}Q$ -espacio vectorial con la siguiente producto:

$$\epsilon_a x = \iota_a \pi_a(x) \text{ y } \rho x := \iota_{t(\alpha)} \varphi_\alpha \pi_{s(\alpha)}(x) \text{ para toda } x \in \mathcal{M}$$

donde $\pi_a : \mathcal{M} \rightarrow M_a$ y $\iota_a : M_a \rightarrow \mathcal{M}$ son los morfismos proyección e inclusión respectivamente.

Por otro lado si \mathcal{M} es un $\mathbb{F}Q$ -módulo de dimensión finita, obtenemos $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ una \mathbb{F} -representación de Q , donde $M_a := \epsilon_a \mathcal{M}$ y $\varphi_\alpha(x) := \alpha x$.

Ambas construcciones se pueden extender a funtores y así obtenemos:

Proposición 1.2.3. *La categoría de los $\mathbb{F}Q$ -módulos de dimensión finita y la categoría $\text{rep}_{\mathbb{F}}(Q)$ son equivalentes.*

(Se puede encontrar una demostración por ejemplo [2, III]).

1.3. Definición de H -álgebras

Siguiendo el artículo [6] tenemos que:

Definición 1.3.1. Una matriz $C = (c_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ es una *matriz de Carta simetrizable generalizada* si satisface:

(C1) $c_{ii} = 2$ para todo i ;

(C2) $c_{ij} \leq 0$ para toda $i \neq j$;

(C3) $c_{ij} \neq 0$ si y sólo si $c_{ji} \neq 0$.

(C4) Existe $D = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$ una matriz diagonal entera con $c_i \geq 1$ para toda i , tal que DC es simétrica.

La matriz D que mencionamos en la definición de arriba, será llamada un *simetrizador* de C . El simetrizador D es *mínimo* si $c_1 + \dots + c_n$ es mínimo. De aquí en

adelante nos referiremos a una matriz de Cartan simetrizable generalizada sólo como una *matriz de Cartan*. En este caso, definimos para todo $c_{ij} < 0$

$$g_{ij} := |\text{mcd}(c_{ij}, c_{ji})|, \quad f_{ij} := \frac{-c_{ij}}{g_{ij}}, \quad k_{ij} := \text{mcd}(c_i, c_j).$$

Sea $C = (c_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ una matriz de Cartan. Una *orientación* de C es un subconjunto $\Omega \subset \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ tal que satisfacen lo siguiente:

1. $\{(i, j), (j, i)\} \cap \Omega \neq \emptyset$ si y sólo si $c_{ij} < 0$;
2. Para cada sucesión $((i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_t, i_{t+1}))$ con $t \geq 1$ y $(i_s, i_{s+1}) \in \Omega$ para toda $1 \leq s \leq t$ tenemos que $i_1 \neq i_{t+1}$.

Para una orientación Ω de C sea $Q := Q(C, \Omega) := (Q_0, Q_1, s, t)$ el carcaj con $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de vértices y con el conjunto de flechas

$$Q_1 := \{\alpha_{ij}^{(g)} : j \rightarrow i \mid (i, j) \in \Omega, 1 \leq g \leq g_{ij}\} \cup \{\epsilon_i : i \rightarrow i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Y $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ son funciones tales que $s(\alpha)$ y $t(\alpha)$ denotan los vértices donde inicia y termina una flecha α respectivamente. Si $g_{ij} = 1$, escribiremos α_{ij} en lugar de $\alpha_{ij}^{(1)}$. Diremos que Q es un *carcaj de tipo C* . Sea \mathbb{F} un campo. Para un carcaj $Q = Q(C, \Omega)$ y un simetrizador $D = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ de C , sea

$$H := H(C, D, \Omega) := \mathbb{F}Q/I$$

donde $\mathbb{F}Q$ es el álgebra de caminos de Q , e I es el ideal de $\mathbb{F}Q$ definido por las siguientes relaciones:

(H1) Para cada i tenemos la *relación de nilpotencia*

$$\epsilon_i^{c_i} = 0.$$

(H2) Para cada $(i, j) \in \Omega$ y cada $1 \leq g \leq g_{ij}$ tenemos la *relación de conmutatividad*

$$\epsilon_i^{f_{ji}} \alpha_{ij}^{(g)} = \alpha_{ij}^{(g)} \epsilon_j^{f_{ij}}.$$

Las siguientes observaciones son sencillas:

Observación 1.3.2. 1. H es una \mathbb{F} -álgebra de dimensión finita.

2. H depende de la elección del simetrizador D . Pero la relación (H2) no depende de D .

Por otro lado, sea A una \mathbb{F} -álgebra y M un A - A -bimódulo. El *álgebra tensorial* esta definida y denotada por:

$$T_A(M) := \bigoplus_{l \geq 0} M^{\otimes l}$$

donde $M^0 := A$, y para $l \geq 1$ definimos a $M^{\otimes l}$ como el producto tensorial $\underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_{l\text{-veces}}$.

La multiplicación de $T_A(M)$ está definida para cualesquiera $r, s \geq 1$, $m_i, m'_i \in M$ y $a, a' \in A$ como

$$(m_1 \otimes \cdots \otimes m_r) \cdot (m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_s) := m_1 \otimes \cdots \otimes m_r \otimes m'_1 \otimes \cdots \otimes m'_s$$

y

$$a(m_1 \otimes \cdots \otimes m_r)a' := (am_1 \otimes \cdots \otimes m_r)a'.$$

Recordemos que los módulos sobre un álgebra tensorial $T_A(M)$ están dados por los homomorfismos de A -módulos $M \otimes_A X$, donde X es un A -módulo.

Como antes, sea $H = H(C, D, \Omega)$. Se define

$$S := \prod_{i=1}^n H_i \text{ y } B := \bigoplus_{(i,j) \in \Omega} {}_i H_j.$$

Claramente, B es un S - S -bimódulo. Encontramos la siguiente proposición en [6, §6]:

Proposición 1.3.3. $H \cong T_S(B)$.

1.4. Campos cuasi-finitos

Comenzaremos con algunas definiciones que necesitamos para entender la noción de campos cuasi-finitos.

Definición 1.4.1. Sea I un conjunto con un orden parcial. Diremos que I es **dirigido** si dados cualesquiera $a, b \in I$, existe $c \in I$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$.

Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos indizada por un conjunto dirigido I , y para cada $(j, i) \in I \times I$ tal que $i \leq j$ consideraremos un homomorfismo de grupos

$$f_{ji} : G_j \rightarrow G_i.$$

Diremos que (G_i, f_{ji}) es un **sistema inverso** de grupos sobre I si satisface:

1. $f_{ii} = \text{id}_{G_i}$ para todo $i \in I$,
2. Para cada $i \leq j \leq k$ se tiene que $f_{ji} \circ f_{kj} = f_{ki}$.

Dado un sistema inverso de grupos, el **límite inverso** $\lim_{\leftarrow i} G_i$ es un subgrupo de $\prod_{i \in I} G_i$ que consiste de elementos $(g_i)_{i \in I}$ que satisfacen la condición de que $f_{ji}(g_j) = g_i$ para cualesquiera $i \leq j$.

Notemos que $\lim_{\leftarrow i} G_i$ satisface la propiedad universal: Si H es un grupo tal que para cada $j \in I$ existe un homomorfismo $g_j : H \rightarrow G_j$, que cumplen para $i \leq j$, $g_i = f_{ji} \circ g_j$, entonces existe un único homomorfismo $g : H \rightarrow \lim_{\leftarrow i} G_i$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 H & \overset{g_j}{\dashrightarrow} & \lim_{\leftarrow s} G_s \\
 \searrow & & \swarrow \pi_j \\
 & G_j & \\
 \downarrow f_{ji} & & \downarrow \pi_i \\
 & G_i & \\
 \swarrow g_i & & \searrow \pi_i
 \end{array}$$

Definición 1.4.2. Sea G un grupo, la **completación profinita** de G es el grupo $\widehat{G} = \lim_{\leftarrow H} G/H$, donde H corre sobre todos los subgrupos normales de G .

Ejemplo 1.4.3. Sea $\widehat{\mathbb{Z}}$ el límite inverso de $\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}_n$, con los homomorfismos dados por las funciones cocientes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ para $m|n$. Entonces el homomorfismo natural $\mathbb{Z} \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ tiene imagen densa, así vemos que $\widehat{\mathbb{Z}}$ es topológicamente generado por la imagen de $1 \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.4.4. Un **campo cuasi-finito** es un campo perfecto \mathbb{F} con un isomorfismo de grupos topológicos:

$$\phi : \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Gal}(\mathbb{F}_s, \mathbb{F}),$$

con \mathbb{F}_s la cerradura algebraica de \mathbb{F} .

La definición anterior no depende de nuestra elección de una cerradura algebraica \mathbb{F}_s . De hecho, si \mathbb{F}'_s es otra cerradura algebraica de \mathbb{F} , el grupo $\text{Gal}(\mathbb{F}'_s, \mathbb{F})$ es isomorfo a $\text{Gal}(\mathbb{F}_s, \mathbb{F})$ porque es abeliano; por lo tanto la elección de un generador libre de $\text{Gal}(\mathbb{F}_s, \mathbb{F})$ automáticamente determina un generador libre de $\text{Gal}(\mathbb{F}'_s, \mathbb{F})$.

La teoría de Galois muestra que las únicas extensiones finitas de \mathbb{F} dentro de \mathbb{F}_s son las extensiones cíclicas \mathbb{F}_n que consisten de los elementos fijados por f^n , donde f es un generador libre de $\text{Gal}(\mathbb{F}_s, \mathbb{F})$. Conversamente, si un campo perfecto \mathbb{F} tiene la propiedad de que para cada n , existe una subextensión \mathbb{F}_n/\mathbb{F} de \mathbb{F}_s la cual es cíclica de grado n , estas extensiones se acoplan bien y su unión es \mathbb{F}_s , y que un generador f_n de $\text{Gal}(\mathbb{F}_n, \mathbb{F})$ esta dado para cada n , con f_n es la restricción de $f_{nm} \in \text{Gal}(\mathbb{F}_{nm}, \mathbb{F})$, entonces \mathbb{F} es un campo cuasi-finito.

Como se puede ver en [13, Capítulo XIII, §2]:

Consideremos \mathbb{C} el campo de los números complejos y $k := \mathbb{C}((\varepsilon))$, el campo de series de Laurent sobre los complejos. Para cada entero $n \geq 1$, tomaremos $k_n := \mathbb{C}((\varepsilon^{\frac{1}{n}}))$ la extensión cíclica de k de grado n , y $k_s = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} k_n$ una cerradura algebraica de k .

Para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ escribimos $\varepsilon := (\varepsilon^{\frac{1}{n}})^n$. Consideremos la extensión de campos $k \subseteq k_n$. Más aún, para cualquier $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ que sea divisor de n , tenemos que

$$\varepsilon^{\frac{1}{m}} := (\varepsilon^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{m}} \in k_n.$$

Así tenemos que k_n es una extensión cíclica de k_m de grado $\frac{n}{m}$.

Sea $\sigma_n \in \text{Gal}(k_n, k)$ el generador definido por $\varepsilon^{\frac{1}{n}} \mapsto \zeta_n \varepsilon^{\frac{1}{n}}$, donde ζ_n es la raíz primitiva de 1, $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, así k es un campo cuasi-finito.

Dado que k es cuasi-finito tenemos que cada álgebra con división sobre k es isomorfa a k_n para alguna $n \in \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}_{>0}$, y el grupo de Galois de k_n/k es el grupo cíclico $C_n = \langle \sigma_n \rangle$. Aquí σ_n actúa k -linealmente sobre k_n via $\sigma_n(\varepsilon^{\frac{j}{n}}) = \zeta_n^j \varepsilon^{\frac{j}{n}}$ con $\zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Para $m|n$, como ya lo mencionamos arriba, podemos identificar el campo k_m con el subcampo de k_n , el cual es generado por $(\varepsilon^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{m}}$, así $\sigma_n|_{k_m} = \sigma_m$.

Definición 1.4.5. Diremos que un elemento $x \in k_n$ es **genérico** si $|C_n \cdot x| = n$.

Equivalentemente a nuestra definición x es genérico si $\prod_{j=0}^{n-1} (y - \sigma_n^j(x)) \in k[y]$ es un polinomio irreducible. Para $0 \neq x = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j \varepsilon^{\frac{j}{n}} \in k_n$ definimos y denotamos el **cogrado** de x como

$$\text{codeg}_n(x) := \min\{j \in \mathbb{Z} | x_j \neq 0\},$$

mientras que el cogrado del elemento 0 es $\text{codeg}(0) = \infty$.

1.5. Las álgebras \widehat{H} y \widetilde{H} .

Recordemos la notación que ya hemos mencionado en la Sección 1.3.

Sea $c := \text{mcm}((c_i)_{i \in \{1, \dots, n\}})$, para cada par $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ con $c_{ij} < 0$ se definen los siguientes números naturales:

$$g_{ij} := |\text{mcd}(c_{ij}, c_{ji})|, \quad f_{ij} := \frac{-c_{ij}}{g_{ij}}, \quad k_{ij} := \text{mcd}(c_i, c_j), \quad l_{ij} := \text{mcm}(c_i, c_j).$$

Lo siguiente es tomado de [7, §4].

Consideremos $\mathbb{F}((\varepsilon))$ un campo de series de Laurent. Fijemos un indeterminante que denotaremos por $\varepsilon^{\frac{1}{c}}$. Todas las construcciones tienen lugar en el campo de series de Laurent $\mathbb{F}((\varepsilon^{\frac{1}{c}}))$. Escribimos $\varepsilon := (\varepsilon^{\frac{1}{c}})^c$. Consideremos la extensión de campos $\mathbb{F}((\varepsilon)) \subseteq \mathbb{F}((\varepsilon^{\frac{1}{c}}))$. Más en general, para cada k divisor positivo de c , tenemos que

$$\varepsilon^{\frac{1}{k}} := (\varepsilon^{\frac{1}{c}})^{\frac{c}{k}} \in \mathbb{F}((\varepsilon^{\frac{1}{c}})).$$

Por otra parte, para abreviar usaremos $\varepsilon_i := \varepsilon^{\frac{1}{c_i}}$ para cada $i \in I$.

En particular, la extensión de campos $\mathbb{F}((\varepsilon)) \subseteq \mathbb{F}((\varepsilon_i))$ tiene grado c_i . Para $(i, j) \in \Omega$ tenemos el siguiente diagrama de extensiones de campos:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{F}((\varepsilon_i, \varepsilon_j)) & = & \mathbb{F}((\varepsilon^{l_{ij}})) \\
 & \swarrow f_{ij} \quad \searrow f_{ji} & & \\
 \mathbb{F}((\varepsilon_i)) & & & \mathbb{F}((\varepsilon_j)) \\
 & \searrow f_{ji} \quad \swarrow f_{ij} & & \\
 & \mathbb{F}((\varepsilon_i) \cap \mathbb{F}((\varepsilon_j))) & = & \mathbb{F}((\varepsilon^{k_{ij}})) \\
 & \downarrow k_{ij} & & \\
 & \mathbb{F}((\varepsilon)) & &
 \end{array}$$

Observe que $\mathbb{F}((\varepsilon_i, \varepsilon_j)) = \mathbb{F}((\varepsilon^{l_{ij}}))$ por [7, Lema 3.1]. La afirmación sobre los grados se sigue del hecho de que $\varepsilon_i^{f_{ji}} = \varepsilon_j^{f_{ij}} = \varepsilon^{\frac{1}{k_{ij}}}$. Ahora sean

$$\widetilde{S} := \mathbb{F}((\varepsilon_i)) \text{ y } {}_i\widetilde{H}_j := (\mathbb{F}((\varepsilon_i, \varepsilon_j)))^{g_{ij}}.$$

En particular ${}_i\widetilde{H}_j$ es un $\mathbb{F}((\varepsilon_i))$ - $\mathbb{F}((\varepsilon_j))$ -bimódulo para cada $(i, j) \in \Omega$. Finalmente, definimos el álgebra tensorial

$$\widetilde{H} := \widetilde{H}_{\mathbb{F}((\varepsilon))}(C, D, \Omega) := T_{\widetilde{S}} \left(\bigoplus_{(i,j) \in \Omega} {}_i\widetilde{H}_j \right).$$

Entonces \widetilde{H} es una $\mathbb{F}((\varepsilon))$ -álgebra hereditaria de dimensión finita. Si C es conexo y D es el simetrizador minimal de C , el centro de \widetilde{H} es $\mathbb{F}((\varepsilon))$, en cualquier otro caso el centro puede ser estrictamente más grande que $\mathbb{F}((\varepsilon))$.

Ahora estudiaremos los anillos intermedios en la extensión de anillos de series formales de potencias $\mathbb{F}[[\varepsilon]] \subseteq \mathbb{F}[[\varepsilon^{\frac{1}{c}}]]$. Pensamos a $\mathbb{F}[[\varepsilon^{\frac{1}{c}}]]$ como el anillo de enteros del campo $\mathbb{F}((\varepsilon^{\frac{1}{c}}))$ y observemos que $\varepsilon^{\frac{1}{k}} \in \mathbb{F}[[\varepsilon^{\frac{1}{c}}]]$ para cada divisor positivo k de c .

Notemos que $\mathbb{F}[[\varepsilon_i]]$ es libre de rango c_i como un $\mathbb{F}[[\varepsilon]]$ -módulo. Similarmente a lo hecho al principio de esta sección, obtenemos el siguiente diagrama para cada par $(i, j) \in \Omega$.

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{F}[[\varepsilon^{l_{ij}}]] \\
 \uparrow \\
 \mathbb{F}[[\varepsilon_i, \varepsilon_j]] \\
 \begin{array}{cc}
 \swarrow f_{ji} & \searrow f_{ji} \\
 \mathbb{F}[[\varepsilon_i]] & \mathbb{F}[[\varepsilon_j]] \\
 \swarrow f_{ij} & \searrow f_{ij} \\
 \mathbb{F}[[\varepsilon_i]] \cap \mathbb{F}[[\varepsilon_j]] & = \mathbb{F}[[\varepsilon^{k_{ij}}]] \\
 \downarrow k_{ij} \\
 \mathbb{F}[[\varepsilon]]
 \end{array}
 \end{array}$$

Aquí, una arista

$$\begin{array}{c}
 B \\
 \downarrow d \\
 A
 \end{array}$$

representa una inclusion de anillos $A \subset B$ tales que B es libre de rango d como un A -módulo. Al igual que antes la afirmación se sigue de de las igualdades $\varepsilon_i^{f_{ji}} = \varepsilon_j^{f_{ij}} = \varepsilon^{\frac{1}{k_{ij}}}$.

De [7, Lema 3.1], se sigue que el subanillo

$$\mathbb{F}[[\varepsilon_i, \varepsilon_j]] \subseteq \mathbb{F}[[\varepsilon^{\frac{1}{l_{ij}}}]$$

tiene codimensión finita sobre \mathbb{F} . En particular obtenemos, después de localizar con respecto a ε , la siguiente igualdad

$$\mathbb{F}[[\varepsilon_i, \varepsilon_j]]_\varepsilon = \mathbb{F}[[\varepsilon^{\frac{1}{l_{ij}}}]_\varepsilon = \mathbb{F}((\varepsilon^{\frac{1}{l_{ij}}}))$$

Ahora definimos

$$\widehat{S} := \mathbb{F}[[\varepsilon_i]] \text{ y } {}_i\widehat{H}_j := (\mathbb{F}[[\varepsilon_i, \varepsilon_j]])^{g_{ij}}.$$

Consideramos \widehat{S} como una $\mathbb{F}[[\varepsilon]]$ -álgebra mediante la asignación $\varepsilon \mapsto (\varepsilon_i^{c_i})_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Sea $\widehat{H}_i := \mathbb{F}[[\varepsilon_i]]$. Entonces \widehat{H} es un \widehat{H}_i - \widehat{H}_j -bimódulo, el cual es un \widehat{H}_i -módulo izquierdo libre de rango f_{ij} y un \widehat{H}_j -módulo derecho libre de rango f_{ji} , para $(i, j) \in \Omega$. Finalmente, se define el álgebra tensorial

$$\widehat{H} := \widehat{H}_{\mathbb{F}[[\varepsilon]]}(C, D, \Omega) := T_{\widehat{S}} \left(\bigoplus_{(i,j) \in \Omega} {}_i \widetilde{H}_j \right),$$

el cual es una $\mathbb{F}[[\varepsilon]]$ -álgebra.

Al igual a como se hace con H , M un \widehat{H} -módulo puede ser descrito como una tupla

$$(\underline{M}, (M_{ij})_{(i,j) \in \Omega})$$

con $\underline{M} = (M_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in \text{rep}(\widehat{S})$ y $M_{ij} \in \text{Hom}_{\mathbb{F}[[\varepsilon_i]]}({}_i \widehat{H}_j \otimes_{H_j} M_j, M_i)$.

Sea

$$\widehat{H}_\varepsilon = \widehat{H} \otimes_{\mathbb{F}[[\varepsilon]]} \mathbb{F}((\varepsilon))$$

la localización de \widehat{H} sobre ε .

Se puede encontrar una demostración de la siguiente proposición en [7, Proposición 4.1]

Proposición 1.5.1. *El álgebra $\widehat{H} = \widehat{H}_{\mathbb{F}[[\varepsilon]]}(C, D, \Omega)$ tiene las siguientes propiedades:*

- $\widehat{H}_\varepsilon \cong \widetilde{H}$.
- *Tenemos que*

$$\widehat{H}/(\varepsilon^k \widehat{H}) \cong H_{\mathbb{F}}(C, kD, \Omega)$$

para toda $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Así

$$\lim_{\leftarrow k} H_{\mathbb{F}}(C, kD, \Omega) \cong \widehat{H}.$$

1.6. Gráficas valuadas

Las siguientes definiciones son tomadas de [4]. Una **gráfica valuada** (Γ, \mathbf{d}) esta compuesta por Γ que es un conjunto finito (de vertices) y \mathbf{d} esta formado por enteros no negativos d_{ij} para cada par $i, j \in \Gamma$ tal que $d_{ii} = 0$ y sujetos a la condición de que existen $f_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ que satisfacen:

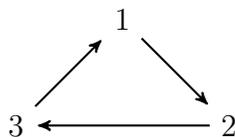
$$d_{ij}f_j = d_{ji}f_i \text{ para toda } i, j \in \Gamma.$$

Notemos que existe una correspondencia uno a uno entre las gráficas valuadas y las matrices de Cartan simetrizables (ver [9]).

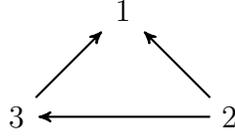
Además, asumiremos que la gráfica es **conexa** en el sentido que, para cada $k, l \in \Gamma$, existe una sucesión k, \dots, i, j, \dots, l de vertices de Γ tal que $d_{ij} \neq 0$ para cada par de vertices sucesivos i, j . Notemos que $d_{ij} \neq 0$ si y sólo si $d_{ji} \neq 0$, para estos pares diremos que i y j son vecinos. Entre estos vertices vecinos dibujaremos una arista valuada

$$i \xrightarrow{(d_{ij}, d_{ji})} j$$

Una **orientación** Ω de una gráfica valuada (Γ, \mathbf{d}) esta dada por escoger un orden entre cada arista $\{i, j\}$ de Γ , dicho orden lo denotaremos por una flecha $i \rightarrow j$. Notemos que esta definición de orientación Ω_Γ es menos restrictiva que la definición de orientación Ω_H de las álgebras H de la Sección 1.3, esto debido a que la segunda condición para la orientación Ω_H no permite ciclos lo cual si puede ocurrir con la definición de orientación para gráficas valuadas. Por ejemplo



tiene una orientación Ω_Γ , pero como no satisface la segunda condición (ver Sección 1.3) esta orientación no puede ser Ω_H . Una orientación que sería valida para ambas definiciones es:



Dada una orientación Ω y un vértice $k \in \Gamma$, definimos una nueva orientación $s_k\Omega$ de (Γ, \mathbf{d}) al cambiar la dirección de todas las flechas en las que aparezca k . Un vértice $k \in \Gamma$ se dice que es un **pozo** (resp. **fuelle**) con respecto a Ω si $k \leftarrow i$ (resp. $k \rightarrow i$) para cualquier vecino $i \in \Gamma$ de k . Y, diremos que una orientación Ω de (Γ, \mathbf{d}) es **admisibile** si existe $\{k_1, \dots, k_n\}$ un subconjunto ordenado de Γ , tal que cada vértice k_t es un sumidero con respecto a la orientación $s_{k_{t-1}} \cdots s_{k_2} s_{k_1} \Omega$ para todo $1 \leq t \leq n$. Es fácil ver que una orientación Ω de una gráfica valuada (Γ, \mathbf{d}) es admisible si y sólo si no existe una orientación cíclica.

