



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COMPARACIÓN DE EQUILIBRIOS DE TOKAMAKS
CON DIVERSAS FRONTERAS, EMPLEANDO
SOLUCIONES DE SENOS Y COSENOS A LA ECUACIÓN
DE GRAD-SHAFRANOV.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

CARLOS RUBÉN CARRERA PADILLA

TUTOR

DR. JOSÉ JULIO EMILIO HERRERA VELÁZQUEZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi madre ...

Agradecimientos

Al Dr. Julio Herrera por confiar en mi, estar conmigo cómo amigo, asesor y colega siempre. Gracias por su tiempo invertido y la incontables sesiones que tuvimos juntos. Al Dr. Luca Guazzoto que dudo que un día lea este agradecimiento pero su asesoría en el código fue de mucha ayuda para el desarrollo de este trabajo.

A mi papá, mi hermana y mi compañera que me enseñan disfrutar el viaje. A mi madre, su recuerdo es mi motor. « Quisiera vivir en tus ojos siempre, mamá.»

Finalmente, a todos quienes han marcado mi vida y me han ayudado a llegar aquí.

Resumen

En el contexto de la producción de energía, los tokamaks son aparatos de confinamiento de plasmas mediante campos magnéticos con el objetivo de estudiar la producción de energía por reacciones de fusión nuclear.

El equilibrio de fuerzas en una columna de plasma en estos aparatos está descrito por una ecuación diferencial parcial no lineal conocida como la ecuación de Grad-Shafranov (GS). Dicha ecuación relaciona el flujo poloidal con el gradiente en la presión y el campo magnético toroidal, siendo ambos función del mismo flujo. La naturaleza de esta ecuación hace que su resolución se haga en general mediante la implementación de soluciones numéricas.

Por otro lado, las soluciones analíticas resultan útiles para el estudio del equilibrio y, posteriormente, análisis de la estabilidad de dichos equilibrios. Este último tipo de soluciones consiste en proponer perfiles de presión y de campo magnético toroidal, que permitan reducir la ecuación a una lineal. Sin embargo, sus soluciones no son necesariamente realistas o son demasiado complejas [1] [2].

En este trabajo se estudian soluciones analíticas a la ecuación GS propuestas por Guazzotto y Freidberg [3] a partir de series de funciones de senos y cosenos para el flujo poloidal. Éstas permiten analizar propiedades más realistas en un tokamak, como lo son, los perfiles de corriente y presión, dados los parámetros de la frontera del plasma, así como las contribuciones por corriente de Bootstrap. Su implementación numérica, cortesía del mismo Guazzotto, está hecha en MATLAB.

El objetivo principal de este trabajo es obtener la forma de los campos toroidal y poloidal así como el perfil del factor de seguridad para la configuración geométrica de la columna de plasma con tres conjuntos realistas de parámetros relevantes a tokamaks modernos. Se observa que varían las figuras de mérito al cambiar las configuraciones de la frontera de la columna del plasma, es decir, la razón de aspecto, la elongación y la triangularidad.

Posteriormente, se estudiarán soluciones de equilibrio para configuraciones de plasma con triangularidad negativa. Se ha observado en [4][5][6] que algunos dispositivos como el TCV y el DIII-D pueden mejorar sus cualidades de confinamiento con este parámetro. En particular, se calculan los equilibrios estimados numéricamente por Junhyuk Song y Carlos Paz-Soldan en [7] con el código ECOM [8] por medio del código de Guazzotto y se comparan ambas soluciones analíticas y numéricas. Una vez encontradas las soluciones a la misma situación se complementa el análisis hecho por Song, calculando las figuras de mérito del plasma.

Objetivos específicos.

- Calcular las funciones de flujo poloidal usando la solución de equilibrio propuesta por Guazzoto y Freidberg [3]. para tres conjuntos realistas de parámetros relevantes.
- Obtener las figuras de mérito para cada tokamak propuesto, en particular las que no han sido exhibidas en [3] a saber: cociente entre la presión de plasma y de campo magnético, factor de seguridad promedio e inductancia interna.
- Observar que cambian las figuras de mérito al agregar contribuciones realistas a la frontera: corriente y gradiente de presión en la frontera del plasma y corriente de Bootstrap, como se hace en [9].
- Estudiar soluciones de equilibrio para configuraciones de plasma con triangularidad negativa.

Índice general

| | |
|--|------------|
| Agradecimientos | II |
| Resumen | III |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. El poder del átomo | 2 |
| 1.2. El motor de las estrellas. | 4 |
| 1.3. Fusión como Reactor. | 7 |
| 1.3.1. Cámara Magnética Toroidal | 10 |
| 1.4. Confinamiento Magnético. | 11 |
| 1.5. Acerca de este trabajo. | 16 |
| 2. Marco Teórico. | 17 |
| 2.1. Ecuaciones Magnetohidrodinámicas. | 17 |
| 2.2. Equilibrio Magnetohidrodinámico. | 21 |
| 2.2.1. Equilibrio en un cilindro. | 21 |
| 2.3. Equilibrio de Plasma Toroidal. | 23 |
| 3. Perfiles de equilibrio. | 32 |
| 3.1. Algunos Perfiles. | 32 |
| 3.1.1. Soluciones en Senos y Cosenos. | 33 |
| 3.1.2. Elección de constantes de separación. | 39 |
| 3.1.3. Modelo de Superficie | 40 |
| 3.1.4. Método de Solución | 43 |

| | |
|--|-----------|
| <i>ÍNDICE GENERAL</i> | VI |
| 3.2. Resultados. | 45 |
| 3.3. Perfil de los Parámetros de plasma. | 47 |
| 3.3.1. Cálculo de Campos. | 47 |
| 3.4. Figuras de Mérito. | 52 |
| 3.5. Regiones con Pedestales. | 55 |
| 3.6. Contribuciones por efectos de Superficie. | 57 |
| 3.6.1. Corrientes Superficiales. | 59 |
| 3.7. Pedestal de Densidad de Corriente | 61 |
| 3.8. Resultados | 65 |
| 3.9. Triangularidad Negativa. | 69 |
| 4. Conclusiones | 74 |
| 5. Apéndices | 77 |
| Bibliografía | 77 |

Capítulo 1

Introducción

La energía... esa bonita palabra que está implícita en todas las cosas y que es inevitable pensar o mencionar cuando se habla del futuro de la civilización como en los cuentos de Issac Asimov. Actualmente, la obtención de energía se realiza, mayoritariamente, a partir de combustibles fósiles, finitos y cuya utilización esta tan relacionada con la liberación de CO_2 , contribuyendo al cambio climático.

Una pequeña parte de la energía se obtiene de energías renovables, como las antenas eólicas o celdas solares. Obtener energía de esta forma parece conveniente desde el punto ecológico pero la cantidad de energía necesaria para la población difícilmente puede basarse solamente en esta solución.

Las cosas se complican a un más si miramos a futuro. Para el 2050 la necesidad de energía eléctrica habrá crecido por un factor de 3 [10].

Cómo buen soñador no quiero dejar la posibilidad de en algún momento la humanidad tenga la capacidad de continuar, a gran escala, la exploración espacial. Pero las fuentes de energía mencionadas no parecen ser, ni de broma, ese santo grial que nos lleve a las estrellas.

1.1. El poder del átomo

Desde el siglo pasado, con el descubrimiento de los componentes subatómicos y, a su vez, la radiación, surgió la idea de utilizar las grandes cantidades de energía que mantienen a los núcleos unidos para producir energía.

Existen dos procesos distintos para producir energía nuclear. La Fisión Nuclear y, su contra-parte, la Fusión Nuclear.

La Fisión Nuclear, reacción que se utiliza actualmente en las centrales eléctricas nucleares alrededor del mundo, consiste en dividir átomos de elementos pesados y poco estables al bombardearlos con neutrones. La fragmentación de núcleos pesados en núcleos más ligeros libera una gran cantidad de energía de por medio.

El ejemplo más común es el isótopo de Uranio, U-235, cuya facilidad para ser fisible lo ha hecho el perfecto candidato para los reactores actuales.

Durante la fisión, un átomo U-235 absorbe un neutrón de alguna fuente, convirtiéndose en U-236 momentáneamente, el cual, poco estable decae rápidamente (principalmente) en los átomos Ba-141 y Kr-89, liberando tres neutrones extra. Dichos neutrones pueden ser absorbidos por otros átomos continuando la reacción en cadena, tal como se muestra en la figura (1.1).

Para hacer una idea de lo importante que se volvió la fisión nuclear, se sabe que

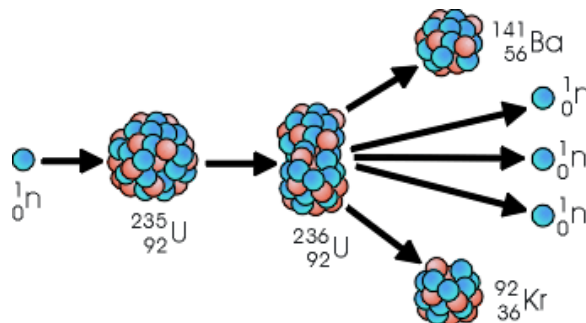


Figura 1.1: Diagrama de Fisión Nuclear de un isótopo ${}^{235}\text{U}$ por un neutrón, en uno de sus productos probables [11].

al año 2021 estaban en actividad aproximadamente 440 reactores de fisión nuclear, los cuales constituyen aproximadamente el 5.6 % del suministro eléctrico mundial [12]. Para tener una noción más intuitiva, tan solo en Estados Unidos se estima que la energía nuclear genera 800 mil millones de kilovatios por hora cada año; lo cual es más de la mitad de la electricidad libre de emisiones, generada por ese país. Esta alternativa sustituye aproximadamente 470 millones de toneladas de carbón al año [13].

La energía liberada en una reacción nuclear de este tipo esta relacionada con la energía de amarre, característica de cada átomo. Es decir, la energía que mantiene unidos a los nucleones (protones y neutrones). A continuación, en la figura (1.2) se muestra una gráfica de las energías de amarre por nucleón , así como una gráfica de la estabilidad de los núcleos.

En la parte izquierda de la figura (1.2), corresponde a la energía de amarre por nucleón (a); en ella se observa que el elemento que posee menor energía de amarre por nucleón es el hidrógeno, lo cual, implica que se requiere menor trabajo para generar una reacción nuclear con este tipo de átomos, ya sea separando los nucleones o uniéndolos con nuevos nucleones para formar átomos más pesados. Por otro lado, la figura (1.2.b) , representa la estabilidad de los núcleos formados al añadir neutrones y se compara contra el número de protones, esto quiere decir que se verifica la estabilidad de los isótopos de cada elemento. El patrón oscuro dentro de la distribución gris representa a los isótopos estables conocidos. Los isótopos en gris representan los elementos inestables, es decir que decaen en otros elementos más estables debido a poseer demasiados neutrones o protones, de acuerdo con el lado del diagrama donde se encuentre el elemento. Entre más arriba de la figura (1.2.b) más susceptible es el elemento a ser dividido por fisión liberando mayor cantidad de energía en relación la gráfica (1.2.a).

Es por eso que el U-235, es un gran candidato a ser fisiónable. De forma contraria si

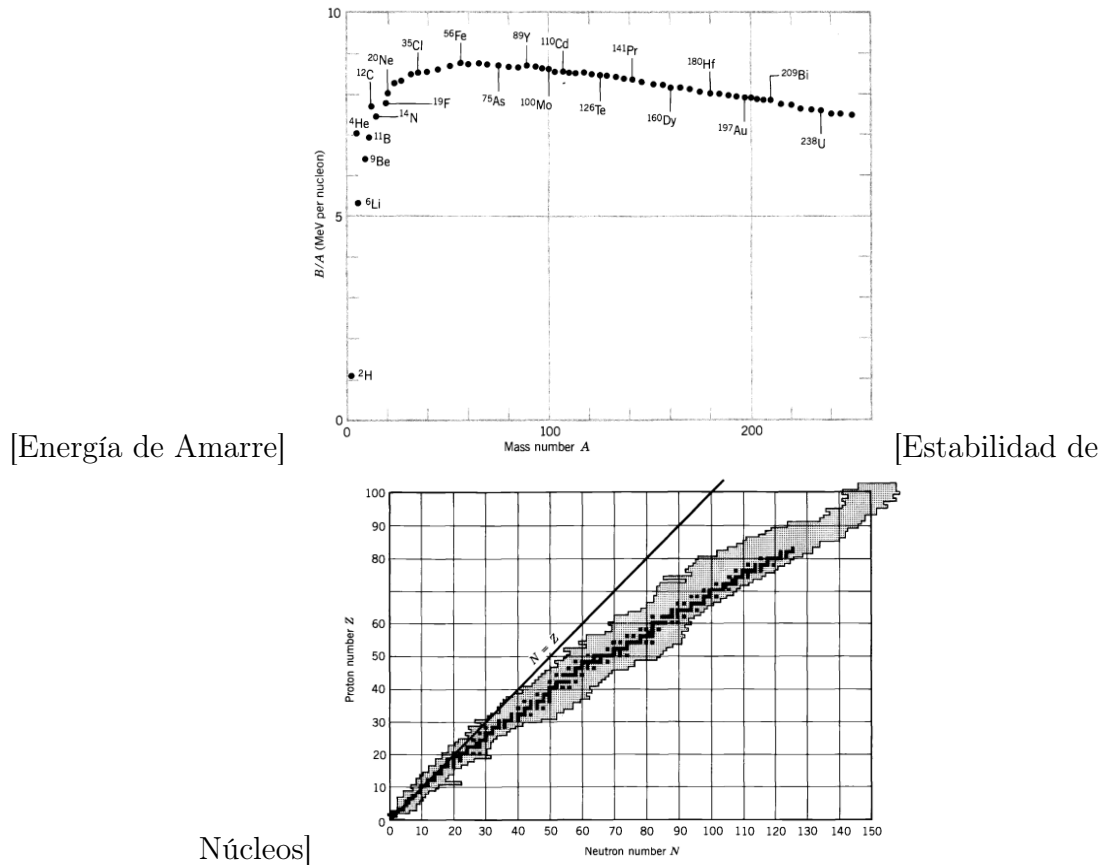


Figura 1.2: Información nuclear relevante para la fisión [14].

uno buscara elementos que al unirlos con nucleones formaran elementos más pesados, liberando energía, se declinaría por átomos más ligeros como el hidrógeno.

La utilización de esta gran fuente de energía, la energía nuclear, es desafortunadamente también un peligro. Como Richard Feynman dijo: "To every man is given the key to the gates of heaven. The same key opens the gates of hell. And so it is with science."

1.2. El motor de las estrellas.

La fusión nuclear es un proceso más común en el universo. La fusión es el corazón que enciende las estrellas. Proceso que propuso en 1920, Arthur Eddington [15]. Infortunada e irónicamente, la fusión es un proceso difícil de producir en la Tierra. Y aún es improbable, que en pocos años se llegue a las condiciones necesarias para

obtener ganancia de energía para el suministro eléctrico.

A diferencia de la fisión, la fusión nuclear consiste en unir núcleos ligeros con la intención de generar núcleos más pesados, liberando grandes cantidades de energía en el proceso.

Para que este proceso suceda, se necesita romper la barrera de repulsión coulombiana y lograr que los nucleones se re-combinen. Esto se traduce en darle a los protones la suficiente energía cinética (temperatura) y contenerlos en un lugar cerrado para que se acerquen tanto, que no les quede de otra opción más que combinarse.

En el caso de las estrellas, la fuerza gravitacional hace que los átomos estén tan cerca unos de otros que suceda la fusión y se mantenga. Empezando con núcleos ligeros (Hidrógeno) y escalando en los elementos de la tabla periódica hasta llegar al átomo más pesado y estable (Hierro), liberando radiación en cada proceso.

Las temperaturas necesarias para que la fusión suceda son del orden de 10 - 20 Kev, (ie 100 millones °C) .

A estas temperaturas la estructura de la materia cambia; en los átomos, los electrones se disocian de los núcleos (iones), y aparece un comportamiento colectivo debido a la interacción de las cargas eléctricas. Este tipo de gas es cuasineutral y se le conoce como ***Plasma***.

Se estima que el 99 % del universo observable está en el estado de plasma [16]. Las cualidades de los plasmas dependen principalmente de su temperatura, densidad de partículas cargadas y las fuerzas externas a las cuales se les someta.

Para replicar en la Tierra el proceso de fusión nuclear es necesario contener a un plasma el tiempo suficiente, bajo las condiciones ideales.

La reacción de fusión más común, por conveniencia, es la unión de dos isótopos de el átomo más ligero (Hidrogeno), Deuterio ^2H (D)y Tritio ^3H (T). El Deuterio tiene

un neutrón extra y el Tritio dos, a diferencia del Hidrógeno que no posee neutrones. La conveniencia de esta reacción es debido a que su energía de amarre por nucleón es mínima en el caso de los isótopos del hidrógeno, observar figura (1.2), mientras que la sección transversal de colisión es mayor a bajas temperaturas, relativamente, comparada con otras reacciones.

A continuación, se muestra una lista con las reacciones de fusión más favorables.

1. $D + T \rightarrow {}^4\text{He} (3.5 \text{ MeV}) + n (14.1 \text{ MeV})$
2. $D + D \rightarrow T (1.01 \text{ MeV}) + p (3.02 \text{ MeV}) (50\%)$
 $\rightarrow {}^3\text{He} (0.82 \text{ MeV}) + n (2.45 \text{ MeV}) (50\%)$
3. $D + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} (3.6 \text{ MeV}) + p (14.7 \text{ MeV})$
4. $T + T \rightarrow {}^4\text{He} + 2 n + 11.3 \text{ MeV}$

5. ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2 p$
6. ${}^3\text{He} + T \rightarrow {}^4\text{He} + p + n + 12.1 \text{ MeV} (51\%)$
 $\rightarrow {}^4\text{He} (4.8 \text{ MeV}) + D (9.5 \text{ MeV}) (43\%)$
 $\rightarrow {}^4\text{He} (0.5 \text{ MeV}) + n (1.9 \text{ MeV}) + p (11.9 \text{ MeV}) (6\%)$
7. $D + {}^6\text{Li} \rightarrow 2 {}^4\text{He} + 22.4 \text{ MeV}$
8. $p + {}^6\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} (1.7 \text{ MeV}) + {}^3\text{He} (2.3 \text{ MeV})$
9. ${}^3\text{He} + {}^6\text{Li} \rightarrow 2 {}^4\text{He} + p + 16.9 \text{ MeV}$
10. $p + {}^{11}\text{B} \rightarrow 3 {}^4\text{He} + 8.7 \text{ MeV}$

En seguida, en la figura (1.3) se exhibe la sección transversal de colisión de algunas de esas reacciones.

Por otro lado si nos fijamos en la lista de reacciones, aquellas que liberan más energía son $D + {}^6\text{Li}$, $D + T$, ${}^3\text{H} + {}^6\text{Li}$, etc. Pero la obtención de los reactantes es relativamente difícil en el caso del ${}^6\text{Li}$ y ${}^3\text{H}$ a comparación de como lo es para el D y T. Esto refuerza la elección de la combinación de D con T y la hace la reacción predilecta en la mayoría de experimentos para estudiar la fusión nuclear.

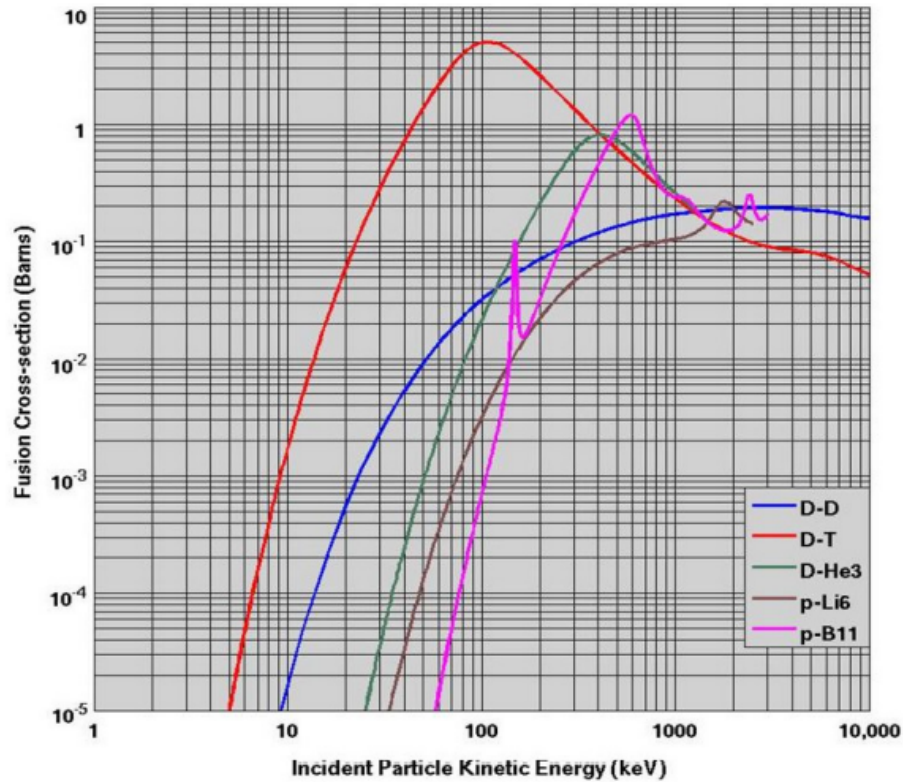


Figura 1.3: Gráfica de secciones transversales en fusión de la energía cinética para algunas reacciones de fusión [17].

1.3. Fusión como Reactor.

Una vez elegida la reacción más factible para obtener energía de fusión, Deuterio con Tritio, existe un largo camino de problemas que resolver antes de llegar a tener un reactor de fusión nuclear del cual se pueda obtener energía eléctrica .

Múltiples experimentos y aparatos han sido desarrollados para aprender nuevos aspectos de la fusión nuclear desde distintos panoramas. Al día de hoy se cuentan 74 aparatos de confinamiento magnético (tokamaks /stellarators/RFPs), 7 aparatos de fusión por láser, y otras 31 alternativas conceptuales con el mismo objetivo, expandir el conocimiento acerca de esta fuente de energía [18].

Las condiciones para las cuales un plasma de fusión se puede considerar como una fuente de energía, deben satisfacer un factor de ganancia $Q > 1$. Con $Q = P_{Output}/P_{input} =$

P_{Fusion}/P_{Aux} , es decir, la energía obtenida de la fusión debe ser mayor a la energía suministrada para que sucedan las reacciones. El caso más favorable es cuando el plasma alcanza lo que se conoce como estado de ignición, $Q \rightarrow \infty$, esto significa que los productos de las reacciones termonucleares D-T, partículas alfa 4He , ocupan la mayor cantidad de su energía, a través de la transferencia colisional, con lo cual se pueden mantener nuevas reacciones de tal forma que no se requiere suministro auxiliar. Es importante señalar que esta es una de las varias maneras en las cuales se puede definir Q ; la cual se distingue por solo tomar en cuenta la energía suministrada al plasma y se conoce como “ Q del plasma”. Si se compara la energía obtenida por fusión con la energía neta empleada para el complejo del experimento, se llega a otra definición de Q , la cual vendría siendo una “ Q real.” conocida a veces como “ Q de ingeniería”. En lo posterior se utilizará Q para referirse a la “ Q del plasma”.

Siendo el objetivo producir energía por fusión es necesario que la energía térmica producida compense las pérdidas de energía por radiación (Bremsstrahlung) y por transporte de energía hacia el exterior, lo cual produce condiciones en la densidad del plasma n_e , el tiempo de confinamiento τ_E y la temperatura T . Dichas condiciones están dadas por:

$$n_e \tau_E = \frac{3k_B T_e}{\frac{\langle \sigma V \rangle E_\alpha (Q+5)}{4Q} - C_B T_e^{1/2}}. \quad (1.1)$$

Con k_B la constante de Boltzman y $\langle \sigma V \rangle$ la tasa de reacciones entre los reactivos. Siendo C_B una constante relacionada con la pérdida por *Bremsstrahlung*, es decir, la radiación que se genera al desacelerar de partículas cargadas.

En la ecuación (1.1), si $Q = 1$ se llega a la condición mínima para producir un plasma de fusión, conocido como el criterio de Lawson [19].

Suponiendo un plasma de D-T en una proporción 50/50, a una temperatura de 15 keV, para satisfacer el criterio de Lawson se tiene:

$$n_e \tau_E = 10^{20} s \cdot m^{-3}. \quad (1.2)$$

Considerando que la sección eficaz se modifica con la temperatura, la tasa de reacciones también lo hace, de la forma $\langle \sigma V \rangle \approx T_e^2$. La ecuación (1.1) se convierte en

un triple producto

$$n_e \tau_E T_e = 1.5 \times 10^{21} \text{keV} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (1.3)$$

Esta relación (1.3) es una forma más intuitiva para conocer las cualidades que debe de satisfacer un plasma para cumplir $Q = 1$.

