



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Simulaciones numéricas hidrodinámicas de jets
relativistas en distintos medios

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Julio César Sosa Mondragón

TUTOR

Dr. Diego López Cámara Ramírez



CIUDAD DE MÉXICO, 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del Alumno

Sosa

Mondragón

Julio César

712 186 13 72

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

413011204

2. Datos del Tutor

Dr

López Cámara Ramírez

Diego

3. Datos del sinodal 1

Dr

Esquivel Salazar

José Alejandro

4. Datos del sinodal 2

Dr

De Colle

Fabio

5. Datos del sinodal 3

Dr

Toledo Roy

Juan Claudio

6. Datos del sinodal 4

Dr

Tejeda Rodríguez

Emilio

7. Datos del trabajo escrito

Simulaciones numéricas hidrodinámicas de jets relativistas en distintos medios

98 p

2022

Índice general

Dedicatoria	V
Agradecimientos	VII
Resumen	IX
1. Introducción	1
1.1. Jets relativistas	1
1.2. Estudios previos de jets relativistas	2
1.3. Estudio de un jet relativista en dos dimensiones (Mignone & Bodo, 2005).	8
1.4. Objetivos de la tesis	10
2. Teoría	11
2.1. Ecuaciones de la hidrodinámica	11
2.1.1. Variables primitivas de las ecuaciones de la hidrodinámica	13
2.2. Hidrodinámica relativista	13
2.2.1. Primitivas	14
2.2.2. Variables primitivas de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista	16
2.3. Diferencias finitas	21
2.3.1. Lax-Friederichs	22
2.4. Volúmenes finitos	23
2.4.1. HLL	23
2.5. Condiciones de salto	28
2.5.1. Rankine-Hugoniot	28
2.5.2. Condiciones de Taub	31
2.5.3. Luminosidad	33
2.6. Solución de Sedov-Taylor	33
2.6.1. Aproximación en función del análisis dimensional	34
2.6.2. Aproximación en función de la conservación de la energía	34
3. Verificación del código	39
3.1. Pruebas unidimensionales	39
3.1.1. Casos newtonianos	39
3.1.2. Casos relativistas	46
3.2. Pruebas bidimensionales	51
3.2.1. Caso Newtoniano (quasi Sedov-Taylor)	51
3.2.2. Caso relativista	53

4. Jets relativistas bidimensionales	59
4.1. Jet 2D RHD en un medio ambiente constante	60
4.2. Jet 2D RHD en un medio ambiente variable	63
5. Conclusiones	69
A. Código	73
A.1. Condición inicial	74
A.2. Condición de Courant	76
B. Condiciones de frontera	79
B.0.1. Condiciones de frontera <i>outflow</i>	80
B.0.2. Condiciones de frontera <i>reflexión</i>	81
B.0.3. Condiciones de frontera <i>periódicas</i>	82
B.0.4. Condiciones de frontera <i>Jet</i>	83
C. Subrutina de Newton-Raphson	85
D. Subrutinas de Flujos calculados mediante el método de HLL	89

Dedicatoria

*A mi padre Rafael, mi madre Lourdes y mi hermano Humberto.
Sin sus consejos no hubiera podido llegar tan lejos.*

Agradecimientos

A mis padres por su apoyo incondicional. A la UNAM por darme un segundo hogar y formar parte de sus filas. También agradezco a mis sinodales por el tiempo y disposición para leer y corregir este trabajo.

Y sobre todo quiero agradecer a mi asesor Diego ya que sin su apoyo, conocimiento brindado, y sobre todo su paciencia, no se hubiera podido realizar esta tesis.

Resumen

Uno de los fenómenos más energéticos del universo son los jets asociados a las galaxias activas (AGNs), o a los destellos de rayos gamma (GRBs). En dichos chorros se expulsa material con mucha energía, y pueden emitir en todo el espectro electromagnético. Los jets de los AGNs, lanzados desde el núcleo de la galaxia (en la que se tiene un hoyo negro supermasivo) se mueven con velocidades que comprenden los regímenes tanto no relativistas como relativistas. Los jets de los GRBs, lanzados desde una estrella de neutrones masiva (formada tras la fusión de dos estrellas de neutrones) u hoyo negro, se mueven a velocidades ultra relativistas. Independientemente de si los jets provienen de los AGNs o GRBs las condiciones en las que se originan son tales que son prácticamente imposibles de recrear experimentalmente. Una buena forma de estudiar los jets astrofísicos es numéricamente por medio de simulaciones hidrodinámicas (HD) e hidrodinámicas relativistas (RHD). La intención de esta tesis es construir un código numérico HD y RHD en una y dos dimensiones para así poder estudiar la propagación de jets relativistas a través de distintos medios (constantes y variables).

Para verificar que el código funciona correctamente, primero se reprodujeron una serie de pruebas numéricas cuya solución ya era conocida previamente, i.e. se realizaron pruebas unidimensionales HD y RHD, y pruebas bidimensionales HD (Sedov-Taylor) y RHD. Cabe señalar que para HD y RHD se utilizaron dos métodos distintos de solución: el método de Friederich-Lax y Harten-Lax-van-Leer (HLL). Para las pruebas HD tanto el método de Lax como el método de HLL reprodujeron correctamente las soluciones, sin embargo, Lax resultó ser computacionalmente más rápido. En las pruebas RHD el método HLL reprodujo mejor las soluciones conocidas.

Se estudió la evolución del jet en un medio constante y se obtuvieron resultados consistentes con aquellos de Mignone & Bodo (2005). El jet de nuestro estudio tiene básicamente la misma morfología (velocidad del sistema, grosor del jet, ondas de colimación, ancho del capullo), sin embargo, también resultó ser más difusivo (el capullo obtenido es más grueso y se tiene menos turbulencia dentro del mismo). Dicha diferencia disminuye conforme se incrementa la resolución del código numérico creado para esta tesis. Finalmente, se estudió la evolución del jet en un medio que varía en función de la distancia como $\rho \propto R^{-1}$ y $\rho \propto R^{-2}$ y se encontró que conforme el medio decae más rápidamente

con la distancia a la fuente del jet, más veloz se propaga el jet en dicho medio.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Jets relativistas

En astrofísica, los jets son uno de los fenómenos más energéticos del universo. En ellos se inyecta masa, energía, momento y flujo magnético, el cual se expulsa, en un chorro colimado, desde los objetos estelares, galácticos y extragalácticos que se propaga en el medio circundante. Son los conductos que conectan los agujeros negros supermasivos y sus discos de acreción con las galaxias anfitrionas. Estos tienen forma de protuberancias cónicas o cilíndricas o semicilíndricas estrechas con ángulo de apertura pequeño. Sus principales características es que tienen una amplia gama de luminosidad y grado de colimación. Los ejemplos de jet más poderosos observados son los que, emergen de los núcleos de galaxias activas (o AGN). También se encuentran asociados a otros objetos estelares, tales como la fusión de agujeros negros y/o estrellas de neutrones, sistemas estrellas simbióticas y microcuásares (Dal Pino , 2004). Para una mejor comprensión de las fuentes que producen los jets, puede consultar el Cuadro 1.1.

Son un evento astrofísico transitorio común, ya que ocurren en una amplia gama de entornos astrofísicos (desde objetos estelares hasta objetos extragalácticos). Las velocidades de los jets van desde unos cientos de $km \cdot s^{-1}$ hasta velocidades cercanas a la de la luz (c), y tienen tamaños que van desde unas pocas unidades astronómicas hasta kiloparsecs.

Los jets relativistas son generados gracias a la combinación de acreción hacia un objeto compacto (por lo general estrellas de neutrones u hoyos negros) con campos magnéticos, rotación y la reconexión magnética . Pueden ser lanzados desde un hoyo negro supermasivo localizado en el centro de una galaxia activa (AGN) (Blandford et al., 2019) ó, desde un hoyo negro como en las binarias de rayos X (Espinasse et al. , 2020). Los destellos de rayos gamma (GRBs) cortos, que resultan de la colisión de un sistema binario de dos estrellas de neutrones (Pavan et al., 2021), y los GRBs largos, que resultan del colapso de una estrella masiva que gira rápidamente en sus últimas etapas de vida, también emiten jets relativistas (Shrestha et al., 2022). Aunque la presencia de un objeto central masivo y un disco de

acreción de gas girando a su alrededor es el componente principal en todos los escenarios astrofísicos donde se encuentran jets, el campo magnético y su interacción con todo el sistema parece ser un componente fundamental para este tipo de eyecciones. Esto permite la formación y estabilidad del disco, así como el lanzamiento y colimación del jet. Los procesos más aceptados para el lanzamiento del jet son los mecanismos magneto-rotacionales propuestos por Blandford & Znajek (1977) y Blandford & Payne (1982).

Los jets de AGNs se forman cuando el agujero negro, con una masa de 10^6 - 10^{10} masas solares, gira y atrae masa de la galaxia que lo rodea, la cual forma un disco de acreción que gira ortogonal al eje de rotación del agujero negro debido a la conservación del momento angular y que contiene un fuerte campo magnético (Hülss and Wiebusch, 2008). Las propiedades de los jets también abarcan rangos muy amplios. Un caso particular son cuando los jets de AGN pueden permanecer bien colimados a distancias de cientos de kiloparsecs (Romero, 2021).

Los destellos de rayos gamma (GRB por su acrónimo en inglés) son eyecciones de rayos gamma del orden de MeV, son cortos, intensos y no repetitivos. Estos consisten en la emisión de energías altas como los rayos γ y los rayos X, así como energías bajas como el óptico, el radio, entre otros (T. Pirán, 2005; Zhang, B., 2018). La fusión de objetos compactos es el modelo progenitor más atractivo. Los jets de los GRBs son uno de los eventos que más energía libera en el universo y su energía liberada es del orden de 10^{52} ergs (Berger, 2014). Se infiere que los jets relativistas de los blázares tienen un factor de Lorentz¹ de hasta $\gamma \sim 50$. Pero en el modelo más ampliamente aceptado para GRB (Seo et al., 2021), una explosión altamente enfocada asociada con la formación de un agujero negro impulsa jets relativistas colimados con $\gamma \lesssim 400$.

Los ángulos de estos jets que vienen tanto de GRBs cortos como largos tienen, en su mayoría, 5° de apertura, los cuales pueden variar hasta los 35° con un promedio de $\langle \theta_j \rangle \gtrsim 10^\circ$. En el medio intergaláctico, dentro de las proximidades de las galaxias y dentro de los cúmulos de galaxias, se tienen densidades numéricas que oscilan entre 5×10^{-6} a $\sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$. Con las ecuaciones de Rankine-Hugoniot se pueden conocer las densidades del jet a partir de sus velocidades y el medio ambiente que lo rodea, para más información véase la sección 2.5.

1.2. Estudios previos de jets relativistas

En el pasado se han realizado estudios de jets relativistas, tomando en cuenta distintos métodos numéricos (Seo et al., 2021; Mignone & Bodo, 2005), en el marco de AGNs (Perrucho et al., 2011), así como en el marco de GRBs (López-Cámara et al., 2013), (Lazzati et

¹En esta tesis, para fines explícitos, se tomará gamma mayúscula (Γ) como el índice adiabático. Mientras que gamma minúscula (γ) como el factor de Lorentz.

Propiedad	GRBs	Microcuásares	YSO	AGN
Masa del acretor [M_{\odot}]	~ 10	~ 10	$\sim 1 - 10$	$\sim 10^6 - 10^9$
Tamaño del acretor [cm]	$\sim 10^6$	$\sim 10^6$	$\sim 10^{11}$	$\sim 10^{11} - 10^{15}$
Máximo campo magnético [G]	$\sim 10^{16}$	$\sim 10^7$	$\sim 10^3$	$\sim 10^3 - 10^5$
Energía del jet [erg s^{-1}]	$\sim 10^{50} - 10^{52}$	$\sim 10^{37} - 10^{40}$	$\sim 10^{32} - 10^{36}$	$\sim 10^{42} - 10^{46}$
Tiempo de vida [años]	$\sim 10^6$	$\sim 10^4 - 10^6$	$\sim 10^4 - 10^5$	$\sim 10^7 - 10^8$
Tamaño del jet [pc]	~ 10	~ 10	~ 1	$\sim 10^5$

Cuadro 1.1: Propiedades de los jets de distintas fuentes. Se puede observar que, dependiendo de su origen, sus propiedades pueden variar considerablemente. Adaptado de Romero (2021).

al., 2018), (Gottlieb et al., 2021), (De Colle et al., 2012), por mencionar algunos arquetipos. En el siguiente apartado se muestran 3 estudios de simulaciones de jets relativistas: el primero expone un jet en un medio homogéneo, el segundo un jet que tiene como fuente un AGN y el tercero un jet que proviene de la fusión de 2 estrellas de neutrones.

El primer caso de simulaciones de jets relativistas se presenta en Seo et al. (2021), donde se estudia la evolución de un jet relativista inyectado horizontalmente en un medio uniforme utilizando distintos métodos numéricos. Ellos usan un esquema de pesos no oscilatorios WENO por sus siglas en inglés (para mayor información acerca de estos sistemas oscilatorios consulte en Seo et al. (2021)) y comparan el jet entre estos 3 métodos (WENO JS, WENO Z, y WENO ZA). Las características y propiedades del jet son las siguientes: tiene una densidad de $\rho_{jet} = 10^{-2}$, una velocidad $v_{x_{jet}}, v_{y_{jet}} = 0.99, 0$, es cilíndrico y tiene una presión $p_{jet} = 10^{-3}$, donde la $v_{x_{jet}} = 0.99$ representa un factor de Lorentz $\gamma = 7$. El medio ambiente es estático, tiene una densidad $\rho_m = 1$ y una presión igual al del jet. Cabe destacar que son unidades adimensionales con $c^2=1$. En la Figura 1.1 se muestra la configuración final utilizando los tres diferentes métodos numéricos (arriba: WENO JS, en medio: WENO Z, y abajo: WENO ZA). El panel de arriba, exhibe un jet que alcanza una longitud de ~ 3.15 unidades y presenta turbulencia. En el panel de en medio, el jet tiene una longitud un poco mayor con ~ 3.2 unidades y presenta una turbulencia muy similar al panel de arriba. Para el panel de abajo, el jet presenta mayor longitud que en los dos casos previos, con ~ 3.21 unidades, así como una mayor turbulencia que los 2 anteriores. Podemos observar que dependiendo de los métodos numéricos que se utilizan para seguir a los jets afectan la evolución y morfología del mismo.

En la Figura 1.2 se muestra la evolución de un jet relativista emitido desde un AGN y el cual se mueve a través del medio interestelar (Perucho et al., 2011). El jet se inyecta desde un radio inicial de 100 pc con $\rho_j = 8.3 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-1}$ y $v_j = 0.984 c$ (y una relación de densidad entre el material del jet y el entorno de $\rho_j/\rho_a = 5 \times 10^{-4}$). De este mo-

²c es la velocidad de la luz

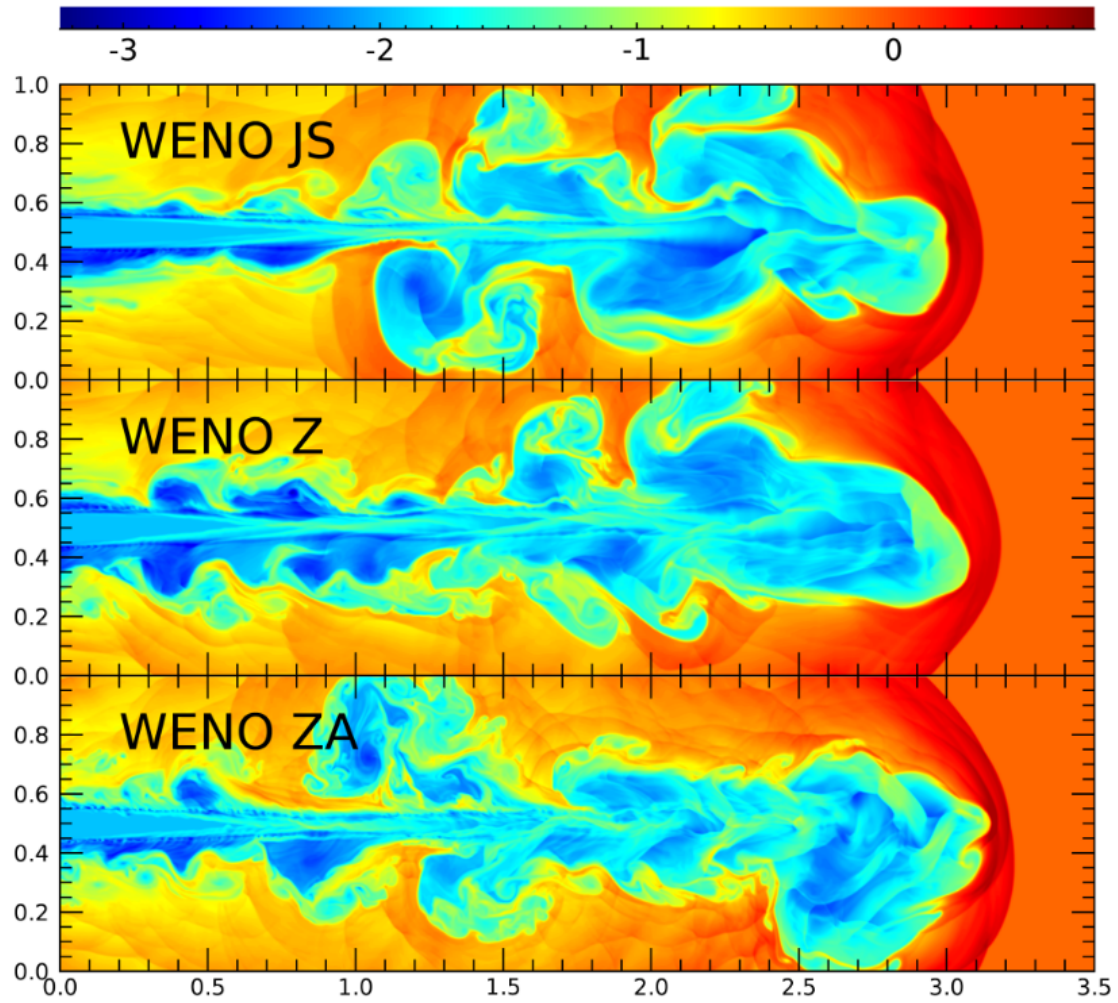


Figura 1.1: Mapa de densidad ($\log \rho$) del jet con $CFL = 0.8$, con un dominio computacional $[0, 3.5] \times [0, 1]$, con una resolución de 1050×300 píxeles. Adaptado de la Figura 8 de Seo et al. (2021).

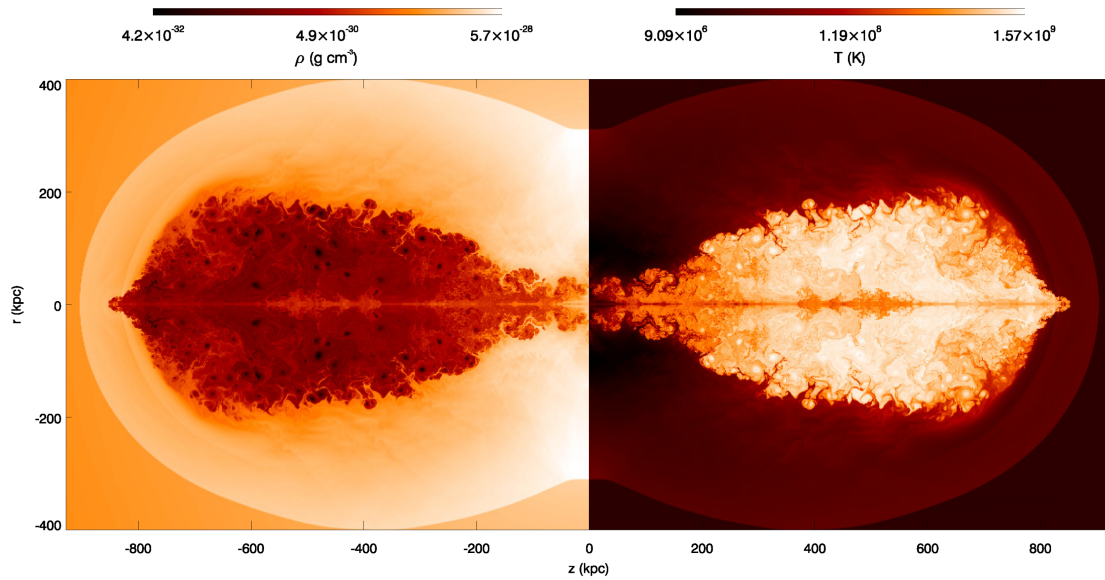


Figura 1.2: Mapa del logaritmo de densidad (izquierda) y temperatura (derecha) al tiempo $t = 1.1$ Myr. Las figuras muestran una imagen reflejada alrededor del eje de simetría, donde se inyecta un jet con un radio inicial de 100 pc con velocidades de flujo $v_j = 0.984$ c y una densidad $\rho_j = 8.3 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$. Adaptado de la Figura 8 de Martí (2019).

do, el jet se lanza con una luminosidad de $10^{46} \text{ erg s}^{-1}$. Las condiciones de frontera, son la reflexión en la base del jet, así como en el eje y outflow al final del dominio en las direcciones axial y radial. Para detalles de las fronteras consulte el apéndice B. En el panel izquierdo se muestra el logaritmo de densidad al tiempo $t = 1.1 \text{ Myr}^3$ con un largo de 900 Kpc. El capullo mide aproximadamente 400 Kpc, tiene una densidad de masa del orden de $\sim 10^{-28} - 10^{-30} \text{ g cm}^{-3}$. Además, se tiene turbulencia y hay pequeñas cavidades dentro del capullo con $\sim 10^{-32} \text{ g cm}^{-3}$. En el panel derecho, el cual es un reflejo del izquierdo pero tomando en cuenta la temperatura, los patrones de turbulencia también son visibles y las zonas menos densas son las más calientes (alcanzando $\sim 10^9 \text{ K}$). A escalas de parsecs, los jets de los AGNs siguen siendo altamente colimados y se mueven a velocidades cercanas a la de la luz.

El último ejemplo de simulaciones de jets relativistas es el estudio de Hamidani & Ioka (2020) en el cual se estudió la evolución de jets que son lanzados tras la fusión de estrellas de neutrones, así como en el marco de los Colapsares. En la Figura 1.3 se muestra la evolución de distintos jets relativistas a través de medios producidos tras la fusión de dos estrellas de neutrones (páneos de arriba) o a través de la envolvente de un Colapsar (páneos de abajo). El jet, que se lanza a través del medio producido tras la fusión de las dos estrellas de neutrones, tiene una luminosidad de $L_{\text{iso},0} = 5.0 \times 10^{50} \text{ erg s}^{-1}$, un ángulo de apertura de $\theta_0 = 6.8^\circ$ (panel de arriba a la izquierda) o de $\theta_0 = 18.8^\circ$ (panel de arriba

³ 10^6 años

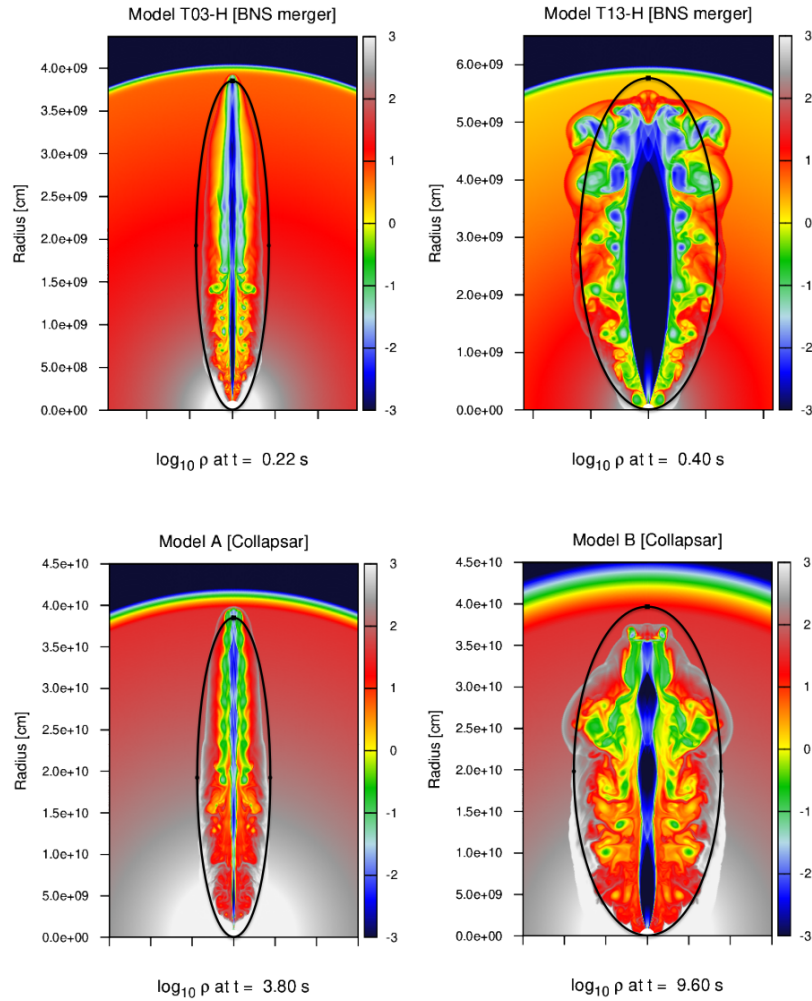


Figura 1.3: Mapa de densidad del jet, donde los paneles de arriba muestran ambientes de una fusión de estrellas de neutrones, mientras que los paneles de abajo muestran para los Colapsares. Adaptado de la Figura 5 de Hamidani & Ioka (2020).

a la derecha). Es lanzado dentro de un radio de inyección $r_{in} = 1.2 \times 10^8$ cm, y atraviesa un medio con masa de $M_m = 0.02M_\odot$ que se mueve con velocidad $v_m = 0.34 c$ (ver Cuadro 1.2 para más detalles). El jet que se lanza dentro del Colapsar tiene una luminosidad de $L_{iso,0} = 7.83 \times 10^{52}$ erg s $^{-1}$ con ángulo de apertura de $\theta_0 = 9.2^\circ$ (panel de abajo a la izquierda), o una luminosidad de $L_{iso,0} = 1.27 \times 10^{52}$ erg s $^{-1}$ y ángulo de apertura de $\theta_0 = 22.9^\circ$ (panel de abajo a la derecha), los cuales son lanzados dentro de un radio de inyección $r_{in} = 10^9$ cm, atravesando un medio que está en reposo y cuya masa es de $M_m = 13.95M_\odot$. Cabe aclarar que los ángulos de apertura son los ángulos con los que se inyecta el jet en el medio circundante.

El panel de arriba a la izquierda de la Figura 1.3 muestra que para el tiempo $t = 0.22$ s el jet relativista y colimado ha avanzado una distancia de 3.75×10^9 cm a través del medio producido tras la fusión de dos estrellas de neutrones. Para el tiempo final el capullo tiene un ancho de 3.75×10^9 cm. El capullo tiene una densidad que se encuentra dentro de \sim

Modelo	Tipo	$M_m [M_\odot]$	$\theta_0 [\text{grad}]$	$L_{\text{iso},0} [\text{erg s}^{-1}]$	$r_{\text{in}} [\text{cm}]$	$v_m [c]$
T-03H	Estrella Binaria de Neutrones	0.02	6.8	5.0×10^{50}	1.2×10^8	0.34
T-13H	Estrella Binaria de Neutrones	0.02	18.8	5.0×10^{50}	1.2×10^8	0.34
A	Colapsar	13.950	9.2	7.83×10^{52}	10^9	0
B	Colapsar	13.950	22.9	1.27×10^{52}	10^9	0

Cuadro 1.2: Valores que se usa las simulaciones de la Figura 1.3 donde M_\odot son masas solares, θ es el ángulo de apertura inicial, L es la luminosidad isotrópica inicial, r_{in} es el radio de inyección del jet y v_m la velocidad del medio ambiente. Adaptado de la Tabla 1 de Hamidani & Ioka (2020).

$10^{-1} - 10^2 \text{ cm}^{-3}$. También se observa el jet en el centro del capullo en el cual la densidad disminuye a valores cercanos a $\sim 10^{-1} - 10^3 \text{ cm}^{-3}$. Otro aspecto a tomar es que hay una mayor turbulencia cerca del radio de inyección y disminuye conforme el jet se va alejando. El jet se mantiene con un ancho aproximado de jet de $\sim 0.05 \times 10^9 \text{ cm}$. El panel de arriba a la derecha muestra como el jet relativista menos colimado tarda casi el doble del tiempo en llegar a la misma distancia que el caso anterior (el jet colimado). Para el tiempo $t = 0.40 \text{ s}$ el capullo tiene $\sim 1.0 \times 10^9 \text{ cm}$ de ancho. El jet no es completamente colimado, debido a que forma un óvalo y alcanza un ancho máximo de $0.3 \times 10^9 \text{ cm}$ a una altura de $3.0 \times 10^9 \text{ cm}$. El jet menos colimado muestra una mayor turbulencia (comparado con el más colimado), y la turbulencia es más caótica conforme el jet se aleja del radio de inyección. La densidad del capullo es menos densa, ya que hay más regiones con densidades $\sim 10^{-1} \text{ cm}^{-3}$. El jet es más ancho y tiene densidades $\sim 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$.

El panel de abajo a la izquierda de la Figura 1.3 muestra el tiempo final de la evolución de un jet relativista y colimado a través de un Colapsar al tiempo $t = 3.8 \text{ s}$. Su largo es de $3.75 \times 10^{10} \text{ cm}$. El jet es completamente colimado con un ancho de $0.05 \times 10^{10} \text{ cm}$. A diferencia de los jets moviéndose a través de un medio formado tras la fusión de estrellas de neutrones, el borde del capullo tiene densidades que alcanzan $\sim 10^2 - 10^3 \text{ cm}^{-3}$, además el capullo presenta más turbulencia conforme incrementa la distancia desde el radio de inyección. El jet tiene densidades del orden de $\sim 10^{-2} - 10^{-1} \text{ cm}^{-3}$. El panel de abajo a la derecha muestra nuevamente como los jets menos colimados tardan más tiempo en llegar a la misma posición que un jet colimado. En este caso el jet menos colimado requiere de $t = 9.60 \text{ s}$ para llegar a jet con un largo de $\sim 3.75 \times 10^9 \text{ cm}$. El ancho del jet es de $0.1 \times 10^{10} \text{ cm}$ y presenta una mayor densidad alrededor del capullo con $\sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$. El capullo mide $1 \times 10^{10} \text{ cm}$ y muestra choques de colimación en los puntos $1.5 \times 10^{10} \text{ cm}$, $2.5 \times 10^{10} \text{ cm}$ y $3.5 \times 10^{10} \text{ cm}$. Queda claro como las características del jet (luminosidad, ángulo de apertura, etc.) así como las condiciones del medio a través del cual el o los jets se mueven afectan la evolución y morfología del mismo.

1.3. Estudio de un jet relativista en dos dimensiones (Mignone & Bodo, 2005).

Uno de los objetivos de esta tesis es crear un código HD y RHD y lograr estudiar la evolución de un jet RHD. Para lo anterior se va a buscar reproducir los resultados del estudio de Mignone & Bodo (2005) en que estudiaron la evolución de un jet relativista en dos dimensiones (ver Figura 1.4).

