Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación

Sobre la Teoría de la Prueba para Lógicas Multimodales con Inversas

T E S I S

que para optar por el grado de

Maestro en Ciencia e Ingeniería de la Computación

PRESENTA:
Diego Carrillo Verduzco

Tutor:
Dr. Ismael Everardo Bárcenas Patiño
Facultad de Ingeniería, UNAM

México, Cd. Mx., Enero 2023

Sobre la Teoría de la Prueba para Lógicas Multimodales con Inversas

Diego Carrillo Verduzco

Agradecimientos

Aprovecho esta página, preludio a un tsunami de símbolos y conceptos abstractos para agradecerle a la gente que me apoyó para llegar hasta aquí: A mis padres, mi abuelita y mi hermana, a quienes les debo tanto; a Everardo por la guía y la instrucción durante el desarrollo de este trabajo; a mis amigos, incluyendo pero no limitándose a Claudia, Rodrigo, Javier, Victor, Karla; y a Alma, por acompañarme y dejarme acompañarla todo este tiempo.

Índice

Acerca de esta tesis

El presente trabajo aborda el estudio de la teoría de la prueba para las **lógicas multimodales con inversas**. Perseguimos este estudio desde dos perspectivas: primero, presentando **sistemas axiomáticos** para dichas lógicas, y subsecuentemente estudiando la novedosa técnica de **árboles de hipersecuentes** para generar un sistema tipo Gentzen.

Los sistemas axiomáticos son una herramienta bien establecida dentro del estudio de la lógica, pues permiten caracterizar una lógica de forma compacta —si bien no suelen ser herramientas muy efectivas para buscar pruebas. Aunque los sistemas axiomáticos no le son para nada ajenos a las lógicas multimodales —incluso algunas con modalidades inversas, como la lógica temporal o la dinámica [23, 18]— la literatura que dé énfasis a las modalidades inversas no es abundante.

Por su parte los sistemas de secuentes, también conocidos como sistemas de Gentzen, son herramientas de carácter mayormente sintáctico que tienen como fin determinar la validez de una fórmula de un sistema lógico en particular. Contar con estos sistemas tiene una serie de beneficios, desde facilitar el descubrimiento de ciertas propiedades en la lógica correspondiente hasta poder derivar algoritmos de inferencia para fórmulas dentro de dicha lógica. Nuestro estudio de los sistemas de árboles de hipersecuentes tiene antecedentes en el trabajo de Kashima [13] y Brünnler [5], entre otros, pero está inspirado principalmente por el trabajo de Francesca Poggiolesi [20]. Mientras que los sistemas de secuentes han sido ampliamente estudiados para lógicas proposicionales y de primer orden, no es el caso para las lógicas modales, cuyo estudio bajo el lente de la teoría de la prueba es comparativamente más reciente y menos desarrollado.

Las lógicas modales, y en particular las multimodales, tienen una multitud de aplicaciones en diversos dominios matemáticos y computacionales. La contribución del presente trabajo es un sistema de secuentes aplicable a todas estas lógicas, y particularmente relevante a las que cuentan con modalidades inversas, una construcción que agrega expresividad al lenguaje. Utilizando la técnica de árboles de hipersecuentes, desarrollamos un sistema correcto para la lógica multimodal con inversas que además cuenta con la propiedad de eliminación de corte.

Esta tesis está organizada como sigue: el primer capítulo se dedica a introducir conceptos básicos de lógica multimodal como sintaxis y semántica, así como algunas de las aplicaciones de éstas. El segundo capítulo introduce la lógica de nuestro interés utilizando un sistema axiomático tipo Hilbert, y demuestra la corrección de éste. El tercer capítulo presenta los árboles de hipersecuentes y el sistema para la lógica multimodal con inversas, y demuestra su corrección. El cuarto capítulo concierne a la eliminación de corte en el sistema de árboles de hipersecuentes. Finalmente, el quinto capítulo presenta las conclusiones y discute el trabajo futuro.

1 Introducción

El objetivo del presente trabajo es estudiar la teoría de la prueba para lógicas multimodales con inversas, por medio de presentar tanto un sistema axiomático como un sistema de árboles de hipersecuentes para dichas lógicas. En este capítulo cubriremos de manera informal los conceptos detrás de dicho objetivo, de tal forma que las justificaciones que presentamos al final del capítulo estén apropiadamente contextualizadas. Naturalmente, comenzaremos revisando las lógicas multimodales.

1.1. La lógica multimodal

Si la lógica proposicional es un lenguaje que a partir de un conjunto de afirmaciones nos permite construir nuevas y más complejas afirmaciones con sus operadores, la lógica modal añade una nueva dimensión sobre la proposicional al agregar operadores que califican dichas afirmaciones. Los operadores $\Box$ y $\Diamond$, leídos como "necesariamente" y "posiblemente", respectivamente, cuentan con una multitud de interpretaciones en los distintos ámbitos para los que se ha empleado la lógica modal. Algunos ejemplos de las lógicas que proveen diferentes interpretaciones para estos operadores son la lógica temporal, la lógica epistémica, la lógica de demostrabilidad, la lógica deóntica, la lógica descriptiva y la lógica dinámica, entre muchas otras.

Como ejemplo de partida podemos considerar la lógica temporal básica, conocida en inglés como *tense logic*[1]. En esta lógica existen cuatro operadores modales: P, que significa "en algún momento fue el caso"; F, que significa "en algún momento será el caso"; H, que significa "siempre ha sido el caso"; y G, que significa "siempre será el caso". Es común que en distintos tipos de lógica se cambie la notación de los operadores lógicos, como es el caso aquí; una vez que tomamos en cuenta la forma en la que estos operadores se interpretan respecto a la semántica, es fácil ver que los operadores P y F corresponden con operadores de tipo $\Diamond$, denotando algo que ocurre en *algún* caso; los operadores H y G por su parte corresponden con operadores de tipo $\Box$, denotando algo que ocurre en *todos* los casos.

Notemos que en este caso en particular, la lógica temporal extiende a la proposicional no con dos sino con cuatro operadores modales adicionales; sin embargo

[1] Por los tiempos gramaticales *past tense* y *future tense*.

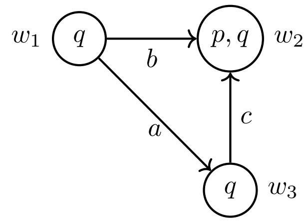

Figura 1.1: Una estructura de Kripke con múltiples relaciones de accesibilidad.

esto se puede interpretar de otra forma, dibujando a F y P como operadores del tipo $\Box$, pero correspondientes con dos modalidades distintas, futuro y pasado respectivamente. De la misma forma podemos interpretar G y H como operadores tipo $\Diamond$. Afortunadamente, estas dos perspectivas son equivalentes.
Si bien el salto sintáctico de la lógica proposicional a la modal consiste en la adición de dos operadores modales, desde el punto de vista semántico la diferencia es considerablemente mayor. Mientras que la lógica proposicional clásica se interpreta comúnmente con valuaciones que asignan un valor de verdad a cada variable, a partir de las cuales se puede derivar el valor de verdad de una fórmula, en la lógica modal generalmente las fórmulas se interpretan sobre las llamadas estructuras de Kripke. Éstas las trataremos de manera formal más adelante, pero por ahora nos bastará describir las estructuras de Kripke como estructuras relacionales que podríamos ilustrar como gráficas dirigidas, donde los vértices se conocen como *mundos* y las flechas como *relaciones de accesibilidad*; además de estos dos elementos, cada mundo asigna un valor de verdad a cada variable proposicional. Sobre estas estructuras, las interpretaciones de las fórmulas se vuelven los mundos donde la fórmula se satisface, y las fórmulas modales de la forma $\Box\phi$ son válidas en aquellos mundos cuyos sucesores (donde un mundo v es sucesor de w si existe una flecha que va de w a v) satisfacen la fórmula ϕ sin excepción, mientras las de la forma $\Diamond\phi$ son válidas en aquellos mundos donde algún sucesor satisface ϕ.

1.2. Modalidades inversas

En una lógica multimodal, como lo es la temporal, puede existir más de una relación de accesibilidad (es decir que las flechas de las estructuras de Kripke tienen todas una etiqueta de un conjunto bien definido de posibles etiquetas). Cada relación está asociada con una de las modalidades establecidas del lado de la sintaxis: las fórmulas de la forma $\Box_\alpha\phi$ se evalúan sobre la relación de accesibilidad R_α. La Figura 1.1 presenta un ejemplo de una estructura con múltiples relaciones de accesibilidad.
Volviendo al ejemplo de la lógica temporal, pensemos en dos mundos, digamos v y w, tal que uno es el futuro del otro, expresado como $v \prec w$. Resulta intuitivo, quizás incluso obvio, que si w es el futuro de v, entonces v es el pasado de w, i.e. $w \succ v$. Sin embargo, la forma de las estructuras de Kripke

en general no obliga a que este sea el caso. Para evitar la posibilidad de que $v \prec w$ sin que $w \succ v$, enfocamos nuestro estudio a las estructuras de Kripke que llamamos *bidireccionales*: una estructura es bidireccional si para cada relación de accesibilidad R existe otra relación $\overline{R}$ tal que $\overline{R}$ es la relación inversa de R, es decir que vRw si y sólo si $w\overline{R}v$. Una vez aplicada esta restricción, la relación entre futuro y pasado se vuelve como la intuimos.

Si bien en la lógica temporal surge de manera natural el concepto de modalidades inversas, no es un buen ejemplo para observar los beneficios de contar con este tipo de modalidades sobre no tenerlos. Para este efecto, nos fijaremos ahora en el ejemplo de las lógicas descriptivas (DLs). En estas lógicas el operador modal $\Box$ se escribe como $\forall$, el operador $\Diamond$ como $\exists$, el operador de conjunción como $\sqcap$, a las modalidades se les conoce como *roles*, las fórmulas corresponden con *conceptos* (y que un *individuo* pertenezca a un concepto corresponde con que un mundo satisfaga una fórmula). Entonces, en vez de una fórmula de la forma $\Box_\alpha \phi$, tendríamos una de la forma $\forall \alpha . C$ en notación de DL.

Las lógicas descriptivas modelan objetos, categorías de estos objetos y las relaciones entre ellos (individuos, conceptos y roles respectivamente). Algunas de estas lógicas cuentan con varios *constructores de roles*, operadores que componen roles para formar roles más complejos, incluyendo el constructor de roles inversos; estos roles enriquecen el lenguaje, mejorando su expresividad.

Para ilustrar, imaginemos una estructura de Kripke concreta donde se establecen relaciones entre personas y películas, siendo P el concepto que representa a las personas y M el que representa a las películas; además incluyamos los conceptos A y C para representar objetos de nacionalidad estadounidense y canadiense respectivamente. En tal estructura podríamos encontrar un rol como *dirige*, señalando que una cierta persona dirigió una película dada. Entonces, la fórmula

$$P \sqcap A \sqcap \exists dirige.M$$

representa al concepto de todas las personas estadounidenses que han dirigido alguna película, esto es, el concepto de los directores estadounidenses.

Supongamos que queremos un concepto que represente a las películas dirigidas por canadienses. Si nuestra lógica no contase con roles (modalidades) inversos, esto necesitaría la definición de un rol *dirigidaPor*, el cual sería justamente el rol *dirige* pero invertido. Sin embargo, contando con roles inversos, podemos evitar definir dicho redundante rol:

$$M \sqcap \forall \overline{dirige}.(P \sqcap C)$$

obteniendo así un concepto que representa lo que buscamos.

Cabe mencionar que, aunque anteriormente mencionamos que enfocaremos nuestro estudio a estructuras bidireccionales, lo cual implicaría que existe tanto el rol *dirige* como el rol *dirigidaPor*, esto es sólo un detalle técnico necesario para simplificar las definiciones que abordaremos en los capítulos siguientes; basta notar que siempre se puede obtener la relación (o rol) inversa a cualquier relación de accesibilidad simplemente intercambiando el orden en cada uno de sus elementos correspondientes.

1.3. Sistemas axiomáticos

Los sistemas axiomáticos son una herramienta que permite caracterizar un sistema lógico de forma compacta. Estos sistemas tienen dos componentes: primero, una colección de esquemas axiomáticos, que son patrones de fórmulas parametrizados que son siempre válidas sin importar qué fórmula concreta sustituya a los parámetros. Así por ejemplo, el axioma de la lógica clásica $\neg\neg\phi \rightarrow \phi$, también conocido como la eliminación de la doble negación, es válido siempre sin importar qué fórmula sea ϕ. El segundo componente es una cantidad usualmente pequeña de reglas de inferencia a partir de las cuales se pueden derivar fórmulas válidas usando otras fórmulas para las que exista una derivación (instancias de axiomas o resultado de reglas).
Cuando decimos que un sistema axiomático 'caracteriza' una lógica entendemos que el conjunto de todas las fórmulas derivables en ese sistema capturan exactamente las fórmulas válidas para alguna semántica. Por ejemplo, un sistema axiomático para la lógica proposicional clásica debe derivar exactamente aquellas fórmulas que son verdaderas para cualquier asignación de verdad de las variables proposicionales. Por su parte, un sistema axiomático para la semántica de estructuras de Kripke en general (sin restricciones como la bidireccionalidad mencionada anteriormente) debe poder derivar exactamente las fórmulas que sean válidas en cualquier estructura de Kripke.
Los sistemas axiomáticos tienen su lugar en el estudio de la lógica modal, e incluso aparecen en varios contextos sobre lógicas multimodales [23, 18], pero estos abordajes raramente enfocan la atención en las modalidades inversas, además de que usualmente (como en los ejemplos mencionados) se estudian desde un dominio particular como la lógica dinámica o la temporal, no desde la perspectiva de la lógica en general.
La naturaleza de las derivaciones en sistemas axiomáticos los hace una herramienta poco apropiada para la búsqueda de pruebas ya que, a diferencia de otros sistemas como los de secuentes o los de deducción natural, las derivaciones axiomáticas se llevan a cabo "hacia adelante", esto es, empezando a partir de los axiomas, lo cual puede involucrar adivinar qué axiomas podrán instanciarse para usar las reglas de derivación y llegar a la fórmula deseada. En contraste, tanto los sistemas de secuentes como los de deducción natural utilizan razonamiento hacia atrás, donde el método comienza desde la fórmula que se quiere derivar y se descompone por medio de reglas en fórmulas más simples por derivar.

1.4. Secuentes e hipersecuentes

Los sistemas de cálculos de secuentes son formalismos lógicos que, en términos simples, se pueden utilizar para generar derivaciones para fórmulas válidas dentro de una cierta lógica. Estos sistemas fueron introducidos originalmente por Gerhard Gentzen en 1935 [10]. Gentzen, en su búsqueda por probar la consistencia de la aritmética, formuló primero su sistema de deducción natural para la lógica clásica. Sin embargo, no pudo demostrar la normalización de derivaciones dentro de este sistema, la cual tendría como consecuencia directa la consistencia del sistema. Fue entonces que formuló su sistema de cálculo de secuentes **LK**, para el que pudo demostrar su afamado *Hauptsatz* (resultado principal), que ahora se conoce comúnmente como el teorema de *eliminación de corte*. Una propiedad notoria de este sistema es que se pueden obtener derivaciones analíticas: todas las fórmulas que aparecen en la derivación son subfórmulas de la fórmula derivada. Un relato más detallado de esta historia se puede consultar en [19].

En la actualidad los sistemas de cálculo de secuentes son una parte de fundamental importancia en el contexto de la teoría de la prueba. En [20], Francesca Poggiolesi argumenta respecto a la importancia filosófica de este tipo de sistemas. Una de las propiedades que se recalcan respecto a los cálculos de secuentes es aquella de la *analiticidad*, es decir que los únicos elementos involucrados en la prueba de una fórmula son esenciales, y ninguno es superfluo. Esta propiedad está relacionada con la llamada *propiedad de la subfórmula*, que discutiremos más adelante; baste decir que esta propiedad conecta parte de la importancia filosófica de los secuentes con su importancia computacional: la propiedad de la subfórmula puede implicar la existencia de un algoritmo para decidir la validez de una fórmula.

Dejando al lado las implicaciones filosóficas del estudio de cálculos de secuentes, también existen beneficios teóricos de contar con un sistema de secuentes para una lógica dada: ya mencionamos la posibilidad de probar la decidibilidad del sistema, pero el cálculo de secuentes puede también ayudar a probar, por ejemplo, la propiedad de interpolación de Craig, como se puede observar por ejemplo en [3, 9, 2], la cual tiene aplicaciones dentro de las ciencias de la computación en dominios como la verificación formal, pruebas de consistencia y representación del conocimiento.

De particular interés y funcionando como punto de partida de este trabajo es la definición del marco de *árboles de hipersecuentes* (o *secuentes anidados*), descritos por Poggiolesi [21] y con antecedentes en Bull [6], Kashima [13] y Brünnler [5]. Este marco generaliza los sistemas de secuentes clásicos añadiendo –literalmente– una dimensión adicional, que facilita el manejo de las fórmulas modales.

La búsqueda de esta clase de sistemas ha sido dirigida explícitamente por una colección de propiedades deseables para los sistemas de inferencia lógica. Algunas de estas propiedades son por ejemplo, como se resume brevemente en [21], la propiedad de la subfórmula: que las premisas de una inferencia estén conformadas solamente por subfórmulas de la conclusión; la pureza semántica: que el sistema de inferencia no haga uso de elementos semánticos explícitos; la simetría: que cada conectivo lógico cuente, por lo menos, con una regla que introduzca el conectivo y una regla que lo elimine; y la invertibilidad: que para cada regla del sistema, la regla inversa (intercambiando la premisa y la conclu-

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{T\langle\phi \vdash \phi\rangle \qquad\qquad T\langle \phi,\psi\vdash\psi\rangle}{\Box_\alpha(\phi\to\psi),\Box_\alpha\phi \vdash [\alpha:\phi\to\psi,\phi\vdash\psi]}\to L}{\Box_\alpha(\phi\to\psi),\Box_\alpha\phi \vdash [\alpha:\phi\to\psi\vdash\psi]}\Box_m L}{\Box_\alpha(\phi\to\psi),\Box_\alpha\phi \vdash [\alpha\ :\vdash\psi]}\Box_m L}{\Box_\alpha(\phi\to\psi),\Box_\alpha\phi \vdash \Box_\alpha\psi}\Box_m R}{\Box_\alpha(\phi\to\psi) \vdash \Box_\alpha\phi\to\Box_\alpha\psi}\to R}{\vdash \Box_\alpha(\phi\to\psi) \to \Box_\alpha\phi\to\Box_\alpha\psi}\to R
$$

Figura 1.2: Derivación del axioma K multimodal.

sión) sea admisible.
Como señala Negri [17], hasta hace poco[2] la teoría de la prueba para lógica modal se había mostrado un tanto deficiente; los sistemas de árboles de hipersecuentes —aunados a otros sistemas de prueba, que no discutimos aquí—, se presentan como una contribución para aliviar este problema, y su exitosa aplicación a lógicas de diversos dominios sugiere que forman un fundamento sólido para la teoría de la prueba en lógicas modales.
En el capítulo 3 lidiaremos a detalle con los sistemas de árboles de hipersecuentes, pero a manera de ilustración, la Figura 1.2 presenta una derivación en el sistema que presentaremos para el axioma K multimodal. El ejemplo muestra algunas de las características notorias del sistema, tales como las reglas para manejar el operador modal $\Box_m L$ y $\Box_m R$; la notación de anidamiento de secuentes $\Gamma \vdash \Delta[\alpha : \Gamma' \vdash \Delta']$, y la notación de ocurrencia de un secuente dentro de un árbol $T\langle\Gamma \vdash \Delta\rangle$.