Al aventurarse un poco más, se puede conocer los requerimientos necesarios que debe de satisfacer un plasma para llegar a la ignición $Q \rightarrow \infty$

$$n_e \tau_E T_e \geq 8.1 \times 10^{21} \text{keV} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (1.4)$$

Este viene siendo el objetivo de todos los experimentos antes mencionados, hacer llegar el tripe producto a $Q = 1$ con el sueño de un día obtener la ignición. Las posibilidades son variadas, por ejemplo los métodos de confinamiento inercial (láser) utilizan altísimas densidades de combustible por periodos de tiempo ultra breves (ns) llegando a alcanzar temperaturas gigantescas.

Por otro lado, los métodos de confinamiento magnético utilizan densidades menores, en comparación al confinamiento inercial, del orden de $n_e = 10^{20} \text{m}^{-3}$ y alcanzan temperaturas ligeramente mayores ,entre 15-30 keV, pero apuestan por tiempos de confinamiento más prolongados (segundos). En la figura (1.4) se representa este hecho.

Debido a que no hay material físico que pueda resistir las temperaturas del plasma, la opción para el confinamiento no son paredes solidas. En su lugar es necesario utilizar fuerzas con origen a distancia que interactúen con las partículas cargadas, y que a su vez puedan ser generadas desde una cierta distancia segura para el dispositivo, es decir, campos magnéticos. Los campos magnéticos utilizados para contener al plasma son generados por arreglos de bobinas, en una configuración toroidal, tipo dona. En los dispositivos llamados Tokamak.

Estos dispositivos parecen ser la apuesta más prometedora y avanzada, con sus pro-

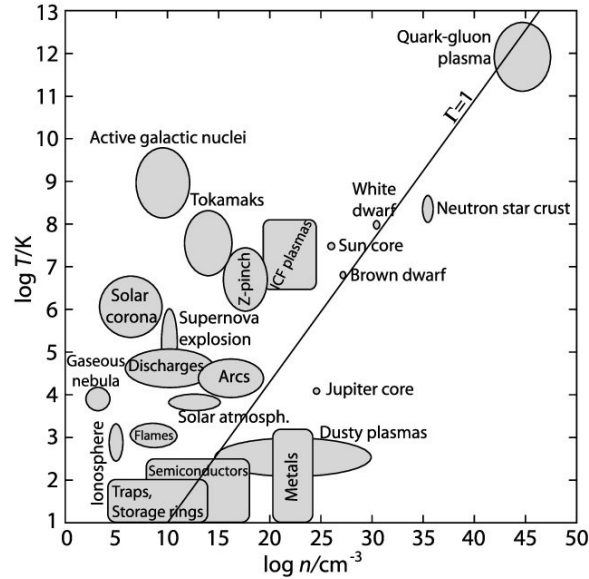


Figura 1.4: Diagrama de distintos tipos de plasmas de acuerdo con su temperatura y densidad. Figura recopilada de [20].

plas desventajas para producir lo más cercano a una estrella en la Tierra. Y al mismo tiempo el gradiente más grande de temperatura del universo [21].

1.3.1. Cámara Magnética Toroidal

El aparato de confinamiento magnético más popular alrededor del mundo es el Tokamak, del ruso cámara magnética toroidal.

En este dispositivo, un campo eléctrico inducido en un transformador central (solenoi-
de), arranca una corriente en la columna de plasma. Esto hace que las partículas en el plasma generen trayectorias circulares alrededor del centro. Bobinas horizontales (bobinas de campo vertical, también llamadas bobinas poloidales) generan líneas de campo circulares verticales alrededor de la columna de plasma controlando la posición de la columna de plasma dentro del dispositivo. Mientras que las bobinas en forma de "D" (Bobinas de campo toroidal) generan líneas de campo helicoidales que se tuercen alrededor de la superficie de la dona. Estas líneas de campos mantienen al plasma confinado en el vacío. Observar la figura (1.5).

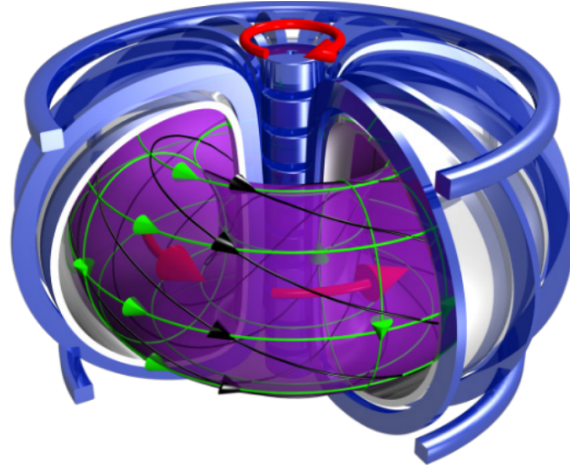


Figura 1.5: Diagrama de un Tokamak. Flecha roja central corresponde a campo eléctrico del transformador primario. Las flechas rojas en la columna de plasma representan a la corriente, utilizando al plasma como transformador secundario. Flechas verdes, campos magnéticos tanto poloidales (alrededor de la columna de plasma) y toroidales (alrededor de la columna central); Flecha negra, campos helicoidales resultantes [22].

1.4. Confinamiento Magnético.

En presencia de un campo magnético, una partícula cargada en movimiento va a describir una trayectoria circular alrededor de una línea de campo magnética. La dinámica de esta partícula está descrita por lo que se le conoce como la ecuación de fuerza de Lorentz,

$$m \frac{d}{dt} v = q(v \times \mathbf{B}), \quad (1.5)$$

donde m es la masa de la partícula, q su carga, v su velocidad, y \mathbf{B} el campo magnético al cual se somete. En presencia, a su vez, de un campo eléctrico la nueva dinámica estará dada por una combinación de ambas fuerzas

$$m \frac{d}{dt} v = q(\mathbf{E} + v \times \mathbf{B}). \quad (1.6)$$

Suponiendo un campo magnético constante ($\mathbf{B} = B\hat{z}$) y un campo eléctrico ausente en un sistema cartesiano ($\mathbf{E} = 0$), junto con una partícula cargada en movimiento, a

partir de la ecuación (1.5) se pueden deducir las ecuaciones de movimiento:

$$\ddot{v}_x = \frac{qB}{m} \dot{v}_y = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_x, \quad (1.7)$$

$$\ddot{v}_y = \frac{qB}{m} \dot{v}_x = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_y. \quad (1.8)$$

Lo cual, describe un movimiento armónico simple con una frecuencia de oscilación, *frecuencia de ciclotrón*:

$$\omega_c = \frac{|q| B}{m}. \quad (1.9)$$

Cuyo radio, se conoce como el *radio de Larmor* y esta dado por

$$r_L = \frac{mv_0}{|q| B} \quad (1.10)$$

donde $v_0 = \|\vec{v}\|$ es la magnitud de la velocidad de la partícula.

Ahora bien, suponiendo que se añade un campo eléctrico espacialmente uniforme distinto de cero, en la dirección $E = E\hat{y}$, y que la partícula parte del reposo, la trayectoria se vera afectada como lo indica la ecuación(1.6), de donde el sistema de ecuaciones de movimiento serán:

$$\frac{dv_z}{dt} = 0, \quad (1.11)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_x, \quad (1.12)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \pm \omega_c v_y. \quad (1.13)$$

De la ecuación (1.12) y (1.13) se obtiene un nuevo movimiento descrito por

$$v_x = v_0 e^{i\omega_c t}, \quad (1.14)$$

$$v_y = \pm i v_0 e^{i\omega_c t} - \frac{E_x}{B}, \quad (1.15)$$

siendo v_0 la velocidad inicial de la partícula cargada.

Por simplicidad pensemos en un ion. Cuando el ion comienza a moverse, inicialmente experimentará principalmente la fuerza eléctrica. A medida que se desarrolla una v_y positiva, el ion comienza a experimentar una fuerza magnética que acelera el ion en la dirección \hat{x} positiva. En seguida la trayectoria se vuelve curva a medida que el ion vira en la dirección \hat{x} mientras la v_x positiva sigue aumentando y como consecuencia se desarrolla una nueva fuerza magnética en dirección \hat{y} negativa, esta fuerza magnética contrarresta la fuerza eléctrica constante, causando eventualmente que el ion desacelere en la dirección \hat{y} . A continuación la velocidad v_y disminuye y finalmente se invierte, de modo que el ion comienza a dirigirse hacia $y = 0$. Este movimiento tiene a su vez una nueva fuerza magnética en dirección x negativa, por lo tanto, el ion también desacelerará en la dirección \hat{x} , llegando máximo a una velocidad $v_y = v_x = 0$, lo cual reinicia el proceso. Pero como la velocidad x nunca fue negativa, el resultado de todo esto es que el ion hace un desplazamiento positivo neto en la dirección x .

El movimiento resultante describe una trayectoria epicloide con un diámetro cambiante debido a las contribuciones que aceleran a la partícula adicionando o restando el movimiento dependiendo a la dirección con respecto del campo eléctrico. Observar la figura (1.6).

Para describir el cambio de la velocidad en una partícula debido a una fuerza perpendicular basta con relacionar el origen de las fuerzas en la ecuación (1.6). Donde,

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad (1.16)$$

Tomando el producto cruz con \mathbf{B} de ambos términos,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{v}B^2 - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}). \quad (1.17)$$

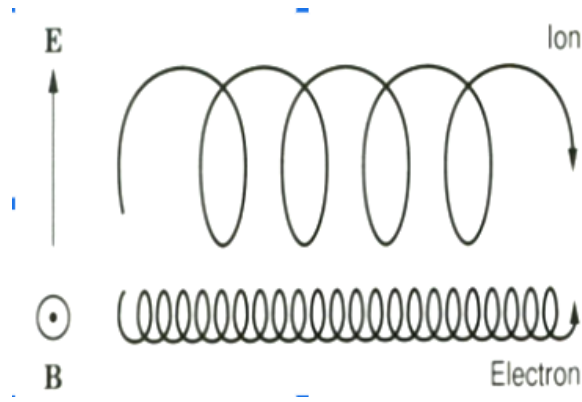


Figura 1.6: Trayectoria de una partícula cargada positivamente en la presencia de un campo eléctrico y magnético perpendiculares [23].

Considerando las componentes transversales, que son las que van a cambiar el movimiento,

$$\mathbf{v}_{\mathbf{E}} \equiv \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (1.18)$$

A esta velocidad se le conoce como velocidad de deriva debido a un campo eléctrico. En este punto es importante observar que así como se consideró una deriva en una partícula debido a un campo eléctrico, es decir una fuerza externa; se puede generalizar la velocidad de deriva para cualquier fuerza con una componente perpendicular al campo.

Este puede ser el caso de la fuerza gravitacional o de una fuerza centrífuga (deriva de curvatura). Observar, que en el caso de estas dos últimas fuerzas, la deriva resultante depende de las componentes de la velocidad original de la partícula. Otro tipo de velocidad de deriva es la resultante por el gradiente de campo magnético, la cual depende de la distribución de las líneas de campo en una órbita. En la figura (1.7) se representa el diagrama de algunas velocidades de deriva asociadas a las fuerzas mencionadas.

Al hablar de confinar partículas cargadas en trayectorias circulares por un campo magnético aparecen estas velocidades de deriva, generando que las partículas busquen escapar del confinamiento.

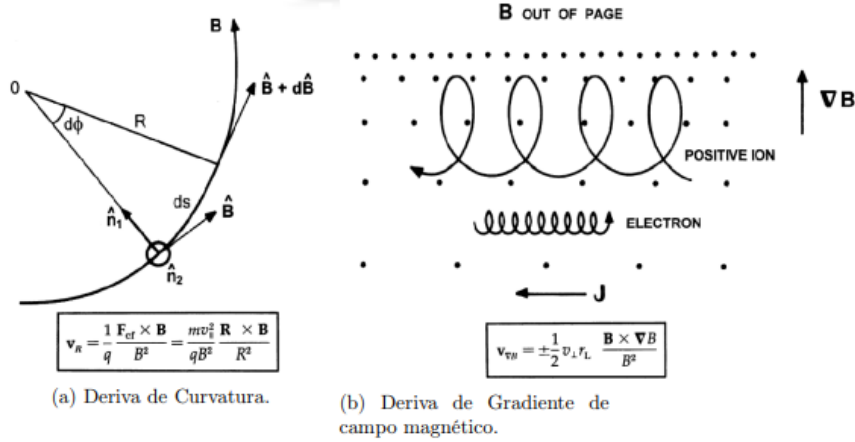


Figura 1.7: Diagramas de Fuerzas que originan las velocidades de deriva tanto para la deriva de curvatura (a) y la deriva por gradiente de campo magnético(b) [24].

Entonces, ¿Cómo un campo magnético puede contener a un plasma? Las partículas cargadas siguen las líneas de campo en pequeñas órbitas de Larmor a excepción que aparezcan velocidades de deriva que alteren su trayectoria. La solución más factible es generar un campo magnético cuyas líneas de campo descansen sobre superficies concéntricas, de tal forma , que se impida y contrarreste la generación de derivas. La configuración más adecuada es la de líneas toroidales que se enrosquen alrededor del toro. Este es el principio de los aparatos de confinamiento magnético, Tokamaks, RFP (reversed field pinch) y Stellarators. Se usan bobinas poloidales y toroidales, en el caso del Tokamak y RFPs, y bobinas helicoidales en los Stellarators, para generar el trizado de las líneas de campo magnético que permita escapar la menor cantidad de partículas. El diagrama de la figura (1.8) muestra las bobinas poloidales que en conjunción con bobinas toroidales generan líneas de campo magnético trenzadas en el caso de los Tokamaks; mientras que en los Stellarators, las bobinas helicoidales por si solas generan líneas de campo torcidas. Una configuración general toroidal de campo se caracteriza por la relación entre flujo de plasma en dirección poloidal y toroidal, dicha relación se expresa por el *factor de seguridad q*.

El factor q , que de forma implícita es la relación entre las fuerza de los campos poloidal y toroidal, resulta estar restringido por consideraciones de equilibrio, estabilidad y confinamiento de partículas. Esta cantidad representa uno de los principales parámetros

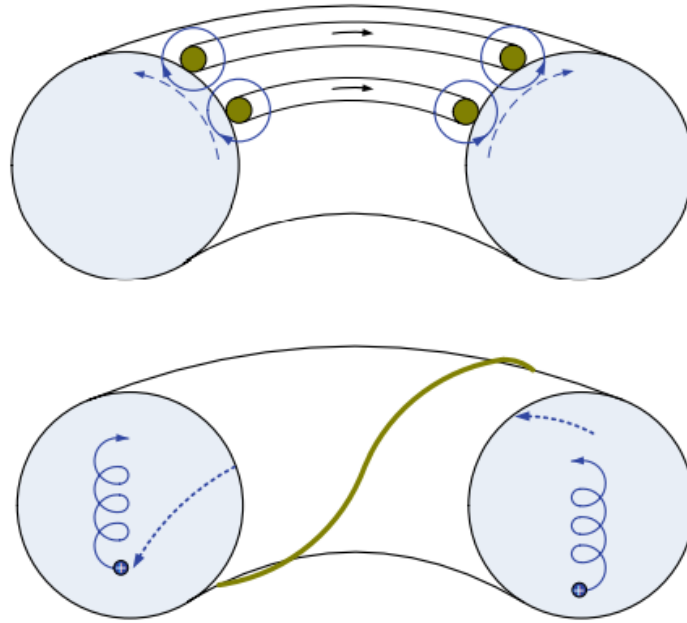


Figura 1.8: (Arriba) Diagramas de Bobinas poloidal en un Tokamak, (Abajo) Diagramas de Bobinas helicoidales en un Stellarator. [25]

a considerar en un experimento.

1.5. Acerca de este trabajo.

Una vez ubicado en el contexto de la producción de energía con base en la fusión nuclear controlada, en los capítulos posteriores se desarrollan los conceptos físicos necesarios para explorar las soluciones analíticas a distintos estados de equilibrio de plasma en la configuración de tokamak. Este trabajo está basado en la propuesta de soluciones de equilibrio realizada por Luca Guazzotto y Jeffrey P. Freidberg en [3] y [9].

Capítulo 2

Marco Teórico.

Existen diferentes aproximaciones para estudiar diversos fenómenos en plasmas. Algunos fenómenos pueden ser estudiados desde ecuaciones macroscópicas considerando al plasma como un sistema constituido por un solo fluido o varios fluidos, cada uno con sus propias cualidades. En otros fenómenos es conveniente estudiar al plasma desde un punto de vista macroscópico, usando física estadística en lo que se conoce que la Teoría Cinética o Ecuación de Vlasov.

En este trabajo se aborda el modelo del plasma desde lo que se conoce como teoría magnetohidrodinámica ideal (MHD). Es decir, el plasma visto como un fluido hidrodinámico con conductividad infinita (resistividad cero) sujeto a fuerzas electromagnéticas[26]. Lo interesante de este modelo es, como se muestra en las siguientes secciones, que un conjunto de ecuaciones permiten describir un sistema de forma macroscópica, hasta llegar a elaborar condiciones de equilibrio para un plasma en confinamiento, así como condiciones de estabilidad.

2.1. Ecuaciones Magnetohidrodinámicas.

La primera observación a considerar es suponer un plasma compuesto de iones y electrones donde la diferencia de masa entre ambos, permite fijarse solamente en el comportamiento de los iones, suponiendo que lo que se intenta describir es un fluido

de iones y la densidad de partículas es aproximadamente la misma, n [27]. Mientras que la intervención de los electrones sera descrita por una ecuación conocida como la *ley de Ohm generalizada*. Por lo tanto, dicho fluido de iones posee una densidad de masa:

$$\rho = n_i M + n_e m \approx n(M + m) \approx nM \quad , \quad (2.1)$$

una densidad de carga:

$$\sigma = (n_i - n_e)e \quad , \quad (2.2)$$

una velocidad en el sistema:

$$\mathbf{u} = (n_i M \mathbf{u}_i + n_e m \mathbf{u}_e) / \rho \approx (M \mathbf{u}_i + m \mathbf{u}_e) / M \approx \mathbf{u}_i + (m/M) \mathbf{u}_e \quad , \quad (2.3)$$

y una densidad de corriente:

$$\mathbf{J} = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e) \approx ne(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \quad . \quad (2.4)$$

Observar que los términos m/M son despreciables.

Ahora bien, algunas de las ecuaciones magnetohidrodinámicas pueden ser obtenidas a partir de este punto considerando la ecuación de continuidad: una ecuación para conservación de masa, conservación de carga y conservación de momento

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{Conservación de masa.} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J}) = 0 \quad \text{Conservación de carga.} \quad (2.6)$$

De forma similar que en un fluido se puede llegar a una ecuación de momento, en magnetohidrodinámica al considerar el origen de fuerzas sobre el plasma se tiene:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (2.7)$$

Donde en (2.7), el primer término de lado derecho corresponde a la fuerza por un campo eléctrico, el segundo a la fuerza de Lorentz y el tercero debido al gradiente de

presión, de forma similar a un fluido.

A continuación, podemos asociar una relación adicional, con el sentido de completitud del sistema. Esta última expresión parte de las variables termodinámicas del sistema para asociar la ecuación de estado para la presión, la cual, juega el papel de la ecuación de conservación de energía del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad \text{Ecuación adiabática,} \quad (2.8)$$

donde $\gamma = (N+2)/(N)$ corresponde al coeficiente adiabático en donde N es el número de dimensiones del sistema.

Para finalizar el conjunto de ecuaciones basta con añadir, por el marco electromagnético de nuestro sistema, las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad , \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \sigma \quad . \quad (2.12)$$

Una observación pertinente es que la cuasi-neutralidad del plasma, $\sigma \approx 0$, sugiere que no hay fuerzas eléctricas, $\sigma \mathbf{E}$, actuando sobre el fluido [28]. Además se pide como condición que el sistema a estudiar no tenga corriente de desplazamiento, de tal forma que la ecuación (2.10) se convierte en :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.13)$$

Por otro lado, considerando que la masa es sustancialmente menor para los electrones que para los iones, se puede obtener una ecuación para el campo eléctrico a partir de su ecuación de movimiento ignorando la inercia. La siguiente expresión

(2.14) rescata el comportamiento de los electrones

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} + \frac{1}{en_e} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) - \frac{m_e}{e} \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} . \quad (2.14)$$

Lo que se conoce como la *Ley de Ohm generalizada* para un plasma. En el caso de conductividad infinita, y despreciando los términos de radio finito de Larmor y otros efectos como la inercia del electrón, la ecuación (2.14) se simplifica a:

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} . \quad (2.15)$$

Esta aproximación se conoce como "Magnetohidrodinámica ideal". Bajo estas condiciones las líneas de campo magnético dentro de un plasma ideal, seguirán ligadas a su posición en el plasma después de un movimiento arbitrario del plasma. Se dice que las líneas de campo están congeladas en el plasma [27].

Estas ecuaciones (2.5)-(2.15) conforman una caja de herramientas al tratar con un fluido individual eléctricamente cargado y proveen una descripción auto-consistente al satisfacer las suposiciones consideradas a continuación.

Suposiciones importantes.

- El plasma posee carga neutra y sus dimensiones son mucho mayores que el radio el de Debye;
- Las velocidades características de los fenómenos a considerar son mucho menores comparadas con la velocidad de la luz;
- Los gradientes de presión y densidad son paralelos entre sí, de tal modo que no aparecen fuerzas electromotrices o electrotérmicas;
- Las escalas de tiempo utilizadas son mayores a los periodos de ciclotrón tanto para electrones como para iones [25].

2.2. Equilibrio Magnetohidrodinámico.

Los principales roles del campo magnético en un aparato de confinamiento son dos, balancear los gradientes de presión y reducir la pérdida tanto de energía como de partículas.

La corriente inducida en el plasma por el solenoide central, genera una fuerza de compresión, tipo "pinch" que balancea la presión del plasma dentro del toro.

Por sí solas las fuerzas de expansión generadas por el anillo de corriente no estarían en equilibrio debido a la repulsión alrededor del eje central [29]. Para poder ser soportado, el equilibrio debe estar auxiliado por bobinas rígidas externas, tal como lo indica el teorema de virial [30].

Una configuración se encuentra en equilibrio estático según la ecuación (2.7) cuando sucede para cada parte del sistema:

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} . \quad (2.16)$$

En una descarga en el plasma, el sistema pasa por un número infinito de pequeños estados de equilibrio estático.

Sustituyendo la ecuación de Ampère (2.10) en (2.16) para J , se observa que existe un balance en el equilibrio $\nabla(p + \mathbf{B}^2/2\mu_0) = (\mathbf{B}^2/\mu_0)(\mathbf{B}/B \cdot \nabla\mathbf{B}/B)$; el cociente entre los términos dentro del paréntesis es el parámetro de mérito β .

2.2.1. Equilibrio en un cilindro.

Un caso interesante antes de llegar a la configuración toroidal es el equilibrio en un cilindro simétrico azimutal con coordenadas (r, θ, z) .

Dicho equilibrio, en primera aproximación, está descrito por la ecuación (2.16), que

junto con la ley de Ampère (2.10) dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$J_\theta B_z - J_z B_\theta = \frac{dp}{dr} \quad (2.17)$$

$$-\frac{dB_z}{dr} = \mu_0 J_\theta \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(rB_\theta)}{dr} = \mu_0 J_z \quad (2.19)$$

Sustituyendo J_θ de (2.18) y J_z de (2.19) en la expresión (2.17). Se llega a la relación:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2} \right) + \frac{B_\theta^2}{r} \right) \quad (2.20)$$

Por lo tanto de la ecuación (2.20), la presión de plasma puede ser balanceada por el gradiente de ambas componentes magnéticas, o solamente por la componente angular magnética dirigida hacia adentro.

Integrando la relación (2.20) con respecto a r se llega a la relación:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{2}{a^2} \int_0^a p(r) r dr = \frac{B_\theta^2}{2\mu_0 a^2} + 2\pi \int_0^a \frac{B_{z,r=a}^2 - B_z^2}{2\mu_0} r dr \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi^2 a^2} I_z^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\langle B_z^2 \rangle - B_{z,r=a}^2), \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde I_z es la corriente de plasma de radio a rodeada por vacío. La relación entre la presión y la compresión por "pinch", es decir, el efecto de la corriente axial I_z se mide por:

$$\beta_{pol} = \frac{8\pi^2 \langle p \rangle}{\mu_0 I_z^2} \quad (2.22)$$

Mientras que el segundo término corresponde a la proporción de la presión magnética en el vacío comparado con el promedio B_z .

La ecuación (2.22), describe de forma burda el equilibrio entre las fuerzas que existen en una configuración cilíndrica.

Experimentos que estudian este tipo de configuraciones son por ejemplo el Z-pinch y el

θ -pinch [16]. En un Z-pinch una corriente longitudinal $\mathbf{J} = J_z(r)\hat{e}_z$ dentro de un plasma en un cilindro produce un campo magnético en la dirección poloidal $\mathbf{B} = B_\theta(r)\hat{e}_\theta$, con lo que el plasma siente una fuerza debido a $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ que balancea comprime a la columna del mismo, balanceando la presión. Por otro lado, en un θ -pinch un campo magnético externo coaxial $\mathbf{B} = B_z(r)\hat{e}_z$ es pulsado de forma que induce una corriente en dirección angular alrededor de la columna $\mathbf{J} = J_\theta(r)\hat{e}_\theta$, esta corriente es opuesta a la corriente que produjo el campo magnético; su interacción con el campo nuevamente produce una fuerza $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ que confina al plasma. Observar la figura (2.1).