Los valores que usaron para poder simular el jet relativista 2D (axisimétrico y en coordenadas cilíndricas), fueron los siguientes:

$$(\rho, v_r, v_z, p) = \begin{cases} (0.1, 0, 0.99, 10^{-2}) & \text{para } r, z < 1 \\ (10, 0, 0, 10^{-2}) & \text{caso contrario,} \end{cases} \quad (1.1)$$

donde ρ es la densidad, v_r es la velocidad radial, v_z es la velocidad sobre el eje z y p es la presión. El índice adiabático⁴ que usaron fue $\Gamma = 5/3$ con un número de Courant $Co = 0.5$. Los métodos que emplearon fueron el método de HLL y HLLC (para más información ver la sección 2.4.1). El tiempo de integración fue de $t = 80$ con condiciones de frontera *outflow* excepto donde se inyecta el jet. La velocidad de avance promedio del jet fue de 0.39 con una resolución de 240×700 píxeles.

El panel superior de la Figura 1.4 muestra la morfología del jet a $t=40$, mientras que la de abajo a $t=80$. En la parte superior de ambos paneles (i.e. el dominio positivo en Y) muestra el caso cuando la simulación se hizo utilizando el esquema HLLC. Por otro lado, la parte de abajo (i.e. el dominio negativo en Y) muestra el caso cuando se usó el esquema HLL.

El panel de arriba muestra cómo para $t=40$, cuando se usa el método de HLLC, el jet tiene un tamaño sobre el eje radial de ~ 19 unidades y un ancho de ~ 5 unidades, mientras el capullo tiene un ancho máximo de ~ 7 unidades. Para el caso, en el que se usa HLL, el jet tiene un tamaño de ~ 18 unidades, un grosor de ~ 5 unidades, y el capullo alcanza una anchura de ~ 4 unidades. El caso HLL presenta una menor turbulencia con respecto a HLLC. Para el panel de abajo (a $t=80$), en el caso de HLLC, presenta un largo de ~ 32 unidades, un ancho es de ~ 7 unidades y su capullo tiene una anchura de ~ 11 unidades. Para el caso en que se usa HLL, el largo y ancho miden ~ 31.5 y ~ 8 respectivamente, mientras que el capullo presenta un tamaño de ~ 11.5 unidades. Nuevamente, el caso HLL presenta menos turbulencia que el caso HLLC. Por lo que se puede inferir que HLLC es un mejor método para la modelación de flujos.

⁴Razón entre el calor específico a presión constante C_p y calor específico a volumen constante C_v . Lo denotaremos como Γ .

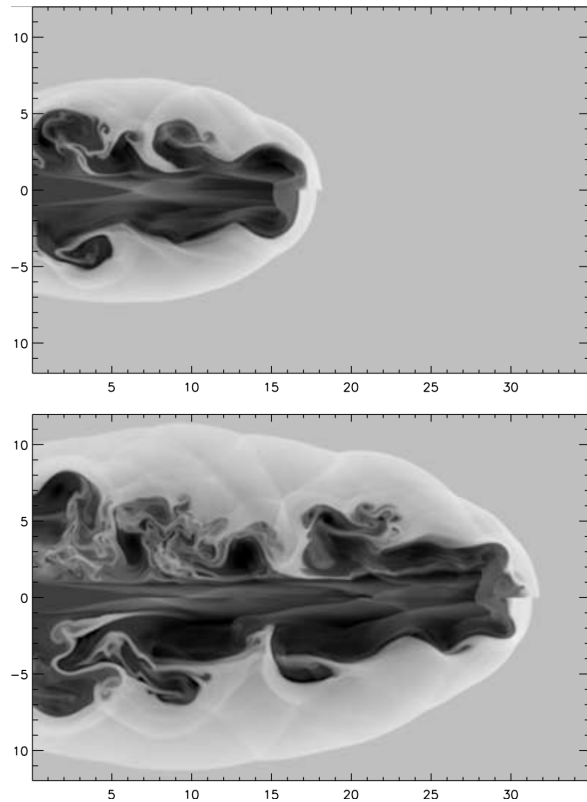


Figura 1.4: Logaritmo de la densidad de la masa en reposo para un jet relativista. El panel de arriba muestra el jet al tiempo $t=40$, mientras que el de abajo al tiempo $t=80$. La mitad de (de ambos paneles) muestra la simulación hecha con el esquema HLLC, mientras que la parte de abajo muestra para el esquema HLL. La resolución fue de 240×700 píxeles. Adaptado de la Figura 12 de Mignone & Bodo (2005).

1.4. Objetivos de la tesis

Los objetivos de esta tesis se enlistan a continuación:

- Desarrollar un código que sea capaz de resolver numéricamente las ecuaciones de la hidrodinámica, tanto para los casos newtonianos (HD) así como los relativistas (RHD) en una (1D) y dos dimensiones (2D).
- Implementar la solución con los métodos de Lax-Friedrichs y HLL en el código (tanto en el HD como en el RHD).
- Verificar que el código HD funcione correctamente por medio de distintos problemas físicos que tengan solución analítica (en 1D y 2D). Comparar los resultados usando los métodos de Lax-Friedrichs y HLL.
- Verificar que el código RHD funcione correctamente por medio de distintos problemas físicos que tengan solución analítica (en 1D y 2D). Comparar los resultados usando los métodos de Lax-Friedrichs y HLL.
- Estudiar la evolución de un jet 2D relativista a través de un medio constante. Se reproducirá el estudio de Mignone & Bodo (2005), y se compararán los resultados obtenidos.
- Estudiar la evolución de un jet 2D relativista a través de distintos medios variables ($\rho \propto R^{-n}$, con $n = 1, 2, 3$) y se compararán los resultados contra el caso en el que jet se mueve en un medio constante.

Capítulo 2

Teoría

Los jets, que pueden provenir de GRBs o AGNs, pueden ser descritos por medio de la hidrodinámica ideal (despreciando los términos viscosos). Esto significa considerar el sistema como un fluido, donde se consideran variables globales que describen el sistema en vez de la interacción de partículas individuales. Para describir un sistema de partículas como un fluido bajo ciertas condiciones, uno debe de conocer que el camino libre medio debe de ser mucho más pequeño que la escala de longitud de las fluctuaciones de las variables macroscópicas (LeVeque et al. , 1998).

$$\lambda_{mfp} \ll L. \quad (2.1)$$

El tiempo entre las colisiones debe de ser pequeño comparado con la escala del tiempo de los cambios en el fluido.

$$t_c \ll t_f. \quad (2.2)$$

La distancia media entre las partículas tiene que ser más pequeña que la longitud de escala de las variables macroscópicas.

$$l = n^{-1/3} \ll L. \quad (2.3)$$

2.1. Ecuaciones de la hidrodinámica

Las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido (Clarke et al. , 2007), sin considerar efectos viscosos son :

La conservación de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.4)$$

El momento:

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (2.5)$$

Ecuación de la energía:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u}(e + p)] = G - L + \mathbf{f}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}. \quad (2.6)$$

Ecuación de estado:

$$e = \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \frac{p}{\Gamma - 1}. \quad (2.7)$$

Donde ρ es la densidad, \mathbf{u} es el vector de la velocidad y p es la presión. Con estas ecuaciones podemos formar un sistema de 5 ecuaciones diferenciales parciales acopladas. En coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \mathbf{S}, \quad (2.8)$$

donde:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(e+P) \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + P \\ \rho vw \\ v(e+P) \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + P \\ w(e+P) \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ G-L+\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

El término \mathbf{U} son las variables conservadas, los términos \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} son los flujos x , y y z , respectivamente, mientras que \mathbf{S} son los términos fuente. Para poder resolver computacionalmente estas ecuaciones diferenciales parciales, primero vamos a utilizar el método de volúmenes finitos y el método de Lax sin considerar los términos fuente, es decir, $\mathbf{S} = 0$.

La implementación en el código se hará en 2 dimensiones, por lo que la variable \mathbf{H} que corresponde a los flujos en el eje z será cero. El bloque de código está en una subrutina llamada *fluxes*, donde en el mismo bucle se obtienen las primitivas para que queden en función de las conservadas. Cabe señalar que tanto en $f(4, i, j)$ y $g(4, i, j)$ se usa la variable conservada $u(4, i, j)$, ya que $u(4, i, j) = e(i, j)$.

```

1
2 f(1, i, j) = rho * vx
3 f(2, i, j) = rho * vx * vx + P
4 f(3, i, j) = rho * vx * vy
5 f(4, i, j) = vx * (u(4, i, j) + P)
6
7 g(1, i, j) = rho * vy
8 g(2, i, j) = rho * vx * vy
9 g(3, i, j) = rho * vy * vy + P
10 g(4, i, j) = vy * (u(4, i, j) + P)

```

Los índices i, j permiten recorrer la discretización espacial en dos dimensiones. El arreglo \mathbf{U} contiene a las variables conservadas.

2.1.1. Variables primitivas de las ecuaciones de la hidrodinámica

Las ecuaciones de la hidrodinámica se escriben como se vio anteriormente en términos de variables conservadas (densidades de masa, momento y energía). Sin embargo para el cálculo de los flujos se vuelve conveniente hacerlo a través de las llamadas variables primitivas (densidad de masa, velocidad y presión térmica). En el caso no relativista la transformación entre estas variables es trivial pero, para el caso relativista, es un poco más elaborado.

Despejar la densidad es sencillo, ya que es directo, $U_1 = \rho$ por lo tanto:

$$\rho = U_1. \quad (2.9)$$

Para las velocidades $U_i = \rho v_i$, donde $i = 2, 3, 4$ y $v_i = u, v, w$, nos da $v_i = U_i/\rho$ y usando la ecuación 2.9 queda:

$$v_i = U_i/U_1. \quad (2.10)$$

Para la ecuación de la energía $U_5 = e$ combinando con la ecuación de estado y la ecuación 2.10 obtenemos:

$$p = (\Gamma - 1) \left[U_5 - \frac{U_1 (\sum_{i=2}^4 U_i/U_1)^2}{2} \right]. \quad (2.11)$$

En el código se implementa de la siguiente manera. Las variables i, j son contadores, y antes de que se calculen los flujos, se tienen que calcular las primitivas. Dado que el desacoplamiento se implementa directamente en la subrutina *fluxes*, para que se puedan calcular los flujos.

```

1
2
3  !Desacoplamiento de las primitivas
4  rho = u (1, i, j)
5  vx  = u(2, i, j) / rho
6  vy  = u(3, i, j) / rho
7  P    = (u(4, i, j) - 0.5*rho*(vx**2+vy**2)) *(gamma-1.)

```

Donde la variable $u(4, i, j)$ es la densidad de energía, ya que, como se recordará, se está en 2 dimensiones.

2.2. Hidrodinámica relativista

Para el caso en que los jets estén dentro del régimen relativista, la descripción newtoniana se vuelve inadecuada, y se vuelve necesario una descripción relativista (en este caso restringida a la relatividad espacial). Esta parte se añadirá a los códigos que ya he-

mos generado previamente. Las próximas secciones abordarán cómo cambian nuestras primitivas, cómo afectan a nuestras variables conservadas y cómo podemos calcular unas en función de las otras, así como varios ejemplos al cambiar varios valores de nuestros parámetros y de las condiciones iniciales.

2.2.1. Primitivas

Las ecuaciones que se tienen para flujos newtonianos se pueden modificar para hacerlas relativistas (Martí & Müller , 1999; Landau & Lifshitz , 1987). Para esto vamos a partir de 2 ecuaciones importantes que son la ecuación de energía-momento y la ecuación de conservación de masa:

$$(\rho U^\alpha)_{,\alpha} = 0, \quad (2.12)$$

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0. \quad (2.13)$$

De la ecuación 2.12 se tiene la cuadrivelocidad para un sistema de 3 coordenadas y considerando a la velocidad de la luz como $c = 1$ se puede ver como $U^\mu = \gamma(1, \mathbf{v})$ y sustituyendo este resultado (en 2 dimensiones espaciales) tendremos las ecuaciones U_1 , F_1 y G_1 . Para la ecuación 2.13 podemos escribir el tensor de energía-momento como $T^{\mu\nu} = \rho h U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu}$ y usando la métrica de Minkowski

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

podemos escribir a $T^{\mu\nu}$ matricialmente como:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho h \gamma^2 - p & \rho h \gamma^2 v_x & \rho h \gamma^2 v_y & \rho h \gamma^2 v_z \\ \rho h \gamma^2 v_x & \rho h \gamma^2 v_x^2 + p & \rho h \gamma^2 v_x v_y & \rho h \gamma^2 v_x v_z \\ \rho h \gamma^2 v_y & \rho h \gamma^2 v_y v_x & \rho h \gamma^2 v_y^2 + p & \rho h \gamma^2 v_y v_z \\ \rho h \gamma^2 v_z & \rho h \gamma^2 v_z v_x & \rho h \gamma^2 v_z v_y & \rho h \gamma^2 v_z^2 + p \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Entonces las variables conservadas en función de las variables primitivas quedarían de la

siguiente manera:

$$u_1 = \rho\gamma \quad (2.16)$$

$$u_2 = \rho v_x \gamma^2 h \quad (2.17)$$

$$u_3 = \rho v_y \gamma^2 h \quad (2.18)$$

$$u_4 = \rho\gamma^2 h - p \quad (2.19)$$

donde ρ es la densidad, γ es el factor de Lorentz, v_x y v_y son las velocidades de los flujos (en 2 dimensiones, pero se puede extender esto a 3 sin ningún problema), h es la entalpía y p es la presión. Los flujos físicos quedan de la siguiente manera:

$$F_1 = \rho v_x \gamma \quad (2.20)$$

$$F_2 = \rho v_x v_x \gamma^2 h + p \quad (2.21)$$

$$F_3 = \rho v_x v_y \gamma^2 h \quad (2.22)$$

$$F_4 = \rho v_x \gamma^2 h \quad (2.23)$$

$$G_1 = \rho v_y \gamma \quad (2.24)$$

$$G_2 = \rho v_y v_x \gamma^2 h \quad (2.25)$$

$$G_3 = \rho v_y v_y \gamma^2 h + p \quad (2.26)$$

$$G_4 = \rho v_y \gamma^2 h. \quad (2.27)$$

La implementación en el código es de la siguiente manera, el factor de Lorentz γ es la variable *lor*, h la entalpía, al igual que en la hidrodinámica newtoniana solo se considerará 2 dimensiones:

```

1  lor=1/sqrt(1-(vx**2+vy**2))
2  h=1.+gamma/(gamma-1.)*P/rho
3
4  f(1,i,j)=rho*vx*lor
5  f(2,i,j)=rho*vx*vx*lor**2*h+P
6  f(3,i,j)=rho*vx*vy*lor**2*h
7  f(4,i,j)=rho*vx*lor**2*h
8
9  g(1,i,j)=rho*vy*lor
10 g(2,i,j)=rho*vx*vy*lor**2*h
11 g(3,i,j)=rho*vy*vy*lor**2*h+P
12 g(4,i,j)=rho*vy*lor**2*h

```

A diferencia de los flujos newtonianos, para los flujos relativistas se tienen que calcular

antes el factor de Lorentz lor y la entalpía h , las variables i, j son índices que se utilizan para recorrer las coordenadas espaciales en el dominio computacional.

2.2.2. Variables primitivas de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista

Para obtener las variables primitivas a partir de las variables conservadas, se partirá de la relación de las densidades de energía total y del módulo de los momentos (Mignone & McKinney, 2007).

$$e = W - p, \quad (2.28)$$

$$|m|^2 = W^2 |v|^2 \quad (2.29)$$

donde $W = Dh\gamma$ y $D = \rho\gamma$. Para evitar errores en el límite no relativista se debe resolver la ecuación conservada restando la densidad de masa a la energía para definir una nueva variable conservada ($e' = e - D$). Para las cancelaciones en el límite ultra-relativista basados en $\gamma|v|^2$ que se tiene cuando $|v| \rightarrow 1$, se debe de crear otra variable, que en este caso sería $|u|^2 = \gamma|v|^2$ e introduciendo las variables $W' = W - D$, podemos reescribir la última ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W' &= D(h\gamma - 1) \\ &= D \left[\left(1 - \epsilon + \frac{p}{\rho} \right) \gamma - 1 \right] \\ &= D(\gamma - 1) \frac{\gamma + 1}{\gamma + 1} + \frac{D\gamma}{\rho} (\rho\epsilon + p). \end{aligned}$$

Recordando que $D = \rho\gamma$ y que a partir de la variable introducida u^2 podemos reescribir el factor de Lorentz como $\gamma^2 = 1 - u^2$

$$\begin{aligned} W' &= \frac{Du^2}{\gamma + 1} + \frac{\rho\gamma\gamma}{\rho} (\rho\epsilon + p) \\ &= \frac{Du^2}{\gamma + 1} + \gamma^2 \chi \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde $\chi = \rho\epsilon + p$, derivando con respecto a W' la ecuación 2.28 queda como

$$\frac{de}{dW'} = 1 - \frac{dp}{dW'}. \quad (2.31)$$

No se sabe como es la expresión $\frac{de}{dW'}$, así que se supondrá que $p = p(\rho, \chi)$ por lo que podemos aplicar la regla de la cadena

$$\frac{dp}{dW'} = \left. \frac{\partial p}{\partial \chi} \right|_{\rho} \frac{d\chi}{dW'} + \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\chi} \frac{d\rho}{dW'}. \quad (2.32)$$

Si uno considera un gas ideal, es posible calcular $\frac{dp}{d\chi}$

$$h = 1 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (2.33)$$

donde h también puede ser escrito como

$$h = 1 + \epsilon + \frac{p}{\rho}. \quad (2.34)$$

Si combinamos estas 2 últimas ecuaciones podemos llegar a que

$$p(\chi, \rho) = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \chi \rho, \quad (2.35)$$

con lo que al derivar con respecto de χ nos da como resultado:

$$\frac{dp}{d\chi} = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \rho, \quad (2.36)$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \chi. \quad (2.37)$$

De la ecuación 2.30 podemos despejar χ :

$$\chi = \frac{W'}{\gamma} - \frac{Dv^2}{(1 + \gamma)\gamma^2}. \quad (2.38)$$

Derivando implícitamente la ecuación 2.30 respecto a W' nos quedaría

$$\begin{aligned} W' &= D(\gamma - 1) + \chi\gamma^2 \\ &= D\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} - 1\right) + \chi\frac{1}{1 - v^2}, \\ \frac{dW'}{dW'} &= D\frac{d(1 - v^2)^{-1/2}}{dW'} + \frac{d\chi}{dW'}(1 - v^2)^{-1} + \frac{d(1 - v^2)^{-1}}{dW'}\chi, \\ 1 &= \frac{D(1 - v^2)^{-3/2}}{2} \frac{dv^2}{dW'} + \frac{d\chi}{dW'}(1 - v^2)^{-1} + \chi(1 - v^2)^{-2} \frac{dv^2}{dW'}, \\ \frac{1}{\gamma^2} &= \frac{D\gamma}{2} \frac{dv^2}{dW'} + \frac{d\chi}{dW'} + \chi\gamma^2 \frac{dv^2}{dW'}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede obtener:

$$\frac{d\chi}{dW'} = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{\gamma}{2}(D - 2\gamma\chi) \frac{dv^2}{dW'}, \quad (2.39)$$

y para

$$\frac{d\rho}{dW'} = D \frac{d(1/\rho)}{dW'} = -\frac{D\gamma}{2} \frac{dv^2}{dW'}. \quad (2.40)$$

Despejando el módulo de la velocidad en la ecuación 2.29 podemos llegar a escribirlo de la siguiente manera:

$$|v^2| = \frac{|m^2|}{W'} \quad (2.41)$$

donde $m_i = \rho v_i \gamma h$ para $i = x, y$.

Se puede demostrar que $\frac{d|v^2|}{W} = \frac{d|v^2|}{W'}$ para esto vamos a partir de lo siguiente:

$$\begin{aligned} |v^2| &= |m^2| (W' + D)^{-2} \\ \frac{d|v^2|}{dW'} &= \frac{-2|m^2|}{W' + D^3} \\ &= \frac{2|m^2|}{W^3} \\ &= \frac{d|v^2|}{dW'}, \end{aligned}$$

con lo que se puede decir que

$$\frac{d|v^2|}{dW'} = -\frac{2|m^2|}{W^3} \quad (2.42)$$

Con todo esto ya se sabe cuanto es lo que vale la ecuación 2.31, por lo que se puede usar el método de Newton-Raphson para poder encontrar W' . El método de Newton-Raphson es un algoritmo iterativo que se usa para encontrar raíces de una función real:

$$W'^{(k+1)} = W' - \frac{f(W')}{\frac{df(W')}{dW'}}. \quad (2.43)$$

De la ecuación de la densidad de energía, se puede usar como a la función a la que se quiere encontrar la raíz

$$f(W') = W' - e' - p \quad (2.44)$$

donde $e' = W' - p$ y que $\frac{df(W')}{dw} \equiv \frac{de}{dW'}$ dado por la ecuación 2.31. Para iniciar el proceso de iteración se tiene que hacer una suposición. Al principio de la primera iteración, se

puede inicializar $W^{(0)} = \tilde{W}_+ - D$, donde \tilde{W}_+ es la raíz positiva de

$$\mathcal{P}(W, 1) = 0, \quad (2.45)$$

y $\mathcal{P}(W, |v|)$ es una función cuadrática convexa

$$\mathcal{P}(W, |v|) = (4 - |v|^2)W^2 - (4e)W + |m|^2. \quad (2.46)$$

Usando la ecuación 2.28, se puede escribir la presión como

$$p = \frac{\mathcal{P}(W, |v|)}{4W}. \quad (2.47)$$

Si la presión es positiva $p > 0$, se puede decir, que es equivalente a que $\tilde{W}_+ \notin [W_-, W_+]$, donde $\mathcal{P}(W_{\pm}, |v|) = 0$. Esto se puede demostrar ya que $\mathcal{P}(W, |v|) \geq \mathcal{P}(W, 1)$, lo que implica que $\tilde{W}_+ \geq W_+$ por lo que la raíz de la ecuación 2.45 no cae en el intervalo que conforman las raíces de la ecuación 2.46. Despejando W de la ecuación 2.45 usando la fórmula general cuadrática se obtiene:

$$W = \frac{-(-2e) + \sqrt{(-2e)^2 - (3)(|m|^2)}}{3}. \quad (2.48)$$

Con esto ya se puede hacer las aproximaciones para obtener W , y se puede calcular las siguientes relaciones:

$$|v|^2 = \frac{|m|^2}{W^2}, \quad (2.49)$$

$$u^2 = \frac{|v|^2}{1 - |v|^2}, \quad (2.50)$$

$$\gamma = \sqrt{1 + u^2} \quad (2.51)$$

y las nuevas primitivas.

Velocidades:

$$v_x = \frac{u_2}{W}, \quad (2.52)$$

$$v_y = \frac{u_3}{W}. \quad (2.53)$$

$$(2.54)$$

Densidad de masa:

$$\rho = \frac{D}{\gamma}. \quad (2.55)$$

Presión térmica:

$$\chi = \frac{W - D}{\gamma^2} - \frac{D|u|^2}{(1 + \gamma)\gamma^2}, \quad (2.56)$$

$$p = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \chi. \quad (2.57)$$

Aunque en el caso newtoniano se podían calcular las variables primitivas dentro del bucle, para el caso relativista se tuvo que crear una subrutina para obtener las primitivas función de las conservadas. La subrutina para obtener las primitivas se llama *uprim*, y ésta recibe un parámetro de entrada, que es la conservada **U** y devuelve los valores de todas las variables primitivas en una celda en particular. Las variables conservadas se reasignan a unas nuevas llamadas *qu* para que se pueda usar la subrutina, una vez que se obtienen las primitivas, los valores de salida se reasignan a otras llamadas *qpp*. Se tienen que reasignar dado que la subrutina pide números reales y no matrices.

```

1
2   qu(1) = u(1, i, j)
3   qu(2) = u(2, i, j)
4   qu(3) = u(3, i, j)
5   qu(4) = u(4, i, j)
6
7   ! Desacoplamiento de las primitivas
8   call uprim(u, qp)
9
10  qpp(:, i, j) = qp
11
12  rho = qpp(1, i, j)
13  vx  = qpp(2, i, j)
14  vy  = qpp(3, i, j)
15  P   = qpp(4, i, j)

```

La subrutina que se mencionan en esta sección recibirá las variables conservadas y devolverá las primitivas. La subrutina *newrap* se usará en particular (ver apéndice C) para resolver la ecuación 2.43. Las variables primitivas en el módulo relativista fueron encontradas siguiendo la misma metodología que el código Mezcál (De Colle et al., 2012).

```

1
2  m2 = sum(qu(2:3)**2)           ! v^2
3
4  call newrap(qu, w, m2)
5
6  alpha = m2 / w**2   ! alpha < 1 !
7  u2    = alpha / (1.0 - alpha)
8
9  lor = sqrt(1.0 + u2)

```

```

10
11 ! velocities
12 qp(2:3) = qu(2:3) / w
13
14 ! determination of the mass density
15 qp(1) = qu(1)/lor
16
17 ! thermal pressure
18 chi = (w - qu(1)*(1.0+u2/(lor+1.0)))/(1.0+u2)
19
20 qp(4) = (gamma - 1.0)/gamma * chi
21
22 qp(4) =max(qp(4),1d-10*qp(1))

```

Las variables qp mostradas en el código son las primitivas, mientras que las otras son auxiliares mostradas en el capítulo 2.2.2.

2.3. Diferencias finitas

Ya se ha visto qué ecuaciones describen la hidrodinámica, ahora toca resolverlas. Dado que analíticamente es difícil, se va a hacer computacionalmente, para eso se hará uso del método numérico de volúmenes finitos (Duran, 2010). Si tenemos una función $f(x)$ diferenciable la podemos aproximar por el teorema de Taylor en la vecindad de un punto x_0 y si se conocen todas sus n derivadas de la función $f(x)$ en el punto x_0 se puede aproximar de la siguiente manera

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_n \frac{(\Delta x)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad (2.58)$$

Si se trunca la serie de Taylor y se quitan los términos de segundo orden, se puede escribir la ecuación 2.58 como:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f^{(1)}(x_0) + O(\Delta x). \quad (2.59)$$

Despejando $f(x_0)$ queda lo que se conoce como diferencias finitas hacia adelante

$$f'_{fwd} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}. \quad (2.60)$$

También se puede hacer en el entorno $x_0 - \Delta x$, siguiendo los mismos pasos anteriores se llega a lo que se le conoce como diferencias finitas hacia atrás

$$f'_{back} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}. \quad (2.61)$$

Si se obtiene el promedio de las ecuaciones 2.60 y 2.61 se puede calcular la central:

$$f'_{central} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.62)$$

2.3.1. Lax-Friederichs

Sí se considera la siguiente ecuación diferencial parcial (Duchateau et al. , 2002)

$$u_t + f(u)_t = 0. \quad (2.63)$$

Una primera aplicación de derivadas en diferencias finitas a una ecuación de tipo conservación resulta en

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i-\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}}) \quad (2.64)$$

Sí se hace la siguiente elección de flujo

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}(u_i, u_{i+1}) = \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1}), \quad (2.65)$$

y para

$$f_{i-\frac{1}{2}} = f_{i-\frac{1}{2}}(u_i, u_{i-1}) = \frac{1}{2} (f_i - f_{i-1}) \quad (2.66)$$

y si se sustituye en la ecuación 2.64 nos queda el siguiente resultado

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1} - f_{i-1}). \quad (2.67)$$

Pero esta solución es inestable por el primer término del lado derecho de la ecuación, para hacerlo condicionalmente estable, Peter Lax y Kurt Friedrichs sustituyeron este término, por $(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)/2$ por lo que se puede reescribir la ecuación 2.67 como

$$u_{i,j}^{n+1} = (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)/2 + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1} - f_{i-1}). \quad (2.68)$$

Esta condición es conocida como la condición de Courant-Friedrich-Lewy. Para más detalles véase el apéndice A.2.

Para 2 dimensiones sería

$$u_i^{n+1} = (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n)/4 - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} (g_{i,j+1} - g_{i,j-1}). \quad (2.69)$$

En el código, la implementación de la ecuación 2.68 en 2 dimensiones es la siguiente

```

2 call fluxes (nx, ny, neq, gamma, u, f, g, bound)
3
4 do i=1, nx
5   do j=1, ny
6     up(:, i, j) = 0.25 * ( u(:, i-1, j) + u(:, i+1, j) + u(:, i, j-1) + u(:, i, j+1) ) &
7       - dtx * 0.5 * ( f(:, i+1, j) - f(:, i-1, j) ) &
8       - dty * 0.5 * ( g(:, i, j+1) - g(:, i, j-1) )
9   end do
10 end do

```

donde $dtx = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $dty = \frac{\Delta t}{\Delta y}$ y up es la conservada posterior en el tiempo.

2.4. Volúmenes finitos

El método de volumen finito es un método de discretización para la simulación numérica de varios tipos de leyes de conservación; se ha utilizado en varios campos de la ingeniería, como la mecánica de fluidos, la transferencia de calor y masa. Algunas características importantes del método de volumen finito son similares a las del método de elementos finitos: se puede aplicar a geometrías arbitrarias, utiliza mallas estructuradas o no estructuradas y puede producir soluciones sólidas. Otra característica es la preservación local del flujo numérico, es decir, el flujo se conserva desde una unidad discreta hasta sus vecinos. Esta última propiedad hace que el método de volumen finito sea muy atractivo para modelar problemas donde el flujo es importante, como la mecánica de fluidos, la simulación de dispositivos semiconductores y la transferencia de calor y masa. Para más detalles puede consultar Eymar et al. (2000).

2.4.1. HLL

Antes de seguir con este método, se procederá a dar una breve descripción del problema de Riemann. Éste consiste en un problema de condiciones iniciales para una ecuación hiperbólica en derivadas parciales, la cual se puede escribir matemáticamente de la siguiente manera:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad U = \begin{cases} U_L, & x < x_0 \\ U_R, & x > x_0 \end{cases} \quad (2.70)$$

donde U son las conservadas y F son los flujos. Los valores de U_L y U_R representan los estados izquierda y derecha de un gas que está separado por una membrana en el punto x_0 al tiempo inicial (Lora et al., 2013). Para más detalles acerca de este problema consulte Toro (1997).

