



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS (FÍSICA)

FACULTAD DE CIENCIAS

ENTROPÍA DE LA D3-BRANA NEGRA MAGNÉTICA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA
RODRIGO MORALES CABRERA

TUTOR PRINCIPAL
DR. ERICK LEONARDO PATIÑO JÁIDAR
FACULTAD DE CIENCIAS

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR
DR. MARIANO CHERNICOFF MINSBERG
FACULTAD DE CIENCIAS

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR
DR. MANUEL TORRES LABANSAT
INSTITUTO DE FÍSICA

CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	5
2. Conceptos de Relatividad General	9
2.1. Universo estático de Einstein.	9
2.2. Espaciotiempo Anti-deSitter (AdS)	11
2.3. Agujeros negros	15
2.4. Acción de Einstein-Hilbert	20
2.5. Término de Gibbons-Hawking	22
2.6. Brana negra AdS_5	25
3. Termodinámica de agujeros negros y la correspondencia AdS/CFT	29
3.1. Rotación de Wick	29
3.2. Temperatura y entropía de agujeros negros	30
3.3. Correspondencia AdS/CFT	35
4. Termodinámica de la D3-brana negra magnética	43
4.1. Soluciones asintóticas y cerca del horizonte	43
4.2. Energía libre de Gibbs y entropía	46
4.2.1. Acción de bulto y término de Gibbons-Hawking	46
4.2.2. Términos de frontera	48
4.2.3. Caso $B = 0$	49
4.2.4. Caso $B \neq 0$	53
5. Discusión y conclusiones	67

A. Corrección de s_3	69
A.1. Términos de frontera	69
A.2. Energía libre de Gibbs y entropía	70

Capítulo 1

Introducción

La teoría de Relatividad General de Einstein predice la existencia de agujeros negros. Un agujero negro es una región del espaciotiempo que está causalmente desconectada del resto del Universo. La frontera entre un agujero negro y el resto del Universo se llama el horizonte de eventos, donde la velocidad de escape en su interior es mayor que la velocidad de la luz (en el vacío). Aunque los agujeros negros no son objetos tangibles, como por ejemplo una esfera, algunas de sus propiedades pueden ser análogas con conceptos termodinámicos, como temperatura y entropía. En particular, Stephen Hawking en 1971, describió cómo el área del horizonte de eventos de un agujero negro siempre crece (dadas las condiciones adecuadas)¹ lo cual es análogo a la Segunda Ley de la Termodinámica, mientras que en 1974 Hawking demostró que la entropía de un agujero negro es un cuarto del área de su horizonte de eventos (en unidades naturales). A la descripción anterior se le llama la fórmula o entropía de Bekenstein-Hawking.

En general, la entropía de un sistema termodinámico que tiene a la energía libre de Gibbs G como función de estado está dada por $S = -\partial_T G$, donde T es la temperatura. Para un sistema gravitacional, la energía libre de Gibbs se calcula a través del producto de la temperatura por la acción Euclídea total, la cual se puede descomponer en la acción de bulto y en términos contribuyentes en la frontera. Ambos métodos de calcular la entropía son equivalentes, como se demuestra por ejemplo en [2, 3]. Debido a lo anterior, ya sea si se calcula la entropía de un agujero negro con la fórmula de Bekenstein-Hawking o con la acción Euclídea, el resultado debe ser el mismo. Sin em-

¹Teorema 12.2.6 de [1]

bargo, al momento de poner esto en práctica en el sistema estudiado en [4], se encontró que éste no era el caso. En dicho artículo, se trabaja con un plasma de quarks y gluones en presencia de un campo magnético junto con un operador escalar de dimensión $\Delta = 2$, el cual debido a la correspondencia AdS/CFT es equivalente a trabajar en un fondo asintóticamente Anti-deSitter (AdS) cinco dimensional que describe una D3-brana negra magnética con un campo escalar presente. Lo que se propone en esta tesis, es que el método numérico que se usa para calcular la entropía depende de cómo se trabaje con la acción Euclídea y basta con sólo considerar el campo magnético para observar lo anterior. En particular, con las ecuaciones de campo de Einstein, se puede simplificar la acción de bulto en un término de frontera. La energía libre resultante de esta consideración no involucra integración (en contraste con [4]) y la entropía derivada de ella es numéricamente equivalente a la entropía de Bekenstein-Hawking. Es decir, la falta de equivalencia entre ambas entropías que se observó en este fondo probablemente se debe a error numérico. Se deben aplicar las conclusiones de esta tesis en dicho fondo para asegurarse que ésa es la raíz de la discrepancia.

Como el objetivo de este trabajo es calcular la entropía del plasma de Yang-Mills Supersimétrico en el espaciotiempo de Minkowski cuatrodimensional ($\mathcal{N} = 4$ SYM) a través de la teoría gravitacional dual (que es una brana negra AdS₅), se expondrán conceptos gravitacionales y cuánticos para poder entender el origen y la lógica detrás de las matemáticas que se usarán a lo largo del cálculo anteriormente mencionado. El segundo capítulo se enfoca en conceptos relevantes de Relatividad General, el tercer capítulo se enfoca en propiedades de agujeros negros con analogía a conceptos termodinámicos (como temperatura y entropía) y la correspondencia AdS/CFT y el cuarto capítulo se enfoca en los cálculos necesarios para obtener la entropía de interés. Debido a que el tema de la correspondencia AdS/CFT es amplio y matemáticamente complejo, la exposición que se ofrece en este trabajo es de carácter divulgativo, sin embargo en la sección correspondiente se citan las referencias en las cuales fuertemente me basé en caso de que se quiera revisar con más detalle el aspecto formal. Trabajaremos con unidades naturales $c = \hbar = k_B = 1$ a lo largo de esta tesis.

Por último, durante la realización de los cálculos pertinentes a la entropía anteriormente mencionada se publicó el artículo [5] en el cual uno de sus objetivos coincide con el nuestro. Concretamente, en este artículo se presenta una modificación al término logarítmico que usualmente se emplea para regularizar la acción gravitacional [6]. Lo que se encontró en este trabajo es que la entropía deducida de la energía libre propuesta en dicho artículo no es numéricamente equivalente a la de

Bekenstein-Hawking; sin embargo, la modificación anteriormente mencionada en los términos de frontera sí resulta en una entropía equivalente. En otras palabras, la energía libre que se propone en el artículo no es la que se deduce de los términos de frontera modificados. En el apéndice, se expondrá la posible raíz de esta discrepancia y cómo ésta se arregla.

Capítulo 2

Conceptos de Relatividad General

Como se mencionó en la introducción, el fondo geométrico con el que se trabajará es una brana negra AdS_5 la cual tiene un horizonte de eventos y es asintóticamente AdS. Para definir cuándo un espaciotiempo es asintóticamente AdS, se necesita exponer el universo estático de Einstein. También, se expondrá el agujero negro de Schwarzschild para introducir el concepto de horizonte de eventos al igual que su diagrama de Penrose para ilustrar su estructura causal. Adicionalmente, debido a que la energía libre de Gibbs en un sistema gravitacional está relacionada con la acción de éste, se expondrá la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica y término de materia (que conforma la acción de bulto) junto con el término de Gibbons-Hawking, que es un término de frontera cuya función es obtener la dinámica que describe la Relatividad General aunque se tengan contribuciones en la frontera en la acción de bulto. Por último, se expondrá la brana negra AdS_5 ya que es el fondo geométrico con el que se trabajará en el capítulo 4.

2.1. Universo estático de Einstein.

Sea Ω una función suave y estrictamente positiva. Si la métrica \tilde{g}_{ab} está relacionada con la métrica g_{ab} a través de $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$, entonces \tilde{g}_{ab} nace de una *transformación conforme* con Ω siendo el *factor conforme*. Usualmente, a la métrica \tilde{g}_{ab} se le llama métrica no física o métrica conforme, mientras que a g_{ab} se le llama métrica física. Un aspecto crucial de las transformaciones conformes es que g_{ab} y \tilde{g}_{ab} tienen la misma estructura causal.

La métrica que describe al universo estático de Einstein resulta de un difeomorfismo conforme con el espaciotiempo de Minkowski. En coordenadas esféricas, la métrica de Minkowski está dada por

$$ds_{\mathbb{M}}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad r \in (0, \infty), \quad \theta \in (0, \pi), \quad \varphi \in (0, 2\pi). \quad (2.1)$$

Cabe remarcar que estrictamente hablando, la ecuación anterior describe el elemento de línea del espaciotiempo de Minkowski y no a su métrica. Sin embargo, la métrica (de cualquier espaciotiempo) se puede obtener a través del elemento de línea, por lo que es común referirse al elemento de línea con “métrica”. Ahora bien, sean $u = t + r$ y $v = t - r$, así t y r al igual que sus diferenciales están dadas por $t = \frac{1}{2}(u + v)$, $r = \frac{1}{2}(u - v)$, $dt = \frac{1}{2}(du + dv)$ y $dr = \frac{1}{2}(du - dv)$. También $u, v \in (-\infty, \infty)$. Haciendo este cambio de variable en la métrica de Minkowski obtenemos que

$$ds_{\mathbb{M}}^2 = -dudv + \frac{1}{4}(u - v)^2 d\Omega^2. \quad (2.2)$$

Definiendo a $U = \arctan(u)$ y $V = \arctan(v)$, tenemos que $u = \tan(U)$, $v = \tan(V)$, $du = \sec^2(U)dU$ y $dv = \sec^2(V)dV$; con $U, V \in (-\pi/2, \pi/2)$. Substituyendo en la ecuación anterior llegamos a

$$\begin{aligned} ds_{\mathbb{M}}^2 &= -\sec^2(U)\sec^2(V)dUdV + \frac{1}{4}(\tan(U) - \tan V)^2 d\Omega^2 \\ &= (\sec(U)\sec(V))^2 \left(-dUdV + \frac{1}{4}\sin^2(U - V)d\Omega^2 \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Por último, introduciendo a $T = U + V$ y $R = U - V$ se tiene que $U = \frac{1}{2}(T + R)$, $V = \frac{1}{2}(T - R)$, $dU = \frac{1}{2}(dT + dR)$ y $dV = \frac{1}{2}(dT - dR)$; con $R \in (0, \pi)$ y $|T| \leq \pi - R$. Así, se obtiene

$$ds_{\mathbb{M}}^2 = \frac{1}{4}\sec^2(U)\sec^2(V)(-dT^2 + dR^2 + \sin^2(R)d\Omega^2) \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{(\cos(T) + \cos(R))^2}(-dT^2 + dR^2 + \sin^2(R)d\Omega^2), \quad (2.5)$$

donde la última ecuación se dedujo a través de la identidad

$$\cos(U)\cos(V) = \frac{1}{2}(\cos(U + V) + \cos(U - V)). \quad (2.6)$$

Es directo ver que para el caso general en n dimensiones, la transformación conforme entre una métrica $d\tilde{s}^2$ y la métrica de Minkowski está dada por

$$ds_{\mathbb{M}}^2 = \frac{1}{(\cos(T) + \cos(R))^2}(-dT^2 + dR^2 + \sin^2(R)d\Omega_{n-2}^2) \quad (2.7)$$

$$=: \Omega^{-2}d\tilde{s}^2. \quad (2.8)$$

A la métrica $d\tilde{s}^2$ se le llama *espaciotiempo estático de Einstein* y tiene la topología de $\mathbb{R} \times S^{n-1}$.

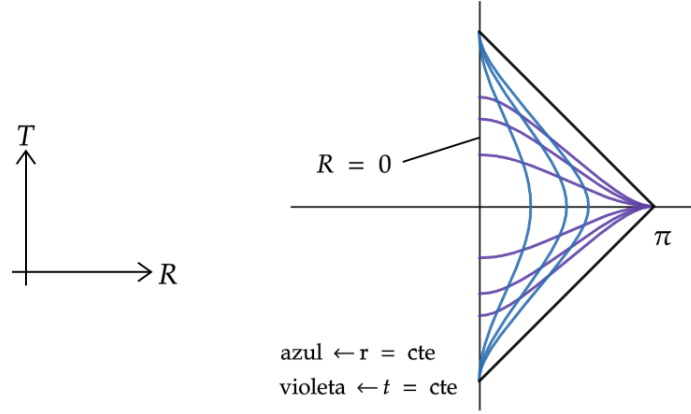


Figura 2.1: Diagrama conforme del espaciotiempo de Minkowski en el espaciotiempo estático de Einstein, donde cada punto representa una esfera $(n-2)$ -dimensional.

Notemos que el espaciotiempo de Minkowski está conformalmente relacionado a una sección restringida (o compactificada) del espaciotiempo estático de Einstein, no a todo el espaciotiempo.

2.2. Espaciotiempo Anti-deSitter (AdS)

El espaciotiempo AdS resulta de pedir que la métrica sea maximalmente simétrica con curvatura (constante) negativa. En general, un espaciotiempo maximalmente simétrico cumple las siguientes propiedades [7]:

- El escalar de curvatura R es constante.
- El tensor de Ricci es proporcional a la métrica, $R_{ab} = \frac{1}{n}Rg_{ab}$, donde n es la dimensión del espaciotiempo en cuestión.
- El tensor de Riemann está dado por $R_{abcd} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})$.

Si sustituimos estas condiciones en el tensor de Einstein obtenemos

$$G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \frac{2-n}{2n}Rg_{ab}. \quad (2.9)$$

De la ecuación anterior podemos concluir que, basándonos en las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0$, la constante cosmológica en AdS_n es

$$\Lambda = \frac{n-2}{2n}R, \quad (2.10)$$

la cual es negativa para $n > 2$ ya que $R < 0$. El espaciotiempo n -dimensional AdS_n se puede representar como un hiperboloide encajado en un espaciotiempo plano $(n+1)$ -dimensional $\mathbb{R}^{n-1,2}$ con métrica

$$g_{ab} = -(dX^1)^2 - (dX^2)^2 + \sum_{i=3}^{n+1} (dX^i)^2, \quad (2.11)$$

bajo la siguiente ecuación local

$$g_{ab}X^aX^b = -L^2, \quad (2.12)$$

donde L es el radio AdS o radio de curvatura. Introduciendo las coordenadas $(t, r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2})$, AdS_n se puede parametrizar como

$$X^1 = L \sin(t/L) \cosh(r/L), \quad X^2 = L \cos(t/L) \cosh(r/L), \quad \mathbf{X} = L \sinh(r/L) \hat{\mathbf{n}}; \quad (2.13)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal a la esfera $(n-2)$ -dimensional, $t \in (0, 2\pi L)$, $r \in (0, \infty)$, $\varphi_i \in (0, \pi)$ con $i = 1, \dots, n-3$ y $\varphi_{n-2} \in (0, 2\pi)$. Substituyendo en (2.11), la métrica AdS_n está dada por

$$\begin{aligned} ds_{\text{AdS}_n}^2 &= -(\cos(t/L) \cosh(r/L) dt + \sin(t/L) \sinh(r/L) dr)^2 \\ &\quad - (-\sin(t/L) \cosh(r/L) dt + \cos(t/L) \sinh(r/L) dr)^2 + \cosh^2(r/L) dr^2 \\ &\quad + L^2 \sinh^2(r/L) d\Omega_{n-2}^2 \\ &= -\cosh^2(r/L) dt^2 + dr^2 + L^2 \sinh^2(r/L) d\Omega_{n-2}^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Haciendo el cambio de variable $\rho = r/L$, $\tau = t/L$, la ecuación anterior se transforma en

$$ds_{\text{AdS}_n}^2 = L^2(-\cosh^2(\rho) d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2(\rho) d\Omega_{n-2}^2), \quad (2.15)$$

con $\rho \in (0, \infty)$ y $\tau \in (0, 2\pi)$.

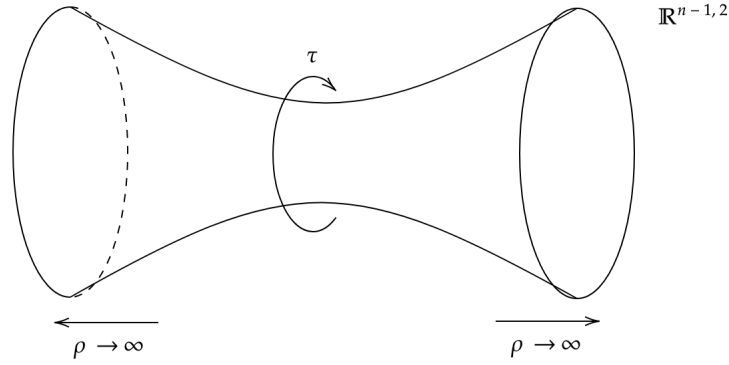


Figura 2.2: Representación de AdS_n como un hiperboloide en $\mathbb{R}^{n-1,2}$.

Así, (2.15) cubre al hiperboloide sólo una vez y $(\tau, \rho, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2})$ son coordenadas globales de AdS_n . Notemos que alrededor de $\rho \approx 0$, (2.15) toma la forma

$$ds_{\text{AdS}_n}^2 \approx L^2(-d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{n-2}^2), \quad (2.16)$$

lo cual indica que AdS_n tiene la topología $\mathbb{R}^{n-1} \times S^1$, donde S^1 representa curvas temporales cerradas (ya que $\tau \in (0, 2\pi)$). Para tener un espaciotiempo causal, extendemos el rango de τ a $\tau \in (-\infty, \infty)$, lo cual abre la circunferencia S^1 y obtenemos una cobertura universal de AdS_n sin curvas temporales cerradas. Ahora, si introducimos a la coordenada $\tan(R) = \sinh(\rho)$ tenemos que $\sec^2(R)dR = \cosh(\rho)d\rho$ con $R \in (0, \pi/2)$. Así, (2.15) se transforma en

$$\begin{aligned} ds_{\text{AdS}_n}^2 &= L^2 \left(-(1 + \sinh^2(\rho))d\tau^2 + \frac{\sec^4(R)}{1 + \sinh^2(\rho)}dR^2 + \tan^2(R)d\Omega_{n-2}^2 \right) \\ &= L^2 \sec^2(R)(-d\tau^2 + dR^2 + \sin^2(R)d\Omega_{n-2}^2), \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde se usó la identidad $\cosh^2(\rho) - \sinh^2(\rho) = 1$. Es decir, AdS_n está conformalmente relacionado con una sección del espaciotiempo estático de Einstein, en particular se mapea a una mitad de la sección en la cual el espaciotiempo de Minkowski se mapea (en dicho caso, $R \in (0, \pi)$).

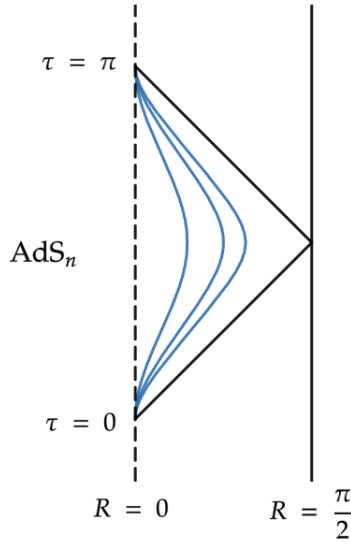


Figura 2.3: Diagrama conforme del espacio tiempo AdS_n en una mitad del espacio tiempo estático de Einstein con respecto a la sección a la cual el espacio tiempo de Minkowski se mapea, donde cada punto representa una esfera $(n-2)$ -dimensional excepto en la frontera izquierda, los cuales son puntos en el origen espacial.

En general, si un espacio tiempo se mapea conformalmente a una mitad compactificada del espacio tiempo estático de Einstein (con respecto a la que se mapea el espacio tiempo de Minkowski), se dice que dicho espacio tiempo es *asintóticamente AdS*.