Una observación interesante, es que la combinación de ambos θ y Z-pinch genera una configuración, parecida a un segmento de un Tokamak, que se conoce que un "Screw pinch." pinch de tornillo. Estos dispositivos, aunque prometedores en el confinamiento

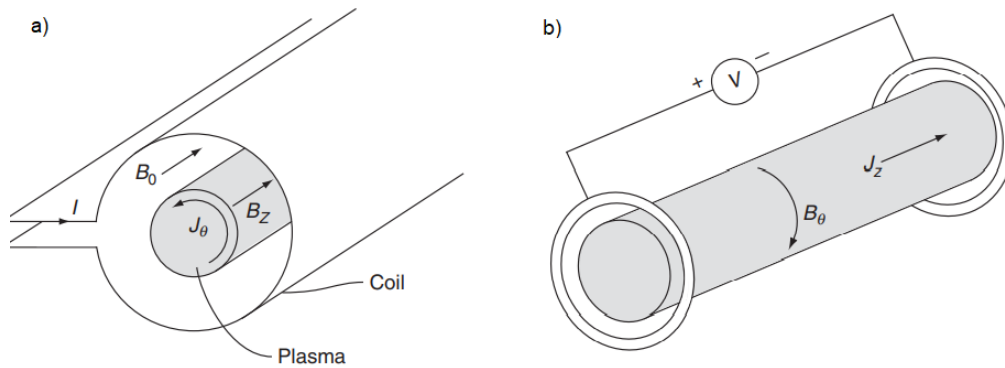


Figura 2.1: Diagramas de configuraciones de experimentos cilíndricos. a) θ -pinch y b)Z-pinch [28].

to de plasmas poseen una fuerte desventaja que es la pérdida de partículas en los extremos del cilindro. Incluso intensificando el campo magnético en sus extremos, lo cual reduce la sección transversal en los llamados espejos magnéticos no es suficiente para lograr contener a las partículas satisfactoriamente [31].

2.3. Equilibrio de Plasma Toroidal.

Con la intención de reducir la pérdida de partículas, el siguiente paso intuitivo es confinar el plasma en un cilindro doblado, que se cierre sobre sí mismo, de forma

axisimétrica a un eje fuera del cilindro. Esto nos lleva a considerar un nuevo sistema coordenado (r, θ, z) donde $dz \rightarrow r d\theta$, la transformación de la columna cilíndrica a un Toro, tal como se muestra en la figura (2.2). Las coordenadas cilíndricas son empleadas para analizar el equilibrio 2-D general. De la forma más general, se puede suponer un

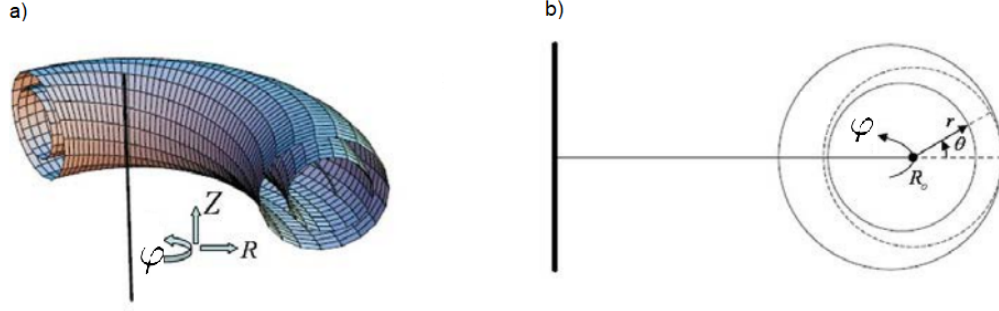


Figura 2.2: Coordenadas en sistemas toroidales:a) Coordenadas cilíndricas (r, φ, z) b) sección transversal de un tokamak en coordenadas toroidales (R, φ, θ) . [29].

par de campos vectoriales \mathbf{J} y \mathbf{B} ambos con una parte poloidal y otra toroidal. De tal forma que $\mathbf{J} = J_{pol} + J_{tor}$ y $\mathbf{B} = B_{pol} + B_{tor}$.

Debido a la conservación de la corriente y la ley de Gauss, respectivamente, se satisface que tanto $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Entonces, se puede proponer un vector potencial \mathbf{A} tal que, $\nabla \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Donde \mathbf{A} puede ser escrito como: $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z$, entonces \mathbf{B} sera:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi r & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\varphi & A_z \end{vmatrix}, \quad (2.23)$$

pero debido a la axisimetría de la configuración se tiene que $\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} = 0$. Por lo que \mathbf{B} se reduce a:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_r}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \mathbf{e}_z, \quad (2.24)$$

reescribiendo:

$$\mathbf{B} = \nabla \times (A_\varphi \mathbf{e}_\varphi) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_r}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi. \quad (2.25)$$

Definiendo las variables:

$$\psi := -rA_\varphi, \quad (2.26)$$

$$F := rB_\varphi = r \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right), \quad (2.27)$$

y renombrando :

$$\nabla\varphi = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \quad (2.28)$$

donde $\psi(R, z)$ es lo que se conoce como la función de flujo poloidal mientras que φ es la variable simétrica respecto a z como se ve en la figura (2.2). A la función $F(R, z)$ se le conoce como la función de flujo de corriente toroidal.

La ecuación (??) puede ser reescrita como:

$$\mathbf{B} = \nabla\varphi \times \nabla\psi + F\nabla\varphi. \quad (2.29)$$

Sustituyendo en la ley de Ampère , $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, se obtiene las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{J} &= \nabla \times \mathbf{B} \\ &= \nabla \times (\nabla\varphi \times \nabla\psi) + \nabla \times (F\nabla\varphi) \\ &= \nabla \times \left[\frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \times \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial\psi}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \right] + \nabla F \times \nabla\varphi. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Donde $\nabla\varphi$ y $\nabla\psi$ han sido expandidos a primer término de lado derecho de la igualdad. El segundo término se utiliza la igualdad vectorial $\nabla \times (F\mathbf{v}) = F\nabla \times \mathbf{v} + \nabla F \times \mathbf{v}$. Renombrando $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ implica que $\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \nabla\varphi = 0$. Continuando con la

expansión del primer término de la ecuación (2.30) se tiene:

$$\begin{aligned}
\mu_0 \mathbf{J} &= \nabla \times \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_z \right] + \nabla F \times \nabla \varphi \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] \mathbf{e}_\varphi + \nabla F \times \nabla \varphi \\
&= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) \mathbf{e}_\varphi + \nabla F \times \nabla \varphi \\
&= \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) \nabla \varphi + \nabla F \times \nabla \varphi.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Introduciendo el operador elíptico Δ^* conocido como operador de Grad-Shafranov :

$$\Delta^* \psi := \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \tag{2.32}$$

la densidad de corriente de la ecuación (2.31) puede ser escrita como:

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = \Delta^* \psi \nabla \varphi + \nabla F \times \nabla \varphi. \tag{2.33}$$

Esta expresión descompone la densidad de corriente en una corriente toroidal, $\Delta^* \psi \nabla \varphi$ y una corriente poloidal, $\nabla F \times \nabla \varphi$. Por otro lado, la componente toroidal de la corriente es paralela a $\nabla \varphi$ y la componente poloidal es perpendicular a $\nabla \varphi$ observando que $\nabla \varphi \cdot \nabla F \times \nabla \varphi = 0$.

Sustituyendo la ecuación (2.29) y (2.33) en la ecuación de equilibrio (2.16) y asumiendo por simplicidad $\mu_0 = 1$, uno obtiene:

$$\begin{aligned}
\nabla p &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\
&= (\Delta^* \psi \nabla \varphi + \nabla F \times \nabla \varphi) \times (\nabla \varphi \times \nabla \psi + F \nabla \varphi).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Para poder seguir simplificando esta expresión es necesario mostrar que $p = p(\psi)$ y $F = F(\psi)$. Para p se tiene que calculando el producto interno con \mathbf{B} con ambos lados

de la ecuación de equilibrio, (2.16), se tiene:

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (2.35)$$

Combinado (2.16) con la ecuación (2.35) y utilizando que debido a la axisimetría $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{e}_z$ con $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \nabla p &= (\nabla \varphi \times \nabla \psi + F \nabla \varphi) \cdot \nabla p \\ &= (\nabla \varphi \times \nabla \psi) \cdot \nabla p \\ &= \left(\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \times \nabla \psi \right) \cdot \nabla p \\ &= \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \cdot (\nabla \psi \times \nabla p). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dado que tanto $\nabla \psi$ como ∇p son vectores perpendiculares a \mathbf{e}_φ (debido a la axisimetría), esto implica que para que la ecuación (2.36) satisfaga la ecuación (2.35), se tiene que cumplir:

$$\nabla \psi \times \nabla p = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla p \parallel \nabla \psi. \quad (2.37)$$

A su vez, esto significa que la presión es función únicamente del flujo poloidal, $p = p(\psi)$, y su gradiente se puede escribir como:

$$\nabla p = \frac{dp}{d\psi} \nabla \psi. \quad (2.38)$$

Para demostrar que F es una función solo de φ , se sigue un procedimiento similar al seguido para p pero usando la densidad de corriente \mathbf{J} . El producto interno de \mathbf{J} con ambos lados de la ecuación de equilibrio, (2.16), da:

$$\mathbf{J} \cdot \nabla p = \mathbf{J} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (2.39)$$

Utilizando de nuevo que $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{e}_z$ con $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} \cdot \nabla p &= (\Delta^* \psi \nabla \psi + \nabla F \times \nabla \varphi) \cdot \nabla p \\
 &= (\nabla F \times \nabla \varphi) \cdot \nabla p \\
 &= \left(\nabla F \times \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \right) \cdot \nabla p \\
 &= \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \cdot (\nabla F \times \nabla p).
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Dado que tanto ∇F como ∇p son vectores perpendiculares a \mathbf{e}_φ (debido a la axisimetría), esto implica que para que la ecuación (2.40) satisfaga la ecuación (2.39), tenemos que:

$$\nabla F \times \nabla p = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla p \parallel \nabla F \quad \Rightarrow \quad \nabla F \parallel \nabla \psi. \tag{2.41}$$

A su vez, esto significa que F es función únicamente del flujo poloidal, $F = F(\psi)$, y su gradiente se puede escribir como:

$$\nabla F = \frac{dF}{d\psi} \nabla \psi. \tag{2.42}$$

Sustituyendo los gradientes obtenidos en la ecuación (2.34) se llega a :

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{d\psi} \nabla \psi &= \left(\Delta^* \psi \nabla \varphi + \frac{dF}{d\psi} \nabla \psi \times \nabla \varphi \right) \times (\nabla \varphi \times \nabla \psi + F \nabla \varphi) \\
 &= \Delta^* \psi \nabla \varphi \times (\nabla \varphi \times \nabla \psi) + F \left(\frac{dF}{d\psi} \nabla \psi \times \nabla \varphi \right) \times \nabla \varphi \\
 &= \frac{\Delta^* \psi}{r^2} \mathbf{e}_\varphi \times (\mathbf{e}_\varphi \times \nabla \psi) + \frac{F}{r^2} \frac{dF}{d\psi} (\nabla \psi \times \mathbf{e}_\varphi) \times \mathbf{e}_\varphi.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Recordando que debido a la axisimetría, el gradiente del flujo poloidal, $\nabla \psi$, es perpendicular a \mathbf{e}_φ y que $\|\mathbf{e}_\varphi\| = 1$, tenemos que $\mathbf{e}_\varphi \times (\mathbf{e}_\varphi \times \nabla \psi) = (\nabla \psi \times \mathbf{e}_\varphi) \times \mathbf{e}_\varphi = -\nabla \psi$.

Por lo tanto, la ecuación 2.43 puede ser simplificada en:

$$\frac{dp}{d\psi} \nabla \psi = -\frac{\Delta^* \psi}{r^2} \nabla \psi - \frac{F}{r^2} \frac{dF}{d\psi} \nabla \psi. \tag{2.44}$$

Lo que conduce directamente la relación que caracteriza completamente al equilibrio de plasma en un toro, expresión conocida que la ecuación de *Grad-Shafranov* [32].

$$\Delta^* \psi = -r^2 \frac{dp}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi}. \quad (2.45)$$

Se encuentra comúnmente en la literatura utilizando μ_0 :

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\psi} - \frac{1}{2} \frac{dF^2}{d\psi}, \quad (2.46)$$

junto con

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1}{r} \nabla \psi \times \mathbf{e}_\varphi + \frac{F}{r} \mathbf{e}_\varphi \\ \mu_0 \mathbf{J} &= \frac{1}{r} \frac{dF}{d\psi} \nabla \psi \times \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \Delta^* \psi \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (2.47)$$

La ecuación de Grad-Shafranov, 2.46, es una ecuación diferencial parcial no lineal, cuyas soluciones son generalmente generadas numéricamente. Sin embargo, existen ciertas consideraciones bajo las cuales la ecuación puede ser estudiada de forma analítica. Uno de estos casos es el de las soluciones a los perfiles de Solov'ev, para los cuales los términos de las derivadas de presión y de F^2 se suponen constantes. Esto lleva a resolver un problema más sencillo de un sistema de ecuaciones con condiciones explícitas. Pero el modelo cobra la factura al tener que suponer que la corriente toroidal es casi constante y salta abruptamente a cero en la frontera del plasma con vacío, lo cual está muy lejos de la realidad experimental [28].

Existen otras aproximaciones analíticas a la ecuación de Grad-Shafranov cuyas consideraciones se aproximan desde distintos enfoques a la situación experimental. En particular en este trabajo se analizará en un capítulo posterior, los perfiles propuestos por Luca Guazzotto y J.P. Freidberg, publicado en el *Journal of Plasma Physics* [3].

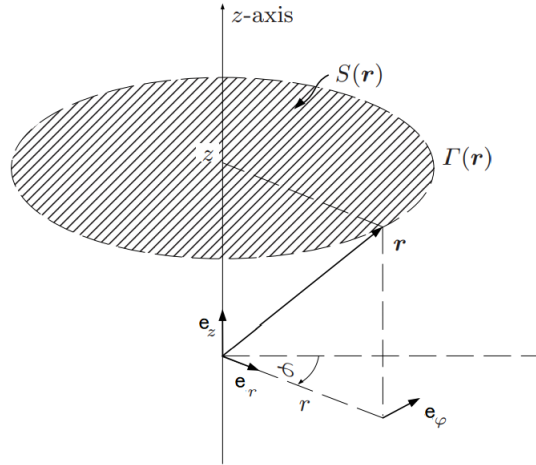


Figura 2.3: Coordenadas cilíndricas extraído de [33].

Observaciones acerca de la función de flujo poloidal.

La función de flujo poloidal es una de las variables más importantes como se puede observar en el desarrollo anterior y a partir de su estimación se puede tener conocimiento extra del plasma.

Su definición (2.26) se propone a partir de considerar una superficie $S(\mathbf{r})$ con frontera $\Gamma(\mathbf{r})$ como se muestra en la figura (2.3). La función de flujo magnético poloidal está relacionada con la integral de superficie por la cual atraviesa el campo magnético en dirección poloidal (vertical) para un radio dado:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \vec{B}_z(\rho, z) r \, dr d\varphi = \int_0^r r \vec{B}_z(r, z) \, dr . \quad (2.48)$$

Lo cual lleva a relacionar a la función de flujo ψ poloidal con el vector de potencial magnético A en la ecuación (2.24), donde se llega a que:

$$\psi := -rA_\varphi. \quad (2.49)$$

Otra observación importante a partir de lo obtenido es que retomando la condición

de equilibrio (2.16) y realizando el producto interior con los vectores \vec{B} y \vec{J} :

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0 \quad (2.50)$$

$$\vec{J} \cdot \nabla p = 0 \quad . \quad (2.51)$$

Esto quiere decir que la presión del plasma debe ser constante sobre las superficies de campo. Es decir, que las superficies isobáricas coinciden con superficies magnéticas. Dichas superficies se anidan alrededor de una línea de campo principal, a esta región se le conoce como el eje magnético [33].

Aún más, de la ecuación (2.29) se sigue que:

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0 \quad . \quad (2.52)$$

Lo cual indica que las superficies magnéticas, y por ende las isobáricas, coinciden con superficies constantes de la función de flujo poloidal.

Capítulo 3

Perfiles de equilibrio.

3.1. Algunos Perfiles.

La primera solución analítica a la ecuación de Grad-Shafranov se conoce como el perfil de Solov'ev . En este tipo de solución se propone que las funciones $dp/d\psi$ y $F dF/d\psi$, en la ecuación (2.45) sean constantes [34]. A pesar de que las soluciones poseen muy buenas cualidades se alejan de la realidad debido a que las condiciones físicas reales poseen saltos en la corriente, tanto poloidal y toroidal, así como la presión en la frontera de la columna del plasma, lo cual, no se puede lograr con este tipo de soluciones.

Para conocer más acerca de este tipo de soluciones se recomienda [1], donde se exploran las cualidades que deben satisfacer la elección de parámetros, así como el número de términos en serie de la solución a la ecuación homogénea, y cómo afectan estas elecciones a los equilibrios obtenidos.

Otro tipo de soluciones a la ecuación GS, se obtienen de considerar que las funciones $dp/d\psi$ y $F dF/d\psi$ tienen un comportamiento lineal más una constante. Esto produce perfiles similares, con la diferencia de que las densidades de corriente, la presión y el gradiente de presión se van a cero en la frontera del plasma. Las soluciones resultantes se aproximan a los resultados experimentales de mejor manera que los perfiles de Solov'ev.

Este tipo de soluciones son asociadas con las que involucran funciones de separación hipergeométricas no intuitivas, funciones de onda de Coulomb o funciones de Whittaker. La elección de constantes de separación requiere de decisiones delicadas que afectan demasiado la solución. Es decir, que la complejidad y sensibilidad este tipo de soluciones la hacen poco útiles [2].

Este capítulo está dedicado al estudio las soluciones de equilibrio realizados por Luca Guazzotto usando los perfiles de solución en términos de series de funciones senos y cosenos en [3], con la finalidad de, en un trabajo posterior, analizar la estabilidad de estos equilibrios por medio del enfoque dado por Freidberg en [35]. A continuación se exponen los aspectos más importantes del trabajo de Guazzotto.

En las secciones subsecuentes se muestran los estudios realizados usando este método, primero con un análisis de las soluciones y luego obteniendo, por medio de un código que implementa la solución analítica, los campos, la presión, el factor de seguridad y la corriente de tres dispositivos diferentes.

3.1.1. Soluciones en Senos y Cosenos.

Ecuaciones principales y condiciones de frontera.

Partiendo de la ecuación de Grad-Shrafranov, 2.45, expresada de la forma:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\Psi} - \frac{1}{2} \frac{dF^2}{d\Psi} , \quad (3.1)$$

con Ψ , la función de flujo poloidal y $p(\Psi)$, $F(\Psi) = rB_\varphi$ funciones libres.

Suponiendo, por simplicidad, que las funciones p y F son cuadráticas de la forma:

$$p(\Psi) = p_0 \left(\frac{\Psi}{\Psi_0} \right)^2 \quad (3.2)$$

$$F^2(\Psi) = R_0^2 B_0^2 \left[1 + \frac{2\delta B}{B_0} \left(\frac{\Psi}{\Psi_0} \right)^2 \right], \quad (3.3)$$

donde Ψ_0 es el flujo poloidal en el eje magnético, R_0 es el radio mayor, B_0 corresponde al campo toroidal en el vacío para $r = R_0$, p_0 es la presión en del eje y la fracción $\frac{\delta B}{B_0}$ es la proporción diamagnética del campo toroidal en el eje, es decir, que tanto repele nuestro plasma al campo magnético en el eje. Con el excepción de Ψ_0 los demás parámetros son variables independientes de la solución, mientras que Ψ_0 es una variable dependiente de la solución. Por otro lado, para satisfacer condiciones más realistas se requiere especificar que los perfiles de la presión de plasma, el gradiente de presión de plasma y la densidad de corriente toroidal se vayan a cero en el superficie del plasma. Esto implica la primera condición de frontera:

$$\Psi(\text{frontera}) = 0 \quad (3.4)$$

Por lo tanto, la ecuación GS se convierte en una ecuación diferencial parcial lineal en Ψ ,

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \left(\frac{2\mu_0 p_0}{\Psi_0^2} r^2 + \frac{2r_0^2 B_0 \delta B}{\Psi_0^2} \right) \Psi = 0 \quad (3.5)$$

Para resolver esta ecuación, el procedimiento utilizado esta basado en separación de variables, primero se normalizan las coordenadas. La normalización queda definida como:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 \psi & 0 \leq \psi \leq 1 \\ r &= R_0 (1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon x)^{1/2} & -1 \leq x \leq 1 \\ z &= ay & -\kappa \leq y \leq \kappa . \end{aligned}$$

El parámetro $\varepsilon = a/R_0$ es el inverso de la razón de aspecto y κ es la elongación de la columna de plasma.

Conviene hacer los siguientes cambios:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon} &= \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} < 1 \\ \alpha^2 &= \frac{2R_0^2 a^2}{\Psi_0^2} \left(\mu_0 p_0 + \frac{B_0 \delta B}{1 + \varepsilon^2} \right) \geq 0 \\ \nu &= \frac{\mu_0 p_0}{\mu_0 p_0 + B_0 \delta B / (1 + \varepsilon^2)} \geq 0 .\end{aligned}$$

Entonces, la ecuación (3.5) se convierte en:

$$(1 + \hat{\varepsilon}x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\alpha^2 (1 + \hat{\varepsilon}vx) \psi \quad \psi(\text{frontera}) = 0 . \quad (3.6)$$

La primera observación es que la solución trivial $\psi = 0$ satisface a su vez la ecuación y la condición de frontera.

Por otro lado, el parámetro α convierte al problema en un problema de eigenvalores con α el eigenvalor por determinar. A su vez, α siendo positivo, asegura que no se invierte la densidad de corriente toroidal. Y finalmente, debido a que como $\alpha \propto 1/\Psi_0$, el eigenvalor α determina el valor desconocido del flujo poloidal en el eje.

Para que ψ (eje magnético) = 1 se satisfaga, se utiliza que ψ es lineal por lo que un cambio de escala de la función propia es suficiente.

El último parámetro ν está determinado debido a que conocemos todas las variables de las que depende, y nos permite saber de forma rápida las condiciones de fuerza de nuestro problema, es decir:

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq v \leq v_{\text{máx}}, \\ \nu &= 0 \quad \text{Sistema Libre de fuerzas } (p_0 = 0), \\ \nu &= 1 \quad \beta_p = 1 (\delta B = 0), \\ \nu &= v_{\text{máx}} = 1/\hat{\varepsilon} \quad \text{Inversión de corriente en } r = R_0 - a(\text{alta}\beta) . \end{aligned} \right\}$$

A continuación, se procede a resolver el sistema por separación de variables. Supo-

niendo ψ compuesta por funciones:

$$\psi(x, y) = \sum X_n(x)Y_n(y) . \quad (3.7)$$

Sustituyendo, se tienen las ecuaciones para X y Y ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + h_n^2 Y_n &= 0, \\ (1 + \hat{\varepsilon}x) \frac{d^2 X_n}{dx^2} + (k_n^2 + \lambda^2 x) X_n &= 0, \\ k_n^2 &= \alpha^2 - \frac{h_n^2}{1 + \varepsilon^2}, \\ \lambda^2 &= \alpha^2 \hat{\varepsilon}v , \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

utilizando como constantes de separación h_n^2 , y ya que $\alpha^2 > 0$ entonces $\lambda^2 > 0$. Elegir la constantes de separación depende de observar las soluciones con superficies de flujo cerradas dentro del plasma. Si cada término en la expansión produce superficies anidadas alrededor de $x = 0$, $y = 0$, entonces la suma de los términos se cerrará alrededor de $x = 0$, $y = 0$. Y a su vez los términos convergerán a un valor respectivo.

Las soluciones para cada término son cerca del eje geométrico de la forma, $\psi_n = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x^2 + c_4 y^2 + \dots$. Donde, debido al comportamiento que se espera, de elipses anidadas alrededor del eje magnético, se puede asegurar que los términos c_3, c_4 deben tener misma signatura para asegurar superficies cerradas. Para que esto suceda, se eligen las constantes de tal forma que $h_n^2 > 0$ y que su magnitud no exceda cierto valor para que suceda $k_n^2 > 0$, por lo que cada término de la suma producirá superficies de flujo cerradas cerca del eje. Las condiciones para la elección de constantes son:

$$\begin{aligned} 0 \leq h_n^2 \leq h_{\text{máx}}^2, & \quad h_{\text{máx}} = (1 + \varepsilon^2)^{1/2} \alpha, \\ k_{\text{máx}}^2 \geq k_n^2 \geq 0, & \quad k_{\text{máx}} = \alpha . \end{aligned}$$

La cantidad de términos a considerar depende de las soluciones. Las soluciones pueden requerir 4 constantes de separación y 7 o 12 términos en la suma si la configuración de interés es simétrica o asimétrica, debido a las restricciones en la frontera.