El método de volúmenes finitos es un algoritmo para resolver el problema de Riemann

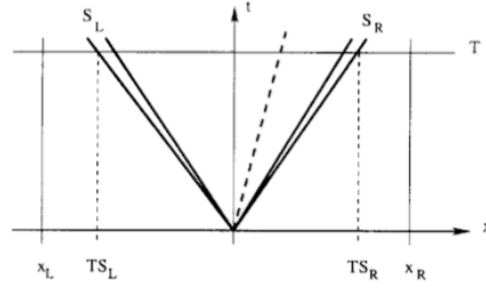


Figura 2.1: Plano x-t que muestra un volumen definido. Adaptado de Toro (1997)

en las interfaces de cada celda, y un caso particular (simple) de aproximar la solución al problema de Riemann es el método de Harten-Van-Leer (Toro, 1997). En él se tiene que definir el flujo numérico intercelda de Gudonov

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_{i+\frac{1}{2}}) \quad (2.71)$$

para el cual $U_{i+\frac{1}{2}}(0)$ tiene la misma solución para $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$ con lo que el problema de Riemann se reduce a:

$$\begin{aligned} U_t + F(U)_x &= 0 \\ U(x, 0) &= \begin{cases} U_L & \text{si } x < 0 \\ U_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Si se considera un volumen $[x_L, x_R] \times [0, T]$, tales que $x_L \leq TS_L$ y $x_R \geq TS_R$ (ver Figura 2.1) donde S_L y S_R son las velocidades de las ondas más rápidas de los estados iniciales U_L y U_R respectivamente, estas se calculan a partir de las velocidades de la onda y del sonido

$$S_i = v_i \pm c_s \quad (2.73)$$

donde el subíndice i denota los estados R y L , c_s es la velocidad del sonido, en el que para un gas ideal se calcula como $c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$. Si es el estado derecho las velocidades se suman, sino se restan. T es un tiempo definido y se usa la forma integral de la ecuación 2.72 en nuestro volumen definido $[x_L, x_R] \times [0, T]$

$$\int_{x_L}^{x_R} [U(x, T) - U(x, 0)] dx = \int_0^T [F(U(x_L, t)) - F(U(x_R, t))] dt,$$

entonces

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = \int_{x_L}^{x_R} U(x, 0) dx + \int_0^T F(U(x_L, t)) dt - \int_0^T F(U(x_R, t)) dt. \quad (2.74)$$

Usando las condiciones de la ecuación 2.72 se puede evaluar la integral

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = x_R U_R - x_L U_L + T F_L - T F_R$$

donde $F_L = F(U_L)$ y $F_R = F(U_R)$, entonces

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = x_R U_R - x_L U_L + T (F_L - F_R). \quad (2.75)$$

Si se separa la ecuación 2.74 en 3 integrales de la siguiente manera:

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = \int_{x_L}^{TS_L} U(x, T) dx + \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx + \int_{TS_R}^{x_R} U(x, T) dx. \quad (2.76)$$

Evaluando el tercer y el primer término en el lado derecho, obtenemos:

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x, T) dx = \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx + (TS_L - x_L) U_L + (x_L - TS_R) U_R. \quad (2.77)$$

Combinando la ecuación 2.75 y 2.77

$$x_R U_R - x_L U_L + T (F_L - F_R) = \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx + (TS_L - x_L) U_L + (x_L - TS_R) U_R.$$

Entonces

$$\int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx = (TS_L - x_L) U_L + x_L U_L + (x_L - TS_R) U_R - x_R U_R - T (F_L - F_R),$$

con lo que al final queda

$$\int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx = T (S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R). \quad (2.78)$$

Dividiendo la ecuación 2.78 por la diferencia de las velocidades máximas de las señales de las ondas, se obtiene el promedio de la función que está entre las velocidades de la onda, entonces

$$\frac{1}{T(S_R - S_L)} \int_{TS_L}^{TS_R} U(x, T) dx = \frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L}. \quad (2.79)$$

Si se conocen las velocidades de la onda, se puede escribir la ecuación como

$$U^{hll} = \frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L}. \quad (2.80)$$

Aplicando la forma integral (como en el caso de la ecuación 2.75) al lado izquierdo del plano, se obtiene lo siguiente:

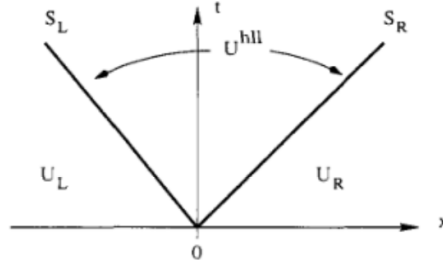


Figura 2.2: Aproximación de 3 estados distintos en el plano $x-t$, en el cual se trata de calcular los flujos en la región U^{hll} limitados por las velocidades de señal de la onda.

$$\int_{TS_L}^0 U(x, T) dx = -TS_L U_L + T(F_L - F_{0L}) \quad (2.81)$$

donde F_{0L} es el flujo a lo largo del eje t . Si se despeja F_{0L} queda lo siguiente:

$$F_{0L} = F_L - S_L U_L + \frac{1}{T} \int_{TS_L}^0 U(x, T) dx. \quad (2.82)$$

Esta última ecuación servirá para calcular los flujos usando el método de Harten, Lax, van Leer, el cual dividían el plano en tres espacios alrededor de una interfase

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L & \text{si } \frac{x}{t} < S_L \\ U_{hll} & \text{si } S_L < \frac{x}{t} < S_R \\ U_R & \text{si } \frac{x}{t} > S_R. \end{cases} \quad (2.83)$$

Los flujos F_R y F_L pueden ser calculados directamente, ya que solo dependen de U_R y U_L respectivamente, pero $F_{hll} \neq F(U_{hll})$, así que resolvemos la integral de la ecuación 2.82 para así obtener el flujo a través del eje t

$$F_{hll} = F_L - S_L U_L + \frac{1}{T} U_{hll} (0 - TS_L).$$

Entonces

$$F_{hll} = F_L + S_L (U_{hll} - U_L). \quad (2.84)$$

Si se sustituye 2.80 en 2.84 obtenemos

$$F_{hll} = F_L + S_L \left(\frac{S_R U_R - S_L U_L + F_L - F_R}{S_R - S_L} - U_L \right),$$

entonces

$$F_{hll} = \frac{F_L S_R - F_L S_L + S_L S_R U_R - S_L^2 U_L + S_L F_L - S_L F_R - S_R S_L U_L + S_L^2 U_L}{S_R - S_L}.$$

Eliminando términos semejantes queda

$$F_{hll} = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L}, \quad (2.85)$$

con lo que el flujo intermedio de la celda de Godunov está dado por:

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{hll} = \begin{cases} F_L & \text{si } 0 \leq S_L \\ \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L} & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_R \\ F_R & \text{si } 0 \geq S_R. \end{cases} \quad (2.86)$$

La implementación de esta parte se lleva a cabo en la subrutina *ulax*,

```

1  call fluxesHLL(fhll , ghll)
2
3      do i=1,nx
4          do j=1,ny
5              up(:,i,j) = u(:,i,j)                &
6                  + 0.5*dtx*(fhll(:,i-1,j)-fhll(:,i+1,j))    &
7                  + 0.5*dty*(ghll(:,i,j-1)-ghll(:,i,j+1))
8          end do
9      end do

```

donde *fhll* y *ghll* son los flujos calculados con el método de HLL. La subrutina llama a *fluxesHll*, que es la subrutina que se encarga de calcular los flujos usando el método de HLL, el siguiente código solo es una parte y solo calcula la ecuación 2.86, las variables *i*, *j* refieren a todos los puntos de la malla, los subíndices *l*, *r*, *u* y *d* significan izquierda, derecha, arriba y abajo respectivamente y *S* son las velocidades de las ondas más rápidas de los estados iniciales *U*. Para ver toda la subrutina completa ver el apéndice C.

```

1  do i=1,nx
2  do j=1,ny
3
4      if (0 .le. s_l(i,j)) then !less or equal 0<=sl
5          fhll(:,i,j)=f_l(:, i,j)
6
7      else if (s_l(i,j) .le. 0 .and. 0 .le. s_r(i,j)) then !sl<=0<=sr
8
9          fhll(:,i,j)=(s_r(i,j)*f_l(:,i,j)-s_l(i,j)*f_r(:,i,j)+s_l(i,j)*s_r(i,j)*(u_r(:,
10         i,j)-u_l(:,i,j)))/&
11         (s_r(i,j)-s_l(i,j))
12
13      else if (s_r(i,j) .le. 0) then !sr<=0
14          fhll(:,i,j)=f_r(:,i,j)
15
16  endif

```



```

17
18  if(0 .le. s_d(i,j)) then
19    ghll(:,i,j)= g_d(:,i,j)
20
21  else if(s_d(i,j) .le. 0 .and. 0 .le. s_u(i,j)) then
22
23    ghll(:,i,j)=(s_u(i,j)*g_d(:,i,j)-s_d(i,j)*g_u(:,i,j)+s_d(i,j)*s_u(i,j)*(u_u(:,
24    i,j)-u_d(:,i,j)))/&
25    (s_u(i,j)-s_d(i,j))
26
27  else if(s_u(i,j) .le. 0) then
28    ghll(:,i,j) = g_u(:,i,j)
29
30  endif
31 end do
32 end do

```

2.5. Condiciones de salto

2.5.1. Rankine-Hugoniot

La aparición de choques obedece a que algunas perturbaciones en el medio producen soluciones discontinuas en el flujo. Una de estas son los choques. Las ecuaciones de Rankine-Hugoniot relacionan las variables a ambos lados de una solución discontinua.

Un ejemplo de estas soluciones discontinuas se da cuando un jet supersónico interactúa con un medio estático (Prunty, 2019). Considerando las relaciones que hay entre los 2 estados que se forman durante una onda de choque. Supongamos que la onda de choque se mueve hacia la derecha (ver Figura 2.3) sobre un fluido estacionario ($v = 0$) con una velocidad v_s . La presión y la densidad, que están enfrente de la onda, son asumidas como ρ_0 y p_0 mientras que los flujos que están comprimidos detrás del frente de onda se mueven con una velocidad v_p y que tienen densidad y presión ρ_p , p_p .

Si consideramos nuestro sistema de referencia posicionado sobre el choque (ver Figura 2.4), usando las transformaciones de Galileo, las direcciones de las velocidades se invierten y la velocidad del flujo que entra al choque es v_s y la que sale es $v_s - v_p$.

Las ecuaciones de Rankine-Hugoniot parten de las ecuaciones de la hidrodinámica considerando un sistema cerrado usando las ecuaciones 2.4, 2.5 y 2.6 donde no varía con el tiempo, es decir, que $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, con lo que se pueden reescribir de la siguiente manera:

La conservación de masa:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.87)$$

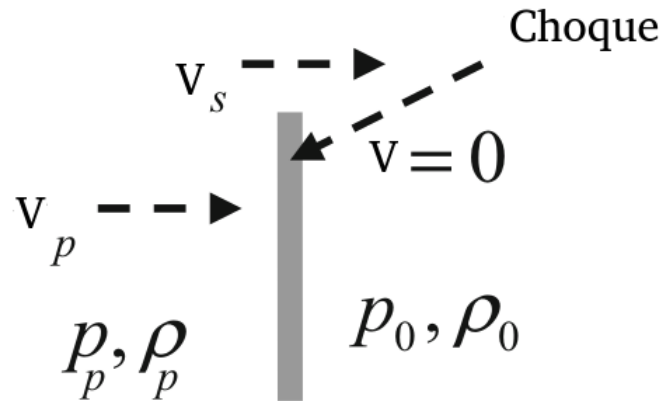


Figura 2.3: Onda de choque en movimiento sobre un flujo estacionario, tanto la onda como el flujo que está a la izquierda se mueven a la derecha.

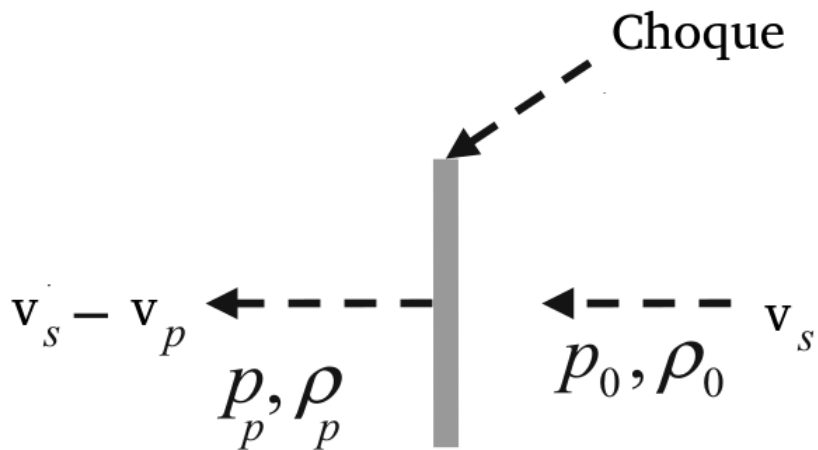


Figura 2.4: Al tomar un sistema de referencia sobre el choque, el choque en movimiento se transforma en una choque estacionario, y los flujos que están a la derecha e izquierda de la onda se mueven hacia la izquierda.

El momento:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) + \nabla p = 0. \quad (2.88)$$

Ecuación de la energía:

$$\nabla \cdot [\mathbf{u}(e + P)] = 0. \quad (2.89)$$

Considerando una dimensión

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0, \quad (2.90)$$

$$\frac{d(\rho u^2)}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0, \quad (2.91)$$

$$\frac{d(u[e + p])}{dx} = 0. \quad (2.92)$$

Integrando las ecuaciones e igualando a constantes, se pueden reescribir del siguiente modo usando la ecuación de estado $e = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{p}{\Gamma-1}$ donde $e \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \right]$ es la densidad de energía por unidad de volumen

$$\rho_j u_j = \rho_m u_m \quad (2.93)$$

$$\rho_j u_j^2 + p_j = \rho_m u_m^2 + p_m \quad (2.94)$$

$$\frac{1}{2} u_j^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{p_j}{\rho_j} = \frac{1}{2} u_m^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{p_m}{\rho_m} \quad (2.95)$$

donde $\rho \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right]$ representa la densidad, $u \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$ la velocidad, $p \left[\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} \right]$ la presión, Γ el índice adiabático adimensional donde para velocidades ultrarrelativistas $\Gamma = 4/3$ y para no relativistas $\Gamma = 5/3$ y los índices j y 0 se cambiaron por p y 0 respectivamente las cuales se relacionan a las propiedades del jet y del medio. Usando la ecuación 2.93, se puede definir el flujo como $j \equiv \rho_j u_j = \rho_m u_m$, sustituyendo en la ecuación 2.94 se reescribe como:

$$p_j + \frac{j^2}{\rho_j} = p_m + \frac{j^2}{\rho_m} \quad (2.96)$$

y la ecuación 2.95 llegamos a:

$$\frac{1}{2} \frac{j^2}{\rho_j^2} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{p_j}{\rho_j} = \frac{1}{2} \frac{j^2}{\rho_m^2} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1} \frac{p_m}{\rho_m}. \quad (2.97)$$

Despejando j de la ecuación 2.96 obtenemos:

$$-j^2 = \frac{p_j - p_m}{\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_j}}. \quad (2.98)$$

Sustituyendo la ecuación en 2.98 en 2.97 obtenemos:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{p_m - p_j}{\frac{1}{\rho_j} - \frac{1}{\rho_m}} \right) \left(\frac{1}{\rho_j^2} - \frac{1}{\rho_m^2} \right) = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \left(\frac{p_m}{\rho_m} - \frac{p_j}{\rho_j} \right)$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{2} (p_m - p_j) \left(\frac{1}{\rho_j} + \frac{1}{\rho_m} \right) = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \left(\frac{p_m}{\rho_m} - \frac{p_j}{\rho_j} \right)$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{\rho_m} \left(\frac{1}{2} p_m - \frac{1}{2} p_j - \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} p_m \right) = \frac{1}{\rho_j} \left(\frac{1}{2} p_j - \frac{1}{2} p_m - \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} p_j \right)$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{\rho_m} \left[\left(\frac{\Gamma + 1}{\Gamma - 1} \right) p_m + p_j \right] = \frac{1}{\rho_j} \left[\left(\frac{\Gamma + 1}{\Gamma - 1} \right) p_j + p_m \right].$$

Con lo que queda:

$$\frac{\rho_m}{\rho_j} = \frac{(\Gamma + 1) p_m + (\Gamma - 1) p_j}{(\Gamma + 1) p_j + (\Gamma - 1) p_m} = \frac{u_j}{u_m}. \quad (2.99)$$

Si se considera un choque fuerte, es decir, $p_j \gg p_m$, esto es $p_m \rightarrow 0$, con lo que

$$\rho_j = \frac{\Gamma + 1}{\Gamma - 1} \rho_m \quad (2.100)$$

Tomando a $\Gamma = 5/3$ da

$$\rho_j = 4\rho_m, \quad (2.101)$$

$$u_j = \frac{1}{4} u_m, \quad (2.102)$$

$$p_j = \frac{3}{4} \rho_m u_m^2. \quad (2.103)$$

2.5.2. Condiciones de Taub

Como se menciona en Landau & Lifshitz (1987) si se considera la conservación de masa:

$$\rho_j v_j \gamma_j = \rho_\infty v_\infty \gamma_\infty \quad (2.104)$$

donde v_j , v_∞ es la velocidad del jet y del medio que lo rodea respectivamente. Despejando ρ_∞ se obtiene:

$$\rho_\infty = \rho_j \frac{v_j \gamma_j}{v_\infty \gamma_\infty}. \quad (2.105)$$

También se considera la ecuación de momentos

$$(e_j + p_j) v_j^2 \gamma_j^2 + p_j = (e_\infty + p_\infty) v_\infty^2 \gamma_\infty^2 + p_\infty. \quad (2.106)$$

La densidad de energía se compone de la energía interna del sistema y de la energía cinética

$$e = e_{int} + e_k. \quad (2.107)$$

La energía interna para un sistema ultra-relativista es $p = \frac{1}{3} e_{int}$ lo que implica que $e_{int} = 3p$, mientras que la densidad de energía cinética es $e_k = \rho c^2$, pero como se esta considerando a $c = 1$ esto se reduce a $e_k = \rho$. Sustituyendo todo esto en la ecuación 2.107 queda:

$$(\rho_j + 4p_j) v_j^2 \gamma_j^2 + p_j = (\rho_\infty + 4p_\infty) v_\infty^2 \gamma_\infty^2 + p_\infty. \quad (2.108)$$

Con la ecuación 2.105 podemos modificar la ecuación 2.108, con lo que queda:

$$(\rho_j + 4p_j) v_j \gamma_j^2 + p_j = (\rho_\infty + 4p_\infty) v_\infty \gamma_\infty^2 + p_\infty \quad (2.109)$$

y tomando un choque fuerte $p_j \gg p_\infty$ podemos reducir la ecuación a

$$(\rho_j + 4p_j) v_j^2 \gamma_j^2 + p_j = \rho_\infty v_\infty^2 \gamma_\infty^2. \quad (2.110)$$

Sustituyendo la ecuación 2.105 en 2.110 obtenemos:

$$(\rho_j + 4p_j) v_j^2 \gamma_j^2 + p_j = \rho_j v_j v_\infty \gamma_j \gamma_\infty. \quad (2.111)$$

Suponiendo $(\rho_j + 4p_j) v_j^2 \gamma_j^2 \gg p_j$

$$(\rho_j + 4p_j) v_j \gamma_j = \rho_\infty v_\infty \gamma_\infty. \quad (2.112)$$

Despejando la presión obtenemos

$$p_j = \frac{\rho_j}{4} \left(\frac{v_\infty \gamma_\infty}{v_j \gamma_j} - 1 \right), \quad (2.113)$$

como $v_j \approx v_\infty \approx c$

$$p_j = \frac{\rho_j}{4} \left(\frac{\gamma_\infty}{\gamma_j} - 1 \right). \quad (2.114)$$

Para poder simular las condiciones de un jet, se necesita saber la densidad, velocidad y presión del mismo, como los jets tienen velocidades cercanas a la de la luz, se pueden tomar valores cercanos a esta constante. La densidad se obtendrá en la siguiente sección.

2.5.3. Luminosidad

Si suponemos las condiciones de Taub en un jet relativista y si colocamos nuestro marco de referencia sobre el jet, la energía será:

$$E = \gamma_\infty M c^2 \quad (2.115)$$

donde γ_∞ es factor de Lorentz con el que se mueve el jet cuando ya se ha alejado del objeto compacto y como sabemos que $L \equiv \frac{dE}{dt}$ entonces derivando la ecuación 2.115 respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{dE}{dt} = \gamma_j \dot{M} c^2. \quad (2.116)$$

La tasa de flujo de masa \dot{M} se puede escribir como:

$$\dot{M} = \rho_j u_j A_j \quad (2.117)$$

donde ρ es la densidad, $u_j = v_j \gamma_j$ es la cuadrivelocidad, y A_j es el área, que en este caso, corresponde la parte esférica del jet, entonces la luminosidad se puede escribir como:

$$L \equiv \frac{dE}{dt} = 4\pi r_j^2 \rho_j v_j \gamma_j \gamma_\infty c^2, \quad (2.118)$$

despejando la densidad

$$\rho = \frac{L}{4\pi r_j^2 v_j \gamma_j \gamma_\infty c^2} \quad (2.119)$$

2.6. Solución de Sedov-Taylor

Una forma de verificar si el código funciona correctamente es ver si una onda de choque esférica (o circular en 2D) sigue la solución analítica y auto similar obtenida por Sedov y Taylor (véase Clarke & Carswell (2007)). Cabe señalar que la onda de choque esférica es descrita por la inyección de energía dentro de un radio, el cual está inmerso en un medio en reposo.

2.6.1. Aproximación en función del análisis dimensional

Si se considera un choque fuerte, es decir, $p_w \gg p_m$, entonces las únicas variables que se pueden tomar son E , ρ_m y t que es el tiempo. Las dimensiones de estas cantidades se muestran a continuación.

$$[\rho_m] = \frac{M}{L^3}, \quad (2.120)$$

las unidades de la energía son:

$$[E] = M \frac{L^2}{T^2}, \quad (2.121)$$

y las del tiempo:

$$[t] = T. \quad (2.122)$$

La única cantidad que se puede construir que contenga la energía, tiempo y la densidad y que su dimensión sea la longitud es:

$$\left[\left(\frac{Et^2}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{5}} \right] = L, \quad (2.123)$$

por lo que para cualquier radio de onda de cualquier choque, debe depender de estas variables

$$R(t) = \eta \left(\frac{Et^2}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{5}} \propto t^{\frac{2}{5}}. \quad (2.124)$$

Por lo que la constante η debe ser de la siguiente manera

$$\eta \equiv \frac{r}{\left(\frac{Et^2}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{5}}}. \quad (2.125)$$

2.6.2. Aproximación en función de la conservación de la energía

Otra aproximación importante se obtiene buscando el cociente de presiones y densidades en función del número Mach. Se puede saber el radio $R(t)$ de una onda de choque en función del tiempo. Tomando el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi * R^3$ y la densidad de la región interior al choque es constante, entonces el volumen $V = \frac{M}{\rho_m}$. La velocidad media de la onda es $v(t) \sim \frac{R(t)}{t}$ por lo que se puede aproximar la energía cinética de la onda como

$$E_{kin} \sim \frac{1}{2} M v^2 \sim \rho_m R^3 \left(\frac{R}{t} \right)^2 = \rho_m \frac{R^5}{t^2}. \quad (2.126)$$

La energía térmica de un gas ideal (monoatómico) es

$$E_{th} \sim \frac{3}{2} pV. \quad (2.127)$$

Para encontrar la presión, primero se definirán algunas ecuaciones. La entalpía de estancamiento se define en términos de la entalpía y la velocidad de la onda

$$h_0 = h + \frac{1}{2} v^2 \quad (2.128)$$

la cual la podemos reescribir como

$$h_0 = h + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{h}\right). \quad (2.129)$$

La velocidad del sonido puede ser definida como

$$a = \sqrt{\frac{\Gamma p}{\rho}} \quad (2.130)$$

y también como

$$a = \sqrt{(\Gamma - 1)h} \quad (2.131)$$

donde a es la velocidad del sonido, h la entalpía, v la velocidad, p la presión y ρ la densidad. También se define el número de Mach

$$M = \frac{v}{a} \quad (2.132)$$

Si se combina la ecuación 2.130 con la ecuación 2.132 y lo sustituimos en la ecuación 2.129 se obtiene la entalpía en función de la velocidad de la onda y del sonido

$$h_0 = \frac{a^2}{\Gamma - 1} \left(1 + \frac{\Gamma - 1}{2} M^2\right). \quad (2.133)$$

Esta ecuación servirá más adelante. Usando las ecuaciones 2.95 y 2.33 para obtener la ecuación de la energía en función de la entalpía, va a quedar como:

$$h_m + \frac{1}{2} v_m^2 = h_w + \frac{1}{2} v_w^2 \quad (2.134)$$

donde los subíndices w , m corresponden a la onda y al medio respectivamente. Dividiendo la ecuación 2.94 entre 2.93, y cambiando los subíndices j por m se obtiene la siguiente ecuación:

$$v_m + \frac{p_m}{\rho_m v_m} = v_w + \frac{p_w}{\rho_w v_w} \quad (2.135)$$

Usando la ecuación 2.130 en la ecuación 2.135 se puede reescribir de la siguiente manera:

$$v_m - v_w = \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{a_w^2}{v_w} - \frac{a_m^2}{v_m} \right). \quad (2.136)$$

Se puede usar la entalpía de estancamiento para llegar a la siguiente igualdad:

$$h_w + \frac{1}{2} v_w^2 = h_m + \frac{1}{2} v_m^2 \equiv h_0, \quad (2.137)$$

definiendo a la velocidad del sonido como:

$$a_w^2 = (\Gamma - 1) h_w = (\Gamma - 1) \left(h_0 - \frac{1}{2} v_w^2 \right) \quad (2.138)$$

$$a_m^2 = (\Gamma - 1) h_m = (\Gamma - 1) \left(h_0 - \frac{1}{2} v_m^2 \right) \quad (2.139)$$

sustituyendo las ecuaciones 2.138 y 2.139 en la ecuación 2.136 se obtiene

$$v_m - v_w = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} h_0 \left[\frac{1}{v_w} - \frac{1}{v_m} + \frac{1}{2} (v_m - v_w) \right] \quad (2.140)$$

dividiendo por $(v_m - v_w)$

$$1 = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \left(\frac{h_0}{v_m v_w} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.141)$$

que al final se puede reescribir como:

$$\frac{1}{v_w v_m} = \frac{1}{(\Gamma - 1) h_0} \frac{\Gamma + 1}{2} \quad (2.142)$$

Otra ecuación de utilidad es la definición del número de Mach, ya que

$$v_m^2 = a_m^2 M_m^2. \quad (2.143)$$

Entonces usando la ecuación 2.133, se puede reescribir la ecuación 2.143 como:

$$v_m^2 = M_m^2 \frac{(\Gamma - 1) h_0}{1 + \frac{\Gamma - 1}{2} M_m^2}. \quad (2.144)$$

Usando la ecuación de momentos 2.93, se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{\rho_w}{\rho_m} = \frac{v_m}{v_w} = \frac{v_m^2}{v_w v_m}. \quad (2.145)$$

Como ya se sabe cuanto vale el numerador (ec. 2.144) y el denominador (ec. 2.142) de la fracción, entonces se puede definir el cociente de las densidades 2.145 como:

$$\frac{\rho_w}{\rho_m} = \frac{(\Gamma + 1) M_m^2}{2 + (\Gamma - 1) M_m^2}. \quad (2.146)$$

Entonces para encontrar las presiones, se pueden combinar las ecuaciones 2.94 y 2.93

$$p_w - p_m = \rho_m v_m^2 - \rho_w v_w^2 = \rho_m v_m^2 \left(1 - \frac{v_w}{v_m}\right) = \rho_m v_m^2 \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho_w}\right). \quad (2.147)$$

Empleando la siguiente relación $\rho v^2 = \Gamma p M^2$, que se obtiene de las ecuaciones 2.130 y 2.132, dividiendo por p_m y sustituyendo $\frac{\rho_w}{\rho_m}$ de la ecuación 2.146 queda:

$$\frac{p_w}{p_m} = 1 + \frac{2\Gamma}{\Gamma + 1} (M_m^2 - 1). \quad (2.148)$$

Si se usa la siguiente relación $p_m = \frac{\rho_m a_m^2}{\Gamma}$ se puede obtener el límite del choque fuerte

$$p_w \simeq \frac{2\rho_m v_m^2}{\Gamma + 1}. \quad (2.149)$$

Con esto ya se puede obtener la energía térmica de la ecuación 2.127 por lo que queda:

$$E_{th} \sim p_m R^3 \sim \rho_m v^2 R^3 \sim \rho_m \frac{R^5}{t^2}. \quad (2.150)$$

Dado que tienen el mismo orden que el de la energía cinética, entonces la energía total que es una cantidad conservada, se puede esperar que:

$$E_t = E_{kin} + E_{th} \sim \rho_m \frac{R^5}{t^2} \quad (2.151)$$

Despejando el radio, obtenemos lo siguiente

$$R(t) \propto \left(\frac{E t^2}{\rho_m}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad (2.152)$$

con lo cual se obtiene $R(t) \propto t^{2/5}$.

En la Figura 2.5 se muestra la expansión del radio de la onda de choque de Sedov-Taylor (nótese que la gráfica es log-log). Dado que la pendiente en la gráfica de logR vs logT es 2/5, entonces se conforma que el radio incrementa conforme pasa el tiempo como $R \propto t^{2/5}$.

Derivando la ecuación 2.152, se obtiene que la velocidad es:

$$\frac{de}{dt} = \frac{2}{5} \frac{R(t)}{t} \propto t^{-3/5}. \quad (2.153)$$

A diferencia del radio, la velocidad disminuye conforme pasa el tiempo (véase la Figura 2.6). La pendiente en la gráfica de logV vs logT es -3/5, con lo cual se tiene que $V \propto t^{-3/5}$.

Una observación importante es que, la explosión que se va a simular en esta tesis, es

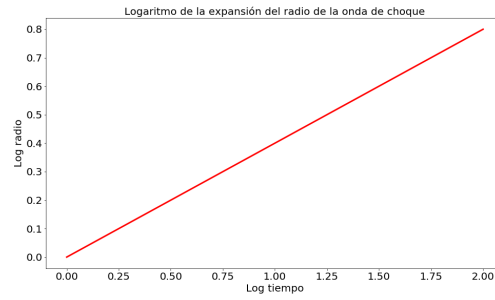


Figura 2.5: Evolución del radio de una onda de choque de Sedov-Taylor en función del tiempo.

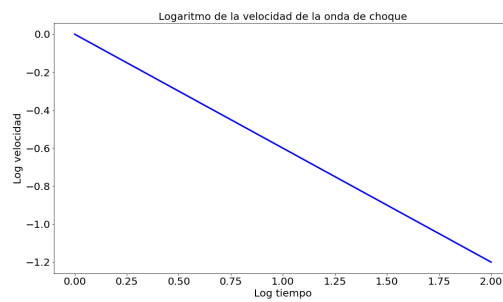


Figura 2.6: Evolución de la velocidad de una onda de choque de Sedov-Taylor en función del tiempo.

bidimensional por lo que el radio de la explosión crecería como $R(t) \propto t^{2/4}$ como lo describen en su artículo Kumar & Rajesh (2022).

Capítulo 3

Verificación del código

3.1. Pruebas unidimensionales

Para tener la seguridad de que el código hidrodinámico funcione bien se realizaron pruebas unidimensionales (1D) de un tubo de Sod ya sea en el régimen newtoniano así como en el relativista (en ambos regímenes se usó el método de Lax así como el HLL, y se compararon los resultados con la solución analítica). Estas pruebas consisten en determinar cómo se comporta un gas ideal en un tubo 1D el cual se tiene inicialmente una discontinuidad. Esto es, que en un valor determinado, el gas cambia abruptamente los valores de la densidad, presión y velocidad.

3.1.1. Casos newtonianos

Los valores de ρ , p y v de los modelos newtonianos se indican en el cuadro 3.1. El primer modelo (denominado caso 1 newtoniano), produce una onda de rarefacción¹ que se mueve a la izquierda y una onda de choque² que se mueve a la derecha. La condición inicial³ del gas consiste en tener el dominio unidimensional dividido en un lugar del dominio (en x_0) con ciertos valores de densidad (ρ_l), velocidad (v_l) y presión (p_l) del lado izquierdo⁴, mientras que del lado derecho tendrán densidad (ρ_r), velocidad (v_r) y presión (p_r). La elección del índice adiabático $\Gamma = 7/5$, un dominio $x \in [0, 1]$ cm y $x_0 = 0.5$ cm se dió para poder simular y comparar los mismos modelos mostrados por Lora et al. (2013).

En la Figura 3.1 se muestra la evolución temporal en tres tiempos característicos $t =$

¹Una onda de rarefacción es la progresión de partículas que se aceleran lejos de una zona comprimida. Siempre se mueven a regiones de mayor densidad y no presentan discontinuidades.

²Una onda de choque se moverá siempre a las zonas de menor densidad y presentará discontinuidades, además de que su valor siempre será una constante.