Una **modulación** \mathcal{M} de una gráfica valuada (Γ, \mathbf{d}) es un conjunto de anillos con división F_i , $i \in \Gamma$, junto con ${}_i M_j$ un F_i - F_j -bimódulo y ${}_j M_i$ un F_j - F_i -bimódulo, para cada arista $\{i, j\}$ de (Γ, \mathbf{d}) tales que:

1. tenemos los isomorfismo de F_i - F_j -bimódulo

$${}_j M_i \cong \text{Hom}_{F_i}({}_i M_j, F_j) \cong \text{Hom}_{F_j}({}_i M_j, F_j)$$

y

2. $\dim({}_i M_j) = d_{ij}$.

Una **realización** (\mathcal{M}, Ω) de una gráfica valuada (Γ, \mathbf{d}) es una modulación \mathcal{M} de (Γ, \mathbf{d}) junto con una orientación admisible Ω . Las realizaciones también son llamadas *especies* en [5].

Denotaremos por $\mathbf{X} = (X_i, {}_j \varphi_i)$ a una **representación** de una realización (\mathcal{M}, Ω) de (Γ, \mathbf{d}) , la cual consiste de un conjunto de F_i -espacios vectoriales denotados por X_i para cada $i \in \Gamma$ y para cada flecha $i \rightarrow j$ tenemos un F_i -morfismo lineales

$${}_i \varphi_j : {}_i M_j \otimes_{F_j} X_j \rightarrow X_i.$$

1.7. Representaciones de las especies de tipo $(1, 4)$ sobre k .

En esta sección vamos a trabajar con las especies de tipo $(1, 4)$. El campo k_4 aparecerá constantemente, acordamos denotar a este campo por K , es decir $K := \mathbb{C}((\varepsilon^{\frac{1}{4}})) = k[\varepsilon^{\frac{1}{4}}]$. Una representación M de la especie de tipo $(1, 4)$ sobre k es de la forma (K^n, k^m, φ_M) , donde $\varphi_M : K \otimes_k k^m \rightarrow K^n$ es un morfismo K -lineal y $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, [12]. Por definición los objetos de la categoría $\text{Rep}_k(1, 4)$ son las matrices con entradas en K . Para $N \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ y $N' \in \text{Mat}_{m' \times n'}(K)$, diremos que los morfismos de N a N' son

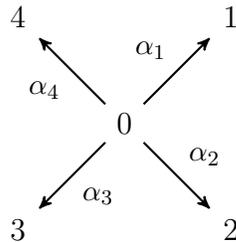
$$\text{Hom}_{(1,4)}(N, N') := \{(f_2, f_1) \in \text{Mat}_{m' \times m}(K) \times \text{Mat}_{n' \times n}(k) \mid f_2 N = N' f_1\}.$$

Es fácil ver que $\text{Rep}_k(1, 4)$ es una categoría abeliana k -lineal. De hecho, es equivalente a Λ -mod para la k -álgebra $\Lambda = \begin{bmatrix} K & K \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

Sea M una representación y $N \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ la matriz de $\varphi_M : K \otimes_k k^m \rightarrow K^n$, escribiremos $\underline{\dim} N = (m, n) \in \mathbb{N}_0^2$. Siguiendo a Dlab-Ringel en [4, §3], $N \in \text{Rep}_k(1, 4)$ es *regular simple* si $\underline{\dim} N = (m, 2m)$ para alguna $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ y el anillo $\text{End}_{(1,4)}(M)$ es un álgebra con división, i.e. es isomorfo a k_n para alguna n (pues k es un campo cuasi finito).

Los módulos regulares simples son los objetos simples de la categoría abeliana de representaciones regulares de Λ , ver [4].

En todo nuestro trabajo consideraremos únicamente el siguiente carcaj, el cual denotaremos (haciendo un abuso de notación) por \tilde{D}_4 .



En la Sección §2.2 veremos que para $4|d$ tenemos $k_d \otimes_k \Lambda \cong k_d \tilde{D}_4$. El álgebra de caminos $k_d \tilde{D}_4$ admite un automorfismo k -lineal de orden d , el cual es compatible con la acción de σ_d sobre $k_d \otimes \Lambda$, para más detalles podemos ver §2.2 y §2.3

Más aún, si $M \in \text{Rep}_k(1, 4)$ es regular simple y $\text{End}_{(1,4)}(M) \cong k_n$, entonces con $d = \text{mcm}(4, n)$ tenemos que $k_d \otimes_k M = \bigoplus_{j=0}^{n-1} \gamma_d^j M'$, para una k_d -representación regular simple M' de \tilde{D}_4 con $\text{End}_{\tilde{D}_4}(M') \cong k_d$ y $\gamma_d^n M' \cong M'$, para más detalles ver Capítulo 2. Como veremos en §2.3 las representaciones *ii*-inescindibles de \tilde{D}_4 no están parametrizadas únicamente por $\mathbb{P}^1 k \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}\}$ nuestra clasificación es un poco más complicada. Donde una M *ii*-inescindible es una *ii*-representación (representación isomórficamente invariante, es decir $\gamma_d M \cong M$) que no es isomorfa a la suma directa de dos *ii*-representaciones.

1.8. Notación

Ocuparemos esta sección para introducir la mayoría de la notación que utilizaremos durante todo nuestro trabajo.

Para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ definimos la matriz $\alpha_n \in \text{Mat}_{n \times n}(k)$ por

$$(\alpha_n)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{if } i < n, \\ \delta_{1,j} \varepsilon & \text{if } i = n, \end{cases}$$

es decir α_n es la matriz cuyas únicas entradas distintas de cero son los 1's sobre la diagonal y ε en la entrada inferior izquierda

$$\alpha_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Acordamos que para $n = 1$, tomaremos $\alpha_1 = \varepsilon$.

Es fácil ver que $y^n - \varepsilon \in k[y]$ es el polinomio mínimo de α_n .

Por otro lado, notemos que cada elemento $x \in k_n$ puede ser escrito de forma única como

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \varepsilon^{\frac{j}{n}}$$

para ciertos $x_j \in k$.

Lema 1.8.1. *Para toda $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ existe un isomorfismo de campos $\alpha : k_n \xrightarrow{\sim} k[\alpha_n] \subset \text{Mat}_{n \times n}(k)$ el cual manda a x en*

$$\alpha(x) := \sum_{j=0}^{n-1} x_j \alpha_n^j. \quad (1.1)$$

Más aún, existe una matriz $A \in \text{GL}_n(k_n)$ tal que para cada $x \in k_n$ tenemos

$$A^{-1} \alpha(x) A = \text{diag}(x, \sigma_n(x), \dots, \sigma_n^{n-1}(x)).$$

A saber

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon^{\frac{1}{n}} & \zeta_n \varepsilon^{\frac{1}{n}} & \cdots & \zeta_n^{n-1} \varepsilon^{\frac{1}{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{\frac{n-1}{n}} & \zeta_n^{n-1} \varepsilon^{\frac{n-1}{n}} & \cdots & \zeta_n^{(n-1)^2} \varepsilon^{\frac{n-1}{n}} \end{bmatrix},$$

así que A no depende de la elección de $x \in k_n$.

Probaremos este resultado en §2.4 como el Lema 2.4.2.

Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $R \in K[\alpha_n]$, digamos $R = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^4 x_{ij} \varepsilon^{\frac{j}{4}} \right) \alpha_j$, entonces tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} R &= \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^4 x_{ij} \varepsilon^{\frac{j}{4}} \right) \alpha_j \\ &= \sum_{i=0}^4 \left(\sum_{j=0}^n x_{ij} \varepsilon^{\frac{j}{4}} \alpha_j \right) \\ &= \sum_{i=0}^4 \left(\sum_{j=0}^n x_{ij} \alpha_j \right) \varepsilon^{\frac{i}{4}} \\ &= \sum_{i=0}^4 \alpha(\nu_i) \varepsilon^{\frac{i}{4}}, \end{aligned}$$

donde $\nu_i = \sum_{j=0}^n x_{ij} \varepsilon^{\frac{j}{n}} \in k_n$. Es decir, usando la notación de 1.8.1, podemos escribir de forma única a cada elemento $R \in K[\alpha_n] \subset \text{Mat}_{n \times n}(K)$ de la siguiente forma

$$R = \alpha(\nu_0) + \alpha(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}}$$

para ciertos $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3 \in k_n$.

Decimos que $R \in K[\alpha_n]$ es *regular* si satisface

R1. $\nu_1^2 - \varepsilon\nu_3^2 \neq 0$.

R2. $\sigma_n^m(\nu_2) \neq \frac{(i-1)\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\varepsilon}(\sigma_n^m(\nu_1) + i\sigma_n^m(\nu_3)\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ para $1 \leq m \leq n^1$.

Definimos el conjunto $K[\alpha_n]_{\text{reg}} := \{R \in K[\alpha_n] \mid R \text{ es regular}\}$.

- Observación 1.8.2.** 1. Si n es impar, para cualquier elección de $(\nu_1, \nu_3) \neq (0, 0)$ se satisface $\nu_1^2 - \varepsilon\nu_3^2 \neq 0$. Es decir, para $n \equiv 1 \pmod{2}$ cualquier elemento de $K[\alpha_n] \setminus \{\alpha(\nu_0) + \alpha(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mid \nu_0, \nu_2 \in k_n\}$ es regular.
2. Si n es congruente con 2 módulo 4, tenemos que la única opción para que no se satisfaga R2. es que tengamos $\nu_2 = 0$ y $\nu_1 = \pm i\nu_3\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Un hecho que nos será de utilidad más adelante es que se tienen los siguientes isomorfismos:

$$K[\alpha_n] \cong \begin{cases} k_{4n} & \text{if } n \equiv 1 \pmod{2}, \\ k_{2n} \times k_{2n} & \text{if } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ k_n \times k_n \times k_n \times k_n & \text{if } n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

Probaremos lo anterior en §2.4.

Si consideramos $R \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$ podemos definir la representación $M(R) := (K^n, k^{2n}, \varphi_{M(R)})$, donde $\varphi_{M(R)}$ es una función K -lineal y la matriz de $\varphi_{M(R)}$ es $[\text{id}_n \mid R]$.

¹Como veremos más adelante, esta condición implica que la matriz $R - \sigma(R)$ es invertible.

Ejemplo 1.8.3. 1. Consideremos $n = 3$ y

$$\begin{aligned}
R &= \alpha(\varepsilon^{\frac{2}{3}})\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha(e^{\frac{\pi i}{4}})\varepsilon^{\frac{3}{4}} \\
&= \alpha_3^2\varepsilon^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{\pi i}{4}}\alpha_3^0\varepsilon^{\frac{3}{4}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{\pi i}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\frac{\pi i}{4}}\varepsilon^{\frac{3}{4}} & 0 & \varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ \varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{2}} & e^{\frac{\pi i}{4}}\varepsilon^{\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & \varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{2}} & e^{\frac{\pi i}{4}}\varepsilon^{\frac{3}{4}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

así $M(R)$ es la representación (K^3, k^6, φ) , donde $\varphi : K \otimes k^6 \rightarrow K^3$, es un morfismo K -lineal que satisface:

$$\begin{aligned}
1 \otimes e_1 &\mapsto (1, 0, 0) & 1 \otimes e_2 &\mapsto (0, 1, 0) & 1 \otimes e_3 &\mapsto (0, 0, 1) \\
1 \otimes e_4 &\mapsto (e^{\frac{\pi i}{4}}\varepsilon^{\frac{3}{4}}, \varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{2}}, 0) & 1 \otimes e_5 &\mapsto (0, e^{\frac{\pi i}{4}}\varepsilon^{\frac{3}{4}}, \varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{2}}) & 1 \otimes e_6 &\mapsto (\varepsilon^{\frac{1}{2}}, 0, e^{\frac{\pi i}{4}}\varepsilon^{\frac{3}{4}})
\end{aligned}$$

es decir, la matriz de la función φ es

$$[\text{id}_3 | R] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & e^{\frac{\pi i}{4}}\varepsilon^{\frac{3}{4}} & 0 & \varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{2}} & e^{\frac{\pi i}{4}}\varepsilon^{\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{2}} & e^{\frac{\pi i}{4}}\varepsilon^{\frac{3}{4}} \end{array} \right].$$

2. Si tomamos $n = 2$ y

$$\begin{aligned}
R &= \alpha(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}})\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(1)\varepsilon^{\frac{3}{4}} \\
&= (\alpha_2^0 - \alpha_2)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha_2^0\varepsilon^{\frac{3}{4}} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \right) \varepsilon^{\frac{1}{4}} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \\
&= \begin{bmatrix} \varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} & -\varepsilon^{\frac{1}{4}} \\ -\varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{4}} & \varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

así $M(R)$ es la representación (K^2, k^4, φ) , donde $\varphi : K \otimes k^4 \rightarrow K^2$, es un morfismo K -lineal que satisface:

$$\begin{aligned} 1 \otimes e_1 &\mapsto (1, 0) & 1 \otimes e_2 &\mapsto (0, 1) \\ 1 \otimes e_3 &\mapsto (\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}}, -\varepsilon^{\frac{1}{4}}) & 1 \otimes e_4 &\mapsto (-\varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{4}}, \varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}}) \end{aligned}$$

es decir, la matriz de la función φ es

$$[\text{id}_2 | R] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} & -\varepsilon^{\frac{1}{4}} \\ 0 & 1 & -\varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{4}} & \varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \end{array} \right]$$

Por otro lado, definimos las representaciones

$$M_{(1)} := (K, k^2, \varphi_{M_{(1)}}) \text{ y } M_{(2)} := (K^2, k^4, \varphi_{M_{(2)}}), \quad (1.2)$$

donde los morfismos K -lineales $\varphi_{M_{(1)}} : K \otimes k^2 \rightarrow K$ y $\varphi_{M_{(2)}} : K \otimes k^4 \rightarrow K^2$ están definidos respectivamente por

$$1 \otimes e_1 \mapsto 1 \text{ y } 1 \otimes e_2 \mapsto \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

$$1 \otimes e_1 \mapsto (1, 0), 1 \otimes e_2 \mapsto (0, 1), 1 \otimes e_3 \mapsto (-i\varepsilon^{\frac{3}{4}}, \varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{4}}) \text{ y } 1 \otimes e_4 \mapsto (\varepsilon^{\frac{1}{4}}, -i\varepsilon^{\frac{3}{4}});$$

notemos que las matrices correspondientes a cada morfismo K -lineal $\varphi_{M_{(1)}}$ y $\varphi_{M_{(2)}}$ son $[1 | \varepsilon^{\frac{1}{2}}]$ y $[\text{id}_2 | \alpha_2 \varepsilon^{\frac{1}{4}} - i \text{id}_2 \varepsilon^{\frac{3}{4}}]$, respectivamente.

Más aún para la matriz

$$R = \alpha(0) + \alpha(0)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(1)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha(0)\varepsilon^{\frac{3}{4}},$$

tenemos que $\nu_1 = 0 = \nu_3$ así $\nu_1^2 - \varepsilon\nu_3^2 = 0^2 + \varepsilon(0)^2 = 0$. Así $\alpha(1)\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ no pertenecen a $K[\alpha_1]_{\text{reg}}$

Mientras que para la matriz

$$R = \alpha(0) + \alpha(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(0)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha(-i)\varepsilon^{\frac{3}{4}},$$

tenemos que $\nu_1 = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ y $\nu_3 = -i$, así $\nu_1^2 - \varepsilon\nu_3^2 = (\varepsilon^{\frac{1}{2}})^2 - \varepsilon(-i)^2 \neq 0$. Acá lo que ocurre es que

$$\begin{aligned} \sigma(\nu_1) + i\sigma(\nu_3)\varepsilon^{\frac{1}{2}} &= \sigma(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) + i\sigma(-i)\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ &= -\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ &= 0 \\ &= \sigma(\nu_2), \end{aligned}$$

de modo que no se cumple R2. así $\alpha(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(0)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha(-i)\varepsilon^{\frac{3}{4}} \notin K[\alpha_2]_{\text{reg}}$

Capítulo 2

Representaciones de carcajes torcidos y descenso de Galois

En este capítulo introduciremos el concepto de carcajes con automorfismos (en el sentido de Hubery [8]), el cual adaptaremos para nuestro caso particular.

A pesar de que clasificar las representaciones regulares simples para $n = 1$ es relativamente sencillo, hacerlo para n mayores se vuelve muy complicado, incluso para valores pequeños como $n = 2$ o $n = 3$. Por este motivo, decidimos usar técnicas de descenso de Galois para encontrar las representaciones regulares simples de la especie de tipo $(1, 4)$.

Introduciremos el concepto de que una representación M es *ii-inescindible* si es *ii-representación* (representación isomórficamente invariante, es decir ${}^{\gamma^a}M \cong M$) que no es isomorfa a la suma directa de dos *ii-representaciones*. Veremos que las representaciones *ii-inescindibles* de \tilde{D}_4 , a diferencia de lo que uno podría pensar en principio, no están parametrizadas únicamente por $\mathbb{P}^1 k \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}\}$ nuestra clasificación es un poco más complicada y esta ligada a polinomios irreducibles de $k[x]$.

Es este capítulo mostraremos como están relacionadas las representaciones regulares simples de la especie de tipo $(1, 4)$ con las matrices $R \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$ cuyo polinomio mínimo es irreducible en $k[x]$.

Sea M una representación regular simple, es decir $\varphi_M : K^{2n} \rightarrow K^n$ es K -lineal y $\text{End}_\Lambda(M) = k_m$, para algún $m \in \mathbb{Z}_+$. Usaremos R para denotar a la matriz del morfismo φ_M . Sea $d = \text{mcm}\{4, n\}$, y aplicando $k_d \otimes_k -$ a nuestra representación, tenemos que $k_d \otimes_k \text{End}(M)$ es isomorfo al anillo de endomorfismos de la representación:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & & k_d^n \\
 & \nearrow R & \\
 & & \\
 k_d^{2n} & \xrightarrow{\sigma^3(R)} & k_d^n \\
 & \searrow \sigma^2(R) & \\
 & & k_d^n \\
 & \searrow \sigma(R) & \\
 & & k_d^n
 \end{array}
 \end{array}$$

donde $\sigma^j(R)$ denota aplicar el morfismo σ^j a cada una de las entradas de la matriz R , con $\sigma \in \text{Gal}(K, k)$ definido por $\varepsilon^{\frac{1}{4}} \mapsto i\varepsilon^{\frac{1}{4}}$. Esta es una representación de nuestro carcaj \tilde{D}_4 .

2.1. Descenso de Galois

Usaremos las siguientes observaciones:

Observación 2.1.1. $k_n \otimes k_m \cong \underbrace{k_l \times \cdots \times k_l}_{g\text{-VECES}}$, con $l = \text{mcm}(m, n)$ y $g = \text{mcd}(m, n)$.

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $l = \text{mcm}(n, m)$ y $g = \text{mcd}(n, m)$. Definimos $\beta_j = \frac{1}{g\varepsilon} \sum_{r=0}^{g-1} \varepsilon^{\frac{g-r}{g}} \otimes \sigma_g^{j-1}(\varepsilon^{\frac{r}{g}}) \in k_n \otimes k_m$ para $1 \leq j \leq g$. Los elementos β_j 's satisfacen la igualdad $\beta_j \beta_i = \delta_{ji} \beta_j$. Dado que $\text{mcd}(\frac{l}{n}, \frac{l}{m}) = 1$, se sigue de la identidad de Bézout que existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(\frac{l}{n})a + (\frac{l}{m})b = 1$. Se puede ver fácilmente que

$$\left\{ \varepsilon^{\frac{au}{n}} \beta_j \varepsilon^{\frac{bu}{m}} \mid 1 \leq j \leq g, 0 \leq u \leq \frac{l}{n} - 1 \right\}$$

es una base de $k_n \otimes_k k_m$ como k_n -espacio vectorial.

Así obtenemos el isomorfismo de k_n -álgebra

$$k_n \otimes k_m \cong \underbrace{k_l \times \cdots \times k_l}_{g\text{-VECES}}$$

el cual asigna $\varepsilon^{\frac{au}{n}} \beta_j \varepsilon^{\frac{bu}{m}} \mapsto \varepsilon^{\frac{u}{i}} e_j$, donde $\{e_j | 1 \leq j \leq g\}$ es la base estándar de $\underbrace{k_l \times \cdots \times k_l}_{g\text{-VECES}}$. \square

Observación 2.1.2. k_d/k es una extensión de Galois, con grupo de Galois cíclico de orden d , $C_d = \langle \sigma \rangle$, y el álgebra de grupo oblicuo $k_d * C_d$ es isomorfa al anillo de matrices $\text{Mat}_{d \times d}(k)$ como una k -álgebra, ver por ejemplo [1].

Observación 2.1.3. Si A es una k -álgebra, en la cual $C_d = \langle \sigma \rangle$ actúa por el automorfismo k -lineal, entonces la categoría de $A * C_d$ -módulos es equivalente a la categoría de pares (M, f) donde $M \in A\text{-mod}$ y $f \in \text{Hom}_A(\sigma M, M)$ tales que $f \circ \sigma f \circ \cdots \circ \sigma^{d-1} f = \text{id}_M$. Ver [10] para más detalles.

Observación 2.1.4. Para $\Lambda = \begin{bmatrix} K & K \\ 0 & k \end{bmatrix}$ y $4|d$ tenemos que $\psi_d : k_d \otimes \Lambda \xrightarrow{\sim} k_d \tilde{D}_4$ es un morfismo de k_d -álgebras, y describiremos en la Sección 2.2 como $\langle \sigma \rangle$ actúa bajo ψ_d en $k_d \tilde{D}_4$ y en $k_d \tilde{D}_4\text{-mod}$. Se sigue de la Observación 2.1.2 que $(k_d \tilde{D}_4) * C_d \cong \text{Mat}_{d \times d}(\Lambda)$ como k -álgebras. En particular $(k_d \tilde{D}_4) * C_d\text{-mod}$ es equivalente a $\Lambda\text{-mod}$. Notemos, que en consecuencia para $X \in \Lambda\text{-mod}$

$$\sigma^{-1} \otimes \text{id}_X : k_d \otimes X \xrightarrow{\sim} \sigma(k_d \otimes X) = {}^\sigma k_d \otimes X$$

es un $k_d \otimes \Lambda$ - isomorfismo de módulos.

Observación 2.1.5. Si $X \in \Lambda\text{-mod}$ es regular simple tenemos $\text{End}_\Lambda(X) = k_m$ para algún $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ dado que $k = \mathbb{C}((\varepsilon))$ es cuasi finito, y con $d = \text{mcm}(4, m)$ tenemos de la Observación 2.1.1 que:

$$\text{End}_{k_d \otimes \Lambda}(k_d \otimes X) \cong k_d \otimes \text{End}_\Lambda(X) \cong \underbrace{k_d \times \cdots \times k_d}_m \quad (2.1)$$

Más aún $\tau_{k_d \tilde{D}_4}(k_d \otimes X) \cong k_d \otimes \tau_\Lambda(X) \cong k_d \otimes X$. Así, $k_d \otimes X \cong N_0 \oplus \cdots \oplus N_{m-1}$ para módulos regulares simples N_i con $\text{Hom}_{k_d \tilde{D}_4}(N_i, N_j) \cong \delta_{i,j} k_d$. Ya que además $\sigma(k_d \otimes X) \xrightarrow{\sim} k_d \otimes X$, podemos asumir también

$${}^\sigma N_i \cong N_{i+1} \text{ for } i = 0, 1, \dots, m-2 \text{ and } {}^\sigma N_{m-1} \cong N_0 \quad (2.2)$$

Es fácil clasificar esas familias de $k_d\tilde{D}_4$ -módulos, ver Sección 2.3.

Observación 2.1.6. Si $M = \bigoplus_{j=0}^{m-1} \sigma^j N$ para N un k_d -módulo regular simple con $\text{End}_{k_d\tilde{D}_4}(N) \cong k_d$ y $\text{Hom}_{k_d\tilde{D}_4}(\sigma^j N, N) = 0$ para $j = 1, 2, \dots, m-1$ y $\sigma^j N \cong N$ es fácil ver, que encontrar un isomorfismo $f : \sigma M \rightarrow M$ with $f \circ \sigma f \circ \dots \circ \sigma^{d-1} f = \text{id}_M$ es equivalente a encontrar $\tilde{f} : N \rightarrow \sigma^m N$, tal que

$$\tilde{f} \circ \sigma^m \tilde{f} \circ \dots \circ \sigma^{km} f = \text{id}_N \text{ para } k := m|d - 1. \quad (2.3)$$

De hecho, hasta reescalamiento, f debe de ser de la forma

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{f} \\ \text{id}_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \text{id}_3 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \text{id}_{m-1} & 0 \end{bmatrix},$$

dado que $\text{Hom}_{k_d\tilde{D}_4}(\sigma^i N, \sigma^j N) \cong \delta_{i,j} k_d$ y así $f \circ \sigma f \circ \dots \circ \sigma^{m-1} f = \text{diag}(\sigma^i f)_{i=0,1,\dots,m-1}$ y $\text{id}_i = \text{id}_{\sigma^i M}$

En la Sección 2.3 exhibiremos tales $\tilde{f} : \sigma^m N \rightarrow N$ con la propiedad 2.3 para cada $k_d\tilde{D}_4$ -módulo regular con $\text{End}_{k_d\tilde{D}_4}(N) \cong k_d$ y m mínima tal que $\sigma^m N \cong N$ y $d/m \in \{1, 2, 4\}$.

