



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
POSGRADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA DE MATERIALES
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES.**

**“CONVECCIÓN TERMOCAPILAR LINEAL DE DOS CAPAS DELGADAS
DE LÍQUIDO QUE MOJAN AMBAS CARAS DE UNA PARED GRUESA
CON DESLIZAMIENTO.”**

TESIS:

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES.**

PRESENTA:

JOSÉ LUIS VILLALOBOS PIÑERA.

TUTOR PRINCIPAL:

**DR. LUIS ANTONIO DÁVALOS OROZCO.
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES.**

COMITÉ TUTOR:

**DR. CARLOS IGNACIO MENDOZA RUIZ.
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES.**

**DR. GERARDO RUIZ CHAVARRÍA.
FACULTAD DE CIENCIAS.**

CIUDAD DE MÉXICO, 21 DE OCTUBRE DE 2022.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A la memoria de mi padre

Agradecimientos

Me gustaría empezar agradeciendo a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), mi alma máter, y al Instituto de Investigaciones en Materiales (IIM) por considerarme para poder cursar mis estudios de posgrado en su institución. Sin esto el presente proyecto no sería posible.

Le agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado durante mi estancia en la maestría. Dicho alivio económico me permitió dedicarme en tiempo completo a mis estudios.

A mi asesor el Dr. Luis Antonio Dávalos Orozco, le agradezco su guía y paciencia en la realización de esta tesis. Gracias por siempre ayudarme con mis dudas, a corregir y entender el origen de mis errores, y siempre presentar un compromiso muy grande con el desarrollo de la tesis. A los miembros de mi comité tutor los Dres. Carlos Ignacio Mendoza Ruiz y Gerardo Ruiz Chavarría, a quienes agradezco los comentarios y correcciones al presente documento, además de su amabilidad y atención durante mi estadía en el posgrado.

Hago mención especial para mis sinodales la Dra. María Adela Monreal Gómez, el M. en I. David Porta Zepeda, el Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz y el Dr. José Federico Hernández Sánchez. Gracias a sus comentarios que ayudaron a enriquecer el presente escrito.

Le doy las gracias a mi madre y mi hermana, Magyar y Katya, por el apoyo moral y emocional durante mis estudios de posgrado. A mi hermano Luis Antonio, le agradezco por sus palabras de aliento y apoyo durante todo el desarrollo de la tesis. A mis primos Jesús y Oscar por todas esas pláticas, consejos y buenos momentos. A mi tío Eduardo, a quien con mucho aprecio le agradezco todo el apoyo brindado. A mis amigos Carlos y Daniela, de quienes disfruto inmensamente su compañía, gracias por esos momentos, risas y todo el apoyo que me han dado.

Gracias a mi familia y amigos, los cuales han formado parte fundamental de mi desarrollo y crecimiento profesional y personal. Agradezco también a todas aquellas personas que me han brindado su apoyo moral, emocional o de cualquier otra naturaleza, gracias por creer en mí y ser parte de mi vida.

Índice general

Resumen	iv
Nomenclatura	v
1. Introducción	1
1.1. Fronteras con deslizamiento	5
2. Desarrollo teórico	7
2.1. Planteamiento del problema	7
2.2. Ecuaciones gobernantes	8
2.2.1. Conservación de masa	8
2.2.2. Conservación de momento	9
2.2.3. Conservación de la energía	9
2.3. Condiciones de frontera	10
2.3.1. Condición cinemática de una superficie libre	10
2.3.2. Triedro asociado a la superficie libre	11
2.3.3. Condiciones de esfuerzo en la entrecara de una superficie libre	12
2.3.4. Entre el fluido y la pared	14
2.3.5. Condiciones térmicas	15
2.3.6. Perfiles de temperatura en el estado básico	16
2.4. Adimensionalización	17
2.4.1. Fluido 2	18
2.4.2. Pared	19
2.4.3. Fluido 1	20
2.5. Expansiones asintóticas	22
3. Solución	23
3.1. Soluciones al orden menor	23
3.1.1. Distribuciones de presión	23
3.1.2. Perfil de velocidades	24
3.2. Ecuaciones de evolución	30
3.2.1. Fluido 2	30
3.2.2. Fluido 1	31
3.3. Modos normales	32
3.4. Soluciones para los modos normales	33
3.4.1. Dos capas de líquido	33
3.4.2. Una capa de líquido	48
4. Conclusiones	51
Bibliografía	53

Resumen

En la presente tesis se investigó la estabilidad lineal de dos capas de fluidos newtonianos acoplados térmicamente mediante una pared gruesa perpendicular a la gravedad que posee grosor y conductividad térmica finitas. Se permitió la deformación de las superficies libres de ambas capas de fluido y además se supuso que las condiciones de temperatura y presión a la que se encuentran las atmósferas en contacto con las superficies libres son diferentes. Como punto novedoso en éste trabajo se permitió teóricamente el deslizamiento del fluido que se encuentra en contacto con la pared. Este deslizamiento se modeló haciendo uso de la condición de deslizamiento de Navier para fronteras del tipo sólido-líquido. Las ecuaciones gobernantes del sistema así como las condiciones de frontera se adimensionalizan utilizando la aproximación de lubricación y las variables se expanden de forma asintótica para poder obtener las ecuaciones no lineales de evolución de la perturbación de la deformación superficial. Las mismas ecuaciones se linealizan y posteriormente se resuelven aplicando modos normales.

Se encuentra que la estabilidad del sistema puede describirse únicamente con las ecuaciones correspondientes a un número de Bond positivo, además de obtener una serie de inecuaciones con las que se explica el comportamiento del sistema en función del número de Marangoni escalado. El deslizamiento de las dos capas de líquido sobre la superficie puede promover o amortiguar el crecimiento de la perturbación según los valores que tomen A_q y d que son el número de Marangoni escalado y el espesor relativo de las capas de líquido respectivamente. También se encuentra que en algunos casos las curvas de razón de crecimiento invierten su orden cuando cambia el valor del parámetro de deslizamiento y dichas inversiones pueden darse por separado o en conjunto en los modos estacionario y oscilatorio. Estas inversiones hacen que para ciertos números de onda se tenga una mayor razón de crecimiento de la perturbación con un mayor deslizamiento y que para otros valores del número de onda se tenga una mayor razón de crecimiento con un deslizamiento menor.

Nomenclatura

A_q	número de Marangoni escalado con un número de Bond positivo
A_{q1}	número de Marangoni escalado con un número de Bond negativo
$A_{qk_{qCO1,2}}$	valor de A_q en el cual $k_{qCO1,2} = 0$
$A_{qk_{qCO}=k_{qCO2}}$	valor de A_q en el cual $k_{qCO} = k_{qCO2}$
$A_{qk_{qCO}=k_{qCO1}}$	valor de A_q en el cual $k_{qCO} = k_{qCO1}$
$A_{qk_{qOmax}}$	valor de A_q en el cual $k_{qOmax} = 0$
Bi	número de Biot del fluido 2
Bi_1	número de Biot del fluido 1
Bo	número de Bond
C_p	capacidad calorífica a presión constante
C_{p1}	capacidad calorífica a presión constante del fluido 1
C_{p2}	capacidad calorífica a presión constante del fluido 2
C_{pw}	capacidad calorífica a presión constante de la pared
d	$= d_1/d_2$, espesor relativo del fluido 1
d_1	espesor del fluido 1 en el estado básico
d_2	espesor del fluido 2 en el estado básico
$\frac{d_w}{d}$	espesor relativo de la pared
\bar{d}_w	espesor de la pared
den	denominador
den_L	denominador lineal
F	función implícita de la superficie
g	aceleración de la gravedad
\mathbf{g}	vector de aceleración de la gravedad
h	$= 1 + H$ posición adimensional de la superficie libre del fluido 2
h_1	$= d + H_1$ posición adimensional de la superficie libre del fluido 1
h'	posición de la superficie libre
h'_1	posición dimensional de la superficie libre del fluido 1
h'_2	posición dimensional de la superficie libre del fluido 2
H	deformación de la superficie libre del fluido 2
H_1	deformación de la superficie libre del fluido 1
H_c	curvatura media
H'	deformación de la superficie libre
k	número de onda
k_q	número de onda escalado con un número de Bond positivo
k_{q1}	número de onda escalado con un número de Bond negativo
k_{qmax}	número de onda correspondiente al máximo crecimiento para una sola capa de fluido
k_{qCO}	número de onda crítico ($\Gamma_q = 0$)

$k_{qCO1,2}$	números de onda críticos oscilatorios
k_{qCS}	número de onda crítico estacionario
k_{qS}	número de onda crítico estacionario para una sola capa de fluido
k_{qOmax}	número de onda correspondiente al máximo crecimiento con flujo oscilatorio
k_x	número de onda en dirección x
k_y	número de onda en dirección y
$\hat{\mathbf{k}}$	vector unitario en dirección z
K	conductividad térmica relativa del fluido 1
K_1	conductividad térmica del fluido 1
K_2	conductividad térmica del fluido 2
K_w	conductividad térmica de la pared
K'	conductividad térmica
Ma	número de Marangoni
$\hat{\mathbf{n}}'$	vector normal a la superficie
$\hat{\mathbf{n}}'_1$	vector normal a la superficie libre del fluido 1
$\hat{\mathbf{n}}'_2$	vector normal a la superficie libre del fluido 2
$\hat{\mathbf{n}}'_w$	vector normal a la pared
$\hat{\mathbf{n}}'_{w1}$	vector normal a la pared en contacto con el fluido 1
$\hat{\mathbf{n}}'_{w2}$	vector normal a la pared en contacto con el fluido 2
P	presión adimensional del fluido 2
P_0	presión en el estado básico del fluido 2
P_1	presión adimensional del fluido 1
P_{10}	presión en el estado básico del fluido 1
P_g	presión del gas
P_l	presión del líquido
P_L	presión adimensional de la atmósfera en contacto con el fluido 1
P_U	presión adimensional de la atmósfera en contacto con el fluido 2
P'	presión dimensional del medio continuo
P'_1	presión dimensional del fluido 1
P'_2	presión dimensional del fluido 2
P'_L	presión dimensional de la atmósfera en contacto con el fluido 1
P'_U	presión dimensional de la atmósfera en contacto con el fluido 2
Pr	número de Prandtl
Q_h	coeficiente de transferencia de calor de la superficie libre
Q_{h1}	coeficiente de transferencia de calor de la superficie libre del fluido 1
Q_{h2}	coeficiente de transferencia de calor de la superficie libre del fluido 2
S	número de tensión superficial escalado
t	tiempo adimensional
t'	tiempo dimensional
T	temperatura adimensional del fluido 2
T_0	temperatura adimensional en el estado básico del fluido 1
T_1	temperatura adimensional del fluido 1
T_{10}	temperatura adimensional en el estado básico del fluido 2
T_∞	temperatura de la atmósfera
T_w	temperatura adimensional de la pared
T_{w0}	temperatura adimensional en el estado básico de la pared
T_L	temperatura dimensional de la atmósfera en contacto con el fluido 1

T_U	temperatura dimensional de la atmósfera en contacto con el fluido 2
T'	temperatura dimensional del medio continuo
T'_1	temperatura dimensional del fluido 1
T'_{1b}	temperatura dimensional en el estado básico del fluido 1
T'_2	temperatura dimensional del fluido 2
T'_{2b}	temperatura dimensional en el estado básico del fluido 2
T'_w	temperatura dimensional de la pared
T'_{wb}	temperatura dimensional en el estado básico de la pared
$\hat{\mathbf{T}}'$	vector tangente a la superficie
$\hat{\mathbf{T}}'^{(1)}$	primer vector tangente a la superficie
$\hat{\mathbf{T}}'^{(1)}_1$	primer vector tangente a la superficie libre del fluido 1
$\hat{\mathbf{T}}'^{(1)}_2$	primer vector tangente a la superficie libre del fluido 2
$\hat{\mathbf{T}}'^{(2)}$	segundo vector tangente a la superficie
$\hat{\mathbf{T}}'^{(2)}_1$	segundo vector tangente a la superficie libre del fluido 1
$\hat{\mathbf{T}}'^{(2)}_2$	segundo vector tangente a la superficie libre del fluido 2
$\hat{\mathbf{T}}'^{(1)}_{w1}$	primer vector tangente a la pared en contacto con el fluido 1
$\hat{\mathbf{T}}'^{(1)}_{w2}$	primer vector tangente a la pared en contacto con el fluido 2
$\hat{\mathbf{T}}'^{(2)}_{w1}$	segundo vector tangente a la pared en contacto con el fluido 1
$\hat{\mathbf{T}}'^{(2)}_{w2}$	segundo vector tangente a la pared en contacto con el fluido 2
$\hat{\mathbf{T}}'^{(j)}$	primer ($j = 1$) y segundo($j = 2$) vector tangente a la superficie
$\hat{\mathbf{T}}'^{(j)}_w$	primer ($j = 1$) y segundo($j = 2$) vector tangente a la pared
u	componente en x de la velocidad adimensional del fluido 2
u_1	componente en x de la velocidad adimensional del fluido 1
v	componente en y de la velocidad adimensional del fluido 2
v_1	componente en y de la velocidad adimensional del fluido 1
\mathbf{v}'	$= (u', v', w')$ vector de velocidad dimensional
\mathbf{v}'_1	$= (u'_1, v'_1, w'_1)$ vector de velocidad dimensional del fluido 1
\mathbf{v}'_2	$= (u'_2, v'_2, w'_2)$ vector de velocidad dimensional del fluido 2
w	componente en z de la velocidad adimensional del fluido 2
w_1	componente en z de la velocidad adimensional del fluido 1
x	coordenada x adimensional
x'	coordenada x dimensional
y	coordenada y adimensional
y'	coordenada y dimensional
z	coordenada z adimensional
z'	coordenada z dimensional

Letras griegas

α	disfusividad térmica relativa del fluido 1
α_1	disfusividad térmica del fluido 1
α_2	disfusividad térmica del fluido 2
β	longitud de deslizamiento adimensional del fluido 2
β_1	longitud de deslizamiento adimensional del fluido 1
β_2	longitud de deslizamiento dimensional del fluido 2

β_T	coeficiente de expansión térmica
β'_1	longitud de deslizamiento dimensional del fluido 1
γ	tensión superficial relativa del fluido 1
γ_1	tensión superficial del fluido 1
γ_2	tensión superficial del fluido 2
γ_T	tasa de variación térmica relativa de la tensión superficial del fluido 1
γ'	tensión superficial
Γ	razón de crecimiento
Γ_q	razón de crecimiento escalada con un número de Bond positivo
Γ_{q1}	razón de crecimiento escalada con un número de Bond negativo
Γ_{qmax}	razón de crecimiento máxima para una sola capa de fluido
Γ_{qOmax}	razón de crecimiento máxima para flujo oscilatorio
ΔT	diferencia de temperatura entre las atmósferas
ε	parámetro pequeño
ϵ	coeficiente de deslizamiento
ϵ_1	coeficiente de deslizamiento del fluido 1
ϵ_2	coeficiente de deslizamiento del fluido 2
λ	longitud de onda
μ	viscosidad relativa del fluido 1
μ_1	viscosidad del fluido 1
μ_2	viscosidad del fluido 2
μ'	viscosidad
ρ	densidad relativa del fluido 1
ρ_1	densidad del fluido 1
ρ_2	densidad del fluido 2
ρ_w	densidad de la pared
ρ'	densidad
σ'_g	tensor de esfuerzos totales del gas
σ'_l	tensor de esfuerzos totales del líquido
τ'	tensor de esfuerzos viscosos
τ'_1	tensor de esfuerzos viscosos del fluido 1
τ'_2	tensor de esfuerzos viscosos del fluido 2
τ'_l	tensor de esfuerzos viscosos del líquido
Φ	función de disipación
χ	conductividad relativa de la pared
ω	frecuencia de oscilación
ω_q	frecuencia de oscilación escalada con un número de Bond positivo
ω_{q1}	frecuencia de oscilación escalada con un número de Bond negativo
Ω	$= \Gamma + i\omega$
Ω_q	$= \Gamma_q + i\omega_q$
Ω_{q1}	$= \Gamma_{q1} + i\omega_{q1}$

Capítulo 1

Introducción

En el estudio de sistemas dinámicos la estabilidad se refiere a la capacidad del sistema para amortiguar las perturbaciones. Una perturbación es una excitación en las entradas del sistema tal que las salidas del mismo presenten una variación. En el enfoque clásico de la física la estabilidad y la permanencia en el tiempo están implícitas, pero no siempre se da el caso. Entonces, si la solución a un sistema físico no varía significativamente al modificar ligeramente las condiciones iniciales o algún parámetro, se dice que la solución es estable. De otro modo se dice que la solución es inestable.

Las ecuaciones de conservación de la mecánica de fluidos, para ciertos sistemas y ciertos valores de los parámetros, aceptan soluciones estacionarias que se presentan en forma de patrones de flujo [1]. Más en específico, son de interés aquellos sistemas hidrodinámicos en los que, ante cierta perturbación, se obtienen flujos convectivos en forma de patrones celulares. En Chandrasekhar [1] (1961) y Charru [2] (2011) pueden verse ejemplos teóricos desarrollados de lo antes mencionado. A los patrones celulares se les conoce como celdas convectivas. Ahora, la convección trata con fluidos en movimiento en los cuales hay variaciones espaciales de temperatura o de concentración química. Cuando el sistema se encuentra fuera del equilibrio termodinámico se dice que surge una inestabilidad térmica [3]. El primer caso estudiado de forma teórica fue la inestabilidad de Rayleigh-Bénard, que consiste en la formación de rollos convectivos debidos a las variaciones de la densidad con la temperatura. Cabe mencionar que el estudio teórico de dicha inestabilidad se hace considerando una capa de líquido confinada entre dos placas sólidas. Así, Lord Rayleigh sería quien dejaría el antecedente teórico sobre el desarrollo de este tipo de inestabilidades.

Cuando una capa delgada de un líquido con superficie libre y en reposo es calentada desde el sustrato en que reside, surge una inestabilidad en la forma de celdas convectivas. A dicho fenómeno se le conoce como la inestabilidad termocapilar de Bénard-Marangoni, aunque también se le conoce solamente como inestabilidad de Marangoni o termocapilar. Este fenómeno fue descubierto por H. Bénard en 1900 [2] en sus experimentos, en los que observó la aparición de celdas hexagonales. Muchos años después se encontró que el mecanismo que indujo esa convección no se debía a los efectos de flotación como supuso Rayleigh, donde las celdas son rollos convectivos. Más adelante, Pearson [4], demostró que, en ausencia de gravedad, la convección de Bénard se debe a gradientes de tensión superficial por la inhomogeneidad del campo de temperatura en la superficie libre provocado por un gradiente de temperatura perpendicular a la capa de líquido. La termocapilaridad es vinculada también con el nombre del Físico italiano nacido en el siglo diecinueve Carlo Marangoni, quien encontró que gradientes de tensión superficial inducidos por gradientes de concentración superficiales en una solución acuosa tienen

la posibilidad de crear desplazamiento del líquido por esfuerzos superficiales, lo que se conoce como efecto Marangoni [5].

Hay diversas situaciones en las que se pueden presentar capas delgadas de líquido con superficies libres sujetas a gradientes de temperatura. Desde las situaciones más interesantes a nivel práctico, como en la industria, hasta en entornos cotidianos, como el hogar. Lo mencionado anteriormente nos hace reflexionar sobre la importancia de su estudio y, por ende, del estudio de su estabilidad estando sujetas a diversas condiciones de frontera. Además, se añade la vasta lista de propiedades que pueda poseer el líquido y el sustrato en cuestión. Es de nuestro interés, en particular, el estudio de la inestabilidad termocapilar en sistemas que poseen una pared interactuando con capas de líquidos en los cuales se tienen una o hasta dos superficies libres. En este tipo de sistemas se puede dar el fenómeno convectivo y poseen muchas aplicaciones de interés científico e ingenieril, como puede ser el crecimiento de cristales en un experimento de fundición en microgravedad. Por ejemplo, en fundiciones con impurezas la convección puede promover la formación de patrones regulares de impurezas, Hämäläinen [6] (1968). Algunos arreglos de las impurezas pueden mantenerse hasta que el fundido se enfría consiguiendo así segregar las impurezas y conservar el patrón convectivo independiente de la estructura cristalina. Además, la convección termocapilar puede encontrarse en la ingeniería química de pinturas, en procesos de recubrimiento e incluso como consecuencia de un proceso de condensación en una pared, por mencionar algunos casos.

Como se mencionó anteriormente, Pearson [4] (1958) fue el primero en estudiar formalmente el fenómeno termocapilar. Cabe aclarar que para demostrar que el fenómeno convectivo puede ser inducido por gradientes de tensión superficial consideró plana la entrecara que forma la superficie libre. Además de que no incluyó los efectos debidos a la gravedad. Pearson encontró que la estabilidad del sistema propuesto se encuentra condicionada al gradiente de temperatura perpendicular a la capa de líquido. Si la temperatura del sustrato es mayor a la de la atmósfera se tiene que el sistema es inestable, mientras que en el caso contrario el sistema es estable. Por su parte, en extensión al trabajo de Pearson, Berg y Acrivos [7] (1965) realizaron un análisis teórico del mismo fenómeno pero tomando en cuenta la presencia de agentes surfactates. Encontraron que el valor crítico del número de Marangoni aumenta. Hay que mencionar que Pearson [4], y Berg y Acrivos [7] utilizaron el principio de intercambio de estabildades, con lo cual el estado básico se supone estacionario y se excluyó la posibilidad de que la inestabilidad se diera a partir de un modo oscilatorio. Años más tarde, Vidal y Acrivos [8] (1966) demostraron analítica y numéricamente que la naturaleza de éste estado básico es estacionaria. McTaggart [9] (1983) generalizó el análisis de Pearson para el caso en que la tensión superficial depende no solamente de la temperatura sino que también depende de la composición. Consideró un ambiente ingrávido y una superficie libre plana para su estudio. Encontró que cuando los números de Marangoni térmicos y difusivos son positivos la temperatura y la concentración tienen efecto desestabilizador sobre el sistema. Getachew y Rosenblat [10] (1985) fueron los primeros en considerar una capa de fluido con propiedades viscoelásticas. Demostraron que para valores de elasticidad pequeños la inestabilidad se presenta de forma estacionaria, mientras que cuando la elasticidad incrementa el primer modo de inestabilidad en aparecer es el oscilatorio. Encuentran que no siempre se da una transición hacia la inestabilidad oscilatoria pasando antes por la estabilidad estacionaria. Entonces puede presentarse cualquiera de los modos de la inestabilidad convectiva y depende fuertemente del tiempo de relajación.

Scriven y Sternling [11] (1964) estudiaron los efectos de la tensión superficial promedio y la viscosidad en la superficie para el fenómeno convectivo que Pearson introdujo. Ellos añadieron un nuevo grado de libertad al problema planteado por Pearson [4], pues en este caso se permitió que la superficie libre de la capa de líquido se deforme con el fin de obtener un modelo más realista. Encontraron que cuando el número de onda es nulo (superficie libre plana) el sistema es siempre inestable. Además, al incrementar la tensión superficial promedio se tiene una tendencia estabilizadora ante las longitudes de onda largas que aparecen cuando la superficie libre se deforma elásticamente. Adicionalmente, encontraron que la viscosidad de la superficie inhibe la inestabilidad estacionaria. Smith [12] (1966) extendió el análisis hecho por Scriven y Sternling [11] incluyendo esta vez el efecto de ondas de gravedad. Obtuvo que el resultado presentado en [11] no cambia con la inclusión de dichas ondas. Además, remarca que las ondas superficiales son sólo importantes en números de onda muy pequeños y que en el caso de líquidos muy viscosos estas son dominantes. Sus resultados indican que los efectos de la superficie deformable en la estabilidad del sistema se confina a perturbaciones de longitud de onda muy grande. Takashima [13] (1981) incluyó por primera vez los efectos de la gravedad. Demostró que cuando la superficie libre se encuentra por encima del sustrato la deformación de la superficie libre sólo es importante para líquidos muy viscosos. En el caso en que no hay gradiente de temperatura el sistema es inestable siempre. Por su parte, la gravedad tiene un efecto estabilizador cuando la superficie libre se encuentra por encima del sustrato y en el caso contrario el efecto es desestabilizador. Takashima [14] (1981) también estudió el caso en que la inestabilidad puede darse con puros movimientos oscilatorios. Encontró que el sistema se desestabiliza si la temperatura del sustrato es menor a la de la atmósfera, sin importar en que lado esté la superficie libre. Kalitzova-Kurteva *et al.* [15] (1996) estudiaron el efecto de la variación de viscosidad debida a cambios en la temperatura. En su publicación muestran resultados para dos casos: pared conductora y pared aislante. Para la pared aislante encontraron que existen dos modos en que la inestabilidad se hace presente. El primero es a corto alcance y se da por gradientes de tensión superficial ligados a la variación térmica de la viscosidad. El segundo es de largo alcance y es debido a las fuerzas resultantes de la deformación superficial. Encontraron que para líquidos con una viscosidad moderada la variación de ésta con la temperatura tiene un efecto estabilizador, mientras que la deformación superficial tiene el efecto contrario. Para líquidos altamente viscosos, tanto la variación de la viscosidad como la deformación superficial tienen efecto desestabilizador. Para la pared aislante sólo aparece un modo de inestabilidad cuando la superficie superior es térmicamente aislante. Tang *et al.* [16] (2008), investigaron la influencia que tiene la curvatura de la superficie libre en la convección de Marangoni. Obtienen el efecto de la relación de volumen de la capa líquida sobre la convección crítica de Marangoni y la variación espacial de la estructura de convección en condiciones de gravedad cero en un modelo bidimensional.

Como se ha visto, los modelos desarrollados se han intentado llevar siempre al siguiente nivel de complejidad con el fin de que sean lo más realistas posible. Por ejemplo, en muchas de las publicaciones antes descritas las fronteras se consideran como perfectamente conductoras o perfectamente aislantes, aunque la realidad es otra. Tal y como menciona Dávalos-Orozco en algunas de sus publicaciones [17, 18, 19, 20], pese a que muchos de los estudios teóricos no incluyen los efectos de las propiedades térmicas del sustrato en que reside la capa de líquido éstas están siempre presentes en experimentos reales. Por lo dicho anteriormente muchos investigadores han publicado resultados teóricos en los que se toman en cuenta dichas propiedades. Takashima [21] (1970) realizó la consideración del espesor y la conductividad de la pared para el caso en que la superficie libre del fluido es plana. Yang [22] (1992) se concentró en el efecto

del espesor y la conductividad de la pared, mostrando que esta última tiene un gran impacto en la estabilidad del sistema. Él encontró que una pared con mayor conductividad tiende a estabilizar el sistema. Cabe mencionar que éste último consideró una superficie libre plana, además de incluir los efectos de la gravedad.

