



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

# **Dinámica y control de una máquina herramienta paralela**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero mecatrónico**

**P R E S E N T A**

Meza Torres Francisco Arturo

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Ricardo Yáñez Valdez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Agradecimientos

*Este trabajo se desarrolló en las instalaciones del Centro de Ingeniería Avanzada de la División de Ingeniería Mecánica e Industrial de la Facultad de Ingeniería de la UNAM bajo la dirección del Prof. Ricardo Yáñez-Valdez. Proyecto realizado gracias al programa UNAM-PAPIIT IN119120 "Análisis de estabilidad dinámica de una máquina herramienta paralela mediante la teoría de Chatter".*

---

## Agradecimientos

*Gracias a mis padres Gustavo Meza y Edna Torres, que en conjunto con mis abuelitos Francisco Meza y María Garibay me transmitieron una gran enseñanza, aprendizaje y valores sin los cuales no tendría este logro.*

*Sin dejar de lado a mis hermanos José Manuel y Eduardo por su apoyo incondicional y a mis tíos David, Brenda, Sandra y Francisco, quienes, con su sabiduría obtenida a través de sus años de estudio, pudieron trasmitirme una pizca de su conocimiento.*

*Agradezco especialmente a mis amigos Antonio, Betza, Cabrera y Fany por compartir conmigo tan buenos momentos de diversión, alegría y carcajadas. Y a Vivi, por ayudarme a conocerme y crecer.*

*Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México por permitirme dejar parte de mí en cada edificio, salón o laboratorio a través de todas las experiencias vividas con profesores y amigos.*

*Por último, quiero agradecer especialmente a mi asesor el Dr. Ricardo Yáñez Valdez por su paciencia y apoyo brindado al presente trabajo de tesis. Apoyo sin el cual no habría podido dar cierre a mi carrera universitaria.*

---

## CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .....	10
DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.....	12
JUSTIFICACIÓN .....	13
OBJETIVOS .....	14
HIPÓTESIS .....	14
1 ANTECEDENTES .....	16
1.1 MÁQUINAS HERRAMIENTA DE CINEMÁTICA PARALELA.....	16
1.2 SISTEMAS DE CONTROL EN LAS PKM.....	18
2 MARCO TEÓRICO .....	23
2.1 ANÁLISIS CINEMÁTICO.....	23
2.1.1 <i>Cinemática directa</i> .....	23
2.1.2 <i>Cinemática inversa</i> .....	26
2.2 ANÁLISIS DINÁMICO.....	27
2.2.1 <i>Formulación de Lagrange</i> .....	28
2.2.2 <i>Modelo dinámico con fricción</i> .....	29
2.2.3 <i>Coefficientes de fricción de juntas prismáticas</i> .....	31
2.3 SISTEMAS DE CONTROL.....	31
2.4 CONTROL DE POSICIÓN.....	33
2.4.1 <i>Control PD</i> .....	33
2.4.2 <i>Control PD con compensación precalculada de gravedad</i> .....	34
2.4.3 <i>Control PID</i> .....	35
2.5 CONTROL DE MOVIMIENTO.....	36
2.5.1 <i>Control PD con compensación</i> .....	36
2.5.2 <i>Control Par-Calculado+</i> .....	37
2.6 ERROR MEDIO DE RAÍZ CUADRADA (RMSE).....	39
2.7 PAR DE HOLDING Y PAR DE PULL – IN DE UN MOTOR.....	39
3 DESARROLLO.....	41

---

3.1	PASOS EN EL DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL.....	41
3.2	CONFIGURACIÓN DE LA PKM EN ESTUDIO.....	42
3.3	ANÁLISIS CINEMÁTICO.....	43
3.3.1	<i>Ecuaciones de la cadena cinemática 1.</i> .....	44
3.3.2	<i>Ecuaciones de la cadena cinemática 2.</i> .....	47
3.3.3	<i>Ecuaciones de la cadena cinemática 3.</i> .....	49
3.4	ANÁLISIS DINÁMICO.....	52
3.4.1	<i>Modelo dinámico.</i> .....	53
3.4.2	<i>Fuerzas de fricción.</i> .....	63
3.5	CARACTERIZACIÓN DEL MOTOR A PASOS. ....	64
3.6	SISTEMAS DE CONTROL.....	65
3.6.1	<i>Definición de la tarea.</i> .....	65
3.6.2	<i>Parámetros constantes del modelo dinámico</i> .....	66
3.6.3	<i>Sintonización de los sistemas de control.</i> .....	67
4	PRUEBAS Y RESULTADOS.....	70
4.1	SIMULACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO.....	70
4.2	SIMULACIÓN DE LOS SISTEMAS DE CONTROL.....	72
4.2.1	<i>Control de Posición.</i> .....	73
4.2.2	<i>Control de movimiento.</i> .....	77
4.3	EVALUACIÓN DE DESEMPEÑO. ....	82
4.4	INTERFAZ GRÁFICA EN LABVIEW. ....	86
5	CONCLUSIÓN.....	89
5.1	CONCLUSIÓN.....	89
5.2	TRABAJO A FUTURO. ....	90
6	REFERENCIAS.....	92
7	ANEXOS .....	96
7.1	CÓDIGO EN MATHEMATICA DEL ANÁLISIS CINEMÁTICO.....	96
7.2	CÓDIGO Y DIAGRAMA A BLOQUES DE LOS SISTEMAS DE CONTROL. ....	98
8	GLOSARIO.....	103

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1. Plataforma Gough para prueba de neumáticos (Zhang, 2010).....</i>	16
<i>Figura 2. Fresadoras de 6 GDL. a) Variax, b) Okuma PM-600 (Serje &amp; Pacheco, 2017). ..</i>	17
<i>Figura 3. PKM Tricept. a) en fresado, b) en soldadura (Serje &amp; Pacheco, 2017). .....</i>	18
<i>Figura 4. Experimento sobre capacidad de mecanizado. a) PKM de 2 GDL, b) CNC convencional vertical AGINI BMV 45T20 (Darvekar et al., 2021). .....</i>	18
<i>Figura 5. Diagrama de un vector P en referencia a un sistema A y a un sistema B. ....</i>	24
<i>Figura 6. Sistemas de referencia locales por los que pasa <math>O_3</math> para obtener <math>{}^0T_3</math>. ....</i>	26
<i>Figura 7. a) Mecanismo de 2 GDL, b) geometría triangular y ángulos que se forman con las juntas y eslabones. ....</i>	26
<i>Figura 8. Control Proporcional con retroalimentación de velocidad (Kelly et al., 2005). ....</i>	34
<i>Figura 9. Control PD con compensación precalculada de gravedad (Kelly et al., 2005). ....</i>	34
<i>Figura 10. Control PID (Kelly et al., 2005). ....</i>	35
<i>Figura 11. Control PD con compensación (Kelly et al., 2005). .....</i>	37
<i>Figura 12. Control de Par-Calculado+ (Kelly et al., 2005). .....</i>	38
<i>Figura 13. Esquema general para la prueba de par holding y par pull – in. ....</i>	40
<i>Figura 14. Pasos propuestos en el diseño de un sistema de control para una PKM. ....</i>	41
<i>Figura 15. A) Configuración 3PRRR. b) Ensamble de la PKM 3PRRR (Téllez, 2018). ....</i>	43
<i>Figura 16. Diagrama con parámetros constantes y variables articulares del mecanismo con configuración 3PRRR. ....</i>	43
<i>Figura 17. Ubicación de los sistemas de referencia de la cadena 1. a) Vista del plano <math>X_0Z_0</math>. b) Vista del plano <math>Y_0Z_0</math>. c) Ángulo entre el sistema de referencia <math>O_{14}</math> con el sistema de referencia <math>O_p</math> del efector final.....</i>	45
<i>Figura 18 . Geometría triangular y ángulos que forman los orígenes de los sistemas de referencia <math>O_{11}</math>, <math>O_{12}</math> y <math>O_{13}</math>.....</i>	45

<i>Figura 19. Sistemas de referencias de la cadena cinemática 2. a) Vista del plano <math>Z_0Y_0</math>. b) Vista del plano <math>X_0Z_0</math>. c) Ángulo entre el sistema de referencia <math>O_{24}</math> con el sistema de referencia <math>O_p</math> del efector final.....</i>	<i>47</i>
<i>Figura 20 . Geometría triangular y ángulos que forman los orígenes de los sistemas de referencia <math>O_{21}</math>, <math>O_{22}</math> y <math>O_{23}</math>.....</i>	<i>48</i>
<i>Figura 21. Sistemas de referencias de la cadena cinemática 3. a) Vista del plano <math>X_0Z_0</math>. b) Vista del plano <math>X_0Y_0</math>. c) Ángulo entre el sistema de referencia <math>O_{34}</math> con el sistema de referencia <math>O_p</math> del efector final. ....</i>	<i>50</i>
<i>Figura 22 . Geometría triangular y ángulos que forman los orígenes de los sistemas de referencia <math>O_{31}</math>, <math>O_{32}</math> y <math>O_{33}</math>.....</i>	<i>51</i>
<i>Figura 23. Distribución de masa y puntos <math>A_i</math>, <math>B_i</math> y <math>C_i</math> para <math>i = 1,2</math> y <math>3</math> del mecanismo con configuración 3PRRR. ....</i>	<i>53</i>
<i>Figura 24. Prueba par de holding y prueba par de pull-in. ....</i>	<i>64</i>
<i>Figura 25. Gráfica corriente – Par, de las pruebas par de holding y par de pull – in. ....</i>	<i>65</i>
<i>Figura 26. Simulación de las ecuaciones de movimiento del mecanismo 3PRRR. ....</i>	<i>70</i>
<i>Figura 27. Movimiento en x del efector final. ....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 28. Movimiento en y del efector final. ....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 29. Movimiento en z del efector final.....</i>	<i>72</i>
<i>Figura 30. Error de posición del efector final con el control PD. ....</i>	<i>73</i>
<i>Figura 31. Error de velocidad del efector final con el control PD. ....</i>	<i>74</i>
<i>Figura 32. Fuerza del actuador requerida con el controlador PD.....</i>	<i>74</i>
<i>Figura 33. Error de posición del efector final con el control PD con compensación precalculada de gravedad. ....</i>	<i>75</i>
<i>Figura 34. Error de velocidad del efector final con el control PD con compensación precalculada de gravedad. ....</i>	<i>75</i>
<i>Figura 35. Fuerza del actuador requerida con el controlador PD con compensación precalculada de gravedad. ....</i>	<i>76</i>



<i>Figura 36. Error de posición del efector final con el control PID.....</i>	<i>76</i>
<i>Figura 37. Error de velocidad del efector final con el control PID.....</i>	<i>77</i>
<i>Figura 38. Fuerza del actuador requerida con el controlador PID.....</i>	<i>77</i>
<i>Figura 39. Trayectoria deseada. ....</i>	<i>78</i>
<i>Figura 40. Error de posición del efector final con el control PD con compensación precalculada de gravedad. ....</i>	<i>78</i>
<i>Figura 41. Error de velocidad del efector final con el control PD con compensación precalculada de gravedad. ....</i>	<i>79</i>
<i>Figura 42. Fuerza del actuador requerida con el controlador PD con compensación precalculada de gravedad. ....</i>	<i>79</i>
<i>Figura 43. Error de posición del efector final con el control PD con compensación. ....</i>	<i>80</i>
<i>Figura 44. Error de velocidad del efector final con el control PD con compensación. ....</i>	<i>80</i>
<i>Figura 45. Fuerza del actuador requerida con el controlador PD con compensación. ....</i>	<i>81</i>
<i>Figura 46. Error de posición del efector final con el control de Par-Calculado+. ....</i>	<i>81</i>
<i>Figura 47. Error de velocidad del efector final con el control de Par-Calculado+. ....</i>	<i>82</i>
<i>Figura 48. Fuerza del actuador requerida con el controlador de Par-Calculado+. ....</i>	<i>82</i>
<i>Figura 49. Trayectoria del efector final y deseada con el control de Par-Calculado+. ....</i>	<i>84</i>
<i>Figura 50. Trayectoria en el eje x del efector final y la deseada, con el control de Par-Calculado+. ....</i>	<i>85</i>
<i>Figura 51. Trayectoria en el eje y del efector final y la deseada, con el control de Par- Calculado+. ....</i>	<i>85</i>
<i>Figura 52. Trayectoria en el eje z del efector final y la deseada con el control de Par- Calculado+. ....</i>	<i>86</i>
<i>Figura 53. Pestaña introducción en la interfaz gráfica de LabVIEW. ....</i>	<i>87</i>
<i>Figura 54. Pestaña del control PD con compensación precalculada de gravedad en la interfaz gráfica de LabVIEW. ....</i>	<i>87</i>

<i>Figura 55. Pestaña del control de Par-Calculado+ en la interfaz gráfica de LabVIEW.....</i>	<i>88</i>
<i>Figura 56. Diagrama a bloques del control PD.....</i>	<i>99</i>
<i>Figura 57. Diagrama a bloques del control PD-G+.....</i>	<i>99</i>
<i>Figura 58. Diagrama a bloques del control PID. ....</i>	<i>100</i>
<i>Figura 59. Diagrama a bloques del control PD con compensación. ....</i>	<i>101</i>
<i>Figura 60. Diagrama a bloques del control Par-Calculado+. ....</i>	<i>102</i>

## ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1 Métodos para el análisis dinámico de mecanismos paralelos. ....</i>	19
<i>Tabla 2. Métodos para el análisis cinemático de mecanismos paralelos.....</i>	20
<i>Tabla 3. Sistemas de control aplicados a PKM. ....</i>	20
<i>Tabla 4. Sistemas de control aplicados a PKM (continuación). ....</i>	21
<i>Tabla 5. Especificaciones de la PKM con configuración 3PRRR (Téllez, 2018). ....</i>	42
<i>Tabla 6. Resultados de las pruebas par de holding y par de pull – in. ....</i>	64
<i>Tabla 7. Parámetros de la PKM. ....</i>	67
<i>Tabla 8. Resultados de la simulación con los sistemas de control para posicionamiento. ....</i>	83
<i>Tabla 9. Resultados de la simulación con los sistemas de control para movimiento.....</i>	83

---

## ***INTRODUCCIÓN***

Las máquinas herramienta en los procesos de remoción de material se han mantenido en constante desarrollo, tanto por la industria como por investigadores, a fin de realizar maquinados a una mayor velocidad con un buen acabado superficial, con el menor consumo de energía y de forma automatizada; esto debido a la demanda cada vez mayor de la industria para obtener productos a un menor costo, tiempo y riesgo de fabricación, manteniendo o mejorando la calidad. Uno de los sistemas que se ha integrado sinérgicamente a este tipo de máquinas, es el sistema de control, ya que es fundamental en su automatización y mejora de desempeño; de los sistemas de control disponibles, se pueden encontrar desde implementaciones simples de control lineal, hasta controles no lineales con un mejor desempeño.

Ahora bien, otro punto importante en el diseño de las máquinas herramienta es el tipo de mecanismo que se utiliza. En un principio solo se usaban configuraciones seriales, pero para lograr mantener una alta rigidez y reducir el error acumulado, se requiere de eslabones más robustos, lo cual implica una mayor masa en movimiento y un mayor consumo de energía. Posteriormente se fueron introduciendo los mecanismos paralelos, que se definen como aquellas configuraciones que presentan al menos dos cadenas cinemáticas, formando así una cadena de lazo cerrado, conectadas en un extremo a una base fija y al otro a una base móvil en donde se encuentra el efector final. A las máquinas herramienta que utilizan este tipo de mecanismos se les conoce como PKM por sus siglas en inglés, *Parallel Kinematic Machine*. Estas configuraciones han captado la atención de diseñadores y expertos debido a que proporcionan altas velocidades con una buena precisión en el posicionamiento y porque mantienen una alta rigidez con una menor masa en movimiento de los eslabones que lo conforman. Por otro lado, algunas de las desventajas más comunes en las PKM son que presentan un movimiento articular limitado y un espacio de trabajo pequeño en el que se pueden presentar singularidades, debido a las restricciones geométricas que se generan por la cantidad de cadenas cinemáticas, es por ello que, aún se encuentran en constante estudio para abatir estos problemas.

Son varios los aspectos a considerar en el diseño de una PKM, que toman relevancia para poder realizar el maquinado de una pieza con el acabado superficial esperado, como el correcto

---

dimensionamiento de la máquina, el análisis y diseño mecánico que permita soportar las fuerzas de corte, la fabricación y el ensamble con las mínimas variaciones posibles, la correcta selección de actuadores y sistema humano-máquina, la implementación de un control que realice el seguimiento de trayectoria y otros aspectos del proceso de diseño de una PKM. En este trabajo se lleva a cabo el diseño y simulación de algunos sistemas de control para una PKM, para esto se divide la investigación en los capítulos siguientes, al final del documento se concluye y se dan algunos puntos para trabajos futuros.

1. Antecedentes. Comienza con una introducción a las PKM, retomando desde su origen en los mecanismos paralelos, después se mencionan algunas de las aplicaciones y se da un panorama de los sistemas de control aplicados a las máquinas herramienta; se incluye una descripción de algunos esquemas de control y de la teoría aplicada a el análisis cinemático y dinámico.
2. Marco teórico. Inicia el capítulo con la teoría seleccionada para el análisis cinemático y dinámico, se incluye un modelo dinámico con fricción a utilizar en los esquemas de control y la teoría necesaria para determinar los coeficientes de fricción. Después se dan algunas características, el diagrama a bloques, la ley de control y la forma de sintonizar los controles de posición y seguimiento de trayectoria a simular. Se describe el indicador para la evaluación de desempeño conocido como valor RSME por sus siglas en inglés, *Root Mean Square Error*. También se mencionan las pruebas de caracterización de un motor a pasos; par de *holding* y par de *pull-in*.
3. Desarrollo. Se proponen los pasos de diseño de un sistema de control para PKM y se describe la configuración del mecanismo que se analiza. Se obtienen las ecuaciones de la cinemática inversa y directa, también del modelo dinámico con fricción; después se definen la posición y trayectoria deseada, se determinan los parámetros constantes del modelo dinámico y se sintonizan los sistemas de control. Se incluye la caracterización de un motor a pasos.
4. Pruebas y resultados. Simulación de las ecuaciones de movimiento y animación de la PKM en el software Wolfram Mathematica. Simulación en el Matlab/Simulink y evaluación de desempeño de los sistemas de control. Por último, se muestra la interfaz

---

gráfica desarrollada en LabVIEW, que incluye la simulación de todos los controles analizados.

5. Anexos y glosario. Se presentan los códigos y los diagramas a bloques de las simulaciones realizadas para las ecuaciones de movimiento y de los sistemas de control sintonizados. También se dan algunas definiciones que serán de utilidad para una mejor comprensión de este trabajo.

### ***DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA***

A través del tiempo se han propuesto etapas por las que el diseño de una PKM debería ser sometida, tales etapas se han identificado de (Escorcia et al., 2020), (Hernández et al., 2012), (Le A. Y. et al., 2014), (Sholanov, 2021), (Tosatti et al., 1998) y (Zhang, 2010). En resumen, estas etapas son:

- Definición de especificaciones técnicas
- Síntesis de tipo y dimensional.
- Análisis cinemático.
- Simulación para la detección de colisiones en el mecanizado.
- Optimización del diseño.
- Análisis de estabilidad, rigidez, dinámico y cinetostático.
- Sistema de control.
- Diseño de prototipos.
- Calibración.
- Evaluación de desempeño.
- Monitoreo y control.

En algunos casos, la complejidad que se genera al tener varias cadenas cinemáticas ha impuesto un gran reto a superar, como es el caso de los hexápodos, los cuales han sido ampliamente estudiados (Merlet, 2006), (Zhang, 2010); no obstante, en los últimos años se ha notado un mayor interés por estudiar configuraciones de lazo cerrado con diferentes mecanismos, más simples o híbridos (Serje & Pacheco, 2017). Se han realizado estudios profundizando en nuevas propuestas y se ha comprobado que se reduce la complejidad para su análisis con implementaciones de menos GDL (Grados de libertad), aún queda una gran variedad de configuraciones por investigar, así como identificar o desarrollar la metodología de diseño y teoría que mejor se adapte a cada caso.

En el desarrollo de un sistema de control para una PKM, los principales propósitos consisten en obtener una buena capacidad de posicionamiento y seguimiento de trayectoria del efector final, con el mínimo error posible (Elkady et al., 2008), a fin de obtener un buen acabado

---

superficial de la pieza de trabajo. Esto se logra a partir de una ley de control que tenga como variables de control los pares de torsión o fuerzas de entrada; en ese sentido, tener un modelo dinámico toma gran relevancia, ya que varios esquemas de control se basan en él. Al realizar un análisis cinemático y dinámico para una PKM se llega a expresiones complejas de analizar, que dificultan la implementación de un control en tiempo real. Contemplar en mayor medida la dinámica, requiere de un sistema de control no lineal más complejo y un equipo de cómputo que soporte un mayor procesamiento. Por otra parte, existen modelos dinámicos con algunas simplificaciones que permiten usar controles en tiempo real más simples y que consideran una estimación de los parámetros desconocidos, visto de esta forma, qué tanto se acerque el modelo a la dinámica real del sistema y qué esquema de control se use, dependerá de los objetivos de control que se tengan y de la complejidad de la dinámica del caso de estudio.

Realizar un análisis dinámico y aplicar un sistema de control no solo es de utilidad para mejorar el seguimiento de trayectorias, también son utilizados para seleccionar el actuador que proporcione el par de torsión o fuerza necesaria para realizar el maquinado de la forma deseada, incluso para tomar decisiones de forma oportuna en el proceso de diseño previo a la construcción de la máquina. Este trabajo se enfocará en el desarrollo de un análisis cinemático y dinámico, en el diseño y comparación de algunos sistemas de control para una PKM de 3 GDL con una configuración 3PRRR, la cual ha sido estudiada previamente (Téllez, 2018), (Yáñez et al., 2021) y (Yáñez et al., 2022); de esta configuración se resalta que tiene un espacio de trabajo regular, no presenta singularidades, tiene las características de ser un arreglo ortogonal, proporciona isotropía de fuerzas y su cinemática es desacoplada. Estas características hacen que se reduzca la complejidad del sistema para su análisis, así como las desventajas usuales de los mecanismos paralelos, sin afectar las propiedades por las que se caracterizan.

### ***JUSTIFICACIÓN***

Retomando lo antes dicho, en la continua mejora de las PKM, los sistemas de control toman relevancia, de manera que, desde el modelado hasta su implementación en simulación, se tiene la meta de obtener un esquema de control que logre cumplir con una tarea asignada con el mejor desempeño. En el caso de la configuración de la PKM en la que se centra este trabajo, aún no se han realizado investigaciones que tomen de manera conjunta todo lo que conlleva la

---

implementación de un control, Por tal motivo, se propone en este trabajo el diseño y análisis de una estrategia de control aplicando los pasos fundamentales de un sistema de control para mecanismos paralelos, en el que se incluirá la obtención de un modelo dinámico para robots de n GDL (Kelly et al., 2005), a fin de llevar a cabo la evaluación de desempeño de algunos esquemas de control.

## **OBJETIVOS**

### **General.**

- *Diseñar un sistema de control para una máquina herramienta de cinemática paralela de 3 GDL.*

### **Específicos.**

- *Definir los parámetros de desempeño y objetivos de control.*
- *Proponer un procedimiento para el diseño del sistema de control.*
- *Desarrollar un análisis cinemático de la PKM.*
- *Determinar el modelo dinámico de la PKM*
- *Desarrollar una interfaz gráfica para la simulación del sistema de control.*
- *Diseñar y simular diferentes sistemas de control.*
- *Comparar el desempeño de los sistemas de control a simular*

## **HIPÓTESIS**

Los sistemas de control que se encuentran en la literatura en su mayoría están orientados para manipuladores seriales, no obstante, en los últimos años se ha observado un aumento en las investigaciones que relacionan a las configuraciones paralelas, que se resumen en (Escorcía, 2022), de estos estudios se ha notado que se necesita información de la dinámica de la máquina para incorporarla al control, cuanto más se conozca sobre el comportamiento dinámico de una PKM, más fácil será idear técnicas de control que mejoren el rendimiento (Huang et al., 2002); en (Saied et al., 2021) y en (Wu et al., 2009) se menciona que las PKM con implementaciones de control que no contemplan la dinámica de la máquina, presentan errores en el seguimiento de trayectoria que van aumentando con la velocidad, aunque son lo suficientemente precisas con velocidades bajas. En el diseño de sistemas de control, modelar la dinámica no es el



---

principal problema, sino lograr que el modelo sea eficiente en el cálculo y de aplicación práctica (Zhao & Gao, 2009), sin perder de vista que el control debe tener una buena capacidad de posicionamiento y de seguimiento de trayectoria.

Para analizar el comportamiento y comparar el desempeño de controles de movimiento, una forma ideal es la simulación por computadora (Elkady et al., 2008), ya que se puede realizar sin la necesidad de una implementación física; en este sentido y tomando en cuenta lo antes mencionado, la hipótesis a comprobar es: en la evaluación de desempeño de sistemas de control a nivel de simulación, tomando como indicador que tanto se acercan o alejan los datos de la posición articular, de los datos de la posición deseada, resultará con un mejor desempeño el que esté diseñado para contemplar más elementos del modelo en su ley de control, aproximándose en mayor medida a la dinámica real del sistema.

# Capítulo 1

## 1 ANTECEDENTES

### 1.1 Máquinas herramienta de cinemática paralela.

El inicio de los mecanismos paralelos se remonta a 1928 con el invento de un robot esférico paralelo desarrollado por E. Gwinnett. Sin embargo, quienes fueron considerados como los pioneros fueron el Dr. Eric Gough en 1947 con el diseño del primer hexápodo octaédrico (Figura 1) llamado plataforma universal, D. Stewart en 1965 con el diseño de un simulador de aviones y Klaus Cappel en 1967 con un hexápodo aplicado como simulador de movimiento. El primer acercamiento en la industria fue en actividades de *pick and place* con el robot Delta; en la actualidad se tienen diversas configuraciones de mecanismos paralelos aplicados en corte láser, corte de agua, soldadura, manipuladores, maquinado, simuladores de vehículos, dispositivos médicos y microrrobótica; en (Pandilov & Dukovski, 2012), (Serje & Pacheco, 2017) y (Zhang, 2010), se menciona más a fondo el recorrido que han tenido los mecanismos paralelos a través del tiempo y algunas otras aplicaciones; se resalta su utilidad en las PKM, ya que permiten realizar maquinado con un buen acabado superficial y a mayor velocidad.



Figura 1. Plataforma Gough para prueba de neumáticos (Zhang, 2010).

Las PKM de fresado y en general las máquinas dedicadas a este proceso de manufactura, tienen como principal función generar una geometría deseada en diferentes materiales, por medio de una herramienta de corte. Al igual que las primeras aplicaciones de los mecanismos paralelos, las PKM tuvieron sus primeras implementaciones con configuraciones de 6 GDL, por mencionar algunas Variax de Giddings y Lewis, Hexaglide, HexaM de Toyoda, Okuma Cosmo Center y otras más (Escorcía et al, 2020), (Zhang, 2010), (Serje & Pacheco, 2017).



a)



b)

Figura 2. Fresadoras de 6 GDL. a) Variax, b) Okuma PM-600 (Serje & Pacheco, 2017).

Algunas PKM tienen en común que se basan en la plataforma Gough (Figura 1), que presentan la limitante de un espacio de trabajo pequeño, poca destreza y una geometría más compleja de analizar. Con configuraciones de menos grados de libertad se reducen estas limitantes y se mantienen las ventajas por las que se caracterizan. En la literatura se pueden encontrar investigaciones como el diseño mecatrónico de un manipulador de 3 GDL (Ruiz et al., 2022) o la topología y cinemática de un manipulador de 4 GDL (Gu et al., 2021); una de las implementaciones en PKM es la máquina Tricept de 3 GDL desarrollada por la empresa Neos para soldadura y fresado (Figura 3). En un estudio realizado por (Darvekar et al., 2021) se compara una PKM de 2 GDL y una máquina herramienta convencional para fresado con base en la rugosidad de la superficie ya maquinada (Figura 4), en los resultados que obtuvieron se muestra que la PKM lograba cumplir con el mecanizado esperado, así como la fresadora convencional, se destaca que la PKM no requería tener un mecanismo muy robusto para

cumplir con el maquinado, de manera similar, en (Zhang, 2010) se menciona un experimento realizado por Giddings y Lewis, donde se observó que la PKM tiene mejor precisión, rigidez y velocidad que una máquina convencional.



Figura 3. PKM Tricept. a) en fresado, b) en soldadura (Serje & Pacheco, 2017).



Figura 4. Experimento sobre capacidad de mecanizado. a) PKM de 2 GDL, b) CNC convencional vertical AGINI BMV 45T20 (Darvekar et al., 2021).

## 1.2 Sistemas de control en las PKM.

El análisis cinemático y dinámico de manipuladores paralelos tienen diferentes métodos para abordarlo, los cuales se mencionan en (Tsai, 1999) y (Staicu, 2019), principalmente se utiliza para el análisis cinemático el método de Denavit-Hartenberg y el método geométrico, en menor medida se utiliza el método numérico (Roudneshin et al., 2022) y el método vectorial

(Chen et al., 2021); para el análisis dinámico se utiliza la ecuación de Newton-Euler, la formulación de Lagrange y principio de trabajo virtual. Por otro lado, en los esquemas de control se pueden tener de: par calculado, variantes del control PID o sistemas de control con un mejor desempeño global como el control robusto, adaptativo y no lineal de retroalimentación; de estos últimos, contemplan una compensación para fenómenos como deformaciones, deflexión de los eslabones, vibraciones y algunos elementos más, con un conocimiento completo o parcial de la dinámica del sistema; estos controles compensan en general las no linealidades del sistema.

Algunos de los métodos para el análisis cinemático y dinámico aplicados a manipuladores paralelos se presentan en la Tabla 1 y Tabla 2; los esquemas de control más usados en las PKM, incluyendo algunas propuestas de control no lineal que han surgido en los últimos años, se mencionan en la Tabla 3 y Tabla 4. La información que se presenta en las tablas se recopiló de (Elkady et al., 2008), (Hernández & Altuzarra, 2012), (Huang et al., 2002), (Le et al., 2014), (Saied et al., 2021), (Stamper, 1997), (Tsai, 1999), (Wu et al., 2009) y (Zhao & Gao, 2009).

