





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**JURADO ASIGNADO**

**PRESIDENTE: M. EN. I ALBERTO REYES SOLÍS**  
**SECRETARIO: DR. JACINTO CORTÉS PÉREZ**  
**VOCAL: DR. FERNANDO NÉSTOR GARCÍA CASTILLO**  
**1ER. SUPLENTE: DR. JOSÉ ANTONIO SOUZA JIMÉNEZ**  
**2DO. SUPLENTE: ING. JOEL GARCÍA ZÁRRAGA**

Lugar donde se realizó la tesis: Facultad de Estudios Superiores Aragón.

TUTOR DE TESIS

Dr. Fernando Néstor García Castillo

---

FIRMA



## Reconocimientos

### **Dr. Fernando Néstor García Castillo**

Por todo el apoyo y conocimiento que me brindó desde el principio hasta la conclusión de este trabajo. Por estar al pendiente en todo el proceso de investigación, de pruebas y de redacción de resultados. Por correcciones importantes del trabajo.

### **M. en I. Rodrigo Lechuga Taboada**

Por estar al pendiente de las pruebas realizadas en el trabajo. Por enseñarme conceptos básicos de Ingeniería que desembocaron en la conclusión de este trabajo.

### **Dr. Jacinto Cortés Pérez**

Por ayudarme aclarar puntos fundamentales en el objetivo del trabajo, así como correcciones y comentarios para afinar el mismo.

### **Iván Leos Santiago**

Por enseñarme el funcionamiento del equipo P3, utilizado para las pruebas descritas en este trabajo.

### **Universidad Nacional Autónoma de México**

Por haberme dado una educación profesional, así como una identidad institucional de la cual estoy orgulloso.

### **Fes Aragón**

A esta escuela de alto nivel educacional, haberme abierto las puertas de sus instalaciones y me ha provisto de ayuda hasta el último momento. Por haber brindado de excelentes profesores.

### **Centro Tecnológico Aragón**

Por el espacio y apoyo que me brindó en todo el desarrollo de este trabajo.

### **Brenda Angélica Díaz Mentado**

Por apoyarme en los puntos importantes de redacción y corrección de ortografía.



## Agradecimientos

### **A Dios;**

A quién le debo completamente este trabajo. Por estar a mi lado desde el primer día de estudio como infante, hasta la conclusión de mis estudios cubriendo absolutamente todas mis necesidades. Por haber puesto a mi lado gente maravillosa que me mostró amor, paciencia, ánimos y cuidado. Por haberme dado fuerzas cuando creía que sería imposible terminar. Por haberme mostrado su gracia y misericordia desde el día uno.

### **A mi padre;**

Por formar en mí un hombre temeroso de Dios. Por estar conmigo en todo momento sin esperar nada a cambio, dándome seguridad y tranquilidad. Por estar a mi lado en todo momento. Por haberme reprendido cuando era necesario, mostrando tu amor en ello. Por enseñarme desde los conocimientos más básicos hasta los complejos en temas de ingeniería. Por darme un ejemplo de un varón al cual admirar sinceramente e imitar, que yo sé que nadie te enseñó a ser padre y aún así demostraste ser el mejor.

### **A mi madre;**

Por darme amor en todo tiempo. Por todo tu cuidado y protección. Por mostrarme que siempre se puede ser una mejor persona. Por tu paciencia en las situaciones difíciles. Por enseñarme a disfrutar todos los momentos. Por alegrarme cuando era complicado ver un lado positivo. Por escucharme y aconsejarme. Por orar por mí en todo el tiempo en que no estuve en casa. Por todos los días motivarme a ser un hombre responsable.

### **A mis padres;**

Por sacrificar tantas cosas en sus vidas por sacarnos adelante. Que sepan que nada de lo que hicieron pasó por desapercibido. Que, aunque yo haga mi mayor esfuerzo, jamás podré terminar de expresar lo agradecido que estoy con ustedes.

### **A mi hermana;**

Por haber sido siempre mi compañía desde el día en que nació. Por cuidarme. Por brindarme refugio en mis momentos más difíciles. Por enseñarme a ser agradecido. Por tu paciencia para enseñarme y ayudarme en cosas de la escuela, a pesar de que tú también tenías responsabilidades. Por siempre querer verme feliz.

### **A Fernando Jiménez;**

Por ser un gran amigo en los momentos buenos y en lo complicados de la carrera. Por preocuparte por mí y animarme.



**Al Dr. Néstor**

Por toda la dedicación de tiempo y por ser un buen ejemplo profesional para mí. Por la paciencia que me tuvo desde las aulas de clase, las visitas a su oficina, hasta las sesiones a altas horas de la noche conectados por internet.

**Al Mr. en I. Rodrigo;**

Por sacrificar su tiempo para enseñarme, incluso aún en tiempos complicados por la pandemia.

**Al Ing. Joel;**

Por la paciencia en todo el proceso de titulación que es complicado.

**A mi Familia;**

Por estar siempre orgullosos de mí, y motivarme a nunca desertar.

**A todos mis Profesores;**

Por haber entregado siempre su mejor disposición y formar una generación de estudiantes orgullosos de pertenecer a su institución.

**A mi Nación;**

Por haber contribuido a mi formación académica, haciéndome consciente de que la educación universitaria es un privilegio del cual lamentablemente no tiene acceso toda la población.



## Índice

Reconocimientos .....	2
Agradecimientos .....	3
Introducción .....	7
CAPÍTULO 1: Antecedentes de mecánica de sólidos .....	10
1.1 Esfuerzos .....	11
1.2 Relaciones deformación-desplazamientos .....	16
1.3 Ley general de Hooke .....	19
1.4 Extensometría .....	23
1.5 Método del elemento finito .....	32
CAPÍTULO 2. Transmisión de fuerzas a través de medios elásticos .....	39
2.1 Deflexión y la ecuación de la elástica .....	40
2.2 Análisis del comportamiento de la transmisión de cargas a un tubo enterrado 43	
2.3 Transmisión de carga hacia un anillo plástico a través de un medio elástico con diversa rigidez .....	48
2.4 Comportamiento mecánico de juntas tipo espiga – empaque – campana en tuberías plásticas .....	56
CAPÍTULO 3. Método experimental y modelación numérica .....	61
3.1 Descripción del equipo .....	61
3.2 Arreglo de carga de compresión libre a un anillo circular .....	62
3.2.1 Instrumentación con Galgas Extensométricas. ....	62
3.3 Arreglo de carga de compresión a un anillo confinado .....	64
3.4 Modelo numérico .....	68
3.4.1 Pruebas de referencia .....	68
3.4.2 Parámetros de pruebas .....	70
3.4.3 Pruebas realizadas .....	75
CAPÍTULO 4. Resultados y discusión .....	77
4.1 Resultados experimentales .....	77
4.1.1 Confinamiento libre .....	77



---

4.1.2	Confinamiento rígido .....	79
4.1.3	Confinamiento suave .....	81
4.1.4	Suave superior-rígido inferior .....	83
4.1.5	Rígido superior-suave inferior .....	85
4.2	Resultados de simulación numérica.....	86
4.2.1	Confinamiento rígido .....	86
4.2.2	Confinamiento suave .....	88
4.2.3	Confinamiento suave rígido .....	90
4.2.4	Confinamiento rígido-suave .....	93
4.3	Discusión y comparación de resultados.....	96
4.3.1	Confinamiento rígido-rígido.....	97
4.3.2	Confinamiento suave .....	101
4.3.3.	Confinamiento suave rígido .....	103
4.3.3	Confinamiento rígido-suave .....	107
	Conclusiones .....	112
	Bibliografía.....	114



## Introducción

La mecánica de sólidos es un área fundamental de la física que permite estudiar el comportamiento de los materiales cuando están sometidos a fuerzas, con el fin de predecir su buen funcionamiento en una aplicación dada. En la mayoría de los casos los cuerpos sometidos a fuerzas se analizan cuando éstas son aplicadas directamente a ellos; sin embargo, esto no sucede así en muchas ocasiones. Un ejemplo muy concreto es el caso de una tubería enterrada, donde las fuerzas aplicadas a ella son transmitidas a través del medio que la confina; la tierra compactada a su alrededor. Otro caso donde se presenta lo anterior es en las uniones de las tuberías tipo espiga-campana selladas con un empaque, donde las cargas ejercidas a los empaques se transmiten por medio de la campana del mismo tubo. Este tipo de problemas han sido estudiados en los últimos años en el laboratorio de mecánica aplicada de la FES Aragón a través estudios teóricos-experimentales, donde se han desarrollado tanto pruebas experimentales como modelos físicos y matemáticos para su estudio.

Algunos de estos trabajos realizados tratan sobre la transmisión de carga a un anillo circular que es confinado con dos diferentes rigideces a través de medios elásticos. Dentro de los resultados obtenidos en dichos estudios destacan los siguientes:

- Desarrollo de un modelo experimental para el estudio de tubos confinados.
- Determinación de cierta correlación entre la rigidez del material de confinamiento y la distribución de deformaciones tangenciales en la pared interna del tubo.
- Obtención del campo de desplazamientos y su distribución en el medio que confina al tubo.
- Simulaciones numéricas del arreglo propuesto en el modelo físico.

Estos estudios son importantes porque pueden contribuir a mejorar los diseños de tuberías enterradas; ya que como se reporta en la literatura, la tierra compactada (a pesar de ser un medio granular) puede ser considerada como un medio elástico, bajo ciertas consideraciones, cuyo módulo elástico depende del porcentaje de compactación. Debido a



lo anterior estos resultados obtenidos pueden ser extrapolados a casos reales bajo ciertas condiciones. Además de que en general los procedimientos de diseño de tuberías confinadas en la práctica emplean modelos que consideran la profundidad a la que está enterrado el tubo, la rigidez de este y la compactación del material de relleno. Es por ello que dichos modelos prácticos sólo brindan condiciones de “riesgo” pero no permiten determinar los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos tanto en el tubo como en el medio que lo rodea, los cuales son considerados en los estudios realizados en la FES Aragón.

Adicionalmente al realizar diversas simulaciones numéricas, estos estudios permitieron mostrar de manera visual el comportamiento del tubo en función del confinamiento que lo rodea en pruebas de compresión; sin embargo, los resultados no correspondieron del todo con los obtenidos experimentalmente.

Es por ello que en el presente trabajo el objetivo fue realizar pruebas experimentales y simulaciones numéricas en tubos confinados bajo diferentes medios elásticos sometidos a compresión. Lo anterior con el fin de encontrar mejores consistencias entre los resultados experimentales y los obtenidos numéricamente.

En el contenido de este trabajo se muestra de manera detallada la metodología utilizada para estos estudios y una comparación entre las pruebas experimentales con resultados obtenidos a través de un modelo numérico desarrollado. Los temas principales utilizados durante este trabajo están divididos en los siguientes capítulos:

Capítulo 1: Antecedentes de mecánica de sólidos.

En este capítulo se da una breve explicación de los conceptos básicos de mecánica de sólidos, extensometría y método del elemento finito.

Capítulo 2: Transmisión de fuerzas a través de medios elásticos.

En este capítulo se consideran los aspectos generales de la transmisión de fuerzas entre medios elásticos enfatizando más en el caso de una tubería enterrada. Se resalta el caso típico del cálculo de la deflexión en una viga, con el fin de mostrar un problema donde se



considera la fuerza aplicada directamente al elemento a estudiar. Posteriormente se explican algunos estudios reportados en la literatura de tuberías y desarrollados por el grupo de trabajo del laboratorio de mecánica aplicada de la FES Aragón donde se considera la transmisión de carga entre medios elásticos.

### Capítulo 3: Método experimental y modelación numérica.

En esta parte del trabajo se describe la metodología utilizada tanto en las pruebas experimentales como en las simulaciones numéricas para realizar pruebas de compresión en tubos confinados por diferentes medios elásticos. Se proporcionan los detalles del equipo para realizar las pruebas de compresión, la instrumentación realizada a los tubos para medir la deformación y los medios elásticos usados; así como las diferentes configuraciones probadas en el tubo. En lo que respecta a las simulaciones numéricas se proporcionan los parámetros, restricciones y consideraciones utilizados en cada simulación realizada.

### Capítulo 4: Resultados y discusión.

Este capítulo tiene como propósito presentar los resultados obtenidos experimentalmente y numéricamente. Finalmente se realiza una discusión y comparación entre los resultados de cada uno de los diferentes arreglos considerados.



## CAPÍTULO 1: Antecedentes de mecánica de sólidos

La mecánica de sólidos es la rama de la mecánica que estudia la respuesta de los cuerpos que se encuentran sometidos a sollicitaciones externas y/o restricciones de desplazamiento. Esta respuesta mecánica se ve reflejada en esfuerzos, deformaciones y desplazamientos inducidos en el cuerpo. Como parte de esta rama de la mecánica se encuentra la teoría de elasticidad.

El concepto de relación elástica fuerza-deformación fue propuesto por primera vez por Robert Hooke en 1678; sin embargo, la formulación principal de la teoría matemática de la elasticidad no se desarrolló hasta el siglo XIX. En 1821, Navier presentó sus investigaciones sobre las ecuaciones generales de equilibrio, y rápidamente siguió Cauchy, quien estudió las ecuaciones de elasticidad básica y desarrolló la notación de esfuerzo en un punto. Una larga lista de científicos y matemáticos destacados continuó desarrollando la teoría, incluidos Bernoulli, Lord Kelvin, Poisson, Lamé, Green, Saint-Venant, Betti, Airy, Kirchhoff, Lord Rayleigh, Love, Timoshenko, Kolosoff, Muskhelishvili y otros. Durante las dos décadas posteriores a la Segunda Guerra Mundial, la investigación de la teoría de la elasticidad produjo una gran cantidad de soluciones analíticas a problemas específicos de interés en la ingeniería mecánica. En las décadas de los 70's y 80's se realizaron trabajos considerables sobre métodos numéricos que utilizan el método del elemento finito. Recientemente, la teoría de la elasticidad ha sido usada en el modelado micro mecánico de materiales con defectos internos o heterogeneidad. De manera paralela en la década de los 60's, el renacimiento de la mecánica del medio continuo llevó a una revisión de los fundamentos de la elasticidad y estableció un lugar racional para la teoría dentro del marco general [1].

Cuando un cuerpo está sometido a cargas se generan desplazamientos, deformaciones y esfuerzos. Cada uno de ellos son relacionados en ecuaciones constitutivas que se rigen por los principios fundamentales para el estudio de un problema de mecánica de sólidos. Estos principios son: las condiciones de equilibrio, las relaciones esfuerzo-deformación y las condiciones de compatibilidad. En las siguientes 3 secciones se dará de manera resumida



estos principios y como de ellos se derivan las 15 ecuaciones con quince incógnitas llamadas ecuaciones de la elasticidad.

## 1.1 Esfuerzos

Las fuerzas que actúan en un cuerpo pueden ser clasificadas en fuerzas de superficie y fuerzas de cuerpo. Las primeras se denominan fuerzas de superficie por el simple hecho de que actúan sobre las superficies del cuerpo. Generalmente se ejercen cuando un cuerpo entra en contacto con otro [2], es por ello que estas fuerzas comúnmente se denominan también fuerzas de contacto. Algunos ejemplos de este tipo de fuerzas son: uniformemente distribuida, variables, cíclicas [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] y ambientales (muertas o vivas).

El segundo tipo de fuerzas se llaman fuerzas de cuerpo porque actúan sobre cada elemento de un cuerpo. Estas fuerzas son comúnmente producidas por campos de fuerza centrífugas, gravitacionales u otros. De estas últimas las más comunes son las gravitacionales, estando presentes hasta cierto punto en casi todos los casos. Sin embargo, para muchas aplicaciones prácticas, son tan pequeñas en comparación con las fuerzas superficiales presentes que pueden ser despreciadas sin generar errores graves [2].

Por otro lado, el concepto de fuerza puntual es útil para representar de manera simple la acción que ejerce un cuerpo sobre otro o bien la resultante de todas estas acciones. La experiencia nos muestra el concepto que más aproxima la naturaleza de las fuerzas aplicadas a un cuerpo es el llamado: "Densidad de fuerza". Una de las variantes que tiene este concepto es que las fuerza por unidad de área, como las que se muestran en Figura 1, comprenden las fuerzas externas aplicadas sobre un cuerpo y las reacciones que se desarrollan en él al ser sometido a un sistema de cargas externas.

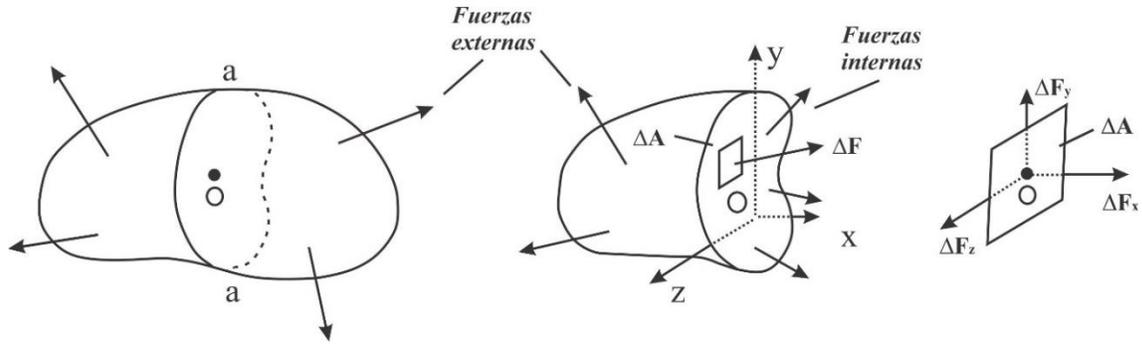


Figura 1. Representación gráfica de la definición de fuerza en un cuerpo sólido [11].