Por último, con las coordenadas (u, t, \mathbf{x}) (con $u \in (0, \infty)$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-2}$), AdS_n se puede parametrizar como

$$X^1 = \frac{1}{2u}(1 + u^2(L^2 + \|\mathbf{x}\|^2 - t^2)), \quad (2.18)$$

$$X^2 = Lut, \quad (2.19)$$

$$X^i = Lux^i, \quad (i = 3, \dots, n), \quad (2.20)$$

$$X^{n+1} = \frac{1}{2u}(1 - u^2(L^2 - \|\mathbf{x}\|^2 + t^2)), \quad (2.21)$$

que al sustituirlas en (2.11) obtenemos

$$ds_{\text{AdS}_n}^2 = L^2 \left(\frac{du^2}{u^2} + u^2(-dt^2 + \|\mathbf{dx}\|^2) \right). \quad (2.22)$$

A las coordenadas (u, t, \mathbf{x}) se les llama coordenadas de Poincaré. También es común trabajar con las coordenadas (z, t, \mathbf{x}) donde $z = 1/u \Rightarrow dz/z = -du/u$ con $z \in (0, \infty)$. Substituyendo en la

ecuación anterior

$$ds_{\text{AdS}_n}^2 = \frac{L^2}{z^2}(-dt^2 + dz^2 + ||d\mathbf{x}||^2). \quad (2.23)$$

A través de esta representación, es directo deducir que

$$R_{ab} = -\frac{n-1}{L^2}g_{ab}. \quad (2.24)$$

Por lo que usando la segunda propiedad que cumple un espacio maximalmente simétrico, para AdS_n se obtiene

$$R = -\frac{n(n-1)}{L^2} \Rightarrow \Lambda = -\frac{(n-1)(n-2)}{2L^2}. \quad (2.25)$$

2.3. Agujeros negros

Un agujero negro es una región del espaciotiempo que está causalmente desconectada del resto. Usualmente, la primera vez que uno se encuentra con el concepto de agujero negro es a través de la métrica de Schwarzschild, la cual es solución de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío con simetría esférica. En coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, φ) , $t \in (-\infty, \infty)$, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$ y $\varphi \in (0, 2\pi)$, esta métrica está descrita por

$$ds_{\mathbb{S}}^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.26)$$

Para $r \rightarrow \infty$

$$ds_{\mathbb{S}}^2 \simeq -dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.27)$$

por lo que la métrica de Schwarzschild es asintóticamente plana. Notemos que esta métrica no depende de t y que el campo vectorial $\xi^\mu \partial_\mu = \partial_t$ cumple $\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0$, por lo que la métrica de Schwarzschild también es estática¹ [1]. Es directo ver que tenemos dos singularidades, una en $r = 2GM$ y otra en $r = 0$. Sin embargo, es importante distinguir entre singularidades físicas y singularidades coordenadas. En particular, una singularidad coordenada es una consecuencia del sistema coordenado con el cual se decidió describir al espaciotiempo en cuestión, mientras que una singularidad física es independiente del sistema coordenado que se use. Es decir, es posible quitar

¹La ecuación $\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0$ se puede interpretar como la existencia de una hipersuperficie espacial que es normal al campo vectorial ∂_t .

una singularidad coordinada bajo un cambio de coordenadas adecuado. En el caso de la métrica de Schwarzschild, la singularidad en $r = 2GM$ desaparece bajo el cambio de variable

$$r_* = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \Rightarrow dr_* = \frac{1}{1 - 2GM/r} dr, \quad (2.28)$$

$$u = t - r_* \Rightarrow du = dt - dr_* = dt - \frac{1}{1 - 2GM/r} dr, \quad u \in (-\infty, \infty), \quad (2.29)$$

$$v = t + r_* \Rightarrow dv = dt + dr_* = dt + \frac{1}{1 - 2GM/r} dr, \quad v \in (-\infty, \infty), \quad (2.30)$$

que transforma a la métrica en

$$ds_{\mathbb{S}}^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2, \quad (2.31)$$

$$= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2, \quad (2.32)$$

$$= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dudv + r^2 d\Omega^2. \quad (2.33)$$

El sistema de coordenadas (u, r, θ, φ) son las coordenadas salientes de Eddington-Finkelstein mientras que (v, r, θ, φ) son las coordenadas entrantes de Eddington-Finkelstein. Notemos que en cualquiera de los dos sistemas coordenados, la métrica es invertible en $r = 2GM$ ya que² $\det([g_{\mu\nu}]) = -r^4 \sin^2(\theta)$, lo cual sólo se anula en $r = 0$. Es decir, $r = 2GM$ es una singularidad coordinada. Ahora, para explorar el significado físico de $r = 2GM$, fijémonos en las coordenadas entrantes; en particular, en geodésicas nulas radiales (es decir $ds_{\mathbb{S}}^2 = 0$, $d\theta = 0$, $d\varphi = 0$) cuyas tangentes nos dan información acerca de la inclinación de los conos de luz pertinentes. Para dichas geodésicas

$$\frac{dv}{dr} = \frac{2}{1 - 2GM/r}. \quad (2.34)$$

Para $r > 2GM$, la pendiente de nuestras geodésicas nulas es positiva, para $r = 2GM$ su pendiente se indetermina y para $r < 2GM$ su pendiente es negativa. Es decir, para $r \leq 2GM$, los conos de luz futuros están completamente orientados en dirección de r decreciente.

² $[g_{\mu\nu}]$ es la representación matricial de la métrica g_{ab} dada una base vectorial $\{\partial_\mu\}$.

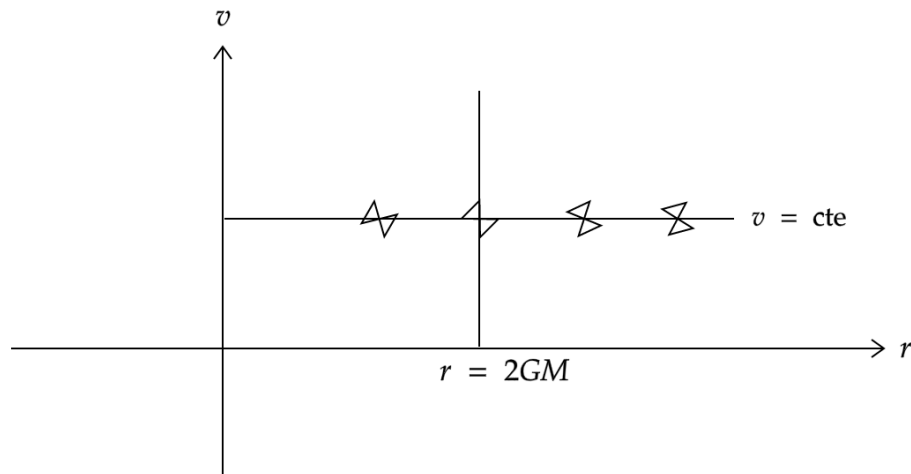


Figura 2.4: Diagrama espaciotemporal de los conos de luz de la métrica de Schwarzschild en coordenadas entrantes de Eddington-Finkelstein. En $r = 2GM$, el cono de luz futuro está orientado completamente en dirección de r decreciente.

Es decir, $r = 2GM$ representa una región en la que el destino de cualquier trayectoria causal³ entrante es $r = 0$. No hay forma de obtener información sobre lo que se encuentra en $r \leq 2GM$ para observadores fuera de esta región y por tanto, la región $r < 2GM$ está desconectada causalmente del resto del Universo descrito por la métrica de Schwarzschild. Por esta razón, a $r_h := 2GM$ se le llama *radio en el horizonte* mientras que la región que engloba esta constricción es el *horizonte de eventos*. El interior del horizonte de eventos es un agujero negro con parámetro de masa M y con una singularidad en $r = 0$. Cabe notar que, como la métrica de Schwarzschild es una solución de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, la “masa” con la que estamos asociando al agujero negro no es el concepto de masa con el que se trabaja usualmente (el cual mide la inercia que posee cierta cantidad de materia). Más bien, esta “masa” es la que un observador asintótico asignaría a esta región del espaciotiempo ($r \leq 2GM$) sin conocimiento previo de qué es lo que genera la geometría en dicha región. A lo anterior se le conoce como *masa ADM*, lo cual se puede consultar con más detalle en [1].

Análogamente a como se compactificó al espaciotiempo de Minkowski en la figura 2.1, el espacio-

³Una trayectoria causal es aquella con vector tangente temporal o nulo.

tiempo de Schwarzschild también se puede compactificar a través de las transformaciones

$$U = -\sqrt{\frac{r}{2GM} - 1} e^{(r-t)/4GM}, \quad (2.35)$$

$$V = \sqrt{\frac{r}{2GM} - 1} e^{(r+t)/4GM}, \quad (2.36)$$

junto con

$$\tilde{U} = \arctan\left(\frac{U}{\sqrt{2GM}}\right), \quad (2.37)$$

$$\tilde{V} = \arctan\left(\frac{V}{\sqrt{2GM}}\right), \quad (2.38)$$

lo cual resulta en el siguiente diagrama [7, 8].

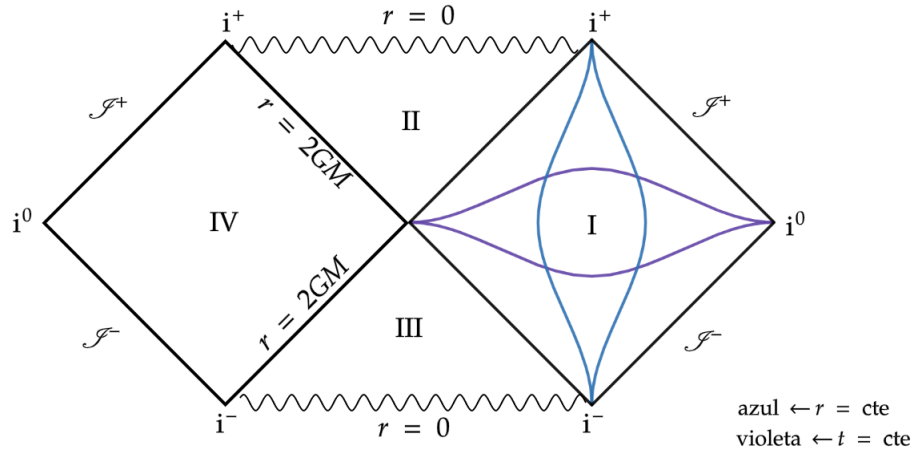


Figura 2.5: Diagrama conforme del espaciotiempo de Schwarzschild.

Para los propósitos de esta discusión, sólo nos enfocaremos en las regiones I y II. Ahora, i^\pm es la región en la que todas las geodésicas temporales terminan y empiezan respectivamente, \mathcal{I}^\pm es la región en la que todas las geodésicas nulas terminan y empiezan respectivamente, mientras que i^0 es la región en la que todas las geodésicas espaciales terminan y empiezan. Notemos que I representa la región asintóticamente plana del espaciotiempo de Schwarzschild (como se describe en (2.27)) mientras que II representa el agujero negro ya que una vez que se cruza $r = 2GM$, todas las geodésicas causales terminan en $r = 0$, no en \mathcal{I}^+ o i^+ . El siguiente diagrama enfatiza la diferencia entre los diagramas conformes del espaciotiempo de Minkowski (el cual no tiene un agujero negro) con el espaciotiempo de Schwarzschild

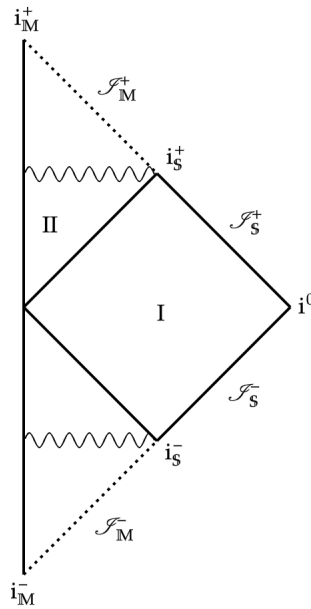


Figura 2.6: Diferencia entre el espaciotiempo de Schwarzschild y el espaciotiempo de Minkowski. Los subíndices S y M representan Schwarzschild y Minkowski respectivamente.

Como podemos ver, en ausencia de un agujero negro (que está representado por el espaciotiempo de Minkowski) todas las geodésicas causales terminan en i_M^+ o i_M^- , que son regiones accesibles a cualquier observador o geodésica nula respectivamente que se encuentre en ese espaciotiempo. En el caso del espaciotiempo de Schwarzschild, hay una región crítica descrita por $r = 2GM$ (el horizonte de eventos) que completamente separa a observadores que se encuentren ya sea en la región I o en la región II. Observadores que se encuentren en la región I se pueden comunicar entre sí, pero no con observadores dentro de la región II y viceversa. Es importante notar que la definición formal de un agujero negro sólo se puede dar en espaciotiempos que cumplan ciertas condiciones asintóticas, lo cual se explica con detalle en [1].

El espaciotiempo de Schwarzschild es especial, ya que el teorema de Birkoff garantiza que esta métrica es la única solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío con simetría esférica. Es decir, la región exterior de cualquier espaciotiempo que sea esféricamente simétrico está dada por la métrica de Schwarzschild la cual sólo tiene un parámetro que es la masa del objeto de interés, teniendo en mente que la región exterior a este objeto es vacía. Esto implica que se puede usar la métrica de Schwarzschild no sólo para estudiar agujeros negros (presentes en espaciotiempos estáticos y asintóticamente planos), sino cualquier objeto que sea esféricamente simétrico. Hay una

conjetura que se extiende a espaciotiempos estacionarios⁴ y asintóticamente planos, la cual es la conjetura de no pelo. Esta conjetura afirma que la métrica de Kerr-Newman es la única solución a las ecuaciones de campo de Einstein para una métrica estacionaria con carga eléctrica. Es decir, esta conjetura extiende el teorema de Birkoff para objetos rotantes y con carga eléctrica. Los objetos que describe la métrica de Kerr-Newman sólo tienen tres parámetros, su masa, su spin y su carga eléctrica, lo cual implica que el caso más general de un agujero negro está descrito por esta métrica (si la conjetura de no pelo es cierta).

2.4. Acción de Einstein-Hilbert

El principio de mínima acción afirma que si se usa el principio variacional en un sistema dinámico, uno obtiene las ecuaciones de movimiento de dicho sistema. En el caso de Relatividad General, las ecuaciones de movimiento están dadas por las ecuaciones de campo de Einstein cuya variable dinámica es la métrica g_{ab} que describe al espaciotiempo que se está estudiando. La versión más general de estas ecuaciones es

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi GT_{ab}, \quad (2.39)$$

donde R_{ab} es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci (o escalar de curvatura), Λ es la constante cosmológica y T_{ab} es el tensor de energía-momento. La constante de proporción del lado derecho de la igualdad de las ecuaciones de campo puede cambiar dependiendo de las convenciones que se estén usando. Bajo el principio de mínima acción, estas ecuaciones deben de poder ser deducidas a través de la minimización de una acción. En general, la acción se define como

$$S := \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L} \sqrt{|g|} d^n x, \quad (2.40)$$

donde \mathcal{L} es la densidad Lagrangiana de nuestro sistema. Para el caso de Relatividad General, la minimización de la acción

$$S_{\text{EH}}[g^{ab}, \phi] = \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right) \sqrt{|g|} d^n x \quad (2.41)$$

⁴Un espaciotiempo estacionario es uno que posee un campo de Killing ξ^a temporal. En cambio, un campo de Killing es una isometría de la métrica y cumple la ecuación $2\nabla_{(a}\xi_{b)} = 0$.

respecto de g^{ab} resulta en (2.39), donde \mathcal{L}_M es la densidad Lagrangiana asociada al campo de materia ϕ presente en nuestro sistema. La acción anterior es la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica y un término de materia⁵. Para comprobar esto, imponemos la constricción $\delta S_{EH}/\delta g_{ab} = 0$ para encontrar las ecuaciones de movimiento pertinentes a la métrica g_{ab} que extremiza a S_{EH} . Así,

$$0 = \delta S_{EH}(g^{ab}, \phi) = \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{1}{16\pi G} \frac{\delta((g^{ab}R_{ab} - 2\Lambda)\sqrt{|g|})}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} + \frac{\delta(\mathcal{L}_M\sqrt{|g|})}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} + \frac{\delta(\mathcal{L}_M\sqrt{|g|})}{\delta \phi} \delta \phi \right) d^n x. \quad (2.42)$$

Por lo que se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\delta((g^{ab}R_{ab} - 2\Lambda)\sqrt{|g|})}{\delta g^{ab}} = -16\pi G \frac{\delta(\mathcal{L}_M\sqrt{|g|})}{\delta g^{ab}}, \quad (2.43)$$

$$\frac{\delta(\mathcal{L}_M\sqrt{|g|})}{\delta \phi} = 0. \quad (2.44)$$

El tensor de energía momento se define como

$$T_{ab} := -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\mathcal{L}_M\sqrt{|g|})}{\delta g^{ab}}, \quad (2.45)$$

de tal forma que (2.43) es

$$\frac{\delta((g^{ab}R_{ab} - 2\Lambda)\sqrt{|g|})}{\sqrt{|g|}\delta g^{ab}} = 8\pi G T_{ab}. \quad (2.46)$$

Para la parte izquierda de la igualdad, usando la regla de Leibniz se tiene

$$\delta((g^{ab}R_{ab} - 2\Lambda)\sqrt{|g|}) = R_{ab}\sqrt{|g|}\delta g^{ab} + g^{ab}\sqrt{|g|}\delta R_{ab} + (R - 2\Lambda)\delta\sqrt{|g|}. \quad (2.47)$$

Debido a que $g_{ab}g^{bc} = \delta_a^c$ y $\delta\delta_a^c = 0$

$$\delta g_{ab} = -g_{ac}g_{bd}\delta g^{cd}. \quad (2.48)$$

Para una matriz M no singular, la siguiente identidad se cumple

$$\ln(\det(M)) = \text{Tr}(\ln(M)). \quad (2.49)$$

Variando la identidad anterior tenemos

$$\frac{1}{\det(M)} \delta(\det(M)) = \text{Tr}(M^{-1}\delta M). \quad (2.50)$$

⁵La acción de Einstein-Hilbert solamente es la contribución del escalar de Ricci.

Si ahora sustituimos a $g = \det([g_{\mu\nu}])$ en la ecuación anterior,

$$\delta g = g g^{ab} \delta g_{ab} = -g g^{ab} g_{ac} g_{bd} \delta g^{cd} = -g g_{ab} \delta g^{ab}. \quad (2.51)$$

Así, considerando que $|g| = -g$,

$$\delta \sqrt{|g|} = -\frac{1}{2\sqrt{|g|}} \delta g = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} g g_{ab} \delta g^{ab} = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g_{ab} \delta g^{ab}. \quad (2.52)$$

Con lo anterior, (2.47) se transforma en

$$\delta \left((g^{ab} R_{ab} - 2\Lambda) \sqrt{|g|} \right) = \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} \right) \sqrt{|g|} \delta g^{ab} + g^{ab} \sqrt{|g|} \delta R_{ab}. \quad (2.53)$$

Se puede demostrar que el último término es de frontera por el Teorema de Stokes ya que $g^{ab} \delta R_{ab} = \nabla_a \nu^a$ [1, 9]. Si la variedad con la que trabajamos no tiene frontera o si las contribuciones en la frontera se anulan, este término se ignora. Por lo tanto, substituyendo la ecuación anterior en (2.46) resulta en las ecuaciones de movimiento

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab}, \quad (2.54)$$

que son las ecuaciones de campo de Einstein, es decir, la acción de Einstein-Hilbert (con constante cosmológica y un término de materia) es la acción apropiada para la Relatividad General si queremos que la dinámica de esta teoría esté descrita por el principio de mínima acción. Debido a que la deducción anterior es cierta sólo si se considera que las contribuciones en la frontera de nuestra variedad (o espaciotiempo) son nulas, ¿qué pasa en el caso opuesto? Para que la dinámica en el caso opuesto sea la misma, es necesario incluir otro término en la acción de Einstein-Hilbert, llamado término de Gibbons-Hawking, cuya variación es la misma que la del término omitido, de tal forma que las ecuaciones de campo de Einstein son las ecuaciones de movimiento independientemente de las condiciones de frontera.

2.5. Término de Gibbons-Hawking

Sea (\mathcal{M}, g_{ab}) una variedad arbitraria n -dimensional con coordenadas x^a equipada con una métrica g_{ab} . Si imponemos una restricción sobre una de nuestras coordenadas $f(x^i) = 0$ con $x^i \in \{x^1, \dots, x^n\}$, esto resulta en una hipersuperficie (Σ, γ_{ab}) $(n-1)$ -dimensional con métrica inducida

$$\gamma_{ab} = g_{ab} - \epsilon n_a n_b, \quad (2.55)$$

donde n^a es el vector normal a la hipersuperficie en cuestión y $\epsilon = g_{ab}n^an^b = \pm 1$ dependiendo de si n^a es espacial o temporal respectivamente. Notemos que (Σ, γ_{ab}) está encajada en (\mathcal{M}, g_{ab}) . El tensor de curvatura extrínseca de Σ está dado por

$$K_{ab} = \gamma_a^c \nabla_c n_b, \quad (2.56)$$

mientras que su traza es

$$K = g^{ab} K_{ab} = \gamma_a^b \nabla_b n^a = (\delta_a^b - n_a n^b) \nabla_b n^a = \nabla_a n^a - \frac{1}{2} n^b \nabla_b (n_a n^a). \quad (2.57)$$

Recordemos que la divergencia covariante de un vector v^a es

$$\nabla_a v^a = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_a (\sqrt{|g|} v^a). \quad (2.58)$$

Substituyendo lo anterior en (2.57) y considerando que $n_a n^a = \pm 1$ resulta en

$$K = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_a (\sqrt{|g|} n^a). \quad (2.59)$$

La curvatura extrínseca (ya sea el tensor o el escalar) nos da información acerca de la curvatura de nuestra hipersuperficie si ésta se mide desde la variedad original en la cual está encajada (en nuestro caso (\mathcal{M}, g_{ab})). Para que esta propiedad coincida en ambas Σ y \mathcal{M} , es necesario proyectar las cantidades pertinentes con la métrica inducida, lo cual resulta en el producto de γ_a^b en la ecuación (2.56). En particular, si $p, q \in \Sigma$ tal que están conectados por una geodésica y transportamos paralelamente a $n^a(q)$ de q a p , K_{ab} mide el error de coincidencia que se tiene con $n^a(p)$ al final del transporte paralelo de $n^a(q)$.

