



Universidad Nacional Autónoma de México

Programa de Maestría en Ciencias Físicas - Física
Estadística y Sistemas Complejos

Entropía y Atractores por Etapas, Niveles de juego y Resultados del
Ajedrez

T E S I S

que para optar por el grado de
Maestro en Física

PRESENTA:

Jesús Domingo Alfin Islas García

Tutor Principal:

Dr. Marcelo del Castillo Mussot
Instituto de Física UNAM
Departamento de Sistemas Complejos

México, CDMX (Octubre) 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis padres, por la formación y apoyo desinteresado que me han proporcionado. Es gracias a ustedes que fue posible la realización del presente trabajo del cual estoy orgulloso. Y también obviamente a mi hermana, por su apoyo incondicional y observaciones atinadas en todos los aspectos de mi vida.
A la memoria de mis abuelos que nos inculcaron buenos valores.*

Jesús Domingo Alfin Islas García

Agradecimientos

Los análisis y las discusiones con el Dr. Marcelo del Castillo Mussot fueron muy fructíferas. Además fue importante el estímulo económico otorgado por el CONACYT a través de la beca nacional del posgrado para conclusión de estudios de maestría.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Agradecimientos | v |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Presentación | 1 |
| 1.2. Antecedentes | 2 |
| 1.3. Objetivos | 2 |
| 1.4. Importancia del ajedrez en el contexto científico | 3 |
| 1.5. Planteamiento del problema | 3 |
| 2. Marco teórico | 5 |
| 2.1. Definiciones importantes. | 5 |
| 2.2. Entropía del ajedrez | 6 |
| 2.2.1. Entropía por densidad de ocupación. | 6 |
| 2.2.2. Entropía equiprobable S_e | 8 |
| 2.2.3. Entropía S_{JDA} | 8 |
| 2.3. Atractores | 11 |
| 2.4. Teorema de Takens. | 14 |
| 2.5. Espacio fase. | 15 |
| 2.6. Información mutua. | 16 |
| 2.7. Porcentaje de falsos vecinos cercanos (FNN). | 17 |
| 2.8. Método Monte Carlo equiprobable en el ajedrez | 18 |
| 3. Metodología | 19 |
| 3.1. Base de datos | 19 |
| 3.1.1. Densidad de ocupación. | 19 |
| 3.1.2. Jugadores humanos | 19 |
| 3.1.3. Jugadores artificiales de Monte Carlo equiprobable | 21 |
| 3.2. Resultados densidad de ocupación. | 21 |
| 3.3. Evolución de la entropía. | 22 |
| 3.4. Construcción del atractor. | 22 |
| 3.4.1. Obtención del tiempo de retraso con información mutua. | 22 |
| 3.4.2. Determinación de la dimensión de los atractores. | 23 |
| 3.4.3. Análisis probabilístico de los atractores. | 24 |
| 3.4.4. Comparación de resultados entre jugadores humanos y de Monte Carlo artificiales | 25 |

| | |
|--|-----------|
| 4. Resultados | 27 |
| 4.1. Densidad de ocupación y entropía. | 27 |
| 4.2. Construcción del Atractor. | 28 |
| 4.2.1. Jugadores humanos. | 28 |
| 4.2.2. Jugador Azaroso | 34 |
| 5. Discusión y conclusiones | 51 |
| 5.1. Densidad de ocupación. | 51 |
| 5.2. Atractores | 52 |
| 6. Propuestas para futuras investigaciones | 55 |
| Apéndice A. Complementos | 57 |
| Apéndice B. Códigos | 59 |
| B.1. Entropía S_{JDA} | 59 |
| B.2. Atractores | 60 |
| Apéndice C. Densidad de ocupación | 63 |
| Apéndice D. Atractores | 81 |
| Apéndice E. Atractores. Visualización con apoyo cromático | 85 |
| Apéndice F. Atractores. Visualización estados finales | 89 |
| Apéndice G. Atractores. Conjunto de estados finales | 93 |
| Bibliografía | 93 |

1 Introducción

1.1. Presentación

El trabajo se ordena naturalmente de la siguiente manera. En este primer capítulo, se enfatiza la importancia del ajedrez como juego, deporte, y prototipo de estudio de la inteligencia artificial.

Posteriormente se plantea explorar el juego ciencia utilizando herramientas teóricas para analizar estadísticamente entropías y densidad de ocupación de casillas por diferentes piezas del juego de ajedrez utilizando una base de datos muy extensa recopilada a lo largo de la historia. En el segundo capítulo se presentan los conceptos y ecuaciones que permiten dicho análisis estadístico, así como los conceptos necesarios para la correspondiente construcción de atractores extraños, llamados así por lo intrincado de las trayectorias complejas que surgen en su estudio.

El tercer capítulo describe el tratamiento de la base de datos que abarca más de 191,000 partidas de ajedrez realizadas por humanos y 100,000 partidas de ajedrez realizadas por computadora analizadas en su notación algebraica. Las propiedades de las partidas tal como el nivel y el resultado de victoria o empate, y el objeto de estudio exige realizar una metodología correlacional¹, puesto que las variables no son directamente manipulables, ya que no podemos medir la inteligencia, ni la victoria (ganador, perdedor, empate); posteriormente se presentan los pasos realizados para la construcción del atractor que describe el comportamiento evolutivo de la entropía. Debido a que la diferencia entre los jugadores analizados (a nivel ajedrecístico) es pequeña, en el cuarto capítulo se expone el análisis de los resultados obtenidos para la etapa final del juego tanto para los jugadores humanos como los generados por computador.

El quinto capítulo discute las ventajas del estudio del nuevo atractor basado en el análisis de la diferencia de entropía del ajedrez jugada a jugada.

Finalmente en el sexto y último capítulo se describen las propuestas para futuras investigaciones que son fruto del análisis y nuevos planteamientos que generó esta tesis.

¹López y Juárez (2004) [1] establecen que con este método se mide la relación entre variables mediante el coeficiente de correlación, que describe el grado en que dos variables varían de modo concomitante.

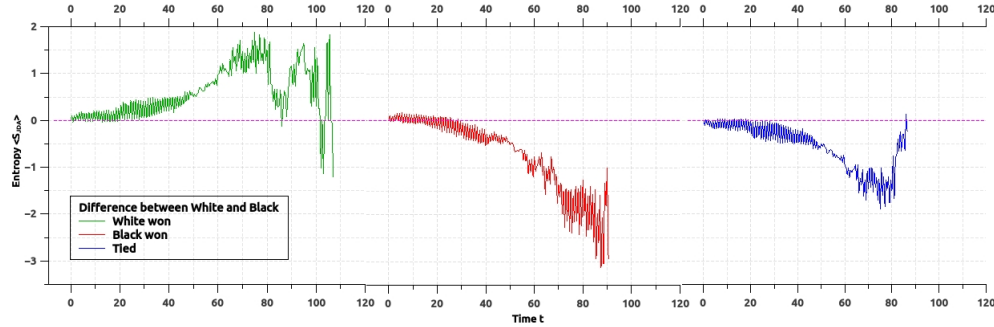


Figura 1.1: Para el nivel de Elo 1000-1200 se muestra tres diferencias de entropía $\langle S_{JDA} \rangle$ diferencias de entropía entre blancas y negras según el resultado del juego [3]. Cada resultado comienza su gráfica a partir de la jugada inicial $t = 0$. Los tiempos enteros $T=0,1,2,\dots$ corresponden a jugadas blancas, y los fraccionarios $T=0.5,1.5,2.5,\dots$ corresponden a jugadas negras

1.2. Antecedentes

En mi tesis de licenciatura titulada “Entropía y análisis estadístico de ajedrez por niveles de juego” [2] se establece el marco teórico de esta tesis al plantear una entropía en términos de la movilidad de las piezas en el ajedrez. Los resultados obtenidos muestran una fuerte correlación entre la evaluación estadística de las partidas y los niveles de juego, así como también una fuerte concordancia entre el promedio de la evolución de la entropía y los diferentes resultados de la partida.

En un artículo del año 2022 [3] encontramos que en general la diferencia de entropías entre piezas blancas y negras es crucial en el resultado final de la partida. En resumen:

- Los jugadores ganadores tienen, en promedio, una mayor entropía desde el juego medio hasta el final de la partida, a comparación de los jugadores perdedores cuya entropía se ve reducida sensiblemente en el mismo periodo.
- Los jugadores que empatan tienen, en promedio, una entropía similar a lo largo de toda la partida.

Este resultado se muestra por ejemplo en la figura 1.1 para jugadores de bajo nivel ajedrecístico como función del tiempo o jugadas. Para el caso particular de la entropía S_{JDA} que definiré aquí posteriormente. La diferencia de entropías entre ambos contendientes plantea la posibilidad de describir los comportamientos evolutivos de cada resultado.

1.3. Objetivos

Para etapas, nivel de juego y resultados de las partidas se realiza lo siguiente.

- A partir del cálculo de las entropías de una base de datos construir el atractores extraños que describen comportamientos estadísticos de partidas de ajedrez.

- Utilizando la misma base de datos que en mi tesis de licenciatura se calcula para cada pieza las entropías de ocupación en cuatro "marcos concéntricos".
- Se construyen partidas aleatorias de ajedrez utilizando un método Monte Carlo para realizar los mismos análisis mencionados arriba. A esa base de partidas las he denominado "azarosas" porque la probabilidad de realizar una jugada es equiprobable² para todas las posibles jugadas, lo cual es juego carente de estrategia.

1.4. Importancia del ajedrez en el contexto científico

El ajedrez es una actividad prácticamente universal en el contexto humano, debido a su difusión y considerado un deporte por el Comité Olímpico Internacional como menciona García [4]. El análisis del llamado juego ciencia históricamente ha sido de enorme importancia en varios campos del conocimiento y del deporte, como una competencia intelectual. El ajedrez ha sido estudiado desde el punto de vista de la psicología del aprendizaje, de la estrategia militar y la inteligencia artificial.

Hesse (2010) [5] hace mención de viejos poemas del autor indio Bana por el 630 d.C. los cuales describen al *protoajedrez charatunga* 'el juego del ejército en cuatro partes', recordando así su origen como prototipo de la guerra, y el estudioso del ajedrez Uvencio Blanco Hernández (2021) [6] menciona que el ajedrez es una metáfora bélica; porque su naturaleza gira en torno a estrategias, tácticas, maniobras y mucho trabajo psicológico; con el único objetivo de derrotar al adversario. Ambos autores hacen hincapié en el peso que tienen las estrategias dentro del ajedrez, que en esencia también radica la importancia de este juego dentro de la ciencia pues sabemos que una estrategia consiste en establecer objetivos para determinar las acciones que alcancen esos objetivos a fin de coordinar y administrar los recursos para ejecutar dichas acciones y finalmente evaluar los riesgos y los beneficios de las **decisiones que se toman** en función de los objetivos. A la ciencia le interesa mucho este aspecto de la toma de decisiones.

A pesar de ser uno de los juegos más estudiados [7], en este trabajo se presenta un estudio original muy completo utilizando herramientas de programación, matemáticas estadísticas y conceptos de la física, que describen cuantitativamente la evolución de una partida a partir de la reconstrucción del atractor que le corresponde.

1.5. Planteamiento del problema

El ajedrez por su peculiar construcción puede generar un gran número de partidas totalmente distintas, tantas como lo estableció Shannon en su propia publicación para el ajedrez cuyo número estimo en 10^{120} [8]. Tanto la tesis previa como el artículo del propio autor reducen el universo de estas partidas a unos cuantos patrones. Sin

²Significa que en todos los casos la probabilidad es la misma.

embargo, solamente muestran un comportamiento recurrente dentro de las partidas de ajedrez que son evaluadas por la entropía S_{JDA} [2] y por la entropía equiprobable S_{eq} [3], pero no proporcionan el criterio para describir una partida ganadora o empatada.

Impulsado por el trabajo realizado en la licenciatura y extensión de dicho trabajo, en esta tesis se aborda el reto de realizar un análisis más exhaustivo y obtener el criterio de victoria usando la construcción de atractores como método para obtener la evolución del sistema en términos de la diferencia de entropías entre bandos contrinantes esto con el fin de terminar con el análisis previo que consideraba la presencia de ciertos patrones que corresponden a una partida ganada o empatada, y dar lugar a un análisis probabilístico que es cuantitativo.

Para ello se invirtieron dos años en la investigación y recopilación de la base de datos con más de 191 mil partidas realizados por humanos y un total de 100 mil partidas artificiales aleatorias generadas por código en una computadora, a esa base de partidas las he denominado "azarosas" porque la probabilidad de realizar una jugada es equiprobable. También se invirtió en el tratamiento de las partidas para su uso, en el desarrollo de los algoritmos que determinan la evolución de la entropía a lo largo de la partida, y en los algoritmos que construyen el atractor. Este trabajo y su delación requirió aproximadamente 10,000 horas de cómputo.

2 Marco teórico

2.1. Definiciones importantes.

Al realizar un análisis estadístico del ajedrez es importante que estén definidas las variables del objeto de estudio, en este caso particular las características intrínsecas del ajedrez son abstraídas en conceptos simples que permitirán realizar el análisis estadístico. Aquí se hace hincapié en las siguientes definiciones, que pueden no concordar con el “argot” ajedrecístico convencional.

- **Turno.** Orden en el que ocurren las intervenciones de los jugadores.
- **Movimiento.** Acto en que el jugador en turno altera el tablero mediante un cambio válido de posiciones en las piezas.
- **Tiempo.** Debido a la naturaleza secuencial de las series de mediciones que deseamos trabajar se define como el movimiento realizado por algún bando.¹
- **Movilidad.** Entiéndase como el total de *casillas dominadas* por un jugador o bando.
- **Elo** [9]. Ross (2007) [10] menciona al sistema de puntuación Elo como un método matemático, basado en calculo estadístico, para calcular la fuerza relativa de los jugadores en el deporte.
- **Notación Algebraica.** En el pequeño libro publicado por del Castillo (1993) [11] se aclara que éste es un sistema de notación ideado por Stamma cuyos conceptos básicos son los siguientes.
 1. Las columnas se identifican de izquierda a derecha con una letra (de *a* a *h*).
 2. Las filas se identifican con número (del *1* al *8*) partiendo de la línea base de blancas. Así cada casilla es identificada por una letra y un número.
 3. Los movimientos y capturas se identifican por la casilla de origen y llegada.

¹Esta definición tiene por objetivo hacer más fácil la representación gráfica de los resultados.

4. Cuando es una pieza la que juega, se antepone la inicial correspondiente (en mayúscula) a los signos del movimiento; si es un peón el que mueve se indican exclusivamente las casillas.

2.2. Entropía del ajedrez

En los apartados siguientes se definen tres entropías para el ajedrez. En general la entropía mide desorden y se debe entender en la teoría de la información, como menciona Gallager [12] que la entropía tiene la interpretación intuitiva de ser una medida de la incertidumbre asociada con elementos de un ensamble estadístico.

Es importante tomar en cuenta la definición formal que ofrece Shannon sobre “información” según Ayres (1994) [13], quien menciona que la desinformación **aumenta la incertidumbre** y la información es la **disminución de la incertidumbre**. Cabe aclarar que en los valores de entropía en la sección de resultados de este trabajo corresponde explícitamente a la **incertidumbre** de cada bando respecto al ensamble de sus movimientos legales. Posteriormente para obtener la serie temporal que utilizaremos para reconstruir el “atractor extraño” se calcula la diferencia entre la entropía de las piezas blancas (S^B) menos la entropía de las piezas negras (S^N) para cada jugada

$$SD = S^B - S^N \quad (2.1)$$

, veremos que la utilidad de esta diferencia es importante para determinar ventajas en el juego.

2.2.1. Entropía por densidad de ocupación.

Marcos concéntricos.

El tablero lo dividimos en cuatro zonas que se asemejan a marcos concéntricos como en la figura 2.1.

Para cada partida y para cada pieza se realizó un histograma de su ocupación en cada marco por etapa, nivel y resultado del juego. Las piezas se identifican por su inicial en inglés (rey: K=KING, dama: Q=QUEEN, peón: P=PAWN, alfil: B=BISHOP, caballo: N=KNIGHT, torre: R=ROOK). Las etapas de juego fueron consideradas de la manera siguiente.

- Apertura (se consideró desde el inicio hasta el quinceavo movimiento²)
- Medio juego (del movimiento 15 al 30 de cada jugador)
- Final (desde el movimiento 30 en adelante)
- Total (desde el movimiento 1 hasta la finalización de la partida)

La definición del comienzo de medio juego aparentemente es bastante arbitraria, pero nos da una idea general de la transición de la apertura (cuando se mueven las piezas de su posición inicial) hacia situaciones más agresivas que se dan en el medio juego.

²Este límite es una convención que corresponder a los resultados estadísticos obtenidos.

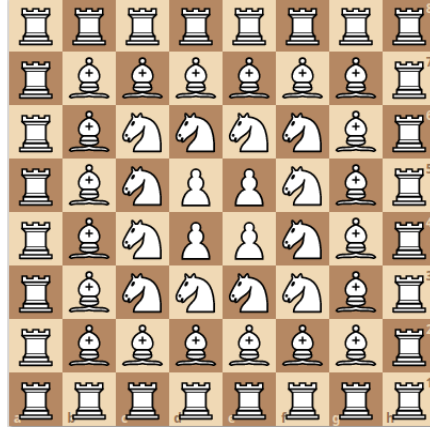


Figura 2.1: División de las zonas específicas: Marco central “M1” casillas ocupadas por peones, Marco central externo “M2” señalado por los caballos, Marco periférico interior “M3” ocupado por los alfiles, Marco exterior “M4” ocupado por las torres.

Densidad de ocupación.

Al estar definidos los marcos M1, M2, M3 y M4, cada uno compuesto por un respectivo conjunto de casillas, se obtiene la densidad de movimientos de cada pieza (p) mediante la siguiente ecuación.

$$D_i^p = \frac{M_i^p}{A_i} \quad (2.2)$$

Donde M_i^p es el número de movimientos de la pieza p en el marco concéntrico i , y A_i es el número de casillas del marco concéntrico i . $A_1 = 4$, $A_2 = 12$, $A_3 = 20$, $A_4 = 28$.

Definición de entropía S_M .

Para cada pieza tenemos un total de cuatro densidades, por ello se define una probabilidad de que la pieza este ocupando una casilla en alguno de los cuatro marcos definidos

$$P_i^p = \frac{D_i^p}{T_p} \quad (2.3)$$

donde $T_p = \sum_{i=1}^4 D_i^p$ es la suma de las densidades para la pieza p y la suma de estas probabilidades es igual a la unidad

$$\sum_{i=1}^4 P_i^p = 1 \quad (2.4)$$

Así pues, haciendo uso de la entropía de Shannon para este caso, defino la entropía para marcos concéntricos en función de la densidad de ocupación.

$$S_M = - \sum_{i=1}^4 P_i^p \ln(P_i^p) \quad (2.5)$$

2.2.2. Entropía equiprobable S_e

En mi artículo de 2022 [3] definimos para cualquier posición de ajedrez legal una entropía de casilla atacada S_{JDA} para piezas negras o blancas en términos de la probabilidad de ocupación de casillas $p_i = m_i/M$, donde m_i es el número de todos los movimientos posibles para la casilla i (libre u ocupado por una pieza del contrario) y M es la movilidad total definida como la suma de todos los movimientos posibles.

$$S_{JDA} = - \sum_{i=1}^{64} p_i \ln(p_i) \quad (2.6)$$

Así, cada cuadro atacado contribuye a la entropía de acuerdo con su concentración de “potencia de fuego” recibida. Además se definió una entropía equiprobable más simple S_e en términos de probabilidades iguales $p_e = 1/M$

$$S_e = - \sum_i^{64} p_e \ln(p_e) \quad (2.7)$$

esta entropía siempre produce que $S_e - S_{JDA} \geq 0$. En promedio, la diferencia $S_e - S_{JDA}$ es muy grande en la fase de apertura. Una de las principales causas de la reducción de S_{JDA} durante un juego es la pérdida material, que es un proceso irreversible. Según el resultado del juego, las diferencias en $\langle S_{JDA} \rangle$ entre ganadores, empates y pérdidas son mayores para los jugadores amateur que para los jugadores de élite, tanto en el medio juego como en el final. Estadísticamente, los jugadores Elite exhiben dispersiones más estrechas en S_{JDA} (figura 2.2.3).

2.2.3. Entropía S_{JDA}

Un objetivo de mi tesis de licenciatura [2] fue encontrar comportamientos estadísticos particulares relacionados con el nivel de juego, etapa y resultado al desarrollar programas que analicen partidas de ajedrez, y determinen su entropía turno a turno (véanse figuras 2.3 a 2.7). La entropía que se definió es una interpretación de la entropía de Shannon en el contexto del juego del ajedrez (ecuación 2.7) en esta definición las unidades de entropía son los *nat*³, p_i es la probabilidad de que la casilla i sea ocupada, es decir, las probabilidades del evento se obtienen de la evaluación:

$$p_i = \frac{\text{Número de casos favorables para ocupar la casilla } i}{\text{Número de movimientos validos posibles}} \quad (2.8)$$

La evaluación de la partida mediante la entropía permite caracterizar comportamientos, de forma estadística, para los distintos niveles de juego. En general muestra que es en el medio juego (del quinceavo movimiento hasta la treintava jugada) donde comienza el cambio de comportamiento que discrimina los distintos resultados de la partida, es decir, en el medio juego, estadísticamente, ocurre la distinción del resultado de la partida.

³La unidad natural de información (*nat*) que está basada en el logaritmo natural y en las potencias del número e.

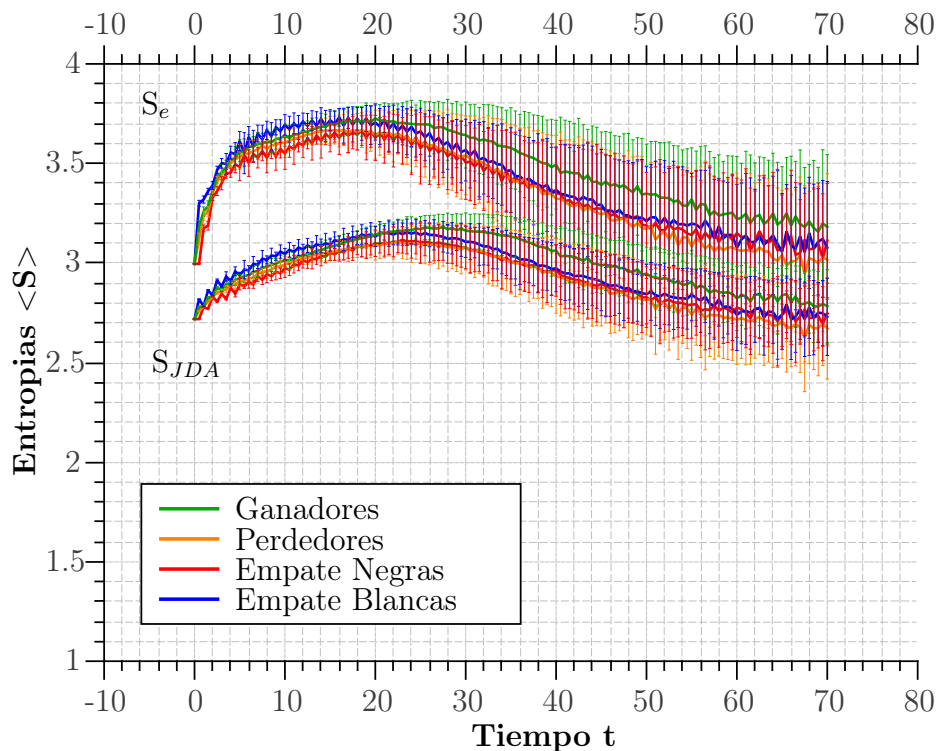


Figura 2.2: Jugadores Elite, entropías $\langle S_e \rangle$ y $\langle S_{JDA} \rangle$ en líneas continuas, con los valores de varianza correspondientes en color borroso. Se puede apreciar que la entropía promedio $\langle S_e \rangle$ es cota superior para la entropía promedio $\langle S_{JDA} \rangle$

El cambio en el comportamiento de la apertura, se debe principalmente a la pérdida de entropía, en el caso de los jugadores de elite y amateur, es debido al conflicto existente en contra de su oponente, llevando a cabo estrategias de oposición, que toman la forma de capturas y la eliminación de formaciones con piezas (o estructuras). La pérdida de incertidumbre (disminución de entropía) implica una mayor certidumbre de su movilidad, es decir, el jugador es más fácil de localizar en el tablero, lo cual, idealmente, permite ser aprovechado por el oponente para lograr sus objetivos y capturar al rey contrario.

Para los jugadores azarosos (figura 2.7), la competencia no existe, ya que no se enfrentan a estrategias de oposición, ni desarrollan alguna, por ello tienen un proceso de decaimiento de la incertidumbre (entropía) lento, ya que el estado aleatorio de los movimientos eventualmente realizará las jugadas de capturas o fractura de estructuras.

El análisis mostró que la entropía localiza los niveles de juego, se afirma que, estadísticamente, la entropía caracteriza el nivel jerárquico del juego, para los jugadores del ajedrez y se encuentra en correlación con el Elo del jugador (véase figura 2.3).

Además de las propiedades generales, también se muestran características particulares para los jugadores que ganan (figura 2.4), pues alcanza su máximo de entropía

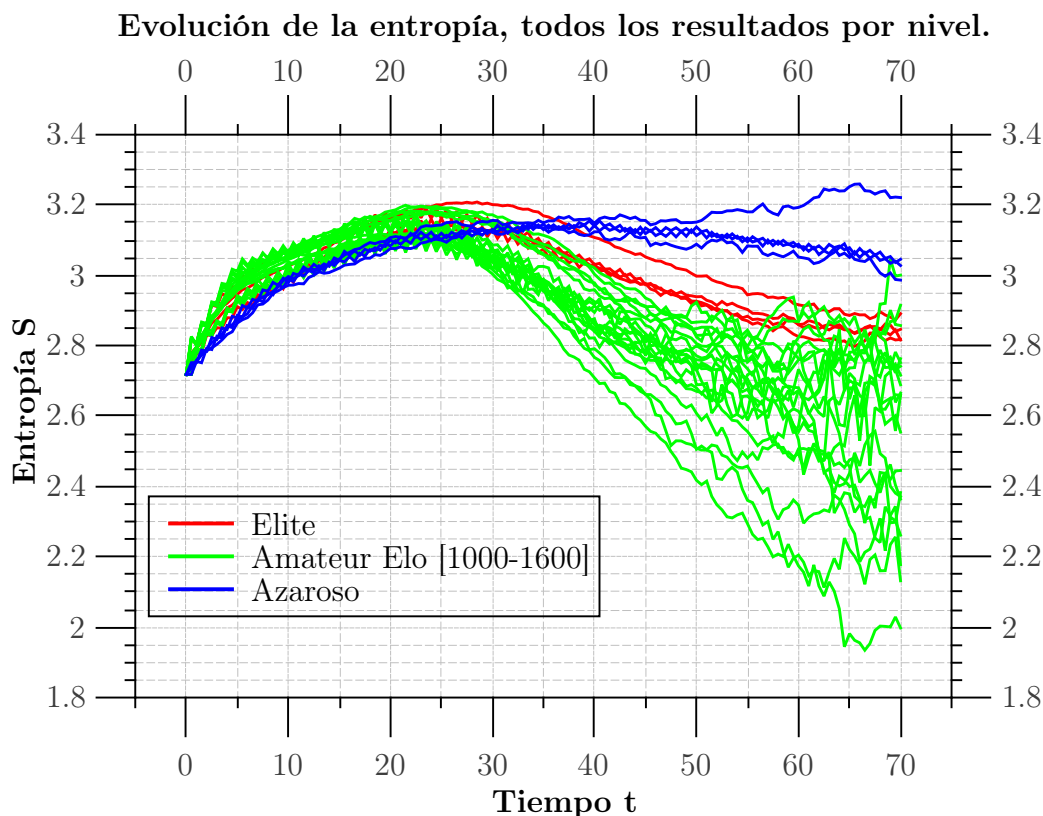


Figura 2.3: Evolución de la entropía promedio, por nivel de juego. Se observan bandas del color característico de cada nivel de juego, el aglutinamiento del color permite localizar el comportamiento del nivel en ciertos valores de entropía.

de forma tardía a comparación de su oponente (figura 2.5), se afirma que la entropía en función de la movilidad caracteriza apropiadamente el triunfo de los jugadores, los resultados de la partida están jerarquizados por la entropía y el grado de victoria para el resultado (ganador, empate, perdedor, en ese orden de mayor a menor jerarquía).

La gran ventaja de la evaluación de la partida, por medio de la entropía, es la economía computacional, puesto que los motores de ajedrez usan muchas variables para determinar aproximadamente el valor que ofrecen como evaluación posicional, en cambio, el cálculo de la entropía solo depende de una variable: **la movilidad**. Por otra parte, el análisis permite identificar las jugadas clave, además determina la contribución que produce la jugada para la resolución del problema (véase el ejemplo en el apéndice A.1). Otra de sus ventajas es que no depende de una unidad no fraccionaria como lo es el *peón*. La desventaja más notoria es que para el nuevo método es necesario realizar cálculos extra para determinar la ventaja.

Para la construcción de atractores se utilizó exclusivamente esta entropía S_{JDA} , ya que es más fina en el cálculo de la entropía pues como podemos observar en la figura existen zonas de juego donde los valores de entropía no cambian sensiblemente de una jugada a otra imposibilitando la capacidad de análisis. Por otro lado la varianza en los resultados es menor y por tanto más preciso.

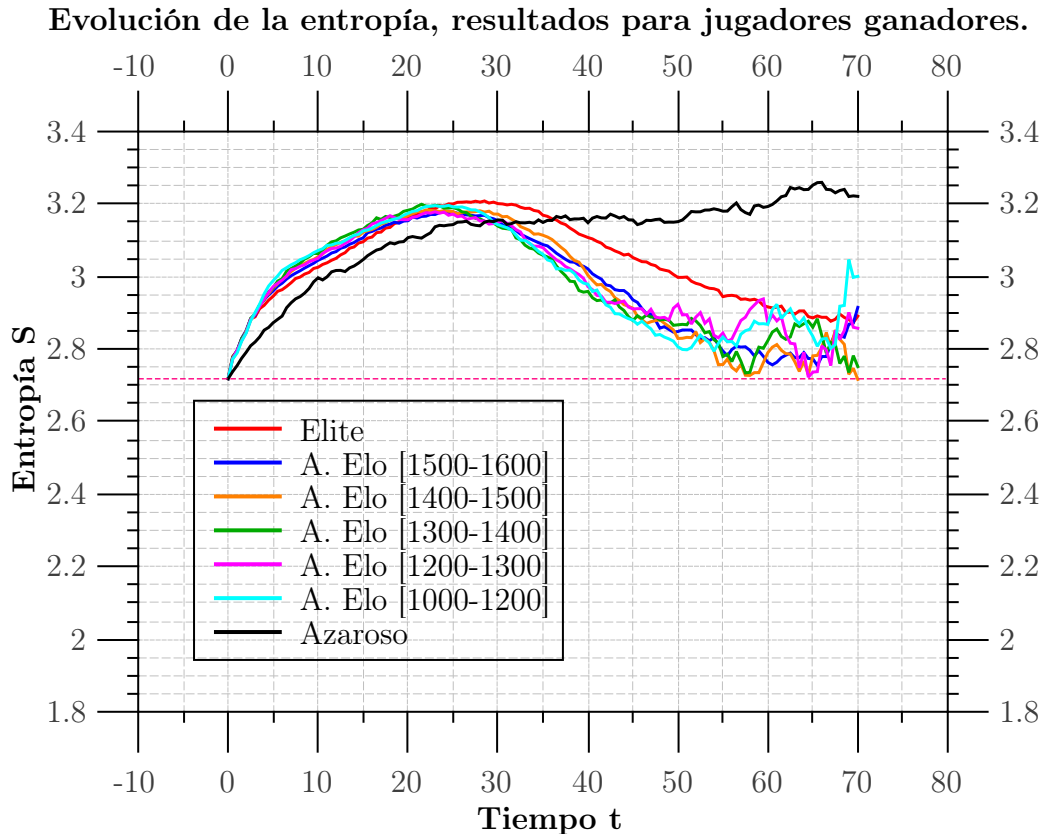


Figura 2.4: Evolución de la entropía promedio para los jugadores ganadores, por nivel de juego. Se observa que los ganadores mantienen el valor inicial de la entropía a lo largo de la partida, es decir, que mantienen su incertidumbre en valores mayores a los del inicio del juego, indicando que no se permiten tener mayor certidumbre en su movilidad, por lo tanto, la desinformación promedio es definida positiva, durante toda la partida.

2.3. Atractores

Considerando las características del problema es importante el uso de herramientas teóricas para lograr vincular la evolución de la entropía con el resultado final de victoria, y en particular se opta por la construcción del atractor a partir de una serie temporal de mediciones simples como lo es distribución espacial dentro de un tablero de ajedrez, a partir de la notación algebraica y la evaluación de la entropía jugada a jugada.

Ruelle (1981) [14] define que un atractor A es un conjunto en el espacio de fases que satisface las siguientes características.