³Dado que para el primer caso tendremos valores de densidad y presión más grandes que el lado derecho de la posición crítica (x_0), podemos decir que del lado izquierdo de x_0 será una onda de rarefacción que se moverá a la izquierda, mientras que del lado derecho será una onda de choque que se moverá a la derecha.

⁴Los subíndices l y r vienen del inglés *left* y *right* que significan izquierda y derecha respectivamente.

Caso	p_l [dyn/cm ²]	p_r [dyn/cm ²]	v_l [cm/s]	v_r [cm/s]	ρ_l [g/cm ³]	ρ_r [g/cm ³]
Caso 1	1.0	0.1	0.0	0.0	1.0	0.125
Caso 2	0.4	0.4	-1.0	1.0	1.0	1.0

Cuadro 3.1: Valores iniciales de la presión (p), velocidad (v) y densidad (ρ), del lado izquierdo (p_l, v_l, ρ_l) y derecho (p_r, v_r, ρ_r) para los casos newtonianos. Para todos los casos el dominio espacial es $x \in [0, 1]$ cm, la posición crítica sería $x_0 = 0.5$ cm y un índice adiabático $\Gamma = 7/5$.

0, 0.2, 0.4 de la densidad, presión y velocidad para el caso 1 newtoniano usando el método Lax. En la Figura se ve como una onda de choque viaja hacia la derecha a través de la región de baja densidad. En el panel superior izquierdo notamos como para 0.2 segundos el perfil de densidad ρ tiene dos brincos situados aproximadamente en $x \approx 0.70$ cm, donde la densidad ($\rho \approx 0.48 \text{ g/cm}^3$), cambia a $\rho \approx 0.28 \text{ g/cm}^3$, mientras la velocidad y la presión mantienen los mismos valores ($v \approx 0.99 \text{ cm/s}$ y $p \approx 0.3 \text{ dyn/cm}^2$). En $x=0.85$ cm, la velocidad ($v \approx 0.99 \text{ cm/s}$), presión ($p \approx 0.3 \text{ dyn/cm}^2$) y densidad ($\rho \approx 0.28 \text{ g/cm}^3$) tienen una discontinuidad y cambian sus valores a los valores iniciales del estado derecho del tubo que no han sido afectados por la onda. La primera discontinuidad se aprecia solo en densidad, mientras que la presión permanece constante. Este tipo de discontinuidades son llamadas "de contacto", las cuales tienen la misma velocidad que los estados de la izquierda y la derecha $V_c = v_l = v_r$ donde V_c es la velocidad de la onda de contacto, por lo que esto hace que las presiones sean iguales $p_l = p_r$. Esta primera discontinuidad solo se presenta en el panel de las densidades, la otra discontinuidad que se presenta en los 3 paneles es la discontinuidad de la onda de choque. Para el tiempo $t=0.4$ s la discontinuidad de la onda de choque ya no se presenta en nuestro dominio de los 3 paneles, mientras que la cabeza de la onda de rarefacción todavía se muestra en $x \approx 0.01$ cm. La única discontinuidad presente es la de onda de contacto, donde ρ cambia su valor de $\rho \approx 0.48 \text{ g/cm}^3$ a $\rho \approx 0.28 \text{ g/cm}^3$, mientras la velocidad $v \approx 0.99 \text{ cm/s}$ y presión $p \approx 0.3 \text{ dyn/cm}^2$ mantienen sus mismos valores.

El caso 1 newtoniano también fue resuelto utilizando el método HLL y usando varias resoluciones. En la Figura 3.2, se muestra la comparación de la ρ , v y p entre los métodos Lax y HLL a 10,000 píxeles. El panel de arriba a la izquierda muestra la densidad $\rho = 1.0 \text{ g/cm}^3$ donde presenta un cambio en $x \approx 0.24$ cm y baja gradualmente hasta $x \approx 0.48$ cm donde la densidad ahora es $\rho \approx 0.45 \text{ g/cm}^3$. Se puede ver que tanto Lax y HLL tienen el mismo comportamiento que el método analítico. Para las discontinuidades en $x \approx 0.74$ cm (contacto) y $x \approx 0.93$ cm (choque) cambian los valores de densidad $\rho \approx 0.48 \text{ g/cm}^3$ a $\rho \approx 0.35 \text{ g/cm}^3$ respectivamente y después a $\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$. Se puede observar que tanto Lax como HLL presentan dificultad con la discontinuidad de contacto, pero logra adaptarse muy bien para la discontinuidad de choque. En sí, ambos métodos

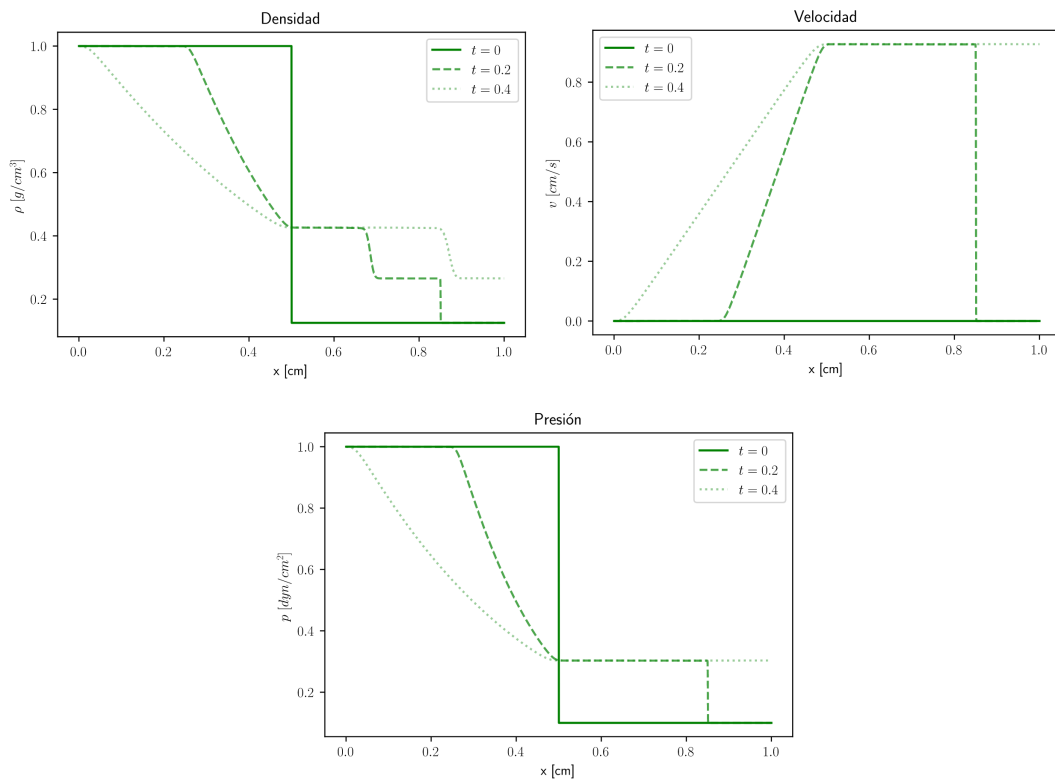


Figura 3.1: Evolución temporal del caso 1 newtoniano (usando el método Lax) donde se muestra las magnitudes de densidad (arriba a la izquierda), presión (abajo) y velocidad (arriba a la derecha). Se usó un índice adiabático $\Gamma = 7/5$.

reproducen casi a la perfección toda la región donde se desarrolla la discontinuidad en resoluciones de 10,000 píxeles. En el panel de arriba a la derecha se muestra como tanto HLL como Lax también reproducen la solución analítica esperada para la velocidad. Esta, al igual que la densidad, cambian sus valores gradualmente de $v = 0$ cm/s en $x \approx 0.20$ cm a $v \approx 0.99$ cm/s en $x \approx 0.50$ cm, donde se mantiene constante hasta la discontinuidad de choque en $x \approx 0.93$ cm y regresa a $v = 0$ cm/s. En este punto, tanto Lax como HLL, no tiene ninguna dificultad al reproducir la discontinuidad de choque. El panel de abajo a la izquierda muestra como HLL y Lax reproducen la solución analítica para la presión, la cual cambia su valor $p = 1.0$ dyn/cm² en $x \approx 0.48$ cm bajando hasta $p \approx 0.3$ dyn/cm² en $x \approx 0.48$ cm, donde igual que la velocidad mantiene su mismo valor hasta $x \approx 0.93$ cm donde su valor decae a $p = 0.1$ dyn/cm².

El panel de abajo a la derecha de la Figura 3.2 muestra cómo varían los resultados usando Lax con distintas resoluciones ($n_x = 10^2, 10^3, 10^4$), además, se muestra la solución analítica. Queda claro cómo conforme se incrementa la resolución (píxeles⁵) los resultados numéricos se apegan más a la analítica. En específico, para el problema 1 newtoniano, a partir de resoluciones mayores a 1000 píxeles, los resultados se apegan mucho a la solución analítica.

En el 2º caso newtoniano, los valores de la densidad y presión fueron las mismas en ambos estados del tubo, pero las velocidades fueron de igual magnitud pero de sentido contrario. Esta condición inicial produce 2 ondas de rarefacción. Una se mueve hacia la izquierda y la otra hacia la derecha (véase el cuadro 3.1 para más detalles). La Figura 3.3 muestra, usando el método de Lax, la evolución temporal del 2º caso newtoniano. El panel de arriba a la izquierda muestra la densidad. El panel arriba a la derecha muestra la velocidad y el de abajo la presión. En todos los paneles se muestra $t = 0, t = 0.2, t = 0.4$.

Para los valores $t = 0$ s, la densidad (ρ) y la presión (p) son las mismas, mientras que para el panel de la velocidad tiene una discontinuidad en $x = 0.5$ cm. Para el tiempo $t = 0.2$ s se puede ver una simetría ya que, la cabeza de la onda de rarefacción tienen lugar en los puntos $x \approx 0.16$ cm donde la densidad $\rho = 1.0$ g/cm³ y la presión $p = 0.40$ dyn/cm², decrecen hasta $\rho \approx 0.25$ g/cm³ y $p = 0.05$ dyn/cm² en forma parabólica hasta conectar con la cola de la onda de rarefacción, mientras que la velocidad $v = -1.0$ cm/s decrece linealmente en magnitud hasta $v = 0$ cm/s. Entre los puntos $x \approx 0.4$ cm y $x \approx 0.6$ cm, que es la zona de contacto, mantienen un valor constante para conectar con la cola de la onda de rarefacción, donde la densidad y presión crecen parabólicamente hasta $x \approx 0.84$ cm, mientras que la velocidad lo hace linealmente al mismo puntos. Esa región es la cabeza de la onda y conecta con los estados iniciales del lado derecho del tubo, donde no ha habido perturbación, y por ende, $\rho = 1.0$ g/cm³, $v = 1$ y $p = 0.4$ dyn/cm². Para el tiempo $t = 0.4$ s

⁵Para fines prácticos, usaremos la palabra "píxel" para describir las celdas con tamaño Δx en las que se divide nuestro dominio espacial, es decir, si el dominio tiene una resolución de n píxeles, entonces, $\Delta x = 1/n$

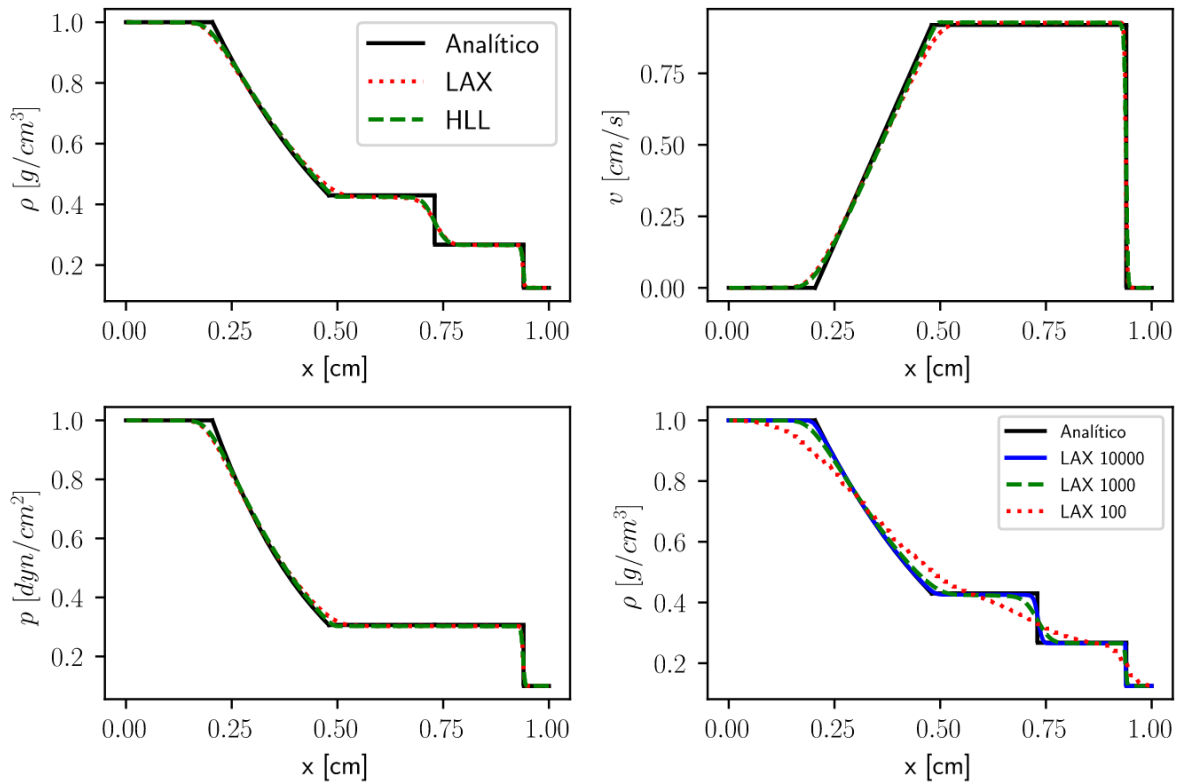


Figura 3.2: Representación del caso 1 newtoniano a $t = 0.25$ s. Las magnitudes mostradas con la densidad (arriba a la izquierda), la velocidad (arriba a la derecha) y la presión (abajo a la izquierda). El panel de abajo hacia la derecha muestra la comparación a distintas resoluciones para la densidad. Los demás paneles muestran las diferencias de los métodos HLL y Lax con una resolución de 10,000 píxeles.

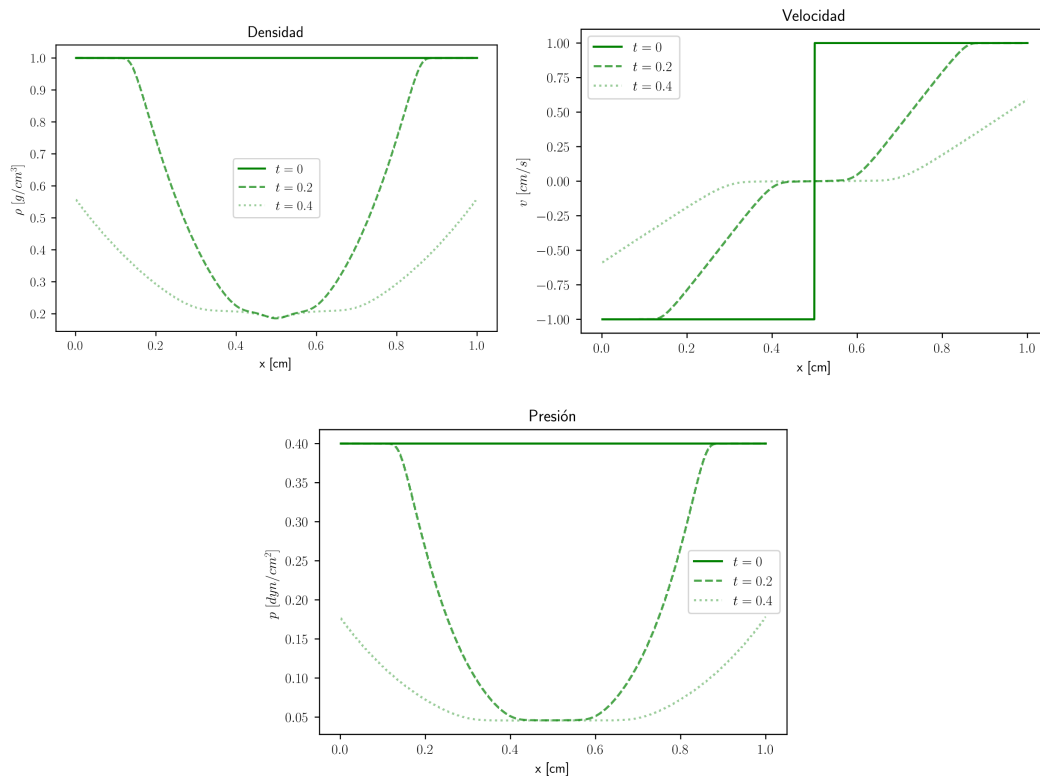


Figura 3.3: Igual que en la Figura 3.1 pero para el caso 2 newtoniano. El índice adiabático sigue siendo $\Gamma = 7/5$.

se aprecian las colas de las ondas de rarefacción en los puntos $x \approx 0.3$ y $x \approx 0.7$, donde la densidad mantiene un valor constante $\rho \approx 0.25 \text{ g/cm}^3$, la velocidad $v \approx 0.0 \text{ cm/s}$ y la presión $p = 0.05 \text{ dyn/cm}^2$.

La comparación del método de Lax y HLL se muestra en la Figura 3.4. Como se puede ver en los paneles de densidad (arriba a la izquierda) en el punto $x \lesssim 0.05 \text{ cm}$, la densidad no está perturbada y tiene un valor $\rho = 1.0 \text{ g/cm}^3$, la velocidad (arriba a la derecha) $v = -1.0 \text{ cm/s}$ y la presión (abajo a la izquierda) $p = 0.4 \text{ dyn/cm}^2$. Tanto Lax como HLL se ajustan casi perfectamente para valores constantes. Después del punto de la cabeza de la onda, los valores de la densidad y la presión empiezan a disminuir a $\rho \approx 0.2 \text{ g/cm}^3$ y $p \approx 0.05 \text{ dyn/cm}^2$ en forma parabólica, mientras que la velocidad disminuye (en magnitud) linealmente hasta $v = 0 \text{ cm/s}$. Cabe señalar que los valores más bajos a los que disminuyen las magnitudes de densidad, velocidad y presión son en el punto $x \approx 0.33 \text{ cm}$, el cual es la cola de la onda de rarefacción. Al comparar las resoluciones, se nota que para resoluciones $\leq 1,000$ no se apega al método analítico, sobre todo en la cabeza de la onda.

De $x \approx 0.33 \text{ cm}$, la densidad, velocidad y presión mantienen valores constantes de $\rho \approx 0.1 \text{ g/cm}^3$, $v \approx 0 \text{ cm/s}$ y $p = 0.05 \text{ dyn/cm}^2$ hasta llegar al punto $x \approx 0.66 \text{ cm}$ donde conectan con la cola de la onda de rarefacción. En esta región donde se enlazan las colas de la onda Lax no tiene problemas con ningún tipo de resolución. Del punto de la cola de

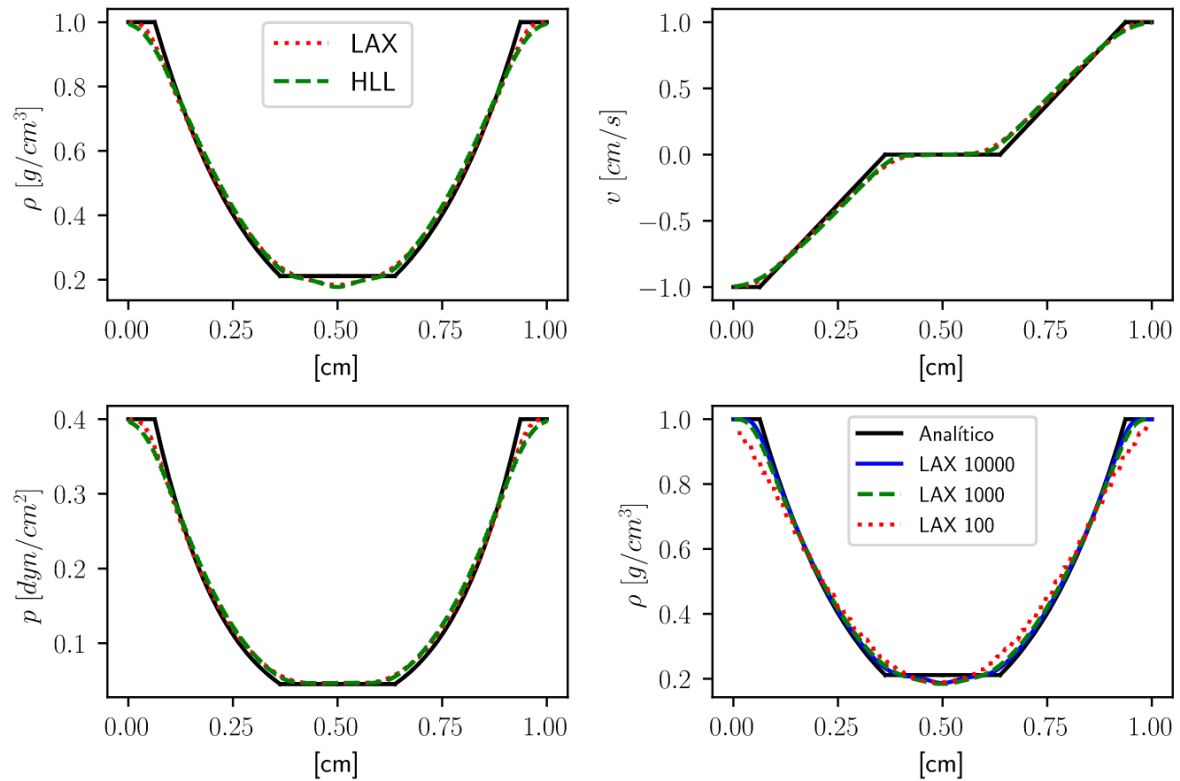


Figura 3.4: Igual que en la Figura 3.2 pero para el caso 2 newtoniano a $t = 0.25$ s. El panel de abajo hacia la derecha muestra la comparación a distintas resoluciones para la densidad. Los demás paneles muestran las diferencias de los métodos HLL y Lax con una resolución de 10,000 píxeles.

la onda de rarefacción de la derecha, la densidad y presión empiezan a subir sus valores en forma parabólica hasta a $\rho = 1.0 \text{ g/cm}^3$ y a $p = 0.4 \text{ dyn/cm}^2$, mientras la velocidad incrementa linealmente a $v = 1.0 \text{ cm/s}$. El punto final hasta donde incrementan sus valores es la cabeza de la onda de rarefacción derecha, el cual es $x \approx 0.93 \text{ cm}$. En el panel de abajo a la derecha muestra la solución analítica, así como los resultados obtenidos usando Lax⁶ con distintas resoluciones ($n_x = 10^2, 10^3, 10^4$). Al igual que el caso 1 newtoniano, conforme se incrementa la resolución, los resultados numéricos se apegan más a la solución analítica. A partir de resoluciones mayores a 1000, los resultados se apegan mucho a la solución analítica.

Podemos concluir, para el caso newtoniano, que nuestros módulos de Lax como HLL reproducen de forma casi perfecta la solución analítica para el problema del tubo de Sod (Lora Clavijo *et al.* 2013), ya sea en las regiones donde se muestra una discontinuidad o donde cambia suavemente. Cabe destacar que el método Lax resultó ser 220% más rápido que HLL.⁷

⁶Se usó el método de Lax porque es más rápido que HLL.

⁷Probado con una resolución de 10,000 píxeles con un procesador AMD Ryzen 3 3300U de 2.10 Ghz.

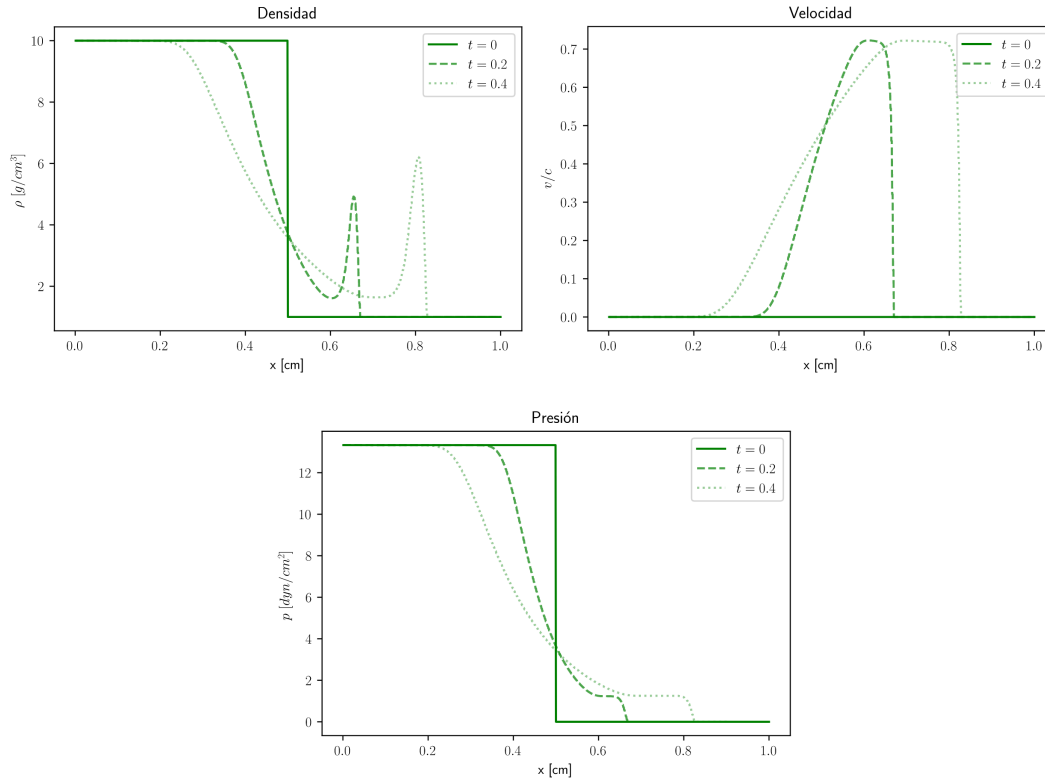


Figura 3.5: Igual que en la Figura 3.1 pero para el caso 1 relativista. A diferencia del caso newtoniano, en el relativista se usa un índice adiabático $\Gamma = 4/3$.

3.1.2. Casos relativistas

Para los casos relativistas, se tomarán valores a partir de los cuales $v \rightarrow c$, y además se requiera usar el índice adiabático $\Gamma = 4/3$. Los valores con los que se toman los casos del caso relativista están en el cuadro 3.2 y cabe señalar que la velocidad de la luz está normalizada a $c = 1$ y el dominio es $x \in [0, 1]$, $x_0 = 0.5$ cm.

Caso	p_l [dyn/cm ²]	p_r [dyn/cm ²]	v_l/c	v_r/c	ρ_l [g/cm ³]	ρ_r [g/cm ³]
Caso 1	13.33	0.0	0.0	0.0	10	1
Caso 2	0.05	0.05	-0.2	0.2	0.1	0.1

Cuadro 3.2: Valores iniciales de la presión (p), velocidad (v) y densidad (ρ), del lado izquierdo (p_l, v_l, ρ_l) y derecho (p_r, v_r, ρ_r) para los casos relativistas. Para todos los casos el dominio espacial será $x \in [0, 1]$, la posición crítica será $x_0 = 0.5$ y un índice adiabático $\Gamma = 4/3$

Tanto en el caso 1 relativista como el caso 2 relativista, la evolución temporal se hará usando el método de HLL, ya que es más preciso que el método de Lax⁸.

En la Figura 3.5 se muestra la evolución temporal de la ρ , p y v cuando $t = 0$ s el pa-

⁸Lax falla al tratar de simular las condiciones iniciales de este problema ya que no corre el programa al momento de su ejecución.

nel de la densidad (arriba a la izquierda) y presión (abajo) presentan una discontinuidad en $x = 0.5$ cm donde $\rho = 10 \text{ g/cm}^3$ y $p = 13.33 \text{ dyn/cm}^2$ del lado izquierdo, mientras que del lado derecho $\rho = 0 \text{ g/cm}^3$ y $p = 0 \text{ dyn/cm}^2$. La velocidad no presenta discontinuidad y mantiene su velocidad nula en toda la región del tubo. Al tiempo $t = 0.2$ s la densidad y presión descienden linealmente, mientras que la velocidad asciende en $x \approx 0.38$ cm que viene siendo la cabeza de la onda de rarefacción. El punto donde alcanzan sus máximos y mínimos es la cola de la onda que está situada en el punto $x \approx 0.58$ cm, la densidad y presión llegan a $\rho \approx 1.12 \text{ g/cm}^3$ y $p \approx 1.12 \text{ dyn/cm}^2$ mientras que la velocidad va aumentando hasta llegar a $v \approx 0.75c$. La densidad vuelve a subir en el punto $x \approx 0.63$ cm y llega a $\rho = 5.6 \text{ g/cm}^3$ mientras que la velocidad y presión se mantienen iguales. Para el punto $x \approx 0.68$ cm, la densidad, presión y velocidad bajan a valores nulos, que es la zona del tubo que no ha sido perturbada por la onda. Para el tiempo $t = 0.4$ s, la densidad y presión, que mantienen sus valores de $\rho = 10 \text{ g/cm}^3$ y $p = 13.33 \text{ dyn/cm}^2$ bajan sus valores en $x \approx 0.25$ cm, mientras que la velocidad, la cual es nula, asciende. En el punto $x \approx 0.68$ cm la presión alcanza $p \approx 1.12 \text{ dyn/cm}^2$ y la densidad $\rho \approx 1.12 \text{ g/cm}^3$, mientras que la velocidad sube a $v \approx 0.75c$. La densidad vuelve a subir en $x \approx 0.75$ cm y llega a $\rho \approx 0.65 \text{ g/cm}^3$, manteniéndose así hasta el punto $x \approx 0.83$ cm donde la densidad, así como la velocidad y presión, descienden sus valores a nulos.

En la Figura 3.6 se muestra la comparación entre la solución obtenida con HLL (1000 píxeles) y la solución analítica. El panel de arriba a la izquierda muestra la densidad, el de arriba a la derecha la velocidad y la presión es el de abajo a la izquierda. Cabe recalcar que el tiempo mostrado es $t = 0.35$ s. A la región $x \lesssim 0.33$ cm, la densidad tiene un valor $\rho = 10 \text{ g/cm}^3$, la presión $p = 13.33 \text{ dyn/cm}^2$ y la velocidad es nula. Se puede ver que HLL se ajusta casi perfectamente para los valores constantes sin importar la resolución. En el punto $x \approx 0.33$ cm se localiza la cabeza de la onda, donde la presión y la densidad empiezan a decaer en forma parabólica, mientras que la velocidad comienza subir en forma linealmente. El punto donde la densidad y presión alcanzan su mínimo, mientras que la velocidad, su máximo, se localiza en $x \approx 0.62$ cm. La resolución para esta región es ≥ 500 píxeles. En el punto $x \approx 0.75$ cm, la densidad tiene una discontinuidad, al cual se le conoce como discontinuidad de la onda de contacto. Debido a esta región la resolución a tomar en cuenta debe ser $\geq 1,000$ o incluso $\geq 10,000$. En esta discontinuidad la densidad pasa de $\rho \approx 3 \text{ g/cm}^3$ a $\rho \approx 9 \text{ g/cm}^3$ mientras que la presión y velocidad se mantienen en $p \approx 2 \text{ dyn/cm}^2$ y $v = 0.75 c$. La última discontinuidad que es la de choque, todas las magnitudes (ρ , v y p) disminuyen a su valor nulo y la resolución a tomar en cuenta puede ser $\geq 1,000$ píxeles dado que HLL no presenta dificultades con esta discontinuidad.