Por lo tanto, de la ecuación (3.8) se tienen dos soluciones, ambas regulares en el dominio de interés. Aplicando del método de Frobenius se muestra que una solución se comporta como $C_n(x) = a_0 +$ para x pequeñas. La otra solución se comporta como $S_n(x) = b_1x +$. Obtenemos así las dos soluciones expandiendo :

$$X_n(x) = \begin{cases} C_n(x) = \sum \left[\hat{a}_m x^m \cos(k_n x) + \hat{b}_m x^m \sin(k_n x) \right] \\ S_n(x) = \sum \left[\tilde{a}_m x^m \cos(k_n x) + \tilde{b}_m x^m \sin(k_n x) \right] \end{cases} \quad .. \quad (3.9)$$

y

$$Y_n(y) = \begin{cases} \cos(h_n y) \\ \sin(h_n y) \end{cases} \quad (3.10)$$

Las soluciones $X_n(x)$ son encontradas de considerar que la ecuación (3.8) tiene un punto singular regular en $x = -1/\hat{\varepsilon}$ ($r = 0$) y un punto singular irregular en $x = r = \infty$. Pero, el régimen de interés $-1 \leq x \leq 1$ no incluye las singularidades.

Los m -ésimos coeficientes son proporcionales a $\hat{\varepsilon}^m$, por lo que si $|\hat{\varepsilon}| \ll 1$ por lo que se puede asegurar la convergencia de las series.

Sustituimos cada expansión $X_n(x)$ y $Y_n(y)$ en (3.8). Esto conduce a dos tipos de términos para cada tipo de expansión, $\cos(knx)$ y $\sin(knx)$.

Luego de establecer cada coeficiente en cero, se producen las relaciones de recursión para los coeficientes.

Las relaciones de recursión son idénticas para ambas expansiones, aunque los coeficientes iniciales distintos de cero son diferentes.

A continuación se presentan las relaciones recursivas para los coeficientes $\hat{a}_m, \hat{b}_m, \tilde{a}_m, \tilde{b}_m$ así como la primera y segunda derivada analíticas que son necesarias para derivadas

posterior :

$$\left. \begin{aligned} a_m &= -\frac{1}{m(m-1)} [\hat{\varepsilon}(m-1)(m-2)a_{m-1} + (\lambda^2 - \hat{\varepsilon}k_n^2) a_{m-3} \\ &\quad + 2(m-1)k_n b_{m-1} + 2\hat{\varepsilon}(m-2)k_n b_{m-2}] , \\ b_m &= -\frac{1}{m(m-1)} [\hat{\varepsilon}(m-1)(m-2)b_{m-1} + (\lambda^2 - \hat{\varepsilon}k_n^2) b_{m-3}] \\ &\quad - 2(m-1)k_n a_{m-1} - 2\hat{\varepsilon}(m-2)k_n a_{m-2} , \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

$C_n(x)$ y $S_n(x)$ pueden verse como funciones matemáticas conocidas y pueden ser calculadas de forma computacional de manera exacta,

$$\left. \begin{aligned} C'_n(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(-k_n \hat{a}_m x^m + m \hat{b}_m x^{m-1} \right) \sin(k_n x) + \left(k_n \hat{b}_m x^m + m \hat{a}_m x^{m-1} \right) \cos(k_n x) \right] , \\ S'_n(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(-k_n \tilde{a}_m x^m + m \tilde{b}_m x^{m-1} \right) \sin(k_n x) + \left(k_n \tilde{b}_m x^m + m \tilde{a}_m x^{m-1} \right) \cos(k_n x) \right] , \\ C''_n(x) &= -\frac{k_n^2 + \lambda^2 x}{1 + \hat{\varepsilon}x} C_n(x) , \\ S''_n(x) &= -\frac{k_n^2 + \lambda^2 x}{1 + \hat{\varepsilon}x} S_n(x) . \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

La cantidad de términos, así como de constantes de separación en la serie para $\psi(x, y)$ depende del número de restricciones del sistema. Partiendo de superficies cerradas por construcción. Se puede pensar en condiciones que debería satisfacer el flujo poloidal en cuatro puntos específicos alrededor de la circunferencia: (i) el punto interior del plano medio , (ii) el punto exterior del plano medio , (iii) el punto máximo de la sección media superior y (iv) el punto máximo de la sección media inferior. A estas cuatro condiciones se les añaden otras 4 condiciones por la pendiente y otras 4 por la curvatura del flujo para esos mismos puntos. Por lo tanto, se tiene 12 restricciones en el sistema.

En particular, en este trabajo se consideran configuraciones simétricas respecto al eje ecuatorial por simplicidad (Simetría arriba-abajo), lo cual reduce las soluciones a los términos $\cos(h_n y)$ en la serie $Y_n(y)$, por su paridad , reduciendo así, las constrict-

ciones de 12 a 9.

Además, debido a la misma paridad del $\cos(h_n y)$ y $S_1(x)$ con $k_1 = 0$ es cero, las restricciones de pendiente en los puntos medios internos y externos también se satisfacen.

Esto reduce el número de restricciones de 9 a 7.

Por lo tanto, por construcción, basta considerar siete términos en la serie para $\psi(x, y)$ deberían ser suficientes para generar superficies anidadas en este tipo de modelos.

3.1.2. Elección de constantes de separación.

Es importante recalcar que cada constante de separación conduce a dos términos $C_n(x)$ y $S_n(x)$ en (3.9), por lo cual, para nuestra suposición de 7 términos es conveniente optar por 4 constantes de separación; lo cual significa 8 términos y hacer que un término se anule. En el artículo se sugiere tomar h_1^2 , para hacer $k_1^2 = 0$, de acuerdo con la construcción de $S_1(x)$.

$$h_1 = h_{\text{máx}} = (1 + \varepsilon^2)^{1/2} \alpha \rightarrow k_1 = 0 . \quad (3.13)$$

Con esta consideración la solución así como su primera y segunda derivada son de la forma.

$$\begin{aligned}
\psi(x, y) &= c_1 \cos(h_1 y) C_1(x) + \sum_2^4 \cos(h_n y) [c_n C_n(x) + s_n S_n(x)], \\
\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} &= c_1 \cos(h_1 y) C_1'(x) + \sum_2^4 \cos(h_n y) [c_n C_n'(x) + s_n S_n'(x)], \\
\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} &= -c_1 h_1 \sin(h_1 y) C_1(x) - \sum_2^4 h_n \sin(h_n y) [c_n C_n(x) + s_n S_n(x)], \\
\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} &= c_1 \cos(h_1 y) C_1''(x) + \sum_2^4 \cos(h_n y) [c_n C_n''(x) + s_n S_n''(x)], \\
\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} &= -c_1 h_1^2 \cos(h_1 y) C_1(x) - \sum_2^4 h_n^2 \cos(h_n y) [c_n C_n(x) + s_n S_n(x)].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los coeficientes a determinar son $\mathbf{u} = [c_1, c_2, s_2, c_3, s_3, c_4, s_4]$.

La elección de las constantes h_n es un tanto arbitraria debido a que, siendo estas constante, determinan soluciones analíticas de la ecuación de GS de razón de aspecto parecido, con la misma elongación y triangularidad, y valores similares para beta y factor de seguridad.

La elección se lleva acabo con un *algoritmo empírico* que funciona en la mayoría de configuraciones:

$$\left. \begin{aligned}
h_1 &= (1 + \varepsilon^2)^{1/2} \alpha & k_1 &= 0, \\
h_2 &= \left(\frac{35}{36}\right)^{1/2} (1 + \varepsilon^2)^{1/2} \alpha & k_2 &= \left(\frac{1}{6}\right) \alpha, \\
h_3 &= \left(\frac{13}{49}\right)^{1/2} (1 + \varepsilon^2)^{1/2} \alpha & k_3 &= \left(\frac{6}{7}\right) \alpha, \\
h_4 &= 0 & k_4 &= \alpha.
\end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

3.1.3. Modelo de Superficie

La forma de la superficie corresponde a una curva con forma de “D” con bordes suaves. La cual en coordenadas r_S, z_S se encuentra parametrizada por un ángulo θ

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$, es decir, asocia cada punto con un ángulo de la forma:

$$\left. \begin{aligned} r_S = R_0 + a \cos(\theta + \hat{\delta} \sin \theta) &\rightarrow x_S(\theta) = \cos(\theta + \hat{\delta} \sin \theta) - \frac{\varepsilon}{2} \sin^2(\theta + \hat{\delta} \sin \theta), \\ z_S = a\kappa \sin \theta &\rightarrow y_S(\theta) = \kappa \sin \theta. \end{aligned} \right\} (3.15)$$

donde, ε es el inverso de la razón de aspecto, a es el radio menor de la columna de plasma, R_0 el radio mayor, κ corresponde a la elongación, δ es la triangularidad y $\hat{\delta} = \sin^{-1} \delta$. Los parámetros referidos se muestran en la figura (3.1).

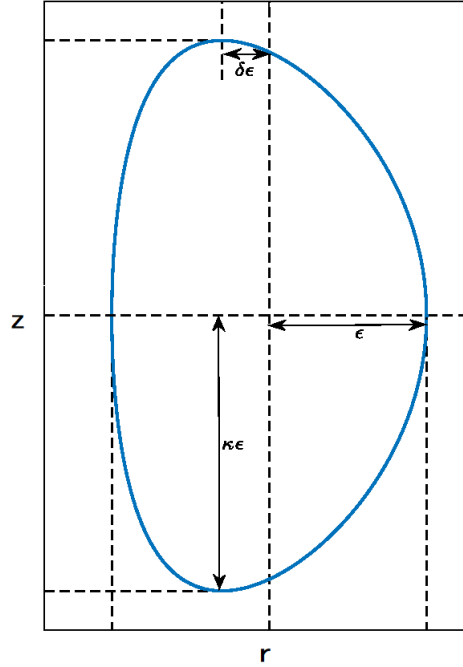


Figura 3.1: Diagrama de parámetros geométricos para una sección transversal donde ε es el inverso de la razón de aspecto, κ elongación, δ triangularidad [35].

De tal forma que para un conjunto de valores específicos podemos obtener distintas geometrías en la figura (3.2) se muestran tres tipos de curvas que se pueden obtener de esta parametrización. Por lo tanto, los puntos de interés son:

El punto interior del plano medio $\theta = \pi$, $x_S = -1$, $y_S = 0$; el punto exterior del plano medio $\theta = 0$, $x_S = 1$, $y_S = 0$; y punto máximo superior $\theta = \pi/2$, $x_S =$

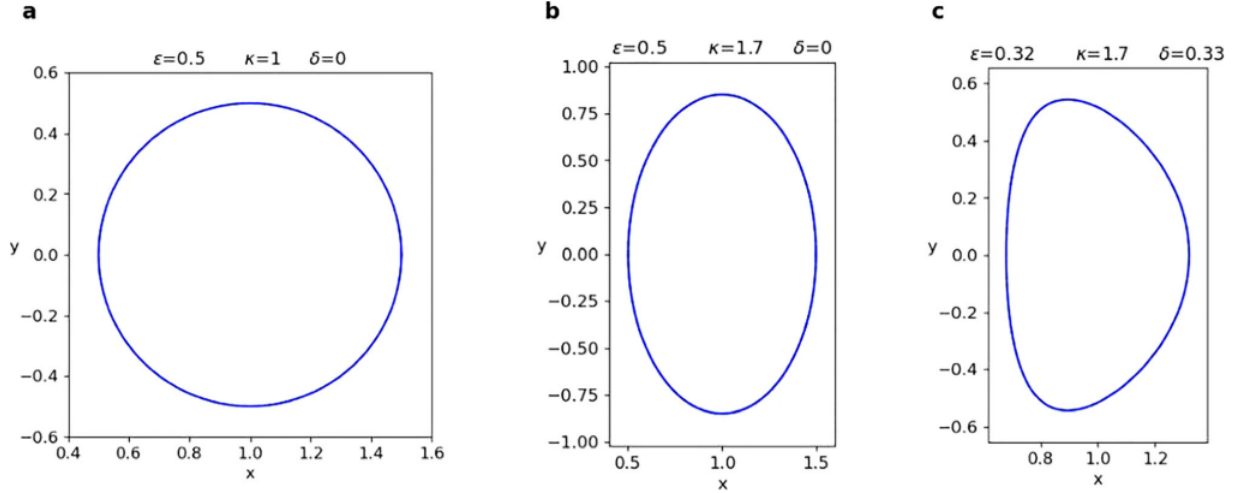


Figura 3.2: Diagrama de tres fronteras diferentes considerando los parámetros (a) Circunferencia ($\varepsilon = 0.5, \kappa = 1, \delta = 0$), (b) una elipse ($\varepsilon = 0.5, \kappa = 1.7, \delta = 0$), (c) sección con forma de “D” ($\varepsilon = 0.33, \kappa = 1.7, \delta = 0.33$) [1].

$$-\delta - (\varepsilon/2)(1 - \delta^2), y_S = \kappa.$$

Mientras que las restricciones de pendiente y flujo son:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(a)} \psi(-1, 0) = 0 & \text{Superficie de flujo en } \theta = \pi, \\ \text{(b)} \psi(1, 0) = 0 & \text{Superficie de flujo en } \theta = 0, \\ \text{(c)} \psi(-x_\delta, \kappa) = 0 & \text{Superficie de flujo en } \theta = \pi/2, \\ \text{(d)} \psi_x(-x_\delta, \kappa) = 0 & \text{Superficie de flujo en } \theta = \pi/2, \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

donde $x_\delta = \delta + (\varepsilon/2)(1 - \delta^2)$ es de nuevo la coordenada x del punto máximo superior.

Las condiciones de curvatura requieren que se expandan los tres puntos críticos de la forma :

$$\left. \begin{array}{ll} x_S + 1 \approx \frac{(1-\varepsilon)(1-\delta)^2}{2\kappa^2} y_S^2 & \theta = \pi \\ x_S - 1 \approx -\frac{(1+\varepsilon)(1+\delta)^2}{2\kappa^2} y_S^2 & \theta = 0 \\ y_S - \kappa \approx -\frac{\kappa}{2(1-\varepsilon\delta)^2(1-\delta^2)} (x_S + x_\delta)^2 & \theta = \pi/2 \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

Lo cual, al expandir $\psi(x, y)$ en esos puntos, se convierte en condiciones para el flujo

poloidal:

$$\left. \begin{aligned} \psi(x_S, y_S) &\approx \frac{\partial\psi(-1,0)}{\partial x} (x_S + 1) + \frac{\partial^2\psi(-1,0)}{\partial y^2} \frac{y_S^2}{2} = 0 \\ \psi(x_S, y_S) &\approx \frac{\partial\psi(1,0)}{\partial x} (x_S - 1) + \frac{\partial^2\psi(1,0)}{\partial y^2} \frac{y_S^2}{2} = 0 \\ \psi(x_S, y_S) &\approx \frac{\partial^2\psi(-x_\delta, \kappa)}{\partial x^2} \frac{(x_S + x_\delta)^2}{2} + \frac{\partial\psi(-x_\delta, \kappa)}{\partial y} (y_S - \kappa) = 0 \quad \theta = 0 \quad . \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Por lo tanto, de (3.17) y (3.18) se llega las condiciones de curvatura:

$$\left. \begin{aligned} \text{(e)} \quad \frac{\psi_{yy}(-1,0)}{\psi_x(-1,0)} &= -\frac{(1-\varepsilon)(1-\delta)^2}{\kappa^2} \equiv -\Lambda_1 \quad \theta = \pi, \\ \text{(f)} \quad \frac{\psi_{yy}(1,0)}{\psi_x(1,0)} &= \frac{(1+\varepsilon)(1+\delta)^2}{\kappa^2} \equiv \Lambda_2 \quad \theta = 0, \\ \text{(g)} \quad \frac{\psi_{xx}(-x_\delta, \kappa)}{\psi_y(-x_\delta, \kappa)} &= \frac{\kappa}{(1-\varepsilon\delta)^2(1-\delta^2)} \equiv \Lambda_3 \quad \theta = \pi/2. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Así se llega a 7 constricciones (a)-(g) en la función de flujo poloidal. A partir de ellas se determina α y los coeficientes de expansión desconocidos.

3.1.4. Método de Solución

Como se mencionó antes las relaciones de recursión (3.11) permiten descomponer el problema en uno más sencillo de ecuaciones algebraicas lineales homogéneas para los coeficientes, donde :

$$\overleftrightarrow{A}(\alpha) \cdot u = 0, \quad (3.20)$$

siendo α el valor propio pero, que a su vez aparece en las constantes de separación. La solución de este tipo de problemas puede ser encontrada en referencias de métodos numéricos en álgebra lineal como [36] [37][38].

Una vez fijadas las entradas geométricas $\varepsilon, \kappa, \delta, \nu$. Se establece el coeficiente $c_1 = 1$. Y se procede a resolver el sistema lineal de seis ecuaciones conformado por las ecuaciones de la (a) a la (f), para las seis incógnitas $c_2, c_3, c_4, s_2, s_3, s_4$. La solución encontrada para el el eigenvalor α^2 sera correcta siempre y cuando se cumpla la siguiente ecuación:

$$Q_1 + Q_2c_2 + Q_3s_2 + Q_4c_3 + Q_5s_3 + Q_6c_4 + Q_7s_4 = 0 \quad . \quad (3.21)$$

Encontrar el punto donde se resuelve esta ecuación (3.21) se reduce a encontrar la intersección con el eje en cero. Ahora bien, se puede dar el caso de existir coeficientes que hacen valores asintóticos en α , provocando que se vaya a infinito y regrese por menos infinito, lo cual se puede interpretar cómo un cero en un código que busque raíces. Estos ceros por asíntotas son resultados de tipo espuria. Para resolver este defecto es conveniente definir:

$$E(\alpha) = \left(\frac{Q_1 + Q_2 c_2 + Q_3 s_2 + Q_4 c_3 + Q_5 s_3 + Q_6 c_4 + Q_7 s_4}{|Q_1| + |Q_2 c_2| + |Q_3 s_2| + |Q_4 c_3| + |Q_5 s_3| + |Q_6 c_4| + |Q_7 s_4|} \right)^2 = 0 \quad . \quad (3.22)$$

Esta función es simplemente una normalización de la ecuación (3.21), garantiza que al realizar una corrida en distintos valores de α , el valor correcto será aquel para el cual $E(\alpha)$ tenga un mínimo correspondiente a $E(\alpha) = 0$ dada una cierta tolerancia.

El encontrar el valor de alpha se hace empíricamente mediante 'fuerza bruta'. Primero se realiza un mapeo a escala fina sobre cien puntos para localizar un posible α más bajo correspondiente al mínimo en $E(\alpha)$ con $|E(\alpha)| \leq \text{Tol} \sim 10^{-3}$. A continuación, se utiliza una opción de minimización de MATLAB para encontrar el α real con una tolerancia dada.

En la figura (3.3) se muestra el caso de los valores de α para una configuración estándar de tokamak tipo ITER: $\epsilon = 0.32$, $\delta = 0.33$, $\kappa = 1.70$, $\nu = 1$. De forma intuitiva el valor real de alfa, es aquel que da un mínimo en la función $E(\alpha)$. Empíricamente, de ver la gráfica podemos pensar que dicho valor está dentro del intervalo (1.9,2.1). Al agregar la función de minimización de MATLAB se obtiene:

$$\alpha = 2.0071 \quad ,$$

$$E(\alpha) = 1.4917e - 15 \quad .$$

Esto es importante debido a que un procedimiento análogo se lleva a cabo en cada uno de los casos tratados en la secciones posteriores para encontrar su respectivo valor

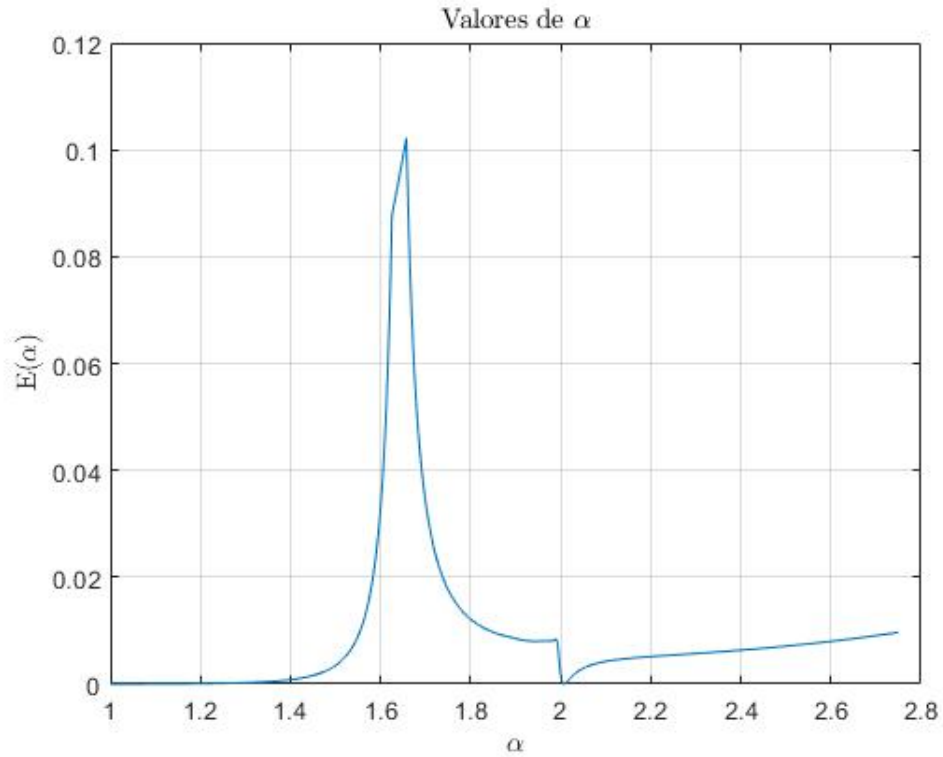


Figura 3.3: Gráfica de Valores de alfa contra función de tolerancia.

solución α y dicho valor no necesariamente es el mismo.

Las soluciones numéricas generadas para estos α s satisfacen la ecuación de Grad-Shafranov con el valor deseado de tolerancia. Dicha tolerancia esta relacionada con la cantidad de términos en la expansión en serie de senos y cosenos. Para este trabajo se utilizan, como ya se menciona 8 términos determinados, y se deja correr el algoritmo para obtener los valores por recursión de otros 142 términos en dichas series, lo cuál toma un tiempo de 2 segundos en ser computados con un procesador Intel Core i5-6200CPU a 2,3 GHz.

3.2. Resultados.

A continuación, se presentan los perfiles de solución con la propuesta de solución de Guazzotto y Friedberg en [3] en las configuraciones de tres experimentos actuales, uno en construcción y dos actuales: ITER, ST40 y MAST-U para observar el com-

portamiento de los equilibrios que se obtienen, figura (3.4). Los parámetros fueron recopilados de www.tokamak.info [39]. Es importante notar que $\nu = 1$ esta relaciona-

| | ITER | MAST-U | ST40 |
|------------|------|--------|------|
| ϵ | 0.32 | 0.77 | 0.59 |
| δ | 0.33 | 0.32 | 0.32 |
| κ | 1.7 | 2.00 | 2.50 |
| ν | 1 | 1 | 1 |
| $R_0[m]$ | 6.2 | 0.58 | 0.4 |
| $B_0[T]$ | 5.30 | 0.840 | 3.00 |
| q_0 | 1 | 1 | 1 |

Tabla 3.1: Parámetros de cada dispositivo de confinamiento. Parámetros geométricos (ϵ, κ, δ), y (R_0, B_0) las variables físicas de interés.

do con el valor de β_P . Además, se considera el caso $q_0 = 1$, la relación entre el campo poloidal y el toroidal en el eje magnético.

Con la intención de conocer la solución de Grad-Shafranov de cada configuración se utilizó un código en MATLAB, cortesía del mismo Luca Guazzotto en su artículo [2]. Es decir, para cada configuración, el código resuelve el sistema de ecuaciones dado por las condiciones a la frontera.

Una vez hallado cada equilibrio para una configuración específica, se utiliza la solución ψ para encontrar los perfiles de los campos (poloidal y toroidal), el perfil de la densidad de corriente, el perfil de presión y el perfil del factor de seguridad. Esta corresponde a la principal contribución realizada en este trabajo. Posteriormente, se calculan las figuras de mérito del plasma.