Tomando como referencia la Figura 1 es posible escribir lo siguiente:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (1)$$

Sin embargo, desde el punto de vista de la mecánica de medio continuo, las fuerzas por unidad de área son función de tres variables: la posición, el tiempo y un vector que define el sistema de referencia en el que está descrita la densidad de fuerza [12], es decir:

$$f = f((x, y, z), t, n) = \begin{pmatrix} f_1((x, y, z), t, n) \\ f_2((x, y, z), t, n) \\ f_3((x, y, z), t, n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

donde  $(x, y, z)$  es la posición, puesto que tanto las cargas externas como las reacciones cambian de un punto a otro, “ $t$ ” un escalar positivo que se asocia al tiempo y “ $n$ ” es un vector que define el sistema de referencia en el que se describe la fuerza.

Considerando que la fuerza por unidad de área es lineal respecto al argumento “ $n$ ”, que define la base en la que están los componentes de la fuerza, entonces:

$$f = f((x, y, z), t, n) = T(x, t)n \quad (3)$$

Donde:

$$T(x, t) = \begin{pmatrix} T_{11}(x, t) & T_{12}(x, t) & T_{13}(x, t) \\ T_{21}(x, t) & T_{22}(x, t) & T_{23}(x, t) \\ T_{31}(x, t) & T_{32}(x, t) & T_{33}(x, t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

es el llamado tensor de esfuerzos. En la Figura 2 se muestra una representación gráfica idealizada de tres planos mutuamente perpendiculares que pasan por un punto  $(x, y, z)$ .

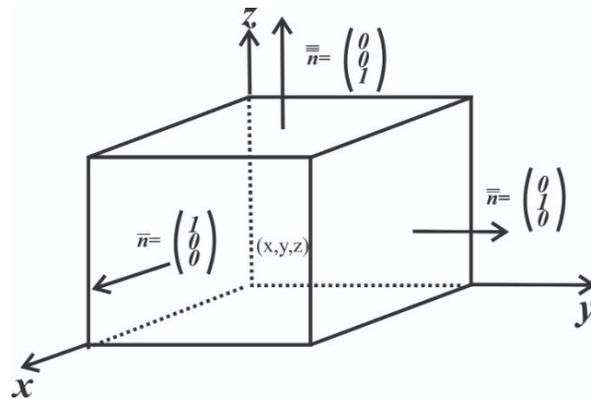


Figura 2. Diagrama esquemático que representa idealmente tres planos mutuamente perpendiculares que pasan por el punto  $(x, y, z)$ .

Si se aplica el tensor de esfuerzos a cada uno de los vectores unitarios normales a los tres planos mutuamente perpendiculares mostrados en la Figura 2 se tiene que:

$$\begin{aligned}
 T(x, t)\bar{n} &= \begin{pmatrix} T_{11}(x, t) & T_{12}(x, t) & T_{13}(x, t) \\ T_{21}(x, t) & T_{22}(x, t) & T_{23}(x, t) \\ T_{31}(x, t) & T_{32}(x, t) & T_{33}(x, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{pmatrix} \\
 T(x, t)\bar{n} &= \begin{pmatrix} T_{11}(x, t) & T_{12}(x, t) & T_{13}(x, t) \\ T_{21}(x, t) & T_{22}(x, t) & T_{23}(x, t) \\ T_{31}(x, t) & T_{32}(x, t) & T_{33}(x, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \end{pmatrix} \quad (5) \\
 T(x, t)\bar{n} &= \begin{pmatrix} T_{11}(x, t) & T_{12}(x, t) & T_{13}(x, t) \\ T_{21}(x, t) & T_{22}(x, t) & T_{23}(x, t) \\ T_{31}(x, t) & T_{32}(x, t) & T_{33}(x, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Es decir, se obtienen cada una de las columnas del tensor de esfuerzos. En la Figura 3 únicamente están colocadas en 3 de los 6 planos mutuamente perpendiculares, las componentes de los vectores que se obtuvieron al aplicar el tensor de esfuerzos a su respectivo vector normal, para evitar la saturación en la figura.

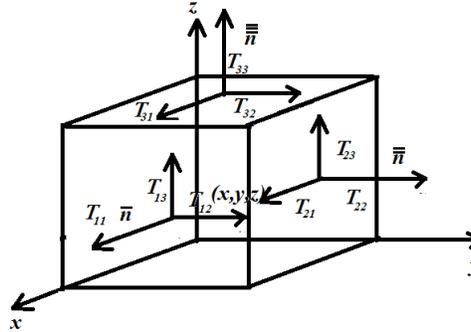


Figura 3. Descomposición de las componentes del tensor de esfuerzos en tres planos mutuamente perpendiculares.

Como se ve en la Figura 3, en cada plano hay 3 componentes una normal y dos tangentes; las componentes normales son llamadas esfuerzos normales y se representan con la letra “ $\sigma$ ” mientras que las componentes tangenciales (esfuerzos cortantes) con la letra “ $\tau$ ”. Así mismo, los subíndices  $i$  y  $j$  representan el plano y la dirección respectivamente. Considerando lo anterior y si el medio es polar (es decir:  $T_{ij} = T_{ji}$ ) se llega a la siguiente notación:

$$\begin{matrix} T_{11} = \sigma_{xx} & T_{22} = \sigma_{yy} & T_{33} = \sigma_{zz} \\ T_{11} = T_{21} = T_{xy} = \sigma_{yx} & T_{13} = T_{31} = T_{xz} = \sigma_{zx} & T_{23} = T_{32} = T_{yz} = \sigma_{zy} \end{matrix} \quad (6)$$

Por lo que finalmente el tensor o estado de esfuerzos puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Por otro lado, el estado de esfuerzos varía generalmente de punto a punto en un cuerpo sujeto a fuerzas externas. Estas variaciones están gobernadas por las condiciones de equilibrio de la estática las cuales llevan a las ecuaciones llamadas: “Ecuaciones de equilibrio”. Para obtenerlas se debe considerar un elemento muy pequeño de lados “ $d_x$ ” y “ $d_y$ ” y asumir que los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{yx}$  son función de la posición “ $x$ ” pero que no varían a través del espesor, es decir no dependen de “ $z$ ” y que los demás componentes son cero. También se asume que las componentes “ $x$ ” y “ $y$ ” de las fuerzas de cuerpo (Fuerzas por unidad de volumen) “ $F_x$ ” y “ $F_y$ ” son independientes de “ $z$ ” y que las componentes de  $F_z = 0$ . Esta combinación de esfuerzos satisface las condiciones para el caso plano. Figura 4

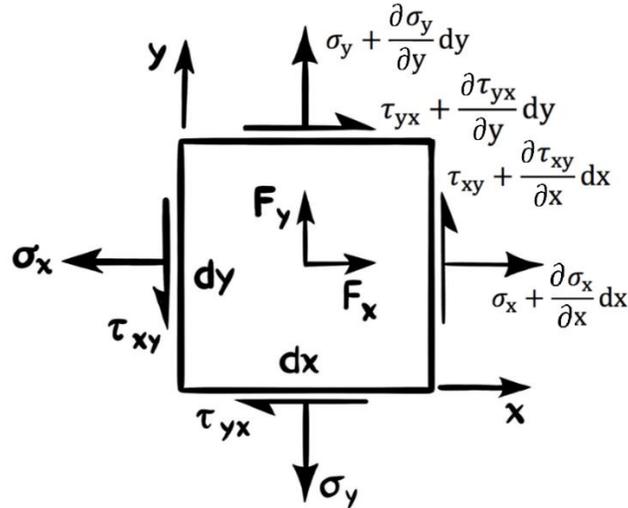


Figura 4. Elemento diferencial con esfuerzos, sus variaciones y fuerzas de cuerpo [11].

La variación de los esfuerzos con la posición puede ser representada por una serie de Taylor truncada en segundo término. Por ejemplo, para el esfuerzo en “x” se tiene:

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \quad (8)$$

La derivada parcial es usada en este caso porque  $\sigma_x$  es función de “x” y de “y”.

Si realizamos  $\Sigma F_x = 0$ , considerando positivo a la derecha, en el elemento de la Figura 4 tenemos:

$$-\sigma_x dydz - \tau_{yx} dx dz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz + F_x dx dy = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dV + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dV + F_x dV = 0 \quad (10)$$

Y finalmente:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + F_x = 0 \quad (11)$$

Si se realiza el mismo procedimiento, pero ahora en la dirección “y” se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0 \quad (12)$$

Estas ecuaciones son las de equilibrio para el caso plano.



De manera general para el caso tridimensional las ecuaciones de equilibrio pueden ser representadas como:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \quad (15)$$

## 1.2 Relaciones deformación-desplazamientos

Para poder explicar cómo se relacionan las deformaciones con los desplazamientos se considerará el caso 2D o plano donde todos los puntos en el cuerpo, antes y después de la aplicación de la carga, permanecen en el mismo plano. Si consideramos un elemento con dimensiones “ $d_x$ ”, “ $d_y$ ” y espesor unitario, la deformación total puede ser considerada como: un cambio en la longitud en cada lado (Figura 5a.) y una rotación relativa sin ningún cambio de longitud (Figura 5b.).

En la deformación normal unitaria  $\epsilon_x$ , el cambio unitario en la longitud está definida como:

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (16)$$

Donde “ $u$ ” es el desplazamiento en la dirección “ $x$ ” generado en un punto cualquiera del cuerpo por la aplicación de una o más fuerzas.

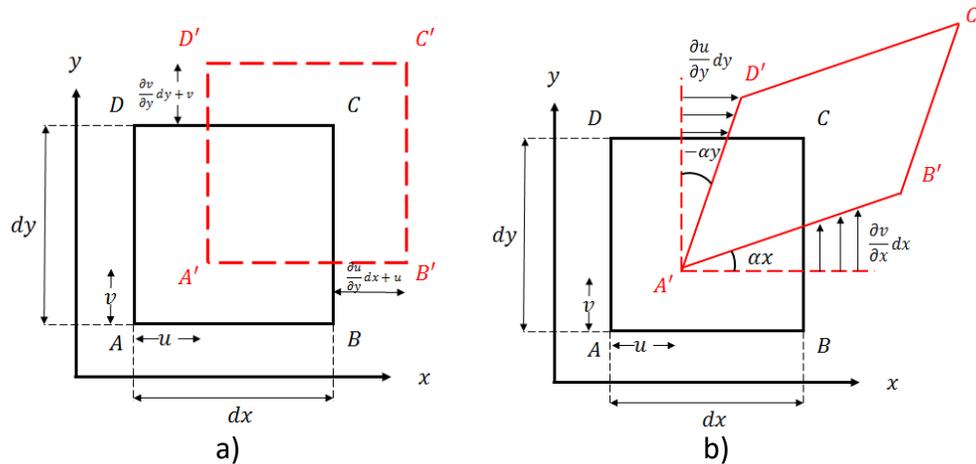


Figura 5. Elemento diferencial con desplazamientos y sus variaciones [11].

Si la deformación está distribuida uniformemente sobre la longitud original la deformación normal unitaria puede expresarse como:

$$\epsilon_x = \frac{L_f - L_i}{L_i} \quad (17)$$

Donde:  $L_i$ = Longitud inicial y  $L_f$ = Longitud final

Considerando la ecuación anterior y la Figura 5a, se puede escribir la deformación unitaria en la dirección "x" como:

$$\epsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (18)$$

$$\epsilon_x = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + u - u - dx}{dx} \quad (19)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (20)$$

Si realizamos el mismo procedimiento, pero ahora en la dirección "y" tenemos:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (21)$$

Un signo positivo en estas ecuaciones implica elongación y uno negativo contracción.



Ahora tomando en cuenta el cambio experimentado por el ángulo  $DAB$  de la Figura 5b, debido a que las deformaciones son pequeñas se puede asumir que el ángulo  $\alpha_x$ , ángulo entre  $AB$  y  $A'B'$ , se puede representar como:

$$\alpha_x \approx \tan(\alpha_x) \quad (22)$$

$$\alpha_x \approx \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} \quad (23)$$

$$\alpha_x \approx \frac{\partial v}{\partial x} \quad (24)$$

donde la rotación en sentido contrario de las manecillas del reloj se considera como positivo. Realizando el mismo procedimiento para  $\alpha_y$  tenemos:

$$-\alpha_y \approx \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} \quad (25)$$

$$-\alpha_y \approx \frac{\partial u}{\partial y} \quad (26)$$

El cambio angular de  $DAB$ , el cambio angular entre las líneas de las direcciones “ $x$ ” y “ $y$ ”, se define como la deformación cortante unitaria denotada por  $\gamma_{xy}$ . Considerando las expresiones encontradas para los ángulos en “ $x$ ” y “ $y$ ” la deformación cortante unitaria puede expresarse como:

$$\gamma_{xy} = \alpha_x - \alpha_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (27)$$

De manera general en un elemento tridimensional, un prisma rectangular con lados  $\partial x$ ,  $\partial x$  y  $\partial z$ , haciendo un análisis similar al mostrado anteriormente nos da las relaciones deformación-desplazamiento que a continuación se muestran:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (28)$$



$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (29)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (30)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (31)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (32)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (33)$$

Finalmente considerando la deformación infinitesimal, desarrollada previamente, las relaciones deformación-desplazamiento pueden escribirse como:

$$E = \frac{1}{2}(\nabla_u + \nabla_u^T) \quad (34)$$

$$E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (36)$$

### 1.3 Ley general de Hooke

En la ley de Hooke generalizada se considera un estado de esfuerzos y deformaciones tridimensional; es decir, dado que ambos tienen 9 elementos, la relación entre esfuerzos y



deformaciones debe contener 81 constantes elásticas. Esto puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} & \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} & \\ \swarrow & \uparrow & \nwarrow \\ 9 \text{ esfuerzos} & 81 \text{ constantes} & 9 \text{ deformaciones} \\ & \text{elásticas} & \end{array}$$

De igual manera esta relación suele escribirse con las deformaciones en función de los esfuerzos.

$$\begin{array}{ccc} & \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} & \\ \swarrow & \uparrow & \nwarrow \\ 9 \text{ deformaciones} & 81 \text{ constantes} & 9 \text{ esfuerzos} \\ & \text{elásticas} & \end{array}$$

La primera relación en forma extendida queda como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} \\ C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} \\ C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \\ C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} \\ C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Pero debido a que los tensores de esfuerzos y deformación son simétricos, es decir:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (38)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (39)$$



Entonces las 81 constantes se reducen a 36 por lo que de manera convencional se escribe la ley de Hooke como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{1131} & C_{2231} & C_{3331} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{3112} & C_{1212} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (40)$$

Se debe notar que el número dos se debe a la simetría de las deformaciones y que ahora las constantes se redujeron a 36. Para no escribir las constantes con 4 subíndices se maneja la reducción de Voigt que establece las siguientes relaciones:

$$11 \leftrightarrow 1 \quad 22 \leftrightarrow 2 \quad 33 \leftrightarrow 3 \quad 23 \leftrightarrow 4 \quad 31 \leftrightarrow 5 \quad 12 \leftrightarrow 6 \quad (41)$$

Por ejemplo:

$$C_{1111} = C_{11} \quad (42)$$

$$C_{2331} = C_{45} \quad (43)$$

Considerando todos los cambios con esta notación finalmente el sistema queda como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Estas constantes aún pueden reducirse si se consideran las ecuaciones de energía de 36 a 21 independientes ( $30/2 + 6 = 21$ ).

Este es el número de constantes máximo que se puede tener en un material. De hecho, se puede seguir realizando una reducción de ellas considerando las simetrías de los sistemas cristalinos conocidos como redes de Bravais. Para el caso isotrópico, las constantes se



reducen a 2. Para este último caso se muestra de manera resumida la ley de Hooke. En la Figura 6 se muestra un elemento homogéneo e isotrópico en dos dimensiones.

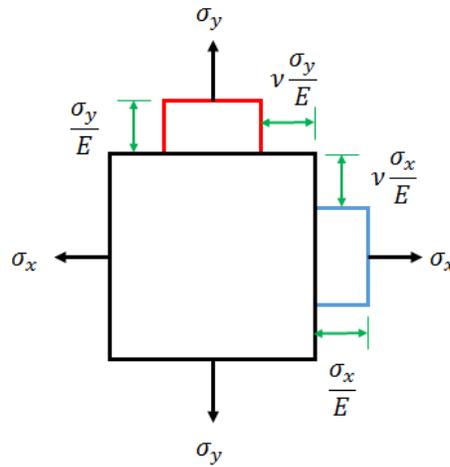


Figura 6. Elemento en dos dimensiones homogéneo e isotrópico con espesor unitario [11].