1. A es un conjunto invariante, es decir, cualquier trayectoria que principia en A permanece permanentemente en A .
2. Las trayectorias que parten de un conjunto de condiciones iniciales acortan su distancia con respecto al conjunto A . Supongamos existe un conjunto U , de volumen no nulo, que contiene a A , tal que si la condición inicial $x(0) \in U$,

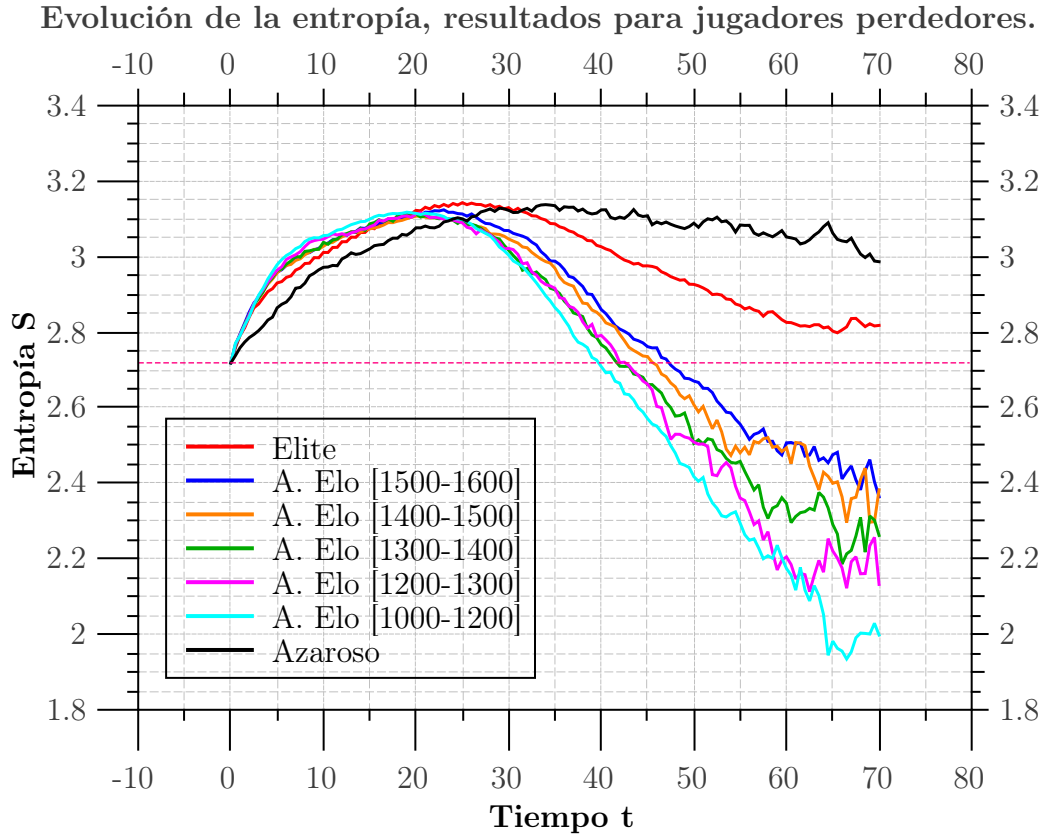


Figura 2.5: Evolución de la entropía promedio para los jugadores perdedores, por nivel de juego. Al contrario de los ganadores, se observa que la entropía de los jugadores amateur alcanza valores inferiores al valor inicial, por ende el cambio de incertidumbre promedio es negativa hacia el final de la partida, lo cual indica que hay mayor certidumbre de su movilidad, es decir, se puede determinar con mayor probabilidad cuales serán los movimientos siguientes, propiciando que se encuentren mejor localizadas las piezas, provocando que sea fácil atacar y dar captura, en especial al rey, lo que es equivalente a proporcionar información

entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(x(t), A) = 0 \quad (2.9)$$

donde d es la medida de distancia, t es el parámetro que secuencia la trayectoria que en este caso es $x(t)$. Es decir, A atrae hacia sí todas las trayectorias suficientemente cercanas a él. El conjunto U que satisface esta propiedad se llama base del atractor.

3. A es compacto. Esto implica que existe una colección finita de conjuntos abiertos que contienen completamente al atractor.
4. A es minimal o irreducible, es decir, no existe ningún subconjunto propio de A que satisface las condiciones anteriores.
5. Estabilidad bajo pequeñas perturbaciones. Esta propiedad es importante debido

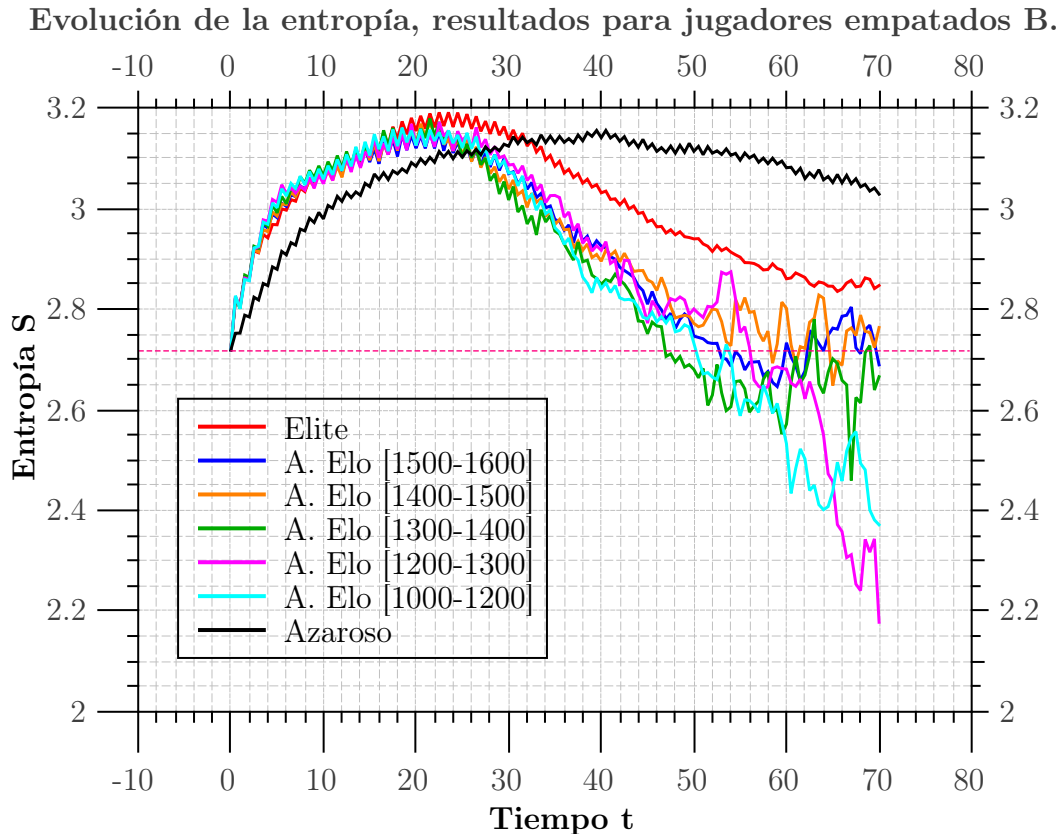


Figura 2.6: Evolución de la entropía promedio para los jugadores empatados con piezas blancas, por nivel de juego. Muestra un comportamiento acorde a los anteriores, sin embargo, se observa una característica prominente para la apertura, periodo durante el cual se manifiestan zigzagueos entre crestas y valles, donde las crestas coinciden con el turno de piezas blancas y los valles coinciden con el turno de las piezas negras, esto en términos de la desinformación implican que durante el turno de las piezas blancas, estas realizan una jugada que aumenta su incertidumbre obteniendo un desempeño favorable (ventaja), y durante el turno del oponente aumenta la información, es decir, la incertidumbre se ve reducida por la oposición

a que los experimentos siempre están sujetos a perturbaciones⁴ y los cálculos informáticos a errores por redondeo.

Los atractores tienen la propiedad de describir la evolución de un sistema a partir de sus condiciones iniciales, lo cual favorece mucho a nuestros objetivos y por ello resulta ser el mejor modelo para ello.

Debido a que contamos con una serie temporal de mediciones fiables de la entropía (o diferencia de incertidumbres) entre oponentes se optó por el teorema de Takens para construir el atractor. Si existe algún otro método para construir un atractor a partir de las mismos recursos se desconoce completamente.

⁴En el sentido de ser ajeno al comportamiento observado.

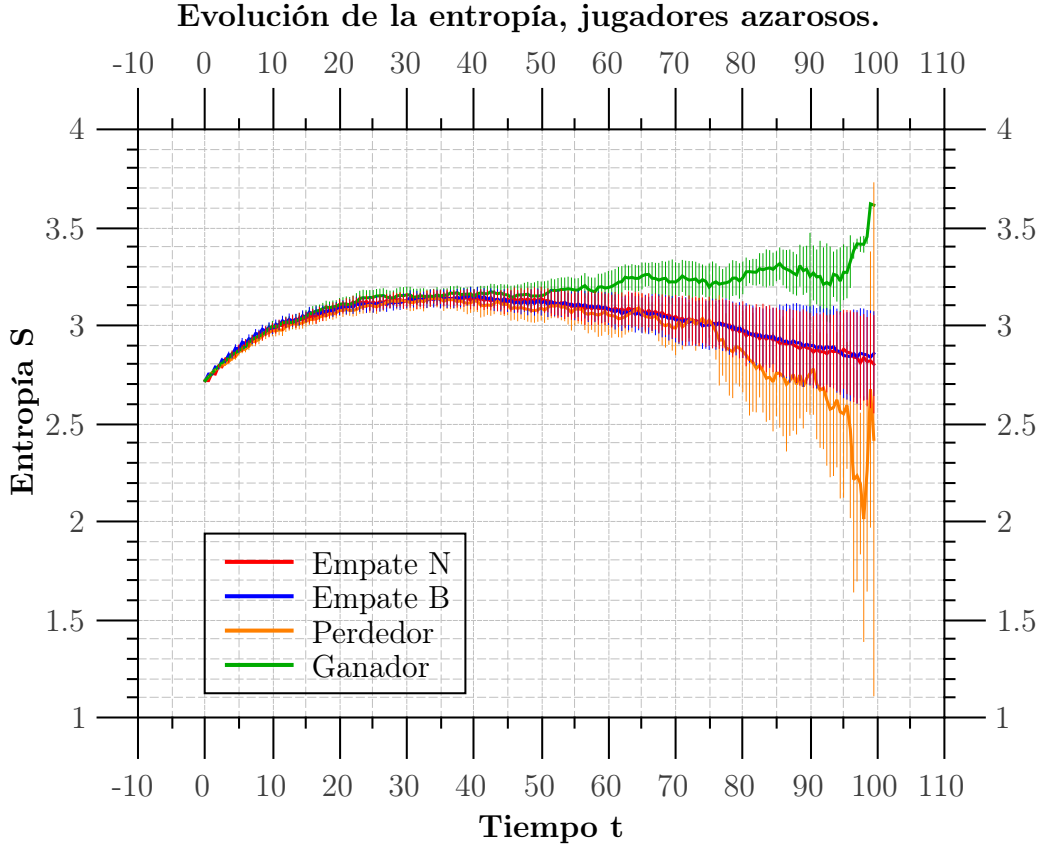


Figura 2.7: Evolución de la entropía promedio para los jugadores azarosos. Muestra una jerarquización de los resultados con respecto a la entropía y en correlación con el *resultado de victoria*, es decir, los perdedores poseen valores de entropía bajos, posteriormente los empates mantienen valores de entropía mayores a los perdedores, y finalmente los ganadores destacan con una entropía superior a los jugadores que empatan y por ende a los jugadores que pierden.

2.4. Teorema de Takens.

Siendo que desconocemos si el ajedrez se encuentra descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales con n variables, y ya que únicamente somos capaces de obtener medidas discretas en el tiempo sobre la evolución temporal de una de sus variables que en este caso es la diferencia de entropía SD entre las entropías muestreadas jugada a jugada entre los bandos de piezas blancas y piezas negras. Con esta diferencia SD que podemos suponer la primera variable, podemos tomar un muestreo de valores de la forma

$$s_0 = SD(t), s_1 = SD(t + \tau), s_2 = SD(t + 2\tau), s_k = SD(t + k\tau), \dots \quad (2.10)$$

que es una serie temporal reconstruida a partir de la serie originalmente muestreada ($SD(t)$) y tomada a intervalos de longitud τ . A partir de los valores s_j se construyen los llamados vectores con retardo de dimensión $2d + 1$, definidos como

$$y_j = (s_j, s_{j-1}, \dots, s_{j-2d}) \quad (2.11)$$

donde d corresponde usualmente a la dimensión del atractor del sistema. Por ejemplo, si el atractor es un estado particular, es decir, un punto en el espacio de fases, entonces $d=0$; si el atractor es un conjunto de estados que forman una curva en el espacio de fases, entonces $d=1$. En dimensiones superiores los atractores pueden tener estructuras extrañas dándoles así su nombre de atractores extraños.

Takens en su artículo de 1981 [15] demostró que para un sistema $SD(t)$ ⁵ que evoluciona en una variedad d -dimensional M , la dinámica de las soluciones se puede seguir fielmente tomando copias con retraso de tiempo k de una función $h : M \rightarrow R$

$$h(SD(t)), h(SD(t + \tau)), \dots, h(SD(t + k\tau)) \quad (2.12)$$

, con $k \geq 2d$. Más formalmente, mostró que para tal h , la aplicación $M \rightarrow R^{k+1}$ dado por

$$SD(t) \rightarrow (h(SD(t)), h(SD(t + \tau)), \dots, h(SD(t + k\tau))) \quad (2.13)$$

es un difeomorfismo⁶. Esto nos dice que las trayectorias que siguen los estados en el espacio de fase, es equivalente (homeomorfa) a la trayectoria seguida por los vectores de retardo en el espacio $2d + 1$ -dimensional. Por ello, la dinámica del sistema y su comportamiento se pueden describir analizando la reconstrucción del atractor de una de las variables del sistema.

Esto asegura que, bajo ciertas condiciones del sistema, resulta posible reconstruir la dinámica del sistema original completo a partir de mediciones de algunas de las variables involucradas y, de esta forma, conocer la evolución del mismo.

Debido a que cada movimiento dentro del tablero tienen una secuencia temporal y lógica estricta, es posible crear una serie temporal de evaluaciones que proporcionan escalares que serán posibles de manipular para reconstruir el atractor siguiendo el teorema de Takens y sus condiciones.

2.5. Espacio fase.

Jesen menciona que el espacio fase representa todas las posibles ejecuciones del sistema bajo consideración y puede usarse para verificar, es decir, probar en el sentido matemático de la palabra, que el sistema posee una determinada propiedad formalmente especificada. [16]

El espacio de fases es una representación de un sistema dinámico. Consiste de un espacio que tiene las dimensiones necesarias para especificar el estado del sistema original. Cada eje coordenado de este espacio representa una de las variables que componen el sistema. El espacio de fases representa, el conjunto de posibles estados en los que puede estar el sistema modelado.

En este espacio, los puntos que se obtienen de la serie temporal proporciona una descripción del estado del sistema a lo largo del tiempo. La órbita de un estado particular

⁵En términos de nuestras propias variables.

⁶Homeomorfismo diferenciable: En topología, un homeomorfismo diferenciable es una función de un espacio topológico a otro, que cumple con ser una función biyectiva continua y cuya inversa es continua, ambas funciones diferenciables.

vendrá representada por una curva o trayectoria en este espacio. Esta representación del sistema permite realizar una descripción cualitativa de la evolución temporal del modelo que se está estudiando.

2.6. Información mutua.

Puesto que la reconstrucción del atractor requiere de la serie temporal de los valores medidos y además de su serie con retraso, resulta fundamental la noción de información entre mediciones. Es Shannon quien establece la información mutua [12] entre dos mediciones a_i y b_j extraídas de los conjuntos A y B de posibles mediciones. La información mutua entre la medición a_i extraída de un conjunto $A = \{a_i\}$ y la medición b_j extraída de un conjunto $B = \{b_j\}$ es la cantidad aprendida por la medición de a_i sobre la medición de b_j . En bits es

$$\log_2 \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right] \quad (2.14)$$

donde $P_{AB}(a, b)$ es la densidad de probabilidad conjunta para las mediciones A y B que dan como resultado los valores a y b . $P_A(a)$ y $P_B(b)$ son las densidades de probabilidad individuales para las medidas de A y de B . En un sistema determinista se evalúa estas "probabilidades" mediante un histograma de las variaciones de a_i o b_j vistas en sus medidas.

Si la medición de un valor de A que da como resultado a_i es completamente independiente de la medición de un valor de b_j en B , entonces $P_{AB}(a, b)$ se factoriza en $P_{AB}(a, b) = P_A(a)P_B(b)$ y la información mutua, es cero, como debe ser. El promedio de todas las mediciones de esta estadística de información, denominada información mutua promedio entre las mediciones A y las mediciones B , es

$$I_{AB} = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}(a_i, b_j) \log_2 \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right] \quad (2.15)$$

Esta cantidad es estrictamente una idea teórica, que conecta dos conjuntos de medidas entre sí y establece un criterio para su dependencia mutua basado en la noción de conexión de información entre ellos.

Las mediciones $s(t)$ en el tiempo t están conectadas de manera teórica a las mediciones $s(t + \tau)$ en el tiempo $t + \tau$. Así que el conjunto de medidas A son los valores del observable $s(n)$, y para las medidas B , los valores de $s(n + \tau)$. Entonces la información mutua promedio entre estas dos mediciones, es decir, la cantidad (en bits) aprendida por las mediciones de $s(n)$ a través de las mediciones de $s(n + \tau)$ es

$$I(\tau) = \sum_{s(n), s(n+\tau)} P(s(n), s(n + \tau)) \log_2 \left[\frac{P(s(n), s(n + \tau))}{P(s(n))P(s(n + \tau))} \right] \quad (2.16)$$

Cuando τ se vuelve grande, el comportamiento caótico de la señal hace que las medidas $s(n)$ y $s(n + \tau)$ se vuelvan independientes en un sentido práctico, y $I(\tau)$ tenderá

a cero.

Fraser [17, 18] sugirió que se use la función $I(\tau)$ como una especie de función de autocorrelación no lineal para determinar cuándo los valores de $s(n)$ y $s(n + \tau)$ son lo suficientemente independientes entre sí para ser útiles como coordenadas en un vector de retardo de tiempo, pero no tan independientes como para no tener ninguna conexión entre sí.

Abarbanel sugiere [19] tomar el τ donde ocurre el primer mínimo de la información mutua promedio $I(\tau)$ como el valor para usar en la reconstrucción del espacio de fase con el tiempo de retardo.

2.7. Porcentaje de falsos vecinos cercanos (FNN).

El algoritmo de los falsos vecinos cercanos (FNN por sus siglas en inglés) se presenta como un método para determinar la dimension del vector de regresión adecuado para recrear la dinámica de los sistemas no lineales.

Según Rhodes y Morari 1997 [20], la idea detrás el algoritmo FNN es de naturaleza geométrica. Si hay suficiente información en el vector de regresión para predecir la salida futura, entonces los vectores de regresión cercanos también tendrán futuras salidas que están cerca. Si no hay suficientes términos presente en el vector regresor para recrear la dinámica del sistema, entonces habrá algunas vecindades en el espacio regresor que tienen salidas en un amplio rango de futuros productos asociados. Entonces las trayectorias que están cerca en el espacio de regresión con salidas muy diferentes pueden considerarse como falsos vecinos, ya que están cerca en el espacio de regresión solo debido a la proyección en un espacio con una dimensión demasiado pequeña para representan la dinámica del sistema.

Para datos sin ruido, el número de vecinos falsos se reducirá a cero cuando la dimensión del vector de regresión sea lo suficientemente grande como para permitir una predicción precisa de las salidas futuras. Para determinar si los vecinos son verdaderos o falso, se debe definir una prueba para determinar si los vecinos tienen salidas futuras que están “muy separadas”.

Para este propósito, una prueba de razón determina si la distancia entre las salidas futuras es significativamente mayor que la distancia entre los vectores de regresión. Si el distancia entre salidas futuras es “grande” cuando se divide por la distancia entre dos puntos que son “vecinos más cercanos” en el espacio del regresor, entonces el los vecinos se consideran falsos.

$$\frac{|s(l + (k + 1)\tau) - s^{NN}(j + (k + 1)\tau)|}{\|y(l + k\tau) - y^{NN}(j + k\tau)\|_2} \leq R \quad (2.17)$$

Donde R es un valor umbral elegido previamente. Abarbanel [19] establece que en la práctica para un gran número de sistemas el valor del umbral necesario para definir a un falso vecino es al rededor de 15 o menos.

2.8. Método Monte Carlo equiprobable en el ajedrez

El ajedrez es un juego de información perfecta pues en todos los turnos los jugadores pueden acceder a toda la información disponible de los demás jugadores. Para este tipo de juegos se puede construir un árbol de estados que contiene todos los resultados posibles, y bastaría asignar un valor de victoria o pérdida a las posibles ramas que parten del estado inicial para encontrar una estrategia con la mejor jugada posible.

El problema es que el tamaño del árbol de jugadas o estados puede ser tan grande que tanto la construcción como la búsqueda dentro del árbol se vuelven imprácticos. Abramson en 1987 [21] desarrollo la técnica de *Monte Carlo Tree Search* (Búsqueda en Árboles con Monte Carlo) que consiste en el siguiente algoritmo.

1. Se generan un gran número de simulaciones aleatorias desde la posición del tablero para la que se desea encontrar el mejor movimiento siguiente mediante su evaluación.
2. Se almacenan las estadísticas para cada movimiento posible a partir de este estado inicial y
3. Se devuelve el movimiento con los mejores resultados.

Desde entonces ha sido aplicado a multitud de juegos, y usado también para resolver problemas de búsqueda en problemas de planificación y de toma de decisiones.

En mi proceso de *Monte Carlo* no hay ninguna estrategia para capturar piezas o el rey enemigo pues todas las jugadas son equiprobables, ya que en vez de desarrollar las evaluaciones de todas las posibles ramas del árbol, se seleccionaba un movimiento al azar por turno (la selección era equiprobable, sin ningún tipo de evaluación de por medio) con los cuales se generaba una partida con movimientos al azar. La implementación de este tipo de jugadores permite comparar la evolución de un sistema comandado por una inteligencia contra un sistema que “careciera de inteligencia”, a estos “jugadores” se les llamo azarosos.

3 Metodología

La falta de limitaciones propias de la medición debido a que se está analizando un juego con información perfecta y además la rigurosidad técnica en las notaciones de una partida de ajedrez presenta la gran ventaja de carecer de algún tipo de error de cálculo, salvo por el redondeo de los sistemas computacionales que en principio pueden volverse despreciables.

3.1. Base de datos

3.1.1. Densidad de ocupación.

El primer análisis sobre la densidad de ocupación por zonas del tablero se realizó con una base de datos original de mi tesis de licenciatura [2], la distribución de las mismas se describe en la tabla 3.1.

| Elo | Victoria Blancas | Victoria negras | Empate |
|------------|------------------|-----------------|--------|
| Computador | 450 | 510 | 950 |
| 1000-1200 | 599 | 558 | 320 |
| 1200-1300 | 263 | 233 | 173 |
| 1300-1400 | 377 | 275 | 224 |
| 1400-1500 | 431 | 402 | 329 |
| 1500-1600 | 767 | 627 | 589 |
| Elite | 2138 | 1401 | 3274 |

Tabla 3.1: Número de partidas por nivel y resultado de victoria. Los jugadores de Elite son aquellos que cuyo Elo >1800

3.1.2. Jugadores humanos

Primero se establece la base de datos, la cual comprende un extenso compendio de partidas de ajedrez. Las partidas se obtuvieron de *ChessBase*¹, el vasto compendio permitió seleccionar resultados de victoria, además de poseer un Elo definido. Dicha base de datos está dividida en primera instancia por el nivel de juego, este nivel se toma de referencia al Elo que poseen ambos jugadores al momento de realizar la

¹<https://es.chessbase.com/>

partida.

Por simplicidad se determino que las partidas sean realizadas entre jugadores que no tengan una diferencia mayor a 100 puntos de Elo, esto con el afán de obtener partidas con un nivel de competencia semejante, y además que se encuentren en intervalos ordenados de 100 puntos en 100 puntos desde los 1901 puntos hasta los 2800 puntos de Elo, es decir, intervalos de (1901-2000), (2001-2100),..., (2701-2800). La razón de tomar este intervalo específico de Elo es debido a que en estos puntajes ya se considera un nivel avanzado en el juego del ajedrez incluso llamados “grandes maestros”, quienes en principio tienen nociones y estudios profundos del juego; es verdad que existen jugadores con un Elo superior a los 2800, pero rara vez se enfrentan dos jugadores con semejantes Elo, por lo que son pocas las partidas las que se pueden considerar y se opto por mantener los niveles con un alto número de partidas. También es verdad que existen *motores de ajedrez, software* dedicado o *machine learning* que ha alcanzado niveles de Elo superiores a la mayoría de los humanos, sin embargo se opto por no considerarse pues se trata de un tipo diferente de jugador que ameritaría un estudio propio.

En segunda instancia, a la base de datos existente se le adiciono un criterio adicional y es el resultado final de la partida. Si la partida resulto favorable para las piezas blancas (1-0), para las piezas negras (0-1), o si es un juego en *tablas*² (1/2 – 1/2).

Finalmente, existen partidas marcadas como vencedoras sin que estas tengan un jaque mate como movimiento final, ya que esto se determina a veces por convenio de los jugadores o por el fallo de los jueces del torneo. La base de partidas concluyó con la disposición observada en el cuadro 3.2.

| Nivel | Victoria | # Partidas | Nivel | Victoria | # Partidas |
|-----------|----------|------------|-----------|----------|------------|
| 1901-2000 | Blancas | 938 | 2401-2500 | Blancas | 9995 |
| | Negras | 683 | | Negras | 10000 |
| | Empate | 690 | | Empate | 10000 |
| 2001-2100 | Blancas | 2829 | 2501-2600 | Blancas | 11587 |
| | Negras | 2368 | | Negras | 7359 |
| | Empate | 2530 | | Empate | 25601 |
| 2101-2200 | Blancas | 5855 | 2601-2700 | Blancas | 3946 |
| | Negras | 4645 | | Negras | 2284 |
| | Empate | 5395 | | Empate | 8127 |
| 2201-2300 | Blancas | 11930 | 2701-2800 | Blancas | 692 |
| | Negras | 9347 | | Negras | 397 |
| | Empate | 12322 | | Empate | 1502 |
| 2301-2400 | Blancas | 13150 | | | |
| | Negras | 9594 | | | |
| | Empate | 17803 | | | |

Tabla 3.2: Base de datos de partidas de ajedrez utilizada para el análisis.

²Empate cuando ninguno de los dos jugadores ha conseguido imponerse. [22]

3.1.3. Jugadores artificiales de Monte Carlo equiprobable

Los jugadores azarosos tienen la cualidad de desarrollar partidas que en principio serían inexploradas por jugadores humanos pues los movimientos son seleccionados cuasi-aleatoriamente por la computadora, y con la suficiente libertad podría desarrollar partidas de miles de movimientos. Ya que estas partidas en principio también se encuentran dentro del atractor que se desarrolla, es importante conocer si esto es verdad y como se distinguen sus partidas de las partidas realizadas por jugadores humanos.

La base de datos de los jugadores azarosos generados por computadora comprende un total de cien mil partidas las cuales se puede observar su distribución en la 3.3, de la cual se observa que la razón de obtener una partida victoriosa es de cerca del 15.6 %.

| Simulación Monte Carlo | |
|------------------------|----------|
| Victoria | Partidas |
| Blancas | 7875 |
| Negras | 7703 |
| Empates | 84422 |

Tabla 3.3: Distribución de las partidas en la base de datos de jugadores azarosos

3.2. Resultados densidad de ocupación.

En principio el algoritmo se encarga de obtener la frecuencia de ocupación para cada pieza dentro de toda la base de datos. El algoritmo es el siguiente.

1. Se selecciona una partida cualquiera y se inicializan las posiciones en las posiciones iniciales del tablero.
2. Cada movimiento lleva el registro de la pieza movida y la casilla de ocupación.
3. Se contabiliza y guarda la frecuencia de ocupación tomando en cuenta el nivel, resultado, bando, etapa del juego, pieza y a que marco corresponde la ocupación (M1,M2,M3,M4)
4. Se itera para toda la base de datos.
5. Al terminar con todas las partidas se calcula la densidad de ocupación siguiendo la ecuación 2.2, para posteriormente realizar el cálculo de la probabilidad y la entropía.

Los resultados se presentan en un condensado de los cálculos que culminan con las representaciones gráficas de la entropía para cada pieza, nivel y resultado de la partida. Finalmente se realiza el análisis de los resultados.

3.3. Evolución de la entropía.

En el trabajo previo se desarrolló un programa cuyo algoritmo permite obtener, una partida a la vez, la **movilidad** de ambos bandos para cada turno, posteriormente se obtiene el cálculo de la entropía S_{JDA} de ambos jugadores en el mismo turno (el código de este algoritmo se puede encontrar en el apéndice B.1) y se obtiene la diferencia de las entropías jugada a jugada

$$SD(t) = S_{JDA}^B(t) - S_{JDA}^N(t) \quad (3.1)$$

donde $S_{JDA}^B(t)$ corresponde a la entropía de las piezas blancas al tiempo t , y $S_{JDA}^N(t)$ es la entropía de las piezas negras al tiempo t , estas diferencias $SD(t)$ que son tomadas al tiempo t (ply³) son almacenadas en memoria para su posterior uso, los datos están etiquetados por orden en el 'tiempo' (o ply) en el que ocurrió, y las diferencias de entropía a lo largo de cada partida esta perfectamente identificada dentro de esta nueva base de datos, debe ser así pues este conjunto de diferencias a lo largo de la cada partida resulta ser la serie temporal de dicha partida y de donde se obtendrá la reconstrucción del atractor.

3.4. Construcción del atractor.

3.4.1. Obtención del tiempo de retraso con información mutua.

Siguiendo el Teorema de Takens, es necesario construir los vectores de regresión o la serie de retraso, y para ello se requiere la obtención del tiempo de retraso óptimo como se explico en el capítulo anterior.

El algoritmo para evaluar la información mutua (el código usado se encuentra en el apéndice B.2) y obtener el tiempo de retraso τ adecuado es el que sigue:

1. Iniciar con la serie de valores muestreados $s(n)$.
2. Seleccionar una τ (se inicia en cero).
3. Se obtiene la probabilidad relacionada a las mediciones originales mediante la frecuencia de aparición en un histograma.
4. Haciendo uso de la τ seleccionada, se construye la serie de retraso $s(n + \tau)$, y al igual que con la serie original, se obtiene la probabilidad de esta nueva serie mediante un histograma.
5. Se obtiene la probabilidad conjunta de ambas series mediante un histograma bidimensional.

³Cada ply es un movimiento de un bando, por tanto una jugada entera, por ejemplo 1.e4 e5 está compuesta por dos plies. Se usa principalmente en el ajedrez entre computadoras. <https://chess24.com/es/informate/glosario/ply> [23]

6. Se introducen los valores obtenidos en la expresión de información mutua y se evalúa si el resultante es un mínimo.
7. Se continua el algoritmo iterando sobre valores de τ mayores hasta encontrar el primer mínimo.
8. Se almacena en memoria el valor de τ del primer mínimo de la información mutua.

A partir de este algoritmo se obtiene que el valor de τ no es único para todo el universo de partidas que fueron analizadas, pues los valores distan desde $\tau = 1$ hasta $\tau = 84$. Por simplicidad, los datos ya almacenados de las series originales se volvieron a etiquetar bajo la cantidad de τ que le corresponde a cada partida tras ser analizada por el método de información mutua.

Posteriormente al obtener esta nueva base de datos bajo el valor de τ se procede a crear el vector de regresión a partir de la serie temporal original de cada partida con su correspondiente retraso τ .

3.4.2. Determinación de la dimensión de los atractores.

Después de obtener la base de datos con la serie original y la nueva serie de retraso, se procede a obtener una estimación de la dimensión del atractor a partir de la evaluación de la vecindad de cada punto o vector nuevo generado a partir de la serie original y la creación de nuevos vectores de regresión que tienen una dimensión que va en aumento con la finalidad de obtener la estimación de si los vecinos más cercanos al vector de inicio se encuentran también en una vecindad cercana a este vector original en su versión de regresión en una dimensión superior, esto con la finalidad de evitar los efectos geométricos de la proyección, es decir, reducir el porcentaje de falsos vecinos a cero.

El algoritmo FNN (el código usado se encuentra en el apéndice B.2) es el que sigue:

1. Formar el conjunto de regresores

$$\varphi_k(t) = [y_1(t), \dots, y_N(t)] \quad (3.2)$$

que esta relacionado con los vectores estado $y(t)$ de datos obtenidos de las series de tiempo con una dimensión de retraso k .

$$y(t) = [s(t), s(t + \tau), \dots, s(t + k\tau)] \quad (3.3)$$

2. Para un estado (vector) $y(l)$, identificar el punto más cercano (en sentido euclidiano) en el espacio de regresión. Es decir, encontrar otro regresor $y^{NN}(j)$ en el conjunto de datos tal que la distancia d se minimice.

$$d = \|y(l) - y^{NN}(j)\|_2 \quad (3.4)$$

Cabe señalar que los tiempos l y j no están necesariamente cerca uno del otro. Según Fredkin y Rice (1995), si k y j siempre están cerca uno del otro, el tiempo de muestreo puede ser demasiado pequeño y puede haber problemas para estimar con precisión la dimensión del vector de regresión [24].

3. Determinar si la expresión 2.7 es verdadera o falso

$$\frac{|s(l + (k + 1)\tau) - s^{NN}(j + (k + 1)\tau)|}{\|y(l + k\tau) - y^{NN}(j + k\tau)\|_2} \leq R \quad (3.5)$$

Si la expresión 3 es verdadera, entonces los vecinos son registrados como verdaderos vecinos. Si la expresión no se satisface, entonces son falsos vecinos. Este valor umbral se consideró en $R=15$ como lo aconseja la literatura.

4. Continuar el algoritmo para todos los tiempos k en el conjunto de datos. Calcule el porcentaje de puntos en el conjunto de datos que tienen falsos vecinos más cercanos.
5. Continuar con el algoritmo para aumentar la dimensión d hasta que el porcentaje de falsos vecinos más cercanos cae a cero. Si el porcentaje de falsos vecinos es grande, entonces el vector regresor debe extenderse para incluir entradas más retrasadas.

A lo largo de los cálculos se obtuvo el resultado de que no todas las partidas poseían la misma dimensión, lo cual aumento una etiqueta más a la base de datos ya existente, pues ahora también se considera la dimensión de esta, a pesar de que en apariencia esta dimension al ser siempre mayor que 3, y en virtud del teorema de Takens, solo son posibles visualizar la proyección del atractor en el espacio tridimensional.

3.4.3. Análisis probabilístico de los atractores.

Finalmente, después de haber considerado tanto la cantidad de retraso τ como la dimensión d para realizar los gráficos de la serie temporal de diferencias de entropía entre contrincantes para cada partida, se procedió a realizar el análisis de los gráficos resultantes, que en primera instancia proporcionaron una vista general de la forma del atractor.

Cada partida resulto en una línea en el espacio fase (tridimensional), el ensamble de líneas muestra la forma del atractor, sin embargo, debido a sus peculiaridades someras requirieron de un posterior tratamiento para la visualización de la secuencia del camino que toma la partida y con especial énfasis de hacia donde se dirige en su estado final cuando termina la partida.