Cuando se tienen películas de fluido se entiende que existen dos superficies libres. En este caso también se ha encontrado la posibilidad de presentar convección termocapilar. Oron *et al.* [23] (1995) estudiaron la convección puramente termocapilar de una película de líquido con superficies libres deformables y térmicamente aislantes en un entorno ingravido. Así, demostraron que la inestabilidad estacionaria se da dependiendo de la tensión superficial que haya en cada lado. En particular si el lado expuesto a una menor temperatura posee una tensión superficial menor que aquella del lado más caliente, se da la inestabilidad estacionaria. Además, encontraron que al aumentar el valor del número de Prandtl y disminuir el valor de la tensión superficial en el lado más frío la inestabilidad oscilatoria tiende al estado estacionario. Fu *et al.* [24] (2013) estudiaron la inestabilidad con cambios temporales y espaciales considerando que las deformaciones superficiales podían ser sinuosas (ondas de las superficies libres en fase) o varicosas (ondas de las superficies desfazadas). Encontraron que el número de Marangoni no juega un papel relevante en ninguno de los modos y que un incremento en la viscosidad del líquido promueve la inestabilidad absoluta del sistema. Como menciona Fu *et al.* [24] este tipo de películas líquidas puede encontrarse en procesos de recubrimiento por pulverización, impresión por inyección de tinta, motores diésel, motores de turbina de gas, motores de cohetes líquidos, quemadores de aceite, entre otros.

Continuando con los estudios realizados en sistemas con dos superficies libres, Catton y Lienhard [25] (1984) estudiaron la convección natural de dos capas de fluidos separados por una pared gruesa con conductividad térmica finita que es perpendicular a la gravedad. Esto lo hacen para el caso en que la capa inferior está siendo calentada y la superior enfriada. Así, encontraron que los límites de estabilidad dependen de los espesores relativos y la conductividad relativa. Años después, Lienhard y Catton [26] (1986) publicaron un artículo estudiando la transferencia de calor a través de una región con dos capas de líquido. En este caso se calienta la capa inferior y se enfría la superior. Aquí reportaron que existen casos en los que sólo una de las capas de líquido es inestable y otros en los que ambas capas de líquido son inestables. En el año 2017, Dávalos-Orozco [17] estudió la estabilidad estacionaria de dos capas de fluido con superficies libres planas con una aproximación para números de Biot pequeños. Más adelante, en el 2018 y 2019, publicaría estudios teóricos del mismo sistema, pero con un mayor apego a lo que sería la realidad física. En ambas publicaciones [18, 19], se permitió que las superficies libres presenten deformación. Dichos artículos corresponden al caso ingravido y al caso con gravedad, respectivamente. Es de nuestro interés en particular la publicación realizada en 2019 [19]. En ésta se obtienen las ecuaciones de evolución de la perturbación en las superficies libres utilizando la aproximación de número de onda pequeño. Esta referencia muestra que los fenómenos que ocurren en la estabilidad lineal del sistema pueden ser descritos con ecuaciones para un parámetro escalado que contiene los efectos del número de Marangoni y el espesor relativo de las capas de líquido. Más recientemente, Dávalos-Orozco [20] (2021), estudió el efecto de una pared vertical, por lo que en este caso se tiene un estado básico con una velocidad distinta de cero. En el análisis lineal encuentra que la razón de crecimiento es independiente de los términos asociados al efecto termocapilar cuando el espesor de ambas capas de líquido es el mismo. Cabe destacar que en estos estudios [18, 19, 20] se desarrollaron los casos lineal y no lineal, pero en el presente trabajo es de particular interés el caso lineal.

1.1. Fronteras con deslizamiento

El comportamiento de una frontera del tipo sólido-líquido ha sido tema de discusión desde hace muchos años, pues no se ha dado un modelo general que pueda explicar el comportamiento en dicho tipo de frontera. De manera genérica la condición que suele asociarse a este tipo de fronteras es la condición de no deslizamiento. Si bien la condición de no deslizamiento ha sido demostrada experimentalmente a nivel macroscópico, ésta no puede demostrarse teóricamente con consideraciones hidrodinámicas [27]. En realidad lo que puede suceder en una frontera sólido-líquido es más complejo. La frontera sólida (a nivel microscópico) debe estar llena de imperfecciones superficiales, la forma, tamaño y química de dichas imperfecciones podría o no favorecer el deslizamiento del fluido sobre la superficie. La idea de que una superficie pueda generar una mayor resistencia debida a las asperezas es intuitiva, por otro lado, la idea de que dichas imperfecciones promuevan un grado de deslizamiento no lo es. Por ejemplo, si la superficie posee imperfecciones en forma de cavidades distribuidas de forma periódica (también conocidas como poros [28], los cuales se encuentran a nivel microscópico o nanoscópico), dichas cavidades pueden atrapar o contener una cierta cantidad de fluido y, por ende, disminuir la fricción. Esto ocurre porque el área de contacto entre el fluido fuera de la cavidad y la pared se reduce, pues hay partes que, al nivel de la pared, están en contacto con este fluido atrapado en las cavidades. Cuando un líquido viaja sobre una pared las cavidades pueden estar llenas con el mismo líquido. Dentro de la cavidad este líquido rotará de forma que funcione como rodillo para el fluido que viaja fuera de la cavidad. Lo anterior provoca un efecto de deslizamiento del fluido sobre la superficie. También puede suceder que el fluido atrapado en las cavidades sea distinto a aquel que viaja sobre la superficie y por tanto promover o impedir el deslizamiento sobre la superficie. Así, si el fluido atrapado en los poros es un gas y un líquido viaja sobre éste podemos decir de forma intuitiva que habrá una reducción de la fricción. De esta manera los poros funcionan de tal forma que la superficie repele líquidos o sólidos externos a la misma (hay una menor adherencia de estas partículas a la superficie) [28].

Neto *et al.* [27] (2005) discuten detalladamente los métodos de estudio experimental para las condiciones de frontera, así como los principales factores que pueden afectar el deslizamiento sobre una superficie. Para poder estudiar el deslizamiento los experimentos deben desarrollarse en una escala de longitud similar a la longitud de deslizamiento que se tiene, para líquidos newtonianos esto varía entre el orden de los nanómetros y los micrómetros. De otra manera, la frontera aparenta no presentar deslizamiento. La condición de deslizamiento de Navier es actualmente la que se asocia de manera común con situaciones en las que se considera deslizamiento en la frontera sólido-líquido. En dicha condición, Navier introduce el concepto de longitud de deslizamiento como una constante de proporcionalidad entre la velocidad y los esfuerzos tangentes en la pared. La condición planteada por Navier no es un modelo que pueda describir en su totalidad el fenómeno de deslizamiento de un líquido sobre un sólido, pero ha sido de gran ayuda en el entendimiento del como es que afecta en un flujo el que el fluido se deslice sobre un sustrato. Además, la condición de deslizamiento suele suponerse en muchos casos con el fin de evitar un comportamiento irreal, pues la inclusión de este efecto en la superficie elimina singularidades que pueden aparecer si se utiliza la condición de no deslizamiento [27]. En la literatura es posible encontrar estudios relativamente nuevos en los que dicha condición se utiliza para describir el deslizamiento de fluidos en sistemas que son muy conocidos. Por ejemplo, Kaoullas y Georgiou [29] (2013) estudian el deslizamiento de un flujo de Poiseuille. Mientras que Venkatesan y Ganesan [30] (2015) estudian el deslizamiento de gotas que impactan en una pared. Ejemplos de aplicaciones en microfluidos son mostrados por Lauga, Brenner y Stone [31] (2007).

La naturaleza siempre ha sido centro inagotable de maravillas ingenieriles. En particular en la ingeniería de superficies, pues vemos, por ejemplo, que hay peces más veloces que otros (piel con menor arrastre) o que hay plantas con hojas que no se mojan por más que se les eche agua (superficie superhidrofóbica). En particular nos son de interés las superficies en las que se puede dar el fenómeno del deslizamiento y que se utilizan para reducir la adherencia de distintas sustancias al sustrato. Los recubrimientos que resultan en superficies con mayor deslizamiento que el ser humano ha llegado a manufacturar pueden clasificarse en tres tipos: superhidrofóbicos, superoleofóbicos y omnifóbicos [28]. Los primeros se utilizan con líquidos de bajo peso molecular como pueden ser los fluidos newtonianos, los segundos son para líquidos con baja tensión superficial y los últimos, como su nombre indica, actúan como un repelente a otras sustancias complejas como la sangre o el petróleo. Samaha y Gad-el-Hak [28] (2021) muestran ejemplos de estos tipos de recubrimiento presentes en la naturaleza, además de las metodologías de fabricación que se han desarrollado en torno a este tipo de superficies. En la flora es posible encontrar las hojas de loto con su característico efecto superhidrofóbico y los recubrimientos que presentan algunas especies de plantas carnívoras los cuales brindan propiedades omnifóbicas. Por otro lado, en la fauna se observa que las patas de ciertos insectos o reptiles, como los zancudos o los geckos, les brindan la capacidad de desplazarse sobre una superficie de líquido. Entre las técnicas de fabricación encontramos que para obtener superficies superhidrofóbicas se buscan maneras de controlar las texturas para así incrementar el ángulo de contacto hasta aquel que define la superhidrofobicidad (150° [28]). En el caso de las superficies superoleofóbicas se busca, además del ángulo de contacto, generar sustratos con baja energía superficial y una cierta curvatura en la microestructura de la superficie. Para las superficies omnifóbicas se busca obtener una superficie con poros los cuales poseen infusiones de líquidos lubricantes que funcionan como repelentes de diferentes tipos de fluidos.

Burmasheva y Prosviryakov [32] (2019) muestran una solución exacta para convección de Marangoni en una capa de fluido con una superficie libre plana añadiendo el efecto del deslizamiento en la frontera con la pared. Su solución es determinada haciendo uso de polinomios de orden superior. Años más tarde, junto con Privalova [33] (2021), publicaron una nueva solución para el caso estacionario utilizando campos de presión y temperatura tridimensionales y un campo de velocidades dependiente de la coordenada transversal. Definieron tres tipos de fronteras para la interacción sólido-líquido, entre ellas dos corresponden a condiciones de deslizamiento. Además, presentan las soluciones para flujos inducidos por una caída de presión, por efectos termogravitatorios y el efecto termocapilar. Demuestran que para ciertas relaciones de los parámetros del sistema se presentan puntos de estancamiento, que representan la presencia de áreas de recirculación. En años más recientes, Sánchez-Barrera [34] (2022) estudió el efecto que tiene el deslizamiento en la pared para una sola capa de líquido con superficie libre deformable sobre una pared con espesor y conductividad finitas. Encuentra que el deslizamiento puede o no favorecer a que se desarrolle la inestabilidad, por lo cual es un parámetro importante en el control de la estabilidad del sistema.

En el presente trabajo se tiene como objetivo desarrollar el análisis teórico y numérico de la estabilidad lineal de dos capas de fluidos newtonianos con superficies deformables acopladas térmicamente mediante una pared de espesor y conductividad térmica finitas. Se extienden los trabajos de Dávalos-Orozco [19] y Sánchez-Barrera [34]. El sistema que se estudia es como aquel dado en [19] con una frontera sólido-líquido con deslizamiento, como la que se considera en [34]. Esta última se modela con la condición de deslizamiento de Navier. Se espera que el deslizamiento promueva u obstaculice la aparición de inestabilidades dependiendo de las condiciones en que se encuentre el sistema.

Capítulo 2

Desarrollo teórico

Un sistema físico puede ser descrito a partir de las ecuaciones que gobiernan los fenómenos físicos que ocurren en el sistema y de sus condiciones de frontera, las cuales dictan el comportamiento del mismo. Estas ecuaciones gobernantes son ecuaciones diferenciales parciales y pueden ser perturbadas en la ecuación de campo, las condiciones de frontera y la posición de las mismas. Esto puede realizarse mediante la inclusión de un parámetro adimensional que sea pequeño. Aquí se inicia a partir de un estado hidrostático. Después, se perturba para buscar si éste es estable o inestable.

A través de este capítulo se da lugar al planteamiento y desarrollo del problema. Se dan las ecuaciones gobernantes y las respectivas condiciones de frontera. Se realiza la adimensionalización de dichas ecuaciones y condiciones de frontera. Finaliza con el desarrollo de las expansiones asintóticas de las variables dependientes.

2.1. Planteamiento del problema

Se investigará analítica y numéricamente la inestabilidad termocapilar lineal de dos fluidos newtonianos acoplados térmicamente mediante una pared rígida e impermeable perpendicular a la gravedad. Ambos fluidos presentan superficies libres deformables que forman una interfaz con su respectiva atmósfera. Las temperaturas y presiones de las atmósferas son diferentes. Además, se supone que en las entrecaras sólido-líquido se tiene deslizamiento de las partículas de fluido sobre la pared. En la Fig. 2.1 se muestra un diagrama del sistema físico a estudiar. Dicho sistema será descrito en coordenadas cartesianas. Observamos que al líquido de la parte superior se le nombra como fluido 2 y así el espesor de esta capa en el estado básico (hidrostático) se nombra como d_2 . Además, la superficie libre de esta capa está en contacto con una atmósfera que se encuentra a una temperatura T_U y una presión P'_U . La pared posee un perfil de temperatura T'_w y tiene espesor \bar{d}_w . En el caso del líquido inferior se le identifica como fluido 1, posee un espesor d_1 en el estado básico y la atmósfera en contacto con esta capa de fluido está a una temperatura T_L y una presión P'_L .

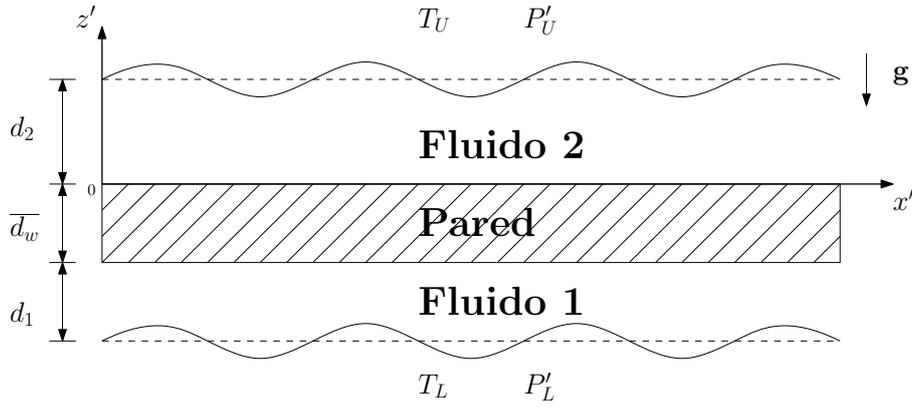


Figura 2.1: Esquema de dos capas de fluido que interactúan térmicamente mediante una pared rígida.

A lo largo del presente trabajo se utilizarán las “primas” para identificar a las variables dimensionales. Así, las variables independientes dimensionales del problema se representan como x' , y' , z' y t' . Las derivadas parciales respecto a éstas variables independientes serán indicadas con subíndices.

2.2. Ecuaciones gobernantes

Las ecuaciones gobernantes para el comportamiento del sistema de interés son también conocidas como ecuaciones de conservación o de balance. En el caso de los fluidos, estos han de cumplir las ecuaciones de balance de masa, momento y energía en su forma diferencial. Para la pared sólo debe cumplirse la ecuación de conservación de energía.

2.2.1. Conservación de masa

La ecuación de balance de masa en su forma diferencial es

$$\rho'_{t'} + \nabla' \cdot (\rho' \mathbf{v}') = 0, \quad (2.1)$$

donde ρ' es la densidad del fluido, \mathbf{v}' es el vector de velocidad y $\nabla' = (\partial_{x'}, \partial_{y'}, \partial_{z'})$ es el operador nabla dimensional. Suponiendo un fluido incompresible, es decir, la densidad no varía ni espacial ni temporalmente. Entonces, la ecuación de conservación de masa queda como

$$\nabla' \cdot \mathbf{v}' = 0. \quad (2.2)$$

Así, podemos escribir la conservación de masa para el fluido 2 y el fluido 1 como se muestra a continuación, respectivamente

$$\nabla' \cdot \mathbf{v}'_2 = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{v}'_1 = 0, \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{v}'_2 = (u'_2, v'_2, w'_2)$ y $\mathbf{v}'_1 = (u'_1, v'_1, w'_1)$ son, en este orden, los vectores de velocidad del fluido 2 y 1.

2.2.2. Conservación de momento

En este caso la ecuación de balance de momento lineal está dada por la primera ley del movimiento de Cauchy con la gravedad como único término en las fuerzas de cuerpo. Además, con el balance de momento angular, que está dado por la segunda ley del movimiento de Cauchy, se establece la simetría del tensor de esfuerzos. Para un fluido el tensor de esfuerzos se descompone en una parte esférica y una parte deviatorica que a su vez son simétricas. En el caso de un fluido newtoniano, la componente deviatorica es dada por la ecuación constitutiva newtoniana para un fluido incompresible $\boldsymbol{\tau}' = \mu' (\nabla' \mathbf{v}' + (\nabla' \mathbf{v}')^T)$; donde $\boldsymbol{\tau}'$ es el tensor de esfuerzos viscosos y μ' la viscosidad del fluido. Entonces, la conservación de momentum se enuncia como

$$\rho' (\mathbf{v}'_{t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla' \mathbf{v}') = -\nabla' P' + \mu' \nabla'^2 \mathbf{v}' - \rho' g \hat{\mathbf{k}}, \quad (2.5)$$

donde P' es la presión, g es la magnitud de la aceleración gravitatoria, $\hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$ es el vector unitario en dirección z' y $\nabla'^2 = \partial_{x'}^2 + \partial_{y'}^2 + \partial_{z'}^2$ es el operador laplaciano dimensional. Hay que observar que la ecuación anterior, escrita en su forma tensorial, representa un sistema de tres ecuaciones no lineales en derivadas parciales. Esta forma de las ecuaciones de conservación de momento es también conocida como las ecuaciones de Navier-Stokes.

Esta ecuación se expresa para los fluidos 2 y 1 respectivamente como

$$\rho_2 (\mathbf{v}'_{2t'} + \mathbf{v}'_2 \cdot \nabla' \mathbf{v}'_2) = -\nabla' P'_2 + \mu_2 \nabla'^2 \mathbf{v}'_2 - \rho_2 g \hat{\mathbf{k}}, \quad (2.6)$$

$$\rho_1 (\mathbf{v}'_{1t'} + \mathbf{v}'_1 \cdot \nabla' \mathbf{v}'_1) = -\nabla' P'_1 + \mu_1 \nabla'^2 \mathbf{v}'_1 - \rho_1 g \hat{\mathbf{k}}, \quad (2.7)$$

donde ρ_2 , μ_2 y P'_2 son respectivamente la densidad, la viscosidad y la presión del fluido 2. Por su parte, ρ_1 , μ_1 y P'_1 son la densidad, la viscosidad y la presión del fluido 1.

2.2.3. Conservación de la energía

La ecuación de conservación de la energía térmica suele representarse en términos de la temperatura para la resolución de problemas de transferencia de calor. Ésta se enuncia como

$$\rho' C_p (T'_{t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla' T') = K' \nabla'^2 T' + \beta_T T' (P'_{t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla' P') + \Phi, \quad (2.8)$$

donde C_p es la capacidad térmica del fluido a presión constante, T' es el perfil de temperatura del fluido, K' es la conductividad térmica del fluido, β_T es el coeficiente de expansión térmica y $\Phi = \boldsymbol{\tau}' : \nabla' \mathbf{v}'$ es la función de disipación.

El fluido de trabajo es incompresible ($\beta_T = 0$) y, si además, se desprecian los efectos de la disipación viscosa se tiene que

$$\rho' C_p (T'_{t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla' T') = K' \nabla'^2 T'. \quad (2.9)$$

Es decir, solo tomamos los cambios temporales, por convección y por conducción del fluido. Esta ecuación puede expresarse para los fluidos 2 y 1 respectivamente como

$$\rho_2 C_{p2} (T'_{2t'} + \mathbf{v}'_2 \cdot \nabla' T'_2) = K_2 \nabla'^2 T'_2, \quad (2.10)$$

$$\rho_1 C_{p1} (T'_{1t'} + \mathbf{v}'_1 \cdot \nabla' T'_1) = K_1 \nabla'^2 T'_1, \quad (2.11)$$

donde T'_2 , C_{p2} y K_2 son respectivamente la temperatura, la capacidad térmica a presión constante y la conductividad del fluido 2. Por otro lado, T'_1 , C_{p1} y K_1 son la temperatura, la capacidad

térmica a presión constante y la conductividad del fluido 1.

Por su parte, para la pared sólida se debe cumplir la ecuación de conservación de energía tomando en cuenta que en ésta solo existen los cambios temporales de temperatura y de conducción de calor. Entonces

$$\rho_w C_{p_w} T'_{wt'} = K_w \nabla'^2 T'_w, \quad (2.12)$$

donde T'_w , ρ_w , C_{p_w} y K_w son respectivamente la temperatura, la densidad, la capacidad térmica a presión constante y la conductividad de la pared.

2.3. Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera han de incluir las interacciones mecánicas y térmicas que tiene el fluido con la pared y con la atmósfera. Estas se presentan mediante las condiciones de esfuerzos y la condición de radiación para el caso de la superficie libre. Para el caso del líquido en contacto con el sustrato estas se presentan mediante la condición de deslizamiento, la condición de impenetrabilidad y las condiciones de acoplamiento térmico. También se deben de cumplir las condiciones cinemáticas de cada superficie libre. De estas últimas se obtienen las ecuaciones de evolución de la perturbación.

2.3.1. Condición cinemática de una superficie libre

El área de contacto entre dos fluidos inmiscibles puede modelarse como una superficie suave arbitraria, expresada en forma implícita como $F(x', y', z', t') = 0$ [5]. Las partículas de fluido en la superficie libre se conservan en la misma superficie, es decir, que un tiempo $\Delta t'$ después la ecuación de la superficie se debe seguir cumpliendo. Esto es, $F(x', y', z', t' + \Delta t') = 0$. Así, se puede restar la ecuación original de la superficie a ésta ecuación que ocurre para un intervalo de tiempo posterior, dividir entre $\Delta t'$ y tomar el límite cuando $\Delta t' \rightarrow 0$. De esto se encuentra que la derivada temporal de la superficie F debe ser igual a cero. Hay que notar que las variables espaciales que determinan la posición de las partículas en la superficie libre son a su vez dependientes del tiempo, por lo que al tomar la derivada temporal se debe recurrir a la regla de la cadena. De esto, se encuentra que

$$F_{t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla' F = 0. \quad (2.13)$$

Esto concuerda con la definición de superficie material. En nuestro caso la superficie libre puede describirse como $F(x', y', z', t') = z' - h'(x', y', t') = 0$, donde h' indica la posición de la superficie libre. Si $h' = cte$ la superficie libre descrita por F es un plano paralelo al plano cartesiano $x'y'$. Es así que haciendo a $h'(x', y', t') = cte + H'(x', y', t')$, donde H' representa la deformación de la superficie libre, se permite que la superficie se deforme a partir de este plano horizontal. Entonces, la condición cinemática de una superficie libre, tomando al vector velocidad como $\mathbf{v}' = (u', v', w')$, es

$$h'_{t'} + u'h'_{x'} + v'h'_{y'} - w' = 0 \quad \text{en } z' = h'(x', y', t'). \quad (2.14)$$

De esta forma, para los fluidos 2 y 1 respectivamente se tiene que las condiciones cinemáticas de cada fluido son

$$h'_{2t'} + u'_2 h'_{2x'} + v'_2 h'_{2y'} - w'_2 = 0 \quad \text{en } z' = h'_2(x', y', t'), \quad (2.15)$$

$$h'_{1t'} + u'_1 h'_{1x'} + v'_1 h'_{1y'} + w'_1 = 0 \quad \text{en } z' = -\bar{d}_w - h'_1(x', y', t'), \quad (2.16)$$

donde $h'_2(x', y', t')$ y $h'_1(x', y', t')$ son funciones que indican la variación en x' , y' y t' de la forma de las superficies de los fluido 2 y 1 respectivamente.

2.3.2. Triedro asociado a la superficie libre

Es posible construir una base móvil de vectores en una superficie arbitraria. Este triedro es formado por un vector normal a la superficie y dos vectores tangentes a la misma. Esto último se bosqueja en la Fig. 2.2 para una superficie libre que se encuentra en la parte superior de una pared. El gradiente de la función implícita de una superficie resulta en un vector normal a la misma. El vector normal unitario a una superficie libre arbitraria se calcula como el gradiente de la función que define a la superficie entre el módulo de dicho gradiente.

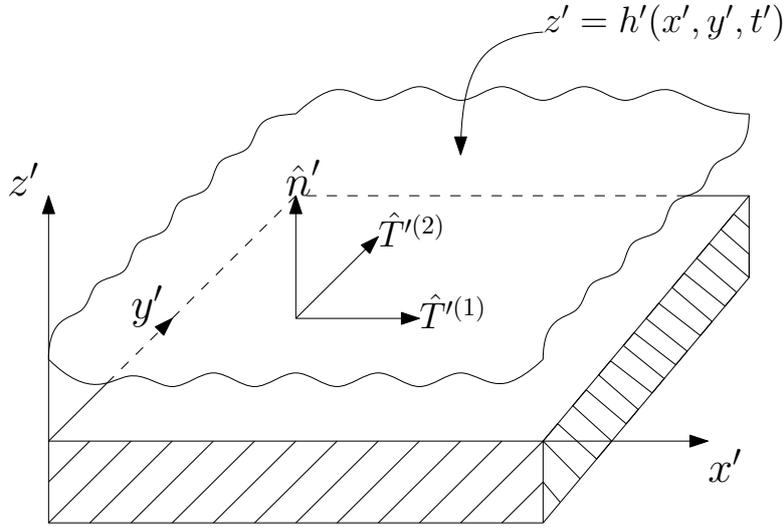


Figura 2.2: Bosquejo de los vectores en una superficie libre de la forma $z' = h'(x', y', t')$

De forma general una superficie horizontal puede describirse en forma implícita como $z' - h'(x', y', t') = 0$, donde h' indica la posición vertical en la que se encuentra la superficie libre en un tiempo t . Calculando el gradiente y dividiendo entre la norma del vector resultante se obtiene el vector normal unitario a la superficie. En el caso de estudio, la forma matemática de cada superficie libre se define de tal manera que el vector normal tenga dirección hacia la atmósfera de cada capa de fluido. La ecuación que describe a la superficie libre del fluido 2 puede escribirse como $z' - h'_2(x', y', t') = 0$ y para la superficie libre del fluido 1 puede describirse con $-z' - \bar{d}_w - h'_1(x', y', t') = 0$. Entonces, los vectores normales a las superficies del fluido 2 y el fluido 1 son respectivamente

$$\hat{\mathbf{n}}'_2 = \frac{1}{\sqrt{h'^2_{2x'} + h'^2_{2y'} + 1}}(-h'_{2x'}, -h'_{2y'}, 1), \quad (2.17)$$

$$\hat{\mathbf{n}}'_1 = \frac{1}{\sqrt{h'^2_{1x'} + h'^2_{1y'} + 1}}(-h'_{1x'}, -h'_{1y'}, -1). \quad (2.18)$$

El primer vector tangente unitario puede construirse de forma sencilla, pues una componente del vector se propone unitaria, otra nula y otra variable. La única condición que este debe

cumplir es que sea ortogonal al vector normal. Por lo tanto, los primeros vectores tangentes a la superficies libres de los fluidos 2 y 1 respectivamente, son

$$\hat{\mathbf{T}}_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{h_{2x'}^2 + 1}}(1, 0, h_{2x'}'), \quad (2.19)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{h_{1x'}^2 + 1}}(1, 0, -h_{1x'}'). \quad (2.20)$$

Para el segundo vector tangente resta únicamente realizar el producto vectorial entre los vectores normal y el primer tangente. Entonces, los segundos vectores tangentes a las superficies de los fluidos 2 y 1 respectivamente, son

$$\hat{\mathbf{T}}_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{h_{2x'}^2 + 1}\sqrt{h_{2x'}^2 + h_{2y'}^2 + 1}}(-h_{2x'}'h_{2y'}', h_{2x'}'^2 + 1, h_{2y'}'), \quad (2.21)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{h_{1x'}^2 + 1}\sqrt{h_{1x'}^2 + h_{1y'}^2 + 1}}(h_{1x'}'h_{1y'}', -(h_{1x'}'^2 + 1), h_{1y'}'). \quad (2.22)$$

2.3.3. Condiciones de esfuerzo en la entrecara de una superficie libre

Se supone una interfaz que se deforma a partir de la horizontal de forma arbitraria como $z' = h'(x', y', t')$ que posee un espesor infinitesimal, es decir, que no tiene masa. Entonces, en la entrecara siempre ha de existir un balance de fuerzas en equilibrio. En la Fig. 2.3 se muestra de forma esquemática al balance de fuerzas y los elementos diferenciales que se utilizan en el mismo.