1.5. Eliminación de corte

Como ya mencionamos, el resultado principal de Gentzen al formular el cálculo de secuentes para lógica clásica fue demostrar que la regla de corte, ilustrada en la Figura 1.3, es eliminable. Esto quiere decir que cualquier derivación de un secuente que utilice esta regla tiene también una derivación que no la utiliza.
Al comparar las derivaciones con secuentes con las demostraciones en papel, la regla de corte corresponde por analogía a utilizar un lema para demostrar un teorema. La regla dice (omitiendo a Δ, en nombre de la simplicidad): "Si sabiendo Γ puedes deducir ϕ, y sabiendo Γ' y ϕ puedes deducir Δ', entonces de Γ y Γ' puedes deducir Δ'". Desde el punto de vista filosófico, esto representa un problema en la búsqueda de la analiticidad, puesto que el contenido de ϕ podría ser arbitrario y perfectamente ajeno a la fórmula que buscamos derivar.

[2]Relativamente a la publicación de su artículo, aunque la investigación sobre teoría de la prueba en lógica modal sigue siendo reciente en comparación con muchas otras áreas de las matemáticas.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi \qquad \phi, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \; cut_{\phi}$$

Figura 1.3: La regla de corte del cálculo de secuentes.

Análogamente, desde el punto de vista computacional (desde el cual es conveniente leer las reglas de abajo hacia arriba), ϕ representa un problema para la búsqueda automatizada de pruebas, puesto que, reiteramos, ϕ es arbitraria, lo cual significa que un algoritmo que tratara de utilizar la regla de corte tendría que 'adivinar' una ϕ adecuada para poder generar una derivación correcta. Es quizás a causa de esto que Jean-Yves Girard manifestó una vez, en una nota al pie [11]: "Un cálculo de secuentes sin eliminación del corte es como un auto sin motor".

Además de las propiedades deseables que mencionamos anteriormente, la eliminabilidad del corte es quizás la principal propiedad por las que se guía la búsqueda de sistemas de secuentes alternativos como lo son los árboles de hipersecuentes. En [1], Avron formula un ejemplo dando un cálculo de secuentes *regular* para la conocida lógica $S5$ que es correcto, y sin embargo, no es libre de corte. A continuación de este ejemplo presenta un cálculo de hipersecuentes —relacionados conceptualmente, mas no idénticos a nuestros árboles de hipersecuentes— para dicha lógica, que sí disfruta de la propiedad de eliminación de corte.

1.6. Resumen y justificación

El enfoque primario de este trabajo es la presentación de un sistema de cálculo de árboles de hipersecuentes libre de corte para lógicas multimodales con inversas. En particular, tomamos los conceptos presentados en [20], generalizamos sus reglas para lidiar con múltiples modalidades, y añadimos una regla para manejar las modalidades inversas, de forma similar a como se manejan en [6] —o como [20] maneja marcos simétricos—, pero en contraste a la prueba de eliminación de corte de Bull, seguimos una técnica de naturaleza sintáctica y directa al estilo de Poggiolesi.

Como contribución adicional, este trabajo presenta una caracterización axiomática de las lógicas multimodales con inversas, demostrando su corrección respecto a la semántica de mundos de Kripke. A pesar de que en ciertos dominios de la lógica modal (particularmente la lógica temporal [23] y la dinámica [12]) las presentaciones axiomáticas no son inusuales, no existe, hasta donde nuestra revisión de la literatura pudo encontrar, una formulación axiomática de modalidades inversas desde el punto de vista de la lógica multimodal "pura" (i.e. no aplicada a un dominio, como las lógicas descriptivas o dinámicas). Nuestra presentación axiomática emplea la correspondiente traducción notacional del axioma de interacción encontrado usualmente, y la prueba de corrección utili-

za la bien conocida técnica de modelos canónicos para demostrar completitud. Esta axiomatización de la lógica multimodal con inversas a su vez facilita la demostración de completitud del sistema de árboles de hipersecuentes.
Ya hemos mencionado la importancia de los sistemas de cálculo de secuentes, particularmente los que son libres de corte, y por qué es deseable obtener sistemas de este tipo para enriquecer la teoría de la prueba, particularmente para la lógica modal. Además, como hemos discutido también, las modalidades inversas juegan un papel importante en varios dominios de aplicación de la lógica modal gracias a la expresividad que proveen; han sido parte del estudio de la lógica dinámica desde su inicio [22, 8], son una característica intrínseca de las lógicas temporales [23], y resultan útiles en extensiones de las lógicas descriptivas [7], por citar algunos ejemplos. Es con estos argumentos que consideramos justificado e importante el esfuerzo y los resultados que representan el presente trabajo.

2 Lógica modal y sistemas axiomáticos

En este capítulo damos una introducción formal a las lógicas multimodales con inversas, presentando la sintaxis y semántica de éstas. Después de las introducciones formales, presentamos un sistema axiomático tipo Hilbert para la lógica multimodal básica con inversas y algunas de sus extensiones, y nos valemos de la bien conocida técnica de modelos canónicos para demostrar su corrección.

2.1. Sintaxis y semántica de la lógica multimodal

Como mencionamos en el capítulo anterior, sintácticamente la lógica modal extiende a la lógica proposicional agregando los operadores modales $\Box$ (caja, necesidad) y $\Diamond$ (diamante, posibilidad). En este trabajo discutiremos únicamente la lógica modal clásica, que extiende a la proposicional clásica, donde $\Diamond$ es definible a partir de $\Box$ y viceversa. Esto nos permite formular el lenguaje de las lógicas que estudiaremos utilizando únicamente tres operadores lógicos.
Siendo que nos concierne la lógica *multi*modal, el operador modal $\Box$ está parametrizado por una de un conjunto de posibles modalidades. Viéndolo de otra forma, tenemos una familia de operadores modales $\Box_\alpha$, uno para cada modalidad α.

Definición 2.1 (Sintaxis de la lógica multimodal)**.** Sea P un conjunto numerable de proposiciones y M un conjunto finito no vacío de modalidades. Las fórmulas de la lógica multimodal con inversas, que en su conjunto denominaremos $\mathcal{L}$, son aquellas generadas por la siguiente gramática:

$$\begin{aligned} \phi &:= p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid \Box_\alpha \phi & \qquad p \in P \\ \alpha &:= m \mid \bar{\alpha} & \qquad m \in M \end{aligned}$$

Los operadores lógicos restantes se pueden definir de la manera usual:

$$\phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \qquad \phi \to \psi \equiv \neg(\phi \wedge \neg\psi)$$
$$\Diamond_\alpha \phi \equiv \neg\Box_\alpha \neg\phi$$

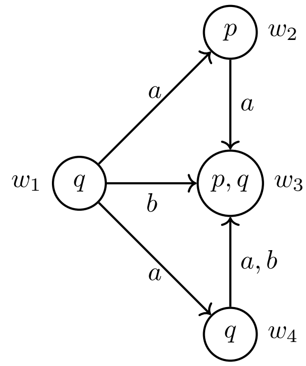

Figura 2.1: Una pequeña estructura de Kripke.

Utilizamos la notación de la lógica modal 'general' para el operador de necesidad, recordando que esta notación podría variar de dominio a dominio, e.g. en lógica descriptiva una fórmula modal podría escribirse como $\forall r.A$ o $\exists r.A$, o en lógica dinámica podría escribirse como $[\alpha]\phi$ o $\langle\alpha\rangle\,\phi$. Vale la pena notar que el descubrimiento de la correspondencia entre estas lógicas fue de considerable importancia en el estudio de la lógica [24].
La semántica de nuestra lógica será la bien conocida semántica de estructuras de Kripke. En esta semántica se tiene un conjunto de *mundos*, donde cada mundo asigna un valor de verdad a cada proposición de P, y una serie de *relaciones* entre mundos R_α, una por cada modalidad. Una fórmula $\Box_\alpha\phi$ es verdadera en todo mundo w tal que todos los $\alpha-$sucesores de w (es decir, los mundos w' tal que $(w, w') \in R_\alpha$, también escrito como $wR_\alpha w'$) satisfacen a ϕ. Estas estructuras pueden entenderse como gráficas dirigidas con flechas etiquetadas, como se ilustra en la Figura 2.1, donde las etiquetas dentro de los mundos representan las proposiciones que son verdaderas en ese mundo.
Antes de definir formalmente las estructuras de Kripke, definimos el concepto más general de *marco*[1], que nos permiten hablar de clases de estructuras que comparten ciertas propiedades.

Definición 2.2 (Marco)**.** Un *marco* es una pareja $\mathcal{F} = (W, R)$ donde W es un conjunto no vacío de *mundos* y R es una familia de relaciones binarias R_α sobre W.
Podemos agrupar *clases de marcos* caracterizadas por propiedades que cumplan las relaciones en R. Por ejemplo, un marco es *reflexivo* si todas las relaciones en R son reflexivas; es *transitivo* si se cumple lo análogo, e ídem para marcos *simétricos*. En general decimos que un marco tiene la propiedad P cuando las relaciones de accesibilidad del marco cumplen con la propiedad P. Nos es de particular importancia definir los marcos bidireccionales.

Definición 2.3 (Marco bidireccional)**.** Decimos que un marco $\mathcal{F} = (W, R)$ es

[1] En inglés *frame*.

bidireccional si para cada relación $R_\alpha \in R$ existe otra relación, que denotamos $R_{\overline{\alpha}}$ tal que ambas relaciones son mutuamente inversas, es decir:

$$wR_\alpha w' \text{ si y sólo si } w'R_{\overline{\alpha}}w$$

Como veremos, las lógicas que discuten las modalidades inversas son justamente aquellas que se interpretan sobre marcos bidireccionales y vice versa. Hemos de notar que dado un marco cualquiera se puede obtener una extensión bidireccional de ese marco, simplemente agregando una relación inversa para cada relación del marco.

Definición 2.4 (Estructura de Kripke)**.** Una *estructura* o *modelo de Kripke* $\mathcal{K} = (W, R, V)$ es una terna donde W es un conjunto no vacío de mundos, R es una familia de relaciones binarias R_α sobre W, y $V : P \to 2^W$ es una *función de valuación* que a cada mundo le asigna un conjunto de proposiciones que son verdaderas en ese mundo. Una estructura se puede ver como un marco aumentado con una función de valuación.
Podemos hablar de *clases de estructuras* de manera análoga a las clases de marcos definidas anteriormente. Entonces, por ejemplo, la clase de estructuras bidireccionales es la clase que incluye a todas las estructuras de Kripke tal que para toda relación R_α existe otra relación $R_{\overline{\alpha}}$ tal que las relaciones son mutuamente inversas.

Contando con la definición de estructuras de Kripke podemos definir la forma en la que se interpretan fórmulas de la lógica multimodal sobre una estructura dada.

Definición 2.5 (Interpretación de fórmulas)**.** Sea ϕ una fórmula del lenguaje de la lógica multimodal con inversas y $\mathcal{K} = (W, R, V)$ una estructura de Kripke. La función de *interpretación* de la fórmula respecto a la estructura, denotada por $[\![\phi]\!]^{\mathcal{K}} : \mathcal{L} \to W$ representa los mundos en W que satisfacen a ϕ, y se define inductivamente de la siguiente forma:

- $[\![p]\!]^{\mathcal{K}} = V(p)$
- $[\![\neg\phi]\!]^{\mathcal{K}} = W \setminus [\![\phi]\!]^{\mathcal{K}}$
- $[\![\phi \wedge \psi]\!]^{\mathcal{K}} = [\![\phi]\!]^{\mathcal{K}} \cap [\![\psi]\!]^{\mathcal{K}}$
- $[\![\Box_\alpha\phi]\!]^{\mathcal{K}} = \{w \in W \mid wR_\alpha u \Rightarrow u \in [\![\phi]\!]^{\mathcal{K}}\}$
- $[\![\Box_{\overline{\alpha}}\phi]\!]^{\mathcal{K}} = \{w \in W \mid uR_{\overline{\alpha}}w \Rightarrow u \in [\![\phi]\!]^{\mathcal{K}}\}$

Es fácil ver que las siguientes igualdades para los conectivos definidos se cumplen:

- $[\![\phi \vee \psi]\!]^{\mathcal{K}} = [\![\phi]\!]^{\mathcal{K}} \cup [\![\psi]\!]^{\mathcal{K}}$
- $[\![\phi \to \psi]\!]^{\mathcal{K}} = [\![\neg\phi]\!]^{\mathcal{K}} \cup [\![\psi]\!]^{\mathcal{K}}$

- $[\![\Diamond_\alpha \phi]\!]^{\mathcal{K}} = \{w \in W \mid \text{existe un } u \text{ tal que } wR_\alpha u \text{ y } u \in [\![\phi]\!]^{\mathcal{K}}\}$

Si ocurre que $w \in [\![\phi]\!]^{\mathcal{K}}$ podemos escribir $\mathcal{K}, w \models \phi$ (o solamente $w \models \phi$ si está claro por el contexto). En el caso contrario (i.e. $w \notin [\![\phi]\!]^{\mathcal{K}}$) escribimos $\mathcal{K}, w \not\models \phi$ (o $w \not\models \phi$).

Definición 2.6 (Satisfactibilidad y validez)**.** Una fórmula ϕ es *satisfactible*[2] si existe una estructura de Kripke $\mathcal{K}$ y un mundo w de $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{K}, w \models \phi$. Un conjunto de fórmulas Γ es satisfactible en una estructura $\mathcal{K}$ si para cada fórmula ϕ de Γ existe un mundo w de $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{K}, w \models \phi$.
Si para toda estructura $\mathcal{K}$ y todo mundo w se cumple que $\mathcal{K}, w \models \phi$ decimos que ϕ es *válida* y escribimos $\models \phi$.

Con fines ilustrativos, presentamos la interpretación de la fórmula $\Box_a p \wedge \Diamond_{\bar{a}} q$ sobre la estructura presentada en la Figura 2.1[3]:

$$\begin{aligned}
[\![\Box_a p \wedge \Diamond_{\bar{a}} q]\!]^{\mathcal{K}} &= [\![\Box_a p]\!]^{\mathcal{K}} \cap [\![\Diamond_{\bar{a}} q]\!]^{\mathcal{K}} \\
&= \{w \mid wR_a u \Rightarrow u \in [\![p]\!]^{\mathcal{K}}\} \cap \{w \mid \text{existe } u \text{ tal que } wR_{\bar{a}} u \text{ y } u \in [\![q]\!]^{\mathcal{K}}\} \\
&= \{w_2, w_4\} \cap \{w_2, w_3, w_4\} \\
&= \{w_2, w_4\}
\end{aligned}$$

Habiendo establecido la sintaxis y semántica con la que trabajaremos, definimos una forma normal para fórmulas modales, que denominamos *forma normal de inversas* o *FNI*, con el fin de simplificar el sistema que definiremos en el Capítulo 3.

Definición 2.7 (Forma normal de inversas)**.** Una fórmula ϕ está en *forma normal de inversas (FNI)* si, en cada instancia del operador en una subfórmula de ϕ, digamos $\Box_\alpha \psi$, α es o bien m o $\overline{m}$ con $m \in M$. Esto es: en una fórmula en forma normal de inversas, todas las modalidades son o una de las básicas del conjunto M, o sus respectivas inversas.

Proposición 2.8 (Transformación a FNI)**.** Dada una fórmula arbitraria ϕ, se puede obtener una fórmula equivalente en FNI ϕ' utilizando la siguiente función de transformación fni:

- $fni(p) = p$
- $fni(\neg\phi) = \neg(fni(\phi))$
- $fni(\phi \wedge \psi) = fni(\phi) \wedge fni(\psi)$
- $fni(\Box_m \phi) = \Box_m(fni(\phi))$

[2] Del inglés *satisfiability/satisfiable*, muy comúnmente nombrada *satisfacibilidad/satisfacible* en español.
[3] Extendida implícitamente con las inversas de cada relación.

- $fni(\Box_{\overline{m}}\phi) = \Box_{\overline{m}}(fni(\phi))$
- $fni(\Box_{\overline{\overline{\alpha}}}\phi) = fni(\Box_{\alpha}\phi)$

Por ejemplo, si tenemos la fórmula $\phi = \Box_{\overline{\overline{\overline{m}}}}p \to q \wedge \Box_{\overline{\overline{\overline{\overline{n}}}}}t$, tendríamos que $fni(\phi) = \Box_{m}p \to q \wedge \Box_{\overline{n}}t$.
Para ver que el resultado de la transformación fni es semánticamente equivalente a la fórmula de entrada basta observar que, de acuerdo a la Definición 2.5, las interpretacións de $\Box_{\alpha}\phi$ y de $\Box_{\overline{\overline{\alpha}}}\phi$ dada una estructura $\mathcal{K}$ son iguales.

2.2. El sistema axiomático $\mathbf{K}_{\overline{m}}$

Los sistemas axiomáticos, también conocidos como sistemas tipo Hilbert, son una manera de caracterizar sistemas lógicos. Los sistemas axiomáticos tienen dos componentes: los esquemas axiomáticos, que son patrones de fórmulas que son válidas sin importar las fórmulas que sustituyan a sus parámetros; y reglas de derivación, que permiten generar nuevas fórmulas válidas a partir de otras fórmulas válidas.
Cuando decimos que un sistema axiomático 'caracteriza un sistema lógico', nos referimos a que, para una semántica dada, el sistema axiomático permite inferir una fórmula si y sólo si esa fórmula es válida. En esta sección presentamos el sistema axiomático $\mathbf{K}_{\overline{m}}$, que caracteriza la lógica de las estructuras de Kripke bidireccionales. Además veremos que este sistema se puede extender fácilmente con las versiones multimodales de los conocidos axiomas modales T y 4, resultando en sistemas que caracterizan las lógicas para estructuras bidireccionales reflexivas y transitivas, respectivamente.
La relevancia de estudiar el sistema axiomático $\mathbf{K}_{\overline{m}}$ en este trabajo proviene de dos factores: por un lado, contar con un sistema axiomático simplifica considerablemente la prueba de corrección del sistema de árboles de hipersecuentes que estudiaremos en el capítulo 3; por el otro lado, en nuestra revisión de la literatura no encontramos mucha discusión de sistemas axiomáticos para lógicas con modalidades inversas utilizando el lenguaje y notación de la lógica modal en general (al contrario de, por ejemplo, la temporal [23] o la dinámica [18], donde los tratamientos axiomáticos son más comunes). Siendo que los resultados aquí presentes son de naturaleza general y pueden sin demasiado problema traducirse a dominios particulares variando la notación, consideramos que es valioso en sí mismo estudiar estos sistemas desde la perspectiva abstracta de la lógica.
Empezamos definiendo en general los conceptos de sistema axiomático y derivabilidad.