Puesto que es de interés y objetivo la correlación con el resultado final de las partidas, se opto por considerar los últimos diez estados de cada partida, pues contiene el final y un breve vistazo de la secuencia de atracción que aunque no es el objetivo también es de interés para futuros trabajos. La recurrencia en los pasos secuenciales exigieron de un tercer tratamiento para conocer el conjunto de puntos con los que finaliza toda partida dentro del propio atractor.

El resultado exigió de un nuevo análisis, en este caso espectral sobre la densidad de puntos dentro del conjunto definido por estos estados finales. Los resultados fueron evaluados por un sondeo en donde se dividió en 500 cuadrantes todo el espacio comprendido por “la cuenca de atracción” en los cuales se tomaron en cuenta cada estado final que se encontrara dentro de un cuadrante y se realizó el conteo de frecuencias de los estados de cada final que se encontraban dentro de dicho cuadrante posteriormente se normalizó con respecto a los estados finales por cuadrante y dando como resultado la probabilidad de obtener un resultado de victoria o empate de las partidas, el algoritmo se utilizó para desarrollar un mapa de color con respecto al resultado de mayor probabilidad por cuadrante.

3.4.4. Comparación de resultados entre jugadores humanos y de Monte Carlo artificiales

De los resultados obtenidos para la zona de estados finales o “cuenca de atracción” se le asigna una probabilidad para cada resultado posible del ajedrez que a su vez permite mapear las zonas de mayor probabilidad de ocurrir una victoria o un empate. La enorme ventaja que se posee al presentar dos tipos de jugadores (humanos y de simulación Monte Carlo) radica en la ausencia de estrategia por parte de uno de ellos y así poder observar la influencia de la estrategia para el mapeo probabilístico de victoria.

4 Resultados

4.1. Densidad de ocupación y entropía.

Al finalizar el conteo de frecuencias de la ocupación por zona en marcos centrales, se realizó el gráfico de las distintas distribuciones de esta densidad, para cada marco concéntrico, nivel, resultado, bando, pieza y etapa. Al ser un total de 144 gráficas sólo para la densidad, y 24 para la entropía se optó por presentar únicamente para el caso de la etapa total (desde el inicio hasta el final de las partidas), los demás casos se encuentran en el apéndice C.

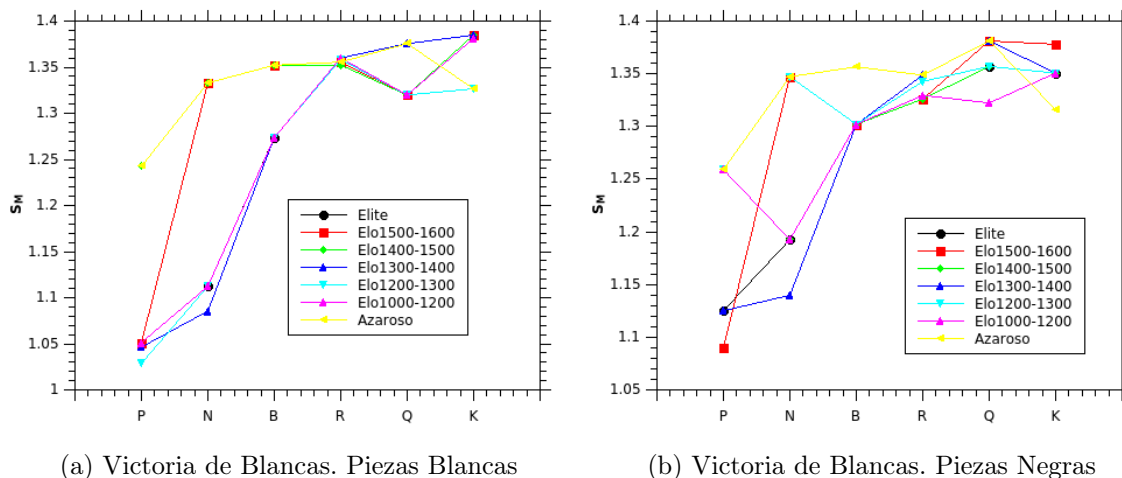


Figura 4.1: Distribución de la entropía por densidad de ocupación para cada pieza, caso de victoria de blancas.

Los resultados presentes en las figuras 4.1, 4.2, 4.3 muestran un hecho interesante pues en todos los resultados de la partida tanto con piezas blancas como con piezas negras se obtiene que el rey es aquel que posee mayor entropía, esto es debido a la distribución peculiar de su densidad de ocupación por zona, pues el rey exhibe en todas las configuraciones una distribución homogénea para cada uno de los marcos (véase figura 4.4), y siendo que la ecuación 2.5 se encuentra acotada por $S_M = -Ln(P_i^p)$ para el caso en el que P_i^p es equiprobable, es decir, $P_j^p = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 P_i^p = \frac{1}{4}$ para cualquier probabilidad j . Entonces el rey al distribuir su densidad de ocupación de una forma casi homogénea para cada zona, se obtiene que su entropía se acerca a la cota superior

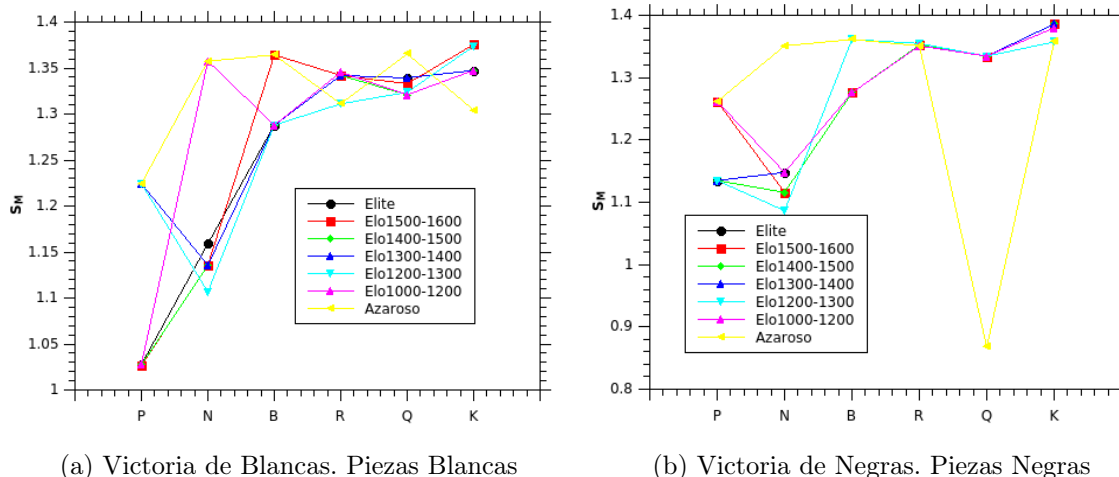


Figura 4.2: Distribución de la entropía por densidad de ocupación para cada pieza, caso de victoria de negras.

$S_M = -Ln(\frac{1}{4}) = 1.3863$. Que el rey sea la pieza con mayor entropía dentro de toda la partida indica que es la pieza con la menor certidumbre en su localización, esto corresponde con la naturaleza del juego pues es de interés que el rey sea difícil de localizar, de lo contrario los oponentes podrían llegar a capturarlo con mayor facilidad. Así como es notable en las figuras 4.1, 4.2, 4.3 se aprecia que la entropía de las piezas es muy similar entre resultados de la partida y bandos muestra que la ocupación en el tablero no es relevante para estas dos condiciones por lo que el análisis por ocupación de zonas es irrelevante para el objetivo de vincular la entropía con el resultado de la partida. Pese a esto resulta muy instructivo sobre la tendencia de ocupación de las piezas, la entropía nos dice la incertidumbre de hallar a una pieza en una cierta zona, y la distribución de la densidad nos permite conocer cuales son las zonas más relevantes para cada pieza, que además en conjunción con un análisis por etapas es posible comprender que piezas son más influyentes para cada etapa del juego y en este sentido el análisis es más fructífero en un contexto ajedrecístico.

4.2. Construcción del Atractor.

4.2.1. Jugadores humanos.

Comenzamos el análisis con la obtención de un histograma sobre todos los valores de τ obtenidos en la totalidad de las partidas presentes en la base de datos, ver la figura 4.5. La diversidad de valores nos indica que el mínimo de la información mutua depende enteramente de la serie temporal de las mediciones, es decir, depende completamente de la partida y como se realizó de lo contrario si se tratarse de un solo tiempo de retardo entonces este resultado seria evidencia de que depende unicamente de las características propias del ajedrez, como el cambio de turnos, sin embargo se puede apreciar que la mayoría se encuentra entre 1 y 5 “turnos” o ply que es el lapso de tiempo definido para nuestro problema y es proporcional al retardo.

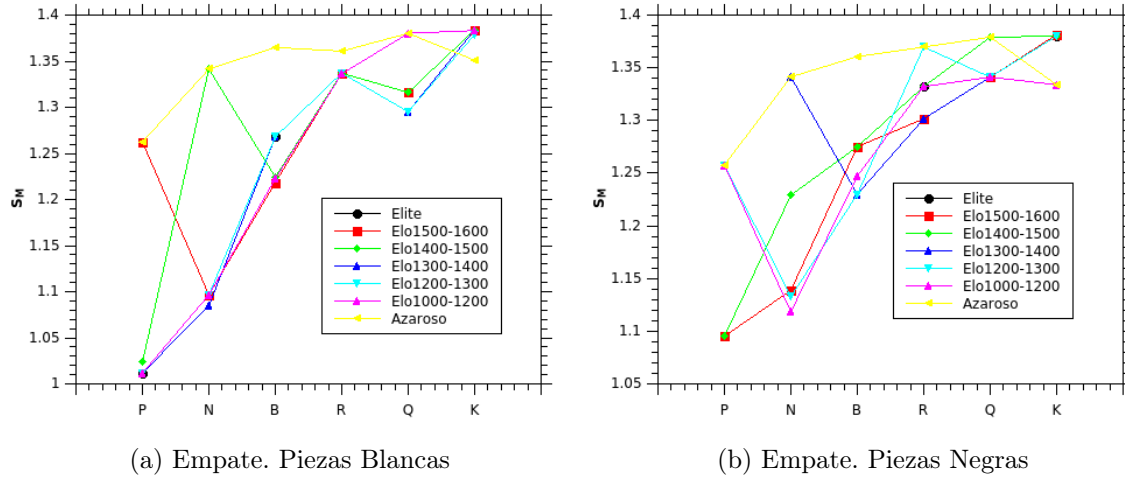


Figura 4.3: Distribución de la entropía por densidad de ocupación para cada pieza, caso de empate.

Al igual que con los tiempos de retraso, los cálculos de la dimensión del atractor comprenden un rango de valores cuya distribución puede observarse en la figura 4.6. Este resultado amerita un estudio posterior, que excede los objetivos de esta tesis, pues es interesante que un problema que es aparentemente el mismo, tenga la propiedad de encontrarse en diferentes dimensiones, la literatura encontrada [19] relaciona a los atractores analizados con una sola dimensión, por ejemplo el atractor de Lorenz tiene una dimensión 3 o un circuito no lineal con histéresis cuya dimensión de incrustación es 5, pero justamente ambos casos tienen sólo una dimensión.

La presencia de esta gama de valores se tomo en cuenta al construir el atractor, dando como resultado un compendio de gráficas que pueden ser observadas en el apéndice D.

Las combinaciones entre niveles y resultados es considerablemente larga y con el fin de evitar una alboroto en la lectura de esta tesis al introducir todas estas combinaciones de las partidas al mismo tiempo se resuelve por mostrar de aquí en adelante solo el nivel de juego con Elo entre (2301-2400), pues al ser el nivel con más partidas en la base de datos permitirá observar con mayor claridad al atractor y sus características. En la figura 4.7 se muestran los tres posibles resultados de una partida, la imagen muestra las trayectorias de todas las partidas en una sola gráfica, permitiendo así observar la forma del atractor (al igual que se observa que en todos los niveles, apéndice D), debido al ensamble se muestra que la forma del atractor es “estrellada”. La perspectiva no lo hace tan notorio pero al comparar las tres situaciones de la figura 4.7 se nota que en los casos ganadores las trayectorias “huyen” del signo contrario al asignado en la diferencia SD , es decir, los ganadores con piezas blancas describen trayectorias mayormente concentradas en los extremos positivos de la primera coordenada de retraso $SD(t+\tau)$ (caso 4.7a). En el otro caso (las partidas ganadas por negras) se acumulan en el extremo negativo de la primera coordenada de retraso $SD(t+\tau)$ (en el caso 4.9) lo cual muestra una tendencia de las trayectorias por mantenerse en zonas. Sin embargo, las trayectorias que empatan parecen abarcar todo el volumen del atractor, figura 4.10.

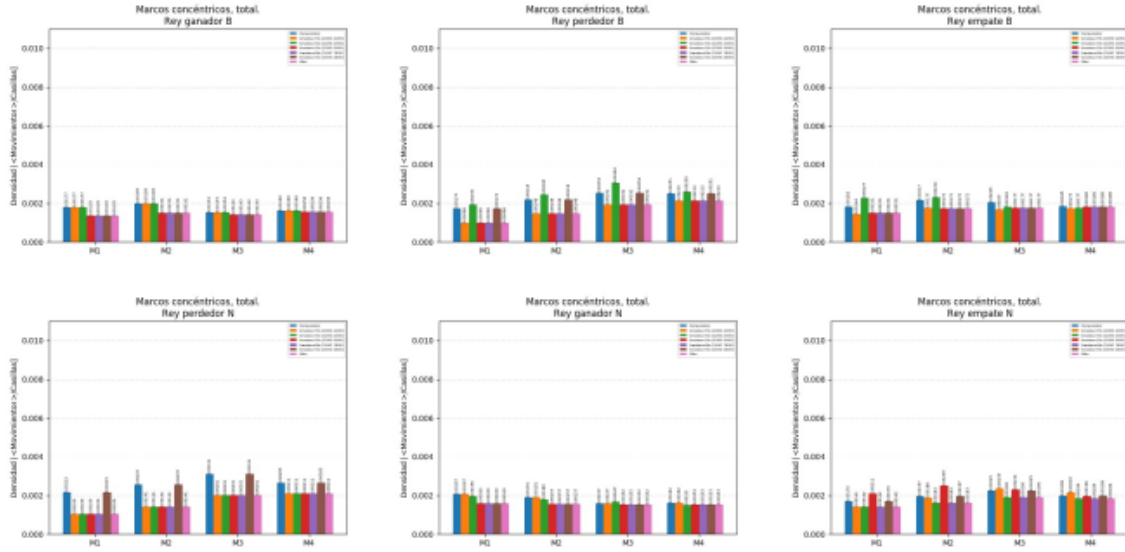


Figura 4.4: Distribución de valores para la densidad de ocupación del rey.

El radio de este atractor se encuentra acotado por la diferencia entre los logaritmos naturales de los movimientos de ambos jugadores, como se demuestra en mi artículo del 2022 [3]

$$S_{JDA} = - \sum_{i=1}^{64} p_i \ln(p_i) \leq \ln(M) \quad (4.1)$$

donde M es el número total de movimientos legales del bando. Si consideramos el caso extremo en el que una partida nos puede proporcionar la mayor cantidad de movimientos, y si un bando logra capturar todas las piezas del contrincante excepto el rey (para evitar el fin del juego) y además logra conservar todas sus piezas y más aun, logra promover todos sus peones a damas, entonces la disposición de piezas y movimientos queda según la tabla 4.1. Una cuenta sencilla sobre los movimientos

| Tipo de pieza | Máximo de movimientos posibles | Piezas disponibles | |
|---------------|--------------------------------|--------------------|----------------|
| | | Piezas bando 1 | Piezas bando 2 |
| K(REY) | 8 | 1 | 1 |
| Q(DAMA) | 28 | 9 | 0 |
| R(TORRE) | 14 | 2 | 0 |
| B(ALFIL) | 14 | 2 | 0 |
| N(CABALLO) | 8 | 2 | 0 |

Tabla 4.1: Escenario extremo de máximo número de movimientos.

posibles en cada bando (Tabla 4.1) nos lleva que en el caso del primer bando, de tener la suerte de organizar las piezas sobre el tablero de tal forma que logre tener el máximo número de movimientos ($M_1 = 332$) pero que son disminuidos por los 16 escaques ocupados por las 16 piezas del bando 1, entonces máximo tendría un total de

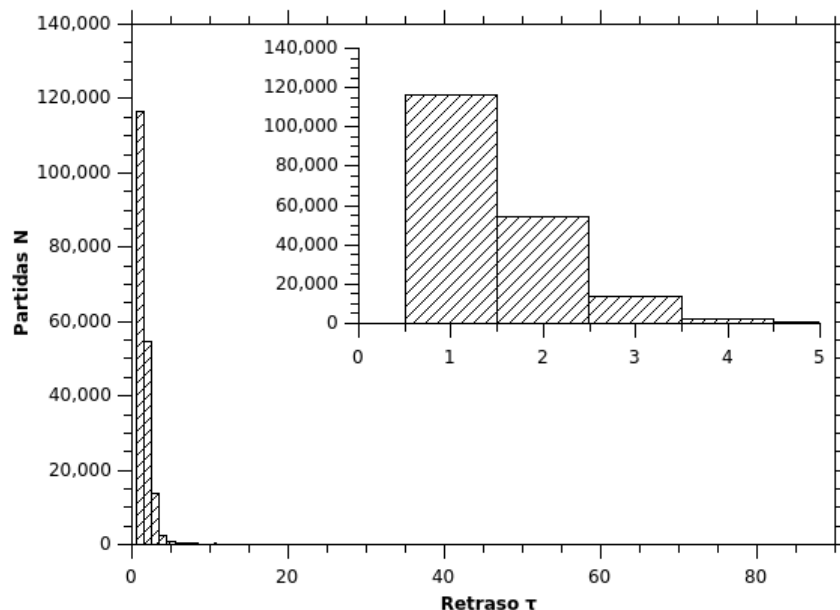


Figura 4.5: Distribución de valores del tiempo de retraso τ en toda la base de datos. Puede apreciarse en la parte derecha un zoom a la distribución y sabiendo que la base de datos comprende un poco más de 191000 partidas, se concluye que la mayoría de los tiempos de retraso τ comprenden desde el 1 hasta el 5, los demás valores son casos aislados que en su mayoría son únicas las partidas que poseen un retraso diferente.

$M_1 = 316$. En el caso del bando 2 el máximo número de movimientos realizados por un rey es 8, sin embargo, al buscar el número máximo de esta diferencia es necesario considerar el número mínimo de movimientos que puede realizar el rey en este caso es $M_2 = 3$ al estar en una esquina del tablero. Bajo estas consideraciones obtenemos que

$$R_A = S_{JDA}^{(1)} - S_{JDA}^{(2)} \leq \ln(M_1) - \ln(M_2) \approx 5.755 - 1.098 = 4.657 \quad (4.2)$$

Por tanto, y ante el escenario más extremo que se puede plantear dentro de un tablero normal de ajedrez, el radio del atractor se encuentra siempre acotado $R_A \leq 4.657$. En la práctica esta cota es una cantidad menor (no mayor a $R_A \leq 4.0$), pues las partidas “comunes” del ajedrez no llegan a estos extremos, pero el resultado nos garantiza que cualquier estado de un sistema (partida) analizado se encuentra dentro del atractor. La figura 4.7 en si misma no proporciona información, para remediarlo se realizó el mismo modelado pero ahora considerando una secuencia de color sencilla de seguir, los colores marcan la secuencia al iniciar con un claro amarillo hasta el oscuro bermellón, véase la figura 4.11. La figura 4.11 muestra una tendencia en la evolución de la diferencia de entropías, la cual procede a recorrer el atractor en una secuencia temporal fácil de seguir pues el orden cromático de cada estado en la partida genera cúmulos de mismos colores que muestran una estructura que marca la evolución del sistema, y dirigirse finalmente hacia el plano “ecuatorial” como lo muestran el color mas oscuro. La figura 4.12 al igual que en el caso anterior muestra una tendencia al recorrer el atractor en una secuencia temporal, el orden cromático de cada estado

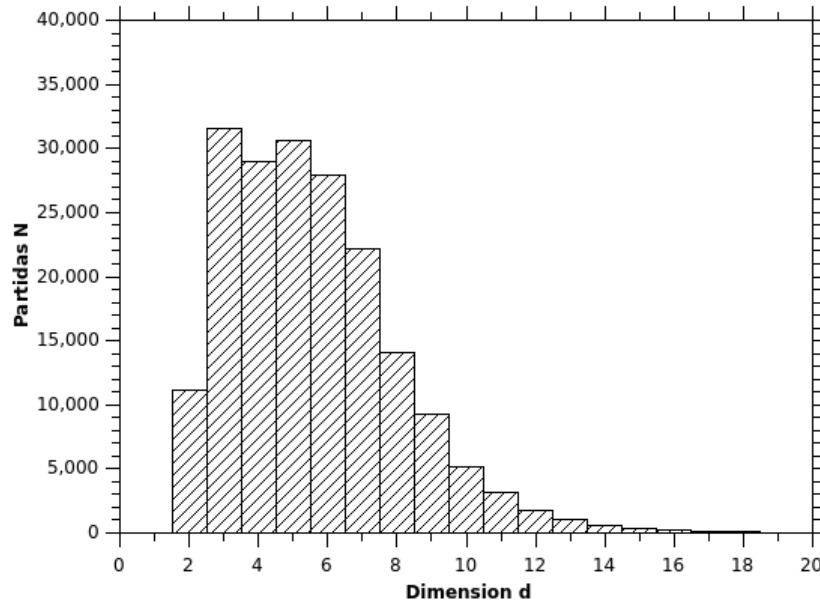


Figura 4.6: Distribución de valores de la dimensión d en toda la base de datos.

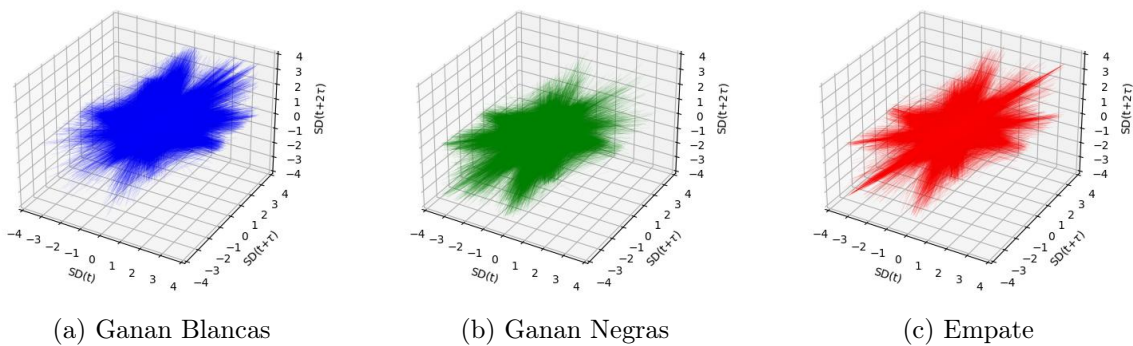


Figura 4.7: Atractor del ajedrez con nivel de Elo 2301-2400. Imagen creada por el ensamble de las trayectorias de las partidas.

en la partida genera cúmulos de mismos colores que muestran una estructura que marca la evolución del sistema y dirigirse finalmente hacia el plano “ecuatorial” como lo muestran el color más oscuro con la clara diferencia que se conglomeran en la esquina opuesta al mostrado en el caso de ganadores con piezas blancas (figura ??). Finalmente en la figura 4.13 a diferencia con los casos anteriores que se trataban de partidas ganadoras podemos apreciar que la secuencia de color se reparte usando todo el volumen del atractor, sin embargo al igual que en los casos anteriores se muestra el orden cromático en cúmulos de mismos colores y dirigirse finalmente hacia el plano “ecuatorial”. Aparentemente en la figura 4.14 los estados finales de cada partida se encuentra en una vecindad cercana con el eje $SD(t + 2\tau) = 0$. Haciendo la distribución de la componente $SD(t + 2\tau)$ para todos los estados finales dentro de la base de datos que puede verse en la figura 4.15. se concluye que efectivamente la distribución muestra que se trata de una zona con un grosor considerable (de 0.4 de anchura) y

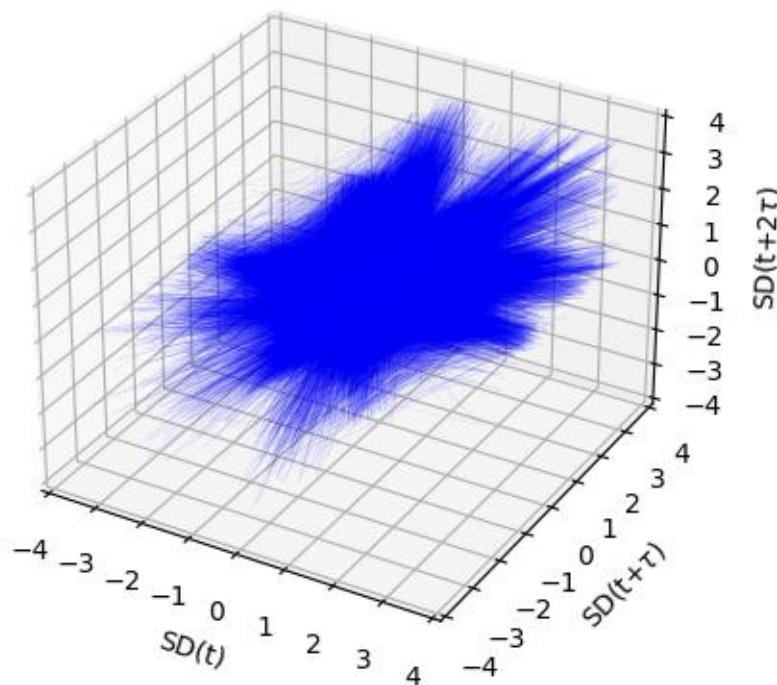


Figura 4.8: Reconstrucción del atractor para el nivel de Elo (2301-2400), caso ganan blancas.

cerca de $SD(t + 2\tau) = 0$. Es notable este echo pues nos confirma la existencia de una “cuenca de atracción” y no solo eso, las figuras en 4.14 muestran que los resultados tienen sus propias zonas específicas del ensamble de estados finales que forman. Las zonas muestran que los resultados con victoria de piezas negras tienden a acumularse en tercer cuadrante de la gráfica (véase la figura 4.17) que corresponden a la parte negativa de la coordenada $SD(t)$ y $SD(t + \tau)$, los resultados con victoria de piezas blancas se acumulan hacia el primer cuadrante de la gráfica (véase la figura 4.16), opuesto a las negras, en la parte positiva de la coordenada $SD(t)$ y $SD(t + \tau)$ y finalmente el resultado de empate aparentemente toma cualquier valor del cúmulo final véase la figura 4.18).

Este aparente abarcamiento de toda la zona final por parte de las partidas que concluyen en empate alentó a realizar un análisis sobre dicho cúmulo para determinar el grado de acumulación sobre la zona para cada resultado y determinar las diferencias entre partidas con victoria y partidas con empate, esto mediante la densidad de puntos por zona en el atractor, véase las figuras 4.19, 4.20, 4.21. Tomando en cuenta todas las partidas en la base de datos y estando identificados los resultados de las mismas y a que zonas de la cuenca de atracción tenían su estado terminal, se procedió con un algoritmo que determino la probabilidad de cada resultado por cuadrante sobre todo el atractor, los cálculos que toman la forma de un mapa de color para la cuenca de atracción muestra la probabilidad de obtener el resultado de victoria al terminar la partida en una zona específica de la cuenca de atracción, es decir, si el estado final de la partida termina en las coordenadas (0,0,0) existe una mayor probabilidad de que

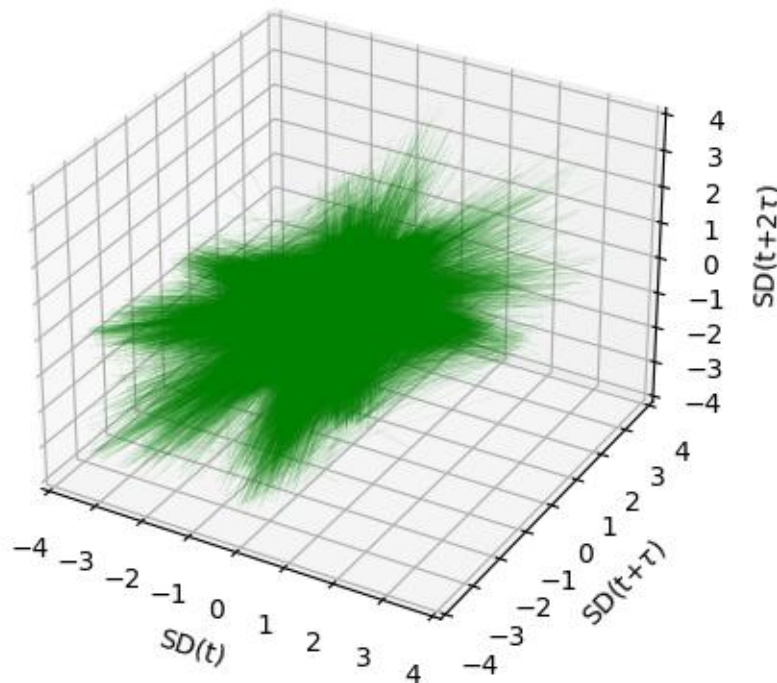


Figura 4.9: Reconstrucción del atractor para el nivel de Elo (2301-2400), caso ganan negras.

la partida tenga un resultado de empate y en menor probabilidad de que se trate de una victoria de negras o de blancas^{4.22}.

4.2.2. Jugador Azaroso

Al igual que la base de datos anterior, se construyeron los atractores para la base de datos de partidas generadas por jugadores azarosos, los cuales carecen de cualquier tipo de estrategia, sin embargo, así como los famosos monos infinitos de Shakespeare, si se realizan el número suficiente de simulaciones con un tiempo infinito eventualmente las partidas generadas aleatoriamente darán como resultado partidas que tengan como resultado una victoria de alguno de los dos bandos, lo cual nos permite observar su evolución dentro del atractor ya mostrado. En el caso de las figuras presentes en 4.23 se puede observar que hay una mayor dispersión en los colores presentes en los casos de victoria, aunque se observan zonas de estados finales muy marcadas y que se encuentran en la misma “cuenca de atracción” antes mostrada. En el caso de los empates los cúmulos de color están más marcados y esto puede deberse a la enorme cantidad de partidas para este caso. Como antes, solo nos interesa observar las disposiciones de los estados finales en la “cuenca de atracción” para determinar las zonas de mayor probabilidad. En el caso de las partidas que alcanzaron específicamente el estado de jaque mate que le otorgo la victoria a las piezas blancas, se puede observar en la figura 4.24 que los estados finales se acumulan en la zona más externa del atractor y coincide con la zona observada previamente donde finalizan

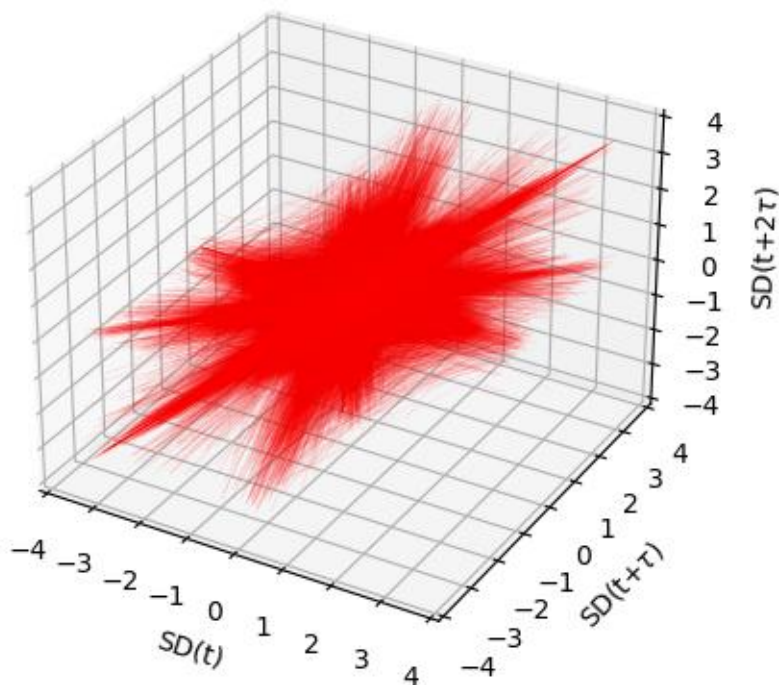


Figura 4.10: Construcción del atractor para el nivel de Elo (2301-2400), caso empate.

las partidas que ganan con blancas. En el caso de las partidas con jaque mate que le otorgo la victoria a las piezas negras, se puede observar en la figura 4.25 el mismo caso (pero opuesto en la localización) para el caso que ganan blancas, los estados finales se acumulan en la zona más externa del atractor en el tercer cuadrante que coincide con los valores negativos. Finalmente en el caso de las partidas que empataron, se puede observar en la figura 4.26 una mayor dispersión en los datos a comparación de los casos previos donde las partidas son realizadas por jugadores humanos los cuales ya poseen una estrategia, distinguiéndose así al crear una distribución más localizada al delimitar “rayos” o brazos de la estrella y concentrándose mayormente en el centro para el caso de empates y en los brazos para los casos de victoria. Este resultado resulta importante pues muestra las diferencias entre los ensambles generados por dos diferentes tipos de jugadores y como la estrategia es determinante para generar las condiciones de una mayor riqueza de partidas que alcancen estados finales distintos. Además la concentración de zonas de victorias en los extremos indica que la zona de mayor probabilidad de victoria (véase figura 4.27) es cuando menos muy específica para las condiciones de estos jugadores azarosos que a diferencia de los humanos no pueden acceder a otras zonas de la “cuenca de atracción”.