Observación 2.1.7. Si $f' : \sigma M \rightarrow M$ es otro isomorfismo con $f' \circ \sigma f' \circ \dots \circ \sigma^{d-1} f' = \text{id}_M$, entonces nuevamente de $\text{End}_{k_d\tilde{D}_4}(N) \cong k_d$ debemos obtener (con la notación de antes) $\tilde{f}' = c\tilde{f}$ para algún $c \in k_d$ con

$$N_{d,m}(c) = c\sigma^m(c) \cdots \sigma^{km}(c) = 1_{k_d} \text{ (} k = d/m - 1 \text{)}$$

Sin embargo, por el siguiente Lema, en este caso podemos encontrar $x \in k_d^*$ con $c = \sigma^m(x)^{-1} \cdot x$, lo que implica que $(M, f) \cong (M, f')$ en este caso, ya que tenemos

$$\begin{array}{ccc}
\sigma^m N & \xrightarrow{\tilde{f}} & N \\
\downarrow \sigma^m(x \cdot \text{id}_N) & & \downarrow x \cdot \text{id}_N \\
\sigma^m N & \xrightarrow{c\tilde{f}} & N
\end{array}$$

Observación 2.1.8. En vista de la Observación 2.1.3 concluimos de la Observación 2.1.6 que las isoclasas de los Λ -módulos regulares simples con anillo de endomorfismo de dimension m ($\cong k_m$) están, para $d = \text{mcm}(4, m)$, en biyección natural con las C_d -órbitas de $k_d \tilde{D}_4$ -módulos regulares simples N con:

- $\text{End}_{k_d \tilde{D}_4}(N) \cong k_d$,
- $\sigma^m N \cong N$ y
- $\sigma^i N \not\cong N$ for $i = 1, 2, \dots, m-1$.

En la Sección 2.3 encontraremos para cada N , con esta propiedad, un Λ -módulo regular simple X con $\text{End}_\Lambda(X) = k_m$ y $k_m \otimes X \cong \bigoplus_{j=0}^{m-1} \sigma^j N$.

Lema 2.1.9 (Bien conocido). *Si $c \in k_n$ con $N_{n,1}(c) = 1$, entonces existe $x \in k_n$ with $\sigma(x)^{-1}x = c$.*

Demostración. Recordemos que $k_n * C_n \xrightarrow{\sim} \text{Mat}_{n \times n}(k)$, es un álgebra simple. Así (k_n, σ) corresponde al único $k_n * C_n$ -módulo (simple), el cual tiene k -dimensión n , hasta isomorfismos.

Por otro lado, tenemos un homomorfismo de grupos abelianos

$$\psi_n : k_n^* \rightarrow \tilde{N}_n := \{c \in k_n^* | N_{n,1}(c) = 1\} \subset k_n^*$$

$$x \mapsto \sigma(x)^{-1}x$$

y $\tilde{N}_n / \text{Im} \psi_n$ parametriza las isoclasas de $k_n * C_n$ -módulos de la forma $(k_n, c\sigma)$ con $c \in \tilde{N}_n$.

Así ψ_n debe de ser suprayectiva, dado que existe una única isoclase de n -dim de $k_n * C_n$ -módulos. \square

2.2. Carcajes con automorfismos

Un caso particular de lo que demostramos en la Observación 2.1.1 de la Sección 2.1 es

$$k_d \otimes K \cong k_d \times k_d \times k_d \times k_d$$

donde d es múltiplo de 4. Como se hizo en la demostración de la Observación 2.1.1, los elementos

$$\beta_j = \frac{1}{4\varepsilon} \sum_{l=0}^3 \varepsilon^{\frac{4-l}{4}} \otimes \sigma^{j-1}(\varepsilon^{\frac{l}{4}}) \in k_d \otimes K$$

para $1 \leq j \leq 4$ forman una base de $k_d \otimes_k K$ como k_d -álgebra. Además, los elementos β_j satisfacen la igualdad $\beta_j \beta_l = \delta_{jl} \beta_j$. Y el isomorfismo de k_d -álgebras

$$k_d \otimes_k K \cong k_d \times k_d \times k_d \times k_d,$$

esta dado por $\beta_j \mapsto e_j$.

Recordemos que $\Lambda = \begin{bmatrix} K & K \\ 0 & k \end{bmatrix}$. Podemos adaptar la base de arriba para obtener la siguiente base de $k_d \otimes_k \Lambda$ como k_d -álgebra:

$$\left\{ \beta_{jk} \mid 1 \leq j \leq 4, 1 \leq k \leq 2, \beta_{jk} = \frac{1}{4\varepsilon} \sum_{l=0}^3 \varepsilon^{\frac{4-l}{4}} \otimes \sigma^{j-1}(\varepsilon^{\frac{l}{4}}) E_{1k} \right\} \cup \{ \beta_{01} = 1 \otimes E_{22} \} \quad (2.4)$$

donde $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ es la base estándar de $\text{Mat}_{2 \times 2}(k_d)$.

Se puede ver que $\psi_d : k_d \otimes_k \Lambda \rightarrow k_d \tilde{D}_4$, definido por

$$\beta_{j1} \mapsto \epsilon_j$$

$$\beta_{j2} \mapsto \alpha_j$$

es un isomorfismo de k_d -álgebras, donde $k_d \tilde{D}_4$ es el álgebra de caminos de \tilde{D}_4 , con $\epsilon_j \in (\tilde{D}_4)_0$ y $\alpha_j \in (\tilde{D}_4)_1$.

Por otro lado, tomemos el morfismo $\sigma_d \otimes \text{id} : k_d \otimes_k \Lambda \rightarrow k_d \otimes_k \Lambda$, el cual actúa sobre la base en 2.4 como se muestra a continuación:

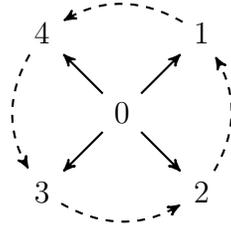
$$(\sigma_d \otimes \text{id})(\beta_{jk}) = \beta_{j-1, k}$$

con $1 \leq k \leq 2$, donde $r \equiv j - 1 \pmod{4}$. Mientras que deja fijo al elemento β_{01} . Así obtenemos el morfismo

$$\gamma_d : k_d \tilde{\mathcal{D}}_4 \rightarrow k_d \tilde{\mathcal{D}}_4$$

$$k\rho \mapsto \sigma_d(k)\gamma(\rho)$$

donde γ es el siguiente automorfismo de orden 4 del carcaj $\tilde{\mathcal{D}}_4$:



2.3. Representaciones invariantes

Lo que presentaremos en esta sección es una adaptación del trabajo de Hubery [8]. Sea \mathcal{M} un $k_d \tilde{\mathcal{D}}_4$ -módulo. Definimos un módulo ${}^{\gamma_d} \mathcal{M}$ tomando la misma estructura de espacio vectorial que ya tiene \mathcal{M} pero definiremos un nuevo producto $*$ de la siguiente forma

$$p * m = \gamma_d^{-1}(p)m, \text{ para } p \in k_d \tilde{\mathcal{D}}_4.$$

Si $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es un homomorfismo de módulos, entonces obtenemos un homomorfismo ${}^{\gamma_d} f : {}^{\gamma_d} \mathcal{M} \rightarrow {}^{\gamma_d} \mathcal{N}$ como veremos a continuación. Dado que f es en particular un homomorfismo de espacios vectoriales, tenemos que ${}^{\gamma_d} f = f$. Entonces

$$f(p * m) = f(\gamma_d^{-1}(p)m) = \gamma_d^{-1}(p)f(m) = p * f(m).$$

Esto determina una autoequivalencia $F(\gamma_d)$ sobre $\text{mod}k_d\tilde{\mathcal{D}}_4$ tal que $F(\gamma_d^r) = F(\gamma_d)^r$. En particular, notemos que \mathcal{M} es inescindible si y sólo si ${}^{\gamma_d}\mathcal{M}$ lo es.

Sabemos que las categorías $\text{mod}k_d\tilde{\mathcal{D}}_4$ y $\text{Rep}(\tilde{\mathcal{D}}_4, k_d)$ son equivalentes, así el funtor $F(\gamma_d)$ debe actuar también sobre $\text{Rep}(\tilde{\mathcal{D}}_4, k_d)$. Sea $M = (V_j, f_{\alpha_j})$ una k_d -representación de $\tilde{\mathcal{D}}_4$ y \mathcal{M} el correspondiente $k_d\tilde{\mathcal{D}}_4$ -módulo, así \mathcal{M} tiene la estructura de espacio vectorial de $V = \bigoplus_{j=0}^4 V_j$. Deseamos describir la representación ${}^{\gamma_d}M = (W_j, g_{\alpha_j})$ correspondiente al módulo ${}^{\gamma_d}\mathcal{M}$ en terminos de la representación original M . Claramente

$$W_j = \epsilon_j * V = \gamma^{-1}(\epsilon_j)V = \epsilon_r V = V_r,$$

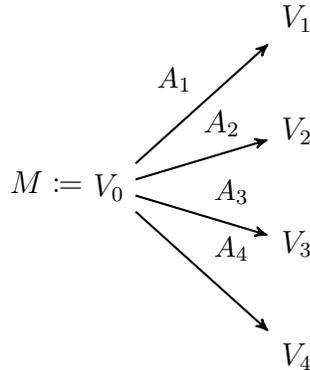
con $r \equiv j - 1 \pmod{4}$ para $1 \leq j \leq 4$, mientras que para $j = 0$ tenemos

$$W_0 = \epsilon_0 * V = \gamma_d^{-1}(\epsilon_0)V = \epsilon_0 V = V_0.$$

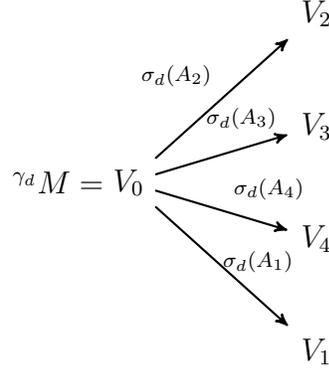
Notemos que la estructura de W_j como k_d -espacio vectorial esta definida por la multiplicación $k * v_j = \sigma_d^{-1}(k)v_j$, para todo $k \in k_d$ y $v_j \in W_j$. Por otro lado, para cada $f_{\alpha_j} : V_0 \rightarrow V_j$ le podemos asociar una matriz $A_j \in \text{Mat}_{\dim V_j \times \dim V_0}(k_d)$. Entonces $g_{\alpha_j} : W_0 \rightarrow W_j$ esta definida por

$$g_{\alpha_j}(v) = \alpha_j * v = \gamma_d^{-1}(\alpha_j)v = \alpha_r v = A_r v = \sigma_d^{-1}(\sigma_d(A_r))v = \sigma_d(A_r) * v$$

donde $\sigma_d(A_r)$ significa aplicar el morfismo σ_d a cada entrada de la matriz A_r . Así si M es una k_d -representación de $\tilde{\mathcal{D}}_4$



entonces la representación $\gamma^d M$ tiene la siguiente forma:

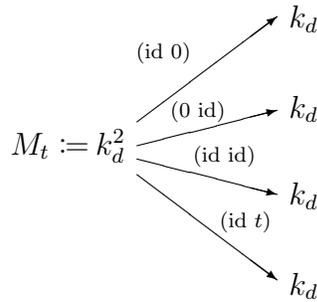


Al igual que en [8], diremos que M es una *representación isomorficamente invariante* (una ii-representación) si $\gamma^d M \cong M$. Diremos que M es ii-inescindible si no es isomorfa a la suma directa de dos ii-representaciones. Como en [8] Lema 2.3.1, las representaciones ii-inescindibles son precisamente las representaciones de la forma

$$M \cong N \oplus \gamma^d N \oplus \gamma_d^2 N \oplus \dots \oplus \gamma_d^{n-1} N,$$

donde N es una representación inescindible y $n \geq 1$ es mínimo tal que $N \cong \gamma_d^n N$.

Para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $d = \text{mcm}(n, 4)$ y $t \in k_d$, la representación



satisface que $\text{End } M_t = k_d$. Así es inescindible y regular. Más aún, para $t, s \in k_d$ tenemos que $M_t \cong M_s$ si y sólo si $t = s$.

Para $t \in k_d \setminus \{0, 1\}$ es fácil ver

$$f = \begin{pmatrix} -a \\ at \\ at \\ a \\ \begin{bmatrix} a & at \\ -a & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix},$$

con $a \neq 0$ es un isomorfismo entre M_t y

$$\begin{array}{c} \begin{array}{l} \nearrow k_d \\ \nearrow k_d \\ \nearrow k_d \\ \searrow k_d \end{array} \\ \begin{array}{c} (0 \text{ id}) \\ (\text{id id}) \\ (\text{id } 1-t) \\ (\text{id } 0) \end{array} \\ k_d^2 \end{array}$$

y por definición:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{l} \nearrow k_d \\ \nearrow k_d \\ \nearrow k_d \\ \searrow k_d \end{array} \\ \begin{array}{c} (0 \text{ id}) \\ (\text{id id}) \\ (\text{id } \sigma_d(t)) \\ (\text{id } 0) \end{array} \\ \gamma_d M_t \cong k_d^2 \end{array} \tag{2.5}$$

donde $\sigma_d \in \text{Gal}(k_d, k)$, está definido por $\varepsilon^{\frac{1}{d}} \mapsto \zeta_d \varepsilon^{\frac{1}{d}}$, con $\zeta_d = e^{\frac{2\pi i}{d}}$ es una d -ésima raíz primitiva de la unidad. Por lo tanto, para $t \in k_d \setminus \{0, 1\}$ tenemos el isomorfismo $\gamma_d M_t \cong M_{1-\sigma_d(t)}$. Más aún, sea $\tilde{\sigma} : k_d \rightarrow k_d$ una función definida por $t \mapsto 1 - t$. Se puede demostrar por inducción que para $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ tenemos el siguiente isomorfismo:

$$\gamma_d^m M_t \cong M_{\sigma_d^m \circ \tilde{\sigma}^m(t)}.$$

Así, estaremos interesados en los elementos $t \in k_d \setminus \{0, 1\}$ tales que satisfacen las siguientes condiciones:

$$t = \sigma_d^n \circ \tilde{\sigma}^n(t) \quad (2.6)$$

y para $1 \leq m \leq n-1$,

$$t \neq \sigma_d^m \circ \tilde{\sigma}^m(t). \quad (2.7)$$

Para cualquier $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tenemos que un elemento $t \in k_d$ puede ser escrito como:

$$t = \begin{cases} t_0 + t_1\varepsilon^{\frac{1}{d}} + t_2\varepsilon^{\frac{2}{d}} + t_3\varepsilon^{\frac{3}{d}} & \text{si } n \text{ es impar } t_j \in k_n \\ t_0 + t_1\varepsilon^{\frac{1}{d}} & \text{si } n \equiv 2(\text{mod}4), \text{ con } t_j \in k_n \\ t & \text{si } n \equiv 0(\text{mod}4). \end{cases}$$

Tenemos que $\sigma_d|_{k_n} = \sigma_n$, así $\sigma_d^n(\varepsilon^{\frac{1}{n}}) = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$, entonces t satisface (2.6) si tiene la siguiente forma:

$$t = \begin{cases} \frac{1}{2} + s'\varepsilon^{\frac{2}{d}} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ s' & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

para algún $s' \in k_n$. De hecho podemos escribir a t como

$$t = \frac{1}{2} + s\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \text{ donde } s = \begin{cases} \frac{s'}{\varepsilon}\varepsilon^{\frac{n+1}{2n}} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{2s'-1}{2\varepsilon}\varepsilon^{\frac{1}{2}} & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

en ambos casos $s \in k_n$. Para $1 \leq m \leq n$ se sigue que:

$$\sigma_d^m \circ \tilde{\sigma}^m(t) = \frac{1}{2} + \sigma_d^m(s)\varepsilon^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \sigma_n^m(s)\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces $t = \frac{1}{2} + s\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ satisface (2.7) si $s \in k_n$ es genérico.

Por lo tanto $M = \bigoplus_{j=0}^{n-1} \gamma_d^j M_{\frac{1}{2} + s\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$, para algún $s \in k_n$ que sea genérico, es ii-inescindible.

Observación 2.3.1. Para $x_1, x_2, \dots, x_n \in k_d$ y $1 \leq l \leq n$ sea $N_l \in \text{Mat}_{n \times n}(k_d)$ una

matriz tal que $(N_l)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j}x_l & \text{si } i = n \end{cases}$ con $x_l \in k_d$,

$$N_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ x_l & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

entonces es fácil ver la siguiente igualdad

$$N_n \cdots N_2 N_1 = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.8)$$

Sean $x, y, z, w \in k_d$ y considere las matrices $X, Y, Z, W \in \text{Mat}_{n \times n}(k_d)$ definidas por:

$$(X)_{ij} := \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j}x & \text{si } i = n \end{cases} \quad (Y)_{ij} := \begin{cases} y & \text{si } i = n, j = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$(Z)_{ij} := \begin{cases} z & \text{si } i = n, j = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (W)_{ij} := \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j}w & \text{si } i = n \end{cases},$$

tomemos la matriz $\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{2n \times 2n}(k_d)$, usando el 2.8 y el hecho de que al multiplicar una matriz del mismo tipo que X y W se intercambian columnas (renglones) multiplicando por la derecha (izquierda) de la matriz, entonces es fácil ver

$$\sigma_d^{n-1} \left(\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \right) \cdots \sigma_d \left(\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(x, \sigma_d(x), \dots, \sigma_d^{n-1}(x)) & \text{diag}(y, \sigma_d(y), \dots, \sigma_d^{n-1}(y)) \\ \text{diag}(z, \sigma_d(z), \dots, \sigma_d^{n-1}(z)) & \text{diag}(w, \sigma_d(w), \dots, \sigma_d^{n-1}(w)) \end{bmatrix}$$

El siguiente resultado es clave para nuestra clasificación:

Proposición 2.3.2. *Sea $M = \bigoplus_{j=0}^{n-1} \sigma_d^j M_{\frac{1}{2} + s\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$ ii -inescindible. Entonces existe un isomorfismo $f : M \rightarrow \gamma^d M$ tal que el automorfismo $\gamma_d^{d-1} f \circ \dots \circ \gamma^d f \circ f$ de M es la identidad.*

Demostración. Lo estudiaremos caso por caso:

1. Si $n \equiv 1 \pmod{2}$, entonces $d = \text{mcm}(4, n) = 4n$, pero $s \in k_n$ así $t^{-1} \in k_{2n}$ con $t = \frac{1}{2} + s\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Tenemos del Lema 2.4.7 que $t^{-1} = r^2$ o $t^{-1} = r^2 \varepsilon^{\frac{2}{d}}$ para algún $r \in k_{2n}$. Tomemos $a = \sqrt{ir}$ o $a = \sqrt{ir\varepsilon^{\frac{1}{d}}}$, entonces $a\sigma_d^{2n}(a) = it^{-1}$ o $a\sigma_d^{2n}(a) = -it^{-1}$ en ambos casos $-a\sigma_d^n(a)\sigma_d^{2n}(a)\sigma_d^{3n}(a)t\sigma_d^n(t) = 1$.

a) Si $n \equiv 1 \pmod{4}$. Sea $f : M \rightarrow \gamma^d M$ un isomorfismo definido por

$$f = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \end{pmatrix},$$

donde $A_1, A_2, A_3, A_4, X, Y, Z, W \in \text{Mat}_{n \times n}(k_d)$ son matrices definidas

de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
(A_1)_{ij} &= \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j}(-a) & \text{si } i = n \end{cases}, & (A_2)_{ij} &= \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j}at & \text{si } i = n \end{cases}, \\
(A_3)_{ij} &= \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j}at & \text{si } i = n \end{cases}, & (A_4)_{ij} &= \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j}a & \text{si } i = n \end{cases}, \\
(X)_{ij} &= \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j}a & \text{si } i = n \end{cases}, & (Y)_{ij} &= \begin{cases} at & \text{si } i = n, j = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \\
(Z)_{ij} &= \begin{cases} -a & \text{si } i = n, j = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, & (W)_{ij} &= \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j}0 & \text{si } i = n \end{cases},
\end{aligned}$$

entonces

$$\gamma_d^{n-1} f \circ \dots \circ \gamma_d f \circ f = \left(\begin{array}{l} \sigma_d^{n-1}(A_1)\sigma_d^{n-2}(A_4) \cdots \sigma_d^4(A_1)\sigma_d^3(A_4)\sigma_d^2(A_3)\sigma_d(A_2)A_1 \\ \sigma_d^{n-1}(A_2)\sigma_d^{n-2}(A_1) \cdots \sigma_d^4(A_2)\sigma_d^3(A_1)\sigma_d^2(A_4)\sigma_d(A_3)A_2 \\ \sigma_d^{n-1}(A_3)\sigma_d^{n-2}(A_2) \cdots \sigma_d^4(A_3)\sigma_d^3(A_2)\sigma_d^2(A_1)\sigma_d(A_4)A_3 \\ \sigma_d^{n-1}(A_4)\sigma_d^{n-2}(A_3) \cdots \sigma_d^4(A_4)\sigma_d^3(A_3)\sigma_d^2(A_2)\sigma_d(A_1)A_4 \\ \sigma_d^{n-1} \left(\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \right) \cdots \sigma_d \left(\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

se sigue de la Observación 2.3.1

$$\gamma_d^{n-1} f \circ \dots \circ \gamma_d f \circ f = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ C \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
B_1 &= \text{diag}(-a, \sigma_d(at), \sigma_d^2(at), \dots, \sigma_d^{n-2}(a), \sigma_d^{n-1}(-a)), \\
B_2 &= \text{diag}(at, \sigma_d(at), \sigma_d^2(a), \dots, \sigma_d^{n-2}(-a), \sigma_d^{n-1}(at)), \\
B_3 &= \text{diag}(at, \sigma_d(a), \sigma_d^2(-a), \dots, \sigma_d^{n-2}(at), \sigma_d^{n-1}(at)), \\
B_4 &= \text{diag}(a, \sigma_d(-a), \sigma_d^2(at), \dots, \sigma_d^{n-2}(at), \sigma_d^{n-1}(a)) \text{ y} \\
\mathcal{C} &= \begin{bmatrix} \text{diag}(a, \dots, \sigma_d^{n-1}(a)) & \text{diag}(at, \dots, \sigma_d^{n-1}(at)) \\ \text{diag}(-a, \dots, \sigma_d^{n-1}(-a)) & 0_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

de la misma forma podemos observar que

$$\gamma_d^{2n-1} f \circ \dots \circ \gamma_d^{n+1} f \circ \gamma_d^n f = \begin{pmatrix} \sigma_d^n(B_2) \\ \sigma_d^n(B_3) \\ \sigma_d^n(B_4) \\ \sigma_d^n(B_1) \\ \sigma_d^n(\mathcal{C}) \end{pmatrix},$$

$$\gamma_d^{3n-1} f \circ \dots \circ \gamma_d^{2n+1} f \circ \gamma_d^{2n} f = \begin{pmatrix} \sigma_d^{2n}(B_3) \\ \sigma_d^{2n}(B_4) \\ \sigma_d^{2n}(B_1) \\ \sigma_d^{2n}(B_2) \\ \sigma_d^{2n}(\mathcal{C}) \end{pmatrix},$$

y

$$\gamma_d^{4n-1} f \circ \dots \circ \gamma_d^{3n+1} f \circ \gamma_d^{3n} f = \begin{pmatrix} \sigma_d^{3n}(B_4) \\ \sigma_d^{3n}(B_1) \\ \sigma_d^{3n}(B_2) \\ \sigma_d^{3n}(B_3) \\ \sigma_d^{3n}(\mathcal{C}) \end{pmatrix}.$$

Dado que las matrices B_j 's son diagonales, tenemos que $\gamma_d^{4n-1} f \circ \dots \circ \gamma_d f \circ f$ es igual a

$$\begin{pmatrix} \sigma_d^{3n}(B_4)\sigma_d^{2n}(B_3)\sigma_d^n(B_2)B_1 \\ \sigma_d^{3n}(\sigma_d^{3n}(B_4)\sigma_d^{2n}(B_3)\sigma_d^n(B_2)B_1) \\ \sigma_d^{2n}(\sigma_d^{3n}(B_4)\sigma_d^{2n}(B_3)\sigma_d^n(B_2)B_1) \\ \sigma_d^n(\sigma_d^{3n}(B_4)\sigma_d^{2n}(B_3)\sigma_d^n(B_2)B_1) \\ \sigma_d^{3n}(\mathcal{C})\sigma_d^{2n}(\mathcal{C})\sigma_d^n(\mathcal{C})\mathcal{C} \end{pmatrix},$$

es fácil ver que la j -ésima entrada de la matriz diagonal $\sigma_d^{3n}(B_4)\sigma_d^{2n}(B_3)\sigma_d^n(B_2)B_1$ es de la forma

$$\sigma_d^{j-1}(-a\sigma_d^n(at)\sigma_d^{2n}(at)\sigma_d^{3n}(a)) = \sigma_d^{j-1}(-a\sigma_d^n(a)\sigma_d^{2n}(a)\sigma_d^{3n}(a)t\sigma_d^n(t)),$$

para $1 \leq j \leq n$, pero habíamos visto al principio del caso 1. que

$$-a\sigma_d^n(a)\sigma_d^{2n}(a)\sigma_d^{3n}(a)t\sigma_d^n(t) = 1,$$

de donde $\sigma_d^{3n}(B_4)\sigma_d^{2n}(B_3)\sigma_d^n(B_2)B_1 = \text{id}_n$.