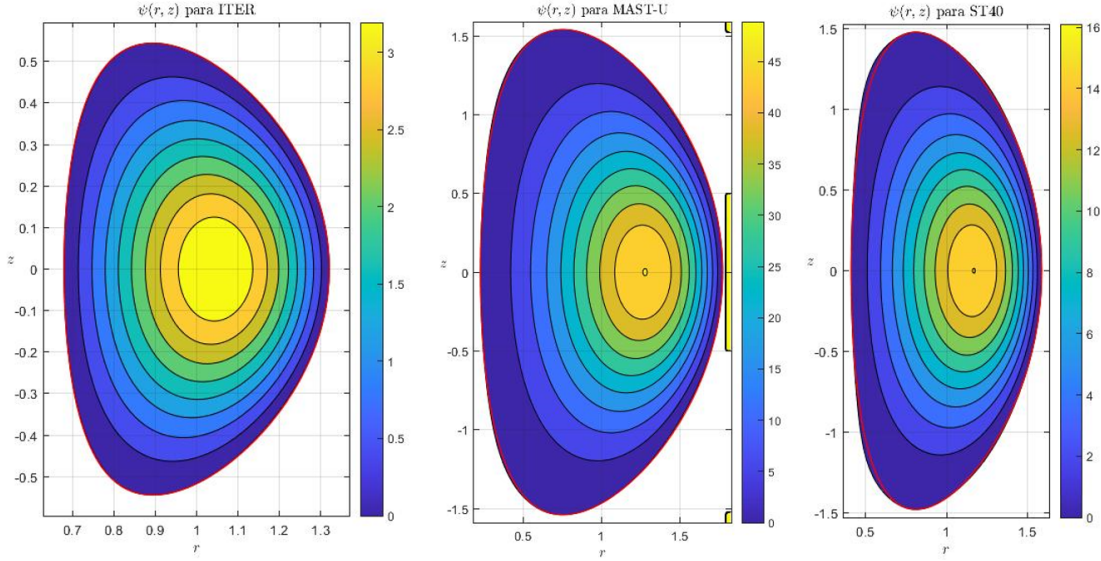


Figura 3.4: Solución de Función de flujo poloidal ITER, MAST-U y ST40.

3.3. Perfil de los Parámetros de plasma.

3.3.1. Cálculo de Campos.

En el trabajo de Guazzoto [3] se omite la obtención del cálculo del campo toroidal y poloidal, así como, el perfil del factor de seguridad, por lo cual, la principal contribución de este trabajo es el cálculo de estos mismos.

Campo toroidal.

En primer lugar para la obtención del perfil de campo toroidal, hay que recordar que el campo magnético en función del flujo magnético poloidal esta descrito por la relación:

$$B = \nabla\Psi \times \nabla\varphi + F(\Psi)\nabla\varphi . \quad (3.23)$$

La función $F(\Psi) = rB_\varphi$ corresponde a la componente toroidal del campo, donde se definió, en una sección anterior, a

$$F^2(\Psi) = R_0^2 B_0^2 \left[1 + \frac{2\delta B}{B_0} \left(\frac{\Psi}{\Psi_0} \right)^2 \right] .$$

Por lo tanto:

$$B_\varphi = \frac{F(\Psi)}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{R_0^2 B_0^2 \left[1 + \frac{2\delta B}{B_0} \left(\frac{\Psi}{\Psi_0} \right)^2 \right]} .$$

Es decir, una vez encontrada la solución para cada coordenada (r, z) basta tomar $z = 0$ para asociar a cada r un $B_\varphi(r)$ en el ecuador.

A continuación, en la figura (3.5), se muestra el perfil del campo toroidal en el ecuador para los aparatos: ITER, MAST-U y ST40.

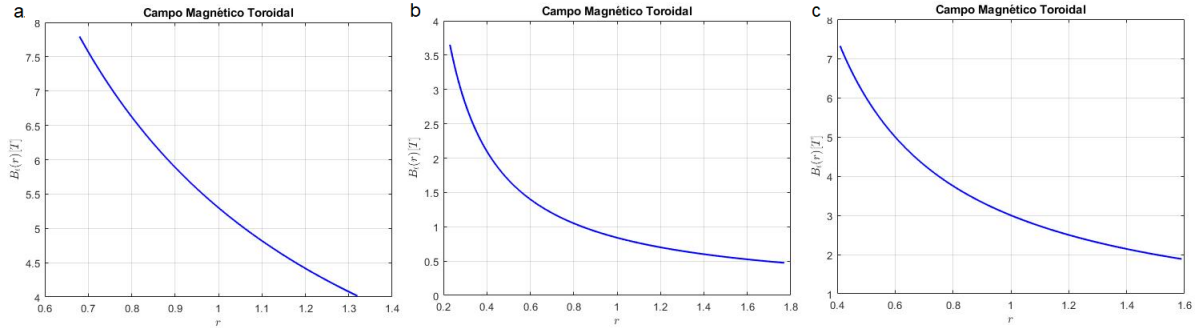


Figura 3.5: Campo magnético toroidal para [a] ITER, [b]MAST-U y [c] ST40.

Campo Poloidal.

De forma análoga, para estimar el perfil del campo poloidal, de la ecuación (3.23). Sabemos este está dado por:

$$B_p = \nabla \Psi \times \nabla \varphi . \quad (3.24)$$

De la ecuación (2.25) y (2.49) se tiene que si $\Psi = \Psi_0 \psi$, entonces:

$$B_p = -\frac{\Psi_0}{R_0^2 r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_r - \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_z \right) . \quad (3.25)$$

Es decir, de igual manera que para el caso toroidal, una vez encontrando la solución para cada coordenada (r, z) basta tomar $z = 0$ para asociar a cada r un $B_p(r)$ en el ecuador, y así calcular las derivadas respecto a ψ . Los perfiles de campo poloidal obtenidos para los tres dispositivos se muestran en la figura (3.6).

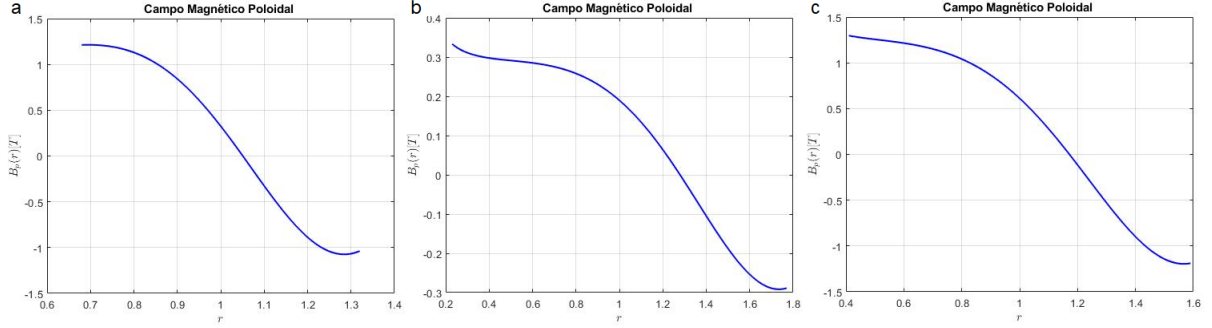


Figura 3.6: Campo magnético poloidal para [a] ITER, [b]MAST-U y [c] ST40.

Factor de seguridad q .

El factor de seguridad es un parámetro que puede describir la estabilidad en una columna de plasma en un tokamak a medida que se observa el centro de la columna,

$$q = \frac{rB_\varphi}{RB_p} . \quad (3.26)$$

Un factor de seguridad $q(r)$ alto se considera "bueno" para la estabilidad, mientras que bajo q es "malo".

Los tokamaks típicos operan con $q \approx 3$ en la pared del plasma; el valor de q es uno de los criterios de diseño más importantes para tokamaks ya que dicta las condiciones para el campo toroidal [25].

En la ecuación (3.26), se puede observar la necesidad de elegir convenientemente una parametrización para r debido a que se corre el riesgo de dividir entre cero cuando la $B_p = 0$. Es necesario asegurar que $r = 0$ al mismo tiempo que $B_p = 0$, es decir, que el cociente $\frac{r}{B_p} \rightarrow 0$ tiende a cero para que no haya problemas. En particular, para

este trabajo, obtener información del factor de seguridad es necesario parametrizar los elementos de tal forma que las contribuciones a la fracción se hagan pequeñas a medida que nos acercamos a la singularidad $B_p = 0$.

Por lo cual, se define el punto, $1 + \Delta$, en la coordenada radial r ; en este punto se localiza el eje magnético de la columna de plasma desplazado y es, a su vez, donde campo poloidal se anula. El desplazamiento Δ con respecto al eje geométrico del aparato se denomina corrimiento de Shafranov [40].

$$B_p(1 + \Delta) = 0 \quad . \quad (3.27)$$

Una vez conocido el desplazamiento Δ , se define una posición relativa de un punto r desde el eje magnético, ρ :

$$\rho = \frac{r - (1 - \Delta)}{\Delta} \quad . \quad (3.28)$$

Por lo que, reescribiendo (3.26) en términos de ρ tenemos:

$$q(\rho) = \frac{\rho B_\varphi(r)}{B_p(r)} \quad . \quad (3.29)$$

Finalmente, el factor de seguridad en ρ , calculado desde el eje del toro, se muestra a continuación para los aparatos ITER, MAST-U y ST40. Observar figura (3.7).

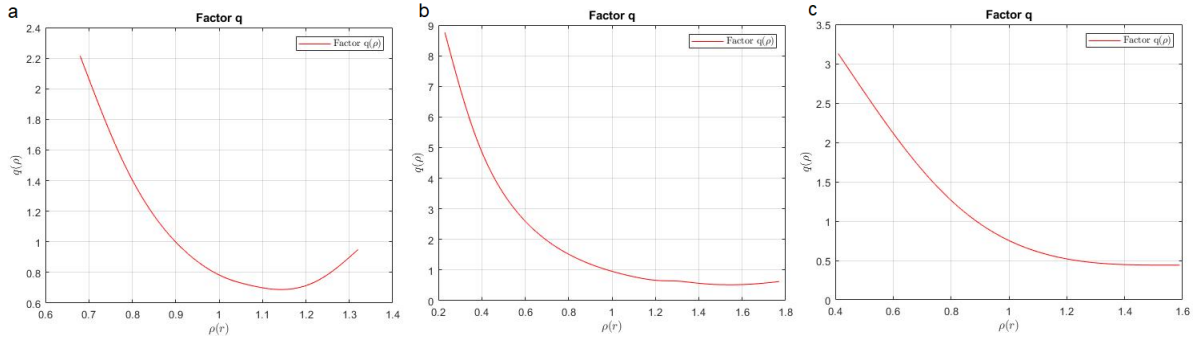


Figura 3.7: Perfil del factor de seguridad para [a] ITER, [b]MAST-U y [c] ST40.

Perfil de Presión.

De forma similar a la obtención del campo magnético toroidal. En una sección anterior se definió la presión en función de Ψ :

$$p(\Psi) = p_0 \left(\frac{\Psi}{\Psi_0} \right)^2 . \quad (3.30)$$

Por lo tanto, una vez hallada una solución de equilibrio para una configuración se puede conocer el perfil de presión para un dispositivo. A continuación, las gráficas en la figura (3.8) muestran los perfiles de presión en ITER, MAST-U y ST40. Las unidades resultantes en estos dispositivos son del orden de e^5 [Pa].

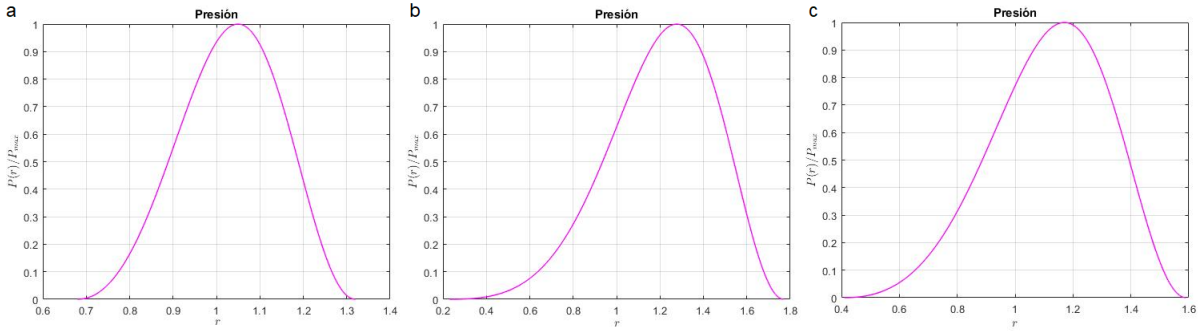


Figura 3.8: Perfiles de presión con respecto al radio en [a] ITER, [b]MAST-U y [c] ST40.

Perfil de Corriente.

Una vez encontrada la solución del equilibrio a la ecuación de Grad-Shafranov; el perfil de densidad de corriente toroidal está determinado por la ecuación :

$$-\mu_0 r J_\varphi = \Delta^* \Psi = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\Psi} - \frac{\mu_0^2}{2} \frac{dF^2}{d\Psi} . \quad (3.31)$$

Entonces:

$$J_\varphi = \frac{\Delta^* \Psi}{\mu_0 r} , \quad (3.32)$$

donde recordando que

$$\Delta^* \Psi = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} . \quad (3.33)$$

Por lo tanto, una vez encontrado el equilibrio basta con encontrar las derivadas de la función de flujo poloidal para averiguar la forma de la densidad de corriente poloidal. A continuación, en la figura (3.9), se muestra el perfil de densidad de corriente para los tokamaks: ITER, MAST-U y ST40. Las unidades resultantes en estos dispositivos son del orden de e^7 [A/m²].

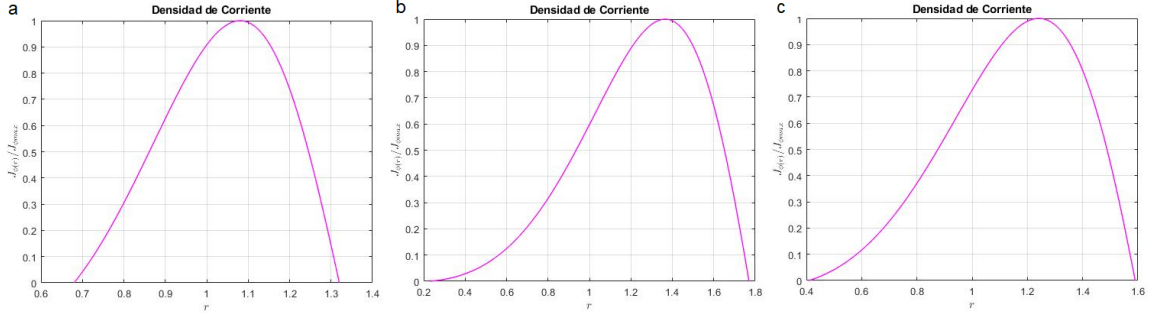


Figura 3.9: Perfiles de corriente con respecto al radio en [a] ITER, [b] MAST-U y [c] ST40.

3.4. Figuras de Mérito.

Las expresiones de figuras de mérito necesarias para caracterizar la columna de plasma en un tokamak como función de Ψ son definidas en esta sección [3].

El primer parámetro de interés debido a que a partir del se pueden calcular las demás figuras de merito, es el factor de seguridad local. Recordando que

$$q = \frac{\lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{B_\varphi}{rB} dl}{\lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{B_\theta}{rB} dl} \quad , \quad (3.34)$$

es la relación entre la magnitud de los campos magnéticos sobre un segmento de campo línea de longitud L. Entonces de sustituir nuestra nuevas variables (3.8), se tiene

$$q(\psi) = \frac{F(\psi)}{2\pi} \int_L \frac{dl}{r^2 B_P} = \frac{F(\psi)}{R_0 B_0} \left(\frac{v}{\beta_0} \right)^{1/2} \frac{\varepsilon \alpha}{2\pi} \oint_L \left(\frac{x_\theta^2 + \rho y_\theta^2}{\psi_y^2 + \rho \psi_x^2} \right)^{1/2} \frac{d\theta}{r} \quad . \quad (3.35)$$

Una vez ubicado el eje de las soluciones para el flujo poloidal, de la ecuación (3.35) se calcula el de factor de seguridad en el eje:

$$q_0 = \left[\frac{B_\varphi}{(\Psi_{RR}\Psi_{ZZ})^{1/2}} \right]_{\psi=\psi_0} = \left[\frac{F(\psi)}{R_0 B_0} \left(\frac{v}{\beta_0} \right)^{1/2} \frac{\varepsilon \alpha}{r (\psi_{xx}\psi_{yy})^{1/2}} \right]_{\psi=1} . \quad (3.36)$$

Se hace especial énfasis en que se puede relacionar mediante esta ecuación (3.36) el factor q_0 con el valor de $\beta_0 = 2\mu_0 p_0 / B_0^2$. Por consiguiente, con la intención de hacer más sencillas las expresiones obtenidas se escriben las figuras de mérito en función de β_0 y a su vez se observa la relación de β_0 con q_0

$$\beta_0 = \frac{\nu \varepsilon^2 \alpha^2}{q_0^2 (r^2 \psi_{xx} \psi_{yy})_{\psi=1} - (1 + \varepsilon^2) (1 - v) \varepsilon^2 \alpha^2} . \quad (3.37)$$

A continuación se definen los parámetros dominados figuras de mérito.

Presión de plasma en el eje:

$$p_0 = \beta_0 \left(\frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) . \quad (3.38)$$

Diamagnetismo en el eje del plasma:

$$\frac{\delta B}{B_0} = \frac{\beta_0 (1 + \varepsilon^2)}{2} \left(\frac{1 - v}{v} \right) . \quad (3.39)$$

Flujo magnético en el eje:

$$\Psi_0 = \frac{\varepsilon B_0 R_0^2}{\alpha} \left(\frac{\beta_0}{v} \right)^{1/2} . \quad (3.40)$$

Beta toroidal promedio:

$$\beta_T = \frac{2\mu_0}{B_0^2} \langle p \rangle_V = \beta_0 \frac{\int_S \psi^2 dx dy}{\int_S dx dy} . \quad (3.41)$$

Beta poloidal promedio:

$$\beta_P = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle_V}{\langle B_P^2 \rangle_V} = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle_V}{\langle 2\mu_0 p + (F^2/R_0^2 - B_0^2)/r \rangle_V} = \frac{v \int_S \psi^2 dx dy}{\int_S \left(\frac{1+v\hat{\varepsilon}x}{1+\hat{\varepsilon}x} \right) \psi^2 dx dy} . \quad (3.42)$$

Corriente de Plasma Toroidal:

$$\mu_0 I = \mu_0 \int_A J_\varphi dA = \varepsilon B_0 R_0 \alpha \left(\frac{\beta_0}{v} \right)^{1/2} \int_S \left(\frac{1+v\hat{\varepsilon}x}{1+\hat{\varepsilon}x} \right) \psi dx dy . \quad (3.43)$$

Inductancia interna normalizada por unidad de longitud:

$$l_i = \frac{2L_i}{\mu_0 R_0} = \frac{2}{\mu_0^2 I^2 R_0} \int_V B_P^2 dr = \frac{4\pi}{\alpha^2} \frac{\int_S \left(\frac{1+v\hat{\varepsilon}x}{1+\hat{\varepsilon}x} \right) \psi^2 dx dy}{\left[\int_S \left(\frac{1+v\hat{\varepsilon}x}{1+\hat{\varepsilon}x} \right) \psi dx dy \right]^2} . \quad (3.44)$$

Factor de Seguridad q_* :

$$q_* = \frac{2\pi a^2 B_0}{\mu_0 R_0 I} \left(\frac{1+\kappa^2}{2} \right) = \frac{\pi \varepsilon}{\alpha} \left(\frac{\nu}{\beta_0} \right)^{1/2} \frac{1+\kappa^2}{\int_S \left(\frac{1+v\hat{\varepsilon}x}{1+\hat{\varepsilon}x} \right) \psi dx dy} . \quad (3.45)$$

Donde S hace referencia a la sección transversal del plasma definida en la figura (3.1), mientras que V es sobre el volumen.

Por lo tanto, una vez conocida la solución para cada equilibrio de Ψ se pueden calcular las figuras de mérito que se muestran en la tabla (3.2) para los tokamaks: ITER, MAST-U y ST40.

| | p_0 | $\delta B/B$ | Ψ_0 | β_T | β_P | $I_{plasma}[A/m^2]$ | l_i | q_* |
|--------|-------------|--------------|----------|-----------|-----------|---------------------|--------|--------|
| ITER | 9.43849e+05 | 0 | 0.2456 | 0.1980 | 1 | 1.6239e+06 | 0.9237 | 3.2501 |
| MAST-U | 5.44577e+04 | 0 | 0.1500 | 0.0675 | 1 | 9.2572e+05 | 0.9661 | 6.7250 |
| ST40 | 8.4107e+05 | 0 | 0.4700 | 0.1386 | 1 | 3.3846e+06 | 0.8254 | 5.5924 |

Tabla 3.2: Figuras de mérito resultantes para ITER, MAST-U y ST40.

3.5. Regiones con Pedestales.

En la sección anterior se suponen condiciones de frontera suaves para la presión, el gradiente de presión y la densidad de corriente toroidal en la superficie del plasma; esto significa que dichas funciones tienden a cero en el borde. Sin embargo, en algunos tokamaks existen fenómenos de borde que producen corrientes localizadas en la superficie del plasma.

En esta sección se hace una generalización, de forma similar a la realizada por Luca Guazzotto en [9], a las soluciones previas de equilibrio para poder abarcar casos más realistas con situaciones que se denominan “pedestales” en el borde del plasma. Un pedestal se define como valor finito positivo diferente de cero en algún parámetro físico del plasma. Específicamente, los pedestales utilizados se añaden a la función de presión, en el gradiente de presión y en la densidad de corriente toroidal.

Las soluciones expuestas en el capítulo anterior se obtuvieron de considerar relaciones lineales respecto a ψ para las dos funciones libres, es decir, el gradiente de presión $\frac{dp(\psi)}{d\psi}$ y el gradiente de campo toroidal $\frac{dF^2(\psi)}{d\psi}$. En esta sección se añaden contribuciones en la frontera, modificando las funciones libres por medio de constantes que se definen, específicamente para este trabajo, como pedestales. Los pedestales se consideran un incremento en alguna de las funciones, ya sea la presión, el gradiente de presión o la densidad de corriente toroidal en el borde del plasma. Estas modificaciones afectan principalmente el valor de algunas figuras de mérito de interés para la fusión, así como el desplazamiento de las superficies de flujo.

Las primeras dos constantes añadidas son para la presión y la corriente de Bootstrap localizadas ambas en el borde plasma. En particular, la aproximación de pedestal para este trabajo, da como resultado corrientes superficiales. Estas son perpendiculares a la superficie del plasma cuando se trata del salto en la presión y paralelas en caso de la corriente de Bootstrap.

Vale la pena recordar que la corriente de bootstrap es un efecto debido al gradiente de presión en la columna del plasma, el cual genera una corriente dentro del plasma, causada por colisiones entre las partículas [28].

Las corrientes superficiales mencionadas dan lugar a dos variables independientes, f_p la contribución fraccionaria del pedestal por presión y f_B que representa la fracción de la corriente localizada en la región del borde por Bootstrap.

Las ultimas contribuciones propuestas por Guazzotto son los pedestales de gradiente de presión y de densidad de corriente toroidal en el borde.

Su inclusión requiere una modificación de las funciones p y FF' , que en principio lineales en ψ , se les añade una contribución en ψ tipo Solov'ev.

Esta modificación deja a las soluciones aún analíticas para la función de flujo poloidal pero su resolución debe ser realizada por un nuevo proceso similar al de la sección anterior.

En general estos nuevos parámetros son variables independientes y para simplificar el análisis matemático se elige un valor específico en el pedestal de gradiente de presión. Por lo tanto, se conserva únicamente la otra variable independiente extra, f_J , la cual representa el pedestal de densidad de corriente toroidal de borde.

La razón por la que las corrientes superficiales no modifican de forma directa las superficies de flujo pero sí los parámetros de mérito y el desplazamiento de su centro, es que ciertos parámetros son definidos en términos de campos magnéticos externos a la superficie, mientras que los campos internos definen las soluciones analíticas.

A continuación se derivan las condiciones que deben de satisfacer los campos a través de la superficie para que se cumplan corrientes del tipo superficial, antes mencionadas.

3.6. Contribuciones por efectos de Superficie.

Existen dos contribuciones principales a la lamina de corriente superficial.

La primera contribución a la corriente superficial a tratar es un valor de presión finito en el borde del plasma, lo cual genera un pedestal de presión. Si se analiza el equilibrio a través de la superficie desde el modelo MHD debe existir una corriente superficial perpendicular que balancee el salto en la presión. La dirección de esta corriente será perpendicular a ambos, la normal de la superficie y el campo magnético promedio a través de la lamina de corriente.

El pedestal de presión puede ser modelado, modificando la función de presión $p(\psi/\psi_0)$, mientras que la función libre magnética $F^2(\psi/\psi_0)$ permanece sin cambios,

$$p(\Psi/\Psi_0) = p_0 \left(\frac{\Psi}{\Psi_0} \right)^2 \rightarrow p(\Psi/\Psi_0) = p_0 \left[f_P + (1 - f_P) \left(\frac{\Psi}{\Psi_0} \right)^2 \right]. \quad (3.46)$$

Esta forma para la presión (3.46), recupera p_0 en el eje del plasma y nos regresa una fracción, valor finito, de esta cantidad en el borde del plasma con la variable f_p .