*Tabla 1 Métodos para el análisis dinámico de mecanismos paralelos.*

Dinámica	
Método	Descripción
Newton-Euler	El análisis se basa en la aplicación directa de las ecuaciones de Newton-Euler, contempla todas las fuerzas y momentos presentes en cada cuerpo del mecanismo; hay una versión simplificada para hacerlo más eficiente computacionalmente.
Formulación de Lagrange	Se basa en la energía cinética y potencial del mecanismo, elimina fuerzas y momentos desde el inicio, requiere un conjunto de coordenadas generalizadas y multiplicadores de Lagrange; es necesario realizar suposiciones geométricas y de distribución de masa para facilitar el modelado.
Modelo dinámico de enlace único	Cada cadena cinemática se modela de forma separada, ignorando en la dinámica la influencia de los demás enlaces; da como resultado un modelo desacoplado, que es aplicado a esquemas de control SISO. Este modelo considera el amortiguamiento del motor a diferencia de otros.
Principio de trabajo virtual	Produce ecuaciones que relacionan el desplazamiento virtual de las articulaciones accionadas con el desplazamiento virtual del efector final; las fuerzas y los momentos de restricción del sistema se eliminan de las ecuaciones de movimiento; es utilizado principalmente para el cálculo de la dinámica inversa de manipuladores.

*Tabla 2. Métodos para el análisis cinemático de mecanismos paralelos.*

Cinemática	
Método	Descripción
Denavit-Hartenberg	Es un procedimiento sistemático en el que se identifican juntas, se ubica el sistema de referencia fijo y se aplican sucesiones de transformaciones, limitado a rotaciones y traslaciones en los ejes X y Z, a fin de obtener la matriz de transformación del sistema del efector final respecto al sistema fijo, por cada cadena cinemática.
Sucesiones de transformaciones	Es similar al procedimiento de Denavit-Hartenberg con las diferencias de realizar el acomodo del sistema fijo y de los sistemas de referencia locales de las juntas, de la forma que convenga más. El método permite realizar las sucesiones de transformaciones en los tres ejes.
Método Geométrico	Consiste en encontrar las relaciones geométricas que hay desde el sistema de referencia fijo hasta el sistema móvil, por cada cadena cinemática. Este método es aplicado para obtener la cinemática inversa, puede que se tenga más de una posible solución.

*Tabla 3. Sistemas de control aplicados a PKM.*

Sistemas de control	
Control	Descripción
PID considerando cada cadena cinemática independiente	Ignora el comportamiento no lineal y acoplado de la máquina, es fácil de implementar y tiene un bajo procesamiento computacional en tiempo real. El error entre la posición muestreada de la junta y la deseada, se utiliza como retroalimentación para controlar el actuador asociado con cada junta.
PD desacoplado	Se basa en una ecuación de movimiento desacoplada para cada enlace y se linealiza alrededor de una condición de movimiento dada.
PD con referencia de posición y velocidad	Se basa en el error de posición y velocidad de cada actuador, los cuales se utilizan para calcular la fuerza o torque de control que lleve la articulación a la posición deseada.
PD con compensación de gravedad	Agrega un término de retroalimentación gravitacional al control PD. Este esquema se enfoca en obtener una ley de control que asegure la estabilidad cuando el efecto de gravedad es diferente de cero.
Par calculado	Utiliza un modelo dinámico de la máquina para estimar el vector de fuerza o par de torsión requerido para lograr la trayectoria deseada, el desempeño de este control depende de que tanto se acerca el modelo a la dinámica real del manipulador; ha resultado de utilidad para control en tiempo real. Este control calcula la dinámica en línea a partir de la velocidad y posición muestreada.

*Tabla 4. Sistemas de control aplicados a PKM (continuación).*

Sistemas de control	
Control	Descripción
Control de avance dinámico y de par calculado	Está compuesto de un control de lazo cerrado para el servosistema y un control dinámico que compensa la dinámica de la PKM. El control toma la dinámica no lineal, incluyendo perturbaciones, lo cual mejora el rendimiento y se tiene una mayor precisión de movimiento a velocidades más altas.
Control de aprendizaje iterativo	El manipulador realiza intentos repetidos de seguir una trayectoria, después de cada intento aplica al actuador una regla de aprendizaje con error de seguimiento, a fin de reducir cada vez más el error, este modelo es útil cuando no se tiene un modelo de la dinámica preciso. En la implementación del control se debe tomar en cuenta, el tiempo que requiere para realizar las repeticiones que reduzcan a un valor aceptable el error.
Controlador RISE	Es una estrategia de control no lineal de retroalimentación, se ha aplicado en controles de tiempo real, ha mostrado cumplir con la robustez contra incertidumbres, perturbaciones y no linealidades con un bajo conocimiento o incierto de la dinámica, hay algunas versiones de control RISE que agregan una parte adaptativa para mejorar el desempeño (Escorcía et al., 2020), (Escorcía et al., 2022).
Control de Modo Deslizante	Permite la convergencia de una variable deslizante, compuesta por los estados del sistema. Para así converger los estados a la superficie deslizante en un tiempo finito y permanecer sobre ella, permitiendo que la trayectoria de los estados converja a cero. En su ley de control agrega un término para compensar perturbaciones, incertidumbres y dinámica no modelada. Útil en velocidades bajas y altas.

Obtener un modelo dinámico preciso e identificar parámetros como holgura de juntas, variaciones geométricas y algunos otros parámetros, puede llegar a ser complicado; son pocos los que consideran la dinámica del actuador y los efectos de fricción como lo reporta (Saied et al., 2018), además, la dinámica de las PKM es no lineal y acoplada, por tales motivos, para la aplicación de algunos esquemas de control, resulta conveniente simplificar el modelo.

La formulación de Lagrange muestra una concordancia con la aplicación de las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler, las diferencias entre los dos resultados se deben a la falta de amortiguación en el modelo de Lagrange y a los diferentes supuestos sobre dónde se considera concentrada la masa de los eslabones que componen un mecanismo paralelo (Stamper, 1997);

la formulación de Lagrange proporciona un modelo dinámico aplicable a un esquema de control de par calculado. En las tablas anteriores se observa que hay una cierta relación entre el sistema de control que se utilice y la formulación que se aplica para el modelo dinámico, por ejemplo, si no se tuviera un modelo dinámico, un control aplicable sería el de aprendizaje iterativo, al contrario que si se tuviera un modelo dinámico que incluya comportamiento no lineal del sistema, se aplicaría un control de avance dinámico con par calculado.

En (Darvekar et al., 2021) y (Pandilov & Dukovski, 2012) se menciona que se han utilizado sistemas de control basados en sistemas CNC (*Computer Numerical Control*) comerciales para máquinas con arquitectura serial, como la serie sueca Tricept y el Sprint Z3 de DS Technology Company, las cuales utilizan sistemas Siemens 840D o Siemens 840Di como unidad NC (*Numerical Control*), esto ha generado que se tenga menor apertura, flexibilidad, confiabilidad y no cumpla con el procesamiento computacional requerido para la implementación de sistemas de control no lineal. En la actualidad se encuentran en desarrollo sistemas humano-máquina que se adapten mejor a las PKM, como la implementación de (Darvekar et al., 2021), con un sistema de control desarrollado en LabVIEW o como se reporta en (Zhuang et al., 2011) con Turbo PMAC aplicando un control basado en modelos, el cual tiene una alta precisión, maximiza el rendimiento y permite manejar velocidades más altas que con los sistemas aplicados usualmente.

Las máquinas herramienta de configuración paralela han mostrado su utilidad en diversas aplicaciones, aún quedan varios aspectos del diseño de una PKM en que profundizar; las investigaciones e implementaciones que se han mencionado, resaltan que para el cumplimiento de una tarea específica, se tiene que realizar la adecuada selección y diseño, del mecanismo y de los sistemas que componen la máquina herramienta, como es el caso de la interfaz humano-máquina y el sistema de control, de este se resalta que no solo es el desarrollo de la ley de control, sino de forma conjunta realizar un análisis cinemático y dinámico que lleven a la obtención de un modelo dinámico que utilice el control para tener un mejor desempeño en tiempo real. En los siguientes capítulos, se toma en cuenta lo antes mencionado para utilizar la teoría que mejor se adecue a la configuración de la máquina herramienta en la que se centra este trabajo.



# Capítulo 2

## 2 MARCO TEÓRICO

### 2.1 Análisis cinemático.

Un análisis cinemático se enfoca en el estudio del movimiento de los mecanismos, delimitado por las restricciones geométricas de los eslabones y juntas, sin contemplar fuerzas y pares de torsión. El análisis se puede abordar de dos formas: por la cinemática directa, en la cual se parte de conocer las variables articulares para encontrar el conjunto de posibles orientaciones, posiciones, velocidades y aceleraciones del efector final; y por la cinemática inversa, en la que se tiene una orientación, posición y sus derivadas del efector final para así obtener las variables articulares.

#### 2.1.1 Cinemática directa.

En la cinemática directa por sucesiones de transformaciones, antes de aplicar la matriz de transformación homogénea, es conveniente mencionar los siguientes aspectos: primero, se requiere de un sistema de referencia fijo, del cual se irán realizando las transformaciones hasta llegar al sistema de referencia móvil del efector final; segundo, la nomenclatura a utilizar en las transformaciones será  ${}^A T_B$  que indica una transformación (T) de B respecto de A; y tercero, se requiere utilizar coordenadas homogéneas compuestas como se muestra en las expresiones (2.1) y (2.2), debido a que la matriz de transformación es de dimensión 4x4 (Tsai, 1999). Ahora bien, la matriz de transformación homogénea se aplica para llevar un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de referencia a otro, como se muestra en la Figura 5.

Vectores  ${}^A \mathbf{P}$  y  ${}^B \mathbf{P}$  que se observan en la Figura 5.

$${}^A \mathbf{P} = [\rho^* {}^A P_x, \rho^* {}^A P_y, \rho^* {}^A P_z, \rho]^T \quad (2.1)$$

$${}^B \mathbf{P} = [\rho^* {}^B P_x, \rho^* {}^B P_y, \rho^* {}^B P_z, \rho]^T \quad (2.2)$$

La ecuación para calcular el vector  ${}^A \mathbf{P}$  es:

$${}^A \mathbf{P} = {}^A T_B * {}^B \mathbf{P} \quad (2.3)$$

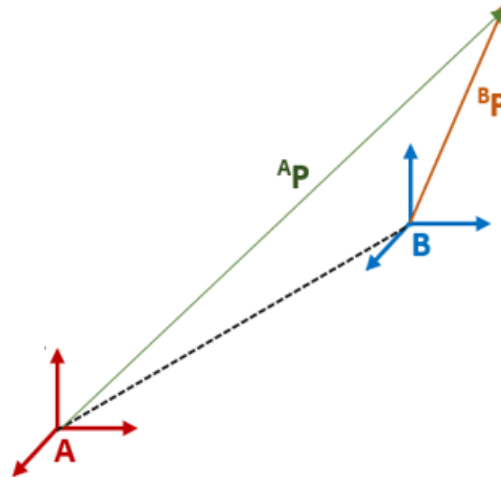


Figura 5. Diagrama de un vector  $P$  en referencia a un sistema  $A$  y a un sistema  $B$ .

La matriz de transformación homogénea  ${}^A T_B$  de forma general está dada por las submatrices:

$$\begin{bmatrix} {}^A R_B(3 \times 3) & {}^A \mathbf{q}(3 \times 1) \\ \gamma(1 \times 3) & \rho(1 \times 1) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Donde:

${}^A R_B$ : Es la orientación de un marco de referencia  $B$  respecto a un marco de referencia  $A$ ,

${}^A \mathbf{q}$ : denota la posición del origen del sistema  $B$  respecto al sistema  $A$ ,

$\gamma$ : es la transformación de perspectiva y

$\rho$ : es el factor de escala.

El análisis solo requiere rotaciones simples y traslaciones puras, de este modo siempre la submatriz de perspectiva  $\gamma$  es nula y el factor de escala  $\rho$  es igual a 1, considerando esto, las matrices de rotación y de traslación en los 3 ejes de un sistema  $B$  respecto a un sistema  $A$ , son la siguientes:

$${}^A T_B(rx, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$${}^A T_B(ry, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$${}^A T_B(rz, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$${}^A T_B(tx, px) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & px \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$${}^A T_B(ty, py) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & py \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$${}^A T_B(tz, pz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

En la composición de matrices es importante tener en cuenta que la multiplicación no es conmutativa, de tal modo que *al realizar rotaciones y traslaciones en coordenadas del marco de referencia fijo se premultiplica*. En la Figura 6, se observa que se tienen varios sistemas de referencia móvil y uno solo fijo, una forma de llegar a la matriz de transformación  ${}^0 T_3$  es con la ecuación (2.11), de manera similar se realiza la sucesión de transformaciones por cada rama de un mecanismo paralelo, desde un sistema fijo hasta el sistema móvil ubicado en el efector final.

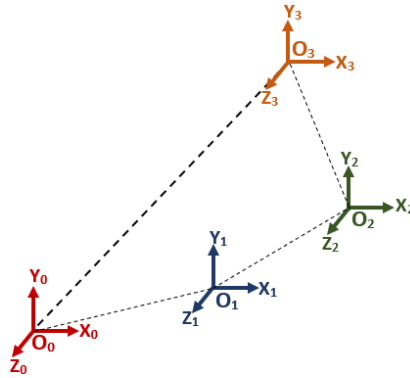


Figura 6. Sistemas de referencia locales por los que pasa  $O_3$  para obtener  ${}^0T_3$ .

La matriz de transformación del sistema  $O_3$  respecto al sistema  $O_0$  está dada por la siguiente ecuación:

$${}^0T_3 = {}^0T_1 * {}^1T_2 * {}^2T_3 \quad (2.11)$$

### 2.1.2 Cinemática inversa.

El método geométrico para el cálculo de la cinemática inversa consiste en encontrar las suficientes relaciones geométricas, que permitan obtener las expresiones de las variables articulares en términos de la posición y orientación del efector final; usualmente para el análisis se utilizan propiedades trigonométricas, ley de cosenos, ley de senos y sumas de ángulos de geometrías triangulares que se forman con las juntas. Para ejemplificar, se aplica el método a un mecanismo de 2 GDL como se muestra en la Figura 7.

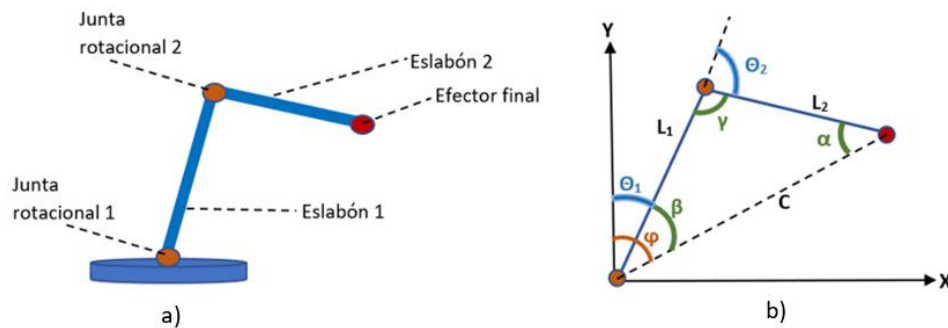


Figura 7. a) Mecanismo de 2 GDL, b) geometría triangular y ángulos que se forman con las juntas y eslabones.

De analizar la geometría de la Figura 7 se obtienen las ecuaciones para el cálculo de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

$$\theta_1 = \varphi - \beta \quad (2.12)$$

$$\theta_2 = \pi - \gamma \quad (2.13)$$

Para el desarrollo de las ecuaciones se considera  $L_1$  como la longitud del eslabón 1,  $L_2$  como la longitud del eslabón 2 y  $C$  está dada por la siguiente expresión:

$$C = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.14)$$

Aplicando la ley de cosenos y propiedades trigonométricas se obtiene  $\gamma$ ,  $\beta$  y  $\varphi$ .

$$\varphi = \arctan \left[ \frac{x}{y} \right] \quad (2.15)$$

$$\beta = \arccos \left[ \frac{L_2^2 - L_1^2 - (x^2 + y^2)}{-2L_1 \sqrt{x^2 + y^2}} \right] \quad (2.16)$$

$$\gamma = \arccos \left[ \frac{(x^2 + y^2) - L_2^2 - L_1^2}{-2L_1 L_2} \right] \quad (2.17)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.15) y (2.16) en (2.12), y (2.17) en (2.13) se obtienen las siguientes ecuaciones de las variables articulares  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

$$\theta_1 = \arctan \left[ \frac{x}{y} \right] - \arccos \left[ -\frac{L_2^2 - L_1^2 - x^2 - y^2}{2L_1 \sqrt{x^2 + y^2}} \right] \quad (2.18)$$

$$\theta_2 = \pi - \arccos \left[ -\frac{x^2 + y^2 - L_2^2 - L_1^2}{2L_1 L_2} \right] \quad (2.19)$$

## 2.2 Análisis Dinámico.

El análisis dinámico permite llegar a un modelo matemático que relaciona el movimiento con las fuerzas y pares de torsión aplicados, análogamente al análisis cinemático, se aborda de dos formas: por la dinámica directa, que consiste en un conjunto de funciones en términos de las fuerzas o pares de torsión aplicados en las juntas actuadas, para el cálculo del movimiento del efector final; y por la dinámica inversa, la cual parte de conocer una trayectoria del efector final para llegar a un conjunto de funciones que permitan calcular las fuerzas o pares de torsión necesarios para generar el movimiento (Tsai, 1999) (Elkady et al., 2008).

### 2.2.1 *Formulación de Lagrange.*

Para generar un modelo dinámico que se pueda aplicar a un esquema de control se realiza el análisis por la dinámica inversa, una forma es usando la formulación de Lagrange, esta elimina todas las fuerzas de reacción no deseadas y momentos desde el inicio; tomar en cuenta que se deben introducir en la ecuación multiplicadores de Lagrange, ya que se llega a ecuaciones explícitas de un conjunto de coordenadas generalizadas independientes, también requiere ecuaciones de restricción derivadas de la cinemática del mecanismo, para tener el mismo número de ecuaciones y de incógnitas, debido a que está escrita en términos de un conjunto de coordenadas redundantes (Wu et al., 2009).

La función de Lagrange es:

$$L = T - V \quad (2.20)$$

Compuesta por:

$$T = T_p + \sum_{i=1}^k (T_{i1} + T_{i2}) \quad (2.21)$$

$$V = V_p + \sum_{i=1}^k (V_{i1} + V_{i2}) \quad (2.22)$$

Para  $i=1$  a  $n$ , donde:

$i$ : es el índice de la cadena cinemática,

$T_{i1}$ : es la energía cinética del cuerpo del primer eslabón, de la  $i$ -ésima cadena cinemática,

$T_{i2}$ : es la energía potencial del cuerpo del segundo eslabón, de la  $i$ -ésima cadena cinemática,

$p$ : indica que es la energía potencial o cinética del cuerpo del efector final,

$T_p$ : es la energía cinética del cuerpo del efector final y

$V_p$ : es la energía potencial del cuerpo del efector final.

La formulación de Lagrange está dada por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) = Q_j + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j} \quad (2.23)$$

Para  $j = 1$  a  $n$ , donde:

$q_j$ : es la coordenada generalizada,

$j$ : es el índice de la coordenada generalizada,

$i$ : es el índice de la restricción,

$k$ : es el número de ecuaciones restricción,

$\Gamma_i$ : es la ecuación de restricción,

$\lambda_i$ : el multiplicador Lagrange,

$L$ : es la función de Lagrange,

$T$ : es la energía cinética total del manipulador,

$V$ : es la energía potencial total del manipulador y

$Q_j$ : es la fuerza o el par de torsión del actuador.

Las ecuaciones a las que se llegan aplicando la formulación se pueden dividir en dos conjuntos, del primero se obtiene los multiplicadores de Lagrange y del segundo se obtiene las fuerzas o pares de torsión de los actuadores. Primero se debe obtener los multiplicadores de Lagrange, ya que se ocupan en el segundo conjunto de ecuaciones.

### 2.2.2 Modelo dinámico con fricción.

Las ecuaciones que se obtienen de la formulación de Lagrange, se llevan a la forma de la expresión (2.24); debido a que presenta linealidad en los parámetros dinámicos y las matrices que componen el modelo tiene propiedades de interés, como la matriz de inercia que es simétrica positiva definida y se relaciona con la energía cinética del sistema; estas propiedades resultan de utilidad para el estudio de estabilidad, diseño y análisis de los sistemas de control para manipuladores; si se desea conocer más sobre este modelo y sus propiedades se puede consultar (Tsai, 1999) y (Kelly et al., 2005).

Modelo dinámico para manipuladores de n GDL.

$$F = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \quad (2.24)$$

Donde:

$\mathbf{q}$ : es el vector de desplazamiento de las articulaciones,

$\dot{\mathbf{q}}$ : es el vector de velocidades de las articulaciones,

$\ddot{\mathbf{q}}$ : es el vector de aceleraciones de las articulaciones,

$M(\mathbf{q})$ : es la matriz de inercia,

$G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ : es la matriz centrípeta y de Coriolis,

$\mathbf{g}(\mathbf{q})$ : es el vector de fuerzas gravitacionales y

$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$ : es el vector de fuerzas de fricción.

Del modelo dinámico se puede obtener constantes que son de utilidad en el diseño de controles, para los esquemas que se estudiarán en este trabajo, solo es necesario conocer la constante  $k_g$ , que está dada por la siguiente expresión.

$$k_g \geq n \left[ \max_{i,j,q} \left| \frac{\partial \mathbf{g}_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right] \quad (2.25)$$

Al modelo dinámico se le agrega la fuerza de fricción presente en las juntas (2.26), donde el coeficiente  $Fm_1$  corresponde a la fricción viscosas y  $Fm_2$  a la fricción de Coulomb, los cuales son matrices de n x n diagonales definidas positivas (Kelly et al., 2005).

Modelo de fricción.

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = Fm_1\dot{\mathbf{q}} + Fm_2\text{Sign}(\dot{\mathbf{q}}) \quad (2.26)$$

Donde:

$$\text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \text{sign}(\dot{q}_1) \\ \text{sign}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \text{sign}(\dot{q}_n) \end{bmatrix}$$



Tomar en cuenta que  $\text{sign}(x)$  es la función signo dada por:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

### 2.2.3 Coeficientes de fricción de juntas prismáticas.

En las juntas prismáticas de tornillo sin fin, una forma de calcular el coeficiente de fricción es con la expresión (2.27) que se presenta en (Budynas & Nisbett, 2012).

Coeficiente de fricción.

$$f = \begin{cases} 0.15 & V_s = 0 \\ 0.124e^{(-0.074V_s^{0.645})} & 0 < V_s \leq 10 \text{ ft} / \text{min} \\ 0.103e^{(-0.11V_s^{0.45})} + 0.012 & V_s > 10 \text{ ft} / \text{min} \end{cases} \quad (2.27)$$

Donde la velocidad de deslizamiento  $V_s$  es:

$$V_s = \frac{\pi n_w d_m}{12 \cos(\lambda)} \quad (2.28)$$

Donde:

$\lambda$ : es el ángulo de avance del diámetro medio del sinfín,

$n_w$ : es la velocidad rotativa del sinfín y

$d_m$ : es el diámetro medio del sinfín.

### 2.3 Sistemas de control.

En el diseño de sistemas de control de manipuladores, como se ha mencionado, se busca calcular el conjunto de fuerzas o pares de torsión a partir de una ley de control que permita cumplir con una tarea asignada; el diseño se puede abordar por el objetivo de control de seguimiento de trayectorias o por el de posicionamiento puro; en esta investigación se analizarán los dos, con diferentes esquemas de control que consideren en mayor o menor medida la dinámica del sistema. Los controles que se presentan ya han sido estudiados por (Kelly et al., 2005), donde se puede encontrar el análisis de estabilidad y más información de

cada esquema. Antes de iniciar con la descripción de los controles, es conveniente mencionar que en todos los casos se considera ideales los actuadores y la mayoría presentan los siguientes elementos.

1. Matriz de ganancia proporcional  $K_p$  y matriz de ganancia derivativa  $K_v$ .
2. Posición articular deseada  $\mathbf{q}_d$ , velocidad articular deseada  $\dot{\mathbf{q}}_d$  y aceleración articular deseada  $\ddot{\mathbf{q}}_d$
3. Posición articular  $\mathbf{q}$ , velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}}$  y aceleración articular  $\ddot{\mathbf{q}}$  (se resalta que la posición articulares y sus derivadas, se representan igual que las variables generalizadas del modelo dinámico)
4. Error de posición  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$
5. Error de velocidad  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}$
6. Error de aceleración  $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \ddot{\mathbf{q}}_d - \ddot{\mathbf{q}}$
7. Fuerza o par de torsión aplicado a los actuadores  $\boldsymbol{\tau}$

Las acciones de control presentes en la ley de control usualmente son: la proporcional, la cual es proporcional al error, donde su comportamiento en el transitorio y en estado permanente depende de la ganancia  $K_p$ , si es mayor la ganancia se reduce el error en estado permanente, pero dependiendo del sistema se vuelve inestable si no se sintoniza correctamente; por otra parte, la acción diferencial es proporcional a la derivada del error y depende de la ganancia  $K_v$ , en estado permanente esta acción no influye, debido a que se vuelve cero la derivada del error, pero si mejora el comportamiento del transitorio; por último, la acción integral es proporcional a la integral de error y depende de la ganancia  $K_i$ , mejora el estado permanente llevando el error a cero. Aplicar una o más acciones de control depende de cual sea el objetivo de control, en los controles que se presentan a continuación, la mayoría solo tienen la parte proporcional y derivativa, debido a que proporciona un equilibrio entre el comportamiento del transitorio y

estado permanente. Lo antes mencionado y más información sobre las acciones de control se puede consultar en (Ogata, 2003).

#### 2.4 Control de posición.

Se parte de una posición articular deseada  $\mathbf{q}_d$  que se considera constante, para determinar una función  $\boldsymbol{\tau}$ , de tal modo que la posición articular  $\mathbf{q}(t)$  llegue asintóticamente a la posición deseada  $\mathbf{q}_d$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d \quad (2.29)$$

Para el cumplimiento de la expresión (2.29), también se tiene que cumplir que el error de posición y la velocidad articular tiendan a cero.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = 0 \quad (2.30)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) = 0 \quad (2.31)$$

Los controles de posicionamiento tienen como único equilibrio el origen de los estados de lazo cerrado, dado por la expresión (2.32).

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^T \quad (2.32)$$

##### 2.4.1 Control PD.

De los esquemas de control de retroalimentación, este es uno de los más simples; en la sintonización, las matrices  $K_p$  y  $K_v$  solo tienen que cumplir ser simétricas definidas positivas y lo suficientemente grandes, para asegurar que el origen de los estados de lazo cerrado sea asintóticamente estables de forma global, esto cuando el efecto de gravedad en el sistema dinámico es igual a cero  $\mathbf{g}(\mathbf{q})=0$ , en el caso contrario solo se asegura acotamiento del error de posición ( $\tilde{\mathbf{q}}$ ) y de la velocidad articular ( $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ ), siempre y cuando  $K_p > 0$ .

Ley de control.

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (2.33)$$

Diagrama a bloques del sistema de lazo cerrado.

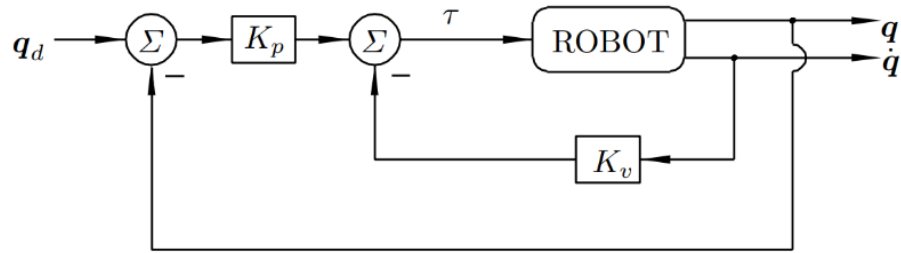


Figura 8. Control Proporcional con retroalimentación de velocidad (Kelly et al., 2005).

#### 2.4.2 Control PD con compensación precalculada de gravedad.

Esta versión del control PD con compensación cambia  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  por  $\mathbf{g}(\mathbf{q}_d)$  (Siciliano et al., 2010), de esta manera se puede realizar el cálculo fuera de línea, mejorando el rendimiento en tiempo real. Al igual que el controlador anterior, para asegurar que el origen de los estados sea asintóticamente estable de forma global, las matrices de diseño  $\mathbf{K}_v$  y  $\mathbf{K}_p$  deben ser simétricas positivas definidas, en este caso también se tiene que cumplir la condición de la expresión (2.34), tomando en cuenta que  $k_g$  es una constante que se obtiene del modelo dinámico.

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_p\} > k_g \quad (2.34)$$

Ley de control.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \quad (2.35)$$

Diagrama a bloques del sistema de lazo cerrado.

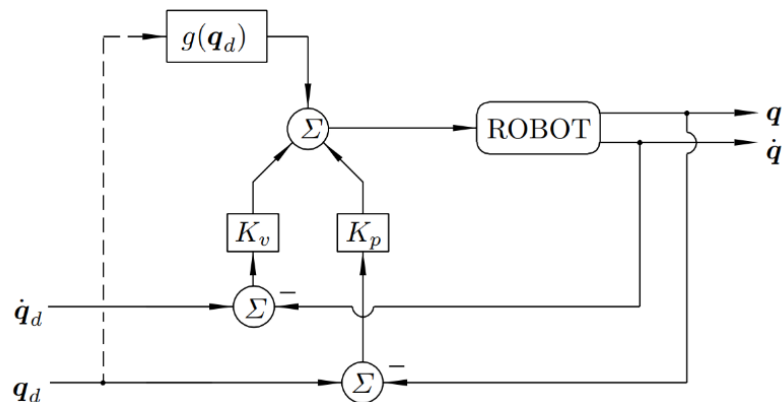


Figura 9. Control PD con compensación precalculada de gravedad (Kelly et al., 2005).

### 2.4.3 Control PID.

El control PID agrega una parte integral (I) a el PD, de tal manera que es utilizado como otra alternativa cuando el efecto de gravedad  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  es diferente de cero; es de los más usados en manipuladores (Lewis et al., 2004), pero se debe tomar en cuenta que su sintonización no es tan simple como la de los anteriores. Para este caso las matrices de diseño  $K_p$ ,  $K_v$  y  $K_i$  tienen que ser simétricas definidas positivas y cumplir con las desigualdades (2.36), (2.37) y (2.38); también para que el error de posición tienda a cero, las matrices  $K_p$ ,  $K_v$  tienen que ser lo suficientemente grandes y la matriz  $K_i$  tiene que ser lo suficientemente pequeña. El origen de los estados es asintóticamente estable de forma local y es global cuando el efecto generado por la matriz centrípeta y de Coriolis en el sistema dinámico es igual a cero  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ .

$$\lambda_{\max}\{k_i\} \geq \lambda_{\min}\{k_i\} > 0 \quad (2.36)$$

$$\lambda_{\max}\{k_p\} \geq \lambda_{\min}\{K_p\} > k_g \quad (2.37)$$

$$\lambda_{\max}\{K_v\} \geq \lambda_{\min}\{K_v\} > \frac{\lambda_{\max}\{K_i\}}{\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g} * \frac{\lambda_{\max}^2\{M(\mathbf{q})\}}{\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}} \quad (2.38)$$

Ley de control.

$$\tau = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_i \int_0^t \tilde{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma \quad (2.39)$$

Diagrama a bloques del sistema de lazo cerrado.