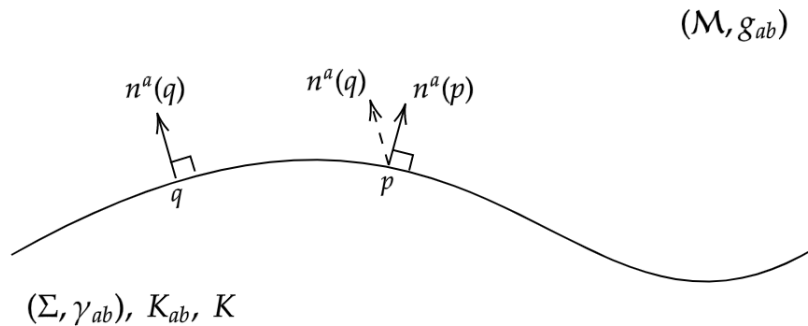


Figura 2.7: Diagrama que ilustra la noción de curvatura extrínseca de la hipersuperficie (Σ, γ_{ab}) encajada en (\mathcal{M}, g_{ab}) .

La relevancia de la curvatura extrínseca es su presencia en el término de Gibbons-Hawking, el cual se necesita añadir a la acción de Einstein-Hilbert para que, a través del principio variacional, se obtengan las ecuaciones de campo de Einstein a partir de la acción independientemente de la frontera de la variedad con la cual se trabaje. Este término es

$$S_{\partial M} = \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial \mathcal{M}} \epsilon K \sqrt{|\gamma|} d^{n-1}x, \quad (2.60)$$

teniendo en mente que la ecuación anterior se evalúa en la frontera correspondiente. En particular, si consideramos la presencia de la frontera de nuestro espaciotiempo, la variación de la acción de Einstein-Hilbert resulta en⁶

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{EH}} &= \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} \delta(g^{ab} R_{ab} \sqrt{|g|}) d^n x, \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} \left((R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}) \delta g^{ab} + g^{ab} \delta R_{ab} \right) \sqrt{|g|} d^n x. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Como se mencionó en la sección anterior, $g^{ab} \delta R_{ab} = \nabla_a v^a$, donde $v^a = g^{bc} \delta \Gamma_{bc}^a - g^{ab} \delta \Gamma_{bc}^c$ [9].

Por el Teorema de Stokes

$$\int_{\mathcal{M}} \nabla_a v^a \sqrt{|g|} d^n x = \int_{\partial \mathcal{M}} \epsilon v^a n_a \sqrt{|\gamma|} d^{n-1}x. \quad (2.62)$$

Así, tenemos que δS_{EH} se simplifica a [9]

$$\delta S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} (R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}) \delta g^{ab} \sqrt{|g|} d^n x - \frac{1}{16\pi G} \int_{\partial \mathcal{M}} \epsilon \gamma^{ab} n^c \nabla_c \delta g_{ab} \sqrt{|\gamma|} d^{n-1}x. \quad (2.63)$$

Veamos ahora que la variación del término de Gibbons-Hawking coincide con el segundo término de la ecuación anterior. Expandiendo la traza de la curvatura extrínseca

$$\begin{aligned} K &= \nabla_a n^a \\ &= g^{ab} \nabla_b n_a \\ &= (\gamma^{ab} + \epsilon n^a n^b) \nabla_b n_a \\ &= \gamma^{ab} \nabla_b n_a + \frac{1}{2} \epsilon n^b \nabla_b (n_a n^a) \\ &= \gamma^{ab} (\partial_b n_a - \Gamma_{ab}^c n_c). \end{aligned} \quad (2.64)$$

⁶Aquí no es necesario incluir la constante cosmológica o considerar la presencia de materia.

Por lo que su variación está dada por

$$\begin{aligned}
\delta K &= -\gamma^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c n_c \\
&= -\frac{1}{2} \gamma^{ab} n_c g^{cd} (\nabla_a \delta g_{bd} + \nabla_b \delta g_{ad} - \nabla_d \delta g_{ab}) \\
&= \frac{1}{2} \gamma^{ab} n^c \nabla_c \delta g_{ab},
\end{aligned} \tag{2.65}$$

ya que en la frontera, sólo influyen las derivadas direccionales a lo largo de su vector normal, es decir n^a . Así, obtenemos

$$\delta S_{\partial \mathcal{M}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\partial \mathcal{M}} \epsilon \gamma^{ab} n^c \nabla_c \delta g_{ab} \sqrt{|\gamma|} d^{n-1}x, \tag{2.66}$$

y por tanto

$$\delta S_{\text{EH}} + \delta S_{\partial \mathcal{M}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) \delta g^{ab} \sqrt{|g|} d^n x. \tag{2.67}$$

Es decir, la inclusión del término de Gibbons-Hawking resulta en la dinámica descrita por las ecuaciones de campo de Einstein aún en espaciotiempos con contribuciones en la frontera.

2.6. Brana negra AdS₅

En coordenadas de Poincaré (t, r, \mathbf{x}) , donde $t \in (-\infty, \infty)$, $r \in (0, \infty)$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$; la métrica de una brana negra AdS₅ está dada por [8, 10]

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{L^2} \left(- \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right) dt^2 + ||d\mathbf{x}||^2 \right), \tag{2.68}$$

donde r_h es el radio en el horizonte. Notemos que conforme $r \rightarrow \infty$

$$ds^2 \simeq \frac{L^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + ||d\mathbf{x}||^2), \tag{2.69}$$

que es la métrica (2.22) con el cambio de variable $r = L^2 u$, por lo que (2.68) es asintóticamente AdS. La singularidad en $r = r_h$ se puede quitar con un cambio de coordenadas adecuado. Éste es

$$r_* = \frac{L^2}{4r_h} \ln \left(\frac{1 - r/r_h}{1 + r/r_h} \right) + \frac{L^2}{2r_h} \arctan \left(\frac{r}{r_h} \right) \Rightarrow dr_* = \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right)^{-1} dr, \tag{2.70}$$

$$u = t - r_* \Rightarrow du = dt - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right)^{-1} dr, \quad u \in (-\infty, \infty), \tag{2.71}$$

$$v = t + r_* \Rightarrow dv = dt + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4} \right)^{-1} dr, \quad v \in (-\infty, \infty), \tag{2.72}$$

el cual transforma a la métrica en

$$ds^2 = -\frac{r^2}{L^2} \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4}\right) du^2 - 2dudr + \frac{r^2}{L^2} \|d\mathbf{x}\|^2, \quad (2.73)$$

$$ds^2 = -\frac{r^2}{L^2} \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4}\right) dv^2 + 2dvdr + \frac{r^2}{L^2} \|d\mathbf{x}\|^2, \quad (2.74)$$

$$ds^2 = -\frac{r^2}{L^2} \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4}\right) dudv + \frac{r^2}{L^2} \|d\mathbf{x}\|^2. \quad (2.75)$$

Análogamente a la métrica de Schwarzschild, en el sistema coordenado (v, r, \mathbf{x}) , las tangentes de geodésicas nulas radiales están dadas por

$$\frac{dv}{dr} = \frac{2L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_h^4}{r^4}\right)^{-1}. \quad (2.76)$$

Recordemos que (2.76) nos describe la inclinación de los conos de luz en función de r . En particular, dv/dr es positiva cuando $r > r_h$, se indetermina cuando $r = r_h$ y es negativa cuando $r < r_h$; por lo que se tiene el mismo comportamiento que se muestra en la figura 2.4, la única diferencia siendo que r_h es el radio en el horizonte en este caso (en vez de $r = 2GM$). Es decir, una vez que se cruza $r = r_h$, el destino de cualquier trayectoria causal entrante es $r = 0$ y, nuevamente, $r = r_h$ representa un horizonte de eventos, de ahí su nombre. A diferencia de la métrica de Schwarzschild cuyo horizonte de eventos es esférico, para una brana negra AdS_5 su horizonte de eventos se extiende indefinidamente a lo largo de las direcciones $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; por esta razón se le denomina “brana negra” en vez de “agujero negro”.

Ahora bien, la métrica de la brana negra AdS_5 también se puede compactificar con los cambios de variable

$$U = -e^{-\frac{2r_h}{L^2}u}, \quad (2.77)$$

$$V = e^{\frac{2r_h}{L^2}v}, \quad (2.78)$$

$$\tilde{U} = \arctan(U), \quad (2.79)$$

$$\tilde{V} = \arctan(V), \quad (2.80)$$

lo cual resulta en el siguiente diagrama conforme [8].

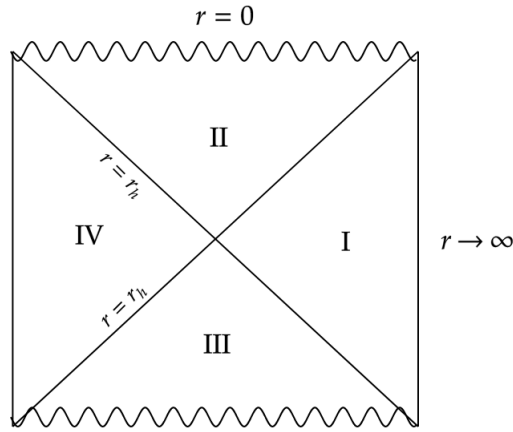


Figura 2.8: Diagrama conforme de una brana negra AdS_5 .

Sólo nos enfocaremos en las regiones I y II. La región I representa la región exterior a la brana negra, mientras que la región II representa a la brana negra, ya que el destino de toda trayectoria causal que cruza $r = r_h$ es $r = 0$. En contraste con la figura 2.5, en este caso I se mapea a una mitad con respecto a la que se mapea I en la métrica de Schwarzschild, que es la región asintóticamente plana de dicha métrica. Lo anterior sirve como verificación adicional que (2.68) es asintóticamente AdS en I ya que ésta se mapea a una mitad compactificada del universo estático de Einstein con respecto a la que se mapea el espaciotiempo de Minkowski.

La relevancia de la brana negra AdS_5 es que la correspondencia AdS/CFT identifica la termodinámica de la teoría supersimétrica de Yang-Mills con cuatro supersimetrías en el espaciotiempo de Minkowski $\mathcal{N} = 4$ SYM a temperatura finita con la termodinámica de este fondo geométrico, el cual es generado por una D3-brana negra.

Capítulo 3

Termodinámica de agujeros negros y la correspondencia AdS/CFT

En este capítulo se introduce la rotación de Wick que nos permite obtener la acción Euclídea total del sistema, y por tanto la energía libre de Gibbs. También se expone la temperatura de Hawking para un agujero negro al igual que la derivación de la entropía de Bekenstein-Hawking para la métrica de Schwarzschild, aunque este resultado también es válido para métricas más generales [2, 11]. Así, se obtienen las cantidades principales pertinentes al objetivo de este trabajo, el cual es comparar la entropía derivada de la energía libre de Gibbs con la entropía de Bekenstein-Hawking. Por último, se expondrá (de manera divulgativa) la correspondencia AdS/CFT, que es lo que nos permite estudiar la termodinámica del plasma de quarks y gluones a través de las propiedades termodinámicas de un agujero negro AdS_5 .

3.1. Rotación de Wick

En Relatividad General, las variedades con las que se trabajan se equipan con métricas Lorentzianas, i.e. en n dimensiones, estas métricas tienen un eigenvalor negativo y $n - 1$ eigenvalores positivos. Una rotación de Wick consiste en hacer el cambio de variable $t \rightarrow it =: t_E$ a la coordenada relacionada al eigenvalor negativo. La consecuencia física de esta transformación es que la métrica Lorentziana que describe a una variedad pseudo-Riemanniana pasa a ser una métrica Euclídea que

describe a una variedad Riemanniana. Sin embargo, debemos de tener en mente que ya no podemos interpretar a it como una coordenada temporal; después de la rotación, la coordenada t es una coordenada espacial en nuestra variedad Riemanniana.

Ahora, sea $Z(\beta)$ la función de partición de un sistema cuántico con temperatura $T = 1/\beta$ y con Hamiltoniano H . Definimos a $Z(\beta)$ como

$$Z(\beta) := \text{Tre}^{-\beta H} = \sum_n \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle, \quad (3.1)$$

donde $\{|n\rangle\}$ es una base del espacio de Hilbert correspondiente. Para extender esta definición a una teoría cuántica de campos (con temperatura distinta de 0), la función de partición es [8]

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E}, \quad (3.2)$$

donde ϕ y S_E son respectivamente el campo y la acción Euclídea (resultante de la acción de Wick) relacionados a nuestra teoría y

$$\mathcal{D}\phi \propto \prod_{t_i \leq t \leq t_f} \prod_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}} d\phi(t, \mathbf{x}) \quad (3.3)$$

es la densidad de todas las configuraciones posibles de ϕ en el espacio fase con un tiempo inicial t_i y un tiempo final t_f . La integral de caminos¹ en (3.2) se restringe a las configuraciones con condición periódica $\phi(t, \mathbf{x}) = \phi(t + \beta, \mathbf{x})$. Es decir, la integral de caminos de una teoría de campos cuántica en una variedad localmente Euclídea n -dimensional con la topología de un cilindro $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ con circunferencia β se puede ver como el promedio térmico de un sistema cuántico estadístico en $n-1$ dimensiones espaciales [10, 8]. Esto se traduce a

$$\int_{t_E}^{t_E + \beta} d\tau_E = \beta = \frac{1}{T}. \quad (3.4)$$

3.2. Temperatura y entropía de agujeros negros

En un contexto clásico, es imposible que los agujeros negros tengan temperatura ya que ningún tipo de energía puede emanar del horizonte de eventos, esto incluye radiación térmica. Adicionalmente, la métrica de Schwarzschild es una solución de las ecuaciones de campo en el vacío, por lo que no

¹Una integral de caminos es la contribución total de $\mathcal{D}\phi$, es decir, su integral en el espacio fase.

tiene sentido hablar de algún tipo de materia presente en este espaciotiempo ya que $T_{ab} = 0$. Sin embargo, este último aspecto es clave, ya que la descripción es distinta en un contexto cuántico. Cuánticamente, el Universo está poblado por campos, y lo que pensamos como partículas son excitaciones de los campos correspondientes. Debido al principio de incertidumbre de Heisenberg, aún en el vacío tenemos presencia de partículas, llamadas partículas virtuales, que son excitaciones aleatorias de estos campos cuánticos, similarmente a las ondulaciones presentes en el mar debido a las contribuciones aleatorias de las corrientes de aire encima de su superficie. La energía del vacío es el promedio de todas estas perturbaciones y se puede demostrar que esta energía es distinta de cero. Experimentalmente, la energía del vacío no nula se puede observar con el efecto Casimir [12]. La radiación de Hawking es una consecuencia de considerar la presencia de partículas virtuales cerca del horizonte, pues su análisis lleva a concluir la existencia de radiación térmica proveniente de éste, lo cual se interpreta como la temperatura del agujero negro [10, 8]².

Aunque la temperatura relacionada a la radiación de Hawking se puede calcular con teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos, ésta también se puede deducir con un tratamiento gravitacional considerando el formalismo detrás de una rotación de Wick. Usaremos la función de partición gravitacional con temperatura $T = 1/\beta$ y con una rotación de Wick, la cual está expresada por

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}g_{ab} e^{-\mathcal{S}[g_{ab}]}, \quad (3.5)$$

donde la integral de caminos se realiza sobre todas las variedades Riemannianas que satisfacen condiciones asintóticas adecuadas junto con condiciones asintóticas periódicas en t_E . Usando la aproximación de punto silla, la integral de caminos en (3.5) se puede expresar como

$$Z(\beta) \simeq e^{-\mathcal{S}^*}, \quad (3.6)$$

donde \mathcal{S}^* representa la acción clásica de la cual se obtienen las métricas pertinentes al aplicar el principio de mínima acción. Lo anterior implica que podemos usar la acción de Einstein-Hilbert (en este caso, podemos considerar solamente al escalar de Ricci) junto con el término de Gibbons-Hawking como \mathcal{S}^* teniendo en mente la rotación de Wick, i.e.

$$\mathcal{S}^* = -\frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} R \sqrt{g_E} d^n x - \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial \mathcal{M}} K \sqrt{\gamma_E} d^{n-1} x, \quad (3.7)$$

²También se tiene una interpretación geométrica de la temperatura de un agujero negro, aunque esta interpretación viene de una analogía con la Primera Ley de la Termodinámica, como se puede revisar en el capítulo 12.5 de [1].

donde $\partial \mathcal{M}$ es la frontera relacionada a la hipersuperficie dada por la constricción $r = R = \text{cte}$ (no confundir con el escalar de Ricci). Ahora, cuando trabajamos con el ensamble gran canónico en mecánica estadística, tenemos que la entropía y la energía libre de Gibbs están dadas respectivamente por [13]

$$S = \ln(Z) - \beta \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = \beta \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial \beta} - \mathcal{S}^*, \quad (3.8)$$

$$G = -T \ln(Z) = T \mathcal{S}^*. \quad (3.9)$$

Como lo mencionamos en la sección anterior, después de una rotación de Wick, la variedad con la que trabajamos tiene la topología $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ en donde la dimensión “temporal” se compactifica en una circunferencia. Supongamos que la familia de métricas solución de la acción de Einstein-Hilbert al aplicar el principio de mínima acción es

$$ds^2 = f(r)dt_E^2 + g(r)^{-1}dr^2 + ds_{n-2}^2 \quad (3.10)$$

Supongamos también que f y g se anulan a primer orden en r_h , pero no en sus derivadas evaluadas en r_h , y ds_{n-2}^2 no es singular en r_h . Las expansiones de f y g alrededor de r_h son

$$f(r) = f'(r_h)(r - r_h) + \mathcal{O}(r - r_h)^2, \quad (3.11)$$

$$g(r) = g'(r_h)(r - r_h) + \mathcal{O}(r - r_h)^2. \quad (3.12)$$

Substituyendo lo anterior en (3.10) da

$$ds^2 \simeq f'(r_h)(r - r_h)dt_E^2 + \frac{1}{g'(r_h)(r - r_h)}dr^2 + ds_{n-2}^2, \quad (3.13)$$

que tras definir

$$\rho^2 = \frac{4(r - r_h)}{g'(r_h)}, \quad (3.14)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{f'(r_h)g'(r_h)}t_E \quad (3.15)$$

y hacer el cambio de variable en (3.13), obtenemos en el plano (ρ, φ)

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2. \quad (3.16)$$

De la ecuación anterior podemos interpretar a (ρ, φ) como coordenadas polares. Si φ no tiene periodo 2π (es decir $\varphi \in (0, 2\pi - \delta)$), en $\rho = 0$ tendremos una singularidad cónica.

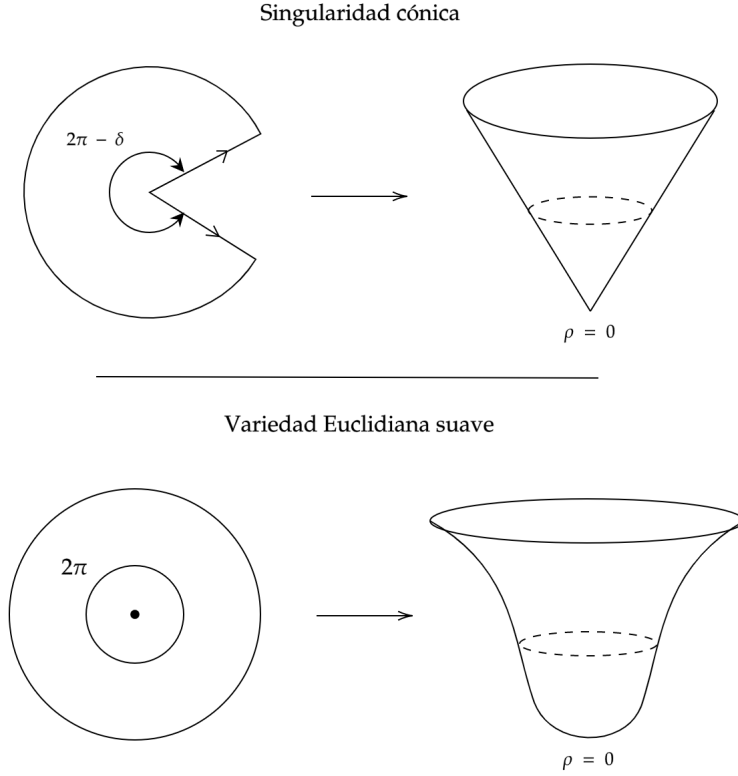


Figura 3.1: Si φ no es periódica, conforme $\rho \rightarrow 0$ se tiene una singularidad cónica en ρ . En cambio, si φ es periódica, se tiene una variedad Euclídea suave bien definida alrededor de $\rho = 0$.