La parte de color azul representa, de manera exagerada, la forma que tendría el material si se le aplicara un esfuerzo en la dirección “x”, mientras la parte en rojo sería la de “y”. Como puede observarse, por ejemplo,  $\sigma_x$  genera un alargamiento en la dirección “x” ( $\frac{\sigma_x}{E}$ ) y adicionalmente una contracción en la dirección “y” ( $\nu \frac{\sigma_x}{E}$ ). De manera similar el esfuerzo en la dirección “y” genera un alargamiento y una contracción. Debido a lo anterior la deformación total en la dirección “x” sería:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \quad (45)$$

Si se realiza este mismo análisis para el caso tridimensional la deformación en la dirección “x” quedaría como:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (46)$$

Considerando lo anterior y también las relaciones de cortantes, para el caso general, la ley de Hooke quedaría finalmente:



$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (47)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (48)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (49)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (50)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (51)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (52)$$

En estas ecuaciones se pueden observar 3 constantes  $G$ ,  $E$  y  $\nu$ . Sin embargo, ellas se relacionan como sigue:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (53)$$

Por lo tanto, como se mencionó al inicio, se tienen únicamente dos constantes elásticas independientes.

## 1.4 Extensometría

Utilizando las ecuaciones descritas en la sección anterior, es posible determinar los estados de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos de uno o todos los puntos de un cuerpo sometidos a sollicitaciones mecánicas y/o restricciones en su frontera. Estos valores se pueden obtener aplicando técnicas de análisis experimental de esfuerzos las cuales se dividen en: mecánicas, eléctricas, acústicas y ópticas [2].

La técnica de extensometría eléctrica es la más utilizada de las técnicas de análisis experimental de esfuerzos, por ello en esta sección se describirán algunos aspectos de ella basándose en lo descrito por Dally [2].



Lord Kelvin empleó un puente de Wheatstone para medir el cambio de resistencia asociada al cambio de longitud de un filamento metálico adherido a una pieza sólida sometida a una carga de tensión. En este experimento clásico, estableció tres puntos importantes que han ayudado enormemente al desarrollo del medidor de resistencia eléctrica:

1. La resistencia del alambre cambia en función de la deformación.
2. Los diferentes materiales tienen diferentes sensibilidades.
3. El puente de Wheatstone puede ser utilizado para la medición de cambios de resistencia.

Adicionalmente notó que la resistencia del alambre aumenta y disminuye con el cambio de la deformación del elemento. Por ello la resistencia  $R$  de un conductor metálico uniforme con una longitud  $L$ , área de sección transversal  $A$  y resistencia específica  $\rho$  puede ser representada como:

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (54)$$

Derivando la ecuación (54) y al dividirla por la resistencia total  $R$  resulta:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - \frac{dA}{A} \quad (55)$$

El término  $dA$  representa el cambio en el área de la sección transversal del conductor debido a las deformaciones transversales, que son iguales a  $-\nu(dL/L)$ , donde  $\nu$  es el módulo de Poisson del metal usado para el conductor. Si el diámetro del conductor antes de la aplicación de la deformación axial se define como  $d_0$ , entonces el diámetro después de la aplicación de la deformación es expresado como:

$$d_f = d_0 \left(1 - \nu \frac{dL}{L}\right) \quad (56)$$



De la ecuación (56) el cambio en el área para deformaciones pequeñas se aproxima de la siguiente manera:

$$\frac{dA}{A} = -2\nu \frac{dL}{L} + \nu^2 \left(\frac{dL}{L}\right)^2 \approx -2\nu \frac{dL}{L} \tag{57}$$

Sustituyendo la ecuación (55) en la ecuación (57) y simplificando:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} (1 + 2\nu) \tag{58}$$

Que puede ser descrito como:

$$S_A = \frac{dR/R}{\varepsilon} = 1 + 2\nu + \frac{d\rho/\rho}{\varepsilon} \tag{59}$$

Donde  $S_A$  es la sensibilidad de la aleación metálica utilizada en el conductor y se define como el cambio de resistencia por unidad de resistencia inicial dividido por la deformación aplicada. Esta sensibilidad varía según los materiales, ver Tabla 1.

*Tabla 1. Sensibilidad a la deformación  $S_A$  para aleaciones de bandas extensométricas comunes [2].*

Material	Composición	$S_A$
<b>Constantan</b>	45 Ni, 55 Cu	2.1
<b>Nicromo V</b>	80 Ni, 20 Cu	2.1
<b>Isoelástico</b>	36 Ni, 8 Cr, 0.5 Mo, 55.5 Fe	3.6
<b>Karma</b>	74 Ni, 20 Cr, 3 Al, 3 Fe	2.0
<b>Armor D</b>	70 Fe, 20 Cr, 10 Al	2.0
<b>Platino-Tungsteno</b>	92 Pt, 8 W	4.0

La mayoría de las galgas extensométricas de resistencia eléctrica producidas hoy en día se fabrican a partir de una aleación de cobre y níquel, conocida como constantan. Algunas otras aleaciones que son utilizadas en galgas extensométricas comerciales son: isoelástica y Karma mientras que para medición de deformaciones a altas temperaturas (superiores a 260°C) se utilizan Nicromo V y Platino-Tungsteno. Saunders y Roe produjeron las primeras

galgas extensométricas de lámina metálica en Inglaterra en 1952. Con este tipo de galga, la configuración de rejilla se produce a partir de lámina metálica mediante un proceso de fotograbado. Debido a que el proceso es bastante versátil, se puede producir una amplia variedad de tamaños de calibre y formas de malla. La longitud de calibre más corta disponible en una lámina de metal es de 0,20 mm. La longitud de calibre más larga es de 102 mm. Las resistencias de calibre estándar son 120 y 350 ohmios; sin embargo, las resistencias de alto calibre están disponibles comercialmente para aplicaciones de transductores. Existen dos tipos de extensómetros, el uniaxial que es el más común y las rosetas. Las rosetas se emplean para mediciones de deformación en campos de esfuerzos biaxiales. En la Figura 7a se muestra una roseta de dos elementos mientras que en la (Figura 7b) una de tres elementos. El caso específico de las de tres elementos se utilizan cuando se desconocen las direcciones principales del campo de deformación.

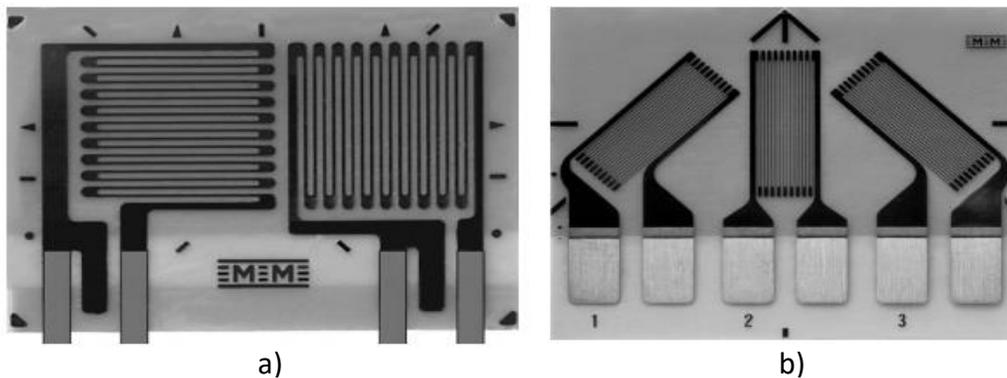


Figura 7. Rosetas de: a) Rejillas perpendiculares y b) Rejillas a 45 grados [13].

### Método de instalación de galgas extensométricas

Para colocar la galga en la sección del material donde se desea medir las deformaciones es necesario utilizar un adhesivo correcto y un procedimiento adecuado de montaje. El pegamento es de suma importancia, puesto que debe de transmitir la deformación de la superficie de la muestra hacia la rejilla de la galga sin distorsión. Una inadecuada selección de adhesivo puede provocar histéresis, cambiar el factor de galga y la resistencia inicial de la misma.

El área donde va a ser posicionada la galga debe ser cuidadosamente preparada antes de su instalación. Esto consiste en remover la herrumbre, dejar la superficie plana (no pulido alto), aplicar solventes para remover grasa y finalmente la superficie puede ser tratada con una solución dada, apropiada y con afinidad química para el adhesivo.

Después la localización de la galga es marcada sobre la muestra con una línea muy clara, sin adhesivo, posicionándola usando una cinta transparente. La posición y orientación de la galga es mantenida por la cinta, el adhesivo es aplicado y la galga es presionada sobre la cinta para exprimir el exceso de adhesivo. El procedimiento anterior se muestra en la Figura 8.

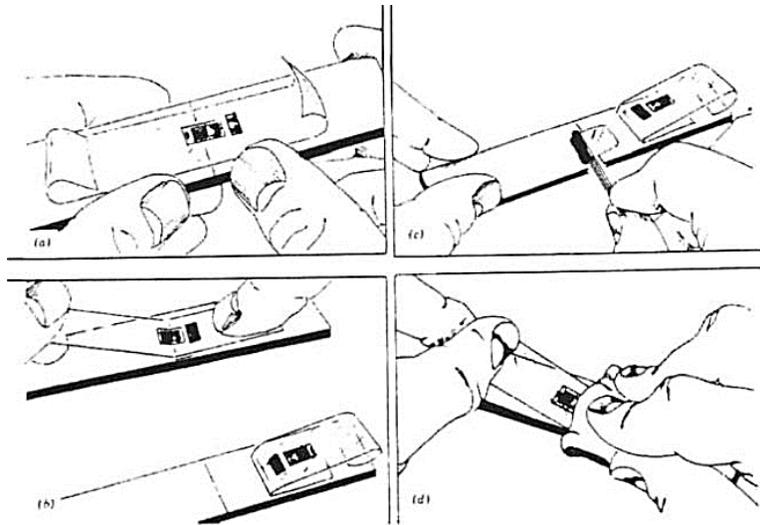


Figura 8. Método de instalación de galgas [2].

### Factor de galga

Los fabricantes de extensómetros proporcionan una constante de calibración conocida como factor de galga  $S_g$  para cada galga. Este relaciona el cambio de resistencia con la deformación axial como:

$$\frac{\Delta R}{R} = S_g \varepsilon_a \quad (60)$$

Donde:  $\varepsilon_a$  es la deformación normal a lo largo de la dirección axial de la galga. El factor de galga indica la sensibilidad del sensor y es obtenida utilizando una prueba de calibración en una viga sometida a flexión donde se produce una deformación  $\varepsilon_a$  conocida.

### Compensación de temperatura.

En muchos experimentos, la instalación de galgas extensométricas está sujeta a cambios de temperatura durante el período de prueba, y se debe considerar cuidadosamente para determinar si el cambio en la resistencia se debe a la deformación aplicada o al cambio de temperatura. Cuando cambia la temperatura ambiente, ocurren cuatro efectos que pueden alterar las características de desempeño de la galga extensométrica:

1. La sensibilidad a la deformación  $S_A$ , de la aleación usada para la malla cambia.
2. La malla de la galga se alarga o se contrae ( $\Delta L/L = \alpha\Delta T$ )
3. El material base sobre el que se monta la galga se alarga o se contrae ( $\Delta L/L = \beta\Delta T$ ).
4. La resistencia de la galga cambia debido a la influencia del coeficiente de temperatura de la resistencia del material de la galga ( $\Delta R/R = \gamma\Delta T$ ).

El cambio en la sensibilidad a la deformación  $S_A$ , en algunas aleaciones usadas en las galgas extensométricas con respecto a la variación de temperatura se muestra en la Figura 9.

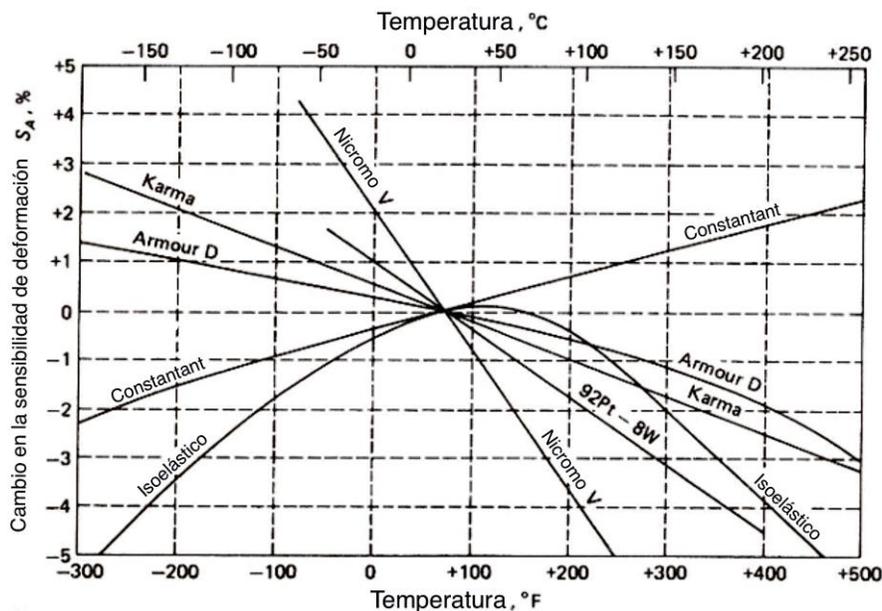


Figura 9. Cambio en la sensibilidad de deformación  $S_A$  de varias aleaciones usadas en extensómetros en función de la temperatura [2].



Estos datos indican que  $\Delta S_A/\Delta T$  es igual a 0.735 y -0.975%/100°C para las aleaciones Constantan y Karma, respectivamente. Como consecuencia, las variaciones de  $S_A$  con la temperatura se desprecian para experimentos a temperatura ambiente, donde las fluctuaciones de temperatura rara vez superan  $\pm 10^\circ \text{C}$ . Sin embargo, en los problemas de esfuerzos térmicos, las variaciones de temperatura son posibles; por lo tanto, el cambio en  $S_A$  debe tenerse en cuenta ajustando el factor de galga a medida que cambia la temperatura durante el experimento.

Los efectos de la elongación de la malla de la galga, la elongación del material base y el aumento de la resistencia de la galga con aumentos de temperatura se combinan para producir un cambio en la resistencia inducido por la temperatura  $(\Delta R/R)_{\Delta T}$  que puede ser expresado como:

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\Delta T} = (\beta - \alpha)S_g\Delta T + \gamma\Delta T \quad (61)$$

Donde:

$\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes de expansión térmica de los materiales base y de las galgas respectivamente.  $\gamma$  es el coeficiente de temperatura de resistividad del material de la galga.  $S_g$  es el factor de galga.

Si la diferencia de expansión entre la galga y el material base debido a la temperatura cambia, la galga puede estar sujeta a una deformación que no ocurre en la muestra instrumentada. Desafortunadamente es imposible separar la deformación aparente debido al cambio de temperatura de la deformación inducida por la fuerza aplicada, a menos que ambas partes tengan el mismo coeficiente de expansión. Por ello existen dos formas de ser empleadas para estos efectos de compensación de temperatura: el primero es crear una compensación en la galga para que el efecto de los 3 factores de la ecuación (61) sean cancelados y el segundo compensa los efectos del cambio de temperatura en la señal requerida para convertir  $\frac{\Delta R}{R}$  en voltaje de salida.



Adicionalmente a lo antes mencionado se deben de tomar en cuenta otros aspectos como límites de elongación, respuesta dinámica de las galgas, disipación de calor, estabilidad, efectos ambientales entre otros.

### **Puente de Wheatstone**

El puente de Wheatstone es un circuito que puede ser empleado para determinar los cambios en la resistencia que experimenta la galga cuando está sujeta a deformación.

A diferencia de otro circuito llamado potenciómetro, el puente de Wheatstone puede ser usado para determinar lecturas dinámicas y estáticas. El puente puede ser usado como un dispositivo de lectura directa cuando el voltaje de salida  $\Delta V$  es medido y relacionado con la deformación. También el puente puede ser usado como un sistema de balance-nulo cuando el voltaje de salida  $\Delta V$  es ajustado para un valor cero.

Cuando el voltaje fuente “V” es seleccionado para manejar las galgas en el puente, ellas disipan un máximo de energía permisible y puede ser empleada una diferente ecuación de sensibilidad. Hay que destacar que el número de galgas usado en el puente y sus posiciones relativas son importantes. Tomando en cuenta lo anterior existen cuatro casos que son los más comunes arreglos de puentes. En la Figura 10 se muestran cada uno de ellos.