Por otro lado, si tomamos

$$C_1 = \text{diag}(a, \dots, \sigma_d^{n-1}(a)),$$

$$C_2 = \text{diag}(t, \dots, \sigma_d^{n-1}(t)),$$

usando el hecho de que ambas son matrices diagonales y dado que $\sigma_d^n(t) = 1 - t$ y $\sigma_d^{2n}(t) = t$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_d^n(\mathcal{C})\mathcal{C} &= \begin{bmatrix} \sigma_d^n(C_1) & \sigma_d^n(C_1C_2) \\ -\sigma_d^n(C_1) & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & C_1C_2 \\ -C_1 & 0_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_1\sigma_d^n(C_1)(\text{id}_n - \sigma_d^n(C_2)) & \sigma_d^n(C_1)C_1C_2 \\ -\sigma_d^n(C_1)C_1 & -\sigma_d^n(C_1)C_1C_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_1\sigma_d^n(C_1)C_2 & \sigma_d^n(C_1)C_1C_2 \\ -\sigma_d^n(C_1)C_1 & -\sigma_d^n(C_1)C_1C_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\sigma_d^{3n}(\mathcal{C})\sigma_d^{2n}(\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} \sigma_d^{2n}(C_1)\sigma_d^{3n}(C_1)C_2 & \sigma_d^{3n}(C_1)\sigma_d^{2n}(C_1)C_2 \\ -\sigma_d^{3n}(C_1)\sigma_d^{2n}(C_1) & -\sigma_d^{3n}(C_1)\sigma_d^{2n}(C_1)C_2 \end{bmatrix},$$

por lo tanto $\sigma_d^{3n}(\mathcal{C})\sigma_d^{2n}(\mathcal{C})\sigma_d^n(\mathcal{C})\mathcal{C}$ es igual a

$$\begin{bmatrix} \sigma_d^{3n}(C_1)\sigma_d^{2n}(C_1)\sigma_d^n(C_1)C_1C_2(\text{id}_n - C_2) & 0_n \\ 0_n & \sigma_d^{3n}(C_1)\sigma_d^{2n}(C_1)\sigma_d^n(C_1)C_1C_2(\text{id}_n - C_2) \end{bmatrix}$$

al igual que antes es fácil ver que la j -ésima entrada de la matriz diagonal $\sigma_d^{3n}(C_1)\sigma_d^{2n}(C_1)\sigma_d^n(C_1)C_1C_2(\text{id}_n - C_2)$ es de la forma

$$\sigma_d^{j-1}(-a\sigma_d^n(at)\sigma_d^{2n}(at)\sigma_d^{3n}(a)) = \sigma_d^{j-1}(-a\sigma_d^n(a)\sigma_d^{2n}(a)\sigma_d^{3n}(a)t\sigma_d^n(t)),$$

para $1 \leq j \leq n$. Se sigue que $\gamma_d^{4n-1}f \circ \dots \circ \gamma_d f \circ f$ es la identidad.

- b) Si $n \equiv 3 \pmod{4}$. Al igual que en nuestro caso anterior, se puede mostrar que el morfismo $\gamma_d^{4n-1}f \circ \dots \circ \gamma_d f \circ f$ es la identidad. Para ello basta considerar $f : M \rightarrow \gamma_d M$ el isomorfismo definido por

$$f = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \end{pmatrix},$$

con $A_1, A_2, A_3, A_4, X, Y, Z, W \in \text{Mat}_{n \times n}(k_d)$ matrices definidas de la

siguiente forma:

$$(A_1)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j} a \sigma_d^n(t) & \text{si } i = n \end{cases}, \quad (A_2)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j} (-a) \sigma_d^n(t) & \text{si } i = n \end{cases},$$

$$(A_3)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j} a & \text{si } i = n \end{cases}, \quad (A_4)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j} a & \text{si } i = n \end{cases},$$

$$(X)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j} 0 & \text{si } i = n \end{cases}, \quad (Y)_{ij} = \begin{cases} a \sigma_d^n(t) & \text{si } i = n, j = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

$$(Z)_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i = n, j = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (W)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j} a & \text{si } i = n. \end{cases}$$

2. Si $n \equiv 2 \pmod{4}$, entonces $d = \text{mcm}(4, n) = 2n$. Sea $t = \frac{1}{2} + s\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ con $s \in k_n$, así $(t(1-t))^{-1} = (\frac{1}{4} - s^2\varepsilon)^{-1} \in k_n$. Tenemos del Lema 2.4.7 que $(t-t^2)^{-1} = r^2$ o $(t-t^2)^{-1} = r^2\varepsilon^{\frac{1}{n}}$ para algún $r \in k_n$. Tomamos $a = ir$ o $a = r\varepsilon^{\frac{1}{d}}$, entonces

$$-a\sigma_d^n(a) = a^2 = (t-t^2)^{-1}$$

así $-a\sigma_d^n(a)t(1-t) = 1$. Sea $f : M \rightarrow^{\gamma_d} M$ el isomorfismo definido por

$$f = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \end{pmatrix},$$

donde $A_1, A_2, A_3, A_4, X, Y, Z, W \in \text{Mat}_{n \times n}(k_d)$ son las matrices definidas de

la siguiente forma:

$$(A_1)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j}a(1-t) & \text{si } i = n \end{cases}, \quad (A_2)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j}(-a)(t-t^2) & \text{si } i = n \end{cases},$$

$$(A_3)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j}(-at) & \text{si } i = n \end{cases}, \quad (A_4)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j}a & \text{si } i = n \end{cases},$$

$$(X)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j}(-at) & \text{si } i = n \end{cases}, \quad (Y)_{ij} = \begin{cases} -at & \text{si } i = n, j = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

$$(Z)_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i = n, j = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (W)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{if } i < n \\ \delta_{1,j}at & \text{if } i = n. \end{cases}$$

Al igual que arriba, después de algunas cuentas podemos ver que las matrices correspondientes al morfismo $\gamma_d^{2n-1} f \circ \dots \circ \gamma_d f \circ f$, son matrices diagonales cuyas entradas no cero son de la forma $\sigma_d^{j-1}(-a\sigma_d^n(a)t(1-t))$ con $1 \leq j \leq n$, por lo tanto $\gamma_d^{2n-1} f \circ \dots \circ \gamma_d f \circ f$ es la identidad.

Finalmente

3. Si $n \equiv 0 \pmod{4}$. Sea $f : M \rightarrow^{\gamma_d} M$ el isomorfismo definido por

$$f = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \\ A_1 \\ A_1 \\ \left[\begin{array}{cc} A_3 & A_2 \\ A_2 & A_3 \end{array} \right] \end{pmatrix},$$

donde $A_1, A_2, A_3 \in \text{Mat}_{n \times n}(k_d)$ son las matrices:

$$\begin{aligned} (A_1)_{ij} &= \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j} & \text{si } i = n \end{cases}, \\ (A_2)_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = n, j = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \\ (A_3)_{ij} &= \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j} 0 & \text{si } i = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Es fácil ver que $\gamma_d^{d-1} f \circ \dots \circ \gamma_d f \circ f$ es la identidad.

□

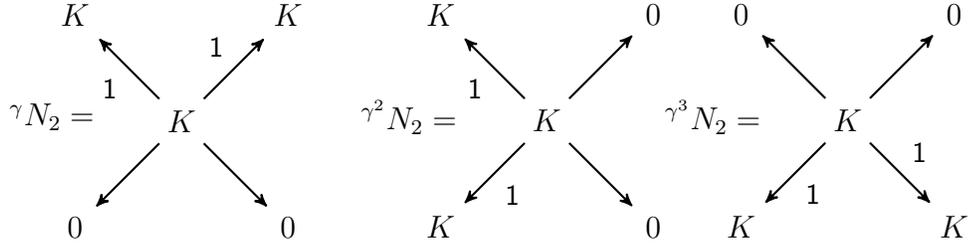
Por otro lado, tenemos dos representaciones ii-inescindibles las cuales aun no hemos mencionado. Estas son:

$$N_1 = \begin{array}{ccc} & 0 & K \\ & \swarrow & \nearrow \\ & K & \\ & \swarrow & \searrow \\ K & & 0 \end{array} \quad \text{y} \quad N_2 = \begin{array}{ccc} & 0 & K \\ & \swarrow & \nearrow \\ & K & \\ & \swarrow & \searrow \\ 0 & & K \end{array}$$

con $K = k_4$. Dado que los únicos morfismos involucrados en estas representaciones son la identidad y el morfismo cero, tenemos que la correspondiente $\gamma := \gamma_4$ únicamente intercambia los “brazos” en cada una de nuestras representaciones, así

$$\gamma N_1 = \begin{array}{ccc} K & & 0 \\ & \swarrow & \nearrow \\ & K & \\ & \swarrow & \searrow \\ 0 & & K \end{array}$$

y



Claramente $\gamma^2 N_1 = N_1$ y $\gamma^4 N_2 = N_2$, por lo tanto $N_1 \oplus \gamma N_1$ y $N_2 \oplus \gamma N_2 \oplus \gamma^2 N_2 \oplus \gamma^3 N_2$ son representaciones ii-inescindibles.

Proposición 2.3.3. *Sea $M = N_1 \oplus \gamma N_1$ o $M = N_2 \oplus \gamma N_2 \oplus \gamma^2 N_2 \oplus \gamma^3 N_2$. Entonces en ambos casos existe un isomorfismo $f : M \rightarrow \gamma M$ tal que los automorfismos de M $\gamma f \circ f$, respectivamente $\gamma^3 f \circ \gamma^2 f \circ \gamma f \circ f$, son la identidad.*

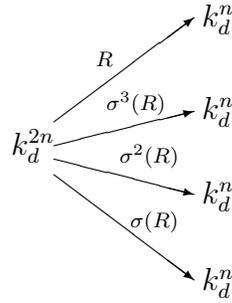
Demostración. Es suficiente tomar

$$f = \begin{pmatrix} \text{id}_K \\ \text{id}_K \\ \text{id}_K \\ \text{id}_K \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \text{ respectivamente } f = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix},$$

para $M = N_1 \oplus \gamma N_1$ y $M = N_2 \oplus \gamma N_2 \oplus \gamma^2 N_2 \oplus \gamma^3 N_2$ y verificar que tienen la propiedad deseada. □

Proposición 2.3.4. *Sea $M : K \otimes k^{2n} \rightarrow K^n$ una representación regular simple. Si X es una representación del carcaj \tilde{D}_4 , tal que $k_d \otimes M \cong X$, entonces existe un isomorfismo $f : X \rightarrow \gamma^d X$ tal que el automorfismo $\gamma_d^{m-1} f \circ \dots \circ \gamma^d f \circ f$ de X es la identidad, con $m = \begin{cases} d & \text{si } \text{End}(M) \cong k_n \\ 2n & \text{si } \text{End}(M) \cong k_{2n} \end{cases}$.*

Demostración. Sea M una representación regular simple de Λ . Como vimos al principio de este Capítulo podemos pensar en $k_d \otimes M$ como la siguiente representación de \tilde{D}_4 :



donde R es la matriz de φ_M .

Dado que $\sigma_d|_K = \sigma$ y $R \in \text{Mat}_{n \times 2n}(K)$, tenemos que $\sigma_d(\sigma^j(R)) = \sigma^{j+1}(R)$ para $0 \leq j \leq 3$, entonces $k_d \otimes M = \gamma^d(k_d \otimes M)$.

Ahora, sea $g : k_d \otimes M \rightarrow X$ un isomorfismo k_d -lineal de representaciones de \tilde{D}_4 , entonces $\gamma^d g : \gamma^d(k_d \otimes M) \rightarrow \gamma^d X$ también es un isomorfismo. Así

$$f := \gamma^d g \circ g^{-1} : X \rightarrow \gamma^d X$$

es un isomorfismo. Entonces $\gamma_d^{m-1} f \circ \dots \circ \gamma^d f \circ f = \gamma_d^m g \circ g^{-1}$, pero en ambos casos $\gamma_d^m g = g$. \square

2.4. El álgebra $K[\alpha_n]$

Recordemos que $K[\alpha_n]$ es una K -álgebra conmutativa. Más precisamente tenemos el siguiente resultado:

Lema 2.4.1. *Para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ se cumple lo siguiente:*

1. Si $n \equiv 1 \pmod{2}$ entonces $K[\alpha_n] \cong k_{4n}$;
2. si $n \equiv 2 \pmod{4}$ entonces $K[\alpha_n] \cong k_{2n} \times k_{2n}$;
3. si $n \equiv 0 \pmod{4}$ entonces $K[\alpha_n] \cong k_n \times k_n \times k_n \times k_n$;

todos isomorfismos de K -álgebras.

Demostración. 1. Si n es impar, es suficiente tomar el isomorfismo $\varepsilon^{\frac{1}{4n}} \mapsto \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\varepsilon} \alpha_n^{\frac{3n+1}{4}}$ para $n \equiv 1 \pmod{4}$ y $\varepsilon^{\frac{1}{4n}} \mapsto \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\varepsilon} \alpha_n^{\frac{n+1}{4}}$ para $n \equiv 3 \pmod{4}$.

2. Si $n \equiv 2 \pmod{4}$, nos basta mostrar que $K[\alpha_n] \cong K[\alpha_{\frac{n}{2}}] \times K[\alpha_{\frac{n}{2}}]$, pues $\frac{n}{2}$ es impar. El isomorfismo de arriba está dado por $\alpha_n \mapsto (\alpha_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+2}{4}} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}, -\alpha_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+2}{4}} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon})$.

3. Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, el isomorfismo entre $K[\alpha_n]$ y $k_n \times k_n \times k_n \times k_n$ está dado por mandar α_n a $(\zeta_n^4 \varepsilon^{\frac{1}{n}}, \zeta_n^3 \varepsilon^{\frac{1}{n}}, \zeta_n^2 \varepsilon^{\frac{1}{n}}, \zeta_n \varepsilon^{\frac{1}{n}})$, recordemos que $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

□

Por otro lado, recordemos que $\sigma_n : k_n \rightarrow k_n$ es un automorfismo de campos el cual fija el campo k y está definido por $\varepsilon^{\frac{1}{n}} \mapsto \zeta_n \varepsilon^{\frac{1}{n}}$ donde ζ_n es la raíz primitiva $e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Tenemos el siguiente resultado:

Lema 2.4.2. *Tenemos un isomorfismo de campos $k_n \xrightarrow{\sim} k[\alpha_n] \subset \text{Mat}_{n \times n}(k)$ el cual manda x a*

$$\alpha(x) := \sum_{j=0}^{n-1} x_j \alpha_n^j.$$

Más aún, existen matrices $A \in \text{GL}_n(k_n)$ tales que para cualquier $x \in k_n$ tenemos

$$A^{-1} \alpha(x) A = \text{diag}(x, \sigma_n(x), \dots, \sigma_n^{n-1}(x)).$$

Demostración. Dado que el polinomio mínimo de α_n es $y^n - \varepsilon$ es fácil ver que $k_n \cong$

$k[\alpha_n]$, con el isomorfismo dado por $\varepsilon^{\frac{1}{n}} \mapsto \alpha_n$. Definimos la matriz A como

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon^{\frac{1}{n}} & \zeta_n \varepsilon^{\frac{1}{n}} & \cdots & \zeta_n^{n-1} \varepsilon^{\frac{1}{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^{\frac{n-1}{n}} & \zeta_n^{n-1} \varepsilon^{\frac{n-1}{n}} & \cdots & \zeta_n^{(n-1)^2} \varepsilon^{\frac{n-1}{n}} \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(k_n)$$

i.e las entradas $x_{ij} = \zeta_n^{(j-1)(i-1)} \varepsilon^{\frac{i-1}{n}}$, para $1 \leq i, j \leq n$. Notemos que A es la transpuesta de una matriz de Vandermonde, entonces $\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \varepsilon^{\frac{1}{n}} (\zeta_n^j - \zeta_n^i) \neq 0$, por lo tanto $A \in \text{GL}_n(k_n)$. Se puede ver fácilmente que $A^{-1} = (\frac{y_{ij}}{n\varepsilon})$, donde $y_{ij} = \zeta_n^{(i-1)(1-j)} \varepsilon^{\frac{n+1-j}{n}}$ para $1 \leq i, j \leq n$.

Recordemos que $(\alpha_n^l)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+l,j} & \text{si } 1 \leq i < n+1-l \\ \delta_{i+l-n,j} & \text{si } n+1-l \leq i \leq n \end{cases}$, se sigue que

$$(A^{-1} \alpha_n^l)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{n} y_{i, n-l+j} & \text{si } 1 \leq j \leq l \\ \frac{1}{n\varepsilon} y_{i, j-l} & \text{si } l+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

entonces para $A^{-1} \alpha_n^l A$:

$$\begin{aligned} (A^{-1} \alpha_n^l A)_{ij} &= \frac{1}{n\varepsilon} \left(\sum_{r=1}^l \varepsilon y_{i, n-l+r} x_{rj} + \sum_{r=l+1}^n y_{i, r-l} x_{rj} \right) \\ &= \frac{1}{n\varepsilon} \left(\varepsilon \sum_{r=1}^l \zeta_n^{(i-1)(l+1-r)} \varepsilon^{\frac{l+1-r}{n}} \zeta_n^{(r-1)(j-1)} \varepsilon^{\frac{r-1}{n}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=l+1}^n \zeta_n^{(i-1)(n+l+1-r)} \varepsilon^{\frac{n+l+1-r}{n}} \zeta_n^{(r-1)(j-1)} \varepsilon^{\frac{r-1}{n}} \right) \\ &= \frac{1}{n\varepsilon} \left(\varepsilon \sum_{r=1}^l \zeta_n^{(i-1)l} \varepsilon^{\frac{l}{n}} \zeta_n^{(r-1)(j-i)} + \sum_{r=l+1}^n \zeta_n^{(i-1)l} \varepsilon^{\frac{n+l}{n}} \zeta_n^{(r-1)(j-i)} \right) \\ &= \frac{\varepsilon^{\frac{l}{n}} \zeta_n^{(i-1)l}}{n} \left(\sum_{r=1}^n \zeta_n^{(r-1)(j-i)} \right) \\ &= \delta_{ij} \varepsilon^{\frac{l}{n}} \zeta_n^{(i-1)l}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $A^{-1}\alpha_n^l A = \text{diag}(\varepsilon^{\frac{l}{n}}, \varepsilon^{\frac{l}{n}}\zeta_n^l, \dots, \varepsilon^{\frac{l}{n}}\zeta_n^{(n-1)l})$, se sigue que

$$A^{-1}\alpha(x)A = \text{diag}(x, \sigma_n(x), \dots, \sigma_n^{n-1}(x)).$$

□

Ahora, recordemos que el automorfismo k -lineal $\sigma : K \rightarrow K$ esta definido por $\varepsilon^{\frac{1}{4}} \mapsto i\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ y para un elemento $R = \sum_{j=0}^4 \alpha(\nu_j)\varepsilon^{\frac{j}{4}} \in K[\alpha_n]$, tenemos que σ actúa sobre R de la siguiente forma $\sigma(R) := \sum_{j=0}^4 \alpha(\nu_j)\sigma(\varepsilon^{\frac{j}{4}})$. Así es fácil ver las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \sigma^2(R) - R &= -2\varepsilon^{\frac{1}{4}}(\alpha(\nu_1) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\alpha(\nu_3)), \\ \sigma^3(R) - \sigma(R) &= -2i\varepsilon^{\frac{1}{4}}(\alpha(\nu_1) - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\alpha(\nu_3)), \\ \sigma(R) - R &= (i-1)\alpha(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} - 2\alpha(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} - (1+i)\alpha(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}}, \\ \sigma^3(R) - \sigma^2(R) &= -(i-1)\alpha(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} - 2\alpha(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + (1+i)\alpha(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}}, \end{aligned}$$

entonces tenemos que

$$(\sigma^2(R) - R)(\sigma^3(R) - \sigma(R)) = 4i\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\alpha(\nu_1)^2 - \varepsilon\alpha(\nu_3)^2) \quad (2.9)$$

y es igual a

$$\begin{aligned} &(\sigma(R) - R)(\sigma^3(R) - \sigma^2(R)) \\ &= \\ &4\varepsilon(\alpha(\nu_2)^2 - \alpha(\nu_1)\alpha(\nu_3)) + 2i\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\alpha(\nu_1)^2 - \varepsilon\alpha(\nu_3)^2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ahora para $R \in K[\alpha_n]_{reg}$, usando las ecuaciones (2.9) y (2.10), tenemos que

$$\begin{aligned} &(\sigma(R) - R)(\sigma^3(R) - \sigma^2(R))[(\sigma^2(R) - R)(\sigma^3(R) - \sigma(R))]^{-1} \\ &= \\ &\frac{1}{2} \text{id}_n - i\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\alpha(\nu_2)^2 - \alpha(\nu_1)\alpha(\nu_3))(\alpha(\nu_1)^2 - \varepsilon\alpha(\nu_3)^2)^{-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Esta última ecuación será usada en la prueba de la Proposición 2.5.1.

Observación 2.4.3. Tenemos que $R \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$ si y solo si $\sigma(R) - R$ y $\sigma^2(R) - R$ son matrices invertibles

Demostración. Si multiplicamos nuestras matrices por A^{-1} y A (la correspondiente matriz definida en el Lema 2.4.2), obtenemos:

$$\begin{aligned} A^{-1}(\sigma(R) - R)A &= A^{-1}((i-1)\alpha(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} - 2\alpha(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} - (1+i)\alpha(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}})A \\ &= (i-1)A^{-1}\alpha(\nu_1)A\varepsilon^{\frac{1}{4}} - 2A^{-1}\alpha(\nu_2)A\varepsilon^{\frac{1}{2}} - (1+i)A^{-1}\alpha(\nu_3)A\varepsilon^{\frac{3}{4}}, \end{aligned}$$

se sigue del mismo Lema 2.4.2 que es una matriz diagonal cuyas entradas son:

$$(i-1)\sigma_n^m(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} - 2\sigma_n^m(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} - (1+i)\sigma_n^m(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}}$$

con $1 \leq m \leq n$.

Así que $\sigma(R) - R$ es invertible si y sólo si

$$(i-1)\sigma_n^m(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} - 2\sigma_n^m(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} - (1+i)\sigma_n^m(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}} \neq 0$$

para todo $1 \leq m \leq n$, si y solo si

$$\sigma_n^m(\nu_2) \neq \frac{(i-1)\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\varepsilon}(\sigma_n^m(\nu_1) + i\sigma_n^m(\nu_3)\varepsilon^{\frac{1}{2}})$$

para $1 \leq m \leq n$, si y solo si R satisface R2.