En el panel de abajo a la derecha muestra la solución analítica, así como los resultados obtenidos usando HLL con distintas resoluciones ($n_x = 10^2, 10^3, 10^4$). Se puede observar, que aunque apenas es visible en 1D, el método de HLL es un poco más aproximado a la

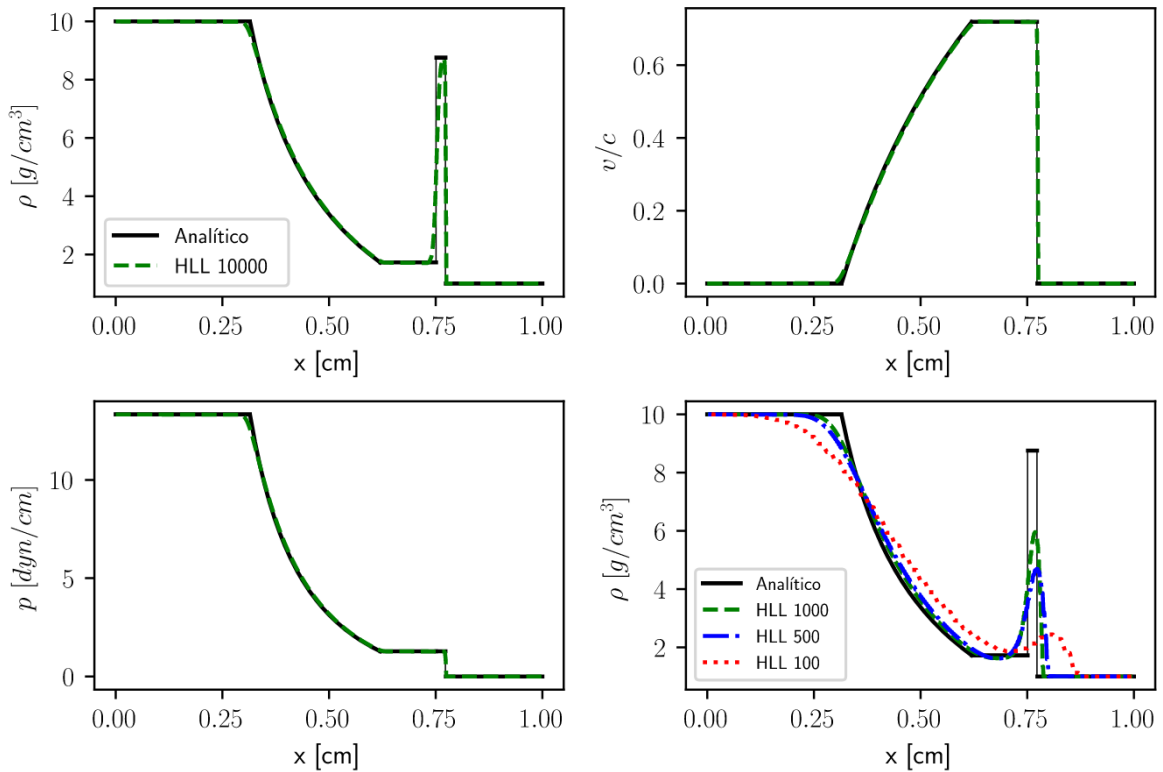


Figura 3.6: Igual que en la Figura 3.2 pero para el caso 1 relativista a $t = 0.35$ s. El panel de abajo hacia la derecha muestra la comparación a distintas resoluciones para la densidad. Los demás paneles muestran las diferencias de los métodos HLL y Lax con una resolución de 10,000.

solución analítica. En específico, para el problema 1 relativista, a partir de resoluciones mayores a 1000, los resultados se apegan mucho a la solución analítica.

El caso 2 relativista representa 2 ondas de rarefacción, a diferencia del caso 1 las velocidades que alcanzan las ondas no son velocidades relativistas. A diferencia del caso 1 relativista, el caso 2 relativista no presenta discontinuidades, por lo que se pueden usar resoluciones ≤ 100 píxeles. En la Figura 3.7, el panel de arriba a la izquierda muestra la densidad, el de arriba a la derecha la velocidad y el de abajo la presión. Al igual que el caso newtoniano, al simular las 2 ondas presenta una simetría con respecto a la discontinuidad. En el tiempo $t = 0$ s, tanto la densidad como la presión mantienen los mismos valores $\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$ y $p = 0.05$, mientras que la velocidad tiene una discontinuidad en $x = 0.5$ cm, donde la parte del lado izquierdo de la discontinuidad es $v = -0.2 c$, (el signo negativo solo muestra que las ondas de choque tienen una dirección opuesta entre sí). Mientras que del lado derecho es $v = 0.2 c$. Al tiempo $t = 0.2$ s, la cabeza de la onda de rarefacción se presenta en los puntos $x \approx 0.35$ cm, donde los valores de la presión $p = 0.05$ y densidad $\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$ comienzan a descender linealmente, mientras que la velocidad $v = 0.2 c$ desciende hasta el punto $x \approx 0.45$ cm. En este punto los valores de la densidad,

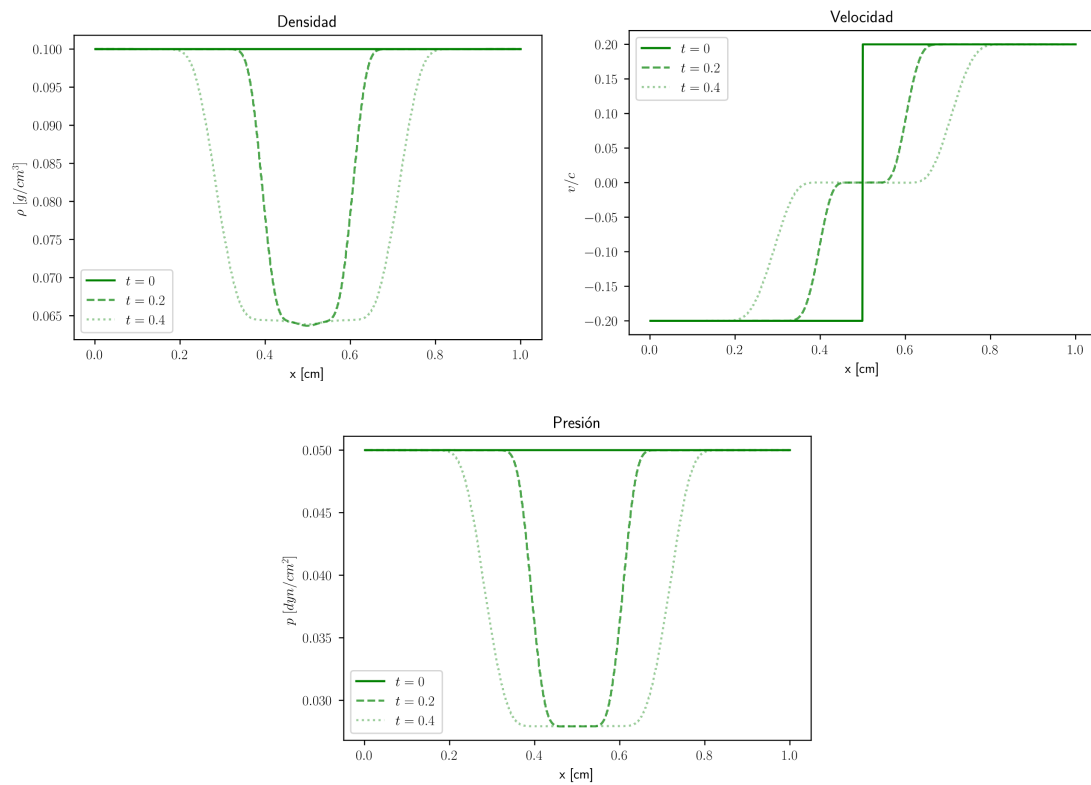


Figura 3.7: Igual que en la Figura 3.1 pero para el caso 2 relativista. El panel de arriba a la izquierda muestra la densidad. El de arriba a la derecha la velocidad y el de abajo la presión

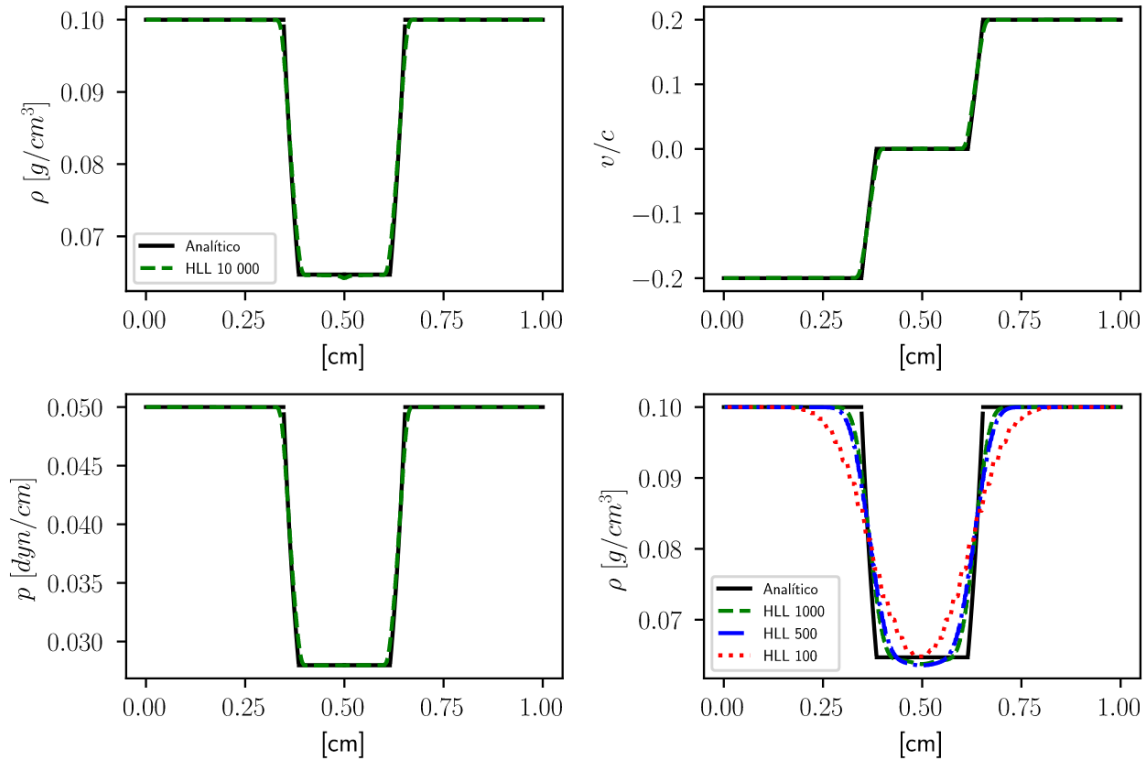


Figura 3.8: Igual que en la Figura 3.2 pero para el caso 2 relativista. Se usó un índice adiabático $\Gamma = 4/3$ y $t = 0.25$ s.

presión y velocidad son $\rho \approx 0.065 \text{ g/cm}^3$, $p \approx 0.028 \text{ dyn/cm}^2$ y $v \approx 0$ c. Los valores cambian en $x \approx 0.55$ cm que es la cola de la onda de rarefacción derecha, y comienzan a subir hasta $x \approx 0.65$ cm donde ahora la densidad es $\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$, la presión $p = 0.05 \text{ dyn/cm}^2$ y la velocidad $v = 0.2$ c. Para el tiempo $t = 0.4$ s se sigue manteniendo el mismo sistema que al tiempo $t = 0.2$ s, ya que en $x \approx 0.25$ cm los valores de la densidad $\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$, presión $p = 0.05 \text{ dyn/cm}^2$ y velocidad $v = -0.2$ c descienden en forma lineal hasta el punto $x \approx 0.35$ cm, donde se mantienen constantes los valores $\rho \approx 0.065 \text{ g/cm}^3$, $p \approx 0.028 \text{ dyn/cm}^2$ y $v \approx 0$ c hasta el punto $x \approx 0.65$ cm donde vuelven a ascender linealmente hasta el punto $x = 0.75$ cm donde los valores regresan a $\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$, $p = 0.05 \text{ dyn/cm}^2$ y la velocidad cambia de sentido $v = 0.2$ c.

En la Figura 3.8, el panel de arriba a la izquierda muestra el perfil de la densidad, el de arriba a la derecha la velocidad, el de abajo a la izquierda la presión. Esos 3 muestran una comparación entre el método analítico y el método numérico (HLL) usando una resolución de 10,000 píxeles. En $x \lesssim 0.33$ cm los valores de la densidad, presión y velocidad son $\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$, $p = 0.05 \text{ dyn/cm}^2$ y $v = -0.2$ c. HLL para resoluciones ≥ 500 se ajusta perfectamente al analítico. Cuando los valores descienden en $x \approx 0.37$ cm a $\rho \approx 0.065 \text{ g/cm}^3$, $v \approx 0$ c y $p \approx 0.025 \text{ dyn/cm}^2$. En esta región podemos ver que para resoluciones ≤ 100 pí-

xeles se tiene dificultades para apegarse al método analítico, sobre todo en las regiones de la cabeza y cola de la onda de rarefacción. En el punto $x \approx 0.63$ cm tanto la presión como la densidad y la velocidad vuelven a subir sus valores hasta el punto $x \approx 0.65$ cm donde alcanzan los valores que tenía del lado izquierdo donde la densidad ahora es $\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$, la presión $p = 0.05 \text{ dyn/cm}^2$ y la velocidad $v = 0.2 c$. En el panel de abajo a la derecha se muestra la solución analítica, así como los resultados obtenidos usando HLL con distintas resoluciones ($n_x = 10^2, 10^3, 10^4$). Al igual que el caso 1 relativista, conforme se incrementa la resolución, los resultados numéricos se apegan más a la solución analítica. A partir de resoluciones mayores a 1000, los resultados se apegan mucho a la solución analítica. Por lo tanto, podemos concluir que nuestro módulo HLL se ajusta perfectamente para el problema de Riemann relativista con resoluciones ≥ 500 píxeles.

3.2. Pruebas bidimensionales

3.2.1. Caso Newtoniano (quasi Sedov-Taylor)

En esta sección se verifica que el código newtoniano reproduzca correctamente la expansión de la onda bidimensional de Sedov-Taylor (en la que se libera una gran cantidad de energía en un volumen muy pequeño, y la cual es discutida a fondo en la Sección 2.5). Para lo anterior, se inyecta instantáneamente una gran cantidad de energía E dentro de un radio R inmerso en un medio ambiente de densidad uniforme ρ_m . Posteriormente, un frente de choque bidimensional se expande a través del medio ambiente. El radio inicial de la onda es $r = 2$ pc, y el dominio computacional fue de $x, y \in [0, 4 \times 10^{20}] \times [0, 4 \times 10^{20}]$ cm. La resolución fue de 1000x1000 píxeles, se tomó un índice adiabático $\Gamma = 5/3$, y el tiempo de integración fue $t = 8.1 \times 10^{10}$ s. Dentro del radio inicial la densidad, presión, y velocidades fueron: $\rho_s, p_s, v_{xs}, v_{ys}$, para el medio ambiente la densidad, presión, y velocidades fueron: $\rho_m, p_m, v_{xm}, v_{ym}$. Los valores típicos de una supernova con energía $E_s \approx 10^{52}$ ergs están mencionados en el Cuadro 3.3:

Unidades	p_s [dyn/cm ²]	p_m [dyn/cm ²]	$\frac{v_{xs}}{c}$	$\frac{v_{xm}}{c}$	$\frac{v_{ys}}{c}$	$\frac{v_{ym}}{c}$	ρ_s [g/cm ³]	ρ_m [g/cm ³]
valores	2.01×10^{-6}	8.97×10^{-10}	0	0	0	0	3.48×10^{-24}	1.67×10^{-24}

Cuadro 3.3: Valores iniciales de la presión, velocidad, y densidad (ρ), dentro de R ($p_s, v_{xs}, v_{ys}, \rho_s$) y del medio ambiente ($p_m, v_{xm}, v_{ym}, \rho_m$) para el problema de Sedov-Taylor.

La Figura 3.9 muestra la evolución de la onda. El panel de arriba a la izquierda muestra la onda de choque al tiempo $t = 0$, el panel de arriba a la derecha muestra la evolución al tiempo $t = 10^{10}$ s, y la de abajo al tiempo $t = 8.1 \times 10^{10}$ s. En estos se observa como

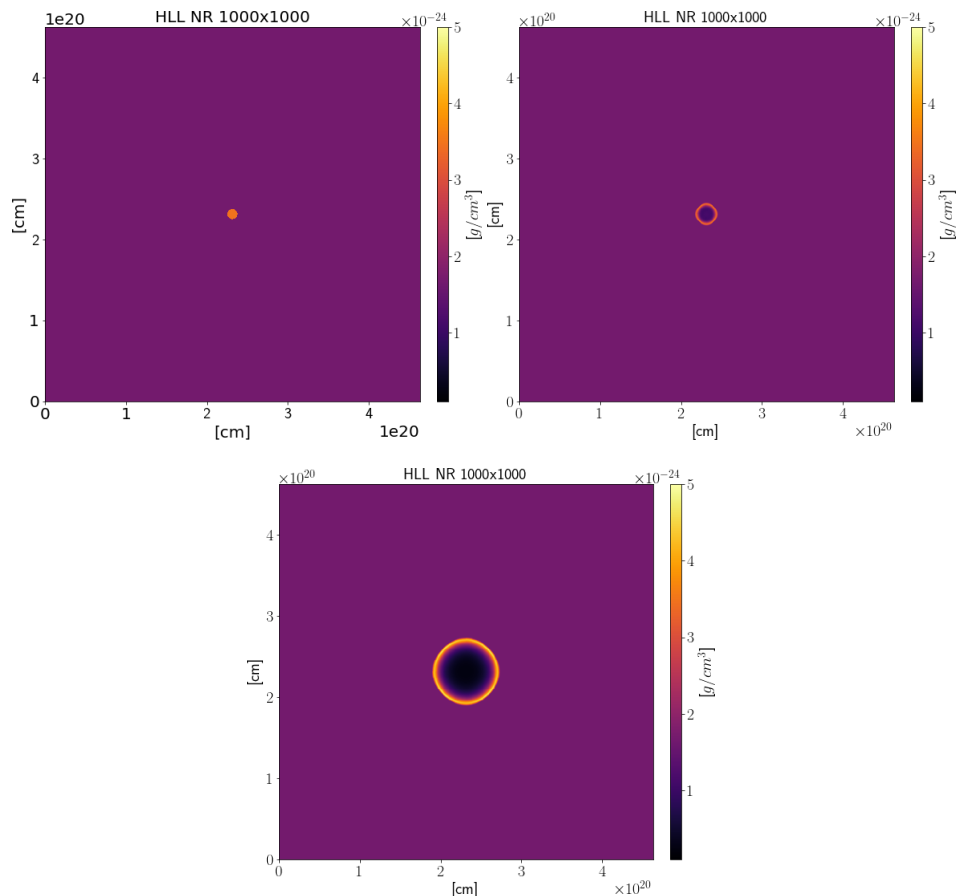


Figura 3.9: Mapas de densidad mostrando la evolución de la onda de choque de Sedov-Taylor en 2 dimensiones. El panel de arriba a la izquierda muestra el tiempo inicial $t = 0$, el de arriba a la derecha al $t \approx 10^{10}$ s, y el panel de abajo muestra el tiempo $t = 8.1 \times 10^{10}$ s.

a 10^{10} s y a 8.1×10^{10} s la onda tiene un radio de ~ 1.6 pc y ~ 4.5 pc, respectivamente. En ambos tiempos la explosión es bidimensional y se tiene una sobredensidad de $\rho \approx 3.5 \times 10^{-24} \text{gcm}^{-3}$ en el perímetro de la onda, mientras que dentro de la onda la densidad decae a $\rho \approx 10^{-24} \text{gcm}^{-3}$.

Para verificar que el código HD resuelva correctamente una explosión en dos dimensiones se buscó comparar la evolución temporal de la posición de la onda de choque en la simulación con una predicción analítica similar a la solución de Sedov-Taylor, con la salvedad de que el sistema no tiene simetría esférica, es bidimensional y cartesiano. Se comparó que el radio de la onda de expansión de la simulación siguiese la solución analítica $R(t) \propto t^{2/4}$ como se menciona en Kumar & Rajesh (2022). La Figura 3.10 muestra la evolución logarítmica del radio de la onda en función del tiempo (verde) así como la curva que mejor se le ajusta (rojo). La curva que mejor se ajusta a los datos resultó ser $\log(r(t)) = 0.429t + 34.43$ lo que nos indica que el radio crece como $r(t) \propto t^{0.429}$. El coeficiente de determinación fue $R^2 = 0.993$ lo cual nos indica que el modelo se ajusta muy bien a los datos de la simulación. Al comparar nuestro modelo con la teoría podemos notar una

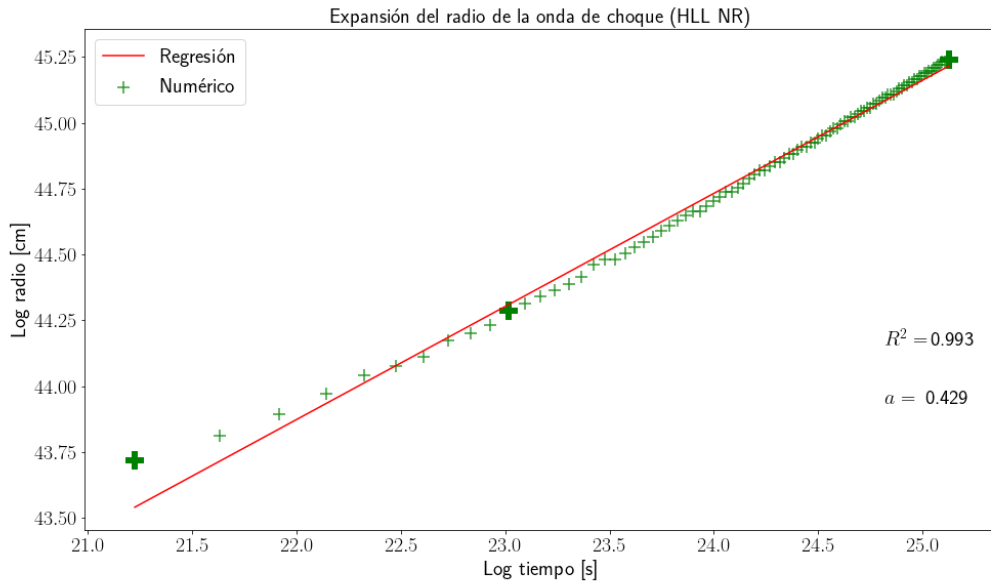


Figura 3.10: Crecimiento logarítmico del radio de la onda de choque en función del tiempo. Las cruces verdes muestran la evolución del radio de la onda de choque en la simulación. La línea sólida roja muestra la curva que mejor se ajusta a los datos: $\log(r(t)) = 0.429t + 34.43$ (con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.993$). Las cruces más remarcadas corresponden a los radios que se muestran en la Figura 3.9.

discrepancia del 16%, y por ende podemos concluir que el problema de Sedov-Taylor fue resuelto correctamente por el código HD.

3.2.2. Caso relativista

Para verificar que el código RHD funciona correctamente en 2D se hizo una prueba de una onda de choque relativista en 2 dimensiones y se verificó que se comporta como la solución analítica auto-similar de una prueba de un tubo de choque bidimensional. El dominio espacial fue $x, y \in [0, 1] \times [0, 1]$ cm, el radio de la onda $r = 0.5$ cm. Se consideró un índice adiabático $\Gamma = 4/3$, y una resolución de 1000×1000 píxeles. Los valores que hay dentro de la onda bidimensional, así como los que el medio ambiente, se muestran en el cuadro 3.4.

Unidades	p_i [dyn/cm ²]	p_o [dyn/cm ²]	$\frac{v_{xi}}{c}$	$\frac{v_{xo}}{c}$	$\frac{v_{yi}}{c}$	$\frac{v_{yo}}{c}$	ρ_i [g/cm ³]	ρ_o [g/cm ³]
Valores	13.33	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	10.0	1.0

Cuadro 3.4: Valores iniciales de la presión, velocidad, y densidad (ρ) dentro de la onda relativista ($p_i, v_{xi}, v_{yi}, \rho_i$) y del medio ambiente ($p_o, v_{xo}, v_{yo}, \rho_o$).

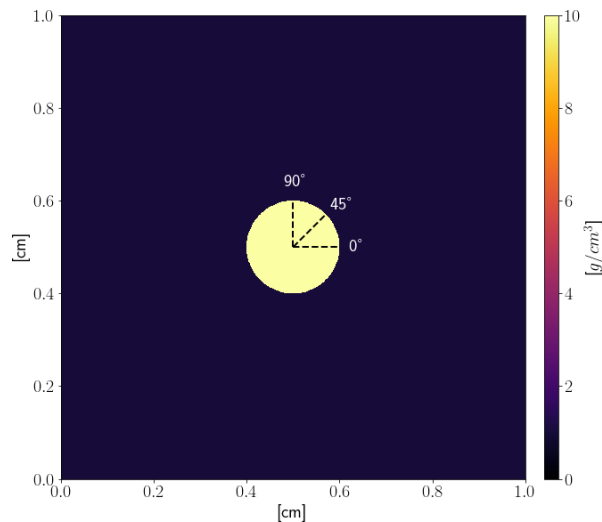


Figura 3.11: Las líneas punteadas indican los perfiles de densidad, velocidad y presión que se tomarán de los radios que son paralelos al eje x , perpendiculares (0° , 45° , 90°) y se compararán con las pruebas en 1 dimensión.

Al tiempo $t = 0$, el dominio estará dividido en 2 conjuntos, a los valores $(\rho, v_x, v_y$ y $p)$ que estén en la región menor al radio serán los valores internos $(\rho_i, v_{x_i}, v_{y_i}$ y $p_i)$ mientras que los valores que no estén delimitados por el radio serán los valores externos $(\rho_o, v_{x_o}, v_{y_o}$ y $p_o)$. Al ser $p_i > p_o$ y $\rho_i > \rho_o$, la onda se expandirá incrementando el radio, por lo que la región de adentro se vuelve más grande.

La Figura 3.11 muestra los perfiles de densidad (líneas negras punteadas), que se tomarán de la onda de choque en 2D, para poder comparar con los resultados de las pruebas unidimensionales, así como la analítica. En la Figura 3.12 muestra un mapa de densidades en el cual se ve la evolución de la onda. En el panel de arriba a la izquierda muestra el estado inicial al tiempo $t = 0$ s, el panel de arriba a la derecha muestra su estado al tiempo $t = 0.2$ s y el panel de abajo muestra su estado para $t = 0.4$ s.

Para mostrar que la solución bidimensional es la misma independientemente de la dirección del perfil radial, se compararon los perfiles radiales tomados en distintas direcciones. En la Figura 3.13 se muestran los perfiles de densidad (arriba, a la izquierda), velocidad (arriba a la derecha), y presión (abajo) a 0° (i.e. sobre el eje X , línea roja), así como a 45° (línea punteada azul), y 90° (línea punteada verde). Los tres perfiles de la densidad muestran básicamente la misma estructura, esto es, una densidad $\rho \approx 10 \text{ g/cm}^3$ en $x \approx 0.2$ cm donde comienza a disminuir hasta $\rho \approx 1.5 \text{ g/cm}^3$ en $x \approx 0.6$ cm. Después comienza a subir hasta $\rho \approx 5 \text{ g/cm}^3$ para los perfiles de 90° y 0° , mientras que para el de 45° sube hasta 5.5 en el punto $x \approx 0.7$ cm. Después vuelve a disminuir a $\rho \approx 0 \text{ g/cm}^3$ en el punto $x \approx 0.8$ para los 3 perfiles radiales. Los perfiles de la velocidad también muestra la misma morfología independientemente de la dirección del perfil. En $x \approx 0.2$ cm la velocidad empieza a incrementar desde el reposo $v = 0$ hasta $v \approx 0.7c$ en $x \approx 0.6$ cm, esto aplica para los 3 perfi-

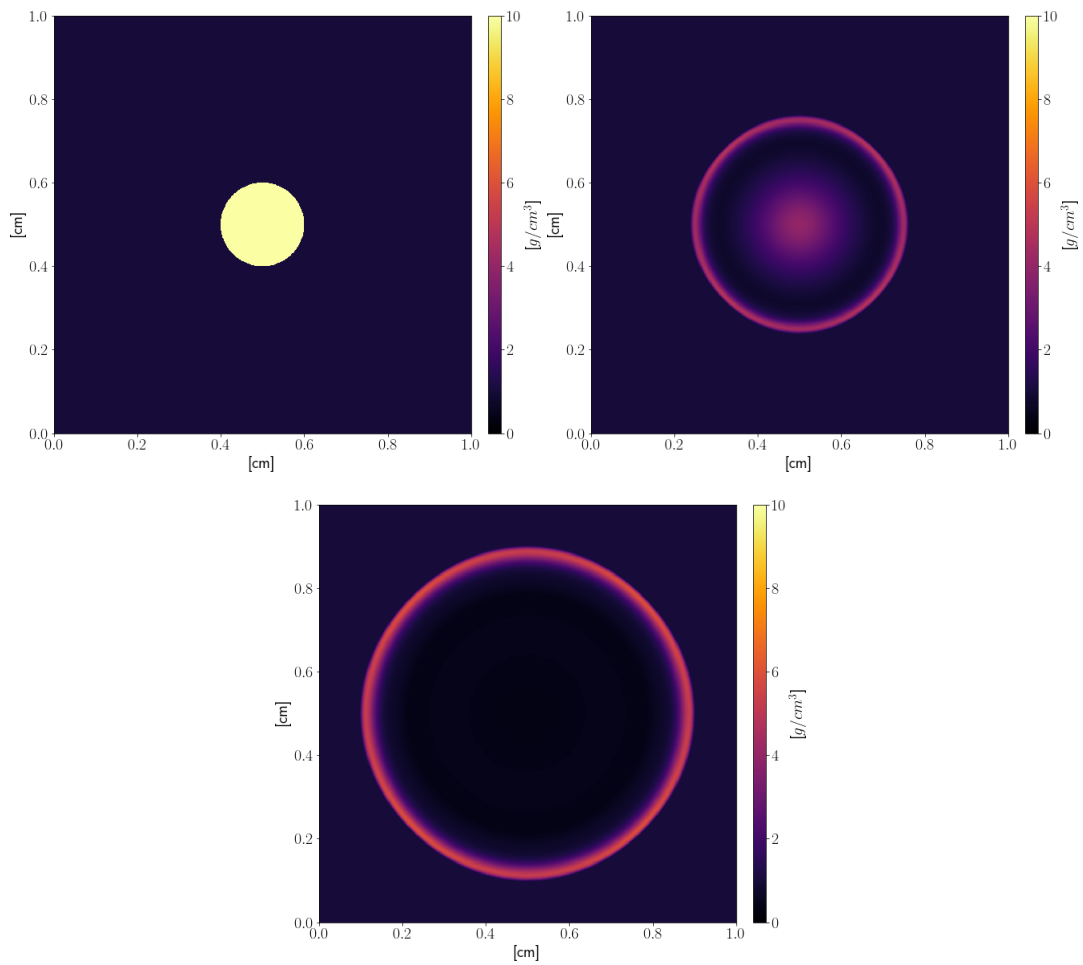


Figura 3.12: Explosión de la onda de choque en 2 dimensiones usando un mapa de calor donde muestra la evolución de la densidad. El panel de arriba a la izquierda muestra el tiempo inicial $t = 0$ s, el de arriba a la derecha al $t = 0.2$ s y el de abajo al tiempo $t = 0.4$ s.