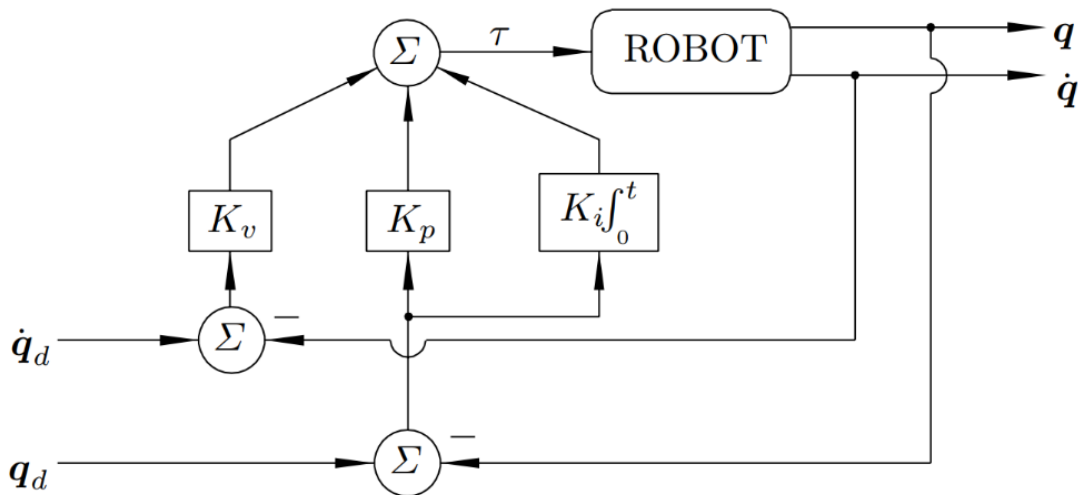


Figura 10. Control PID (Kelly et al., 2005).

## 2.5 Control de movimiento.

En el control de seguimiento de trayectorias, dado un conjunto de funciones acotadas de la posición ( $\mathbf{q}_d$ ), velocidad ( $\dot{\mathbf{q}}_d$ ) y aceleración ( $\ddot{\mathbf{q}}_d$ ) deseadas, se pretende obtener una ley de control con la cual se calcule el vector de fuerzas o pares de torsión ( $\boldsymbol{\tau}$ ), de tal forma que la posición ( $\mathbf{q}$ ) sigan la posición deseada ( $\mathbf{q}_d$ ); como en este caso  $\mathbf{q}_d$  cambia en el tiempo, para el cumplimiento del objetivo de control se debe lograr cumplir las expresión (2.40) y la (2.41). Para los controles que se presentan a continuación se requiere conocer el modelo dinámico del sistema, debido a que las matrices que lo componen se utilizan en la ley de control.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t) \quad (2.40)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) = \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (2.41)$$

Los controles de seguimiento de trayectoria que se presentan tienen como único equilibrio, el origen de los estados de la siguiente expresión.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \end{bmatrix}^T \quad (2.42)$$

### 2.5.1 Control PD con compensación.

Esta versión del control PD para seguimiento de trayectoria es un poco más compleja, se agrega una matriz no singular dado por la expresión (2.44); aunque, continúa siendo de sintonización trivial, ya que la matriz antes mencionada está formada por  $K_p$  y  $K_v$ , basta con proponer matrices de diseño simétricas definidas positivas, para asegurar que el origen de los estados es asintóticamente estable de forma global.

Ley de control.

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + M(\mathbf{q})[\ddot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] + c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})[\dot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2.43)$$

Donde  $\Lambda$  es.

$$\Lambda = K_v^{-1} K_p \quad (2.44)$$



Diagrama a bloques de lazo cerrado.

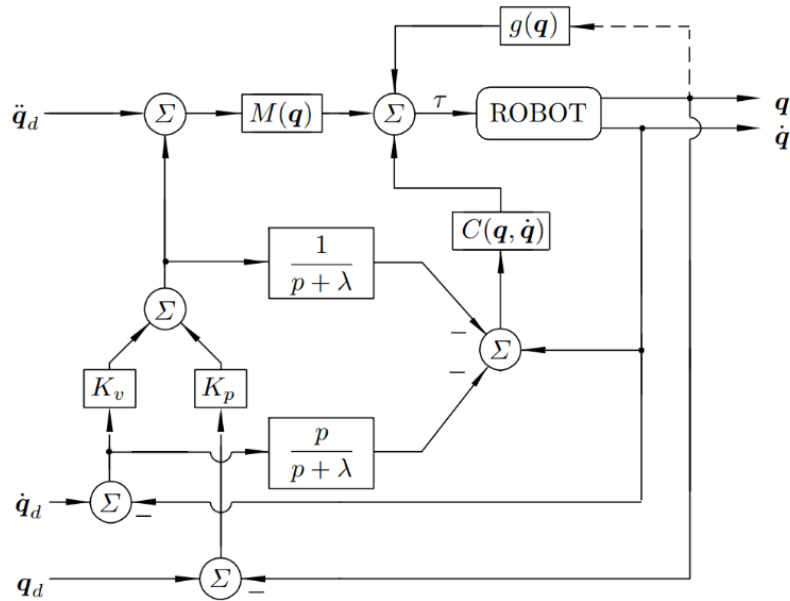


Figura 12. Control de Par-Calculado+ (Kelly et al., 2005).

Ecuación del error.

$$\ddot{\mathbf{q}} + K_v \dot{\mathbf{q}} + K_p \mathbf{q} = 0 \quad (2.47)$$

Frecuencia natural del sistema.

$$\omega_n = \sqrt{K_p} \quad (2.48)$$

Constante de amortiguamiento.

$$\xi = \frac{K_v}{2\sqrt{K_p}} \quad (2.49)$$

Usualmente para los sistemas robóticos se busca tener una respuesta no oscilatoria más rápida, por lo cual la constante de amortiguamiento se iguala a 1, para así tener una respuesta críticamente amortiguada, se sustituye  $\xi = 1$  en la ecuación (2.49), obteniendo la siguiente relación de  $K_v$  y  $K_p$ .

$$K_v = 2\sqrt{K_p} \quad (2.50)$$

Las matrices  $K_v$  y  $K_p$  dadas por las expresiones (2.51) y (2.52) tienen que ser simétricas positivas definidas; las matrices de diseño se proponen en términos de la frecuencia natural. Si se realiza la sintonización de esta forma, el origen de los estados es asintóticamente estable de forma global para cualquier condición inicial de los estados.



$$K_p = \text{diag}\{\omega_1^2, \dots, \omega_n^2\} \quad (2.51)$$

$$K_v = \text{diag}\{2\omega_1, \dots, 2\omega_n\} \quad (2.52)$$

### 2.6 Error medio de raíz cuadrada (RMSE).

Una forma de evaluar desempeño de sistemas de control, es mediante el error medio de raíz cuadrada (RMSE); mide el error que hay entre los conjuntos de datos de la posición articular y de la posición articular deseada, el valor RMSE está dado por la siguiente expresión.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum E_{xyz}^2}{n}} \quad (2.53)$$

Donde n es el número de muestras y  $E_{xyz}$  está dado por la expresión (2.54) que se componen de los errores de posición  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$ .

$$E_{xyz} = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2} \quad (2.54)$$

### 2.7 Par de holding y par de pull – in de un motor.

Si un motor a pasos se utiliza para cambiar la posición angular de su eje en una distancia angular de varios pasos, entonces se requiere conocer el par que el motor puede producir, esto mientras está acelerando, desacelerando o girando a velocidad constante. El motor debe de producir el suficiente par para mover la carga y acelerarla hasta su velocidad máxima. Dicha información del comportamiento del motor se muestra generalmente en gráficas que describen las características dinámicas del motor.

En un motor a pasos las gráficas de características dinámicas que más importancia tienen, son las gráficas de *pull-in* y del par de *holding* (Tejeda, 2010) (Kenjo & Sugawara, 1994), porque tales gráficas proporcionan información acerca de cuál es la carga máxima a la cual puede moverse el motor a determinada velocidad y corriente. Con esta información de las pruebas se puede abordar el diseño de los sistemas de control, tomando como parámetro de diseño el par máximo que proporciona un motor o proponer un desempeño del sistema control, para así identificar el motor que logre cumplir con el par requerido.

**Par de *holding*.** Es el par máximo que el motor puede entregar sin que el rotor se desvíe de su posición de equilibrio. El par *holding* está dado por la siguiente expresión.

$$\tau_n = MgR \quad (2.55)$$

Donde:

M es la masa de la carga,

g es la aceleración de la gravedad (9.78 m/s) y

R es el radio de la polea.

**Par de *pull-in*.** Es el par máximo que entrega el motor tratando de girar, cuando se mantiene en equilibrio por la carga que soporta.

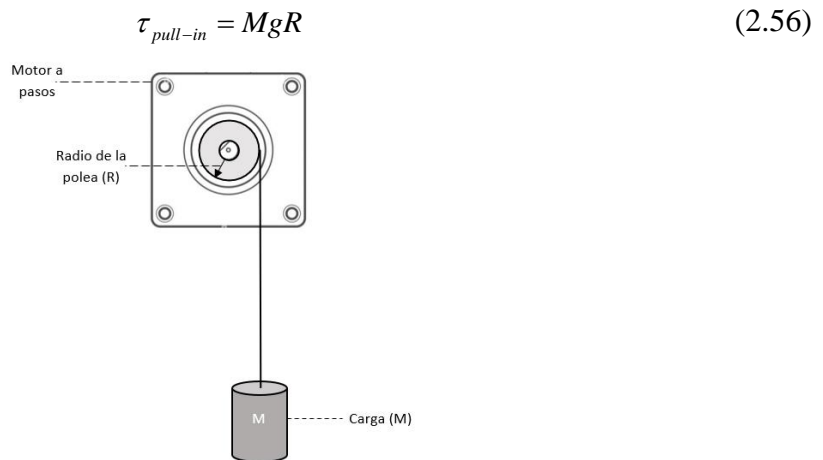


Figura 13. Esquema general para la prueba de par *holding* y par *pull – in*.

La teoría presentada en este capítulo abarcó un análisis cinemático y dinámico, el modelo con fricción para robos de n GDL, algunos esquemas de control de posición y de movimiento, la determinación de coeficientes de fricción, el valor RMSE y la caracterización de un motor; Lo cual se utiliza en el siguiente capítulo bajo una serie de pasos que culminan con la evaluación de desempeño de los sistemas de control, por tal motivo, se procuró desarrollar y encaminar la teoría, a la PKM en la que se centra este trabajo.

# Capítulo 3

## 3 DESARROLLO

### 3.1 Pasos en el diseño de un sistema de control.

El principal motivo de seguir un proceso de diseño en las PKM es lograr generar de forma ordenada, efectiva y rápida; una máquina de utilidad, segura, eficiente y práctica para una tarea determinada; por tal motivo, se retoma el proceso de diseño mencionado al inicio de la descripción del problema, esta investigación se enfoca en el análisis cinemático y dinámico, en el sistema de control y en la evaluación de desempeño de algunos esquemas de control. Para esto se proponen los pasos que se muestran en la Figura 14, que se agrupan en un parte conceptual, en donde se define los objetivos de control y parámetros de desempeño; y en la parte de diseño de detalle, en la cual se diseña y valida que el sistema de control cumpla con el desempeño deseado, así como que las ecuaciones del análisis cinemático realicen el movimiento delimitado por el espacio de trabajo.

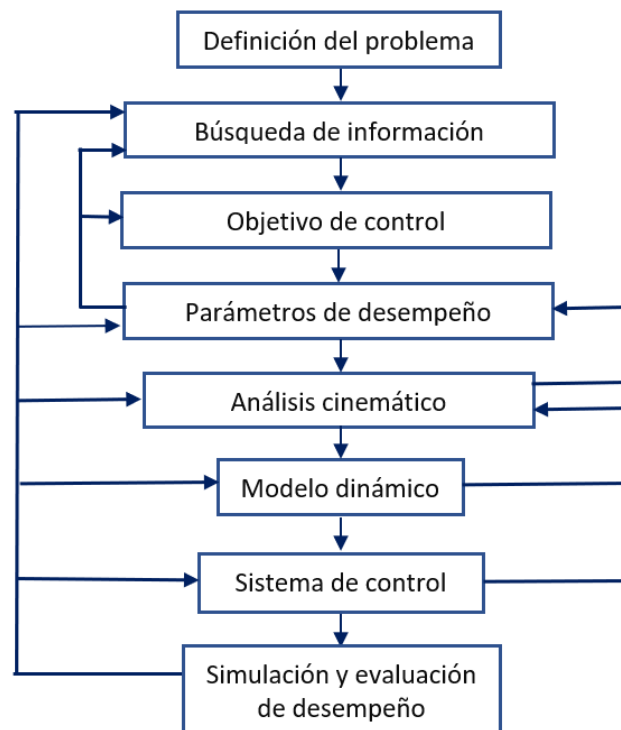


Figura 14. Pasos propuestos en el diseño de un sistema de control para una PKM.

### 3.2 Configuración de la PKM en estudio.

La PKM con configuración 3PRRR (Figura 15), está formada por una plataforma móvil conectada a una base fija por medio de tres cadenas cinemáticas, que tienen una articulación prismática y tres articulaciones de revolución, de tal forma que mantienen constante la orientación de la plataforma móvil en todo el espacio de trabajo. De esta configuración se tienen diferentes formas de ensamble, de las cuales se destaca que una escala macro del diseño realizado en la micromecánica no afecta las propiedades de la máquina; esta configuración también sobresale por las siguientes propiedades que la caracterizan (Yáñez, 2014), (Yáñez, 2012).

Arreglo ortogonal: El movimiento de la herramienta está linealmente relacionado con el movimiento de los tres ejes accionados, los cuales son ortogonales.

Desacoplamiento cinemático: Por cada actuador se puede modificar un solo parámetro de posición.

Isotropía de fuerzas: Es la capacidad del efector final de la máquina de proporcionar la misma fuerza en todas direcciones de su espacio de trabajo.

Espacio de trabajo regular: No presenta singularidades en el espacio de trabajo que está delimitado por la intersección del movimiento que permite cada cadena cinemática.

La propiedad de desacoplamiento cinemático reduce la complejidad del análisis para la obtención de un modelo dinámico. De esta configuración se contemplan los aspectos de la Tabla 5, obtenidos del diseño mecánico realizado por (Téllez, 2018), para el desarrollo del análisis cinemático y dinámico, así como para los sistemas de control.

Tabla 5. Especificaciones de la PKM con configuración 3PRRR (Téllez, 2018).

Especificaciones
Espacio de trabajo de 25x25x25 [cm]
Resolución de 25 [μm] con paso completo
Longitud de los eslabones. $L_1 = L_2 = 23$ [cm] y $L_3 = 9.5$ [cm]

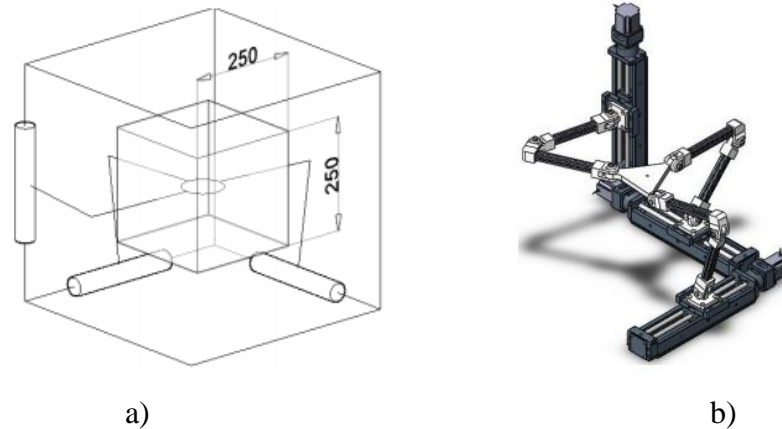


Figura 15. A) Configuración 3PRRR. b) Ensamble de la PKM 3PRRR (Téllez, 2018).

3.3 Análisis cinemático.

Se inicia por definir los parámetros constantes, identificar las variables articulares por cada cadena cinemática, ubicar el sistema de referencia móvil del efector final y el sistema de referencia fijo, este último se podrá colocar en el lugar que se considere más conveniente, como se muestra en la Figura 16. Se resalta que las cadenas cinemáticas son similares entre sí, con las mismas longitudes de eslabones, mismo número de variables articulares y punto de interés en el efector final. Se hace la observación de que  $L_c$  es el recorrido de las juntas prismáticas, es decir, el valor máximo que pueden tomar las variables articulares  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$ .

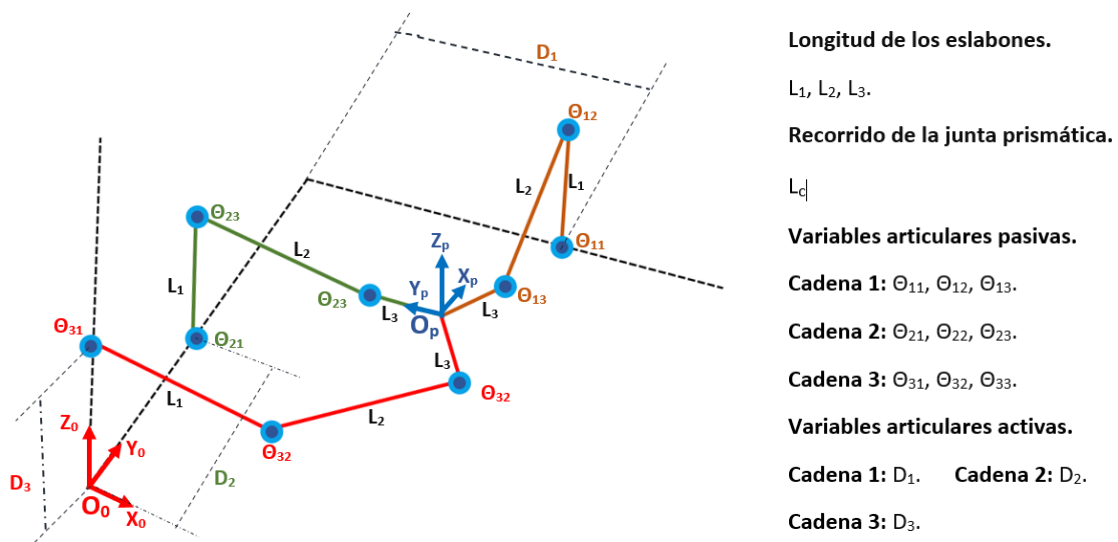


Figura 16. Diagrama con parámetros constantes y variables articulares del mecanismo con configuración 3PRRR.

Para el análisis de la cinemática directa, primero se ubica un sistema de referencia móvil en cada junta en donde se encuentran las variables articulares, como se muestra en la Figura 17, Figura 19 y Figura 21; segundo, se realiza la composición de transformaciones que determinen la matriz de transformación del sistema del efector final ( $O_p$ ) en referencia al sistema fijo ( $O_0$ ), la matriz estará representada por  ${}^0T_p$ . Con la submatriz  ${}^0\mathbf{q}_p$  que se extrae de  ${}^0T_p$  y con una restricción angular generada por la orientación constante del efector final, se obtienen las ecuaciones de posición.

El análisis de la cinemática inversa se puede reducir a un brazo de dos eslabones para cada enlace, debido a que la orientación de la plataforma móvil es constante. Por medio de emplear el método geométrico de forma similar al ejemplo mostrado en el marco teórico, se obtienen las ecuaciones de  $\theta_{i1}$  y  $\theta_{i2}$ ; para  $\theta_{i3}$  se obtiene de las restricciones angulares utilizadas en la cinemática directa.

### 3.3.1 Ecuaciones de la cadena cinemática 1.

#### Cinemática directa cadena 1.

La matriz de transformación  ${}^0T_p$  para la cadena 1 se obtiene a partir de la siguiente composición de transformaciones, la cual se formula a partir de la Figura 17.

$${}^0T_p = {}^0T_{11} * {}^{11}T_{12} * {}^{12}T_{13} * {}^{13}T_{14} * {}^{14}T_p \quad (3.1)$$

Donde cada matriz de transformación de la ecuación (3.1), está compuesta de los siguientes movimientos principales.

$${}^0T_{11} = T(tx, D_1) * T(ty, L_c) \quad (3.2)$$

$${}^{11}T_{12} = T(rx, \theta_{11}) * T(tx, L_1) \quad (3.3)$$

$${}^{12}T_{13} = T(rx, \theta_{12}) * T(tx, L_2) \quad (3.4)$$

$${}^{13}T_{14} = T(rx, \theta_{13}) * T(rz, -120^\circ) * T(tx, L_3) \quad (3.5)$$

$${}^{14}T_p = T(rz, -150^\circ) \quad (3.6)$$

La restricción angular que mantiene constante la orientación del efector final en la cadena 1 es la siguiente.

$$\theta_{13} + \theta_{11} + \theta_{12} = 0 \quad (3.7)$$

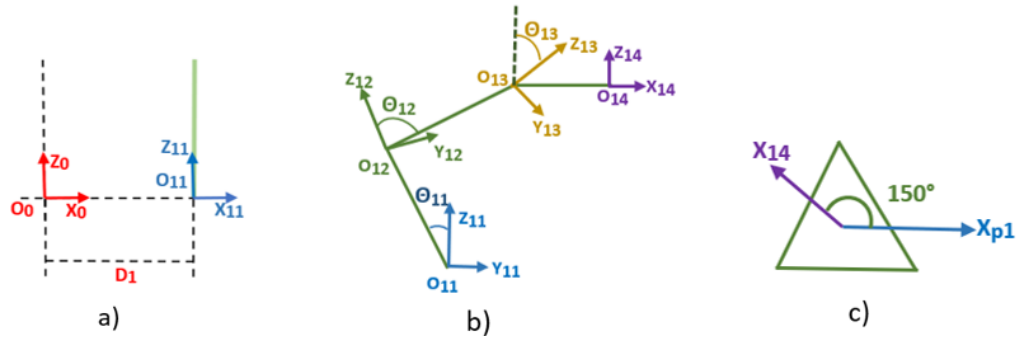


Figura 17. Ubicación de los sistemas de referencia de la cadena 1. a) Vista del plano  $X_0Z_0$ . b) Vista del plano  $Y_0Z_0$ . c) Ángulo entre el sistema de referencia  $O_{14}$  con el sistema de referencia  $O_p$  del efector final.

De la matriz  ${}^0T_p$  se toma la submatriz  ${}^0q_p$  y en conjunto con la restricción angular (3.7) se obtienen las siguientes 3 ecuaciones de posición.

$$X_1 = D_1 - \frac{L_3}{2} \tag{3.8}$$

$$Y_1 = L_c - L_1 \sin[\theta_{11}] - L_2 \sin[\theta_{11} + \theta_{12}] - \frac{1}{2}\sqrt{3}L_3 \tag{3.9}$$

$$Z_1 = L_1 \cos[\theta_{11}] + L_2 \cos[\theta_{11} + \theta_{12}] \tag{3.10}$$

**Cinemática inversa cadena 1.**

Para el análisis por método geométrico de la cadena 1, de la restricción angular (3.7) se despeja  $\theta_{13}$  y para las ecuaciones de  $\theta_{11}$  y  $\theta_{12}$  se toma el triángulo que se forma con los orígenes de los sistemas de referencia  $O_{11}$ ,  $O_{12}$  y  $O_{13}$ .

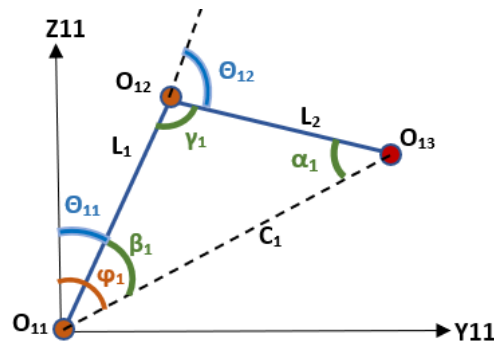


Figura 18. Geometría triangular y ángulos que forman los orígenes de los sistemas de referencia  $O_{11}$ ,  $O_{12}$  y  $O_{13}$ .

De analizar la geometría de la Figura 18 se obtienen las ecuaciones para el cálculo de  $\theta_{11}$  y  $\theta_{12}$ .

$$\theta_{11} = \varphi_1 - \beta_1 \quad (3.11)$$

$$\theta_{12} = \pi - \gamma_1 \quad (3.12)$$

Para el desarrollo de las ecuaciones se consideran las coordenadas del origen  $O_{13} = (x_1, y_1, z_1)$  y  $C_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ . Ahora aplicando la ley de cosenos y propiedades trigonométricas para obtener  $\gamma_1$ ,  $\beta_1$  y  $\varphi_1$ ; luego los ángulos se sustituyen en las ecuaciones (3.11) y (3.12) de forma similar al ejemplo del método geométrico presentado en el marco teórico, de tal manera que se obtiene.

$$\theta_{11} = \arctan \left[ \frac{x_1}{y_1} \right] - \arccos \left[ -\frac{L_2^2 - L_1^2 - x_1^2 - y_1^2}{2L_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \right] \quad (3.13)$$

$$\theta_{12} = \pi - \arccos \left[ -\frac{x_1^2 + y_1^2 - L_2^2 - L_1^2}{2L_1L_2} \right] \quad (3.14)$$

Se pone la posición del origen  $O_{13}$  en términos de la posición del efector final.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \frac{L_3}{2} \\ L_c - y - \left( \frac{L_3\sqrt{3}}{2} \right) \\ z \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Se sustituye las componentes de (3.15) en las ecuaciones (3.13) y (3.14), de tal manera que se obtienen las siguientes ecuaciones de la cinemática inversa de la cadena 1.

$$\theta_{11} = \arctan \left[ \frac{L_c - \frac{\sqrt{3}L_3}{2} - y}{z} \right] - \arccos \left[ -\frac{L_2^2 - L_1^2 - \left( L_c - \frac{\sqrt{3}L_3}{2} - y \right)^2 - z^2}{2L_1\sqrt{\left( L_c - \frac{\sqrt{3}L_3}{2} - y \right)^2 + z^2}} \right] \quad (3.16)$$

$$\theta_{12} = \pi - \arccos \left[ -\frac{z^2 - L_1^2 - L_2^2 + \left( L_c - \frac{\sqrt{3}L_3}{2} - y \right)^2}{2L_1L_2} \right] \quad (3.17)$$



$$\theta_{13} = -\theta_{11} - \theta_{12} \quad (3.18)$$

### 3.3.2 Ecuaciones de la cadena cinemática 2.

#### Cinemática directa cadena 2.

La matriz de transformación  ${}^0T_p$  para la cadena 2 se obtiene a partir de la siguiente composición de transformaciones, la cual se formula a partir de la Figura 19.

$${}^0T_p = {}^0T_{21} * {}^{21}T_{22} * {}^{22}T_{23} * {}^{23}T_{24} * {}^{24}T_p \quad (3.19)$$

Donde cada matriz de transformación de la ecuación (3.19), está compuesta de los siguientes movimientos principales.

$${}^0T_{21} = T(ty, D_2) \quad (3.20)$$

$${}^{21}T_{22} = T(ry, \theta_{21}) * T(tz, L_1) \quad (3.21)$$

$${}^{22}T_{23} = T(ry, \theta_{22}) * T(tz, L_2) \quad (3.22)$$

$${}^{23}T_{24} = T(ry, \theta_{23}) * T(tx, L_3) \quad (3.23)$$

$${}^{24}T_p = T(rz, 90^\circ) \quad (3.24)$$

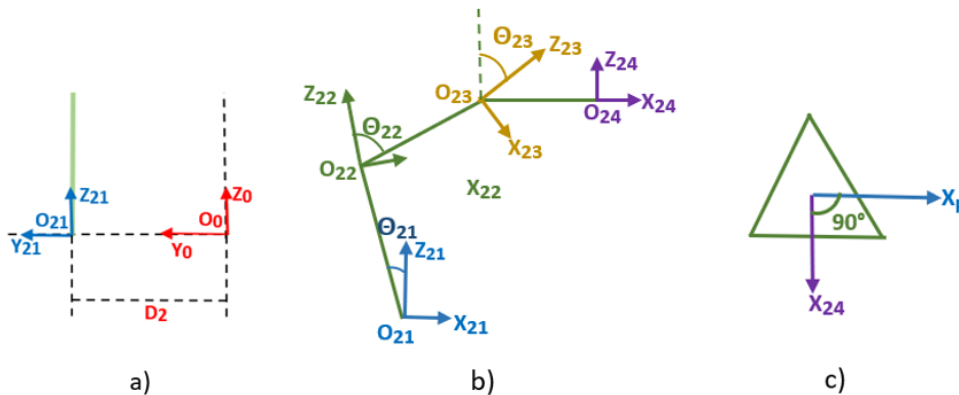


Figura 19. Sistemas de referencias de la cadena cinemática 2. a) Vista del plano  $Z_0Y_0$ . b) Vista del plano  $X_0Z_0$ . c) Ángulo entre el sistema de referencia  $O_{24}$  con el sistema de referencia  $O_p$  del efector final.

La restricción angular que mantiene constante la orientación del efector final en la cadena 2 es la siguiente.

$$\theta_{23} + \theta_{21} + \theta_{22} = 0 \quad (3.25)$$

De la matriz  ${}^0T_p$  se toma la submatriz  ${}^0q_p$  y en conjunto con la restricción angular (3.25) se obtienen las siguientes 3 ecuaciones de posición.

$$X_2 = L_1 \sin[\theta_{21}] + L_2 \sin[\theta_{21} + \theta_{22}] + L_3 \quad (3.26)$$

$$Y_2 = D_2 \quad (3.27)$$

$$Z_2 = L_1 \cos[\theta_{21}] + L_2 \cos[\theta_{21} + \theta_{22}] \quad (3.28)$$

### Cinemática inversa cadena 2.

Para el análisis por método geométrico de la cadena 2, de la restricción angular (3.25) se despeja  $\theta_{23}$  y para las ecuaciones de  $\theta_{21}$  y  $\theta_{22}$  se toma el triángulo que se forma con los orígenes de los sistemas de referencia  $O_{21}$ ,  $O_{22}$  y  $O_{23}$ .