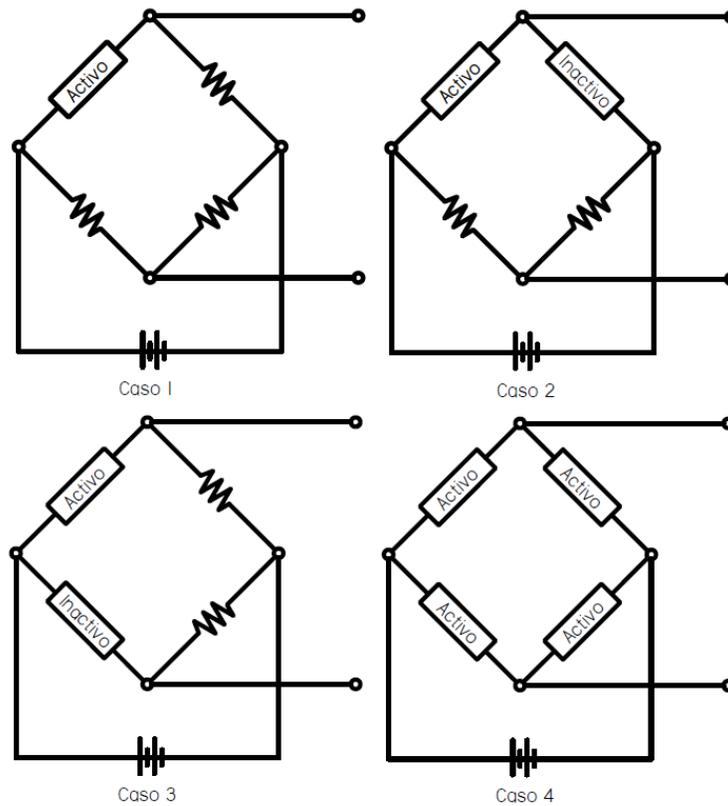


Figura 10. Cuatro arreglos comunes de puentes [2].

- Caso 1: Este arreglo utiliza una sola galga activa en la posición R1 y es a menudo empleado en mediciones dinámicas y estáticas, donde la temperatura de compensación no es crítica.
- Caso 2: Este arreglo utiliza una galga activa R1 y una inactiva en R2 que es usado para temperatura de compensación.
- Caso 3: En este arreglo la galga inactiva es insertada en R4, la galga activa está en R1 y las resistencias fijas con algún valor son localizadas en R2 y R3. Con estas posiciones el puente esta compensado por temperatura y la sensibilidad es la misma que en el caso 1.
- Caso 4: El último arreglo tiene 4 galgas activas colocadas en el puente, con una galga en cada una de las ramas y también este arreglo de puente esta compensado por temperatura. [2]



## 1.5 Método del elemento finito

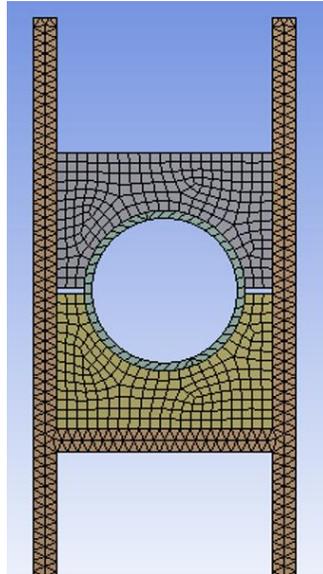
Otra forma de resolver un problema de mecánica de sólidos es a través del método del elemento finito, el cual es un método numérico que se usa para determinar numéricamente o “discreta” la solución de las ecuaciones de Euler. Las ecuaciones de Euler son el conjunto de 15 ecuaciones con 15 incógnitas mencionadas en las secciones anteriores, donde las incógnitas son: 6 esfuerzos, 6 deformaciones y 3 desplazamientos. En esta sección se explicarán de manera breve algunos conceptos básicos de este método basándose en lo mencionado por Ugural [14].

Con el desarrollo de las computadoras digitales de alta velocidad y gran capacidad de almacenamiento, el método del elemento finito tuvo un gran auge en diversas industrias para la solución de análisis prácticos y problemas de diseño de alta complejidad. El método del elemento finito (FEM, por sus siglas en inglés, Finite Element Method) ofrece algunas ventajas como:

1. La geometría de lo que se quiere analizar se puede describir fácilmente.
2. Tiene la capacidad para simular materiales compuestos y anisotrópicos.
3. Facilita el manejo en condiciones de carga combinada.
4. Tiene la capacidad para simular cargas térmicas y dinámicas.

Un modelo elaborado para ser analizado empleando el método de los elementos finitos, consiste en que un elemento estructural real es dividido o discretizado en un número finito de elementos conectados en puntos llamados nodos y a lo largo de los límites entre elementos. Las formas triangulares, rectangulares, tetraédricas o cuadriláteras de elementos son comúnmente utilizados en el método del elemento finito. En la Figura 11 se muestra un ejemplo donde se utilizan elementos triangulares. Los tipos de elementos que se emplean comúnmente en la idealización estructural son: armaduras, vigas, elementos bidimensionales, flexión en placas y elementos tridimensionales. A menudo, los grandes

sistemas estructurales, como aviones o barcos, se analizan dividiéndolos en unidades o subestructuras más pequeñas.



*Figura 11. Modelo de elemento finito.*

La red de elementos y nodos que discretizan la región se llama malla. La densidad de la malla aumenta a medida que se colocan más elementos dentro de una región prescrita. El refinamiento de la malla es la modificación de ella en un análisis de un modelo para brindar soluciones mejoradas. El tamaño y la longitud de los elementos están determinados por la complejidad de la estructura y la precisión deseada. Los resultados generalmente mejoran cuando la densidad de la malla aumenta en áreas de alta concentración de esfuerzos y cuando las zonas de transición geométrica se entrelazan suavemente, como en la Figura 11. De hecho, se requieren más elementos donde los esfuerzos locales son de interés, como las conexiones cercanas.

Para ejemplificar de manera breve el funcionamiento del FEM de manera analítica, se considera el caso de una armadura plana orientada arbitrariamente, donde el principal objetivo es el cálculo de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos en un elemento de ella.

Para la armadura mostrada en la Figura 12, en el sistema de coordenadas local, cada nodo tiene una fuerza axial  $\bar{F}_x$ , una fuerza transversal  $\bar{F}_y$ , un desplazamiento axial  $\bar{u}$  y transversal  $\bar{v}$ .

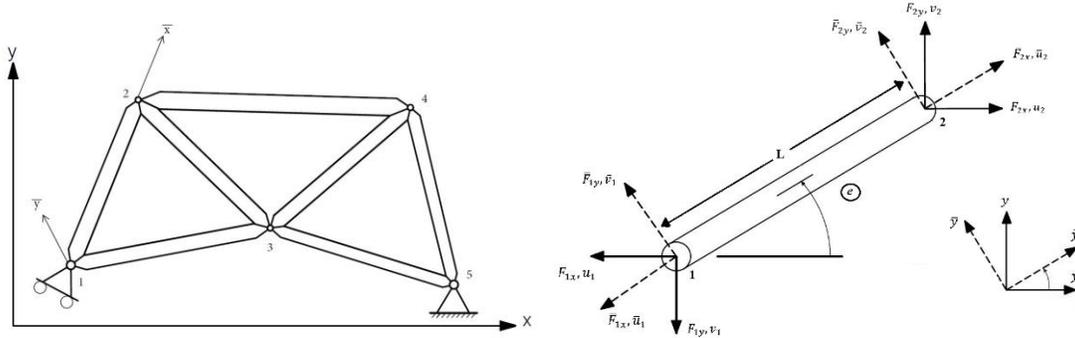


Figura 12. Coordenadas locales  $(\bar{x}, \bar{y})$  y globales  $(x, y)$  para un elemento de barra bidimensional (i) [14].

Para una de las barras de la armadura, dado que  $F = AE/L$  y que  $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$ , entonces:

$$\bar{F}_1 = \frac{AE}{L} (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \tag{62}$$

$$\bar{F}_2 = \frac{AE}{L} (\bar{u}_2 - \bar{u}_1)$$

Es por ello que considerando que  $F_{1y} = F_{2y} = 0$  podemos escribir

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{1x} \\ \bar{F}_{1y} \\ \bar{F}_{2x} \\ \bar{F}_{2y} \end{Bmatrix}_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix}_e \tag{63}$$

Y de manera reducida se puede expresar como:

$$\{\bar{F}\}_e = [\bar{K}]_e \{\bar{\delta}\}_e \tag{64}$$

$\{\bar{F}\}_e$  representa las fuerzas nodales,  $[\bar{K}]_e$  la matriz de rigidez y  $\{\bar{\delta}\}_e$  el vector de desplazamiento de los nodos o juntas (1 y 2) respectivamente en un sistema local de coordenadas.



Observando de la Figura 12 que las dos fuerzas locales y globales en el nodo 1 pueden estar relacionadas por las siguientes ecuaciones:

$$\bar{F}_{1x} = F_{1x}\cos\theta + F_{1y}\sin\theta \quad (65)$$

$$\bar{F}_{1y} = -F_{1x}\sin\theta + F_{1y}\cos\theta \quad (66)$$

Entonces las fuerzas locales y global se pueden escribir en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{1x} \\ \bar{F}_{1y} \\ \bar{F}_{2x} \\ \bar{F}_{2y} \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix}_e \quad (67)$$

ó

$$\{\bar{F}\}_e = [T]\{F\}_e \quad (68)$$

Donde:

[T] representa la matriz de transformación de coordenadas.

$$T = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (69)$$

$\{\bar{F}\}_e$  es la matriz de fuerza nodal global

$$\{F\}_e = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix}_e \quad (70)$$

Por lo tanto, las relaciones fuerza-desplazamiento globales o ecuaciones gobernantes para un elemento "e" se expresan como:

$$\{F\}_e = [K]_e\{\delta\}_e \quad (71)$$

Donde

$$[K]_e = [T]^T[\bar{K}]_e[T] \quad (72)$$



Así mismo considerando armaduras que tuvieran más barras como la mostrada en la Figura 13, es posible tratar los miembros entre las juntas como elementos finitos.

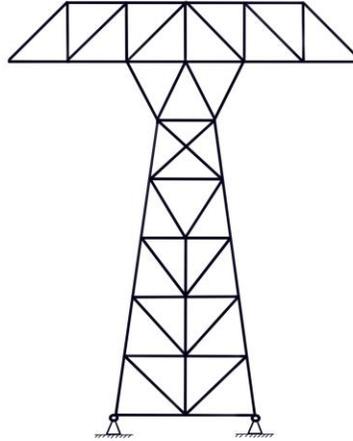


Figura 13. Ejemplo de una armadura que puede ser analizada por FEM [14].

Esto da como resultado las siguientes relaciones fuerza-desplazamiento para toda la armadura:

$$\{F\}=[k]\{\delta\} \quad (73)$$

Donde la matriz de fuerza nodal global  $\{F\}$  y la matriz de rigidez global  $\{k\}$  son expresadas como:

$$\{F\} = \sum_1^n \{F\}_e \quad (74)$$

Y

$$\{K\} = \sum_1^n \{K\}_e \quad (75)$$

La cantidad “e” denota un elemento y “n” es el número de elementos que componen la armadura.  $[K]$  relaciona la fuerza nodal global  $\{F\}$  con el desplazamiento global  $\{\delta\}$  de toda la armadura.



Es importante resaltar que la expresión(75) es un sistema de ecuaciones lineales las cuales se pueden resolver para obtener los desplazamientos de los nodos. Para realizarlo es necesario definir las fuerzas externas y las condiciones en la frontera. Por ejemplo, en la armadura Figura 13 se tienen dos nodos en la base que están fijos y por lo tanto no hay desplazamientos. Una vez obtenidos los desplazamientos se pueden calcular las deformaciones y posteriormente los esfuerzos con las ecuaciones desarrolladas en las secciones anteriores. El procedimiento para realizar un análisis completo a un cuerpo que está sometido a fuerzas se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Definición de análisis de problema: Escoger un modelo de elemento finito y desarrollar la malla del modelo.
2. Datos de entrada: Materiales, definición de nodos y elementos condiciones de frontera, carga.
3. Elementos de formulario  $[K]_e$ : Calcular la matriz de rigidez del elemento.
4. Sistema de Formulario  $[K]$ : Ensamblar el elemento  $[K]_e$  para formar la matriz de rigidez del sistema.
5. Calcular desplazamientos: Resolver el sistema de ecuaciones  $\{F\}=[k]\{\delta\}$  para formar la matriz de rigidez del sistema.
6. Calcular esfuerzos: Calcular esfuerzos (y/o fuerzas) en los elementos.
7. Evaluar resultados.
8. En caso de requerir malla refinada para el modelo regresar al paso 2.
9. Se entregan resultados. [14]

### Uso de Software

Dado que la cantidad de elementos finitos que se pueden considerar en la simulación de un cuerpo sometido a fuerzas suele ser muy grande (miles y cientos de miles) es necesario realizar los cálculos con la utilización de programas diseñados para tal fin. Actualmente existe una gran variedad de software que emplean el método del elemento finito, algunos



ejemplos son: Simulation Mechanical (autodesk), ALGOR, ABAQUS, ANSYS, entre otros. Los resultados obtenidos por este tipo de software permiten predecir entre otras cosas como reaccionara un cuerpo ante fuerzas, vibraciones, calor, flujo de fluidos, entre otros. Los resultados obtenidos permiten observar si un producto se romperá, desgastará o funcionará como se espera.

Se debe tener cuidado con el uso de estos softwares debido a que no consideran algunos aspectos como desalineamientos, soldaduras y que dependen tanto de las condiciones dadas originalmente, que muchas veces no corresponden con lo que se quiere simular en la realidad.

## CAPÍTULO 2. Transmisión de fuerzas a través de medios elásticos

Se considera como un problema de transmisión de carga a través de un medio elástico a aquel que se describe de forma general en la Figura 14. Como se puede ver en dicha figura, la carga externa  $f(x)$ , con  $f(x) = (x, y, z)$  es aplicada al cuerpo elástico A, cuyas propiedades mecánicas son  $E_1$  y  $\nu_1$ , el cual la transmite al cuerpo B cuyas propiedades elásticas son:  $E_2, \nu_2$ . Desde el punto de vista de la mecánica de sólidos, el problema consiste en determinar los campos de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos en cada uno de los cuerpos conociendo la carga  $f(x)$ , aplicada en la frontera del cuerpo A y las propiedades de ambos materiales, es decir:  $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2$ . La principal complicación consiste en la determinación de las condiciones en la frontera común a ambos cuerpos ya que constituyen:

- La carga sobre el cuerpo B transmitida a través del cuerpo A.
- La reacción del cuerpo B sobre el cuerpo A que, por ser un cuerpo elástico, depende de la deflexión.

Cabe destacar que en la frontera común entre ambos cuerpos pueden generarse esfuerzos de fricción. [15]

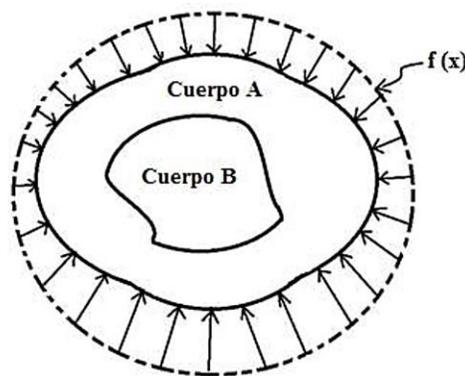
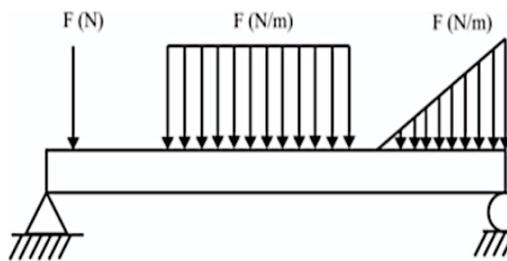


Figura 14. Diagrama genérico que representa un problema de transmisión de carga a través de un medio elástico [15].

**Transmisión de cargas directas y no directas.**

El estudio de la transmisión de carga a través de medios elásticos es complejo. Debido a esto, en cursos convencionales de mecánica de sólidos se consideran casos en donde la fuerza está directamente aplicada a los cuerpos a estudiar. En la Figura 15a se muestra un caso de transmisión de carga aplicada directamente al cuerpo, este es analizado en libros básicos de mecánica de materiales. Por otro lado, en la Figura 15b, la carga se transmite a través de un medio elástico de una manera indirecta, convirtiéndose en un problema considerablemente más complejo.

Con solución definida



a)

Con solución aproximada



b)

Figura 15. Ejemplo particular de transmisión de cargas con solución: a) Ejemplo con solución definida. b) Ejemplo de solución aproximada [20].

A continuación, se describe un caso de transmisión de cargas directas y posteriormente se describirán 3 casos de transmisiones de cargas a través de medios elásticos.

## 2.1 Deflexión y la ecuación de la elástica

El cálculo de la deflexión máxima bajo una carga es de interés particular, ya que las especificaciones de diseño incluyen generalmente un valor máximo admisible para ella.



Se sabe que una viga sometida a flexión pura, como el caso de la Figura 15a. se flexiona en forma de arco y que, dentro del rango elástico, la curvatura de la superficie neutra puede expresarse como [16]:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (76)$$

Donde:

M = Momento flector

E = El módulo de elasticidad

I = El momento de inercia de la sección transversal.