Análogamente se puede demostrar que $\sigma^2(R) - R$ es invertible si y solo si R satisface R1. \square

Observación 2.4.4. Sea R elemento de $K[\alpha_n]$. Digamos

$$R = \alpha(\nu_0) + \alpha(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}}$$

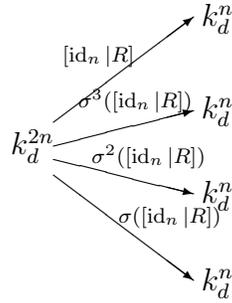
Entonces $k_d \otimes M(R) \cong M_{R'}$, donde $M_{R'}$ es la representación:

$$\begin{array}{ccc} & & k_d^n \\ & \nearrow & \\ & [\text{id}_n | R'] & \\ & \nearrow & \\ k_d^{2n} & \xrightarrow{\sigma^3([\text{id}_n | R'])} & k_d^n \\ & \searrow & \\ & \sigma^2([\text{id}_n | R']) & \\ & \searrow & \\ & \sigma([\text{id}_n | R']) & \\ & \searrow & \\ & & k_d^n \end{array}$$

y

$$R' := \text{diag}(\nu_0 + \nu_1 \varepsilon^{\frac{1}{4}} + \nu_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \nu_3 \varepsilon^{\frac{3}{4}}, \dots, \sigma_n^{n-1}(\nu_0) + \sigma_n^{n-1}(\nu_1) \varepsilon^{\frac{1}{4}} + \sigma_n^{n-1}(\nu_2) \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \sigma_n^{n-1}(\nu_3) \varepsilon^{\frac{3}{4}}).$$

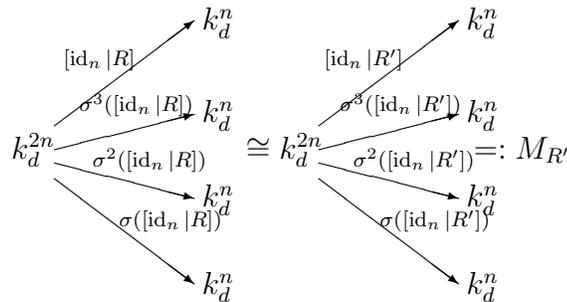
Demostración. Primero recordemos que podemos pensar en $k_d \otimes M(R)$ como la siguiente representación:



Sea A la matriz definida en el Lema 2.4.2. Tenemos, del lema antes mencionado, que $RA = AR'$. Más aún, es fácil comprobar que $\sigma^j(R)A = A\sigma^j(R')$ para $1 \leq j \leq 4$, de este modo:

$$\begin{aligned} [id_n | \sigma^j(R)] \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} &= [A | \sigma^j(R')A] \\ &= [A | A\sigma^j(R')] \\ &= A[id_n | \sigma^j(R')] \end{aligned}$$

así



con el isomorfismo

$$f_A := \begin{pmatrix} A \\ A \\ A \\ A \\ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

□

Observación 2.4.5. Sean $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, R y S elementos de $K[\alpha_n]$. Digamos

$$R = \alpha(\nu_0) + \alpha(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}}$$

$$S = \alpha(\mu_0) + \alpha(\mu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(\mu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha(\mu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}}.$$

Si

$$\mu_0 + \mu_1\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \mu_2\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \mu_3\varepsilon^{\frac{3}{4}} = \sigma_n^m(\nu_0) + \sigma_n^m(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \sigma_n^m(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \sigma_n^m(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}}$$

para alguna $1 \leq m \leq n$ entonces $k_d \otimes M(R) \cong k_d \otimes M(S)$.

Demostración. Usando la Observación 2.4.4 tenemos que $k_d \otimes M(R) \cong k_d \otimes M(S)$ si y sólo si $M_{R'} \cong M_{S'}$. Ahora dado que

$$\mu_0 + \mu_1\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \mu_2\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \mu_3\varepsilon^{\frac{3}{4}} = \sigma_n^m(\nu_0) + \sigma_n^m(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \sigma_n^m(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \sigma_n^m(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}}$$

para alguna $1 \leq m \leq n$ se sigue que

$$\sigma_n^j(\nu_0) + \sigma_n^j(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \sigma_n^j(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \sigma_n^j(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}} = \sigma_n^{m+j}(\nu_0) + \sigma_n^{m+j}(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \sigma_n^{m+j}(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \sigma_n^{m+j}(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}},$$

para $0 \leq j \leq n-1$. Consideremos la matriz $(N)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & \text{si } i < n \\ \delta_{1,j} & \text{si } i = n \end{cases}$ es decir

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Es fácil ver que $N^m R' = S' N^m$, más aún $N^m \sigma^j(R') = \sigma^j(S') N^m$, así $M_{R'} \cong M_{S'}$, con el morfismo f_{N^m} . \square

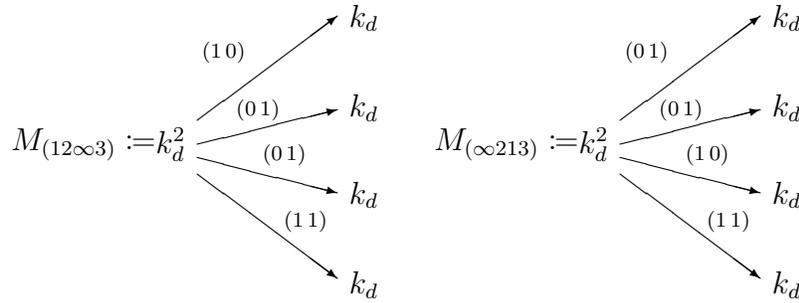
Observación 2.4.6. Sea $R \in K[\alpha_n]$. Si R satisface R1 pero no R2. entonces R

$$M(R) \cong M(\alpha(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(-i)\varepsilon^{\frac{3}{4}})$$

o

$$k_d \otimes M(R) \cong \bigoplus_{j=0}^{\frac{n}{4}-1} (M_0 \oplus M_1 \oplus M_{(12\infty 3)} \oplus M_{(\infty 213)}).$$

Donde



Demostración. Sea $R \in K[\alpha_n]$ matriz que satisface R1 pero no R2, es decir ν_1 es distinto de $\pm\nu_3\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ y existe m en $\{0, \dots, n-1\}$ tal que

$$\sigma_n^m(\nu_2) = \frac{(i-1)\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\varepsilon} (\sigma_n^m(\nu_1) + i\sigma_n^m(\nu_3)\varepsilon^{\frac{1}{2}}),$$

de la Observación 2.4.5 podemos suponer sin perdida de generalidad que $m = 0$.

Estudiaremos cada caso:

- $\nu_1 = \pm i\nu_3\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. En este caso $\nu_2 = 0$. Tomemos $\nu_1 = i\nu_3\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, entonces

$$\begin{aligned} R &= \alpha(i\nu_3\varepsilon^{\frac{1}{2}})\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}} \\ &= \alpha(i\nu_3)\alpha(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha((-i)i\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}} \\ &= \alpha(i\nu_3)(\alpha(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(-i)\varepsilon^{\frac{3}{4}}) \end{aligned}$$

Por lo que $M(R) \cong M(\alpha(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(-i)\varepsilon^{\frac{3}{4}})$, usando el isomorfismo

$$\left(\begin{bmatrix} \text{id}_n & 0 \\ 0 & \alpha(i\nu_3) \end{bmatrix}, \text{id}_n \right).$$

De forma similar se puede hacer la demostración para $\nu_1 = -i\nu_3\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

- $\nu_1 \neq \pm i\nu_3\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. En este caso $\nu_2 = \frac{(i-1)\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\varepsilon}(\nu_1 + i\nu_3\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \neq 0$, así

$$R = \alpha(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha\left(\frac{(i-1)\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\varepsilon}(\nu_1 + i\nu_3\varepsilon^{\frac{1}{2}})\right)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}}$$

antes de continuar es importante que recordemos que $\alpha(\varepsilon^{\frac{j}{4}}) \neq \alpha(1)\varepsilon^{\frac{j}{4}}$. Por otro lado, para cada $m \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$\begin{aligned} \sigma_n^m(\nu_2) &= \sigma_n^m\left(\frac{(i-1)\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\varepsilon}(\nu_1 + i\nu_3\varepsilon^{\frac{1}{2}})\right) \\ &= \sigma_n^m\left(\frac{(i-1)}{2\varepsilon}\nu_1\varepsilon^{\frac{3}{4}} - \frac{(1+i)}{2}\nu_3\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right) \\ &= \frac{(i-1)}{2\varepsilon}\sigma_n^m(\nu_1)\sigma_n^m(\varepsilon^{\frac{3}{4}}) - \frac{(1+i)}{2}\sigma_n^m(\nu_3)\sigma_n^m(\varepsilon^{\frac{1}{4}}) \\ &= \frac{(i-1)}{2\varepsilon}\sigma_n^m(\nu_1)\sigma_n^m(\varepsilon^{\frac{3}{4}}) - \frac{(1+i)}{2}\sigma_n^m(\nu_3)\sigma_n^m(\varepsilon^{\frac{1}{4}}) \\ &= \frac{(i-1)(-i)^m}{2\varepsilon}\sigma_n^m(\nu_1)\varepsilon^{\frac{3}{4}} - \frac{(1+i)i^m}{2}\sigma_n^m(\nu_3)\varepsilon^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

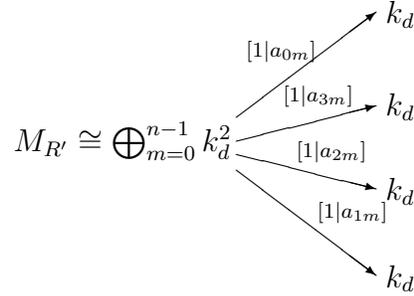
De la Observación 2.4.4 se sigue que $k_d \otimes M(R) \cong M_{R'}$. Se puede ver que cada entrada en la diagonal de R' tiene la forma:

$$\left(1 - \frac{(1-i)(-i)^m}{2}\right)\sigma_n^m(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \left(1 - \frac{(1+i)i^m}{2}\right)\sigma_n^m(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}}.$$

No es muy difícil ver que en general las entradas en la diagonal de la matriz $\sigma^j(R')$ tiene la forma

$$\left(i^j - (-1)^j \frac{(1-i)(-i)^m}{2}\right)\sigma_n^m(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \left((-i)^j - (-1)^j \frac{(1+i)i^m}{2}\right)\sigma_n^m(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}},$$

con $0 \leq m \leq n-1$ y $0 \leq j \leq 3$. Para esta demostración denotaremos a estos elementos por a_{jm} . Tenemos que



Además tenemos las igualdades

$$\begin{aligned} a_{0m} &= a_{1m} & \text{sí } m \equiv 0(\text{mod}4), \\ a_{1m} &= a_{2m} & \text{sí } m \equiv 1(\text{mod}4), \\ a_{2m} &= a_{3m} & \text{sí } m \equiv 2(\text{mod}4), \\ a_{3m} &= a_{0m} & \text{sí } m \equiv 3(\text{mod}4). \end{aligned}$$

Ahora es fácil demostrar que cada una de las representaciones en nuestra suma es isomorfa a M_0 , M_1 , $M_{(12\infty 3)}$ y $M_{(\infty 213)}$ si m es congruente con 0, 1, 2 y 3, respectivamente.

□

De esta observación se sigue que si $R \notin K[\alpha_n]_{\text{reg}}$, entonces no puede ser isomorfa a ninguna de las que aparecen en nuestro Cuadro 2.1.

Por otro lado, para cualquier $t \in \mathbb{C}((x))$, tenemos que $\sqrt{t} \in \mathbb{C}((x^{\frac{1}{2}}))$. Más precisamente:

Lema 2.4.7. *Sea $\mathbb{C}((x))$ el campo de series de Laurent sobre los complejos, para $t \in \mathbb{C}((x))$, existe $s \in \mathbb{C}((x))$ tal que*

$$t = \begin{cases} s^2 & \text{si } \text{codeg}(t) \text{ es par} \\ xs^2 & \text{si } \text{codeg}(t) \text{ es impar} \end{cases}$$

Demostración. Sea $t = \sum_{j=n_0}^{\infty} t_j x^j$, donde $t_j \in \mathbb{C}$ y $n_0 = \text{codeg}(t)$. Si $n_0 = 2m$, para

algún $m \in \mathbb{Z}$, es fácil ver que $s^2 = t$, con $s = \sum_{j=m}^{\infty} s_j x^j \in \mathbb{C}((x))$, y

$$s_{m+j} = \begin{cases} \sqrt{t_{n_0}} & j = 0 \\ \frac{t_{n_0+j} - (2 \sum_{k=1}^{r-1} s_{m+k} s_{j+m-k} + s_{m+r}^2)}{2s_m} & j = 2r, r \geq 1 \\ \frac{t_{n_0+j} - (2 \sum_{k=1}^r s_{m+k} s_{j+m-k})}{2s_m} & j = 2r + 1, r \geq 0. \end{cases}$$

Mientras que si n_0 es impar, tenemos que $t = x \sum_{j=n_0-1}^{\infty} t_{j+1} x^j$. Ahora como $n_0 - 1$ es par, podemos encontrar la correspondiente raíz de $\sum_{j=n_0-1}^{\infty} t_{j+1} x^j$. \square

Para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ definimos los siguientes subconjuntos de k_n :

$$I_n^{(1)} = \begin{cases} k_n \setminus \{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ k_n & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{4} \end{cases}, \quad (2.12)$$

$$I_n^{(2)} = \begin{cases} k_n \setminus \{0\} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \\ \{\varepsilon^{-\frac{n-2}{4}} \mathbb{C}[\varepsilon^{\frac{1}{n}}]\} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} \quad (2.13)$$

Ahora denotaremos para cada $s \in k_n$ y $j \in \{1, 2\}$ por $M_n^{(j)}(s)$ la representación de Λ la cual tiene por matriz $[\alpha_n^0 | R_n^{(j)}(s)]$.

Finalmente definimos $\phi_n^{(j)} : I_n^{(j)} \rightarrow k_n$, $s \mapsto \phi_n(R_n^{(j)}(s))$ para $[\alpha_n^0 | R_n^{(j)}(s)]$.

Proposición 2.4.8. *Con la notación de arriba, tenemos para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ que:*

1. $k_n = \text{Im}(\phi_n^{(1)}) \dot{\cup} \text{Im}(\phi_n^{(2)})$ para $n \not\equiv 0 \pmod{4}$.
2. $k_n \setminus \{0\} = \text{Im}(\phi_n^{(2)})$ para $n \equiv 0 \pmod{4}$.

Demostración. 1. Si $n \equiv 1 \pmod{2}$ el resultado sigue del Lema 2.4.7.

Por otro lado, si $n \equiv 2 \pmod{4}$ es fácil ver que si $t \in \text{Im}(\phi_n^{(2)})$ la raíz $\sqrt{1 - 4t^2\varepsilon}$ no es un elemento de k_n . Concluimos que $\text{Im}(\phi_n^{(1)})$ y $\text{Im}(\phi_n^{(2)})$ son disjuntos. Sea $t \in k_n$ tal que $t \notin \text{Im}(\phi_n^{(2)})$, entonces

$$s = i \frac{1 + \sqrt{1 - 4t^2\varepsilon}}{2t} \in k_n.$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{is}{s^2 - \varepsilon} &= \frac{i \left(i \frac{1 + \sqrt{1 - 4t^2\varepsilon}}{2t} \right)}{\left(i \frac{1 + \sqrt{1 - 4t^2\varepsilon}}{2t} \right)^2 - \varepsilon} \\
&= \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4t^2\varepsilon}}{2t} \right)}{\frac{(1 + 2\sqrt{1 - 4t^2\varepsilon} + 1 - 4t^2\varepsilon) + 4t^2\varepsilon}{4t^2}} \\
&= \frac{4t^2(1 + \sqrt{1 - 4t^2\varepsilon})}{2t(2 + 2\sqrt{1 - 4t^2\varepsilon})} \\
&= t.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $k_n = \text{Im}(\phi_n^{(1)}) \cup \text{Im}(\phi_n^{(2)})$.

2. Si $n \equiv 0 \pmod{4}$. Para $t \in k_n \setminus \{0\}$ podemos escoger $s = \frac{-i + t\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{t} \in k_n \setminus \{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{-i}{s - \varepsilon^{\frac{1}{2}}} &= \frac{-i}{\frac{-i + t\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{t} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{-i}{\frac{-i + t\varepsilon^{\frac{1}{2}} - t\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{t}} \\
&= t
\end{aligned}$$

Por lo tanto $k_n \setminus \{0\} = \text{Im}(\phi_n^{(2)})$.

□

2.5. Clasificación de las representaciones regulares simples

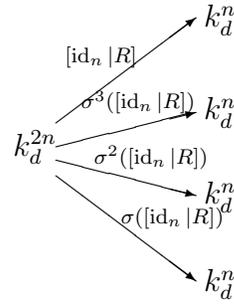
Sea $R = \sum_{j=0}^4 \alpha(\nu_j)\varepsilon^{\frac{j}{4}} \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$ tal que $\phi_n(R) \in k_n$ es genérico, denotamos por

$$N_{\phi_n(R)} := \bigoplus_{j=0}^{n-1} \gamma_d^j M_{\frac{1}{2} - i\phi_n(R)\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \cong \bigoplus_{j=0}^{n-1} M_{\frac{1}{2} - i\sigma_n^j(\phi_n(R))\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.$$

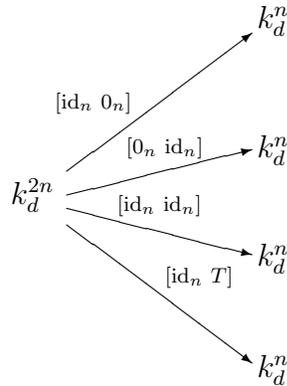
En la siguiente Proposición veremos que para cada $R \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$ tal que $\phi_n(R) \in k_n$ es genérico, entonces la representación $M(R)$ de Λ cuya matriz es $[\text{id}_n | R]$ satisface $k_d \otimes_k M(R) \cong N_{\phi_n(R)}$, por lo tanto es regular simple.

Proposición 2.5.1. *Sea $R \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$ tal que $\phi_n(R) \in k_n$ es genérico. Entonces la representación $M(R)$ de Λ es regular simple.*

Demostración. Sea $R \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$ tal que $\phi_n(R) \in k_n$ es genérico. Como en el comienzo del Capítulo 2, uno puede pensar en $k_d \otimes M(R)$ como la siguiente representación del carcaj \tilde{D}_4 :



Similarmente podemos ver a $N_{\phi_n(R)}$ como



con $T := \text{diag}(\frac{1}{2} - i\phi_n(R)\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} - i\sigma_n(\phi_n(R))\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \dots, \frac{1}{2} - i\sigma_n^{n-1}(\phi_n(R))\varepsilon^{\frac{1}{2}})$.

Sea A la matriz definida en la prueba del Lema 2.4.2 y $\phi : k_d \otimes M(R) \rightarrow N_{\phi_n(R)}$

el morfismo definido por

$$\phi := \begin{pmatrix} (R - \sigma^3(R))B \\ (\sigma^3(R) - R)A \\ (\sigma^2(R) - R)A \\ (\sigma(R) - \sigma^3(R))B \\ \begin{bmatrix} -\sigma^3(R)B & -RA \\ B & A \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

donde $B = (\sigma^2(R) - \sigma^3(R))^{-1}(\sigma^2(R) - R)A$. Afirmamos que ϕ es un isomorfismo entre $k_d \otimes_k M(R)$ y $N_{\phi_n(R)}$. Dado que $R \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$ (y por la Observación 2.4.3 y por como definimos a la matriz A , tenemos que todas las matrices involucradas en la construcción de ϕ son invertibles.

Ahora sólo necesitamos mostrar que los correspondientes diagramas conmutan.

Por nuestras elecciones, tenemos que los primeros tres diagramas conmutan:

$$\begin{aligned} [\text{id}_n | R] \begin{bmatrix} -\sigma^3(R)B & -RA \\ B & A \end{bmatrix} &= [(R - \sigma^3(R))B][\text{id}_n \ 0_n], \\ \sigma^3([\text{id}_n | R]) \begin{bmatrix} -\sigma^3(R)B & -RA \\ B & A \end{bmatrix} &= [(\sigma^3(R) - R)A][0_n \ \text{id}_n], \\ \sigma^2([\text{id}_n | R]) \begin{bmatrix} -\sigma^3(R)B & -RA \\ B & A \end{bmatrix} &= [(\sigma^2(R) - R)A][\text{id}_n \ \text{id}_n]. \end{aligned}$$

Por la último, tenemos que

$$\begin{aligned} & B^{-1}(\sigma(R) - \sigma^3(R))^{-1}(\sigma(R) - R)A \\ &= A^{-1}(\sigma^2(R) - R)^{-1}(\sigma^2(R) - \sigma^3(R))(\sigma(R) - \sigma^3(R))^{-1}(\sigma(R) - R)A \quad \text{def. de } B \\ &= A^{-1}(\sigma(R) - R)(\sigma^3(R) - \sigma^2(R))[(\sigma^2(R) - R)(\sigma^3(R) - \sigma(R))]^{-1}A \quad \text{conm. de } K[\alpha_n] \\ &= A^{-1} \left(\frac{1}{2} \text{id}_n - i\varepsilon^{\frac{1}{2}} (\alpha(\nu_2^2) - \alpha(\nu_1)\alpha(\nu_3)) (\alpha(\nu_1^2) - \varepsilon\alpha(\nu_3^2))^{-1} \right) A \quad \text{ecuación (2.11)} \\ &= \frac{1}{2} \text{id}_n - i\varepsilon^{\frac{1}{2}} A^{-1} \left((\alpha(\nu_2^2) - \alpha(\nu_1)\alpha(\nu_3)) (\alpha(\nu_1^2) - \varepsilon\alpha(\nu_3^2))^{-1} \right) A \quad \text{distributividad} \\ &= \frac{1}{2} \text{id}_n - i\varepsilon^{\frac{1}{2}} \text{diag}(\phi_n(R), \sigma_n(\phi_n(R)), \dots, \sigma_n^{n-1}(\phi_n(R))) \quad \text{Lema 2.4.2} \end{aligned}$$

así $B^{-1}(\sigma(R) - \sigma^3(R))^{-1}(\sigma(R) - R)A = T$, es decir $(\sigma(R) - R)A = (\sigma(R) - \sigma^3(R))BT$, de donde se sigue la última igualdad

$$\sigma([\text{id}_n \mid R]) \begin{bmatrix} -\sigma^3(R)B & -RA \\ B & A \end{bmatrix} = [(\sigma(R) - \sigma^3(R))B][\text{id}_n \mid T].$$

Por lo que $k_d \otimes_k M(R) \cong N_{\phi_n(R)}$. Por lo tanto $M(R)$ es una representación regular simple de Λ . \square

Ahora, sean $M_{(1)}$ y $M_{(2)}$ las representaciones cuyas matrices son, respectivamente, $[1 \ \varepsilon^{\frac{1}{2}}]$ y $[\text{id}_2 \mid \alpha_2 \varepsilon^{\frac{1}{4}} - i \text{id}_2 \ \varepsilon^{\frac{3}{4}}]$. Con unos sencillos cálculos uno puede verificar lo siguiente

Proposición 2.5.2. *Sean $N_1 \oplus {}^\gamma N_1$ y $N_2 \oplus {}^\gamma N_2 \oplus {}^{\gamma^2} N_2 \oplus {}^{\gamma^3} N_2$ las representaciones vistas en 2.3.3. Entonces*

$$N_1 \oplus {}^\gamma N_1 \cong K \otimes_k M_{(1)} \text{ y}$$

$$N_2 \oplus {}^\gamma N_2 \oplus {}^{\gamma^2} N_2 \oplus {}^{\gamma^3} N_2 \cong K \otimes_k M_{(2)},$$

más aún, $M_{(1)}$ y $M_{(2)}$ son representaciones regulares simples.

Corolario 2.5.3. *Existe una correspondencia 1-1 entre las clases de isomorfismo de las representaciones regulares simples de Λ y las clases de isomorfismos de las representaciones ii-inescindibles de \tilde{D}_4 .*

Demostración. El resultado se sigue de las Proposiciones 2.3.4, 2.5.1 and 2.5.2. \square

Teorema 2.5.4. *Con la notación de arriba, tenemos para cada $n \in \mathbb{Z}_{>0}$:*

1. *Para $R \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$ la representación $M(R)$ de Λ es regular simple si y sólo si $\phi_n(R) \in k_n$ es genérico. En este caso $\text{End}_\Lambda(R) \cong k_n$.*

Si $R, R' \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$, entonces $M(R) \cong M(R')$ si y sólo si $\phi_n(R) = \sigma_n^m(\phi_n(R'))$ para alguna $1 \leq m \leq n - 1$.

2. *Las representaciones $M_{(1)}$ y $M_{(2)}$ son regulares simples, con $\text{End}_\Lambda(M_{(1)}) \cong k_2$ y $\text{End}_\Lambda(M_{(2)}) \cong k_4$.*

3. Cada representación regular simple de Λ es isomorfa a una del tipo que aparece en 1. o 2.

Demostración. 1. La primera parte se sigue de las Proposiciones 2.3.4 y 2.5.1. La segunda parte se sigue del hecho de que para cualquier $R \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$ tenemos $N_{\phi_n(R)} \cong \bigoplus_{j=0}^{n-1} M_{\frac{1}{2}-i\sigma_n^j(\phi_n(R))\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$. Si $R, R' \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$, tenemos que

$$M(R) \cong M(R')$$

si y sólo si

$$N_{\phi_n(R)} \cong N_{\gamma_n(R')}$$

si y sólo si

$$\bigoplus_{j=0}^{n-1} M_{\frac{1}{2}-i\sigma_n^j(\phi_n(R))\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \cong \bigoplus_{j=0}^{n-1} M_{\frac{1}{2}-i\sigma_n^j(\gamma_n(R'))\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$$

si y sólo si

$$\phi_n(R) = \sigma_n^m(\phi_n(R'))$$

para algún $1 \leq m \leq n-1$.

2. Se tiene de la Proposición 2.5.2.
3. Se sigue del Corolario 2.5.3.

□

Observación 2.5.5. Un hecho interesante es que casi cualquier representación regular simple M con $\underline{\dim}M = (n, 2n)$ satisface que $\text{End}_{\Lambda}(M) \cong k_n$, excepto cuando $M \cong M_{(1)}$ ó $M \cong M_{(2)}$ en estos casos $\text{End}_{\Lambda}(M) \cong k_2$ y $\text{End}_{\Lambda}(M) \cong k_4$ respectivamente. Es decir, $\text{End}_{\Lambda}(M_{(j)}) \cong k_{2^j}$ mientras $\underline{\dim}M_{(j)} = (j, 2j)$ para $j = 1, 2$.