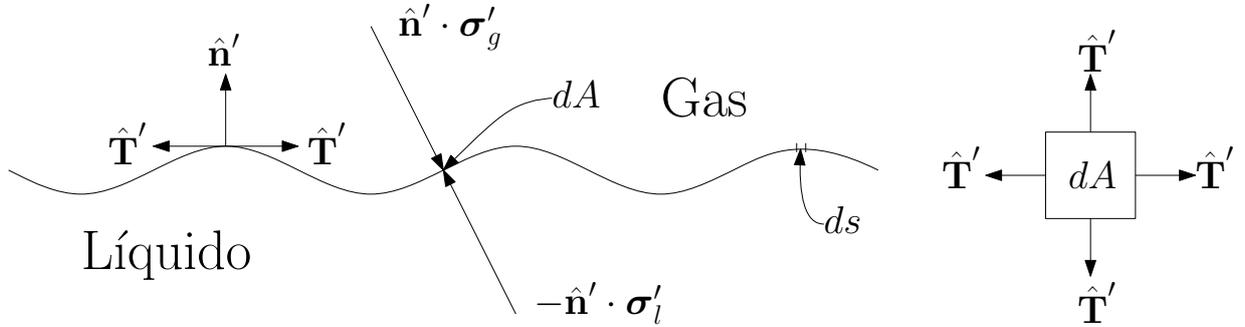


Figura 2.3: Bosquejos del balance de fuerzas y elemento diferencial de área, donde $\boldsymbol{\sigma}'_l$ y $\boldsymbol{\sigma}'_g$ son los tensores de esfuerzos totales del líquido y del gas respectivamente, $\hat{\mathbf{n}}'$ es un vector normal unitario y $\hat{\mathbf{T}}'$ es un vector tangente unitario.

Realizando una suma de fuerzas superficiales en un segmento diferencial de área dA de una entrecara entre un líquido a una presión P_l y un gas inviscido a una presión P_g , se llega a la suma de dos integrales igualadas a cero [5]. Una integral es de área e incluye las fuerzas dadas por la proyección del tensor de esfuerzos en la dirección normal (vector de esfuerzos) y la otra es una integral de línea que incluye las fuerzas de tensión superficial a lo largo de una curva cerrada con diferencial de línea ds . Como se requiere una condición de frontera que sea válida para todo diferencial de área se utiliza el teorema de Stokes y se engloban las integrales en una

sola integral de superficie. Se llega a la conclusión de que el integrando ha de ser nulo. Entonces, el balance de fuerzas en la entrecara de un líquido y un gas queda

$$(P_g - P_l)\hat{\mathbf{n}}' + \boldsymbol{\tau}'_l \cdot \hat{\mathbf{n}}' = -(\nabla' \cdot \hat{\mathbf{n}}')\gamma' \hat{\mathbf{n}}' + \nabla'_{\parallel}\gamma' \quad \text{en } z' = h'(x', y', t'), \quad (2.23)$$

donde $\boldsymbol{\tau}'_l$ es el tensor de esfuerzos viscosos del líquido, γ' es la tensión superficial entre el líquido y el gas, y $\nabla'_{\parallel} = \nabla' - \hat{\mathbf{n}}'(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla')$ es la proyección tangencial del operador nabla. Notamos que en el primer término del lado derecho se relaciona con la curvatura media de la superficie H_c como $2H_c = -(\nabla' \cdot \hat{\mathbf{n}}')$. Además, cabe mencionar que debido a que hay una tensión superficial se da un salto en los esfuerzos.

De la última ecuación se pueden extraer las condiciones de esfuerzos en la entrecara. Esto se realiza proyectando la ecuación en las direcciones de los vectores que forman el triedro en la superficie. Entonces, la condición de esfuerzos normales en la entrecara de un líquido y un gas es

$$(P_g - P_l) + \hat{\mathbf{n}}' \cdot \boldsymbol{\tau}'_l \cdot \hat{\mathbf{n}}' = -(\nabla' \cdot \hat{\mathbf{n}}')\gamma' \quad \text{en } z' = h'(x', y', t'). \quad (2.24)$$

Por su parte, la condición de esfuerzos tangenciales queda como

$$\hat{\mathbf{T}}'^{(j)} \cdot \boldsymbol{\tau}'_l \cdot \hat{\mathbf{n}}' = \hat{\mathbf{T}}'^{(j)} \cdot \nabla'\gamma' \quad \text{en } z' = h'(x', y', t'), \quad (2.25)$$

donde $\hat{\mathbf{T}}'^{(j)}$ representa un vector tangente. En tres dimensiones se necesitan dos condiciones tangenciales, entonces los primeros esfuerzos tangenciales son con $j = 1$ y para los segundos esfuerzos tangenciales $j = 2$.

En el fenómeno de convección estudiado el movimiento convectivo se da por cambios de tensión superficial debidos a gradientes de temperatura en la superficie libre. Entonces, $\gamma' = \gamma'(T')$. Se puede aplicar la regla de la cadena en el lado derecho de la Ec. (2.25), quedando así

$$\hat{\mathbf{T}}'^{(j)} \cdot \boldsymbol{\tau}'_l \cdot \hat{\mathbf{n}}' = \hat{\mathbf{T}}'^{(j)} \cdot \frac{d\gamma'}{dT'} \nabla'T' \quad \text{en } z' = h'(x', y', t'). \quad (2.26)$$

Escribiendo la Ec. (2.24), junto con los vectores normales de las Ecs. (2.17) y (2.18), tenemos que las condiciones de esfuerzos normales en las entrecaras para el fluido 2 y el fluido 1 son respectivamente

$$(P'_U - P'_2) + \hat{\mathbf{n}}'_2 \cdot \boldsymbol{\tau}'_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}'_2 = -(\nabla' \cdot \hat{\mathbf{n}}'_2)\gamma_2 \quad \text{en } z' = h'_2(x', y', t'), \quad (2.27)$$

$$(P'_L - P'_1) + \hat{\mathbf{n}}'_1 \cdot \boldsymbol{\tau}'_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}'_1 = -(\nabla' \cdot \hat{\mathbf{n}}'_1)\gamma_1 \quad \text{en } z' = -\bar{d}_w - h'_1(x', y', t'), \quad (2.28)$$

con $\boldsymbol{\tau}'_2 = \mu_2 (\nabla' \mathbf{v}'_2 + (\nabla' \mathbf{v}'_2)^T)$ y $\boldsymbol{\tau}'_1 = \mu_1 (\nabla' \mathbf{v}'_1 + (\nabla' \mathbf{v}'_1)^T)$.

Ahora, escribiendo la Ec. (2.26) junto con los vectores tangentes de las Ecs. (2.19) y (2.20), se obtienen las condiciones de primeros esfuerzos tangenciales para el fluido 2 y el fluido 1 respectivamente como

$$\hat{\mathbf{T}}_2'^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}'_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}'_2 = \hat{\mathbf{T}}_2'^{(1)} \cdot \frac{d\gamma_2}{dT'} \nabla'T'_2 \quad \text{en } z' = h'_2(x', y', t'), \quad (2.29)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_1'^{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}'_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}'_1 = \hat{\mathbf{T}}_1'^{(1)} \cdot \frac{d\gamma_1}{dT'} \nabla'T'_1 \quad \text{en } z' = -\bar{d}_w - h'_1(x', y', t'). \quad (2.30)$$

La Ec. (2.26) se vuelve a usar, pero esta vez utilizando los segundos vectores tangentes de las Ecs. (2.21) y (2.22), para obtener la condición de los segundos esfuerzos tangenciales en la entrecara de los fluidos 2 y 1 respectivamente como

$$\hat{\mathbf{T}}_2^{(2)} \cdot \boldsymbol{\tau}'_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}'_2 = \hat{\mathbf{T}}_2^{(2)} \cdot \frac{d\gamma_2}{dT'} \nabla' T'_2 \quad \text{en } z' = h'_2(x', y', t'), \quad (2.31)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_1^{(2)} \cdot \boldsymbol{\tau}'_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}'_1 = \hat{\mathbf{T}}_1^{(2)} \cdot \frac{d\gamma_1}{dT'} \nabla' T'_1 \quad \text{en } z' = -\bar{d}_w - h'_1(x', y', t'). \quad (2.32)$$

2.3.4. Entre el fluido y la pared

En la frontera que corresponde a la superficie de contacto entre la pared y el fluido se aplicará la condición de frontera referida como la condición de deslizamiento de Navier [30, 31, 35]. En esta condición el deslizamiento se considera tangencial a la superficie en la que ocurre. Es decir, se define el comportamiento que tienen las dos componentes tangenciales del vector de velocidad en la pared. Por lo tanto, es necesaria una condición para la componente de velocidad que va en dirección normal a la pared. La condición que dictará el comportamiento de dicha componente de la velocidad es la condición de impenetrabilidad que define una frontera sólida e impermeable. Así, en la frontera debe de cumplirse que

$$\mathbf{v}' \cdot \hat{\mathbf{n}}'_w = 0, \quad (2.33)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}'_w$ es el vector normal a la superficie sobre la cual se da el deslizamiento.

Aquí suponemos que las partículas de fluido que están en contacto con la pared no tienen la misma velocidad que la pared, por lo que existe un deslizamiento del fluido a lo largo de la frontera. Este movimiento relativo entre el fluido y la pared hace que la velocidad tangencial en la pared sea distinta de cero. Además, dicha velocidad tangencial es directamente proporcional a la componente tangencial de los esfuerzos viscosos. Es así que en la frontera ha de cumplirse la siguiente igualdad [31, 36]

$$\hat{\mathbf{T}}_w^{(j)} \cdot \boldsymbol{\tau}' \cdot \hat{\mathbf{n}}'_w = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{v}' \cdot \hat{\mathbf{T}}_w^{(j)}, \quad (2.34)$$

donde $\hat{\mathbf{T}}_w^{(j)}$ representa a un vector tangente a la pared con $j = 1$: primer vector tangente y con $j = 2$: segundo vector tangente. Además, ϵ es la constante de proporcionalidad. Esta constante es conocida como coeficiente de deslizamiento.

Hay que mencionar que $\hat{\mathbf{n}}'_w$, $\hat{\mathbf{T}}_w^{(1)}$ y $\hat{\mathbf{T}}_w^{(2)}$ son un conjunto de vectores que forman un sistema derecho. Estos vectores pueden ser obtenidos de forma muy sencilla a partir de las triadas calculadas en la Subsec. 2.3.2. Los vectores de dicha subsección se calcularon para una superficie que se deforma de manera arbitraria, Ecs. (2.17)-(2.22). Es así que haciendo a las deformaciones $h'_2 = d_2$ y $h'_1 = d_1$ (en el estado básico las superficies libres, como las superficies de la pared, son planas) se obtienen los vectores normal y tangentes a ambos lados de la pared. Los términos de deformación superficial desaparecen de los vectores normal y tangentes porque las deformaciones aparecen con derivadas parciales. Así, para la superficie de la pared en contacto con el fluido 2 los vectores son

$$\hat{\mathbf{n}}'_{w2} = (0, 0, 1), \quad (2.35)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{w2}^{(1)} = (1, 0, 0), \quad (2.36)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{w2}^{(2)} = (0, 1, 0). \quad (2.37)$$

Por su parte, los vectores para la superficie en contacto con el fluido 1 quedan como

$$\hat{\mathbf{n}}'_{w1} = (0, 0, -1), \quad (2.38)$$

$$\hat{\mathbf{T}}'_{w1}^{(1)} = (1, 0, 0), \quad (2.39)$$

$$\hat{\mathbf{T}}'_{w1}^{(2)} = (0, -1, 0). \quad (2.40)$$

En ocasiones es común encontrar en la literatura a la Ec. (2.34) expresada con un signo negativo en el miembro derecho de la igualdad [30, 37]. Esto se debe a la dirección en la que se considera al vector normal. En nuestro caso el signo es positivo pues el vector normal va desde la superficie mojada de la pared hacia la atmósfera correspondiente, mientras que en el caso en que el signo es negativo el vector normal va en la dirección contraria, es decir, de la superficie mojada de la pared hacia adentro de la pared.

Con todo lo anterior, se tiene que las condiciones de impenetrabilidad expresadas para los fluidos 2 y 1 son respectivamente

$$w'_2 = 0 \quad \text{en } z' = 0, \quad (2.41)$$

$$w'_1 = 0 \quad \text{en } z' = -\bar{d}_w. \quad (2.42)$$

Por otro lado, las condiciones de deslizamiento correspondientes a las velocidades tangenciales de los fluidos 2 y 1 son respectivamente

$$u'_2 = \beta_2 u'_{2z} \quad \text{y} \quad v'_2 = \beta_2 v'_{2z} \quad \text{en } z' = 0, \quad (2.43)$$

$$u'_1 = -\beta_1 u'_{1z} \quad \text{y} \quad v'_1 = -\beta_1 v'_{1z} \quad \text{en } z' = -\bar{d}_w, \quad (2.44)$$

donde $\beta_2 = \mu_2 \epsilon_2$ y $\beta_1 = \mu_1 \epsilon_1$ son las longitudes de deslizamiento dimensionales de los fluidos 2 y 1 sobre la pared. Nótese que el signo que está delante de las betas en las condiciones anteriores depende del vector normal. Para llegar a las Ecs. (2.43) y (2.44) se utilizan respectivamente las Ecs. (2.41) y (2.42), pues al expandir los esfuerzos viscosos en términos de las velocidades quedan algunas derivadas parciales de la componente vertical, pero dichas derivadas son cero porque en la pared se cumple la condición de impenetrabilidad.

2.3.5. Condiciones térmicas

En la entrecara formada por el líquido y la atmósfera gaseosa ha de cumplirse la condición de radiación. Ésta nos dice que en dicha entrecara el flujo de calor por conducción en la dirección normal, dado por la ley de Fourier, y el flujo de calor por convección, dado por la ley de enfriamiento de Newton, son iguales. Por lo tanto, esta condición se escribe como

$$-K' \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' T' = Q_h (T' - T_\infty) \quad \text{en } z' = h'(x', y', t'), \quad (2.45)$$

donde Q_h es el coeficiente de transferencia de calor en la entrecara y T_∞ es la temperatura de la atmósfera gaseosa.

Esta última ecuación puede escribirse para los fluidos 2 y 1 respectivamente como

$$-K_2 \hat{\mathbf{n}}'_2 \cdot \nabla' T'_2 = Q_{h2} (T'_2 - T_U) \quad \text{en } z' = h'_2(x', y', t'), \quad (2.46)$$

$$-K_1 \hat{\mathbf{n}}'_1 \cdot \nabla' T'_1 = Q_{h1} (T'_1 - T_L) \quad \text{en } z' = -\bar{d}_w - h'_1(x', y', t'), \quad (2.47)$$

donde Q_{h_2} y Q_{h_1} son los coeficientes de transferencia de calor en la superficie libre de los fluidos 2 y 1, respectivamente.

En la entrecara de un fluido y una pared debe cumplirse la igualdad térmica entre la temperatura del líquido y la del sustrato. Además, el flujo de calor debe ser continuo en la entrecara. Esto último escrito para los fluidos 2 y 1 respectivamente queda como

$$T'_2 = T'_w \quad \text{y} \quad K_2 T'_{2z'} = K_w T'_{wz'} \quad \text{en } z' = 0, \quad (2.48)$$

$$T'_1 = T'_w \quad \text{y} \quad K_1 T'_{1z'} = K_w T'_{wz'} \quad \text{en } z' = -\bar{d}_w. \quad (2.49)$$

2.3.6. Perfiles de temperatura en el estado básico

El estado básico, del cual parte el sistema físico de interés, es el hidrostático. En éste los vectores de velocidad son iguales al vector cero, las superficies libres de las capas de fluido son planas de la forma $z' = cte$ y las variables dependientes son funciones unicamente de z' . Las ecuaciones de conservación de energía para el fluido 2, la pared y el fluido 1, Ecs. (2.10), (2.12) y (2.11) en el estado básico son respectivamente

$$T'_{2bz'z'} = 0, \quad (2.50)$$

$$T'_{wbz'z'} = 0, \quad (2.51)$$

$$T'_{1bz'z'} = 0, \quad (2.52)$$

donde el subíndice b se utiliza para indicar que se está en el estado básico. Además, las condiciones de frontera térmicas para el fluido 2, Ecs. (2.79) y (2.80), y para el fluido 1, Ecs. (2.96) y (2.97), pueden ser escritas respectivamente en términos de los números adimensionales como

$$T'_{2bz'} = -\frac{Bi}{d_2}(T'_{2b} - T_U) \quad \text{en } z' = h'_2(x', y', t'), \quad (2.53)$$

$$T'_{2b} = T'_{wb} \quad \text{y} \quad T'_{2bz'} = \chi T'_{wbz'} \quad \text{en } z' = 0, \quad (2.54)$$

$$T'_{1bz'} = -\frac{Bi_1}{d_1}(T'_{1b} - T_L) \quad \text{en } z' = -\bar{d}_w - h'_1(x', y', t'), \quad (2.55)$$

$$T'_{1b} = T'_{wb} \quad \text{y} \quad T'_{1bz'} = \frac{\chi}{K} T'_{wbz'} \quad \text{en } z' = -\bar{d}_w, \quad (2.56)$$

donde $Bi = (Q_{h_2}d_2)/K_2$ es el número de Biot en la superficie libre del fluido 2, $Bi_1 = (Q_{h_1}d_1)/K_1$ es el número de Biot en la superficie libre del fluido 1, $\chi = K_w/K_2$ es la conductividad relativa de la pared respecto al fluido 2 y $K = K_1/K_2$ es la conductividad relativa del fluido 1 respecto al fluido 2. Las ecuaciones anteriores son respectivamente la condición de la frontera libre del fluido 2, la condición entre el fluido 2 y la pared, la condición de la frontera libre del fluido 1 y la condición entre el fluido 1 y la pared.

Integrando dos veces con respecto a z' las Ecs. (2.50), (2.51) y (2.52) tenemos que los perfiles de temperatura son respectivamente

$$T'_{2b} = Az' + B, \quad (2.57)$$

$$T'_{wb} = A_w z' + B_w, \quad (2.58)$$

$$T'_{1b} = A_1 z' + B_1. \quad (2.59)$$

Los perfiles de temperatura son lineales respecto a z' . Aquí, A , A_w y A_1 representan las pendientes de estos perfiles. Por su lado, B , B_w y B_1 son las ordenadas al origen. Dichas pendientes y ordenadas al origen son funciones de x' , y' y t' .

Sustituyendo este resultado en las condiciones de frontera, Ecs. (2.53)-(2.56), se obtiene un sistema de ecuaciones para los coeficientes. Este sistema queda respectivamente como

$$A = -\frac{Bi}{d_2}(Ah'_2 + B - T_U), \quad (2.60)$$

$$B = B_w \quad \text{y} \quad A = \chi A_w, \quad (2.61)$$

$$A_1 = -\frac{Bi_1}{d_1}(B_1 - A_1(\bar{d}_w + h'_1) - T_L), \quad (2.62)$$

$$(A_w - A_1)\bar{d}_w = B_w - B_1 \quad \text{y} \quad A_1 = \frac{\chi}{K}A_w. \quad (2.63)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones y los perfiles de temperatura en el estado básico se expresan como

$$T'_{2b} = \frac{(T_L - T_U)}{den} \left[1 - \frac{Bi}{d_2}(z' - h'_2) \right] + T_U, \quad (2.64)$$

$$T'_{wb} = \frac{(T_L - T_U)}{den} \left[1 - \frac{Bi}{d_2\chi}(z' - \chi h'_2) \right] + T_U, \quad (2.65)$$

$$T'_{1b} = \frac{(T_L - T_U)}{den} \left[1 - \frac{Bi}{d_2K} \left(z' + \bar{d}_w - K \left(\frac{\bar{d}_w}{\chi} + h'_2 \right) \right) \right] + T_U, \quad (2.66)$$

donde

$$den = \frac{Bi}{d_2} \left(h'_2 + \frac{h'_1}{K} + \frac{\bar{d}_w}{\chi} \right) + 1 + \frac{d_1}{d_2K} \frac{Bi}{Bi_1}, \quad (2.67)$$

actúa como el término de interacción entre las capas de líquido y observamos que $den = den(x', y', t')$.

2.4. Adimensionalización

Se supondrá la aproximación de lubricación en la que la deformación superficial tiene una pendiente muy pequeña. Además, supone que la longitud de onda de la perturbación es muy larga respecto al espesor de la capa de líquido. Las distintas variables se adimensionalizan de la siguiente forma: la coordenada z con d_2 , que es el espesor de la capa superior de fluido en el estado básico; las coordenadas x e y con $\lambda/2\pi = d_2/\varepsilon$, donde λ es la longitud de onda representativa de la deformación superficial y ε es un número de onda adimensional muy pequeño ($\varepsilon = d_2/(\lambda/2\pi)$); el tiempo con $(\lambda/2\pi)^2/\alpha_2 = d_2^2/(\varepsilon^2\alpha_2)$; la velocidad con α_2/d_2 ; la presión con $(\alpha_2\mu_2)/d_2^2$ y la temperatura con $\Delta T = T_L - T_U$. Aquí α_2 es la difusividad térmica del fluido 2. Todas las demás variables que poseen dimensiones de longitud se adimensionalizan con d_2 .

Una vez se aplique la adimensionalización las variables asociadas al fluido 2 no llevarán subíndice numérico ni tendrán "primas", mientras que las variables del fluido 1 llevarán subíndice 1, pero tampoco tendrán "primas". Por su parte, las variables independientes se escriben en su forma adimensional sin "primas" como x , y , z y t . Así mismo, ahora las derivadas parciales adimensionales se indican con estos subíndices.

2.4.1. Fluido 2

Se comienza con la adimensionalización de las ecuaciones y condiciones correspondientes al fluido 2. La Ec. (2.3) correspondiente a la conservación de masa queda en su forma adimensional como

$$\varepsilon u_x + \varepsilon v_y + w_z = 0. \quad (2.68)$$

La Ec. (2.7), que define la conservación de momento del fluido 2, se expande y se adimensionalizan las ecuaciones resultantes quedando así

$$\frac{1}{Pr} (\varepsilon^2 u_t + \varepsilon u u_x + \varepsilon v u_y + w u_z) = -\varepsilon P_x + \varepsilon^2 u_{xx} + \varepsilon^2 u_{yy} + u_{zz}, \quad (2.69)$$

$$\frac{1}{Pr} (\varepsilon^2 v_t + \varepsilon u v_x + \varepsilon v v_y + w v_z) = -\varepsilon P_y + \varepsilon^2 v_{xx} + \varepsilon^2 v_{yy} + v_{zz}, \quad (2.70)$$

$$\frac{1}{Pr} (\varepsilon^2 w_t + \varepsilon u w_x + \varepsilon v w_y + w w_z) = -P_z + \varepsilon^2 w_{xx} + \varepsilon^2 w_{yy} + w_{zz} - BoS, \quad (2.71)$$

donde $Pr = (\mu_2/\rho_2)/\alpha_2$ es el número de Prandtl del fluido 2, $Bo = (\rho_2 g d_2^2)/(\varepsilon^2 \gamma_2)$ es el número de Bond escalado del fluido 2, y $S = (\gamma_2 d_2 \varepsilon^2)/(\alpha_2 \mu_2)$ es el número de tensión superficial escalado del fluido 2.

Ec. (2.10) describe la conservación de energía en el fluido 2, ésta misma ecuación se expande y se escribe en forma adimensional como

$$\varepsilon^2 T_t + \varepsilon u T_x + \varepsilon v T_y + w T_z = \varepsilon^2 T_{xx} + \varepsilon^2 T_{yy} + T_{zz}. \quad (2.72)$$

Por su parte, la condición cinemática para el fluido 2 dada en la Ec. (2.15) se escribe de forma adimensional como

$$\varepsilon^2 h_t + \varepsilon u h_x + \varepsilon v h_y - w = 0 \quad \text{en } z = h(x, y, t). \quad (2.73)$$

La condición de esfuerzos normales en la superficie libre del fluido 2 está dada por la Ec. (2.27). Ésta se adimensionaliza quedando como

$$(P_U - P) + \frac{2}{N^2} (\varepsilon^3 (u_x h_x^2 + v_y h_y^2) + \varepsilon^3 (u_y + v_x) h_x h_y - \varepsilon (v_z + \varepsilon w_y) h_y - \varepsilon (u_z + \varepsilon w_x) h_x + w_z) = \frac{S}{N^3} (h_{xx} (\varepsilon^2 h_y^2 + 1) + h_{yy} (\varepsilon^2 h_x^2 + 1) - 2\varepsilon^2 h_x h_y h_{xy}) \quad \text{en } z = h(x, y, t), \quad (2.74)$$

donde $N = \sqrt{\varepsilon^2 h_x^2 + \varepsilon^2 h_y^2 + 1}$.

La condición de primeros esfuerzos tangenciales del fluido 2, dada en la Ec. (2.29), en su forma adimensional es

$$\frac{1}{N} [2\varepsilon (w_z - \varepsilon u_x) h_x - \varepsilon^2 (u_y + v_x) h_y + (u_z + \varepsilon w_x) (1 - \varepsilon^2 h_x^2) - \varepsilon^2 (\varepsilon w_y + v_z) h_x h_y] = -Ma (\varepsilon T_x + \varepsilon T_z h_x) \quad \text{en } z = h(x, y, t), \quad (2.75)$$

donde $Ma = -(d\gamma_2/dT)(\Delta T d_2/\alpha_2 \mu_2)$ es el número de Marangoni del fluido 2.