Cuando una viga se somete a carga transversal, la ecuación (76) permanece válida para cualquier carga transversal, siempre que el principio Saint-Venant<sup>1</sup> sea aplicable. Sin embargo, el momento flector y la curvatura de la superficie neutra variarán en las diversas secciones. Si "x" es la distancia al extremo izquierdo de la viga, se tiene:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \quad (77)$$

Para determinar la pendiente y la deflexión de la viga en cualquier punto, se deduce primero la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden que caracteriza a la curva elástica o forma de la viga deformada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (78)$$

La resolución de este problema puede efectuarse por integración múltiple o por el método de doble integración, mismo que se presenta a continuación:

Del cálculo elemental se sabe que la curvatura de una curva plana en un punto Q (x, y) de ella es:

---

<sup>1</sup>Excepto en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas, la distribución de esfuerzos puede suponerse independiente del modo de aplicación de carga. [25]



$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (79)$$

En donde  $dy/dx$  y  $d^2y/dx^2$  son la primera y segunda derivadas de la función  $y(x)$  representada por esa curva. Pero, en el caso de la curva elástica de una viga, la pendiente  $dy/dx$  es muy pequeña y su cuadrado es despreciable comparado con la unidad. Entonces:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (80)$$

Sustituyendo por  $1/\rho$  de la ecuación (80) en la ecuación (77), se tiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (81)$$

La ecuación obtenida es una ecuación ordinaria, lineal, de segundo orden; es la ecuación diferencial que gobierna la curva elástica.

El producto “ $EI$ ” se conoce como la rigidez a la flexión y si varía a lo largo de la viga, como en el caso de una viga de sección variable, debe expresársele como función de  $x$  antes de integrar la ecuación (81). Sin embargo, para una viga prismática, que es el caso considerado aquí, la rigidez a flexión es constante. Multiplicando ambos miembros de la ecuación (81) por “ $EI$ ” e integrando con respecto a  $x$  se tiene:

$$EI \frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x) dx + C_1 \quad (82)$$

Siendo  $C_1$  una constante de integración. Si  $\theta(x)$  es el ángulo en radianes, que la tangente a la curva elástica forma con la horizontal en  $Q$ , y recordando que este ángulo es pequeño, entonces:



$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \cong \theta(x) \quad (83)$$

En consecuencia, la ecuación (82) puede escribirse en la forma alternativa

$$EI \theta(x) = \int_0^x M(x)dx + C_1 \quad (84)$$

Integrando los dos miembros de la ecuación en x, se tiene

$$EI y = \int_0^x \left[ \int_0^x M(x)dx + C_1 \right] dx + C_2 \quad (85)$$

$$EI y = \int_0^x dx \int_0^x M(x)dx + C_1 x + C_2 \quad (86)$$

Resolviendo esta ecuación para cada caso particular se puede obtener la deflexión en una viga sujeta a diversas cargas. Este tipo de problemas tienen solución y son reportados en los libros convencionales de mecánica de materiales. [16] [17] [18] [3]

## 2.2 Análisis del comportamiento de la transmisión de cargas a un tubo enterrado

Como se mencionó anteriormente, existen en la práctica varios casos, donde la carga aplicada a un elemento no es directa. Como primer ejemplo, se muestra el caso de tuberías enterradas (Figura 16b). En este caso es claro que las fuerzas que se ejercen sobre el tubo son aplicadas a través del medio que lo confina (tierra). Para estos casos se propone considerar al medio por el que se transmite la carga al tubo confinado como un elemento elástico.

De acuerdo con Moser [19] es necesario tener en cuenta tres parámetros esenciales en el diseño o análisis de cualquier instalación de conducto flexible:

1. Carga (profundidad del entierro)
2. Rigidez del suelo en la zona de la tubería



### 3. Rigidez de la tubería

La rigidez de la tubería, en lugar de la resistencia al aplastamiento, suele ser la propiedad que controla el material de la tubería. Su rigidez se puede expresar en términos de varios parámetros de la siguiente manera:

**Factor de rigidez = EI**

$$\text{Rigidez de anillo} = \frac{EI}{r^3} \text{ (o a veces } \frac{EI}{D^3})$$

$$\text{Rigidez del tubo} = \frac{F}{\Delta y} = 6.7 \frac{EI}{r^3}$$

Donde:

**E** = Módulo de elasticidad,  $\text{lb/in}^2$

**I** = momento de inercia de la sección transversal de la pared por unidad de longitud de tubería,  $\text{in}^4/\text{in} = \text{in}^3$

**r** = radio del tubo, in

**D** = Diámetro del tubo, in

**F** = Fuerza por unidad de longitud, lb/in

**$\Delta y$**  = Deflexión vertical, in

La terminología más utilizada es la rigidez de la tubería ( $F/\Delta y$ ). Este término se determina fácilmente en el laboratorio por una prueba de carga de placas paralelas.

Para una tubería flexible, la deflexión vertical es la variable que debe controlarse mediante un diseño de instalación adecuado. Esta deflexión es una función de los tres parámetros discutidos anteriormente [19].

Spangler notó que las tuberías flexibles proporcionan poca rigidez inherente en comparación con las tuberías rígidas, pero funcionan notablemente bien cuando se entierran en el suelo. Esta capacidad significativa de una tubería flexible para soportar cargas verticales del suelo se deriva de: (1) la redistribución de cargas alrededor de la



tubería y (2) las presiones pasivas inducidas cuando los lados de la tubería se mueven hacia afuera contra la tierra circundante. Estas consideraciones junto con otras adicionales en su investigación llevaron a la derivación de la fórmula de Iowa, que publicó en 1941.

Spangler incorporó los efectos del suelo circundante en la deflexión de la tubería. Esto se logró asumiendo que se aplicaba la teoría de cargas de Marston y que esta carga se distribuiría uniformemente en el plano en la parte superior de la tubería. También asumió una presión uniforme en la parte del fondo, dependiendo del ángulo de la cama. En los lados, supuso que la presión horizontal  $H^2$  en cada lado sería proporcional a la deflexión de la tubería hacia el suelo. La constante de proporcionalidad se definió como se muestra en la Figura 16 y se denominó módulo de resistencia pasiva del suelo. El módulo presumiblemente sería una constante para un suelo dado y podría medirse en una simple prueba de laboratorio. Por ello la fórmula de Iowa la escribió de la siguiente manera:

$$\Delta X = \frac{D_L K W_c r^3}{EI + 0.061 e r^4} \quad (87)$$

**Donde:**

$D_L$  = factor de retraso de deflexión

$K$  = constante de cama

$W_c$  = Carga de Marston por unidad de longitud de tubería, lb/in

$r$  = radio medio de la tubería, in

$E$  = módulo de elasticidad del material de la tubería, lb/in<sup>2</sup>

$I$  = momento de inercia de la pared de la tubería por unidad de longitud, in<sup>4</sup>/in = in<sup>3</sup>

$e$  = módulo de resistencia pasiva del relleno lateral, lb/(in<sup>2</sup>)(in)

$\Delta X$  = deflexión horizontal o cambio de diámetro, in

La ecuación (87) se puede utilizar para predecir las deflexiones de la tubería enterrada si se conocen las tres constantes empíricas  $K$ ,  $D_L$  y  $e$ . La constante de cama (base donde se pone coloca el tubo)  $K$  acomoda la respuesta de la tubería flexible enterrada a la reacción

---

<sup>2</sup> H = La altura de la cubierta del suelo.

opuesta e igual a la fuerza de carga derivada de la cama debajo de la tubería. La constante de la cama varía con el ancho y el ángulo de la cama lograda en la instalación. El ángulo de la cama se muestra en la Figura 17 [19].

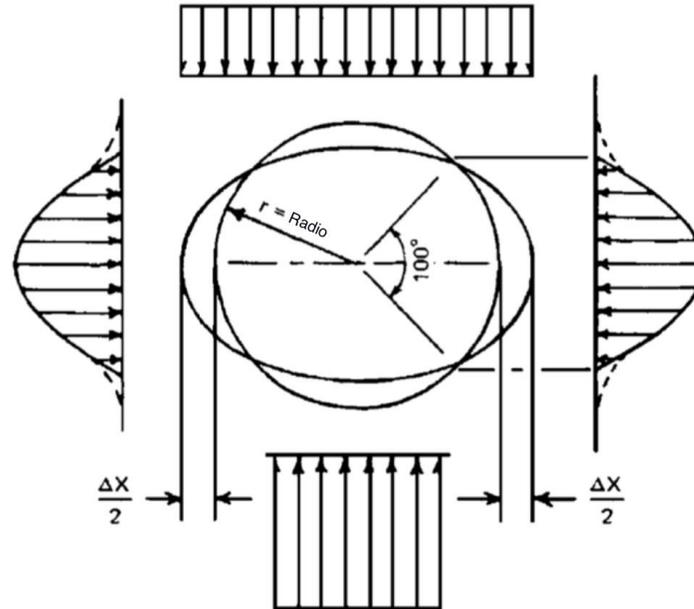


Figura 16. Base de la derivación de Spangler de la fórmula de Iowa para la deflexión de tuberías enterradas [19].

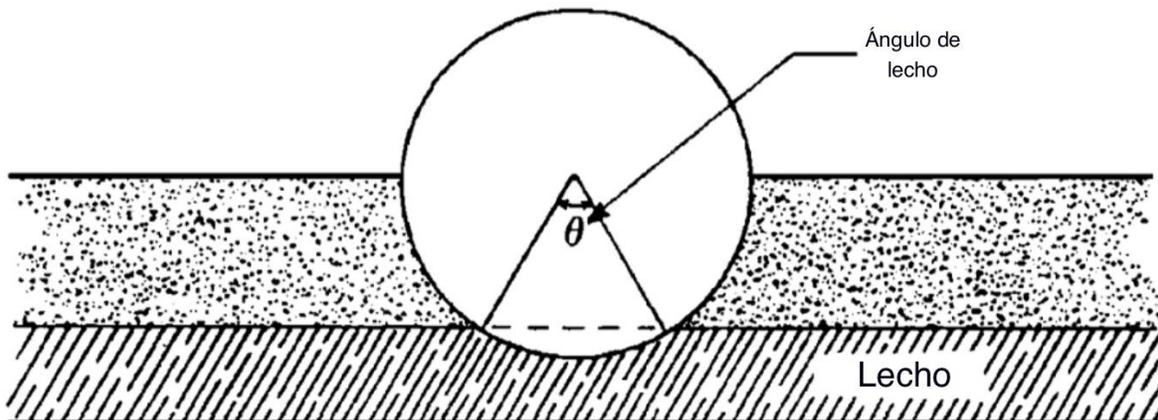


Figura 17. Ángulo de lecho [19].

De manera general lo que se pretende evitar son riesgos de colapso y como se ha mencionado, la forma de instalación es de suma importancia. Se deben tomar en cuenta parámetros de diseño, compatibilidad de materiales, medidas exactas, etc. Es por ello que, en documentos oficiales de la Comisión Nacional del Agua [20], se presentan las indicaciones y requerimientos para instalar una tubería flexible, Figura 18.

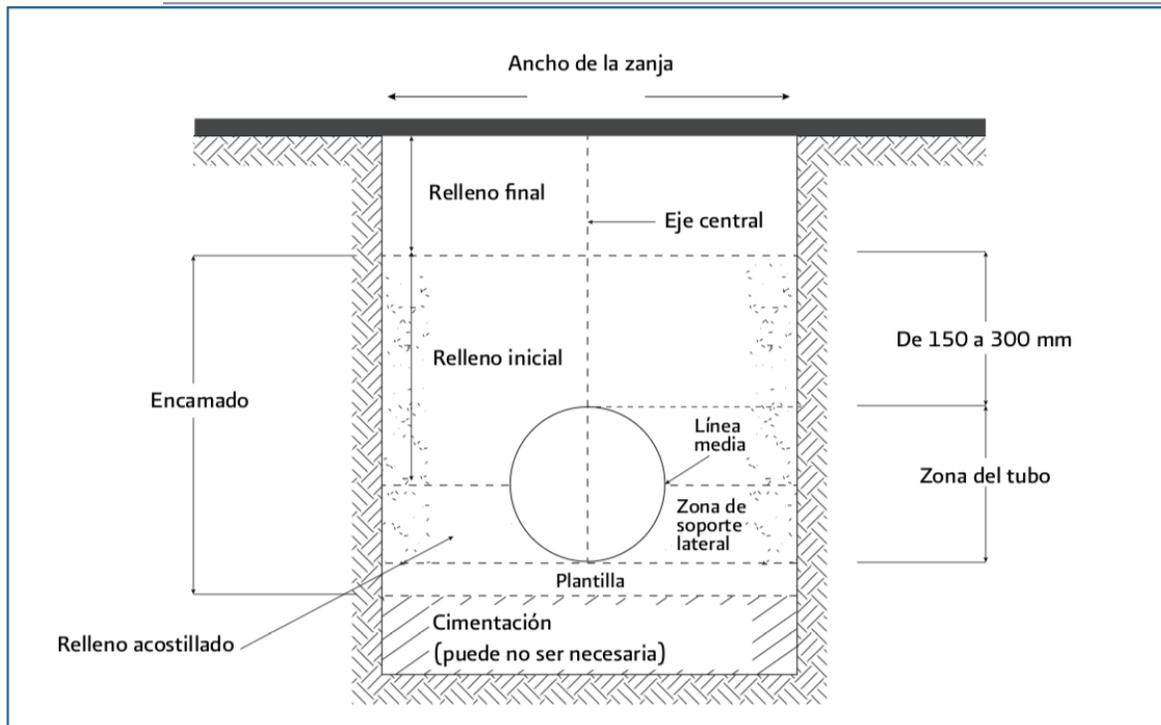


Figura 18. Esquema de elementos a considerar al enterrar un tubo [20].

Como se mencionó una de las partes más importantes a considerar para evitar colapsos en la relación desempeño carga/deflexión. En el caso específico de la tubería termoplástica se considera como conductos flexibles, ya que al recibir cargas se deforman (deflectan). La relación suelo-tubo provee una estructura capaz de soportar los rellenos de suelo y las cargas vivas de magnitud considerable. El diseño, las especificaciones y la construcción del sistema suelo-tubo deben tomar en cuenta que los materiales escogidos para el encamado deben ser seleccionados, colocados y compactados, de modo que el sistema suelo-tubo actúe conjuntamente para transmitir las cargas aplicadas sin deformaciones excesivas causadas por deflexiones o distorsiones concentradas de la pared de la tubería.

Dada la importancia de la deflexión en el caso de tuberías enterradas esta es clasificada de acuerdo al Manual de Instalación de Tubería para Drenaje Sanitario [20] de la siguiente manera: La deflexión de la tubería es el cambio en el diámetro del sistema suelo-tubo como resultado de los procesos de instalación de la tubería (deflexiones durante la construcción), efectos de las cargas estáticas y cargas vivas aplicadas al tubo (deflexiones inducidas por la



carga), y respuesta del suelo a lo largo del tiempo (deflexiones tardías). Las deflexiones inducidas de construcción y de las cargas constituyen la deflexión inicial de la tubería. Deflexiones adicionales dependientes del tiempo son atribuidas principalmente a cambios en el encamado y en el suelo del sitio, así como a los asentamientos de la zanja. La suma de la deflexión inicial y de las dependientes del tiempo constituye la deflexión total.

Debido a lo anterior existen algunos criterios de deflexión que son a menudo usados como límites de diseño y aceptación de la instalación de tubería flexible enterrada. Los límites de deflexión para sistemas de tuberías específicos pueden derivarse de consideraciones estructurales y prácticas. Las consideraciones estructurales influyen en la tubería, fluencia, resistencia, deformación y distorsiones locales. Las consideraciones estructurales incluyen factores tales como requerimientos de flujo, facilidades para la inspección, la limpieza y el mantenimiento del sello de las uniones. Los límites de deflexión inicial y final deben basarse en las propiedades estructurales disponibles con la aplicación de factores adecuados de seguridad [20].

Recientemente, se propuso un modelo simple que permite correlacionar la deflexión diametral que experimenta un tubo, de sección originalmente circular, con la distribución de deformaciones en la pared interior [21].

### **2.3 Transmisión de carga hacia un anillo plástico a través de un medio elástico con diversa rigidez**

Debido a la importancia de casos como el presentado en la sección anterior, se han desarrollado en el laboratorio de mecánica aplicada del Centro Tecnológico Aragón (CTA), algunos trabajos teórico-experimentales donde se estudia la transmisión de carga a través de un medio elástico. Estos estudios consistieron en someter a cargas de compresión una serie de anillos circulares (de dos materiales diferentes) confinados con materiales de diferente rigidez [22]. En la Figura 19 se muestra el arreglo general utilizado en estos trabajos.

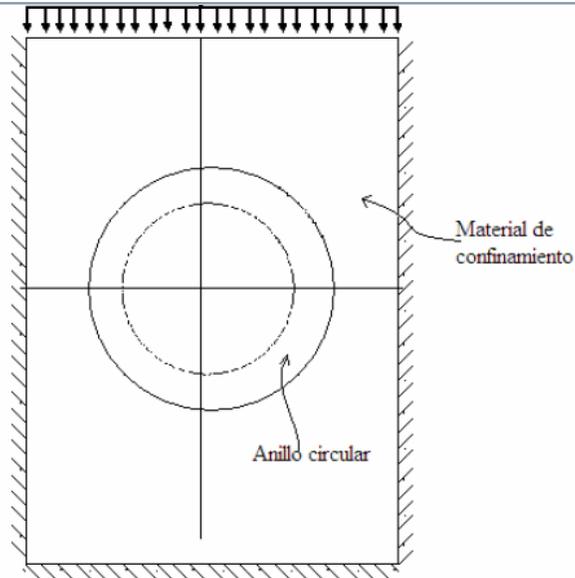


Figura 19. Arreglo de transmisión de carga a un anillo circular a través de un medio de confinamiento elástico [21].