Definición 2.9 (Sistema axiomático). Un *sistema axiomático tipo Hilbert* está compuesto por un número finito de esquemas axiomáticos y un número finito de reglas de derivación, cada una de las cuales tiene un número de fórmulas como premisas y una fórmula como conclusión.

Definición 2.10 (Derivabilidad)**.** Sea A un sistema axiomático tipo Hilbert. Decimos que una fórmula ϕ es *derivable en el sistema axiomático* A, o que es A-derivable, escrito $\vdash_A \phi$ si existe una secuencia de fórmulas $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$ tal que $\phi_k = \phi$ y para cada i con $1 \leq i \leq k$ se cumple:

- ϕ_i es una instancia de un esquema axiomático de A; o
- existe una regla de derivación de n premisas en A y n fórmulas ϕ_j con $1 \leq j < i$ tal que ϕ_i es el resultado de aplicar la regla con las fórmulas ϕ_j como premisas.

En otras palabras, ϕ es A-derivable si podemos llegar a ella utilizando solamente los axiomas y las reglas de A.

Definición 2.11 (Sistema axiomático $\mathbf{K}_{\overline{m}}$)**.** El sistema axiomático $\mathbf{K}_{\overline{m}}$ está compuesto por los siguientes esquemas axiomáticos:

A1) $\phi \to (\psi \to \phi)$

A2) $(\phi \to \psi \to \chi) \to (\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi)$

A3) $(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$

A4) $\Box_\alpha(\phi \to \psi) \to \Box_\alpha\phi \to \Box_\alpha\psi$

A5) $\phi \to \Box_\alpha\Diamond_{\bar{\alpha}}\phi$

A6) $\phi \to \Box_{\bar{\alpha}}\Diamond_\alpha\phi$

y las siguientes reglas de derivación:

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \phi}{\psi}\, MP \qquad\qquad \frac{\phi}{\Box_\alpha\phi}\, Nec$$

La intuición detrás de los axiomas $A5$ y $A6$, a veces conocidos como los *axiomas de interacción*, es sencilla de entender si se mira desde el punto de vista semántico. Si suponemos que un mundo w de una estructura $\mathcal{K}$ satisface a la fórmula ϕ, entonces para toda modalidad α cualquier α-sucesor de w tiene un $\bar{\alpha}$-sucesor que satisface a ϕ.
Consideremos como ejemplo la derivación de la fórmula $\Box_m(\phi \wedge \psi) \to \Box_m\phi$:

1. $(\phi \wedge \psi) \to \phi$ por $A1$, recordando que $(\phi \wedge \psi) \to \phi \equiv \neg\phi \vee \neg\psi \vee \phi$
2. $\Box_m((\phi \wedge \psi) \to \phi)$ por Nec sobre (1)
3. $\Box_m((\phi \wedge \psi) \to \phi) \to \Box_m(\phi \wedge \psi) \to \Box_m\phi$ por $A4$
4. $\Box_m(\phi \wedge \psi) \to \Box_m\phi$ por MP sobre (2) y (3).

Aunque los sistemas axiomáticos son buenos para caracterizar sistemas lógicos de manera compacta, no son tan aptos para buscar derivaciones de teoremas, ya que esta búsqueda implica cierta cantidad de conjetura e intuición.
Demostrar la *corrección* de un sistema axiomático significa probar que, en efecto, el sistema caracteriza la lógica de una cierta clase de marcos de Kripke, es decir que si una fórmula es derivable entonces es válida y viceversa. A la primera implicación le llamamos *solidez*[4]y a la segunda *completitud*. Comenzamos probando la solidez de $\mathbf{K}_{\overline{m}}$.

Teorema 2.12 (Solidez de $\mathbf{K}_{\overline{m}}$)**.** Sea ϕ una fórmula. Si ϕ es $\mathbf{K}_{\overline{m}}$-derivable, entonces ϕ es válida en cualquier estructura bidireccional $\mathcal{K}$.

Demostración. Sea ϕ una fórmula. Hay que probar que si $\vdash_{\mathbf{K}_{\overline{m}}} \phi$ entonces para toda estructura bidireccional $\mathcal{K}$ y mundo w de $\mathcal{K}$ se cumple que $\mathcal{K}, w \models \phi$.
Como ϕ es derivable, debe ser o una instancia de un axioma bajo sustitución, o resultado de aplicar alguna de las dos reglas de inferencia sobre otras fórmulas derivables. Para el primer caso, supongamos que ϕ es una instancia de $A1$ e.g. $\phi = \psi \to \chi \to \psi$. Dado un mundo w en $\mathcal{K}$, para probar que $w \models \psi \to \chi \to \psi$, basta suponer que $w \models \psi$ y demostrar que $w \models \chi \to \psi$, y a su vez para demostrar esto suponemos que $w \models \chi$ y demostramos que $w \models \psi$, lo cual es trivial, pues fue nuestra primera suposición.
El resto de los casos para los axiomas es parecido, así que no los revisaremos a detalle, con la excepción de $A5$ y $A6$, los axiomas de interacción para modalidades inversas. Queremos probar que $w \models \phi \to \Box_\alpha \Diamond_{\bar{\alpha}} \phi$. Para esto suponemos que $w \models \phi$ para demostrar $w \models \Box_\alpha \Diamond_{\bar{\alpha}} \phi$. Sea u un mundo tal que $wR_\alpha u$ (de no existir, la fórmula se satisface por vacuidad); queremos ver que $u \models \Diamond_{\bar{\alpha}} \phi$ lo cual, hay que recordar, se cumple si existe un $\bar{\alpha}$-sucesor de u que satisfaga a ϕ. En efecto w es un $\bar{\alpha}$-sucesor de u y además $w \models \phi$, por lo que la fórmula es válida. El caso para $A6$ es análogo.
Si ϕ es resultado de alguna de las reglas de derivación se sigue un proceso parecido. Probar la validez de MP no es demasiado interesante, así que mostraremos la validez de Nec. Para esto, suponemos que para cualquier mundo w, $w \models \phi$, y queremos probar que $w \models \Box_\alpha \phi$. Sea u un mundo tal que $wR_\alpha u$. Demostrar que $u \models \phi$ es trivial, pues por hipótesis ϕ se satisface en cualquier mundo. Por lo tanto la regla Nec preserva la validez.

□

Ahora procedemos a probar la completitud del sistema $\mathbf{K}_{\overline{m}}$ por la bien conocida técnica de modelos canónicos [15]. Ya que esta técnica es estándar dentro del estudio de la semántica y por consecuencia es de carácter eminentemente semántico, no profundizaremos en las demostraciones de los resultados relevantes a los modelos canónicos. Un buen recurso introductorio para el uso de

[4]En inglés *soundness*, a veces también llamada corrección, robustez o coherencia.

modelos canónicos en resultados de completitud para lógica modal se puede encontrar en [4], y de ahí adoptamos nuestra terminología y definiciones.

Definición 2.13 (Lógica)**.** Dado un sistema axiomático Λ, diremos que la *lógica* Λ[5] es el conjunto de fórmulas Λ-derivables; esto es:

$$\Lambda := \{\phi \mid \vdash_\Lambda \phi\}$$

Definición 2.14 (Lógica modal)**.** Una lógica modal es una lógica inducida por un sistema axiomático definido sobre el lenguaje $\mathcal{L}$, es decir el lenguaje generado por la gramática de la Definición 2.1.
Por ejemplo, $\mathbf{K}_{\overline{m}}$ es una lógica modal constituida por todas las fórmulas $\mathbf{K}_{\overline{m}}$-derivables.

Definición 2.15 (Lógica modal normal)**.** Una lógica modal Λ es *normal* si contiene todas las tautologías de la lógica proposicional, todas las instancias del esquema $\Box_\alpha(\phi \to \psi) \to \Box_\alpha\phi \to \Box_\alpha\psi$ y es cerrada bajo modus ponens —si $\phi \to \psi \in \Lambda$ y $\phi \in \Lambda$ entonces $\psi \in \Lambda$— y bajo necesitacion —si $\phi \in \Lambda$ entonces $\Box_\alpha\phi \in \Lambda$. Debe quedar claro que $\mathbf{K}_{\overline{m}}$ es una lógica modal normal.

Definición 2.16 (Consistencia)**.** Una fórmula ϕ es Λ-*consistente* si $\neg\phi$ no es Λ-derivable (en otras palabras $\neg\phi \notin \Lambda$). Un conjunto de fórmulas Γ es Λ-consistente si la conjunción de todas las fórmulas en Γ es Λ-consistente. Un conjunto de fórmulas es Λ-*inconsistente* si no es Λ-consistente.

Definición 2.17 (Conjunto maximal consistente (CMC))**.** Un conjunto de fórmulas Γ es un *conjunto maximal* Λ-*consistente* (o Λ-CMC en nombre de la brevedad) si es Λ-consistente y para cualquier fórmula ϕ que no pertenezca a Γ, $\Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente. En otras palabras, Γ es un Λ-CMC si no hay fórmula que podamos agregar a Γ sin perder la consistencia.

Proposición 2.18 (Propiedades de los CMC)**.** Si Γ es un Λ-CMC, entonces:

- Γ es cerrado bajo modus ponens i.e. $\phi \to \psi \in \Gamma$ y $\phi \in \Gamma$ implican $\psi \in \Gamma$;
- $\Lambda \subseteq \Gamma$;
- para toda fórmula ϕ, o bien $\phi \in \Gamma$ o $\neg\phi \in \Gamma$;
- para todo par de fórmulas ϕ y ψ, $\phi \vee \psi \in \Gamma$ si y sólo si $\phi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$.

Lema 2.19 (Lema de Lindenbaum[6])**.** Si Γ es un conjunto Λ-consistente entonces existe un Λ-CMC Γ^+ tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^+$.

[5] Abusando de la nomenclatura, nombraremos a la lógica de la misma manera que al sistema axiomático.

[6] Atribuido en la literatura a Tarski [25]. Siendo que el autor no sabe leer alemán, no se encuentra en posición de dudar esta atribución.

Definición 2.20 (Consecuencia semántica y sintáctica)**.** Sea S una clase de estructuras, Γ un conjunto de fórmulas y ϕ una fórmula.
Decimos que ϕ es una *consecuencia semántica de* Γ *sobre* S si para cualquier modelo $\mathcal{K} \in S$ y cualquier mundo $w \in W^{\mathcal{K}}$, $w \models \Gamma$ (i.e. $w \models \psi$ para cada $\psi \in \Gamma$) implica que $w \models \phi$.
Decimos que ϕ es una *consecuencia sintáctica de* Γ *en* Λ si existe un subconjunto finito $\Sigma \subseteq \Gamma$ tal que la fórmula

$$\left(\bigwedge_{\psi \in \Sigma} \psi \right) \to \phi$$

es Λ-derivable.

Definición 2.21 (Completitud débil y fuerte)**.** Decimos que una lógica Λ es *fuertemente completa* respecto a una clase de estructuras S si para toda fórmula ϕ y conjunto de fórmulas Γ, si ϕ es una consecuencia semántica de Γ sobre S entonces Γ es una consecuencia sintáctica de Γ en Λ. Decimos que Λ es *débilmente completa* respecto a S si toda fórmula ϕ válida en S es Λ-derivable, que es el caso particular de la completitud fuerte en donde Γ es vacío. Además, decimos que Λ es fuerte o débilmente completa respecto a una estructura $\mathfrak{S}$ si es fuerte o débilmente completa respecto a $\{\mathfrak{S}\}$, la clase de estructuras formada únicamente por $\mathfrak{S}$.

Proposición 2.22. Una lógica Λ es fuertemente completa respecto a una clase de estructuras S si y sólo si todo conjunto de fórmulas Λ-consistente es satisfactible en alguna estructura $\mathfrak{S} \in S$.

Definición 2.23 (Modelo canónico)**.** El *modelo canónico* de una lógica modal normal Λ, denotado $\mathfrak{M}^{\Lambda}$, es una terna $(W^{\Lambda}, R^{\Lambda}, V^{\Lambda})$ donde:

- W^{Λ} es el conjunto de todos los Λ-CMC;
- R^{Λ} es la familia de relaciones binarias R^{Λ}_{α} sobre W^{Λ}, una por cada modalidad α, donde $wR^{\Lambda}_{\alpha}u$ si y sólo si $\phi \in u$ implica que $\Diamond_{\alpha}\phi \in w$;
- V^{Λ} es la función de valuación definida como $V^{\Lambda}(p) = \{w \in W^{\Lambda} \mid p \in w\}$.

Teorema 2.24 (Teorema del modelo canónico)**.** Cualquier lógica modal normal es fuertemente completa respecto a su modelo canónico.

Combinando la Proposición 2.22 y el Teorema 2.24 obtenemos que para probar que una lógica Λ es completa respecto a una clase de estructuras S, basta mostrar que su modelo canónico pertenece a esa clase. Esto inmediatamente permite dar el siguiente resultado.

Proposición 2.25 (Completitud de $\mathbf{K}_m$)**.** La lógica $\mathbf{K}_m$, inducida por el sistema axiomático que incluye los axiomas $A1$ a $A4$ y las reglas de derivación MP y Nec mostrados en la Definición 2.11, es completa respecto a la clase de todas las estructuras de Kripke.

Para cumplir nuestro objetivo de mostrar la completitud de $\mathbf{K}_{\overline{m}}$ respecto a las estructuras bidireccionales habría que mostrar que el modelo canónico de $\mathbf{K}_{\overline{m}}$ es bidireccional. Sin embargo, utilizaremos una técnica diferente más general que nos permitirá mostrar que cualquier lógica modal normal que incluya axiomas como $A5$ y $A6$ es completa respecto a los marcos bidireccionales.

Definición 2.26 (Canonicidad de una fórmula)**.** Una fórmula ϕ es *canónica para la propiedad* P si el modelo canónico de toda lógica modal normal Λ que contenga a ϕ tiene la propiedad P y ϕ es válida en cualquier clase de marcos con la propiedad P.

Para exhibir la prueba de que la combinación de $A5$ y $A6$ es canónica para la bidireccionalidad, utilizamos el siguiente lema.

Lema 2.27. Para toda lógica modal normal Λ y modalidad α, $wR^{\Lambda}_{\alpha}u$ si y sólo si para toda fórmula ϕ, $\Box_{\alpha}\phi \in w$ implica que $\phi \in u$

Demostración. De manera sencilla por las definiciones de modelo canónico y recordando que $\Diamond_{\alpha}\phi \equiv \neg\Box_{\alpha}\neg\phi$. □

Teorema 2.28 (Canonicidad de $A5$ y $A6$ para bidireccionalidad)**.** Sea Λ una lógica modal normal que contiene los esquemas axiomáticos $\phi \to \Box_{\alpha}\Diamond_{\overline{\alpha}}\phi$ y $\phi \to \Box_{\overline{\alpha}}\Diamond_{\alpha}\phi$. Sea $\mathcal{M}^{\Lambda} = (W^{\Lambda}, R^{\Lambda}, V^{\Lambda})$ el modelo canónico para Λ. Entonces $\mathcal{M}^{\Lambda}$ es un modelo bidireccional, esto es:

$$wR^{\Lambda}_{\alpha}u \text{ si y sólo si } uR^{\Lambda}_{\overline{\alpha}}w$$

Demostración. Sean w, u dos mundos del modelo canónico tal que $wR^{\Lambda}_{\alpha}u$. Supongamos que $\phi \in w$. Por ser un Λ-CMC, esto significa que $\phi \to \Box_{\alpha}\Diamond_{\overline{\alpha}}\phi \in w$. Por modus ponens esto implica que $\Box_{\alpha}\Diamond_{\overline{\alpha}}\phi \in w$, lo cual por el Lema 2.27 implica que $\Diamond_{\overline{\alpha}} \in u$. Hemos establecido entonces que siempre que $\phi \in w$ ocurre que $\Diamond_{\overline{\alpha}} \in u$, por lo que por definición $uR^{\Lambda}_{\overline{\alpha}}w$. La otra implicación es análoga, sustituyendo el uso de $A5$ por el de $A6$. □

Corolario 2.29 (Completitud)**.** Para cualquier fórmula ϕ, si ϕ es válida en toda estructura bidireccional, entonces ϕ es $\mathbf{K}_{\overline{m}}$-derivable.

Demostración. Por la Proposición 2.22, el Teorema 2.24 y el Teorema 2.28. □

Habiendo probado la solidez y completitud del sistema axiomático $\mathbf{K}_{\overline{m}}$ podemos ver entonces que este sistema captura exactamente aquellas fórmulas que son válidas en modelos bidireccionales.
Podamos incluso darnos el lujo de extender $\mathbf{K}_{\overline{m}}$ con las versiones multimodales de algunos axiomas comunes en la lógica modal, utilizando la técnica

de canonicidad de fórmulas para ver que los sistemas resultantes son completos para sus correspondientes clases de modelos. A continuación presentamos los resultados relevantes omitiendo las demostraciones, que son sencillas y de naturaleza similar a la demostración del Corolario 2.29.

Definición 2.30 (Lógica modal $\mathbf{T}_{\overline{m}}$)**.** La lógica $\mathbf{T}_{\overline{m}}$ es la lógica resultante de añadir el esquema axiomático $T : \phi \to \Diamond_\alpha \phi$ a la lógica $\mathbf{K}_{\overline{m}}$.

Definición 2.31 (Lógica modal $\mathbf{K4}_{\overline{m}}$)**.** La lógica $\mathbf{K4}_{\overline{m}}$ es la lógica resultante de añadir el esquema axiomático $4 : \Diamond_\alpha \Diamond_\alpha \phi \to \Diamond_\alpha \phi$ a la lógica $\mathbf{K}_{\overline{m}}$.

Definición 2.32 (Lógica modal $\mathbf{S4}_{\overline{m}}$)**.** La lógica $\mathbf{S4}_{\overline{m}}$ es la lógica resultante de añadir los esquemas axiomáticos T y 4 a la lógica $\mathbf{K}_{\overline{m}}$.

Teorema 2.33 (Canonicidad del axioma T para la reflexividad)**.** El modelo canónico de cualquier lógica modal normal Λ que contenga el esquema axiomático T:

$$\phi \to \Diamond_\alpha \phi$$

es reflexivo; es decir, para todo $w \in W^\Lambda$ y toda modalidad α tenemos que $w R_\alpha^\Lambda w$.

Teorema 2.34 (Canonicidad del axioma 4 para la transitividad)**.** El modelo canónico de cualquier lógica modal normal Λ que contenga el esquema axiomático 4:

$$\Diamond_\alpha \Diamond_\alpha \phi \to \Diamond_\alpha \phi$$

es transitivo; es decir, para todo $w, w', w'' \in W^\Lambda$ y toda modalidad α tenemos que si $w R_\alpha^\Lambda w'$ y $w' R_\alpha^\Lambda w''$ entonces $w R_\alpha^\Lambda w''$.