Teorema 2.5.6. Si M es una representación regular simple \tilde{D}_4 -homogénea de Λ con $\underline{\dim}M = (n, 2n)$, entonces M es isomorfa a una representación de la forma $M_n^{(j)}(s)$ con $s \in I_n^{(j)}$ para alguna $j \in \{1, 2\}$.

Demostración. Sea M una representación regular simple \tilde{D}_4 -homogénea de Λ con $\dim M = (n, 2n)$. De la definición de \tilde{D}_4 -homogénea y el Teorema 2.5.4 inciso 3 se sigue que existe $R \in K[\alpha_n]_{\text{reg}}$ tal que $M \cong M(R)$, para algún $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Por la proposición 2.4.8 tenemos que cada elemento de $k_n \setminus \{0\}$ pertenece a $\text{Im}(\phi_n^{(j)})$, para $j \in \{1, 2\}$. Así existe $s \in k_n$ tal que

$$\phi_n^{(j)}(s) = \sigma_n^m(\phi_n(R)),$$

para alguna $m \in \{1, \dots, n\}$. Se concluye que

$$M_n^{(j)} = M(R_n^{(j)}(s)) \cong M(R).$$

□

Observación 2.5.7. Usando los Teoremas 2.5.4 y 2.5.6 podemos concluir que cualquier representación regular simple es isomorfa a una de las siguientes formas $M_{(1)}$, $M_{(2)}$ o $M_n^{(j)}(s)$, donde $[\text{id}_n | R_n^{(j)}(s)]$ es la matriz de la última representación, con $s \in k_n$ tal que $\phi_n[R_n^{(j)}(s)]$ (ver Cuadro 2.1) es genérico.

En los siguientes ejemplos veremos como es la forma de las matrices $R_3^{(1)}(1)$ y $R_2^{(1)}(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}})$:

Ejemplo 2.5.8. 1. Consideremos $s = 1 \in k_3$, siguiendo el Cuadro 2.1, tenemos que

$$R_3^{(1)}(1) = \alpha(1)\alpha_3^2\varepsilon^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{\pi i}{4}} \text{id}_3 \varepsilon^{\frac{3}{4}} = \begin{bmatrix} e^{\frac{\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} & 0 & \varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ \varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{2}} & e^{\frac{\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & \varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{2}} & e^{\frac{\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \end{bmatrix} = \alpha(\varepsilon^{\frac{2}{3}})\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha(e^{\frac{\pi i}{4}})\varepsilon^{\frac{3}{4}}$$

así

$$\phi_3(R_3^{(1)}(1)) = -i \frac{(\varepsilon^{\frac{2}{3}})^2 - (0)(e^{\frac{\pi i}{4}})}{0^2 - e^{\frac{\pi i}{2}} \varepsilon} = -i \frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{-i\varepsilon} = \varepsilon^{\frac{1}{3}}.$$

Paridad de n	j	$R_n^{(j)}(s)$	$\phi_n[R_n^{(j)}(s)]$
$n \equiv 1 \pmod{2}$	1	$\alpha(s)\alpha_n^{\frac{n+1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{\pi i}{4}}\text{id}_n\varepsilon^{\frac{3}{4}}$	$\varepsilon^{\frac{1}{n}}s^2$
$n \equiv 1 \pmod{2}$	2	$e^{\frac{3}{4}\pi i}\text{id}_n\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(s)\varepsilon^{\frac{1}{2}}$	s^2
$n \equiv 2 \pmod{4}$	1	$\alpha(s)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \text{id}_n\varepsilon^{\frac{3}{4}}$	$i\frac{s}{s^2-\varepsilon}$
$n \equiv 2 \pmod{4}$	2	$i\alpha_n^{\frac{n}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{4}} + (1-i)\alpha(s)\alpha_n^{\frac{n}{2}+1}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \text{id}_n\varepsilon^{\frac{3}{4}}$	$\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{-1}{2}} + (\varepsilon^{\frac{1}{n}}s)^2$
$n \equiv 0 \pmod{4}$	1	$\alpha(s)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha_n^{\frac{n}{4}}\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \text{id}_n\varepsilon^{\frac{3}{4}}$	$\frac{-i}{s-\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$

Cuadro 2.1: Ingredientes para la descripción de las representaciones regulares simples homogéneas.

2. Si tomamos $s = 1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \in k_2$, tenemos que

$$R_2^{(1)}(s) = \alpha(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}})\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \text{id}_2\varepsilon^{\frac{3}{4}} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} & -\varepsilon^{\frac{1}{4}} \\ -\varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{4}} & \varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}} \end{bmatrix} = \alpha(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}})\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(1)\varepsilon^{\frac{3}{4}}$$

así

$$\begin{aligned}
 \phi_2(R_2^{(1)}(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}})) &= -i \frac{(0)^2 - (1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}})(1)}{(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}})^2 - \varepsilon} \\
 &= i \frac{1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}}{(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}})^2 - \varepsilon} \\
 &= i \frac{1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}}{1 - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
 &= i(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}) \left(\sum_{j=0}^{\infty} (4\varepsilon)^j \right) (1 + 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \\
 &= i \left(\sum_{j=0}^{\infty} (4\varepsilon)^j \right) ([1 - 2\varepsilon] + \varepsilon^{\frac{1}{2}}).
 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Las álgebras canónicas de los bimódulos de tipo $(1, 4)$.

Ahora que ya tenemos la clasificación de las representaciones regulares simples, obtenida en 2.5, podemos continuar con la definición de álgebras canónicas [12].

Para esto, lo primero es poder describir la función adjunta asociada a cada una de las representaciones regulares simples. Sea $M = (\varphi_M, V, U)$, la función adjunta involucra diferentes elementos de M , como lo son D (el anillo de endomorfismos), V^+ (el kernel) y $U^* = \text{Hom}_k(U, k)$. Todos estos elementos así como una base de $V^+ \otimes_D U^+$ son descritos en el Cuadro 3.1, según el tipo de representación y la correspondiente n .

En el Cuadro 3.2, usando la base elegida para $V^+ \otimes_D U^+$, damos la definición explícita de las funciones adjuntas de cada uno de los casos posibles de las representaciones homogéneas regulares simples.

Para cada representación regular simple podemos definir una matriz de Cartan simetrizable y su correspondiente simetrizador, ver Sección 3.4. Para las matrices de Cartan correspondientes a las representaciones $M_{(1)}$ y $M_{(2)}$, definimos unas nuevas relaciones “torcidas” que difieren a las relaciones [6]. Esos dos son los únicos casos con relaciones diferentes, en el resto de los casos tomamos las relaciones de [6], ver

Observación 3.4.1.

Finalmente, definimos las álgebras canónicas generalizadas en términos de carcajes con relaciones. Para esto, mezclamos la definición de álgebras canónicas de Ringel [12] con las ideas usadas en [6] (para definir $H(C, D, \Omega)$).

3.1. La definición de Ringel

En esta sección revisaremos la definición de álgebras canónicas dada por Ringel en [12, §1], y la adaptaremos a nuestro caso particular.

Recordemos que $k := \mathbb{C}((\varepsilon))$ es un campo cuasi-finito conmutativo. Las álgebras de división que consideraremos serán k -álgebras de dimensión finita, todas ellas son de la forma $k_n := k[\varepsilon^{\frac{1}{n}}]$ para algún $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Tomaremos bimódulos para los cuales k actúa centralmente. La categoría de estos k_a - k_b -bimódulos es equivalente a la categoría de $k_a \otimes_k k_b$ -módulos izquierdos.

Si X es un k_a - k_b -bimódulo, y σ_a es un automorfismo de k_a , definimos el bimódulo ${}^{\sigma_a}X$ con multiplicación izquierda definida como $y * x := \sigma_a(y)x$ para cualesquiera $x \in X$, $y \in k_a$ y con multiplicación derecha la multiplicación usual de X_{k_b} . Podemos definir de forma similar X^{σ_b} como un k_a - k_b -bimódulo.

De hecho, por las observaciones hechas arriba, tenemos que la categoría de k - K -bimódulos donde k actúa centralmente es equivalente a la categoría de $k \otimes_k K$ -módulos izquierdos.

Vale la pena recordar que $k_a \otimes_k k_b$ es isomorfo a $k_{\text{mcm}(a,b)} \times \cdots \times k_{\text{mcm}(a,b)}$ $\text{mcd}(a, b)$ -veces, como k -álgebras, ver Sección 2.1. Así, la categoría de k_a - k_b -bimódulos es semi-simple con $\text{mcd}(a, b)$ -isoclasas de objetos simples.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $X = {}_aX_b$ un k_a - k_b -bimódulo, tal que $\dim({}_{k_a}X) \dim(X_{k_b}) = 4$. Entonces es fácil de ver que sólo dos casos son posibles:

1. $k_a = K$, $k_b = k$ y $X = K$.

2. $k_a = k_b$ y $X = k_a \oplus \sigma^a k_a$, para algún $a \in \mathbb{Z}_{>0}$.

En nuestro trabajo sólo consideraremos el primer caso.

Denotamos por Φ al conjunto de las clases de isomorfismos de representaciones regulares simples de X . Sea $T : \Phi \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ una función definida por $T(M) = 1$ para casi toda $M \in \Phi$.

Sean M_1, M_2, \dots, M_t elementos de Φ no isomorfos por pares que satisfacen $l_i := T(M_i) > 1$. Consideremos M_i como una representación de X , con $\underline{\dim} M_i = (n_i, 2n_i)$ y $\varphi_i : K \otimes_k k^{2n_i} \rightarrow K^{n_i}$ un morfismo K -lineal. Sea k_{m_i} el anillo de endomorfismos de la representación M_i , recordemos que $m_i = n_i$ si M_i es homogéneo y $m_i = 2n_i$ si M_i no es homogéneo. Tenemos que k^{2n_i} es un k - $k_{m_i}^{\text{op}}$ -bimódulo, K^{n_i} es un K - $k_{m_i}^{\text{op}}$ -bimódulo, entonces φ_i es un morfismo K - $k_{m_i}^{\text{op}}$ -lineal. Sea $M_i^+ : V_i^+ \rightarrow K \otimes_k k^{2n_i}$ el kernel del morfismo φ_i . Entonces V_i^+ también es un K - $k_{m_i}^{\text{op}}$ -bimódulo, y M_i^+ es un morfismo K - $k_{m_i}^{\text{op}}$ -lineal. Como k^{2n_i} es un k - $k_{m_i}^{\text{op}}$ -bimódulo, $U_i^* := \text{Hom}_k(k^{2n_i}, k)$ es un $k_{m_i}^{\text{op}}$ - k -bimódulo, y podemos considerar la función adjunta $\widetilde{M}_i : V_i^+ \otimes_{k_{m_i}} U_i^* \rightarrow K$ de M_i^+ , donde

$$(x \otimes y) \otimes f \mapsto xf(y), \text{ para } x \otimes y \in V_i^+, f \in U_i^*.$$

En la siguiente sección veremos que la función \widetilde{M} es suprayectiva para cualquier $M \in \Phi$. Siguiendo a Ringel, consideraremos la especie $\mathcal{S} = \mathcal{S}(T)$ que es representada por el carcaj decorado en la Figura 3.1. Sea \mathcal{T} el álgebra tensorial de \mathcal{S} . Sea \mathcal{R} el ideal de \mathcal{T} el cual es generado por los elementos de la forma

$$v \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{l_i-2} \otimes u - \sum_{r \in J} v_r \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{l_1-2} \otimes u_r$$

con $v \in V_i^+$, $u \in U_i^*$, J un conjunto finito y los elementos $v_r \in V_1^+$, $u_r \in U_1^*$, tales que

$$\widetilde{M}_i(v \otimes u) = \sum_{r \in J} \widetilde{M}_1(v_r \otimes u_r).$$

Los generadores de \mathcal{R} son elementos de

$$(V_i^+ \otimes k_{m_i} \otimes \dots \otimes k_{m_i} \otimes U_i^*) \oplus (V_1^+ \otimes k_{m_1} \otimes \dots \otimes k_{m_1} \otimes U_1^*).$$

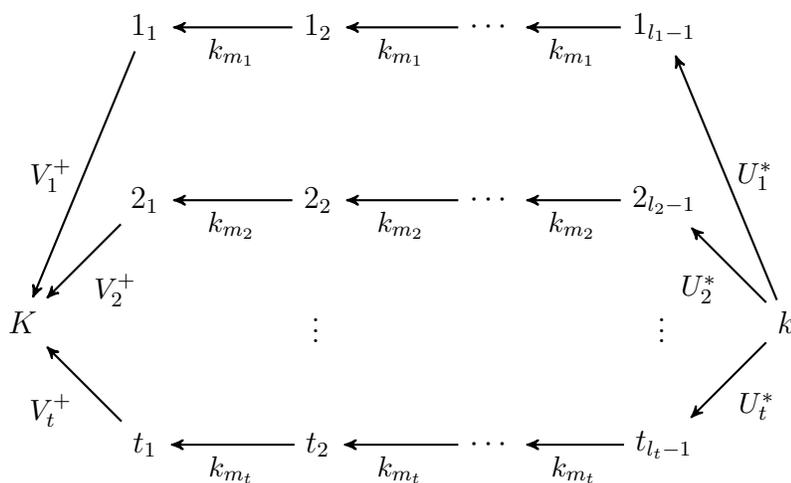


Figura 3.1: “Carcaj decorado” de un álgebra canónica

La **álgebra canónica de tipo T** (sobre K) es, por definición, $C = C(T) = \mathcal{T}/\mathcal{R}$.

Observación 3.1.1. Notemos que las relaciones dependen de las clases de isomorfía de los simples regulares, mientras que las especies dependen esencialmente de las dimensiones de los simples regulares.

3.2. Funciones adjuntas.

Ahora, queremos describir las álgebras canónicas asociadas a la especie de tipo (1, 4) sobre el campo $k = \mathbb{C}((\varepsilon))$. Siguiendo a Ringel [12] la principal tarea para este fin es describir, para el morfismo $\varphi_M \in \text{Hom}(K \otimes U, V)$ de una representación regular M con anillo de endomorfismo D , la función adjunta $\widetilde{M} : V^+ \otimes_D U^* \rightarrow K$ donde $U^* := \text{Hom}_k(U, k)$ y $M^+ : V^+ \rightarrow K \otimes U$ es el kernel de M . Recordemos que en nuestro caso particular tenemos que $D \cong k_m$ para algún $m = n$ ó $2n$, $U \cong k^{2n}$ y $V \cong K^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, ver §1.7. Como mencionamos en la sección anterior, por construcción V^+ es un K - D^{op} -bimódulo y U^* es un D^{op} - k -bimódulo. Dado que D es isomorfo a k_m y este es un anillo conmutativo tenemos que $D^{\text{op}} = D$. Como mencionamos en

la Observación 2.5.7, cualquier representación regular simple es isomorfa a una que tiene alguna de las siguientes formas:

1. $M_{(1)}$ es la representación definida por la matriz $[1 \ \varepsilon^{\frac{1}{2}}]$.
2. $M_{(2)}$ es la representación definida por la matriz $[\text{id}_2 \mid \alpha_2 \varepsilon^{\frac{1}{4}} - i \text{id}_2 \varepsilon^{\frac{3}{4}}]$.
3. $M_n^{(j)}(s)$ es la representación cuya matriz es $[\text{id}_n \mid R_n^{(j)}(s)]$, y tal que $\phi_n(R_n^{(j)}(s))$ es genérico. Recordemos que $\phi_n(R_n^{(j)}(s)) = -i \frac{\nu_2^2 - \nu_1 \nu_3}{\nu_1^2 - \nu_3^2} \varepsilon$. Con

$$R_n^{(j)}(s) = \alpha(\nu_1) \varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(\nu_2) \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha(\nu_3) \varepsilon^{\frac{3}{4}},$$

la forma de $R_n^{(j)}(s)$ está descrita en el Cuadro 2.1, con $s \in k_n$.

Entonces tenemos tres casos y el último de ellos tiene cinco subcasos.

M	n	D	U^*	V^+	B una base de $V^+ \otimes_D U^*$
$M_{(1)}$	1	k_2	k_2	K^σ	$\{\beta'_0 \otimes e_1\}$
$M_{(2)}$	2	K	K	$K^\sigma \times K^{\sigma^2}$	$\{\beta'_0 \otimes e_1, \beta'_1 \otimes e_1\}$
$M_n^{(r)}(s)$	$n \equiv 1 \pmod{2}$	k_n	$k_n \times k_n$	k_{4n}	$\{\beta'_j \otimes e_i\}_{\substack{0 \leq j \leq n-1, \\ i \in \{1, 2\}}}$
$M_n^{(r)}(s)$	$n \equiv 2 \pmod{4}$	k_n	$k_n \times k_n$	$k_{2n} \times k_{2n}$	$\{\beta'_{j,l} \otimes e_i\}_{\substack{l \in \{0,1\}, i \in \{1,2\}, \\ 0 \leq j \leq \frac{n-2}{2}}}$
$M_n^{(r)}(s)$	$n \equiv 0 \pmod{4}$	k_n	$k_n \times k_n$	$k_n \times k_n \times k_n \times k_n$	$\{\beta'_{j,l} \otimes e_i\}_{\substack{0 \leq l \leq 3, i \in \{1,2\}, \\ 0 \leq j \leq \frac{n-4}{4}}}$

Cuadro 3.1: Configuración para la definición de la función adjunta de una representación regular simple en la Proposición 3.2.1. Abusando de la notación denotaremos al 1, en los casos que $M \cong M_{(1)}$ o $M_{(2)}$, como e_1 .

Proposición 3.2.1. *Sea M una representación regular simple de Λ . Entonces los siguientes casos cubren todas las posibles funciones adjuntas.*

1. Si M es isomorfa a $M_{(1)}$, entonces la función adjunta $\widetilde{M}_{(1)}$ está definida por $\beta_0 \otimes 1 \mapsto \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, donde $\beta'_0 := \varepsilon^{\frac{1}{2}} \otimes \tilde{e}_1 - 1 \otimes \tilde{e}_2$.

2. Si M es isomorfa a $M_{(2)}$, entonces la función adjunta $\widetilde{M}_{(2)}$ esta definida por

$$\beta'_0 \otimes 1 \mapsto \varepsilon^{\frac{-1}{2}} \quad \text{y} \quad \beta'_1 \otimes 1 \mapsto -\varepsilon^{\frac{-1}{2}},$$

donde $\beta'_j := \beta_0 + (i)^{j+1} \varepsilon^{\frac{1}{4}} \beta_1$, con

$$\beta_0 := -i\varepsilon^{\frac{-1}{2}} \otimes \tilde{e}_1 + (1+i)\varepsilon^{\frac{-1}{4}} \otimes \tilde{e}_2 - 1 \otimes \tilde{e}_3 \quad \text{y}$$

$$\beta_1 := (1-i)\varepsilon^{\frac{-3}{4}} \otimes \tilde{e}_1 + i\varepsilon^{\frac{-1}{2}} \otimes \tilde{e}_2 - 1 \otimes \tilde{e}_4.$$

3. Si M es isomorfa a $M_n^{(j)}(s)$ cuya matriz es $[\text{id}_n | R_n^{(j)}(s)]$, donde $R_n^{(j)}(s)$ es como en el Cuadro 2.1, para alguna $s = \sum_{j=0}^{n-1} s_j \varepsilon^{\frac{j}{n}} \in k_n$. En los siguientes cinco subcasos consideraremos

$$\beta_0 := \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=1}^3 \nu_{j, n-i} \varepsilon^{\frac{j}{4}} \right) \otimes \tilde{e}_i - 1 \otimes \tilde{e}_{2n}$$

y $\beta_l = \beta_0 * \varepsilon^{\frac{l}{n}}$ para $1 \leq l \leq n-1$. Para estos casos la función adjunta de M aparece en el Cuadro 3.2.

Demostración. Verificaremos nuestras fórmulas caso por caso, de acuerdo a la clasificación de las representaciones regulares simples en el Teorema 2.5.4:

1. Sea $\varphi_{M_{(1)}} : K \otimes k^2 \rightarrow K$ la representación definida por $1 \otimes \tilde{e}_1 \mapsto 1$ y $1 \otimes \tilde{e}_2 \mapsto \varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Tenemos que

$$D = \left\{ \left(\left[\begin{array}{cc} a & \varepsilon b \\ b & a \end{array} \right], a + b\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right) \mid a, b \in k \right\} \cong k_2.$$

Recordemos que $U^* \cong k^2$ y la multiplicación que lo hace D -módulo izquierdo es

$$\left(\left[\begin{array}{cc} a & \varepsilon b \\ b & a \end{array} \right], a + b\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right) * \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \varepsilon b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by & \varepsilon ay + bx \end{bmatrix}$$

M	\widetilde{M}	$\beta'_{j,l}$'s
$M_n^{(1)}(s)$ y $n \equiv 1 \pmod{2}$	$\beta'_{j,0} \otimes e_1 \mapsto \begin{cases} s_{\frac{n-3}{2}-j} \varepsilon^{\frac{1}{2}} & 0 \leq j \leq \frac{n-3}{2} \\ s_{3\frac{n-1}{2}-j} \varepsilon^{\frac{3}{2}} + \delta_{n-1,j} e^{\frac{\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} & \frac{n+1}{2} \leq j \leq n-1. \end{cases}$ $\beta'_{j,0} \otimes e_2 \mapsto -\delta_{n-1,j}$	$\beta'_{j,0} = \beta'_j$
$M_n^{(2)}(s)$ y $n \equiv 1 \pmod{2}$	$\beta'_{j,0} \otimes e_1 \mapsto \delta_{0,n-(j+1)} e^{\frac{3\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{1}{4}} + s_{n-(j+1)} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ $\beta'_{j,0} \otimes e_2 \mapsto -\delta_{n-1,j}$	$\beta'_{j,0} = \beta'_j$
$M_n^{(1)}(s)$ y $n \equiv 2 \pmod{4}$	$\beta'_{j,l} \otimes e_1 \mapsto \frac{(s_{n-(j+1)} + (-1)^l \delta_{\frac{n-2}{2},j}) \varepsilon^{\frac{1}{4}} + (-1)^l s_{\frac{n}{2}-(j+1)} \varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2}$ $\beta'_{j,l} \otimes e_2 \mapsto \frac{(-\delta_{\frac{n-2}{2},j})^{l+1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{2}$	$\frac{1}{2} \left(\beta_j + (-1)^l \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \beta_{\frac{n+2j}{2}} \right)$ $0 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, l \in \{0,1\}$
$M_n^{(2)}(s)$ y $n \equiv 2 \pmod{4}$	$\beta'_{j,l} \otimes e_1 \mapsto \begin{cases} \frac{(1-i)(s_{\frac{n}{2}-(2+j)} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + (-1)^l s_{n-(2+j)} \varepsilon)}{2} & 0 \leq j \leq \frac{n-4}{2} \\ \frac{(1-i)(s_{n-1} \varepsilon^{\frac{3}{2}} + (-1)^l s_{\frac{n-2}{2}} \varepsilon) + (i + (-1)^l) \varepsilon^{\frac{1}{4}}}{2} & j = \frac{n-2}{2} \end{cases}$ $\beta'_{j,l} \otimes e_2 \mapsto \frac{(-\delta_{\frac{n-2}{2},j})^{l+1} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{2}$	$\frac{1}{2} \left(\beta_j + (-1)^l \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \beta_{\frac{n+2j}{2}} \right)$ $0 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, l \in \{0,1\}$
$M_n^{(1)}(s)$ y $n \equiv 0 \pmod{4}$	$\beta'_{j,l} \otimes e_1 \mapsto \frac{1}{4} \left[\left(\sum_{r=0}^3 i^{lr} s_{\frac{n(4-r)}{4}-(j+1)} \varepsilon^{\frac{1-r}{4}} \right) + \delta_{\frac{n-4}{4},j} i^{2l} (1-i) \right]$ $\beta'_{j,l} \otimes e_2 \mapsto \frac{i^{6-l} \delta_{\frac{n-4}{4},j} \varepsilon^{-\frac{3}{4}}}{4}$	$\frac{1}{4} \left(\beta_j + i^l \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \beta_{\frac{n}{4}+j} + i^{2l} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \beta_{\frac{n}{2}+j} + i^{3l} \varepsilon^{-\frac{3}{4}} \beta_{\frac{3n}{4}+j} \right)$ $0 \leq j \leq \frac{n-4}{4}, 0 \leq l \leq 3$

Cuadro 3.2: Función adjunta de una representación homogénea regular simple. Aquí $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker.

Así es fácil ver que $U^* \cong k_2$ como D - k -bimódulo, con la asignación $e_1 \mapsto \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ y $e_2 \mapsto 1$.