La condición de los segundos esfuerzos tangenciales se da en la Ec. (2.31), por lo que al adimensionalizar se tiene que

$$\frac{1}{N} [2\varepsilon h_y (\varepsilon^3 u_x h_x^2 - \varepsilon v_y (1 + \varepsilon^2 h_x^2) + w_z) + \varepsilon^2 (u_y + v_x) h_x (\varepsilon^2 h_y^2 - 1 - \varepsilon^2 h_x^2) - 2\varepsilon^2 (\varepsilon w_x + u_z) h_x h_y + (\varepsilon w_y + v_z) (1 + \varepsilon^2 h_x^2 - \varepsilon^2 h_y^2)] = -\frac{Ma}{N} (-\varepsilon^3 T_x h_x h_y + \varepsilon T_y (\varepsilon^2 h_x^2 + 1) + \varepsilon T_z h_y) \quad \text{en } z = h(x, y, t). \quad (2.76)$$

Ahora, la condición de impenetrabilidad, Ec. (2.41), en forma adimensional queda como

$$w = 0 \quad \text{en } z = 0. \quad (2.77)$$

La condición de deslizamiento, Ec. (2.43), en su forma adimensional se escribe como

$$u = \beta u_z \quad \text{y} \quad v = \beta v_z \quad \text{en } z = 0, \quad (2.78)$$

donde $\beta = \beta_2/d_2$ es la longitud de deslizamiento adimensional del fluido 2.

Para la condición de radiación de la superficie libre del fluido 2, Ec. (2.46), se tiene que se expresa en forma adimensional como

$$\frac{1}{N} (\varepsilon^2 T_x h_x + \varepsilon^2 T_y h_y - T_z) = BiT \quad \text{en } z = h(x, y, t), \quad (2.79)$$

donde la temperatura se define como $T = (T'_2 - T_U)/(T_L - T_U)$ por la condición de radiación.

Las condiciones térmicas en la pared, Ec. (2.48), en forma adimensional quedan como

$$T = T_w \quad \text{y} \quad T_z = \chi T_{wz} \quad \text{en } z = 0. \quad (2.80)$$

Por último, la temperatura en el estado básico para el fluido dos, Ec. (2.64), se adimensionaliza quedando como

$$T_0 = \frac{1}{den} [1 - Bi(z - h)]. \quad (2.81)$$

El denominador den se reescribe en función de las variables y parámetros adimensionales utilizados por Dávalos-Orozco en [18] y [19].

$$den = Bi \left(h + \frac{h_1}{K} + \frac{d_w}{\chi} \right) + 1 + \frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1}, \quad (2.82)$$

donde $d = d_1/d_2$ es el cociente de espesores en el estado básico.

2.4.2. Pared

La Ec. (2.12) corresponde a la conservación de energía de la pared. En forma adimensional ésta se expresa como

$$\varepsilon^2 T_{wt} = \frac{\chi}{\frac{\rho_w C_{pw}}{\rho_2 C_{p2}}} (\varepsilon^2 T_{wxx} + \varepsilon^2 T_{wyy} + T_{wzz}). \quad (2.83)$$

Por su parte, la temperatura de la pared en el estado básico, Ec. (2.65), se escribe en su forma adimensional como

$$T_{w0} = \frac{1}{den} \left[1 - \frac{Bi}{\chi} (z - \chi h) \right]. \quad (2.84)$$

2.4.3. Fluido 1

Ahora, se continúa con la adimensionalización para las ecuaciones del fluido 1 y sus distintas condiciones de frontera. La Ec. (2.4) (conservación de masa) en forma adimensional es

$$\varepsilon u_{1x} + \varepsilon v_{1y} + w_{1z} = 0. \quad (2.85)$$

La conservación de momento, Ec. (2.7), se expande y adimensionaliza quedando como

$$\frac{\rho}{Pr} (\varepsilon^2 u_{1t} + \varepsilon u_1 u_{1x} + \varepsilon v_1 u_{1y} + w_1 u_{1z}) = -\varepsilon P_{1x} + \mu (\varepsilon^2 u_{1xx} + \varepsilon^2 u_{1yy} + u_{1zz}), \quad (2.86)$$

$$\frac{\rho}{Pr} (\varepsilon^2 v_{1t} + \varepsilon u_1 v_{1x} + \varepsilon v_1 v_{1y} + w_1 v_{1z}) = -\varepsilon P_{1y} + \mu (\varepsilon^2 v_{1xx} + \varepsilon^2 v_{1yy} + v_{1zz}), \quad (2.87)$$

$$\frac{\rho}{Pr} (\varepsilon^2 w_{1t} + \varepsilon u_1 w_{1x} + \varepsilon v_1 w_{1y} + w_1 w_{1z}) = -P_{1z} + \mu (\varepsilon^2 w_{1xx} + \varepsilon^2 w_{1yy} + w_{1zz}) - \rho BoS, \quad (2.88)$$

donde $\rho = \rho_1/\rho_2$ y $\mu = \mu_1/\mu_2$ son respectivamente la densidad y la viscosidad relativas del fluido 1 respecto al fluido 2.

La conservación de energía, Ec. (2.11), se expande y se escribe en forma adimensional como

$$\varepsilon^2 T_{1t} + \varepsilon u_1 T_{1x} + \varepsilon v_1 T_{1y} + w_1 T_{1z} = \alpha (\varepsilon^2 T_{1xx} + \varepsilon^2 T_{1yy} + T_{1zz}), \quad (2.89)$$

donde $\alpha = \alpha_1/\alpha_2$ es la difusividad relativa del fluido 1 respecto del fluido 2.

La condición cinemática de una partícula de fluido en la superficie libre del fluido 1, Ec. (2.16), en forma adimensional queda

$$\varepsilon^2 h_{1t} + \varepsilon u_1 h_{1x} + \varepsilon v_1 h_{1y} + w_1 = 0 \quad \text{en } z = -d_w - h_1(x, y, t). \quad (2.90)$$

Por su parte, la condición de esfuerzos normales en la superficie libre, Ec. 2.28, en su forma adimensional es

$$\begin{aligned} (P_L - P_1) + \frac{2\mu}{N_1^2} [\varepsilon^3 (u_{1x} h_{1x}^2 + v_{1y} h_{1y}^2) + \varepsilon^3 (u_{1y} + v_{1x}) h_{1x} h_{1y} \\ + \varepsilon (v_{1z} + \varepsilon w_{1y}) h_{1y} + \varepsilon (u_{1z} + \varepsilon w_{1x}) h_{1x} + w_{1z}] = \\ \frac{\gamma S}{N_1^3} (h_{1xx} (\varepsilon^2 h_{1y}^2 + 1) + h_{1yy} (\varepsilon^2 h_{1x}^2 + 1) - \varepsilon^2 h_{1x} h_{1y} h_{1xy}) \quad \text{en } z = -d_w - h_1(x, y, t), \end{aligned} \quad (2.91)$$

donde $\gamma = \gamma_1/\gamma_2$ es la tensión superficial relativa del fluido 1 respecto al fluido 2 y $N_1 = \sqrt{\varepsilon^2 h_{1x}^2 + \varepsilon^2 h_{1y}^2 + 1}$.

Se adimensionaliza la condición de primeros esfuerzos tangenciales del fluido 1, Ec. (2.30), quedando como

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{N_1} [2\varepsilon(w_{1z} - \varepsilon u_{1x})h_{1x} - \varepsilon^2(u_{1y} + v_{1x})h_{1y} - (u_{1z} + \varepsilon w_{1x})(1 - \varepsilon^2 h_{1x}^2) + \varepsilon^2(\varepsilon w_{1y} + v_{1z})h_{1x}h_{1y}] \\ = -\gamma_T Ma (\varepsilon T_{1x} - \varepsilon T_{1z}h_{1x}) \quad \text{en } z = -d_w - h_1(x, y, t), \end{aligned} \quad (2.92)$$

donde $\gamma_T = (d\gamma_1/dT)/(d\gamma_2/dT)$ es el cociente de las tasas de variación de la tensión superficial de cada fluido respecto a la temperatura.

Ahora, la condición de segundos esfuerzos tangenciales en la entrecara del fluido 1, Ec. (2.32), se adimensionaliza como

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{N_1} [-2\varepsilon h_{1y}(\varepsilon^3 u_{1x} h_{1x}^2 - \varepsilon v_{1y}(1 + \varepsilon^2 h_{1x}^2) + w_{1z}) - \varepsilon^2(u_{1y} + v_{1x})h_{1x}(\varepsilon^2 h_{1y}^2 - 1 - \varepsilon^2 h_{1x}^2) \\ -2\varepsilon^2(\varepsilon w_{1x} + u_{1z})h_{1x}h_{1y} + (\varepsilon w_{1y} + v_{1z})(1 + \varepsilon^2 h_{1x}^2 - \varepsilon^2 h_{1y}^2)] = \\ -\frac{\gamma_T Ma}{N_1} (\varepsilon^3 T_{1x} h_{1x} h_{1y} - \varepsilon T_{1y}(\varepsilon^2 h_{1x}^2 + 1) + \varepsilon T_{1z} h_{1y}) \quad \text{en } z = -d_w - h_1(x, y, t). \end{aligned} \quad (2.93)$$

La condición de impenetrabilidad, dada en la Ec. (2.42), se escribe en su forma adimensional como

$$w_1 = 0 \quad \text{en } z = -d_w. \quad (2.94)$$

Por otro lado, la condición de deslizamiento, Ec. (2.44), en su forma adimensional es

$$u_1 = -\beta_1 u_{1z} \quad \text{y} \quad v_1 = -\beta_1 v_{1z} \quad \text{en } z = -d_w, \quad (2.95)$$

donde $\beta_1 = \beta'_1/d_2$ es la longitud de deslizamiento adimensional del fluido 1.

La condición de radiación en la superficie libre para el fluido 1, Ec. (2.47), en forma adimensional queda

$$\frac{1}{N_1} (-\varepsilon^2 T_{1x} h_{1x} + -\varepsilon^2 T_{1y} h_{1y} + T_{1z}) = \frac{Bi_1}{d} (T_1 - 1) \quad \text{en } z = -d_w - h_1(x, y, t), \quad (2.96)$$

donde la temperatura se define como $T_1 = (T'_1 - T_U)/(T_L - T_U)$ a consecuencia de la condición de radiación.

Las condiciones térmicas en la pared, Ec. (2.49), se escriben en su forma adimensional como

$$T_1 = T_w \quad \text{y} \quad T_{1z} = \frac{\chi}{K} T_{wz} \quad \text{en } z = -d_w. \quad (2.97)$$

Por su parte, la temperatura en el estado básico para el fluido 1, Ec.(2.66), se escribe en forma adimensional como

$$T_{10} = \frac{1}{den} \left[1 - \frac{Bi}{K} \left(z + d_w - K \left(\frac{d_w}{\chi} + h \right) \right) \right]. \quad (2.98)$$

2.5. Expansiones asintóticas

Una expansión asintótica o expansión paramétrica, como suele nombrársele, de una función es tal que satisface la o las ecuaciones en derivadas parciales en las cuales existe un parámetro o número adimensional que ha de incluir una dimensión geométrica representativa del problema cuyo orden de magnitud sea mayor o menor respecto a las demás dimensiones asociadas. En el caso de estudio, las variables dependientes pueden expandirse en forma asintótica con ε como parámetro pequeño. Éste último es el número de onda adimensional con el que se adimensionalizaron las ecuaciones y condiciones de frontera. Las expansiones utilizadas son como aquellas usadas por Benney [38] (1966) y Oron *et al.* [39] (1997), también llamadas expansiones asintóticas en series de potencias [40]. Es decir, las expansiones son de la forma

$$f(x, y, z, t, \varepsilon) = f_0(x, y, z, t) + \varepsilon f_1(x, y, z, t) + \varepsilon^2 f_2(x, y, z, t) + \dots, \quad (2.99)$$

donde $\varepsilon \ll 1$. El término con subíndice cero corresponde al estado sin perturbar, es decir, el hidrostático. Para dicho estado algunas de las variables dependientes toman valor nulo (*p. ej.* velocidad, esfuerzos). Entonces, las expansiones asintóticas para las variables dependientes del fluido 2 son

$$u = \varepsilon (u_{21} + \varepsilon u_{22} + \dots), \quad (2.100)$$

$$v = \varepsilon (v_{21} + \varepsilon v_{22} + \dots), \quad (2.101)$$

$$w = \varepsilon^2 (w_2 + \varepsilon w_3 + \dots), \quad (2.102)$$

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \dots, \quad (2.103)$$

$$T = T_0 + \varepsilon T_1 + \dots. \quad (2.104)$$

Para la temperatura de la pared

$$T_w = T_{w0} + \varepsilon T_{w1} + \dots, \quad (2.105)$$

y para el fluido 1

$$u_1 = \varepsilon (u_{11} + \varepsilon u_{12} + \dots), \quad (2.106)$$

$$v_1 = \varepsilon (v_{11} + \varepsilon v_{12} + \dots), \quad (2.107)$$

$$w_1 = \varepsilon^2 (w_{12} + \varepsilon w_{13} + \dots), \quad (2.108)$$

$$P_1 = P_{10} + \varepsilon P_{11} + \dots, \quad (2.109)$$

$$T_1 = T_{10} + \varepsilon T_{11} + \dots. \quad (2.110)$$

Para resolver el problema planteado para las expansiones asintóticas el procedimiento es relativamente simple. Se sustituyen las expansiones en las ecuaciones y condiciones de frontera adimensionalizadas y se procede a encontrar las ecuaciones y condiciones de frontera para cada orden de magnitud del parámetro pequeño. Esto último se realiza identificando los términos, antes y después del signo igual, que poseen un factor de ε con la misma potencia, es decir, tienen el mismo orden de magnitud. De esta manera se comienza resolviendo para los menores ordenes y se prosigue incrementando el orden. De esta forma se puede verificar que en el orden cero ($\sim O(\varepsilon^0)$) se tienen las ecuaciones de la hidrostática y que la componente vertical de la velocidad de orden uno ($\sim O(\varepsilon)$) es cero para que se cumpla la conservación de masa.

Capítulo 3

Solución

En este capítulo se resuelve el problema para el menor orden de magnitud de las expansiones asintóticas planteadas en la Sec. 2.5. De esta manera se obtienen las velocidades que se sustituyen en la condición cinemática con el fin de obtener la ecuación de evolución no lineal de la perturbación para cada capa de fluido. Éstas se linealizan para entender como evoluciona la deformación superficial. Las ecuaciones lineales se resuelven aplicando modos normales. Posterior a esto se realiza un análisis teórico y numérico.

3.1. Soluciones al orden menor

Estas se refieren a la resolución de las ecuaciones gobernantes para aquellos términos de las expansiones asintóticas en los que la potencia de ε sea la menor posible, es decir, se resuelve para los primeros términos de las series obtenidas en el capítulo anterior. Se calculan las distribuciones de presión de orden cero ($\sim O(\varepsilon^0)$) en cada uno de los líquidos. Concluye con el cálculo de los perfiles de velocidad.

3.1.1. Distribuciones de presión

Para resolver las distribuciones de presión en los fluidos tenemos que al menor orden ($\sim O(\varepsilon^0)$) las ecuaciones que nos dan este resultado son la conservación de momento en la dirección vertical junto con la condición de esfuerzos normales en la superficie libre de cada capa de líquido. Primero para el fluido 2, la conservación de momento y la condición de esfuerzos normales en la superficie libre, Ecs. (2.71) y (2.74) al menor orden ($\sim O(\varepsilon^0)$), se escriben respectivamente como

$$0 = -P_{0z} - BoS, \quad (3.1)$$

$$(P_U - P_0) = S(h_{xx} + h_{yy}) \quad \text{en } z = h(x, y, t). \quad (3.2)$$

Se integra la Ec. (3.1) respecto a z y se utiliza la condición expresada en la Ec. (3.2) para obtener la constante de integración. Entonces, la presión de menor orden del fluido 2 es

$$P_0 = P_U - BoS(z - h) - S\nabla_{\perp}^2 h, \quad (3.3)$$

donde $\nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$. Para el fluido 1 las Ecs. (2.88) y (2.91), que corresponden a la conservación de momento en z y la condición de esfuerzos normales en la superficie libre respectivamente, se escriben para el menor orden ($\sim O(\varepsilon^0)$) como

$$0 = -P_{10z} - \rho BoS, \quad (3.4)$$

$$(P_L - P_{10}) = \gamma S (h_{1xx} + h_{1yy}) \quad \text{en } z = -d_w - h_1(x, y, t). \quad (3.5)$$

Se integra la Ec. (3.4) respecto a z y se utiliza la condición expresada en la Ec. (3.5) para obtener la constante de integración. Entonces, la presión de menor orden para el fluido 1 es

$$P_{10} = P_L - \rho B o S (z + d_w + h_1) - \gamma S \nabla_{\perp}^2 h_1. \quad (3.6)$$

Al igual que con los perfiles de temperatura, las distribuciones de presiones quedan igual a aquellas calculadas por Dávalos-Orozco [18, 19], pues el caso hidrostático debe ser el mismo sin importar las propiedades que pueda presentar el material de trabajo.

3.1.2. Perfil de velocidades

Fluido 2

Para el fluido 2 las ecuaciones de conservación de momento en x e y , Ecs. (2.69) y (2.70), al menor orden ($\sim O(\varepsilon)$) se expresan como

$$-P_{0x} + u_{21zz} = 0, \quad (3.7)$$

$$-P_{0y} + v_{21zz} = 0. \quad (3.8)$$

Hay que notar que las derivadas parciales de P_0 , Ec. (3.3), respecto a x e y hacen que el término resultante no sea dependiente de z . Integrando una vez respecto a z las ecuaciones anteriores se obtiene

$$-P_{0x}z + u_{21z} = C_1, \quad (3.9)$$

$$-P_{0y}z + v_{21z} = C_2. \quad (3.10)$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se calculan a partir de las condiciones de primeros y segundos esfuerzos tangenciales. Estas condiciones, Ecs. (2.75) y (2.76) al menor orden ($\sim O(\varepsilon)$), quedan respectivamente como

$$u_{21z} = -Ma (T_{0x} + T_{0z}h_x) \quad \text{en } z = h(x, y, t), \quad (3.11)$$

$$v_{21z} = -Ma (T_{0y} + T_{0z}h_y) \quad \text{en } z = h(x, y, t). \quad (3.12)$$

En las condiciones anteriores el factor $1/N$ de los términos del lado izquierdo se expande como serie binomial y se encuentra que éste debe ser igual a la unidad para que estos términos conserven su orden ($\sim O(\varepsilon)$). Estas condiciones pueden desarrollarse con los resultados obtenidos anteriormente para T_0 en el Ec. (2.81). Primero se realizan las derivadas parciales de T_0 como

$$T_{0x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{den} \right) [1 - Bi(z - h)] + \frac{Bih_x}{den}, \quad (3.13)$$

$$T_{0y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{den} \right) [1 - Bi(z - h)] + \frac{Bih_y}{den}, \quad (3.14)$$

$$T_{0z} = -\frac{Bi}{den}. \quad (3.15)$$

Ahora, se desarrollan los términos que están entre paréntesis del miembro derecho de las Ecs. (3.11) y (3.12).

$$T_{0x} + T_{0z}h_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{den} \right) [1 - Bi(z - h)], \quad (3.16)$$

$$T_{0y} + T_{0z}h_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{den} \right) [1 - Bi(z - h)]. \quad (3.17)$$

Se sustituyen los resultados anteriores y se evalúa en $z = h$. Con esto las condiciones de las Ecs. (3.11) y (3.12) se reescriben como

$$u_{21z} = -Ma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{den} \right) \text{ en } z = h(x, y, t), \quad (3.18)$$

$$v_{21z} = -Ma \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{den} \right) \text{ en } z = h(x, y, t). \quad (3.19)$$

Entonces, aplicando las Ecs. (3.18) y (3.19) a las Ecs. (3.9) y (3.10), las contantes C_1 y C_2 quedan respectivamente como

$$C_1 = -P_{0x}h - Ma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{den} \right), \quad (3.20)$$

$$C_2 = -P_{0y}h - Ma \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{den} \right). \quad (3.21)$$

La condición de deslizamiento para el fluido 2, Ec. (2.78), para las componentes de velocidad de menor orden se expresa como

$$u_{21} = \beta u_{21z} \text{ y } v_{21} = \beta v_{21z} \text{ en } z = 0. \quad (3.22)$$

Las derivadas parciales en z de las componentes horizontales de la velocidad pueden despejarse facilmente de las Ecs. (3.10) y (3.11). Así, es posible reescribir la condición anterior como

$$u_{21} = \beta C_1 \text{ y } v_{21} = \beta C_2 \text{ en } z = 0. \quad (3.23)$$

Integrando una vez más las Ecs. (3.9) y (3.10) respecto a z se tienen dos nuevas constantes de integración C_3 y C_4 .

$$u_{21} = P_{0x} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_3, \quad (3.24)$$

$$v_{21} = P_{0y} \frac{z^2}{2} + C_2 z + C_4. \quad (3.25)$$

Aplicando la condición de deslizamiento se obtiene que dichas constantes son

$$C_3 = \beta C_1, \quad (3.26)$$

$$C_4 = \beta C_2. \quad (3.27)$$

Por lo tanto, las componentes horizontales de la velocidad del fluido 2 quedan como

$$u_{21} = P_{0x} \frac{z^2}{2} + C_1(z + \beta), \quad (3.28)$$

$$v_{21} = P_{0y} \frac{z^2}{2} + C_2(z + \beta). \quad (3.29)$$

Por su parte la componente en z de la velocidad del fluido 2 se calcula a partir de la conservación de masa, Ec. (2.68), expresada al menor orden ($\sim O(\varepsilon^2)$) como

$$w_{2z} = -u_{21x} - v_{21y}. \quad (3.30)$$

Las derivadas parciales de las velocidades de las Ecs. (3.28) y (3.29) respecto a x e y son respectivamente

$$u_{21x} = P_{0xx} \frac{z^2}{2} + C_{1x}(z + \beta), \quad (3.31)$$

$$v_{21y} = P_{0yy} \frac{z^2}{2} + C_{2y}(z + \beta). \quad (3.32)$$

Sustituyendo esto último en la Ec. (3.30) se obtiene que

$$w_{2z} = -\nabla_{\perp}^2 P_0 \frac{z^2}{2} - (C_{1x} + C_{2y})(z + \beta), \quad (3.33)$$

donde las derivadas parciales de las constantes C_1 y C_2 son respectivamente

$$C_{1x} = -(P_{0xx}h + P_{0x}h_x) - Ma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{den} \right), \quad (3.34)$$

$$C_{2y} = -(P_{0yy}h + P_{0y}h_y) - Ma \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{den} \right). \quad (3.35)$$

Estas derivadas no son funciones de z , por lo que la adición de las mismas tampoco dependerá de esta variable independiente adimensional. Sumando estas derivadas y desarrollando se obtiene que

$$C_{1x} + C_{2y} = -\nabla_{\perp} \cdot (h \nabla_{\perp} P_0) - Ma \nabla_{\perp}^2 \left(\frac{1}{den} \right), \quad (3.36)$$

donde $\nabla_{\perp} = (\partial_x, \partial_y)$ es la componente horizontal del gradiente.