Corolario 2.35. $\mathbf{T}_{\overline{m}}$ es completa para la clase de estructuras bidireccionales y reflexivas; $\mathbf{K4}_{\overline{m}}$ es completa para la clase de estructuras bidireccionales y transitivas, y $\mathbf{S4}_{\overline{m}}$ es completa para la clase de estructuras bidireccionales, reflexivas y transitivas.

Teorema 2.36. El sistema axiomático $\mathbf{S4}_{\overline{m}}$ ($\mathbf{T}_{\overline{m}}, \mathbf{K4}_{\overline{m}}$) es correcto para la clase de estructuras bidireccionales, reflexivas y transitivas (respectivamente: bidireccionales y reflexivas, bidireccionales y transitivas).

> *Demostración.* La prueba de completitud está dada por el corolario 2.35. La prueba de solidez puede realizarse de manera sencilla análoga a la prueba del Teorema 2.12 □

Establecer el sistema axiomático para lógicas multimodales con inversas nos es de utilidad no solamente como herramienta en las demostraciones de corrección que presentaremos en el siguiente capítulo, sino que además también son un buen punto de partida para formular las reglas del sistema de secuentes que introduciremos a continuación.

3 Árboles de hipersecuentes para lógica multimodal con inversas

3.1. Sobre sistemas de secuentes

Como mencionamos en la introducción de este trabajo, el origen de los sistemas de secuentes se remonta a 1935, cuando el matemático alemán Gerhard Gentzen, al no poder formular la normalización de su sistema de deducción natural para la lógica clásica, inventó el sistema de secuentes para la misma y demostró en su *Hauptsatz* [10] que la regla de corte era eliminable. Desde entonces, los sistemas de secuentes han formado una parte importante del estudio de la teoría de la prueba.
Sin embargo, tratar de aplicar los principios de sistemas de secuentes puede conducir a dificultades que resultan en un sistema falto de muchas propiedades deseables. Antes de ejemplificar uno de estos sistemas, procedemos a definir algunos conceptos básicos.

Definición 3.1 (Secuente)**.** Un *secuente* es una pareja (Γ, Δ) de colecciones finitas de fórmulas, que aquí escribiremos como $\Gamma \vdash \Delta$ —aunque también se escriben comúnmente como $\Gamma \to \Delta$ o $\Gamma \Rightarrow \Delta$—, leído como "de Γ se infiere Δ". Dependiendo de cómo se quiera manejar el sistema de secuentes, la elección de qué 'colección' se representa por Γ y Δ varía. Las posibilidades son:

- Γ y Δ son conjuntos: no importa ni el orden ni las repeticiones de elementos;
- Γ y Δ son multiconjuntos: el orden no importa, pero las repeticiones se consideran;
- Γ y Δ son listas —en el sentido computacional—: el orden y las repeticiones de elementos importan.

En este trabajo consideraremos a Γ y Δ como multiconjuntos.

Definición 3.2 (Sistema de secuentes)**.** Un *sistema de secuentes* está compuesto por reglas que toman la forma

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash \Delta_n}{\Gamma \vdash \Delta}\ \mathcal{R}$$

Secuentes iniciales

$$p \vdash p$$

Reglas proposicionales

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi}{\neg\phi, \Gamma \vdash \Delta}\ \neg L \qquad \frac{\phi, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\phi}\ \neg R$$

$$\frac{\phi, \psi, \Gamma \vdash \Delta}{\phi \wedge \psi, \Gamma \vdash \Delta}\ \wedge L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi \wedge \psi}\ \wedge R$$

Reglas estructurales

$$\frac{\phi, \Gamma \vdash \Delta}{\phi, \psi, \Gamma \vdash \Delta}\ WL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi, \psi}\ WR$$

$$\frac{\phi, \phi, \Gamma \vdash \Delta}{\phi, \Gamma \vdash \Delta}\ CL \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi, \phi}{\Gamma \vdash \Delta, \phi}\ CR$$

Figura 3.1: Un sistema de secuentes para la lógica proposicional clásica.

que se lee "a partir de las premisas $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \dots, \Gamma_n \vdash \Delta_n$ se puede derivar la conclusión $\Gamma \vdash \Delta$" o alternativamente "para derivar $\Gamma \vdash \Delta$ basta derivar $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \dots, \Gamma_n \vdash \Delta_n$". En estos sistemas se suele llamar *secuente inicial* a una regla sin premisas (en la que se suele omitir la linea horizontal) donde el secuente conclusión se considera siempre verdadero. Usualmente en un secuente inicial se encuentra presente la misma fórmula de ambos lados del símbolo $\vdash$.

Definición 3.3 (Derivación en sistema de secuentes)**.** En el contexto de sistemas de secuentes, una *derivación* es un árbol donde la raíz es un secuente; en este árbol para que un secuente A sea padre de otros secuentes $B, C, \dots$ debe existir una regla R en el sistema tal que $B, C, \dots$ forman las premisas de la regla y A es la conclusión, y las hojas del árbol deben ser todas secuentes iniciales.
Decimos que un secuente $\Gamma \vdash \Delta$ es *derivable* en el sistema de secuentes si existe una derivación cuya raíz es $\Gamma \vdash \Delta$, y decimos que una fórmula ϕ es derivable si el secuente $\vdash \phi$ es derivable.

Definición 3.4 (Altura de una derivación)**.** Dada una derivación d de un secuente, la *altura* de d se define como la mayor distancia desde la raíz hasta una de sus hojas, es decir, la mayor cantidad de reglas aplicadas para llegar de la conclusión a alguno de sus secuentes iniciales.

Para ejemplificar, la Figura 3.1 presenta un sistema de secuentes bastante compacto para la lógica proposicional clásica. Este sistema es correcto —una fórmula ϕ es válida en lógica clásica si y sólo si el secuente $\vdash \phi$ $(\Gamma = \emptyset, \Delta = \phi)$ es derivable. Además este sistema es *libre de corte*, que dado que el sistema en sí no incorpora ninguna regla de corte en su definición, significa que la regla

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi \qquad \phi, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\; cut_\phi$$

es *admisible*, lo cual esencialmente significa que si bien incorporar la regla al sistema preserva la corrección —no ganamos ni perdemos poder deductivo—, no se necesita usar esta regla para derivar ninguna fórmula válida. Cuando la regla es parte de la definición de nuestro sistema entonces la propiedad de no necesitarla para ninguna derivación se denomina *eliminabilidad*.
Como señala Avron [1], podríamos extender este sistema con el siguiente par de reglas para manejar los casos modales y obtener un sistema libre de corte para la lógica $S4$, la lógica de las estructuras reflexivas y transitivas:

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \Box\phi \vdash \Delta}\; \Box L \qquad\qquad \frac{\Box\Gamma \vdash \phi}{\Box\Gamma \vdash \Box\phi}\; \Box R$$

(donde $\Box\Gamma$ representa una colección de fórmulas todas de la forma $\Box\psi$). Sin embargo, no se conoce ningún sistema de secuentes convencional libre de corte para la lógica $S5$, la lógica de las estructuras reflexivas, transitivas y simétricas. Se puede modificar la regla $\Box R$ para obtener un cálculo correcto respecto a la semántica de $S5$:

$$\frac{\Box\Gamma \vdash \phi, \Box\Delta}{\Box\Gamma \vdash \Box\phi, \Box\Delta}\; \Box R$$

sin embargo, por ejemplo, la fórmula $p \to \Box\Diamond p$, válida en $S5$, no tiene una derivación libre de corte. Consecuentemente, Avron muestra su sistema de hipersecuentes para $S5$, y demuestra su corrección y que la regla de corte es eliminable. En este sistema, en vez de utilizar reglas que lidian con un único secuente, usa reglas que transforman múltiples secuentes simultáneamente. Es justamente a esta estructura de múltiples secuentes, que en la práctica resulta ser o bien un multiconjunto o una lista de secuentes, a la que se le nombra *hipersecuente*.
Dichos hipersecuentes, manejados por Avron en [1], son sin duda alguna parientes de los árboles de hipersecuentes que estudiaremos aquí, pero los árboles tienen antecedentes en otros sistemas de secuentes que no sólo manejan más de un secuente, sino que añaden estructura entre distintos secuentes —específicamente, una estructura arborescente.[1] En [13], Kashima desarrolla un cálculo de secuentes anidados libre de corte para la lógica temporal, y en [6] Bull desarrolla uno para la lógica dinámica proposicional sin el operador de iteración $*$, que resulta ser estructural y notacionalmente bastante parecido a como luego

[1] Hácemos énfasis en que un *árbol de hipersecuentes* no es un árbol compuesto de hipersecuentes como los de Avron, sino un hipersecuente en forma de árbol, esto es, una estructura de árbol compuesta por secuentes. Esta pequeña dificultad en la nomenclatura desciende de la necesidad de un término que traduzca la noción de *tree-hypersequent* de la manera menos estorbosa posible.

Poggiolesi [21] establecería el marco de trabajo de los árboles de hipersecuentes, trabajo que sirve directamente como punto de partida al presente escrito. Poggiolesi describe varias propiedades que han sido históricamente consideradas deseables de los sistemas de secuentes. Además de la eliminabilidad del corte, algunas de ellas son:

- *Propiedad de la subfórmula:* todas las fórmulas que aparezcan en una derivación deben ser subfórmulas de las fórmulas que ocurren en el secuente derivado.
- *Pureza de elementos semánticos:* el cálculo debe evitar utilizar elementos semánticos de manera explícita, como valores de verdad o mundos de una estructura.
- *Separación:* las reglas del cálculo no deben exhibir ningún conectivo lógico salvo el que introducen.
- *Explicitud:* las reglas del cálculo deben exhibir el conectivo que introducen solamente en la conclusión.
- *Simetría:* cada conectivo debe contar con al menos dos reglas, una que lo introduzca del lado izquierdo del secuente y una que lo introduzca del lado derecho.
- *Invertibilidad:* para cada regla del cálculo no sólo debe poder derivarse la conclusión a partir de las premisas, sino también las premisas a partir de la conclusión —esto es, al permutar la conclusión y alguna premisa de una regla, la regla resultante debe ser admisible.

Es valioso leer la discusión de las ramificaciones matemáticas y filosóficas de estas reglas presentada en [20], pues en este trabajo no discutiremos mucho de dónde surge la deseabilidad de estas propiedades. Baste decir que la búsqueda de sistemas que cumplan con dichas propiedades es la guía para el desarrollo de los cálculos de árboles de hipersecuentes para la lógica modal. Para comenzar nuestro estudio de éstos, haremos primero una presentación intuitiva del concepto de árbol de hipersecuentes.

3.2. Árboles de hipersecuentes y el sistema $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$

La intuición detrás de expandir los sistemas de secuentes hacia el uso de árboles de hipersecuentes es fácil de comprender si consideramos el razonamiento semántico en lógica modal. Para manejar cualquier caso de la lógica clásica (es decir, solo variables, conjunción y negación), necesitamos únicamente la información que reside en un mundo (específicamente, la valuación de las proposiciones lógicas) y por lo tanto basta un secuente para derivar una fórmula. Al introducir fórmulas modales, un solo mundo no basta para observar la validez de la fórmula; para ver que $w \models \Box_\alpha \phi$ necesitamos ver que un hipotético u tal que $wR_\alpha u$ cumple $u \models \phi$. Por lo tanto, para derivar $\Box_\alpha \phi$ en el sistema

$$p \vdash q \quad \Longrightarrow \quad p \vdash q$$

$$p \vdash \Box_\alpha q \ [\beta :\ r \vdash s] \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} p \vdash \Box_\alpha q \arrow[d, "\beta"'] \\ r \vdash s \end{tikzcd}$$

$$r \vdash s \ [\alpha : \vdash p;\ \beta : \vdash q;\ \alpha :\ (\vdash r\ [\bar{\gamma} : t \vdash u])] \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} & r \vdash s \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ \vdash p & \vdash q & \vdash r \arrow[d, "\bar{\gamma}"'] \\ & & t \vdash u \end{tikzcd}$$

Figura 3.2: Correspondencia entre árboles de hipersecuentes y estructuras arborescentes.

de secuentes, creamos un nuevo secuente, conectado al secuente original y etiquetado con la modalidad α representando la conexión entre los dos mundos en la semántica. En este nuevo secuente, si es posible derivar ϕ, consideramos completa la derivación. Como estamos lidiando con secuentes clásicos y lógica multimodal, un secuente dado puede tener múltiples ramas simultáneamente, etiquetadas con modalidades distintas. La Figura 3.2 ilustra esta correspondencia.

Antes de comenzar de lleno formalmente con los árboles de hipersecuentes, establecemos algunas convenciones de notación.

Como hemos venido haciendo, las letras griegas minúsculas como $\phi, \psi, \chi, \gamma, \delta$ representarán fórmulas, reservando α y β para las modalidades. Las letras Γ, Δ, Σ representarán multiconjuntos de fórmulas. Utilizaremos la letra S para representar secuentes, es decir $S \equiv \Gamma \vdash \Delta$. Además utilizaremos la coma para denotar uniones en secuentes, entonces:

$$\phi, S, \psi \equiv \phi, \Gamma \vdash \Delta, \psi \equiv (\{\phi\} \cup \Gamma) \vdash (\Delta \cup \{\psi\})$$

($\phi, S \equiv \phi, \Gamma \vdash \Delta$ y $S, \phi \equiv \Gamma \vdash \Delta, \phi$). Usaremos T, G, H, J para representar árboles de hipersecuentes y $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}$ para representar multiconjuntos de árboles de hipersecuentes, incluyendo posiblemente el vacío. Además, el producto de dos secuentes se escribe $S \cdot S' \equiv \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ i.e. es la unión por componentes de ambos secuentes.

Procedemos a formalizar la noción de árbol de hipersecuentes.

Definición 3.5 (Árbol de hipersecuentes)**.** Sea $S := \Gamma \vdash \Delta$ un secuente y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ modalidades. Definimos los árboles de hipersecuentes (AHS) inductivamente de la siguiente manera:

- S es un AHS
- Si $T_1, \ldots, T_n$ son AHS, entonces $S\ [\alpha_1 :\ T_1; \ldots; \alpha_n :\ T_n]$ es un AHS

En términos más intuitivos dentro del área de computación, un árbol de hipersecuentes es un árbol n-ario donde los vértices son secuentes y las ramas están etiquetadas con modalidases.
Para presentar las reglas del cálculo de árboles de hipersecuentes introduciremos la notación de *zoom* de árbol de hipersecuentes (ZAHS)[2]. En esta notación, $T\langle S\rangle$ denota que T es un árbol de hipersecuentes tal que dentro de él en alguna posición existe el secuente S, y análogamente con $T\langle G\rangle$ si T y G son árboles de hipersecuentes.

Definición 3.6 (Zoom de árboles de hipersecuentes)**.** Los ZAHS se definen inductivamente como sigue:

- $\langle * \rangle$ es un ZAHS.
- Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son modalidades y $T_1, \ldots, T_n$ son AHS, entonces $\langle * \rangle[\alpha_1 : T_1; \ldots; \alpha_n : T_n]$ es un ZAHS.
- Si S es un secuente, $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son modalidades, $T\langle * \rangle$ es un ZAHS y $T_1, \ldots, T_n$ son AHS, entonces $S\ [\alpha :\ T\langle * \rangle; \alpha_1 : T_1; \ldots; \alpha_n : T_n]$ es un ZAHS.
- Si $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ son modalidades, $T\langle * \rangle$ es un ZAHS y $T_1, \ldots, T_n$ son AHS, entonces $\langle * \rangle[\alpha :\ T\langle * \rangle; \alpha_1 : T_1; \ldots; \alpha_n : T_n]$ es un ZAHS. Nótese la presencia de dos agujeros en esta instancia.
- Si S es un secuente, $T\langle * \rangle\langle * \rangle$ un ZAHS, $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ modalidades y $T_1, \ldots, T_n$ son AHS, entonces $S\ [\alpha :\ T\langle * \rangle\langle * \rangle; \alpha_1 : T_1; \ldots; \alpha_n : T_n]$ es un ZAHS.

Definición 3.7 (Sustitución en ZAHS)**.** Para un ZAHS $T\langle * \rangle$ y un AHS G, así como para un ZAHS $T\langle * \rangle\langle * \rangle$ y dos AHS G, H, definimos $T\langle G\rangle$, la sustitución de G en $T\langle * \rangle$, así como $T\langle G\rangle\langle H\rangle$, la sustitución de G y H en $T\langle * \rangle\langle * \rangle$, inductivamente de la siguiente forma:

- Si $T\langle * \rangle = \langle * \rangle$ entonces $T\langle G\rangle = G$
- Si

$$T\langle * \rangle = \langle * \rangle[\alpha_1 : T_1; \ldots; \alpha_n : T_n] \text{ y}$$
$$G = S\ [\beta_1 : T'_1; \ldots; \beta_j : T'_j]$$

[2] Del inglés, Zoom Tree-Hypersequent.

entonces

$$T\langle G\rangle = S\ [\alpha_1 : T_1; \ldots ; \alpha_n : T_n; \beta_1 : T'_1; \ldots ; \beta_j : T'_j]$$

- Si

$$T\langle * \rangle = S[\alpha :\ T'\langle * \rangle; \alpha_1 : T_1; \ldots ; \alpha_n : T_n]$$

entonces

$$T\langle G\rangle = S[\alpha :\ T'\langle G\rangle; \alpha_1 : T_1; \ldots ; \alpha_n : T_n]$$

- Si

$$T\langle * \rangle\langle * \rangle = \langle * \rangle[\alpha :\ T'\langle * \rangle; \alpha_1 : T_1; \ldots ; \alpha_n : T_n] \text{ y}$$
$$G = S\ [\beta_1 : T'_1; \ldots ; \beta_j : T'_j]$$

entonces

$$T\langle G\rangle\langle H\rangle = S\ [\alpha :\ T'\langle H\rangle; \alpha_1 : T_1; \ldots ; \alpha_n : T_n; \beta_1 : T'_1; \ldots ; \beta_j : T'_j]$$

- Si

$$T\langle * \rangle\langle * \rangle = S[\alpha :\ T'\langle * \rangle\langle * \rangle; \alpha_1 : T_1; \ldots ; \alpha_n : T_n]$$

entonces

$$T\langle G\rangle\langle H\rangle = S[\alpha :\ T'\langle G\rangle\langle H\rangle; \alpha_1 : T_1; \ldots ; \alpha_n : T_n]$$

Aunque un ZAHS con sustitución es, estrictamente hablando, un árbol de hipersecuentes y no un ZAHS como tal, trataremos ambos conceptos intercambiablemente cuando esto no presente ninguna confusión.

Definición 3.8 (Secuente distinguido)**.** Al escribir un *zoom* de árbol de hipersecuentes con una sustitución $T\langle S\rangle$, le diremos *secuente distinguido* al secuente S. Análogamente, si tenemos un *zoom* de árbol de hipersecuentes con sustitución $T\langle G\rangle$ con G un árbol de hipersecuentes, le diremos *árbol de hipersecuentes distinguido* a G.