Por lo que sólo se tendrá una variedad Euclídea suave si se puede hacer una identificación periódica de φ . En consecuencia, el punto descrito por (ρ, φ) también está descrito por $(\rho, \varphi + 2\pi)$. Esta periodicidad se refleja en t_E al substituir lo anterior en (3.15) lo cual da

$$t_E \rightarrow t_E + \frac{4\pi}{\sqrt{f'(r_h)g'(r_h)}}. \quad (3.17)$$

Como se mencionó en la sección anterior, después de hacer una rotación de Wick, la integral de caminos se restringe a configuraciones con periodicidad $t_E \rightarrow t_E + \beta$ y como $\beta = 1/T$, la temperatura de Hawking T_H está dada por

$$T_H = \frac{\sqrt{f'(r_h)g'(r_h)}}{4\pi}. \quad (3.18)$$

En particular, si $f(r) = g(r)$

$$T_H = \frac{|f'(r_h)|}{4\pi}. \quad (3.19)$$

Para la métrica de Schwarzschild, tenemos que $f'(r_h) = 2GM/r_h^2$. Considerando que $r_h = 2GM$ y

substituyendo $|f'(r_h)|$ en la ecuación anterior se obtiene

$$T_H = \frac{1}{8\pi GM}. \quad (3.20)$$

Ahora, para calcular la entropía de un agujero negro, supongamos que tenemos $\mathcal{S}^*[g_{ab}^0]$ como referencia para regularizar el valor de $\mathcal{S}^*[g_{ab}]$ tal que ambas métricas tengan el mismo comportamiento asintótico. También, supondremos que estamos trabajando en el vacío, por lo que $R_{ab} = 0$. Así, por (3.7) se tiene

$$\mathcal{S}^*[g_{ab}] - \mathcal{S}^*[g_{ab}^0] = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial \mathcal{M}} (K\sqrt{\gamma_E} - K^0\sqrt{\gamma_E^0}) d^{n-1}x. \quad (3.21)$$

Si además consideramos que nuestra métrica es esféricamente simétrica, entonces la métrica exterior al horizonte está descrita por la métrica de Schwarzschild por el Teorema de Birkoff. La métrica γ_{ab} de la hipersuperficie dada por la constricción $r = r_0 = \text{cte}$ está dada por

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= (g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu) dx^\mu dx^\nu \\ &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + r^2 d\Omega^2, \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde n^a es el vector normal a la hipersuperficie anteriormente mencionada. Como la métrica de Schwarzschild es diagonal, éste está dado por

$$n^\mu \partial_\mu = \frac{\partial_r}{\sqrt{g_{\mu\nu}(\partial_r)^\mu (\partial_r)^\nu}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} \partial_r. \quad (3.23)$$

También,

$$\sqrt{\gamma_E} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} r^2 \sin(\theta). \quad (3.24)$$

Así, por (2.59)

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_r \left(r^2 \sin(\theta) \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} \right) \\ &= \frac{2r - 3GM}{r^2 \sqrt{1 - 2GM/r}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Considerando que $\int dt_E = \beta$

$$\int_{\partial \mathcal{M}} K \sqrt{\gamma_E} \Big|_{r=r_0} d^3x = \frac{4\pi}{T} (2r_0 - 3GM). \quad (3.26)$$

Como la métrica de Schwarzschild es asintóticamente plana, se considera que g_{ab}^0 es la métrica de Minkowski. Notemos que (3.22) y (2.1) no coinciden sólo en la parte temporal cuando se tiene la restricción $r = r_0 = \text{cte}$, y por tanto, los perímetros de las circunferencias “temporales” resultantes de la rotación de Wick deben coincidir en ambas métricas para que se tenga el mismo comportamiento asintótico, es decir,

$$\int_0^{1/T} \sqrt{\gamma_{E,t,t}}|_{r=r_0} dt_E = \int_0^{1/T_0} \sqrt{\gamma_{E,t,t}^0}|_{r=r_0} dt_E \iff \frac{1}{T} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0}} = \frac{1}{T_0}. \quad (3.27)$$

Luego, para (2.1), el vector normal a la hipersuperficie definida por la restricción $r = r_0 = \text{cte}$ es $n^\mu \partial_\mu = \partial_r$, lo cual resulta en

$$K^0 = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_r (r^2 \sin(\theta)) = \frac{2}{r}. \quad (3.28)$$

Juntando lo anterior con $\sqrt{\gamma_E^0} = r^2 \sin(\theta)$ y la condición dada por (3.27) se obtiene

$$\int_{\partial \mathcal{M}} K^0 \sqrt{\gamma_E^0}|_{r=r_0} d^3x = \frac{8\pi r_0}{T} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0}}, \quad (3.29)$$

y por tanto, asintóticamente

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (\mathcal{S}^*[g_{ab}] - \mathcal{S}^*[g_{ab}^0]) = \frac{M}{2T} = \frac{1}{16\pi G T^2}, \quad (3.30)$$

donde la última igualdad resulta de substituir el valor que se obtiene para M de (3.20). La entropía de la métrica de Schwarzschild está dada substituyendo lo anterior en (3.8), lo cual da

$$S_{\text{BH}} = \frac{1}{16\pi G T^2} = \frac{A_h}{4G}. \quad (3.31)$$

Donde, de nuevo, se usó (3.20), $A_h = \int \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}}|_{r=r_h} d\theta d\varphi = 4\pi r_h^2$ y $r_h = 2GM$. La proporcionalidad directa entre la entropía y el área superficial del horizonte de eventos es la entropía (o fórmula) de Bekenstein-Hawking. La derivación de la entropía de Bekenstein-Hawking también se puede dar en contextos más generales sin tener que acudir a la métrica de Schwarzschild como se expone en [11].

3.3. Correspondencia AdS/CFT

La correspondencia AdS/CFT describe una dualidad entre la teoría de cuerdas en $\text{AdS}_n \times S^n$ con teorías de campo conformes³ en $n-1$ dimensiones. Hay muchas dualidades que describe la corres-

³Las teorías de campo conformes son aquéllas que se mantienen invariantes bajo transformaciones conformes.

pondencia, nosotros nos enfocaremos en la dualidad que se tiene entre la teoría de cuerdas tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$ con la teoría $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills Supersimétrica ($\mathcal{N} = 4$ SYM) en el espaciotiempo de Minkowski cuatro-dimensional. El carácter de esta sección será en mayor parte divulgativo, por lo que omitiré cierto detalle matemático a lo largo de la exposición; sin embargo mi discusión está basada en lo que se expone en [3, 8, 10, 14, 15, 16].

Aunque lo que consideramos como partículas fundamentales son en realidad excitaciones de sus campos cuánticos correspondientes, la dimensión asociada a una partícula es 0, es decir, consideramos que dichas partículas fundamentales son puntuales. Una cuerda es una extensión de esta idea, y propone que estas partículas fundamentales son en realidad objetos de una dimensión con longitud y tensión⁴. Debido a que las cuerdas son objetos unidimensionales, hay dos formas en las que se pueden presentar, abiertas o cerradas. A diferencia de una partícula puntual que traza una línea de mundo conforme el tiempo pasa, una cuerda traza una hoja de mundo Σ con signatura Lorentziana; si la cuerda es abierta, la hoja de mundo tiene la topología de \mathbb{R}^2 mientras que si la cuerda es cerrada, la hoja de mundo tiene la topología de $\mathbb{R} \times S^1$. Estas hojas de mundo se encajan en un espaciotiempo objetivo, que usualmente es el espaciotiempo de Minkowski en n dimensiones. Estos encajes están dados por las funciones $X^M(\tau, \sigma)$, donde τ y σ son algunas coordenadas temporal y espacial relacionadas a la hoja de mundo respectivamente.

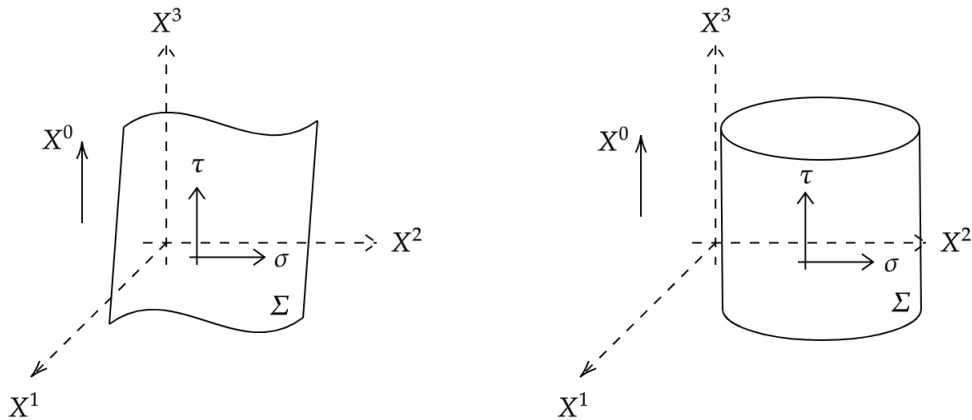


Figura 3.2: Hojas de mundo para una cuerda abierta (izquierda) y una cuerda cerrada (derecha) encajadas en el espaciotiempo de Minkowski cuatro-dimensional.

⁴La tensión de una cuerda es la densidad de masa por unidad de longitud.

La dinámica de las cuerdas se deduce de la acción de Polyakov

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\ell_s^2} \int_{\Sigma} h^{ab} \partial_a X^M \partial_b X^N \eta_{MN} \sqrt{|h|} d^2\sigma, \quad (3.32)$$

donde h_{ab} es la métrica de la hoja de mundo de la cuerda correspondiente y ℓ_s es la longitud de la cuerda. La ecuación de movimiento pertinente a la dinámica de las cuerdas es la ecuación de onda

$$(\partial_{\tau}^2 - \partial_{\sigma}^2)X^M = 0, \quad (3.33)$$

con condiciones de frontera

$$\partial_{\sigma} X^M \delta X_M \Big|_0^{\sigma_0} = 0 \quad (3.34)$$

Para cuerdas cerradas, $\sigma_0 = 2\pi$ y las funciones de encaje cumplen las condiciones de frontera

$$X^M(\tau, 0) = X^M(\tau, 2\pi), \quad \partial_{\sigma} X^M(\tau, 0) = \partial_{\sigma} X^M(\tau, 2\pi), \quad (3.35)$$

Debido a esta identificación periódica, (3.34) se cumple automáticamente. Para cuerdas abiertas, $\sigma_0 = \pi$ (por convención) de tal forma que $\sigma = 0$ describe una punta de la cuerda y $\sigma = \pi$ la otra. Las cuerdas abiertas pueden cumplir dos condiciones de frontera: las condiciones de frontera de Neumann o las condiciones de frontera de Dirichlet. Las condiciones de Neumann son $\partial_{\sigma} X^M(\tau, \bar{\sigma}) = 0$, donde $\bar{\sigma}$ representa cualquiera de las dos puntas, y obligan que $\bar{\sigma}$ sea libre de moverse a la velocidad de la luz. Las condiciones de Dirichlet son $\delta X^M(\tau, \bar{\sigma}) = 0$ las cuales fijan a $\bar{\sigma}$ en una posición constante del espaciotiempo. Estas condiciones se pueden considerar independientemente en cada coordenada. En particular, si consideramos una cuerda con una punta libre y una punta fija, en una punta podemos escoger $p + 1$ direcciones en las que se cumplan condiciones de Neumann en p dimensiones espaciales y de tiempo⁵, mientras que en la punta restante se tendrán $n - p - 1$ direcciones en las que se cumplen condiciones de Dirichlet; para que el momento se conserve, la punta con condiciones de Dirichlet está sujeta a una hipersuperficie $(p + 1)$ -dimensional. Estas hipersuperficies se llaman Dp -branas, donde p representa la dimensión espacial de la hipersuperficie en cuestión. Para que se tenga una descripción completa de la dinámica de las cuerdas pertinentes a la teoría de cuerdas, es necesario que esta teoría incluya a las Dp -branas como objetos propios de ella con su propia dinámica. Notemos que si tenemos dos cuerdas abiertas con

⁵En nuestro caso sólo hay una dimensión temporal.

ambos pares de puntas sujetas a condiciones de Dirichlet en una Dp -brana y hacemos que las puntas de ambas cuerdas colisionen de tal forma que formen una curva cerrada simple, se tendrá una cuerda cerrada que emana de la Dp -brana; es decir, las Dp -branas pueden ser fuentes de cuerdas cerradas.

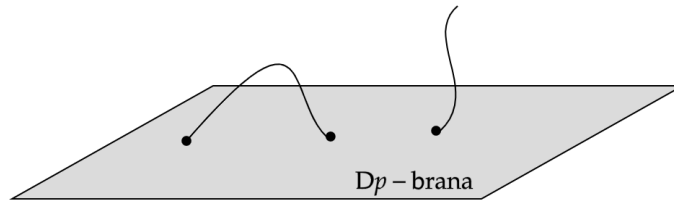


Figura 3.3: Dos cuerdas están sujetas a condiciones de frontera de Dirichlet. La cuerda izquierda tiene ambos fines sujetos mientras que la cuerda derecha sólo tiene un fin sujeto.

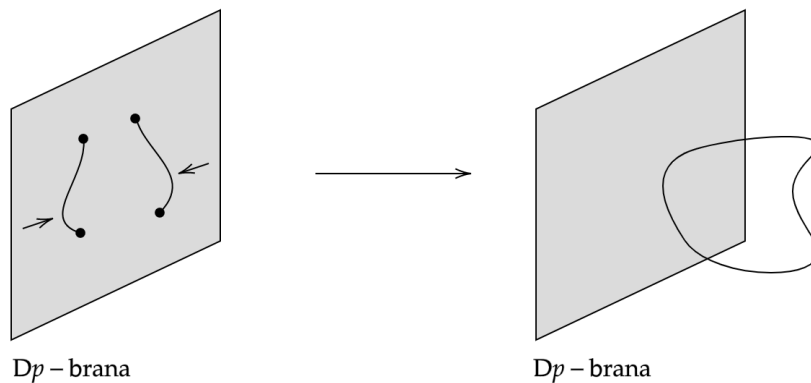


Figura 3.4: Dos cuerdas abiertas sujetas a condiciones de Dirichlet colisionan para formar una cuerda cerrada que emana de la Dp -brana correspondiente.

Análogamente a como las cuerdas tienen tensión, las Dp -branas también tienen tensión, simplemente se generaliza a una densidad de masa por unidad de hipervolumen p -dimensional. También es posible que las Dp -branas tengan carga cuya fuente es una forma $(p + 1)$ -dimensional. Hay dos tipos de teorías de cuerdas que contienen Dp -branas:

- Teoría de cuerdas tipo IIA, la cual tiene Dp -branas estables con dimensión p par.
- Teoría de cuerdas tipo IIB, la cual tiene Dp -branas estables con dimensión p impar.

Una implicación inmediata de lo anterior es que existen Dp -branas inestables en teorías de cuerdas tipo II, las cuales son de dimensión impar y par para teorías tipo IIA y tipo IIB respectivamente.

te.

La perspectiva en la cual hemos descrito a las Dp -branas es que éstas son hipersuperficies p -dimensionales en las cuales los extremos de las cuerdas abiertas pueden estar fijas. Como el tratamiento en cuerdas se hace en el contexto de perturbaciones pequeñas, esta perspectiva es útil si la constante de acoplamiento en la teoría para ambas cuerdas abiertas y cerradas es pequeña, i.e. si $g_s \ll 1$. Se puede demostrar que en el límite de bajas energías ($E \ll 1/\ell_s$, con ℓ_s siendo la longitud de la cuerda) la dinámica de las cuerdas abiertas está descrita por una teoría de norma supersimétrica que reside en el volumen de mundo de las Dp -branas. En el caso de N_c Dp -branas coincidentes, el grupo de norma se reduce al grupo unitario especial $SU(N_c)$. Así, la constante de acoplamiento efectiva es $g_s N_c$ y esta perspectiva para describir a las Dp -branas es útil para $g_s N_c \ll 1$.

Sin embargo, como las Dp -branas también son fuentes de cuerdas cerradas, éstas se pueden entender a través de la perspectiva de estos objetos. En ella, las Dp -branas son soluciones en el límite de bajas energías (extremales) de teoría de supercuerdas⁶, i.e. son soluciones de Supergravedad⁷ y se pueden considerar como fuentes de un campo gravitacional que curvan al espaciotiempo de fondo. La longitud característica de escala L debe ser larga para que la curvatura anteriormente mencionada sea débil (ya que $R \sim 1/L^2$) y para poder asegurar la validez de la aproximación de Supergravedad. En el caso de N_c Dp -branas coincidentes, $L^4/\ell_s^4 \propto g_s N_c$, por lo que esta perspectiva es útil para $g_s N_c \gg 1$.

En el caso $p = 3$, en la perspectiva de cuerdas abiertas, la teoría de norma que reside en el volumen de mundo de las D3-branas y describe la dinámica de cuerdas abiertas es $\mathcal{N} = 4$ SYM, la cual es una teoría de campos de Yang-Mills⁸ con cuatro supersimetrías en cuatro dimensiones con invariancia conforme; las cuerdas cerradas presentes en este sistema están descritas por Supergravedad tipo IIB en el espaciotiempo de Minkowski 10-dimensional. En cambio, en la perspectiva de cuerdas cerradas, el fondo consiste en dos regiones: “La garganta” o “región de garganta” de la D3-brana y una región asintóticamente plana. La dinámica de las cuerdas cerradas en la región asintóticamente

⁶La teoría de supercuerdas combina los principios de teoría de cuerdas con los de Supersimetría. La Supersimetría propone que las ecuaciones a las cuales partículas bosónicas están sujetas y las ecuaciones a las cuales partículas fermiónicas están sujetas son equivalentes. Recordemos que las partículas que son mediadoras de fuerzas son bosónicas mientras que las partículas de materia que están sujetas a dichas fuerzas son fermiónicas.

⁷La Supergravedad es una teoría de campos que combina los principios de Relatividad General y Supersimetría.

⁸Una teoría de Yang-Mills es una teoría de norma basada en el grupo unitario espacial $SU(N)$.

plana está descrita por Supergravedad tipo IIB en un espaciotiempo de Minkowski 10-dimensional, mientras que en la garganta las cuerdas cerradas están descritas por Supergravedad tipo IIB en un fondo convergente a $\text{AdS}_5 \times S^5$, lo cual a su vez es una solución de teoría de supercuerdas tipo IIB.

En resumen, tenemos que

- Perspectiva de cuerdas abiertas: $\mathcal{N} = 4$ SYM en el espaciotiempo de Minkowski cuatro-dimensional y Supergravedad tipo IIB en $\mathbb{R}^{9,1}$.
- Perspectiva de cuerdas cerradas: Supergravedad tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$ y Supergravedad tipo IIB en $\mathbb{R}^{9,1}$

La correspondencia AdS/CFT conjetura que la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM con grupo de norma $\text{SU}(N_c)$ y constante de acoplamiento g_{YM} es dual a Supergravedad tipo IIB con longitud de cuerda ℓ_s y constante de acoplamiento g_s en un fondo convergente a $\text{AdS}_5 \times S^5$ con radio de curvatura L . Los parámetros libres de la teoría cuántica de campos conforme, g_{YM} y N_c , están relacionados con los parámetros libres de la teoría de cuerdas g_s y L/ℓ_s a través de

$$g_{\text{YM}}^2 = 2\pi g_s, \quad 2g_{\text{YM}}^2 N_c = L^4/\ell_s^4. \quad (3.36)$$

Adicionalmente, la correspondencia AdS/CFT conjetura que [3]

$$Z_{\mathcal{N}=4 \text{ SYM}} = Z_{\text{AdS}_5}, \quad (3.37)$$

donde Z es la función de partición de la teoría correspondiente. En el límite $N_c \gg 1$, basta con usar la acción clásica gravitacional en el lado derecho de la igualdad de la ecuación anterior, que por la aproximación de punto silla, la función de partición gravitacional está dada por (3.6)

$$Z_{\mathcal{N}=4 \text{ SYM}}(N_c \gg 1) = e^{-S_E}, \quad (3.38)$$

donde S_E es la acción Euclídea de la teoría gravitacional. Por último, la correspondencia AdS/CFT se ha logrado generalizar en diversas formas, y una de las primeras fue la inclusión del caso con temperatura distinta de cero. En particular, el estado de plasma de $\mathcal{N} = 4$ SYM es una buena aproximación al estado de un plasma de quarks y gluones [15]; la termodinámica de esta teoría se identifica con la termodinámica de una D3-brana negra cuyo fondo, después de un truncamiento dimensional [17, 18], es asintóticamente AdS_5 y tiene un horizonte de eventos presente, es decir,

una brana negra AdS_5 . La D3-brana negra es resultante de tener una concentración $N_c \gg 1$ de D3-branas. La temperatura del lado gravitacional es la temperatura de Hawking, mientras que la entropía se puede derivar ya sea a través de la entropía de Bekenstein-Hawking o a través del método Euclídeo, que involucra usar la energía libre de Gibbs (como se muestra en (3.9)). En el capítulo siguiente, calculamos estas propiedades físicas en la teoría gravitacional en el vacío y con un campo magnético homogéneo tangente a una de las direcciones de las D3-branas, y se comparan ambos métodos de derivar la entropía para los dos casos. Es importante recalcar que estos cálculos se realizan en el límite de bajas energías de la teoría de cuerdas tipo IIB, lo cual implica que nos podemos enfocar solamente en el aspecto gravitacional, sin tener que recurrir a cálculos que involucren la longitud finita de la cuerda.