La condición de impenetrabilidad, Ec. (2.77), se expresa para el menor orden ($\sim O(\varepsilon^2)$) como

$$w_2 = 0 \quad \text{en } z = 0. \quad (3.37)$$

Integrando la Ec. (3.33) una vez respecto a z aparece una nueva constante de integración. Esta constante, llámese C_5 , es cero, pues debe cumplirse la condición de impenetrabilidad, Ec. (3.37). Entonces, la componente en z de la velocidad del fluido 2 queda como

$$w_2 = -\nabla_{\perp}^2 P_0 \frac{z^3}{6} - (C_{1x} + C_{2y}) \left(\frac{z^2}{2} + \beta z \right). \quad (3.38)$$

Fluido 1

Para el fluido 1 las ecuaciones de conservación de momento en las direcciones x e y , Ecs. (2.86) y (2.87), se escriben al menor orden ($\sim O(\varepsilon)$) como

$$-P_{10x} + \mu u_{11zz} = 0, \quad (3.39)$$

$$-P_{10y} + \mu v_{11zz} = 0. \quad (3.40)$$

Hay que observar que al tomar las derivadas parciales en x e y de la presión P_{10} , Ec. (3.6), este término pierde la dependencia con z . Por lo tanto, las ecuaciones pueden integrarse fácilmente respecto a z . Integrando una vez respecto a z las Ecs. (3.39) y (3.40) se obtiene respectivamente que

$$-P_{10x}z + \mu u_{11z} = C_{11}, \quad (3.41)$$

$$-P_{10y}z + \mu v_{11z} = C_{21}. \quad (3.42)$$

En las ecuaciones anteriores las constantes de integración C_{11} y C_{21} se calculan de las condiciones de frontera de primeros y segundos esfuerzos tangenciales, Ecs. (2.92) y (2.93), que al menor orden ($\sim O(\varepsilon)$) quedan expresadas como

$$\mu v_{11z} = \gamma_T Ma (T_{10x} - T_{10z}h_{1x}) \quad \text{en } z = -d_w - h_1(x, y, t), \quad (3.43)$$

$$\mu v_{11z} = \gamma_T Ma (T_{10y} - T_{10z}h_{1y}) \quad \text{en } z = -d_w - h_1(x, y, t). \quad (3.44)$$

En estas ecuaciones, en los términos de la izquierda, se puede realizar la expansión binomial del factor $1/N_1$. Se encuentra que este factor se hace igual a uno para que el término de la izquierda sea del orden correspondiente ($\sim O(\varepsilon)$). Estas condiciones pueden desarrollarse con los resultados obtenidos anteriormente para T_{10} en la Ec. (2.98). Primero se realizan las derivadas parciales de T_{10} como

$$T_{10x} = \frac{Bi}{den^2} \left[\left(h_x + \frac{h_{1x}}{K} \right) \left(\frac{Bi}{K} \left(z + d_w - K \left(\frac{d_w}{\chi} + h \right) \right) - 1 \right) + h_x den \right], \quad (3.45)$$

$$T_{10y} = \frac{Bi}{den^2} \left[\left(h_y + \frac{h_{1y}}{K} \right) \left(\frac{Bi}{K} \left(z + d_w - K \left(\frac{d_w}{\chi} + h \right) \right) - 1 \right) + h_y den \right], \quad (3.46)$$

$$T_{10z} = -\frac{Bi}{Kden}. \quad (3.47)$$

Ahora, se desarrollan los términos que están entre paréntesis del miembro derecho de las Ecs. (3.43) y (3.44).

$$T_{10x} - T_{10z}h_{1x} = \frac{Bi}{den^2} \left(h_x + \frac{h_{1x}}{K} \right) \left[\left(\frac{Bi}{K} \left(z + d_w - K \left(\frac{d_w}{\chi} + h \right) \right) - 1 \right) + den \right], \quad (3.48)$$

$$T_{10y} - T_{10z}h_{1y} = \frac{Bi}{den^2} \left(h_y + \frac{h_{1y}}{K} \right) \left[\left(\frac{Bi}{K} \left(z + d_w - K \left(\frac{d_w}{\chi} + h \right) \right) - 1 \right) + den \right]. \quad (3.49)$$

En las condiciones que se pretenden expandir el valor de z está dado. Entonces, evaluando los resultados anteriores en $z = -d_w - h_1$ y desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} T_{10x} - T_{10z}h_{1x} &= \frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1} \frac{Bi}{den^2} \left(h_x + \frac{h_{1x}}{K} \right) \\ &= -\frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{den} \right), \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} T_{10y} - T_{10z}h_{1y} &= \frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1} \frac{Bi}{den^2} \left(h_y + \frac{h_{1y}}{K} \right) \\ &= -\frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{den} \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Estos últimos resultados se sustituyen respectivamente en las Ecs. (3.43) y (3.44), y se despeja a la componente de la velocidad. Entonces, las condiciones quedan reescritas como

$$u_{11z} = -\frac{\gamma_T Ma}{\mu} \frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{den} \right) \quad \text{en } z = -d_w - h_1(x, y, t), \quad (3.52)$$

$$v_{11z} = -\frac{\gamma_T Ma}{\mu} \frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{den} \right) \quad \text{en } z = -d_w - h_1(x, y, t). \quad (3.53)$$

Por lo tanto, aplicando estas condiciones a las Ecs. (3.41) y (3.42) se obtiene que las constantes C_{11} y C_{21} son respectivamente

$$C_{11} = P_{10x}(d_w + h_1) - \gamma_T Ma \frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{den} \right), \quad (3.54)$$

$$C_{21} = P_{10y}(d_w + h_1) - \gamma_T Ma \frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{den} \right). \quad (3.55)$$

Integrando nuevamente respecto a z las Ecs. (3.41) y (3.42), y despejando las velocidades se obtiene que

$$u_{11} = \frac{1}{\mu} \left(P_{10x} \frac{z^2}{2} + C_{11}z + C_{31} \right), \quad (3.56)$$

$$v_{11} = \frac{1}{\mu} \left(P_{10y} \frac{z^2}{2} + C_{21}z + C_{41} \right). \quad (3.57)$$

La condición de deslizamiento, Ec. (2.95), se expresa para el menor orden de las componentes de velocidad como

$$u_{11} = -\beta_1 u_{11z} \quad \text{y} \quad v_{11} = -\beta_1 v_{11z} \quad \text{en } z = -d_w. \quad (3.58)$$

Despejando las derivadas en z de las velocidades en las Ecs. (3.41) y (3.42), y evaluando en la frontera se obtiene que la condición de deslizamiento puede reescribirse como

$$u_{11} = -\frac{\beta_1}{\mu} (C_{11} - P_{10x}d_w) \quad \text{y} \quad v_{11} = -\frac{\beta_1}{\mu} (C_{21} - P_{10y}d_w) \quad \text{en } z = -d_w. \quad (3.59)$$

Con esto es posible calcular las constantes C_{31} y C_{41} . Éstas quedan respectivamente como

$$C_{31} = C_{11}(d_w - \beta_1) - P_{10x} \left(\frac{d_w^2}{2} - \beta_1 d_w \right), \quad (3.60)$$

$$C_{41} = C_{21}(d_w - \beta_1) - P_{10y} \left(\frac{d_w^2}{2} - \beta_1 d_w \right). \quad (3.61)$$

Las velocidades quedan entonces expresadas sólo en función de las constantes C_{11} y C_{21} como

$$u_{11} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{P_{10x}}{2} (z^2 - d_w^2 + 2\beta_1 d_w) + C_{11}(z + d_w - \beta_1) \right), \quad (3.62)$$

$$v_{11} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{P_{10y}}{2} (z^2 - d_w^2 + 2\beta_1 d_w) + C_{21}(z + d_w - \beta_1) \right). \quad (3.63)$$

Ahora, utilizando la ecuación de conservación de masa, Ec. (2.85), al menor orden ($\sim O(\varepsilon^2)$) se tiene que

$$w_{12z} = -u_{11x} - v_{11y}, \quad (3.64)$$

de donde, al derivar las Ecs. (3.62) y (3.63) respecto a x e y se tiene respectivamente que

$$u_{11x} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{P_{10xx}}{2} (z^2 - d_w^2 + 2\beta_1 d_w) + C_{11x} (z + d_w - \beta_1) \right), \quad (3.65)$$

$$v_{11y} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{P_{10yy}}{2} (z^2 - d_w^2 + 2\beta_1 d_w) + C_{21y} (z + d_w - \beta_1) \right). \quad (3.66)$$

Sustituyendo estas derivadas en la Ec. (3.64) se obtiene que

$$w_{12z} = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{2} (z^2 - d_w^2 + 2\beta_1 d_w) \nabla_{\perp}^2 P_{10} + (C_{11x} + C_{21y}) (z + d_w - \beta_1) \right). \quad (3.67)$$

Las derivadas parciales de las constantes C_{11} y C_{21} son

$$C_{11x} = P_{10xx} (d_w + h_1) + P_{10x} h_{1x} - \gamma_T Ma \frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{den} \right), \quad (3.68)$$

$$C_{21y} = P_{10yy} (d_w + h_1) + P_{10y} h_{1y} - \gamma_T Ma \frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{den} \right). \quad (3.69)$$

Sumando estas derivadas se obtiene que

$$C_{11x} + C_{21y} = d_w \nabla_{\perp}^2 P_{10} + \nabla_{\perp} \cdot (h_1 \nabla_{\perp} P_{10}) - \gamma_T Ma \frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1} \nabla_{\perp}^2 \left(\frac{1}{den} \right). \quad (3.70)$$

Notar que esta suma de derivadas parciales de las constantes de integración no depende de z .

Se integra la Ec. (3.67) respecto a z . De esto se encuentra que

$$w_{12} = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{z^3}{3} - d_w^2 z + 2\beta_1 d_w z \right) \nabla_{\perp}^2 P_{10} + (C_{11x} + C_{21y}) \left(\frac{z^2}{2} + d_w z - \beta_1 z \right) \right) + C_{51}. \quad (3.71)$$

La condición de impenetrabilidad, Ec. (2.94), se expresa al menor orden como

$$w_{12} = 0 \quad \text{en } z = -d_w. \quad (3.72)$$

Con esta condición se puede calcular la constante de integración C_{51} que queda como

$$C_{51} = \frac{1}{\mu} \left(\left(\frac{d_w^3}{3} - \beta_1 d_w^2 \right) \nabla_{\perp}^2 P_{10} - (C_{11x} + C_{21y}) \left(\frac{d_w^2}{2} - \beta_1 d_w \right) \right). \quad (3.73)$$

Sustituyendo esta constante en la Ec. (3.71) se obtiene entonces que la componente en z del fluido 1 al menor orden es

$$w_{12} = -\frac{(z + d_w)}{\mu} \left(\left(\frac{1}{6} (z + d_w) (z - 2d_w) + \beta_1 d_w \right) \nabla_{\perp}^2 P_{10} + \frac{1}{2} (C_{11x} + C_{21y}) (z + d_w - 2\beta_1) \right). \quad (3.74)$$

3.2. Ecuaciones de evolución

3.2.1. Fluido 2

La condición cinemática de la superficie libre del fluido 2 al orden calculado queda como

$$h_t + u_{21}h_x + v_{21}h_y - w_2 = 0 \quad \text{en } z = h(x, y, t). \quad (3.75)$$

Se sustituyen las velocidades calculadas, Ecs. (3.28), (3.29) y (3.38), en la ecuación anterior, recordando que el valor de z está dado. Así, se desarrolla dicha condición para obtener la ecuación de evolución no lineal.

$$h_t - \nabla_{\perp} \cdot \left[\left(\frac{h^3}{3} + \beta h^2 \right) \nabla_{\perp} P_0 \right] - Ma \nabla_{\perp} \cdot \left[\left(\frac{h^2}{2} + \beta h \right) \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{den} \right) \right] = 0. \quad (3.76)$$

Sustituyendo la presión P_0 , Ec. (3.3), y desarrollando se tiene que

$$h_t + \frac{S}{3} \nabla_{\perp} \cdot \left[(h^3 + 3\beta h^2) (\nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^2 h) - Bo \nabla_{\perp} h) \right] - \frac{Ma}{2} \nabla_{\perp} \cdot \left[(h^2 + 2\beta h) \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{den} \right) \right] = 0. \quad (3.77)$$

Se puede observar que en el caso en que no existe deslizamiento en la pared ($\beta = 0$) se recupera aquella ecuación dada por Dávalos-Orozco [19], recordando que en este último la definición del número de Marangoni es diferente. Además, la forma de la ecuación es la misma que aquella calculada por Sánchez-Barrera [34], con la diferencia de que aquí el den depende de h_1 y d . Entonces, cuando h_1 y d tienden a cero se recupera el caso estudiado en [34].

Linealización

La Ec. (3.77) se linealiza con el fin de entender como evoluciona la deformación superficial si la misma es considerada como un espesor adimensional (espesor en el estado básico) más una función de deformación. De esta forma, primero se expanden las divergencias horizontales. Así, podemos ver que términos formarán parte de la ecuación lineal. En esta expansión aparecen un gradiente y un laplaciano horizontal del inverso de den , los cuales se desarrollan como

$$\nabla_{\perp} \left(\frac{1}{den} \right) = -\frac{Bi}{den^2} \left(\nabla_{\perp} h + \frac{1}{k} \nabla_{\perp} h_1 \right), \quad (3.78)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \left(\frac{1}{den} \right) = -\frac{Bi}{den^2} \left(\nabla_{\perp}^2 h + \frac{1}{k} \nabla_{\perp}^2 h_1 - \frac{2Bi}{den} (\nabla_{\perp} h \cdot \nabla_{\perp} h + \nabla_{\perp} h_1 \cdot \nabla_{\perp} h_1 + \frac{2}{K} \nabla_{\perp} h \cdot \nabla_{\perp} h_1) \right). \quad (3.79)$$

Como se dijo anteriormente las deformaciones se describen como $h(x, y, t) = 1 + H(x, y, t)$ y $h_1(x, y, t) = d + H_1(x, y, t)$. En general hay que notar que todos los productos escalares entre gradientes de h y h_1 son términos no lineales. En lo particular hay que observar que en los términos en los que se sustituya h se tendrán binomios, de los cuales sólo los productos con el espesor adimensional en el estado básico formarán términos lineales, pues los demás términos son producto de funciones y sus derivadas (no lineales). Es así que la ecuación lineal para la evolución de la perturbación queda como

$$H_t + \frac{S}{3} (1 + 3\beta) \left[\nabla_{\perp}^2 (\nabla_{\perp}^2 H) - Bo \nabla_{\perp}^2 H \right] + \frac{MaBi}{2den_L^2} (1 + 2\beta) \left[\nabla_{\perp}^2 H + \frac{1}{K} \nabla_{\perp}^2 H_1 \right] = 0, \quad (3.80)$$

donde

$$den_L = Bi \left(1 + \frac{d}{K} + \frac{d_w}{\chi} \right) + 1 + \frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1}, \quad (3.81)$$

es el denominador lineal.

3.2.2. Fluido 1

La condición cinemática de la superficie libre del fluido 1 al orden calculado queda como

$$h_{1t} + u_{11}h_{1x} + v_{11}h_{1y} + w_{12} = 0 \quad \text{en } z = -d_w - h_1(x, y, t). \quad (3.82)$$

Se sustituyen las velocidades calculadas, Ecs. (3.62), (3.63) y (3.74), en la ecuación anterior, recordando que el valor de z está dado. Así, se obtiene que la ecuación de evolución no lineal es

$$h_{1t} - \frac{1}{\mu} \nabla_{\perp} \cdot \left[\left(\frac{h_1^3}{3} + \beta_1 h_1^2 \right) \nabla_{\perp} P_{10} \right] + \frac{\gamma_T Ma}{\mu} \frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1} \nabla_{\perp} \cdot \left[\left(\frac{h_1^2}{2} + \beta_1 h_1 \right) \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{den} \right) \right] = 0. \quad (3.83)$$

Ahora, se sustituye la presión P_{10} , Ec. (3.6), con lo cual la ecuación de evolución no lineal queda

$$h_{1t} + \frac{S}{3\mu} \nabla_{\perp} \cdot \left[(h_1^3 + 3\beta_1 h_1^2) (\rho Bo \nabla_{\perp} h_1 + \gamma \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^2 h_1)) \right] + \frac{\gamma_T Ma}{2\mu} \frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1} \nabla_{\perp} \cdot \left[(h_1^2 + 2\beta_1 h_1) \nabla_{\perp} \left(\frac{1}{den} \right) \right] = 0. \quad (3.84)$$

En este caso se observa que cuando no hay deslizamiento ($\beta_1 = 0$) no se obtiene precisamente el mismo resultado que obtiene Dávalos-Orozco [19]. Esto se debe a un error de impresión, pues falta una γ dividiendo al término que contiene al número de Bond. Las siguientes ecuaciones escritas en el mismo artículo ya no presentan esta inconsistencia. Además de esto, Dávalos-Orozco consideró que los fluidos 2 y 1 eran el mismo por lo que $\gamma = 1$, lo que hace que dicha factorización no afecte en su estudio, pero de suponer que ambos fluidos son distintos dicho término si posee relevancia en el problema y dicho factor de γ faltante debe considerarse para el análisis.

Linealización

Ahora, al igual que con la ecuación para el fluido 2, la Ec. (3.84) se linealiza para entender como es que evoluciona la perturbación si la deformación superficial del fluido inferior se define, tal cual como se mencionó anteriormente, como $h_1(x, y, t) = d + H_1(x, y, t)$. Entonces, después de desarrollar las divergencias y de seguir un procedimiento análogo al caso de fluido 2, la ecuación lineal para el fluido 1 queda como

$$H_{1t} + \frac{S}{3\mu} (d^3 + 3\beta_1 d^2) [\rho Bo \nabla_{\perp}^2 H_1 + \gamma \nabla_{\perp}^2 (\nabla_{\perp}^2 H_1)] - \frac{Ma Bi}{2 den_L^2} \frac{\gamma_T}{\mu} \frac{d}{K} \frac{Bi}{Bi_1} (d^2 + 2\beta_1 d) \left[\nabla_{\perp}^2 H + \frac{1}{K} \nabla_{\perp}^2 H_1 \right] = 0. \quad (3.85)$$

3.3. Modos normales

Como mencionan Gallaire y Brun [41] (2017), el análisis lineal de la estabilidad deben distinguirse dos casos de estudio: el estudio de flujos base homogéneos; y el estudio de flujos base no homogéneos. En particular, es de nuestro interés el primer caso. En los flujos base homogéneos se considera una invarianza respecto a una o hasta dos direcciones coordenadas. Mediante la introducción de la transformada de Fourier se incorporan las ondas generalizadas que no son más que soluciones fundamentales. A estas soluciones se les llama modos normales. En nuestro caso la estabilidad lineal se estudia aplicando modos normales a las Ecs. (3.80) y (3.85). Es así que las deformaciones superficiales se suponen de la forma

$$H(x, y, t) = Ae^{i(k_x x + k_y y) + \Omega t}, \quad (3.86)$$

$$H_1(x, y, t) = Be^{i(k_x x + k_y y) + \Omega t}, \quad (3.87)$$

con $\Omega = \Gamma + i\omega$ (conocida como frecuencia temporal), donde Γ es la razón de crecimiento y ω es la frecuencia de oscilación. A y B son constantes de proporcionalidad y k_x y k_y son los números de onda en las direcciones horizontales. En este sentido, como se mencionó antes, se está considerando una invarianza respecto a éstas direcciones. Además, como se considera que los números de onda son reales y que la frecuencia temporal es compleja, se dice que se está realizando un análisis temporal de la inestabilidad [41]. En el análisis de la estabilidad para los modos normales se sabe que si $\Gamma > 0$ el flujo es inestable, mientras que si $\Gamma < 0$ es estable. Que el flujo sea estacionario u oscilatorio está condicionado a ω . Si ω y Γ existen para un mismo intervalo del número de onda se dice que el flujo es oscilatorio. Para los intervalos del número de onda en que sólo existe Γ se dice que el flujo es estacionario.

Una vez se sustituyen las Ecs. (3.86) y (3.87) en las Ecs. (3.80) y (3.85) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo para los coeficientes A y B

$$\left[\frac{\Omega}{k^2} + \frac{S}{3} (1 + 3\beta) (k^2 + Bo) - \frac{MaBi}{2den_L^2} (1 + 2\beta) \right] A - \frac{1}{K} \frac{MaBi}{2den_L^2} (1 + 2\beta) B = 0, \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} & \frac{MaBi}{2den_L^2} \frac{\gamma_T}{\mu} \frac{d^2}{K} \frac{Bi}{Bi_1} (d + 2\beta_1) A \\ & + \left[\frac{\Omega}{k^2} + \frac{Sd^2}{3\mu} (d + 3\beta_1) (\gamma k^2 - \rho Bo) + \frac{MaBi}{2den_L^2} \frac{\gamma_T}{\mu} \frac{d^2}{K^2} \frac{Bi}{Bi_1} (d + 2\beta_1) \right] B = 0, \end{aligned} \quad (3.89)$$

donde $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Cuando no hay deslizamiento ($\beta = \beta_1 = 0$) se recupera el sistema dado por Dávalos-Orozco en [19].

3.4. Soluciones para los modos normales

3.4.1. Dos capas de líquido

La condición para que la solución de los coeficientes A y B sea distinta de la trivial es que el determinante del sistema formado por las Ecs. (3.88) y (3.89) sea nulo. Entonces, aplicando esta condición se obtiene que

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\Omega}{k^2} + \frac{S}{3} (1 + 3\beta) (k^2 + Bo) - \frac{MaBi}{2den_L^2} (1 + 2\beta) \right] \times \\ & \left[\frac{\Omega}{k^2} + \frac{Sd^2}{3\mu} (d + 3\beta_1) (\gamma k^2 - \rho Bo) + \frac{MaBi}{2den_L^2} \frac{\gamma_T}{\mu} \frac{d^2}{K^2} \frac{Bi}{Bi_1} (d + 2\beta_1) \right] \\ & + \left(\frac{MaBi}{2den_L^2} \right)^2 \frac{\gamma_T}{\mu} \frac{d^2}{K^2} \frac{Bi}{Bi_1} (d + 2\beta_1) (1 + 2\beta) = 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Este determinante igualado a cero nos da una ecuación cuadrática para Ω . Además, cuando se hace $\beta = \beta_1 = 0$ (caso sin deslizamiento) en la ecuación anterior, se encuentra la misma expresión que obtiene Dávalos-Orozco en [19]. Para la solución de dicha ecuación se considera que los fluidos que mojan ambas caras de la pared son el mismo y, por ende, tienen las mismas propiedades, es decir, $\alpha = \gamma = \gamma_T = \mu = \rho = K = 1$ y $Bi_1 = dBi$. Además, a partir de este punto se considera que las longitudes de deslizamiento de ambos fluidos son iguales $\beta_1 = \beta$, lo cual puede atribuirse a que se aplicó el mismo recubrimiento en ambos lados de la pared. Así, se reduce el número de parámetros en el sistema y la Ec.(3.90) se reescribe como

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\Omega}{k^2} + \frac{S}{3} (1 + 3\beta) (k^2 + Bo) - \frac{MaBi}{2den_L^2} (1 + 2\beta) \right] \times \\ & \left[\frac{\Omega}{k^2} + \frac{Sd^2}{3} (d + 3\beta) (k^2 - Bo) + \frac{MaBi}{2den_L^2} d (d + 2\beta) \right] \\ & + \left(\frac{MaBi}{2den_L^2} \right)^2 d (d + 2\beta) (1 + 2\beta) = 0, \end{aligned} \quad (3.91)$$

con

$$den_L = Bi \left(1 + d + \frac{d_w}{\chi} \right) + 1 + d. \quad (3.92)$$

Se van a tener dos soluciones de la Ec. (3.91), una con $Bo > 0$ y otra para $Bo < 0$. Para el caso en que el número de Bond es negativo se puede sustituir $Bo = -|Bo|$, esto último sólo cambia el signo de los términos que incluyan el Bo . Con el fin de reducir el número de parámetros Dávalos-Orozco [19] hace los siguientes escalamientos

$$\Omega_q = \frac{3\Omega}{SBo^2} = \Gamma_q + i\omega_q, \quad A_q = \frac{3}{SBo} \frac{MaBi}{2den_L^2} \quad \text{y} \quad k_q^2 = \frac{k^2}{Bo}, \quad (3.93)$$

$$\Omega_{q_1} = \frac{3\Omega}{S|Bo|^2} = \Gamma_{q_1} + i\omega_{q_1}, \quad A_{q_1} = \frac{3}{S|Bo|} \frac{MaBi}{2den_L^2} \quad \text{y} \quad k_{q_1}^2 = \frac{k^2}{|Bo|}. \quad (3.94)$$

Nótese que los escalamientos de la Ec. (3.93) corresponden al caso con $Bo > 0$, mientras que los escalamientos de la Ec. (3.94) corresponden al caso con $Bo < 0$. A partir de este punto sólo se mostrarán los cálculos para obtener Ω_q que corresponde al caso con $Bo > 0$. Esto porque el procedimiento algebraico para obtener las soluciones de Ω_{q_1} es completamente análogo. Así, después de sustituir las definiciones de la Ec. (3.93) en la Ec. (3.91) y reducir términos semejantes, se encuentra que

$$\left[\frac{\Omega_q}{k_q^2} + (1 + 3\beta)(k_q^2 + 1) - A_q(1 + 2\beta) \right] \times$$

$$\left[\frac{\Omega_q}{k_q^2} + d^2(d + 3\beta)(k_q^2 - 1) + A_q d(d + 2\beta) \right]$$

$$+ A_q^2 d(d + 2\beta)(1 + 2\beta) = 0. \quad (3.95)$$

En el caso que $Bo < 0$ la ecuación que se obtiene difiere de la anterior en que cambia la nomenclatura de las variables escaladas, pues se añade un subíndice 1. Además, cambia el signo del número uno asociado en los paréntesis junto con las k_q^2 .

Observamos que la Ec. (3.95) está expresada de la forma

$$\left(\frac{\Omega_q}{k_q^2} + a \right) \left(\frac{\Omega_q}{k_q^2} + b \right) + c = 0. \quad (3.96)$$

Ésta es una ecuación cuadrática para Ω_q , la cual puede resolverse de forma muy sencilla aplicando la fórmula general. Así, las dos soluciones pueden escribirse como

$$\Omega_q = \frac{k_q^2}{2} \left\{ -(a + b) \pm \sqrt{(a - b)^2 - 4c} \right\}, \quad (3.97)$$

con

$$a + b = -(d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1)) + k_q^2(d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1)) + A_q(d^2 - 1 + 2\beta(d - 1)), \quad (3.98)$$

y

$$(a - b)^2 - 4c = [d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1) - k_q^2(d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1)) - A_q(d^2 + 1 + 2\beta(d + 1))]^2$$

$$- 4A_q^2 d(d + 2\beta)(1 + 2\beta). \quad (3.99)$$

Se tienen tres posibilidades para la solución: (1) si el radicando es positivo se tienen dos raíces reales y no hay flujo oscilatorio (unicamente hay razón de crecimiento de la perturbación) y, entonces, la perturbación crece o decrece en el tiempo; (2) si el radicando es nulo se tiene una sola solución real y la perturbación crece o decrece en el tiempo; y (3) si el radicando es negativo se tienen dos raíces complejas, donde la parte imaginaria representa a la frecuencia de oscilación de la perturbación. En este último caso si la parte real es positiva la oscilación crece en el tiempo y si es negativa decrece en el tiempo.

Sustituyendo las Ecs. (3.98) y (3.99) en la Ec. (3.97) se tiene que las soluciones cuando $Bo > 0$ son

$$\Omega_q = \frac{k_q^2}{2} \left\{ - \left[-(d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1)) + k_q^2(d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1)) + A_q(d^2 - 1 + 2\beta(d - 1)) \right] \right.$$

$$\pm \sqrt{\left[-(d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1)) + k_q^2(d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1)) + A_q(d^2 + 1 + 2\beta(d + 1)) \right]^2}$$

$$\left. - 4A_q^2 d(d + 2\beta)(1 + 2\beta) \right\}. \quad (3.100)$$

De la ecuación anterior, a la solución con el signo positivo se identifica como la primera solución, mientras que la solución con el signo negativo se identifica como la segunda solución.

Ya sabemos que cuando $Bo < 0$ se tiene que sustituir $Bo = -|Bo|$ en la Ec. (3.91), aplicar los escalamientos de la Ec. (3.94) y desarrollar de forma análoga a la solución para $Bo > 0$ presentada arriba. Hay que observar que cuando se hace lo anterior sólo habrá un cambio de signo en aquellos términos de la Ec. (3.100) (dentro de las llaves) que no están multiplicados por k_q^2 o A_q . Así, las soluciones cuando $Bo < 0$ son

$$\Omega_{q_1} = \frac{k_{q_1}^2}{2} \left\{ - [d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1) + k_{q_1}^2(d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1)) + A_{q_1}(d^2 - 1 + 2\beta(d - 1))] \right. \\ \left. \pm \sqrt{[d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1) + k_{q_1}^2(d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1)) + A_{q_1}(d^2 + 1 + 2\beta(d + 1))]^2} \right. \\ \left. - 4A_{q_1}^2 d(d + 2\beta)(1 + 2\beta) \right\}. \quad (3.101)$$

Si se hace $\beta = 0$ en las Ecs. (3.100) y (3.101), observamos que se recuperan aquellas ecuaciones dadas por Dávalos-Orozco en [19].

Hay que observar que los términos $d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1)$ y $d^2 - 1 + 2\beta(d - 1)$ se hacen cero cuando $d = 1$ para cualquier valor de β . Si hay flujo oscilatorio y $d = 1$ el radicando de la Ec. (3.100) pierde dependencia con el número de onda. Así, para la frecuencia de oscilación se tiene que $\omega_q \sim k_q^2$. Es decir, la frecuencia de oscilación pierde un par de raíces y presenta una forma parabólica respecto al número de onda. Esta parábola tiene vértice en el origen y dominio en todos los reales positivos. Entonces, cuando esto pasa todo el flujo es oscilatorio. Por otro lado, también con $d = 1$, observamos que cuando hay flujo oscilatorio los efectos térmicos de A_q sobre la razón de crecimiento desaparecen. En este sentido, la estabilidad del sistema no depende de A_q . Además, esto también puede afectar la frecuencia de oscilación, como se verá más adelante. Aquí supondremos que beta sólo toma valores de cero a uno ($0 < \beta < 1$). También cabe mencionar que con $d > 1$ se tiene que $d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1) > d^2 - 1 + 2\beta(d - 1)$, mientras que con $d < 1$ se tiene que $d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1) < d^2 - 1 + 2\beta(d - 1)$ para todo el intervalo de valores de beta.