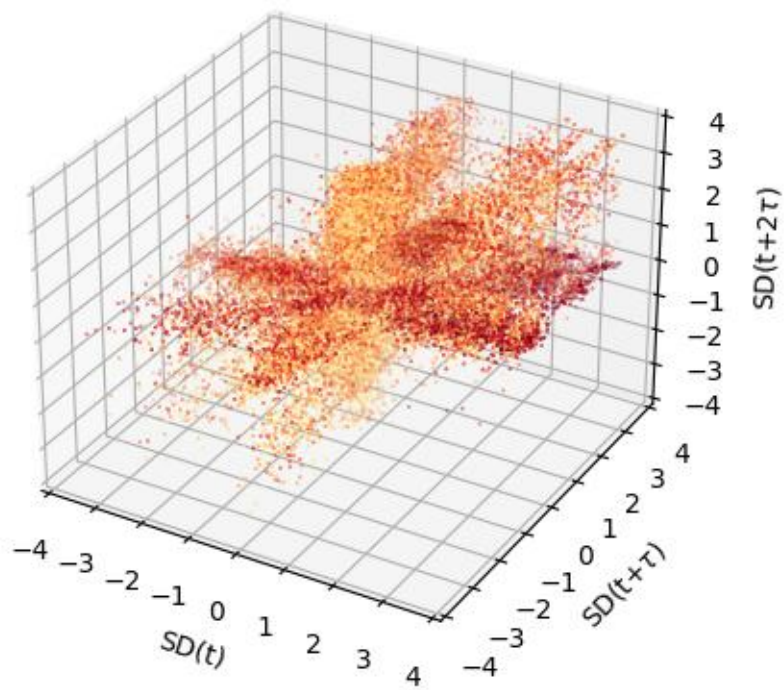


Figura 4.11: Reconstrucción del atractor para el nivel de Elo (2301-2400), caso ganan blancas, en escala de colores cálidos.

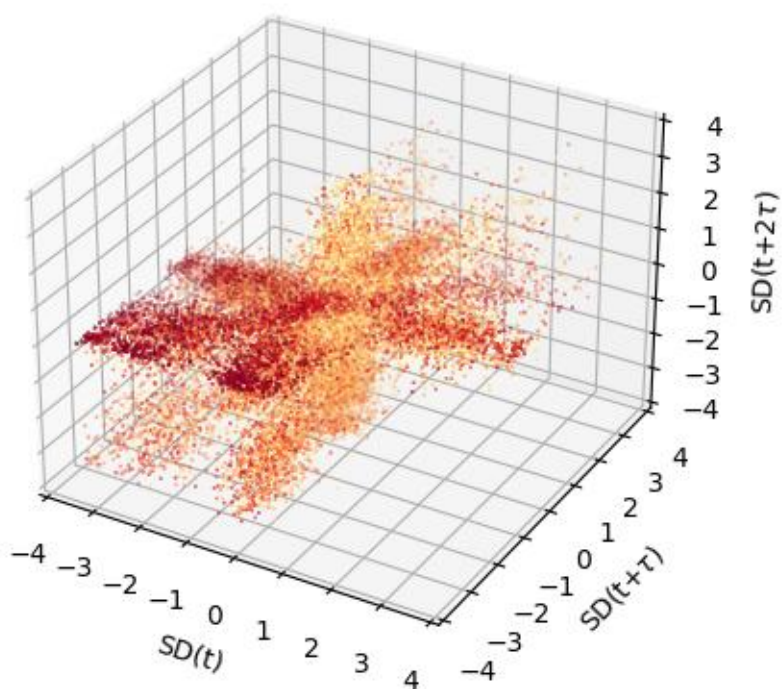


Figura 4.12: Reconstrucción del atractor para el nivel de Elo (2301-2400), caso ganan negras, en escala de colores cálidos.

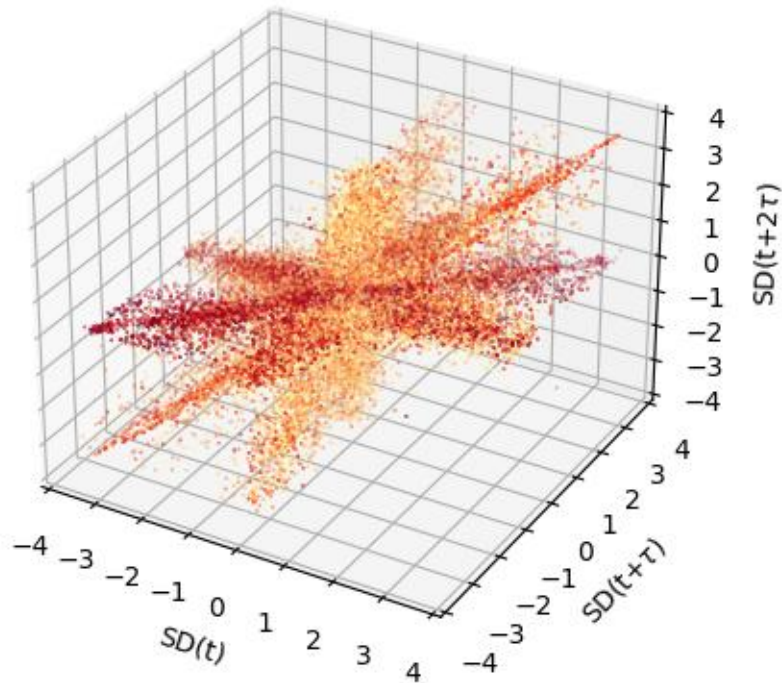


Figura 4.13: Reconstrucción del atractor para el nivel de Elo (2301-2400) de empates, en escala de colores cálidos.

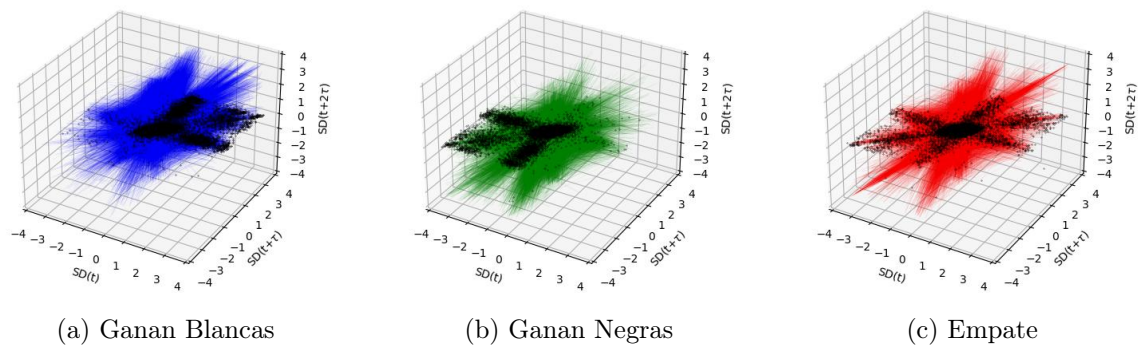


Figura 4.14: Atractor del ajedrez con apoyo visual del estado final de las partidas, nivel de Elo 2301-2400.

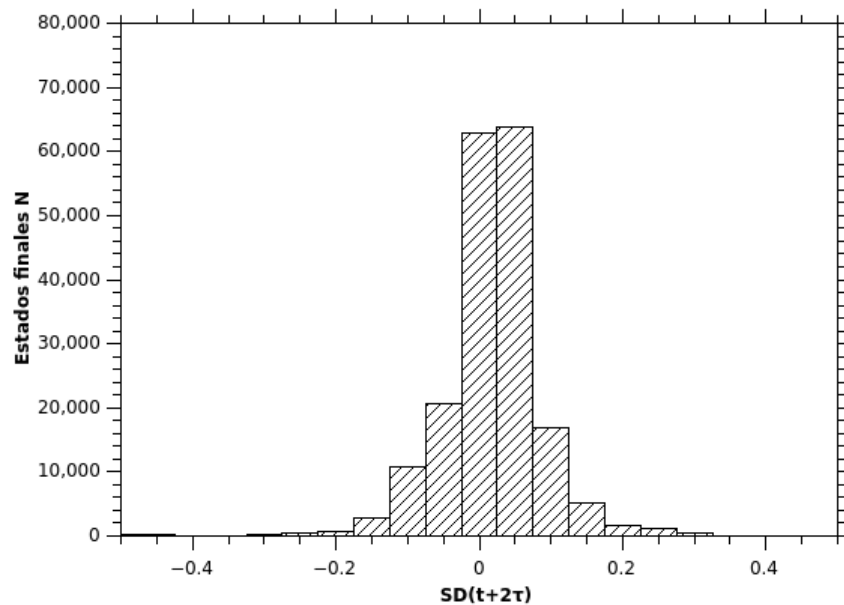


Figura 4.15: Distribución de los estados finales en el eje $SD(t+2\tau)$. Se aprecia que la mayoría de los puntos se encuentran en una vecindad cercana al cero, con un radio no mayor a $r = 0.3$.

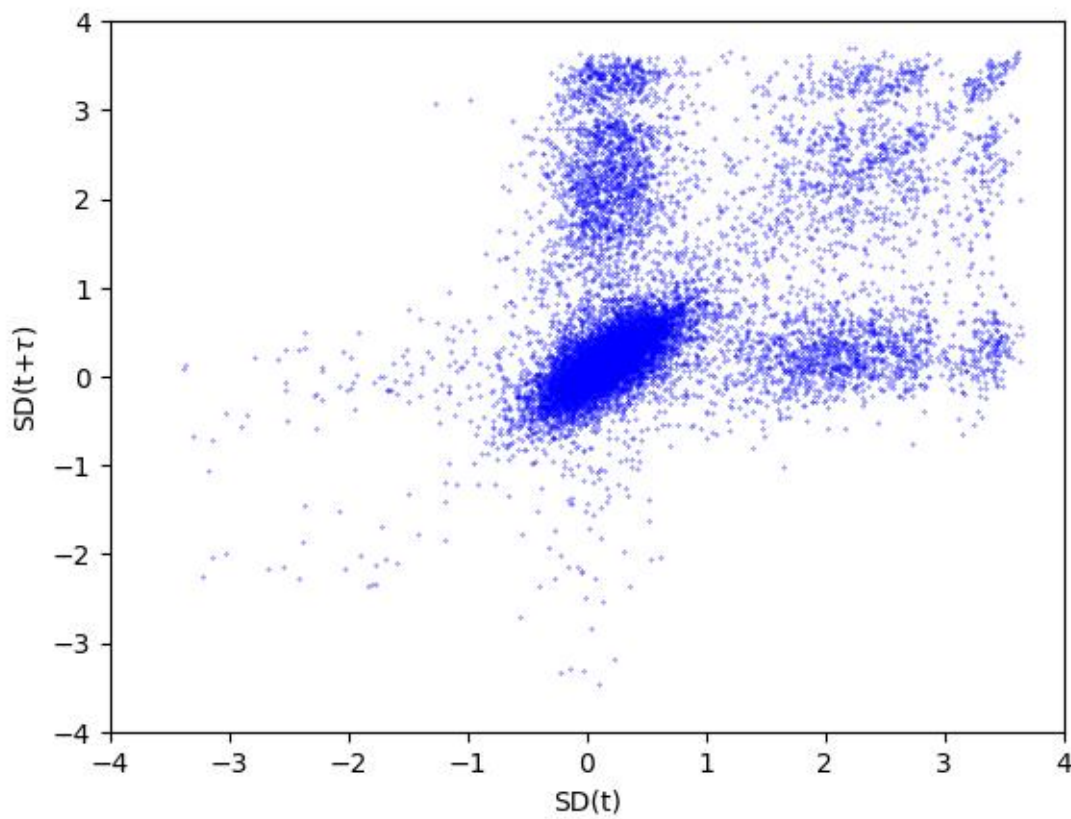


Figura 4.16: Vista “aerea” del atractor siguiendo la convención de color para la densidad de puntos en el cúmulo final del atractor para el nivel de Elo (2301-2400), caso ganan blancas.

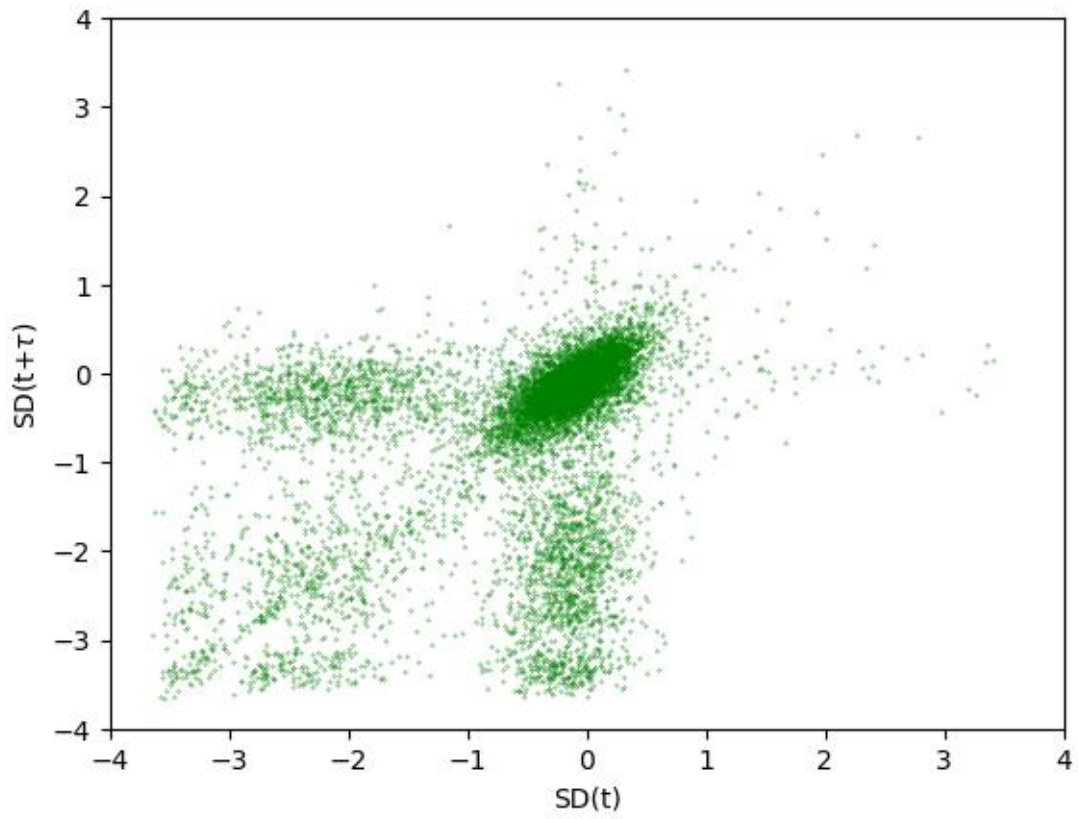


Figura 4.17: Vista “aerea” del atractor siguiendo la convención de color para la densidad de puntos en el cúmulo final del atractor para el nivel de Elo (2301-2400), caso ganan negras.

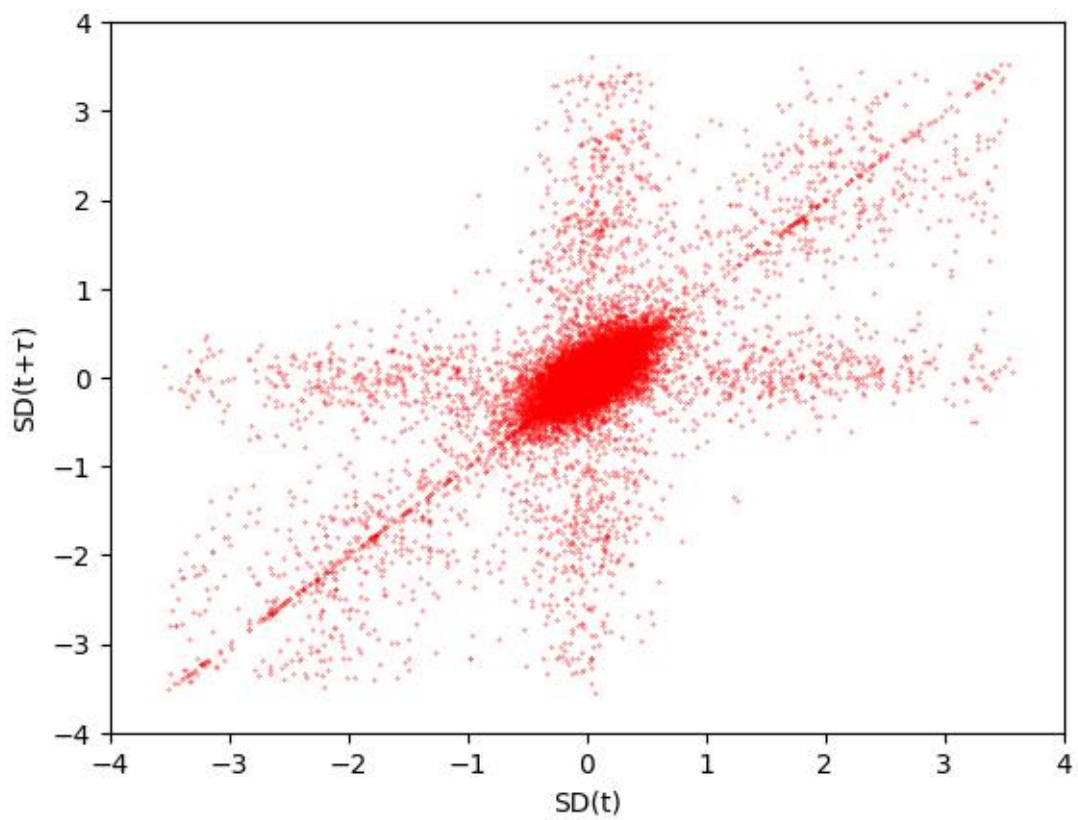


Figura 4.18: Vista “aerea” del atractor siguiendo la convención de color para la densidad de puntos en el cúmulo final del atractor para el nivel de Elo (2301-2400), caso empates.

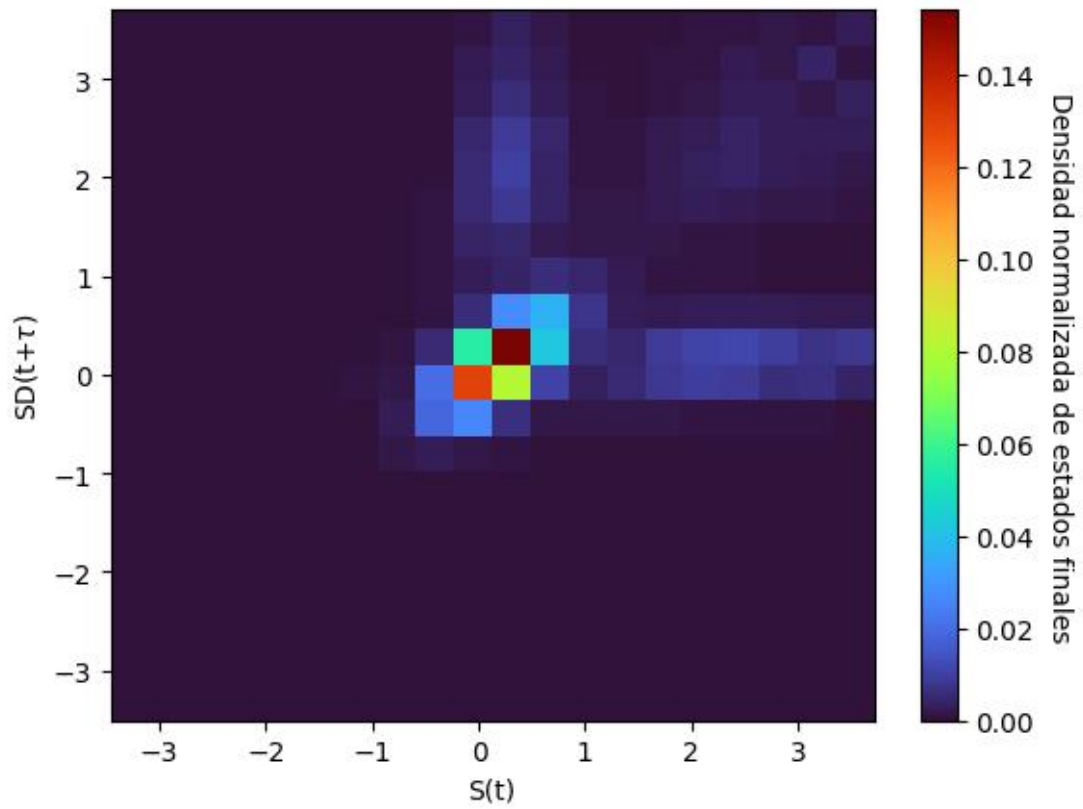


Figura 4.19: Vista “aerea” del atractor con mapa de color para la densidad de puntos en el cumulo final del atractor para el nivel de Elo (2301-2400), caso ganan blancas.

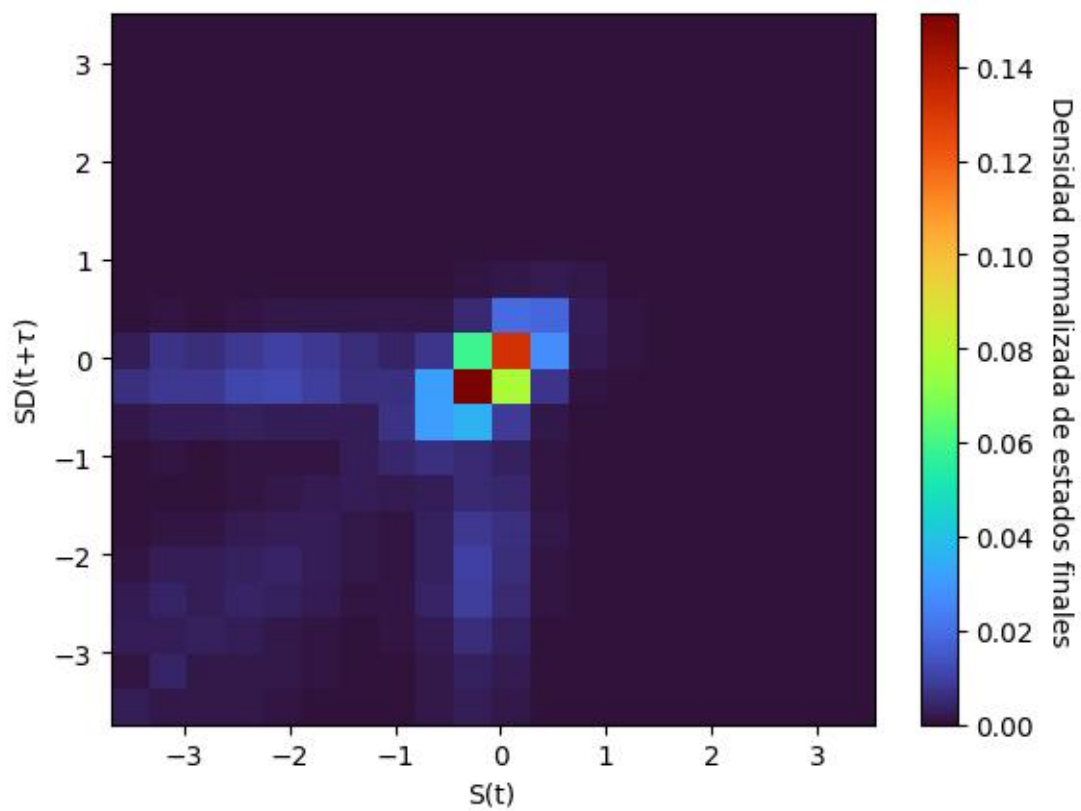


Figura 4.20: Vista “aerea” del atractor con mapa de color para la densidad de puntos en el cumulo final del atractor para el nivel de Elo (2301-2400), caso ganan negras.

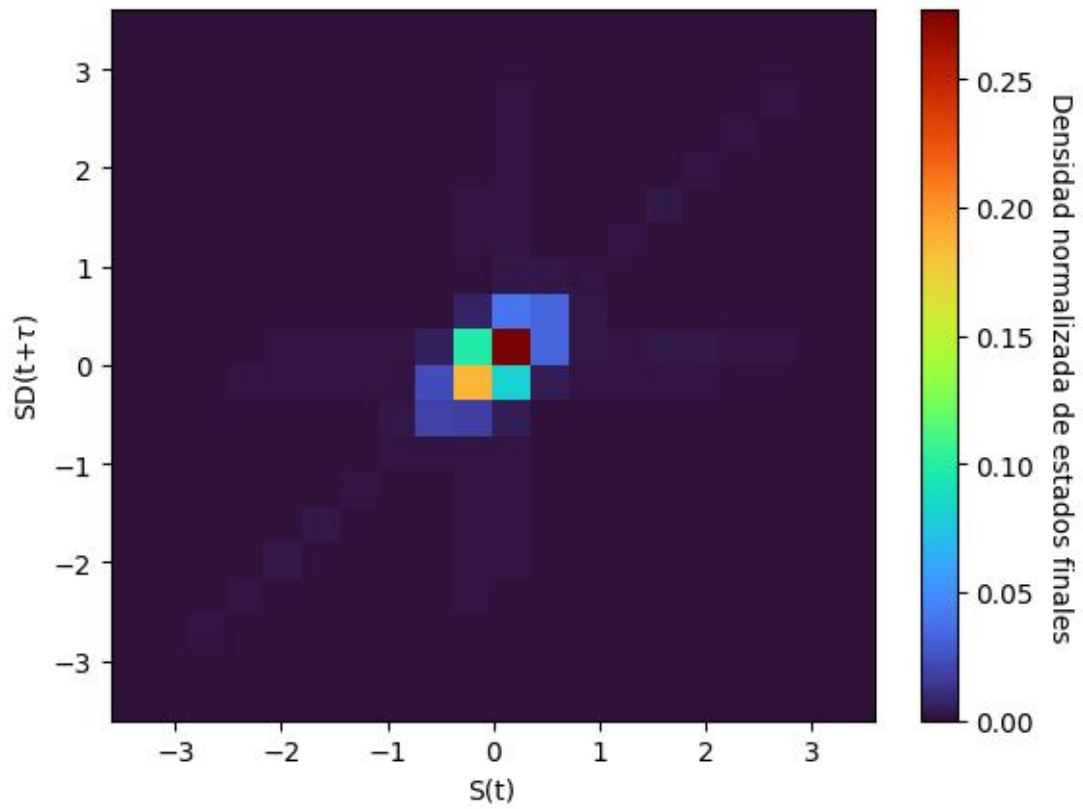


Figura 4.21: Vista “aerea” del atractor con mapa de color para la densidad de puntos en el cumulo final del atractor para el nivel de Elo (2301-2400), caso empates.

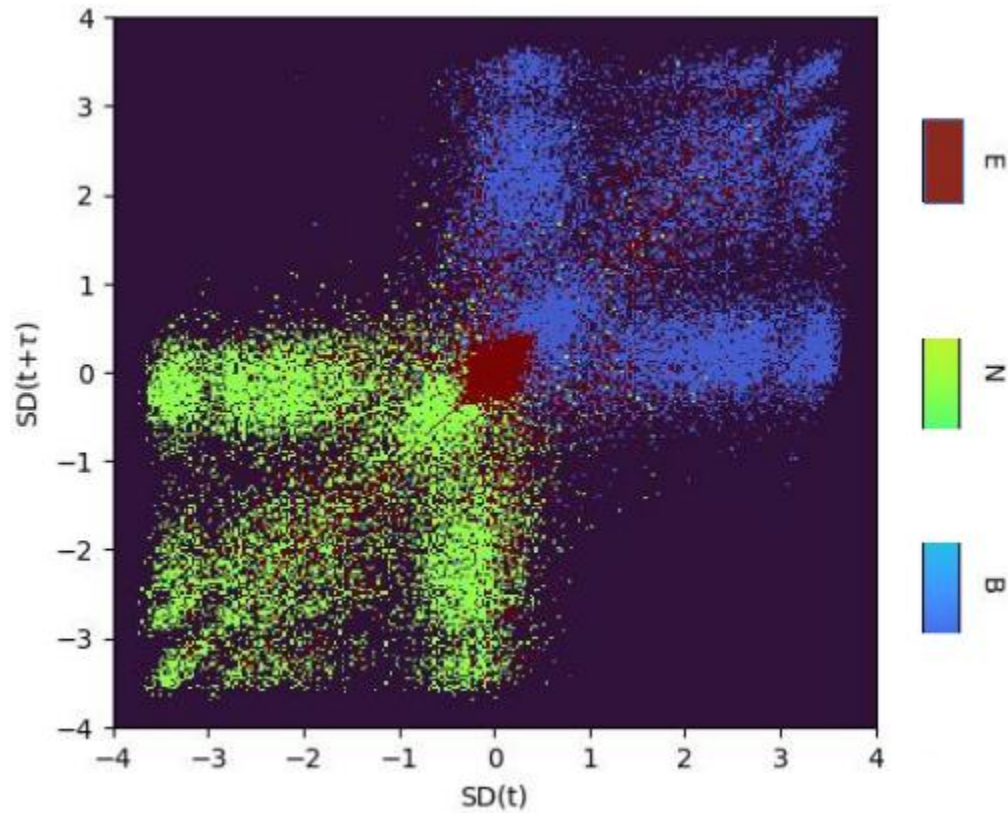


Figura 4.22: Mapa de color para las zonas con mayor probabilidad por resultado. Las zonas muestran que resultado tiene mayor probabilidad por cuadrante del atractor considerando toda la base de datos. Las zonas cuya mayor probabilidad de resultar en empate (E) se encuentran en color bermellón, las zonas cuya mayor probabilidad es una victoria por parte de negras (N) esta en color verde y finalmente las zonas cuya mayor probabilidad es una victoria de blancas (B) esta marcada en color azul más claro.

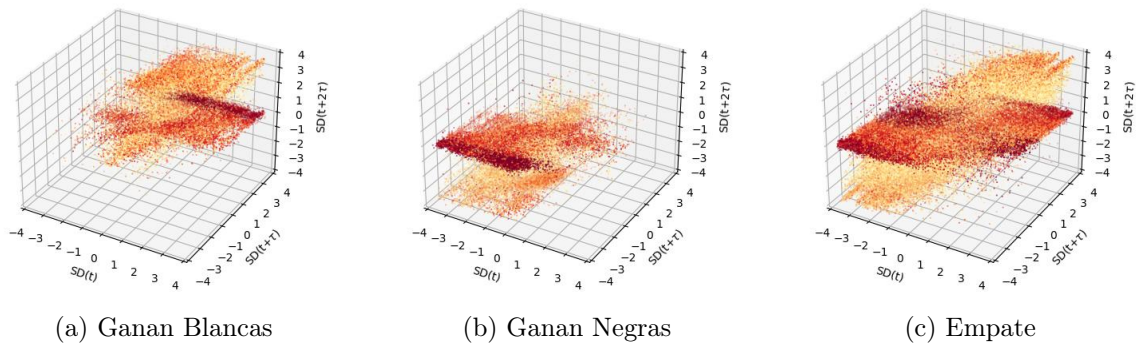


Figura 4.23: Atractor del ajedrez con apoyo visual del color, los movimientos siguen la progresión de color pasando de los colores claros a los más oscuros a medida que avanzan los movimientos realizados, caso de partidas generadas por jugadores azarosos.

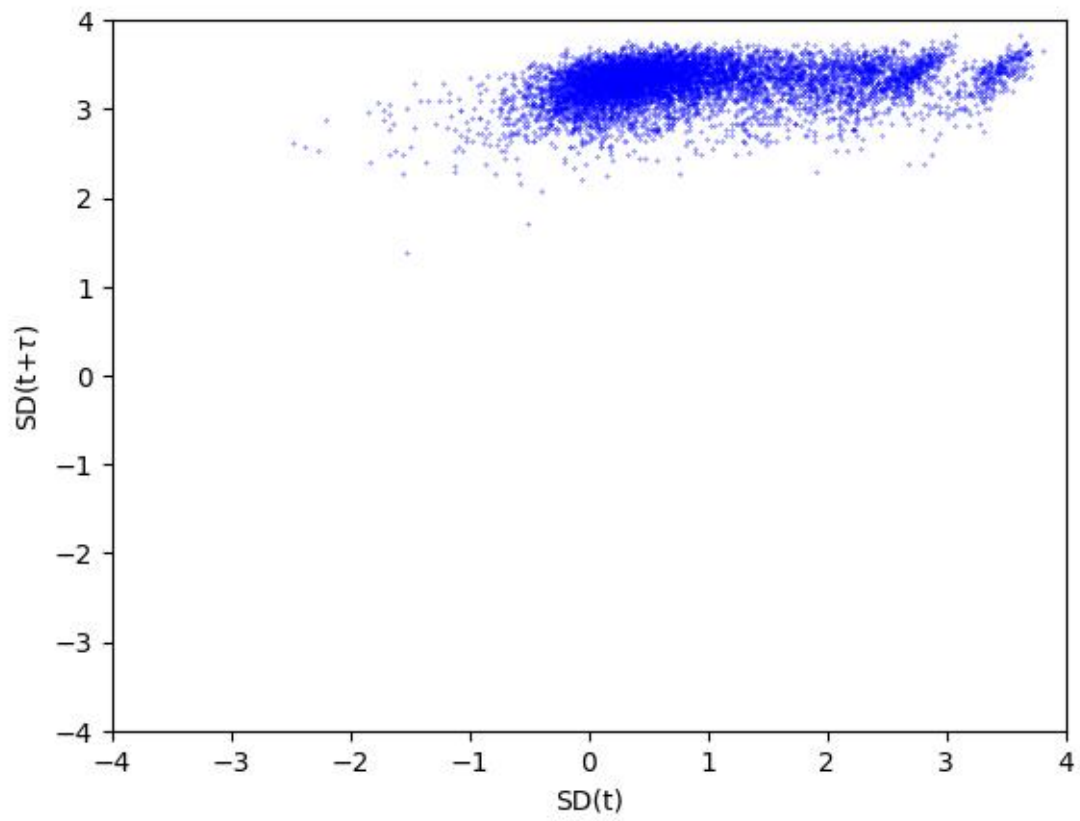


Figura 4.24: Vista “aerea” del atractor siguiendo la convención de color para la densidad de puntos en el cúmulo final del atractor para el caso Azaroso con victoria de blancas.