Con esta modificación la ecuación de Grad-Shafranov normalizada permanece sin cambios, ya que la derivada de una constante es cero; pero existe una modificación en la definición de α y ν :

$$\left. \begin{aligned} (1 + \hat{\varepsilon}x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -\alpha^2 (1 + \hat{\varepsilon}vx) \psi \\ \alpha^2 &= \frac{2R_0^2 a^2}{\Psi_0^2} \left[\mu_0 p_0 (1 - f_P) + \frac{B_0 \delta B}{1 + \varepsilon^2} \right] \\ v &= \frac{\mu_0 p_0 (1 - f_P)}{\mu_0 p_0 (1 - f_P) + B_0 \delta B / (1 + \varepsilon^2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

Por otro lado, la segunda contribución importante a la corriente superficial fluye perpendicular a la superficie y paralela al campo magnético promedio a través de la superficie.

Tal como describe Guazzoto, esta corriente se relaciona con la corriente de Bootstrap localizada cerca del borde, la cual es descrita por Helander y Sigmar en [41]:

$$J_B(\psi) \equiv \left\langle \frac{J_B \cdot B}{B} \right\rangle \approx -2.42\varepsilon^{1/2} R_0 p \left[\frac{1}{n} \frac{dn}{d\psi} + 0.054 \frac{1}{T} \frac{dT}{d\psi} \right] . \quad (3.48)$$

Es interesante notar que cerca del borde, la densidad y la temperatura poseen valores finitos, lo cual produce una contribución localizada a la corriente de bootstrap en esa región. A continuación se describe la contribución de la corriente de bootstrap como una fracción de la corriente en el plasma. Dicha componente puede ser medida experimentalmente. Se expresa la corriente en la superficie en dos componentes, una toroidal y una perpendicular a la superficie: $K_{\parallel} = K_{\parallel\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} + K_{\parallel P} \mathbf{e}_P$. Centrándose en $K_{\parallel\varphi}$ porque genera la corriente toroidal, se tienen:

$$I_{\parallel\varphi} = \oint K_{\parallel\varphi} dl_P,$$

integrado sobre dl_P , el diferencial de longitud de arco poloidal. A continuación, si I es la corriente toroidal del núcleo de plasma previamente calculada, la corriente total que fluye en el plasma será $\hat{I} = I + I_{\parallel\varphi}$. Así se define la segunda contribución a la corriente del plasma tipo bootstrap en la superficie como:

$$f_B \equiv \frac{I_{\parallel\varphi}}{\hat{I}} = \frac{\hat{I} - I}{\hat{I}} = 1 - \frac{I}{\hat{I}} , \quad (3.49)$$

siendo f_B otra variable de independiente para la solución.

3.6.1. Corrientes Superficiales.

A continuación se hace un análisis de las corrientes superficiales partiendo de las soluciones obtenidas para regiones sin efectos de borde de la sección (3.1). De aquí se asume que se conoce $B_\varphi(\theta)$ y $B_p(\theta)$, específicamente dentro de la corriente superficial. En seguida, se le da valores a las nuevas dos contribuciones de presión y de corriente de bootstrap, f_p y f_B .

Con estas modificaciones se calculan nuevamente los campos magnéticos afuera de la lamina de corriente superficial, $\hat{B}_\varphi(\theta)$ y $\hat{B}_p(\theta)$, con la intención de tener una condición de corriente autoconsistente.

El análisis de la corriente superficial comienza usando la ley de Ampère y el balance de presión a través de la superficie para derivar las expresiones para $\hat{B}_\varphi(\theta)$ y $\hat{B}_p(\theta)$.

Por un lado para el campo magnético toroidal, los pedestales dentro y fuera de la superficie son de la forma

$$\left. \begin{aligned} B_\varphi(\theta) &= B_0 \frac{R_0}{r(\theta)} \text{ Campo Interno,} \\ \hat{B}_\varphi(\theta) &= \hat{B}_0 \frac{R_0}{r(\theta)} \text{ Campo Externo,} \end{aligned} \right\}, \quad (3.50)$$

donde destaca la única nueva incógnita \hat{B}_0 , este valor es de hecho el campo magnético en el eje magnético para el vacío, mientras que B_0 es una formulación matemática conveniente del campo magnético en la ausencia de corrientes superficiales.

La relación entre los campos magnéticos, interno y externo, define la corriente poloidal superficial:

$$\mu_0 \frac{K_P}{B_0} = \frac{\hat{B}_\varphi}{B_0} - \frac{B_\varphi}{B_0} = (\Delta_B - 1) \frac{R_0}{r} \quad \Delta_B = \frac{\hat{B}_0}{B_0}. \quad (3.51)$$

La variable Δ_B relaciona ambos campos magnéticos toroidales.

Mientras que la relación entre los campos magnéticos poloidales, externo e interno,

está determinada por la condición de balance de presión en la frontera

$$\left[\left[p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] \right]_{\text{frontera}} = 0 \rightarrow 2\mu_0 f_P p_0 + B_p^2 + B_\varphi^2 = \hat{B}_p^2 + \hat{B}_\varphi^2. \quad (3.52)$$

Reacomodando (3.52) y sustituyendo (3.51) se llega a

$$\mu_0 \frac{K_\varphi}{B_0} = \frac{\hat{B}_P}{B_0} - \frac{B_P}{B_0} = \left[\frac{B_P^2}{B_0^2} + (2\mu_0 p_0 / B_0^2) f_P - (\Delta_B^2 - 1) \frac{R_0^2}{r^2} \right]^{1/2} - \frac{B_P}{B_0}, \quad (3.53)$$

sustituyendo $\beta_0 = 2\mu_0 p_0 / B_0^2$:

$$\mu_0 \frac{K_\varphi}{B_0} = \frac{\hat{B}_P}{B_0} - \frac{B_P}{B_0} = \left[\frac{B_P^2}{B_0^2} + \beta_0 f_P - (\Delta_B^2 - 1) \frac{R_0^2}{r^2} \right]^{1/2} - \frac{B_P}{B_0}. \quad (3.54)$$

Si se asume que se conoce Δ_B entonces la ecuación (3.54) esta determinada y cumple la condición de balance.

Procedimiento

Por lo tanto, para hacer la evaluación de la superficie de corriente satisfaciendo la condición de balance de presión (3.52) se sigue el procedimiento:

1. Se calcula el equilibrio sin pedestal como en la sección (3.1), especificando la geometría y ν . Se evalúan los valores de $B_p(\theta)/B_0, \beta_0, I/B_0$.
2. Se añaden los valores de pedestal en la presión y la corriente de Bootstrap, f_p y f_B , respectivamente.
3. Se hace una estimación del valor Δ_B .
4. Se evalúa $\hat{B}_P(\theta)/B_0$ de (3.54).
5. De la ecuación (3.49) se estima el pedestal de la corriente de Bootstrap para comparar la semejanza que tenga con la variable añadida en el paso 2.

$$f_B = 1 - \frac{I}{\hat{I}} = 1 - \frac{\oint \frac{B_P}{B_0} dl_P}{\oint \frac{\hat{B}_P}{B_0} dl_P}$$

6. El valor de Δ_B se itera hasta que el valor estimado de f_B coincida con la variable añadida en el paso 2.
7. Finalmente, se evalúa $\hat{B}_\varphi(\theta)/B_0$ de (3.51).

Este procedimiento conduce a las expresiones adecuadas para los campos que cumplan la condición que supone el balance de presión a través de la superficie de corriente. Es importante notar que no se modificaron las soluciones previamente calculadas en la sección (3.1). En su lugar, una vez obtenidas las soluciones se hace uso de las condiciones de balance entre una región y otra para modificar los parámetros calculados en el post procesamiento.

En la siguiente sección se añade una contribución finita a la densidad de corriente en la región del borde la cual sí modifica las soluciones de flujo poloidal.

3.7. Pedestal de Densidad de Corriente

Finalmente, se introduce un último parámetro libre f_J correspondiente a la fracción de la densidad de corriente que se ubica en el borde del plasma. Su añadidura ayuda a encontrar soluciones analíticas simples pero como consecuencia modifica las

expresiones $p(\psi/\psi_0)$ y $F^2(\psi/\psi_0)$,

$$\left. \begin{aligned} p(\Psi/\Psi_0) &= p_0 \left\{ f_P + (1 - f_P) \left(\frac{\Psi}{\Psi_0} \right)^2 + A_1 \left[\left(\frac{\Psi}{\Psi_0} \right) - \left(\frac{\Psi}{\Psi_0} \right)^2 \right] \right\} \\ F^2(\Psi/\Psi_0) &= R_0^2 B_0^2 \left\{ 1 + \frac{2\delta B}{B_0} \left(\frac{\Psi}{\Psi_0} \right)^2 + 2A_2 \left[\left(\frac{\Psi}{\Psi_0} \right) - \left(\frac{\Psi}{\Psi_0} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \right\} . \quad (3.55)$$

Los dos parámetros nuevos A_1 , A_2 , están relacionados con el parámetro f_J definido en una ecuación posterior.

Por lo tanto, las modificaciones, (3.55), llevan a su vez a una ecuación de Grad-Shafranov modificada. Considerando las mismas cantidades normalizadas definidas anteriormente: $\psi = \Psi/\Psi_0$, $r = R_0 r^{1/2}$ y $z = ay$. La nueva ecuación de Grad-Shrafranov queda reescrita como:

$$\left. \begin{aligned} (1 + \hat{\varepsilon}x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -j_\varphi(x, \psi), \\ j_\varphi(x, \psi) &= \frac{2R_0^2 a^2}{\Psi_0^2} \left\{ \left[\mu_0 p_0 (1 - f_P - A_1) r + B_0^2 \left(\frac{\delta B}{B_0} - A_2 \right) \right] \psi + \left[\frac{\mu_0 p_0}{2} A_1 r + \frac{B_0^2}{2} A_2 \right] \right\}, \\ r &= 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon x . \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

De aquí, eligiendo A_2/A_1 de tal forma que la relación entre el término r y el término constante en el corchete ψ sea igual a la misma relación como en el corchete constante, el resultado conducirá a una solución particular simple para ψ . La condición para la igualdad es:

$$\frac{(1 - f_P - A_1)}{(\delta B/B_0 - A_2)} = \frac{A_1}{A_2} \rightarrow A_2 = \frac{\delta B}{B_0} \frac{A_1}{1 - f_P}. \quad (3.57)$$

Entonces, la corriente toroidal se reduce a:

$$j_\varphi(x, \psi) = \frac{R_0^2}{\Psi_0^2} \left(\mu_0 p_0 r + \frac{B_0 \delta B}{1 - f_P} \right) [2(1 - f_P - A_1) \psi + A_1], \quad (3.58)$$

de donde se introduce la variable de entrada, f_J . Debido a que, la densidad de corriente no es una función de flujo pura, la magnitud del pedestal varía alrededor de

la superficie del plasma,

$$f_J = \frac{J_\varphi(r, \text{ frontera })}{J_\varphi(r, \text{ axis })} = \frac{j_\varphi(x, 0)/r^{1/2}}{j_\varphi(x, 1)/r^{1/2}} = \frac{A_1}{2(1 - f_P - A_1) + A_1} \rightarrow A_1 = \frac{2(1 - f_P) f_J}{1 + f_J} . \quad (3.59)$$

Con este cambio la ecuación (3.58) queda de la forma:

$$j_\varphi(x, \psi) = \frac{2R_0^2 a^2}{\Psi_0^2 (1 + f_J)} [\mu_0 p_0 (1 - f_P) r + B_0 \delta B] [(1 - f_J) \psi + f_J] . \quad (3.60)$$

La condición (3.57) conduce a un término no homogéneo de la ecuación de Grad-Shrafranov, donde $\psi = -f_J / (1 - f_J) = \text{const}$ es una solución particular de la ecuación de Grad-Shrafranov.

Sustituyendo las expresiones obtenidas, se llega a la nueva de la ecuación de Grad-Shrafranov y se definen las nuevas constantes modificadas α, ν más una función de flujo desplazado $\psi_J(x, y)$:

$$\left. \begin{aligned} (1 + \hat{\varepsilon}x) \frac{\partial^2 \psi_J}{\partial x^2} + \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \frac{\partial^2 \psi_J}{\partial y^2} &= -\alpha^2 (1 + \hat{\varepsilon}vx) \psi_J, \\ \alpha^2 &= \frac{2R_0^2 a^2}{\Psi_0^2} \left(\frac{1 - f_J}{1 + f_J} \right) \left[\mu_0 p_0 (1 - f_P) + \frac{B_0 \delta B}{1 + \varepsilon^2} \right] \\ \nu &= \frac{\mu_0 p_0 (1 - f_P)}{\mu_0 p_0 (1 - f_P) + B_0 \delta B / (1 + \varepsilon^2)} \\ \psi_J &= \psi + \frac{f_J}{1 - f_J} . \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

Esta ecuación es similar a la ecuación sin pedestal dada por (2.45), con la diferencia de que la restricción del límite de la función de flujo. Se convierte en:

$$\psi(\text{ superficie }) = 0 \rightarrow \psi_J(\text{ superficie }) = \frac{f_J}{1 - f_J} .$$

Condiciones de Frontera.

Debido a que ψ and ψ_J difieren en una constante, la condiciones de pendiente (derivada) y curvatura (segunda derivada) se mantienen idénticas al modelo sin corriente de pedestal descrito en la sección anterior.

De acuerdo con Guazzotto, si el pedestal no es demasiado grande, no es importante modificar las restricciones de curvatura, por lo que la solución aún satisface la

ecuación exacta de Grad-Shafranov para el caso sin pedestal.

Procedimiento para la Solución.

Ya que la condición de contorno en ψ_J (frontera) es ahora no-homogénea, la solución que se propone en [9] es una re-normalización en el eje de la forma:

$$\psi_J(\text{axis}) = \frac{1}{1 - f_J}. \quad (3.62)$$

Una vez especificada la geometría de la configuración y un valor de ν , se puede localizar un valor para α^2 de forma análoga al caso sin pedestal, ignorando temporalmente la condición de normalización en el eje. Debido a que la condición de contorno en la superficie no es homogénea, se puede encontrar una solución no trivial, que satisfaga (3.62) y a su vez, las 7 restricciones de frontera previas. En la columna de plasma simétrica, las relaciones de restricción ahora están dadas por:

$$\left. \begin{aligned} \vec{A}(\alpha) \cdot u &= v \\ u &= [c_1, c_2, s_2, c_3, s_3, c_4, s_4], \\ \mathbf{v} &= [\psi_J(\text{frontera}), \psi_J(\text{frontera}), \psi_J(\text{frontera}), 0, 0, 0, 0] \quad \psi_J(\text{frontera}) = \frac{f_J}{1-f_J}. \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

Vale recordar, que el parámetro α es una salida del análisis.

El valor de α se determina de forma análoga a la del caso sin pedestal. Donde el conjunto de relaciones de restricción no homogéneas 7×7 se resuelven para una α dada, para luego iterar hasta que el error $E(\alpha) = 0$ tenga un mínimo para los valores de α con una cierta tolerancia:

$$E(\alpha) = \left[\frac{\psi_J(\text{axis}) - 1/(1 - f_J)}{|\psi_J(\text{axis})| + |1/(1 - f_J)|} \right]^2. \quad (3.64)$$

3.8. Resultados

A continuación, se presentan las soluciones para la función de flujo poloidal, así como los perfiles en el ecuador de las propiedades del plasma calculados con las modificaciones por pedestal propuestos por Luca Guazzotto, para la configuración de ITER, MAST-U y ST40.

Como ya se mencionó previamente, las nuevas contribuciones de pedestal por presión y corriente de Bootstrap no modifican las soluciones de flujo poloidal. Pero la contribución de pedestal de corriente si lo hace, por este motivo aunque los diagramas de sección transversal parecen idénticos, no lo son. La comparación cualitativa de hecho se observa en la figura (3.10) donde se superponen las superficies obtenidas originalmente con las superficies obtenidas una vez agregado el pedestal. Se observa que las superficies de flujo con pedestal tienden a ser un poco más elongadas dentro de la frontera del plasma.

Es importante notar que la comparación es cualitativa porque los valores para la función de flujo han sido normalizados debido a que no coinciden entre el caso con y sin pedestal, aún así la superposición permite observar el cambio en la forma de las soluciones.

Las modificaciones son notorias en el cálculo de los perfiles en el ecuador para la presión y corriente toroidal; así como en el campo magnético poloidal y toroidal.

En las figuras siguientes se muestran los resultados para un caso general en el cual se añade un pedestal de presión ($f_P = 0.2$), densidad de corriente ($f_J = 0.25$) y de corriente de bootstrap ($f_B = 0.35$).

A partir de la función de flujo poloidal se obtienen los perfiles para el plasma: Perfiles de presión en la figura (3.11), perfiles de corriente en la (3.12), perfiles de campo magnético y poloidal en las figuras (3.13) y (3.14), finalmente los perfiles de el factor q de seguridad en (3.15).

Como instrucción que facilite la visualización, en este trabajo, se acomodan los resul-

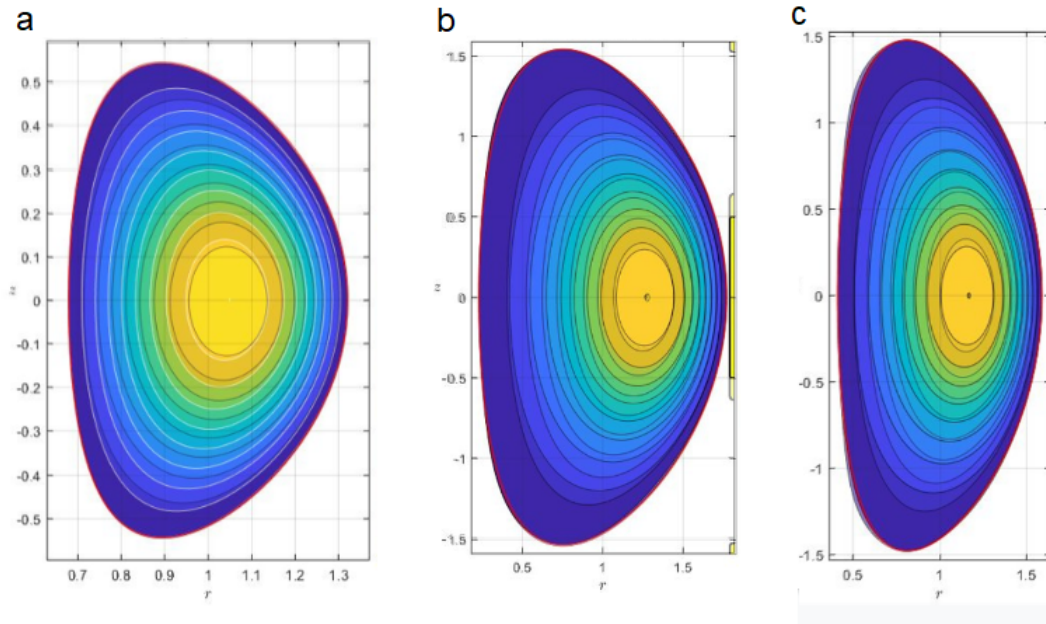


Figura 3.10: Superposición de las funciones de flujo poloidal para [a] ITER, [b] MAST-U y [c] ST40.

tados en dos renglones, en el superior se presentan los resultados sin pedestal y en el inferior los resultados con pedestal para los tres dispositivos tratados.

Tal como se espera, en las figuras (3.12) y (3.11), las funciones de presión y corriente tienen un valor finito en el borde de cada dispositivo. Se genera un leve desplazamiento del eje magnético. En la figura (3.13) no se observan cambios entre el campo magnético toroidal sin y con pedestal. Mientras que en la figura (3.13) se extienden los valores alcanzados por el campo magnético poloidal conservando cualitativamente el comportamiento de dicho campo.

Este par factores tiene como consecuencia que en la figura (3.15) las gráficas con pedestal muestren un comportamiento similar a las que no poseen pedestal pero alcanzando nuevos valores menores.

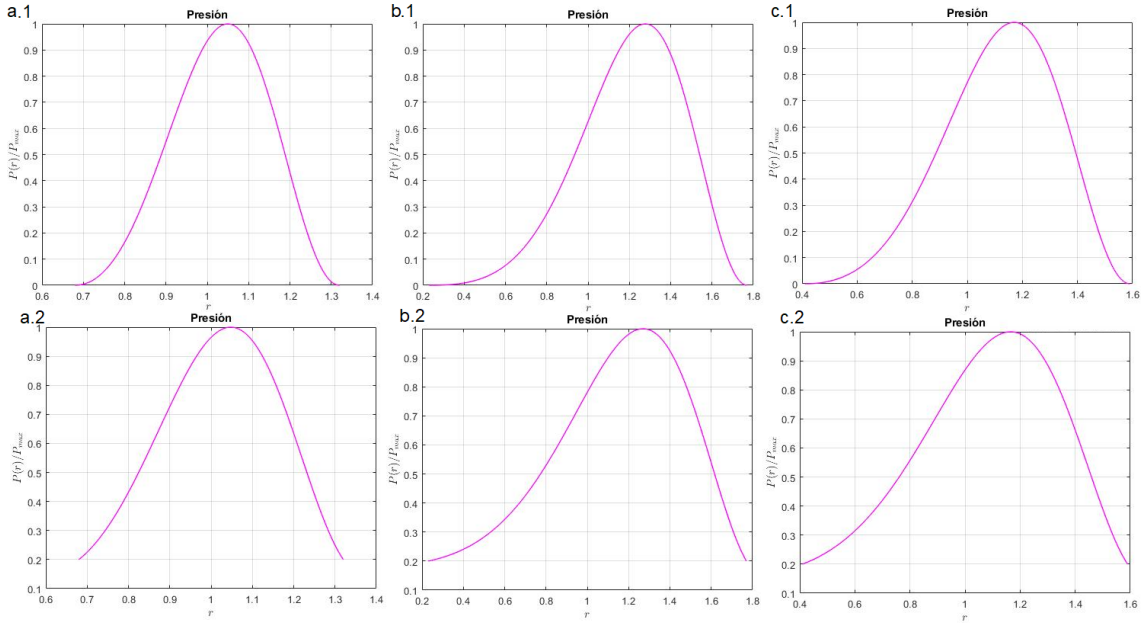


Figura 3.11: Perfiles de presión para [a] ITER, [b]MAST-U y [c] ST40. Renglón 1, resultados sin pedestal; Reglón 2, resultados con pedestal.

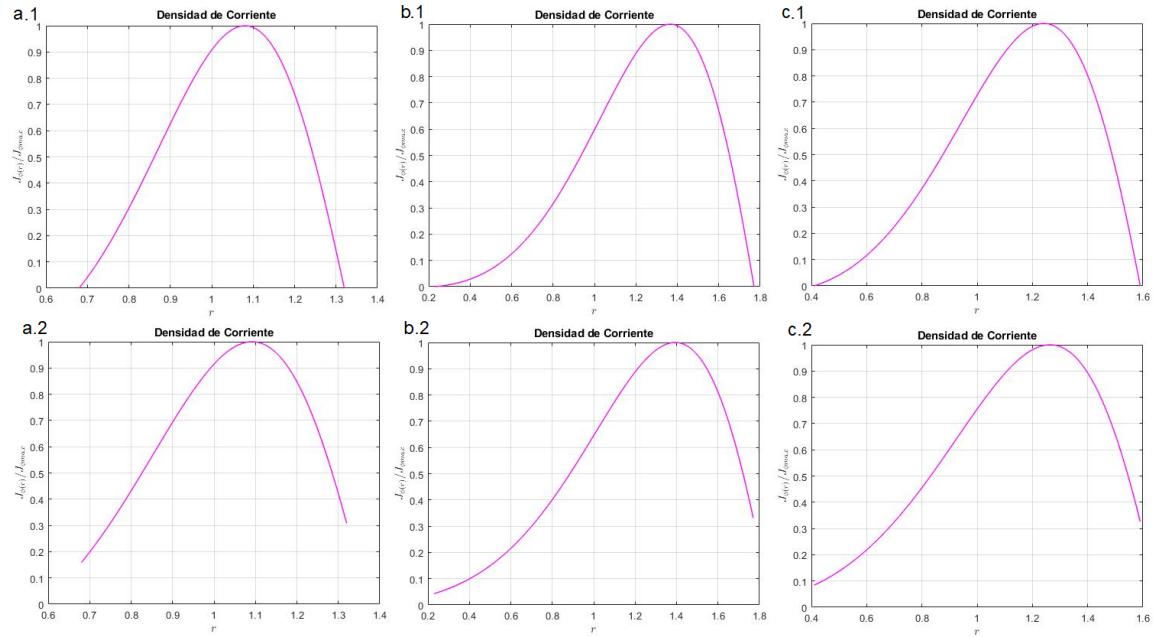


Figura 3.12: Perfiles de densidad de corriente para [a] ITER, [b]MAST-U y [c] ST40. Renglón 1, resultados sin pedestal; Reglón 2, resultados con pedestal.