Como se mencionó antes sólo unos términos poseen un cambio de signo. Entonces, es de nuestro interés saber si existen intervalos de los parámetros para los cuales ambas soluciones de Omega sean equivalentes. En [19], Dávalos-Orozco, demostró que haciendo a d mayor o menor a uno y variando el signo de A_q se tiene dicha equivalencia entre las soluciones. A diferencia de [19], observamos que aquí se tiene un cambio de signo en términos extras correspondientes a los efectos del deslizamiento. Es así que el valor del deslizamiento es determinante en el caso en que exista una equivalencia entre Ω_q y Ω_{q_1} . En nuestro caso en particular la forma de las equivalencias se simplifican en gran medida al considerar el mismo deslizamiento para ambos fluidos, pero en el caso en que se considere $\beta_1 \neq \beta$ hay que tener cuidado pues las equivalencias comienzan a tener una fuerte dependencia con los valores de dichas longitudes de deslizamiento. Cuando $d < 1$ (para todo β) se pueden realizar las siguientes sustituciones $d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1) = -|d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1)|$ y $d^2 - 1 + 2\beta(d - 1) = -|d^2 - 1 + 2\beta(d - 1)|$. De esta manera, si se tiene el mismo deslizamiento en ambas caras de la pared, se recuperan las equivalencias dadas en [19]. En ésta publicación, Dávalos-Orozco muestra dichas equivalencias con triadas como

$$\Omega_q \rightarrow \Omega_{q_1}, \quad A_q > 0 \rightarrow A_{q_1} < 0, \quad d > 1 \rightarrow d < 1, \quad (3.102)$$

$$\Omega_q \rightarrow \Omega_{q_1}, \quad A_q > 0 \rightarrow A_{q_1} < 0, \quad d < 1 \rightarrow d > 1, \quad (3.103)$$

$$\Omega_q \rightarrow \Omega_{q_1}, \quad A_q < 0 \rightarrow A_{q_1} > 0, \quad d > 1 \rightarrow d < 1, \quad (3.104)$$

$$\Omega_q \rightarrow \Omega_{q_1}, \quad A_q < 0 \rightarrow A_{q_1} > 0, \quad d < 1 \rightarrow d > 1. \quad (3.105)$$

Por tanto existe una equivalencia entre ambas formas al cambiar adecuadamente los valores de d , tal y como lo demuestra [19]. Es así que las soluciones obtenidas para el caso $Bo > 0$, Ec. (3.100), son suficientes para describir en su totalidad la estabilidad del sistema.

A manera de demostración la equivalencia dada en la Ec. (3.104) se muestra en las Ecs. (3.100) y (3.101) como

$$\begin{aligned} \Omega_q = \frac{k_q^2}{2} \left\{ - \left[-(d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1)) + k_q^2(d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1)) - |A_q|(d^2 - 1 + 2\beta(d - 1)) \right] \right. \\ \left. \pm \sqrt{[-(d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1)) + k_q^2(d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1)) - |A_q|(d^2 + 1 + 2\beta(d + 1))]^2} \right. \\ \left. - 4|A_q|^2 d(d + 2\beta)(1 + 2\beta) \right\}, \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{q1} = \frac{k_{q1}^2}{2} \left\{ - \left[-|d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1)| + k_{q1}^2(d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1)) - A_{q1}|d^2 - 1 + 2\beta(d - 1)| \right] \right. \\ \left. \pm \sqrt{[-(d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1)) + k_{q1}^2|d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1)| - A_{q1}(d^2 + 1 + 2\beta(d + 1))]^2} \right. \\ \left. - 4A_{q1}^2 d(d + 2\beta)(1 + 2\beta) \right\}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Cuando A_q es negativo se sustituye su definición utilizando barras de valor absoluto. Hay que notar que en la Ec. (3.107) se aprovecha el hecho de que el conjunto de términos entre corchetes (en el radicando) está al cuadrado y se factoriza un $(-1)^2 = 1$, lo cual cambia el signo de todos los términos dentro de los corchetes. Las demás triadas se comprueban de forma análoga realizando los cálculos algebraicos.

Ahora, es posible calcular los números de onda críticos. Para el caso estacionario la razón de crecimiento debe ser cero, que es lo mismo a hacer $\Omega_q = 0$. Con el fin de facilitar los cálculos para el número de onda crítico estacionario, ésta última condición se sustituye en la Ec. (3.95) y se resuelve para el número de onda, donde se renombra k_q con k_{qCS} . Después de realizar lo anterior se obtiene que

$$k_{qCS}^4 \left[k_{qCS}^4 + A_q \left(\frac{d + 2\beta}{d^2 + 3\beta d} - \frac{1 + 2\beta}{1 + 3\beta} \right) k_{qCS}^2 + A_q \left(\frac{d + 2\beta}{d^2 + 3\beta d} + \frac{1 + 2\beta}{1 + 3\beta} \right) - 1 \right] = 0. \quad (3.108)$$

Se calculan las raíces para k_{qCS}^2 . Dos de las raíces son cero, mientras que las otras dos raíces son

$$\begin{aligned} k_{qCS}^2 = \frac{1}{2} \left\{ -A_q \left(\frac{d + 2\beta}{d^2 + 3\beta d} - \frac{1 + 2\beta}{1 + 3\beta} \right) \right. \\ \left. \pm \sqrt{A_q^2 \left(\frac{d + 2\beta}{d^2 + 3\beta d} - \frac{1 + 2\beta}{1 + 3\beta} \right)^2 + 4 \left(1 - A_q \left(\frac{d + 2\beta}{d^2 + 3\beta d} + \frac{1 + 2\beta}{1 + 3\beta} \right) \right)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

k_{qCS}^2 tiene que ser real, por lo que el radicando debe ser positivo. Se puede observar que los efectos gravitatorios se hacen presentes unicamente en el término del radicando que tiene el cuatro. Como se demuestra en [19] se multiplica la ecuación anterior por Bo y se simplifica, por lo que sólo el término mencionado antes queda asociado al número de Bond que representa

los efectos gravitatorios. Entonces, ha de existir un valor de A_q tal que la gravedad no tenga influencia en el número de onda crítico estacionario. Esto es, cuando:

$$1 - A_q \left(\frac{d + 2\beta}{d^2 + 3\beta d} + \frac{1 + 2\beta}{1 + 3\beta} \right) = 0. \quad (3.110)$$

En ausencia de deslizamiento, ambos resultados, Ecs. (3.109) y (3.110), se reducen a aquellos dados en [19].

El flujo oscilatorio se da siempre y cuando el radicando de la Ec. (3.100) sea negativo. El inicio y final de las oscilaciones se obtienen de las raíces del término con el radical de la Ec. (3.100) igualando a cero el radicando. Cuando no hay frecuencia de oscilación una de las raíces es cero, mientras que las otras dos son

$$k_{qCO1,2}^2 = \frac{d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1) - A_q \left(\sqrt{d(d + 2\beta)} \mp \sqrt{1 + 2\beta} \right)^2}{d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1)}. \quad (3.111)$$

Podemos observar que la Ec. (3.111) geoméricamente representa la ecuación de dos rectas para $k_{qCO1,2}^2$ respecto a A_q , donde la ordenada al origen de ambas rectas es la misma. Así, analizando las pendientes de dichas rectas observamos que para $d < 1$ con $A_q > 0$ ambas pendientes son positivas (con una ordenada al origen negativa) y $k_{qCO1} < k_{qCO2}$, pues la pendiente de k_{qCO2}^2 es mayor. Entonces, la primera raíz (signo negativo) representa el inicio del flujo oscilatorio y es el número de onda crítico en el cual se combinan los dos modos de solución para cambiar al flujo oscilatorio. Por su parte, la segunda raíz (signo positivo) representa el final del flujo oscilatorio. Por lo tanto, se tiene que el flujo oscilatorio ocurre para $k_{qCO1} < k_q < k_{qCO2}$. En este caso los números de onda críticos sólo existen para $A_q > 0$. Si $d < 1$ y para $A_q < 0$ observamos que $k_{qCO1,2}^2$ se hacen negativos y por lo tanto en estas condiciones no existe flujo oscilatorio. Ahora, si $d > 1$ y $A_q > 0$ el papel que juegan los números de onda críticos k_{qCO1} y k_{qCO2} se invierte, esto es que $k_{qCO1} > k_{qCO2}$. En este caso las pendientes de las rectas de $k_{qCO1,2}^2$ respecto a A_q se hacen negativas (con una ordenada al origen positiva) y al ser más negativa la pendiente de k_{qCO2}^2 hace que éste número de onda crítico tome valores menores a los de k_{qCO1}^2 . Así, en este caso k_{qCO2} es el punto crítico correspondiente al inicio del flujo oscilatorio y es donde se combinan las curvas estacionarias. Por otro lado, en k_{qCO1} termina el flujo oscilatorio. En este sentido, si $d > 1$ y $A_q > 0$, el flujo oscilatorio existe para $k_{qCO2} < k_q < k_{qCO1}$. Aquí se tiene la posibilidad de que no existan los números de onda críticos $k_{qCO1,2}^2$, pues si A_q es lo suficientemente grande puede hacer negativa la Ec. (3.111), lo cual implica un valor crítico complejo. Con $d > 1$ en $A_q = 0$ los números de onda críticos $k_{qCO1,2}^2$ son iguales y por lo tanto no existe flujo oscilatorio. Cuando $d > 1$ y $A_q < 0$ se vuelve a tener que $k_{qCO1} < k_{qCO2}$. Se observa que para que la solución sea finita ha de cumplirse que $d \neq 1$. Cuando $d = 1$ la Ec. (3.111) es inválida y hay que recurrir a la Ec. (3.100) para calcular el valor crítico en estas condiciones. Además de esto, hay que notar que los cambios de signo debidos al término $d^2 - 1 + 2\beta(d - 1)$ no afectan el signo del número de onda crítico.

Con $d < 1$ el flujo oscilatorio puede empezar con un número de onda cercano a $k_{qCO1}^2 = 0$, mientras que si $k_{qCO2}^2 = 0$ el flujo termina cuando el número de onda es muy pequeño, es decir, no hay oscilaciones en el flujo. Entonces, existe un valor de A_q con el cual se cumple lo anterior

y este se obtiene igualando a cero la Ec. (3.111), de lo que resulta

$$A_{qk_{qCO1,2}} = \frac{d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1)}{\left(\sqrt{d(d + 2\beta)} \mp \sqrt{1 + 2\beta}\right)^2}. \quad (3.112)$$

El signo negativo en la ecuación anterior corresponde al valor de A_q tal que el flujo oscilatorio comience con un número de onda cercano a cero, mientras que el signo positivo corresponde al valor de A_q tal que no haya flujo oscilatorio. Aquí se cumple que $A_{qk_{qCO1,2}} > 0$ para cualquier valor de los parámetros. Se observa que el denominador de $A_{qk_{qCO1,2}}$ en la ecuación anterior ha de ser distinto de cero para que la solución esté acotada. Si se trabaja algebraicamente dicha condición para el denominador se obtiene que $d \neq 1$. Nótese que aquí si $d = 1$, entonces $A_{qk_{qCO1}}$ no existe, pues la primera raíz de la Ec. (3.111) deja de depender de A_q . También, para el caso en que el fluido no desliza en las paredes las Ecs. (3.111) y (3.112) se reducen a las dadas en [19]. Hay que notar que $A_{qk_{qCO1,2}}$ son las abscisas al origen de las rectas que forman $k_{qCO1,2}^2$ respecto a A_q . En este sentido, cuando $d < 1$, k_{qCO1} empieza a existir para valores de $A_q > A_{qk_{qCO1}}$. En k_{qCO1} se combinan las curvas estacionarias para entrar al flujo oscilatorio, por lo que para dichos valores se tiene tanto flujo estacionario como oscilatorio. Por su parte, k_{qCO2} existe para valores de $A_q > A_{qk_{qCO2}}$. Para estos valores de A_q se tiene únicamente flujo estacionario. Además, por lo discutido anteriormente sobre las pendientes de $k_{qCO1,2}^2$ y analizando el denominador de la Ec. (3.112), sabemos que $A_{qk_{qCO1}} > A_{qk_{qCO2}}$. Así, para valores de $A_{qk_{qCO2}} < A_q < A_{qk_{qCO1}}$ se tiene sólo flujo oscilatorio. Por su parte hay que ver que si $d > 1$ los papeles de $A_{qk_{qCO2}}$ y $A_{qk_{qCO1}}$ no se invierten, como es el caso de los números de onda críticos, pero se da un cambio en la pendiente de las rectas de $k_{qCO1,2}^2$. Esto quiere decir que, bajo estas condiciones, k_{qCO1} existe para valores de $A_q < A_{qk_{qCO1}}$ y k_{qCO2} existe para valores de $A_q < A_{qk_{qCO2}}$. Es decir, para $A_q < A_{qk_{qCO1}}$ solamente se presenta flujo estacionario, mientras que con $A_q < A_{qk_{qCO2}}$ se tienen ambos tipos de flujo.

Ahora, se desea obtener el número de onda crítico para el cual la razón de crecimiento es cero cuando se tiene flujo oscilatorio. Así, igualando a cero la parte que se encuentra fuera del radical en la Ec. (3.100), se puede encontrar que una de las raíces del número de onda crítico es cero y la otra es

$$k_{qCO}^2 = \frac{d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1) - A_q(d^2 - 1 + 2\beta(d - 1))}{d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1)}. \quad (3.113)$$

Aquí el denominador nunca es nulo, por lo que este número de onda crítico siempre está acotado. Si $\beta = 0$ se recupera el número de onda crítico dado en [19]. Hay que ver que, cuando $d > 1$, este valor crítico puede dejar de existir si A_q es lo suficientemente grande. Aquí sucede que cuando $d = 1$ el número de onda crítico se confina alrededor de cero. k_{qCO}^2 también forma una recta respecto a A_q . En este caso la ordenada al origen es menor (en valor absoluto) a aquella ordenada en la Ec. (3.111). En k_{qCO} se da el cambio de signo en la razón de crecimiento de la perturbación. Analizando la parte correspondiente a Γ_q en la Ec. (3.100) podemos observar que para $k_q < k_{qCO}$ se tiene $\Gamma_q > 0$ (flujo inestable), mientras que si $k_q > k_{qCO}$ se tiene $\Gamma_q < 0$ (flujo estable). Esto ocurre únicamente cuando hay flujo oscilatorio. Es decir, que k_{qCO} existe dentro del intervalo en que sucede la frecuencia de oscilación. De esta forma sabemos que cuando $d < 1$ se tiene $k_{qCO1} < k_{qCO} < k_{qCO2}$.

Cuando $d > 1$ las rectas formadas entre k_q^2 y A_q de las Ecs. (3.111) y (3.113) se intersectan entre sí. Estas intersecciones pueden obtenerse matemáticamente en función de A_q . Para $A_q > 0$, el valor de A_q en el cual empieza a existir flujo oscilatorio inestable se da cuando $k_{qCO} = k_{qCO_2}$. Entonces, igualando las Ecs. (3.111) (signo positivo) y (3.113), y despejando a A_q se obtiene el valor de dicho parámetro que representa el inicio de las oscilaciones en estas condiciones. Así,

$$A_{qk_{qCO}=k_{qCO_2}} = -4(d^3 + 3\beta d^2)(1 + 3\beta) \div \left((d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1))(d^2 - 1 + 2\beta(d - 1)) \right. \\ \left. - (d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1)) \left(\sqrt{d^2 + 2\beta d} + \sqrt{1 + 2\beta} \right)^2 \right). \quad (3.114)$$

De esta forma que el flujo oscilatorio inestable empieza a aparecer para $A_q > A_{qk_{qCO}=k_{qCO_2}}$. Por lo tanto, para valores menores se tiene exclusivamente flujo estacionario. Hay que mencionar que si se desarrolla el denominador de $A_{qk_{qCO}=k_{qCO_2}}$ se obtiene que dicho valor de A_q siempre es positivo.

Cuando $A_q < 0$ el flujo oscilatorio inestable empieza a existir cuando $k_{qCO} = k_{qCO_1}$. Igualando las Ecs. (3.111) (signo negativo) y (3.113), y despejando a A_q obtenemos

$$A_{qk_{qCO}=k_{qCO_1}} = -4(d^3 + 3\beta d^2)(1 + 3\beta) \div \left((d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1))(d^2 - 1 + 2\beta(d - 1)) \right. \\ \left. - (d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1)) \left(\sqrt{d^2 + 2\beta d} - \sqrt{1 + 2\beta} \right)^2 \right). \quad (3.115)$$

Aquí el flujo oscilatorio inestable empieza a aparecer para $|A_q| > |A_{qk_{qCO}=k_{qCO_1}}|$. Para valores menores (igual en valor absoluto), se tiene flujo estacionario. Cuando $d = 1$ la Ec. (3.115) es inválida. Para todos los demás valores de d siempre se cumple que $A_{qk_{qCO}=k_{qCO_1}} < A_{qk_{qCO}=k_{qCO_1}}$, pues se tiene que $A_{qk_{qCO}=k_{qCO_1}}$ es negativo para todos los valores de los parámetros.

La razón de crecimiento puede tener un máximo cuando hay flujo oscilatorio. Entonces el máximo analítico puede ser calculado a partir de la parte que se encuentra fuera del radical en la Ec. (3.100). Derivando dicho término con respecto a k_q^2 , igualando a cero y resolviendo para k_q^2 se obtiene el número de onda correspondiente al máximo crecimiento para el flujo oscilatorio. Este es

$$k_{qOmax}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1) - A_q(d^2 - 1 + 2\beta(d - 1))}{d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1)} \right]. \quad (3.116)$$

Hay que notar que la ecuación anterior nos permite establecer una relación entre el número de onda que corresponde al máximo crecimiento y el número de onda correspondiente al crecimiento nulo, ambos en presencia de flujo oscilatorio. Esto es $k_{qCO}^2 = 2k_{qOmax}^2$. De esta forma, el valor de A_q para el cual comienzan a existir k_{qCO} y k_{qmax} es el mismo. En el contexto de las rectas de k_q^2 vs A_q , las abscisas al origen de dichas rectas son la misma.

Al sustituir el resultado de la Ec. (3.116) en los términos correspondientes a la razón de crecimiento cuando hay flujo oscilatorio en la Ec. (3.100) se obtiene la razón de crecimiento máxima, que es

$$\Gamma_{qOmax} = \frac{1}{8(d^3 + 1 + 3\beta(d^2 + 1))} \left[d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1) - A_q(d^2 - 1 + 2\beta(d - 1)) \right]^2. \quad (3.117)$$

Hay un valor de A_q para el cual todo el flujo oscilatorio es estable. Este valor de A_q se obtiene al hacer la razón de máximo crecimiento igual a cero. Esto es:

$$A_{qk_{qOmax}} = \frac{d^3 - 1 + 3\beta(d^2 - 1)}{d^2 - 1 + 2\beta(d - 1)}. \quad (3.118)$$

Cuando A_q tiende al valor presentado en la ecuación anterior, el número de onda correspondiente al máximo crecimiento tiende a cero. Además, por lo mencionado anteriormente, este valor también corresponde a aquel en el cual la Ec. (3.113) empieza a ocurrir y por tanto representa la transición de flujo oscilatorio inestable a estable. Entonces, cuando se tiene que $d < 1$ el flujo es inestable para $A_q > A_{qk_{qOmax}}$. Por otro lado, cuando $d > 1$ el flujo es inestable para $A_q < A_{qk_{qOmax}}$. Para $d = 1$ la Ec. (3.118) es inválida. Para todos los demás valores de d se cumple que $A_{qk_{qCO2}} < A_{qk_{qOmax}} < A_{qk_{qCO1}}$ para cualquier valor de los parámetros.

Nótese que los resultados se ponen en términos de A_q porque éste representa los efectos del número de Marangoni. De esta manera es posible dar los intervalos de A_q en los cuales las dos soluciones presentan flujo estacionario u oscilatorio. Estos intervalos en los cuales el sistema presenta o no convección en función de los valores de A_q fueron demostrados por Dávalos-Orozco en [19] y en el presente trabajo dichas inecuaciones se siguen cumpliendo para un mismo deslizamiento en ambas caras de la pared. Al incluir el deslizamiento no se está afectando la dependencia de Ω_q respecto a k_q , pues el deslizamiento se hace presente como una corrección a los coeficientes, pero la forma funcional de las diferentes A_q si cambia.

Es así que cuando $d < 1$ y $A_q > 0$ se tiene que

$$A_q < A_{qk_{qCO2}} \quad \text{Sólo flujo estacionario, estable,} \quad (3.119)$$

$$A_{qk_{qCO2}} < A_q < A_{qk_{qOmax}} \quad \text{Sólo flujo oscilatorio, estable,} \quad (3.120)$$

$$A_{qk_{qOmax}} < A_q < A_{qk_{qCO1}} \quad \text{Sólo flujo oscilatorio, inestable,} \quad (3.121)$$

$$A_{qk_{qCO1}} < A_q \quad \text{Flujos estacionario y oscilatorio, inestable.} \quad (3.122)$$

Cuando $d > 1$ y $A_q > 0$ se tiene

$$A_q < A_{qk_{qCO=k_qCO2}} \quad \text{Sólo flujo estacionario, inestable,} \quad (3.123)$$

$$A_{qk_{qCO=k_qCO2}} < A_q < A_{qk_{qCO2}} \quad \text{Flujos estacionario y oscilatorio, inestable,} \quad (3.124)$$

$$A_{qk_{qCO2}} < A_q < A_{qk_{qOmax}} \quad \text{Sólo flujo oscilatorio, inestable,} \quad (3.125)$$

$$A_{qk_{qOmax}} < A_q < A_{qk_{qCO1}} \quad \text{Sólo flujo oscilatorio, estable,} \quad (3.126)$$

$$A_{qk_{qCO1}} < A_q \quad \text{Sólo flujo estacionario, estable.} \quad (3.127)$$

Cuando $d < 1$ y $A_q < 0$ sólo existe flujo estacionario. Aquí al igual que en [19] el segundo modo de solución siempre es estable para cualquier beta. Además el número de onda crítico estacionario, Ec. (3.109), tiene un mínimo $k_{qCS} = 1$ para toda $d < 1$ cuando $A_q = 0$.

Por último, cuando $d > 1$ y $A_q < 0$. De la Ec. (3.115) se tiene

$$|A_q| < |A_{qk_{qCO=k_qCO1}}| \quad \text{Sólo flujo estacionario, inestable,} \quad (3.128)$$

$$|A_q| > |A_{qk_{qCO=k_qCO1}}| \quad \text{Flujos estacionario y oscilatorio, inestable.} \quad (3.129)$$

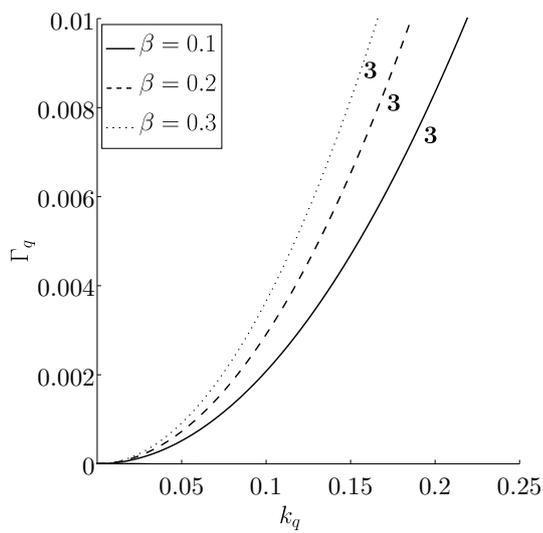
En este último caso también se presenta un mínimo $k_{qCS} = 1$ cuando $A_q = 0$ (para todo $d > 1$).

Con estos resultados podemos continuar haciendo el análisis numérico. Este se realiza graficando la Ec. (3.100) respecto al número de onda definiendo valores fijos de los demás parámetros. Más en específico, se grafica la parte real e imaginaria de Ω_q . Así, en las figuras podrán mostrarse por separado a la razón de crecimiento ($\Gamma_q = \text{Re}\{\Omega_q\}$) y la frecuencia de oscilación ($\omega_q = \text{Im}\{\Omega_q\}$). Por tanto en las figuras se presentan cuatro juegos de curvas, pues se tienen dos soluciones, cada una con su respectiva razón de crecimiento y frecuencia de oscilación. Para los parámetros se retomarán los valores de d y A_q que utilizó Dávalos-Orozco [19]. En estos, Dávalos-Orozco demostró que dichos valores utilizados describen de forma correcta las variaciones con d y A_q sobre el sistema sin deslizamiento. Entonces, es de entenderse que en el presente trabajo nos apropiemos de dichos valores de d y A_q , y sobre ellos veamos el efecto que tiene el incremento del deslizamiento en ambos lados de la pared. Los cambios de d se hacen alrededor de uno, mientras que los de A_q son alrededor de cero. De esta forma, habremos de graficar 4 casos: (1) $d < 1$ y $A_q > 0$; (2) $d < 1$ y $A_q < 0$; (3) $d > 1$ y $A_q > 0$; y (4) $d > 1$ y $A_q < 0$. Se asignan valores de 0.1, 0.2 y 0.3 a β y se grafican respectivamente con líneas sólidas, discontinuas y punteadas.

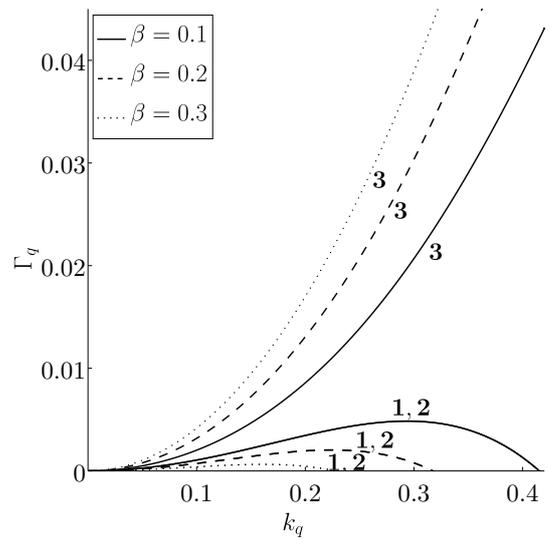
Para realizar las representaciones gráficas se utilizó la paquetería de software Wolfram Mathematica 13.0 Student Edition. En todas las gráficas se utilizan números 1, 2 y 3 en negritas para indicar la solución a la cual corresponden las curvas. De esta manera **1** es la Γ_q de la primera solución, **2** es la Γ_q de la segunda solución y **3** indica que la curva corresponde a ω_q de la primera solución. La frecuencia de oscilación de la segunda solución es negativa y de igual magnitud que la de la primera solución. Esto se da por entendido y no se indican ni grafican las curvas correspondientes a la frecuencia de oscilación del modo 2, ni ninguna curva que corresponda a un estado estable ($\Gamma_q < 0$). También hay que tener en cuenta el dominio que va a tomar el número de onda, pues en la aproximación a número de onda pequeño se tiene que $0 < k < 0.5$. En nuestro caso el número de onda está escalado con la raíz del número de Bond y puede tomar valores mayores a 0.5. Al despejar el número de onda original se debe ajustar a valores menores a 0.5 después de dar un valor de Bo .