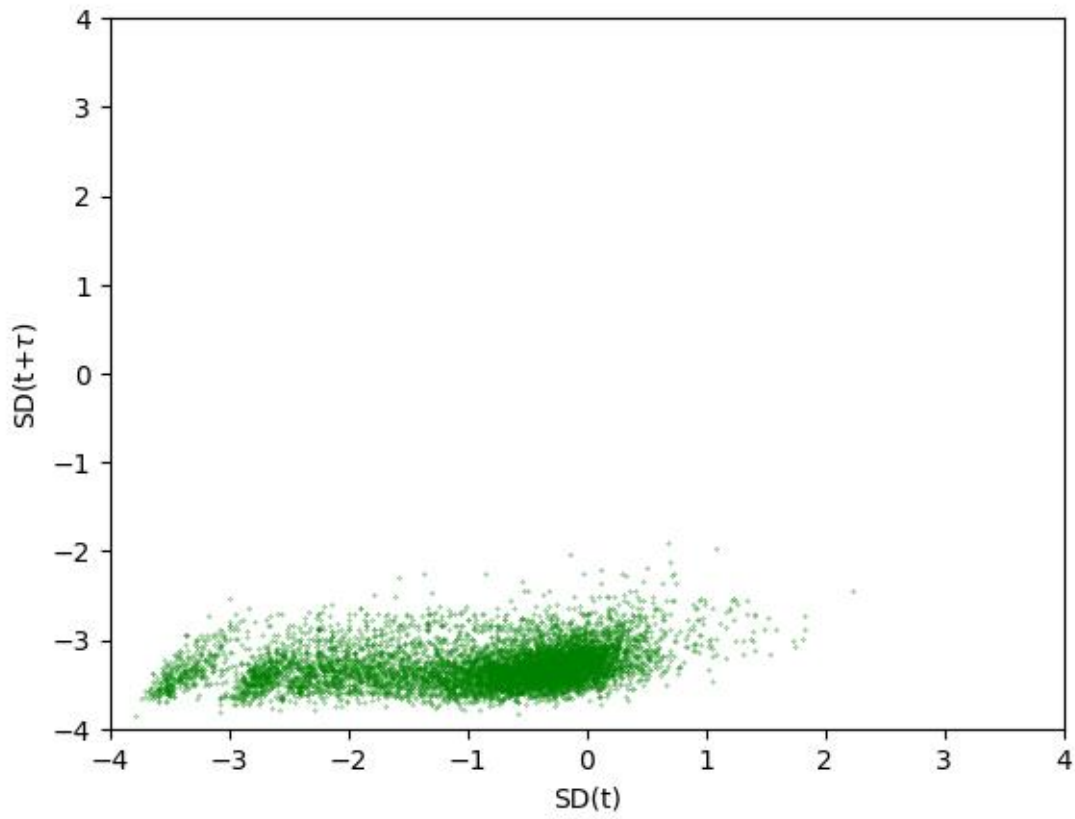


Figura 4.25: Vista “aerea” del atractor siguiendo la convención de color para la densidad de puntos en el cúmulo final del atractor para el caso Azaroso con victoria de negras.

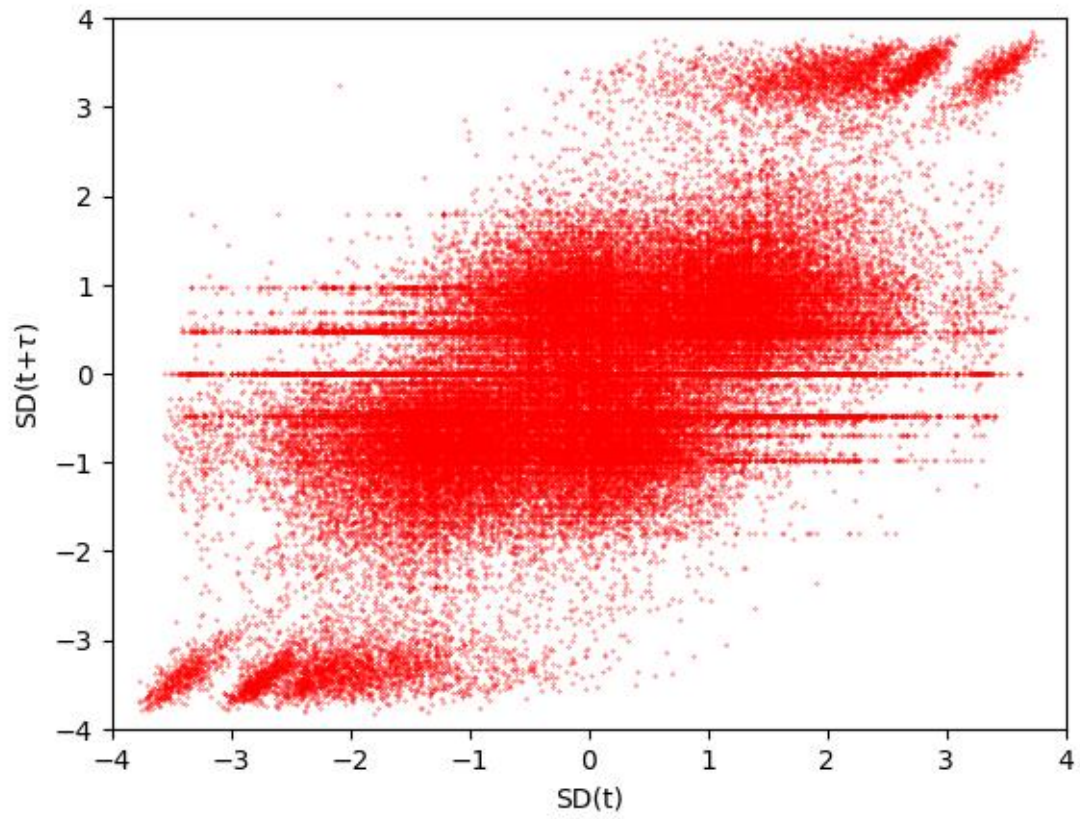


Figura 4.26: Vista “aerea” del atractor siguiendo la convención de color para la densidad de puntos en el cúmulo final del atractor para el caso Azaroso con empates.

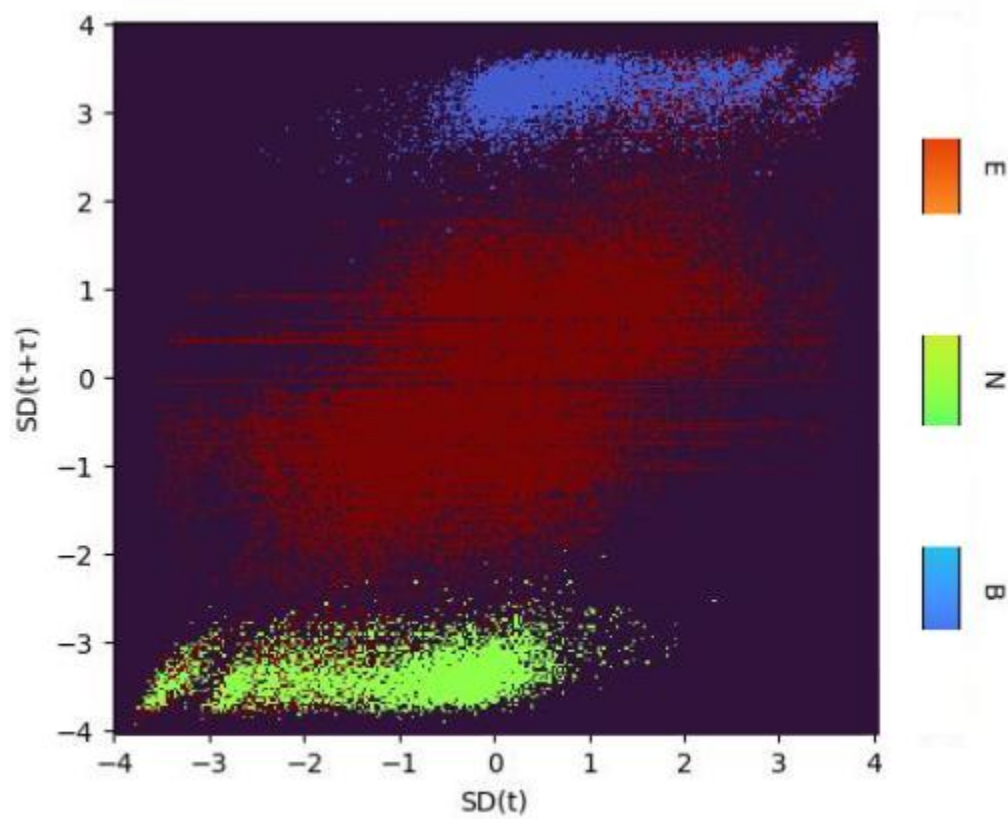


Figura 4.27: Mapa de color para las zonas con mayor probabilidad por resultado. Las zonas muestran que resultado tiene mayor probabilidad por cuadrante del atractor para el caso Azaroso. Las zonas cuya mayor probabilidad de resultar en empate (E) se encuentran en color bermellón, las zonas cuya mayor probabilidad es una victoria por parte de negras (N) esta en color verde y finalmente las zonas cuya mayor probabilidad es una victoria de blancas (B) esta marcada en color azul más claro.

5 Discusión y conclusiones

5.1. Densidad de ocupación.

A continuación se listan las conclusiones generales que se obtuvieron del comportamiento de densidad de ocupación.

- La densidad de movimientos por marco del tablero cambia conforme evoluciona la partida, y es muy similar entre niveles en cada fase del juego por separado es decir no se distingue un jugador malo de uno bueno, excepto en azaroso.
- Considerando las piezas y su disposición en el tablero, la densidad es mayor en los marcos centrales.
- Para cada pieza se obtiene un patrón de densidad específico para toda la partida que no es alterado por el bando o nivel pero sí en algunos casos por el resultado de victoria.
- La evolución de la densidad para cada pieza hace evidente que cada una de ellas tiene un papel importante en una u otra fase de la partida, el caso más notorio es el de el rey, por su valor absoluto, y el de la torre, que inicia obstruida por las demás piezas.

La homogeneidad entre niveles revela que el posicionamiento de las piezas no es factor para determinar el nivel del jugador. Esto se hace evidente al comparar el grupo de jugadores aleatorio con los demás, pues este puede realizar las mismas jugadas válidas y llegar a posiciones idénticas, que puede tomarse como corolario del *teorema del mono infinito* y las obras de Shakespeare. Por lo tanto, el posicionamiento de una pieza, distinto en cada marco y similar para todos los niveles, muestra que hasta cierto punto no es necesario un entendimiento aún de los principios más básicos del juego tal como "no exponer el rey en la apertura", para distribuir los movimientos de la pieza en el tablero de juego. Con ello se concluye que la adquisición de un mayor nivel de juego requiere más que saber las reglas del juego y posicionar las piezas en "buenas casillas".

La entropía de las piezas es muy similar entre resultados de la partida y bandos muestra que la ocupación en el tablero no es relevante para estas dos condiciones por lo que el análisis por ocupación de zonas es irrelevante para el objetivo de vincular la entropía con el resultado de la partida. Pese a esto resulta muy instructivo sobre la tendencia de ocupación de las piezas, la entropía nos dice la incertidumbre de hallar

a una pieza en una cierta zona, el caso más relevante es el del rey pues muestra que de todas las piezas es aquella que posee la mayor incertidumbre en el juego, que corresponde con el principio básico de no exponer al rey.

El hecho de que esta entropía basada en la densidad de ocupación no sea relevante para el resultado de una partida da muestra de que la victoria no depende de la disposición de las piezas y es donde toma relevancia la entropía S_{JDA} pues esta esta basada en las opciones que tienen los bandos a lo largo de la partida.

5.2. Atractores

Los sistemas dinámicos en el mundo físico tienden a surgir de sistemas disipativos. La disipación en este caso surge por la captura de piezas que se relaciona con la pérdida de material. La disipación y la fuerza impulsora tienden a equilibrarse, eliminando los transitorios iniciales y asentando el sistema en su comportamiento típico. El subconjunto del espacio de fase del sistema dinámico correspondiente al comportamiento típico es el atractor. La importancia de los atractores en los sistemas complejos radica en la propiedad de describir la evolución de los estados de un sistema, partiendo de condiciones específicas, en este caso, el atractor da muestra de este hecho al conglomerar los estados finales en una zona específica y que esta en correlación con la probabilidad de obtener algún resultado final de la partida, debe ser una correlación pues no es posible cuantificar el grado de victoria de una partida, es una cualidad y por tanto difusa. Bajo estas condiciones es natural preguntarse si ¿se ha resuelto el ajedrez? ¿es ahora el ajedrez trivial? y la respuesta a ambas preguntas es no, puesto que el atractor solo proporciona una probabilidad de obtener la victoria, el sentido de tener la noción de cuales son estas zonas de mayor probabilidad es encontrar la correlación entre la diferencia de entropías y los resultados de partida. La finalidad de implementar el análisis del atractor es otorgar una probabilidad de victoria a un sistema o partida debido a la evolución de la diferencia de entropía y la posición de su estado final en ciertas zonas de la cuenca de atracción. El conocimiento de estas zonas de mayor probabilidad de victoria solamente puede proporcionar una estrategia basada en el principio de la diferencia de entropías, dicha estrategia consistiría en desarrollar un algoritmo que determine un árbol de decisiones que tenga como objetivo un estado final que posea una zona de mayor probabilidad de encontrar el resultado deseado. Las posibilidades de optimizar dicho algoritmo son buenas puesto que el algoritmo desarrollado que se obtuvo evalúa en promedio un total de 565 movimientos por segundo, esto usando un computador de 11va generación Intel core i7 con memoria ram de 16gb en un lenguaje de programación costoso computacionalmente como lo es Python. La ventaja frente a otros proyectos de ajedrez radica en la simpleza de sus evaluaciones pues, a diferencia de los demás, este solo depende de una variable que se traduce en una mayor economía de los recursos de computo.

Ahora, ¿en qué radica la importancia de este estudio? ¿como impacta en nuestra vida el conocer la existencia del atractor del ajedrez? ciertamente más de lo que aparenta; los estudiosos del ajedrez se alegraran de que el universo de partidas habidas y por haber se encuentra contenido en un atractor con radio no mayor a 4.7, la molestia

de los fanáticos del juego que se nieguen a perder el encanto estético; y sobre todo llamemos a la entropía por su nombre, pues según Shannon estamos ante la medida de la incertidumbre ya que hemos abandonado la estética de las piezas por las posibilidades que nos brindan sus naturalezas, en esencia lo que se ha mostrado con ambas tesis es que es posible describir la evolución de una partida de ajedrez con la simple medida de la incertidumbre de las opciones que genera cada jugador para su juego y el ganador usualmente es aquel que logra generar una mayor incertidumbre en sus jugadas lo que evita ser predecible y además también es importante que el contrincante se vuelva predecible al mismo tiempo, es decir, que tenga una menor incertidumbre en sus opciones a fin de que sea sencillo determinar sus jugadas y dar la estocada final. La construcción del atractor trajo consigo una ventana de oportunidad para desarrollar con mayor profundidad las características propias de los atractores, en particular la noción de condiciones iniciales pues los resultados obtenidos con respecto a las victorias me permiten hacer una conjetura o hipótesis: -existe un conjunto de condiciones iniciales que llevan las trayectorias evolutivas a las zonas de mayor probabilidad, y estas condiciones iniciales se alcanzan en el medio juego-.

Esta conjetura de que las condiciones iniciales se alcanzan en el medio juego parte de los resultados de mi tesis de licenciatura pues es precisamente en esta zona donde empieza el proceso de decaimiento de la entropía para ambos jugadores, debido principalmente a las capturas y distribución de las piezas restantes. También se especula concienzudamente del juego medio pues en la apertura o inicio del juego esencialmente todas las partidas son iguales al comenzar del mismo arreglo inicial y número de piezas, dando como candidato más viable al juego medio. La búsqueda de estas condiciones iniciales requieren de un trabajo más exhaustivo que excede a los objetivos planteados inicialmente en la tesis y al plan de trabajo, pero que se busca realizar.

La implementación de diferentes tipos de jugadores nos permitió observar las diferencias entre las dinámicas de cada jugador, siendo relevante la carencia de algún tipo de estrategia por parte de los jugadores generados por Monte Carlo (también conocidos como “azarosos”) pues la simple presencia de una estrategia cambia sensiblemente los estados finales de la “cuenca de atracción” y con especial relevancia en términos de la probabilidad de obtener una victoria, por lo cual se muestra claramente la importancia de la estrategia. El que los jugadores humanos y los azarosos tengan un mapa de probabilidad diferente pone de manifiesto que los jugadores azarosos tienen mayor libertad de explorar situaciones que una estrategia **restringiría** tal como exponer al rey. Estas restricciones son parte de las estrategias que implementan los jugadores humanos que estudian el juego y que muestran los efectos de una estrategia sobre la cuenca de atracción. Esta situación me hace recordar una frase de Anna Karenina

“Todas las familias felices son iguales; cada familia infeliz es infeliz a su manera”.

–Leo Tolstoy

Es decir, que solo hay una forma de hacer las cosas bien, y miles de peculiares formas de hacerlo mal.

6 Propuestas para futuras investigaciones

Las características propias de los atractores tienen como consecuencia el plantear la posibilidad de hallar el conjunto de condiciones iniciales que se dirijan a la cuenca de atracción hacia una zona que tenga por característica una probabilidad mayor a un resultado deseado, idealmente victorioso. Corroborar la conjetura de que el conjunto de condiciones iniciales se alcanza en la zona de medio juego. Optimizar dicho algoritmo para obtener la ventaja frente a otros proyectos de ajedrez y evaluarlos frente a motores de ajedrez sofisticados que tienen una inversión de recursos superior y que a diferencia de estos el mio solo depende de una sola variable que se traduce en una mayor economía de los recursos de computo.

Concretamente se propone desarrollar un algoritmo que se encargue de encontrar la ruta dentro del árbol de decisiones del ajedrez que nos lleve al conjunto de condiciones iniciales permitiendo así alcanzar las zonas de mayor probabilidad de victoria.

A demás ha resultado productivo el definir entropías a partir de propiedades del sistema por lo que seria una propuesta el definir más entropías, extender el análisis de densidad de ocupación para realizarlo por casillas.

Y finalmente extender o generalizar la entropía S_{JDA} para realizar análisis sobre juegos parecidos y maniobras militares.

A Complementos

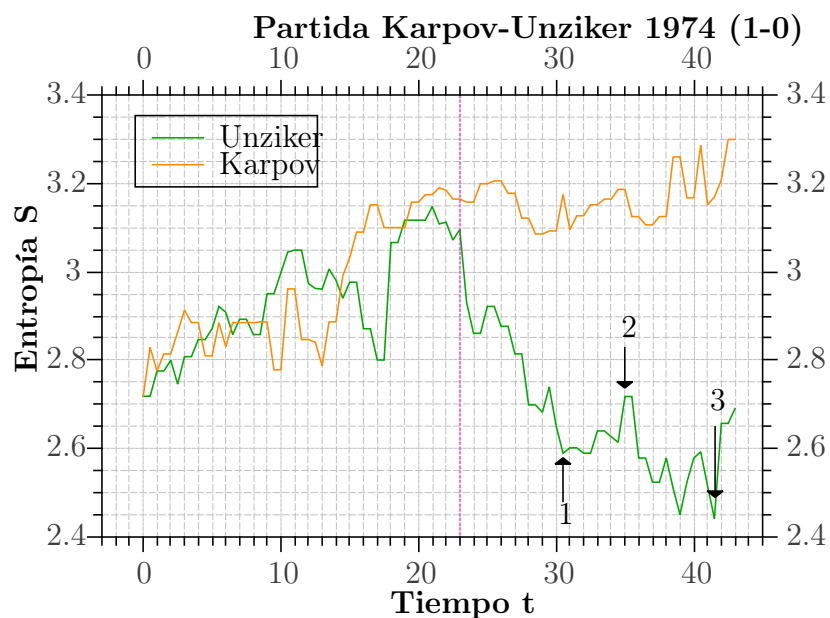


Figura A.1: Evolución de la entropía a lo largo de la partida Karpov-Unzicker (1-0). Se señalan algunos puntos de interés, la diferencia entre los valores de ventaja obtenida en la jugada previa y la actual, son de particular interés. El primer punto (1), corresponde a la jugada $30.f4$, la evaluación de la posición resulta en ventaja a favor de las piezas blancas, el comportamiento de la entropía de Karpov muestra un aumento en la entropía, a diferencia de la entropía de Unzicker que obtiene una reducción, es decir, las piezas negras son constreñidas. *Un análisis ajedrecístico señala que Karpov busca la apertura de columnas para propiciar la penetración de sus piezas, aprovechando que ningún caballo enemigo puede acudir a e5 de momento.* En el segundo punto (2), que corresponde al movimiento $35...Qe8$, Unziker desarrolla con su jugada un aumento de su entropía, para Karpov no hay cambios en su entropía, por lo cual resulta ser una buena jugada para Unzicker, pero aun mantiene una gran diferencia. *Empieza un repliegue por parte de las negras, que posteriormente las dejarán sin jugadas útiles.* Finalmente el tercer punto (3) muestra la jugada $41.Bxf7+$ jaque al rey negro, muestra un aumento en la ventaja de Karpov, sin embargo, la diferencia con la ventaja del movimiento anterior, es muy pequeña, el comportamiento de su entropía muestra que la Unziker alcanza un mínimo para esta partida, fenómeno esperado para el jaque que sufren las negras; de igual forma, el cambio en la entropía para Karpov no aumenta demasiado, sin embargo, le otorgan la clara ventaja.

B Códigos

B.1. Entropía S_{JDA}

```
1 import chess
2 import numpy as np
3
4 def S(casillas):#Entropia S de Shanon
5     S=0
6     T=len(casillas)*1.0#'casillas' se refiere a todos los movimientos
7     for casilla in set(casillas):
8         i = casillas.count(casilla) #Adiciona la palabra nueva
9         S+=-1.0*(i/T)*math.log(i/T) #formula de Shannon
10    return S
11
12 def Escaque(movimiento,WoB):#del lenguaje algebraico obtiene el
13     escaque
14     if '-' not in str(movimiento):#no enroque
15         return [c for c in TALG if c in str(movimiento)[1:]]
16     else:#enroque
17         ccw=['f1','g1']
18         ccb=['f8','g8']
19         clw=['c1','d1']
20         clb=['c8','d8']
21         if '0-0-0' in movimiento:
22             return [clb,clw][WoB]
23         if '0-0' in movimiento:
24             return [ccb,ccw][WoB]
25
26 def Movilidad(board):#obtiene la movilidad del bando
27     casillas=[]
28     for movimiento in board.legal_moves:
29         casillas+=Escaque(movimiento,board.turn)
30     return casillas
31
32 def Analysis_S(board):#Entropia S_JDA
33     return S(Movilidad(board))
34
35 def Opponent(board):#obtiene el tablero del oponente que no esta en
36     turno
37     fen=str(board.fen).split(" ")[1].split()
38     turn=['w','b'][board.turn]
39     return fen[0]+' '+turn+' '+' '.join(fen[2:])
```

```

38
39 def analisis(game):#requiere un str de la partida para su analisis
40 Sw,Sb,SWA,SBA,Adv,t=[],[],[],[],[],[]
41 board=chess.Board()
42 tiempo=-1
43 for jugada in game.split():
44     tiempo+=1
45     if '.' in jugada:
46         jugada=jugada.split('.')[1]
47         board.push_san(jugada)
48         if board.turn:
49             Sw.append(Analysis_S(board))
50             Sb.append(Analysis_S(chess.Board(Opponent(board))))
51         if not board.turn:
52             Sw.append(Analysis_S(chess.Board(Opponent(board))))
53             Sb.append(Analysis_S(board))
54         SWA.append(np.trapz(Sw,x=t.append(tiempo)))
55         SBA.append(np.trapz(Sb,x=t.append(tiempo)))
56         Adv.append(SWA[-1]-SBA[-1])
57     return Sw,Sb,SWA,SBA,np.diff(Sw),np.diff(Sb),Adv
58 #el analisis devuelve la entropia, el area de entropia,
59 #la derivada de la entropia y la diferencia entre areas

```

B.2. Atractores

```

1 import numpy as np
2 from math import dist
3
4 #evaluacion de la informacion mutua para determinar el retraso
5 def ln2(x, minval=0.0000000001):#logaritmo sin error en cero
6     return np.log2(x.clip(min=minval))
7
8 def mutua_info(serie):#informacion mutua de la serie
9     testigo=1000000
10    for tau in range(0, len(serie)-1,1):
11        p_x, b_x = np.histogram( serie[:-tau], bins=100)
12        serie_delayed = np.roll(serie, -tau)[:tau]#serie retrasada
13        p_xdelayed, b_delayed = np.histogram( serie_delayed, bins=100)
14        p_joint, b1, b2 = np.histogram2d( serie[:-tau], serie_delayed,
15        bins=100)
16        # calculo de la informacion mutua para el retraso tau*step
17        a = ln2( np.divide( p_joint, p_x * p_xdelayed ) )
18        mi = np.nansum( np.sum( p_joint * a, axis=0 ), axis=0)
19        if mi < testigo:#guarda el valor de tau
20            testigo=mi
21        if mi > testigo:#determina el primer minimo de tau
22            return tau-1
23    return 'out'#si no hay minimo declara que sale de la lista
24 #crea los vectores de dimension d a partir de la serie original
25 def Vectord(serie,punto,d,tau):
26     vector=[]
27     if d==0:

```

```

28     return [serie[punto]]
29     for di in range(d):
30         vector.append(serie[punto + (di*tau)])
31     return vector
32
33 #crea el vector regresor
34 def VectoresD(serie, d, tau):
35     ls=len(serie)
36     if d*tau < ls:
37         lsdt=ls-(d*tau)
38         VectorRegresor=[]
39         for punto in range(lsdt+1):
40             VectorRegresor.append(VectorD(serie,punto,d,tau))
41         return VectorRegresor
42     else:
43         return 0
44
45 #encuentra al vecino cercano de un vector v seleccionado
46 def DNN(VR, v):
47     Rd=10000
48     NN=10000
49     for vj in range(len(VR)):
50         if not vj == v:
51             DVRV=dist(VR[v],VR[vj])
52             if DVRV<Rd:
53                 Rd=DVRV
54                 NN=vj
55     return NN,abs(Rd)
56
57 def DifFuturoS(serie,dplus,tau,v,NN):
58     ls=len(serie)-1
59     if (v + (dplus*tau))<=ls and (NN + (dplus*tau))<=ls:
60         resultado=abs(serie[v + (dplus*tau)]-serie[NN + (dplus*tau)])
61         return resultado
62     else:
63         return 'out'
64
65 #obtiene todas las razones entre los vecinos y sus dimensiones
66 #superiores
67 def RNN(serie, d, tau):
68     Razones=[]
69     VR=VectoresD(serie, d, tau)
70     if VR:
71         for v in range(len(VR)):
72             NN,Rd=DNN(VR, v)
73             Rdplus=DifFuturoS(serie,d+1,tau,v,NN)
74             if Rdplus=='out':
75                 continue
76             if Rd==0 and Rdplus==0:
77                 Razones.append(0)
78             if Rd==0 and not Rdplus==0:
79                 Razones.append(10000)
80             if not Rd==0:
81                 Razones.append(Rdplus/Rd)

```

```
81     return Razones
82 else:
83     print('****')
84     return []
85
86 #obtiene el numero de falsos vecinos cercanos a partir de un umbral
87 def FNN(Razones, umbral):
88     if Razones:
89         return len([x for x in Razones if x>umbral])
90
91 #evaluacion de la dimension de encaje
92 def DimensionAttr(serie, tau, umbral):
93     for d in range(10):
94         if FNN(RNN(serie, d, tau), umbral) == 0:
95             return d
```

[25]

C Densidad de ocupación

Las figuras que se muestran a continuación corresponden a los resultados de densidad que se obtuvo del análisis de marcos concéntricos. Para todas las figuras se mantiene el mismo orden: en primera fila se encuentran los resultados correspondientes a las piezas blancas, en segunda fila se encuentran los resultados de piezas negras y para cada columna corresponde a los contendientes enfrentados, es decir, en la primera columna (a la izquierda) los ganadores son las piezas blancas, por lo tanto en la segunda fila se encontraran a los perdedores con piezas negras, del mismo modo pero con los bandos invertidos sera para la segunda columna (al centro), y la tercera columna (a la derecha) corresponde a los empates. La escala se mantiene igual para un mismo tipo de pieza, es decir, la escala es la misma para el rey en la apertura, medio juego, final o total de partida, sin embargo, no corresponde a la escala de alguna otra pieza, esto con la finalidad de una fácil inspección de su evolución y una mejor apreciación de los valores.

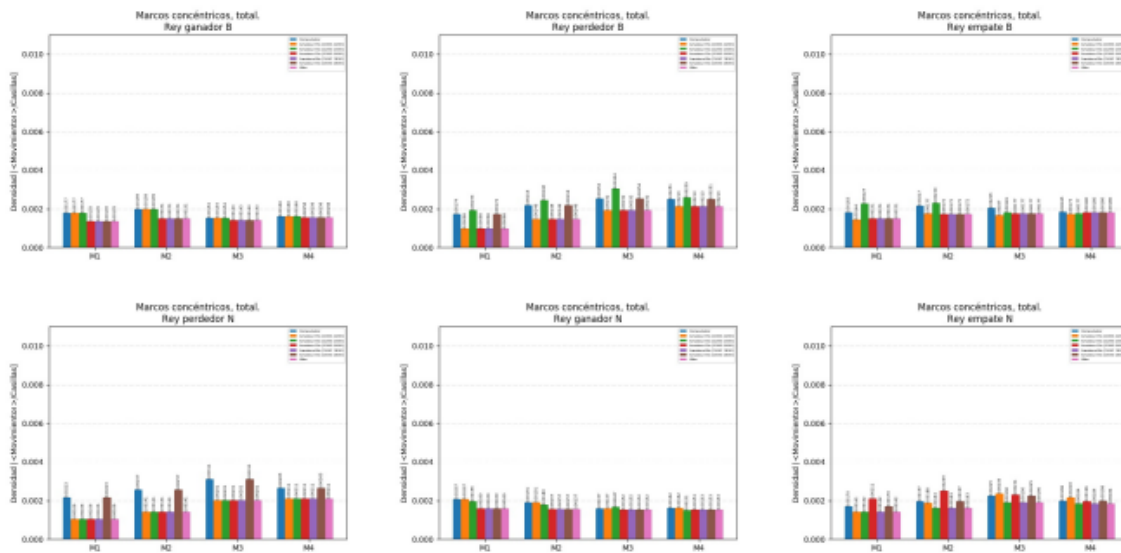


Figura C.1: Distribución de valores para la densidad de ocupación del rey. La distribución de la densidad de ocupación es homogénea entre marcos.

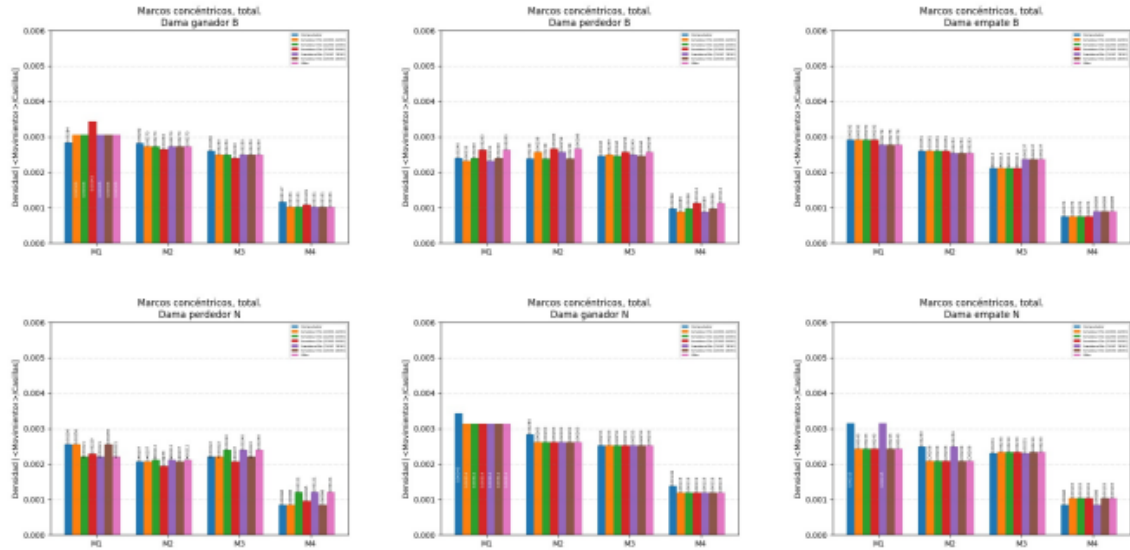


Figura C.2: Distribución de valores para la densidad de ocupación de dama. La distribución de la densidad de ocupación muestra que hay una predilección por los marcos centrales y es en estas zonas donde la dama tiene mayor movilidad.

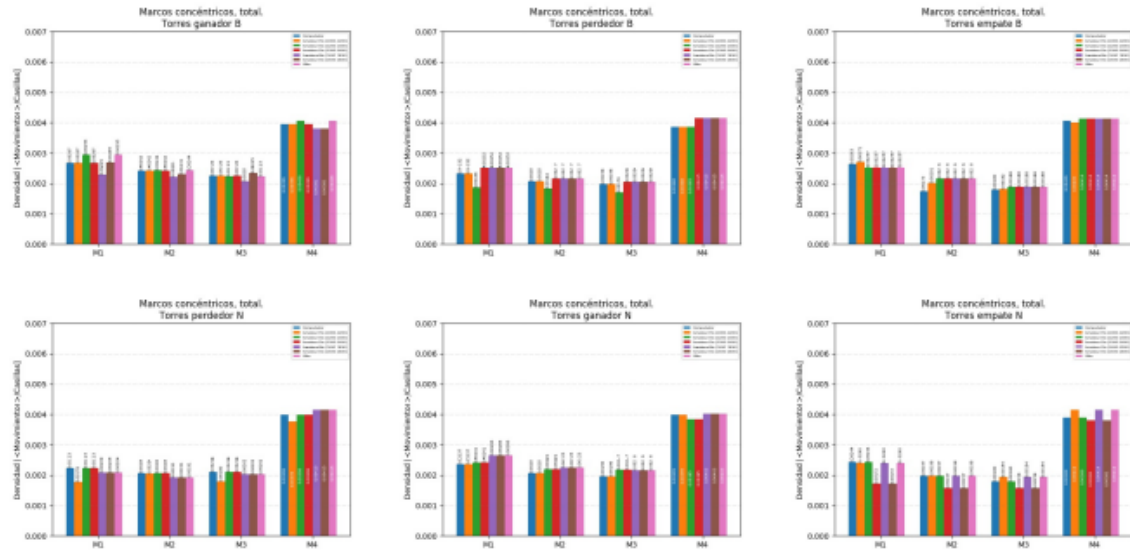


Figura C.3: Distribución de valores para la densidad de ocupación de torres. La distribución de la densidad de ocupación muestra que al contrario de la dama la torre tiene predilección por el marco externo y en igualdad de condiciones para los tres marcos centrales restantes.