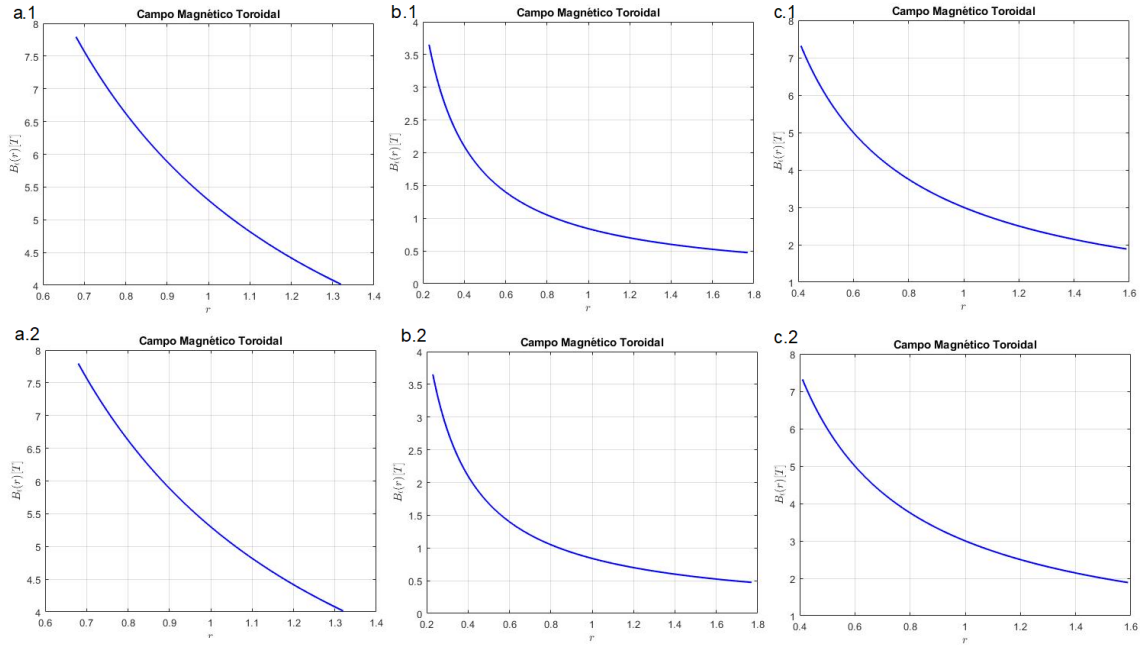


Figura 3.13: Perfiles de campo magnético toroidal para [a] ITER, [b]MAST-U y [c] ST40. Renglón 1, resultados sin pedestal; Renglón 2, resultados con pedestal.

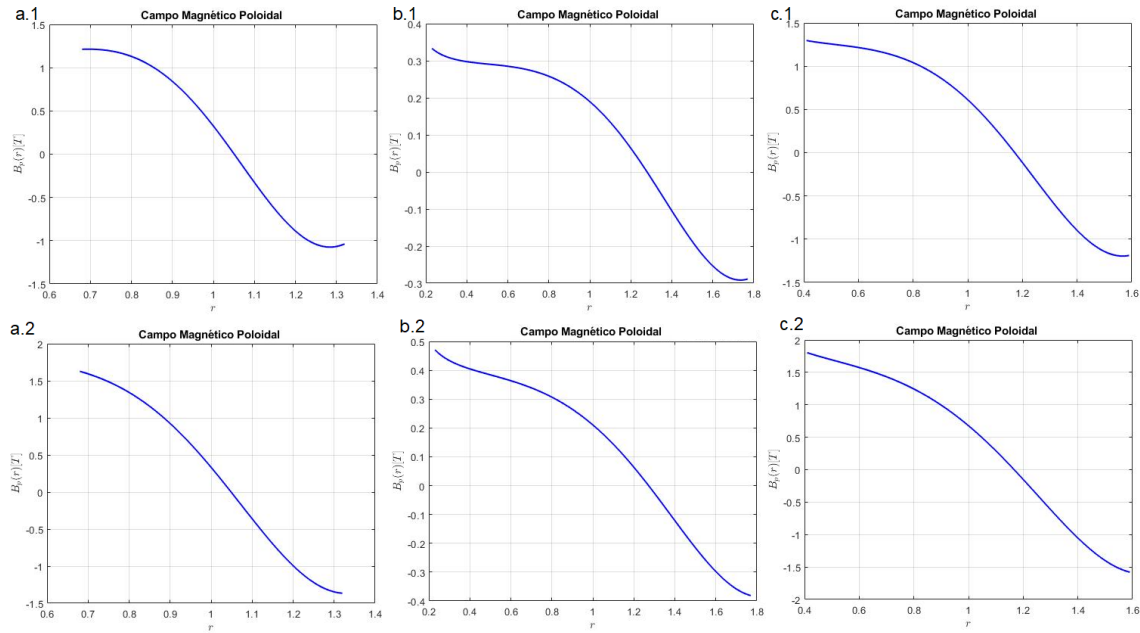


Figura 3.14: Perfiles de campo magnético poloidal para [a] ITER, [b]MAST-U y [c] ST40. Renglón 1, resultados sin pedestal; Renglón 2, resultados con pedestal.

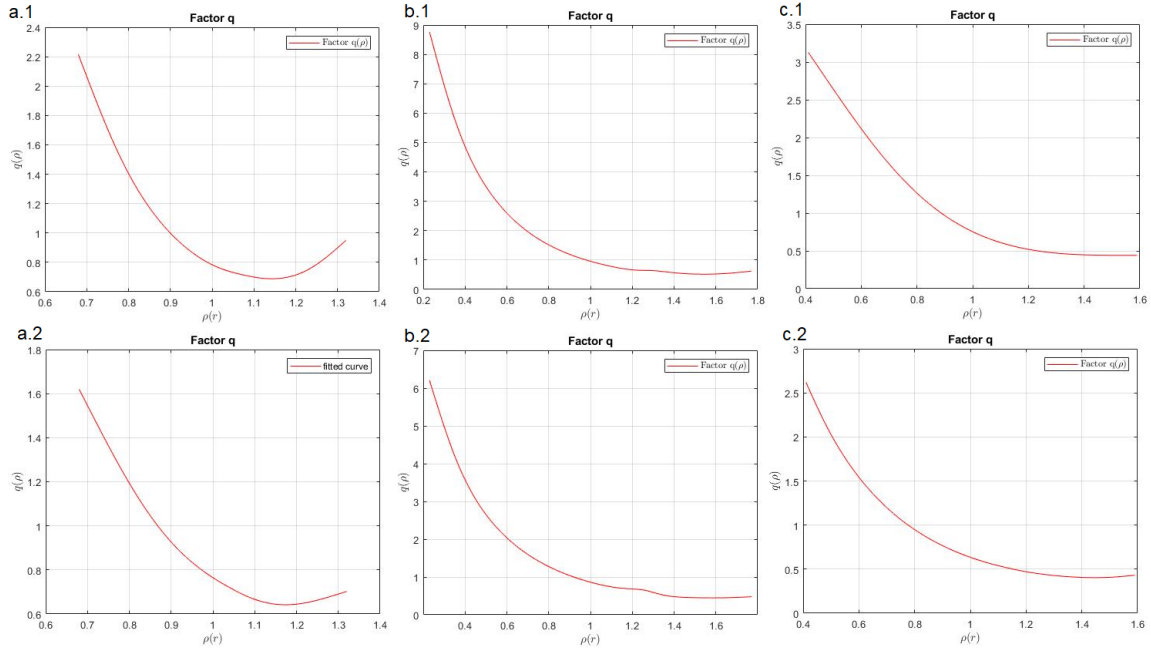


Figura 3.15: Perfiles de factor de seguridad q para [a] ITER, [b] MAST-U y [c] ST40. Reglón 1, resultados sin pedestal; Reglón 2, resultados con pedestal.

3.9. Triangularidad Negativa.

Otro análisis interesante que se puede realizar con el código de Luca Guazzotto es el estudio de soluciones de equilibrio para configuraciones de plasma con triangularidad negativa.

La triangularidad negativa es un factor interesante para mejorar algunas de las cualidades en el confinamiento del plasma como se ha observado en algunos aparatos modernos, el TCV y el DIII-D [4][5][6].

En particular, en DIII-D se han obtenido mejores tiempos de confinamiento y mejor beta del plasma [42][43].

Por este motivo es que estudiar la triangularidad negativa parece ser un tanto indispensable en materia de fusión nuclear.

Una forma de hacerlo es como se realiza en el artículo Junhyuk Song y Carlos Paz-Soldan en [7], donde, los autores utilizan configuraciones de equilibrio con triangula-

ridad negativa para DIII-D obtenidas por el código para soluciones numéricas ECOM [8]. Una vez obtenidos los equilibrios se estudia la estabilidad de estos ante elongaciones transversales.

La estabilidad de la columna ante un modo normal específico $n=0$, modos resistivos de pared, o resistive-wall-modes (RWM), está sujeta a los valores de beta poloidal β_p y de la inductancia interna l_i que cambian con la elongación. Las inestabilidades de este tipo son más prominentes en el caso de triangularidad negativa que en el caso contrario [7].

Complementando el análisis hecho por Song y en forma de comparación del equilibrio encontrado por el código ECOM; se puede encontrar un equilibrio similar con el código de Luca Guazzotto y posteriormente analizar las figuras de mérito de esta solución.

A continuación, se muestran los parámetros geométricos estudiados por Song del dispositivo DIII-D, tabla (3.3).

| | ϵ | δ | κ | ν | $R_0[m]$ | $B_0[T]$ | q_0 |
|--------|------------|-----------|----------|-------|----------|----------|-------|
| DIII-D | 0.34 | ± 0.4 | 1.3 | 1 | 1.7 | 2.0 | 1 |

Tabla 3.3: Parámetros para comparación triangularidad positiva y negativa para DIII-D.

En la figura (3.16) se muestran las secciones transversales del flujo poloidal comparando la triangularidad positiva y triangularidad negativa para un equilibrio tipo DIII-D. En el primer renglón se encuentran las superficies calculadas por Song con el código ECOM, mientras que en el segundo las superficies calculadas con las modificaciones del código de Guazzotto. En la figura (3.16) se observa una similitud entre las superficies de flujo magnético para ambos casos de triangularidad, positiva y negativa; se observa un desplazamiento de Grad-Sharanov más pronunciado en el caso de triangularidad negativa. Lo cual funge como verificación cualitativa de ambos códigos.

A continuación, de forma análoga al caso triangularidad positiva se obtuvieron los

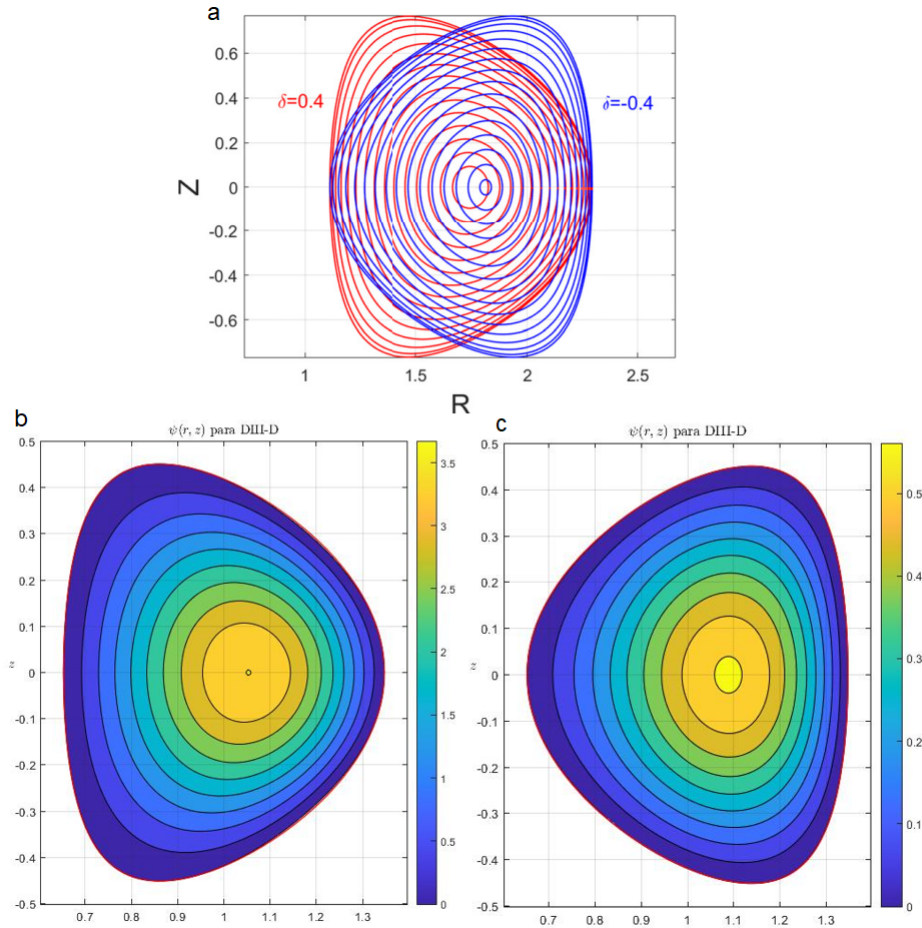


Figura 3.16: Perfiles de la función de flujo poloidal para DIII-D [a] Perfiles de triangularidad positiva y negativa calculados por Song con el código ECOM [7], [b] y [c] Perfiles de triangularidad positiva y negativa calculados con el método de Guazzotto.

perfiles para triangularidad negativa de la presión, figura (3.17); la densidad de corriente, figura (3.18); el campo magnético poloidal y toroidal, figuras (3.20) y (3.19); finalmente el factor de seguridad (3.21). Comparación entre triangularidad positiva y negativa para DIII-D. Es interesante observar que los perfiles, tanto de presión como de densidad de corriente no poseen un cambio en la forma. La diferencia principal es el desplazamiento del eje magnético.

Mientras que el campo magnético toroidal permanece sin cambios, como se observa en la figura (3.19), existe una diferencia pronunciada en la forma del campo magnético poloidal en cuanto a su comportamiento que luce más pronunciado en la figura (3.20).

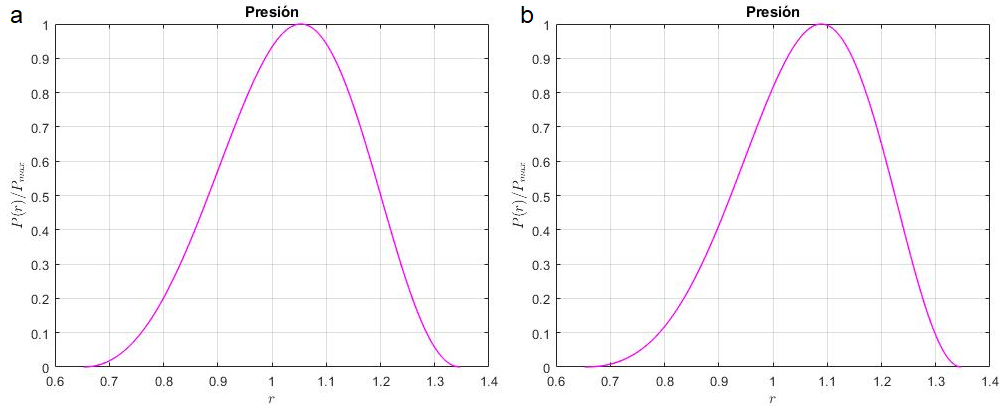


Figura 3.17: Perfiles de presión para DIII-D con [a] triangularidad positiva [b] triangularidad negativa.

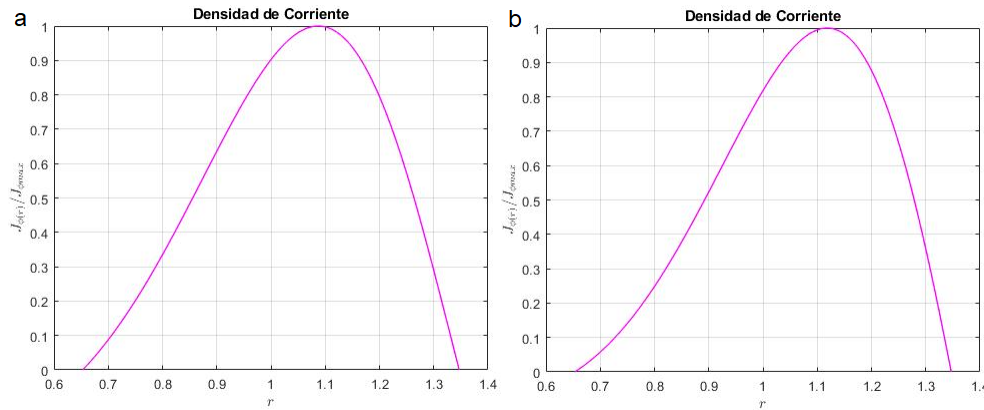


Figura 3.18: Perfiles de densidad de corriente para DIII-D con [a] triangularidad positiva [b] triangularidad negativa.

Esto tiene como consecuencia un cambio en los valores que se obtienen para el factor de seguridad q entre el caso de triangularidad positiva y negativa, observar figura (3.21).

Es interesante observar que el comportamiento que se espera para el factor de seguridad en un tokamak, es decir, una curva tipo convexa se asemeja más al caso de triangularidad positiva que en el caso de triangularidad negativa, al menos para este trabajo. Lo cual deja una brecha importante entre la conveniencia de la triangularidad negativa.

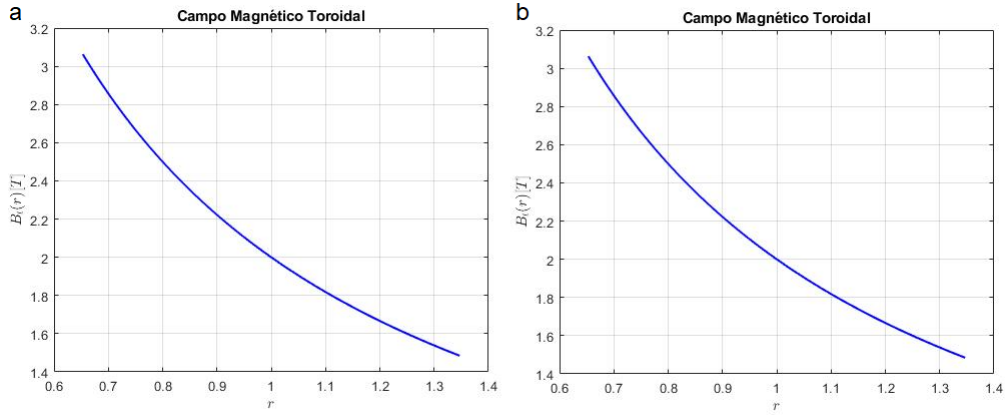


Figura 3.19: Perfiles de campo magnético toroidal para DIII-D con [a] triangularidad positiva [b] triangularidad negativa.

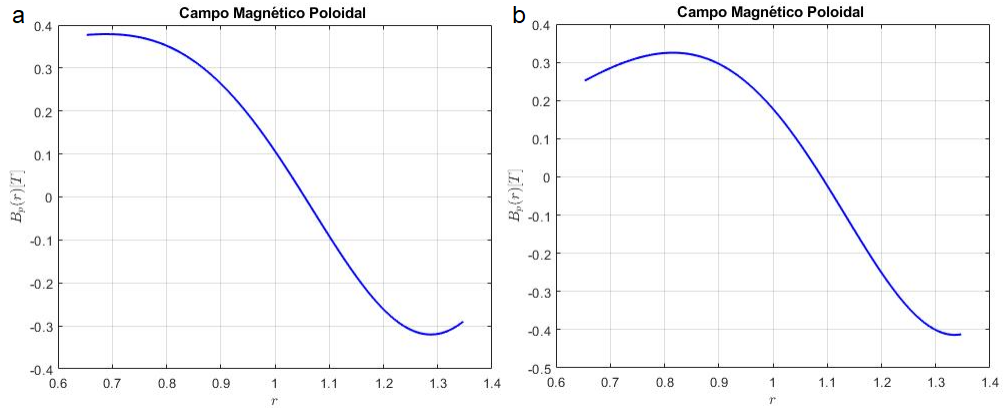


Figura 3.20: Perfiles de campo magnético poloidal para DIII-D con [a] triangularidad positiva [b] triangularidad negativa.

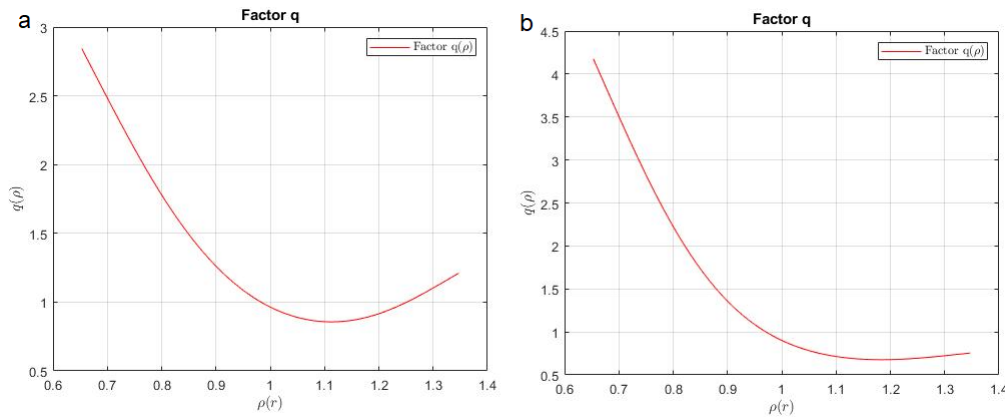


Figura 3.21: Perfiles de factor de seguridad para DIII-D con [a] triangularidad positiva [b] triangularidad negativa.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se estudió el comportamiento de un tipo de soluciones propuestas por Luca Guazzotto y Jeffrey P. Freidberg en [3] a la ecuación de Grad-Shafranov que describe el equilibrio en un plasma. Se realizó el análisis de soluciones para tres configuraciones de frontera correspondientes a experimentos reales: ITER, MAST-U y ST40. Las soluciones de las propuestas hechas por Guazzoto consisten en funciones libres no constantes y la solución analítica en series de funciones de senos y cosenos. Este tipo de soluciones, tal como se observó, permite recuperar información útil para los parámetros de plasma en los dispositivos, a diferencia de soluciones analíticas previas, como lo eran las funciones de Solov'ev [34]; información que parece, en cierta medida, consistente con lo esperado de estos resultados en la literatura.

Las soluciones para la función de flujo poloidal se observan cabales con lo esperado, al menos en la región del plasma para los dispositivos presentados. Fuera de la región del plasma, el dispositivo MAST-U presenta una ligera región con soluciones de flujo poloidal abiertas, lo cual sigue un problema con la elección del parámetro de la solución α .

Se hallaron de manera particular los perfiles de campo magnético (tanto poloidal como toroidal), el factor de seguridad, presión y densidad de corriente que se

obtienen con las soluciones de flujo poloidal propuestas por Guazzotto. Se hizo una comparación de estos resultados con los perfiles típicos de la literatura, y se halló que los perfiles obtenidos coinciden en forma cualitativa con el comportamiento esperado, con la excepción de que el campo poloidal no se va a cero de forma uniforme en la frontera del plasma; lo que tiene como consecuencia que el factor de seguridad no coincida con una forma convexa típica de los resultados experimentales.

Se concluye que las soluciones propuestas por Luca Guazzotto y el procedimiento realizado para obtener los parámetros del plasma, pueden predecir los resultados experimentales en un cierto rango de tolerancia. Se puede aplicar a una gama de configuraciones, en particular, en este trabajo se estudiaron aquellos con frontera sin divisor para los parámetros geométricos independientes ϵ , κ , δ , β_p , β_T .

De forma análoga a lo realizado en [9] se añaden contribuciones superficiales, como lo son, regiones en la frontera con un salto en la presión, el gradiente de presión y el gradiente de densidad de corriente. Estas modificaciones permiten predecir aún mejor, los resultados experimentales.

De forma similar al caso sin pedestal, se estudiaron los perfiles de campo magnético (tanto poloidal como toroidal), el factor de seguridad, presión y densidad de corriente. Se realizó la comparación entre ambos casos, con y sin pedestal.

Posteriormente, se estudiaron soluciones de equilibrio para configuraciones de plasma con triangularidad negativa para el dispositivo DIII-D con el código de Guazzotto, y se compararon con equilibrios numéricos calculados por Junhyuk Song y Carlos Paz Soldan en [7] con el código ECOM. Se encontró una muy buena similitud entre las soluciones de equilibrio obtenidas para los mismos parámetros en los casos positivo y negativo. Además, se complementa el análisis hecho por Song al calcular las figuras de mérito del plasma.

El estudio de la triangularidad negativa es importante porque como se ha observado en algunos experimentos, [4][5][6], parece optimizar el confinamiento.

El trabajo futuro consiste en dos etapas:

La primera parte sería, la adaptación de otros parámetros que hacen a las soluciones de Luca Guazzotto más realistas como lo es, la condición de flujo en la columna del plasma; que cambia las soluciones a la ecuación de Grad-Shafranov .