En la Fig. 3.1 se muestran las gráficas correspondientes al caso $d < 1$ y $A_q > 0$. Las primeras tres gráficas, Figs. 3.1a-3.1c, se hacen para un valor pequeño de d y haciendo pequeñas variaciones de A_q . Las demás figuras, Figs. 3.1d-3.1f, se hacen para un valor de d más cercano a la unidad con variaciones de A_q con un orden de magnitud mayor. Para la capa de líquido en la cara inferior de la pared cuando d incrementa se promueve la aparición de una inestabilidad conocida como la inestabilidad de Rayleigh-Taylor (R-T). Esta inestabilidad se da debido a la posición relativa entre el fluido 1 y su atmósfera (ver Fig. 2.1). Esto es, un fluido más denso (en nuestro caso un líquido) sobre uno menos denso (la atmósfera es gaseosa). Así, la perturbación en la superficie libre del fluido 1 tiene tendencia a crecer (hay una mayor distorsión en la superficie libre) conforme se aumenta d , lo cual corresponde a incrementar la cantidad de líquido en la cara inferior de la pared. Aquí observamos que los incrementos de la razón de crecimiento y de la frecuencia de oscilación debidos a la inestabilidad R-T se amortiguan con el deslizamiento, aunque la medida en que el deslizamiento mitiga la aparición de R-T disminuye al aumentar del valor de d .

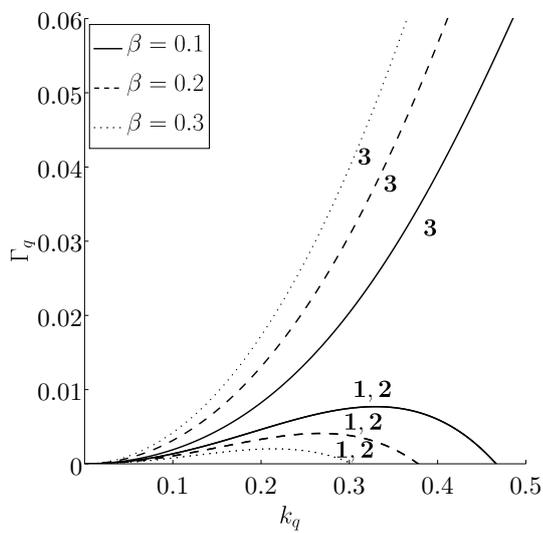
En las Figs. 3.1a-3.1e se tiene sólo flujo oscilatorio. La Fig. 3.1a cumple con la Ec. (3.119) y sólo se presenta flujo oscilatorio estable para los tres valores de β . Las Figs. 3.1b-3.1d cumplen con la Ec. (3.120) y presentan sólo convección oscilatoria para los valores de deslizamiento.



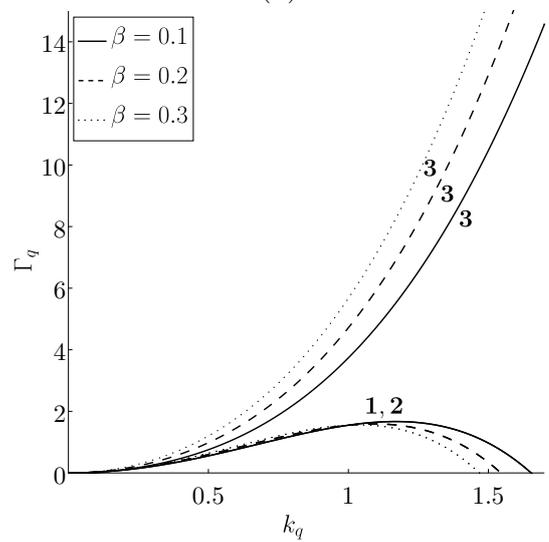
(a)



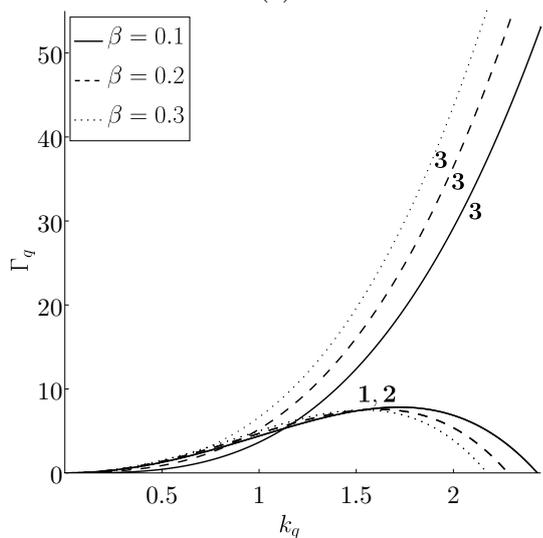
(b)



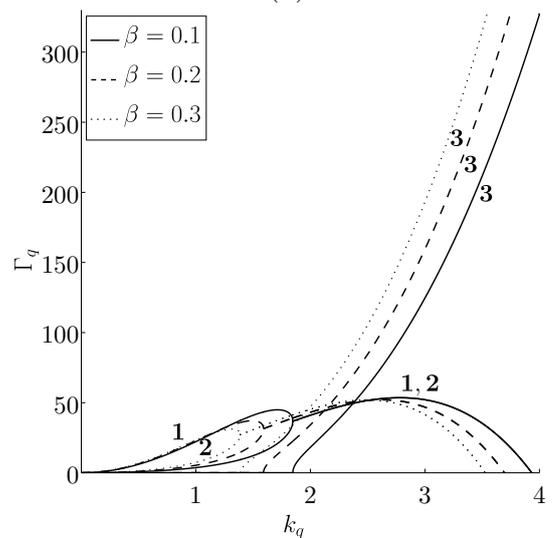
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 3.1: Γ_q vs. k_q . $d < 1$. $A_q > 0$. $d = 0.1$: Fig. 3.1a: $A_q = 1.1$, Fig. 3.1b: $A_q = 1.3$, Fig. 3.1c: $A_q = 1.35$. $d = 0.7$: Fig. 3.1d: $A_q = 10$, Fig. 3.1e: $A_q = 20$, Fig. 3.1f: $A_q = 50$. **1**: Γ_q de la primera solución, **2**: Γ_q de la segunda solución, **3**: ω_q de la primera solución (la frecuencia de oscilación de la segunda solución es negativa y de igual magnitud).

En la Fig. 3.1e el caso con deslizamiento $\beta = 0.1$ presenta tanto convección estacionaria como oscilatoria, pues cumple con la Ec. (3.122). Esto último no es visible en la Fig. 3.1e, por este motivo en la Fig. 3.2a se presenta una ampliación donde se puede observar el comportamiento antes descrito para dicho valor de deslizamiento. Por su parte, para los valores de beta de 0.2 y 0.3 se cumple la Ec. (3.121) y, por tanto, tiene sólo convección oscilatoria. En la Fig. 3.1f se puede observar convección estacionaria y oscilatoria, esto porque dicha figura cumple con la Ec. (3.122).

En [19] sólo dos figuras muestran únicamente flujo oscilatorio, para todas las demás existen números de onda en los cuales hay convección estacionaria. En este sentido el deslizamiento parece actuar como inhibidor del flujo estacionario. Además, notar que el aumento de la longitud de deslizamiento tiende a estabilizar las curvas de Γ_q . Esto es claramente notable en la Fig. 3.1a pues, a diferencia de [19], aquí toda la convección oscilatoria es estable. Aparte, observamos que las curvas con la beta más grande son aquellas que tienen la mayor frecuencia de oscilación y la menor razón de crecimiento. Esto se mantiene en las Figs. 3.1b y 3.1c. En la Fig. 3.1d observamos que la distancia entre las curvas oscilatorias inestables, para las distintas betas, se acorta, haciendo así que las curvas de $\Gamma_q > 0$ se intersecten entre si. Después de dicha intersección el orden de las curvas se invierte. Esto hace que las curvas con mayor longitud de deslizamiento presenten un k_{qCO} , Ec. (3.113), menor que aquellas con una menor longitud de deslizamiento. En la Fig. 3.1f hay que notar que se tienen dos inversiones en el orden de las curvas respecto a beta. Se presenta una inversión en cada modo de inestabilidad. Para la parte correspondiente al flujo oscilatorio inestable la inversión del orden de las curvas se da como aquella comentada anteriormente para la Fig. 3.1d. La sección de la Fig. 3.1f en la que hay convección estacionaria posee una inversión para la primera solución antes de pasar al modo oscilatorio. Esto se puede observar con mayor claridad en la Fig. 3.2b que es una ampliación de ésta zona en la que hay flujo estacionario inestable. La inversión es tal que las curvas con mayor deslizamiento pasan de tener una mayor razón de crecimiento a una menor que aquellas con un deslizamiento más pequeño, las cuales después de la inversión poseen una razón de crecimiento más grande. $A_q > 0$ representa físicamente que la capa inferior está siendo calentada desde su atmósfera y enfriada desde la pared. En este caso la capa superior se encuentra en una configuración que es térmicamente inestable, mientras que la capa inferior se estabiliza y por lo tanto se tiene la posibilidad de estabilizar R-T.

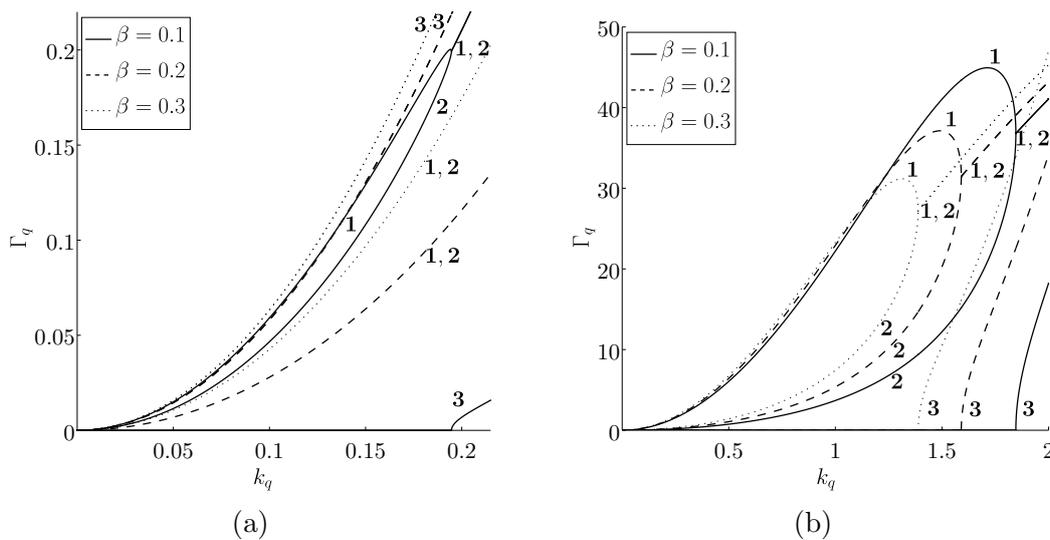


Figura 3.2: Acercamientos. Fig. 3.2a: Acercamiento para la Fig. 3.1e, Fig. 3.2b:Acercamiento para la Fig. 3.1f.

En la Fig. 3.3 se muestran las curvas correspondientes al caso $d < 1$ y $A_q < 0$. Se consideran tres casos en los que se mantiene un valor fijo de $A_q < 0$, mientras se varía $d < 1$. Aquí, al igual que [19], se presenta únicamente convección estacionaria para cualquier magnitud de $|A_q|$. Esto se debe a que, bajo estas condiciones, el radicando de la Ec. (3.100) siempre es positivo y como se comentó antes los números de onda críticos de las Ecs. (3.111), (3.113) y (3.116) no existen. Aquí el punto crítico en el cual el flujo deja de ser inestable está dado por k_{qCS} , Ec. (3.109). Sólo la primera solución es inestable. Antes de volverse estable el orden de las curvas se invierte haciendo que, para betas mayores, el punto crítico se presente a un menor número de onda en comparación al caso de beta más pequeña. Además, observamos que en este caso los incrementos de la longitud de deslizamiento implican un aumento en el máximo crecimiento. Entonces, aquí el aumento del deslizamiento promueve la aparición de la inestabilidad de R-T. Aparte, se tiene que con $A_q < 0$, la capa inferior está siendo enfriada desde su atmósfera, lo cual la desestabiliza en forma termocapilar.

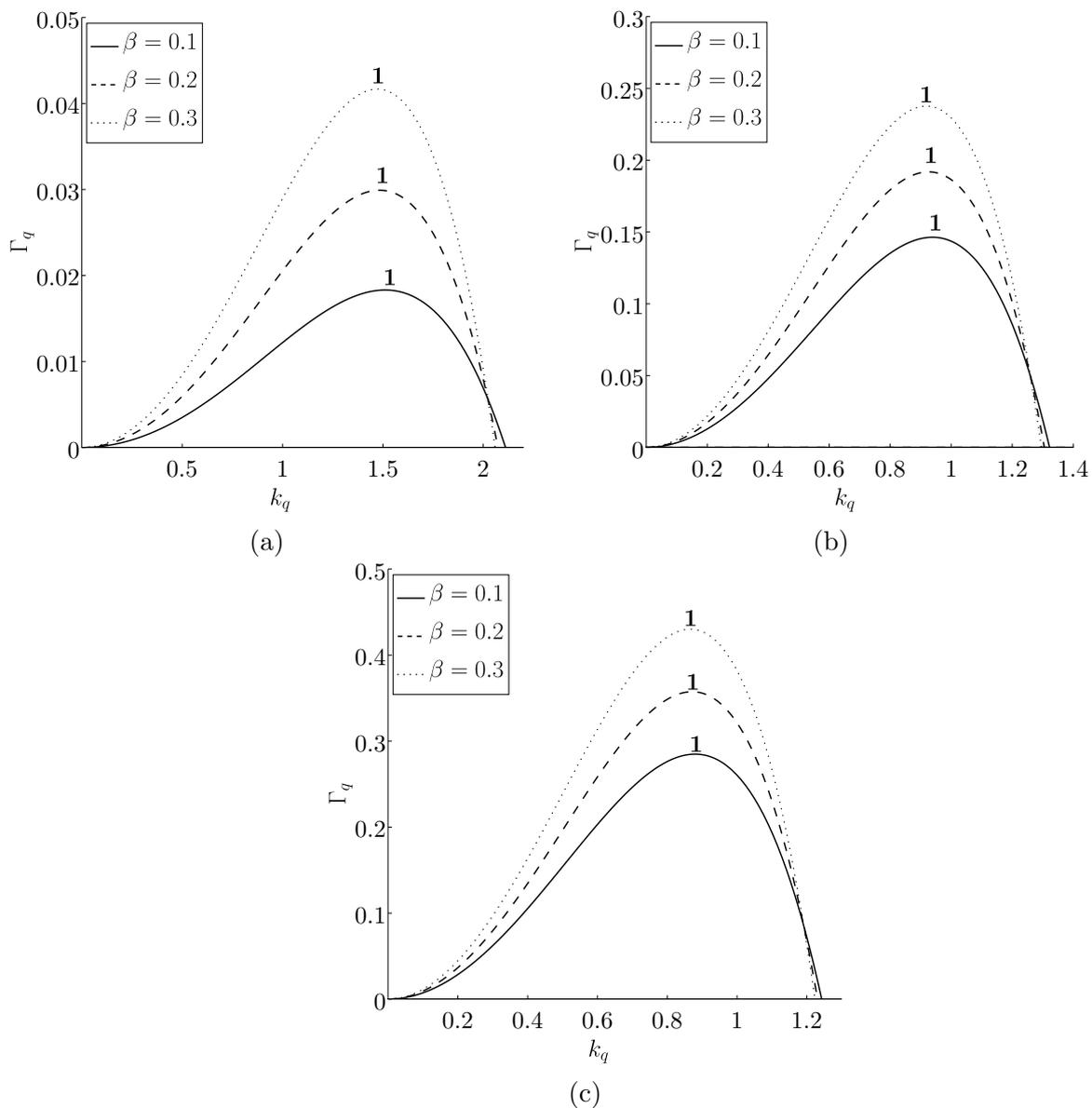
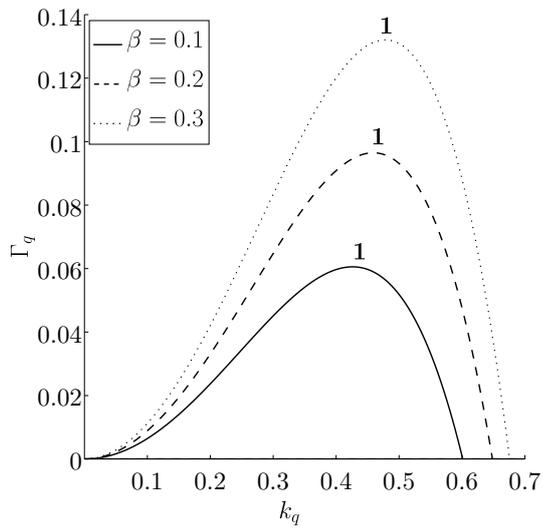
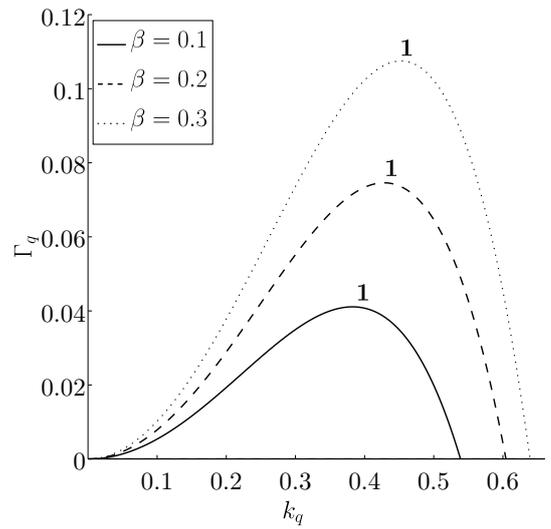


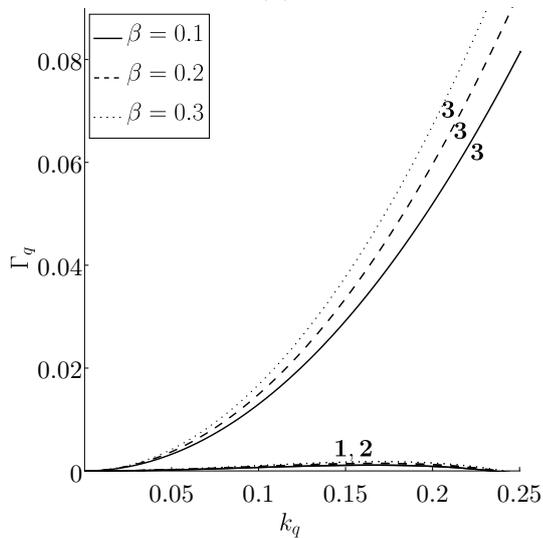
Figura 3.3: Γ_q vs. k_q . $d < 1$. $A_q < 0$. Sólo convección estacionaria para cualquier magnitud de $|A_q|$. $A_q = -0.5$: Fig. 3.3a: $d = 0.1$, Fig. 3.3b: $d = 0.5$, Fig. 3.3c: $d = 0.7$. **1**: Γ_q de la primera solución, **2**: Γ_q de la segunda solución.



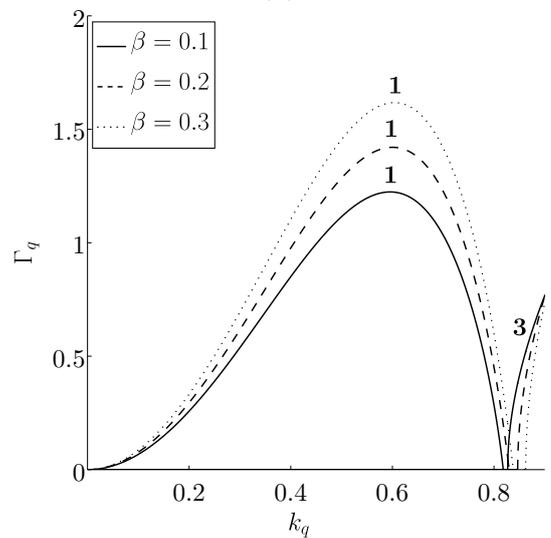
(a)



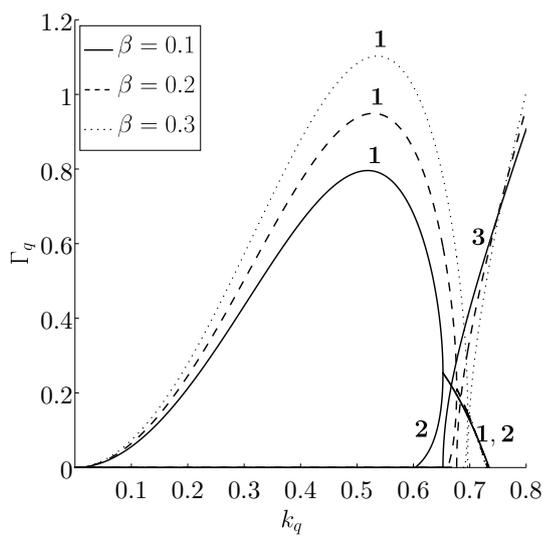
(b)



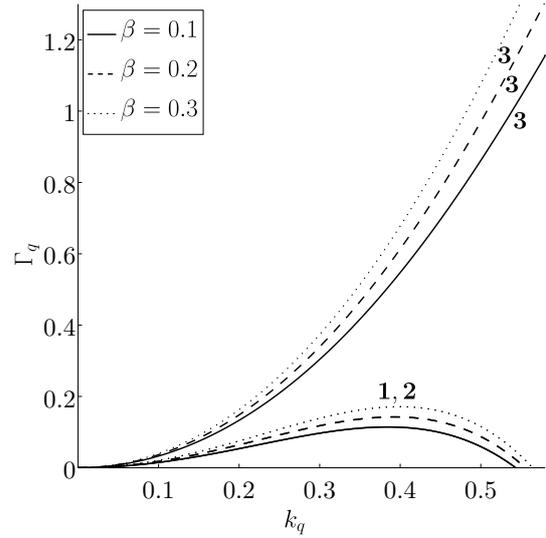
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 3.4: Γ_q vs. k_q . $d > 1$. $A_q > 0$. $d = 1.1$: Fig. 3.4a: $A_q = 0.5$, Fig. 3.4b: $A_q = 0.525$, Fig. 3.4c: $A_q = 1$. $d = 2$: Fig. 3.4d: $A_q = 0.5$, Fig. 3.4e: $A_q = 0.7$, Fig. 3.4f: $A_q = 1.5$. **1**: Γ_q de la primera solución, **2**: Γ_q de la segunda solución, **3**: ω_q de la primera solución (la frecuencia de oscilación de la segunda solución es negativa y de igual magnitud).

En la Fig. 3.4 se presentan las curvas que corresponden al caso con $d > 1$ y $A_q > 0$. Las tres primeras figuras se hacen para un valor de d poco mayor que uno, mientras que en las otras se aumenta hasta un valor de 2, lo que incrementa considerablemente la posibilidad de que se presente R-T. Como A_q es positivo aquí también se presenta la posibilidad de estabilizar R-T. En las Figs. 3.4a y 3.4b se observa un efecto desestabilizador por parte del deslizamiento, pues la razón de crecimiento máxima de la curva estacionaria $\Gamma_q > 0$ correspondiente a la primera solución incrementa con beta. Por otro lado, beta tiene un efecto estabilizador en la segunda solución para las curvas estacionarias, esto se observa en la Fig. 3.4e. En las primeras dos figuras (Figs. 3.4a y 3.4b) se cumple la Ec. (3.123) y como se observa sólo hay convección estacionaria para todos los valores de deslizamiento. En la Fig. 3.4c se tiene únicamente flujo oscilatorio, pues cumple con la Ec. (3.125) en los tres casos de beta. Durante todo el flujo oscilatorio ambas soluciones presentan convección oscilatoria. Aquí, aumentar beta conlleva un incremento del máximo crecimiento de las curvas oscilatorias. Para la Fig. 3.4d se cumple la Ec. (3.123) y se muestra solamente convección estacionaria para los diferentes deslizamientos. La Fig. 3.4e cumple con la Ec. (3.124) y como se observa se tienen los dos modos de convección (estacionario y oscilatorio). En este caso también hay un punto en el cual se invierte el orden de las curvas para cada beta, pero este se encuentra únicamente en la zona correspondiente al flujo oscilatorio. Además de esto en la figura se observa una inversión en las curvas correspondientes a la frecuencia de oscilación de la primera solución. Esto provoca que antes de la inversión a menor deslizamiento hay mayor frecuencia de oscilación, mientras que después de la inversión a mayor deslizamiento se tienen mayores frecuencias de oscilación. Observamos que una vez se combinaron los modos de solución, poco antes de que el flujo oscilatorio sea estable el orden de las curvas cambia, así para mayores longitudes de deslizamiento se tienen valores menores de k_{qOmax} , aunque estos no cambian demasiado. Esto se puede apreciar mejor en la Fig. 3.5, que corresponde a una ampliación de la Fig. 3.4e. Por último, la Fig. 3.4f cumple con la Ec. (3.125), sólo se presenta convección oscilatoria y los cambios en beta influyen igual que como se comentó con la Fig. 3.4c.

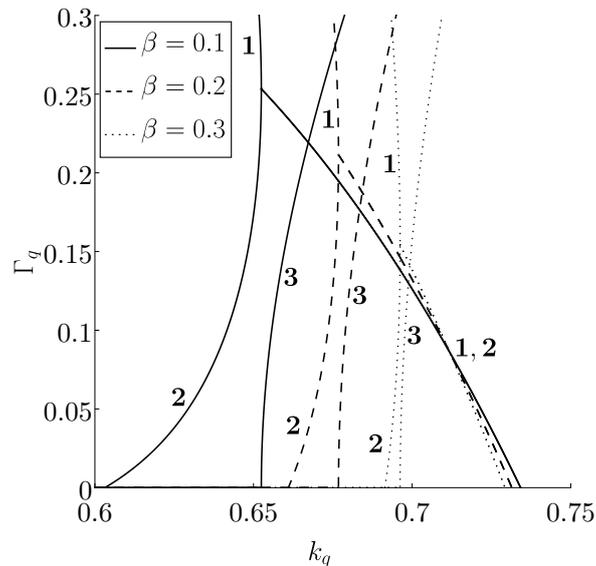


Figura 3.5: Acercamiento a la Fig. 3.4e.