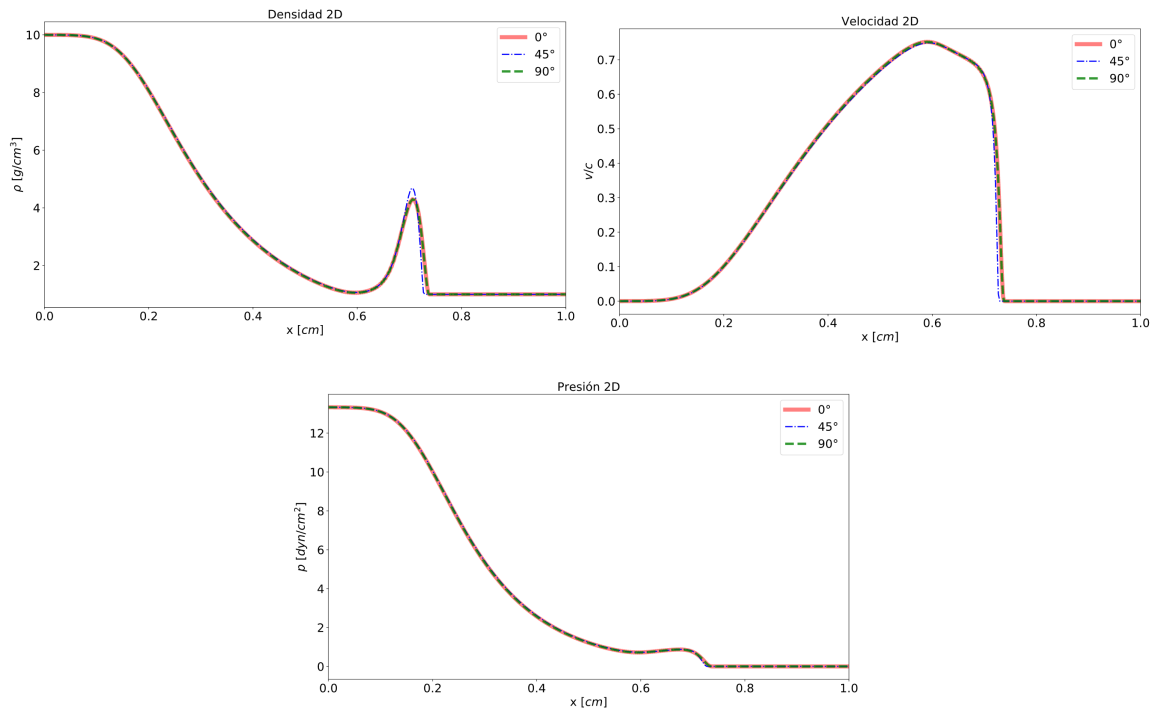


Figura 3.13: La figura muestra la comparación que hay entre los distintos perfiles de densidad al tiempo $t = 0.4$ s. El panel de arriba a la izquierda muestra el perfil a 0° (línea roja sólida), el de arriba a la derecha muestra a 90° (línea verde punteada) y el panel de abajo (línea azul de raya y punto) muestra a 45° .

les de velocidad. Después, la velocidad va decreciendo hasta $v \approx 0.62c$ en $x \approx 0.75$ cm para los perfiles de 0° y 90° , mientras que para el perfil de 45° lo hace en $x \approx 0.73$ cm. A partir de este punto la velocidad vuelve a cero. Los perfiles de la presión también se comportan de igual forma independientemente de la dirección del perfil. Para el punto $x \approx 0.18$ cm, la presión comienza a disminuir de $p = 13.33$ dyn/cm² hasta $p \approx 1$ dyn/cm² en $x \approx 0.7$ cm para los 3 perfiles. En $x \approx 0.71$ cm vuelve a disminuir a $p = 0$ dyn/cm² en $x \approx 0.74$ cm para los perfiles de 0° y 90° , mientras que para el perfil de 45° lo hace en $x \approx 0.73$ cm. Los perfiles de 0° y 90° de la densidad, velocidad y presión son idénticos. El perfil de 45° tiene un error máximo (comparado con los otros dos perfiles) del 0.04% para la densidad, de un 4.8% para la velocidad, y de 6.6% para la presión. Cabe señalar que estos errores máximos se presentan únicamente en el pico de la onda de choque, y en el resto del perfil el error es del 0%. Por lo tanto, al no haber una discrepancia grande en los valores de los 3 perfiles radiales, podemos ver que nuestro código relativista no cambia a pesar de la dirección que tengan los perfiles radiales de densidad, velocidad y presión.

En la Figura 3.14 se muestra la comparación entre la prueba unidimensional y la prueba bidimensional, que es la media de los 3 perfiles radiales que se discutieron anteriormente. El panel de arriba a la izquierda muestra la densidad, el de arriba a la derecha, la velocidad y el de abajo la presión. Para ambas pruebas, se mantienen sus valores de $\rho =$

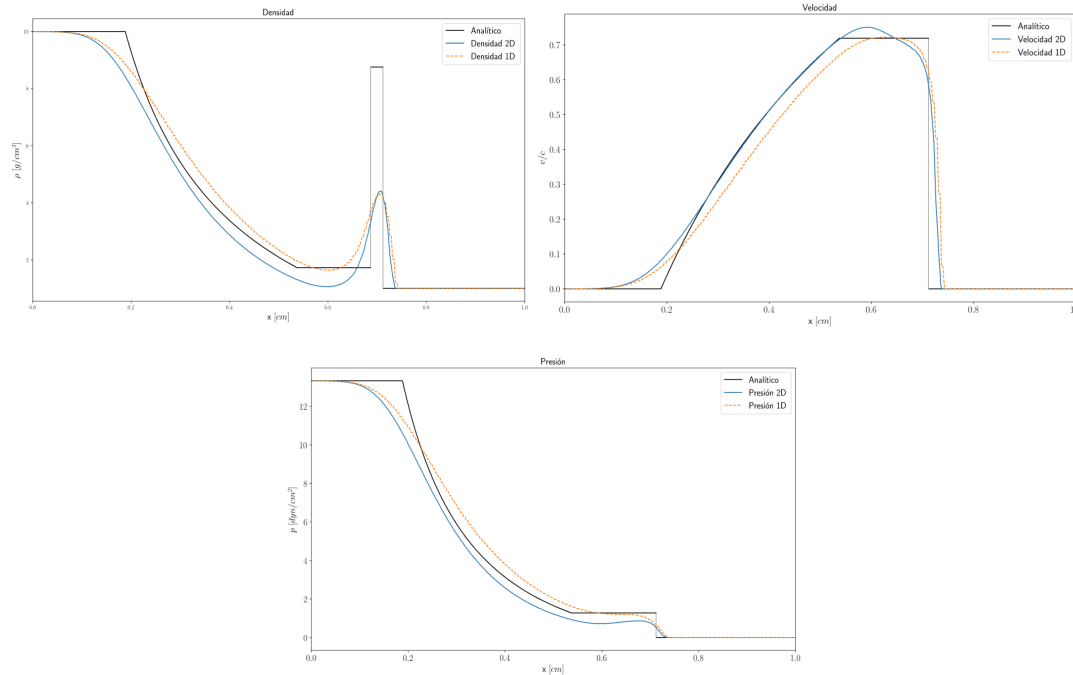


Figura 3.14: Comparación entre la media de los 3 perfiles radiales (línea sólida azul), la prueba unidimensional (línea de puntos rojos) y la analítica (línea negra sólida).

10 g/cm^3 y $p = 13.33 \text{ dyn/cm}^2$ luego, bajan sus valores en $x \approx 0.25 \text{ cm}$, mientras que la velocidad, la cual es nula, asciende. En el punto $x \approx 0.68 \text{ cm}$ la presión alcanza $p \approx 2.0 \text{ dyn/cm}^2$ y la densidad $\rho \approx 2.0 \text{ g/cm}^3$, mientras que la velocidad sube a $v \approx 0.75c$ en una dimensión. En 2 dimensiones la densidad baja hasta $\rho \approx 1.0 \text{ g/cm}^3$ y la presión, $p \approx 1.8 \text{ dyn/cm}^2$ mientras que la velocidad en $x \approx 0.68 \text{ cm}$ sube a $v \approx 0.8c$ y baja a $v \approx 0.7c$ en $x \approx 0.68 \text{ cm}$.

La densidad en 1D y 2D vuelve a subir en $x \approx 0.69 \text{ cm}$ y llega a $\rho \approx 5 \text{ g/cm}^3$ y se mantiene así hasta el punto $x \approx 0.7 \text{ cm}$ donde la densidad, así como la velocidad y presión, descienden sus valores a cero. Cabe señalar que la mayor diferencia que hay entre la 1D y 2D para la densidad es del 70%, mientras que para la velocidad es del 238% y la de la presión es del 79%. Al comparar los perfiles bidimensionales con el analítico, para la densidad se tiene un error promedio del 13%, para la velocidad del 12% y para la presión del 16% y errores máximos del 156%, 19% y 119%. Para el caso unidimensional con el analítico, el error medio para la ρ , v y p son 3%, 7% y 4% y error máximo 119%, 20% y 3% respectivamente. Al no haber tanta diferencia del resultado de los perfiles radiales bidimensionales con los perfiles unidimensionales y con el analítico, se puede concluir que el código relativista es válido en una y dos dimensiones.

Capítulo 4

Jets relativistas bidimensionales

En este capítulo se estudia la evolución de un jet 2D relativista (usando el módulo 2D HLL que se detalla en el capítulo 3) a través de medios con distinta densidad. La primera prueba consiste en estudiar el caso en que el jet atraviesa un medio constante y comparar los resultados con aquellos de Mignone *et al.* (2005). Se estudiaron los efectos que un medio que varía en función de la distancia produce en los jets relativistas. El jet se modela como un flujo cilíndrico con densidad ρ_j , presión p_j , y velocidad $v_j \simeq c$ (ver el cuadro 4.1 para más detalles). El índice adiabático fue $\Gamma = 5/3$, consistente con Mignone & Bodo (2005). Las densidades del medio ambiente de la primera prueba fueron constantes y luego variaron en función de x . Un jet de grosor Δy será inyectado en la frontera x_{min} a la mitad de la altura y_{max} (esto es $\frac{y_{max} \pm \Delta y}{2}$). El resto de la frontera de x_{min} así como las otras fronteras (x_{max} , y_{min} , y_{max}) tendrán condiciones a la frontera *outflow*. El dominio espacial fue $x, y \in [0, 40] \times [0, 20]$ con una resolución de 3200×1600 píxeles. Cabe señalar que el diámetro del jet será de $\Delta y = 80$ píxeles. El tiempo de integración total fue $t = 100$, y el parámetro de Courant fue $Co = 0.5$.

Parámetro	Descripción	valor
ρ_j	Densidad del jet	0.1
ρ_a	Densidad del medio ambiente	10
P_j	Presión interna del jet	0.01
P_a	Presión del medio ambiente	0.01
v_{xj}	Velocidad interna en el eje x del jet	0.99 c
v_{yj}	Velocidad interna en el eje y del jet	0.0 c
v_{xa}	Velocidad en el eje x del medio ambiente	0.0 c
v_{ya}	Velocidad en el eje y del medio ambiente	0.0 c
Co	Número de Courant	0.5

Cuadro 4.1: Valores iniciales de la densidad, velocidad y presión en el jet ($\rho_j, v_{xj}, v_{yj}, p_j$) en unidades adimensionales y del medio ambiente ($\rho_a, v_{xa}, v_{ya}, p_a$). El jet será relativista, con un dominio $x, y \in [0, 40] \times [0, 20]$ y un índice adiabático $\Gamma = 5/3$.

4.1. Jet 2D RHD en un medio ambiente constante

El jet tiene una densidad $\rho_j = 0.1$, una velocidad que solo cambia en el eje x de $v_{x_j} = 0.99c$, una presión $p_j = 0.01$ que se mueve a través de un medio en reposo y una densidad y presión constante, en el cual $\rho_a = 0.1$ y $P_a = 0.01$ es consistente con los valores que Mignone & Bodo (2005) utilizó. En la Figura 4.1 se muestra la evolución del jet a través del medio constante en mapas de densidad a los tiempos $t = 1$ (arriba a la izquierda), $t = 10$ (arriba a la derecha), $t = 20$ (abajo a la izquierda) y $t = 40$ (abajo a la derecha). En el tiempo $t = 1$, el jet apenas es visible y solo llega a $x \approx 1$. Cuando $t = 10$ la longitud del jet llega a $x \approx 6$ de longitud, las ondas de colimación se observan sobre $y=10$ y llegan a $x \approx 4$. Los isocontornos blancos delimitan el material menos denso del jet. El capullo se expande a 5 unidades de longitud, mientras que de ancho alcanza 4 unidades. Para el tiempo $t = 20$, el jet se expande a $x \approx 10$ unidades de longitud. El capullo mide 4 unidades de ancho a partir de $y \geq 10$, las ondas de colimación no cambian, mantienen su posición en $x \approx 4$ sobre $y = 10$, el jet se incrementa a 7 unidades de longitud. Para el tiempo $t = 40$, el jet incrementa su tamaño a $x \approx 21$ de longitud. El capullo sobrepasa las 10 unidades de ancho, es decir, sale del dominio. Las ondas de colimación siguen manteniendo el mismo tamaño en $x \approx 4$. Se que el capullo está compuesto de materia poco densa que el jet, donde alcanza valores mínimos de $\rho \approx 0.05$ y máximos de $\rho \approx 20$ en la parte externa del capullo. Cabe destacar que el jet conserva el mismo ancho y que la longitud del capullo crece en la misma proporción a la longitud del jet.

El jet del estudio de Mignone & Bodo (2005) utiliza un jet relativista con simetría axial en coordenadas cilíndricas. En este modelo, se usaron coordenadas cartesianas. Ellos usan una ecuación de estado ideal con $\Gamma = 5/3$, el dominio es $0 \leq r \leq 12$ y $0 \leq z \leq 35$ con una malla de 240×700 . Las condiciones de frontera son *outflow* en toda su frontera, excepto donde está la inyección. El número de Courant que usa es 0.5 y el tiempo de integración es hasta $t = 80$. Los valores del jet y su medio ambiente son los mismos que la del Cuadro 4.1. El jet que se usó en esta tesis tiene la misma ecuación de estado que se usó en Mignone & Bodo (2005), se integró en el mismo tiempo, y aunque son distintos sistemas de coordenadas, tienen el mismo dominio, así como las mismas condiciones de frontera. Se diferencian únicamente por la resolución, ya que el jet de este estudio tiene aproximadamente 3 veces más la resolución que la usada en Mignone & Bodo (2005).

En la Figura 4.2 se muestra la comparación entre los perfiles de densidad a $y = 10$ del jet al tiempo $t = 0$, donde no se muestra una onda; a $t = 5$ donde la onda se localiza en $x \approx 2$; a $t = 20$, la onda se localiza a $x \approx 8$; y $t = 50$, donde la onda se localiza en $x \approx 20$. El panel de arriba a la izquierda muestra la densidad, en donde se observa que para $x \approx 2, 8, 20$, la densidad alcanza un valor máximo de $\rho \approx 33$ a . En el panel de arriba a la derecha se muestra la velocidad, donde se puede ver que el jet mantiene una velocidad $v \approx 0.9c$ y decae en $x \approx 17.5$ para llegar a $v \approx 0$ en $x \approx 21$ a $t = 20, 50$ respectivamente. En el panel

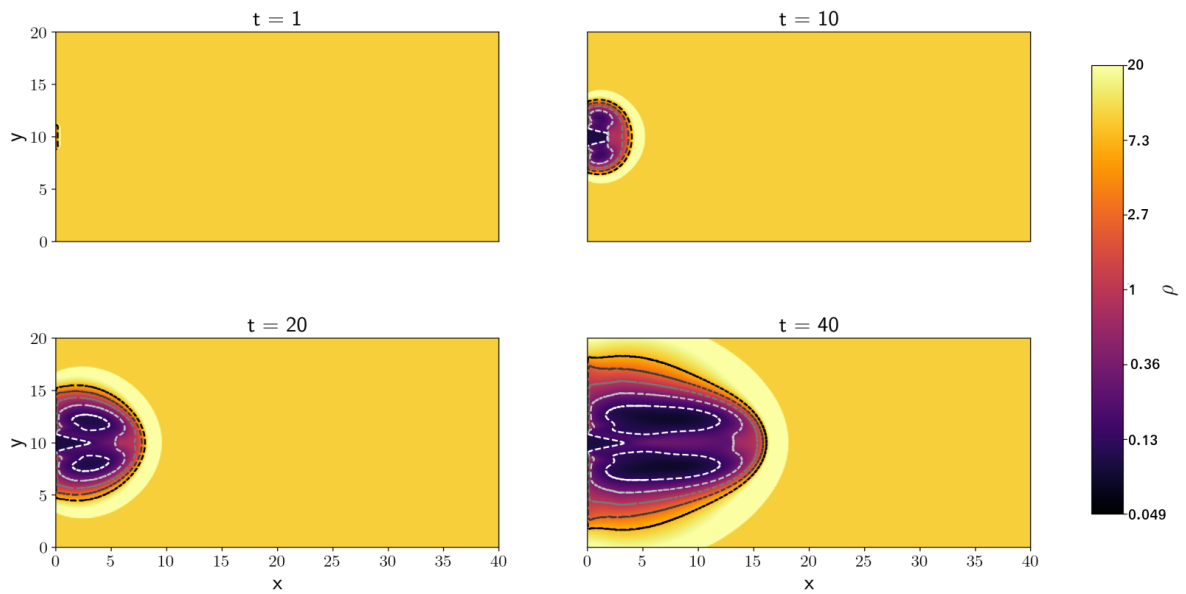


Figura 4.1: Mapas de densidad en los que se muestra la evolución del jet relativista con los valores del Cuadro 4.1. El panel de arriba a la izquierda muestra al tiempo $t = 1$, el de arriba a la derecha muestra al tiempo $t = 10$, el de abajo a la izquierda muestra al tiempo $t = 20$ y el de abajo al tiempo $t = 40$. También se emplearon isocontornos (líneas punteadas) que se componen de 5 niveles. En los cuales el nivel más bajo, que es blanco, corresponde a $\rho \approx 0.13$, blanco ligeramente grisáceo para $\rho \approx 0.36$, gris para $\rho \approx 1$, gris oscuro para $\rho \approx 2.7$ y el nivel más alto, que es negro, corresponde a $\rho \approx 7.3$.

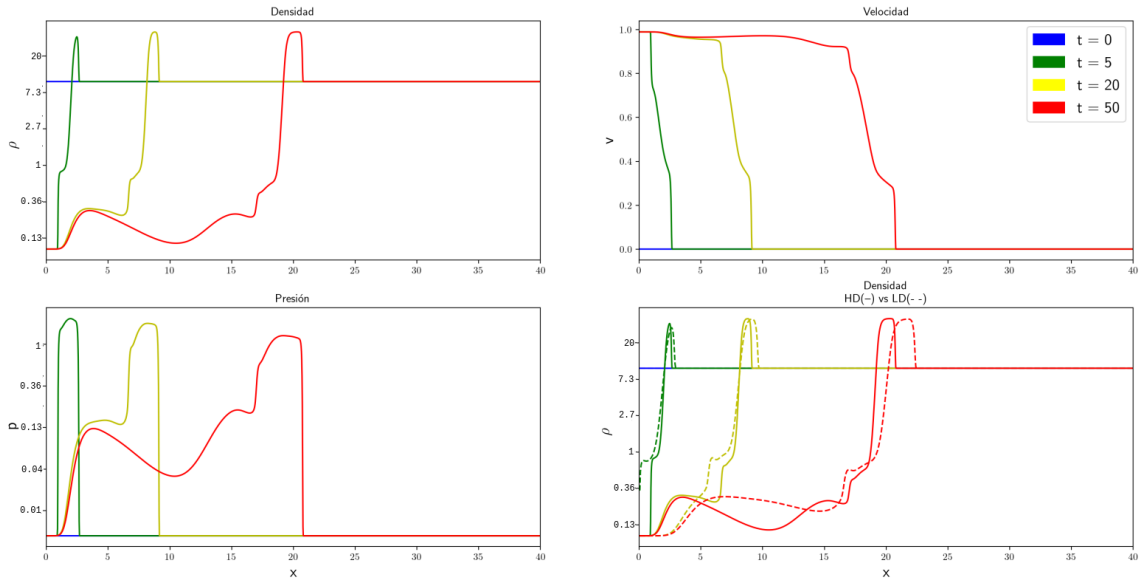


Figura 4.2: Perfiles de densidad, velocidad, presión y distintas resoluciones, similar a la Figura 3.13 a tiempos $t=0, 5, 20, 50$. El perfil es de $y = 10$. La densidad (arriba a la izquierda), velocidad (arriba a la derecha), la presión (abajo a la izquierda). En el panel de abajo a la derecha se comparan la densidad usando 2 distintas resoluciones. La de alta resolución (HD) es de 3200×1600 píxeles y la de baja resolución (LD) es de 1600×800 píxeles.

de abajo a la izquierda se muestra la presión, la cual se puede observar que es parecido a la gráfica de la densidad, ya que mantiene sus máximos en los puntos $x \approx 2, 8, 20$, pero también se observa que conforme avanza el tiempo los picos empiezan a decrecer, ya que para $t = 5$, $p \approx 1.6$; para $t = 20$, $p \approx 1.49$ y para $t = 50$, $p \approx 1.3$. Para el panel de abajo a la derecha, se hizo la misma comparación que el panel de la densidad, solo que esta vez se compararon distintas resoluciones: baja resolución "LD" (con 1600 píxeles en el eje X y 800 en el eje Y) y alta resolución "HD" (3200×1600), con lo que se puede observar que para mayor resolución el jet se vuelve ligeramente más rápido. En este panel se puede notar que los picos están desfasados conforme avanza el tiempo. Los efectos de la resolución son despreciables ya que la mayor diferencia, debida a la resolución, en la magnitud de los picos es relativamente pequeña (menor a 5%). Esta se presenta a $t=50$ y corresponde a $\frac{\rho_{alta} - \rho_{baja}}{\rho_{alta}} \approx 0.04$.

En la Figura 4.3 se muestran los resultados obtenidos en baja (1600×800 píxeles) y alta (3200×1600) resolución, a las mismas escalas de densidad, en comparación con los resultados de Mignone & Bodo (2005). La Figura muestra de izquierda a derecha las gráficas de Mignone & Bodo (2005) (izquierda), el modelo con baja resolución (medio) y el modelo con alta resolución (derecha). Los paneles de arriba muestran al tiempo $t = 40$, mientras que los de abajo al tiempo $t = 80$. Al enfocarse en los paneles de arriba, al tiempo $t = 40$, se puede observar que el jet de estudio de Mignone & Bodo (2005) tiene un largo de $x \approx 18$

unidades, mientras que el de baja resolución tiene un largo de 19 unidades y el jet de alta densidad tiene un largo de 19 unidades, por lo que podemos observar un error del 5% con baja resolución y del 0% con el de alta resolución. El capullo está compuesto de material de alta densidad que rodea al jet, su ancho se mantiene en aproximadamente 5 unidades. Los choques de colimación son más grandes en el estudio de Mignone & Bodo (2005) que en el de baja resolución, dado que se localizan en $x \approx 10$ y $x \approx 5$ respectivamente, una diferencia del 50%. Los choques de alta resolución se localizan en $x \approx 4$ lo que muestra una diferencia de más del 60% con el estudio de Mignone & Bodo (2005). Se observa también que el capullo de baja resolución mide más de 11 unidades de ancho para $y > 10$, mientras que para la resolución alta mide 9 unidades, lo que nos da un error, solo para la resolución alta del 33%. Tanto en el capullo de baja resolución como en el de alta resolución no se muestran turbulencias como en el estudio de Mignone & Bodo (2005), lo que da a entender que el código que fue desarrollado para esta tesis es más viscoso. Para los paneles de abajo, el tiempo ahora es $t = 80$, se puede observar que el capullo sobresale del dominio para los 3 casos que estamos comparando. Las ondas de colimación para alta como baja resolución están en $x = 3$ mientras que las de Mignone & Bodo (2005) se siguen manteniendo en $x = 6$, lo que nos sigue dando un error del 50%, por lo que estas no dependen del tiempo. El jet para el estudio de Mignone & Bodo (2005) mide $x \approx 35$ de largo, para el jet de resolución baja mide $x \approx 32$ unidades y para el de resolución alta $x \approx 31$ unidades, lo que nos da un error del 9% para resolución baja y con el de resolución alta un error del 11%. Otra diferencia fue que el jet de alta resolución está más comprimido, ya que tiene un grosor aproximado de 1.0 unidades, mientras que el de baja resolución tiene una resolución aproximada de 1.4 unidades, aunque no está tan comprimido como el jet mostrado en el estudio de Mignone & Bodo (2005). Así también no se puede encontrar, tanto para baja como alta resolución, las turbulencias generadas en el jet de Mignone & Bodo (2005), pero también no se pueden comparar las densidades del mismo debido a que no presenta los valores.

4.2. Jet 2D RHD en un medio ambiente variable

Esta sección estudia los efectos de un medio el cual, varía en función de la distancia, $\rho = \rho(x)$, produce en un jet. La densidad del medio ambiente variará en función del eje, es decir, se modelará como:

$$\rho(x) \propto \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \rho(x) \propto \frac{1}{x^2} \quad (4.1)$$

donde ρ_a es el valor mostrado en el Cuadro 4.1.

La Figura 4.4 muestra los perfiles de densidad, velocidad y presión, es decir, solo mostrará los valores que estén sobre $y = 10$ para el caso cuando $\rho \propto \frac{1}{x}$. En el panel de arriba

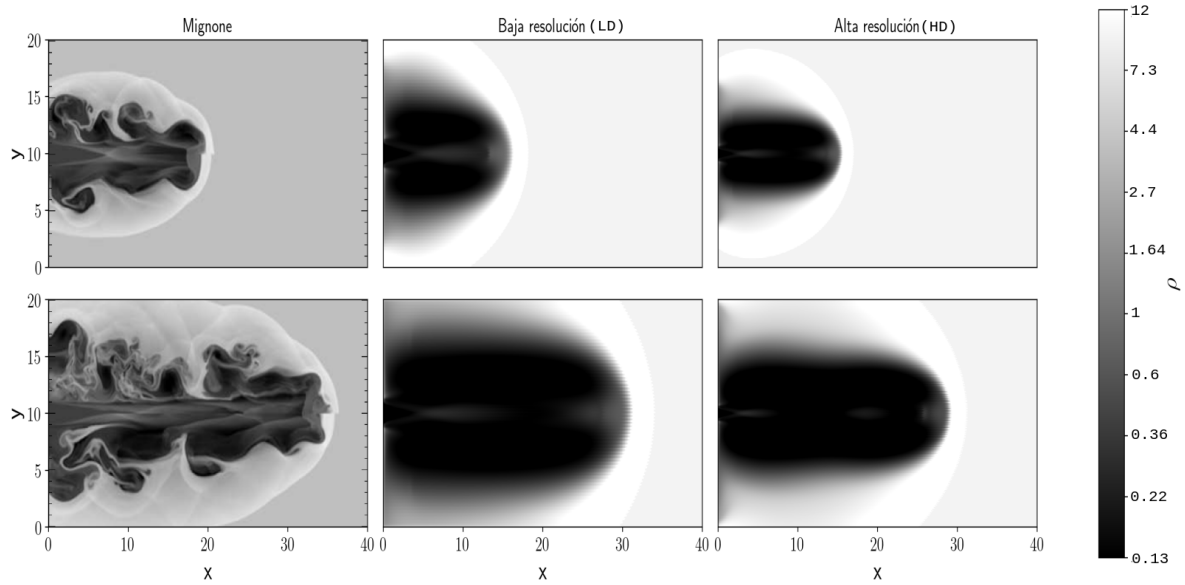


Figura 4.3: Mapas de densidad en los que se compara el jet relativista con los valores del Cuadro 4.1. La Figura está dividida en 3 columnas. La de la izquierda muestra el estudio de Mignone & Bodo (2005), la de en medio el jet a baja resolución (1600x800 píxeles), y la de la derecha el jet a alta resolución (3200x1600 píxeles).

a la izquierda muestra la densidad. El de arriba a la derecha, la velocidad. El de abajo a la izquierda la presión y el de abajo a la derecha muestra la comparación entre uno de mayor resolución con uno de baja resolución. Al tiempo $t = 0$, al no haber una inyección del jet, únicamente la densidad decae como $\frac{1}{x}$. Al tiempo $t = 5$, la densidad, en $x = 3$ tiene un máximo local que llega a $\rho \approx 33$, en $t = 20$, el pico se sitúa en $x \approx 12$ con un máximo de $\rho \approx 16.5$ y para el tiempo $t = 50$, el pico se sitúa en $x \approx 33$ con $\rho \approx 3.6$ por lo que los máximos disminuyen en función de la densidad del medio ambiente. La velocidad tiene un máximo en $x \approx 0.2$, donde alcanza $v \approx 0.6$. Para los tiempos $t = 20, 50$ ya no presenta máximos, sino que decae rápidamente en las posiciones $x \approx 8, 25$ respectivamente. La presión tiene un valor máximo al tiempo $t = 5$ con $p \approx 1.64$, aunque si un cambio menos abrupto en $x = 3$. En los tiempos $t = 20, 50$ los máximos globales se sitúan en $x \approx 12$ y en $x \approx 33$ con $p \approx 1$ y $p \approx 0.6$ respectivamente. En el panel inferior derecho, al comparar la densidad en resoluciones de 3200x1600 y 1600x800, notamos que a diferencia del medio constante, no hay un desfase tan grande. Los efectos de la resolución en este caso también son pequeños. Lo anterior se debe a que la mayor diferencia, debida a la resolución, en la magnitud de los picos es menor a 10% ($\frac{\rho_{alta} - \rho_{baja}}{\rho_{alta}} \approx 0.04$ a $t=50$).