Claramente, V^+ es generado por $\beta'_0 := \varepsilon^{\frac{1}{2}} \otimes \tilde{e}_1 - 1 \otimes \tilde{e}_2$, como un K -módulo. Note que $\beta'_0 * (a + b\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = (a - b\varepsilon^{\frac{1}{2}})\beta'_0$, entonces $V^+ \cong K^\sigma$. Uno puede checar que $B := \{\beta'_0 \otimes 1\}$ es una K -base de $V^+ \otimes U^*$. Así $\widetilde{M}_{(1)} : V^+ \otimes U^* \rightarrow K$ es la función adjunta y esta definida por $\beta'_0 \otimes 1 \mapsto -1$.

2. Sea $\varphi_{M_{(2)}} : K \otimes k^4 \rightarrow K^2$ la representación regular simple definida como arriba. Se puede ver que $M_{(2)}$ es isomorfa a la representación definida por $1 \otimes \tilde{e}_1 \mapsto e_1$, $1 \otimes \tilde{e}_2 \mapsto e_2$, $1 \otimes \tilde{e}_3 \mapsto (-i\varepsilon^{\frac{-1}{2}}, (1+i)\varepsilon^{\frac{-1}{4}})$ y $1 \otimes \tilde{e}_4 \mapsto ((1-i)\varepsilon^{\frac{-3}{4}}, i\varepsilon^{\frac{-1}{2}})$. Tenemos que D es

$$\left\{ \left(\sum_{j=0}^3 x_j \alpha_4^j, \begin{bmatrix} x_0 + (1-i)x_1\varepsilon^{\frac{1}{4}} - ix_2\varepsilon^{\frac{1}{2}} & x_1 + (1-i)x_2\varepsilon^{\frac{1}{4}} - ix_3\varepsilon^{\frac{1}{2}} \\ \varepsilon x_3 + ix_1\varepsilon^{\frac{1}{2}} + (1+i)x_2\varepsilon^{\frac{3}{4}} & x_0 + ix_2\varepsilon^{\frac{1}{2}} + (1+i)x_3\varepsilon^{\frac{3}{4}} \end{bmatrix} \right) \mid x_j \in k \right\}$$

así $D \cong K$. Entonces $U^* \cong K$ como un D - k -bimódulo. Definamos

$$\beta_0 := -i\varepsilon^{\frac{-1}{2}} \otimes \tilde{e}_1 + (1+i)\varepsilon^{\frac{-1}{4}} \otimes \tilde{e}_2 - 1 \otimes \tilde{e}_3 \text{ y}$$

$$\beta_1 := (1-i)\varepsilon^{\frac{-3}{4}} \otimes \tilde{e}_1 + i\varepsilon^{\frac{-1}{2}} \otimes \tilde{e}_2 - 1 \otimes \tilde{e}_4,$$

entonces V^+ es generado por $\beta'_0 := \beta_0 + i\varepsilon^{\frac{1}{4}}\beta_1$ y $\beta'_1 := \beta_0 - \varepsilon^{\frac{1}{4}}\beta_1$, como un K -módulo. Dado que $\beta'_j * \varepsilon^{\frac{1}{4}} = i^{j+1}\varepsilon^{\frac{1}{4}} * \beta'_j$ tenemos que $V^+ \cong K^\sigma \times K^{\sigma^2}$.

Es fácil de ver que $B := \{\beta'_0 \otimes 1, \beta'_1 \otimes 1\}$ es una K -base de $V^+ \otimes U^*$.

Así $\widetilde{M}_{(2)} : V^+ \otimes U^* \rightarrow K$ es la función adjunta definida por

$$\beta'_0 \otimes 1 \mapsto \varepsilon^{\frac{-1}{2}} \text{ y } \beta'_1 \otimes 1 \mapsto -\varepsilon^{\frac{-1}{2}}.$$

3. Sea $M_n^{(j)}(s)$ la representación cuya matriz es $[\text{id}_n \mid R_n^{(j)}(s)]$, tal que $\phi_n(R_n^{(j)}(s))$ es genérico. Con $R_n^{(j)}(s) = \alpha(\nu_1)\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \alpha(\nu_2)\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha(\nu_3)\varepsilon^{\frac{3}{4}}$ como en el Cuadro 2.1, donde $s = \sum_{j=0}^{n-1} s_j \in k_n$. Dado que

$$D = \left\{ \left(\left[\begin{array}{cc} \alpha(\nu) & 0 \\ 0 & \alpha(\nu) \end{array} \right], \alpha(\nu) \right) \mid \nu \in k_n \right\} \cong k_n,$$

tenemos que $U^* \cong k_n \times k_n$ como un D - k -bimódulo.

Recordemos que $\nu_i = \sum_{j=0}^{n-1} \nu_{ij} \varepsilon^{\frac{j}{n}} \in k_n$, definimos

$$a_j := \nu_{1j} \varepsilon^{\frac{1}{4}} + \nu_{2j} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \nu_{3j} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \in K$$

para $0 \leq j \leq n-1$, y $\beta_l = \beta_0 * \varepsilon^{\frac{l}{n}}$ for $1 \leq l \leq n-1$, donde β_0 es

$$\beta_0 := \sum_{i=1}^n a_{n-i} \otimes \tilde{e}_i - 1 \otimes \tilde{e}_{2n}.$$

Ahora vamos a distinguir varios subcasos de acuerdo a la paridad de n modulo 4.

- a) Sea $n \equiv 1 \pmod{2}$. Se puede ver que V^+ es generado por $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$, como un K -módulo, más aún $V^+ \cong k_{4n}$ (ver Lema 2.4.1). Ahora, para tener una notación homogénea denotaremos $\beta'_{j,0} := \beta_j$.

Después de algunas cuentas, se puede mostrar que

$$B = \{\beta'_{j,0} \otimes e_i \mid 0 \leq j \leq n-1, i \in \{1, 2\}\}$$

es una K -base de $V^+ \otimes_D U^*$. Así $\widetilde{M} : V^+ \otimes_D U^* \rightarrow K$ esta definido por

$$\begin{aligned} \beta'_{j,0} \otimes e_1 &\mapsto a_{n-(j+1)} \\ \beta'_{j,0} \otimes e_2 &\mapsto -\delta_{n-1j}. \end{aligned}$$

Más precisamente, tenemos que:

- Si $M = M_n^{(1)}(s)$, entonces

$$\beta'_{j,0} \otimes e_1 \mapsto \begin{cases} s_{\frac{n-3}{2}-j} \varepsilon^{\frac{1}{2}} & 0 \leq j \leq \frac{n-3}{2} \\ s_{3\frac{n-1}{2}-j} \varepsilon^{\frac{3}{2}} + \delta_{n-1j} e^{\frac{\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} & \frac{n-1}{2} \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

- Si $M = M_n^{(2)}(s)$, entonces $\beta'_{j,0} \otimes e_1 \mapsto \delta_{0n-(j+1)} e^{\frac{3\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{1}{4}} + s_{n-(j+1)} \varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

b) Sea $n \equiv 2 \pmod{4}$. Para $0 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ y $l \in \{0, 1\}$ definimos los elementos $\beta'_{j,l} := \frac{1}{2} \left(\beta_j + (-1)^l \varepsilon^{\frac{-1}{2}} \beta_{\frac{n+2j}{2}} \right)$ en V^+ . Dado que

$$\beta_j = \begin{cases} \beta'_{j,0} + \beta'_{j,1} & \text{para } 0 \leq j \leq \frac{n-2}{2} \\ \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\beta'_{j-\frac{n}{2},0} - \beta'_{j-\frac{n}{2},1}) & \text{para } \frac{n}{2} \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

se tiene que V^+ es generado por $\{\beta'_{j,l} | 0 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, l \in \{0, 1\}\}$, como un K -módulo. Con un razonamiento parecido al Lema 2.4.1, tenemos que $V^+ \cong k_{2n} \times k_{2n}$, con $\beta'_{j,l} \mapsto \varepsilon^{\frac{i}{n}} e_{l+1}$. Más aún, de nuestra definición de β_j 's, para $0 \leq j \leq \frac{n-4}{2}$ tenemos que $\beta'_{j,l} * \varepsilon^{\frac{1}{n}} = \beta'_{j+1,l}$ y $\beta'_{\frac{n-2}{2},l} * \varepsilon^{\frac{1}{n}} = \varepsilon \beta'_{0,l}$ entonces $V^+ \cong k_{2n} \times k_{2n}$ como K - k_n -bimódulos.

Es fácil comprobar que

$$B := \left\{ \beta'_{j,l} \otimes e_i \mid 0 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, l \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2\} \right\}$$

es una K -base de $V^+ \otimes_D U^*$. Así $\widetilde{M} : V^+ \otimes_D U^* \rightarrow K$ es la función adjunta definida por

$$\begin{aligned} \beta'_{j,l} \otimes e_1 &\mapsto \frac{a_{n-(j+1)} + (-1)^l a_{\frac{n}{2}-(j+1)} \varepsilon^{\frac{-1}{2}}}{2} \\ \beta'_{j,l} \otimes e_2 &\mapsto \frac{(-\delta_{\frac{n-2}{2},j})^{l+1} \varepsilon^{\frac{-1}{2}}}{2}. \end{aligned}$$

Más precisamente, tenemos que:

- Si $M = M_n^{(1)}(s)$, entonces

$$\beta'_{j,l} \otimes e_1 \mapsto \frac{\left(s_{n-(j+1)} + (-1)^l \delta_{\frac{n-2}{2},j} \right) \varepsilon^{\frac{1}{4}} + (-1)^l s_{\frac{n}{2}-(j+1)} \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\varepsilon}}{2}$$

- Si $M = M_n^{(2)}(s)$, entonces

$$\beta'_{j,l} \otimes e_1 \mapsto \begin{cases} \frac{(1-i) \left(s_{\frac{n}{2}-(2+j)} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + (-1)^l s_{n-(2+j)} \varepsilon \right)}{2} & 0 \leq j \leq \frac{n-4}{2} \\ \frac{(1-i) \left(s_{n-1} \varepsilon^{\frac{3}{2}} + (-1)^l s_{\frac{n-2}{2}} \varepsilon \right) + (i + (-1)^l) \varepsilon^{\frac{1}{4}}}{2} & j = \frac{n-2}{2} \end{cases}$$

c) Sea $n \equiv 0 \pmod{4}$. Para $0 \leq j \leq \frac{n-4}{4}$ definimos los elementos

$$\beta_{j,l} := \frac{1}{4} \left(\beta_j + i^l \varepsilon^{\frac{-1}{4}} \beta_{\frac{n}{4}+j} + i^{2l} \varepsilon^{\frac{-1}{2}} \beta_{\frac{n}{2}+j} + i^{3l} \varepsilon^{\frac{-3}{4}} \beta_{\frac{3n}{4}+j} \right),$$

con $0 \leq l \leq 3$. Al igual que antes es fácil ver que

$$\beta_j = \varepsilon^{\frac{r}{4}} \sum_{l=0}^3 i^{(4-l)r} \beta'_{j-\frac{rn}{4},l}$$

para $\frac{rn}{4} \leq j \leq \frac{(r+1)n}{4} - 1$, con $0 \leq r \leq 3$, así tenemos que V^+ es generado por $\{\beta'_{j,l} | 0 \leq j \leq \frac{n-4}{4}, 0 \leq l \leq 3\}$, como un K -módulo. Se sigue que $V^+ \cong k_n \times k_n \times k_n \times k_n$, donde $\beta'_{j,l} \mapsto \varepsilon^{\frac{j}{n}} e_{l+1}$. Más aún, nuevamente por la definición de los β_j 's tenemos que el isomorfismo de K - k_n -bimódulos.

Uno puede verificar que

$$B := \left\{ \beta'_{j,l} \otimes e_i \mid 0 \leq j \leq \frac{n-4}{4}, 0 \leq l \leq 3, i \in \{1, 2\} \right\}$$

es una K -base de $V^+ \otimes_D U^*$. En este caso la única opción para M es $M_n^{(1)}(s)$, así $\widetilde{M} : V^+ \otimes_D U^* \rightarrow K$, es la función adjunta definida por

$$\begin{aligned} \beta'_{j,l} \otimes e_1 &\mapsto \frac{1}{4} \left[\left(\sum_{r=0}^3 i^{lr} s_{\frac{n(4-r)}{4}-(j+1)} \varepsilon^{\frac{1-r}{4}} \right) + \delta_{\frac{n-4}{4},j} i^{2l} (1-i) \right] \\ \beta'_{j,l} \otimes e_2 &\mapsto \frac{i^{6-l} \delta_{\frac{n-4}{4},j} \varepsilon^{\frac{-3}{4}}}{4}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.2.2. 1. Consideremos la representación regular $R_3^{(1)}(1)$. Ya vimos que en este caso $\phi_3(R_3^{(1)}(1)) = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$, así que $M := M_3^{(1)}(1)$ es una representación regular simple.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_{0,0} &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \otimes \tilde{e}_1 + 0 \otimes \tilde{e}_2 + e^{\frac{\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \otimes \tilde{e}_3 - 1 \otimes \tilde{e}_6, \\ \beta_{1,0} &= 0 \otimes \tilde{e}_1 + e^{\frac{\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \otimes \tilde{e}_2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \otimes \tilde{e}_3 - 1 \otimes \tilde{e}_5, \\ \beta_{2,0} &= e^{\frac{\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \otimes \tilde{e}_1 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \otimes \tilde{e}_2 + 0 \otimes \tilde{e}_3 - 1 \otimes \tilde{e}_4, \end{aligned}$$

Dado que el isomorfismo entre $U^* = k^6$ y $k_3 \times k_3$ esta dado por

$$\tilde{e}_j \mapsto \varepsilon^{\frac{j-1}{3}} e_1 \text{ si } 1 \leq j \leq 3 \text{ y } \tilde{e}_j \mapsto \varepsilon^{\frac{j-4}{3}} e_2 \text{ si } 4 \leq j \leq 6,$$

tenemos que la función adjunta actúa de la siguiente manera sobre $\beta_{0,0} \otimes e_1$:

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(\beta_{0,0} \otimes e_1) &= \widetilde{M}([\varepsilon^{\frac{1}{2}} \otimes \tilde{e}_1 + 0 \otimes \tilde{e}_2 + e^{\frac{\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \otimes \tilde{e}_3 - 1 \otimes \tilde{e}_6] \otimes e_1) \\ &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\tilde{e}_1 \tilde{e}_1) + 0(\tilde{e}_1 \tilde{e}_2) + e^{\frac{\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}}(\tilde{e}_1 \tilde{e}_3) - 1(\tilde{e}_1 \tilde{e}_6) \\ &= \varepsilon^{\frac{1}{2}}(1) + 0(0) + e^{\frac{\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}}(0) - 1(0) \\ &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

del mismo modo

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(\beta_{0,0} \otimes e_1) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} & \widetilde{M}(\beta_{1,0} \otimes e_1) &= 0 & \widetilde{M}(\beta_{2,0} \otimes e_1) &= e^{\frac{\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \\ \widetilde{M}(\beta_{0,0} \otimes e_2) &= 0 & \widetilde{M}(\beta_{1,0} \otimes e_2) &= 0 & \widetilde{M}(\beta_{2,0} \otimes e_2) &= -1. \end{aligned}$$

Se puede verificar que estas asignaciones son las mismas que estan en el Cuadro 3.2, tomando $s := s_0 + s_1 \varepsilon^{\frac{1}{3}} + s_2 \varepsilon^{\frac{2}{3}} = 1$ es decir $s_0 = 1$ y $s_1 = 0 = s_2$.

Dado que el isomorfismo entre V^+ y k_{12} esta dado por $\beta_{j,0} \mapsto \varepsilon^{\frac{j}{3}}$ tenemos que la función adjunta de $M_3^{(1)}(1)$ es $\widetilde{M} : k_{12} \otimes k_3^2 \rightarrow K$ definida por

$$\begin{aligned} 1 \otimes e_1 &\mapsto \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & \varepsilon^{\frac{1}{3}} \otimes e_1 &\mapsto 0, & \varepsilon^{\frac{2}{3}} \otimes e_1 &\mapsto e^{\frac{\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}}, \\ 1 \otimes e_2 &\mapsto 0, & \varepsilon^{\frac{1}{3}} \otimes e_2 &\mapsto 0, & \varepsilon^{\frac{2}{3}} \otimes e_2 &\mapsto -1. \end{aligned}$$

2. Tomemos la representación regular $R_2^{(1)}(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}})$, ya hemos visto antes que $\phi_2(R_2^{(1)}(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}))$ es genérico (ver Ejemplo 2.5.8), así $M := M_2^{(1)}(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}})$ es una representación regular simple.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -\varepsilon^{\frac{1}{4}} \otimes \tilde{e}_1 + (\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}}) \otimes \tilde{e}_2 - 1 \otimes \tilde{e}_4 \\ \beta_1 &= (\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{\frac{3}{4}}) \otimes \tilde{e}_1 - \varepsilon^{\frac{5}{4}} \otimes \tilde{e}_2 - 1 \otimes \tilde{e}_3 \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\beta'_{0,0} &= \frac{1}{2}(\beta_0 + (-1)^0 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \beta_1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\varepsilon} \otimes \tilde{e}_1 + \varepsilon^{\frac{1}{4}} \otimes \tilde{e}_2 - \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \otimes \tilde{e}_3 - 1 \otimes \tilde{e}_4 \right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\beta'_{0,1} &= \frac{1}{2}(\beta_0 + (-1)^1 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \beta_1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[-2\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\varepsilon} \right] \otimes \tilde{e}_1 + \left[\varepsilon^{\frac{1}{4}} + 2\varepsilon^{\frac{3}{4}} \right] \otimes \tilde{e}_2 + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \otimes \tilde{e}_3 - 1 \otimes \tilde{e}_4 \right)\end{aligned}$$

Al igual que en el ejemplo anterior podemos ver que:

$$\begin{aligned}\widetilde{M}(\beta_{0,0} \otimes e_1) &= \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\varepsilon} & \widetilde{M}(\beta_{0,1} \otimes e_1) &= -\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\varepsilon} \\ \widetilde{M}(\beta_{0,0} \otimes e_2) &= -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon} & \widetilde{M}(\beta_{1,0} \otimes e_2) &= \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon}.\end{aligned}$$

Dado que $s = 1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, tenemos que $s_0 = 1$ y $s_1 = -1$ y se puede verificar fácilmente que son las asignaciones correspondientes a nuestro Cuadro 3.2

3.3. Las álgebras canónicas de Λ de tipo $(1, 4)$ sobre $\mathbb{C}((\varepsilon))$

Usando lo que aprendimos en la sección anterior daremos una visión más precisa de como son las álgebras canónicas de Λ .

Sean $t \geq 1$ y $l := (l_1, l_2, \dots, l_t)$ con $l_j \geq 2$. Consideremos M_1, M_2, \dots, M_t una familia de representaciones regulares simples las cuales no son isomorfas por pares. Recordemos que M_j es isomorfa a $M_{(1)}$, $M_{(2)}$ ó $M(R)$ (Teorema 2.5.4).

Siguiendo a Ringel [12] tomaremos la especie que esta determinada por el carcaj decorado en la Figura 3.1. Sea \mathcal{T} el álgebra tensorial de nuestra especie. Para $x = v \otimes u \in B_j$ definimos $\bar{x} \in \mathcal{T}$ como $\bar{x} := v \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{l_j-2} \otimes u$, donde B_j es la base de $V_j^+ \otimes_{D_j} U_j^*$ presentada en el Cuadro 3.1.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un elemento $x_0 \in B_1$ tal que $\text{codeg}(\widetilde{M}_1(x_0)) = \min\{\widetilde{M}_j(x) | x \in B_j, 1 \leq j \leq t\}$. Recordemos que $\text{Im}(\widetilde{M}_j) = K$ para toda $1 \leq j \leq t$. Sea \mathcal{R} el ideal de \mathcal{T} generado por los elementos de la forma

$$v \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes u - \sum_r v_r \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes u_r$$

con $v \in V_j^+$, $u \in U_j^*$ y $v_r \in V_1^+$, $u_r \in U_1^*$, tales que $\widetilde{M}_j(v \otimes u) = \sum_r \widetilde{M}_1(v_r \otimes u_r)$.

Tenemos dos casos:

1. Si $\text{codeg}(\widetilde{M}_1(x_0)) \geq 0$, podemos asumir que $\widetilde{M}_1(x_0) = -1$. Para todo $x \in B_j$, tenemos

$$\widetilde{M}_1(-\widetilde{M}_j(x) * x_0) = -\widetilde{M}_j(x) * \widetilde{M}_1(x_0) = -\widetilde{M}_j(x) * -1 = \widetilde{M}_j(x).$$

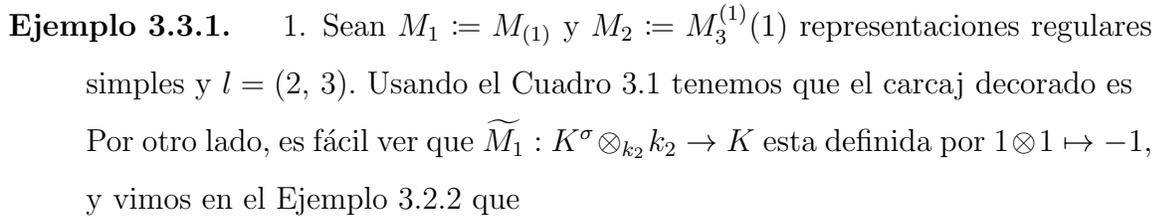
Dado que B_j es una base de $V_j^+ \otimes_{D_j} U_j^*$ se sigue que \mathcal{R} es generado por:

$$\{\bar{x} + \widetilde{M}_j(x)\bar{x}_0 | x \in B_j, 1 \leq j \leq t\}.$$

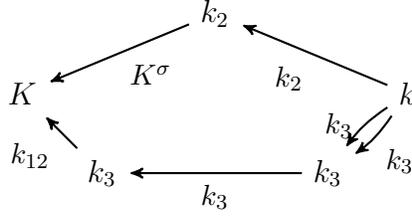
2. Si $\text{codeg}(\widetilde{M}_1(x_0)) < 0$, tenemos que $\widetilde{M}_1(x_0)^{-1} \in \mathbb{C}[[\varepsilon^{\frac{1}{4}}]]$, más aún para todo $x \in B_j$ $1 \leq j \leq t$, tenemos que $\widetilde{M}_j(x)\widetilde{M}_1(x_0)^{-1} \in \mathbb{C}[[\varepsilon^{\frac{1}{4}}]]$. Al igual que en el caso anterior podemos ver que $\widetilde{M}_1(\widetilde{M}_j(x)\widetilde{M}_1(x_0)^{-1} * x_0) = \widetilde{M}_j(x)$, así \mathcal{R} es generado por:

$$\{\bar{x} - \widetilde{M}_j(x)\widetilde{M}_1(x_0)^{-1}\bar{x}_0 | x \in B_j, 1 \leq j \leq t\}.$$

Por lo tanto \mathcal{R} está completamente definido por $\{M_j\}_{1 \leq j \leq t}$. Entonces podemos denotar la álgebra canónica \mathcal{T}/\mathcal{R} como $\mathcal{C}(l, \{M_j\}_{1 \leq j \leq t})$.