Los experimentos y resultados de estos trabajos son asociados a un problema real presentado en tuberías enterradas, a pesar de que el medio que lo confina es granular. Sin embargo, como se mostró en la sección anterior, para algunos casos la tierra compactada puede ser considerada como un sólido elástico cuyo módulo de Young depende del porcentaje de compactación. Considerando esta suposición, el principal problema que se identifica en estos trabajos es la determinación de los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en el anillo.

Los experimentos consistieron en aplicar una carga de compresión uniforme sobre una superficie plana, que se transmite a un anillo de plástico circular. Los resultados obtenidos se pueden resumir en los siguientes puntos:

- **Modelo experimental**

Se obtuvo un modelo experimental que permite evidenciar los efectos nocivos de un mal confinamiento en el comportamiento mecánico de un tubo enterrado. Para estas pruebas se utilizó un Probador Mecánico Portátil [23] como base, para aplicar las fuerzas necesarias al tubo confinado, Figura 20.

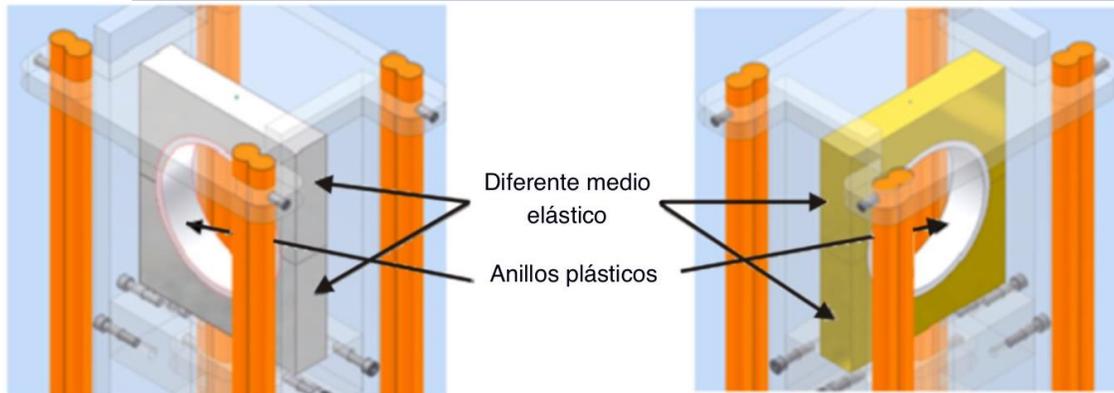


Figura 20. Modelo experimental utilizado para observar la transmisión de fuerza en anillos confinados [23].

- **Correlaciones**

Se encontró que existe correlación entre la rigidez del material de relleno, la deflexión del mismo anillo confinado y la distribución de deformaciones tangenciales en la pared interna del mismo.

- **Modelos matemáticos**

Por medio de un análisis simple de la transmisión de carga a través de un medio elástico, mostrado en la Figura 21, se obtuvieron las presiones radiales para el caso donde la carga es totalmente transmitida hacia la cavidad circular Ecuación (88) y cuando una parte de la carga se disipa de manera incremental hacia abajo Ecuación (89).

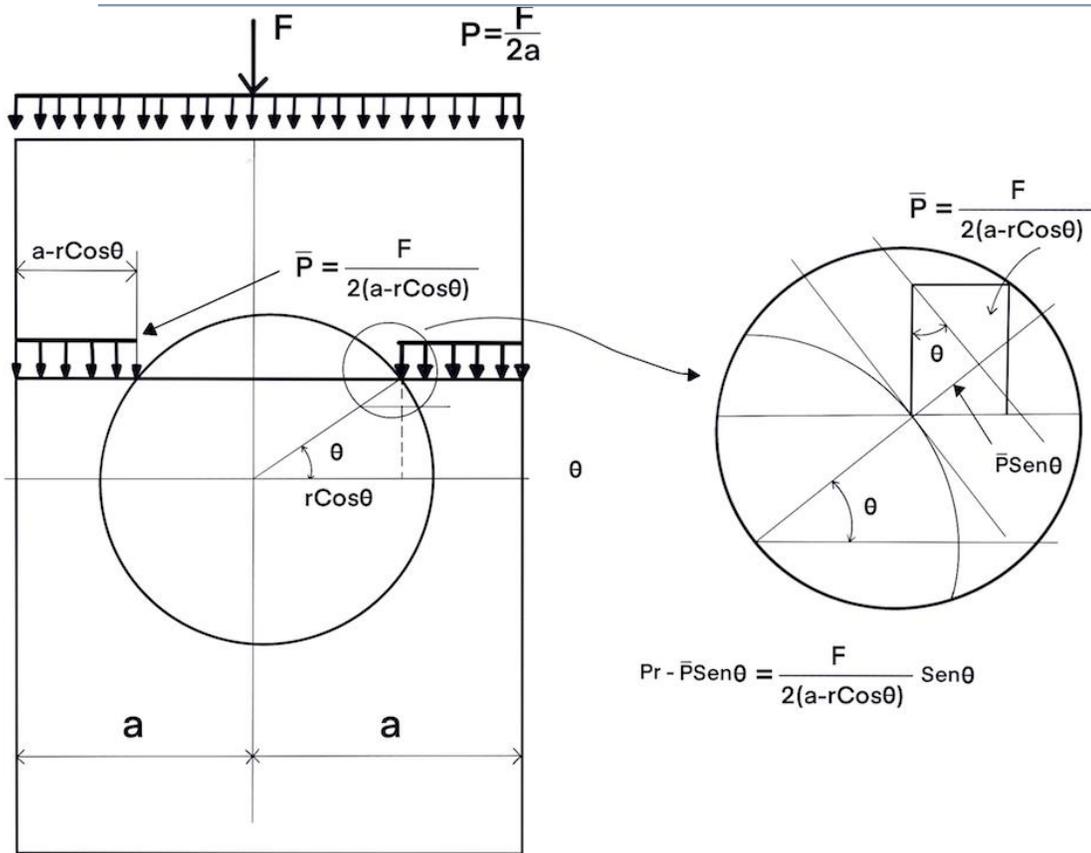


Figura 21. Análisis de la transmisión de carga a través de un medio elástico [21].

$$P_r = \frac{F \text{Sen}(\theta)}{2|a - r| \text{Cos}(\theta)} \quad (88)$$

$$\bar{P}_r = \frac{F[2 - |\text{Cos}(\theta)|] \text{Sen}(\theta)}{2[|a - r| \text{Cos}(\theta)]} \quad (89)$$

Donde: F es la resultante de la carga uniformemente distribuida "P", que se indica en la Figura 21. Análisis de la transmisión de carga a través de un medio elástico Figura 21; "2a"

es el ancho de relleno; “ $r$ ” es el radio de la cavidad circular central; “ $P_r$ ” es la presión radial aplicada en el anillo

Empleando las ecuaciones(88) y(89) se generaron las curvas  $P_r - \theta$  y  $\overline{P_r} - \theta$ , Figura 22. Como se puede ver en dicha figura, en el primer caso la carga tiende a ser uniforme a lo largo de la cavidad circular, mientras que, en el segundo caso la carga tiende a concentrarse en la parte superior e inferior del anillo, como se muestra en la Figura 22c.

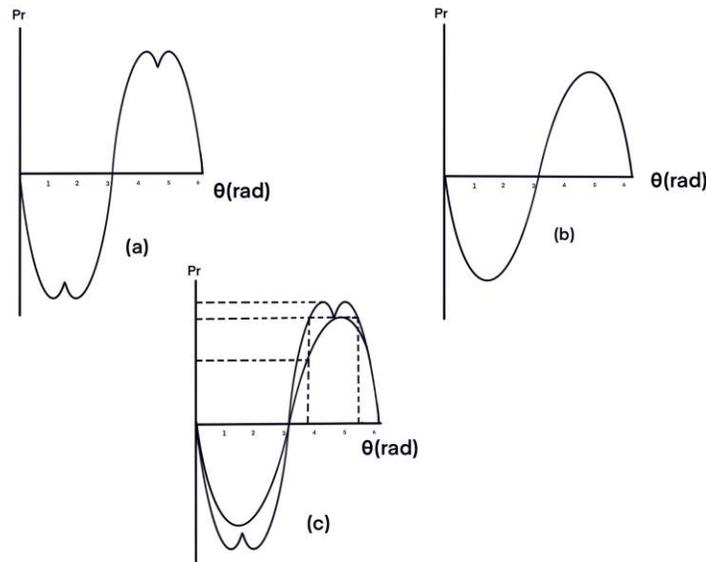


Figura 22. Curvas presión ( $P_r$ ) vs ángulo para los casos: a) transmisión de carga íntegra a través del medio, b) Transmisión de carga con disipación y c) Comparación de los dos casos [21].

Por otro lado, a partir de las ecuaciones(88) y(89) se calcularon los tensores de deformación correspondientes y posteriormente, aplicando un cambio de la base se obtuvieron los componentes tangenciales de la deformación, con las cuales se generaron las curvas  $\varepsilon_\theta$  vs  $\theta$  que se muestran en Figura 23. En dicha figura, la curva C1 corresponde con el caso en que la transmisión de carga es íntegra, mientras que la C2 se refiere al caso en el que una parte de la carga transmitida se disipa. En ambos casos C1 y C2, las deformaciones tangenciales ( $\varepsilon_\theta$ ) en tensión alcanzan su valor máximo en  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y  $\theta = \frac{3}{2}\pi$ , sin embargo, la razón entre las deformaciones máximas de compresión y las de tensión es mayor en el caso 2 que en el caso 1.

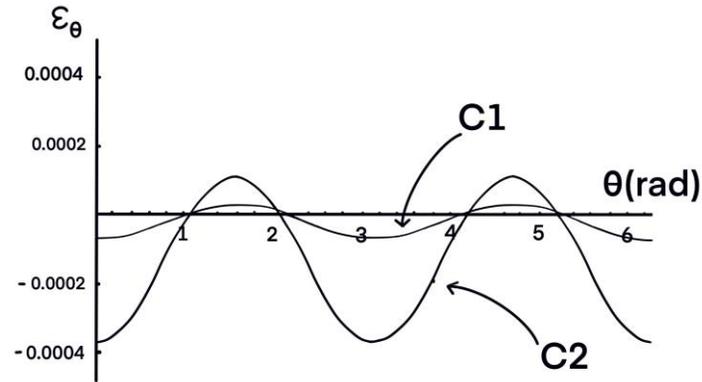


Figura 23. Deformación tangencial ( $\epsilon_{\theta}$ ) vs posición angular sobre el anillo ( $\theta$ ) para el caso en que la transmisión de carga es íntegra (C1) y para el caso en que se va disipando la transmisión de la carga (C2) [21].

Por otro lado, en el caso específico del trabajo publicado en las memorias de un congreso internacional [22], se utilizó la técnica conocida como “Correlación de imágenes digitales” y se determinó el campo de desplazamientos del medio elástico que rodea a un pequeño tubo plástico. El material que simula el confinamiento del tubo se marcó con líneas que forman una “malla” cuadriculada, lo anterior con el fin de comparar las imágenes antes y después de la carga, para observar de qué manera se desplazan los nodos (Figura 24a).

En todas las pruebas de estos estudios se utilizó la técnica de extensometría eléctrica para medir las deformaciones en la pared interna del tubo plástico (Figura 24b).

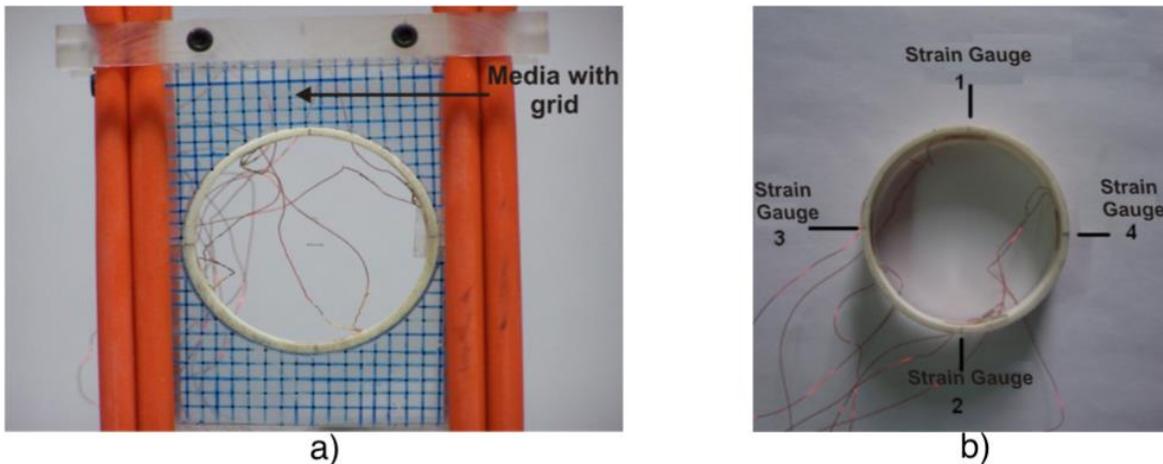


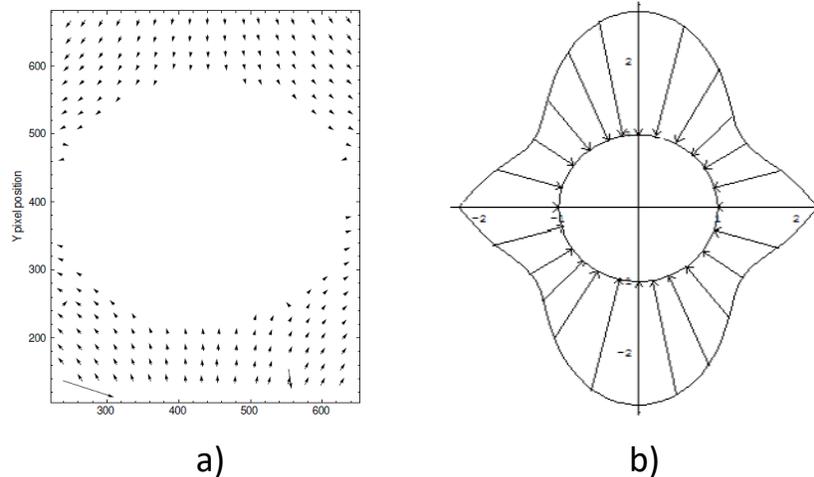
Figura 24. a) Modelo experimental. b) Anillo plástico instrumentado por cuatro galgas de esfuerzo [21].

En la Figura 25a se muestran los campos de desplazamiento que se obtuvieron para un caso de estudio. Utilizando los ajustes pertinentes se obtuvieron los campos de desplazamiento analítico que se muestran en las ecuaciones(90) y(91). En la Figura 25b se observa el campo calculado con las ecuaciones(90) y(91). Así mismo, empleando dichos campos en el perímetro externo del tubo, se determinó la presión radial aplicada sobre el tubo plástico, Figura 25a.

$$u = \left( \frac{-\alpha x(y - 2)fw}{\beta(y^2 - 6)} \right) \quad (90)$$

$$fw = \frac{1}{2} \left( \frac{x + 1.2}{\sqrt{0.0009 + (x + 1.2)^2}} - \frac{x - 1.2}{\sqrt{0.0009 + (x - 1.2)^2}} \right) \quad (91)$$

Con:  $\alpha = 0.0001$  y  $\beta = 0.004$  para el caso donde el módulo elástico de los medios elásticos es mayor. [22]



*Figura 25. a) Campo de desplazamiento obtenido del análisis de imágenes. b) Patrón de carga aplicada sobre los anillos calculado empleando el campo de desplazamiento [22].*

### Simulaciones numéricas

Se realizaron simulaciones numéricas del caso descrito en la sección anterior, utilizando el programa ANSYS, considerando como un solo cuerpo el tubo plástico y el medio que lo

confina. En la Figura 26 se muestran un par de simulaciones donde se observa el campo de deformaciones normales  $\varepsilon_{xx}$  y  $\varepsilon_{yy}$  para dos casos: a) permitiendo el desplazamiento lateral del confinamiento y b) restringiéndolo.