En la Figura 4.5 se muestra la densidad de medio ambiente que decae como $\rho \propto \frac{1}{x^2}$. Aquí podemos ver que los picos de la densidad están en $x = 3, 10, 33$ con la densidad $\rho \approx 54, 10, 7.3$, respectivamente. En la velocidad podemos observar el frente de choque de la onda que se ubican en $x \approx 3, 13, 37$ con los valores de velocidad $v \approx 0.42, 0.58, 0.60$

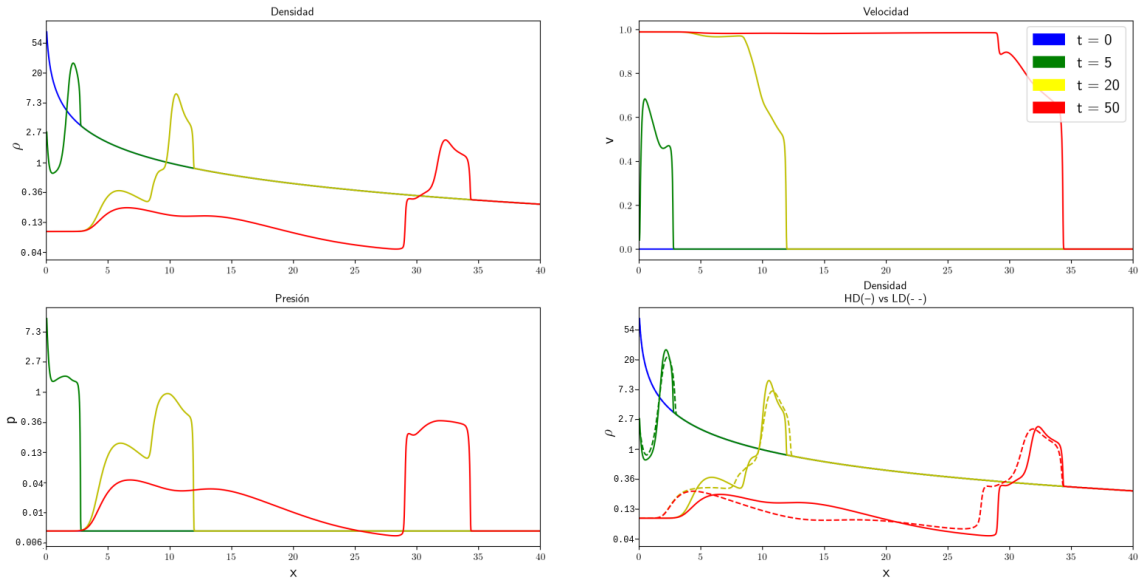


Figura 4.4: Perfiles de densidad, velocidad, presión y distintas resoluciones, similar a la Figura 3.13 para un perfil de densidad que varía en función de la distancia como $\rho \propto \frac{1}{x}$ a tiempos $t=0, 5, 20, 50$. El perfil es de $y = 10$. La densidad (arriba a la izquierda), velocidad (arriba a la derecha), la presión (abajo a la izquierda). En el panel de abajo a la derecha se comparan la densidad usando 2 distintas resoluciones. La de alta resolución es de 3200×1600 y la de baja resolución es de 1600×800 .

respectivamente. Para más detalles véase el Cuadro 4.2. En el caso de la presión, al tiempo $t = 5$, desciende rápidamente en $x \approx 0.5$ de $p \approx 10$ a $p \approx 2.7$. En el tiempo $t = 20$, la presión tiene un valor máximo en $x \approx 10$, donde mantiene un valor de $p \approx e^2 \approx 7.3$. Para el tiempo $t = 50$ la presión desciende exponencialmente del punto $x \approx 28$ donde $p \approx e^{-5} \approx 0.006$. Al comparar las resoluciones de 1600×800 con la de 800×400 se vuelve a ver un desfase. Los efectos de la resolución en este caso deben ser tomados en cuenta. Lo anterior se debe a que la mayor diferencia, debida a la resolución, en la magnitud de los picos es mayor al 60% ($\frac{\rho_{alta} - \rho_{baja}}{\rho_{alta}} \approx 0.63$ a $t=50$). Por ello, si se deseara estudiar un jet relativista a través de un medio que disminuye como $1/x^2$, o $1/r^2$ es necesario hacer estudios de convergencia para determinar la resolución necesaria para que no influya en los resultados.

En resumen, los picos de la densidad y presión son en general más pequeños que los mostrados en donde la densidad del medio es constante, pero también recorren mayor distancia que los anteriormente mencionados. En cambio, para el caso en que la densidad decae como $\frac{1}{x^2}$, los picos son mayores, pero recorren menos distancia que el medio anteriormente mencionado.

Conforme disminuye más rápidamente en función de la distancia x , se vuelve más rápido. En la Figura 4.6 se muestra la comparación que hay cuando la densidad del medio ambiente es constante ($\rho \propto \rho_a$), cuando varía inversamente lineal ($\rho \propto x^{-1}$) y cuando va-

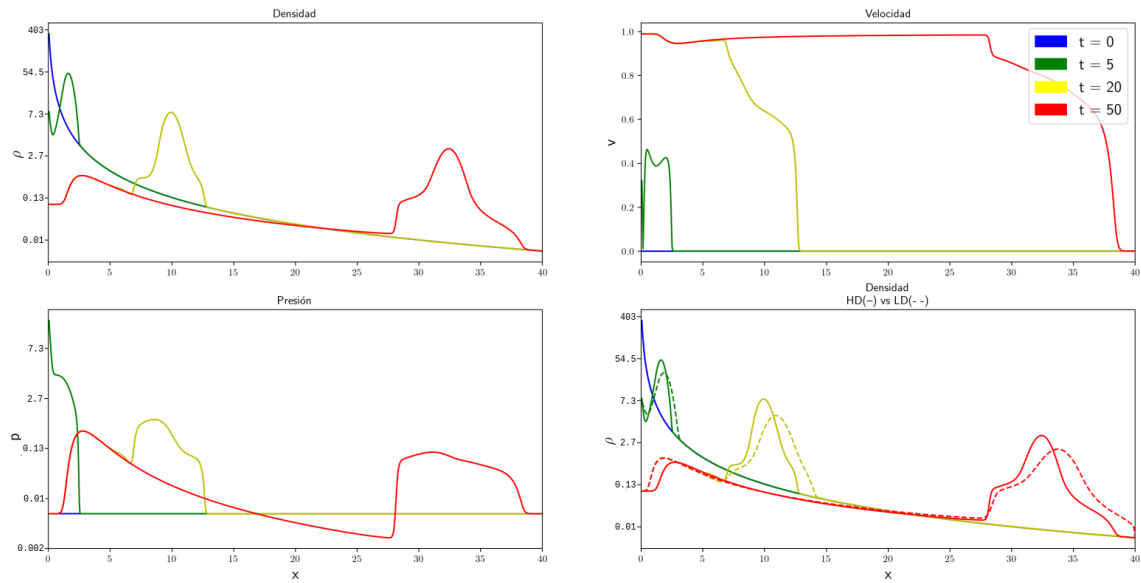


Figura 4.5: Perfiles de densidad, velocidad, presión y distintas resoluciones, similar a la Figura 3.13 para un perfil de densidad que varía en función de la distancia como $\rho \propto \frac{1}{x^2}$ a tiempos $t = 0, 5, 20, 50$. El perfil es de $y = 10$. La densidad (arriba a la izquierda), velocidad (arriba a la derecha), la presión (abajo a la izquierda). En el panel de abajo a la derecha se comparan la densidad usando 2 distintas resoluciones. La de alta resolución es de 3200×1600 y la de baja resolución es de 1600×800 .

t	$\rho = \rho_a$				$\rho_a \propto x^{-1}$				$\rho_a \propto x^{-2}$			
	x_{fch}	ρ_{fch}	p_{fch}	v_{fch}	x_{fch}	ρ_{fch}	p_{fch}	v_{fch}	x_{fch}	ρ_{fch}	p_{fch}	v_{fch}
5	3	3.5	0.6	0.38	3	3.5	0.5	0.4	3	4	0.8	0.42
20	9	3.5	0.6	0.4	12	2.6	0	0.55	13	2	-1.8	0.5
50	21	3.5	0.5	0.6	34	1.1	-0.5	0.64	37	1.8	-2.0	0.64

Cuadro 4.2: Valores de densidad, presión y velocidad que se muestran en el frente de choque de la onda del jet. Los valores obtenidos fueron tomados de las Figuras 4.2, 4.4 y 4.5.

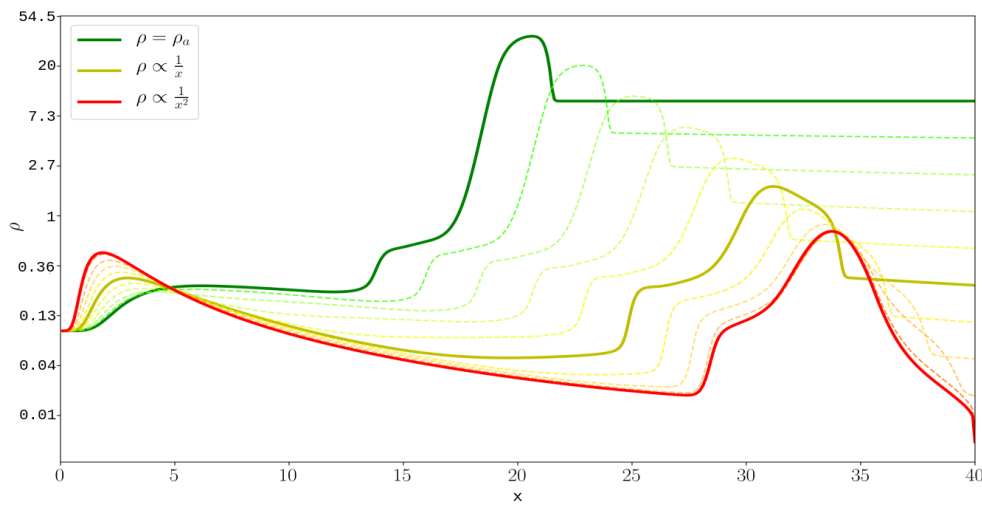


Figura 4.6: Gráfica de comparación de la posición contra el logaritmo de la densidad donde el medio ambiente es constante $\rho \propto k$ (verde), varía inversamente lineal $\rho \propto x^{-1}$ (amarillo) y varía inversamente cuadrático $\rho \propto x^{-2}$ (rojo) al tiempo $t = 50$. Las líneas punteadas muestran los valores exponenciales entre 0 y 1 y entre 1 y 2, es decir, que la densidad descenderá como $x^0, x^{-0.2}, \dots, x^{-0.8}, x^{-1}, x^{-1.2}, \dots, x^{-2}$.

ría inversamente cuadrático ($\rho \propto x^{-2}$) al tiempo $t = 50$. Las líneas punteadas muestran los exponentes intermedios entre los valores de 0, 1 y 2 en pasos de 0.2, es decir, la densidad del medio ambiente descenderá como $x^0, x^{-0.2}, \dots, x^{-0.8}, x^{-1}, x^{-1.2}, \dots, x^{-2}$. El primer valor máximo que acentúa más en el decaimiento inversamente cuadrático que se localiza en $x \approx 2$ y tiene un valor $\rho \approx 0.6$. Mientras para el decaimiento inversamente lineal se localiza en $x \approx 3$ y su valor es $\rho \approx 0.3$. Para el caso constante, no remarca un máximo en especial. El segundo valor máximo, para el caso constante, se localiza en $x \approx 20$ y alcanza $\rho \approx 33$, conforme se aumente el exponente, el valor máximo se desplaza, así como su disminución de la densidad, ya que para el caso inversamente lineal el máximo se localiza en $x \approx 32$ con $\rho \approx 1$ y para el caso inversamente cuadrático el valor máximo se localizó en $x \approx 34$ con $\rho \approx 0.36$. Podemos observar que el primer valor máximo de la gráfica, el medio que varía como x^{-2} tiene un valor mayor que el del medio constante, mientras que para el segundo valor máximo se invierte y el medio constante tiene un valor mayor que el del medio que varía como x^{-2} . La velocidad de la onda aumenta un 60% para medio inversamente lineal en correspondencia con el medio constante y un 6% para el medio inversamente cuadrático en correspondencia con el inversamente lineal.

Capítulo 5

Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis fue construir un código numérico hidrodinámico que fuera tanto newtoniano como relativista utilizando distintos métodos numéricos. Para verificar que el código funcionaba correctamente, dicho código debía ser capaz de reproducir pruebas numéricas cuya solución ya era conocida previamente (ya fuera por medio de modelos analíticos o simulaciones numéricas previas de otros grupos de investigación). En específico, se verificó que el código numérico reprodujera pruebas unidimensionales newtonianas y relativistas (tubos de choques), y pruebas bidimensionales newtonianas (por ejemplo Sedov-Taylor) y relativistas. Además, se estudió la evolución de un jet bidimensional con velocidad relativista a través de un medio variable (estático). Para lo anterior, primero se reprodujeron los resultados de un jet en un medio constante de Mignone & Bodo (2005), y segundo, se estudió cómo es afectada la evolución del jet relativista en un medio variable (i.e. un medio cuya densidad disminuye en función de la distancia como $\rho \propto R^{-1}$ y $\rho \propto R^{-2}$).

En el capítulo 2, se detalla la física y detalles numéricos que se emplean en el código numérico creado para el desarrollo de esta tesis. En específico, en las secciones 2.1 y 2.1.1 se detallan las ecuaciones de la hidrodinámica, así como los distintos métodos numéricos empleados para su resolución. Los métodos que se usaron fueron el de Friederich-Lax y el de Haar-Lax-van Leer. Además, dado que el sistema de ecuaciones de la hidrodinámica e hidrodinámica relativista están acopladas, se detalla como se les desacopla y se obtiene la densidad, velocidades y densidad de energía para un paso temporal subsecuente.

En el capítulo 3, se muestran las pruebas numéricas, hidrodinámicas e hidrodinámicas relativistas en una y dos dimensiones. A continuación se menciona cada una así como sus resultados principales:

- En la sección 3.1.1 se muestran las pruebas unidimensionales en el régimen newtoniano. Estas consistieron en resolver el problema del tubo de Sod, esto es, analizar la evolución de dos fluidos con distinta densidad, velocidad y presión que inicialmente estaban separados en una posición determinada. Cabe señalar que en estas

pruebas se analizaron las diferencias que se tienen al utilizar el método de Lax o el de HLL. Para el caso donde se tienen distintas densidades (y las presiones y las velocidades son iguales) tanto el método de Lax como el método de HLL son indistintos y se reproduce la solución analítica. En este caso, el método de Lax resultó ser computacionalmente más rápido que el de HLL. Para el caso en donde ahora las velocidades son distintas y las densidades y presiones son iguales, también se reprodujo la solución analítica indistintamente del método que se utilizara. El método de Lax resultó ser notoriamente más rápido que HLL por lo que para el régimen unidimensional y para velocidades newtonianas, es recomendable usar este método.

- En la sección 3.1.2 se muestran las pruebas unidimensionales en el régimen relativista. Estas consistieron en verificar que en los tubos de Sod, en donde los fluidos evolucionaron con velocidades cercanas a la de la luz, se reprodujeran correctamente con el módulo relativista. Para ambos métodos se puede observar que se tienen errores cuando se aproximan a los valores discontinuos, principalmente en las discontinuidades de contacto (superficies que separan zonas de diferente densidad y temperatura). El método HLL siempre es consistente con los resultados esperados. Mientras tanto, para ciertos casos relativistas el método de Lax falla sin importar la resolución que se utilice.
- En la sección 2.6 se muestra la prueba bidimensional newtoniana. En específico, se estudió el problema de Sedov-Taylor en dos dimensiones. Este problema consiste en resolver una onda de choque con ciertos valores de densidad y energía dentro de un medio ambiente con distintos parámetros. El código tuvo éxito, ya que el crecimiento fue de $r(t) \propto t^{0.42}$ lo cual es muy parecido al valor analítico mostrado en la sección 2.6 para dos dimensiones.
- En la sección 3.2.2 se estudió una onda de choque bidimensional y relativista. Para lo anterior se tomó el mismo problema del tubo de Sod relativista en una dimensión y se expandió a dos dimensiones. Se verificó que se obtiene el mismo resultado independiente de la dirección del perfil radial (sobre el eje X o sobre el eje Y o a 45 grados). Además, se verificó que el perfil radial de la onda bidimensional es consistente con aquel de una onda unidimensional y con su solución analítica correspondiente.

En el capítulo 4, se muestra la evolución de un jet bidimensional y relativista a través de distintos medios.

- En la sección 4.1 se estudió la evolución del jet en un medio constante y se obtuvieron resultados consistentes con aquellos de Mignone & Bodo (2005). El jet de nuestro estudio tiene básicamente la misma morfología (velocidad del sistema, grosor del jet, ondas de colimación, grosor del capullo), sin embargo, también resultó

ser más viscoso (el capullo obtenido es más grueso y se tiene menos turbulencia dentro del mismo). Dicha diferencia disminuye conforme se incrementa la resolución del código numérico creado para esta tesis. Además, en el estudio Mignone & Bodo (2005) no se detallan todas las características del jet, por ende no podemos compararlo perfectamente debido a la falta de mención de los valores de la densidad. Al comparar las resoluciones, se puede notar que entre más resolución se use el jet, es ligeramente más lento.

- En la sección 4.2 se estudió la evolución del jet en un medio que varía en función de la distancia como $\rho \propto R^{-1}$ y $\rho \propto R^{-2}$. Se encontró que conforme el medio decae más rápidamente, más veloz se propaga el jet en dicho medio.

Finalmente, es preciso mencionar las mejoras que se podrían hacer al código creado para esta tesis. Se pueden hacer modificaciones para mejorar considerablemente el tiempo de cómputo, ya que el código en su versión actual gasta muchos recursos. Las posibles mejoras se listan a continuación:

- **Implementación de otro solucionador de Riemann:** A pesar de que HLL, es un algoritmo robusto y fácil de implementar, este promedia la solución completa al problema de Riemann en un solo estado y, por lo tanto, carece de la capacidad para resolver ondas intermedias (tales como las ondas de contacto). Se recomienda entonces incorporar otros métodos que tomen en cuenta más ondas (por ejemplo el método de HLLC).
- **Implementación de una malla AMR:** Tomando en cuenta que las zonas que requieren una resolución muy fina son las zonas de ondas de contacto (mientras el resto del problema no requiere de tanta resolución), y que estar resolviendo todo el dominio computacional con una resolución sumamente fina genera un alto costo computacional, es necesaria la implementación de una malla cuya resolución se adapte al problema (i.e. resolución muy fina en donde haya discontinuidades, ondas de choques, turbulencia; y resolución poco fina en el resto del dominio).
- **Computo en paralelo:** Algo que realmente podría hacer más rápido el código es hacerlo paralelo, es decir, que se puedan hacer varios procesos al mismo tiempo y no, necesariamente hacerlos secuencialmente y poder adaptarlo a la malla que generamos.
- **Paradigma:** Si bien Fortran es una gran herramienta para el cómputo científico, es difícil darle mantenimiento al mismo programa, ya que tiene un paradigma imperativo, por lo que usar un paradigma orientado a objetos podría facilitar el mejoramiento del código implementando las anteriores características ya mencionadas.

Apéndice A

Código

El programa está escrito en lenguaje FORTRAN se compone de un módulo principal el cual está compuesto de un programa principal y este a su vez llamará a varias subrutinas:

- **initconds:** Esta subrutina calculará los valores iniciales que le demos al programa.
- **output:** Devuelve un archivo con los datos que se calculan con el método de Lax.
- **Courant:** Calcula el paso temporal.
- **ulax:** Calcula el paso siguiente de las variables conservadas.
- **boundaries:** En esta parte puedes definir las fronteras a utilizar como outflow o las condiciones para las del jet.
- **fluxes:** Cálculo de los flujos.

Al usar las ecuaciones hidrodinámicas relativistas, se agregan 2 subrutinas más:

- **uprim:** Este módulo es agregado para poder desacoplar las variables conservadas.
- **newraph:** Calcula el método de Newton-Raphson será de gran utilidad en el desacoplamiento de las variables conservadas y así obtener nuestras primitivas.

```
1 do i=0,nx+1
2   do j=0,ny+1
3
4     x=float(i)*dx      ! obtain the position x_i
5     y=float(j)*dy      ! obtain the position y_j
6     rad=sqrt((x-xc)**2+(y-yc)**2)
7
8     if (rad < 0.1) then
9
10      lorin=1/sqrt(1-(vxin**2+vyin**2))
```

```

11 hin=1.+gamma/(gamma-1.)*pin/rhoin
12
13 u(1,i,j)=rhoin*lorin
14 u(2,i,j)=rhoin*vxin*lorin**2*hin
15 u(3,i,j)=rhoin*vyin*lorin**2*hin
16 u(4,i,j)=rhoin*lorin**2*hin-pin
17
18 else
19
20 lorout=1./sqrt(1.-(vxout**2+vyout**2))
21 hout=1.+gamma/(gamma-1.)*pout/rhoout
22
23 u(1,i,j)=rhoout*lorout
24 u(2,i,j)=rhoout*vxout*lorout**2*hout
25 u(3,i,j)=rhoout*vyout*lorout**2*hout
26 u(4,i,j)=rhoout*lorout**2*hout-pout

```

y para los fluidos en la subrutina de fluxes.

```

1 f(1,i,j)=rho*vx*lor
2 f(2,i,j)=rho*vx*vx*lor**2*h+P
3 f(3,i,j)=rho*vx*vy*lor**2*h
4 f(4,i,j)=rho*vx*lor**2*h
5
6 g(1,i,j)=rho*vy*lor
7 g(2,i,j)=rho*vx*vy*lor**2*h
8 g(3,i,j)=rho*vy*vy*lor**2*h+P
9 g(4,i,j)=rho*vy*lor**2*h

```

Como el código es una iteración, solo la primera vez que itere estaremos bien, pero, al siguiente bucle saldrá mal debido a que nuestros resultados nos están arrojando en principio las variables conservadas, y lo que se requiere es obtener las primitivas.

A.1. Condición inicial

En la subrutina *initconds* se calcularán las condiciones iniciales, tomando los valores de los parámetros del módulo de *globals*, que en este caso son: la densidad (ρ), las velocidades tanto en x como en y (v_x, v_y), la presión (p) y Γ . Con estas constantes dadas se calcularán nuestras variables conservadas.

```

1! =====
2! In this module we set the initial condition
3! -----
4  subroutine initconds(time, tprint, itprint)
5  use globals
6  implicit none

```

```

7   real, intent(out) :: time, tprint
8   integer, intent(out) :: itprint
9   integer :: i, j
10  real :: x, y, rad
11
12  -----
13! For the 2D circular blast:
14! u(1,i,j) = rho(i,j)
15! u(2,i,j) = vx(i,j)
16! u(3,i,j) = vy(i,j)
17! u(4,i,j) = etot(i,j) = eint + ekin = P/(gamma-1)
18  -----
19  do i=0,nx+1
20    do j=0,ny+1
21      x=float(i)*dx      ! obtain the position $x_i$
22      y=float(j)*dy      ! obtain the position $y_j$
23      rad=sqrt((x-xc)**2+(y-yc)**2)
24
25      if (rad < 0.3) then
26        u(1,i,j)=rhoin
27        u(2,i,j)=rhoin*vxin
28        u(3,i,j)=rhoin*vyin
29        u(4,i,j)=pin/(gamma-1.)+0.5*u(2,i,j)*u(2,i,j)/u(1,i,j) + 0.5/u(1,i,j)*u
(3,i,j)*u(3,i,j)
30      else
31        u(1,i,j)=rhoout
32        u(2,i,j)=rhoout*vxout
33        u(3,i,j)=rhoout*vyout
34        u(4,i,j)=pout/(gamma-1.) + 0.5/u(1,i,j)*u(2,i,j)*u(2,i,j) + 0.5/u(1,i,j)
*u(3,i,j)*u(3,i,j)
35
36      end if
37
38    end do
39  end do
40
41  -----
42! end of the 2D circular blast initial condition
43! reset the counters and time to 0
44  -----
45  time=0
46  tprint=0
47  itprint=0
48
49  return
50  end subroutine initconds

```



```

51! -----
52! end of the init condition module
53! =====

```

En esta parte dan los valores iniciales para nuestra malla tanto en x como en y en el tiempo

$t = 0$

A.2. Condición de Courant

Esta parte del código tiene que ver con los incrementos Δt , los cuales se pueden obtener en este módulo, para poder calcularlos tenemos que tener en cuenta la convergencia y la estabilidad de nuestras ecuaciones diferenciales parciales (ecuación 2.8). La condición de convergencia establece que la solución de la ecuación numérica se aproxima a la solución con ecuación diferencial parcial original si todos los intervalos finitos tienden a cero, una condición necesaria para la convergencia es que los errores, por ejemplo, los debidos al redondeo, no se incrementen con en tiempo. Esta es la llamada la condición de estabilidad. Es una condición tan importante que implica ciertas restricciones al tamaño del paso de tiempo en un proceso explícito. Un análisis de estabilidad para esquemas explícitos a partir de la teoría de las características para soluciones continuas lleva a la conclusión que dichos esquemas, para ser estables, deben cumplir la condición de Courant, que es:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u + C} \quad (\text{A.1})$$

donde C es el número de Courant y nos limita a que nuestros Δt no sean tan grandes. Para mas detalles consulte Toro (1997)

```

1! =====
2! CFL criterium module
3! -----
4   subroutine courant(dt)
5   use globals
6   implicit none
7   real, intent(out) :: dt
8   real :: rho, vx, vy, P, cs
9   integer :: i, j
10
11! -----
12! Calculate the CFL criterium
13! -----
14   dt=1E30
15   do i=0,nx+1
16     do j=0,ny+1
17       rho=u(1,i,j)

```

```
18      vx=u(2,i,j)/rho
19      vy=u(3,i,j)/rho
20      P=(u(4,i,j)-0.5*rho*(vx**2+vy**2))*(gamma-1.)
21      cs=sqrt(gamma*P/rho) !Speed of sound
22      dt=min( dt,Co*dx/(abs(vx)+cs) )
23      dt=min( dt,Co*dy/(abs(vy)+cs) )
24
25      end do
26  end do
27
28  return
29  end subroutine courant
```


Apéndice B

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera se usarán para obtener los valores de nuestras variables conservadas en los extremos de nuestra malla de puntos, con el fin de evitar errores numéricos, las condiciones de frontera que generalmente se usan son de cuatro tipos, las de *outflow*, las de *reflexión*, las *periódicas* y las de *jet*. Las del tipo *outflow* serán aquellas en las que una vez los valores sobre la malla (ondas) queden fuera de esta, ya no sabremos que pasó después con estos datos, las de *reflexión* serán aquellas en las que nuestros datos en vez de salir se reflejarán y las *periódicas* serán parecidas a las de *reflexión* solo que en vez de reflejarse las ondas, estas entrarán del lado contrario de donde salieron y las de tipo *jet*, será para que de un lado de nuestra malla salga una fuente de partículas.

Para entender lo que son las condiciones de frontera, vamos a suponer una malla de puntos, esta malla tendrá $n + 2$ filas y $m + 2$ columnas, para identificar los puntos vamos a indexarlos empezando desde el 0 hasta $n + 1$ en el caso de las filas y de 0 hasta $m + 1$ para el de las columnas.

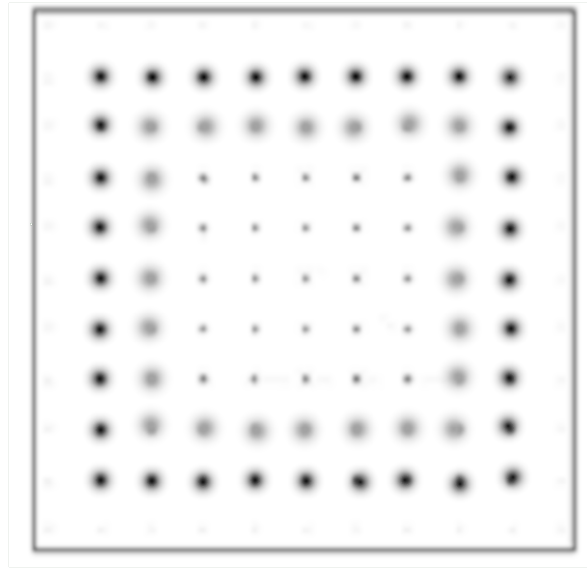


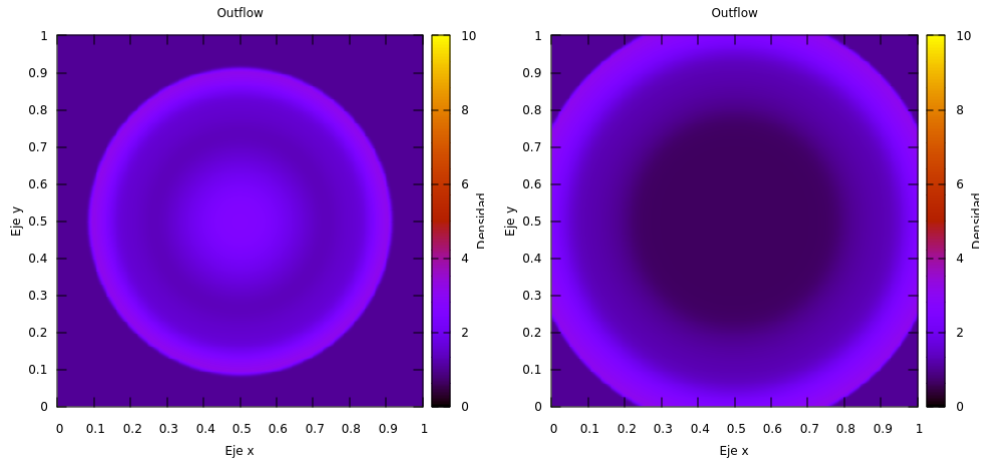
Figura B.1: Malla de puntos que resalta las fronteras, los puntos más oscuros representan una frontera *fantasma*, es decir, ese conjunto de puntos estará allí como apoyo para resolver los cálculos que hará la computadora, dado que tanto el método de Lax, como el método de HLL usan los puntos posteriores y anteriores en el espacio del punto que queremos saber su valor, pero no se grafican.

La Figura B.1 muestra los puntos más negros como unos puntos que nos van a servir de apoyo para calcular los valores de los puntos más grises, esto debido a que para calcular los valores de algún punto (x_i, y_j) necesitamos el punto posterior x_{i+1}, y_{j+1} y el punto anterior x_{i-1}, y_{j-1} .

Ahora, cuando llegamos a los últimos puntos de nuestra frontera, por ejemplo, el punto x_0, y_0 , no podremos calcularlo debido a que no tendremos conocimiento acerca del punto anterior $x_{(-1)}, y_{(-1)}$, entonces tendremos que darles valores específicos a estos puntos, pero no podemos darles cualquier valor, en las siguientes secciones vamos a ver que valores válidos le podemos dar para el funcionamiento del código.

B.0.1. Condiciones de frontera *outflow*

Las condiciones *outflow*, son en las que los valores de nuestra frontera fantasma (puntos negros) que toman los mismos valores que su antecesor (puntos grises), los fenómenos físicos que atraviesan nuestra frontera, pasarán como si tuviéramos más dominio hacia afuera y una vez que salgan perderemos información sobre esta.



(a) onda expandiéndose antes de cruzar la frontera (b) onda expandiéndose después de cruzar la frontera

Figura B.2: Al pasar la onda nuestra frontera, esta sigue su trayecto normal como si el dominio fuera infinito

Las ecuaciones que obedece nuestra frontera son las siguientes:

$$\mathbf{U}(0, j) = \mathbf{U}(1, j) \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{U}(n+1, j) = \mathbf{U}(n, j) \quad (\text{B.2})$$

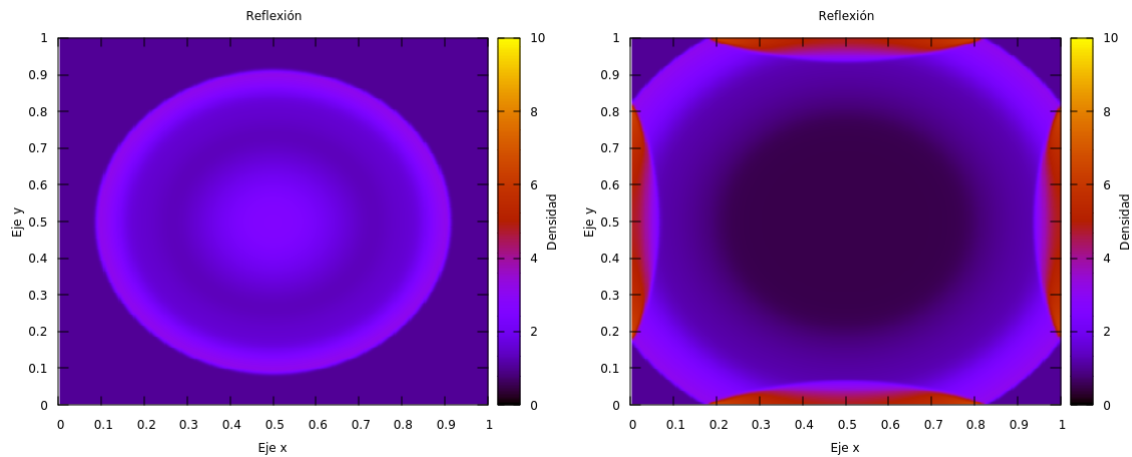
$$\mathbf{U}(i, 0) = \mathbf{U}(i, 1) \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{U}(i, m+1) = \mathbf{U}(i, m) \quad (\text{B.4})$$

Donde $i, j \leq n, m \in \mathbb{N}$

B.0.2. Condiciones de frontera *reflexión*

Las condiciones de reflexión funcionan como una pared en la que no se le permite al fenómeno físico escapar y al toparse con estas fronteras se reflejarán. Los valores que tendrán los puntos negros, serán los valores negativos de los puntos grises.