Con la notación de ZAHS definida, podemos presentar el cálculo de árboles de hipersecuentes para la lógica multimodal con inversas $\mathbf{K}_{\overline{m}}$, al cual llamaremos $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$

Definición 3.9 (Cálculo de árboles de hipersecuentes $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$)**.** El cálculo $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$ está conformado por las reglas presentadas en la Figura 3.3 y por a la regla de corte, que presentaremos posteriormente.

Es pertinente notar un par de cosas respecto al cálculo $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$. La primera nota es que el cálculo actúa únicamente sobre fórmulas en forma normal de inversas (ver Definición 2.7), con el fin de evitar definir ciertas reglas que serían necesarias para manejar fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$ arbitrarias. Como consecuencia, en lo que resta de este trabajo, toda modalidad α es o bien m o $\overline{m}$ con m una

AHS iniciales

$$T\langle p, S, p\rangle$$

Reglas proposicionales

$$\frac{T\langle S, \phi\rangle}{T\langle \neg\phi, S\rangle}\ \neg L \qquad \frac{T\langle \phi, S\rangle}{T\langle S, \neg\phi\rangle}\ \neg R$$

$$\frac{T\langle \phi, \psi, S\rangle}{T\langle \phi\wedge\psi, S\rangle}\ \wedge L \qquad \frac{T\langle S, \phi\rangle \qquad T\langle S, \psi\rangle}{T\langle S, \phi\wedge\psi\rangle}\ \wedge R$$

Reglas modales

$$\frac{T\langle \Box_\alpha\phi, S\ [\alpha :\ \phi, S'; \underline{X}]\rangle}{T\langle \Box_\alpha\phi, S\ [\alpha :\ S'; \underline{X}]\rangle}\ \Box_\alpha L \qquad \frac{T\langle S\ [\alpha :\ \vdash \phi; \underline{X}]\rangle}{T\langle S, \Box_\alpha\phi\ [\underline{X}]\rangle}\ \Box_\alpha R$$

$$\frac{T\langle \phi, S\ [\alpha :\ \Box_{\overline{\alpha}}\phi, S'; \underline{X}]\rangle}{T\langle S\ [\alpha : \Box_{\overline{\alpha}}\phi, S'; \underline{X}]\rangle}\ \Box_{\overline{\alpha}} L$$

Figura 3.3: Las reglas del cálculo $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$.

modalidad básica del conjunto M; además esto implica que si $\alpha = m$ entonces $\overline{\alpha} = m$. Es pertinente notar que la regla $\Box_{\overline{\alpha}}L$ representa en realidad dos reglas: el caso para $[\alpha : \Box_{\overline{\alpha}}\phi, S]$ y el caso para $[\overline{\alpha} : \Box_\alpha\phi, S]$. Siendo que las dos reglas se manejan análogamente en todos los resultados que siguen, discutir ambas reglas por separado se vería bastante redundante, así que por conveniencia aglomeramos los dos casos en una sola regla.
Este sistema está basado en los sistemas de árboles de hipersecuentes que presenta Poggiolesi [21, 20], aumentados con la regla para manejar las modalidades inversas de manera similar a como lo hace Bull [6].
A continuación se muestra a manera de ejemplo la derivación de una instancia del axioma $\phi \to \Box_m\Diamond_{\overline{m}}\phi$ del sistema $\mathbf{K}_{\overline{m}}$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{p \vdash p\ [m :\ \Box_{\overline{m}}\neg p \vdash]}{p, \neg p \vdash [m :\ \Box_{\overline{m}}\neg p \vdash]}\ \neg L}{p \vdash [m :\ \Box_{\overline{m}}\neg p \vdash]}\ \Box_{\overline{\alpha}} L}{p \vdash [m : \vdash \neg\Box_{\overline{m}}\neg p]}\ \neg R}{p \vdash \Box_m\neg\Box_{\overline{m}}\neg p}\ \Box_\alpha R}{p,\ \neg\Box_m\neg\Box_{\overline{m}}\neg p \vdash}\ \neg L}{p\wedge\neg\Box_m\neg\Box_{\overline{m}}\neg p \vdash}\ \wedge L}{\vdash \neg(p\wedge\neg\Box_m\neg\Box_{\overline{m}}\neg p)}\ \neg R$$

Para poder demostrar la corrección del sistema necesitamos introducir la regla de corte, para lo cual hace falta definir una relación de *posición equivalente* entre árboles de hipersecuentes y una operación de producto de árboles.

Definición 3.10 (Posición equivalente)**.** Dados dos árboles de hipersecuentes con secuentes distinguidos $T\langle S\rangle$ y $T'\langle S'\rangle$ (o análogamente, dos ZAHS $T\langle *\rangle, T'\langle *\rangle$) , la relación de *posición equivalente* de los secuentes en sus respectivos árboles, denotada por $T\langle S\rangle \sim T'\langle S'\rangle$, se define inductivamente de la siguiente forma:

- $S \sim S'$ – esto es, cuando los secuentes distinguidos con el único secuente en sus respectivos árboles, están en posición equivalente.
- $S[\underline{X}] \sim S'[\underline{X'}]$
- Si $T\langle S\rangle \sim T'\langle S'\rangle$ entonces $S_0[\alpha : T\langle S\rangle; \underline{X}] \sim S_1[\alpha : T'\langle S'\rangle; \underline{X'}]$ (notar que ambas modalidades coinciden).

Para mejorar la intuición de esta relación, podríamos decir que si $T\langle S\rangle$ y $T'\langle S'\rangle$ están en posición equivalente, entonces el camino desde la raíz de T hasta S pasa por la misma cantidad de flechas con las mismas modalidades en el mismo orden que el camino desde la raíz de T' hasta S'. Esto es, los secuentes o árboles distinguidos están anidados a la misma profundidad y bajo la misma secuencia de modalidades.

Definición 3.11 (Producto de AHS)**.** Dados dos árboles de hipersecuentes con dos secuentes en posición equivalente $T\langle S\rangle \sim T'\langle S'\rangle$, el producto de árboles, denotado $T\langle S\rangle \otimes T'\langle S'\rangle$, se define inductivamente de la siguiente forma:

- $S \otimes S' := S \cdot S'$ — recordar que si $S = \Gamma \vdash \Delta$ y $S' = \Gamma' \vdash \Delta'$ entonces $S \cdot S' = \Gamma \cup \Gamma' \vdash \Delta \cup \Delta'$
- $S[\underline{X}] \otimes S'[\underline{X'}] := S \cdot S'[\underline{X}; \underline{X'}]$
- $S_0\ [\alpha :\ T\langle S\rangle; \underline{X}] \otimes S_1[\alpha : T'\langle S'\rangle; \underline{X'}] := S_0 \cdot S_1[\alpha :\ T\langle S\rangle \otimes T'\langle S'\rangle; \underline{X}; \underline{X'}]$

Definición 3.12 (Regla de corte)**.** Sean $T\langle S, \phi\rangle \sim T'\langle \phi, S'\rangle$ dos árboles de hipersecuentes con secuentes en posición equivalente. La regla de corte entre estos dos árboles se define de la siguiente forma:

$$\frac{T\langle S, \phi\rangle \qquad T'\langle \phi, S'\rangle}{T \otimes T'\langle S \cdot S'\rangle}\ cut_\phi$$

Esto es, se sigue la definición del producto para combinar los árboles, pero en la posición en la que el producto de árboles tendría al secuente $\phi, S \cdot S', \phi$, se eliminan las dos instancias de la fórmula ϕ.

Ahora hacemos camino para probar la corrección del sistema $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$.

Definición 3.13 (Secuente auxiliar)**.** Llamaremos *secuentes auxiliares* a aquellos que se muestran explícitamente en las premisas de las reglas del cálculo de árboles de hipersecuentes. Por ejemplo, en el árbol $T\langle S\rangle$, el secuente S es auxiliar.

En las pruebas de admisibilidad que siguen nos enfocaremos en mostrar los casos que se aplican sobre los secuentes auxiliares; gracias a los lemas 3.25 y 3.26 que presentaremos después, los casos en los que la regla aplica sobre un secuente distinto son fáciles de manejar.

Definición 3.14 (Derivabilidad de una regla)**.** Una regla $\mathcal{R}$ es *derivable* si, suponiendo las premisas de $\mathcal{R}$, se puede construir una derivación de la conclusión. Es importante no confundir la derivabilidad de una regla con el concepto de derivabilidad de un secuente o de una fórmula dado por la Definición 3.3.

A manera de ejemplo, las reglas $\to R$ y $\to L$ son derivables, recordando que $\phi \to \psi \equiv \neg(\phi \wedge \neg\psi)$. La demostración de su derivabilidad no es complicada, y se deja como ejercicio.

$$\frac{T\langle\Gamma \vdash \phi\rangle \qquad T\langle\psi, \Gamma \vdash \Delta\rangle}{T\langle\phi \to \psi, \Gamma \vdash \Delta\rangle} \to L \qquad \frac{T\langle\phi, \Gamma \vdash \Delta, \psi\rangle}{T\langle\Gamma \vdash \Delta, \phi \to \psi\rangle} \to R$$

Definición 3.15 (Admisibilidad y eliminabilidad de una regla)**.** Una regla $\mathcal{R}$ que no es parte de las reglas primitivas de un sistema de secuentes es *admisible* si, suponiendo que las premisas de $\mathcal{R}$ se pueden derivar, se puede demostrar que la conclusión también se puede derivar. Si una regla es admisible entonces para cualquier derivación que utilice esa regla debe existir otra derivación que no la utiliza. Además, una regla es *admisible con preservación de altura* si, suponiendo que la derivación de la conclusión utilizando la regla tiene altura n, entonces la derivación que no la utiliza tiene altura a lo más n.
Análogamente, una regla es *eliminable* si forma parte de las reglas primitivas del sistema de secuentes y además es admisible.

Definición 3.16 (Invertibilidad de una regla)**.** Una regla $\mathcal{R}$ es *invertible* respecto a alguna de sus premisas P si la regla cuya premisa es la conclusión de $\mathcal{R}$ y cuya conclusión es la premisa P de $\mathcal{R}$ es admisible. Si además la regla invertida es admisible con preservación de altura, entonces decimos que $\mathcal{R}$ es *invertible con preservación de altura*.

Definición 3.17 (Fórmula principal)**.** Sea $\mathcal{R}$ una regla de un cálculo de secuentes. Decimos que la fórmula ϕ es *principal* en $\mathcal{R}$ cuando ϕ es la fórmula de la conclusión de $\mathcal{R}$ que fue afectada por la regla, es decir, la que tiene el conectivo correspondiente a $\mathcal{R}$.

Lema 3.18. *Los árboles de hipersecuentes de la forma $T\langle\phi, S, \phi\rangle$ para una fórmula ϕ arbitraria son derivables en $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$.*

Demostración. Por inducción sobre ϕ. Si ϕ es atómica, el árbol de hipersecuentes es inicial por definición. Nos limitamos a mostrar los casos interesantes para los demás conectivos.
Cuando la fórmula es $\phi \wedge \psi$ tenemos:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{T\langle \phi, \psi, \Gamma, \phi\rangle}\text{ H.I.}}{T\langle \phi \wedge \psi, \Gamma, \phi\rangle}\wedge L \qquad \dfrac{\dfrac{}{T\langle \phi, \psi, \Gamma, \psi\rangle}\text{ H.I.}}{T\langle \phi \wedge \psi, \Gamma, \psi\rangle}\wedge L}{T\langle \phi \wedge \psi, \Gamma, \phi \wedge \psi\rangle}\wedge R$$

Cuando la fórmula es $\Box_\alpha \phi$ tenemos:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{T\langle \Box_\alpha \phi, S[\alpha :\ \phi \vdash \phi]\rangle}\text{ H.I}}{T\langle \Box_\alpha \phi, S\ [\alpha : \vdash \phi]\rangle}\Box_\alpha L}{T\langle \Box_\alpha \phi, S, \Box_\alpha \phi\rangle}\Box_\alpha R$$

□

Lema 3.19. La regla *nec*

$$\frac{T}{\vdash [\alpha : T]}\ nec$$

es admisible con preservación de altura en $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$.

En lo que sigue, utilizaremos la notación ${}^{\langle n\rangle}T$ para denotar que el AHS T es derivable con altura n, es decir que hacen falta a lo más n aplicaciones de reglas para derivar T.

Demostración. Por inducción sobre la derivación de la premisa T. Si T es un árbol de hipersecuentes inicial, entonces también lo es $\vdash [\alpha : T]$. Si la conclusión se deriva usando una regla lógica, la inferencia claramente se preserva. Por ejemplo, si se deriva utilizando la regla $\neg L$:

$$\frac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S, \phi\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle \neg\phi, S\rangle}\ \neg L$$

entonces aplicando la hipótesis de inducción a la premisa y luego la misma regla obtenemos que:

$$\frac{{}^{\langle n-1\rangle} \vdash [\alpha :\ T\langle S, \phi\rangle]}{{}^{\langle n\rangle} \vdash [\alpha : T\langle \neg\phi, S\rangle]}\ \neg L$$

Las demás reglas lógicas resultan análogas.
Si la premisa se deriva con la regla modal $\Box_\alpha L$ tenemos:

$$\frac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S[\alpha : \vdash \phi]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S, \Box_\alpha \phi\rangle}\ \Box_\alpha L \quad \rightsquigarrow^{H.I.} \quad \frac{{}^{\langle n-1\rangle} \vdash [\alpha' :\ T\langle S[\alpha : \vdash \phi]\rangle]}{{}^{\langle n\rangle} \vdash [\alpha' :\ T\langle S, \Box_\alpha \phi\rangle]}\ \Box_\alpha L$$

Si la premisa se deriva con la regla modal $\Box_{\overline{\alpha}} L$ tenemos:

$$\frac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle \phi, S[\alpha :\ \Box_{\overline{\alpha}}\phi, S']\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S[\alpha :\ \Box_{\overline{\alpha}}\phi, S'\rangle}\ \Box_\alpha L \quad \rightsquigarrow^{H.I.}$$

$$\frac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle \vdash [\alpha' :\ \phi, S\ [\alpha :\ \Box_{\overline{\alpha}}\phi, S']]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle \vdash [\alpha' :\ S\ [\alpha :\ \Box_{\overline{\alpha}}\phi, S']\rangle}\ \Box_\alpha L$$

El caso para la regla $\Box_\alpha R$ no presenta ningún problema. □

Lema 3.20. Las reglas de debilitamiento internas y externa son admisibles con preservación de altura.

$$\frac{T\langle S\rangle}{T\langle \phi, S\rangle}\ \mathrm{WL} \quad \frac{T\langle S\rangle}{T\langle S, \phi\rangle}\ \mathrm{WR} \quad \frac{T\langle S\rangle}{T\langle S[\alpha :\ S']\rangle}\ \mathrm{WE}$$

Demostración. De manera sencilla por inducción sobre la derivación de la premisa. Consúltese el lema anterior para conocer la estructura de la demostración. □

Lema 3.21. La regla de *merge* es admisible con preservación de altura.

$$\frac{T\langle S_0\ [\alpha :\ (S[\underline{X}]); \alpha :\ (S'[\underline{Y}])]\rangle}{T\langle S_0\ [\alpha :\ S \cdot S'\ [\underline{X}; \underline{Y}]]\rangle}\ merge$$

Intuitivamente, la regla *merge* (leída de arriba para abajo) nos permite combinar dos ramas del árbol, siempre y cuando ambas ramas estén etiquetadas por la misma modalidad. Las raíces de los respectivos subárboles se combinan directamente, y las subramas de éstos simplemente se juntan como subramas del secuente resultante.

Demostración. Por inducción sobre la derivación de la premisa. La regla tiene tres secuentes auxiliares, S_0, S y S', así que para cada posible regla en la inducción mostramos el caso que afecta al secuente más relevante, ya que los demás casos se pueden resolver de manera similar.
Si la premisa es un árbol inicial claramente también lo es la conclusión. Si la premisa se infiere por una regla proposicional, tal como $\neg L$, la inferencia se preserva:

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ (S,\phi\ [\underline{X}]);\alpha:\ (S'[\underline{Y}])]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ (\neg\phi,S\ [\underline{X}]);\alpha:\ (S'[\underline{Y}])]\rangle}\ \neg L \quad \rightsquigarrow^{H.I.}$$

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ S\cdot S',\phi\ [\underline{X};\underline{Y}]]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ \neg\phi,S\cdot S'[\underline{X};\underline{Y}]]\rangle}\ \neg L$$

El resto de las reglas proposicionales se pueden resolver de forma similar. Si la premisa se deriva por una regla modal, la inferencia se preserva. Veamos el caso para $\Box_\alpha R$:

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ (S\ [\beta:\vdash\phi;\underline{X}]);\ \alpha:\ (S'[\underline{Y}])]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ (S,\Box_\beta\phi\ [\underline{X}]);\ \alpha:\ (S'[\underline{Y}])]\rangle}\ \Box_\alpha R \quad \rightsquigarrow^{H.I}$$

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ S\cdot S'[\beta:\vdash\phi;\underline{X};\underline{Y}])]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ S\cdot S',\Box_\beta\phi\ [\underline{X};\underline{Y}]]\rangle}\ \Box_\alpha R$$

Ahora el caso para $\Box_\alpha L$:

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle\Box_\alpha\phi,S_0\ [\alpha:\ (\phi,S\ [\underline{X}]);\alpha:\ (S'[\underline{Y}])]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle\Box_\alpha\phi,S_0\ [\alpha:\ (S\ [\underline{X}]);\alpha:\ (S'[\underline{Y}])]\rangle}\ \Box_\alpha L \quad \rightsquigarrow^{H.I.}$$

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle\Box_\alpha\phi,S_0\ [\alpha:\ \phi,S\cdot S'[\underline{X};\underline{Y}]]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle\Box_\alpha\phi,S_0\ [\alpha:\ S\cdot S'[\underline{X};\underline{Y}]]\rangle}\ \Box_\alpha L$$

Finalmente, el caso para $\Box_{\overline{\alpha}}L$:

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle\phi,S_0\ [\alpha:\ (\Box_{\overline{\alpha}}\phi,S\ [\underline{X}]),\alpha:\ (S'[\underline{Y}])]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ (\Box_{\overline{\alpha}}\phi,S\ [\underline{X}]),\alpha:\ (S'[\underline{Y}])]\rangle}\ \Box_{\overline{\alpha}}L \quad \rightsquigarrow^{H.I}$$

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle\phi,S_0\ [\alpha:\ \Box_{\overline{\alpha}}\phi,S\cdot S'[\underline{X};\underline{Y}]]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ \Box_{\overline{\alpha}}\phi,S\cdot S'[\underline{X};\underline{Y}]]\rangle}\ \Box_{\overline{\alpha}}L$$

□

Lema 3.22. La regla *swap* es admisible con preservación de altura.

$$\dfrac{T\langle S_0\ [\alpha:\ (S_1\ [\overline{\alpha}:\ (S_2\ [\underline{X}]);\underline{X'}])]\rangle}{T\langle S_0\cdot S_2\ [\alpha:\ (S_1\ [\underline{X'}]);\underline{X}]\rangle}\ swap$$

Esta regla nos permite "doblar" una rama hija desde un secuente S_1 hacia el secuente padre S_0, siempre y cuando la flecha hacia la hija tenga la modalidad inversa a la flecha que va de S_0 a S_1.