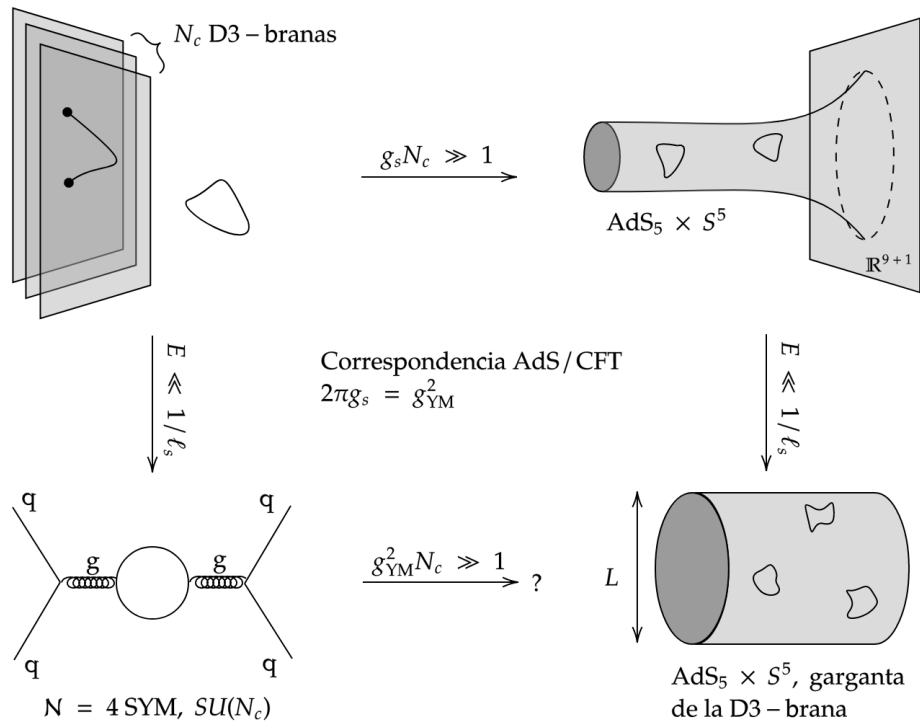


Figura 3.5: Ilustración de la correspondencia AdS/CFT.

Capítulo 4

Termodinámica de la D3-brana negra magnética

4.1. Soluciones asintóticas y cerca del horizonte

La métrica de fondo de la D3-brana negra magnética tiene un horizonte de eventos y es asintóticamente $\text{AdS}_5 \times \mathbb{M}_5$, donde \mathbb{M}_5 es una variedad compacta que depende de una 1-forma A_a tal que si $A_a = 0$, entonces $\mathbb{M}_5 = S^5$. $F = dA$ es dual al campo de Maxwell al que está sujeto el plasma de quarks y gluones. La solución 10-dimensional de la D3-brana negra magnética se puede truncar a cinco dimensiones de tal forma que la acción efectiva es la acción de Einstein-Maxwell con constante cosmológica negativa [17, 18]

$$S_{\mathcal{M}}[g^{ab}, A_a] = \frac{1}{16\pi G_5} \int_{\mathcal{M}} \left(R + \frac{12}{L^2} - L^2 F_{ab} F^{ab} \right) \sqrt{|g|} d^5x, \quad (4.1)$$

donde L es el radio de curvatura relacionado a AdS_5 , $G_5 = (\pi/2)L^3 N_c^{-2}$ [3] y N_c es el número de D3-branas coincidentes que resulta en una D3-brana negra. A la acción anterior también se le denomina acción de bulto. Las ecuaciones de movimiento resultantes de la variación de la acción de bulto respecto de g^{ab} y A_a son las ecuaciones de campo de Einstein y las ecuaciones de Maxwell

respectivamente

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} - \frac{6}{L^2}g_{ab} = 2L^2T_{ab}, \quad (4.2)$$

$$\nabla_a F^{ab} = 0, \quad (4.3)$$

donde el tensor de energía-omento electromagnético es

$$T_{ab} = F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}F_{cd}F^{cd}g_{ab}. \quad (4.4)$$

Usando coordenadas de Poincaré, proponemos como ansatz la siguiente métrica y tensor de Faraday

$$ds^2 = \frac{L^2}{U(r)}dr^2 + \frac{1}{L^2}(-U(r)dt^2 + V(r)(dx^2 + dy^2) + W(r)dz^2), \quad (4.5)$$

$$F = Bdx \wedge dy, \quad (4.6)$$

tal que conforme $r \rightarrow \infty$, la métrica es asintóticamente AdS_5

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2}dr^2 + \frac{r^2}{L^2}(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4.7)$$

en concordancia con (2.22) haciendo el cambio de variable $r = L^2u$. La presencia del horizonte de eventos se refleja en la condición $U(r_h) = 0$, donde $r = r_h$ es el radio en el horizonte, se considerará que $r \in (r_h, \infty)$ Ahora bien, la traza del tensor de energía-momento electromagnético es

$$T = -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab}, \quad (4.8)$$

donde la doble contracción del tensor de Faraday está dada por

$$F_{ab}F^{ab} = \frac{2B^2L^4}{V^2}. \quad (4.9)$$

También, la traza de (4.2) resulta en el escalar de Ricci

$$R = -\frac{20}{L^2} + \frac{1}{3}L^2F_{ab}F^{ab}. \quad (4.10)$$

Substituyendo (4.10) en (4.2) da una forma alternativa de expresar a las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{ab} + \frac{4}{L^2}g_{ab} = 2L^2\left(T_{ab} - \frac{1}{3}Tg_{ab}\right), \quad (4.11)$$

las cuales dan el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para las funciones métricas $U(r)$, $V(r)$ y $W(r)$

$$3V^2U'W' + W(-8B^2L^8 + 6VU'V' + 6V^2(-8 + U'')) = 0, \quad (4.12)$$

$$16B^2L^8W - 48V^2W + 6VWU'V' + 3UV(V'W' + 2WV'') = 0, \quad (4.13)$$

$$8W^2(6V^2 + B^2L^8) - 6VWW'(VU' + UV') + 3UV^2W'^2 - 6UV^2WW'' = 0, \quad (4.14)$$

$$4W(B^2L^8 - 6V^2) + VU'(2WV' + VW') + UV'(2VW' + WV') = 0. \quad (4.15)$$

Las ecuaciones (4.12)-(4.14) son ecuaciones dinámicas para las funciones métricas, mientras que la ecuación (4.15) es una restricción. Debido a que se obtendrán cantidades evaluadas en $r = r_h$ y en $r \rightarrow \infty$, las expansiones de las funciones métricas alrededor del horizonte al igual que sus expansiones asintóticas serán útiles. Para obtener el comportamiento de las funciones métricas U , V , W cerca de r_h , se expanden en series de Taylor alrededor de dicho radio

$$U(r) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n,h}(r - r_h)^n, \quad (4.16)$$

$$V(r) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{n,h}(r - r_h)^n, \quad (4.17)$$

$$W(r) = \sum_{n=0}^{\infty} W_{n,h}(r - r_h)^n, \quad (4.18)$$

y se substituyen recursivamente en las ecuaciones (4.12)-(4.14) de tal forma que las ecuaciones diferenciales se satisfagan a cada orden. Lo anterior resulta en un sistema de ecuaciones lineales que podemos resolver para obtener el valor de los coeficientes de expansión a primer orden. Una vez resuelto el sistema, substituímos las constantes anteriores en nuestras expansiones, substituímos de nuevo en nuestro sistema de ecuaciones diferenciales y resolvemos el nuevo sistema de ecuaciones lineales en términos de las constantes de orden mayor al anterior y así sucesivamente. Este algoritmo se sigue hasta que se llegue al orden que uno desee. En nuestro caso, nosotros expandiremos

hasta segundo orden. Esto resulta en

$$U(r) = U_{1,h}(r - r_h) + \left(\frac{5B^2L^8}{3V_{0,h}^2} - 2 \right) (r - r_h)^2 + \mathcal{O}(r - r_h)^3, \quad (4.19)$$

$$V(r) = V_{0,h} - \frac{8B^2L^8 - 3V_{0,h}^2}{3U_{1,h}V_{0,h}}(r - r_h) + \frac{8(B^2L^8 - 9V_{0,h}^2)B^2L^8 + 18V_{0,h}^4}{9U_{1,h}^2V_{0,h}^3}(r - r_h)^2 + \mathcal{O}(r - r_h)^3, \quad (4.20)$$

$$W(r) = W_{0,h} + \frac{4(B^2L^8 + 6V_{0,h}^2)W_{0,h}}{3U_{1,h}V_{0,h}^2}(r - r_h) + \frac{4(5B^4L^{16} + 36V_{0,h}^4)W_{0,h}}{9U_{1,h}^2V_{0,h}^4}(r - r_h)^2 + \mathcal{O}(r - r_h)^3. \quad (4.21)$$

Ahora, para la expansión asintótica se expanden las funciones métricas en series de potencias con coeficientes constantes y logarítmicos

$$U(r) = \sum_{n=-\infty}^7 U_{7-n,\infty} r^{n-5} + \sum_{n=-\infty}^6 U_{6-n,\infty_\ell} \ln(r/L) r^{n-5}, \quad (4.22)$$

$$V(r) = \sum_{n=-\infty}^7 V_{7-n,\infty} r^{n-5} + \sum_{n=-\infty}^6 V_{6-n,\infty_\ell} \ln(r/L) r^{n-5}, \quad (4.23)$$

$$W(r) = \sum_{n=-\infty}^7 W_{7-n,\infty} r^{n-5} + \sum_{n=-\infty}^6 W_{6-n,\infty_\ell} \ln(r/L) r^{n-5}, \quad (4.24)$$

y seguimos un procedimiento análogo a la expansión alrededor del horizonte. En nuestro caso, expandiremos hasta orden $1/r^2$ e imponemos la condición de frontera (4.7). Así, obtenemos las siguientes expansiones asintóticas.

$$U(r) = r^2 + U_{1,\infty}r + \frac{U_{1,\infty}^2}{4} + \frac{1}{r^2} \left(U_{4,\infty} - \frac{2}{3}B^2L^8 \ln(r/L) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (4.25)$$

$$V(r) = r^2 + U_{1,\infty}r + \frac{U_{1,\infty}^2}{4} + \frac{1}{r^2} \left(-\frac{1}{2}W_{4,\infty} + \frac{1}{3}B^2L^8 \ln(r/L) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (4.26)$$

$$W(r) = r^2 + U_{1,\infty}r + \frac{U_{1,\infty}^2}{4} + \frac{1}{r^2} \left(W_{4,\infty} - \frac{2}{3}B^2L^8 \ln(r/L) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (4.27)$$

4.2. Energía libre de Gibbs y entropía

4.2.1. Acción de bulto y término de Gibbons-Hawking

La energía libre de Gibbs para un sistema gravitacional está dada por el producto de la temperatura por la acción Euclídea total. La acción Euclídea se obtiene al hacer una rotación de Wick $t \rightarrow it$ en la

acción de bulto, al igual que en el término de Gibbons-Hawking, junto con la adición de términos de frontera en caso de que sea necesario eliminar divergencias en esta región. Después de la rotación de Wick, la métrica Euclídea y la acción de bulto Euclídea son respectivamente

$$ds_E^2 = \frac{L^2}{U(r)} dr^2 + \frac{1}{L^2} (U(r) dt_E^2 + V(r)(dx^2 + dy^2) + W(r) dz^2), \quad (4.28)$$

$$S_{E, \mathcal{M}} = -\frac{1}{16\pi G_5} \int_{\mathcal{M}} \left(R + \frac{12}{L^2} - L^2 F_{ab} F^{ab} \right) \sqrt{g_E} d^5 x. \quad (4.29)$$

La acción de bulto se puede simplificar a través de las ecuaciones de campo de Einstein. En particular, usando (4.9) y (4.10) en la ecuación (4.12) (que es la componente temporal de las ecuaciones de campo) se obtiene

$$\begin{aligned} -48 - \frac{8B^2 L^8}{V^2} + \frac{6U'V'}{V} + \frac{3U'W'}{W} + 6U'' &= 0 \\ -\frac{20}{L^2} + \frac{1}{3} L^2 F_{ab} F^{ab} + \frac{12}{L^2} - L^2 F_{ab} F^{ab} + \frac{1}{L^2} \left(\frac{U'V'}{V} + \frac{U'W'}{2W} + U'' \right) &= 0 \\ R + \frac{12}{L^2} - L^2 F_{ab} F^{ab} &= -\frac{1}{L^2} \left(\frac{U'V'}{V} + \frac{U'W'}{2W} + U'' \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Substituyendo a (4.30) en (4.29) da

$$\begin{aligned} S_{E, \mathcal{M}} &= \frac{1}{16\pi L^5 G_5} \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{U'V'}{V} + \frac{U'W'}{2W} + U'' \right) V \sqrt{W} d^5 x \\ &= \frac{V_3}{16\pi L^5 G_5 T} \int_{r_h}^{\xi} (U'V\sqrt{W})' dr \\ &= \frac{V_3}{16\pi L^5 G_5 T} (U'V\sqrt{W}) \Big|_{r_h}^{\xi}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde ξ es un radio de corte, $V_3 = \int dx dy dz$ es el volumen de integración sobre las direcciones tangenciales a las D3-branas y $1/T = \int dt_E$.

El término de Gibbons-Hawking Euclídeo se obtiene haciendo una rotación de Wick en (2.60)

$$S_{E, \partial \mathcal{M}} = -\frac{1}{8\pi G_5} \int_{\partial \mathcal{M}} K \sqrt{\gamma_E} \Big|_{r=\xi} d^4 x, \quad (4.32)$$

donde γ_{ab_E} es la métrica Euclídea inducida en la hipersuperficie definida por el radio de corte $r = \xi \rightarrow \infty$ dada por (2.55). Como (4.5) es diagonal, el vector normal a nuestra hipersuperficie está dado por

$$n^\mu \partial_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_{\mu\nu} (\partial_r)^\mu (\partial_r)^\nu}} \partial_r = \frac{\sqrt{U}}{L} \partial_r. \quad (4.33)$$

Substituyendo a n^a en (2.59)

$$\begin{aligned} K &= \frac{L^3}{V\sqrt{W}} \frac{1}{L^3} \left(\frac{\sqrt{U}}{L} V \sqrt{W} \right)' \\ &= \frac{1}{L} \frac{1}{V\sqrt{W}} \left(\frac{U'V\sqrt{W}}{2\sqrt{U}} + \sqrt{U}(V\sqrt{W})' \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Así, el término de Gibbons-Hawking Euclídeo es

$$S_{E_{\partial\mathcal{M}}} = -\frac{1}{16\pi L^5 G_5} \int_{\partial\mathcal{M}} \left(U'V\sqrt{W} + 2U(V\sqrt{W})' \right) \Big|_{r=\xi} d^4x. \quad (4.35)$$

Sumando lo anterior con la acción de bulto Euclídea da

$$S_{E_{\mathcal{M}}} + S_{E_{\partial\mathcal{M}}} = -\frac{V_3}{16\pi L^5 G_5 T} \left(U'V\sqrt{W} \Big|_{r=r_h} + 2U(V\sqrt{W})' \Big|_{r=\xi} \right). \quad (4.36)$$

4.2.2. Términos de frontera

La evaluación de la acción en capa de masa debe ser finito, por lo que necesitamos regularizar a (4.29) y a (4.32) en caso de que su suma diverja. Lo anterior se realiza analizando el comportamiento asintótico de la acción de bulto Euclídea y el término de Gibbons-Hawking Euclídeo. En particular, sustituimos las expansiones (4.25)-(4.27) en (4.29) y (4.32), y vemos cuáles son los términos dominantes en la frontera. Estos son

$$-\frac{1}{16\pi G_5} \int_{\mathcal{M}} R \sqrt{g_E} d^5x \simeq \frac{1}{16\pi G_5} \int \frac{20r^3}{L^5} dr \int_{\partial\mathcal{M}} d^4x = \frac{1}{16\pi G_5} \int \frac{5r^4}{L^5} \Big|_{r=\xi} d^4x, \quad (4.37)$$

$$-\frac{1}{16\pi G_5} \int_{\mathcal{M}} \frac{12}{L^2} \sqrt{g_E} d^5x \simeq -\frac{1}{16\pi G_5} \int \frac{12r^3}{L^5} dr \int_{\partial\mathcal{M}} d^4x = -\frac{1}{16\pi G_5} \int \frac{3r^4}{L^5} \Big|_{r=\xi} d^4x, \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi G_5} \int_{\mathcal{M}} L^2 F_{ab} F^{ab} \sqrt{g_E} d^5x &\simeq \frac{1}{16\pi G_5} \int \frac{2B^2 L^3}{r} dr \int_{\partial\mathcal{M}} d^4x \\ &= \frac{1}{16\pi G_5} \int \frac{2B^2 L^3 \ln(r/L)}{\partial\mathcal{M}} \Big|_{r=\xi} d^4x, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$-\frac{1}{16\pi G_5} \int_{\partial\mathcal{M}} 2K \sqrt{\gamma_E} \Big|_{r=\xi} d^4x \simeq -\frac{1}{16\pi G_5} \int \frac{8r^4}{L^5} \Big|_{r=\xi} d^4x. \quad (4.40)$$

Así, para que el comportamiento asintótico de (4.36) sea finito, se le resta a esta ecuación la suma de los términos anteriores. Dicha suma es

$$\frac{1}{16\pi G_5} \int_{\partial\mathcal{M}} \left(\frac{6r^4}{L^5} - 2B^2 L^3 \ln(r/L) \right) \Big|_{r=\xi} d^4x. \quad (4.41)$$

Sin embargo, los términos de frontera deben de estar expresados en términos de cantidades covariantes. Notemos que conforme $r \rightarrow \infty$

$$\sqrt{\gamma_E} \simeq \frac{r^4}{L^4}, \quad F_{ab}F^{ab} \simeq \frac{2B^2L^4}{r^4}, \quad (4.42)$$

donde en las ecuaciones anteriores se volvieron a usar las expansiones (4.25)-(4.27). Por tanto, substituyendo lo anterior en (4.41), los términos de frontera son

$$S_{\text{bnd}} = \frac{1}{16\pi G_5} \int_{\partial \mathcal{M}} \left(\frac{6}{L} - L^3 F_{ab}F^{ab} \ln(r/L) \right) \sqrt{\gamma_E} \Big|_{r=\xi} d^4x. \quad (4.43)$$

También podemos añadir un término asintóticamente finito en nuestros términos de frontera sin que la acción de bulto ni el término de Gibbons-Hawking se vean afectados. En particular,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F_{ab}F^{ab} \sqrt{\gamma_E} = 2b^2,$$

cuya contribución es finita, por lo que los términos de frontera se pueden modificar a

$$S_{\text{bnd}} \rightarrow S_{\text{bnd}} - \frac{1}{16\pi G_5} \int_{\partial \mathcal{M}} C_{\text{sch}} L^3 F_{ab}F^{ab} \sqrt{\gamma_E} \Big|_{r=\xi} d^4x, \quad (4.44)$$

donde C_{sch} se le denomina constante de esquema. Así, la contribución más general de los términos de frontera es

$$S_{\text{bnd}} = \frac{1}{16\pi G_5} \int_{\partial \mathcal{M}} \left(\frac{6}{L} - L^3 F_{ab}F^{ab} \ln(r/L) - C_{\text{sch}} L^3 F_{ab}F^{ab} \right) \sqrt{\gamma_E} \Big|_{r=\xi} d^4x. \quad (4.45)$$

El efecto de añadir esta constante de esquema es fijar un esquema de renormalización en la teoría de norma, de ahí el nombre.