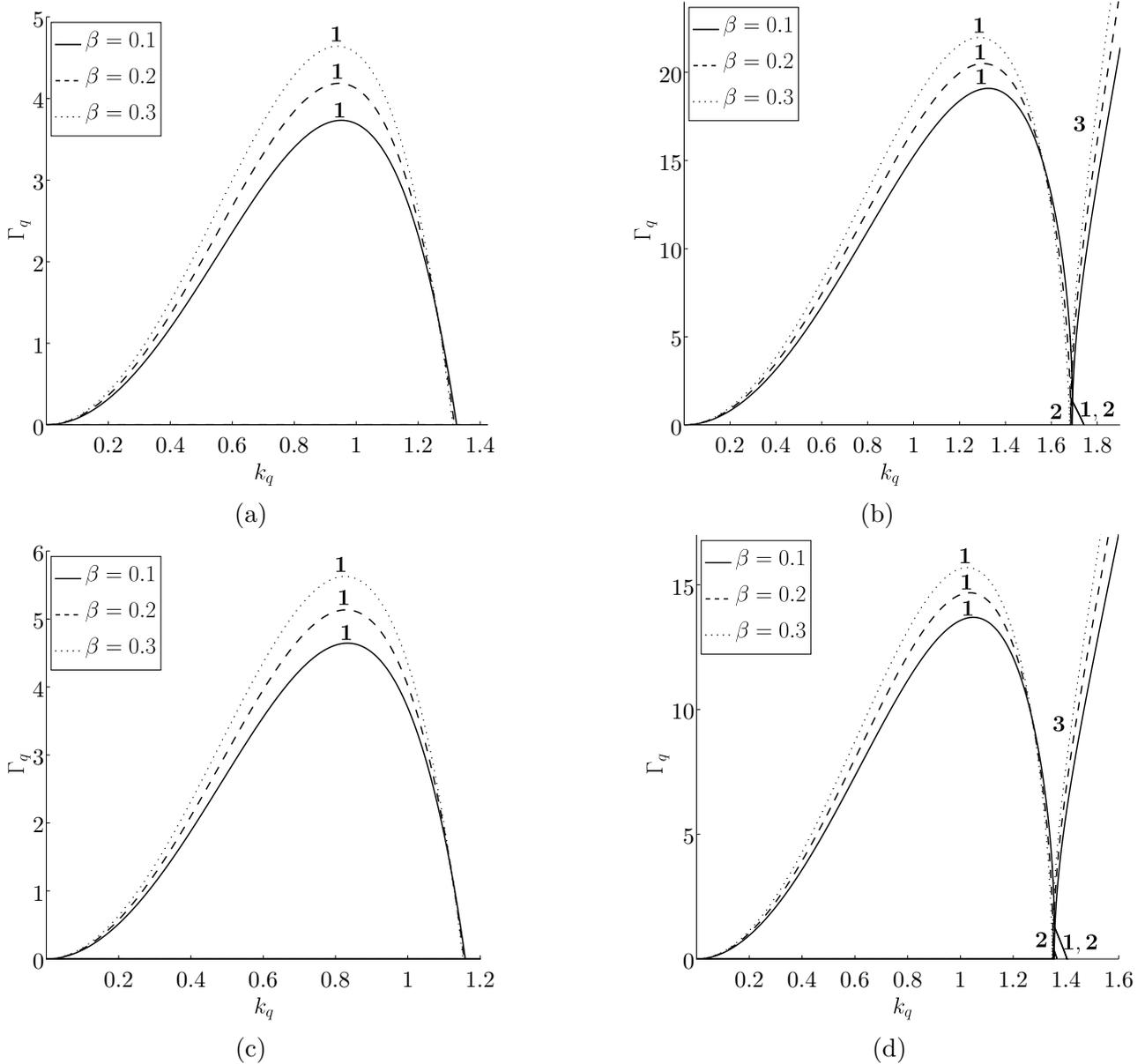


Figura 3.6: Γ_q vs. k_q . $d > 1$. $A_q < 0$. $d = 1.5$: Fig. 3.6a: $A_q = -2$, Fig. 3.6b: $A_q = -10$. $d = 2$: Fig. 3.6c: $A_q = -1$, Fig. 3.6d: $A_q = -4$. **1**: Γ_q de la primera solución, **2**: Γ_q de la segunda solución, **3**: ω_q de la primera solución (la frecuencia de oscilación de la segunda solución es negativa y de igual magnitud).

En Fig. 3.6 se encuentran las gráficas correspondientes al caso con $d > 1$ y $A_q < 0$. Se muestran cuatro gráficas, las primeras dos se hacen para $d = 1.5$ y las dos restantes para $d = 2$. En la Fig. 3.6a sólo hay convección estacionaria, pues se cumple la Ec. (3.128). Observamos que las curvas de la razón de crecimiento poseen inversiones en su orden. Aquí, el incremento de beta hace que crezca la razón de crecimiento para que después de invertirse los incrementos en el deslizamiento estabilicen la perturbación, como en la Fig. 3.3. Esto sólo ocurre para la primera solución. La segunda solución se estabiliza conforme se aumenta beta. Esto último evita la aparición de flujo oscilatorio, pues el punto en que se combinan las dos soluciones para cambiar al modo oscilatorio también se estabiliza. Esto se puede apreciar en la Fig. 3.6b, pues para $\beta = 0.1$ se logra tener flujo estacionario y oscilatorio, cumpliendo con la Ec. (3.129). Esto no sucede igual para $\beta = 0.2$ y $\beta = 0.3$, pues para estos valores de beta se cumple la Ec.

(3.128), con lo que se tiene sólo flujo estacionario. En la Fig. 3.7a se muestra un acercamiento a la zona en donde se presenta la convección oscilatoria, verificando que sólo para $\beta = 0.1$ se presentan ambos modos de inestabilidad. En las Figs. 3.6c y 3.6d ocurre algo parecido a lo que sucedió con las primeras dos figuras. En la Fig. 3.6c sólo hay convección estacionaria y se presenta una inversión en el orden de las curvas como en la Fig. 3.6a. La Fig. 3.6d presenta convección oscilatoria para dos valores de beta ($\beta = 0.1$ y $\beta = 0.2$) con lo cual cumplen con la Ec. (3.129), mientras que para $\beta = 0.3$ se tiene sólo convección estacionaria y se cumple la Ec. (3.128). La Fig. 3.7b muestra una ampliación de la Fig. 3.6d en la zona con las curvas oscilatorias inestables. De esta forma se puede ver fácilmente lo antes discutido. Aquí las curvas oscilatorias no presentan punto de inversión en su orden, como pasó en casos anteriores.

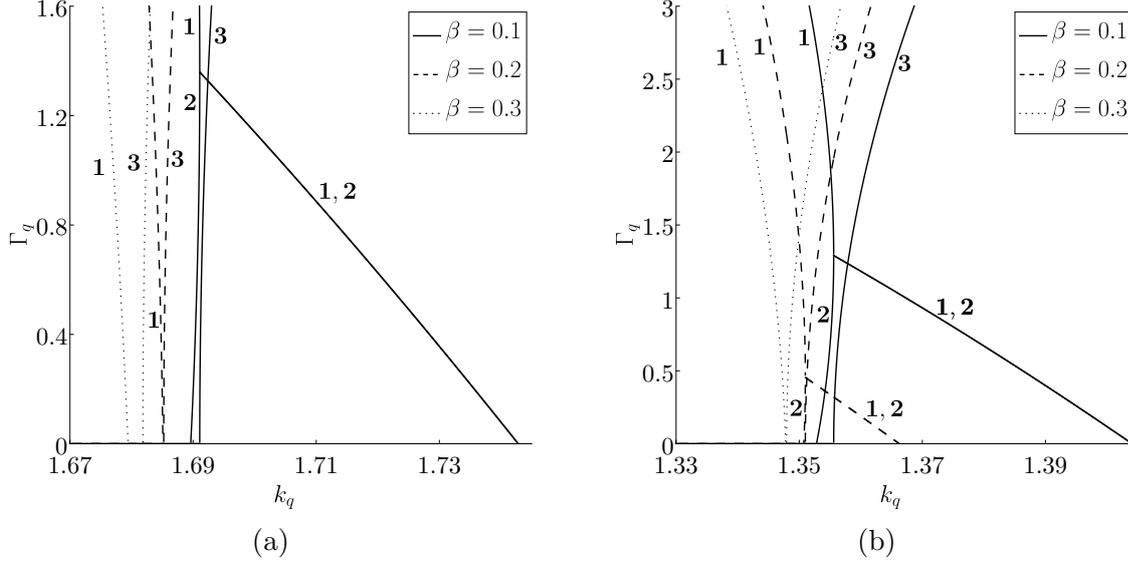


Figura 3.7: Acercamientos. Fig. 3.7a: Acercamiento para la Fig. 3.6b, Fig. 3.7b: Acercamiento para la Fig. 3.6d.

3.4.2. Una capa de líquido

Con el objeto de entender cual es el efecto que puede causar el deslizamiento sobre la pared se calcula el valor del máximo crecimiento para una sola capa de fluido en la parte superior de la pared, Sánchez-Barrera [34] (2022). Podemos obtener la ecuación para una sola capa a partir del sistema de ecuaciones resultante de aplicar los modos normales a las ecuaciones de evolución linealizadas, Ecs. (3.88) y (3.89). Si sólo está la capa superior la Ec. (3.89) se convierte en una identidad ($0 = 0$) y en la Ec. (3.88) se hace $B = 0$. De lo que obtiene que

$$\frac{\Omega}{k^2} + \frac{S}{3} (1 + 3\beta) (k^2 + Bo) - \frac{MaBi}{2den_L^2} (1 + 2\beta) = 0. \quad (3.130)$$

Para reducir el número de parámetros podemos aplicar los escalamientos dados en la Ec. (3.93). Además, vemos que no existe parte imaginaria en la solución, por lo que no hay frecuencia de oscilación ($\omega_q = 0$) y sólo hay razón de crecimiento de la perturbación. Esto es

$$\Gamma_q = k_q^2 [A_q (1 + 2\beta) - (1 + 3\beta) (k_q^2 + 1)]. \quad (3.131)$$

Como no hay frecuencia de oscilación todo el flujo que puede existir es estacionario. El número de onda crítico para el cual $\Omega_q = \Gamma_q = 0$ (situación marginal) nos indica la intersección

de las curvas de Γ_q con el eje de las k_q . Haciendo Γ_q igual a cero y resolviendo para el número de onda se encuentra que una de las raíces es cero, mientras que la otra es

$$k_{qS}^2 = A_q \frac{1 + 2\beta}{1 + 3\beta} - 1, \quad (3.132)$$

que es el número de onda crítico para el caso estacionario. Hay que observar que en el caso sin deslizamiento si $A_q = 1$ entonces $k_{qS}^2 = 0$.

Se calcula fácilmente el número de onda correspondiente al máximo crecimiento tomando la derivada con respecto a k_q^2 de la Ec. (3.131), igualando a cero y resolviendo para k_q^2 , se obtiene que

$$k_{qmax}^2 = \frac{1}{2} \left(A_q \frac{1 + 2\beta}{1 + 3\beta} - 1 \right). \quad (3.133)$$

La razón de crecimiento máxima se obtiene sustituyendo k_q^2 por k_{qmax}^2 en la Ec. (3.131). De esto se tiene que

$$\Gamma_{qmax} = k_{qmax}^2 \left[A_q (1 + 2\beta) - (1 + 3\beta) (k_{qmax}^2 + 1) \right]. \quad (3.134)$$

Aplicando la definición de k_{qmax}^2 , Ec. (3.133), la razón de crecimiento máximo se reduce a

$$4 \frac{1 + 3\beta}{(1 + 2\beta)^2} \Gamma_{qmax} = \left(A_q - \frac{1 + 3\beta}{1 + 2\beta} \right)^2. \quad (3.135)$$

Podemos observar que se tiene una parábola con respecto a A_q que tiene vértice en $((1 + 3\beta)/(1 + 2\beta), 0)$. Además de afectar la posición del vértice, el valor de β determina la concavidad de la parábola. La longitud del lado recto de la parábola es $4(1 + 3\beta)/(1 + 2\beta)^2$. De aquí puede apreciarse que conforme aumenta la longitud de deslizamiento adimensional la longitud del lado recto de la parábola tiende a cero. Como $\beta > 0$ se tiene una parábola concava hacia arriba, por lo que la razón de crecimiento máxima es positiva y crece más rápido para el mismo valor de A_q conforme β aumenta.

La Ec. (3.135) se grafica como se muestra en la Fig. 3.8. Se puede apreciar que el deslizamiento efectivamente altera la longitud del lado recto de la parábola y desplaza en cierta medida el vértice a la derecha de su posición original. Se observa que cuando no hay deslizamiento la parábola tiene vértice en $(1, 0)$, mientras que en el caso en que el deslizamiento tiende a infinito el vértice se encuentra en $(1.5, 0)$. Por lo tanto, los valores de A_q posibles en los que Γ_{qmax} puede ser cero están acotados al intervalo $1 \geq A_q \geq 1.5$ para $\beta > 0$. La intersección con el eje vertical se da en el punto $(0, (1 + 3\beta)/4)$. Es decir, cuando A_q es nulo la razón de crecimiento máxima toma valores que corresponden a $(1 + 3\beta)/4$. También, hay que notar que al aumentar el valor de β se tiene intersecciones entre las curvas, por lo cual hay valores de A_q para los cuales la razón de crecimiento máxima para dos valores distintos de deslizamiento es la misma.

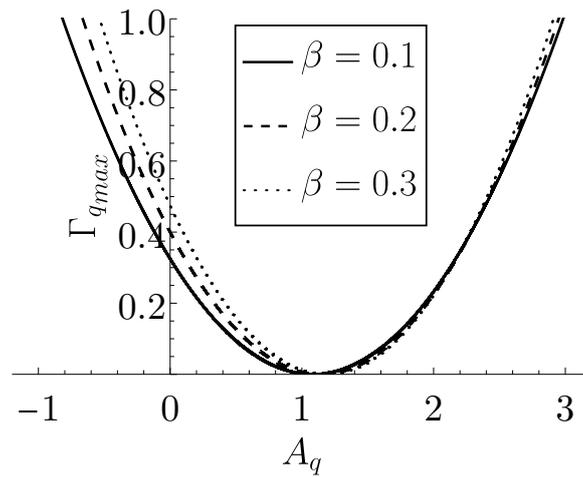


Figura 3.8: Γ_{qmax} vs. A_q . Curvas para distintos valores de β , Sánchez-Barrera [34].

En la figura anterior hay que notar que moviéndose del vértice a la derecha (aumentando A_q) el orden de las curvas para los distintos valores de beta se invierte dos veces. Lo que nos indica que hay valores mayores de beta para los cuales se tiene una razón de crecimiento máxima menor. Esto, que es para una sola capa, podría explicar las inversiones en las curvas calculadas para el caso de dos capas acopladas.

Capítulo 4

Conclusiones

Se estudió la inestabilidad lineal de Benard-Marangoni en un sistema de dos capas delgadas acopladas térmicamente mediante una pared sólida e impermeable con espesor y conductividad finitos. La orientación del sistema es tal que la pared es perpendicular a la gravedad. Así, se tiene un sistema que en conjunto presenta dos superficies libres deformables. De esta forma, debido a la configuración, se obtiene que para la capa de líquido inferior se puede presentar la inestabilidad de Rayleigh-Taylor. Se consideró que las fronteras sólido-líquido presentaban deslizamiento y se utilizó la condición de deslizamiento de Navier para modelar dicho comportamiento. Las ecuaciones gobernantes del sistema y sus condiciones de frontera se adimensionalizaron haciendo uso de los parámetros del fluido 2 y se escalaron con el parámetro pequeño ε . Bajo la suposición de que el estado básico corresponde al hidrostático, se expanden las variables en series asintóticas y se resuelve para los primeros términos no nulos de las mismas. Luego, aplicando los resultados encontrados a la condición cinemática de la superficie libre, se derivaron las ecuaciones no lineales de evolución de la perturbación de la deformación superficial para ambas capas de líquido. Dichas ecuaciones se linealizan y se aplican modos normales para su solución.

Al igual que en Dávalos-Orozco [19] (2019) aquí fue posible reducir el número de parámetros del sistema considerando que los líquidos que están mojando las caras de la pared son el mismo y que la longitud de deslizamiento que se presenta en ambas caras también es la misma. Además, se realizó un escalamiento de los parámetros y variables haciendo uso del número de Bond (Ecs. (3.93) y (3.94)). Los parámetros de los que dependió el sistema fueron A_q , d y β , representando respectivamente los efectos del número de Marangoni, el espesor relativo de las capas de fluido y la longitud de deslizamiento presente en las fronteras sólido-líquido. Como en [19] la estabilidad lineal fue descrita con una ecuación cuadrática para la razón de crecimiento escalada Γ_q respecto al número de onda escalado k_q . Se demostró que existe una equivalencia entre los dos casos posibles para el número de Bond (positivo y negativo) al variar de forma correcta los valores de d . En particular se recuperaron las equivalencias dadas en [19] y se encontró que se siguen cumpliendo para el intervalo considerado de los valores de deslizamiento ($0 < \beta < 1$). De esta manera, se mostró que es suficiente tomar $Bo > 0$ para describir la estabilidad del sistema completo.

Las dos soluciones de la ecuación cuadrática para la razón de crecimiento se nombraron como la primera solución (signo positivo Ec. (3.100)) y la segunda solución (signo negativo Ec. (3.100)). Estas dos soluciones presentan simultáneamente un modo de inestabilidad oscilatoria dependiendo de los valores en los parámetros. En el caso estacionario el comportamiento de las soluciones es independiente y en casi todos los casos la segunda solución es estable, por lo que no es de interés en este trabajo. Únicamente se analizaron numéricamente aquellos casos en los que $\Gamma_q > 0$, todo lo correspondiente a un estado estable ($\Gamma_q < 0$) no fue de interés. Dependiendo de los valores de los demás parámetros el deslizamiento del líquido sobre las paredes puede tener un efecto estabilizador o desestabilizador sobre el sistema. El valor que tome A_q es determinante en la aparición de los modos de inestabilidad estacionario y oscilatorio. Esto se observó en las gráficas. Para que haya un cambio en las soluciones no basta únicamente con cambiar el orden de magnitud del número de Marangoni escalado, sino que el valor que toma A_q es el que fija el comportamiento del sistema. Los intervalos de valores de A_q para los cuales se presentan los distintos modos de inestabilidad (Ecs. (3.119)-(3.129)) se derivaron de forma analítica y están dados en función de la longitud de deslizamiento adimensional y el espesor relativo del fluido 1.

Se encontró que las curvas para las distintas betas poseen inversiones en su orden, por lo que el aumento en la razón de crecimiento no siempre se da de forma proporcional con beta sino que después del punto en que se da la inversión se puede tener una mayor razón de crecimiento para valores menores de deslizamiento. Además, debido a esto último, el flujo puede volverse estable para un número de onda crítico mayor o menor dependiendo el valor de beta. Los cambios en el orden de las curvas se dan tanto para el modo estacionario como para el modo oscilatorio, pero el que se de o no la inversión en las curvas depende de los valores de d y A_q . Así, encontramos casos en los que un sólo modo de inestabilidad o ambos presentan las inversiones de orden respecto a β . El hecho de que se de un cambio en el orden de las curvas se asocia a lo encontrado por Sánchez-Barrera en [34], pues, como se ve en la Subsec. 3.4.2, el máximo crecimiento en el caso con una sola capa tiene este mismo comportamiento respecto a cambios en el deslizamiento. Entonces, la adición del deslizamiento al problema planteado puede verse como un parámetro de control que puede modular de distintas formas el crecimiento de la perturbación en el sistema dado.

Una extensión al presente trabajo que resulta de interés científico es el caso en que los deslizamientos presentes en cada una de las fronteras sólido-líquido sean diferentes. Esto podría atribuirse a que se aplicaron distintos recubrimientos en la pared en cuestión. Aquí se podría tener que mientras uno de los deslizamientos estabiliza el otro desestabiliza o viceversa. Incluso podría darse el caso en que ambos deslizamientos estabilicen o desestabilicen el sistema. La medida de la respuesta del sistema ante los cambios en cada uno de los deslizamientos debe ser distinta. Esto incrementa la dificultad del análisis teórico y numérico. Es posible que así se tenga un mayor control de la estabilidad del sistema, pudiendo así controlar el modo de inestabilidad que es de interés y su magnitud respecto a la razón de crecimiento y el número de onda.

Bibliografía

- [1] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford-Clarendon Press and New York-Oxford Univ. Press, 1961.
- [2] F. Charru, *Hydrodynamic Instabilities*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 2011.
- [3] P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 2004.
- [4] J. R. A. Pearson, “On convection cells induced by surface tension,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 4, no. 5, p. 489–500, 1958.
- [5] L. G. Leal, *Advanced Transport Phenomena: Fluid Mechanics and Convective Transport Processes*. Cambridge Series in Chemical Engineering, Cambridge University Press, 2007.
- [6] M. Hämäläinen, “Segregation of impurities in molten salts induced by cellular convection and its effect on crystal growth,” *Journal of Crystal Growth*, vol. 2, no. 3, pp. 131–135, 1968.
- [7] J. Berg and A. Acrivos, “The effect of surface active agents on convection cells induced by surface tension,” *Chemical Engineering Science*, vol. 20, pp. 737–745, 1965.
- [8] A. Vidal and A. Acrivos, “Nature of the neutral state in surface-tension driven convection,” *Physics of Fluids*, vol. 9, pp. 615–616, 1966.
- [9] C. L. McTaggart, “Convection driven by concentration- and temperature-dependent surface tension,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 134, p. 301–310, 1983.
- [10] D. Getachew and S. Rosenblat, “Thermocapillary instability of a viscoelastic liquid layer,” *Acta Mechanica*, vol. 55, pp. 137–149, Apr. 1985.
- [11] L. E. Scriven and C. V. Sternling, “On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 19, no. 3, p. 321–340, 1964.
- [12] K. A. Smith, “On convective instability induced by surface-tension gradients,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 24, pp. 401–414, 1966.
- [13] M. Takashima, “Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. i. stationary convection,” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 50, no. 8, pp. 2745–2750, 1981.
- [14] M. Takashima, “Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable free surface. ii. overstability,” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 50, no. 8, pp. 2751–2756, 1981.

- [15] I. K. P.G. Kalitzova-Kurteba, S.G. Slavtchev, “Stationary Marangoni instability in a liquid layer with temperature-dependent viscosity and deformable free surface,” *Microgravity Sci. Technol*, vol. 9, pp. 257–263, 1996.
- [16] Z. Tang, K. Li, and W. Hu, “Influence of free surface curvature of a liquid layer on the critical Marangoni convection,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 51, no. 21, pp. 5102–5107, 2008.
- [17] L. A. Dávalos-Orozco, “Stationary stability of two liquid layers coating both sides of a thick wall under the small Biot numbers approximation,” *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, vol. 5, no. 1, pp. 59–79, 2017.
- [18] L. A. Dávalos-Orozco, “Longwave stability of two liquid layers coating both sides of a thick wall in the absence of gravity,” *Microgravity Science and Technology*, vol. 30, no. 3, pp. 209–228, 2018.
- [19] L. A. Dávalos-Orozco, “Nonlinear longwave stability of two liquid layers coating both sides of a thick wall in presence of gravity,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 116, pp. 107–122, 2019.
- [20] L. A. Dávalos-Orozco, “Linear and nonlinear longwave Marangoni stability of two liquid layers flowing down both sides of a thick vertical wall,” *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, vol. 9, no. 3, pp. 43–66, 2021.
- [21] M. Takashima, “Surface-tension driven convection with boundary slab of finite conductivity,” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 29, no. 2, pp. 531–531, 1970.
- [22] H. Yang, “Boundary effect on the Bénard-Marangoni instability,” *International journal of heat and mass transfer*, vol. 35, no. 10, pp. 2413–2420, 1992.
- [23] A. Oron, R. Deissler, and J. Duh, “Marangoni instability in a liquid sheet,” *Advances in Space Research*, vol. 16, no. 7, pp. 83–86, 1995.
- [24] Q.-F. Fu, L.-J. Yang, M.-X. Tong, and C. Wang, “Absolute and convective instability of a liquid sheet with transverse temperature gradient,” *International journal of heat and fluid flow*, vol. 44, pp. 652–661, 2013.
- [25] I. Catton and V. Lienhard, J. H., “Thermal Stability of Two Fluid Layers Separated by a Solid Interlayer of Finite Thickness and Thermal Conductivity,” *Journal of Heat Transfer*, vol. 106, pp. 605–612, 08 1984.
- [26] V. Lienhard, J. H. and I. Catton, “Heat Transfer Across a Two-Fluid-Layer Region,” *Journal of Heat Transfer*, vol. 108, pp. 198–205, 02 1986.
- [27] C. Neto, D. Evans, E. Bonaccorso, H.-J. Butt, and V. Craig, “Boundary slip in newtonian liquids: A review of experimental studies,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 68, p. 2859, 10 2005.
- [28] M. A. Samaha and M. Gad-el Hak, “Slippery surfaces: A decade of progress,” *Physics of Fluids*, vol. 33, no. 7, p. 071301, 2021.
- [29] G. Kaoullas and G. C. Georgiou, “Newtonian Poiseuille flows with slip and non-zero slip yield stress,” *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 197, pp. 24–30, 2013.

- [30] J. Venkatesan and S. Ganesan, “On the Navier-slip boundary condition for computations of impinging droplets,” in *2015 IEEE 22nd International Conference on High Performance Computing Workshops*, pp. 2–11, 2015.
- [31] E. Lauga, M. Brenner, and H. Stone, *Microfluidics: The No-Slip Boundary Condition*, pp. 1219–1240. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [32] N. V. Burmasheva and E. Y. Prosviryakov, “Unidirectional thermocapillary flows of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 2176, no. 1, p. 030002, 2019.
- [33] N. Burmasheva, V. Privalova, and E. Prosviryakov, “Layered Marangoni convection with the Navier slip condition,” *Sādhanā*, vol. 46, 03 2021.
- [34] I. M. S. Barrera, “Convección termocapilar de una capa delgada de líquido que cubre una pared gruesa con deslizamiento,” Tesis de Maestría en Ciencias Físicas, Posgrado en Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, 2022.
- [35] D. Schäffel, K. Koynov, D. Vollmer, H.-J. Butt, and C. Schönecker, “Local flow field and slip length of superhydrophobic surfaces,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 134501, Mar 2016.
- [36] J. Serrin, *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, pp. 125–263. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1959.
- [37] A. T. Tran, H. L. Quang, Q. C. He, and D.-H. Nguyen, “Mathematical modeling and numerical computation of the effective interfacial conditions for Stokes flow on an arbitrarily rough solid surface,” *Applied Mathematics and Mechanics-english Edition*, vol. 42, pp. 721–746, 2021.
- [38] D. J. Benney, “Long waves on liquid films,” *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 45, no. 1-4, pp. 150–155, 1966.
- [39] A. Oron, S. H. Davis, and S. G. Bankoff, “Long-scale evolution of thin liquid films,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 69, pp. 931–980, Jul 1997.
- [40] E. J. Hinch, *Perturbation Methods*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 1991.
- [41] F. Gallaire and P.-T. Brun, “Fluid dynamic instabilities: theory and application to pattern forming in complex media,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 375, no. 2093, p. 20160155, 2017.