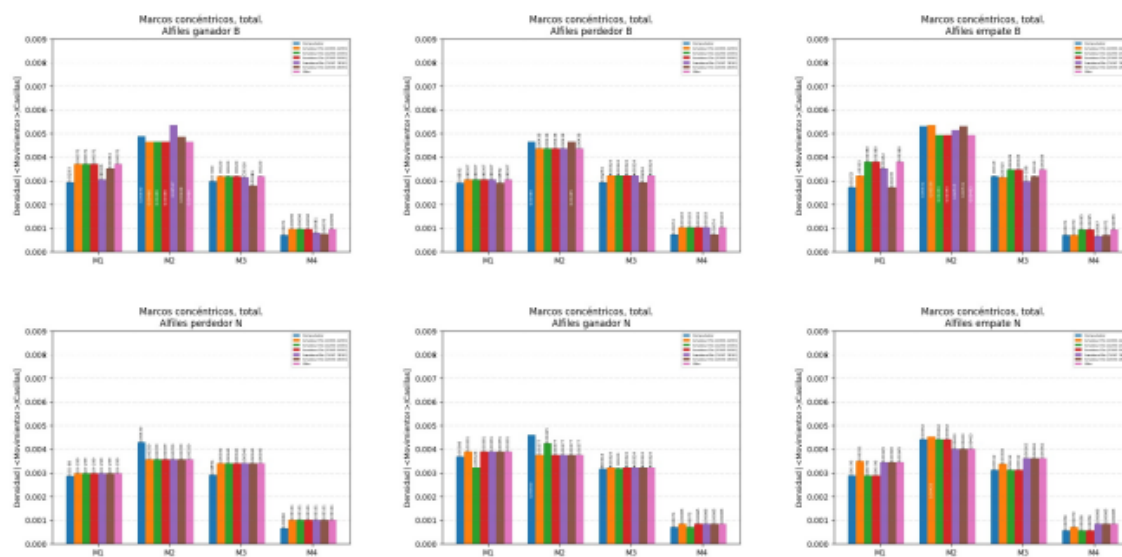


Figura C.4: Distribución de valores para la densidad de ocupación de alfiles. La distribución de la densidad de ocupación es similar a la dama con la notoriedad de una mayor predilección por el marco central 2, que esta en la cercanía de las diagonales mayores donde tiene su mayor movilidad.

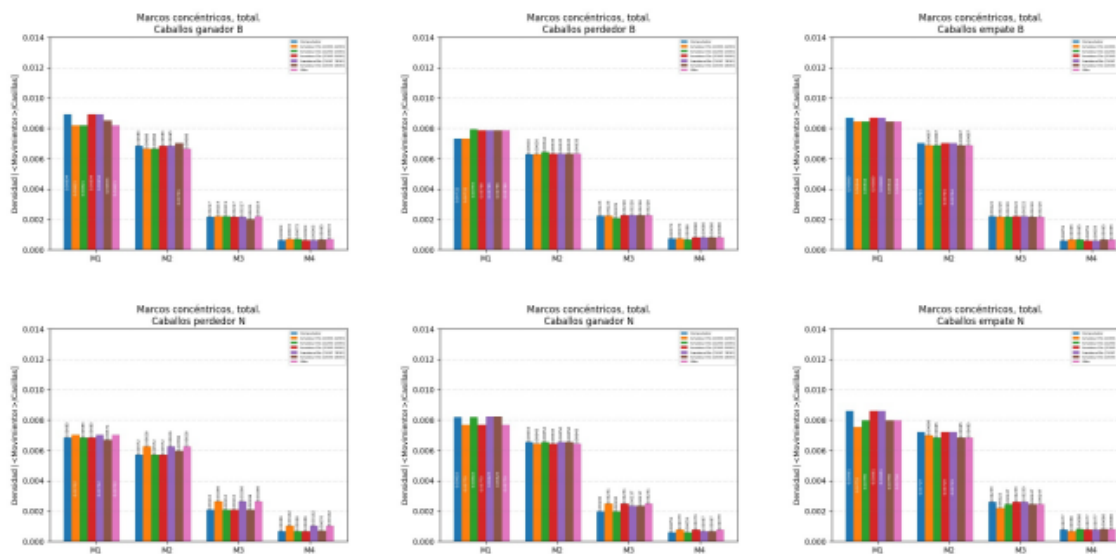


Figura C.5: Distribución de valores para la densidad de ocupación de caballos. La distribución de la densidad de ocupación es concentrada en los primeros marcos centrales, concordando con su estatus de pieza central.

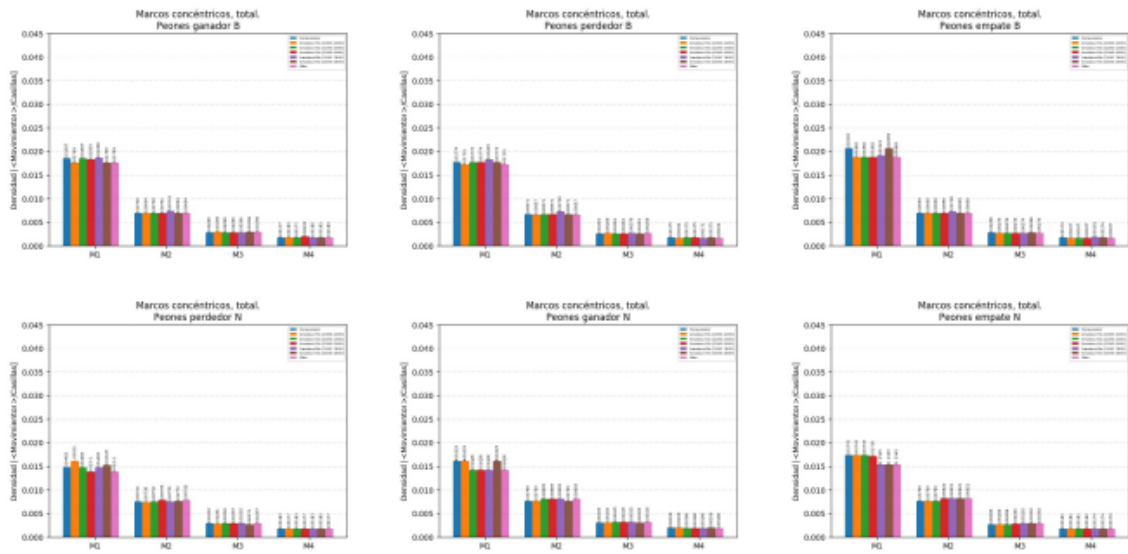


Figura C.6: Distribución de valores para la densidad de ocupación de peones. La distribución de la densidad de ocupación es similar a caballos pues muestra una preferencia por los marcos centrales y muy poco por los marcos más externos, esto también da muestra de la poca incidencia en la ultima fila perteneciente al marco externo M4 donde los peones coronan.

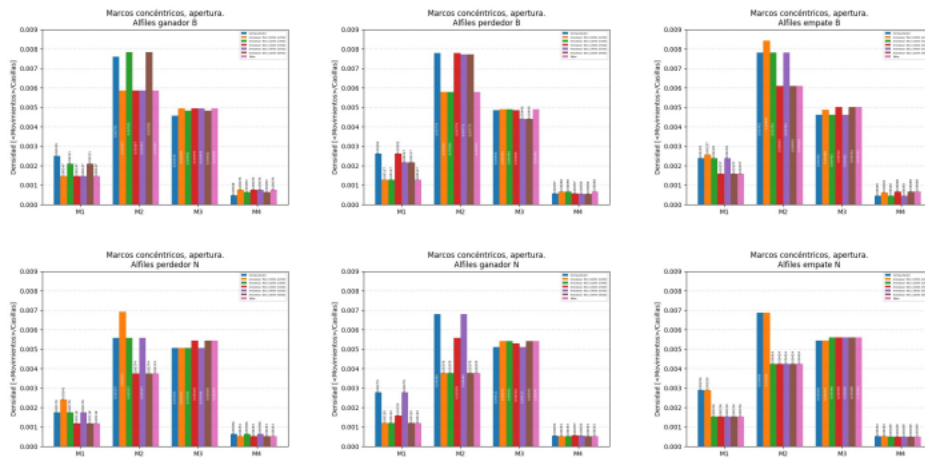


Figura C.7: Distribución de valores para la densidad de ocupación de alfiles en la etapa de apertura. La distribución de la densidad de ocupación mantiene su comportamiento global y tomando preerencia por el dominio de las zonas centrales.

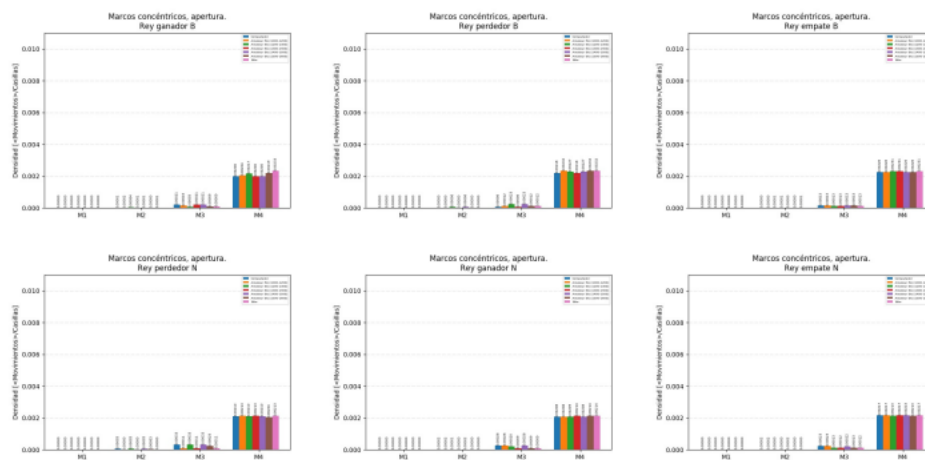


Figura C.8: Distribución de valores para la densidad de ocupación del rey en la etapa de apertura. Poca frecuencia en las zonas centrales y más en mantenerse en la zona externa.

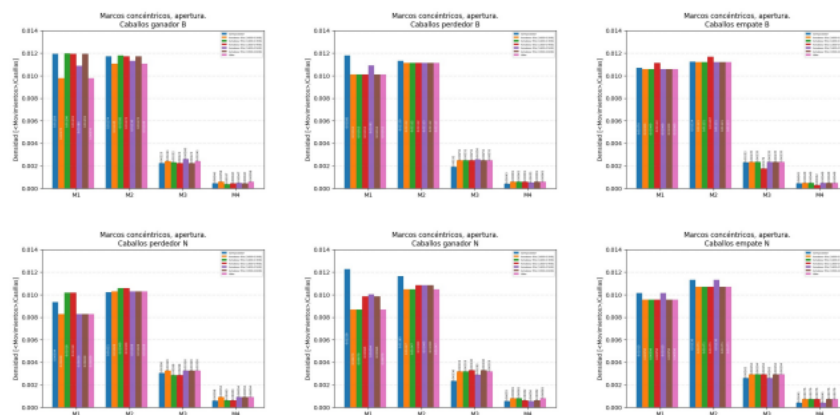


Figura C.9: Distribución de valores para la densidad de ocupación de caballos en la etapa de apertura. Toman posiciones centrales muy marcadas.

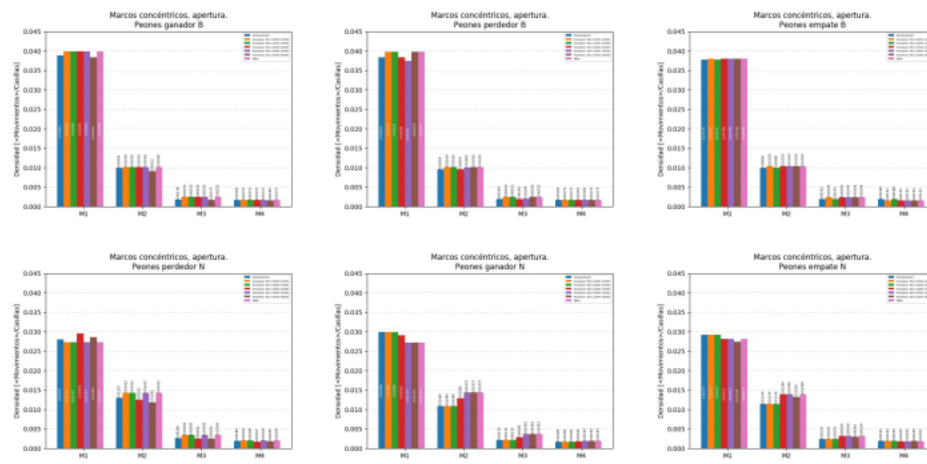


Figura C.10: Distribución de valores para la densidad de ocupación de peones en la etapa de apertura. En mayor medida que los caballos, los peones toman posiciones centrales muy marcadas y dominantes.

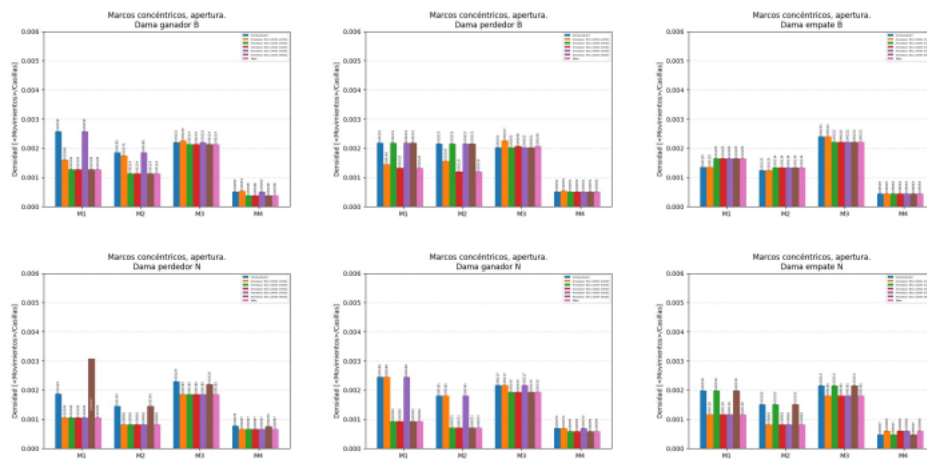


Figura C.11: Distribución de valores para la densidad de ocupación de dama en la etapa de apertura. La dama de igual forma que los alfiles busca zonas centrales.

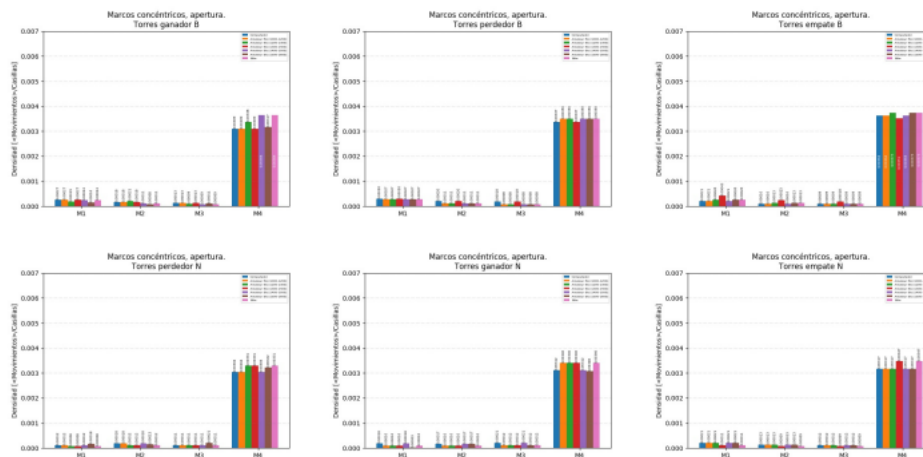


Figura C.12: Distribución de valores para la densidad de ocupación de torre en la etapa de apertura. La torre acompaña al rey y mantiene dominio en la zona externa.

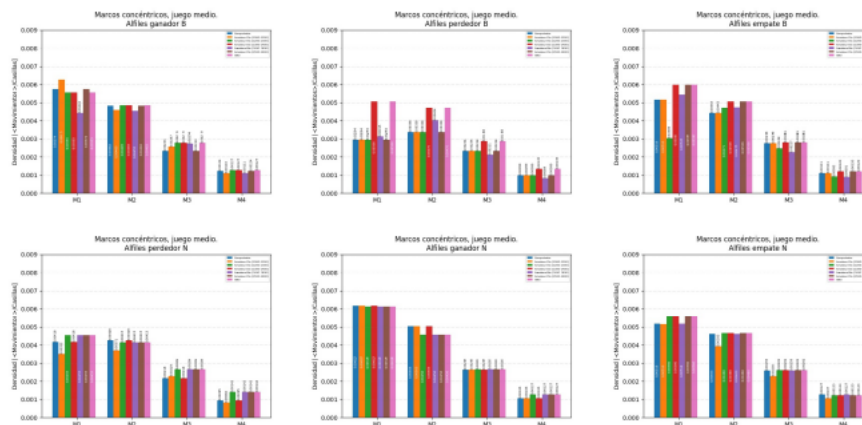


Figura C.13: Distribución de valores para la densidad de ocupación de alfiles en la etapa de medio juego. Sigue tomando posiciones centrales.

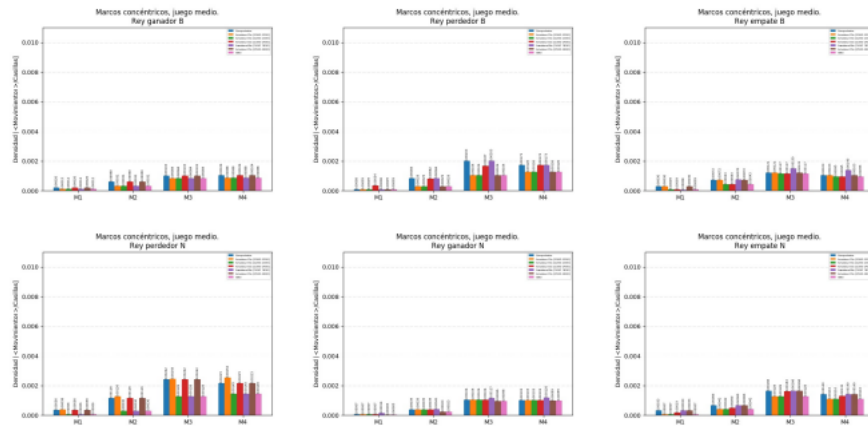


Figura C.14: Distribución de valores para la densidad de ocupación del rey en la etapa de medio juego. Comienza a tomar posiciones hacia marcos más centrales sin alejarse mucho de la zona externa.

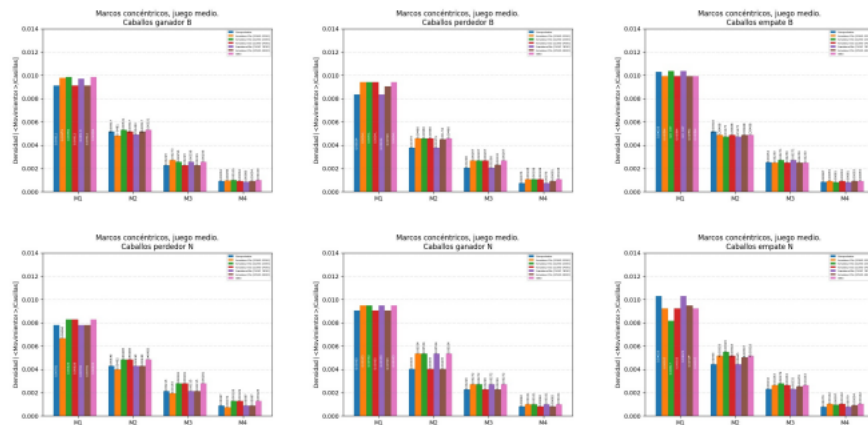


Figura C.15: Distribución de valores para la densidad de ocupación de caballos en la etapa de medio juego. Sigue manteniendo posiciones centrales predominantemente.

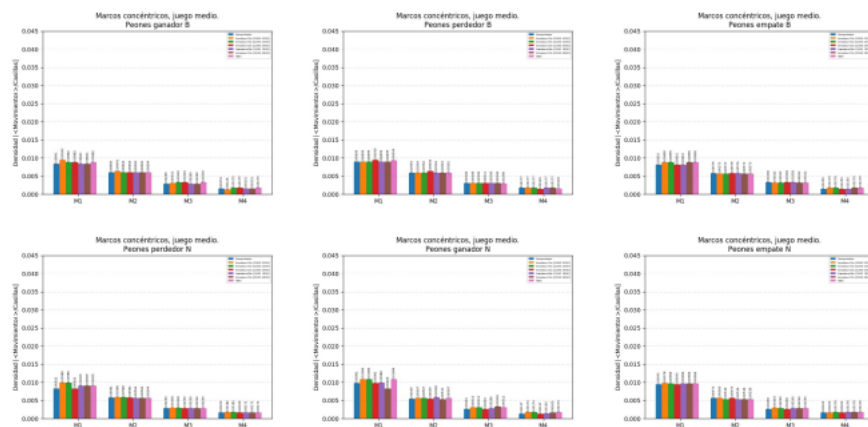


Figura C.16: Distribución de valores para la densidad de ocupación de peones en la etapa de medio juego. Comienza a reducirse su presencia en las jugadas pero mantiene preferencia por zonas centrales.

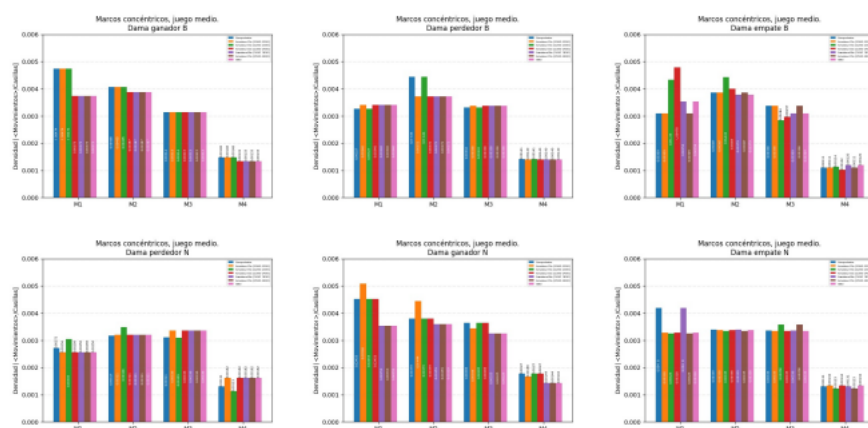


Figura C.17: Distribución de valores para la densidad de ocupación de dama en la etapa de medio juego. La dama toma más relevancia y busca un dominio de zonas centrales.

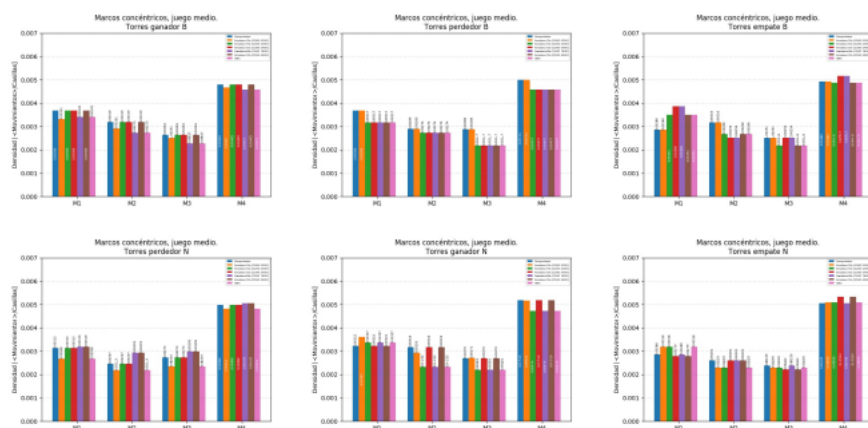


Figura C.18: Distribución de valores para la densidad de ocupación de torre en la etapa de medio juego. La torre toma más relevancia y mantiene distancia de las zonas centrales.

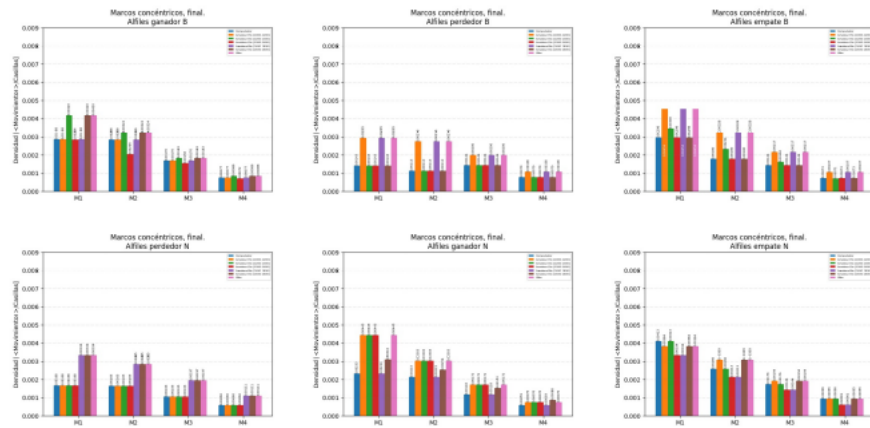


Figura C.19: Distribución de valores para la densidad de ocupación de alfiles en la etapa final del juego. Disminuye la presencia de alfiles en los movimientos pero mantiene su predilección por zonas centrales.

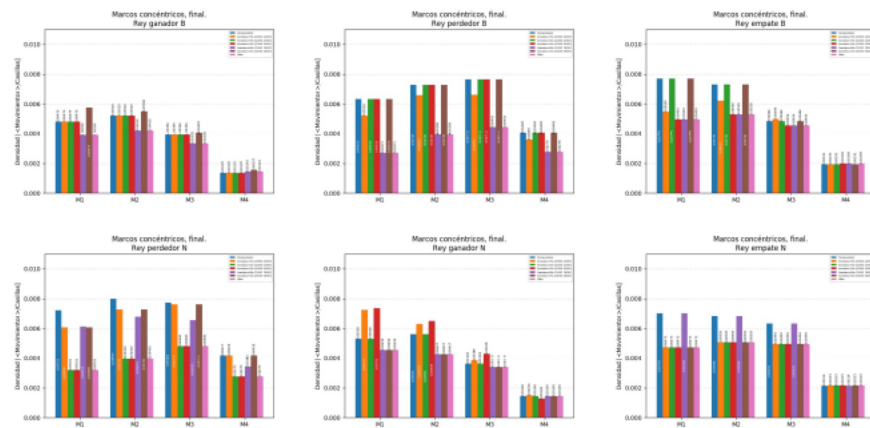


Figura C.20: Distribución de valores para la densidad de ocupación del rey en la etapa final del juego. El rey toma mayor relevancia y comienza el transito a zonas centrales, en su mayoría para buscar huir de posibles capturas.

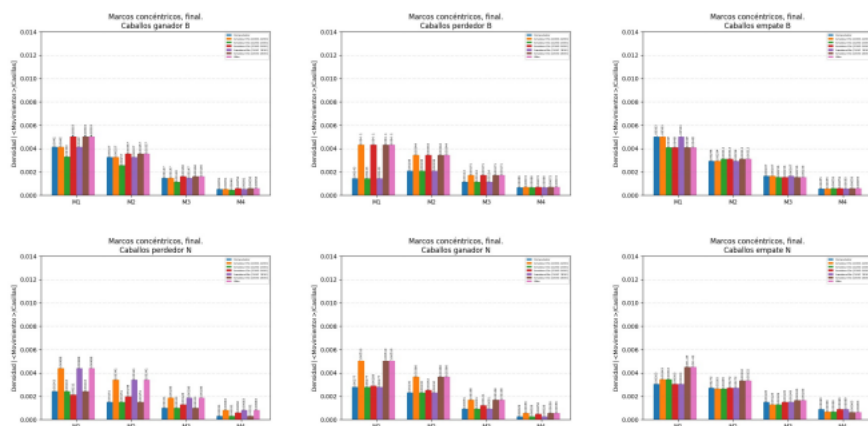


Figura C.21: Distribución de valores para la densidad de ocupación de caballos en la etapa final del juego. Los caballos disminuyen su influencia pero se mantiene la predilección por la zona central.

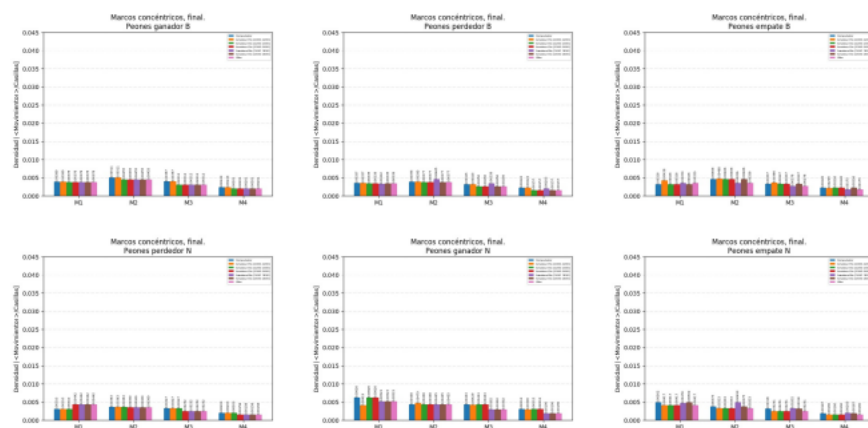


Figura C.22: Distribución de valores para la densidad de ocupación de peones en la etapa final del juego. Se homogeneiza la densidad de ocupación pues existe poca sobrevivencia de peones y en su mayoría son casos aislados.

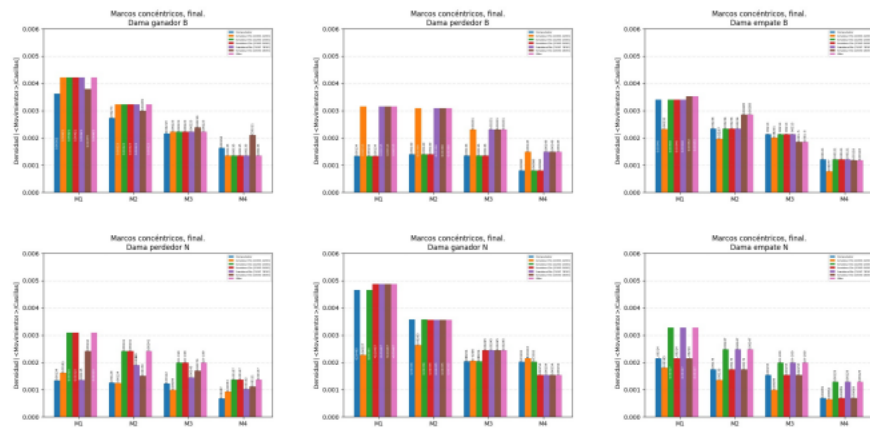


Figura C.23: Distribución de valores para la densidad de ocupación de dama en la etapa final del juego. La dama mantiene su relevancia del juego medio y busca igual que los alfiles las zonas centrales. Los jugadores que pierden tienen una disminución sensible de la densidad de ocupación de la dama.

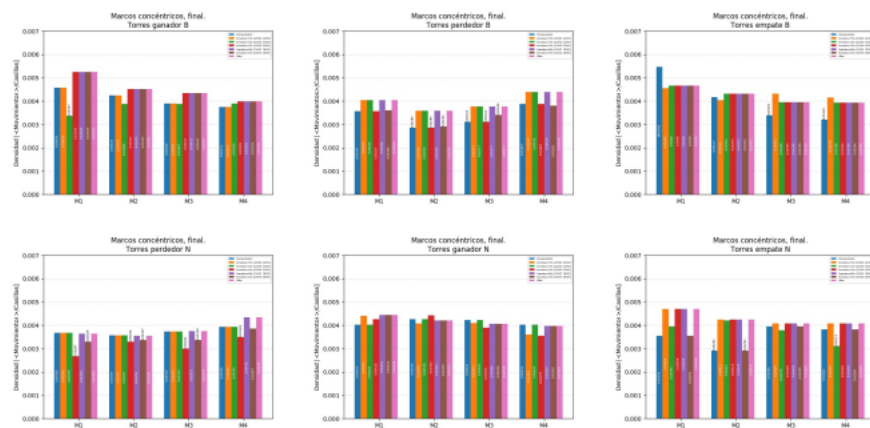
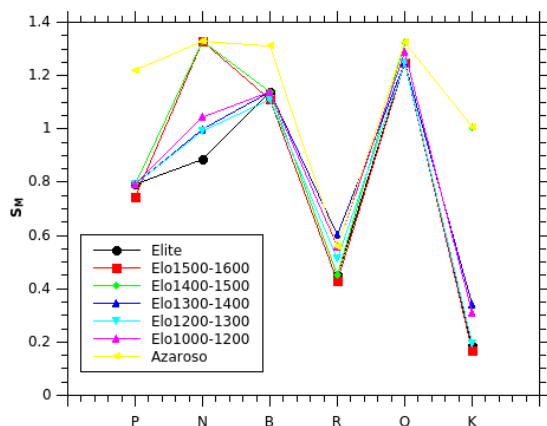
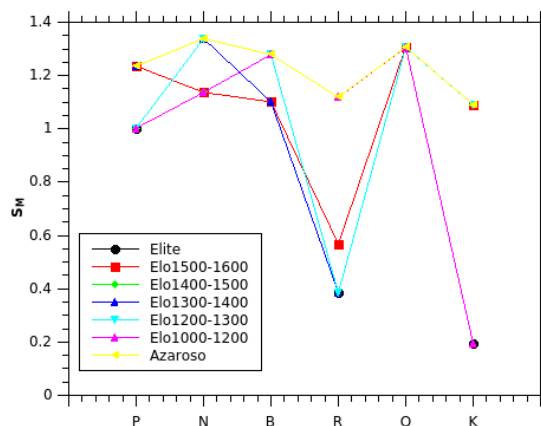


Figura C.24: Distribución de valores para la densidad de ocupación de torre en la etapa final del juego. La torre homogeneiza su densidad de ocupación lo que indica su constante cambio de marco a otro en esta etapa del juego, su relevancia es la mayor en comparación con las otras piezas.