4.2.3. Caso $B = 0$

En el vacío, las ecuaciones de movimiento (4.12)-(4.14) son

$$VU'W' + 2W(U'V' + V(-8 + U'')) = 0, \quad (4.46)$$

$$48VW - 6WU'V' - 3U(V'W' + 2WV'') = 0, \quad (4.47)$$

$$48VW^2 - 6WW'(VU' + UV') + 3UVW'^2 - 6UVWW'' = 0. \quad (4.48)$$

Como ansatz, proponemos las familias de soluciones

$$U(r) = (r + c_1)^2 \left(1 - \frac{(r_h + c_1)^4}{(r + c_1)^4} \right), \quad (4.49)$$

$$V(r) = c_2(r + c_1)^2, \quad (4.50)$$

$$W(r) = c_3(r + c_1)^2; \quad (4.51)$$

con $c_1, c_2, c_3 = \text{cte}$ y c_1 se mide en unidades de r_h . Notemos que $U(r_h) = 0$. Luego,

$$U'(r) = \frac{2((r + c_1)^4 + (r_h + c_1)^4)}{(r + c_1)^3}, \quad U''(r) = 2 \left(1 - \frac{3(r_h + c_1)^4}{(r + c_1)^4} \right), \quad (4.52)$$

$$V'(r) = 2c_2(r + c_1), \quad V''(r) = 2c_2, \quad (4.53)$$

$$W'(r) = 2c_3(r + c_1), \quad W''(r) = 2c_3. \quad (4.54)$$

Substituimos las ecuaciones anteriores en (4.46)-(4.48) para comprobar que nuestro ansatz cumple las ecuaciones de campo.

- Ecuación (4.46):

$$4c_2c_3((r + c_1)^4 + (r_h + c_1)^4 - (r^4 + r_h^4 + 4c_1(r^3 + r_h^3) + 6c_1^2(r^2 + r_h^2) + 4c_1^3(r + r_h) + 2c_1^4)) = 0, \quad (4.55)$$

por la expansión binomial a orden 4.

- Ecuación (4.47):

$$24c_2c_3(2(r + c_1)^4 - ((r + c_1)^4 + (r_h + c_1)^4) - (r + c_1)^4 + (r_h + c_1)^4) = 0. \quad (4.56)$$

- Ecuación (4.48):

$$12c_2c_3^3(4((r + c_1)^6 - (r + c_1)^6) + (r + c_1)^2((r + c_1)^4 - (r_h + c_1)^4 - (r + c_1)^4 + (r_h + c_1)^4)) = 0. \quad (4.57)$$

Por tanto, las ecuaciones (4.49)-(4.51) sí son soluciones de las ecuaciones de movimiento en el vacío. Notemos que (2.68) coincide con las ecuaciones (4.49) – (4.51) con $c_1 = 0$ y $c_2 = c_3 = 1$, por lo que (2.68) también es una solución de las ecuaciones de movimiento (4.12)-(4.14). Ahora,

las expansiones de estas funciones alrededor de r_h son

$$U(r) = 4(r_h + c_1)(r - r_h) - 2(r - r_h)^2 + \mathcal{O}(r - r_h)^3, \quad (4.58)$$

$$V(r) = c_2(r_h + c_1)^2 + 2c_2(r_h + c_1)(r - r_h) + c_2(r - r_h)^2, \quad (4.59)$$

$$W(r) = c_3(r_h + c_1)^2 + 2c_3(r_h + c_1)(r - r_h) + c_3(r - r_h)^2. \quad (4.60)$$

Mientras que sus expansiones asintóticas son

$$U(r) = r^2 + 2c_1r + c_1^2 - \frac{(r_h + c_1)^4}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (4.61)$$

$$V(r) = c_2r^2 + 2c_1c_2r + c_1^2c_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (4.62)$$

$$W(r) = c_3r^2 + 2c_1c_3r + c_1^2c_3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (4.63)$$

Para que nuestras funciones métricas describan a la D3-brana negra en el vacío, necesitamos que la métrica (4.5) sea asintóticamente AdS (como se describe en la ecuación (4.7)), por lo que es necesario normalizar a las funciones $V(r)$ y $W(r)$ por

$$V(r) \rightarrow \frac{V(r)}{c_2}, \quad W(r) \rightarrow \frac{W(r)}{c_3}, \quad (4.64)$$

de tal forma que los términos dominantes de sus expansiones asintóticas ahora sí coinciden con (4.26) y (4.27). Cabe recalcar que estas normalizaciones no afectan a las ecuaciones de movimiento (4.46)-(4.48), ya que son invariantes bajo reescalamientos independientes de $V(r)$ y $W(r)$. Se debe de tener en mente que estas normalizaciones también afectan las expansiones de estas funciones alrededor de r_h .

En este caso, sólo se tiene un término de frontera,

$$S_{\text{bnd}} = \frac{1}{16\pi G_5} \int_{\partial \mathcal{M}} \frac{6}{L} \sqrt{\gamma_E} \Big|_{r=\xi} d^4x. \quad (4.65)$$

La acción Euclídea total es

$$S_T := S_{E_{\mathcal{M}}} + S_{E_{\partial \mathcal{M}}} + S_{\text{bnd}}. \quad (4.66)$$

Por (3.9), la energía libre de Gibbs está dada por $G = TS_T$. Así, substituyendo en (4.66) la expansión de (4.36) alrededor de $r \rightarrow \infty$ y $r = r_h$ en el primer y segundo término respectivamente, al igual

que la expansión de (4.65) alrededor de $r \rightarrow \infty$, da como resultado la siguiente energía libre de Gibbs por unidad de volumen $\mathcal{G} := G/V_3$

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{16\pi L^5 G_5} \left(U_{1,h} V_{0,h} \sqrt{W_{0,h}} + 3U_{4,\infty} \right). \quad (4.67)$$

De las ecuaciones (4.58)-(4.61), los coeficientes de expansión $U_{1,h}$, $V_{0,h}$, $W_{0,h}$ y $U_{4,\infty}$ se pueden expresar en unidades de r_h . En particular, estos son $U_{1,h} = r_h \tilde{U}_{1,h}$, $(V_{0,h}, W_{0,h}) = r_h^2 (\tilde{V}_{0,h}, \tilde{W}_{0,h})$ y $U_{4,\infty} = r_h^4 \tilde{U}_{4,\infty}$. Explícitamente,

$$\tilde{U}_{1,h} = 4 \left(1 + \frac{c_1}{r_h} \right), \quad \tilde{V}_{0,h} = \tilde{W}_{0,h} = \left(1 + \frac{c_1}{r_h} \right)^2, \quad \tilde{U}_{4,\infty} = - \left(1 + \frac{c_1}{r_h} \right)^4. \quad (4.68)$$

Como c_1 se da en términos de r_h , las constantes anteriores no dependen de r_h . Así, (4.67) se transforma en

$$\mathcal{G} = -\frac{r_h^4}{16\pi L^5 G_5} \left(\tilde{U}_{1,h} \tilde{V}_{0,h} \sqrt{\tilde{W}_{0,h}} + 3\tilde{U}_{4,\infty} \right). \quad (4.69)$$

Por (3.19), la temperatura de nuestra D3-brana negra es

$$T = \frac{U'(r_h)}{4\pi L^2} = \frac{U_{1,h}}{4\pi L^2} = \frac{\tilde{U}_{1,h} r_h}{4\pi L^2}. \quad (4.70)$$

¹La entropía por unidad de volumen s está dada por $s = -\partial_T \mathcal{G}$, que por la ecuación anterior también se puede calcular con $s = -dr_h/dT \cdot \partial_{r_h} \mathcal{G} = -4\pi L^2 / \tilde{U}_{1,h} \cdot \partial_{r_h} \mathcal{G}$. Así, por (4.69)

$$s = \frac{r_h^3}{\tilde{U}_{1,h} L^3 G_5} \left(\tilde{U}_{1,h} \tilde{V}_{0,h} \sqrt{\tilde{W}_{0,h}} + 3\tilde{U}_{4,\infty} \right). \quad (4.71)$$

Notemos que de (4.68) se obtiene la relación

$$\tilde{U}_{4,\infty} = -\frac{1}{4} \tilde{U}_{1,h} \tilde{V}_{0,h} \sqrt{\tilde{W}_{0,h}}. \quad (4.72)$$

Substituyendo la ecuación anterior en (4.71) da

$$s = \frac{r_h^3}{4L^3 G_5} \tilde{V}_{0,h} \sqrt{\tilde{W}_{0,h}} = \frac{32N_c^2 \pi^2 T^3}{\tilde{U}_{1,h}^3} \tilde{V}_{0,h} \sqrt{\tilde{W}_{0,h}}, \quad (4.73)$$

donde en la última igualdad se substituyó (4.70) y $G_5 = (\pi/2)L^3 N_c^{-2}$. Por otro lado, la entropía de Bekenstein-Hawking por unidad de volumen es

$$s_{\text{BH}} = \frac{A_h}{4V_3 G_5}, \quad (4.74)$$

¹De aquí en adelante, los conceptos de temperatura y r_h son intercambiables debido a (4.70).

donde el área del horizonte está dada por

$$A_h = \frac{1}{L^3} \int_{V_3} V \sqrt{W} \Big|_{r=r_h} d^3x = \frac{V_3 r_h^3}{L^3} \tilde{V}_{0,h} \sqrt{\tilde{W}_{0,h}}, \quad (4.75)$$

por lo que s_{BH} es

$$s_{\text{BH}} = \frac{r_h^3}{4L^3 G_5} \tilde{V}_{0,h} \sqrt{\tilde{W}_{0,h}} = \frac{32N_c^2 \pi^2 T^3}{\tilde{U}_{1,h}^3} \tilde{V}_{0,h} \sqrt{\tilde{W}_{0,h}}, \quad (4.76)$$

Por tanto, para la D3-brana negra, la entropía derivada de la energía libre de Gibbs y la entropía de Bekenstein-Hawking son iguales.

4.2.4. Caso $B \neq 0$

Para generar una solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales (4.12)-(4.14) se usaron las expansiones (4.19)-(4.21), en las cuales se fijaron algunos valores para los coeficientes de expansión pertinentes y usar las expresiones resultantes como datos iniciales para las funciones métricas en $r = r_h + \epsilon$, con $\epsilon \ll r_h$, y después integrar numéricamente hasta la frontera $r \rightarrow \infty$. Lo anterior se hizo para 32 valores distintos de r_h . Generalmente, el comportamiento asintótico de estas funciones es

$$U(r) \rightarrow r^2, \quad V(r) \rightarrow c_2 r^2, \quad W(r) \rightarrow c_3 r^2; \quad (4.77)$$

con $c_2, c_3 = \text{cte}$. Análogamente al caso anterior, para que la métrica (4.5) sea asintóticamente AdS, se necesitan normalizar las funciones $V(r)$ y $W(r)$ para que la métrica sea asintóticamente AdS. Sin embargo, notemos que (4.12)-(4.14) son invariantes bajo reescalamientos simultáneos de $V(r)$ y B , o bajo reescalamientos independientes de $W(r)$; para que las ecuaciones de movimiento sigan siendo válidas con la normalización de $V(r)$, también se debe de reescalar a B por el mismo factor

$$b = \frac{B}{c_2}, \quad (4.78)$$

que en consecuencia, es el campo magnético de fondo de nuestra D3-brana negra. Por construcción, está la imposición de que b se mantenga constante, aunque también se realizó lo anterior para el caso en que b/T^2 permanece constante. A lo largo del análisis, usaremos $\tilde{U}_{1,h} = 6$ y $\tilde{W}_{0,h} = 3$, en concordancia con las expansiones cerca del horizonte que se exponen en [4].

Las funciones métricas resultantes de la solución numérica de las ecuaciones de movimiento (4.12)-(4.15) tienen el siguiente comportamiento.

Gráficas de las funciones métricas con $r \in (r_h, 10r_h)$ y $T \in \{3/2\pi, 9/4\pi, 3/\pi, 15/4\pi, 9/2\pi\}$ bajo la condición $b = 3.9734..$

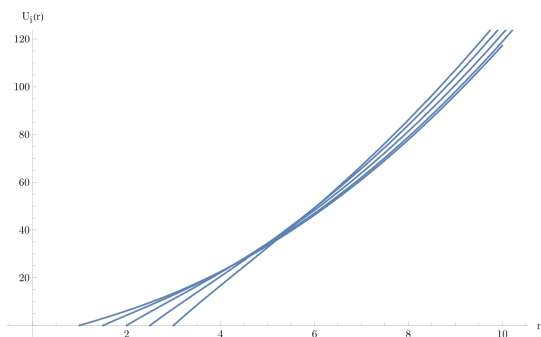


Figura 4.1: $U_i(r)/r^2$ vs. r .

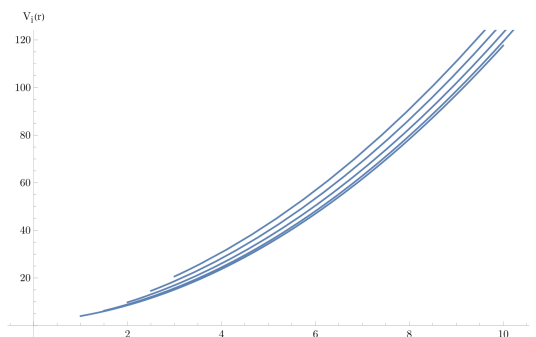


Figura 4.2: $V_i(r)/r^2$ vs. r .

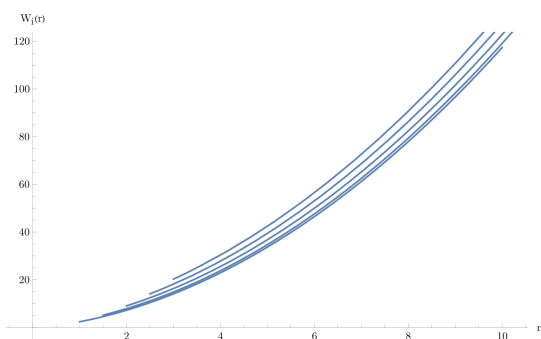


Figura 4.3: $W_i(r)/r^2$ vs. r .

Gráficas de las funciones métricas para $T \in \{3/2\pi, 9/4\pi, 3/\pi, 15/4\pi, 9/2\pi\}$ y $b = 3.9734..$

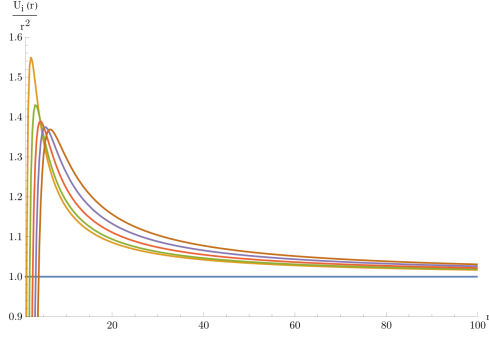


Figura 4.4: $U_i(r)/r^2$ vs. r .

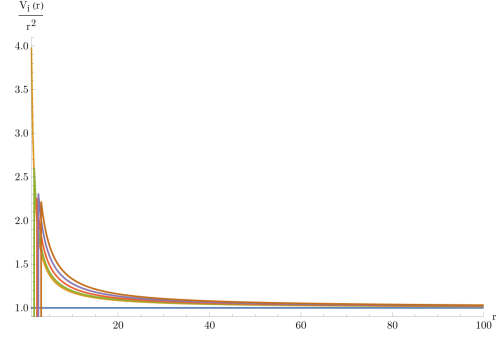


Figura 4.5: $V_i(r)/r^2$ vs. r .

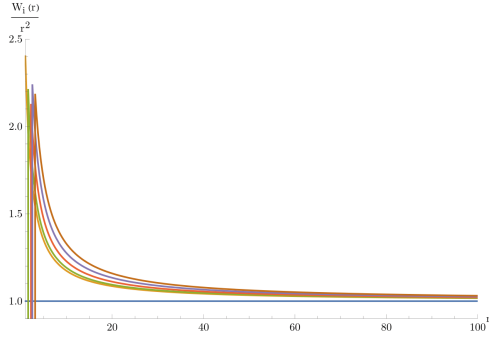


Figura 4.6: $W_i(r)/r^2$ vs. r .

Aunque dichas funciones se graficaron para cinco temperaturas de fondo, se tiene un comportamiento análogo para las 27 temperaturas restantes. Conforme $r \rightarrow \infty$, $U(r)/r^2$, $V(r)/r^2$ y $W(r)/r^2$ tienden a 1, lo cual confirma que (4.5) es asintóticamente AdS y nuestro ansatz fue adecuado.

Como (4.36) también es válida para este caso, ahora sólo debemos de considerar la contribución total de los términos de frontera dada por (4.45) en la acción Euclídea total. Haciendo una expansión análoga al caso anterior, obtenemos que la energía libre de Gibbs por unidad de volumen es

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{16\pi L^5 G_5} \left(U_{1,h} V_{0,h} \sqrt{W_{0,h}} + 3U_{4,\infty} + 2C_{\text{sch}} b^2 L^8 \right) \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{r_h^4}{16\pi L^5 G_5} \left(\frac{U_{1,h}}{r_h} \frac{V_{0,h}}{r_h^2} \sqrt{\frac{W_{0,h}}{r_h^2}} + \frac{3U_{4,\infty}}{r_h^4} + \frac{2C_{\text{sch}} b^2 L^8}{r_h^4} \right) \\ &= -\frac{r_h^4}{L^5 G_5} (A + B + C), \end{aligned} \quad (4.80)$$

donde

$$A := \frac{1}{16\pi} \frac{U_{1,h}}{r_h} \frac{V_{0,h}}{r_h^2} \sqrt{\frac{W_{0,h}}{r_h^2}}, \quad (4.81)$$

$$B := \frac{3U_{4,\infty}}{16\pi r_h^4}, \quad (4.82)$$

$$C := \frac{2C_{\text{sch}} b^2 L^8}{16\pi r_h^4}. \quad (4.83)$$

En el caso vacío, \mathcal{G} no depende implícitamente de la temperatura y la única dependencia que se tiene de este parámetro es T^4 ; en particular, los coeficientes de expansión dados por (4.68) no dependen de r_h (que es el único parámetro libre en dicho caso). Lo anterior implica que \mathcal{G} no presenta inhomogeneidades de ningún tipo y confirma la invariancia bajo reescalamientos de esa teoría. En cambio, cuando se considera la combinación adimensional de los parámetros libres en este caso, que es $b/T^2 = \text{cte}$, no se tiene el mismo comportamiento. Basándonos en la siguiente figura

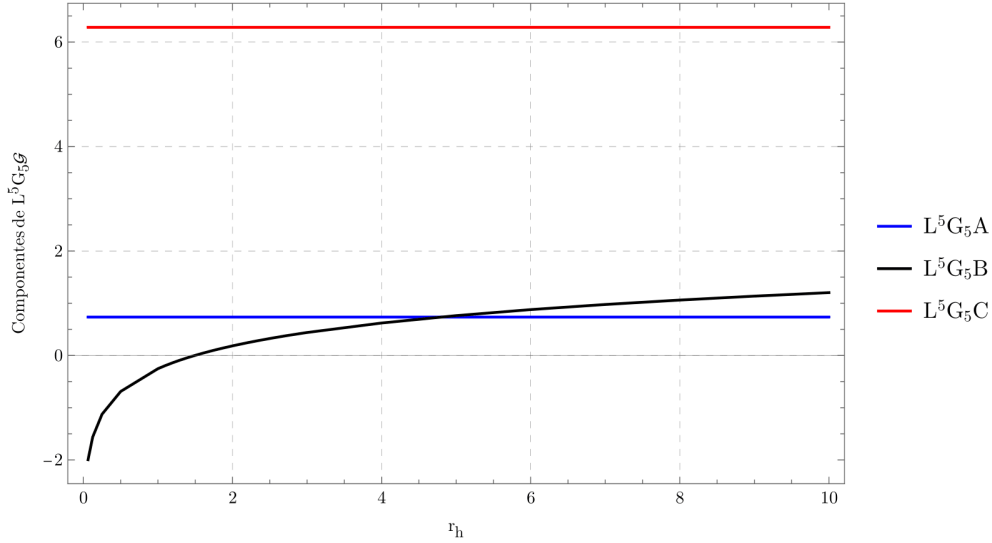


Figura 4.7: Términos en unidades de r_h de \mathcal{G} vs. r_h con $C_{\text{sch}} = 10$ y la condición $b/T^2 = 17.4295$.

podemos ver que el coeficiente de expansión $U_{4,\infty}/r_h^4$ tiene una dependencia en la temperatura² mientras que A y C sólo dependen de b/T^2 , ya que éstas son constantes bajo esta condición. Por tanto, el coeficiente de expansión $U_{4,\infty}/r_h^4$ rompe la invariancia bajo reescalamientos cuando $b \neq 0$

²Por la condición $b/T^2 = \text{cte}$, también se puede decir que depende del campo magnético.

debido a que éste no sólo depende de la condición $b/T^2 = \text{cte}$. Sin embargo, este comportamiento anómalo se arregla con la adición del término logarítmico que acompaña a $U_{4,\infty}$ en la expansión asintótica de $U(r)$ en (4.25) (evaluado en r_h). Lo anterior se puede observar en la siguiente gráfica al igual que la dependencia del coeficiente de expansión $U_{1,\infty}/r_h$ en b/T^2 .