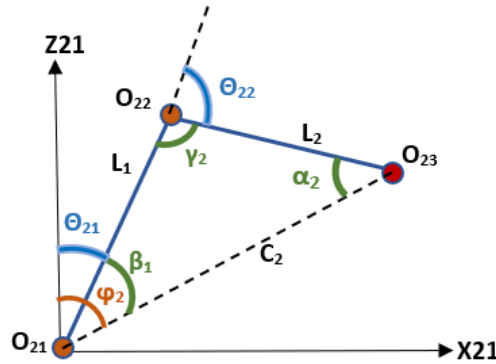


Figura 20 . Geometría triangular y ángulos que forman los orígenes de los sistemas de referencia  $O_{21}$ ,  $O_{22}$  y  $O_{23}$ .

De analizar la geometría de la Figura 20 se obtienen las ecuaciones para el cálculo de  $\theta_{21}$  y  $\theta_{22}$ .

$$\theta_{21} = \varphi_2 - \beta_2 \quad (3.29)$$

$$\theta_{22} = \pi - \gamma_2 \quad (3.30)$$

Para el desarrollo de las ecuaciones se consideran las coordenadas del origen  $O_{23} = (x_2, y_2, z_2)$  y  $C_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ . Ahora aplicando la ley de cosenos y propiedades trigonométricas para obtener  $\gamma_2$ ,  $\beta_2$  y  $\varphi_2$ ; luego los ángulos se sustituyen en las ecuaciones (3.29) y (3.30) de forma similar a la cadena anterior, se obtiene.

$$\theta_{21} = \arctan \left[ \frac{x_2}{y_2} \right] - \arccos \left[ -\frac{L_2^2 - L_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{2L_1\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \right] \quad (3.31)$$

$$\theta_{22} = \pi - \arccos \left[ -\frac{x_2^2 + y_2^2 - L_2^2 - L_1^2}{2L_1L_2} \right] \quad (3.32)$$

Se pone la posición del origen  $O_{23}$  en términos de la posición del efector final.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - L_3 \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Se sustituye las componentes de (3.33) en las ecuaciones (3.31) y (3.32), de tal manera que se obtienen las siguientes ecuaciones de la cinemática inversa de la cadena 2.

$$\theta_{21} = \arctan \left[ \frac{x - L_3}{z} \right] - \arccos \left[ -\frac{L_2^2 - L_1^2 - (x - L_3)^2 - z^2}{2L_1\sqrt{(x - L_3)^2 + z^2}} \right] \quad (3.34)$$

$$\theta_{22} = \pi - \arccos \left[ -\frac{z^2 - L_1^2 - L_2^2 + (x - L_3)^2}{2L_1L_2} \right] \quad (3.35)$$

$$\theta_{23} = -\theta_{21} - \theta_{22} \quad (3.36)$$

### 3.3.3 Ecuaciones de la cadena cinemática 3.

#### Cinemática directa cadena 3.

La matriz de transformación  ${}^0T_p$  para la cadena 3 se obtiene a partir de la siguiente composición de transformaciones, la cual se formula a partir de la figura 21.

$${}^0T_p = {}^0T_{31} * {}^{31}T_{32} * {}^{32}T_{33} * {}^{33}T_{34} * {}^{34}T_p \quad (3.37)$$

Donde cada matriz de transformación de la ecuación (3.37), está compuesta de los siguientes movimientos principales.

$${}^0T_{31} = T(tz, D_3) \quad (3.38)$$

$${}^{31}T_{32} = T(rz, \theta_{31}) * T(tx, L_1) \quad (3.39)$$

$${}^{32}T_{33} = T(rz, \theta_{32}) * T(tx, L_2) \quad (3.40)$$

$${}^{33}T_{34} = T(rz, \theta_{33}) * T(tx, L_3) \quad (3.41)$$

$${}^{24}T_p = T(rz, -30^\circ) \quad (3.42)$$

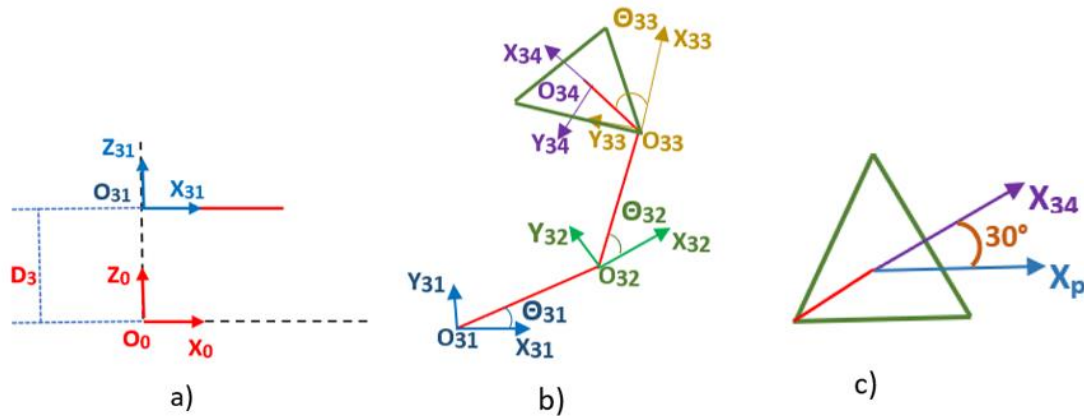


Figura 21. Sistemas de referencias de la cadena cinemática 3. a) Vista del plano  $X_0Z_0$ . b) Vista del plano  $X_0Y_0$ . c) Ángulo entre el sistema de referencia  $O_{34}$  con el sistema de referencia  $O_p$  del efector final.

La restricción angular que mantiene constante la orientación del efector final en la cadena 3 es la siguiente.

$$\theta_{33} + \theta_{31} + \theta_{32} = 120^\circ \quad (3.43)$$

De la matriz  ${}^0T_p$  se toma la submatriz  ${}^0q_p$  y en conjunto con la restricción angular (3.43) se obtienen las siguientes 3 ecuaciones de posición.

$$X_3 = L_1 \cos[\theta_{31}] + L_2 \cos[\theta_{31} + \theta_{32}] - \frac{1}{2} L_3 \quad (3.44)$$

$$Y_3 = L_1 \sin[\theta_{31}] + L_2 \sin[\theta_{31} + \theta_{32}] + \frac{\sqrt{3}}{2} L_3 \quad (3.45)$$

$$Z_3 = D_3 \quad (3.46)$$

### Cinemática inversa cadena 3.

Para el análisis por método geométrico de la cadena 3, de la restricción angular (3.43) se despeja  $\theta_{33}$  y para las ecuaciones de  $\theta_{31}$  y  $\theta_{32}$  se toma el triángulo que se forma con los orígenes de los sistemas de referencia  $O_{31}$ ,  $O_{32}$  y  $O_{33}$ .

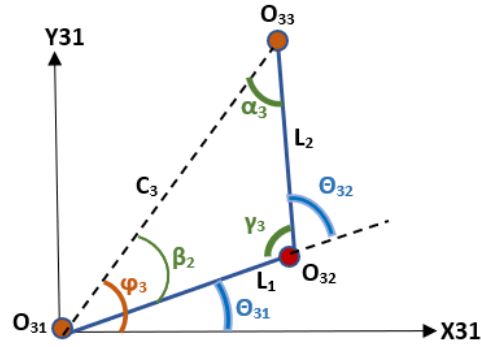


Figura 22 . Geometría triangular y ángulos que forman los orígenes de los sistemas de referencia  $O_{31}$ ,  $O_{32}$  y  $O_{33}$ .

De analizar la geometría de la Figura 22 se obtienen las ecuaciones para el cálculo de  $\theta_{31}$  y  $\theta_{32}$ .

$$\theta_{31} = \varphi_3 - \beta_3 \quad (3.47)$$

$$\theta_{32} = \pi - \gamma_3 \quad (3.48)$$

Para el desarrollo de las ecuaciones se consideran las coordenadas del origen  $O_{33} = (x_3, y_3, z_3)$  y  $C_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2}$ . Ahora aplicando la ley de cosenos y propiedades trigonométricas para obtener  $\gamma_3$ ,  $\beta_3$  y  $\varphi_3$ . Después los ángulos se sustituyen en las ecuaciones (3.47) y (3.48) de forma similar a las cadenas anteriores se obtiene.

$$\theta_{31} = \arctan \left[ \frac{x_3}{y_3} \right] - \arccos \left[ -\frac{L_2^2 - L_1^2 - x_3^2 - y_3^2}{2L_1 \sqrt{x_3^2 + y_3^2}} \right] \quad (3.49)$$

$$\theta_{32} = \pi - \arccos \left[ -\frac{x_3^2 + y_3^2 - L_2^2 - L_1^2}{2L_1 L_2} \right] \quad (3.50)$$

Se pone la posición del origen  $O_{33}$  en términos de la posición del efector final.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \frac{L_3}{2} \\ y - \left( \frac{L_3 \sqrt{3}}{2} \right) \\ z \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Se sustituye las componentes de  $O_{33}$  (3.51) en las ecuaciones (3.49) y (3.50), de tal manera que se obtienen las siguientes ecuaciones de la cinemática inversa de la cadena 3.

$$\theta_{31} = \arctan \left[ \frac{y - \frac{\sqrt{3}L_3}{2}}{\frac{L_3}{2} + x} \right] - \arccos \left[ \frac{L_2^2 - L_1^2 - \left(\frac{L_3}{2} + x\right)^2 - \left(y - \frac{\sqrt{3}L_3}{2}\right)^2}{2L_1 \sqrt{\left(\frac{L_3}{2} + x\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}L_3}{2}\right)^2}} \right] \quad (3.52)$$

$$\theta_{32} = \pi - \arccos \left[ \frac{\left(\frac{L_3}{2} + x\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}L_3}{2}\right)^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2} \right] \quad (3.53)$$

$$\theta_{33} = -\theta_{31} - \theta_{32} + 120^\circ \quad (3.54)$$

### 3.4 Análisis Dinámico.

El análisis se puede abordar solo con tres coordenadas generalizadas, ya que es un mecanismo de 3 GDL, pero esto puede generar una expresión compleja de analizar y que no se llegue al modelo requerido. Para el análisis se toma como coordenadas generalizadas a la posición del efector final ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) y las posiciones angulares de la segunda junta de cada cadena cinemática  $\theta_{11}$ ,  $\theta_{21}$  y  $\theta_{31}$ , estas 3 se consideran como redundantes; al utilizar la ecuación (2.23) se tendrá un sistema de 6 ecuaciones con 6 variables, las cuales son  $\lambda_i$  para  $i = 1, 2$  y  $3$ , y las fuerzas de los actuadores  $Q_j$  para  $j = 4, 5$  y  $6$ , tomando en cuenta que las fuerzas de  $Q_j$  para  $j = 1, 2$  y  $3$  son cero, debido a que las juntas rotacionales son pasivas; la actuación lineal se encuentra en la juntas prismáticas con una relación directa a la posición del efector final (3.55); la formulación en este caso requiere de 3 ecuaciones de restricción  $\Gamma_i$  para  $i = 1, 2$  y  $3$ , que parten de relaciones geométricas del mecanismo en términos de las coordenadas generalizadas. Para el análisis se considera al primer eslabón uniforme con una masa  $m_1$  y al segundo eslabón se divide uniformemente concentrándose en las articulaciones  $B_i$  y  $C_i$  con una masa  $m_2/2$  (Figura 23), esto se puede realizar sin afectar en gran medida la precisión del modelo como se menciona en (Elkady et al., 2008); el fin de esta consideración es reducir la complejidad y llegar a una expresión del modelo de robots de  $n$  GDL, de lo contrario, al realizar el análisis con la formulación de Lagrange, éste se torna complejo y no se podría llegar al modelo esperado.

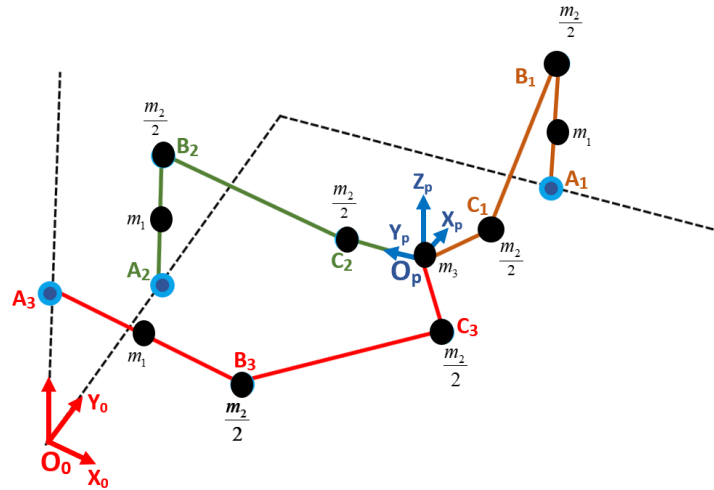


Figura 23. Distribución de masa y puntos  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C_i$  para  $i = 1, 2$  y  $3$  del mecanismo con configuración 3PRRR.

Relación de movimiento de las juntas prismáticas con actuación lineal.

$$\begin{bmatrix} x = D_1 - \frac{L_3}{2} \\ y = D_2 \\ z = D_3 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

### 3.4.1 Modelo dinámico.

#### 3.4.1.1 Ecuaciones de restricción.

Las restricciones geométricas están dadas por la expresión (3.56), donde  $B_i$  y  $C_i$  para  $i = 1, 2$  y  $3$ , están ubicados como se muestra en la Figura 23 y  $L_2$  es la longitud del eslabón 2 de cada cadena cinemática. Para obtener la posición de  $B_i$  y  $C_i$  se analiza el mecanismo de acuerdo con la colocación de las coordenadas generalizadas de la Figura 16.

$$0 = L_2^2 + |\overline{B_i - C_i}|^2 \quad (3.56)$$

Restricción geométrica de la cadena 1:

$$B_1 = \left( x + \frac{L_3}{2}, L_c - L_1 \sin(\theta_{11}), L_1 \cos(\theta_{11}) \right) \quad (3.57)$$

$$C_1 = \left( x + \frac{L_3}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2} L_3, z \right) \quad (3.58)$$

Se sustituyen las expresiones (3.57) y (3.58) en (3.56).

$$0 = L_2^2 + \left( y + \frac{\sqrt{3}}{2} L_3 - L_c + L_1 \sin(\theta_{11}) \right)^2 + (z - L_1 \cos(\theta_{11}))^2 \quad (3.59)$$

Restricción geométrica de la cadena 2:

$$B_2 = (L_1 \sin(\theta_{21}), y, L_1 \cos(\theta_{21})) \quad (3.60)$$

$$C_2 = (x + L_3, y, z) \quad (3.61)$$

Se sustituyen las expresiones (3.60) y (3.61) en (3.56).

$$0 = L_2^2 + (x - L_3 - L_1 \sin(\theta_{21}))^2 + (z - L_1 \cos(\theta_{21}))^2 \quad (3.62)$$

Restricción geométrica de la cadena 3:

$$B_2 = (L_1 \cos(\theta_{31}), L_1 \sin(\theta_{31}), z) \quad (3.63)$$

$$C_1 = \left( x + \frac{L_3}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2} L_3, z \right) \quad (3.64)$$

Se sustituyen las expresiones (3.63) y (3.64) en (3.56).

$$0 = L_2^2 + \left( x + \frac{1}{2} L_3 - L_1 \cos(\theta_{31}) \right)^2 + \left( y - \frac{\sqrt{3}}{2} L_3 - L_1 \sin(\theta_{31}) \right)^2 \quad (3.65)$$

Se deriva respecto al tiempo las ecuaciones (3.59), (3.62) y (3.65).

$$0 = \frac{y + r1 + L_1 \sin(\theta_{11})}{((y + r1) \cos \theta_{11} + z \sin(\theta_{11})) L_1} \dot{y} + \frac{z - L_1 \cos(\theta_{11})}{((y + r1) \cos \theta_{11} + z \sin(\theta_{11})) L_1} \dot{z} + \dot{\theta}_{11} \quad (3.66)$$

$$0 = \frac{x - L_3 - L_1 \sin(\theta_{21})}{(z \sin(\theta_{21}) - (x - L_3) \cos \theta_{21}) L_1} \dot{x} + \frac{z - L_1 \cos(\theta_{21})}{(z \sin(\theta_{21}) - (x - L_3) \cos \theta_{21}) L_1} \dot{z} + \dot{\theta}_{21} \quad (3.67)$$

$$0 = \frac{x + r2 - L_1 \cos(\theta_{31})}{((x + r2) \sin(\theta_{31}) - (y - r3) \cos(\theta_{31})) L_1} \dot{x} + \frac{y - r3 - L_1 \sin(\theta_{31})}{((x + r2) \sin(\theta_{31}) - (y - r3) \cos(\theta_{31})) L_1} \dot{y} + \dot{\theta}_{31} \quad (3.68)$$

$$\text{Donde: } r1 = \frac{\sqrt{3}}{2} L_3 - L_c; \quad r2 = \frac{1}{2} L_3; \quad r3 = \frac{\sqrt{3}}{2} L_3$$



Se reordenan las ecuaciones (3.66), (3.67) y (3.68) para generar la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{31} \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Donde:

$$\Gamma = \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-y-r1-L_1 \sin(\theta_{11})}{(y+r1) \cos \theta_{11} + z \sin(\theta_{11})} & \frac{L_1 \cos(\theta_{11}) - z}{(y+r1) \cos \theta_{11} + z \sin(\theta_{11})} \\ \frac{L_3 + L_1 \sin(\theta_{21}) - x}{z \sin(\theta_{21}) - (x-L_3) \cos(\theta_{21})} & 0 & \frac{L_1 \cos(\theta_{21}) - z}{z \sin(\theta_{21}) - (x-L_3) \cos(\theta_{21})} \\ \frac{L_1 \cos(\theta_{31}) - x - r2}{(x+r2) \sin(\theta_{31}) - (y-r3) \cos(\theta_{31})} & \frac{r3 + L_1 \sin(\theta_{31}) - y}{(x+r2) \sin(\theta_{31}) - (y-r3) \cos(\theta_{31})} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

### 3.4.1.2 Modelo de fricción.

A partir del modelo de fricción clásico (2.26), se genera el modelo de fricción para las variables generalizadas, donde  $Fm_{1p}$  y  $Fm_{2p}$  son los coeficientes de fricción de las juntas prismáticas y  $Fm_{1\theta}$  y  $Fm_{2\theta}$  son los coeficientes de fricción de las juntas rotacionales.

$$\mathbf{f} = Fm_{1p} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + Fm_{2p} \text{Sign} \left( \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \right) + Fm_{1\theta} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{11} \end{bmatrix} + Fm_{2\theta} \text{Sign} \left( \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{11} \end{bmatrix} \right) \quad (3.71)$$

Se sustituye la ecuación (3.69) en la ecuación (3.71).

$$\mathbf{f} = (Fm_{1p} + Fm_{1\theta}\Gamma) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + Fm_{2p} \text{Sign} \left( \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \right) + Fm_{2\theta} \text{Sign} \left( \Gamma \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \right) \quad (3.72)$$

### 3.4.1.3 Energía cinética y potencial.

En esta parte del análisis se considera la distribución de masa mostrada en la Figura 23, la ubicación del sistema de referencia fijo y las coordenadas generalizadas de la Figura 16. Para los eslabones  $Ei_2$  que va de  $B_i$  a  $C_i$  y para el cuerpo del efector, la forma de calcular la energía cinética y potencial es la siguiente.

Energía cinética y potencial de los eslabones  $E_{i2}$ .

$$T_{i2} = \frac{1}{2} \left( \frac{m_2}{2} (\|\vec{v}_{Bi2}\|^2) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{m_2}{2} (\|\vec{v}_{Ci2}\|^2) \right) \quad (3.73)$$

$$V_{i2} = \frac{m_2}{2} gh + \frac{m_2}{2} gh \quad (3.74)$$

Energía cinética y potencial del efector final.

$$T_p = \frac{1}{2} m_p (\|\vec{v}_p\|^2) \quad (3.75)$$

$$V_p = m_p gh \quad (3.76)$$

Donde:

i: indica que cadena se está analizando.

$v_{Bi2}$ : es la velocidad lineal del punto Bi,

$v_{Ci2}$ : es la velocidad lineal del punto Ci,

$v_p$ : es la velocidad lineal del efector final,

h: la altura y

g: la constante de gravedad.

Para los eslabones  $E_{i1}$  que van de  $A_i$  a  $B_i$  se considera la distribución de masa de una barra, por tal motivo, se agrega un término de la energía cinética angular, obteniendo las siguientes ecuaciones, donde I es el momento de inercia del cuerpo, en este caso  $I = \frac{1}{12} m_1 L_1^2$ .

$$T_{i1} = \frac{1}{2} m_1 (\|\vec{v}_{i1}\|^2) + \frac{1}{2} I \theta_{i1}^2 \quad (3.77)$$

$$V_{i1} = m_1 gh \quad (3.78)$$

### ***Energía cinética y potencial de la cadena 1.***

Energía cinética y potencial del eslabón  $E_{11}$ .

$$T_{11} = \frac{1}{8} m_1 [4\dot{x}^2 + L_1^2 \theta_{11}^2] + \frac{1}{12} m_1 L_1^2 \theta_{11}^2 \quad (3.79)$$

$$V_{11} = \frac{1}{2} m_1 g L_1 \text{Cos}(\theta_{11}) \quad (3.80)$$

Energía cinética y potencial del eslabón E<sub>12</sub>.

$$T_{12} = \frac{1}{4} m_2 [2\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + L_1^2 \dot{\theta}_{11}^2] \quad (3.81)$$

$$V_{12} = \frac{1}{2} m_2 g (L_1 \text{Cos}(\theta_{11}) + z) \quad (3.82)$$

La energía cinética de la cadena 1 es la suma de las ecuaciones (3.79) y (3.81):

$$T_1 = \frac{1}{8} m_1 (4\dot{x}^2 + L_1^2 \dot{\theta}_{11}^2) + \frac{1}{4} m_2 (2\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + L_1^2 \dot{\theta}_{11}^2) \quad (3.83)$$

La energía potencial de la cadena 1 es la suma de las ecuaciones (3.80) y (3.82):

$$V_1 = \frac{1}{2} m_1 g L_1 \text{cos}(\theta_{11}) + \frac{1}{2} m_2 g (L_1 \text{cos}(\theta_{11}) + z) \quad (3.84)$$

### ***Energía cinética y potencial de la cadena 2.***

Energía cinética y potencial del eslabón E<sub>21</sub>.

$$T_{21} = \frac{1}{8} m_1 [4\dot{y}^2 + L_1^2 \dot{\theta}_{21}^2] + \frac{1}{12} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_{21}^2 \quad (3.85)$$

$$V_{21} = \frac{1}{2} m_1 g L_1 \text{Cos}(\theta_{21}) \quad (3.86)$$

Energía cinética y potencial del eslabón E<sub>22</sub>.

$$T_{22} = \frac{1}{4} m_2 [\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + \dot{z}^2 + L_1^2 \dot{\theta}_{21}^2] \quad (3.87)$$

$$V_{22} = \frac{1}{2} m_2 g (L_1 \text{Cos}(\theta_{21}) + z) \quad (3.88)$$

La energía cinética de la cadena 2 es la suma de las ecuaciones (3.85) y (3.87):

$$T_2 = \frac{1}{8} m_1 (4\dot{y}^2 + L_1^2 \dot{\theta}_{21}^2) + \frac{1}{4} m_2 (\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + \dot{z}^2 + L_1^2 \dot{\theta}_{21}^2) \quad (3.89)$$

La energía cinética de la cadena 2 es la suma de las ecuaciones (3.86) y(3.88):

$$V_2 = \frac{1}{2} m_1 g L_1 \cos(\theta_{21}) + \frac{1}{2} m_2 g (L_1 \cos(\theta_{21}) + z) \quad (3.90)$$

***Energía cinética y potencial de la cadena 3.***

Energía cinética y potencial del eslabón E<sub>31</sub>.

$$T_{31} = \frac{1}{8} m_1 [4\dot{z}^2 + L_1^2 \dot{\theta}_{31}^2] + \frac{1}{12} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_{31}^2 \quad (3.91)$$

$$V_{31} = m_1 g z \quad (3.92)$$

Energía cinética y potencial del eslabón E<sub>32</sub>.

$$T_{32} = \frac{1}{4} m_2 [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{z}^2 + L_1^2 \dot{\theta}_{31}^2] \quad (3.93)$$

$$V_{32} = m_2 g z \quad (3.94)$$

La energía cinética de la cadena 3 es la suma de las ecuaciones (3.91) y (3.93):

$$T_3 = \frac{1}{8} m_1 (4\dot{z}^2 + L_1^2 \dot{\theta}_{31}^2) + \frac{1}{4} m_2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{z}^2 + L_1^2 \dot{\theta}_{31}^2) \quad (3.95)$$

La energía potencial de la cadena 3 es la suma de las ecuaciones (3.92) y (3.94):

$$V_3 = (m_1 + m_2) g z \quad (3.96)$$

***Energía cinética y potencial del efector final.***

La energía cinética total del efector final V<sub>p</sub> es:

$$T_p = \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (3.97)$$

Y la energía potencial a total del efector final T<sub>p</sub> es:

$$V_p = m_3 g z \quad (3.98)$$

#### 3.4.1.4 Ecuación de Lagrange.

La energía potencial y cinética total del manipulador, se obtiene sumando la energía de cada cadena cinemática y la del efector final.

Energía cinética total de la PKM.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_p \quad (3.99)$$

Se sustituye (3.83), (3.89), (3.95) y (3.97) en (3.99), se obtiene la siguiente expresión.

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + 2m_2 + m_3)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \left(\frac{m_1}{6} + \frac{m_2}{4}\right)L_1^2(\dot{\theta}_{11}^2 + \dot{\theta}_{21}^2 + \dot{\theta}_{31}^2) \quad (3.100)$$

Energía potencial total de la PKM.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_p \quad (3.101)$$

Se sustituye (3.84), (3.90), (3.96) y (3.98) en (3.101), se obtiene la siguiente expresión.

$$V = \frac{1}{2}gL_1(m_1 + m_2)(\cos(\theta_{11}) + \cos(\theta_{21})) + (m_1 + 2m_2 + m_3)gz \quad (3.102)$$

Al restar la expresión (3.102) a la (3.100) se obtiene la ecuación de Lagrange, que está dada por  $L=T-V$ .

$$L = A(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + B(\dot{\theta}_{11}^2 + \dot{\theta}_{21}^2 + \dot{\theta}_{31}^2) - C(\cos(\theta_{11}) + \cos(\theta_{21})) - Ez \quad (3.103)$$

Donde:

$$A = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3); \quad B = \left(\frac{m_1}{6} + \frac{m_2}{4}\right)L_1^2; \quad C = \frac{1}{2}gL_1(m_1 + m_2); \quad E = (m_1 + m_2 + m_3)g$$

#### 3.4.1.5 Derivadas de la función de Lagrange.

Derivadas respecto a  $\theta_{11}$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{11}} = B2\ddot{\theta}_{11}; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_{11}} = C \sin(\theta_{11})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{11}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{11}} = \sum_{i=1}^3 \left( \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_{11}} \right) + Q_i \quad (3.104)$$

$$2B\ddot{\theta}_{11} - C \sin(\theta) = \lambda_1 \quad (3.105)$$

Derivadas respecto a  $\theta_{21}$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{21}} = B2\ddot{\theta}_{21}; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_{21}} = C \sin(\theta_{21})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{21}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{21}} = \sum_{i=1}^3 \left( \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_{21}} \right) + Q_i \quad (3.106)$$

$$2B\ddot{\theta}_{21} - C \sin(\theta_{21}) = \lambda_2 \quad (3.107)$$

Derivadas respecto a  $\theta_{31}$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{31}} = B2\ddot{\theta}_{31}; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_{31}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{31}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{31}} = \sum_{i=1}^3 \left( \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_{31}} \right) + Q_i \quad (3.108)$$

$$2B\ddot{\theta}_{31} = \lambda_3 \quad (3.109)$$

Derivadas respecto a  $x$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = A2\ddot{x}; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \left( \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) + Q_i \quad (3.110)$$

$$2A\ddot{x} = F_x - \Gamma_{11}\lambda_1 - \Gamma_{21}\lambda_2 - \Gamma_{31}\lambda_3 \quad (3.111)$$

Derivadas respecto a  $y$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = A2\ddot{y}; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \left( \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) + Q_i \quad (3.112)$$

$$2A\ddot{y} = F_y - \Gamma_{12}\lambda_1 - \Gamma_{22}\lambda_2 - \Gamma_{32}\lambda_3 \quad (3.113)$$

Derivadas respecto a z:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = A2\ddot{z}; \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -E$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \left( \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z} \right) + Q_i \quad (3.114)$$

$$2A\ddot{z} + E = F_z - \Gamma_{13}\lambda_1 - \Gamma_{23}\lambda_2 - \Gamma_{33}\lambda_3 \quad (3.115)$$

### 3.4.1.6 Modelo dinámico con fricción.

#### Ecuaciones solución de $\lambda_i$ .

Se reordena las ecuaciones (3.105), (3.107) y (3.109).

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = 2B \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{11} \\ \ddot{\theta}_{21} \\ \ddot{\theta}_{31} \end{bmatrix} - C \begin{bmatrix} \sin(\theta_{11}) \\ \sin(\theta_{21}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Se deriva la ecuación (3.69).

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{11} \\ \ddot{\theta}_{21} \\ \ddot{\theta}_{31} \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \frac{d\Gamma}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Se sustituye las ecuaciones (3.69) y (3.117) en la ecuación (3.116).

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = 2B\Gamma \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + 2B \frac{d\Gamma}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} - C \begin{bmatrix} \sin(\theta_{11}) \\ \sin(\theta_{21}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

**Ecuaciones solución del vector de fuerzas.**

Se reordena las ecuaciones (3.111), (3.113) y (3.115).

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = 2A \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix} + \Gamma^T \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

Se sustituye la ecuación (3.118) en la ecuación (3.119) y se le suma la expresión (3.72).

$$\mathbf{F} = \left( 2AI + \Gamma^T 2B\Gamma \right) \ddot{\mathbf{q}} + \left( \Gamma^T 2B \frac{d\Gamma}{dt} \right) \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix} - \Gamma^T C \begin{bmatrix} \sin(\theta_{11}) \\ \sin(\theta_{21}) \\ 0 \end{bmatrix} + (Fm_{1p} + Fm_{1\theta}\Gamma)\dot{q} + Fm_{2p}\text{Sign}(\dot{\mathbf{q}}) + Fm_{2\theta}\text{Sign}(\Gamma\dot{\mathbf{q}}) \quad (3.120)$$

La ecuación (3.120) se lleva a la forma:

$$\mathbf{F} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + f(\dot{\mathbf{q}}) \quad (3.121)$$

Donde:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}; \quad \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix};$$

$$M(\mathbf{q}) = 2AI + \Gamma^T 2B\Gamma;$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \Gamma^T 2B \frac{d\Gamma}{dt};$$

$$f(\dot{\mathbf{q}}) = (Fm_{1p} + Fm_{1\theta}\Gamma) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + Fm_{2p}\text{Sign} \left( \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \right) + Fm_{2\theta}\text{Sign} \left( \Gamma \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \right);$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix} - \Gamma^T C \begin{bmatrix} \sin(\theta_{11}) \\ \sin(\theta_{21}) \\ 0 \end{bmatrix}$$



### 3.4.2 Fuerzas de fricción.

El mecanismo de la máquina en estudio está formado por juntas prismáticas y rotacionales, que son iguales para las 3 cadenas cinemáticas, por tal motivo, la determinación de los coeficientes de fricciones se puede abordar analizando solo una junta prismática y una rotacional.