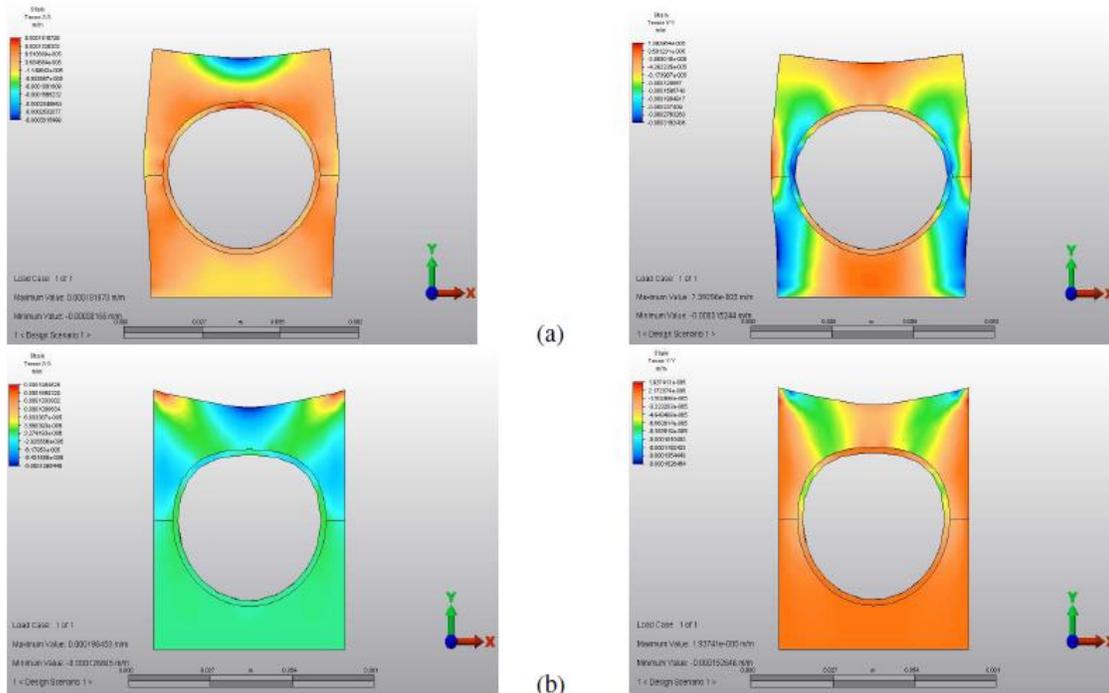


Figura 26. Simulaciones donde se muestra el campo de deformación [22].

De manera general, se encontró que estas simulaciones no corresponden con los resultados obtenidos en los experimentos; sin embargo, dan una clara idea de cómo afecta el confinamiento al comportamiento del tubo.

Considerando la dispersión encontrada, se elaboraron nuevamente los modelos numéricos, pero esta vez, aplicando como externa la presión radial descrita en la sección anterior. Los resultados obtenidos usando dichas cargas, mostrados en la Figura 27 donde se puede observar que los campos de desplazamiento normales  $\varepsilon_{xx}$  y  $\varepsilon_{yy}$  corresponden mucho mejor con los valores experimentales obtenidos.

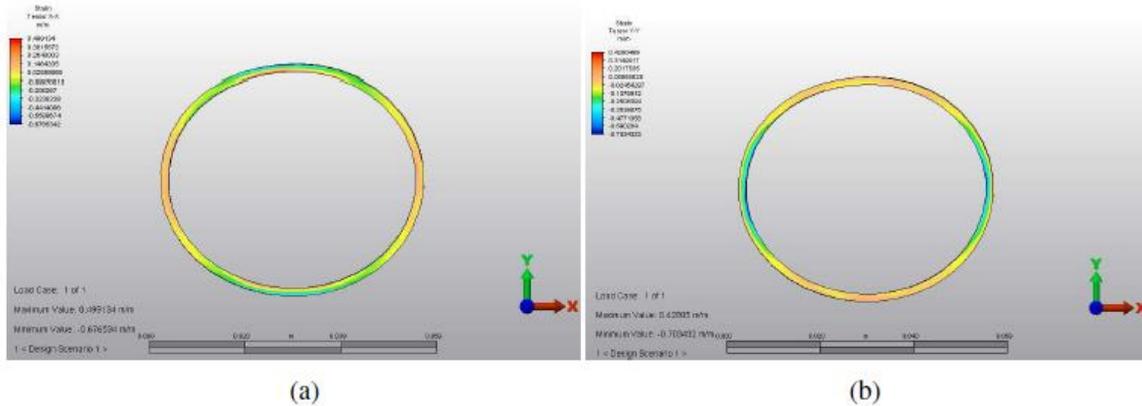


Figura 27. a) Exx y b) Eyy. patrón para la muestra con carga aplicada como en la Figura 25 [22].

## 2.4 Comportamiento mecánico de juntas tipo espiga – empaque – campana en tuberías plásticas.

En esta sección se presenta de manera resumida un análisis realizado previamente del comportamiento mecánico de una junta tipo espiga campana. El análisis considera la carga del empaque sobre la espiga y la campana como un problema de transmisión de carga entre cuerpos elásticos [15]. Así mismo, se identifica la influencia de la cavidad del empaque en su rigidez. Los resultados obtenidos explican una serie de efectos identificados en pruebas realizadas anteriormente, además de que proporcionan los parámetros fundamentales para el diseño de la junta.

Los autores analizaron los parámetros de diseño de la junta entre los cuales destacan: la geometría de los elementos y de la cavidad donde se aloja el empaque, así como las propiedades de los materiales. En particular, se determina la relación entre la rigidez de la campana, de la espiga y la presión inducida por el empaque.

Para determinar los parámetros de diseño de la junta, fue necesario estudiar el conjunto: espiga- empaque-campana como un problema de transmisión de carga a través de medios elásticos, es decir, la carga que aplica el empaque sobre la espiga y/o la campana depende de las propiedades elásticas del material de los tres elementos, así como de las dimensiones de estos y de la cavidad que aloja al empaque en la espiga.



La metodología propuesta por el autor para resolver el problema, aplicada a un caso simple como el de una viga en cantiléver sujeta a una fuerza generada por un resorte comprimido, consiste esencialmente en igualar las expresiones que permiten calcular la deflexión inducida en la viga por una fuerza aplicada, con la que induce un resorte helicoidal comprimido como se muestra en el diagrama de la Figura 28.

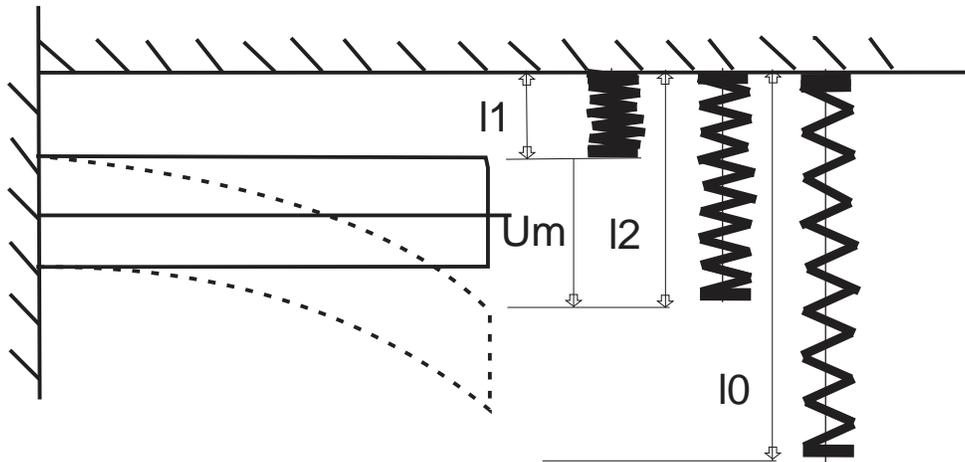


Figura 28. Diagrama esquemático de una viga sometida a una carga proveniente de un resorte [15].

Como se sabe, la deflexión de la viga en el punto de aplicación de la carga se calcula empleando la fórmula (95):

$$u_m = \frac{2F l^3}{3 E I} \quad (92)$$

Donde:

- $U_m$  = Deflexión de la viga
- $F$  = Fuerza aplicada por el resorte
- $L$  = Longitud de la viga
- $I$  = Momento de inercia del área transversal de la viga
- $E$  = Módulo de elasticidad del material

De la Figura 28 se definen las siguientes relaciones:

$$l_0 - l_2 = x \quad (93)$$



$$l_2 = l_1 + U_m$$

(94)

De donde se tiene que la fuerza aplicada sobre la viga por el resorte será:

$$F = K[l_0 - (l_1 + U_m)]$$

(95)

Donde:  $K_r$  es la constante del resorte,  $u_m$  es la deflexión de la viga en el punto de aplicación de la carga,  $l_0$  y  $l_1$  son los que se indican en la figura. Es claro que las ecuaciones(92) y(95) forman un sistema de ecuaciones que pueden ser resueltas para  $F$  y  $u_m$ , es decir, la deflexión y la fuerza inducida por el resorte como sigue:

$$U_m = \frac{2l^3 K(l_0 - l_1)}{3EI + Kl^3}$$

(96)

$$F = \frac{3EIK(l_0 - l_1)}{3EI + l^3 K}$$

(97)

En caso de la junta, el conjunto campana-empaquete-espiga, el problema es más complejo ya que se trata de tres cuerpos elásticos y no dos como en el caso de la viga. No obstante, es posible aplicar la misma metodología presentada aquí [15].

En la Figura 29 se muestra el caso de un conjunto espiga-empaquete-campana donde se ve claramente que se trata de un problema de transmisión de carga a través de un medio elástico. Como se ve en la Figura 29, dados los diámetros tanto de la espiga,  $a_1$  y  $b_1$ , como de la campana,  $a_2$  y  $b_2$ , así como el espesor original del empaque ( $l_0$ ), se desea determinar:

- El espesor final del empaque  $l_2$ , y
- La presión que ejercerá el empaque sobre la pared interna de la campana ( $p_i$ ) y/o sobre la pared externa de la espiga ( $p_o$ )

Es claro que, para insertar la espiga en la campana, el empaque debe comprimirse de tal manera que su espesor debe ser igual a la cavidad correspondiente es decir  $l_1$ . Una vez colocado el empaque, este se expandirá debido que ambos cuerpos que lo confinan, la campana y la espiga, son cuerpos elásticos. Es claro que la expansión del empaque continuará hasta que se alcance el equilibrio entre los tres cuerpos. El problema consiste

en determinar la magnitud de la presión inducida por el empaque sobre la espiga y/o la campana en función de las propiedades de los materiales de cada uno de los elementos.

En la Figura 29 se muestra el caso de un conjunto espiga-empaque-campana donde se ve claramente que se trata de un problema de transmisión de carga a través de un medio elástico.

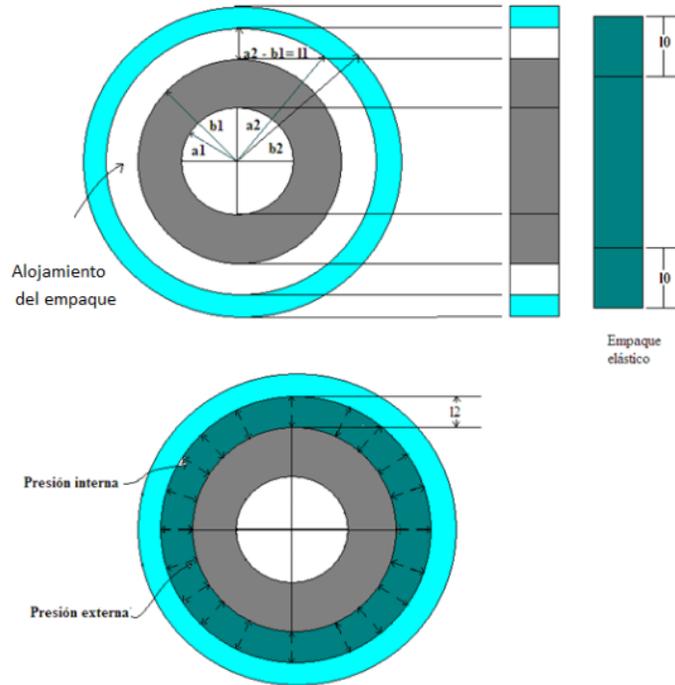


Figura 29. Diagrama esquemático de una junta tipo: espiga-empaque-campana [24, 15].

$$\varepsilon_{\theta\theta_1} = \frac{1}{E_1} \left[ -\frac{a_1^2 b_1^2 (p_e' - p_i)}{(b_1^2 - a_1^2) b_1^2} + \frac{a_1^2 p_i - b_1^2 p_e'}{(b_1^2 - a_1^2)} \right] \quad (98)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta_2} = \frac{1}{E_2} \left[ -\frac{a_2^2 b_2^2 (p_0' - p_i)}{(b_2^2 - a_2^2) b_2^2} + \frac{a_2^2 p_e - b_2^2 p_0'}{(b_2^2 - a_2^2)} \right] \quad (99)$$

Donde:

$p_0$ : Presión externa



$p_i$ : Presión interna

$a_1, a_2$ : Radios internos de la espiga y campana respectivamente

$b_1, b_2$ : Radios externos de la espiga y campana respectivamente

$E_1, E_2$ : Módulos de elasticidad de la espiga y campana respectivamente

Con estas expresiones,(98) y(99), es posible obtener y predecir el comportamiento mecánico de la junta espiga-empaques-campana, así como identificar los parámetros de diseño que deben ser considerados para garantizar el buen desempeño de la junta [15]. Este trabajo brinda una guía importante para resolver el problema, en suma, las medidas que se recomiendan para disminuir la falla durante pruebas de vacío son:

- a) Incrementar la rigidez de la espiga incrementando el momento de inercia de la sección.
- b) Disminuir la rigidez de la campana de manera que la relación de la rigidez de la campana con la de la espiga sea lo más baja posible.
- c) Cuidar que la cavidad del empaque en la espiga no multiplique de manera importante su rigidez

Desde luego que para determinar con precisión los valores de los parámetros de diseño de la junta, es necesario realizar una serie de cálculos que contemplen las dimensiones reales de los elementos; así como la aplicación de una presión variable debida a la transmisión de carga a través del relleno del tubo.

Con el análisis desarrollado, los autores llegaron a lo siguiente:

- Se propuso una metodología para el análisis de un problema de transmisión de carga a través de un medio elástico como lo es la junta tipo espiga- empaques-campana.
- Se obtuvieron los parámetros de diseño del empaque de una junta tipo espiga campana.
- Usando la metodología desarrollada se determinó la causa del efecto del empaque en una junta estudiada en un trabajo anterior.

## CAPÍTULO 3. Método experimental y modelación numérica

### 3.1 Descripción del equipo

El aparato usado para la realización de las pruebas fue el **Probador Mecánico Portátil (PMP)** diseñado por Jacinto Cortés Pérez en el Centro Tecnológico de la Facultad de Estudios Superiores Aragón [23]. Dentro de las ventajas que tiene el equipo es su portabilidad y fácil manejo, ya que en él se pueden realizar pruebas de compresión a elementos pequeños en diferentes arreglos como son: flexión en tres puntos, tensión, compresión, entre otros. El PMP es una prensa de carga hecha de acrílico con operación manual, consta de un sistema básico para medir tanto la magnitud de la carga que se aplica, como el desplazamiento. El PMP permite probar los siguientes casos: deflexión de un anillo circular sujeto a aplastamiento tanto libre como confinado, transmisión de carga a través de un medio granular, flexión de una viga simplemente apoyada y compresión en una columna. En la Figura 30 se pueden apreciar las partes principales del PMP y sus dimensiones generales.

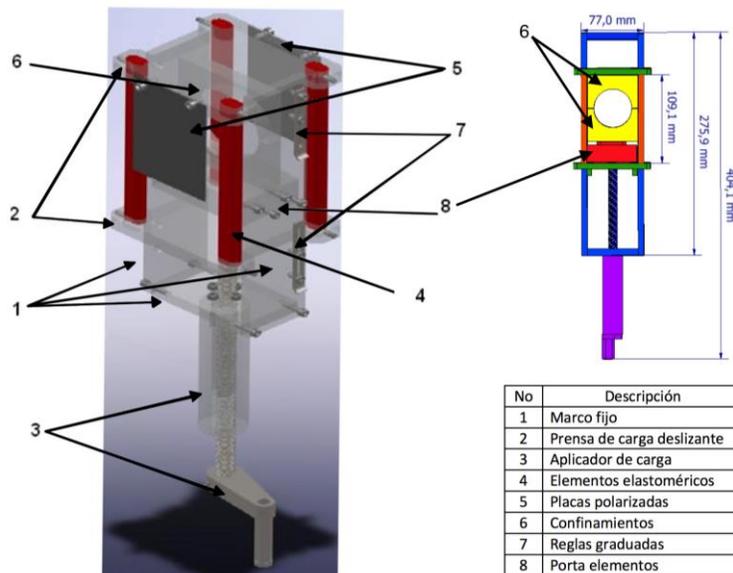


Figura 30. Probador Mecánico Portátil utilizado para pruebas de aplastamiento [23].

### 3.2 Arreglo de carga de compresión libre a un anillo circular

Las pruebas propuestas para el estudio realizado fueron con el fin de observar el comportamiento mecánico de tubos sometidos a compresión bajo dos tipos de arreglos: libre de confinamiento y con confinamientos variados. El arreglo libre de confinamiento se muestra en la Figura 31.