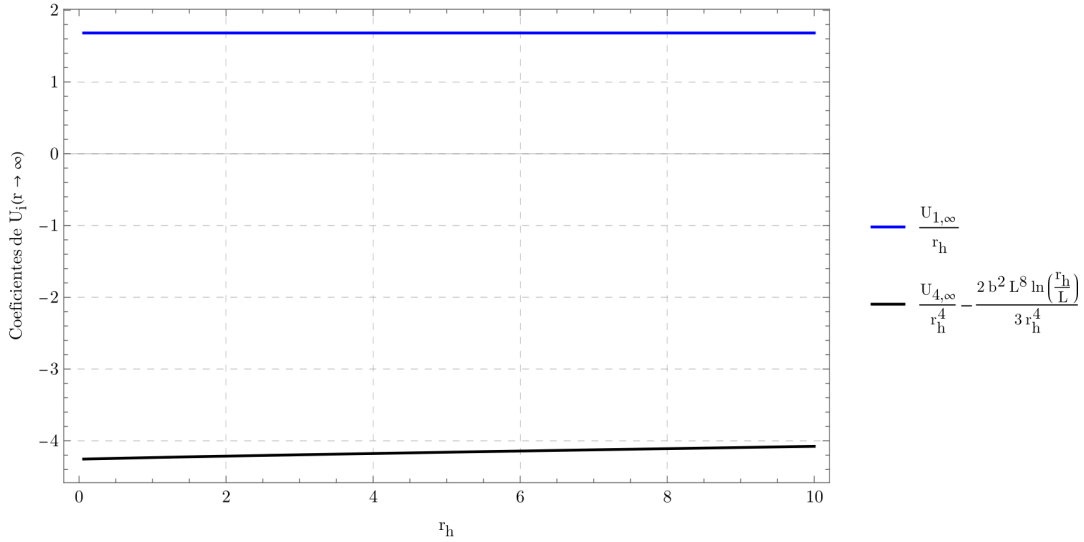


Figura 4.8: Coeficientes adimensionales de la expansión asintótica de $U(r)$ contra r_h con $b/T^2 = 17.4295$ y $C_{\text{sch}} = 10$.

Por tanto, bajo la condición b/T^2 , $U_{4,\infty}/r_h^4$ depende logarítmicamente de la temperatura.

Ahora bien, el cálculo de la entropía de la D3-brana negra magnética se hizo de cuatro maneras. La primera es con la entropía de Bekenstein-Hawking

$$s_{\text{BH}} = \frac{1}{4L^3 G_5} V_{0,h} \sqrt{W_{0,h}}. \quad (4.84)$$

La segunda, tercera y cuarta es con la siguiente derivada

$$s_i = -\frac{4\pi L^2}{\tilde{U}_{1,h}} \left(\frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial r_h} \right)_b, \quad (4.85)$$

donde $i \in \{1, 2, 3\}$ etiqueta las entropías deducidas de las energías libres de Gibbs con las que se trabajaron, la derivada anterior se realizó numéricamente. \mathcal{G}_1 es la energía libre que se describe en (4.79). \mathcal{G}_2 es una forma alternativa de expresar a (4.79). En particular, la ecuación de movimiento

(4.12) se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
-8 - \frac{4}{3} \frac{b^2 L^8}{V^2} + \frac{U'V'}{V} + \frac{U'W'}{2W} + U'' &= 0, \\
\frac{4}{3} \left(\frac{b^2 L^8}{V^2} + 6 \right) &= \frac{U'V'}{V} + \frac{U'W'}{2W} + U''.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Por (4.30), la acción de bulto Euclídea se puede escribir como

$$\begin{aligned}
S_{E_{\mathcal{M}}} &= \frac{1}{16\pi L^2 G_5} \int_{\mathcal{M}} \frac{4}{3} \left(\frac{b^2 L^8}{V^2} + 6 \right) \sqrt{g_E} d^5 x \\
&= \frac{V_3}{16\pi L^5 G_5 T} \int_{r_h}^{\xi} \frac{4}{3} \left(\frac{b^2 L^8}{V^2} + 6 \right) V \sqrt{W} dr.
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Luego, expandimos el término de Gibbons-Hawking junto con los términos de frontera en $r \rightarrow \infty$ apoyándonos de las expansiones (4.25)-(4.27)

$$\begin{aligned}
S_{\text{Bnd}} &= S_{E_{\partial \mathcal{M}}} + S_{\text{bnd}} \\
&= \frac{1}{16\pi G_5} \int_{\partial \mathcal{M}} \left(-2K + \frac{6}{L} - L^3 F_{ab} F^{ab} \ln(r/L) - C_{\text{sch}} L^3 F_{ab} F^{ab} \right) \sqrt{\gamma_E} \Big|_{r=\xi} d^4 x \\
&= \frac{V_3}{16\pi L^5 G_5 T} \left(-2\xi^4 - 4U_{1,\infty} \xi^3 - 3U_{1,\infty}^2 \xi^2 - U_{1,\infty}^3 \xi - \frac{4}{3} b^2 L^8 \ln(\xi/L) \right. \\
&\quad \left. + 2b^2 L^8 \left(\frac{1}{3} - C_{\text{sch}} \right) - \frac{1}{8} U_{1,\infty}^4 - U_{4,\infty} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right) \\
&= -\frac{V_3}{16\pi L^5 G_5 T} \int_{r_h}^{\xi} \left(8r^3 + 12U_{1,\infty} r^2 + 6U_{1,\infty}^2 r + U_{1,\infty}^3 + \frac{4b^2 L^8}{3r} \right) dr \\
&\quad - \frac{V_3}{16\pi L^5 G_5 T} \left(2r_h^4 + 4U_{1,\infty} r_h^3 + 3U_{1,\infty}^2 r_h^2 + U_{1,\infty}^3 r_h + \frac{4}{3} b^2 L^8 \ln(r_h/L) \right. \\
&\quad \left. - 2b^2 L^8 \left(\frac{1}{3} - C_{\text{sch}} \right) + \frac{1}{8} U_{1,\infty}^4 + U_{4,\infty} \right).
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Juntando lo anterior con (4.86) resulta en la siguiente energía libre de Gibbs

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2 = & \frac{1}{16\pi L^5 G_5} \int_{r_h}^{\xi} \left(\frac{4}{3} \left(\frac{b^2 L^8}{V^2} + 6 \right) V \sqrt{W} \right. \\
& \left. - \left(8r^3 + 12U_{1,\infty} r^2 + 6U_{1,\infty}^2 r + U_{1,\infty}^3 + \frac{4b^2 L^8}{3r} \right) \right) dr \\
& - \frac{1}{16\pi L^5 G_5} \left(2r_h^4 + 4U_{1,\infty} r_h^3 + 3U_{1,\infty}^2 r_h^2 + U_{1,\infty}^3 r_h + \frac{4}{3} b^2 L^8 \ln(r_h/L) \right. \\
& \left. - 2b^2 L^8 \left(\frac{1}{3} - C_{\text{sch}} \right) + \frac{1}{8} U_{1,\infty}^4 + U_{4,\infty} \right). \tag{4.89}
\end{aligned}$$

La energía libre de Gibbs restante es la que se propone en el artículo [5]

$$\mathcal{G}_3 = -\frac{1}{16\pi L^5 G_5} \left(U_{1,h} V_{0,h} \sqrt{W_{0,h}} + 3U_{4,\infty} - b^2 L^8 \ln(bL^4/r_h^2) - \left(2C_{\text{sch}} + \frac{1}{2} \ln(2) \right) b^2 L^8 \right), \tag{4.90}$$

que se deduce a partir de la ecuación (4.36) junto con los términos de frontera

$$S_{\text{bnd}} = \frac{1}{16\pi G_5} \int_{\partial \mathcal{M}} \left(\frac{6}{L} + \frac{1}{4} L^3 F_{ab} F^{ab} \ln(L^4 F_{ab} F^{ab}) + C_{\text{sch}} L^3 F_{ab} F^{ab} \right) \sqrt{\gamma_E} \Big|_{r=\xi} d^4 x, \tag{4.91}$$

los cuales difieren de (4.45) en el término logarítmico. En dicho artículo, se afirma que los términos de frontera anteriores dan la equivalencia entre s_3 y s_{BH} . Aunque éste es el caso, \mathcal{G}_3 no es resultante de considerar (4.91), y en consecuencia no se tiene una igualdad (al menos numérica) entre s_3 y s_{BH} . Es decir, cuando se expande adecuadamente (4.36) y (4.91), la energía libre resultante no es (4.90). En el apéndice A se expone lo que, en mi opinión, fue el error en el cálculo del artículo anteriormente mencionado.

Así, tenemos las siguientes gráficas de las cuatro entropías.

Gráficas de s_{BH} , s_1 , s_2 y s_3 con $b = 3.9734$ y $C_{\text{sch}} = 10$.

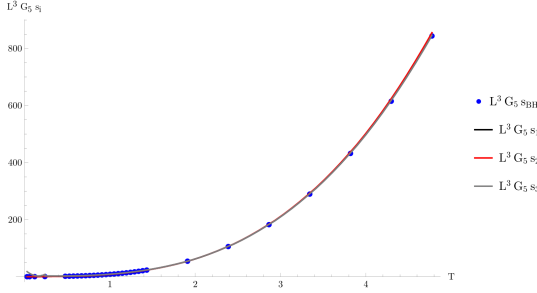


Figura 4.9: Comportamiento general de $L^3 G_5 s$ vs. T .

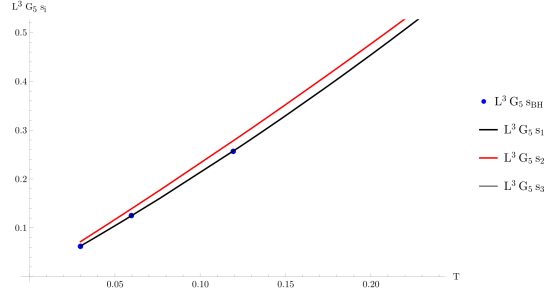


Figura 4.10: $L^3 G_5 s$ vs. T a temperaturas muy bajas.

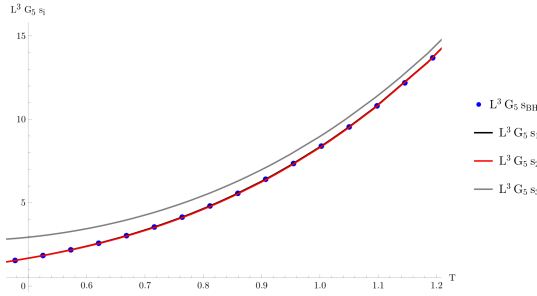


Figura 4.11: $L^3 G_5 s$ vs. T a temperaturas bajas.

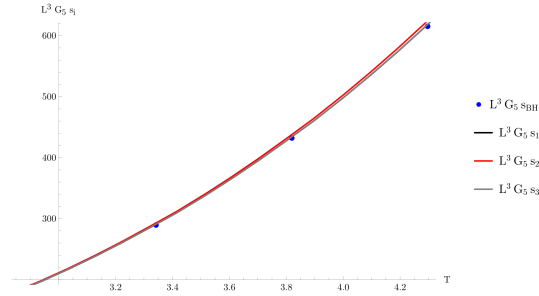


Figura 4.12: $L^3 G_5 s$ vs. T a temperaturas altas.

En general, s_1 es la más cercana a s_{BH} en todos los rangos de temperatura que se graficaron. A muy bajas temperaturas, s_2 no es tan cercana a s_{BH} , mientras que s_3 tiene un error numérico suficientemente grande (con respecto a s_{BH}) para no estar presente en la gráfica 4.10. A bajas temperaturas, ambas s_1 y s_2 son idénticas a s_{BH} , y conforme aumenta la temperatura el error de s_3 disminuye. A temperaturas altas, el error más alto es el de s_2 . Por tanto, \mathcal{G}_1 es la que ofrece el mejor resultado y, al menos numéricamente, confirma que $s_1 = s_{\text{BH}}$. Lo anterior sugiere que transformar la acción de bulto en un término de frontera, como se muestra en (4.31), reduce el error numérico y no se tienen los problemas presentes con s_2 en los diferentes rangos de temperatura. En particular, lo que está influyendo en su error es la integración numérica que se realiza en (4.89), ya que en esencia es la única diferencia respecto a computación numérica que se tiene con (4.79). Para s_3 , lo que yo sospecho que está ocurriendo es que el término $-b^2 L^8 (\ln(bL^2) - \ln(r_h^2/L^2))$ presente en \mathcal{G}_3 está aumentando el error numérico a bajas temperaturas, ya que su derivada respecto de r_h es $2b^2 L^8 / r_h$, cuya contribución es significativa para $r_h < 1$ pero despreciable para $r_h > 1$.

Por último, como \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 son iguales, el cálculo semianalítico de la entropía resultante de estas energías libres también debe ser el mismo. Sin embargo, como todo el análisis anterior es numérico, el error del método que se emplee para estudiar a la entropía depende de la expresión que se use. Antes de hacer dichos cálculos, cabe remarcar que las funciones métricas en unidades de r_h^2 son funciones de b/T^2 ; esto se puede observar en las siguientes gráficas.

Gráficas de las funciones métricas en unidades de r_h^2 con $r \in (r_h, 10r_h)$, $T \in \{3/2\pi, 9/4\pi, 3/\pi, 15/4\pi, 9/2\pi\}$ y $b/T^2 = 17.4295$.

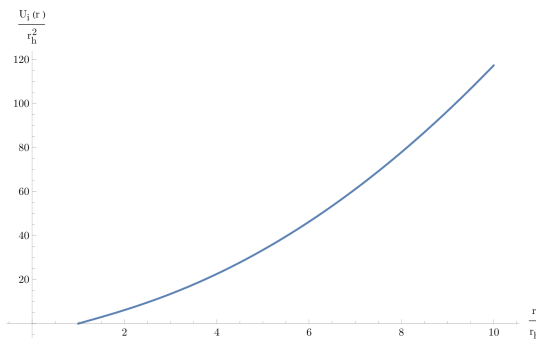


Figura 4.13: Gráfica de $(r/r_h, U(r)/r_h^2)$.

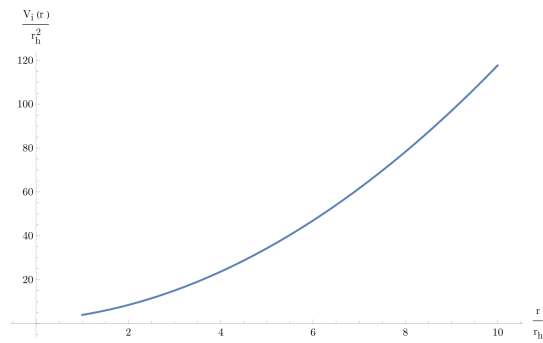


Figura 4.14: Gráfica de $(r/r_h, V(r)/r_h^2)$.

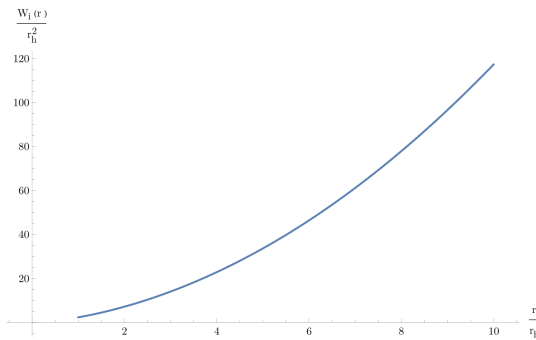


Figura 4.15: Gráfica de $(r/r_h, W(r)/r_h^2)$.

Se tienen gráficas análogas para el resto de las 27 temperaturas. Gráficamente, las funciones métricas en unidades de r_h^2 coinciden³ siempre y cuando se cumpla la condición $b/T^2 = \text{cte}$, por lo que sólo dependen de este parámetro. Lo anterior se puede verificar contrastando las mismas gráficas, pero sometidas a la condición $b = \text{cte}$.

³En las gráficas 4.13, 4.14 y 4.15, hay cinco curvas presentes; sin embargo, éstas están encima de cada una.

Gráficas de las funciones métricas en unidades de r_h^2 con $r \in (r_h, 10r_h)$, $T \in \{3/2\pi, 9/4\pi, 3/\pi, 15/4\pi, 9/2\pi\}$ y $b = 3.9734$.

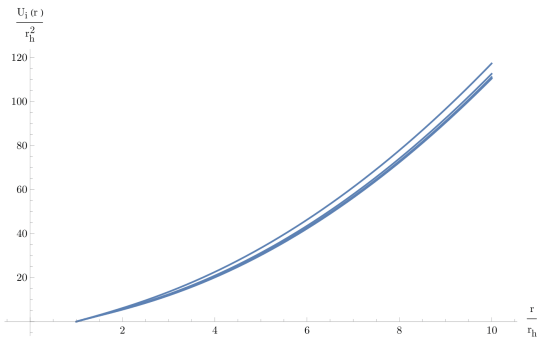


Figura 4.16: Gráfica de $(r/r_h, U(r)/r_h^2)$.

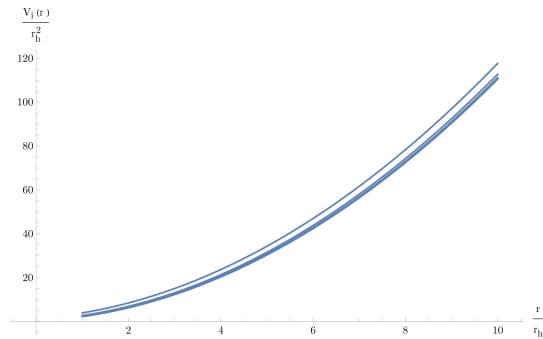


Figura 4.17: Gráfica de $(r/r_h, V(r)/r_h^2)$.

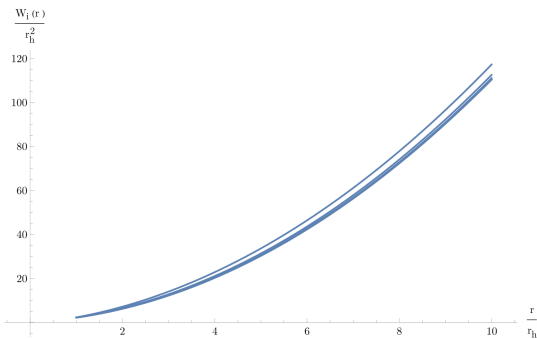


Figura 4.18: Gráfica de $(r/r_h, W(r)/r_h^2)$.

En este caso, se tiene una gráfica distinta para cada T , lo cual es diferente a lo que se tiene en las gráficas 4.13-4.15. Ahora bien, basándonos en las gráficas 4.7 y 4.8, las siguientes definiciones sólo dependen de⁴ b/T^2 ,

$$f\left(\frac{bL^4}{r_h^2}\right) := \frac{U_{1,\infty}}{r_h}, \quad (4.92)$$

$$g\left(\frac{bL^4}{r_h^2}\right) := \frac{U_{4,\infty}}{r_h^4} - \frac{2}{3} \frac{b^2 L^8}{r_h^4} \ln(r_h/L), \quad (4.93)$$

$$h\left(\frac{bL^4}{r_h^2}\right) := \frac{U_{1,h}}{r_h} \frac{V_{0,h}}{r_h^2} \sqrt{\frac{W_{0,h}}{r_h^2}}. \quad (4.94)$$

Otro resultado que se usará en el cálculo de s_2 es el siguiente. Sea $f(x, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua,

⁴Dependencia en b/T^2 también es dependencia en bL^4/r_h^2 debido a (4.70).

entonces

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, t) dt \right) = \int_{g(x)}^{h(x)} \partial_x f(x, t) dt + f(x, h(x)) \frac{dh}{dx} - f(x, g(x)) \frac{dg}{dx}. \quad (4.95)$$

Primero se calculará s_2 . Ahora, \mathcal{G}_2 se puede expresar como

$$16\pi L^5 G_5 \mathcal{G}_2 = I_2 + II_2 + III_2, \quad (4.96)$$

donde

$$I_2 = \int_{r_h}^{\xi} \frac{4}{3} \left(\frac{b^2 L^8}{V^2} + 6 \right) V \sqrt{W} dr =: \int_{r_h}^{\xi} \alpha(r) dr, \quad (4.97)$$

$$II_2 = - \int_{r_h}^{\xi} \left(8r^3 + 12U_{1,\infty} r^2 + 6U_{1,\infty}^2 r + U_{1,\infty}^3 + \frac{4b^2 L^8}{3r} \right) dr, \quad (4.98)$$

$$III_2 = - \left(2r_h^4 + 4U_{1,\infty} r_h^3 + 3U_{1,\infty}^2 r_h^2 + U_{1,\infty}^3 r_h + \frac{4}{3} b^2 L^8 \ln(r_h/L) \right. \\ \left. - 2b^2 L^8 \left(\frac{1}{3} - C_{\text{sch}} \right) + \frac{1}{8} U_{1,\infty}^4 + U_{4,\infty} \right), \quad (4.99)$$

recordando que $r = \xi \rightarrow \infty$ es la constricción que define a nuestra hipersuperficie en la frontera.