Demostración. Por inducción sobre la derivación de la premisa. Como en el caso de la regla *merge* tenemos tres secuentes auxiliares, así que nos limitamos a mostrar el caso en donde la regla afecta al secuente más rele-

vante, siendo que los demás casos se pueden resolver análogamente.
Si la premisa es un AHS inicial claramente también lo es la conclusión. Si la premisa se infiere por una regla proposicional, la inferencia se preserva. Por ejemplo, si la regla en cuestión es $\neg R$ tenemos:

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ (S_1\ [\overline{\alpha}:\ (\phi, S_2\ [\underline{X}]); \underline{X'}])]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ (S_1\ [\overline{\alpha}:\ (S_2, \neg\phi\ [\underline{X}]); \underline{X'}])]\rangle}\ \neg R \quad \rightsquigarrow^{H.I.}$$

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle \phi, S_0\cdot S_2\ [\alpha:\ (S_1\ [\underline{X'}]); \underline{X}]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S_0\cdot S_2, \neg\phi\ [\alpha:\ (S_1\ [\underline{X'}]); \underline{X}]\rangle}\ \neg R$$

Si la premisa se deriva por la regla modal $\Box_\alpha R$, tenemos:

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ (S_1\ [\overline{\alpha}:\ (S_2\ [\beta: \vdash \phi; \underline{X}]); \underline{X'}])]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ (S_1\ [\overline{\alpha}:\ (S_2, \Box_\beta\phi\ [\underline{X}]); \underline{X'}])]\rangle}\ \Box_\alpha R \quad \rightsquigarrow^{H.I.}$$

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S_0\cdot S_2\ [\beta: \vdash \phi; \alpha:\ (S_1\ [\underline{X'}]); \underline{X}]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S_0\cdot S_2, \Box_\beta\phi\ [\alpha:\ (S_1\ [\underline{X'}]); \underline{X}]\rangle}\ \Box_\alpha R$$

Si la premisa se deriva por la regla $\Box_\alpha L$, la transformación utiliza $\Box_{\overline{\alpha}} L$:

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ (\Box_{\overline{\alpha}}\phi, S_1\ [\overline{\alpha}:\ (\phi, S_2\ [\underline{X}]); \underline{X'}])]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ (\Box_{\overline{\alpha}}\phi, S_1\ [\overline{\alpha}:\ (S_2\ [\underline{X}]); \underline{X'}])]\rangle}\ \Box_\alpha L \quad \rightsquigarrow^{H.I.}$$

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle \phi, S_0\cdot S_2\ [\alpha:\ (\Box_{\overline{\alpha}}\phi, S_1\ [\underline{X'}]); \underline{X}]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S_0\cdot S_2\ [\alpha:\ (\Box_{\overline{\alpha}}\phi, S_1\ [\underline{X'}]); \underline{X}]\rangle}\ \Box_{\overline{\alpha}} L$$

Finalmente, si la premisa se deriva por $\Box_{\overline{\alpha}} L$, tenemos:

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ (\phi, S_1\ [\overline{\alpha}:\ (\Box_\alpha\phi, S_2\ [\underline{X}]); \underline{X'}])]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S_0\ [\alpha:\ (S_1\ [\overline{\alpha}:\ (\Box_\alpha\phi, S_2\ [\underline{X}]); \underline{X'}])]\rangle}\ \Box_{\overline{\alpha}} L \quad \rightsquigarrow^{H.I.}$$

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle \Box_\alpha\phi, S_0\cdot S_2\ [\alpha:\ (\phi, S_1\ [\underline{X'}]); \underline{X}]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle \Box_\alpha\phi, S_0\cdot S_2\ [\alpha:\ (S_1\ [\underline{X'}]); \underline{X}]\rangle}\ \Box_\alpha L$$

□

Lema 3.23. Las reglas lógicas y modales del cálculo $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$ son invertibles con preservación de altura.

Demostración. Por inducción sobre la derivación de la premisa de la regla considerada. Los casos para las reglas lógicas son directos. Los casos para las reglas $\Box_\alpha L$ y $\Box_{\overline{\alpha}} L$ son fáciles, ya que las premisas de esas reglas se obtienen por debilitamiento de la conclusión, y el debilitamiento, como ya vimos, es admisible con preservación de altura.
El caso interesante es para la regla $\Box_\alpha R$. Si $T\langle S, \Box_\alpha\phi\rangle$ es inicial entonces

también lo es $T\langle S\ [\alpha :\ \vdash \phi]\rangle$. Si $T\langle S, \Box_\alpha \phi\rangle$ se obtiene por una regla proposicional, por ejemplo $\neg L$, la inferencia se preserva:

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S', \psi, \Box_\alpha \phi\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle \neg\psi, S', \Box_\alpha \phi\rangle}\ \neg L \quad \rightsquigarrow^{H.I.}$$

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S', \psi\ [\alpha :\ \vdash \phi]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle \neg\psi, S'\ [\alpha :\ \vdash \phi]\rangle}\ \neg L$$

Si $T\langle S, \Box_\alpha \phi\rangle$ es de la forma $T\langle \Box_\alpha \psi, S', \Box_\alpha \phi[\alpha :\ S_0[\underline{X}]]\rangle$ y se obtuvo por la regla $\Box_\alpha L$ entonces la inferencia se preserva:

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle \Box_\beta \psi, S', \Box_\alpha \phi\ [\beta :\ \psi, S_0\ [\underline{X}]]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle \Box_\beta \psi, S', \Box_\alpha \phi\ [\beta :\ S_0\ [\underline{X}]]\rangle}\ \Box_\alpha L \quad \rightsquigarrow^{H.I.}$$

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle \Box_\beta \psi, S'\ [\alpha : \vdash \phi;\ \beta :\ \psi, S_0\ [\underline{X}]]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle \Box_\beta \psi, S'\ [\alpha :\ \vdash \phi;\ \beta :\ S_0\ [\underline{X}]]\rangle}\ \Box_\alpha L$$

El caso en el que $T\langle S, \Box_\alpha \phi\rangle$ se obtiene por la regla $\Box_{\overline{\alpha}} L$ o por la regla $\Box_\alpha R$ en la que $\Box_\alpha \phi$ no es la fórmula principal se pueden manejar de manera análoga a $\Box_\alpha L$. Finalmente en el caso en el que $T\langle S, \Box_\alpha \phi\rangle$ se deriva por la regla $\Box_\alpha R$ tal que $\Box_\alpha \phi$ es la fórmula principal, la premisa de la regla debe ser $T\langle \Gamma\ [\alpha :\ \vdash \phi]\rangle$, que es la conclusión que buscamos.

□

Lema 3.24. Las reglas de contracción son admisibles con preservación de altura.

$$\dfrac{T\langle \phi, \phi, S\rangle}{T\langle \phi, S\rangle}\ CL \quad \dfrac{T\langle S, \phi, \phi\rangle}{T\langle S, \phi\rangle}\ CR$$

Demostración. Por inducción sobre la derivación de las premisas. Analizamos el caso para CR, el caso para CL se resuelve de forma similar.
Si $T\langle S, \phi, \phi\rangle$ es inicial entonces también lo es $T\langle S, \phi\rangle$. Si se obtiene de una regla $\mathcal{R}$ en la que ninguna de las dos ocurrencias de ϕ es principal, entonces simplemente aplicamos la hipótesis de inducción a las premisas de la regla y a continuación aplicamos $\mathcal{R}$, obteniendo como resultado a $T\langle S, \phi\rangle$. Si $T\langle S, \phi, \phi\rangle$ se obtiene como resultado de una regla donde una de las dos ocurrencias de ϕ es principal, debe ser de alguna regla derecha. Los casos posibles son $\neg R$, $\wedge R$ y $\Box_\alpha R$.
Para el caso $\neg R$:

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle \psi, S, \neg\psi\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S, \neg\psi, \neg\psi\rangle}\ \neg R \quad\rightsquigarrow\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle \psi, S, \neg\psi\rangle}{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle \psi, \psi, S\rangle}\ (\neg R)^-}{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle \psi, S\rangle}\ \text{H.I.}}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S, \neg\psi\rangle}\ \neg R$$

Para $\wedge R$:

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S, \psi, \psi\wedge\gamma\rangle \qquad {}^{\langle n-1\rangle}T\langle S, \gamma, \psi\wedge\gamma\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S, \psi\wedge\gamma, \psi\wedge\gamma\rangle}\ \wedge R \quad\rightsquigarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S, \psi, \psi\wedge\gamma\rangle}{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S, \psi, \psi\rangle}\ (\wedge R)^-}{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S, \psi\rangle}\ \text{H.I.} \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S, \gamma, \psi\wedge\gamma\rangle}{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S, \gamma, \gamma\rangle}\ (\wedge R)^-}{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S, \gamma\rangle}\ \text{H.I.}}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S, \psi\wedge\gamma\rangle}\ \wedge R$$

Para $\Box_\alpha R$:

$$\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S, \Box_\alpha\psi\ [\alpha : \vdash \psi]\rangle}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S, \Box_\alpha\psi, \Box_\alpha\psi\rangle}\ \Box_\alpha R \quad\rightsquigarrow\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S, \Box_\alpha\psi\ [\alpha : \vdash \psi]\rangle}{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S\ [\alpha : \vdash \psi; \alpha : \vdash \psi]\rangle}\ (\Box_\alpha R)^-}{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S\ [\alpha : \vdash \psi, \psi]\rangle}\ \mathit{merge}}{{}^{\langle n-1\rangle}T\langle S\ [\alpha : \vdash \psi]\rangle}\ \text{H.I.}}{{}^{\langle n\rangle}T\langle S, \Box_\alpha\psi\rangle}\ \Box_\alpha R$$

$\Box$

Lema 3.25. Sea $T\langle G\rangle$ un árbol de hipersecuentes y $T^*\langle G\rangle$ el resultado de aplicar una de las reglas admisibles $nec, WL, WR, WE, merge, CL$ o CR, llamando $\mathcal{R}'$ a esta regla. Es decir:

$$\dfrac{T\langle G\rangle}{T^*\langle G\rangle}\ \mathcal{R}'$$

Si para una regla $\mathcal{R}$ tenemos que:

$$\dfrac{T\langle G'\rangle}{T\langle G\rangle}\ \mathcal{R}$$

entonces se cumple que:

$$\dfrac{T^*\langle G'\rangle}{T^*\langle G\rangle}\ \mathcal{R}$$

En otras palabras, las reglas admisibles mencionadas afectan únicamente a su secuente principal, dejando al resto del árbol intacto.

Demostración. De manera directa por inducción sobre la forma del árbol $T\langle G\rangle$. Los casos donde $T\langle G\rangle = S$ y $T\langle G\rangle = G'[\underline{X}]$ son directos.
Cuando $T\langle G\rangle = S\ [\alpha :\ T'\langle G\rangle; \underline{X}]$ basta ver que por hipótesis de inducción $T^*\langle G'\rangle = S^*\ [\alpha :\ T'\langle G'\rangle; \underline{X^*}]$ y por lo tanto al aplicar $\mathcal{R}$ obtenemos $T^*\langle G\rangle = S^*\ [\alpha :\ T'\langle G\rangle; \underline{X^*}]$. □

Lema 3.26. Sea $T\langle G\rangle$ un árbol de hipersecuentes y $T\langle G'\rangle$ el resultado de aplicar una de las reglas proposicionales o la regla $\Box_\alpha R$ a $T\langle G\rangle$. Entonces, si para una regla $\mathcal{R}$ tenemos que:

$$\frac{T^*\langle G'\rangle}{T\langle G'\rangle}\ \mathcal{R}$$

(esto es, $\mathcal{R}$ opera sobre T^* tal que no afecta a G') entonces se cumple que:

$$\frac{T^*\langle G\rangle}{T\langle G\rangle}\ \mathcal{R}$$

Demostración. De manera directa por inducción sobre la forma del árbol $T\langle G\rangle$. □

Considerando todas las reglas admisibles que hemos presentado hasta ahora podemos construir una extensión para el sistema $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$ que las incluya sin afectar el poder de derivación del sistema.

Definición 3.27 (Cálculo de árboles de hipersecuentes $\mathbf{GK}'_{\overline{m}}$)**.** El cálculo de árboles de hipersecuentes $\mathbf{GK}'_{\overline{m}}$ está compuesto por todas las reglas del sistema $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$ (incluyendo la regla de corte), junto con las reglas *nec*, *merge*, *swap*, CL, CR, WL, WR, WE, y las versiones invertidas de $\neg L$, $\neg R$, $\wedge L$, $\wedge R$, $\Box_\alpha L$, $\Box_\alpha R$ y $\Box_{\overline{\alpha}} L$.

Proposición 3.28. Los cálculos de árboles de hipersecuentes $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$ y $\mathbf{GK}'_{\overline{m}}$ son equivalentes; un árbol de hipersecuentes es derivable en $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$ si y sólo si es derivable en $\mathbf{GK}'_{\overline{m}}$.

Con el material presentado en este capítulo estamos preparados para probar tanto la corrección (esto es, solidez y completitud) del sistema $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$, así como el teorema de eliminación de corte para este sistema.

4 Corrección y eliminación de corte en $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$

4.1. Corrección del cálculo $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$

Ahora que tenemos el sistema completo, incluyendo la regla de corte, demostraremos la corrección del cálculo $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$.

Definición 4.1 (Interpretación de AHS)**.** La interpretación de un secuente $(\Gamma \vdash \Delta)^\tau$ es una fórmula de la lógica modal que captura el significado del secuente. Específicamente:

$$(\Gamma \vdash \Delta)^\tau = \left(\bigwedge_{\phi \in \Gamma} \phi \right) \rightarrow \left(\bigvee_{\psi \in \Delta} \psi \right)$$

Por conveniencia, definimos:

$$\gamma := \bigwedge_{\phi \in \Gamma} \phi$$

$$\delta := \bigvee_{\psi \in \Delta} \psi$$

tal que $(\Gamma \vdash \Delta)^\tau = \gamma \rightarrow \delta$.
Abusando de la notación, diremos que $\phi \in \gamma$ si $\phi \in \Gamma$ (es decir, si ϕ es uno de los conyuntos de γ) y lo análogo para $\psi \in \delta$.
La interpretación de un árbol de hipersecuentes es como sigue:

$$(S\ [\alpha_1 : T_1 \ldots \alpha_n : T_n])^\tau = (S)^\tau \vee \Box_{\alpha_1}(T_1)^\tau \vee \cdots \vee \Box_{\alpha_n}(T_n)^\tau$$

4.1.1. Solidez

Lema 4.2 (Solidez local)**.** Las reglas del sistema de árboles de hipersecuentes para $\mathbf{K}_{\overline{m}}$ preservan la validez: si las interpretaciones de las premisas de una regla son validas, también lo es la interpretación de la conclusión.

Demostración. Por casos sobre las reglas. Hacemos notar que basta probar que se preserva la validez entre los hipersecuentes principales en cada regla, pues la validez se preserva bajo disyunciones y bajo aplicaciones arbitrarias del operador de necesidad; esto es, si $\models \phi$ entonces $\models \phi \vee \psi$ y $\models \Box_\alpha \phi$. Además, hacemos uso liberal del hecho de que $\mathcal{K}, w \models \gamma \to \delta$ si y sólo si o existe un $\phi \in \gamma$ tal que $\mathcal{K}, w \not\models \phi$, o de lo contrario existe un $\psi \in \delta$ tal que $\mathcal{K}, w \models \psi$.

1. $\neg L$. Suponemos que $\gamma \to (\delta \vee \phi)$ es válido. Queremos demostrar que $(\neg\phi \wedge \gamma) \to \delta$ es válido.

   Si $\gamma \to (\delta \vee \phi)$ es válido entonces para cualquier $\mathcal{K}, w$ se cumple que $\mathcal{K}, w \models \gamma \to (\delta \vee \phi)$. Dividimos en dos casos:

   - Caso 1: $\mathcal{K}, w \models \phi$. Entonces $\mathcal{K}, w \not\models \neg\phi$ por lo que $\mathcal{K}, w \models (\neg\phi \wedge \gamma) \to \delta$
   - Caso 2: $\mathcal{K}, w \not\models \phi$. Entonces o bien hay un $\psi \in \gamma$ tal que $\mathcal{K}, w \not\models \psi$ o de lo contrario hay un $\psi \in \delta$ tal que $\mathcal{K}, w \models \psi$. En cualquiera de los dos casos se cumple que $\mathcal{K}, w \models (\neg\phi \wedge \gamma) \to \delta$.

2. $\neg R$. Análogo a $\neg L$.

3. $\wedge L$. Trivial puesto que las interpretaciones de la premisa y la conclusión son idénticas.

4. $\wedge R$. Suponemos que $\gamma \to (\delta \vee \phi)$ y $\gamma \to (\delta \vee \psi)$ son válidas. Queremos demostrar que $\gamma \to (\delta \vee (\phi \wedge \psi))$ es válida. Sean $\mathcal{K}, w$ un modelo y un mundo en dicho modelo. Si existe un $\alpha \in \gamma$ tal que $\mathcal{K}, w \not\models \alpha$ entonces el resultado es trivial. Igualmente si existe un $\alpha \in \delta$ tal que $\mathcal{K}, w \models \alpha$. Si este no es el caso, entonces debe ocurrir que $\mathcal{K}, w \models \phi$ y $\mathcal{K}, w \models \psi$, y por lo tanto $\mathcal{K}, w \models \phi \wedge \psi$. Por lo tanto, $\mathcal{K}, w \models \gamma \to (\delta \vee (\phi \wedge \psi))$.

5. $\Box_\alpha L$. Suponemos que $((\Box_\alpha \phi \wedge \gamma) \to \delta) \vee \Box_\alpha((\phi \wedge \gamma') \to \delta')$ es válida. Queremos demostrar que $((\Box_\alpha \phi \wedge \gamma) \to \delta) \vee \Box_\alpha(\gamma' \to \delta')$ es válida.

   Sean $\mathcal{K}, w$ un modelo y un mundo respectivamente. Evidentemente si el primer disyunto se satisface entonces la conclusión trivialmente también se satisface.