#### Coefficientes de fricción de la junta rotacional.

En el diseño mecánico de la PKM de 3 GDL realizado por (Téllez, 2018), se propone para las juntas rotacionales un rodamiento híbrido de bolas modelo 6202-2RLTN9/HC5C3WT de la marca SKF cuyo diámetro interno es de 15mm, diámetro externo de 35 mm y espesor de 11mm. El rodamiento se toma de referencia para proponer los coeficientes de fricción, por consiguiente, el coeficiente de fricción de Coulomb se propone de (SKF) y el de fricción viscosa de (NTN, 2004), obteniendo los siguientes valores.

$$\begin{bmatrix} f_{1\theta} \\ f_{2\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0015 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

#### Coefficientes de fricción de la junta prismática.

El coeficiente de fricción para la junta prismática se calcula de forma indirecta utilizando la ecuación (2.27); primero se calcula la velocidad de deslizamiento, para esto se toma de referencia la guía lineal WM40S propuesta en el diseño mecánico (Téllez, 2018), de la hoja de datos se considera  $n_w = 3000$  [rpm] y  $d_m = 12$  [mm]; el ángulo de avance del diámetro medio del sinfín es  $\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{L}{\pi d_m}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.6283}{\pi 12}\right) = 0.954^\circ$ .

$$V_s = \frac{(\pi)(3000)(12)}{12 \cos(0.954)} = 9426.085 [mm / \min] = 30.925 [ft / \min]$$

Debido a que  $V_s$  es mayor a 10 [ft/min] el coeficiente de fricción es el siguiente.

$$f_p = 0.103e^{-0.11(30.925)} + 0.012 = 0.0622 \quad (3.122)$$

El valor obtenido en la expresión (3.122) se considera como el coeficiente de fricción de Coulomb y el coeficiente de fricción viscosa se iguala a 0.003, el valor se sugiere de acuerdo con el catálogo de guías lineales (THK CO. LTD, 2021), de tal modo que los coeficientes de fricción quedan de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} f_{1,p} \\ f_{2,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.003 \\ 0.0622 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

### 3.5 Caracterización del motor a pasos.

A continuación, se realiza la prueba par de *holding* y la prueba par de *pull – in*, para esto se hace un barrido de la corriente como se muestra en la Tabla 6, desde un valor de 0.3 hasta 1.6 [A]; para cada valor de corriente se va agregando carga como se muestra en la figura 25, hasta llegar al par de torsión máximo esperado. Del par de holding se obtiene el valor máximo antes de salir de su posición de equilibrio y del par de pull – in se obtiene el valor máximo que mantiene el equilibrio, esto cuando el motor intenta girar.



Figura 24. Prueba par de holding y prueba par de pull-in.

El intervalo de corriente es el que proporciona el driver TB6560 que no sobrepasa la corriente máxima de 1.76 [A], del motor a pasos PMX 2320-H10-BF0-00 marca KOLLMORGEN con un par de holding nominal de 1.47 [N m]; el actuador fue seleccionado en el diseño mecánico realizado por (Téllez, 2018). En las pruebas se usó una polea con un radio de 0.02 [m].

Tabla 6. Resultados de las pruebas par de holding y par de pull – in.

Corriente [A]	Prueba par de holding		Prueba de par de pull-in	
	Carga [kg]	Par de holding [N m]	Carga [kg]	Par de pull-in [N m]
0.3	1.959	0.383	1.461	0.286
0.5	2.844	0.56	2.121	0.415
1	4.086	0.951	3.266	0.639
1.4	4.882	1.053	3.726	0.729
1.6	5.402	1.057	4.667	0.913

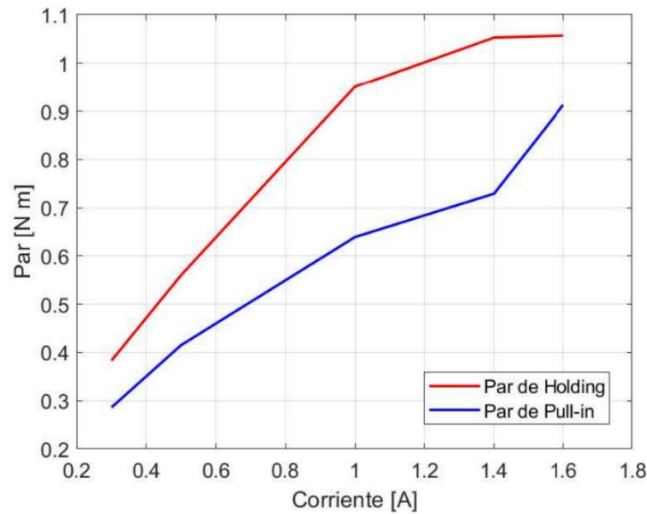


Figura 25. Gráfica corriente – Par, de las pruebas par de holding y par de pull – in.

En ambas pruebas al aumentar la corriente, incrementa el par de pull-in y el par de holding, este último siempre tuvo un valor mayor; cabe mencionar que si se toma un valor más cercano a la corriente máxima de 1.76 [A], el par se aproxima más al valor nominal de 1.47 [N m]. Para fines de esta investigación, se toma como parámetro de sintonización de los controles de movimiento, un par de 0.9 [N m], que está por debajo de los valores experimentales y del par nominal del motor a pasos.

### 3.6 Sistemas de control.

#### 3.6.1 Definición de la tarea.

A continuación, se define las tareas para el control de posición y para el control de movimiento que se utilizarán en la simulación, esto permitirá realizar la evaluación de desempeño bajo las mismas condiciones.

#### *Posición deseada para el control de posición.*

Para la prueba de los controles de posición se propone la siguiente posición inicial.

$$\mathbf{q}_{inicial} = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \end{bmatrix} \text{ [m]} \quad (3.124)$$

Y llegar a la siguiente posición deseada.

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.18 \\ 0.18 \end{bmatrix} [\text{m}] \quad (3.125)$$

### Trayectoria deseada para el control de movimiento.

Para la prueba de los controles de movimiento, la trayectoria deseada es una circunferencia de radio  $r = 0.08$  [m], con centro en  $(h_x, h_y, h_z) = (0.125, 0.125, 0.125)$  [m], con una rapidez angular deseada de  $\omega = 0.7853$  [rad/s] y un periodo  $T = 8$  [s]. El centro del círculo se toma como posición inicial del efector final. Las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración deseadas se muestran a continuación.

Posición deseada:

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} 0.08 \cos(0.7835t) + 0.125 \\ 0.08 \sin(0.7835t) + 0.125 \\ 0.08 \cos(0.7835t) + 0.125 \end{bmatrix} [\text{m}] \quad (3.126)$$

Velocidad deseada:

$$\mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} -0.0628 \sin(0.7853t) \\ 0.0628 \cos(0.7853t) \\ -0.0628 \sin(0.7853t) \end{bmatrix} [\text{m} / \text{s}] \quad (3.127)$$

Aceleración deseada:

$$\mathbf{a}_v = \begin{bmatrix} -0.0493 \cos(0.7853t) \\ -0.0493 \sin(0.7853t) \\ -0.0493 \cos(0.7853t) \end{bmatrix} [\text{m} / \text{s}^2] \quad (3.128)$$

### 3.6.2 Parámetros constantes del modelo dinámico

Para el diseño de los sistemas de control y para la simulación de las ecuaciones de movimiento, se tienen los siguientes parámetros de la PKM, incluyendo las especificaciones de la Tabla 5 y los coeficientes de fricción obtenidos de las juntas.

Tabla 7. Parámetros de la PKM.

Parámetros		Valor
Longitud de los eslabones	L <sub>1</sub>	0.230 [m]
	L <sub>2</sub>	0.230 [m]
	L <sub>3</sub>	0.095 [m]
Masa de los eslabones y efector final	M <sub>1</sub>	0.400 [kg]
	M <sub>2</sub>	0.350 [kg]
	M <sub>3</sub>	0.800 [kg]
Coeficientes de fricción	F <sub>1p</sub>	0.003 [N·s/m]
	F <sub>2p</sub>	0.0622 [N]
	F <sub>1θ</sub>	0.0015 [N·m·s]
	F <sub>2θ</sub>	0.1 [N·m]
Constante de gravedad	g	9.78[m/s <sup>2</sup> ]

### 3.6.3 Sintonización de los sistemas de control.

En los sistemas que se sintonizan a continuación su ley de control contiene a las matrices de diseño  $K_p$  y  $K_v$ , las cuales tienen que ser simétricas positivas definidas y cumplir con una condición de diseño, ya sea para el objetivo de posición o de trayectoria; cumpliendo con esas dos condiciones aún se tiene un amplio conjunto de posibles ganancias, por tal motivo y para asegurar que la fuerza requerida en las juntas actuadas estén en un rango aceptable, se considera para los controles de posición que la fuerza de actuación no supere los 100 [N], ya que es la fuerza que soporta la guía lineal WM40S (Téllez, 2018).

Para los controles de movimiento se espera tengan un mejor desempeño con una fuerza de actuación que no supere los 30 [N], dado que es la fuerza que se genera en la guía lineal con el motor a pasos conectado con un par de torsión de 0.9 [N m], el valor se tomó de la caracterización del motor; también se propone para todos los controles obtener la respuesta con el menor tiempo de asentamiento, manteniendo que el error de seguimiento tienda a cero sin sobrepasar la referencia.

Las sintonizaciones se obtuvieron a partir de proponer las ganancias  $K_p$  y  $K_v$  siguiendo las condiciones de diseño presentadas en el marco teórico, para los controles que no tienen una condición de diseño, se proponen los valores de forma arbitraria; después para todos los sistemas de control se va variando los valores hasta obtener la respuesta con las características

antes mencionadas, esto se obtiene con las simulaciones realizadas en Matlab y LabVIEW. Al incrementar los valores de las ganancias, se tiene una respuesta más rápida que no sobrepasa la referencia, pero aumenta la fuerza necesaria para que la máquina realice la tarea asignada. Por otra parte, las ganancias  $K_p$  y  $K_v$  tienen los elementos de la diagonal principal igual, debido a que las 3 cadenas del mecanismo son similares.

***Parámetros de diseño del control PD.***

$$K_p = \text{diag}\{955\}; \quad K_v = \text{diag}\{445\}$$

***Parámetros de diseño del control PD con compensación precalculada de gravedad.***

Para la sintonización primero se calcula  $k_g$ , se propone  $K_p$  mayor a  $k_g$ .

$$k_g = 3 \left[ \max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right] = 58.77$$

$$K_p = \text{diag}\{1461\}; \quad K_v = \text{diag}\{538\}$$

Se realiza una segunda sintonización del control PD con compensación precalculada de gravedad para ser analizado con el objetivo de control de seguimiento de trayectorias.

$$K_p = \text{diag}\{1580\}; \quad K_v = \text{diag}\{760\}$$

***Parámetros de diseño del control PID.***

Para la sintonización se contempló el valor de  $k_g$  y los valores característicos máximo ( $\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\} = 20$ ) y mínimo ( $\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\} = 1.55$ ) de la matriz de inercia, lo cuales se obtuvieron dando valores de 0 a 0.25 [m] de la posición articular ( $\mathbf{q}$ ), de tal modo que las condiciones de diseño son los siguientes.

$$\lambda_{\max}\{k_i\} \geq \lambda_{\min}\{k_i\} > 0 \quad (3.129)$$

$$\lambda_{\max}\{k_p\} \geq \lambda_{\min}\{K_p\} > 58.77 \quad (3.130)$$

$$\lambda_{\max}\{K_v\} \geq \lambda_{\min}\{K_v\} > \frac{\lambda_{\max}\{K_i\}}{\lambda_{\min}\{K_p\} - 58.77} * \frac{400}{1.55} \quad (3.131)$$

Se proponen los siguientes valores que cumplen con las condiciones de diseño.

$$K_p = \text{diag}\{1194\}; \quad K_i = \text{diag}\{540\}; \quad K_v = \text{diag}\{190\}$$

***Parámetros de diseño del control PD con compensación.***

$$K_p = \text{diag}\{185.5\}; \quad K_v = \text{diag}\{95\}; \quad \Lambda = K_v^{-1}K_p = \text{diag}\{1.953\}$$

***Parámetros de diseño del control de par-calculado+.***

Con  $\omega = 15.8429$  [rad/s], se proponen las matrices  $K_p$  y  $K_v$ .

$$K_p = \text{diag}\{107\}; \quad K_v = \text{diag}\{71\}$$

# Capítulo 4

## 4 PRUEBAS Y RESULTADOS

### 4.1 Simulación de las ecuaciones de movimiento.

Las ecuaciones obtenidas tanto de la cinemática directa como de la inversa se han comprobado que son correctas en una simulación en el software Wolfram Mathematica, donde el efector final (genérico) sigue la trayectoria establecida para el control de movimiento, como se muestra en la Figura 26. Utilizando las matrices de los sistemas locales en referencia al fijo, sustituyendo la solución de la cinemática inversa y considerando los parámetros constantes de la Tabla 7, se logra obtener una representación del movimiento de todo el mecanismo realizando la trayectoria, en el anexo se puede consultar el código desarrollado para la simulación.

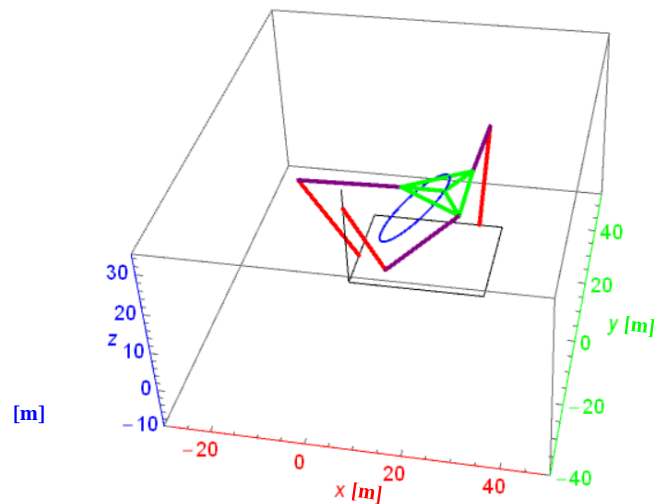


Figura 26. Simulación de las ecuaciones de movimiento del mecanismo 3PRRR.

En las gráficas de la posición  $x$ ,  $y$ ,  $z$  del efector final (Figura 27, 28 y 29), se observa que sigue la trayectoria propuesta dentro del espacio de trabajo, sin que se presente alguna singularidad. Por otra parte, en el movimiento de las variables rotacionales pasivas,  $\theta_{i1}$  se mantuvo en un intervalo de  $180^\circ$  a  $360^\circ$  y  $\theta_{i2}$  se mantuvo en el intervalo de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , donde  $i$  es el número de la cadena, la solución de la cinemática inversa no presentó saltos repentinos en la simulación, esto se considera debido a que  $\theta_{2i}$  depende de la función inversa del coseno y ésta solo funciona en el cuadrante 1 y 2 del plano.



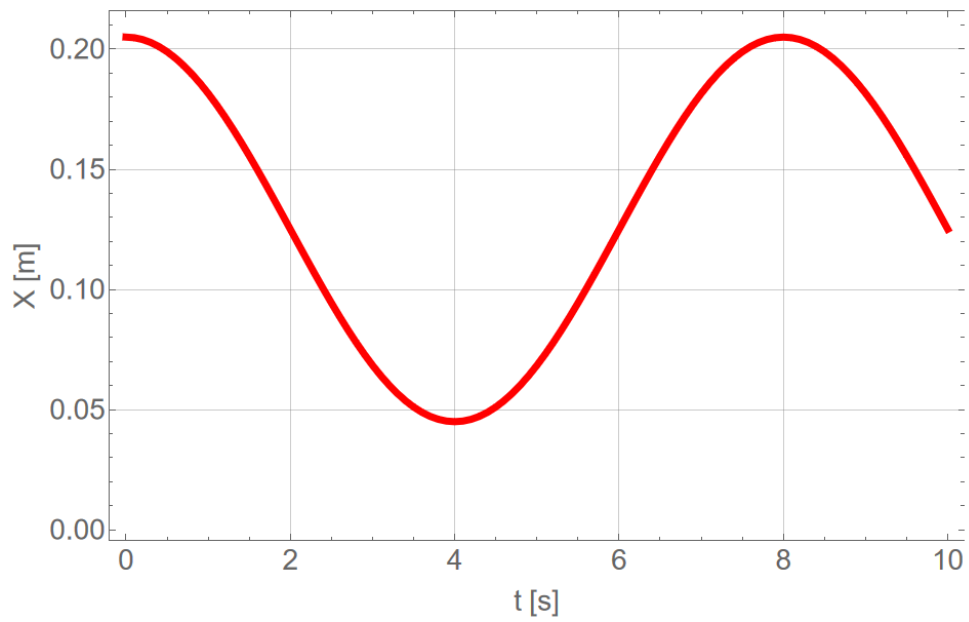


Figura 27. Movimiento en x del efector final.

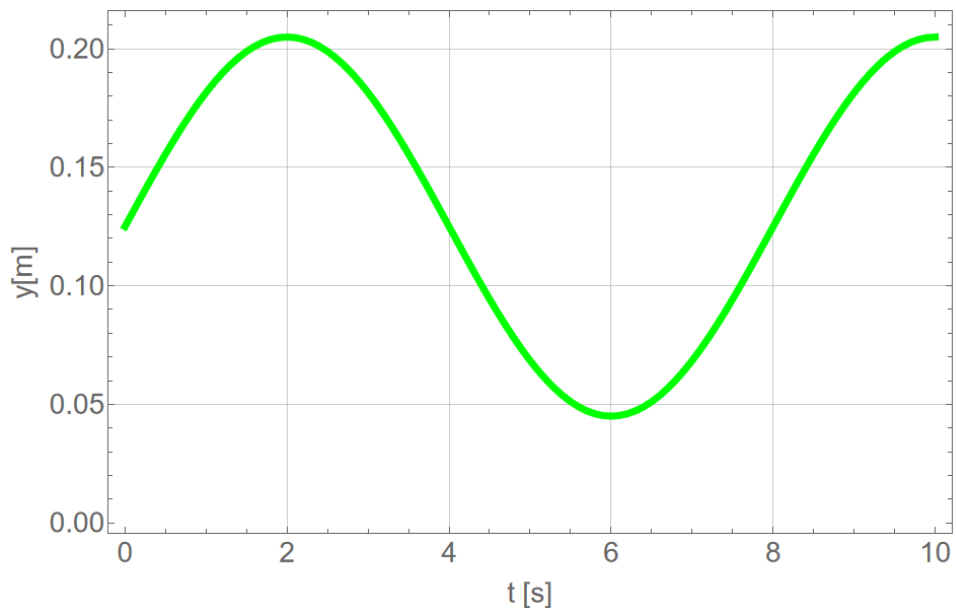


Figura 28. Movimiento en y del efector final.

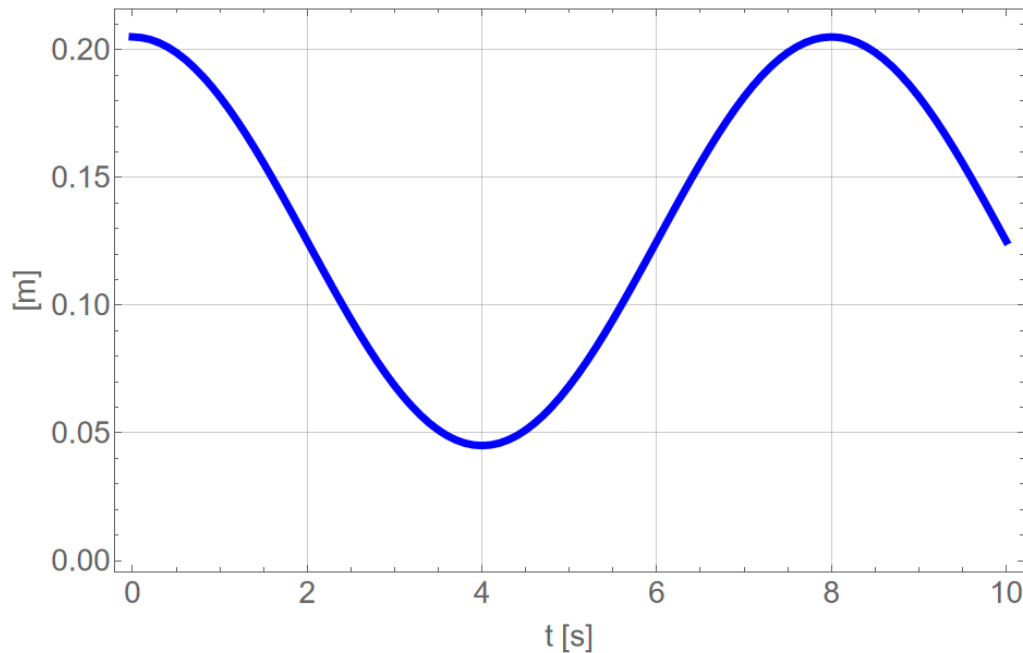


Figura 29. Movimiento en  $z$  del efector final.

#### 4.2 Simulación de los sistemas de control.

La simulación de los sistemas de control se llevó a cabo en el software Matlab/Simulink, se requirió del modelo dinámico con fricción, las ecuaciones de la cinemática inversa, la trayectoria deseada, la ley de control de cada esquema y los parámetros constantes de la Tabla 7; si se desea conocer más de la implementación, consultar el anexo con los códigos de las funciones y los diagramas a bloques. En las simulaciones se considera al error de posición como  $\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{q}} = (e_x, e_y, e_z)$  [m], al error de velocidad como  $\mathbf{e}_p = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = (e_{px}, e_{py}, e_{pz})$  [m/s] y la fuerza requerida en las juntas prismáticas como  $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$  [N]. Cabe mencionar que los errores se calculan con la diferencia del valor esperado con el valor medido.

Para evaluar el desempeño de los sistemas de control se toma el tiempo de asentamiento del error de posición y velocidad, la fuerza máxima de actuación ( $f$ ) que se presenta durante la prueba y principalmente se utiliza como indicador el valor RSME. Los aspectos antes mencionados ayudan a identificar cuál control de los que se presentan en este trabajo, tiene el mejor desempeño, esto bajo una tarea específica, ya sea para el control de posición o de seguimiento de trayectoria.

### 4.2.1 Control de Posición.

Los resultados de los controles de posición se muestran a continuación, se recuerda que la tarea parte de posición inicial  $\mathbf{q}_{\text{inicial}} = (0.10, 0.10, 0.10)$  [m], para llegar a la posición esperada  $\mathbf{q}_d = (0.18, 0.18, 0.18)$  [m] y mantenerse en estado permanente con  $\dot{\mathbf{q}}_d = (0,0,0)$  [m/s].

#### 4.2.1.1 Control PD.

El error de posición y el error de velocidad después de 2.5 segundos se mantienen constantes con  $\mathbf{e}_p = (0, 0, 0)$  [m/s] (Figura 31) y  $\mathbf{e} = (3.37, 4.85, 18.36) \times 10^{-3}$  [m] (Figura 30). La fuerza máxima de actuación requerida para que el efector final tienda a la posición deseada, se presenta en el primer instante con 95.5 [N], esto en las 3 juntas prismáticas de la PKM. En estado estacionario se mantiene en  $\mathbf{f} = (3.21, -4.63, 17.53)$  [N], cómo se puede observar en la Figura 32.

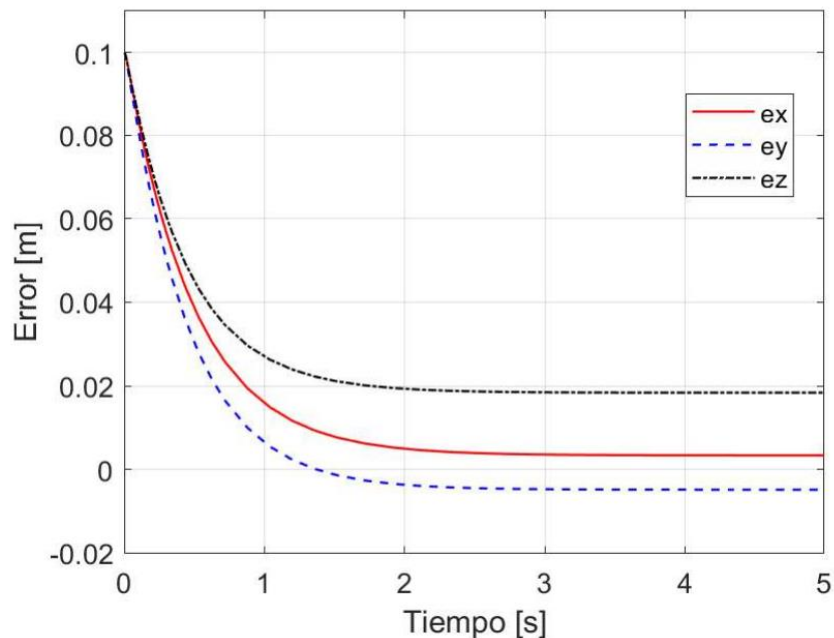


Figura 30. Error de posición del efector final con el control PD.

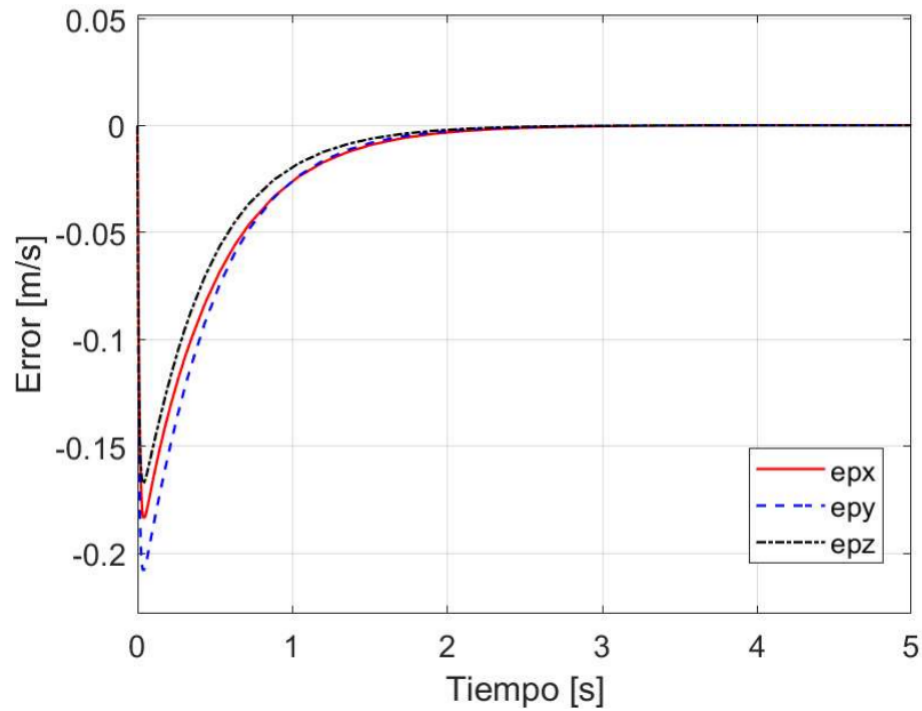


Figura 31. Error de velocidad del efector final con el control PD.

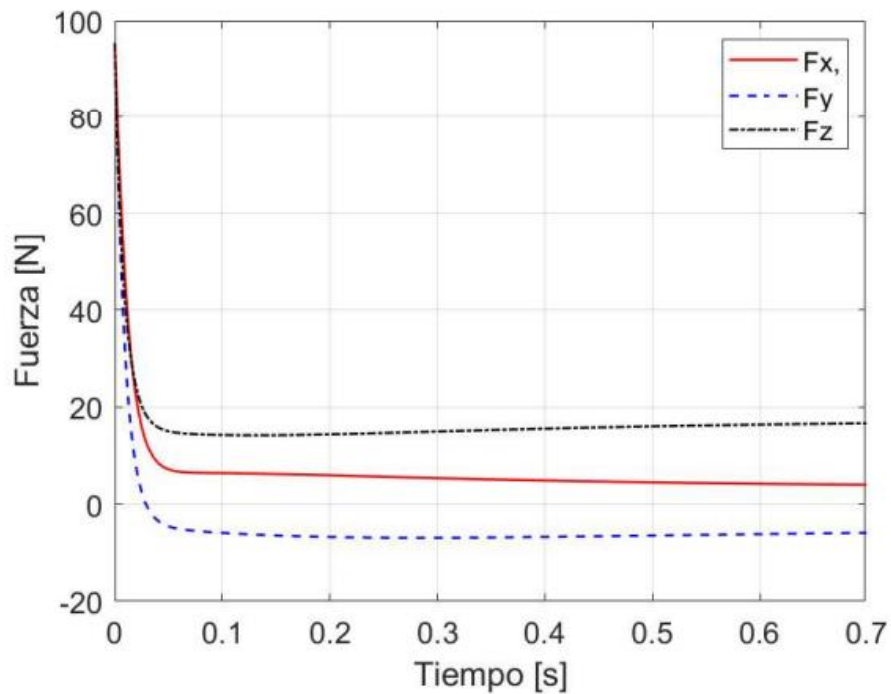


Figura 32. Fuerza del actuador requerida con el controlador PD.

#### 4.2.1.2 Control PD con compensación precalculada de gravedad.

El error de posición y el error de velocidad después de 2.5 segundos se mantienen constantes con  $e_p = (0, 0, 0)[m/s]$  (Figura 34) y  $e = (0.26, 1.10, 1.11) \times 10^{-4}[m]$  (Figura 33).

La fuerza máxima de actuación requerida para que el efector final tienda a la posición deseada, se presenta en el primer instante en la junta prismática del eje  $z$  ( $f_z$ ) con 95.5 [N], en estado estacionario se mantiene en  $\mathbf{f} = (2.92, -4.10, 17.51)[N]$ , cómo se puede observar en la Figura 34.