Y posteriormente, en la creación de un código que estudie la estabilidad de las soluciones de equilibrio de Luca Guazzotto.

El estudio de estabilidad para las soluciones encontradas es relevante porque podría permitir ya no solo la descripción de un experimento, si no a su vez, dar las condiciones necesarias para maximizar los parámetros de interés en función de la configuración de una columna de plasma en Tokamaks.

Continuar con este estudio permite establecer colaboración con grupos de investigación afines con la intención de acrecentar las herramientas y conocimientos importantes en materia de la fusión nuclear.

Capítulo 5

Apéndices

Comparación entre perfiles con y sin pedestal en la frontera de plasma.

A continuación, se muestran las figuras de los perfiles obtenidos para MAST-U y ST40. Para los casos con y sin pedestal en la frontera de plasma.

En las figuras siguientes se muestran los resultados para un caso general en el cual se añade un pedestal de presión ($f_P = 0.2$), densidad de corriente ($f_J = 0.25$) y de corriente de Bootstrap ($f_B = 0.35$).

MAST-U

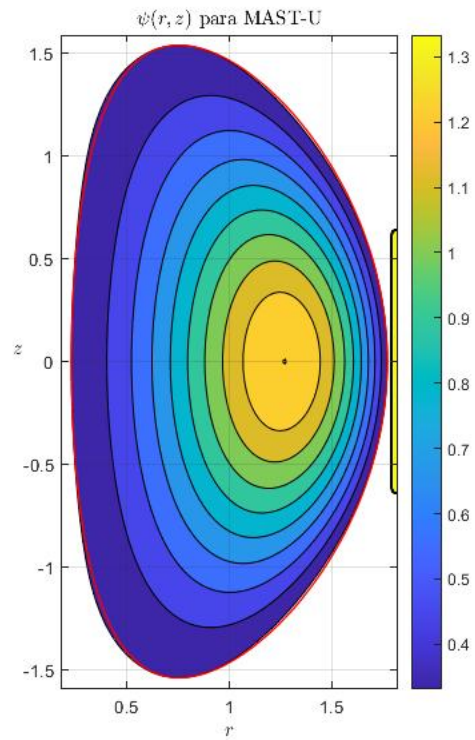


Figura 5.1: Perfiles de la función de flujo poloidal para MAST-U con pedestales.

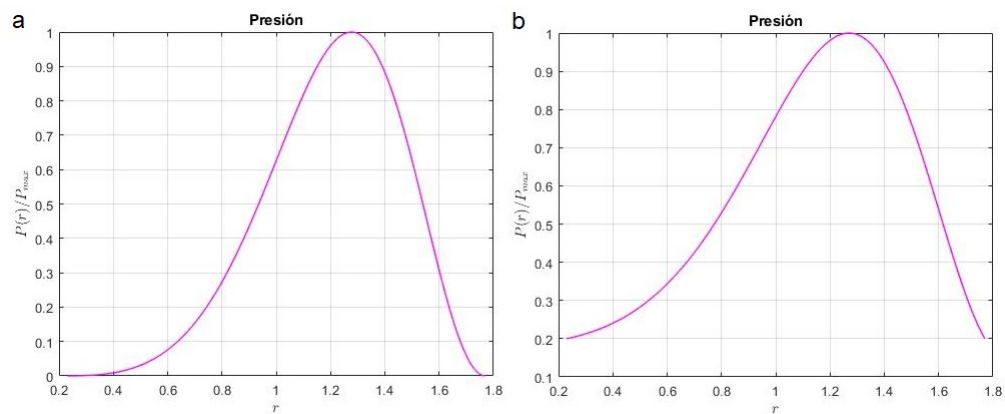


Figura 5.2: Perfiles presión para MAST-U: [a] sin contribuciones de frontera y [b] con pedestales.

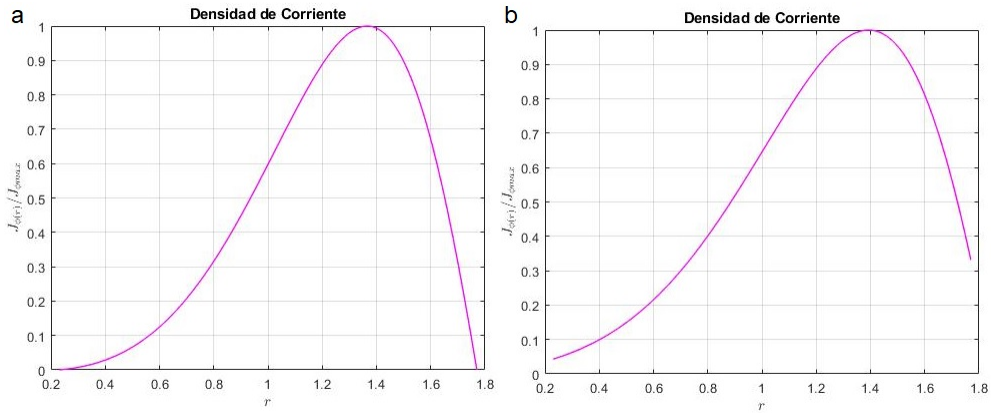


Figura 5.3: Perfiles de densidad de corriente para MAST-U: [a] sin contribuciones de frontera y [b] con pedestales.

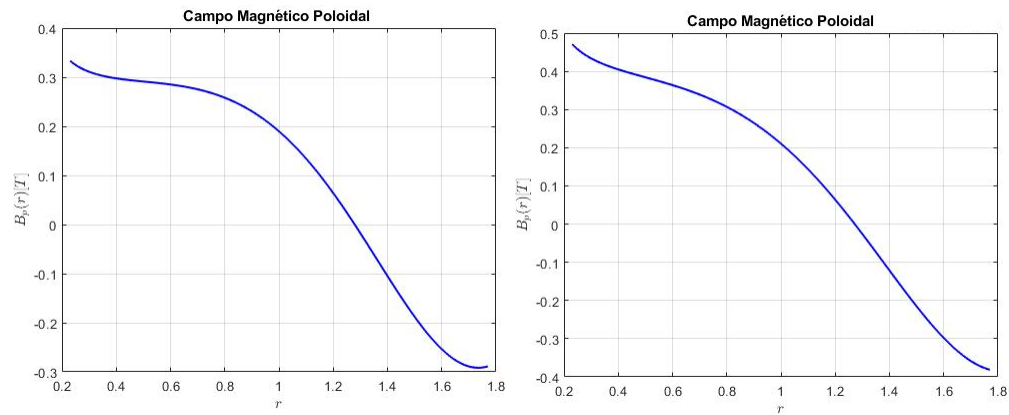


Figura 5.4: Perfiles de campo magnético poloidal para MAST-U: [a] sin contribuciones de frontera y [b] con pedestales.

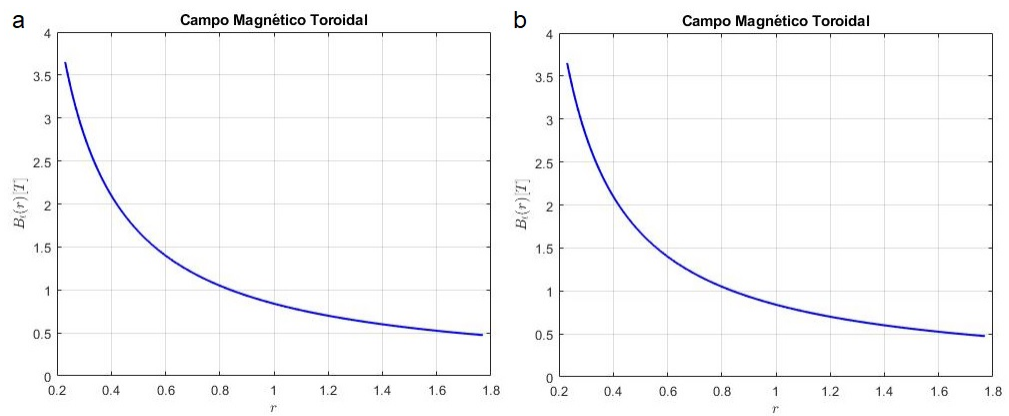


Figura 5.5: Perfiles de campo magnético toroidal para MAST-U: [a] sin contribuciones de frontera y [b] con pedestales.

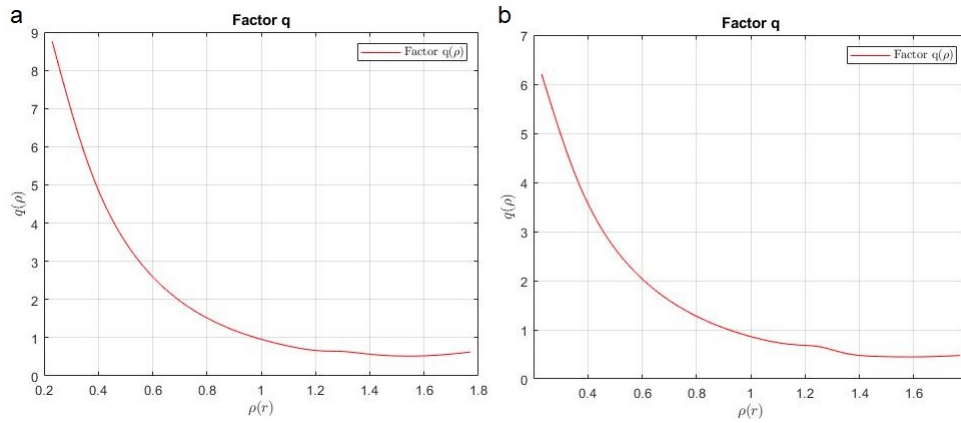


Figura 5.6: Perfiles de factor de seguridad para MAST-U: [a] sin contribuciones de frontera y [b] con pedestales.

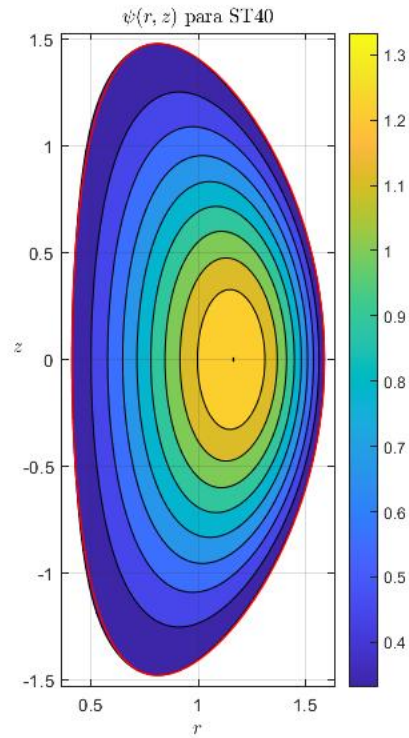


Figura 5.7: Perfiles de la función de flujo poloidal para ST40 con pedestales.

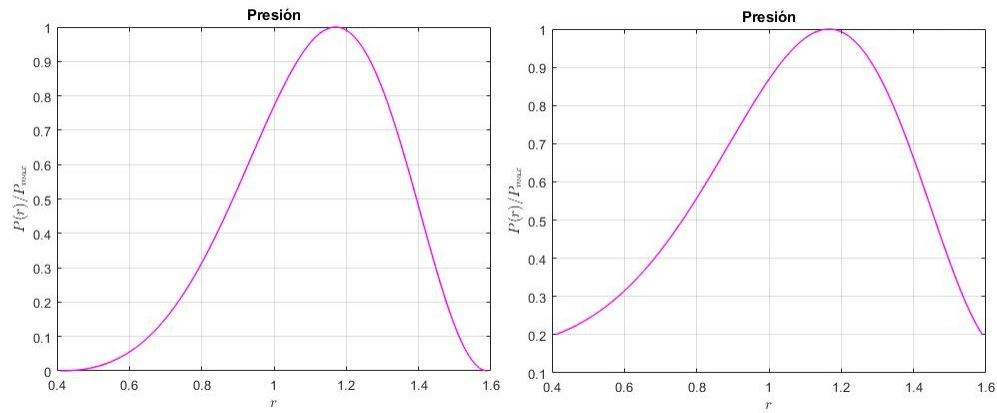


Figura 5.8: Perfiles presión para ST40: [a] sin contribuciones de frontera y [b] con pedestales.

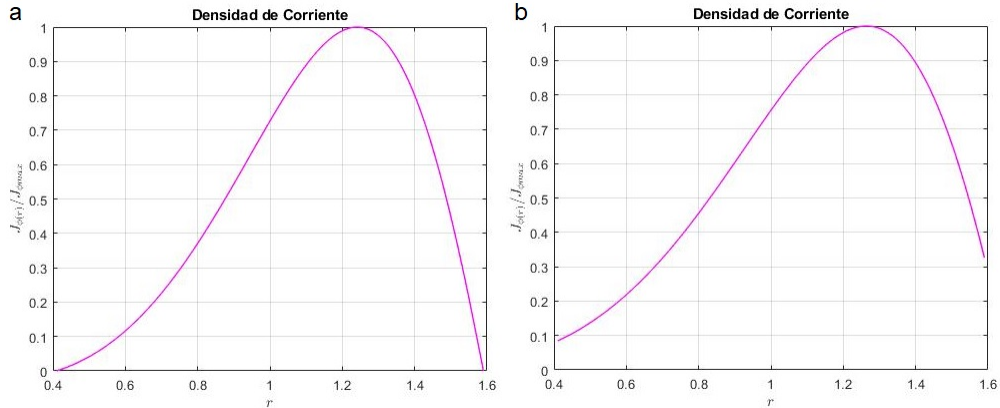


Figura 5.9: Perfiles de densidad de corriente para ST40: [a] sin contribuciones de frontera y [b] con pedestales.

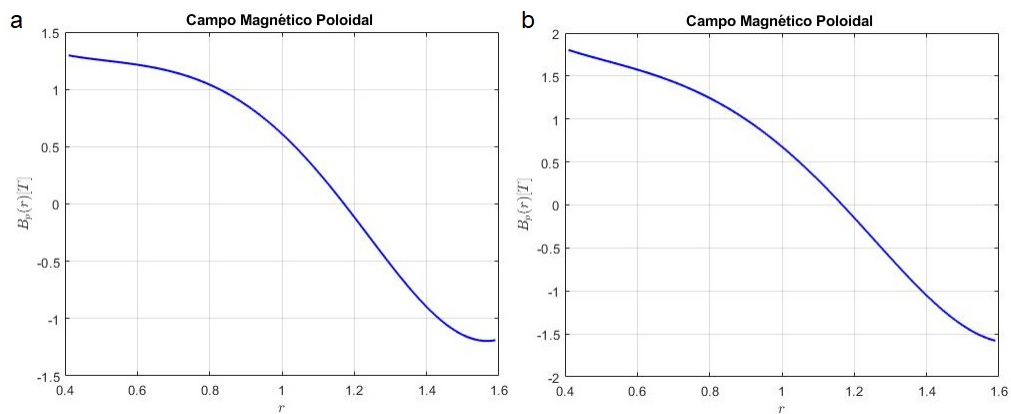


Figura 5.10: Perfiles de campo magnético poloidal para ST40: [a] sin contribuciones de frontera y [b] con pedestales.

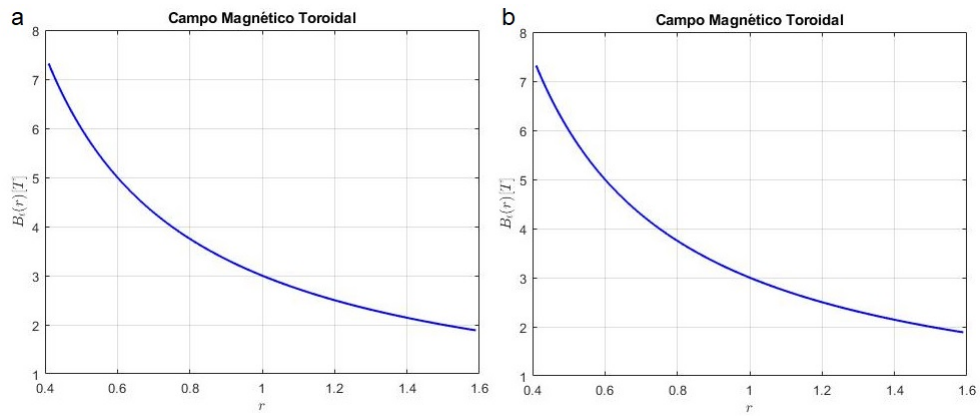


Figura 5.11: Perfiles de campo magnético toroidal para MAST-U: [a] sin contribuciones de frontera y [b] con pedestales.

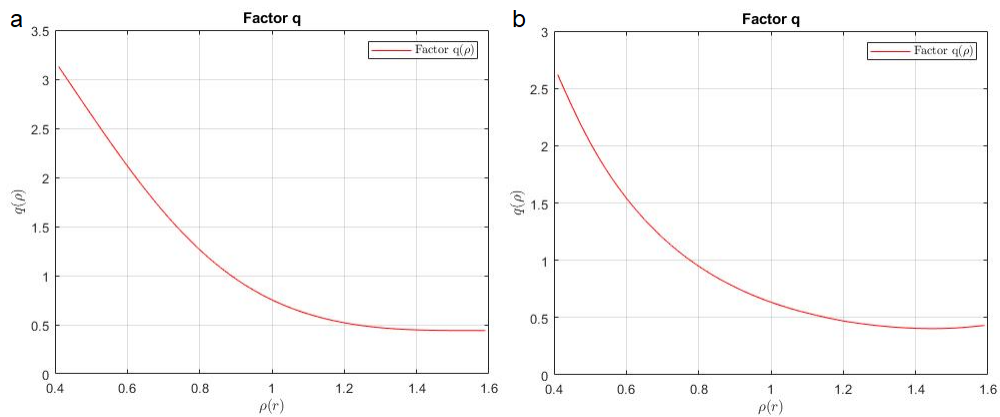


Figura 5.12: Perfiles de factor de seguridad para ST40: [a] sin contribuciones de frontera y [b] con pedestales.

Bibliografía

- [1] O. Maceda-Ramírez, C. Carrera-Padilla, J. Herrera-Velázquez, K. Salgero-Martínez, and M. Segura-Ramirez, “Exploring the limits of solov’ev profiles,” *Physics of Plasmas*, vol. 28, no. 9, p. 092509, 2021.
- [2] L. Guazzotto and J. P. Freidberg, “A family of analytic equilibrium solutions for the grad–shafranov equation,” *Physics of Plasmas*, vol. 14, no. 11, p. 112508, 2007.
- [3] L. Guazzotto and J. Freidberg, “Simple, general, realistic, robust, analytic tokamak equilibria. part 1. limiter and divertor tokamaks,” *Journal of Plasma Physics*, vol. 87, no. 3, 2021.
- [4] Y. Camenen, A. Pochelon, R. Behn, A. Bottino, A. Bortolon, S. Coda, A. Karpushov, O. Sauter, G. Zhuang, *et al.*, “Impact of plasma triangularity and collisionality on electron heat transport in tev l-mode plasmas,” *Nuclear fusion*, vol. 47, no. 7, p. 510, 2007.
- [5] M. Fontana, L. Porte, S. Coda, O. Sauter, T. Team, *et al.*, “The effect of triangularity on fluctuations in a tokamak plasma,” *Nuclear Fusion*, vol. 58, no. 2, p. 024002, 2017.
- [6] M. E. Austin, A. Marinoni, M. Walker, M. Brookman, J. Degraessie, A. Hyatt, G. McKee, C. Petty, T. Rhodes, S. Smith, *et al.*, “Achievement of reactor-relevant performance in negative triangularity shape in the diii-d tokamak,” *Physical Review Letters*, vol. 122, no. 11, p. 115001, 2019.

- [7] J. Song, C. Paz-Soldan, and J. Lee, “Impact of negative triangularity plasma shaping on the $n=0$ resistive wall mode in a tokamak,” *Nuclear Fusion*, vol. 61, no. 9, p. 096033, 2021.
- [8] J. Lee and A. Cerfon, “Ecom: A fast and accurate solver for toroidal axisymmetric mhd equilibria,” *Computer Physics Communications*, vol. 190, pp. 72–88, 2015.
- [9] L. Guazzotto and J. Freidberg, “Simple, general, realistic, robust, analytic tokamak equilibria. part 2. pedestals and flow,” *Journal of Plasma Physics*, vol. 87, no. 3, 2021.
- [10] I. Fells, “The need for energy,” *Europhysics news*, vol. 29, no. 6, pp. 193–195, 1998.
- [11] T. Químico, “¿qué es la fisión nuclear?,” 2020. accesado: 28 September 2021.
- [12] IAEA, “Power reactor information system,” 2021. accesado: 25 September 2021.
- [13] O. of NUCLEAR ENERGY, “Advantages and challenges of nuclear energy,” 2021. accesado: 25 September 2021.
- [14] K. S. Krane, D. Halliday, *et al.*, *Introductory nuclear physics*, vol. 465. Wiley New York, 1988.
- [15] A. S. Eddington and A. S. Eddington, *The internal constitution of the stars*. Cambridge University Press, 1988.
- [16] F. F. Chen *et al.*, *Introduction to plasma physics and controlled fusion*, vol. 1. Springer, 1984.
- [17] P. Kaw and I. Bandyopadhyay, “The case for fusion,” in *Fusion Physics*, 2012.
- [18] IEAA, “Fusion device information system,” 2021. accesado: 26 September 2021.
- [19] J. Lawson, “Some criteria for a useful thermonuclear reactor,” *Atomic Energy Research Establishment*, 1955.

- [20] Z. Donkó, P. Hartmann, and G. Kalman, “Strongly coupled plasma liquids,” *arXiv preprint arXiv:0710.5229*, 2007.
- [21] J. Parisi and J. Ball, *The future of fusion energy*. World Scientific, 2019.
- [22] W. Picot, “Magnetic fusion confinement with tokamaks and stellarators,” *Organismo Internacional de Energía Atómica Boletín*, vol. 62, no. 2, pp. 6–7, 2021.
- [23] D. J. Griffiths, “Introduction to electrodynamics,” 2005.
- [24] J. A. Bittencourt, *Fundamentals of plasma physics*. Springer Science & Business Media, 2004.
- [25] P. M. Bellan, *Fundamentals of plasma physics*. Cambridge university press, 2008.
- [26] F. F. Chen, *An indispensable truth: how fusion power can save the planet*. Springer, 2011.
- [27] R. J. Goldston, *Introduction to plasma physics*. CRC Press, 2020.
- [28] J. P. Freidberg, *ideal MHD*. Cambridge University Press, 2014.
- [29] K. Lackner, S. Guenter, P. Lauber, G. Pautasso, and B. Scott, “Equilibrium and macroscopic stability of tokamaks,” in *Fusion Physics*, 2012.
- [30] R. B. White, *Theory Of Toroidally Confined Plasmas, The*. World Scientific Publishing Company, 2013.
- [31] R. Post, “The magnetic mirror approach to fusion,” *Nuclear Fusion*, vol. 27, no. 10, p. 1579, 1987.
- [32] V. D. Shafranov, “Equilibrium of a toroidal plasma in a magnetic field,” *Journal of Nuclear Energy. Part C, Plasma Physics, Accelerators, Thermonuclear Research*, vol. 5, no. 4, p. 251, 1963.
- [33] M. Ariola and A. Pironti, *Magnetic control of tokamak plasmas*, vol. 187. Springer, 2008.

- [34] L. Solov'ev, "The theory of hydromagnetic stability of toroidal plasma configurations," *Sov. Phys. JETP*, vol. 26, no. 2, pp. 400–407, 1968.
- [35] J. P. Freidberg, A. Cerfon, and J. Lee, "Tokamak elongation—how much is too much? part 1. theory," *Journal of Plasma Physics*, vol. 81, no. 6, 2015.
- [36] J. W. Demmel, *Applied numerical linear algebra*. SIAM, 1997.
- [37] B. N. Datta, *Numerical linear algebra and applications*, vol. 116. Siam, 2010.
- [38] L. N. Trefethen and D. Bau III, *Numerical linear algebra*, vol. 50. Siam, 1997.
- [39] "All-the-worlds-tokamaks," Sep 2018.
- [40] V. Mukhovatov and V. Shafranov, "Plasma equilibrium in a tokamak," *Nuclear Fusion*, vol. 11, no. 6, p. 605, 1971.
- [41] P. Helander and D. J. Sigmar, *Collisional transport in magnetized plasmas*, vol. 4. Cambridge university press, 2005.
- [42] C. Paz-Soldan *et al.*, "Plasma performance and operational space without elms in diii-d," *Plasma Physics and Controlled Fusion*, vol. 63, no. 8, p. 083001, 2021.
- [43] A. Marinoni, M. Austin, A. Hyatt, M. Walker, J. Candy, C. Chrystal, C. Lasnier, G. McKee, T. Odstrčil, C. Petty, *et al.*, "H-mode grade confinement in l-mode edge plasmas at negative triangularity on diii-d," *Physics of Plasmas*, vol. 26, no. 4, p. 042515, 2019.