   Supongamos entonces que $\mathcal{K}, w \models \Box_\alpha((\phi \wedge \gamma') \to \delta')$. Entonces para todo w' tal que $wR_\alpha w'$, $\mathcal{K}, w' \models (\phi \wedge \gamma') \to \delta$. Si $\mathcal{K}, w' \not\models \phi$ entonces $\mathcal{K}, w \not\models \Box_\alpha \phi$, por lo que $\mathcal{K}, w \models (\Box_\alpha \phi \wedge \gamma) \to \delta$. En otro caso, o bien existe un $\alpha \in \gamma'$ tal que $\mathcal{K}, w \not\models \alpha$, en cuyo caso $\mathcal{K}, w' \models \gamma' \to \delta'$ y por lo tanto $\mathcal{K}, w \models \Box_\alpha(\gamma' \to \delta')$, o bien existe un $\alpha \in \delta'$ tal que $\mathcal{K}, w' \models \alpha$ y por lo tanto $\mathcal{K}, w' \models \gamma' \to \delta'$, por lo que $\mathcal{K}, w \models \Box_\alpha(\gamma' \to \delta')$

6. $\Box_\alpha R$. Suponemos que $(\gamma \to \delta) \vee \Box_\alpha \phi$ es válida. Queremos demostrar que $\gamma \to (\delta \vee \Box_\alpha \phi)$ es válida.

   Usando equivalencias y utilizando asociatividad: $(\gamma \to \delta) \vee \Box_\alpha \phi \equiv (\neg\gamma \vee \delta) \vee \Box_\alpha \phi \equiv \neg\gamma \vee (\delta \vee \Box_\alpha \phi) \equiv \gamma \to (\delta \vee \Box_\alpha \phi)$.

7. $\Box_{\overline{\alpha}} L$. Suponemos que $((\phi \wedge \gamma) \to \delta) \vee \Box_\alpha((\Box_{\overline{\alpha}} \phi \wedge \gamma') \to \delta')$ es válida. Queremos demostrar que $(\gamma \to \delta) \vee \Box_\alpha((\Box_{\overline{\alpha}} \phi \wedge \gamma') \to \delta')$ es válida.

   Si el segundo disyunto de la premisa es válido entonces la conclusión trivialmente lo es.

   Sean $\mathcal{K}, w$ un modelo y un mundo respectivamente. Supongamos que $\mathcal{K}, w \models (\phi \wedge \gamma) \to \delta$

   - Si $\mathcal{K}, w \not\models \phi$, entonces para todo w' tal que $wR_\alpha w'$, $\mathcal{K}, w' \not\models \Box_{\overline{\alpha}} \phi$, por lo que $\mathcal{K}, w' \models (\Box_{\overline{\alpha}} \phi \wedge \gamma') \to \delta$ y por lo tanto $\mathcal{K}, w \models \Box_\alpha((\Box_{\overline{\alpha}} \phi \wedge \gamma') \to \delta)$
   - Si $\mathcal{K}, w \models \phi$ entonces o bien existe un $\psi \in \gamma$ tal que $\mathcal{K}, w \not\models \psi$, en cuyo caso $\mathcal{M}, w \models \gamma \to \delta$, o bien existe un $\psi \in \delta$ tal que $\mathcal{K}, w \models \psi$, en cuyo caso $\mathcal{K}, w \models \gamma \to \delta$.

8. *Cut*. Suponemos que $\gamma \to (\delta \vee \phi)$ y $(\phi \wedge \gamma') \to \delta'$ son válidas. Queremos demostrar que $(\gamma \wedge \gamma') \to (\delta \vee \delta')$ es válida. Sean $\mathcal{K}$ y w un modelo y un mundo. Si existe un ψ en γ o γ' tal que $\mathcal{K}, w \not\models \psi$ entonces el resultado es trivial. De lo contrario, notemos que debe haber un ψ en δ' tal que $\mathcal{K}, w \models \psi$, o de lo contrario $(\phi \wedge \gamma') \to \delta'$ no podría ser válida. Por lo tanto en este caso se cumple que $\mathcal{K}, w \models (\gamma \wedge \gamma') \to (\delta \vee \delta')$.

□

Corolario 4.3 (Solidez)**.** Si $\vdash \phi$ es derivable entonces ϕ es válida.

Demostración. La definición de derivabilidad en el sistema de árboles de hipersecuentes dice que una fórmula es derivable si y sólo si tiene una derivación usando las reglas del cálculo tal que cada rama de la derivación termina en un AHS inicial. Es fácil ver que los AHS iniciales son válidos, y como acabamos de demostrar las reglas del cálculo preservan la validez de la interpretación de los AHS. Por lo tanto, si $\vdash \phi$ es derivable en el cálculo de árboles de hipersecuentes, ϕ es válida. □

4.1.2. Completitud

Para probar la completitud de $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$ podemos hacer uso del sistema axiomático $\mathbf{K}_{\overline{m}}$. Como sabemos, $\mathbf{K}_{\overline{m}}$ es completo —cualquier fórmula válida es derivable en $\mathbf{K}_{\overline{m}}$—, por lo que basta probar que todos los axiomas y las reglas del sistema axiomático son derivables en el sistema $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$ para probar que el segundo es completo.

Teorema 4.4 (Completitud)**.** Si ϕ es derivable en el sistema axiomático $\mathbf{K}_{\overline{m}}$ (Definición 2.11), entonces $\vdash \phi$ es derivable en el cálculo de árboles de hipersecuentes.

Demostración. Por inducción sobre el sistema $\mathbf{K}_{\overline{m}}$. Mostramos sólo los casos interesantes.

$A4)$ $\Box_\alpha(\phi \to \psi) \to \Box_\alpha\phi \to \Box_\alpha\psi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{T\langle\phi\vdash\phi\rangle \qquad T\langle\phi,\psi\vdash\psi\rangle}{\Box_\alpha(\phi\to\psi),\Box_\alpha\phi\vdash[\alpha:\phi\to\psi,\phi\vdash\psi]}\;\to L}{\Box_\alpha(\phi\to\psi),\Box_\alpha\phi\vdash[\alpha:\phi\to\psi\vdash\psi]}\;\Box_\alpha L}{\Box_\alpha(\phi\to\psi),\Box_\alpha\phi\vdash[\alpha:\vdash\psi]}\;\Box_\alpha L}{\Box_\alpha(\phi\to\psi),\Box_\alpha\phi\vdash\Box_\alpha\psi}\;\Box_\alpha R}{\Box_\alpha(\phi\to\psi)\vdash\Box_\alpha\phi\to\Box_\alpha\psi}\;\to R}{\vdash\Box_\alpha(\phi\to\psi)\to\Box_\alpha\phi\to\Box_\alpha\psi}\;\to R$$

$A5)$ $\phi \to \Box_\alpha\Diamond_{\overline{\alpha}}\phi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi\vdash\phi[\alpha:\ \Box_{\overline{\alpha}}\neg\phi\vdash]}{\phi,\neg\phi\vdash[\alpha:\ \Box_{\overline{\alpha}}\neg\phi\vdash]}\;\neg L}{\phi\vdash[\alpha:\ \Box_{\overline{\alpha}}\neg\phi\vdash]}\;\Box_{\overline{\alpha}}L}{\phi\vdash[\alpha:\vdash\Diamond_{\overline{\alpha}}\phi]}\;\neg R}{\phi\vdash\Box_\alpha\Diamond_{\overline{\alpha}}\phi}\;\Box_\alpha R}{\vdash\phi\to\Box_\alpha\Diamond_{\overline{\alpha}}\phi}\;\to R$$

$A6)$ Análogo a $A5$.

$R1)$ Directamente por hipótesis de inducción y utilizando la regla de corte.

$R2)$ Directamente por hipótesis de inducción y aplicación de la regla *nec*,

$$\dfrac{\dfrac{\vdash\phi}{\vdash[\alpha:\vdash\phi]}\;nec}{\vdash\Box_\alpha\phi}\;\Box_\alpha R$$

□

4.2. Eliminación de corte

Como paso final para tener un sistema de árboles de hipersecuentes adecuado para la lógica $\mathbf{K}_{\overline{m}}$, debemos probar que la regla de corte es eliminable.

El siguiente lema permite aislar los efectos de aplicar una regla sobre cierta parte de un árbol tal que los efectos permanecen aislados aún al aplicar la regla de corte, facilitando así el trabajo de eliminar los cortes cuando se aplican a un secuente distinto del auxiliar.

Lema 4.5. Dados tres ZAHS $I\langle * \rangle, J\langle * \rangle, H\langle * \rangle$, tal que $I\langle * \rangle \sim J\langle * \rangle \sim H\langle * \rangle$ si existe una regla $\mathcal{R}$ de $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$ y un secuente S_1 tal que

$$\frac{I\langle S_1 \rangle}{J\langle S_1 \rangle}\ \mathcal{R}$$

entonces para cualquier secuente S_2 se cumple que

$$\frac{I \otimes H\langle S_2 \rangle}{J \otimes H\langle S_2 \rangle}\ \mathcal{R}$$

Demostración. Por inducción sobre la forma de los ZAHS $I\langle * \rangle, J\langle * \rangle, H\langle * \rangle$. Distinguimos los tres posibles casos.

(a) $I\langle * \rangle, J\langle * \rangle, H\langle * \rangle$ **son todos** $\langle * \rangle$ — No hay nada que demostrar, pues la hipótesis no se aplica.

(b) $I\langle * \rangle, J\langle * \rangle, H\langle * \rangle \equiv \langle * \rangle[\underline{X}], \langle * \rangle[\underline{Y}], \langle * \rangle[\underline{Z}]$ **respectivamente** — En este caso la hipótesis es

$$\frac{S_1\ [\underline{X}]}{S_1\ [\underline{Y}]}\ \mathcal{R}$$

y queremos probar que

$$\frac{S_2\ [\underline{X}; \underline{Z}]}{S_2\ [\underline{Y}; \underline{Z}]}\ \mathcal{R}$$

Como los AHS afectados por $\mathcal{R}$ se mantienen separados (i.e. $\underline{\mathrm{Y}}$ y $\underline{\mathrm{Z}}$ no se combinan en el producto de árboles), es fácil ver que S_2 y $\underline{Z}$ no se ven afectados por $\mathcal{R}$.

(c)

- $I\langle * \rangle \equiv S_I\ [\alpha :\ I'\langle * \rangle; \underline{X}]$
- $J\langle * \rangle \equiv S_J\ [\alpha :\ J'\langle * \rangle; \underline{Y}]$
- $H\langle * \rangle \equiv S_H\ [\alpha :\ H'\langle * \rangle; \underline{Z}]$

Supongamos que

$$\frac{S_I\ [\alpha:\ I'\langle S_1\rangle; \underline{X}]}{S_J\ [\alpha:\ J'\langle S_1\rangle; \underline{Y}]}\ \mathcal{R}$$

El objetivo es probar que

$$\frac{S_I\cdot S_H\ [\alpha:\ I'\otimes H'\langle S_2\rangle; \underline{X}; \underline{Z}]}{S_J\cdot S_H\ [\alpha:\ J'\otimes H'\langle S_2\rangle; \underline{Y}; \underline{Z}]}\ \mathcal{R}$$

Distinguimos los casos según los secuentes y/o árboles a los que se aplica la regla $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ **actúa sobre** S_I. Ejemplifiquemos con la regla $\neg R$. En ese caso tenemos

$$\frac{\phi, S_I\ [\alpha:\ I'\langle S_1\rangle; \underline{X}]}{S_I, \neg\phi\ [\alpha:\ I'\langle S_1\rangle; \underline{X}]}\ \neg R$$

Entonces si tenemos como premisa $\phi, S_I\cdot S_H\ [\alpha:\ I'\otimes H'\langle S_2\rangle; \underline{X}; \underline{Z}]$, obtenemos la conclusión deseada aplicando $\neg R$.

$$\frac{\phi, S_I\cdot S_H\ [\alpha:\ I'\otimes H'\langle S_2\rangle; \underline{X}; \underline{Z}]}{S_I\cdot S_H, \neg\phi\ [\alpha:\ I'\otimes H'\langle S_2\rangle; \underline{X}; \underline{Z}]}\ \neg R$$

El procedimiento para las demás reglas que actúan sobre un secuente es análogo.
- $\mathcal{R}$ **actúa sobre** S_I **y** $[\alpha: I'\langle S_1\rangle; \underline{X}]$**.** En este caso $\mathcal{R}$ debe ser alguna de las tres reglas modales $\Box_\alpha L, \Box_\alpha R$ y $\Box_{\overline{\alpha}} L$.
Empezando con $\Box_\alpha R$, supongamos que tenemos

$$\frac{S_I\ [\beta: \vdash \phi; \alpha:\ I'\langle S_1\rangle; \underline{X'}]}{S_I, \Box_\beta\phi\ [\alpha: I'\langle S_1\rangle; \underline{X'}]}\ \Box_\alpha R$$

Similarmente al caso anterior, aplicamos la regla a la premisa relevante y obtenemos la conclusión deseada

$$\frac{S_I\cdot S_H\ [\beta: \vdash \phi; \alpha:\ I'\otimes H'\langle S_2\rangle; \underline{X'}; \underline{Z}]}{S_I\cdot S_H, \Box_\beta\phi\ [\alpha: I'\otimes H'\langle S_2\rangle; \underline{X'}; \underline{Z}]}\ \Box_\alpha R$$

En el caso para $\Box_\alpha L$ tenemos dos subcasos: o bien la regla actúa entre S_I y un árbol en $\underline{X}$, o actúa entre S_I e $I\langle S_1\rangle$. Afortunadamente ambos casos son análogos, así que mostramos la resolución del primero únicamente. Supongamos que tenemos

$$\frac{\Box_\beta\phi, S_I\ [\beta:\ (S\ [\underline{X''}]); \alpha:\ I'\langle S_1\rangle; \underline{X'}]}{\Box_\beta\phi, S_I\ [\beta:\ (\phi, S\ [\underline{X''}]); \alpha:\ I'\langle S_1\rangle; \underline{X'}]}\ \Box_\alpha L$$

Una vez más obtenemos la conclusión deseada al aplicar la misma regla sobre la premisa relevante

$$\dfrac{\Box_\beta\phi, S_I \cdot S_H\ [\beta:\ (S\ [\underline{X''}]); \alpha:\ I' \otimes H'\langle S_2\rangle; \underline{X'}; \underline{Z}]}{\Box_\beta\phi, S_I \cdot S_H\ [\beta:\ (\phi, S\ [\underline{X''}]); \alpha:\ I' \otimes H'\langle S_2\rangle; \underline{X'}; \underline{Z}]}\ \Box_\alpha L$$

Para el caso de la regla $\Box_{\overline{\alpha}} L$ tenemos la misma distinción en dos subcasos que en el caso anterior; siguen siendo análogos, así que mostramos sólo uno de ellos. Supongamos que tenemos

$$\dfrac{\phi, S_I\ [\beta:\ (\Box_{\overline{\beta}}\phi, S\ [\underline{X''}]); \alpha:\ I'\langle S_1\rangle; \underline{X'}]}{S_I\ [\beta:\ (\Box_{\overline{\beta}}\phi, S\ [\underline{X''}]); \alpha:\ I'\langle S_1\rangle; \underline{X'}]}\ \Box_{\overline{\alpha}} L$$

Reiterando una vez más, aplicamos la regla a la premisa relevante obteniendo la conclusión que buscamos.

$$\dfrac{\phi, S_I \cdot S_H\ [\beta:\ (\Box_{\overline{\beta}}\phi, S\ [\underline{X''}]); \alpha:\ I' \otimes H'\langle S_2\rangle; \underline{X'}; \underline{Z}]}{S_I \cdot S_H\ [\beta:\ (\Box_{\overline{\beta}}\phi, S\ [\underline{X''}]); \alpha:\ I' \otimes H'\langle S_2\rangle; \underline{X'}; \underline{Z}]}\ \Box_{\overline{\alpha}} L$$

- $\mathcal{R}$ actúa sobre $\underline{X}$. Este caso se puede manejar de manera análoga al caso (b) de la inducción.

- $\mathcal{R}$ actúa sobre I'. Tenemos que volver a analizar la forma de $I'\langle * \rangle, J'\langle * \rangle$ y $H'\langle * \rangle$. Si los tres son $\langle * \rangle$ entonces el caso es trivial. Si son, respectivamente, $\langle * \rangle[\underline{X'}], \langle * \rangle[\underline{Y'}], \langle * \rangle[\underline{Z'}]$ entonces tenemos que

$$\dfrac{S_I\ [\alpha : (S_1\ [\underline{X'}]); \underline{X}]}{S_I\ [\alpha : (S_1\ [\underline{Y'}]); \underline{X}]}\ \mathcal{R}$$

Entonces, por hipótesis de inducción sobre $I'\langle * \rangle, J'\langle * \rangle, H'\langle * \rangle$, tenemos que

$$\dfrac{S_I\ [\alpha : (S_2\ [\underline{X'}; \underline{Z'}]); \underline{X}]}{S_I\ [\alpha : (S_2\ [\underline{Y'}; \underline{Z'}]); \underline{X}]}\ \mathcal{R}$$

y aplicando varias veces las reglas de debilitamiento externo e interno obtenemos $S_I \cdot S_H\ [\alpha:\ (S_2\ [\underline{Y'}; \underline{Z'}]); \underline{X}; \underline{Z}]$.

Finalmente, el caso en el que $I'\langle * \rangle, J'\langle * \rangle, H'\langle * \rangle \equiv S'_I[\beta:\ I''\langle * \rangle; \underline{X'}], S'_J[\beta:\ J''\langle * \rangle; \underline{Y'}], S'_H[\beta:\ H''\langle * \rangle; \underline{Z'}]$ se puede resolver de manera similar al caso anterior empleando la hipótesis de inducción y las reglas de debilitamiento interno y externo.

□

Lema 4.6. Sean $T\langle S_1, \phi\rangle$ y $T'\langle \phi, S_2\rangle$ tal que $T\langle S_1, \phi\rangle \sim T'\langle \phi, S_2\rangle$.
Si tenemos que

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, d_1 \\ T\langle S_1, \phi\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\, d_2 \\ T'\langle \phi, S_2\rangle\end{array}}{T \otimes T'\langle S_1 \cdot S_2\rangle}\ cut_\phi$$

donde d_1 y d_2 son las derivaciones que concluyen en los respectivos árboles de hipersecuentes, y ninguna de las cuales emplea la regla de corte, entonces existe una derivación de $T \otimes T'\langle S_1 \cdot S_2\rangle$ que no contiene ningún uso de la regla de corte.

Demostración. Por inducción sobre la suma de las alturas de las derivaciones d_1 y d_2 con inducción auxiliar sobre la fórmula ϕ. En efecto esta inducción nos permite eliminar cortes utilizando la hipótesis de inducción cuandoquiera que la fórmula del corte sea más sencilla que ϕ, o que la suma de las alturas de las premisas del corte sea menor a la suma de las alturas de d_1 y d_2. Procedemos por casos, agrupando por la última regla aplicada a la premisa izquierda.