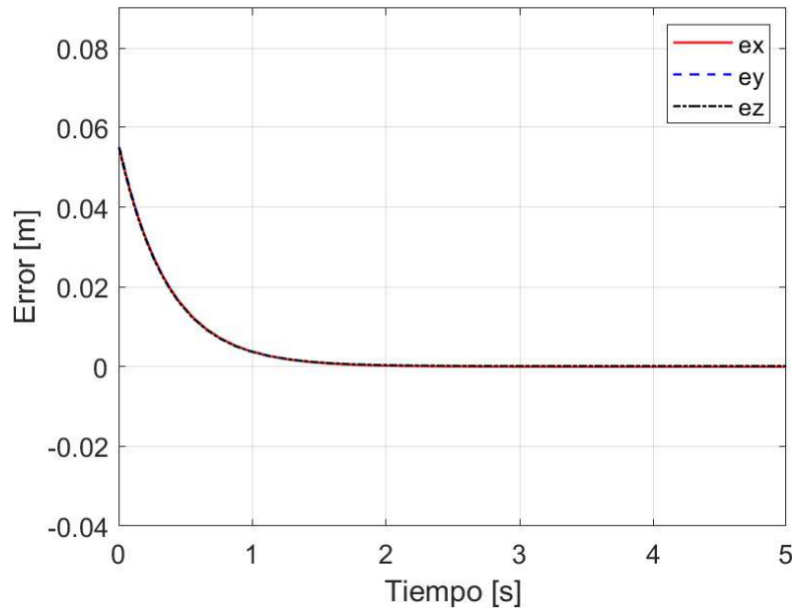


Figura 33. Error de posición del efector final con el control PD con compensación precalculada de gravedad.

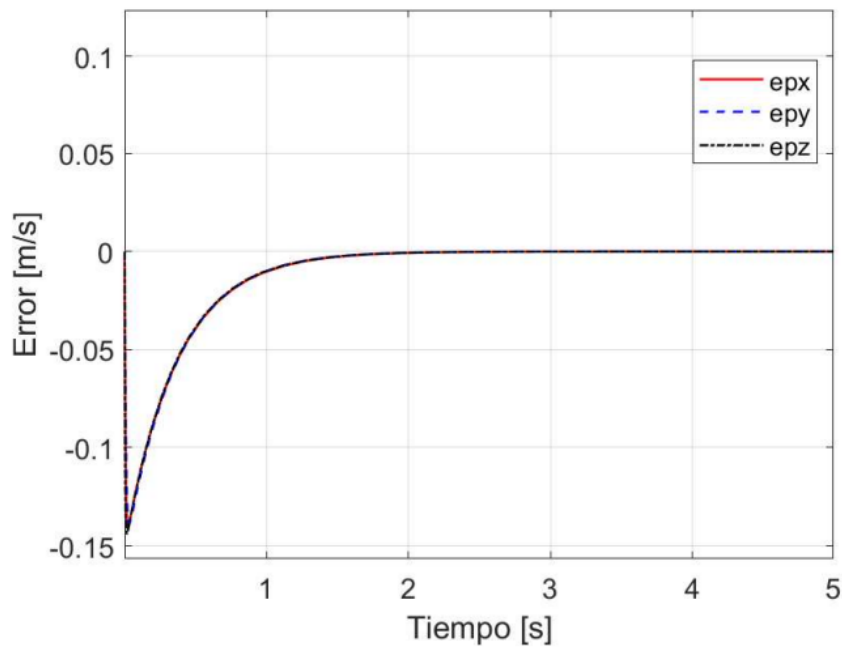


Figura 34. Error de velocidad del efector final con el control PD con compensación precalculada de gravedad.

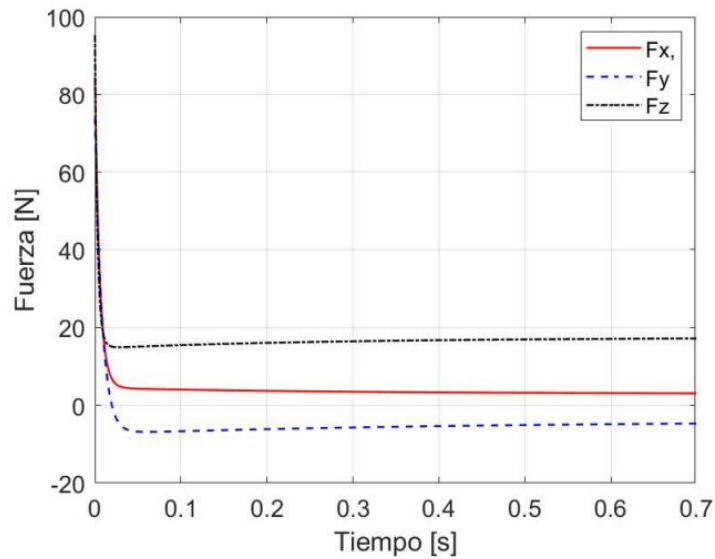


Figura 35. Fuerza del actuador requerida con el controlador PD con compensación precalculada de gravedad.

#### 4.2.1.3 Control PID

El error de posición y el error de velocidad después de 7 segundos se mantienen constantes con  $e_p = (0, 0, 0)$  [m/s] (Figura 37) y  $e = (1.5, 3.6, 3.1) \times 10^{-4}$  [m] (Figura 36). La fuerza máxima de actuación requerida para que el efector final tienda a la posición deseada, se presenta en el primer instante con 89 [N], esto en las 3 juntas prismáticas de la PKM. En estado estacionario se mantiene en  $f = (-3, 4.5, 17.4)$  [N], cómo se puede observar en la Figura 38.

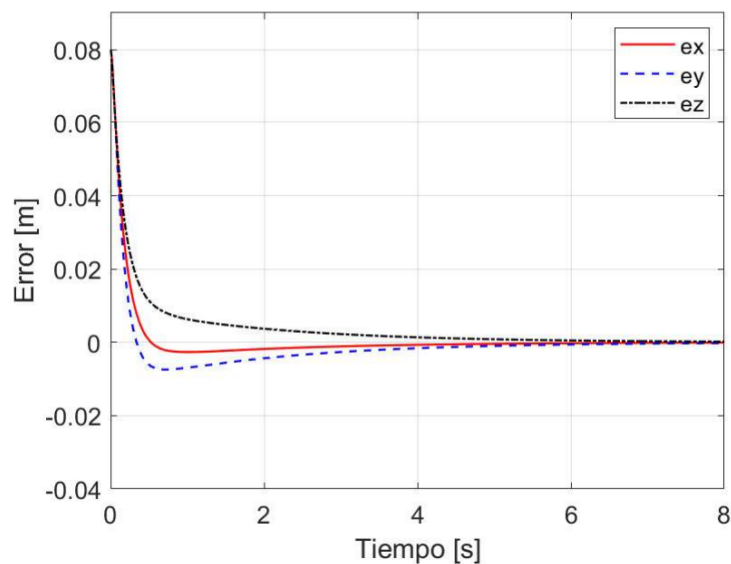


Figura 36. Error de posición del efector final con el control PID.

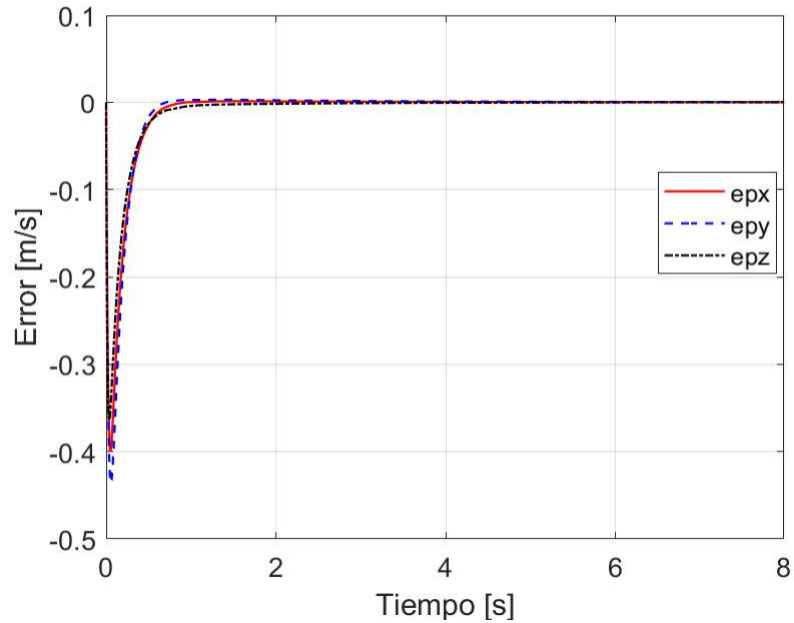


Figura 37. Error de velocidad del efector final con el control PID.

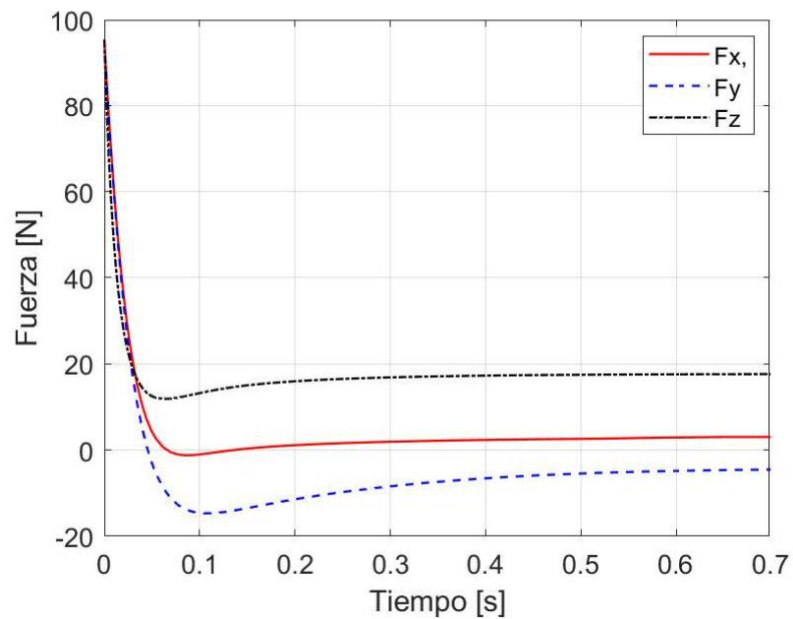


Figura 38. Fuerza del actuador requerida con el controlador PID.

#### 4.2.2 Control de movimiento.

En la simulación de los controles de movimiento, la posición inicial del efector final es  $\mathbf{q}_{\text{inicial}} = (0.125, 0.125, 0.125)$  [m] y la trayectoria deseada, así como sus derivadas están definidas por las ecuaciones (3.126), (3.92) y (3.93).

Trayectoria para el control de movimiento dada por la ecuación (3.126).

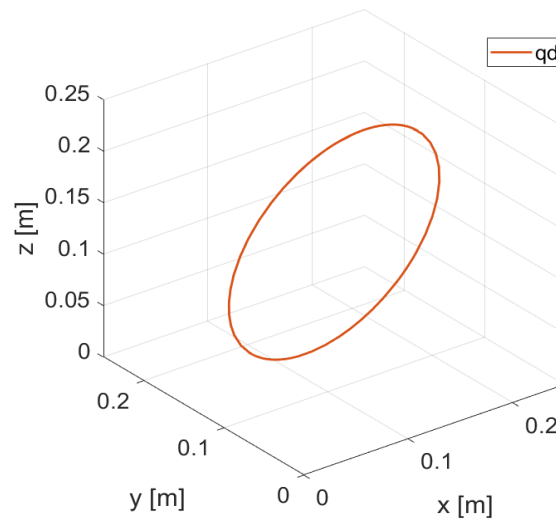


Figura 39. Trayectoria deseada.

#### 4.2.2.1 Seguimiento de trayectoria con el control PD con compensación precalculada de gravedad.

El control PD con compensación precalculada de gravedad se simula también en el seguimiento de trayectorias para analizar su desempeño. El error de posición ( $\mathbf{e}$ ) en este caso se mantiene en el intervalo de  $[-0.02, 0.0095][m]$  y el error de velocidad ( $\mathbf{e}_p$ ) se mantiene en el intervalo de  $[-0.03, 0.07][m/s]$ . La fuerza máxima de actuación requerida para que la posición del efector final tienda a la trayectoria deseada, se presenta en el primer instante en  $f_z$  con  $141 [N]$ , después  $\mathbf{f}$  se mantiene en el intervalo de  $[-60, 29][N]$  (Figura 42).

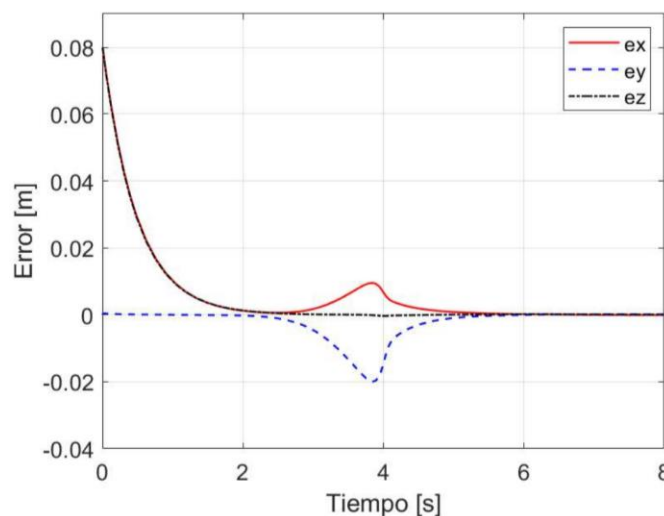


Figura 40. Error de posición del efector final con el control PD con compensación precalculada de gravedad.



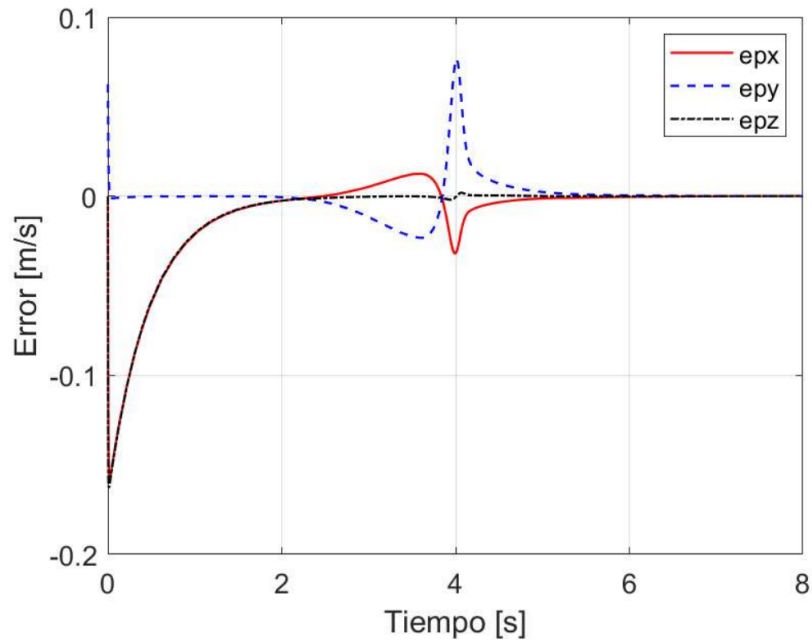


Figura 41. Error de velocidad del efector final con el control PD con compensación precalculada de gravedad.

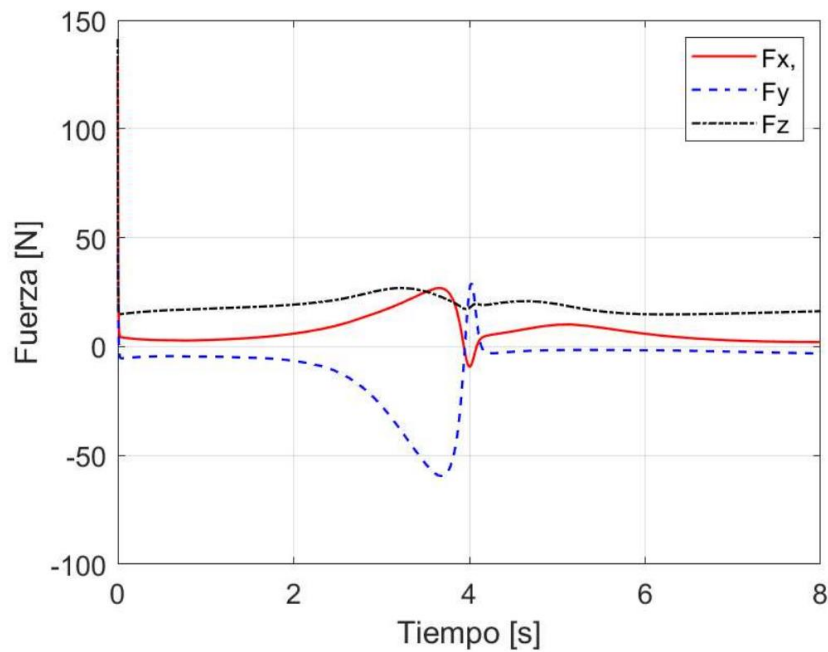


Figura 42. Fuerza del actuador requerida con el controlador PD con compensación precalculada de gravedad.

#### 4.2.2.2 Control PD con compensación.

En este caso después de 3 segundos, el error de posición ( $\mathbf{e}$ ) se mantiene en el intervalo de  $[-9, 9] \times 10^{-4} [m]$  y el error de velocidad ( $\mathbf{e}_p$ ) se mantiene en el intervalo de  $[-17, 20] \times 10^{-4} [m/s]$ .

La fuerza máxima de actuación requerida para que la posición del efector final tienda a la trayectoria deseada, se presenta en el primer instante en  $f_z$  con 30 [N], después  $f$  se mantiene en el intervalo de  $[-20.5, 25.4][N]$  (Figura 45).

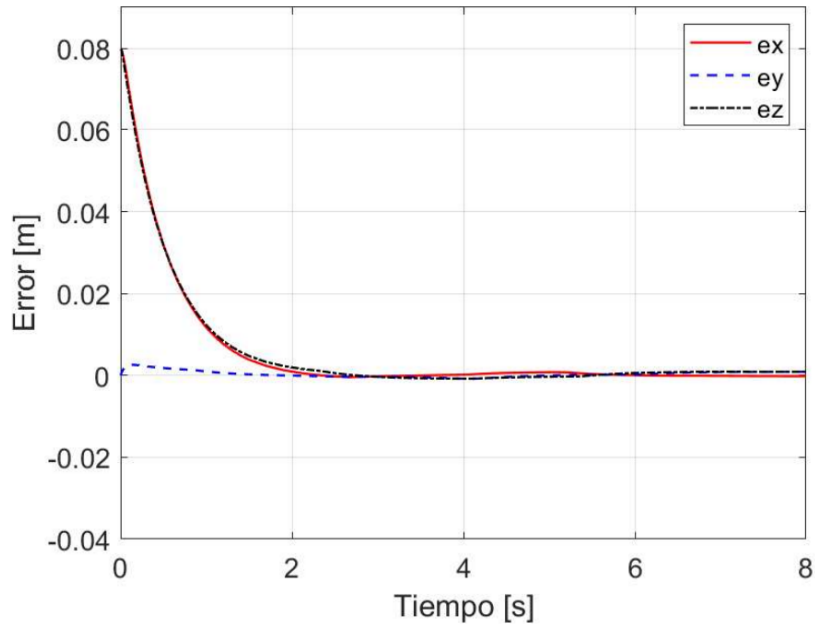


Figura 43. Error de posición del efector final con el control PD con compensación.

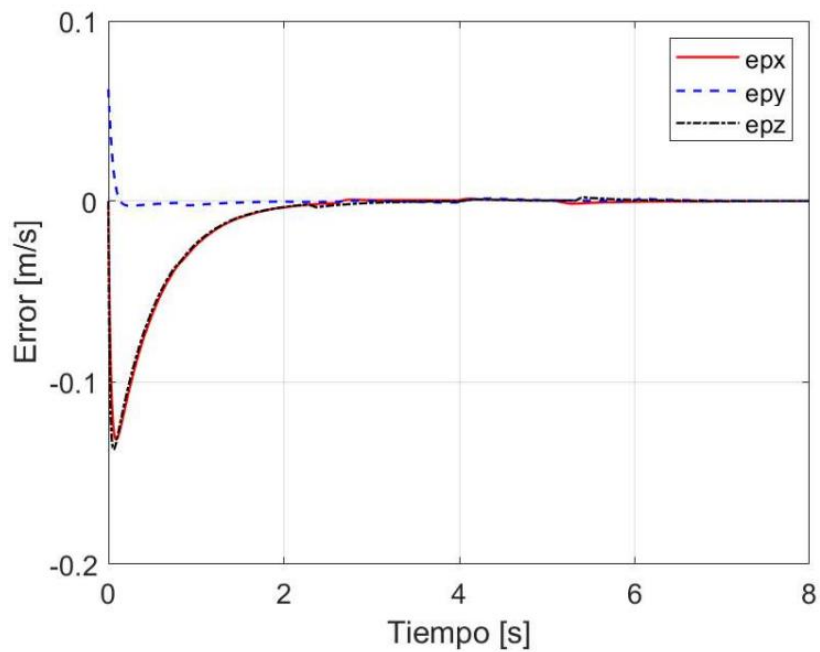


Figura 44. Error de velocidad del efector final con el control PD con compensación.

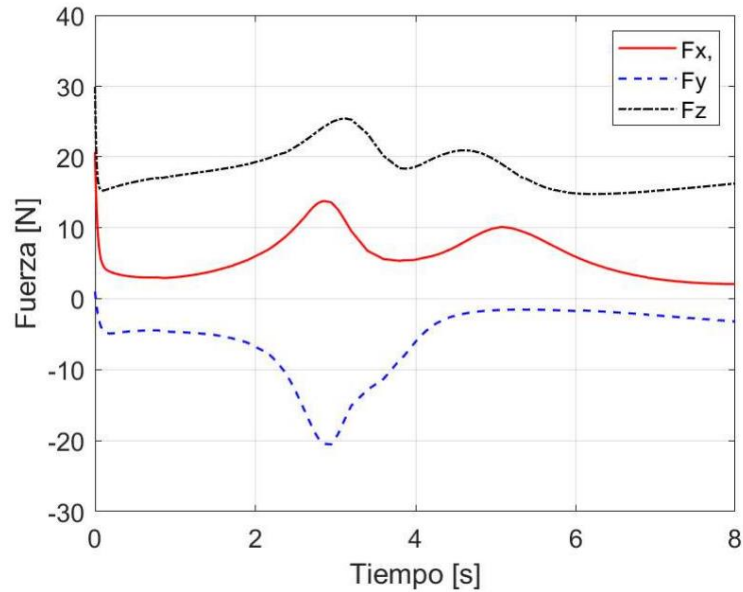


Figura 45. Fuerza del actuador requerida con el controlador PD con compensación.

#### 4.2.2.3 Control Par-Calculado+.

En la simulación se observó que después de 3 segundos, el error de posición ( $e$ ) se mantiene en el intervalo de  $[-6.7, 10] \times 10^{-4} [m]$  y el error de velocidad ( $e_p$ ) se mantiene en el intervalo de  $[-13, 17] \times 10^{-4} [m/s]$ . La fuerza máxima de actuación requerida para que la posición del efector final tienda a la trayectoria deseada, se presenta en el primer instante en  $f_x$  con 30 [N], después  $f$  se mantiene en el intervalo de  $[-21.9, 25.5] [N]$  (Figura 48).

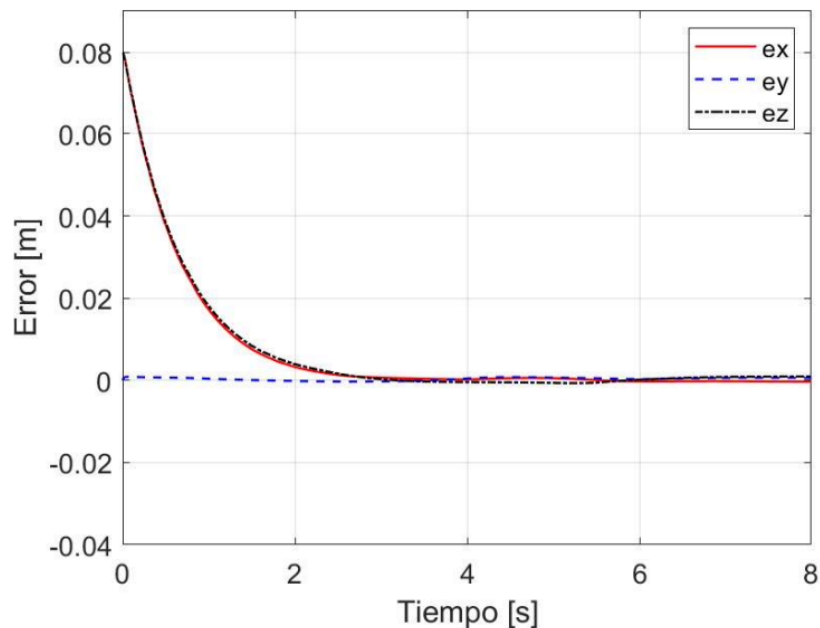


Figura 46. Error de posición del efector final con el control de Par-Calculado+.

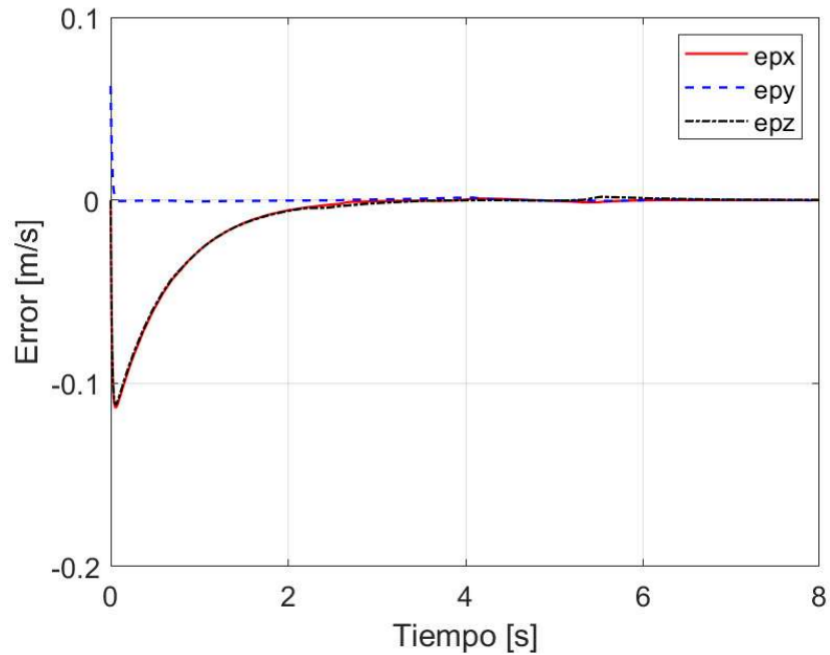


Figura 47. Error de velocidad del efector final con el control de Par-Calculado+.

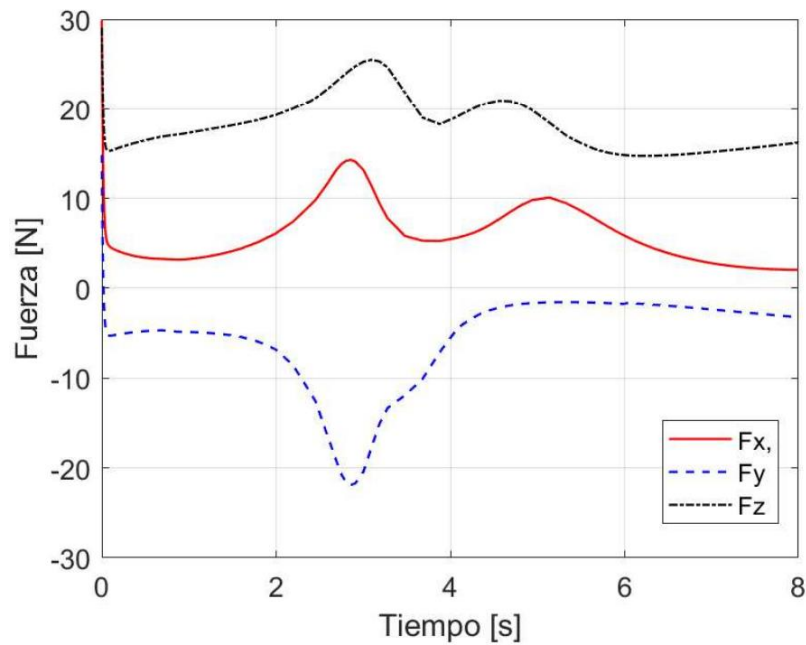


Figura 48. Fuerza del actuador requerida con el controlador de Par-Calculado+.

### 4.3 Evaluación de desempeño.

En la evaluación de desempeño de los controles de posicionamiento se calcula el valor RMSE de posición (2.54), se agrupan las ganancias, la fuerza máxima ( $f$ ) y el tiempo de asentamiento de los controles simulados, como se muestra en la Tabla 8.

*Tabla 8. Resultados de la simulación con los sistemas de control para posicionamiento.*

Control	Matrices de diseño	Posición RMSE [m]	Fuerza máxima requerida [N]	Tiempo de asentamiento [s]
PD	$K_p = \{955\}$ $K_v = \{445\}$	$197.00 \times 10^{-4}$	95.5	2.5
PD con compensación de gravedad	$K_p = \{1461\}$ $K_v = \{538\}$	$1.63 \times 10^{-4}$	95.5	2.5
PID	$K_p = \{1194\}$ $K_i = \{540\}$ $K_v = \{190\}$	$3.910 \times 10^{-4}$	95.5	7

En las simulaciones de los controles para el objetivo de posición, el valor RMSE de velocidad es cero, ya que el error de posición tiende a un valor constante. En la Tabla 8 se puede observar que el control PD tiene un valor RSME alrededor de cincuenta veces mayor al de los otros controles; para control PID el tiempo de asentamiento es más del doble que el de los demás y sobrepasa la referencia; el control PD con compensación de gravedad tiene el valor RMSE más bajo con un tiempo del transitorio de 2.5 [s], sin sobrepasar el límite de fuerza establecida de 100[N], por tales motivos resulta ser el control con el mejor desempeño para posicionamiento.

Para la evaluación de desempeño de los controles de movimiento se calcula el valor RMSE de posición y de velocidad (2.54), también se agrupan las ganancias, la fuerza máxima ( $f$ ) y el tiempo de asentamiento de los controles simulados, como se muestra en la Tabla 9.