Ejemplo 3.3.1. 1. Sean $M_1 := M_{(1)}$ y $M_2 := M_3^{(1)}(1)$ representaciones regulares simples y $l = (2, 3)$. Usando el Cuadro 3.1 tenemos que el carcaj decorado es  Por otro lado, es fácil ver que $\widetilde{M}_1 : K^\sigma \otimes_{k_2} k_2 \rightarrow K$ está definida por $1 \otimes 1 \mapsto -1$, y vimos en el Ejemplo 3.2.2 que

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_2(1 \otimes e_1) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} & \widetilde{M}_2(\varepsilon^{\frac{1}{3}} \otimes e_1) &= 0 & \widetilde{M}_2(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \otimes e_1) &= e^{\frac{\pi i}{4}} \varepsilon^{\frac{3}{4}} \\ \widetilde{M}_2(1 \otimes e_2) &= 0 & \widetilde{M}_2(\varepsilon^{\frac{1}{3}} \otimes e_2) &= 0 & \widetilde{M}_2(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \otimes e_2) &= -1. \end{aligned}$$



entonces \mathcal{R} es generado por el conjunto

$$\left\{ \begin{array}{lll} 1 \otimes 1 \otimes e_1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}(1 \otimes 1), & \varepsilon^{\frac{2}{3}} \otimes 1 \otimes e_1 + e^{\frac{\pi i}{4}}(1 \otimes 1), & \varepsilon^{\frac{2}{3}} \otimes 1 \otimes e_2 - (1 \otimes 1), \\ 1 \otimes 1 \otimes e_2, & \varepsilon^{\frac{1}{3}} \otimes 1 \otimes e_1, & \varepsilon^{\frac{1}{3}} \otimes 1 \otimes e_2 \end{array} \right\}$$

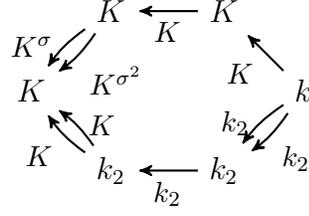
Se puede verificar fácilmente que $\mathcal{C}((2, 3), \{M_1, M_2\})$ es isomorfo a

$$\begin{bmatrix} K & K^\sigma & k_{12} & k_{12} & K \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & k_3 & k_3 & k_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 & k_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

con las relaciones:

$$\begin{aligned} E_{12}E_{25} &= -E_{15}, \\ E_{13}e_1E_{35} &= E_{14}e_1E_{45} = -\varepsilon^{\frac{1}{2}}E_{12}E_{25}, \\ \varepsilon^{\frac{2}{3}}E_{13}e_1E_{35} &= \varepsilon^{\frac{2}{3}}E_{14}e_1E_{45} = -e^{\frac{\pi i}{4}}\varepsilon^{\frac{3}{4}}E_{12}E_{25}, \\ \varepsilon^{\frac{2}{3}}E_{13}e_2E_{35} &= \varepsilon^{\frac{2}{3}}E_{14}e_2E_{45} = E_{12}E_{25}, \\ E_{13}e_2E_{35} &= E_{14}e_2E_{45} = 0, \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}E_{13}e_1E_{35} &= \varepsilon^{\frac{1}{3}}E_{14}e_1E_{45} = 0, \\ \varepsilon^{\frac{1}{3}}E_{13}e_2E_{35} &= \varepsilon^{\frac{1}{3}}E_{14}e_2E_{45} = 0. \end{aligned}$$

2. Sean $M_1 := M_{(2)}$ y $M_2 := M_2^{(1)}(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}})$ representaciones regulares simples y $l = (3, 3)$. Se sigue que el carcaj modulado es



Se puede verificar fácilmente que $\widetilde{M}_1 : (K^\sigma \times K^{\sigma^2}) \otimes_K K \rightarrow K$ está definida por $e_1 \otimes 1 \mapsto -\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ y $e_2 \otimes 1 \mapsto \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ y vimos en el Ejemplo 3.2.2 que

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_2(e_1 \otimes e_1) &= -\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\varepsilon} & \widetilde{M}_2(e_2 \otimes e_1) &= \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\varepsilon} \\ \widetilde{M}_2(e_1 \otimes e_2) &= \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon} & \widetilde{M}_2(e_2 \otimes e_2) &= -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

así el ideal \mathcal{R} es generado por el conjunto

$$\left\{ \begin{array}{ll} e_1 \otimes 1 \otimes e_1 - \left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2} - \varepsilon^{\frac{3}{4}}\right)(e_2 \otimes 1 \otimes 1), & e_2 \otimes 1 \otimes e_1 + \left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2}\right)(e_2 \otimes 1 \otimes 1), \\ e_1 \otimes 1 \otimes e_2 + \left(\frac{1}{2}\right)(e_2 \otimes 1 \otimes 1), & e_2 \otimes 1 \otimes e_2 - \left(\frac{1}{2}\right)(e_2 \otimes 1 \otimes 1) \end{array} \right\}$$

∪

$$\left\{ e_1 \otimes 1 \otimes 1 + \left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{2}\right)(e_2 \otimes 1 \otimes 1) \right\}.$$

Por otro lado, uno puede ver que $\mathcal{C}((3, 3), \{M_1, M_2\})$ es isomorfo a

$$\begin{bmatrix} K & K^\sigma \times K^{\sigma^2} & K^\sigma \times K^{\sigma^2} & K^2 & K^2 & K \\ 0 & K & K & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & K & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 & k_2 & k_2 & k_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 & k_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

con las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
e_2 E_{12} E_{26} &= \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon} E_{16}, \\
e_2 E_{13} E_{36} &= e_2 E_{12} E_{26}, \\
e_1 E_{12} E_{26} = e_1 E_{13} E_{36} &= -e_2 E_{12} E_{26}, \\
e_1 E_{14} e_1 E_{46} = e_1 E_{15} e_1 E_{56} &= \left(-\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\varepsilon} \right) e_2 E_{12} E_{26}, \\
e_2 E_{14} e_1 E_{46} = e_2 E_{15} e_1 E_{56} &= \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\varepsilon} e_2 E_{12} E_{26}, \\
e_1 E_{14} e_2 E_{46} = e_1 E_{15} e_2 E_{56} &= \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon} e_2 E_{12} E_{26}, \\
e_2 E_{14} e_2 E_{46} = e_2 E_{15} e_2 E_{56} &= -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon} e_2 E_{12} E_{26}.
\end{aligned}$$

3.4. Álgebras $\tilde{H}^{\text{tw}}(l, P)$.

Sean $t \geq 1$, $l := (l_1, \dots, l_t) \in \mathbb{Z}_{\geq 2}^t$ y $P := \{\rho_1, \dots, \rho_t\} \subset \text{Spec}(k[x]) \dot{\cup} \{1, 2\}$. Dado que para cada $\rho_j \in P$, se cumple que ρ_j esta en $\text{Spec}(k[x])$ ó $\{1, 2\}$, así en cualquier caso existe una representación regular simple M_j .

Ahora, podemos definir las siguientes matrices de Cartan simetrizables $C_{(l, P)} \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{Z})$ con simetrizador $D_{(l, P)} = \text{diag}(c_1, \dots, c_m)$, con $m = \sum_{j=1}^t l_j - (t - 2)$, sujetas a las siguientes condiciones:

Existen $I_1, \dots, I_t \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, tales que

1. $|I_j| = l_j + 1$, $\bigcup_{j=1}^t I_j = \{1, 2, \dots, m\}$ y $I_i \cap I_j = \{1, m\}$ para $i \neq j$.
2. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, t\}$ tenemos $C_{I_j} = C_{(1,2)}$, $C_{(2,4)}$ ó $C_{(n)}$ en $\text{Mat}_{(l_j+1) \times (l_j+1)}(\mathbb{Z})$, if $M_j \cong M_{(1)}$, $M_{(2)}$ ó es una representación regular simple \tilde{D}_4 -homogénea $(M_n^{(i)}(s))$

Ahora sea $\mathcal{I} := \{I_1, \dots, I_t\}$, con I_j como antes. Podemos ver I_j como $\{j_1, j_2, \dots, j_{l_j+1}\}$, con $j_1 = 1, j_{l_j+1} = m$ y $j_i < j_{i+1}$ para toda $i \in \{1, \dots, l_j\}$ y $j \in \{1, \dots, t\}$. Definimos $\Omega_{\mathcal{I}}$ como

$$\Omega_{\mathcal{I}} = \{(j_i, j_{i+1}) \mid 1 \leq j \leq t, 1 \leq i \leq l_j\}.$$

Observación 3.4.1. Sean $C_{(l, P)}$, $D_{(l, P)}$, \mathcal{I} y $\Omega_{\mathcal{I}}$ como arriba. Al igual que en [6], podemos definir las siguientes relaciones

$$\epsilon_a^2 \alpha_{ab} = -\alpha_{ab} \epsilon_b \quad \text{Si } a = j_1 \text{ y } C_{I_j} = C_{(1, 2)},$$

$$\epsilon_a \alpha_{ab}^{(g)} = (-i)^g \alpha_{ab}^{(g)} \epsilon_b \quad \text{Si } a = j_1 \text{ y } C_{I_j} = C_{(2, 4)},$$

$$\epsilon_a^{f_{ba}} \alpha_{ab}^{(g)} = \alpha_{ab}^{(g)} \epsilon_b^{f_{ab}} \quad \text{en cualquier otro caso, (donde } f_{ab} = -c_{ab}/\text{mcd}(-c_{ab}, -c_{ba})\text{)}.$$

De estas relaciones se puede ver, con ayuda del Cuadro 3.3, que cada camino de m a 1 es de la forma $\epsilon_{j_1}^r p_{g l i}^{(j)}$, con $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Donde

$$p_{g l i}^{(j)} = \alpha_{j_1 j_2}^{(g)} \epsilon_{j_2}^l \alpha_{j_2 j_3} \cdots \alpha_{j_{l_j-1} j_{l_j}} \alpha_{j_{l_j} j_{l_j+1}}^{(i)}.$$

Ejemplo 3.4.2. Consideremos $t = 2$, $l = \{2, 3\}$ y $P = \{1, \rho_2 = x^3 - \varepsilon\}$, se sigue que las representaciones regulares que tenemos son $M_1 = M_{(1)}$ y $M_2 = M_3^{(1)}(1)$. Así tenemos que $m = 5$. Ahora para escoger nuestra matriz de Cartan simetrizable podemos elegir, sin pérdida de generalidad, los conjuntos:

$$I_1 = \{1, 2, 5\}$$

$$I_2 = \{1, 3, 4, 5\}.$$

C_{I_j}	j -ésimo camino	g	l	i
$C_{(12)}$	$\begin{array}{cccc} \curvearrowright & \curvearrowright & & \curvearrowright & \curvearrowright \\ j_1 & \leftarrow j_2 & \leftarrow \cdots & \leftarrow j_{l_j} & \leftarrow j_{l_j+1} \end{array}$	1	0	1
$C_{(24)}$	$\begin{array}{cccc} \curvearrowright & \curvearrowright & & \curvearrowright & \curvearrowright \\ j_1 & \leftarrow j_2 & \leftarrow \cdots & \leftarrow j_{l_j} & \leftarrow j_{l_j+1} \\ \curvearrowright & \curvearrowright & & \curvearrowright & \curvearrowright \end{array}$	$1 \leq g \leq 2$	0	1
$C_{(n)}$ y $n \equiv 1(\text{mod } 2)$	$\begin{array}{cccc} \curvearrowright & \curvearrowright & & \curvearrowright & \curvearrowright \\ j_1 & \leftarrow j_2 & \leftarrow \cdots & \leftarrow j_{l_j} & \leftarrow j_{l_j+1} \\ \curvearrowright & \curvearrowright & & \curvearrowright & \curvearrowright \end{array}$	$1 \leq g \leq n$	0	$1 \leq i \leq 2$
$C_{(n)}$ y $n \equiv 2(\text{mod } 4)$	$\begin{array}{cccc} \curvearrowright & \curvearrowright & & \curvearrowright & \curvearrowright \\ j_1 & \leftarrow j_2 & \leftarrow \cdots & \leftarrow j_{l_j} & \leftarrow j_{l_j+1} \\ \curvearrowright & \curvearrowright & & \curvearrowright & \curvearrowright \end{array}$	$1 \leq g \leq \frac{n}{2}$	$0 \leq l \leq 1$	$1 \leq i \leq 2$
$C_{(n)}$ y $n \equiv 0(\text{mod } 4)$	$\begin{array}{cccc} \curvearrowright & \curvearrowright & & \curvearrowright & \curvearrowright \\ j_1 & \leftarrow j_2 & \leftarrow \cdots & \leftarrow j_{l_j} & \leftarrow j_{l_j+1} \\ \curvearrowright & \curvearrowright & & \curvearrowright & \curvearrowright \end{array}$	$1 \leq g \leq \frac{n}{4}$	$0 \leq l \leq 3$	$1 \leq i \leq 2$

Cuadro 3.3: Sea $\alpha_{j_i j_{i+1}} : j_i \rightarrow j_{i+1}$ una flecha para $1 \leq i \leq l_j$, podemos ver que cada camino de m a 1 es de la forma $\epsilon_{j_1}^r p_{g l i}^{(j)}$, con $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Donde $p_{g l i}^{(j)}$ es igual a $\alpha_{j_1 j_2}^{(g)} \epsilon_{j_2}^l \alpha_{j_2 j_3} \cdots \alpha_{j_{l_j-1} j_{l_j}} \alpha_{j_{l_j} j_{l_j+1}}^{(i)}$.

Dado que $M_1 = M_{(1)}$ y $M_2 = M_3^{(1)}(1)$, se sigue que

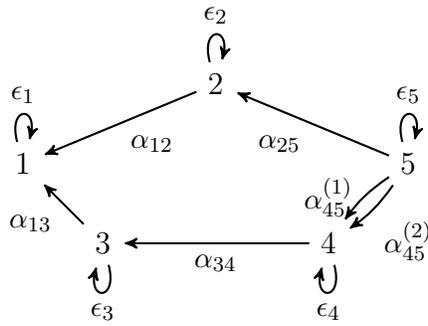
$$C_{I_1} = C_{(12)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } D_{(12)} = \text{diag}(4, 2, 1),$$

$$C_{I_2} = C_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } D_3 = \text{diag}(4, 3, 3, 1),$$

así

$$C_{(l,P)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } D_{(l,P)} = \text{diag}(4, 2, 3, 3, 1).$$

Finalmente el correspondiente carcaj es



Por otro lado, tenemos que $h : \mathbb{C}[[\varepsilon^{\frac{1}{4}}]] \rightarrow \mathbb{C}[[\varepsilon_1]]$ es una función definida por $\varepsilon^{\frac{1}{4}} \mapsto \varepsilon_1$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que existe $\beta'_{g_0+1l_0} \otimes e_{i_0} \in B_1$ tal que

$$\text{codeg}(\widetilde{M}_1(\beta'_{g_0+1l_0} \otimes e_{i_0})) = \min\{\text{codeg}(\widetilde{M}_j(x)) \mid x \in B_j, 1 \leq j \leq t\}.$$

Sea \mathcal{P} el ideal generado por:

1. Si $\text{codeg}(\widetilde{M}_1(\beta'_{g_0+1l_0} \otimes e_{i_0})) \geq 0$,

$$\{p_{g_0l_0i_0}^{(1)} + h(\widetilde{M}_j(\beta'_{g-1l} \otimes e_i))p_{g'l_i}^{(j)} \mid \beta'_{g-1l} \otimes e_i \in B_j, 1 \leq j \leq t\}.$$

2. Si $\text{codeg}(\widetilde{M}_1(\beta'_{g_0+1l_0} \otimes e_{i_0})) < 0$,

$$\{p_{g_0l_0i_0}^{(1)} - h(\widetilde{M}_j(\beta'_{g-1l} \otimes e_i))\widetilde{M}_j^{-1}(\beta'_{g_0+1l_0} \otimes e_{i_0})p_{g'l_i}^{(j)} \mid \beta'_{g-1l} \otimes e_i \in B_j, 1 \leq j \leq t\}.$$

Ahora, para estos $C_{(l,P)}$, $D_{(l,P)}$, \mathcal{I} y $\Omega_{\mathcal{I}}$ queremos definir un álgebra H como en [6], sin embargo en nuestro caso debemos considerar en algunos casos bimodulos “torcidos” para poder producir las relaciones impuestas por las funciones adjuntas. Para cada $a \in \{1, 2, \dots, m\}$ establecemos $H_a := \mathbb{C}[\epsilon_a]/(\epsilon_a^{c_a})$ un anillo de polinomios truncado. Si $(a, b) \in \Omega_{\mathcal{I}}$ definimos los H_a - H_b -bimodulos cíclicos ${}_aH_b^{\text{tw}}$ como sigue:

$${}_aH_b^{\text{tw}} = \begin{cases} (\alpha_{ab})/(\epsilon_a^2 \alpha_{ab} + \alpha_{ab} \epsilon_b) & \text{Si } a = j_1 \text{ y } C_{I_j} = C_{(1,2)}, \\ (\alpha_{ab}^{(1)}, \alpha_{ab}^{(2)})/(\epsilon_a \alpha_{ab}^{(g)} - (-i)^g \alpha_{ab}^{(g)} \epsilon_b) & \text{si } a = j_1 \text{ y } C_{I_j} = C_{(2,4)}, \\ (\alpha_{ab}^{(g)} | 1 \leq g \leq g_{ab})/(\epsilon_a^{f_{ba}} \alpha_{ab}^{(g)} - \alpha_{ab}^{(g)} \epsilon_b^{f_{ab}}) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Entonces definimos

$$S := \prod_{1 \leq a \leq m} H_a \quad \text{and} \quad B^{\text{tw}} := \bigoplus_{(a,b) \in \Omega_{\mathcal{I}}} {}_aH_b^{\text{tw}}.$$

Note que B^{tw} es naturalmente un S - S -bimodulo. Así podemos definir el álgebra tensorial

$$H^{\text{tw}}(l, P) := H_{\mathbb{C}}^{\text{tw}}(C_{(l,P)}, D_{(l,P)}, \Omega_{\mathcal{I}}) := T_S(B^{\text{tw}})/\mathcal{P}.$$

Ejemplo 3.4.3. Siguiendo con el Ejemplo 3.4.2, tenemos que:

$$\begin{aligned} H_1 &= \mathbb{C}(\epsilon_1)/(\epsilon_1^4), & H_2 &= \mathbb{C}(\epsilon_2)/(\epsilon_2^2), & H_3 &= \mathbb{C}(\epsilon_3)/(\epsilon_3^3), \\ H_4 &= \mathbb{C}(\epsilon_4)/(\epsilon_4^3) & \text{y} & & H_5 &= \mathbb{C}(\epsilon_5)/(\epsilon_5). \end{aligned}$$

Además, tenemos que las ${}_aH_b^{\text{tw}}$'s son:

$$\begin{aligned} {}_1H_2^{\text{tw}} &= (\alpha_{12})/(\epsilon_1^2 \alpha_{12} + \alpha_{12} \epsilon_2), \\ {}_2H_5^{\text{tw}} &= (\alpha_{25})/(\epsilon_2^2 \alpha_{25} - \alpha_{25} \epsilon_5), \\ {}_1H_3^{\text{tw}} &= (\alpha_{13})/(\epsilon_1^4 \alpha_{13} - \alpha_{13} \epsilon_3^3), \\ {}_3H_4^{\text{tw}} &= (\alpha_{34})/(\epsilon_3 \alpha_{34} - \alpha_{34} \epsilon_4), \\ {}_4H_5^{\text{tw}} &= (\alpha_{45}^{(1)}, \alpha_{45}^{(2)})/(\epsilon_4^3 \alpha_{45}^{(1)} - \alpha_{45}^{(1)} \epsilon_5, \epsilon_4^3 \alpha_{45}^{(2)} - \alpha_{45}^{(2)} \epsilon_5), \end{aligned}$$

y \mathcal{P} es generado por el conjunto:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \alpha_{13}\epsilon_3^2\alpha_{34}\alpha_{45}^{(2)} - \alpha_{12}\alpha_{25}, & \alpha_{13}\alpha_{34}\alpha_{45}^{(1)} + \epsilon_1^2\alpha_{12}\alpha_{25}, & \alpha_{13}\epsilon_3^2\alpha_{34}\alpha_{45}^{(1)} + e^{\frac{\pi i}{4}}\epsilon_1^3\alpha_{12}\alpha_{25}, \\ \alpha_{13}\alpha_{34}\alpha_{45}^{(2)}, & \alpha_{13}\epsilon_3\alpha_{34}\alpha_{45}^{(1)}, & \alpha_{13}\epsilon_3^2\alpha_{34}\alpha_{45}^{(1)} \end{array} \right\}$$

Por otro lado, para cada $1 \leq a \leq m$ tomamos $\varepsilon_a = \varepsilon^{\frac{1}{c_a}}$. En particular, la extensión de campos $k \subseteq k_{c_a}$ tiene grado c_a . Definimos $\tilde{S} := \prod_{1 \leq a \leq m} k_{c_a}$ y para todo $(a, b) \in \Omega_{\mathcal{I}}$:

$${}_a\tilde{H}_b^{\text{tw}} := \begin{cases} K^\sigma & \text{Si } a = j_1 \text{ y } C_{I_j} = C_{(1,2)}, \\ K^\sigma \times K^{\sigma^2} & \text{si } a = j_1 \text{ y } C_{I_j} = C_{(2,4)}, \\ k_{l_{ab}}^{g_{ab}} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con $l_{ab} = \text{mcm}(c_a, c_b)$. En particular ${}_a\tilde{H}_b^{\text{tw}}$ es un k_{c_a} - k_{c_b} -bimodulo para $(a, b) \in \Omega_{\mathcal{I}}$. Finalmente, el álgebra tensorial

$$\tilde{H}^{\text{tw}}(l, P) := \tilde{H}_k^{\text{tw}}(C, D, \Omega_{\mathcal{I}}) := T_{\tilde{S}} \left(\bigoplus_{(a,b) \in \Omega_{\mathcal{I}}} {}_a\tilde{H}_b \right) / \mathcal{P}'.$$

Donde \mathcal{P}' es generado por:

1. Si $\text{codeg}(\tilde{M}_1(\beta'_{g_0+1l_0} \otimes e_{i_0})) \geq 0$,

$$\{\overline{\beta'_{g_0+1l_0} \otimes e_{i_0}} + \tilde{M}_j(\beta'_{g-1l} \otimes e_i) \overline{\beta'_{g-1l} \otimes e_i} | \beta'_{gl} \otimes e_i \in B_j, 1 \leq j \leq t\}.$$

2. Si $\text{codeg}(\tilde{M}_1(\beta'_{g_0+1l_0} \otimes e_{i_0})) < 0$,

$$\{\overline{\beta'_{g_0+1l_0} \otimes e_{i_0}} - \tilde{M}_j(\beta'_{g-1l} \otimes e_i) \tilde{M}_j^{-1}(\beta'_{g_0+1l_0} \otimes e_{i_0}) \overline{\beta'_{g-1l} \otimes e_i} | \beta'_{gl} \otimes e_i \in B_j, 1 \leq j \leq t\}.$$

Recordemos que si $v \otimes u \in B_j$ entonces $\overline{v \otimes u} = v \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{l_j-2} \otimes u$.

Teorema 3.4.4. Sean $l := (l_1, \dots, l_t) \in \mathbb{Z}_{\geq 2}^t$ y M_1, M_2, \dots, M_t representaciones regulares simples las cuales no son isomorfas dos a dos. Entonces existe $P \subset \text{Spec}[k] \dot{\cup} \{1, 2\}$ tal que

$$\tilde{H}^{\text{tw}}(l, P) = \mathcal{C}(l, \{M_j\}_{1 \leq j \leq t}).$$

Demostración. Por el Teorema 2.5.4, tenemos para $1 \leq j \leq t$ que $M_j \cong M_{(1)}$, $M_{(2)}$ ó $M_{n_j}^{(i)}(s_j)$ para algun $n_j \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $s_j \in k_{n_j}$. Entonces podemos escoger $\rho_j \in P$, como sigue:

$$\rho_j = \begin{cases} 1 & \text{Si } M_j \cong M_{(1)}, \\ 2 & \text{si } M_j \cong M_{(2)}, \\ \prod_{i=0}^{n_j-1} (x - \sigma_{n_j}^i(s_j)) & \text{si } M_j \cong M_{n_j}^{(i)}(s_j). \end{cases}$$

Y este es el P que estábamos buscando. □

Bibliografía

- [1] M. Auslander, O. Goldman: *The Brauer group of a commutative ring*. Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 367-409.
- [2] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński: *Elements of the representation theory of associative algebras. Volume 1 Techniques of representation theory*. London Mathematical Society Students Texts 65. Cambridge University Press, 2006. ix+458 pp.
- [3] K. Conrad *Galois Descent*. Expository papers, Fields and Galois theory 19pp. <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/galoistheory/galoisdescent.pdf>
- [4] V. Dlab, C.M. Ringel: *Indecomposable representations of graphs and algebras*. Mem. Amer. Math. Soc. 6 (1976), no. 173, v+57 pp.
- [5] P. Gabriel: *Indecomposable representations II*. Symposia Math. Ist. Na. Alta Mat., Vol. XI, 81-104 (1973)
- [6] Ch. Geiss, B. Leclerc, J. Schröer: *Quivers with relations for symmetrizable Cartan matrices I: Foundations*. Invent. Math. 209 (2017), no. 1, 61-158.
- [7] Ch. Geiss, B. Leclerc, J. Schröer: *Rigid modules and Schur roots* Math. Z. 295 (2020), 1245-1277.

- [8] A. W. Hubery: *Representations of Quivers Respecting a Quiver Automorphism and a Theorem of Kac*. Submitted in accordance with the requirements for the degree of PhD. the University of Leeds Department of Pure Mathematics. August 2002.
- [9] R. V. Moody: *Euclidean Lie algebras*. Can. J. Math 21 (1969), 1432-1454.
- [10] I. Reiten, C. Riedtmann: *Skew group algebras in the representation theory of Artin algebras*. J. Algebra 92 (1985), no. 1, 224–282.
- [11] C.M. Ringel: *Tame algebras and integral quadratic forms*. Lecture Notes in Mathematics, 1099. Springer-Verlag, Berlin, 1984. xiii+376 pp.
- [12] C.M. Ringel: *The canonical algebras*. With an appendix by William Crawley-Boevey. Banach Center Publ., 26, Part 1, Topics in algebra, Part 1 (Warsaw, 1988), 407–432, PWN, Warsaw, 1990.
- [13] J.P. Serre: *Local Fields*. Translated from the French by Marvin Jay Greenberg. Graduate Texts in Mathematics 67. Springer-Verlag, New York, 1979. viii+241pp.