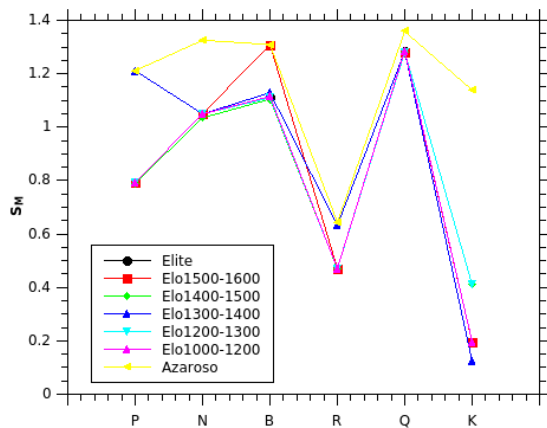


(a) Victoria Blancas. Piezas Blancas

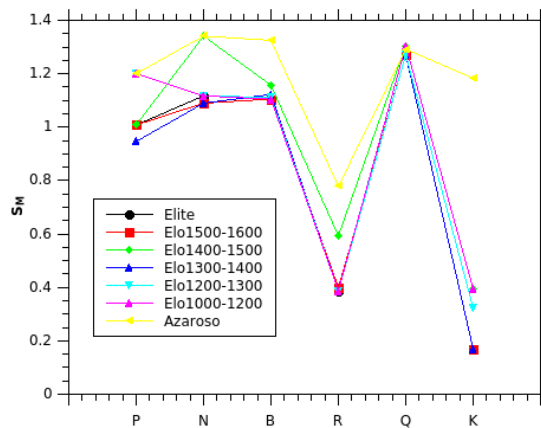


(b) Victoria Blancas. Piezas Negras

Figura C.25: Apertura. Distribución de la entropía por densidad de ocupación para cada pieza, caso de victoria de blancas. En esta etapa de juego resultan relevantes las piezas P,N,B y Q, por otro lado las piezas R y K actúan en menor medida.

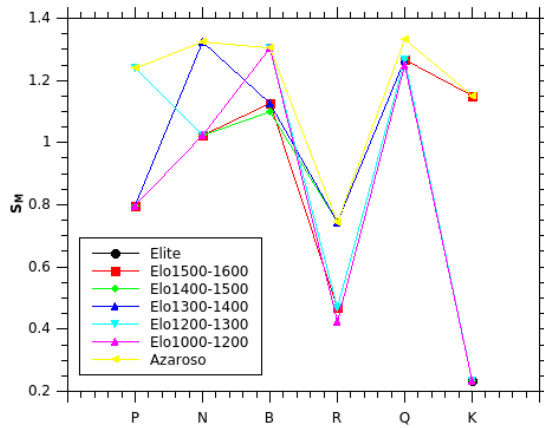


(a) Victoria Negras. Piezas Blancas

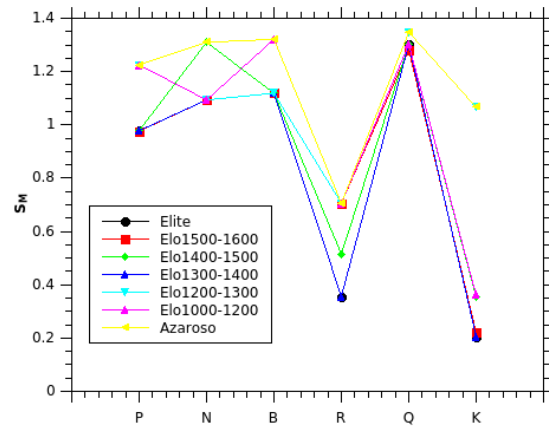


(b) Victoria Negras. Piezas Negras

Figura C.26: Apertura. Distribución de la entropía por densidad de ocupación para cada pieza, caso de victoria de negras. En esta etapa de juego resultan relevantes las piezas P,N,B y Q, por otro lado las piezas R y K actúan en menor medida.

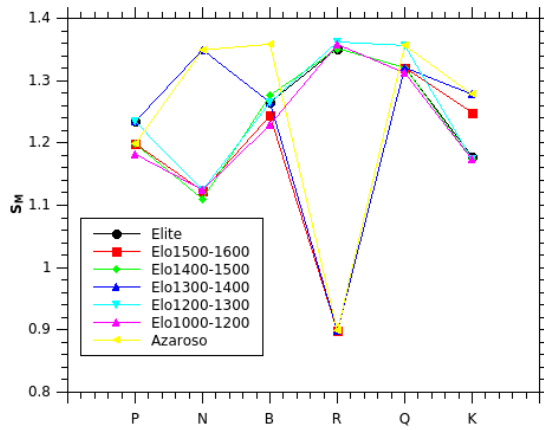


(a) Empate. Piezas Blancas

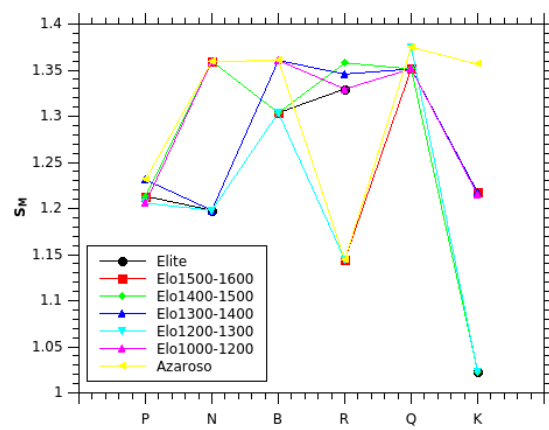


(b) Empate. Piezas Negras

Figura C.27: Apertura. Distribución de la entropía por densidad de ocupación para cada pieza, caso de empate. En esta etapa de juego resultan relevantes las piezas P,N,B y Q, por otro lado las piezas R y K actúan en menor medida.

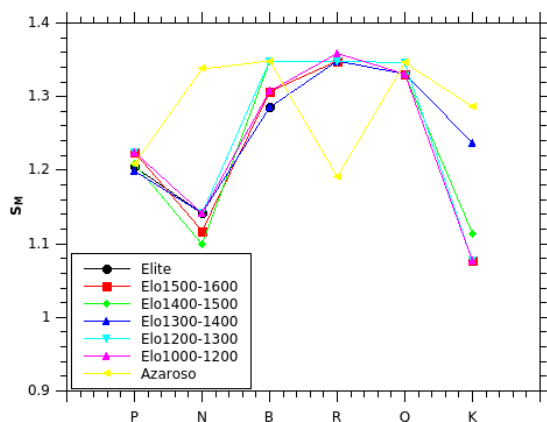


(a) Victoria Blancas. Piezas Blancas

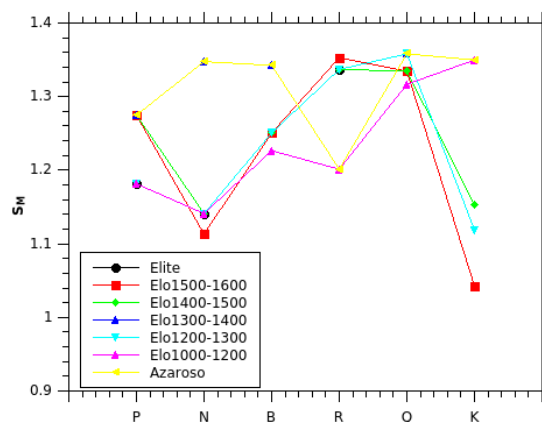


(b) Victoria Blancas. Piezas Negras

Figura C.28: Medio juego. Distribución de la entropía por densidad de ocupación para cada pieza, caso de victoria de blancas. En esta etapa de juego comienza a equilibrarse la participación de todas las piezas.

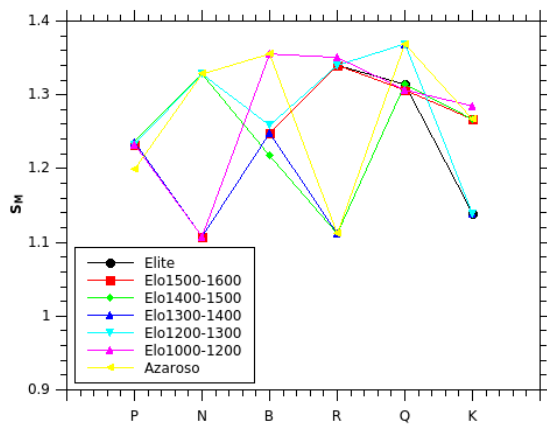


(a) Victoria Negras. Piezas Blancas

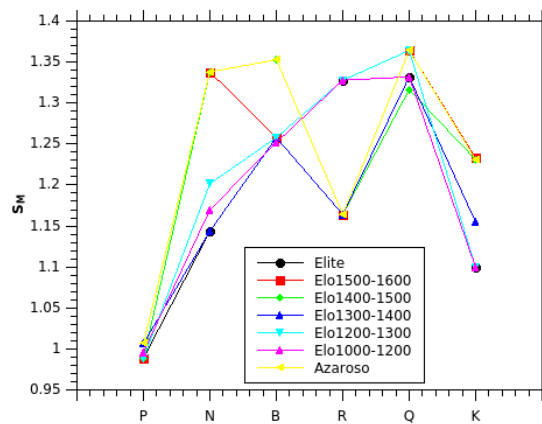


(b) Victoria Negras. Piezas Negras

Figura C.29: Medio juego. Distribución de la entropía por densidad de ocupación para cada pieza, caso de victoria de negras. En esta etapa de juego comienza a equilibrarse la participación de todas las piezas.

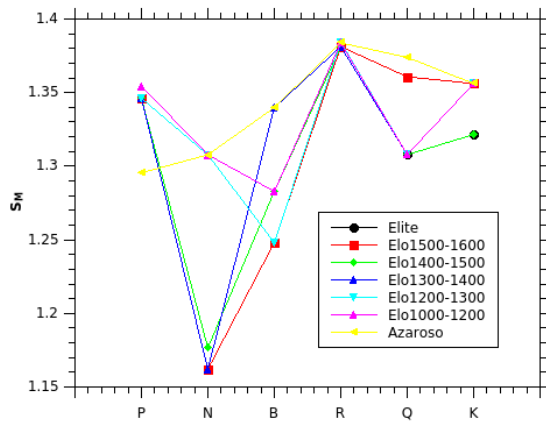


(a) Empate. Piezas Blancas

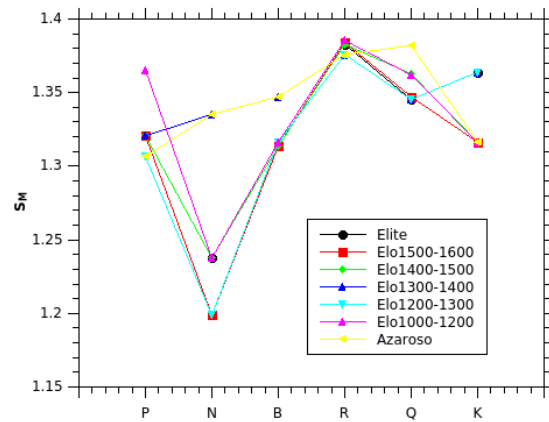


(b) Empate. Piezas Negras

Figura C.30: Medio juego. Distribución de la entropía por densidad de ocupación para cada pieza, caso de empate. En esta etapa de juego comienza a equilibrarse la participación de todas las piezas.

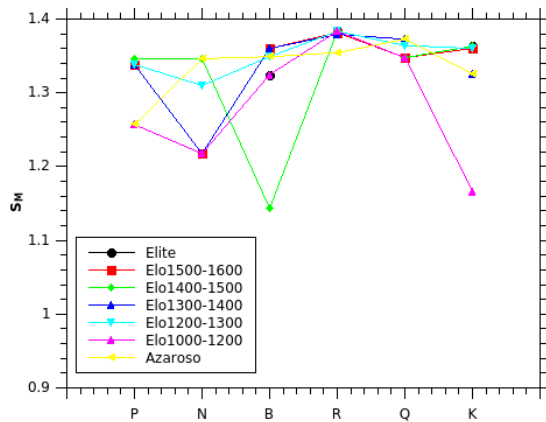


(a) Victoria Blancas. Piezas Blancas

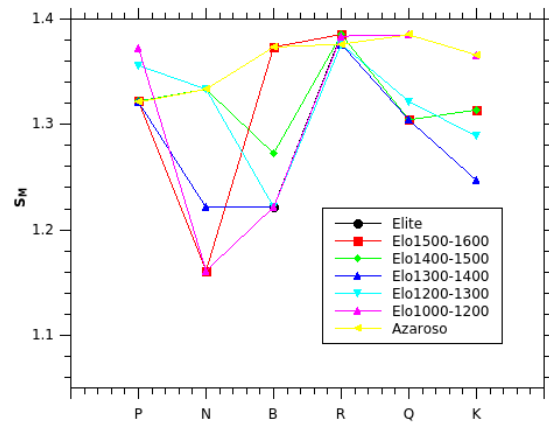


(b) Victoria Blancas. Piezas Negras

Figura C.31: Final. Distribución de la entropía por densidad de ocupación para cada pieza, caso de victoria de blancas. En esta etapa de juego las piezas que pierden protagonismo son N y B, las demás piezas mantienen una relevancia comparable entre si.



(a) Victoria Negras. Piezas Blancas



(b) Victoria Negras. Piezas Negras

Figura C.32: Final. Distribución de la entropía por densidad de ocupación para cada pieza, caso de victoria de negras. En esta etapa de juego las piezas que pierden protagonismo son N y B, las demás piezas mantienen una relevancia comparable entre si.

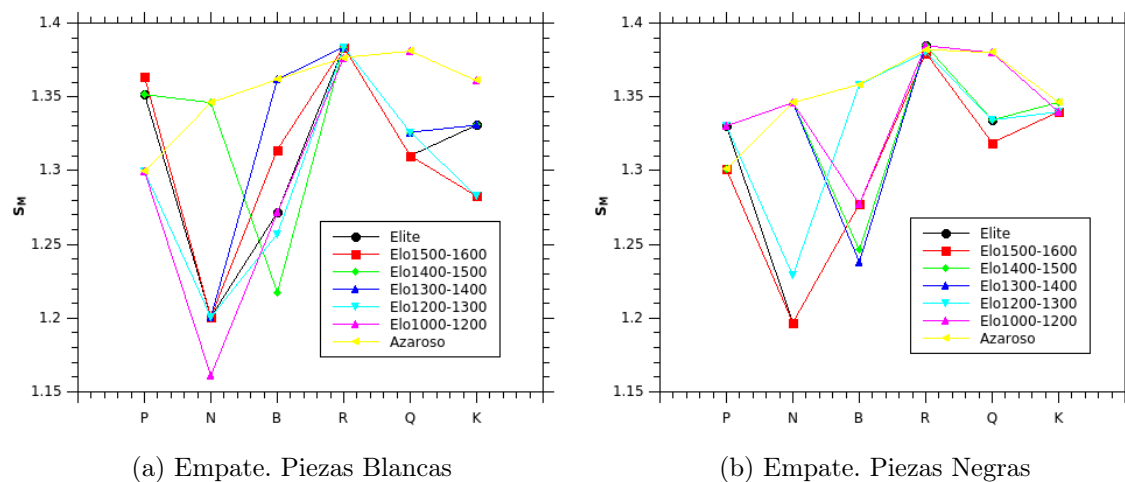


Figura C.33: Final. Distribución de la entropía por densidad de ocupación para cada pieza, caso de empate. En esta etapa de juego las piezas que pierden protagonismo son N y B, las demás piezas mantienen una relevancia comparable entre si.

D Atractores

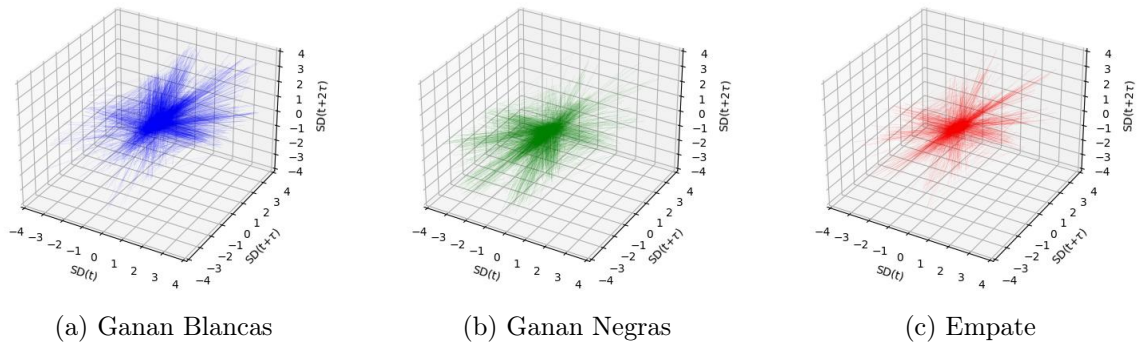


Figura D.1: Atractor del ajedrez con nivel de Elo 1901-2000.

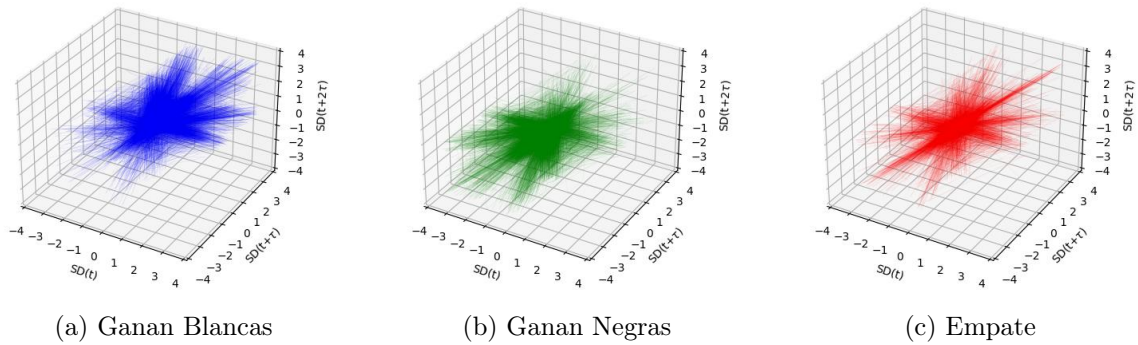


Figura D.2: Atractor del ajedrez con nivel de Elo 2001-2100.

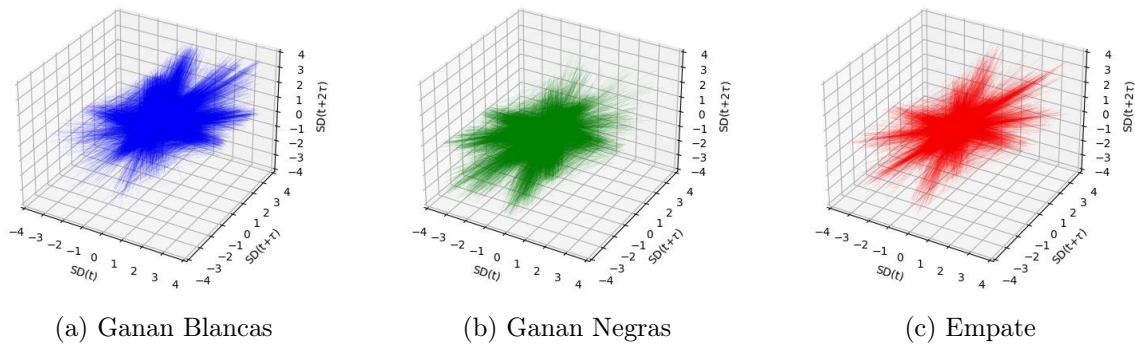


Figura D.3: Atractor del ajedrez con nivel de Elo 2101-2200.

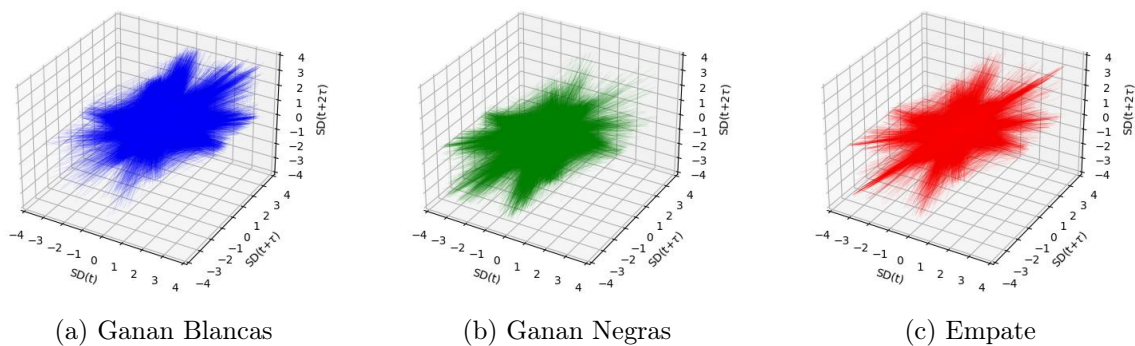


Figura D.4: Atractor del ajedrez con nivel de Elo 2201-2300.

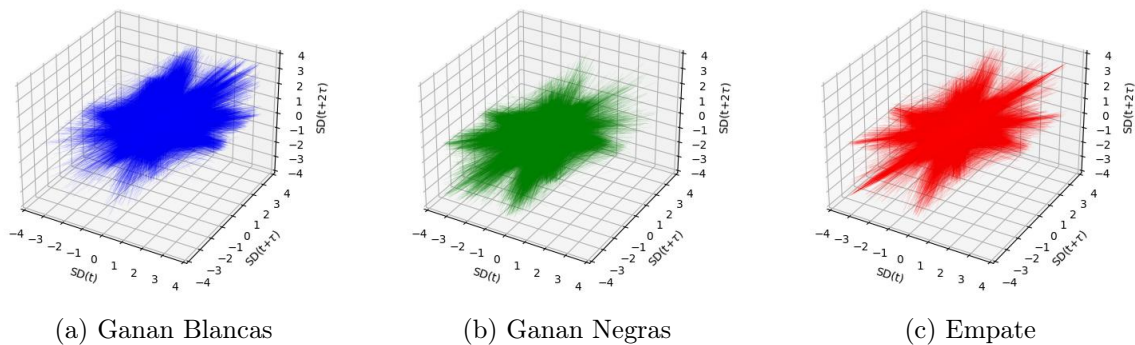


Figura D.5: Atractor del ajedrez con nivel de Elo 2301-2400.

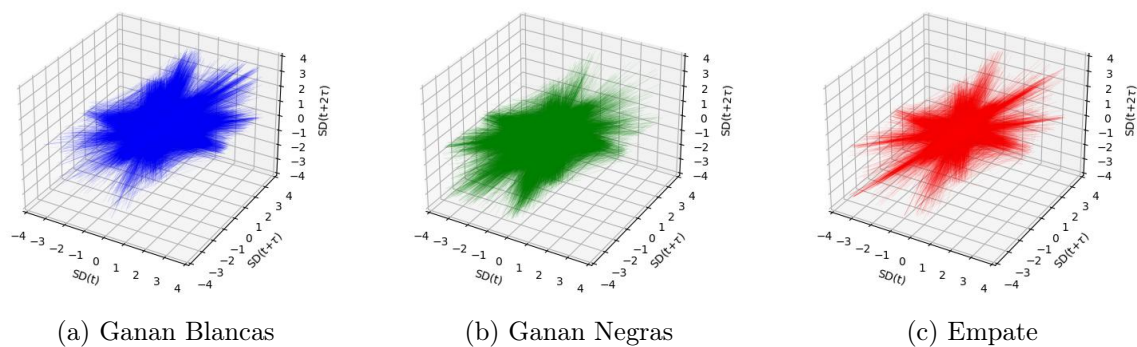


Figura D.6: Atractor del ajedrez con nivel de Elo 2401-2500.

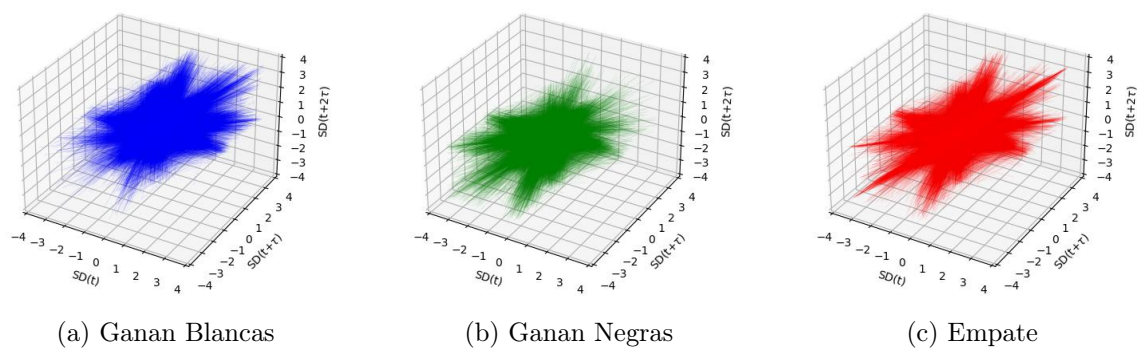


Figura D.7: Atractor del ajedrez con nivel de Elo 2501-2600.

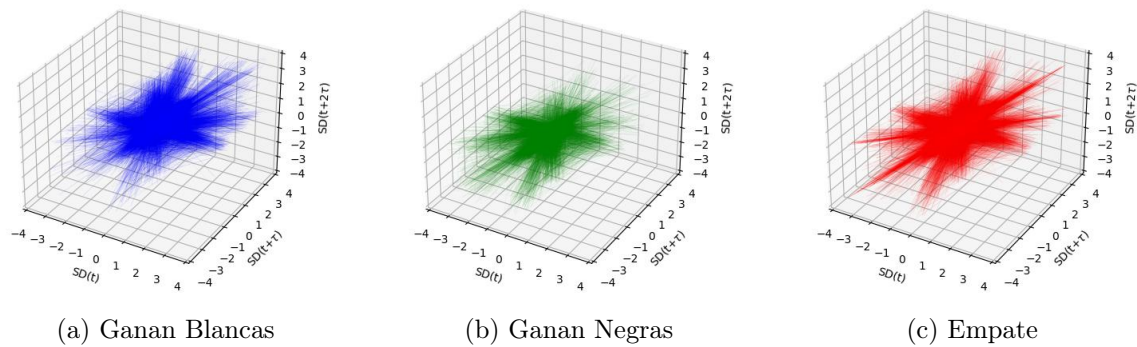


Figura D.8: Atractor del ajedrez con nivel de Elo 2601-2700.

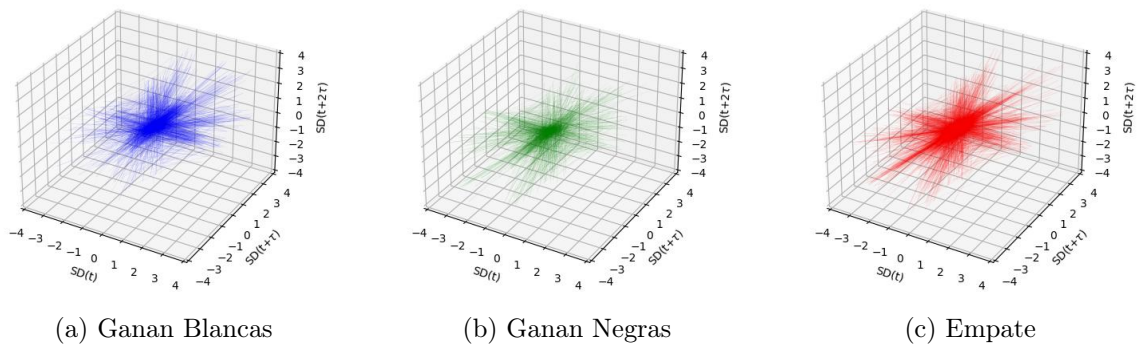


Figura D.9: Atractor del ajedrez con nivel de Elo 2701-2800.

E Atractores. Visualización con apoyo cromático

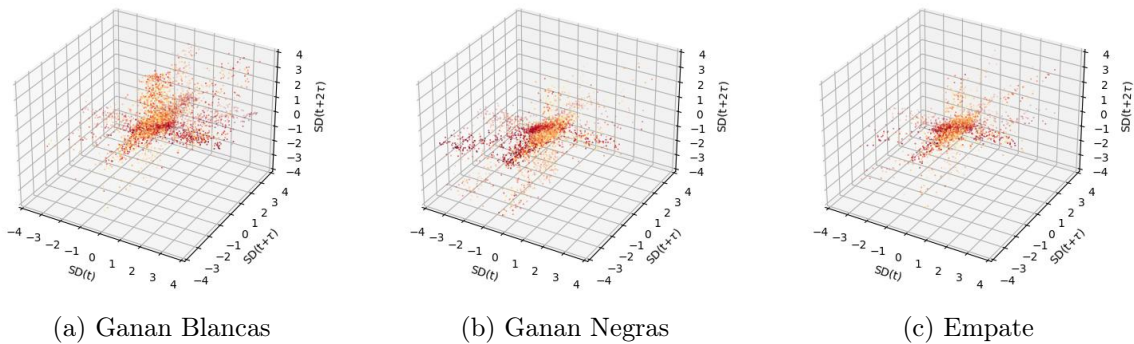


Figura E.1: Atractor del ajedrez con apoyo visual del color, los movimientos siguen la progresión de color pasando de los colores claros a los más oscuros a medida que avanzan los movimientos realizados, nivel de Elo 1901-2000.

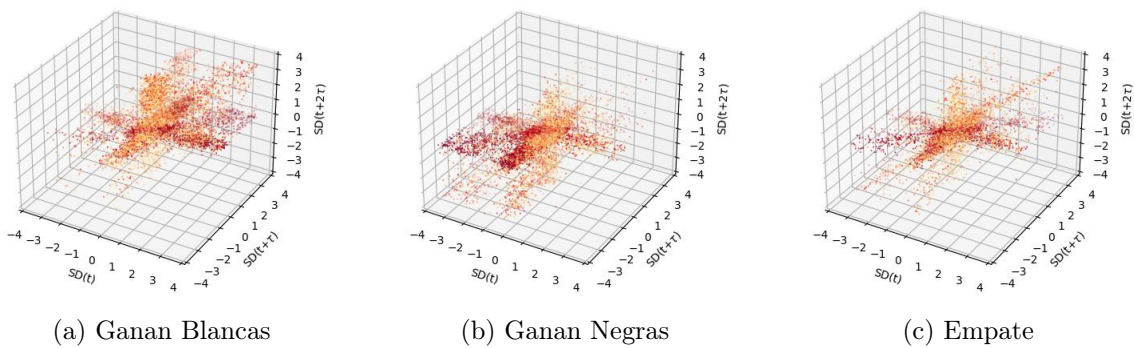


Figura E.2: Atractor del ajedrez con apoyo visual del color, los movimientos siguen la progresión de color pasando de los colores claros a los más oscuros a medida que avanzan los movimientos realizados, nivel de Elo 2001-2100.

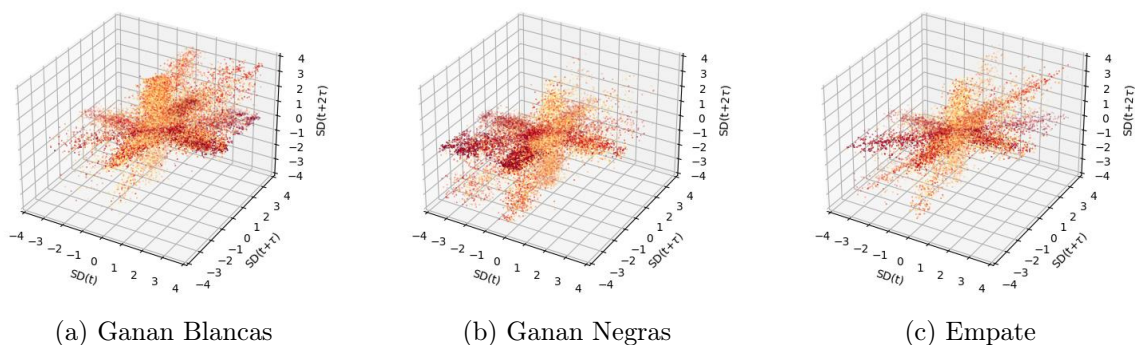


Figura E.3: Atractor del ajedrez con apoyo visual del color, los movimientos siguen la progresión de color pasando de los colores claros a los más oscuros a medida que avanzan los movimientos realizados, nivel de Elo 2101-2200.

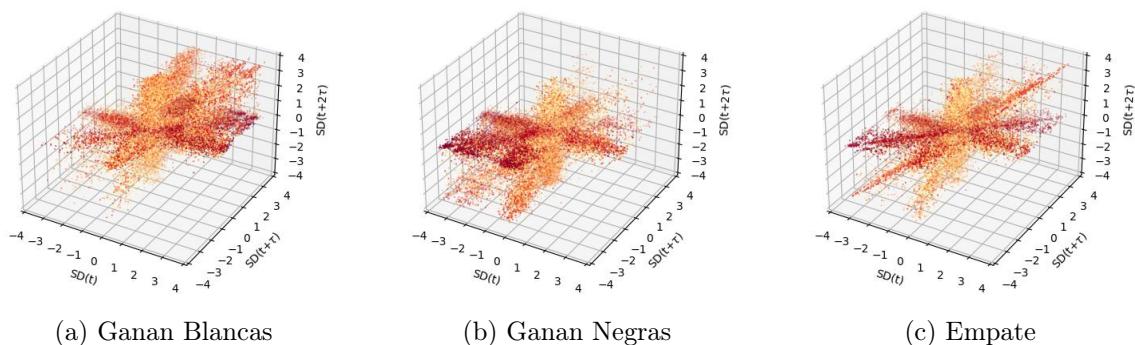


Figura E.4: Atractor del ajedrez con apoyo visual del color, los movimientos siguen la progresión de color pasando de los colores claros a los más oscuros a medida que avanzan los movimientos realizados, nivel de Elo 2201-2300.

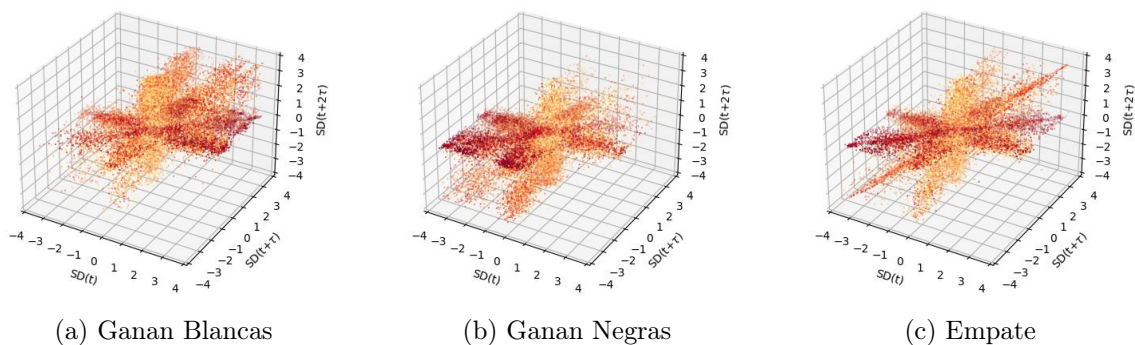


Figura E.5: Atractor del ajedrez con apoyo visual del color, los movimientos siguen la progresión de color pasando de los colores claros a los más oscuros a medida que avanzan los movimientos realizados, nivel de Elo 2301-2400.