*Tabla 9. Resultados de la simulación con los sistemas de control para movimiento.*

Control	Matrices de diseño	Posición RSME [m]	Velocidad RSME [m/s]	Fuerza máxima requerida [N]	Tiempo de asentamiento [s]
PD con compensación de gravedad	$K_p = \{1580\}$ $K_v = \{760\}$	$116 \times 10^{-4}$	$338 \times 10^{-4}$	141	--
PD con compensación	$K_p = \{185.5\}$ $K_v = \{95\}$	$8.698 \times 10^{-4}$	$12 \times 10^{-4}$	30	3
Par- Calculado+	$K_p = \{107\}$ $K_v = \{71\}$	$8.487 \times 10^{-4}$	$11 \times 10^{-4}$	30	3

En los resultados de las simulaciones de los controles de seguimiento de trayectoria (Tabla 9), se observa que el control PD con compensación de gravedad tiene un menor desempeño respecto a los demás controles que se presentan; en este control el error de posición y velocidad

no se mantienen constantes generando valores RMSE muy altos, además sobrepasa los 30 [N] de fuerza. Por otro lado, el control PD con compensación y el de Par-Calculado+ tienen un comportamiento similar con un par máximo de 30 [N], pero con la diferencia de que el control de Par calculado+ tiene un valor RMSE menor, tanto de posición como de velocidad, resultando ser el control con el mejor desempeño. En los controles con el mejor desempeño, se cumple con todos los parámetros de diseño establecidos, por otra parte, en la sintonización de los sistemas de control se observó que, si se desea mejorar el desempeño de los controles, se requiere incrementar los valores de las ganancias  $K_p$  y  $K_v$ , lo cual involucra un aumento de la fuerza de actuación requerida en las juntas prismáticas.

Las gráficas siguientes presentan la comparación de la posición del efector final con la trayectoria deseada, obtenidas de la simulación con el control de Par-Calculado+, en donde se observa que logra seguir la trayectoria con un desempeño acorde a los resultados de la Tabla 9 y a lo observado en gráfica del error de posición y velocidad (Figura 46 y 47).

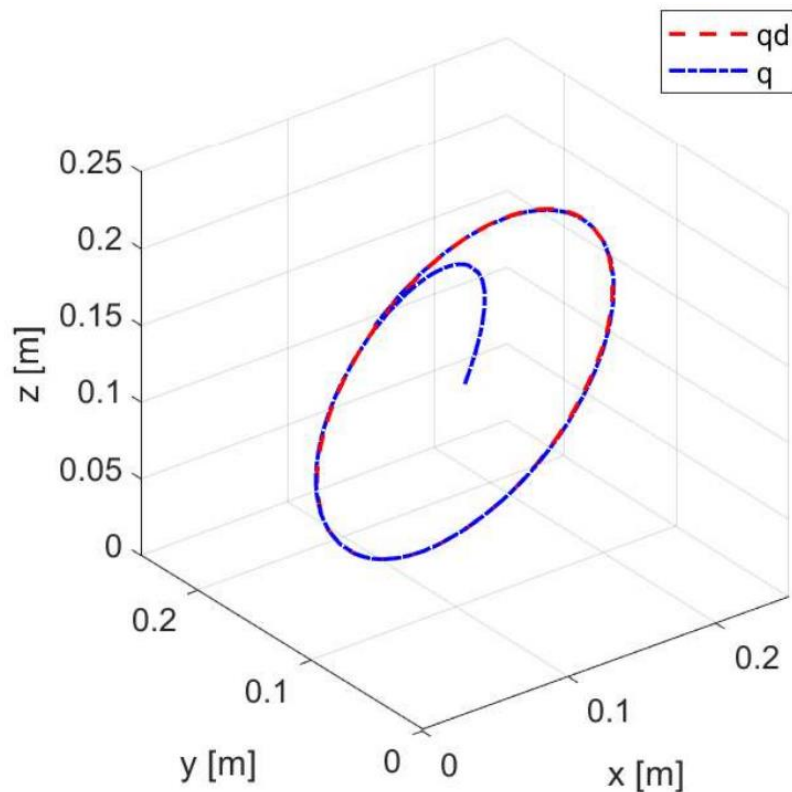


Figura 49. Trayectoria del efector final y deseada con el control de Par-Calculado+.

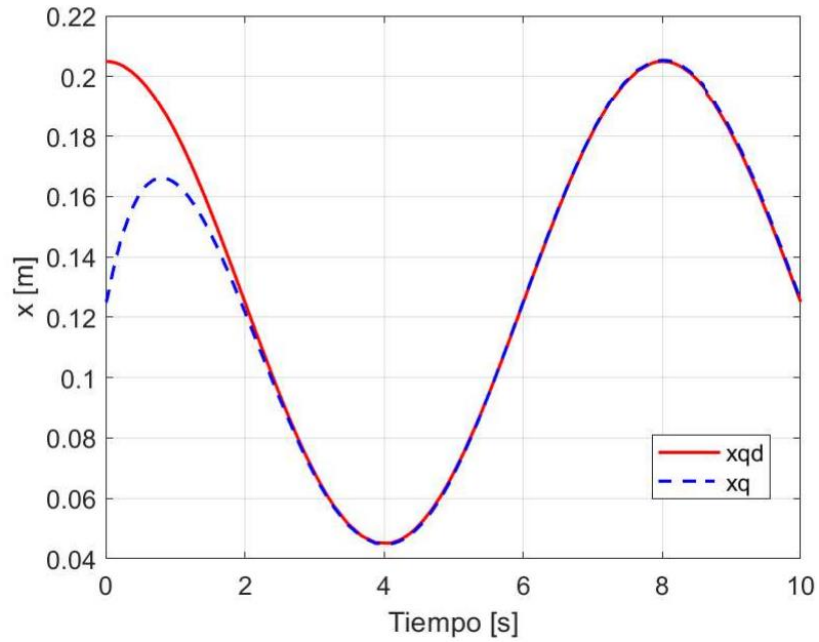


Figura 50. Trayectoria en el eje x del efector final y la deseada, con el control de Par-Calculado+.

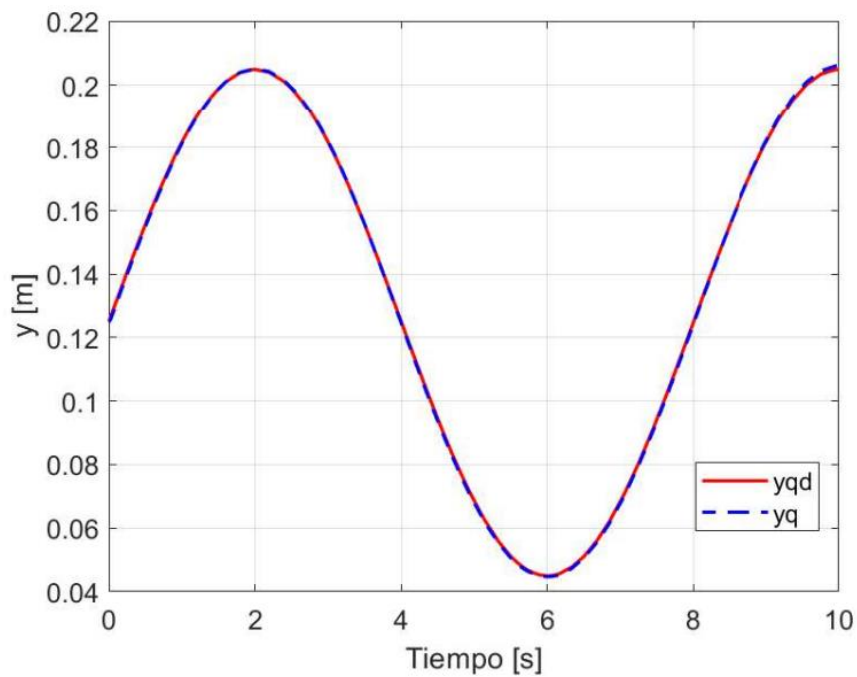


Figura 51. Trayectoria en el eje y del efector final y la deseada, con el control de Par-Calculado+.

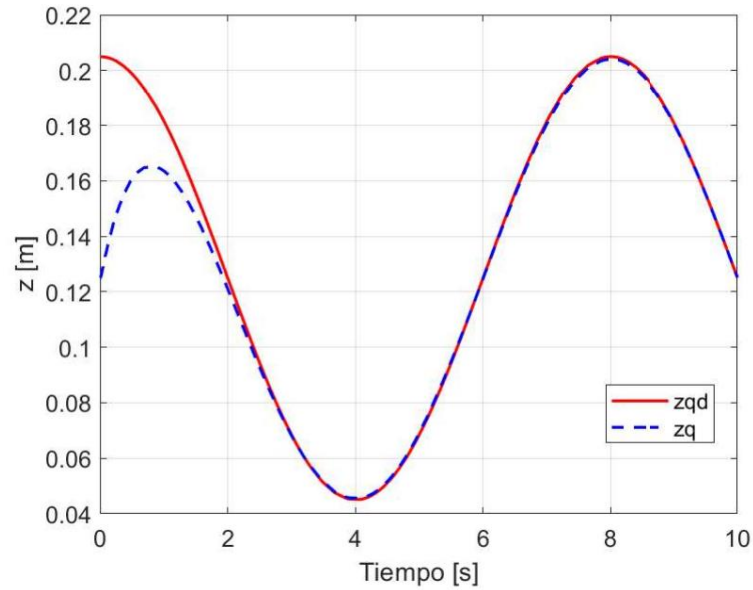


Figura 52. Trayectoria en el eje z del efector final y la deseada con el control de Par-Calculado+.

#### 4.4 Interfaz gráfica en LabVIEW.

Se desarrolló una interfaz gráfica en LabVIEW para los sistemas de control analizados, en donde se puede variar los parámetros constantes del modelo dinámico, de la trayectoria y posición deseada, también se muestran las gráficas de posición, velocidad, error de posición, error de velocidad y fuerza (Figuras 54 y 55). Al correr el programa inicia con los parámetros y sintonizaciones utilizados en este trabajo; se agregó en la primera pestaña, instrucciones y consideraciones que faciliten el uso de la interfaz (Figura 53). El fin de agrupar los sistemas de control en un solo programa en LabVIEW es para analizar el comportamiento con diferentes parámetros y sintonizaciones, de forma práctica y rápida, para así tomar decisiones de diseño de forma oportuna, así como dar un camino para la implementación de una interfaz de usuario en un prototipo físico de la PKM de 3 GDL estudiada.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**  
**SISTEMA DE CONTROL PARA UNA MÁQUINA HERRAMIENTA PAREALELA**

Introducción | P - Control PD | P - Control PD - G | P - Control PID | M - Control PD - G | M - Control PD con compensación | M - Control Par-Calculado+

**Contenido.**  
Los sistemas de control que se presentan en la simulación son:  
**Control de posición.** Control PD, Control PD con compensación precalculada de gravedad, Control PID.  
**Control de trayectorias.** Control PD con compensación, Control PD con compensación precalculada de gravedad, Control Par-Calculado +.

**Instrucciones y consideraciones.**  
**Inicio.** Correr el VI y elegir alguno de los sistemas de control disponibles.  
**Parámetros constantes del modelo dinámico con fricción (ecuación 1).** La masa y longitud de los eslabones de cada cadena cinemática están nombrados como se observa en la figura. Los coeficientes  $f_1$  y  $f_{11}$  corresponden a la fricción de viscosa y los coeficientes  $f_2$  y  $f_{22}$  a la fricción de Coulomb.  
**Sistemas de control de posición.** A la posición deseada (x, y, z) se le puede variar de forma conjunta las componentes o por separado. La posición deseada por default es  $q_d = (0.18, 0.18, 0.18)$  y la posición inicial del efector final es  $q = (0.125, 0.125, 0.125)$ .  
**Sistemas de control de movimiento.** Se puede variar el periodo, radio y el origen  $h = (h_x, h_y, h_z)$ , de la trayectoria deseada que está descrita por la ecuación 2. Los valores por default son: radio = 0.08 [m], periodo = 8 [s] y origen  $h = (0.125, 0.125, 0.125)$  [m], este último coincide con la posición inicial del efector final.  
**Parámetros de diseño de los sistemas de control.** Por default están sintonizados de acuerdo a los parámetros del modelo y de la trayectoria y posición por default.  
**Simulación.** De cada control se muestran las gráficas de posición, velocidad, fuerza, error de posición y error de velocidad. Tomar en cuenta que, si se desea cambiar a otro sistema de control, detener el VI, ubicarse en la pestaña del sistema de control y volver a correr.

$$\tau = M(\dot{q})\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) \quad (1)$$

$$p_d = \begin{bmatrix} r \cos(\alpha r) + h_x \\ r \sin(\alpha r) + h_y \\ r \cos(\alpha r) + h_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

Figura 53. Pestaña introducción en la interfaz gráfica de LabVIEW.

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**  
**SISTEMA DE CONTROL PARA UNA MÁQUINA HERRAMIENTA PAREALELA**

Introducción | P - Control PD | P - Control PD - G | P - Control PID | M - Control PD - G | M - Control PD con compensación | M - Control Par-Calculado+

**Control PD con compensación precalculada de gravedad**  
 $\tau = k_p \ddot{q} + k_v \dot{q} + g(q_d)$

posición xyz | Posición x | Posición y | Posición z

Masa de los eslabones:  $m_1 = 0.4$ ,  $m_2 = 0.35$ ,  $m_3 = 0.8$

Longitud de los eslabones:  $L_1 = 0.23$ ,  $L_2 = 0.23$ ,  $L_3 = 0.095$ ,  $L_c = 0.25$

Coefficientes de fricción angular:  $f_1 = 0.0015$ ,  $f_2 = 0.1$ ,  $f_{11} = 0.003$ ,  $f_{22} = 0.0622$

Parámetros de diseño:  $k_p = 1461$ ,  $k_d = 530$

**Posición** (px, py, pz) | **Velocidad** (vx, vy, vz) | **Fuerza** (fx, fy, fz) | **Error de posición** (ex, ey, ez) | **Error de velocidad** (epx, epy, epz)

Figura 54. Pestaña del control PD con compensación precalculada de gravedad en la interfaz gráfica de LabVIEW.

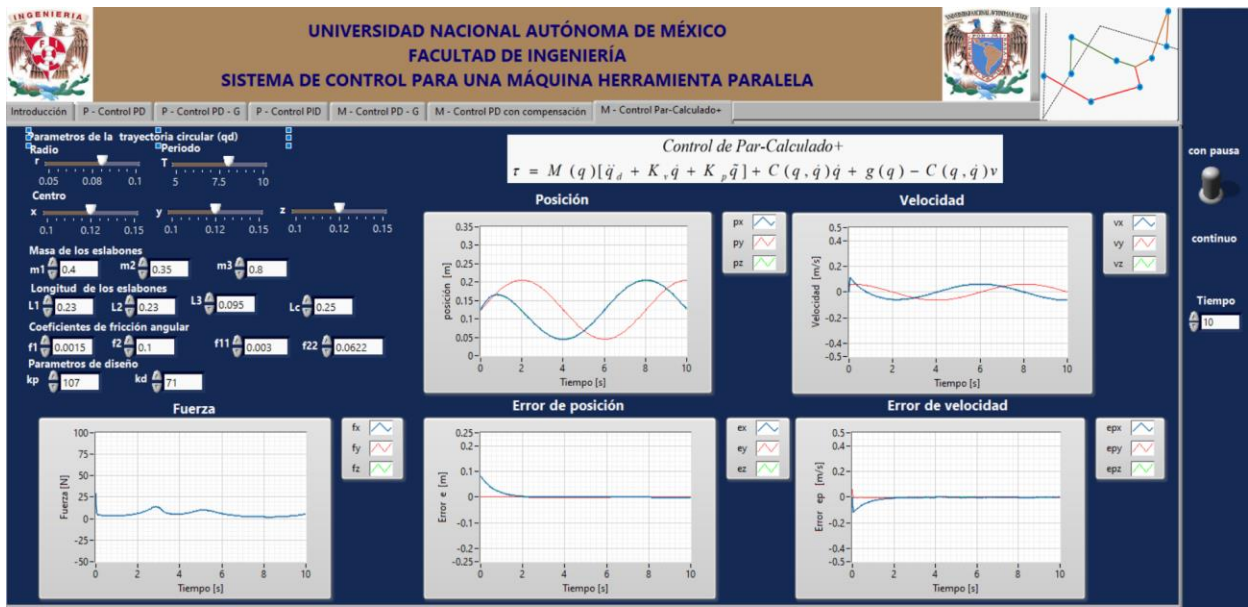


Figura 55. Pestaña del control de Par-Calculado+ en la interfaz gráfica de LabVIEW.

## 5 CONCLUSIÓN

### 5.1 Conclusión.

El análisis de las máquinas herramienta de cinemática paralela puede resultar complicado de llevar a cabo, para la PKM de 3 GDL que se analizó en el capítulo 3 (apartado 3.2), su configuración del mecanismo presenta características que en conjunto con la teoría seleccionada, se redujo la complejidad para el análisis cinemático y dinámico, permitiendo llegar a una expresión del modelo dinámico aplicable a los sistemas de control y de utilidad para la evaluación de desempeño.

En el análisis cinemático se observó que utilizar la matriz de transformación homogénea, así como posicionar y orientar los sistemas de referencia móviles en cada junta a criterio del diseñador, mantuvieron a las variables articulares en un rango de movimiento menor a  $180^\circ$ ; dando como resultado que en la simulación con el software Mathematica, se observara un movimiento continuo del efector final en el espacio de trabajo, sin que alguna de las variables pasivas presentara algún salto repentino durante el seguimiento de la trayectoria. Por otra parte, las características de que el mecanismo sea un arreglo ortogonal y que presente desacoplamiento cinemático, resultó de utilidad para que en conjunto con algunas consideraciones tomadas para el análisis dinámico mediante la formulación de Lagrange, se minimizará la complejidad y se tuviera un camino claro para poder llegar al modelo para robot de  $n$  GDL (3.121), que se encuentra expresado en términos de la posición ( $\mathbf{q}$ ), velocidad ( $\dot{\mathbf{q}}$ ) y aceleración ( $\ddot{\mathbf{q}}$ ) del efector final. También se resalta que la matriz de restricción  $\Gamma$  dada por la ecuación (3.70) fue de utilidad para agregar al modelo la fricción presente en las juntas.

Con los pasos propuesto para el diseño de los sistemas de control, se verifica conforme se avanza que los resultados sean correctos, ya que en pasos siguientes se requiere de la información anterior, dando como resultado que con el modelo dinámico y la sintonización realizada de los controles, en la simulación se observó un comportamiento del error de posición y velocidad, acotado cercano a cero; cabe mencionar que con los parámetros de diseño que la misma ley de control requirió y los propuestos, incluyendo el par de torsión definido en la caracterización del motor a pasos, se delimitó la sintonización a un comportamiento esperado, lo cual fue de utilidad para la evaluación de desempeño.

En la evaluación de desempeño de los controles de posicionamiento como en los de movimiento, tuvieron un mejor desempeño los que contemplaron la dinámica del sistema. Se resalta que el control de Par-Calculado+, pese a que tuvo un comportamiento similar al control PD compensado, resultó con los valores RMSE de posición y velocidad más bajos, ya que está mejor preparado para compensar los efectos de la dinámica, agregando a su ley de control un término de retroalimentación dinámica de los estados.

Se destaca que el procesamiento generado en la simulación por la ley de control, el modelo dinámico y el mismo software de la interfaz, tiene que ser soportado por el equipo de cómputo, para así lograr un control en tiempo real; es importante mencionar que la ley de control considere más elementos de la dinámica, no es el único camino en la mejora de desempeño, si no también que la ley de control actualice la acción correctiva del error y compense la dinámica no modelada, con conocimiento parcial o completo del sistema dinámico; en conclusión, de los sistemas de control analizados en este trabajo, el que está diseñado para tomar en mayor medida la dinámica del sistema y presenta un mejor desempeño, es el control de Par-Calculado+, con una ley de control que agrega un término de retroalimentación dinámico del error de posición y velocidad. Con las observaciones antes mencionadas y con la identificación del sistema de control con el mejor desempeño, se comprueba que se cumplieron satisfactoriamente con los objetivos y que la hipótesis planteada se acepta para los controles simulados.

### **5.2 Trabajo a futuro.**

1. Con el fin de aproximarse más a la dinámica real del sistema, se puede utilizar un modelo de fricción más completo que el presentado en este trabajo; contemplar los efectos del actuador y agregar comportamientos no lineales del sistema que no se hayan modelado. Tomar en cuenta que agregar más elementos al modelo dinámico puede resultar complicado de realizar e involucra tener un equipo de cómputo más sofisticado, el cual permita realizar los cálculos que requiera el sistema de control en tiempo real, también se puede agregar solo algunos elementos no lineales que se puedan modelar y compensar los parámetros no modelados con una la ley de control que lo permita.

2. Para la configuración del mecanismo que se analizó, un paso siguiente en la mejora de desempeño es utilizar un sistema de control más sofisticado, tal como el control robusto y el control adaptativo, que contemplan la dinámica cambiante con la que se actualiza la acción correctiva del error y que compensan las incertidumbres, parámetros desconocidos del sistema, dinámica no modelada y perturbaciones.
3. El diseño y análisis de los sistemas de control abarcó hasta la simulación, el siguiente paso es la comparación y validación con un prototipo físico, analizando el efecto que pueda generar la dinámica no modelada del sistema, en el desempeño de los esquemas. También probar si la interfaz gráfica desarrollada en LabVIEW puede ser utilizada para una implementación física de la PKM.

---

---

**6 REFERENCIAS**

- Budynas, R. G., & Nisbett, J. K. (2012). *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley* (Novena ed.). México: McGraw-Hill Interamericana.
- Chen, L., Bu, Y., & Du, Z. (2021). Kinematics Analysis of 6-PUS Parallel Mechanism Based on Python and ADAMS. *2021 IEEE Conference on Telecommunications, Optics and Computer Science (TOCS)*, pp. 451-459. doi:10.1109/TOCS53301.2021.9689045
- Darvekar, S., Koteswara Rao, A. B., & Shankar Ganesh, S. (2021). Machining capability of a 2-D of parallel kinematic machine tool and conventional CNC milling machine. *Materials Today: Proceedings*, 45, pp. 3213-3218. doi:https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.12.376
- Elkady, A., Elkobrosy, G., Hanna, S., & Sobh, T. (2008). Cartesian Parallel Manipulator Modeling, Control and Simulation. *Parallel Manipulators, towards New Applications*, InTech. pp. 269-294.
- Escorcía, H. J., Chemori, A., & Aguilar, S. H. (2022). Adaptive RISE Feedback Control for Robotized Machining With PKMs: Design and Real-Time Experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. doi:10.1109/TCST.2022.3169015
- Escorcía, H. J., Chemori, A., Aguilar, S. H., & Jesus, A. M. (2020). A new solution for machining with RA-PKMs: Modelling, control and experiments. *Mechanism and Machine Theory*, 150, pp. 103864. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2020.103864
- Gu, X., Shen, H., & Li, T. (2021). Topology and kinematics of a 3T1R parallel robot mechanism with zero-coupling degree. (IEEE, Ed.) *2021 3rd International Symposium on Robotics & Intelligent Manufacturing Technology (ISRIMT)*, pp. 12-16. doi:10.1109/ISRIMT53730.2021.9596779
- Hernández, A., Altuzarra, O., Salgado, O., Pinto, C., & Petuya, V. (2012). Designing parallel manipulators: from specifications to a real prototype. *Industrial Robot: An International Journal*, 39(5), pp. 500-512. doi:https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1108/01439911211249797

- 
- Huang, Q., Hadeby, H., & Sohlenius, G. (2002). Connection Method for Dynamic Modelling and Simulation of Parallel Kinematic Mechanism (PKM) Machine. *International Journal, Advanced Manufacturing Technology*, 19, pp. 163-173. doi:<https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1007/s001700200010>
- Kelly, R., Santibáñez, V., & Loría, A. (2005). *Control of Robot Manipulators in joint space*. Springer.
- Kenjo, T., & Sugawara. (1994). Stepping motors and their micro-. *Oxford University Press*.
- Le, A. Y., Mills, J. K., & Benhabib, B. (2014). Dynamic modeling and control design for a parallel-mechanism-based meso-milling machine tool. *Robotica*, 32(4), pp. 515-532. doi:<https://doi.org/10.1017/S0263574713000842>
- Lewis, F. I., Dawson, D. M., & Abdallah, C. T. (2004). *Robot manipulator control: theory and practice* (Segunda ed.). Marcel Dekker.
- Merlet, J. P. (2006). *Parallel robots* (Segunda ed.). Springer: Dordrecht.
- NTN, T. N. (2004). *Rodamiento de Bolas y de Rodillos*. Corporation, NTN.
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Person Educación.
- Pandilov, Z., & Dukovski, V. (2012). Parallel kinematics machine tools; overview-from history to the future. *Annals of the Faculty of Engineering Hunedoara - International Journal of Engineering*, 10(2), pp. 111-124.
- Roudneshin, M., Ghaffari, K., & Aghdam, A. G. (2022). On Forward Kinematics of a 3SPR Parallel Manipulator. *IEEE Control Systems Letters*, 7, pp. 425-430. doi:[10.1109/LCSYS.2022.3189314](https://doi.org/10.1109/LCSYS.2022.3189314)
- Ruiz, A., Campa, F. J., Altuzarra, O., Herrero, S., & Diez, M. (2022). Mechatronic Model of a Compliant 3PRS Parallel Manipulator. *Robotics*, 11(4). doi:<https://doi.org/10.3390/robotics11010004>
- Saied, H., Chemori, A., El Rafei, M., & Francis, C. (2021). A Novel Model-Based Robust Super-Twisting Sliding Mode Control of PKMs: Design and Real-Time Experiments.
-

- 2021 *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp. 8029-8035. doi:10.1109/IROS51168.2021.9636168
- Saied, H., Chemori, A., Rafei, M. E., Francis, C., & Pierret, F. (2018). Actuator and Friction Dynamics Formulation in Control of PKMs: From Design to Real-Time Experiments. *2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp. 5634-5639. doi:10.1109/IROS.2018.8594329
- Serje, M. D., & Pacheco, B. J. (2017). Cinemática paralela en la máquina-herramienta: investigación, desarrollo y tendencias futuras. *DYNA*, 84(201), pp. 17-26. doi:<https://doi.org/10.15446/dyna.v84n201.59572>
- Sholanov, K. S. (2021). *Parallel manipulators of robots : theory and applications* (Primera ed., Vol. 92). Springer International Publishing.
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., & Oriolo, G. (2010). *Robotics : modelling, planning and control*. Springer London.
- SKF. (s.f.). *Productos de ingeniería*. España: Rodamientos vigo , S.A.
- Staicu, S. (2019). *Dynamics of parallel robots*. Springer.
- Stamper, R. E. (1997). *A Three Degree of Freedom Parallel Manipulator with Only Translational Degrees of Freedom*. [Tesis doctoral], University of Maryland at College Park.
- Tejeda, E. E. (2010). Análisis de motores a pasos de fuerza de Lorentz. [Tesis de pregrado], Universidad Nacional Autónoma de México.
- Téllez, G. J. (2018). *Diseño mecánico de una máquina herramienta paralela*. [Tesis de pregrado], Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- THK CO., LTD. (2021). *Linear Ball Slide General Catalog*. Recuperado el mayo de 2022, de THK Catalog Center: <https://www.thk.com/catalog/?lang=en>
- Tosatti, L. M., Blanchi, G., Fassi, I., Boër, C. R., & Jovane, F. (1998). An integrated methodology for the design of parallel kinematic machines (PKM). *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 47(1), pp. 341–345. doi:[https://doi.org/10.1016/S0007-8506\(07\)62847-9](https://doi.org/10.1016/S0007-8506(07)62847-9)



- 
- Tsai, L. W. (1999). *Robot analysis - The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons.
- Wang, J., Wu, J., Wang, L., & You, Z. (2009). Dynamic feed-forward control of a parallel kinematic machine. *Mechatronics*, 19(3), pp. 313-324. doi:<https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2008.11.004>.
- Yáñez, V. R. (2012). Investigación de mecanismos paralelos para el desarrollo de micromáquinas herramienta. Editor: Universidad Nacional Autónoma de México, Colección: Ciencia Nueva. doi:<https://doi.org/10.22201/dgpyfe.9786070253287e.2012>
- Yáñez, V. R. (2014). Bases para el desarrollo de Micromáquinas Herramienta Paralelas. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 11(2), pp. 212–223. doi:<https://doi-org.pbidi.unam.mx:2443/10.1016/j.riai.2014.02.004>
- Yáñez, V. R., Luna, D. Á., Cos, D. j., Cuenca, J. F., & Velázquez, V. F. (2021). Structural dynamics of a 3 DOF parallel kinematic machine. *Ingeniería investigación y tecnología*, 22(2), pp. 1-13. doi:<https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2021.22.2.013>
- Yáñez, V. R., Téllez, G. J., López, P. M., & Urbiola, S. L. (2022). Dynamic stability of a parallel kinematic machine. *Journal of Applied Research and Technology*, 20(1), pp.1-16. doi:<https://doi.org/10.22201/icat.24486736e.2022.20.1.1278>
- Zhang, D. (2010). *Parallel Robotic Machine Tools*. Springer New York.
- Zhao, Y., & Gao, F. (2009). Inverse dynamics of the 6-dof out-parallel manipulator by means of the principle of virtual work. *Robotica*, 27(2), pp. 259-268. doi:[10.1017/S0263574708004657](https://doi.org/10.1017/S0263574708004657)
- Zhuang, J., Chen, C., & Wang, H. (2011). Study on the Motion Control System of a Novel 3-DOF PKM Module Based on Turbo PMAC. *2011 Second International Conference on Mechanic Automation and Control Engineering*, pp. 1694-1697. doi:[10.1109/MACE.2011.5987282](https://doi.org/10.1109/MACE.2011.5987282)
-

7.1 Código en Mathematica del análisis cinemático.

Funciones

```

In[1]:= Qx[α_] := {{1, 0, 0, 0}, {0, Cos[α], -Sin[α], 0}, {0, Sin[α], Cos[α], 0}, {0, 0, 0, 1}}
           |coseno |seno |seno |coseno
Qy[φ_] := {{Cos[φ], 0, Sin[φ], 0}, {0, 1, 0, 0}, {-Sin[φ], 0, Cos[φ], 0}, {0, 0, 0, 1}}
           |coseno |seno |seno |coseno
Qz[ε_] := {{Cos[ε], -Sin[ε], 0, 0}, {Sin[ε], Cos[ε], 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
           |coseno |seno |seno |coseno
Tx[x_] := {{1, 0, 0, x}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
Ty[y_] := {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, y}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
Tz[z_] := {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, z}, {0, 0, 0, 1}}
Txyz[x_, y_, z_] := Tx[x].Ty[y].Tz[z]

Q[e_, d_, a_, α_] := Qz[e].Tz[d].Tx[a].Qx[α]
    
```