(a) onda expandiéndose antes de llegar a la frontera

(b) onda reflejándose en las fronteras

Figura B.3: Al llegar la frontera la onda se reflejará y chocará con la misma

Las ecuaciones que obedece nuestra frontera son las siguientes:

$$\mathbf{U}(2, 0, j) = -\mathbf{U}(2, 1, j) \quad (\text{B.5})$$

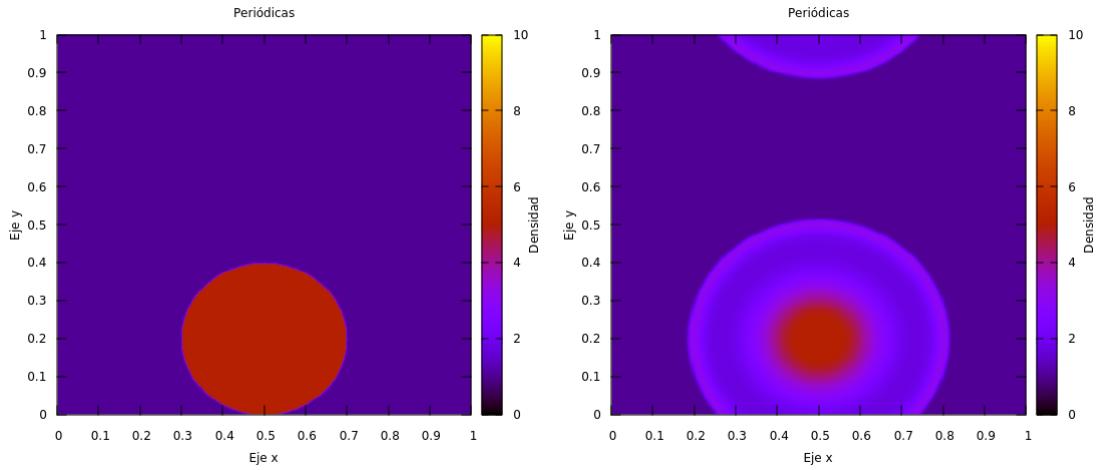
$$\mathbf{U}(2, n + 1, j) = -\mathbf{U}(2, n, j) \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{U}(2, i, 0) = -\mathbf{U}(2, i, 1) \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{U}(2, i, m + 1) = -\mathbf{U}(2, i, m) \quad (\text{B.8})$$

B.0.3. Condiciones de frontera *periódicas*

Las condiciones periódicas son cuando nuestra frontera fantasma toma los valores de la frontera opuesta del lado que están, es decir, si un fenómeno físico pasa a través de la parte de arriba de nuestro dominio (ver Figura B.4), este, saldrá por la parte de abajo y viceversa, lo mismo aplica para los fenómenos pasen por la parte izquierda o derecha de nuestro dominio.



(a) Onda antes de tocar la frontera de abajo (b) La onda pasa la frontera de abajo y sale por la parte de arriba

Figura B.4: Al llegar la onda abajo se puede ver que se transporta al lado de arriba, se eligió esa posición de la onda, solo para resaltar la periodicidad de la onda, ya que si se hubiera puesto en el centro, la onda chocaría contra sí mismo y no podríamos ver el paso de la onda.

Las ecuaciones que representan este tipo de frontera son las siguientes:

$$\mathbf{U}(2, 0, j) = \mathbf{U}(2, n, j) \quad (\text{B.9})$$

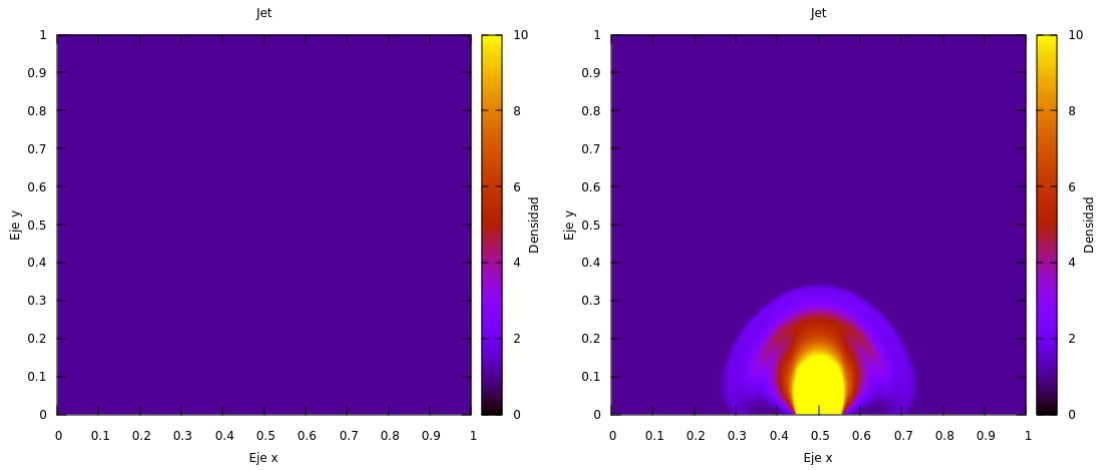
$$\mathbf{U}(2, n+1, j) = \mathbf{U}(2, 1, j) \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{U}(2, i, 0) = \mathbf{U}(2, i, m) \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{U}(2, i, m+1) = \mathbf{U}(2, i, 1) \quad (\text{B.12})$$

B.0.4. Condiciones de frontera *Jet*

Las condiciones de tipo jet, son en las que dado un lado de nuestra frontera (pueden ser varios), se va a inyectar una energía y masa a una cierta velocidad constante todo el tiempo en una de las partes de la frontera.



(a) La densidad del medio sin la inyección del jet

(b) Jet inyectándose en el medio

Figura B.5: El jet es básicamente inyectar masa y energía en una parte de nuestra frontera, a cada tiempo que evoluciona.

Para obtener las ecuaciones de esta frontera, igualamos los valores de la frontera *fantasma* con las variables primitivas de nuestro jet, las siguientes ecuaciones son para la parte de abajo de nuestro dominio.

No relativista

$$\mathbf{U}(1,0,j) = \rho_{jet} \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{U}(2,0,j) = \rho_{jet} v_{x_{jet}} \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{U}(3,0,j) = \rho_{jet} v_{y_{jet}} \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{U}(4,0,j) = E_{jet}. \quad (\text{B.16})$$

Relativista

$$\mathbf{U}(1,0,j) = \rho_{jet} \gamma \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{U}(2,0,j) = \rho_{jet} v_{x_{jet}} \gamma^2 h \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{U}(3,0,j) = \rho_{jet} v_{y_{jet}} \gamma^2 h \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{U}(4,0,j) = \rho_{jet} \gamma^2 h - p \quad (\text{B.20})$$

donde $j \in [a, b]$ y $a \geq 0$, $b \leq n + 1$. Los puntos de la frontera que no sean del jet se pueden combinar con los 3 tipos de frontera mencionados anteriormente.

Apéndice C

Subrutina de Newton-Raphson

Subrutina de Newton-Raphson, los valores de entrada son m^2 y las conservadas y devuelve W

```
1  subroutine newrap(qu, w, m2)
2
3!   use parameters, only : neq, gamma
4  use globals , only : neq, gamma
5  implicit none
6  ! real, intent(in) :: qu(neq)
7  real, intent(in)  :: m2
8  real, intent(out) :: w
9  real, parameter  :: eps = 1d-10
10 real :: a, b, c, mu, alpha, u2, lor, chi, dpdchi, dpdrho
11 real :: w0, dpdw, f, dfdw, pg, dv2dw, dchidw, drhodw, qu(neq)
12 integer :: k
13
14 !print*, qu(4)**2, m2+qu(1)**2, qu(4)
15
16 !if(qu(4)**2 .lt. m2+qu(1)**2 .or. qu(4).le. 0.0) then !.lt. -> '<'; .le. ->
!<='
17 ! print*, 'error in newrap'
18 ! stop
19 !end if
20
21 a = 3.0;   b = 2.0 * (-qu(4));   c = m2
22 if(b**2-a*c .lt. 0.0) then
23   print*, 'b**2-a*c<0'
24   stop
25 end if
26 w = ( - b + sqrt(b**2-a*c) ) / a   ! initial guess for w = rho * h * lor**2
27
28 w0 = w
29 mu = 1.0
```

```

30 100 continue
31 do k = 1, 40
32
33     alpha = m2 / w**2    ! alpha < 1 !
34
35     u2 = alpha/(1.0-alpha)
36
37     if(u2 .lt. 0.0) then
38         print*, 'u2<0cc'
39         print*, qu
40         stop
41     end if
42
43     lor = sqrt(1.0 + u2)
44
45     chi = (w - qu(1)*(1.0+u2/(lor+1.0)))/(1.0+u2)
46
47     ! ideal gas case
48     pg = (gamma - 1.0)/gamma * chi
49     dpdchi = (gamma - 1.0)/gamma
50     dpdrho = 0.0
51
52     f = w - pg - qu(4)    ! f(w) = 0
53
54     if(abs(f) .lt. eps) return
55
56     dv2dw = lor/w**3*m2
57     dchidw = 1.0/lor**2 + dv2dw*(qu(1)+2.0*lor*chi)
58
59     drhodw = dv2dw*qu(1)
60
61     dpdw = dpdchi*dchidw + dpdrho*drhodw
62
63     dfdw = 1.0 - dpdw    ! df/dw
64
65     w = w0 - mu * f / dfdw    ! Newton-Raphson iteration
66
67     if(abs(w-w0) .lt. eps) return
68
69     w0 = w
70
71 end do
72
73 if(mu .gt. 0.1) then
74     mu = mu/2.0
75     goto 100

```

```
76     end if
77
78 end subroutine newrap
```


Apéndice D

Subrutinas de Flujos calculados mediante el método de HLL

```
1  !      !Este modulo calcula los flujos hll
2      use globals
3      implicit none
4      real, intent(in) :: time
5
6      real, intent(out) :: fhll(neq,0:nx+1,0:ny+1), ghll(neq,0:nx+1,0:ny+1) ! esta es la
       variable que se obtiene y va para la subrutina ulax
7
8      real :: rho_l(0:nx+1,0:ny+1), rho_r(0:nx+1,0:ny+1),rho_u(0:nx+1,0:ny+1),rho_d(0:
       nx+1,0:ny+1)
9      real :: vx_l(0:nx+1,0:ny+1), vx_r(0:nx+1,0:ny+1), vx_u(0:nx+1,0:ny+1), vx_d(0:nx
       +1,0:ny+1)
10     real :: vy_l(0:nx+1,0:ny+1), vy_r(0:nx+1,0:ny+1), vy_u(0:nx+1,0:ny+1), vy_d(0:nx
       +1,0:ny+1)
11     real :: P_l(0:nx+1, 0:ny+1), P_r(0:nx+1, 0:ny+1), P_u(0:nx+1,0:ny+1), P_d(0:nx
       +1,0:ny+1)
12
13     real :: lor_l(0:nx+1, 0:ny+1), lor_r(0:nx+1, 0:ny+1), lor_u(0:nx+1, 0:ny+1),
       lor_d(0:nx+1, 0:ny+1)
14     real :: h_l(0:nx+1,0:ny+1), h_r(0:nx+1,0:ny+1), h_u(0:nx+1,0:ny+1), h_d(0:nx
       +1,0:ny+1)
15
16     real :: s_l(0:nx+1,0:ny+1),s_r(0:nx+1,0:ny+1), s_d(0:nx+1,0:ny+1), s_u(0:nx+1,0:
       ny+1)
17
18
19
20     real :: f_l(neq, 0:nx+1,0:ny+1), f_r(neq,0:nx+1,0:ny+1), u_l(neq,0:nx+1,0:ny+1),
       u_r(neq,0:nx+1,0:ny+1)
```

```

21  real :: g_d(neq, 0:nx+1,0:ny+1), g_u(neq,0:nx+1,0:ny+1), u_d(neq,0:nx+1,0:ny+1),
    u_u(neq,0:nx+1,0:ny+1)
22
23  integer :: i, j
24
25  call RL(nx,ny, neq, gamma, u, rho_l,rho_d, rho_r,rho_u, vx_l,vx_d, vx_r,vx_u, &
26  vy_l,vy_r,vy_u, vy_d,P_l,P_d, P_r,P_u)
27
28  call wavespeeds(s_l,s_d, s_r,s_u,rho_l,rho_d, rho_r,rho_u, vx_l,vx_d, vx_r,vx_u,
    &
29  vy_l,vy_r,vy_u, vy_d,P_l,P_d, P_r,P_u )
30
31
32  !igual calculamos los flujos y conservadas de lado derecho e izquierdo
33
34  if (choose_rel==0) then
35
36      do i=1,nx
37          do j=1,ny
38              u_l(1,i,j) = rho_l(i,j)
39              u_l(2,i,j) = rho_l(i,j)*vx_l(i,j)
40              u_l(3,i,j) = rho_l(i,j)*vy_l(i,j)
41              u_l(4,i,j) = 0.5*rho_l(i,j)*(vx_l(i,j)**2+vy_l(i,j)**2)+P_l(i,j)/(gamma
-1.)
42
43              u_d(1,i,j) = rho_d(i,j)
44              u_d(2,i,j) = rho_d(i,j)*vx_d(i,j)
45              u_d(3,i,j) = rho_d(i,j)*vy_d(i,j)
46              u_d(4,i,j) = 0.5*rho_d(i,j)*(vx_d(i,j)**2+vy_d(i,j)**2)+P_d(i,j)/(gamma
-1.)
47
48              u_r(1,i,j) = rho_r(i,j)
49              u_r(2,i,j) = rho_r(i,j)*vx_r(i,j)
50              u_r(3,i,j) = rho_r(i,j)*vy_r(i,j)
51              u_r(4,i,j) = 0.5*rho_r(i,j)*(vx_r(i,j)**2+vy_r(i,j)**2)+P_r(i,j)/(gamma
-1.)
52
53              u_u(1,i,j) = rho_u(i,j)
54              u_u(2,i,j) = rho_u(i,j)*vx_u(i,j)
55              u_u(3,i,j) = rho_u(i,j)*vy_u(i,j)
56              u_u(4,i,j) = 0.5*rho_u(i,j)*(vx_u(i,j)**2+vy_u(i,j)**2)+P_u(i,j)/(gamma
-1.)
57
58  =====
59
60      f_l(1,i,j) = rho_l(i,j)*vx_l(i,j)

```

```

61     f_l(2,i,j) = rho_l(i,j)*vx_l(i,j)**2+P_l(i,j)
62     f_l(3,i,j) = rho_l(i,j)*vx_l(i,j)*vy_l(i,j)
63     f_l(4,i,j) = vx_l(i,j)*(u_l(4,i,j)+P_l(i,j))
64
65     f_r(1,i,j) = rho_r(i,j)*vx_r(i,j)
66     f_r(2,i,j) = rho_r(i,j)*vx_r(i,j)**2+P_r(i,j)
67     f_r(3,i,j) = rho_r(i,j)*vx_r(i,j)*vy_r(i,j)
68     f_r(4,i,j) = vx_r(i,j)*(u_r(4,i,j)+P_r(i,j))
69
70     g_d(1,i,j) = rho_d(i,j)*vy_d(i,j)
71     g_d(2,i,j) = rho_d(i,j)*vx_d(i,j)*vy_d(i,j)
72     g_d(3,i,j) = rho_d(i,j)*vy_d(i,j)**2 + P_d(i,j)
73     g_d(4,i,j) = vy_d(i,j)*(u_d(4,i,j)+P_d(i,j))
74
75     g_u(1,i,j) = rho_u(i,j)*vy_u(i,j)
76     g_u(2,i,j) = rho_u(i,j)*vx_u(i,j)*vy_u(i,j)
77     g_u(3,i,j) = rho_u(i,j)*vy_u(i,j)**2 + P_u(i,j)
78     g_u(4,i,j) = vy_u(i,j)*(u_u(4,i,j)+P_u(i,j))
79
80     end do
81 end do
82
83 elseif(choose_rel==1)then
84
85     do i=1,nx
86         do j=1,ny
87
88             lor_l(i,j) = 1/sqrt(1-(vx_l(i,j)**2+vy_l(i,j)**2))
89             lor_d(i,j) = 1/sqrt(1-(vx_d(i,j)**2+vy_d(i,j)**2))
90             lor_r(i,j) = 1/sqrt(1-(vx_r(i,j)**2+vy_r(i,j)**2))
91             lor_u(i,j) = 1/sqrt(1-(vx_u(i,j)**2+vy_u(i,j)**2))
92
93             h_l(i,j)=1.+gamma/(gamma-1.)*P_l(i,j)/rho_l(i,j)
94             h_d(i,j)=1.+gamma/(gamma-1.)*P_d(i,j)/rho_d(i,j)
95             h_r(i,j)=1.+gamma/(gamma-1.)*P_r(i,j)/rho_r(i,j)
96             h_u(i,j)=1.+gamma/(gamma-1.)*P_u(i,j)/rho_u(i,j)
97
98             u_l(1,i,j) = rho_l(i,j)*lor_l(i,j)
99             u_l(2,i,j) = rho_l(i,j)*vx_l(i,j)*lor_l(i,j)**2*h_l(i,j)
100            u_l(3,i,j) = rho_l(i,j)*vy_l(i,j)*lor_l(i,j)**2*h_l(i,j)
101            u_l(4,i,j) = rho_l(i,j)*lor_l(i,j)**2*h_l(i,j)-P_l(i,j)
102
103            u_d(1,i,j) = rho_d(i,j)*lor_d(i,j)
104            u_d(2,i,j) = rho_d(i,j)*vx_d(i,j)*lor_d(i,j)**2*h_d(i,j)
105            u_d(3,i,j) = rho_d(i,j)*vy_d(i,j)*lor_d(i,j)**2*h_d(i,j)
106            u_d(4,i,j) = rho_d(i,j)*lor_d(i,j)**2*h_d(i,j)-P_d(i,j)

```



```

107
108     u_r(1,i,j) = rho_r(i,j)*lor_r(i,j)
109     u_r(2,i,j) = rho_r(i,j)*vx_r(i,j)*lor_r(i,j)**2*h_r(i,j)
110     u_r(3,i,j) = rho_r(i,j)*vy_r(i,j)*lor_r(i,j)**2*h_r(i,j)
111     u_r(4,i,j) = rho_r(i,j)*lor_r(i,j)**2*h_r(i,j)-P_r(i,j)
112
113     u_u(1,i,j) = rho_u(i,j)*lor_u(i,j)
114     u_u(2,i,j) = rho_u(i,j)*vx_u(i,j)*lor_u(i,j)**2*h_u(i,j)
115     u_u(3,i,j) = rho_u(i,j)*vy_u(i,j)*lor_u(i,j)**2*h_u(i,j)
116     u_u(4,i,j) = rho_u(i,j)*lor_u(i,j)**2*h_u(i,j)-P_u(i,j)
117
118 =====
119
120     f_l(1,i,j) = rho_l(i,j)*vx_l(i,j)*lor_l(i,j)
121     f_l(2,i,j) = rho_l(i,j)*vx_l(i,j)**2*lor_l(i,j)**2*h_l(i,j)+P_l(i,j)
122     f_l(3,i,j) = rho_l(i,j)*vx_l(i,j)*vy_l(i,j)*lor_l(i,j)**2*h_l(i,j)
123     f_l(4,i,j) = rho_l(i,j)*vx_l(i,j)*lor_l(i,j)**2*h_l(i,j)
124
125     f_r(1,i,j) = rho_r(i,j)*vx_r(i,j)*lor_r(i,j)
126     f_r(2,i,j) = rho_r(i,j)*vx_r(i,j)**2*lor_r(i,j)**2*h_r(i,j)+P_r(i,j)
127     f_r(3,i,j) = rho_r(i,j)*vx_r(i,j)*vy_r(i,j)*lor_r(i,j)**2*h_r(i,j)
128     f_r(4,i,j) = rho_r(i,j)*vx_r(i,j)*lor_r(i,j)**2*h_r(i,j)
129
130     g_d(1,i,j) = rho_d(i,j)*vy_d(i,j)*lor_d(i,j)
131     g_d(2,i,j) = rho_d(i,j)*vx_d(i,j)*vy_d(i,j)*lor_d(i,j)**2*h_d(i,j)
132     g_d(3,i,j) = rho_d(i,j)*vy_d(i,j)**2*lor_d(i,j)**2*h_d(i,j)+P_d(i,j)
133     g_d(4,i,j) = rho_d(i,j)*vy_d(i,j)*lor_d(i,j)**2*h_d(i,j)
134
135     g_u(1,i,j) = rho_u(i,j)*vy_u(i,j)*lor_u(i,j)
136     g_u(2,i,j) = rho_u(i,j)*vx_u(i,j)*vy_u(i,j)*lor_u(i,j)**2*h_u(i,j)
137     g_u(3,i,j) = rho_u(i,j)*vy_u(i,j)**2*lor_u(i,j)**2*h_u(i,j)+P_u(i,j)
138     g_u(4,i,j) = rho_u(i,j)*vy_u(i,j)*lor_u(i,j)**2*h_u(i,j)
139
140     end do
141     end do
142
143 endif
144
145     do i=1,nx
146         do j=1,ny
147
148             if (0 .le. s_l(i,j)) then !less or equal 0<=sl
149                 fhll(:,i,j)=f_l(:, i,j)
150
151             else if (s_l(i,j) .le. 0 .and. 0 .le. s_r(i,j)) then !sl<=0<=sr
152

```

```

153         fhll(:,i,j)=(s_r(i,j)*f_l(:,i,j)-s_l(i,j)*f_r(:,i,j)+s_l(i,j)*s_r(i,j)*
u_r(:,i,j)-u_l(:,i,j)))/&
154         (s_r(i,j)-s_l(i,j))
155
156
157         else if (s_r(i,j) .le. 0) then !sr<=0
158             fhll(:,i,j)=f_r(:,i,j)
159
160         endif
161
162         if(0 .le. s_d(i,j)) then
163             ghll(:,i,j)= g_d(:,i,j)
164
165         else if(s_d(i,j) .le. 0 .and. 0 .le. s_u(i,j)) then
166
167             ghll(:,i,j)=(s_u(i,j)*g_d(:,i,j)-s_d(i,j)*g_u(:,i,j)+s_d(i,j)*s_u(i,j)*
u_u(:,i,j)-u_d(:,i,j)))/&
168             (s_u(i,j)-s_d(i,j))
169
170         else if(s_u(i,j) .le. 0) then
171             ghll(:,i,j) = g_u(:,i,j)
172
173         endif
174     end do
175 end do
176
177 fhll(:,nx+1,:) = fhll(:,nx-1,:)
178! fhll(:,nx,:) = fhll(:,nx-1,:)
179 fhll(:,0,:) = fhll(:,2,:)
180! fhll(:,1,:) = fhll(:,2,:)
181 fhll(:,ny+1) = fhll(:,ny-1)
182! fhll(:,ny) = fhll(:,ny-1)
183 fhll(:,0) = fhll(:,2)
184! fhll(:,1) = fhll(:,2)
185
186 ghll(:,nx+1,:) = ghll(:,nx-1,:)
187! ghll(:,nx,:) = ghll(:,nx-1,:)
188 ghll(:,0,:) = ghll(:,2,:)
189! ghll(:,1,:) = ghll(:,2,:)
190 ghll(:,ny+1) = ghll(:,ny-1)
191! ghll(:,ny) = ghll(:,ny-1)
192 ghll(:,0) = ghll(:,2)
193! ghll(:,1) = ghll(:,2)
194
195 return

```


Bibliografía

- Berger, E., 2014. Short-duration gamma-ray bursts. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 52, 43–105. doi:10.1146/annurev-astro-081913-035926
- Blandford, R., Meier, D., Readhead, A., 2019. Relativistic jets from active galactic nuclei. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 57, 467–509. doi:10.1146/annurev-astro-081817-051948
- Blandford, R.D., Payne, D.G., 1982. Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of Radio Jets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 199, 883–903. doi:10.1093/mnras/199.4.883
- Blandford, R.D., Znajek, R.L., 1977. Electromagnetic extraction of energy from Kerr Black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 179, 433–456. doi:10.1093/mnras/179.3.433
- Clarke, C., Carswell, B., 2007. Blast waves. *Principles of Astrophysical Fluid Dynamics* 89–106. doi:10.1017/cbo9780511813450.009
- Clarke, C., & Carswell, B. (2007). The fluid equations. In *Principles of Astrophysical Fluid Dynamics* (pp. 12-19). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511813450.003
- De Colle, F., Granot, J., López-Cámara, D., Ramirez-Ruiz, E., 2012. Gamma-ray burst dynamics and afterglow radiation from adaptive mesh refinement, special relativistic hydrodynamic simulations. *The Astrophysical Journal* 746, 122. doi:10.1088/0004-637x/746/2/122
- De Colle, F., Ramirez-Ruiz, E., Granot, J., Lopez-Camara, D., 2012. Simulations of gamma-ray burst jets in a stratified external medium: Dynamics, afterglow light curves, jet breaks, and radio calorimetry. *The Astrophysical Journal* 751, 57. doi:10.1088/0004-637x/751/1/57
- de Gouveia Dal Pino, E.M., 2005. Astrophysical Jets and outflows. *Advances in Space Research* 35, 908–924. doi:10.1016/j.asr.2005.03.145

- Duchateau, P., Zachmann, D.W., 2002. Applied partial differential equations. Dover, Mineola, NY.
- Durrant, D.R. (2010). Finite-Difference Approximations for One-Dimensional Transport. In: Numerical Methods for Fluid Dynamics. Texts in Applied Mathematics, vol 32. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6412-0_3
- Espinasse, M., Corbel, S., Kaaret, P., Tremou, E., Migliori, G., Plotkin, R.M., Bright, J., Tom-sick, J., Tzioumis, A., Fender, R., Orosz, J.A., Gallo, E., Homan, J., Jonker, P.G., Miller-Jones, J.C., Russell, D.M., Motta, S., 2020. Relativistic X-ray jets from the black hole X-ray binary maxi J1820+070. *The Astrophysical Journal* 895. doi:10.3847/2041-8213/ab88b6
- Eymard, R., Gallouët, T., Herbin, R., 2000. Finite volume methods. *Handbook of Numerical Analysis* 713–1018. doi:10.1016/s1570-8659(00)07005-8
- F.D. Lora-Clavijo (et. al.) (2013). Exact Solution oh the 1D riemann problem in Newtonian and relativistic hydrodynamics. *Revista Mexicana de Física*. E 59 (2013)28-50
- Gottlieb, O., Nakar, E., Bromberg, O., 2020. The structure of hydrodynamic γ -Ray Burst Jets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 500, 3511–3526. doi:10.1093/mnras/staa3501
- Hamidani, H., Ioka, K., 2020. Jet propagation in expanding medium for gamma-ray bursts. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 500, 627–642. doi:10.1093/mnras/staa3276
- Kumar, A., Rajesh, R., 2022. Blast waves in two and three dimensions: Euler versus navier–stokes equations. *Journal of Statistical Physics* 188. doi:10.1007/s10955-022-02933-3
- Hülss, J.-P., Wiebusch, C. 2008. Search for Signatures of Extra-Terrestrial Neutrinos with a Multipole Analysis of the AMANDA-II Sky-map. *International Cosmic Ray Conference* 5, 1405–1408.
- Landau Lev Davidovic, Lifsic, E.M., 514, 505, 1987. RELATIVISTIC FLUID DYNAMICS, in: 6: Fluid Mechanics. Butterworth-Heinemann, Oxford.
- Lazzati, D., Perna, R., Morsony, B.J., Lopez-Camara, D., Cantiello, M., Ciolfi, R., Giacomazzo, B., Workman, J.C., 2018. Late time afterglow observations reveal a collimated relativistic jet in the ejecta of the binary neutron star Merger GW170817. *Physical Review Letters* 120. doi:10.1103/physrevlett.120.241103

- LeVeque, R.J., Steiner, O., Gautschy, A., 1998. Nonlinear Conservation Laws and Finite Volume Methods, in: *Computational Methods for Astrophysical Fluid Flow*. Springer, Berlin, pp. 1–148.
- López-Cámara, D., Morsony, B.J., Begelman, M.C., Lazzati, D., 2013. Three-dimensional adaptive mesh refinement simulations of long-duration gamma-ray burst jets inside massive progenitor stars. *The Astrophysical Journal* 767, 19. doi:10.1088/0004-637x/767/1/19
- Martí, J.M., Müller, E., 1999. Numerical hydrodynamics in special relativity. *Living Reviews in Relativity* 2. doi:10.12942/lrr-1999-3
- Martí, J.-M., 2019. Numerical simulations of jets from active galactic nuclei. *Galaxies* 7, 24. doi:10.3390/galaxies7010024 simulations of jets from active galactic nuclei. *Galaxies* 7, 24. doi:10.3390/galaxies7010024
- Mignone, A., Bodo, G., 2005. An HLLC Riemann solver for relativistic flows – I. Hydrodynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 364, 126–136. doi:10.1111/j.1365-2966.2005.09546.x
- Mignone, A., McKinney, J.C., 2007. Equation of state in relativistic magnetohydrodynamics: Variable versus constant adiabatic index. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 378, 1118–1130. doi:10.1111/j.1365-2966.2007.11849.x
- Pavan, A., Ciolfi, R., Kalinani, J.V., Mignone, A., 2021. Short gamma-ray burst jet propagation in binary neutron star merger environments. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 506, 3483–3498. doi:10.1093/mnras/stab1810
- Perucho, M., Quilis, V., Martí, J.-M., 2011. Intracluster medium reheating by Relativistic Jets. *The Astrophysical Journal* 743, 42. doi:10.1088/0004-637x/743/1/42
- Piran, T., 2005. The physics of gamma-ray bursts. *Reviews of Modern Physics* 76, 1143–1210. doi:10.1103/revmodphys.76.1143
- Prunty, S. (2019). Conditions Across the Shock: The Rankine-Hugoniot Equations. In: *Introduction to Simple Shock Waves in Air . Shock Wave and High Pressure Phenomena*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-02565-6_3
- Romero, G.E., 2021. The content of Astrophysical Jets. *Astronomische Nachrichten* 342, 727–734. doi:10.1002/asna.202113989
- Seo, J., Kang, H., Ryu, D., Ha, S., Chattopadhyay, I., 2021. A simulation study of ultra-relativistic jets–I. A new code for relativistic hydrodynamics. *The Astrophysical Journal* 920, 143. doi:10.3847/1538-4357/ac19b3

- Shrestha, M., Steele, I.A., Kobayashi, S., Jordana-Mitjans, N., Smith, R.J., Jermak, H., Arnold, D., Mundell, C.G., Gomboc, A., Guidorzi, C., 2021. GRB 191016a: A highly collimated gamma-ray burst jet with magnetized energy injection. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 509, 5964–5973. doi:10.1093/mnras/stab3368
- Toro E.F. (1997) The HLL and HLLC Riemann Solvers. In: *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg
- Zhang, B. (2018). GRB Phenomenology. In *The Physics of Gamma-Ray Bursts* (pp. 27-121). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/9781139226530.004