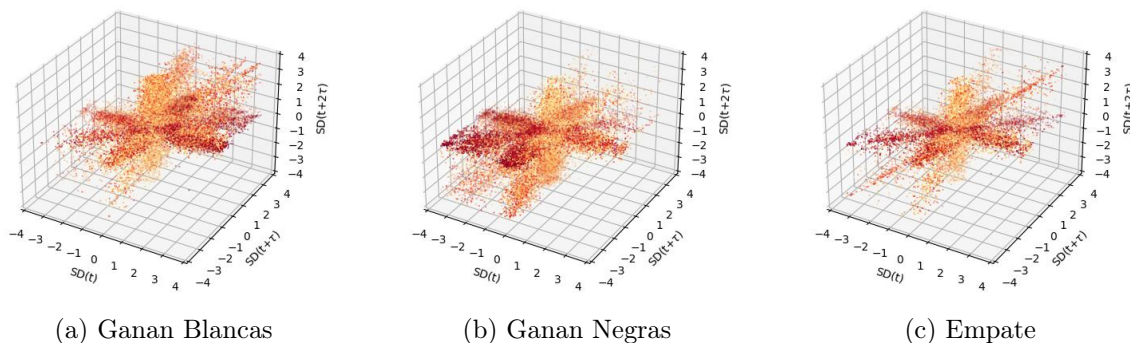


Figura E.6: Atractor del ajedrez con apoyo visual del color, los movimientos siguen la progresión de color pasando de los colores claros a los más oscuros a medida que avanzan los movimientos realizados, nivel de Elo 2401-2500.

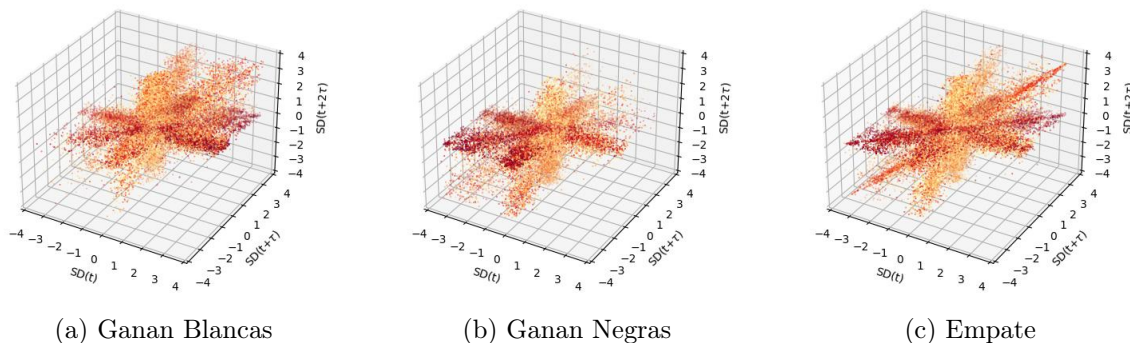


Figura E.7: Atractor del ajedrez con apoyo visual del color, los movimientos siguen la progresión de color pasando de los colores claros a los más oscuros a medida que avanzan los movimientos realizados, nivel de Elo 2501-2600.

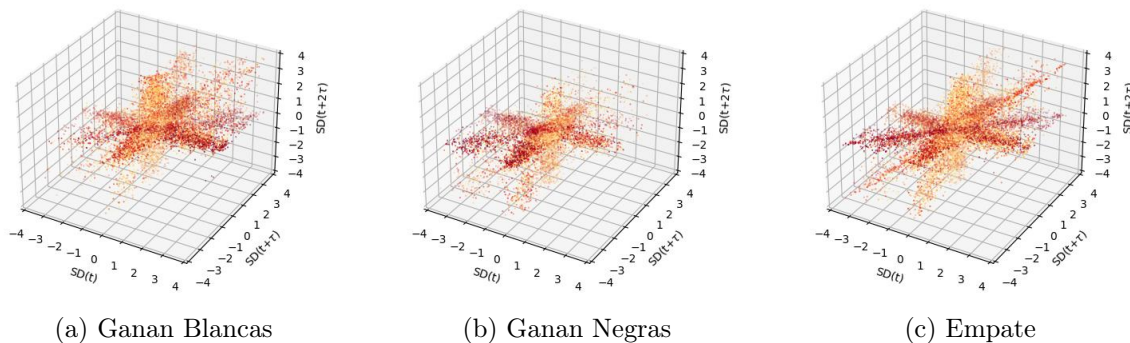
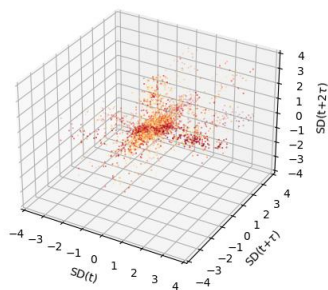
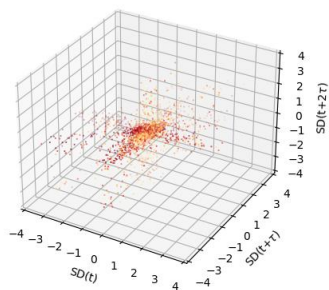


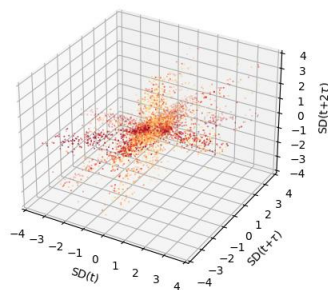
Figura E.8: Atractor del ajedrez con apoyo visual del color, los movimientos siguen la progresión de color pasando de los colores claros a los más oscuros a medida que avanzan los movimientos realizados, nivel de Elo 2601-2700.



(a) Ganan Blancas



(b) Ganan Negras



(c) Empate

Figura E.9: Atractor del ajedrez con apoyo visual del color, los movimientos siguen la progresión de color pasando de los colores claros a los más oscuros a medida que avanzan los movimientos realizados, nivel de Elo 2701-2800.

F Atractores. Visualización estados finales

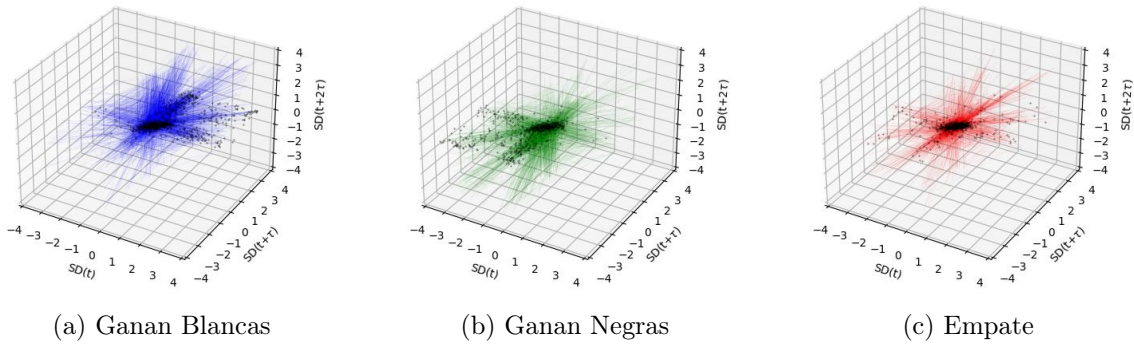


Figura F.1: Atractor del ajedrez con apoyo visual del estado final de las partidas, nivel de Elo 1901-2000.

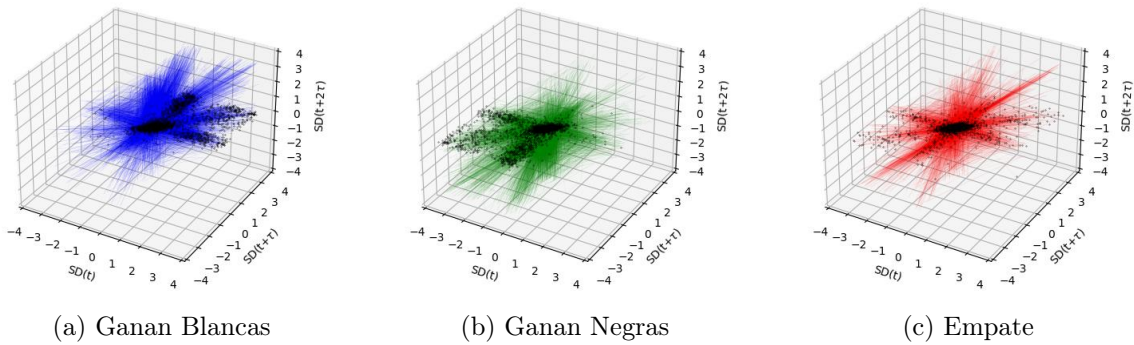


Figura F.2: Atractor del ajedrez con apoyo visual del estado final de las partidas, nivel de Elo 2001-2100.

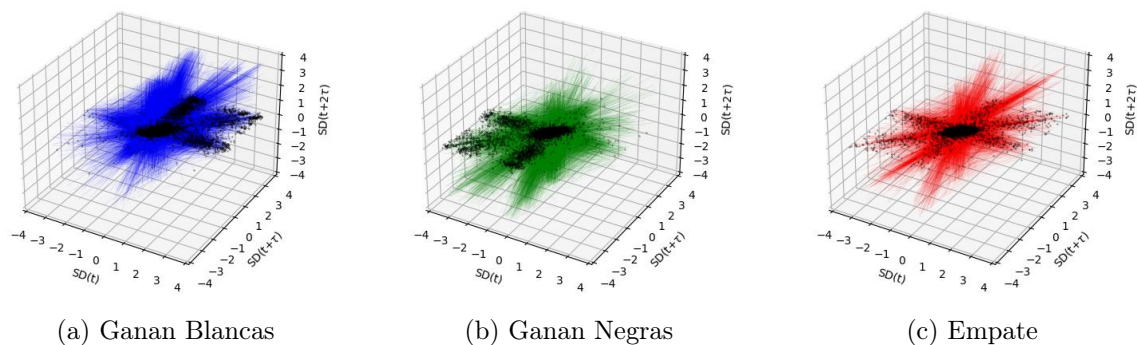


Figura F.3: Atractor del ajedrez con apoyo visual del estado final de las partidas, nivel de Elo 2101-2200.

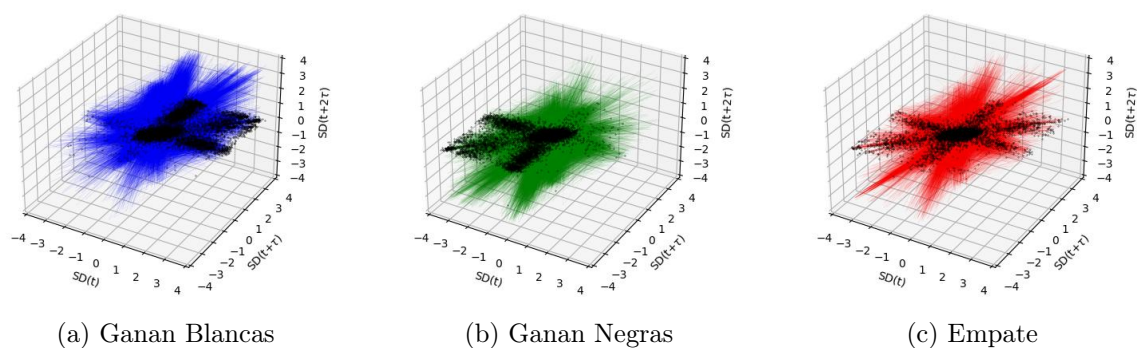


Figura F.4: Atractor del ajedrez con apoyo visual del estado final de las partidas, nivel de Elo 2201-2300.

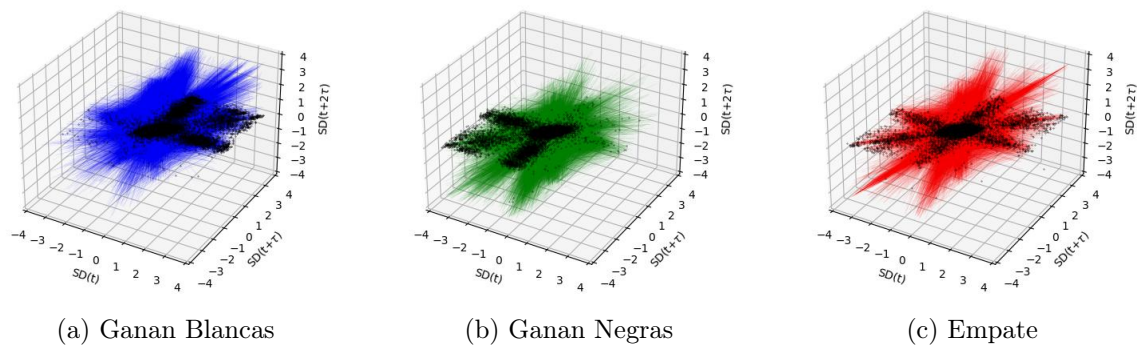


Figura F.5: Atractor del ajedrez con apoyo visual del estado final de las partidas, nivel de Elo 2301-2400.

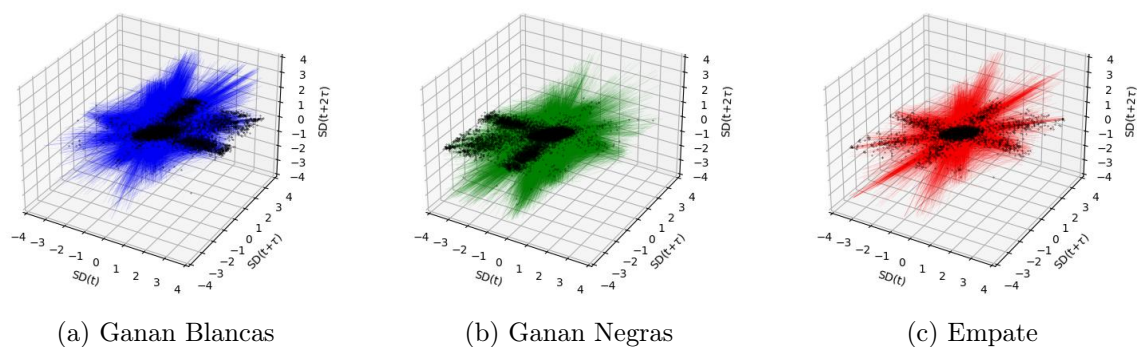


Figura F.6: Atractor del ajedrez con apoyo visual del estado final de las partidas, nivel de Elo 2401-2500.

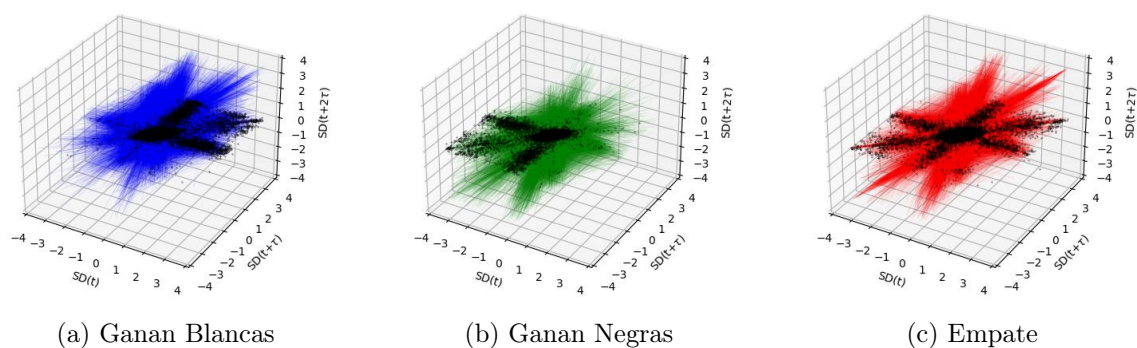


Figura F.7: Atractor del ajedrez con apoyo visual del estado final de las partidas, nivel de Elo 2501-2600.

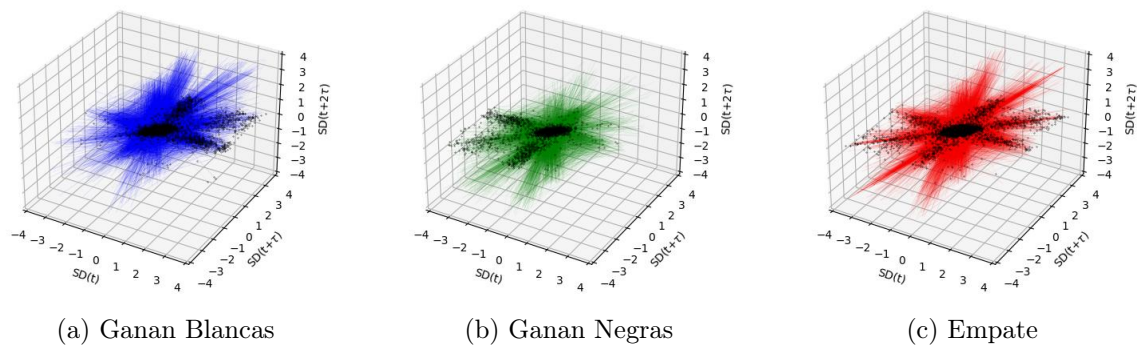


Figura F.8: Atractor del ajedrez con apoyo visual del estado final de las partidas, nivel de Elo 2601-2700.

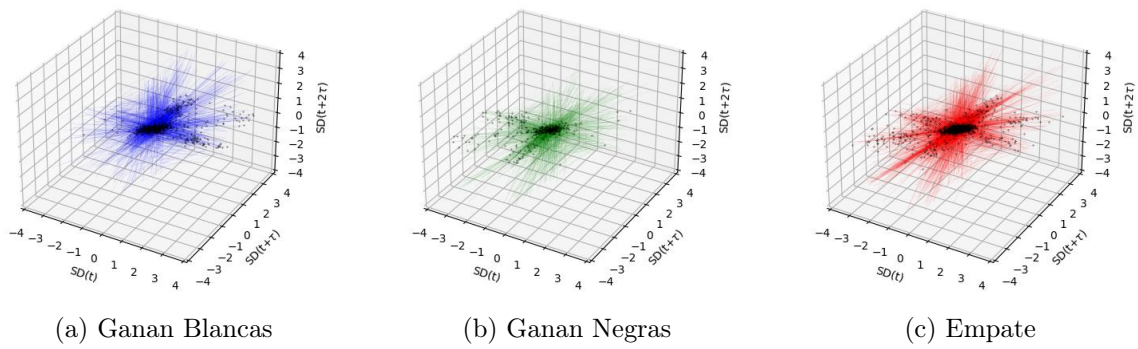


Figura F.9: Atractor del ajedrez con apoyo visual del estado final de las partidas, nivel de Elo 2701-2800.

G Atractores. Conjunto de estados finales

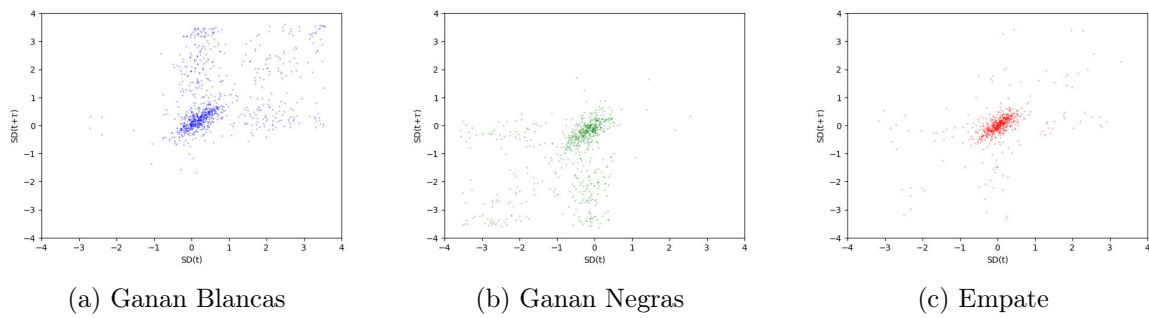


Figura G.1: Conjunto de los estados finales de las partidas, nivel de Elo 1901-2000.

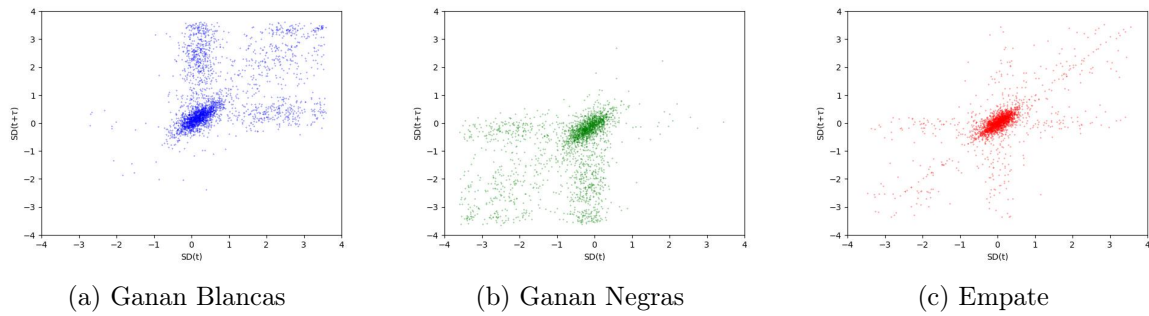


Figura G.2: Conjunto de los estados finales de las partidas, nivel de Elo 2001-2100.

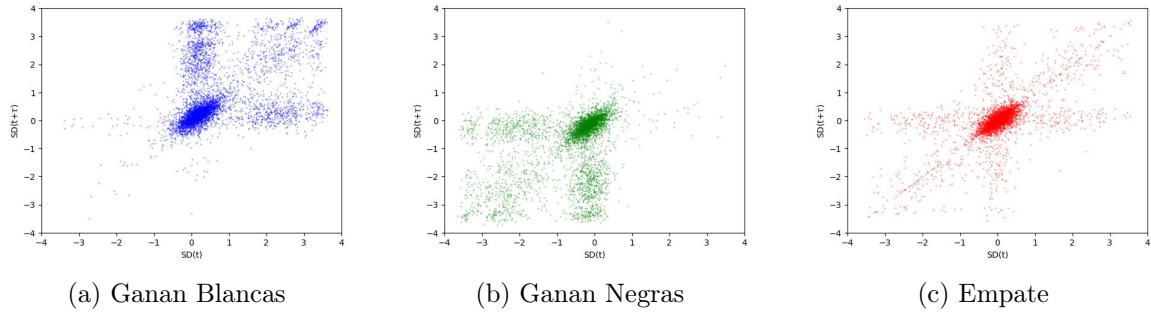


Figura G.3: Conjunto de los estados finales de las partidas, nivel de Elo 2101-2200.

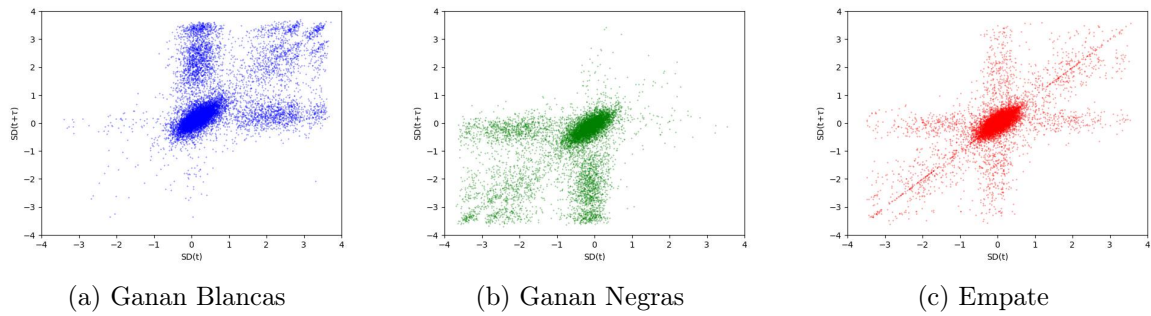


Figura G.4: Conjunto de los estados finales de las partidas, nivel de Elo 2201-2300.

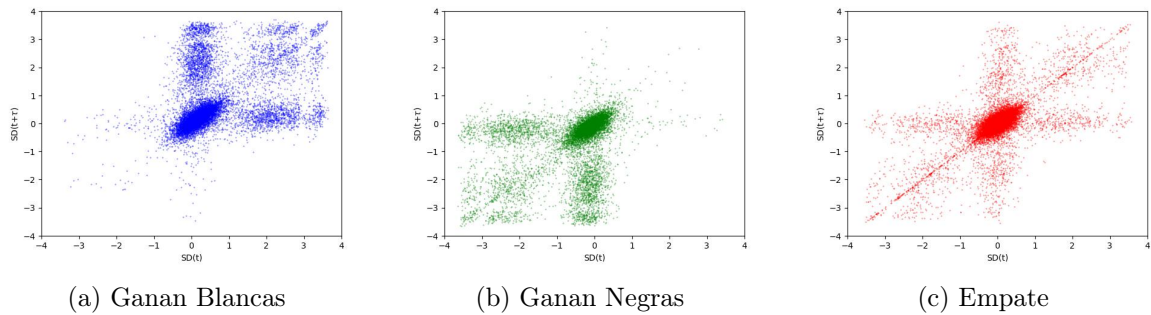


Figura G.5: Conjunto de los estados finales de las partidas, nivel de Elo 2301-2400.

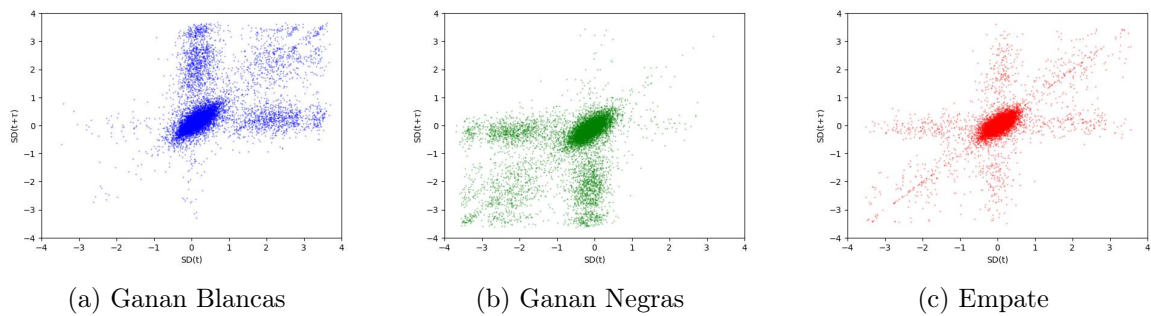


Figura G.6: Conjunto de los estados finales de las partidas, nivel de Elo 2401-2500.

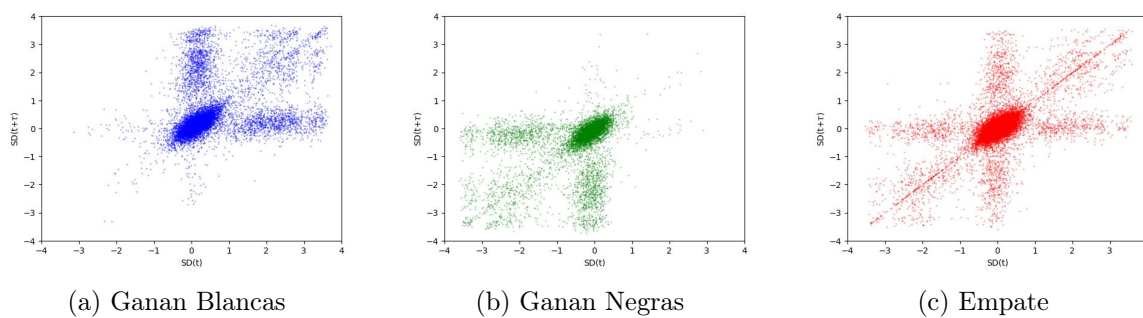


Figura G.7: Conjunto de los estados finales de las partidas, nivel de Elo 2501-2600.

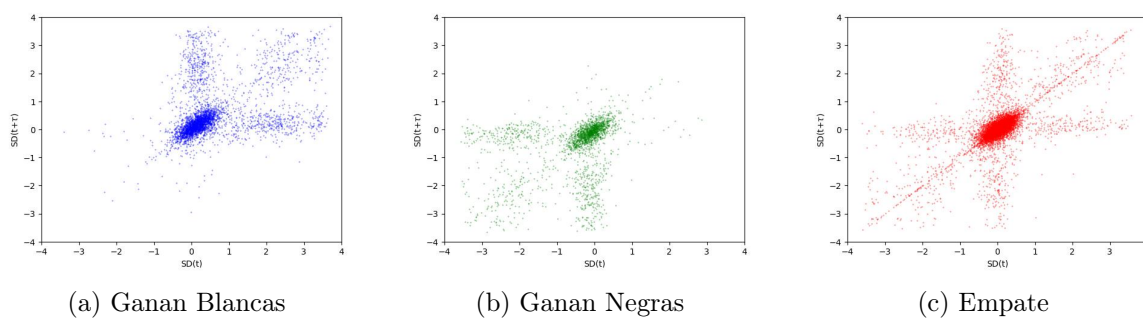


Figura G.8: Conjunto de los estados finales de las partidas, nivel de Elo 2601-2700.

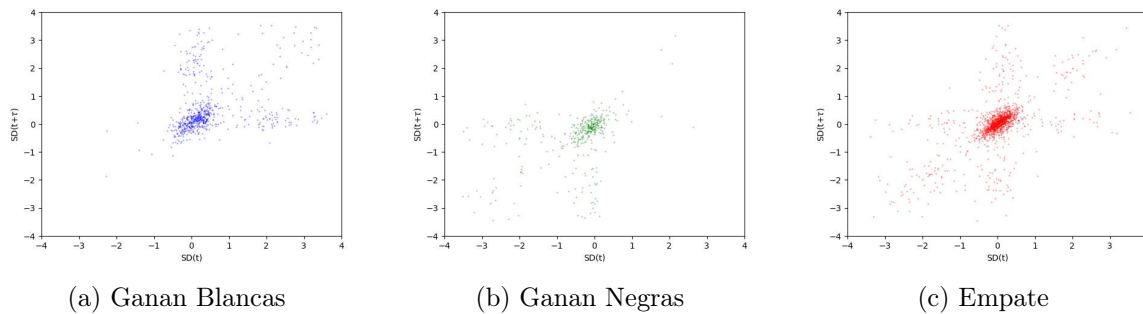


Figura G.9: Conjunto de los estados finales de las partidas, nivel de Elo 2701-2800.

Bibliografía

- [1] E. K. López and F. & Juárez, *Apuntes de Métodos y Técnicas de Investigación en Psicología Social*. 2004.
- [2] J. D. A. Islas-García, *Entropía y análisis estadístico de ajedrez por niveles de juego*. Ciencias físico-matemáticas e ingenierías, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2020.
- [3] J. Islas-García, M. Del Castillo-Escribano, and M. Del Castillo-Mussot, “Equiprobable and attacked-square chess entropies by phases, levels of play and game outcomes,” *International Journal of Modern Physics C*, vol. 33, no. 2, pp. 2250027–205, 2022.
- [4] L. García, *Ajedrez y ciencia, pasiones mezcladas*. Barcelona, España: Crítica, 2013.
- [5] C. Hesse, *Expediciones al mundo del ajedrez*. España: Chessy, 2010.
- [6] U. B. Hernández, *El ajedrez como metáfora de la muerte y la guerra*. Consultado el 03 Septiembre 2022 <https://es.chessbase.com/post/el-ajedrez-como-metafora-de-la-muerte-y-la-guerra-articulo-por-uvencio-blanco>, 30/07/2021.
- [7] A quick search with the keyword ”chess” in the amazon.com site throws over 20,000 results of books in English language.
- [8] C. E. Shannon, “Xxii. programming a computer for playing chess,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 41, no. 314, pp. 256–275, 1950.
- [9] A. E. Elo, “Logistic probability as a rating basis,” *The Rating of Chessplayers, Past&Present. Bronx NY*, vol. 10453, 2008.
- [10] D. Ross, “Arpad elo y el sistema de puntuación elo.” Recuperado 17 de septiembre del 2022 en <https://es.chessbase.com/post/arpad-elo-y-el-sistema-de-puntuacin-elo>, 2007.
- [11] M. del Castillo, *Cómo acercarse al ajedrez*. México: Limusa, 1993.
- [12] G. Robert, *Measures of Information*, pp. 9–21. Springer Vienna, 1968.

- [13] R. Ayres, *Information entropy, and progress. A new evolutionary paradigm*. New York, USA: American Institute of Physics., 1994.
- [14] D. Ruelle, “Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 82, no. 1, pp. 137–151, 1981.
- [15] F. Takens, “Detecting strange attractors in turbulence,” in *Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980*, pp. 366–381, Springer, 1981.
- [16] K. Jensen and L. M. Kristensen, *Formal Definition of State Spaces and Behavioural Properties*, pp. 154–163. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [17] A. M. Fraser and H. L. Swinney, “Independent coordinates for strange attractors from mutual information,” *Physical review A*, vol. 33, no. 2, p. 1134, 1986.
- [18] A. Fraser, “Information theory and strange attractors,” *Tech. Rep. PhD thesis. University of Texas, Austin*, 1989.
- [19] H. Abarbanel, *Analysis of observed chaotic data*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [20] C. Rhodes and M. Morari, “The false nearest neighbors algorithm: An overview,” *Computers & Chemical Engineering*, vol. 21, pp. S1149–S1154, 1997.
- [21] B. Abramson, *The expected-outcome model of two-player games*. Morgan Kaufmann, 2014.
- [22] R. Ibero, *Diccionario de ajedrez*. Barcelona, España: Martinez Roca, 1977.
- [23] Chess24, “Glosario ajedrecístico: Ply,” 2022.
- [24] D. R. Fredkin and J. A. Rice, “Method of false nearest neighbors: A cautionary note,” *Phys. Rev. E*, vol. 51, pp. 2950–2954, Apr 1995.
- [25] O. Peñaloza, J. Álvarez, and J. Alvarez, “Supresión de caos en un manipulador planar subactuado: resultados experimentales,” 03 2004.