Sea $\tilde{r} := r/r_h$. Haciendo este cambio de variable en (4.97) obtenemos

$$I_2 = r_h \int_1^{\xi/r_h} \frac{4}{3} \left(\frac{b^2 L^8}{V(r_h \tilde{r})^2} + 6 \right) V(r_h \tilde{r}) \sqrt{W(r_h \tilde{r})} d\tilde{r} \\ = r_h^4 \int_1^{\xi/r_h} \frac{4}{3} \left(\frac{b^2 L^8}{r_h^4} \frac{r_h^4}{V(r_h \tilde{r})^2} + 6 \right) \frac{V(r_h \tilde{r})}{r_h^2} \sqrt{\frac{W(r_h \tilde{r})}{r_h^2}} d\tilde{r} \\ = r_h^4 \int_1^{\xi/r_h} \frac{\alpha(r_h \tilde{r})}{r_h^3} =: r_h^4 \int_1^{\xi/r_h} \lambda \left(\frac{bL^4}{r_h^2}, \tilde{r} \right) d\tilde{r}, \quad (4.100)$$

donde en la última ecuación se usó que las funciones métricas adimensionales dependen de b/T^2 .

Así, haciendo uso de (4.95) y de

$$\frac{d}{dr_h} = \frac{d(bL^4/r_h^2)}{dr_h} \frac{d}{d(b/r_h^2)} = -\frac{2bL^4}{r_h^3} \frac{d}{d(bL^4/r_h^2)}, \quad (4.101)$$

se obtiene

$$\left(\frac{\partial I_2}{\partial r_h} \right)_b = 4r_h^3 \int_1^{\xi/r_h} \lambda \left(\frac{bL^4}{r_h^2}, \tilde{r} \right) d\tilde{r} - 2bL^4 r_h \int_1^{\xi/r_h} \lambda' \left(\frac{bL^4}{r_h^2}, \tilde{r} \right) d\tilde{r} - \xi r_h^2 \lambda \left(\frac{bL^4}{r_h^2}, \frac{\xi}{r_h} \right), \quad (4.102)$$

donde $()'$ es derivar respecto de bL^4/r_h^2 . En términos de α , esta derivada es

$$\left(\frac{\partial I_2}{\partial r_h}\right)_b = \int_1^{\xi/r_h} \alpha(r_h \tilde{r}) d\tilde{r} + r_h \int_1^{\xi/r_h} \partial_{r_h} \alpha(r_h \tilde{r}) d\tilde{r} - \frac{\xi}{r_h} \alpha(\xi). \quad (4.103)$$

Con el cambio de variable \tilde{r} , y usando (4.92), Π_2 se transforma en

$$\Pi_2 = -r_h^4 \int_1^{\xi/r_h} \left(8\tilde{r}^3 + 12f\tilde{r}^2 + 6f^2\tilde{r} + f^3 + \frac{4}{3} \left(\frac{bL^4}{r_h^2} \right)^2 \frac{1}{\tilde{r}} \right) d\tilde{r}. \quad (4.104)$$

Por lo que su derivada es

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial r_h}\right)_b &= -4r_h^3 \int_1^{\xi/r_h} \left(8\tilde{r}^3 + 12f\tilde{r}^2 + 6f^2\tilde{r} + f^3 + \frac{4}{3} \left(\frac{bL^4}{r_h^2} \right)^2 \frac{1}{\tilde{r}} \right) d\tilde{r} \\ &\quad + 2bL^4 r_h \int_1^{\xi/r_h} \left(12 \left(\tilde{r}^2 + f\tilde{r} + \frac{1}{4}f^2 \right) f' + \frac{8bL^4}{3r_h^2 \tilde{r}} \right) d\tilde{r} \\ &\quad + \frac{\xi}{r_h} \left(8\xi^3 + 12U_{1,\infty} \xi^2 + 6U_{1,\infty}^2 \xi + U_{1,\infty}^3 + \frac{4b^2 L^8}{3\xi} \right). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Con (4.92) y (4.93), III_2 pasa a ser

$$\text{III}_2 = -r_h^4 \left(2 + 4f + 3f^2 + f^3 + \frac{1}{8}f^4 + g \right) + 2b^2 L^8 \left(\frac{1}{3} - C_{\text{sch}} - \ln(r_h/L) \right). \quad (4.106)$$

Así,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \text{III}_2}{\partial r_h}\right)_b &= -4r_h^3 \left(2 + 4f + 3f^2 + f^3 + \frac{1}{8}f^4 + g \right) \\ &\quad + 2bL^4 r_h \left(\left(4 + 6f + 3f^2 + \frac{1}{2}f^3 \right) f' + g' \right) - \frac{2b^2 L^8}{r_h}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{4\tilde{U}_{1,h} G_5}{L^3} s_2 &= -\frac{256\pi^3 T^3}{\tilde{U}_{1,h}^3} \int_1^{\xi/r_h} \left(\lambda \left(\frac{bL^4}{r_h^2}, \tilde{r} \right) - \left(8\tilde{r}^3 + 12f\tilde{r}^2 + 6f^2\tilde{r} + f^3 + \frac{4}{3} \left(\frac{bL^4}{r_h^2} \right)^2 \frac{1}{\tilde{r}} \right) \right) d\tilde{r} \\ &\quad + \frac{8\pi bT}{\tilde{U}_{1,h}} \int_1^{\xi/r_h} \left(\lambda' \left(\frac{bL^4}{r_h^2}, \tilde{r} \right) - \left(12 \left(\tilde{r}^2 + f\tilde{r} + \frac{1}{4}f^2 \right) f' + \frac{8bL^4}{3r_h^2 \tilde{r}} \right) \right) d\tilde{r} \\ &\quad + \frac{\tilde{U}_{1,h} \xi}{4\pi L^8 T} \left(\alpha(\xi) - \left(8\xi^3 + 12U_{1,\infty} \xi^2 + 6U_{1,\infty}^2 \xi + U_{1,\infty}^3 + \frac{4b^2 L^8}{3\xi} \right) \right) \\ &\quad + \frac{256\pi^3 T^3}{\tilde{U}_{1,h}^3} \left(2 + 4f + 3f^2 + f^3 + \frac{1}{8}f^4 + g \right) \\ &\quad - \frac{8\pi bT}{\tilde{U}_{1,h}} \left(\left(4 + 6f + 3f^2 + \frac{1}{2}f^3 \right) f' + g' \right) + \frac{\tilde{U}_{1,h} b^2}{2\pi T}. \end{aligned} \quad (4.108)$$

El cálculo de s_1 es menos elaborado. Por (4.93) y (4.94), \mathcal{G}_1 se puede escribir como

$$16\pi L^5 G_5 \mathcal{G}_1 = -r_h^4 (h + 3g) - 2b^2 L^8 (C_{\text{sch}} + \ln(r_h/L)), \quad (4.109)$$

de tal forma que s_1 es

$$\frac{4\tilde{U}_{1,h} G_5}{L^3} s_1 = \frac{256\pi^3 T^3}{\tilde{U}_{1,h}^3} (h + 3g) - \frac{8\pi b T}{\tilde{U}_{1,h}} (h' + 3g') + \frac{\tilde{U}_{1,h} b^2}{2\pi T}. \quad (4.110)$$

Comparando directamente la ecuación anterior con (4.108), lo más resaltante es que no se tienen términos que involucren integración numérica en s_1 . Esto reduce considerablemente el error numérico y probablemente es la razón principal de por qué en las gráficas 4.10 y 4.12, s_2 se aleja de s_{BH} . Adicionalmente, el único término común entre s_1 y s_2 es $\tilde{U}_{1,h} b^2 / 2\pi T$; sin embargo, el penúltimo y antepenúltimo término en ambas entropías coinciden en los factores $-8\pi b T / \tilde{U}_{1,h}$ y $256\pi^3 T^3 / \tilde{U}_{1,h}^3$ respectivamente, mientras que los factores restantes difieren debido al uso de (4.36) en s_1 y al uso de (4.87)-(4.88) en s_2 . Independientemente de cual sea la relevancia de la diferencia anterior en el error numérico de s_2 , el hecho de que s_1 sea en esencia idéntica (numéricamente) a s_{BH} sugiere que conviene usar \mathcal{G}_1 para obtener resultados consistentes con la entropía de Bekenstein-Hawking y que, en extensión, conviene transformar a la acción de bulto en un término de frontera y no involucrar integración numérica.

Capítulo 5

Discusión y conclusiones

El resultado principal del análisis anterior es que la manera en la que se computa a la entropía influye en su precisión numérica con respecto a s_{BH} y que éste se reduce considerablemente cuando se transforma a la acción de bulto en un término de frontera como se muestra (4.31). La razón por la cual en el fondo con el que se trabaja en [4] no se encontró la equivalencia entre la entropía derivada de la energía libre de Gibbs y la entropía de Bekenstein-Hawking es debido a que en dicho artículo se trabaja con una expresión análoga a (4.89). Aparte, en dicho fondo también se considera un campo escalar, el cual es sensible a la integración correspondiente. Obviamente, para que la conclusión anterior se pueda aplicar para este fondo se debe transformar la acción de bulto en [4] en un término de frontera y ver si se obtiene una equivalencia con s_{BH} .

En el caso vacío, se puede comprobar analíticamente que la entropía derivada de la energía libre de Gibbs y la entropía de Bekenstein-Hawking son iguales. También, en dicho caso la energía libre de Gibbs y la entropía sólo dependen de T^4 y de T^3 respectivamente, mientras que los coeficientes de expansión expresados en unidades de r_h son constantes respecto a la temperatura y por tanto, no presentan inhomogeneidades respecto a reescalamientos de r_h (ya que $T \propto r_h$). También, si se hacen las substituciones correspondientes de r_h en términos de T y de G_5 en términos del radio de curvatura L en la energía libre de Gibbs al igual que en la entropía, no se tendrán contribuciones de L , por lo que estas cantidades son independientes de dicho parámetro. En cambio, en presencia de un campo magnético, bajo la combinación adimensional b/T^2 , se tiene una dependencia logarítmica en la temperatura en el coeficiente de expansión $U_{4,\infty}/r_h^4$.

También, en el capítulo 4, todos los conceptos usados son de origen gravitacional. Más que nada, el uso que se tiene de la correspondencia AdS/CFT en este trabajo es de carácter motivacional, ya que lo que se está estudiando es un plasma de quark y gluones el cual se puede aproximar por la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM en el espaciotiempo de Minkowski con temperatura finita, que es equivalente a estudiar una D3-brana negra asintóticamente AdS₅ con un campo magnético constante de fondo. Sin embargo, se debe de tener en mente que todos los resultados obtenidos del capítulo anterior también son propiedades de la teoría cuántica dual junto con la consideración del truncamiento realizado en (4.5) en su parte esferoidal.

Por último, como se puede ver en el apéndice, los términos de frontera que se proponen en [5] resulta en una energía libre cuya entropía es numéricamente equivalente a s_{BH} . Sin embargo, la energía libre de dicho artículo no es la correcta y es la razón por la cual se tiene una discrepancia entre s_3 y s_{BH} . Una vez que se usa la energía libre resultante de los términos de frontera anteriormente mencionados, las entropías coinciden y es consistente con la entropía derivada de (4.79).

En conclusión, para que no se tenga la discrepancia que motivó la realización de este trabajo, conviene tratar de usar las ecuaciones de movimiento para reducir a la acción de bulto en un término de frontera y, por ende no tener que recurrir a integración numérica para calcular las propiedades de interés. Es probable que en extensión, esto también aplique a otros fondos (como el que se presenta en [4]); sin embargo, se debe de aplicar el análisis expuesto en esta tesis para comprobar lo anterior.

Apéndice A

Corrección de s_3

A.1. Términos de frontera

De nuevo, los términos de frontera que se proponen en [5] son

$$S_{\text{bnd}} = \frac{1}{16\pi G_5} \int_{\partial \mathcal{M}} \left(\frac{6}{L} + \frac{1}{4} L^3 F_{ab} F^{ab} \ln(L^4 F_{ab} F^{ab}) + C_{\text{sch}} L^3 F_{ab} F^{ab} \right) \sqrt{\gamma_E} \Big|_{r=\xi} d^4 x. \quad (\text{A.1})$$

Vamos a demostrar que los términos de frontera en (4.45) es igual que la ecuación anterior salvo por una redefinición en la constante de esquema que es independiente de la temperatura. La ecuación (4.45) es

$$\begin{aligned} S_{\text{bnd}} &= \frac{1}{16\pi G_5} \int_{\partial \mathcal{M}} \left(\frac{6}{L} - L^3 F_{ab} F^{ab} \ln(r/L) - C_{\text{sch}} L^3 F_{ab} F^{ab} \right) \sqrt{\gamma_E} \Big|_{r=\xi} d^4 x \\ &= \frac{1}{16\pi G_5} \int_{\partial \mathcal{M}} \left(\frac{6}{L} + \frac{1}{4} L^3 F_{ab} F^{ab} \ln((r/L)^{-4}) - C_{\text{sch}} L^3 F_{ab} F^{ab} \right) \sqrt{\gamma_E} \Big|_{r=\xi} d^4 x \\ &= \frac{1}{16\pi G_5} \int_{\partial \mathcal{M}} \left(\frac{6}{L} + \frac{1}{4} L^3 F_{ab} F^{ab} \ln(2b^2 L^8 / r^4) - \left(C_{\text{sch}} + \frac{1}{4} \ln(2b^2 L^4) \right) L^3 F_{ab} F^{ab} \right) \sqrt{\gamma_E} \Big|_{r=\xi} d^4 x \\ &= \frac{1}{16\pi G_5} \int_{\partial \mathcal{M}} \left(\frac{6}{L} + \frac{1}{4} L^3 F_{ab} F^{ab} \ln(L^4 F_{ab} F^{ab}) + C_{\text{sch}}^* L^3 F_{ab} F^{ab} \right) \sqrt{\gamma_E} \Big|_{r=\xi} d^4 x, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde en la última igualdad se usó que $V(r \rightarrow \infty) \simeq r^2$ y se definió $C_{\text{sch}}^* := -(C_{\text{sch}} + 1/4 \cdot \ln(2b^2 L^4))$.

Por lo que se llegan a los mismos términos de frontera que (4.91) salvo por una redefinición de la constante de esquema. Sin embargo, como ésta no depende de la temperatura, no va a influir en

el cálculo de s_3 . Por tanto, en teoría no se debería de tener una diferencia entre s_1 y s_3 en las gráficas 4.9-4.12, aunque claramente la hay. En la próxima sección expondré la raíz posible de esta discrepancia.

A.2. Energía libre de Gibbs y entropía

La energía libre de Gibbs resultante de considerar (4.36) y (4.91) es

$$\mathcal{G}_3^* = -\frac{1}{16\pi L^5 G_5} \left(U_{1,h} V_{0,h} \sqrt{W_{0,h}} + 3U_{4,\infty} - b^2 L^8 \ln(bL^2) - \left(2C_{\text{sch}} + \frac{1}{2} \ln(2) \right) b^2 L^8 \right). \quad (\text{A.3})$$

La diferencia entre la ecuación anterior y (4.90) es el término logarítmico, en el cual no está presente el factor L^2/r_h^2 . Como la entropía está dada por (4.85), la presencia de este factor va a influir en la derivada, dando la discrepancia anteriormente mencionada. Como se mencionó en el capítulo 4, la derivada relacionada a este factor influye para $r_h < 1$, que explica la falla en la equivalencia numérica entre s_3 y s_1 a bajas temperaturas. Cuando se realiza la derivada numérica de (A.3) dada por (4.85), se tiene

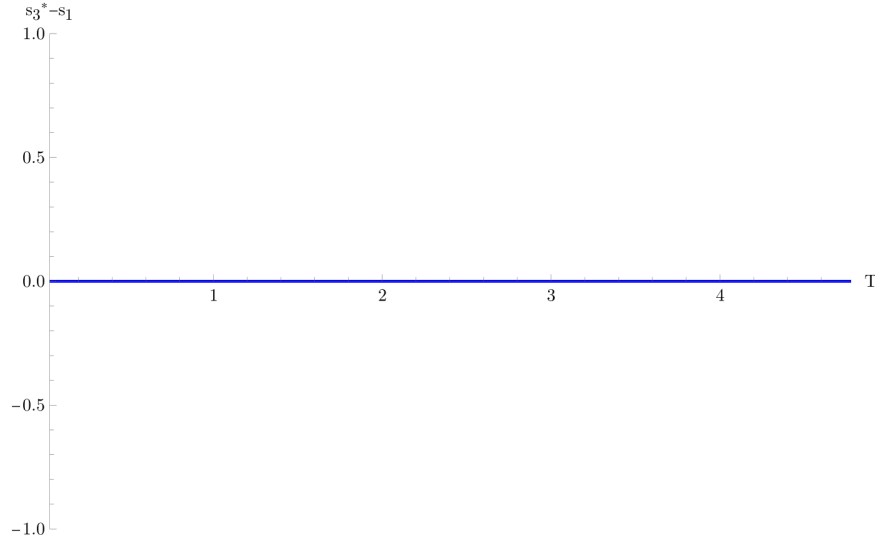


Figura A.1: $s_3^* - s_1$ vs. T .

Es decir, la entropía resultante de (A.3) coincide numéricamente con s_1 . Como s_1 es equivalente a s_{BH} , lo más probable es que es el factor de L^2/r_h^2 en el término logarítmico es la causa de la discrepancia entre s_3 y s_{BH} .

Bibliografía

- [1] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [2] Atish Dabholkar & Suresh Nampuri. “Quantum Black Holes”. En: *Strings and Fundamental Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 2012, págs. 165-232. DOI: [10.1007/978-3-642-25947-0_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-25947-0_5). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-25947-0_5.
- [3] Makoto Natsuume. *AdS/CFT Duality User Guide*. Springer Japan, 2015.
- [4] Daniel Ávila & Leonardo Patiño. “Instability of a magnetized QGP sourced by a scalar operator”. En: *Journal of High Energy Physics* 2019.4 (abr. de 2019). DOI: [10.1007/jhep04\(2019\)086](https://doi.org/10.1007/jhep04(2019)086). URL: [https://doi.org/10.1007/jhep04\(2019\)086](https://doi.org/10.1007/jhep04(2019)086).
- [5] Alfonso Ballon-Bayona, Jonathan P. Shock y Dimitrios Zoakos. *Magnetizing the $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills plasma*. 2022. DOI: [10.48550/ARXIV.2203.00050](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2203.00050). URL: <https://doi.org/abs/2203.00050>.
- [6] Kostas Skenderis. “Lecture notes on holographic renormalization”. En: *Classical and Quantum Gravity* 19.22 (nov. de 2002), págs. 5849-5876. DOI: [10.1088/0264-9381/19/22/306](https://doi.org/10.1088/0264-9381/19/22/306). URL: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/19/22/306>.
- [7] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.
- [8] Martin Ammon & Johanna Erdmenger. *Gauge/Gravity Duality*. Cambridge University Press, 2015.
- [9] Martin Bojowald. *Canonical gravity and applications: cosmology, black holes, and quantum gravity*. Cambridge University Press, 2011.

- [10] Horatiu Nastase. *Introduction to the AdS/CFT Correspondence*. Cambridge University Press, 2015.
- [11] Robert M. Wald. “The Thermodynamics of Black Holes”. En: *Living Reviews in Relativity* 4.1 (jul. de 2001). DOI: [10.12942/Irr-2001-6](https://doi.org/10.12942/Irr-2001-6). URL: <https://doi.org/10.12942/Irr-2001-6>.
- [12] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.
- [13] Roger Bowley & Mariana Sánchez. *Introductory Statistical Mechanics*. Oxford University Press, 1999.
- [14] Ofer Aharony y col. “Large N field theories, string theory and gravity”. En: *Physics Reports* 323.3-4 (ene. de 2000), págs. 183-386. DOI: [10.1016/S0370-1573\(99\)00083-6](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(99)00083-6). URL: [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(99\)00083-6](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(99)00083-6).
- [15] David Mateos. “String theory and quantum chromodynamics”. En: *Classical and Quantum Gravity* 24.21 (oct. de 2007), S713-S739. DOI: [10.1088/0264-9381/24/21/s01](https://doi.org/10.1088/0264-9381/24/21/s01). URL: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/24/21/s01>.
- [16] David Tong. *Lectures on String Theory*. 2009. DOI: [10.48550/ARXIV.0908.0333](https://arxiv.org/abs/0908.0333). URL: <https://arxiv.org/abs/0908.0333>.
- [17] M. Cvetič y col. “Embedding AdS black holes in ten and eleven dimensions”. En: *Nuclear Physics B* 558.1-2 (oct. de 1999), págs. 96-126. DOI: [10.1016/S0550-3213\(99\)00419-8](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(99)00419-8). URL: [https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(99\)00419-8](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(99)00419-8).
- [18] Andrew Chamblin y col. “Charged AdS black holes and catastrophic holography”. En: *Physical Review D* 60.6 (ago. de 1999). DOI: [10.1103/PhysRevD.60.064018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.064018). URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.064018>.