CINEMÁTICA DIRECTA

```

In[12]:= (*CADENNA 1*)
a = Txyz[d1, rc, 0];
a = Qx[e11].Tz[r11];
a = Qx[e12].Tz[r12];
a = Qx[e13].Qz[-120°].Tx[r13];
a = Qz[-150°];

a = a.a;
a = a.a.a;
a = a.a.a.a;
a = a.a.a.a.a;

(*CADENNA 2*)
a = Ty[d2];
a = Qy[e21].Tz[r21];
a = Qy[e22].Tz[r22];
a = Qy[e23].Tz[r23];
a = Qz[90°];

a = a.a;
a = a.a.a;
a = a.a.a.a;
a = a.a.a.a.a;

(*CADENNA 3*)
a = Tz[d3];
a = Qz[e31].Tx[r31];
a = Qz[e32].Tx[r32];
a = Qz[e33].Tx[r33];
a = Qz[-30°];

a = a.a;
a = a.a.a;
a = a.a.a.a;
a = a.a.a.a.a;
a = a.a.a.a.a.a;
a = a.a.a.a.a.a.a;
a = a.a.a.a.a.a.a.a;
    
```

Posición del efector final con respecto al sistema inercial.

```

(*Cadena1*)
X1 = a[[1, 4]]
Y1 = Simplify[a[[2, 4]]]
Z1 = Simplify[a[[3, 4]]]

(*Cadena2*)
X2 = Simplify[a[[1, 4]]]
Y2 = a[[2, 4]]
Z2 = Simplify[a[[3, 4]]]

(*Cadena3*)
X3 = Simplify[a[[1, 4]]]
Y3 = Simplify[a[[2, 4]]]
Z3 = a[[3, 4]]
    
```

CINEMÁTICA INVERSA POR EL MÉTODO Geométrico

```

(*CADENNA1*) (*CADENNA2*) (*CADENNA3*)
r11 = 23; r21 = 23; r31 = 23;
r12 = 23; r22 = 23; r32 = 23;
r13 = 9.5; r23 = 9.5; r33 = 9.5;
rc = 25;
    
```

```

tf = 50;
Cero = {0, 0, 0};
PF1 = {30, 0, 0};
PF2 = {0, 25, 0};
PF3 = {0, 0, 25};
PF4 = {30, 25, 0};
(*Origen del círculo - trayectoria*)
pi = {12.5, 12.5, 12.5};

(*MÉTODO NUMÉRICO*)
For[t = 0, t ≤ tf, t += 1,
para cada
Perfil = 10 * (t / tf)^3 - 15 * (t / tf)^4 + 6 * (t / tf)^5;

x[t] = pi[[1]] + 8 * Cos[2 * Pi * Perfil];
y[t] = pi[[2]] + 8 * Sin[2 * Pi * Perfil];
z[t] = pi[[3]] + 8 * Cos[2 * Pi * Perfil];

xp1 = x[t] + f13 / 2;
yp1 = fc - y[t] - ((Sqrt[3] * f13) / 2);
zp1 = z[t];
θ11i = - ArcCos[(f12^2 - (yp1^2 + zp1^2) - f11^2) / (-2 * f11 * Sqrt[yp1^2 + zp1^2])] + ArcTan[yp1 / zp1];
θ12i = 3.1416 - ArcCos[((yp1^2 + zp1^2 - f11^2 - f12^2) / (-2 * f11 * f12))];
θ13i = - θ11i - θ12i;
d1i = xp1;
VarArt1[t] = {d1 → d1i, θ11 → θ11i, θ12 → θ12i, θ13 → θ13i};

xp2 = x[t] - f23;
yp2 = y[t];
zp2 = z[t];
θ21i = - ArcCos[(f22^2 - (xp2^2 + zp2^2) - f21^2) / (-2 * f21 * Sqrt[xp2^2 + zp2^2])] + ArcTan[xp2 / zp2];
θ22i = 3.1416 - ArcCos[((xp2^2 + zp2^2 - f21^2 - f22^2) / (-2 * f21 * f22))];
θ23i = - θ21i - θ22i;
d2i = yp2;
VarArt2[t] = {d2 → d2i, θ21 → θ21i, θ22 → θ22i, θ23 → θ23i};

xp3 = x[t] + f33 / 2;
yp3 = y[t] - ((Sqrt[3] * f33) / 2);
zp3 = z[t];
θ31i = - ArcCos[(f32^2 - (xp3^2 + yp3^2) - f31^2) / (-2 * f31 * Sqrt[xp3^2 + yp3^2])] + ArcTan[yp3 / xp3];
θ32i = 3.1416 - ArcCos[((xp3^2 + yp3^2 - f31^2 - f32^2) / (-2 * f31 * f32))];
θ33i = - θ31i - θ32i + 120 °;
d3i = zp3;
VarArt3[t] = {d3 → d3i, θ31 → θ31i, θ32 → θ32i, θ33 → θ33i};
]

```

## 7.2 Código y diagrama a bloques de los sistemas de control.

### Función del modelo dinámico.

```

1  function ppp = fcn(rp,r,q,qp,tau) %modelo dinamico
2
3  % variables y entradas
4  x=q(1); y=q(2); z=q(3); xp=qp(1); yp=qp(2); zp=qp(3);
5  fx=tau(1); fy=tau(2); fz=tau(3); pp=[xp;yp;zp]; F=[fx;fy;fz];
6
7  %Constantes
8  L1=0.23; L2=0.23; L3=0.095; Lc=0.25; m1=0.40; m2=0.35; m3=0.800; g=9.78;
9  f1=0.003; f2=0.0622; f11=0.0015; f22=0.1; I=eye(3);
10 A=0.5*(m1+m2+m3); B=((m1/6)+(m2/4))*(L1^2); C=0.5*g*L1*(m1+m2); EE=(m1+m2+m3)*g;
11 %Cinematica inversa
12 z1=z; y1=Lc-y-(sqrt(3)*L3/2); x2=x-L3; z2=z;
13 theta11=atan(y1/z1)-acos(((L2^2)-(L1^2)-((y1^2)+(z1^2)))/(-2*L1*sqrt(((y1^2)+(z1^2)))));
14 theta21=atan(x2/z2)-acos(((L2^2)-(L1^2)-(x2^2)-(z2^2))/(-2*L1*sqrt(((x2^2)+(z2^2)))));
15
16 %Friccion
17 fm1=[f1 0 0;0 f1 0;0 0 f1]; fm2=[f2 0 0;0 f2 0;0 0 f2];
18 fm11=[f11 0 0;0 f11 0;0 0 f11]; fm22=[f22 0 0;0 f22 0;0 0 f22];
19
20 %Modelo dinamico
21 rt = r.'; Mq = (2*A*I)+(rt^2*B*r); Mq_inv=Mq^(-1); Cqqp = rt^2*B*rp;
22 friccion=(fm1+fm11*r)*pp + fm2*sign(pp)+fm22*sign(r*pp);
23 gq = [0;0;EE]-rt*C*[sin(theta11);sin(theta21);0];
24
25 ppp = Mq_inv*(F-((Cqqp*pp)+gq +(friccion)));

```

### Función de la matriz restricción.

```

1  function r=fcn(q) % Funciones
2  x=q(1); y=q(2); z=q(3);
3
4  %Valores constantes
5  L1=0.23; L2=0.23; L3=0.095; Lc=0.25;
6  r1=(sqrt(3)*L3/2)-Lc; r2=0.5*L3; r3=(sqrt(3)*L3/2);
7
8  %Cinematica inversa
9  z1=z; y1=Lc-y-(sqrt(3)*L3/2);
10 x2=x-L3; z2=z;
11 y3=y-(sqrt(3)*L3/2); x3=x+(L3/2);
12 theta11=atan(y1/z1)-acos(((L2^2)-(L1^2)-((y1^2)+(z1^2)))/(-2*L1*sqrt(((y1^2)+(z1^2)))));
13 theta21=atan(x2/z2)-acos(((L2^2)-(L1^2)-(x2^2)-(z2^2))/(-2*L1*sqrt(((x2^2)+(z2^2)))));
14 theta31=atan(y3/x3)-acos(((L2^2)-(L1^2)-(x3^2)-(y3^2))/(-2*L1*sqrt(((x3^2)+(y3^2)))));
15
16 %Matriz restricción
17 r11=0;
18 r12=(-y-r1-L1*sin(theta11))/((y+r1)*cos(theta11)+z*sin(theta11));
19 r13=(-z+L1*cos(theta11))/((y+r1)*cos(theta11)+z*sin(theta11));
20 r21=(-x+L3+L1*sin(theta21))/(z*sin(theta21)-(x-L3)*cos(theta21));
21 r22=0;
22 r23=(-z+L1*cos(theta21))/(z*sin(theta21)-(x-L3)*cos(theta21));
23 r31=(-x-r2+L1*cos(theta31))/((x+r2)*sin(theta31)-(y-r3)*sin(theta31));
24 r32=(-y+r3+L1*sin(theta31))/((x+r2)*sin(theta31)-(y-r3)*sin(theta31));
25 r33=0;
26
27 r = (1/L1)*[r11 r12 r13;r21 r22 r23;r31 r32 r33];

```

**Control PD.**

Diagrama a bloques.

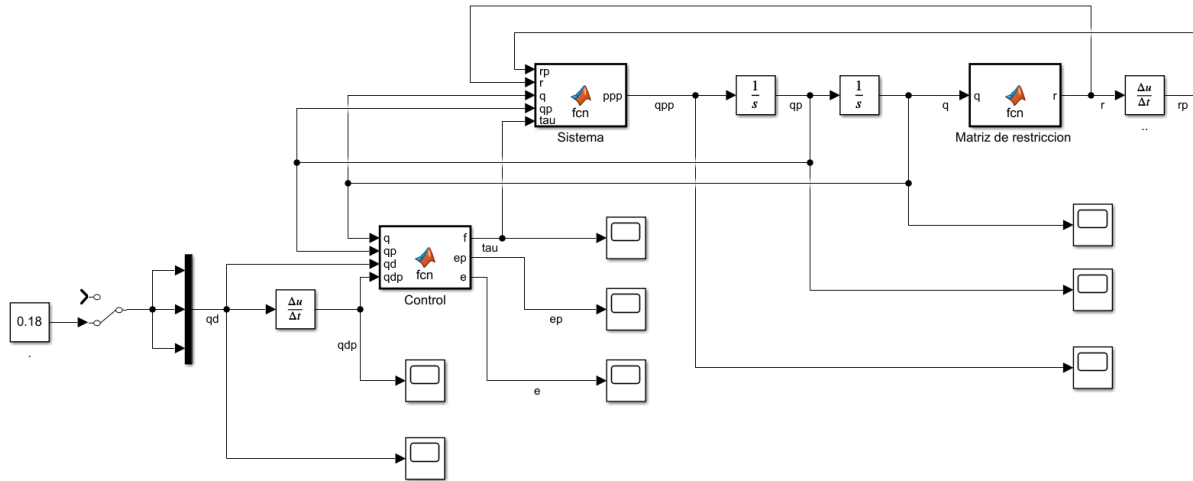


Figura 56. Diagrama a bloques del control PD.

Función del control.

```

1 function [f,ep,e] = fcn(q,qp,qd,qdp)
2
3 e=qd-q;
4 ep=qdp-qp;
5
6 Kp=[955 0 0;0 955 0;0 0 955];
7 Kv=[445 0 0;0 445 0;0 0 445];
8
9 f=(Kp*e)+(Kv*ep);
10 ep=qdp-qp;
11 e=qd-q;
    
```

**Control PD con compensación precalculada de gravedad.**

Diagrama a bloques.

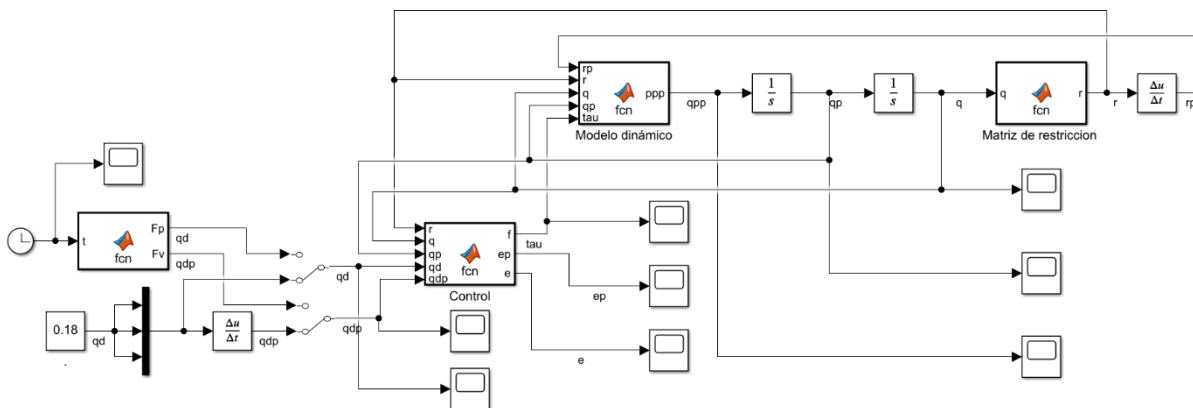


Figura 57. Diagrama a bloques del control PD-G+.

## Función del control.

```

1  function [f,ep,e] = fcn(r,q,qp,qd,qdp)%funcion
2  -  x=qd(1); y=qd(2); z=qd(3);
3  %Constantes
4  -  L1=0.23; L2=0.23; L3=0.095; Lc=0.25; m1=0.40; m2=0.35; m3=0.800; g=9.78;
5  -  C=0.5*g*L1*(m1+m2); EE=(m1+m2+m3)*g;
6
7  %Cinematica inversa
8  -  z1=z;   y1=Lc-y-(sqrt(3)*L3/2); x2=x-L3; z2=z;
9  -  theta11=atan(y1/z1)-acos(((L2^2)-(L1^2)-((y1^2)+(z1^2)))/(-2*L1*sqrt(((y1^2)+(z1^2)))));
10 -  theta21=atan(x2/z2)-acos(((L2^2)-(L1^2)-(x2^2)-(z2^2)))/(-2*L1*sqrt(((x2^2)+(z2^2)))));
11
12 %Ganancias y g(qd)
13 -  %Kp=[980 0 0;0 980 0;0 0 980]; Kd=[420 0 0;0 420 0;0 0 420];
14 -  %Kp=[283 0 0;0 283 0;0 0 283]; Kd=[157 0 0;0 157 0;0 0 157];
15 -  Kp=[1461 0 0;0 1461 0;0 0 1461]; Kd=[538 0 0;0 538 0;0 0 538];
16 -  %Kp=[1580 0 0;0 1580 0;0 0 1580]; Kd=[760 0 0;0 760 0;0 0 760];
17 -  %Kp=[2580 0 0;0 2580 0;0 0 2580]; Kd=[920 0 0;0 920 0;0 0 920];
18 -  rt = r.';   gqd = [0;0;EE]-rt*C*[sin(theta11);sin(theta21);0];
19 %Ley de control
20 -  e=qd-q;   ep=qdp-qp;%Error
21 -  f = (Kp*e)+(Kd*ep)+gqd;
22
23 -  ep=qdp-qp;
24 -  e=qd-q;

```

**Control PID.**

## Diagrama a bloques.

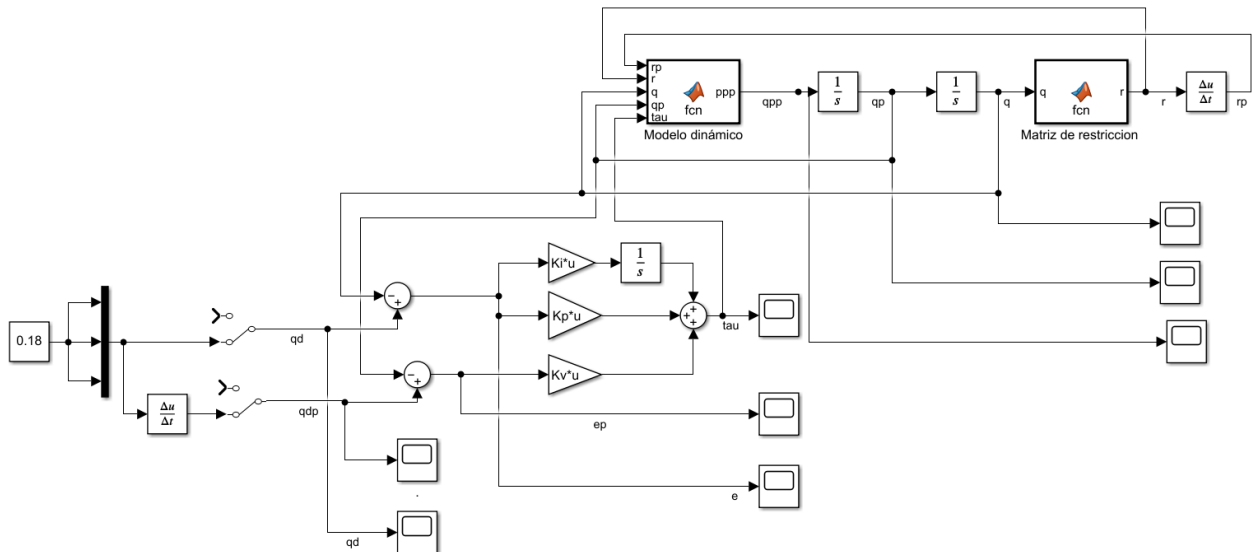


Figura 58. Diagrama a bloques del control PID.

### Control PD con compensación.

Diagrama a bloques.

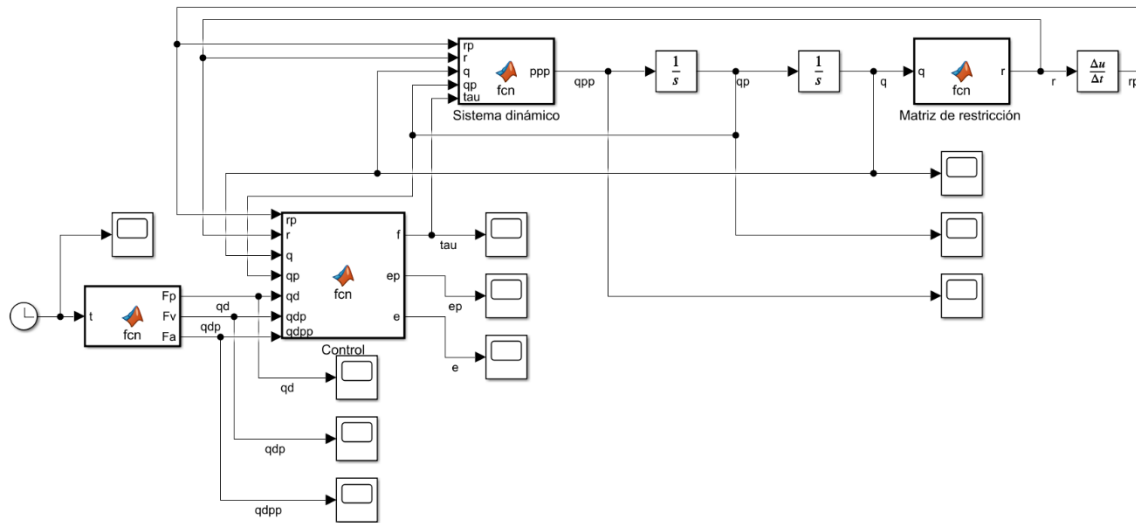


Figura 59. Diagrama a bloques del control PD con compensación.

Función del control.

```

1 function [f,ep,e] = fcn(rp,r,q,qp,qd,qdp,qdpp)
2 -   x=q(1); y=q(2); z=q(3); % Posicion deseada
3
4   %Constantes
5 -   L1=0.23; L2=0.23; L3=0.095; Lc=0.25; m1=0.40; m2=0.35; m3=0.800; g=9.78; I=eye(3);
6 -   A=0.5*(m1+m2+m3); B=((m1/6)+(m2/4))*(L1^2); C=0.5*g*L1*(m1+m2); EE=(m1+m2+m3)*g;
7
8   %Cinematica inversa
9 -   z1=z;   y1=Lc-y-(sqrt(3)*L3/2); x2=x-L3; z2=z;
10 -  theta11=atan(y1/z1)-acos(((L2^2)-(L1^2)-((y1^2)+(z1^2)))/(-2*L1*sqrt(((y1^2)+(z1^2)))));
11 -  theta21=atan(x2/z2)-acos(((L2^2)-(L1^2)-(x2^2)-(z2^2))/(-2*L1*sqrt(((x2^2)+(z2^2)))));
12
13  %Ley de control
14 -  rt = r.'; gq = [0;0;EE]-rt*C*[sin(theta11);sin(theta21);0];
15 -  Mq = (2*A*I)+(rt*2*B*r); Cqqp = rt*2*B*rp; e=qd-q;   ep=qdp-qp;
16 -  Kp=[185.5 0 0;0 185.5 0;0 0 185.5]; Kd=[95 0 0;0 95 0;0 0 95]; MTri = (Kd^(-1))*Kp;
17
18 -  f = (Kp*e)+(Kd*ep)+(Mq*(qdpp+(MTri*ep)))+(Cqqp*(qdp+MTri*e))+gq;
19
20 -  ep=qdp-qp;
21 -  e=qd-q;

```

Función de la trayectoria deseada.

```

1 function [Fp,Fv,Fa] = fcn(t)
2
3 -   r=0.08; hx=0.125 ;hy=0.125; hz=0.125; w=0.7853;
4
5 -   Fp = [r*cos(w*t)+hx;r*sin(w*t)+hy;r*cos(w*t)+hz];
6 -   Fv = [-r*w*sin(w*t);r*w*cos(w*t);-r*w*sin(w*t)];
7 -   Fa = [-r*((w)^2)*cos(w*t);r*((w)^2)*sin(w*t);-r*((w)^2)*cos(w*t)];

```

## Control par-calculado+

Diagrama a bloques.

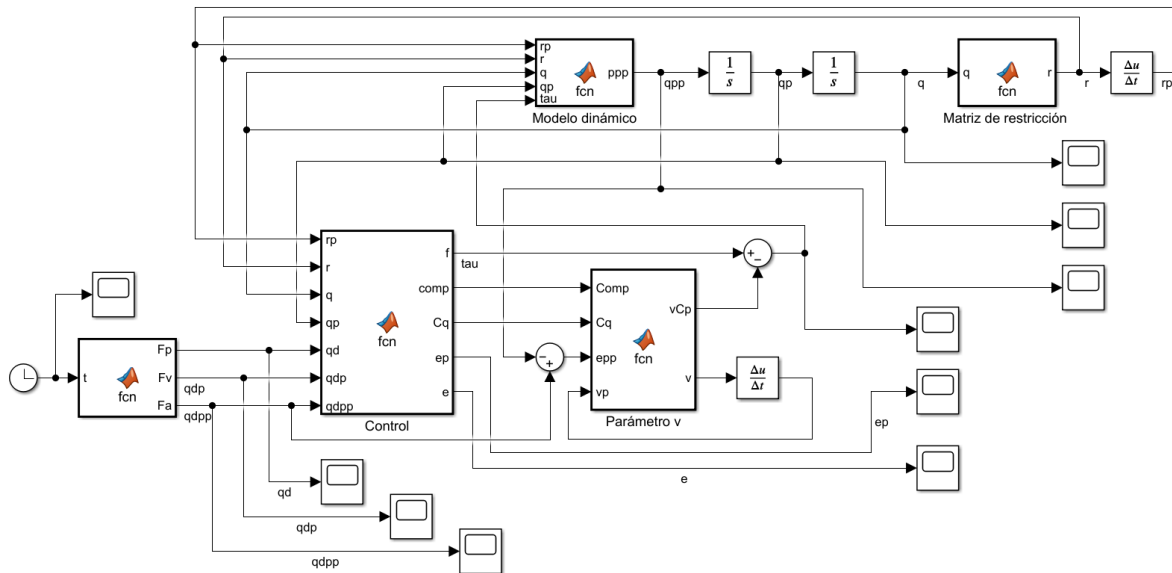


Figura 60. Diagrama a bloques del control Par-Calculado+.

Función del control.

```

1 function [f, comp, Cq, ep, e] = fcfn(rp, r, q, qp, qd, qdp, qdpp)
2 x=q(1); y=q(2); z=q(3); % Posicion deseada
3 %Constantes
4 L1=0.23; L2=0.23; L3=0.095; Lc=0.25; m1=0.40; m2=0.35; m3=0.800; g=9.78; I=eye(3);
5 A=0.5*(m1+m2+m3); B=((m1/6)+(m2/4))*(L1^2); C=0.5*g*L1*(m1+m2); EE=(m1+m2+m3)*g;
6 %Cinematica inversa
7 z1=z; y1=Lc-y-(sqrt(3)*L3/2); x2=x-L3; z2=z;
8 theta11=atan(y1/z1)-acos(((L2^2)-(L1^2)-((y1^2)+(z1^2)))/(-2*L1*sqrt(((y1^2)+(z1^2)))));
9 theta21=atan(x2/z2)-acos(((L2^2)-(L1^2)-(x2^2)-(z2^2))/(-2*L1*sqrt((x2^2)+(z2^2))));
10
11 %Ley de control
12 rt = r.'; gq = [0;0;EE]-rt*C*[sin(theta11);sin(theta21);0];
13 Mq = (2*A*I)+(rt*2*B*r); Cqqp = rt*2*B*rp; e=qd-q; ep=qdp-qp;
14 Kp=[107 0 0;0 107 0;0 0 107]; Kd=[71 0 0;0 71 0;0 0 71];
15 %Kp=[173 0 0;0 173 0;0 0 173]; Kd=[97 0 0;0 97 0;0 0 97];
16 %Kp=[283 0 0;0 283 0;0 0 283]; Kd=[157 0 0;0 157 0;0 0 157];
17 %Kp=[151 0 0;0 151 0;0 0 151]; Kd=[83 0 0;0 83 0;0 0 83];
18
19 f = (Mq*(qdpp+(Kp*e)+(Kd*ep)))+(Cqqp*qp)+gq;
20
21 comp = (Kp*e)+(Kd*ep) ;
22 Cq = Cqqp;
23 ep=qdp-qp;
24 e=qd-q;

```

Función del parámetro v.

```

1 function [vCp, v] = fcfn(Comp, Cq, epp, vp)
2 Lamda=32;
3 v = -(epp + Comp)-vp)*Lamda;
4 vCp = Cq*v;

```



**Cadena cinemática.** Conjunto de elementos (juntas y eslabones) unidos entre sí, de modo que sea posible el movimiento relativo entre ellos.

**Configuración 3PRRR.** Mecanismo paralelo con 3 cadenas cinemáticas, donde cada cadena se componen de una junta prismática y 3 juntas rotacionales.

**Coordenadas generalizadas.** Conjunto cualquiera de parámetros  $\{q_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ , que determinan de manera única la configuración del sistema. Estos parámetros no necesariamente tienen que ser homogéneos en cuanto a dimensión.

**Efecto final.** Es el objeto, dispositivo o herramienta que se coloca en la plataforma móvil donde se unen las cadenas cinemáticas de un mecanismo paralelo.

**Energía cinética.** Es la energía asociada al movimiento de un cuerpo y es directamente proporcional a la masa ( $m$ ) y al cuadrado de la rapidez ( $v$ ).

$$T = E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Por otra parte, para un cuerpo que se entra girando respecto a un eje de giro, la energía cinética rotacional es:

$$T = E_c = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

Donde  $I$  es el momento de inercia y  $\dot{\theta}$  es la rapidez angular.

**Energía potencial gravitatoria.** Es la energía que tiene un cuerpo debido a su posición en el campo gravitatorio, dada por la siguiente expresión. Donde  $m$  es la masa,  $g$  es la magnitud de la aceleración gravitatoria y  $h$  la altura a la que está el cuerpo.

$$V = E_p = mgh$$

**Estabilidad.** El origen  $x=0 \in \mathbb{R}^n$  de un sistema dinámico descrito por una ecuación diferencial dada por  $\dot{x} = f(t, x(t))$ , es un equilibrio estable si para toda condición inicial acotada, la solución  $x(t)$  permanece acotada.

**Estabilidad asintótica.** El origen  $x=0 \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio asintóticamente estable de la ecuación  $\dot{x} = f(t, x(t))$  si: El origen es estable y atractivo, esto último, significa que exista un número  $\delta' > 0$  tal que.

$$\|x(0)\| < \delta' \rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0$$

**Estabilidad asintótica global.** El origen  $x=0 \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio asintóticamente estable de forma global de la ecuación  $\dot{x} = f(t, x(t))$  si: El origen es estable y atractivo, esto último, significa lo siguiente.

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0 \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$$

**Grados de libertad (GDL) en un mecanismo serial o paralelo.** Es el número de variables articulares independientes necesarias para definir la posición y orientación del efector final en cualquier instante.

**Ley de control.** Función que realiza el cálculo del vector de fuerza y/o par de torsión en términos de la posición ( $q$ ), velocidad ( $\dot{q}$ ) y aceleración ( $\ddot{q}$ ) del efector final.

**Matriz diagonal.** Es una matriz donde todos los elementos que no son parte de la diagonal principal son cero, es decir:  $a_{ij} = 0$  para todo  $i \neq j$ .

**Matriz no singular.** Es una matriz que se puede invertir, lo que a su vez involucra que su determinante es diferente de cero.

**Matriz simétrica positiva definida.** Es una matriz cuadrada que es igual a su transpuesta y mayor a cero, como se muestra en la expresión.

$$A = A^T > 0$$

Sí y solo sí.

$$A^{-1} = (A^{-1})^T > 0$$

**Posición articular.** Coordenadas articulares generalizadas, en el caso donde los accionadores se localizan en las uniones entre los eslabones.

**Respuesta Transitoria.** Es el comportamiento del sistema frente a un cambio, desde un estado inicial, hasta un estado en el que permanece el sistema en el tiempo.

**Sintonizar:** En el área de control, consiste en determinar los valores de los parámetros de diseño del controlador que garanticen el cumplimiento del objetivo de control.

**Sistema de control de lazo cerrado.** Sistemas realimentados, se alimenta al controlador con la señal de error de actuación, que es la diferencia entre la señal de salida y sus derivadas y/o integrales.

**Sistema dinámico.** Sistema que produce un comportamiento que cambia o evoluciona con el paso del tiempo.

**Sistema en tiempo real.** Sistema que es capaz de responder y procesar la información al ritmo en que esta es recibida en la entrada.

**Tiempo de asentamiento.** El tiempo necesario para que la respuesta alcance el 2% alrededor de su valor final y permanezca en ese valor.

**Variable articular.** Posición angular o lineal de una articulación del mecanismo.