(1) $T\langle S_1, \phi\rangle$ **es inicial.** En este caso, o bien la conclusión también es un AHS inicial, o el corte se puede sustituir por repetidas aplicaciones de las reglas de debilitamiento interno y externo sobre $T'\langle \phi, S_2\rangle$. En particular, si $\phi = p$ y $S_1 = p \vdash p$ tenemos:

$$\frac{T\langle p \vdash p\rangle \qquad T'\langle p, S_2\rangle}{T \otimes T'\langle p, S_2\rangle}\ cut_p$$

No es difícil ver que este corte puede omitirse, agregando fórmulas y ramas sobre T' desde la raíz hasta p, S_2 para llegar a la conclusión deseada:

$$\begin{array}{c} T'\langle p, S_2\rangle \\ \vdots\ \{WL, WR, WE\}^* \\ T \otimes T'\langle p, S_2\rangle \end{array}$$

(2) $T\langle S_1, \phi\rangle$ **se deriva por una regla** $\mathcal{R}$ **en la que** ϕ **no es principal.** Este caso se resuelve utilizando la inducción sobre las alturas de las derivaciones de las premisas. Como ninguna regla puede cambiar la posición del secuente sobre el que se aplica el corte, y como el producto no cambia la estructura del árbol de hipersecuentes, no hay dificultades. Ejemplificamos con algunos casos en los que la regla actúa sobre el secuente S_1, ϕ. Los casos en los que la regla $\mathcal{R}$ se aplica sobre otro secuente del árbol se pueden resolver de manera análoga, gracias al Lema 4.5.
Supongamos que la regla $\mathcal{R}$ es $\Box_\alpha R$.

$$\frac{\dfrac{T\langle S_1, \phi\ [\alpha : \vdash \psi]\rangle}{T\langle S_1, \phi, \Box_\alpha \psi\rangle}\ \Box_\alpha R \qquad T'\langle \phi, S_2\rangle}{T \otimes T'\langle S_1 \cdot S_2, \Box_\alpha \psi\rangle}\ cut_\phi$$

Permutamos el corte hacia arriba y lo eliminamos por inducción sobre las alturas de las premisas.

$$\dfrac{\dfrac{T\langle S_1, \phi\ [\alpha : \vdash \psi]\rangle \qquad T'\langle \phi, S_2\rangle}{T \otimes T'\langle S_1 \cdot S_2\ [\alpha : \vdash \psi]\rangle}\ cut_\phi}{T \otimes T'\langle S_1 \cdot S_2, \Box_\alpha \psi\rangle}\ \Box_\alpha R$$

Supongamos que la regla $\mathcal{R}$ es $\Box_{\overline{\alpha}} L$.

$$\dfrac{\dfrac{T\langle \psi, S_1, \phi\ [\alpha :\ \Box_{\overline{\alpha}} \psi, S_0]\rangle}{T\langle S_1, \phi\ [\alpha :\ \Box_{\overline{\alpha}} \psi, S_0]\rangle}\ \Box_{\overline{\alpha}} L \qquad T'\langle \phi, S_2\rangle}{T \otimes T'\langle S_1 \cdot S_2\ [\alpha :\ \Box_{\overline{\alpha}} \psi, S_0]\rangle}\ cut_\phi$$

Como en el caso anterior, permutamos el corte hacia arriba para poder eliminarlo.

$$\dfrac{\dfrac{T\langle \psi, S_1, \phi\ [\alpha :\ \Box_{\overline{\alpha}} \psi, S_0]\rangle \qquad T'\langle \phi, S_2\rangle}{T \otimes T'\langle \psi, S_1 \cdot S_2\ [\alpha :\ \Box_{\overline{\alpha}} \psi, S_0]\rangle}\ cut_\phi}{T \otimes T'\langle S_1 \cdot S_2\ [\alpha :\ \Box_{\overline{\alpha}} \psi, S_0]\rangle}\ \Box_{\overline{\alpha}} L$$

El caso para $\Box_\alpha R$ es análogo a este, y los casos para las demás reglas proposicionales no es difícil de revisar, si bien es laborioso escribir las permutaciones.

(3) $T\langle S_1, \phi\rangle$ se deriva por una regla $\mathcal{R}$ en la que ϕ es principal. Separamos los casos para reglas proposicionales y reglas modales.
Si la regla proposicional es $\neg R$ y $\phi \equiv \neg\psi$ tenemos

$$\dfrac{\dfrac{T\langle \psi, S_1\rangle}{T\langle S_1, \neg\psi\rangle}\ \neg R \qquad T'\langle \neg\psi, S_2\rangle}{T \otimes T'\langle S_1 \cdot S_2\rangle}\ cut_{\neg\psi}$$

Aplicando la regla $(\neg L)^-$ (esto es, la regla $\neg L$ invertida, la cual recordaremos que es invertible con preservación de altura) a la premisa derecha podemos obtener $T'\langle S_2, \psi\rangle$. Entonces podemos sustituir el corte con este otro, que podemos eliminar por inducción sobre la complejidad de la fórmula.

$$\dfrac{T'\langle S_2, \psi\rangle \qquad T\langle \psi, S_1\rangle}{T' \otimes T\langle S_1 \cdot S_2\rangle}\ cut_\psi$$

La otra posible regla proposicional, $\wedge R$, se maneja de forma similar. El corte inicialmente se ve de la siguiente manera:

$$\dfrac{\dfrac{T\langle S_1, \psi_1\rangle \qquad T\langle S_1, \psi_2\rangle}{T\langle S_1, \psi_1 \wedge \psi_2\rangle}\ \wedge R \qquad T'\langle \psi_1 \wedge \psi_2, S_2\rangle}{T \otimes T'\langle S_1, S_2\rangle}\ cut_{\psi_1 \wedge \psi_2}$$

Utilizando la versión invertida de $\wedge L$, junto con una cantidad finita de aplicaciones de las reglas de contracción y *merge*, podemos reemplazar el corte por dos cortes eliminables por hipótesis de inducción sobre la complejidad de la fórmula, obteniendo la misma conclusión:

$$\dfrac{T\langle S_1, \psi_2\rangle \qquad \dfrac{T\langle S_1, \psi_1\rangle \qquad T'\langle \psi_1, \psi_2, S_2\rangle}{T \otimes T'\langle \psi_2, S_1, S_2\rangle}\, cut_{\psi_1}}{\dfrac{T \otimes T \otimes T'\langle S_1, S_1, S_2\rangle}{T \otimes T'\langle S_1, S_2\rangle}\,\{CL, CR, merge\}^*}\, cut_{\psi_2}$$

Si la regla $\mathcal{R}$ es la regla modal $\Box_\alpha R$ y $\phi \equiv \Box_\alpha \psi$, tenemos

$$\dfrac{\dfrac{T\langle S_1\ [\alpha : \vdash \psi]\rangle}{T\langle S_1, \Box_\alpha \psi\rangle}\,\Box_\alpha R \qquad T'\langle \Box_\alpha \psi, S_2\rangle}{T \otimes T'\langle S_1 \cdot S_2\rangle}\, cut_{\Box_\alpha \psi}$$

Para manejar este caso necesitamos considerar la última regla $\mathcal{R}'$ por la que se derivó $T'\langle \Box_\alpha \phi, S_2\rangle$. Si el árbol es inicial, se puede resolver como en el caso (1). Si se deriva por una regla en la que $\Box_\alpha \phi$ no es principal, se puede resolver como en el caso (2). Quedan por analizar los casos donde $\mathcal{R}'$ es $\Box_\alpha L$ o $\Box_{\overline{\alpha}} L$.
Cuando $\mathcal{R}'$ es $\Box_\alpha L$ tenemos

$$\dfrac{\dfrac{T\langle S_1\ [\alpha : \vdash \psi]\rangle}{T\langle S_1, \Box_\alpha \psi\rangle}\,\Box_\alpha R \qquad \dfrac{T'\langle \Box_\alpha \psi, S_2\ [\alpha :\ \psi, S_3]\rangle}{T'\langle \Box_\alpha \psi, S_2\ [\alpha :\ S_3]\rangle}\,\Box_\alpha L}{T \otimes T'\langle S_1 \cdot S_2\ [\alpha : S_3]\rangle}\, cut_{\Box_\alpha \psi}$$

Reemplazamos el corte con dos cortes: el superior eliminable por inducción sobre la altura de las derivaciones de las premisas y el inferior eliminable por la complejidad de la fórmula. Aplicando repetidamente contracción y *merge* podemos eliminar las repeticiones producidas por el segundo producto, así obteniendo el árbol derivado originalmente.

$$\dfrac{T\langle S_1\ [\alpha : \vdash \psi]\rangle \qquad \dfrac{T\langle S_1, \Box_\alpha \psi\rangle \qquad T'\langle \Box_\alpha \psi, S_2\ [\alpha :\ \psi, S_3]\rangle}{T \otimes T'\langle S_1 \cdot S_2\ [\alpha :\ \psi, S_3]\rangle}\, cut_{\Box_\alpha \psi}}{\dfrac{T \otimes T \otimes T'\langle S_1 \cdot S_1 \cdot S_2\ [\alpha : S_3]\rangle}{T \otimes T'\langle S_1 \cdot S_2\ [\alpha : S_3]\rangle}\,\{CL, CR, merge\}^*}\, cut_{\psi}$$

Finalmente, cuando $\mathcal{R}'$ es $\Box_{\overline{\alpha}}$ —poniendo cuidadosa atención al hecho de que $S_1, \Box_\alpha \psi$ y $\Box_\alpha \psi, S_2$ deben estar en posición equivalente— tenemos:

$$\dfrac{\dfrac{T\langle S_0\ [\overline{\alpha}:\ S_1\ [\alpha : \vdash \psi]]\rangle}{T\langle S_0\ [\overline{\alpha}:\ S_1, \Box_\alpha \psi]\rangle}\ \Box_\alpha R \qquad \dfrac{T'\langle \psi, S'_0\ [\overline{\alpha}:\ \Box_\alpha \psi, S_2]\rangle}{T'\langle S'_0\ [\overline{\alpha}:\ \Box_\alpha \psi, S_2]\rangle}\ \Box_{\overline{\alpha}} L}{T \otimes T'\langle S_0 \cdot S'_0\ [\overline{\alpha} : S_1 \cdot S_2]\rangle}\ cut_{\Box_\alpha \psi}$$

Transformamos este corte en dos cortes, el superior eliminable por inducción por la altura de las derivaciones de sus premisas, el inferior eliminable por inducción por la complejidad de la fórmula. Nótese que utilizamos la regla admisible con preservación de altura *swap* para obtener la premisa del segundo corte. Una vez más utilizamos las reglas de contracción y *merge* para eliminar las fórmulas redundantes generadas por el segundo producto de árboles, obteniendo la conclusión deseada. Presentamos la derivación en dos partes, pues de otra forma rebasaría los márgenes de la página.

$$\dfrac{T\langle S_0\ [\overline{\alpha}:\ S_1, \Box_\alpha \psi]\rangle \qquad T'\langle \psi, S'_0\ [\overline{\alpha}:\ \Box_\alpha \psi, S_2]\rangle}{T \otimes T'\langle \psi, S_0 \cdot S'_0\ [\overline{\alpha}:\ S_1 \cdot S_2]\rangle}\ cut_{\Box_\alpha \psi}$$

$$\cfrac{\dfrac{T\langle S_0\ [\overline{\alpha}:\ S_1\ [\alpha : \vdash \psi]]\rangle}{T\langle S_0, \psi\ [\overline{\alpha}:\ S_1]\rangle}\ swap \qquad \begin{matrix}\vdots \\ T \otimes T'\langle \psi, S_0 \cdot S'_0\ [\overline{\alpha}:\ S_1 \cdot S_2]\rangle\end{matrix}}{\begin{matrix} T \otimes T \otimes T'\langle S_0 \cdot S_0 \cdot S'_0\ [\overline{\alpha}:\ S_1 \cdot S_2;\ \overline{\alpha}:\ S_1]\rangle \\ \vdots\ \{CL, CR, merge\}^* \\ T \otimes T'\langle S_0 \cdot S'_0\ [\overline{\alpha}:\ S_1 \cdot S_2]\rangle \end{matrix}}\ cut_\psi$$

□

Finalmente podemos asegurar la eliminabilidad del corte para $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$.

Teorema 4.7 (Eliminación del corte en $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$)**.** Toda derivación d en el sistema de árboles de hipersecuentes $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$ se puede transformar en una derivación d' que no haga uso de la regla de corte.

Demostración. Se sigue del Lema 4.6 por inducción sobre el número de cortes en d. □

Esto concluye nuestra labor de mostrar que el cálculo de árboles de hipersecuentes $\mathbf{GK}_{\overline{m}}$ es un sistema de inferencia adecuado para la lógica multimodal con inversas.

5 Conclusiones

El presente trabajo estudió la teoría de la prueba de las lógicas multimodales con inversas desde dos perspectivas importantes: los sistemas axiomáticos tipo Hilbert y los sistemas de árboles de hipersecuentes. Estas dos perspectivas complementarias ayudan a enriquecer el panorama de la teoría de la prueba sobre estas lógicas, cuyo alcance en la lógica matemática y computacional es considerable y cuyas aplicaciones son numerosas y variadas.

Desde la perspectiva axiomática, se introdujo un sistema axiomático para lógicas multimodales con inversas, luego agregando sobre este axiomas adicionales para manejar estructuras semánticas con relaciones reflexivas y transitivas. Denominamos a estos sistemas $\mathbf{K}_{\overline{m}}, \mathbf{T}_{\overline{m}}, \mathbf{K4}_{\overline{m}}$ y $\mathbf{S4}_{\overline{m}}$ por analogía a las correspondientes y bien conocidas lógicas modales. Utilizando la técnica de modelos canónicos [15, 4], mostrar la completitud de estos sistemas para las respectivas clases de estructuras fue de forma directa.

A continuación presentamos un sistema de árboles de hipersecuentes para la lógica multimodal con inversas. Estos sistemas son una evolución de los bien conocidos sistemas de Gentzen [10] y han sido estudiados en múltiples ocasiones [6, 13, 21] con particular interés en su aplicación a las lógicas modales para proveer un sistema de derivación al estilo de Gentzen que cuente con un número de propiedades deseables. Demostramos la corrección de nuestro sistema, así como la eliminabilidad de la regla de corte, propiedad esencial para este tipo de sistemas.

Existen un número de caminos razonables que se pueden derivar del sistema de árboles de hipersecuentes aquí presentado como prospectos para trabajo a futuro. El primero de ellos es buscar extensiones del sistema, que corresponde con el sistema axiomático $\mathbf{K}_{\overline{m}}$, con reglas que permitan tratar con estructuras reflexivas y transitivas, y por lo tanto puedan manejar las lógicas correspondientes a $\mathbf{T}_{\overline{m}}$, $\mathbf{K4}_{\overline{m}}$ y $\mathbf{S4}_{\overline{m}}$. El segundo es la elaboración de un algoritmo que aproveche este sistema para generar automáticamente derivaciones de fórmulas válidas.

La construcción de este sistema también puede facilitar la demostración de otros resultados. Como se ve en [9, 2], sistemas de esta naturaleza pueden dar lugar a demostrar propiedades tales como la interpolación de Craig, la definibilidad de Beth y la consistencia conjunta de Robinson, que tienen aplicaciones en verificación de modelos, representación del conocimiento, entre otras [16, 14].

Bibliografía

[1] Arnon Avron. “The Method of Hypersequents in the Proof Theory of Propositional Non-Classical Logics”. En: *Logic: Foundations to Applications*. 1996, págs. 1-32.

[2] Everardo Bárcenas y col. “A Note on Constructive Interpolation for the Multi-Modal Logic K_m”. En: *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 354 (2020). Proceedings of the Eleventh and Twelfth Latin American Workshop on Logic/Languages, Algorithms and New Methods of Reasoning (LANMR), págs. 3-16.

[3] Marta Bílková. “A Note on Uniform Interpolation Proofs in Modal Deep Inference Calculi”. En: *Logic, Language, and Computation*. Springer Berlin Heidelberg, 2011, págs. 30-45.

[4] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke e Yde Venema. *Modal Logic*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 2001.

[5] Kai Brünnler. “Deep Sequent Systems for Modal Logic”. En: *Advances in Modal Logic 2006* 48 (jul. de 2009), págs. 551-577.

[6] Robert A. Bull. “Cut Elimination for Propositional Dynamic Logic Without $*$”. En: *Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 38.1 (1992), págs. 85-100.

[7] Giuseppe De Giacomo y Maurizio Lenzerini. “Description Logics with Inverse Roles, Functional Restrictions, and N-ary Relations”. En: *Logics in Artificial Intelligence*. 1994, págs. 332-346.

[8] Michael J. Fischer y Richard E. Ladner. “Propositional dynamic logic of regular programs”. En: *Journal of Computer and System Sciences* 18.2 (1979), págs. 194-211.

[9] Melvin Fitting y Roman Kuznets. “Modal interpolation via nested sequents”. En: *Annals of Pure and Applied Logic* 166.3 (2015), págs. 274-305.

[10] Gerhard Gentzen. “Untersuchungen Über Das Logische Schließen. I.” En: *Mathematische Zeitschrift* 35 (1935), págs. 176-210.

[11] Jean-Yves Girard. “Linear Logic: Its Syntax and Semantics”. En: *Advances in Linear Logic*. Cambridge University Press, 1995, págs. 222-1.

[12] David Harel, Dexter Kozen y Jerzy Tiuryn. *Dynamic Logic*. MIT Press, 2000.

[13] Ryo Kashima. "Cut-Free Sequent Calculi for Some Tense Logics". En: *Studia Logica* 53.1 (1994), págs. 119-135.

[14] Carsten Lutz y Frank Wolter. "Foundations for Uniform Interpolation and Forgetting in Expressive Description Logics". En: *Proceedings of the Twenty-Second International Joint Conference on Artificial Intelligence - Volume Two*. AAAI Press, 2011, págs. 989-995.

[15] D. Makinson. "On Some Completeness Theorems in Modal Logic". En: *Mathematical Logic Quarterly* 12.1 (1966), págs. 379-384.

[16] K. L. McMillan. "Interpolation and SAT-Based Model Checking". En: *Computer Aided Verification*. Springer Berlin Heidelberg, 2003, págs. 1-13.

[17] Sara Negri. "Proof Theory for Modal Logic". En: *Philosophy Compass* 6.8 (2011), págs. 523-538.

[18] Rohit Parikh. "The completeness of propositional dynamic logic". En: *Mathematical Foundations of Computer Science 1978*. Springer Berlin Heidelberg, 1978, págs. 403-415.

[19] Jan von Plato. "The Development of Proof Theory". En: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.

[20] Francesca Poggiolesi. *Gentzen Calculi for Modal Propositional Logic*. Springer Netherlands, 2011.

[21] Francesca Poggiolesi. "The Method of Tree-hypersequents for Modal Propositional Logic". En: *Towards Mathematical Philosophy*. Vol. 28. Trends in logic. Springer, 2009, págs. 31-51.

[22] Vaughan R. Pratt. "Semantical considerations on Floyd-Hoare logic". En: *17th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1976)*. 1976, págs. 109-121.

[23] Nicholas Rescher y Alasdair Urquhart. "The System Kt of Minimal Tense Logic". En: *Temporal Logic*. Springer Vienna, 1971, págs. 55-67.

[24] Klaus Schild. "A Correspondence Theory for Terminological Logics: Preliminary Report". En: *Proceedings of the 12th International Joint Conference on Artificial Intelligence - Volume 1*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1991, págs. 466-471.

[25] Alfred Tarski. "Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I". En: *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37 (1930), págs. 361-404.