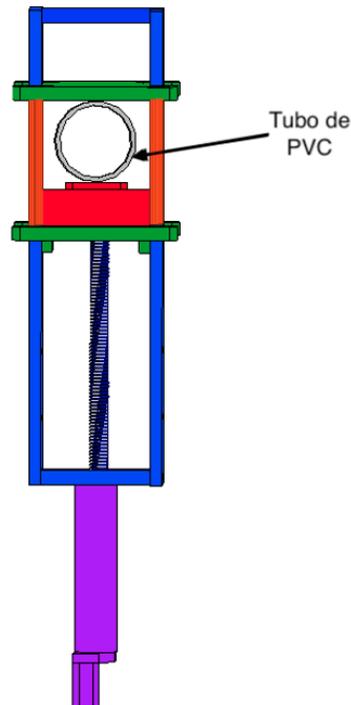


Figura 31. Arreglo de confinamiento libre.

Las pruebas se realizaron sobre un anillo obtenido de un tubo de PVC comercial y otro de material birrefringente. Las dimensiones seleccionadas, en base a las limitaciones del PMP, para estos anillos fueron: 2" de diámetro, 3/8" de ancho y un espesor de 2/16" para el anillo de PVC. Para el anillo birrefringente 2" de diámetro, 3/8" de ancho y un espesor de 1/8".

#### 3.2.1 Instrumentación con Galgas Extensométricas.

Con el fin de medir las deformaciones generadas durante las pruebas el tubo se instrumentó con galgas extensométricas y se colocó en el PMP como se muestra en la Figura 32. Una vez montado el tubo instrumentado se conectó cada extensómetro a los canales del sistema de adquisición de datos y se aplicó la carga para deformar el anillo.

El anillo de PVC se instrumentó con 4 extensómetros en su superficie interior, cada uno fue colocado con respecto al otro a 90° y catalogados como se muestra en la Figura 33.

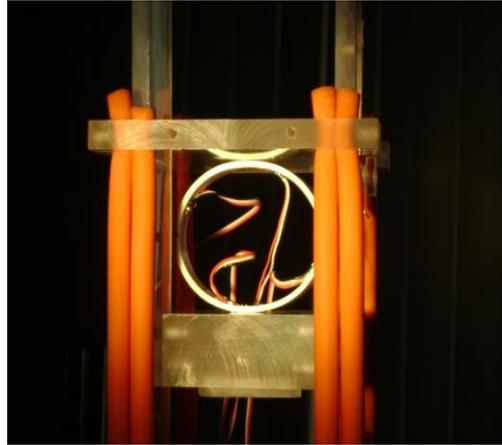


Figura 32. Instrumentación de Anillo, montaje en PMP.

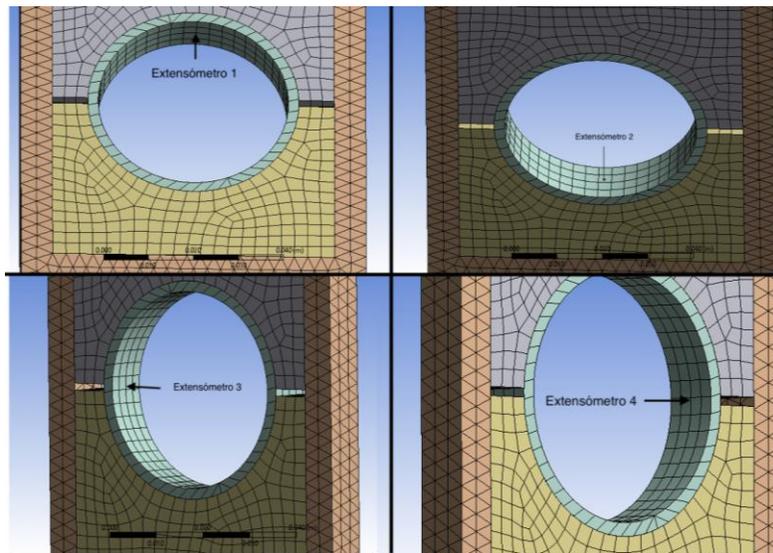


Figura 33. Ubicación de extensómetros.

#### - Galgas utilizadas

Las galgas extensométricas utilizadas fueron uniaxiales, modelo EP-40-125AC-350 para plástico con una resistencia de  $350.0 \pm 0.15\%$  y un factor de galga de  $2.050 \pm 0.5\%$ . Las galgas de modelo EP son conformadas de lámina de aleación “constantan”, ideales para casos de alto alargamiento de materiales como lo es el del PVC. Medidor de uso general ampliamente utilizado con red de alta resistencia. [13]

Los valores de las micro deformaciones que se obtuvieron durante las pruebas fueron tomadas por un equipo de adquisición de datos, el cual mide las micro deformaciones que se presentan en cada punto instrumentado en el espécimen, a medida que va cambiando la carga aplicada. Para este caso se utilizó un equipo modelo P3 de la marca Vishay (Figura 34), el cual utiliza la tecnología de procesamiento digital para eliminar el ruido y dar estabilidad a la medición. De igual manera puede ser controlada por el teclado del panel frontal o remotamente a través de una conexión USB. Tiene la capacidad de proporcionar seguridad a los datos, ya que pueden ser almacenados en tarjetas de multimedia estándar o descargados a una computadora utilizando la interfaz USB.



Figura 34. Equipo de adquisición de datos P3 [13].

### 3.3 Arreglo de carga de compresión a un anillo confinado

Las pruebas con confinamientos variados se realizaron de igual manera en el PMP, con la diferencia que se adicionaron confinamientos de material birrefringente, uno rígido (R1) y el otro suave (R2), donde el módulo de elasticidad de R1 es mayor que el módulo de R2. En la Figura 35 se ve el arreglo propuesto; así como los confinamientos utilizados.

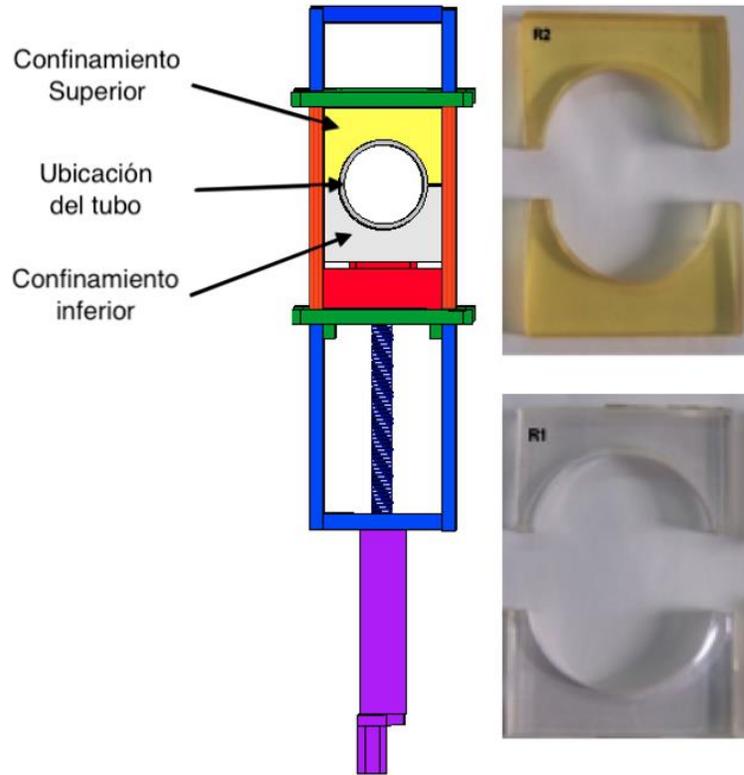


Figura 35. Arreglo con confinamientos variados (Confinamiento suave de color amarillo y confinamiento rígido transparente).

Con este arreglo es posible realizar combinaciones de confinamientos, alternando el confinamiento superior e inferior, con el fin de observar el comportamiento del anillo plástico a causa de la rigidez del medio que lo rodea. Se utilizó únicamente para estas pruebas, el anillo instrumentado de PVC utilizado en las pruebas de compresión libre. Esto con el fin de poder determinar la cantidad de deformación que induce la carga que se transmite a éste a través del medio confinado y saber cómo se comporta al variar sus condiciones de confinamiento. Las pruebas que se realizaron se listan en la



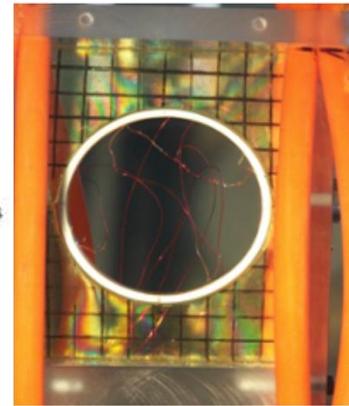
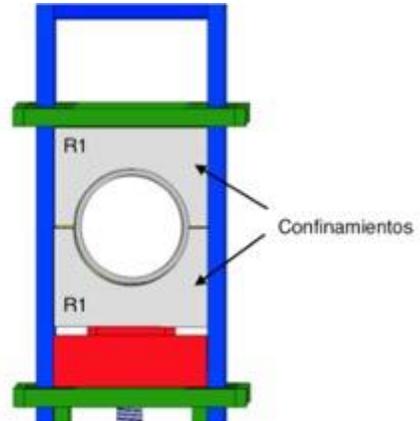
Tabla 2 mientras que en la Figura 36 se muestran los arreglos de carga en cada una de ellas. Una vez montadas las muestras en los equipos, se calibraron y se procedió a realizar las pruebas.

Tabla 2. Pruebas realizadas en el arreglo de confinamientos variados.

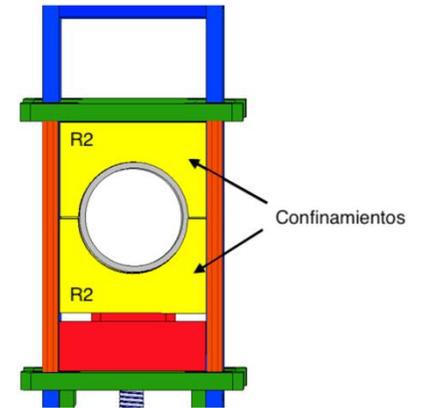
Prueba		Descripción	Detalle de arreglo	Notación	Figuras
1	Rígido-Rígido	Rígido	R1 Superior R1 inferior	R1-R1	Figura 36 (a)
2	Suave-Suave	Suave	R2 Superior R2 Inferior	R2-R2	Figura 36 (b)
3	Rígido-Suave	Mixto	R1 Superior R2 Inferior	R1-R2	Figura 36 (c)
4	Suave-Rígido	Mixto	R2 Superior R1 Inferior	R2-R1	Figura 36 (d)



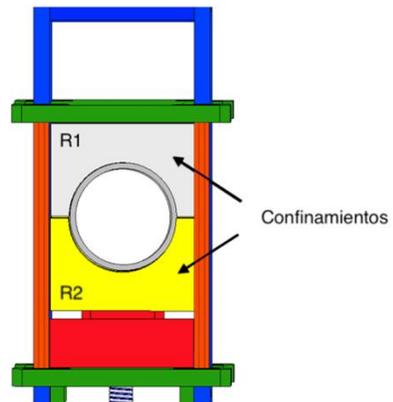
a)



b)



c)



d)

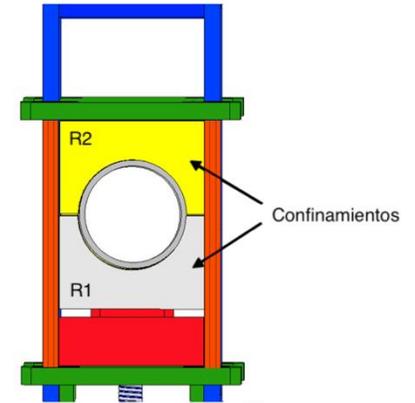


Figura 36. Combinación de confinamientos: a) R1-R1. b) R2-R2. c) R1-R2. d) R2-R1.

### **3.4 Modelo numérico**

Con la finalidad de comparar los resultados obtenidos en las pruebas experimentales, se realizó un modelo numérico utilizando los softwares inventor (Professional 2019) y ANSYS (2020 R2) ambos en su versión libre para estudiantes. En este modelo se consideraron los aspectos más importantes de las pruebas físicas como son: materiales, geometrías y arreglos de confinamientos. Estos serán detallados a continuación:

#### **3.4.1 Pruebas de referencia**

Como se mencionó en la sección 2.3, del capítulo 2 el problema de la transmisión de carga a través de medios elásticos ya había sido estudiado previamente y se contaba con modelaciones en el programa ALGOR. Estas simulaciones de manera general se pueden dividir en tres casos: Cuando el confinamiento está totalmente restringido lateralmente (Figura 37 a), cuando el confinamiento está parcialmente restringido lateralmente (Figura 37 b) y cuando el confinamiento está totalmente libre sin restricción lateral (Figura 37 c).

A pesar de que estos resultados muestran claramente el efecto que tienen las restricciones y cambios de confinamientos en el comportamiento del tubo, estas simulaciones no reflejan el comportamiento real de la prueba. Algunas de las razones son: que no se toma en cuenta la fricción que está presente en la prueba experimental, que no incluye el equipo que restringe los movimientos laterales de manera natural en las pruebas, la forma de simular la fuerza aplicada en la parte superior del arreglo Figura 37, entre otras cosas.

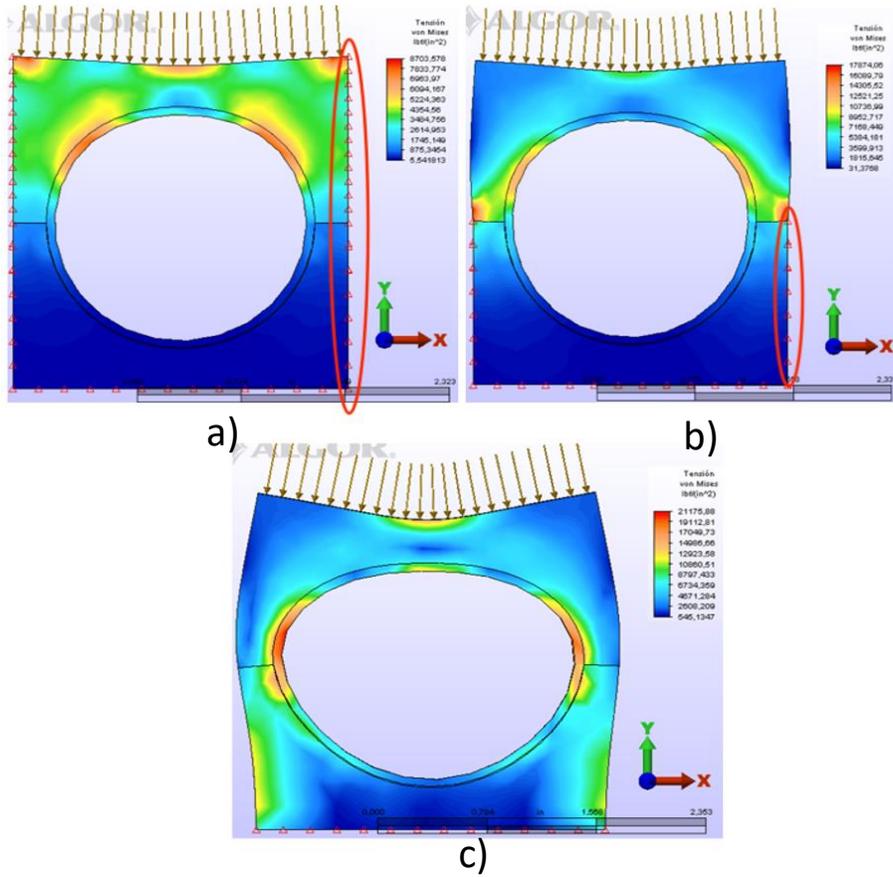


Figura 37. Confinamiento rígido. Análisis por elemento finito: a) FIXIADO. b) SEMIFIXIADO. c) SIN FIXIAR.

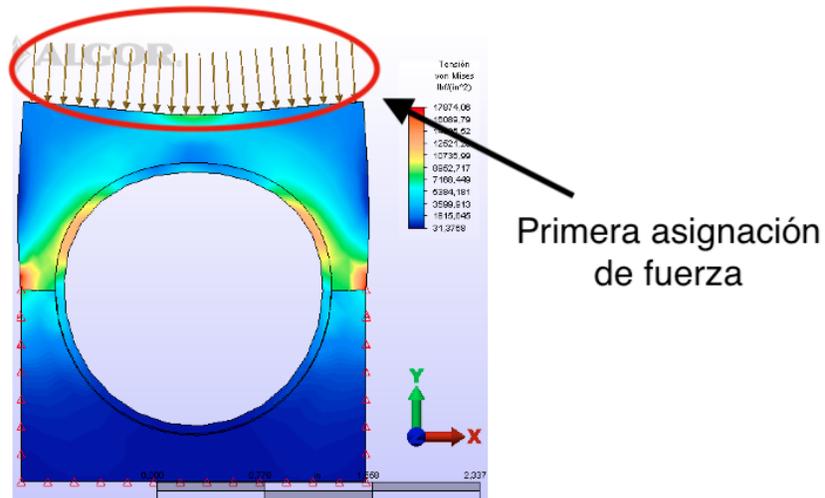


Figura 38. Distribución errónea de la carga.

Debido a lo anterior se realizó una modelación que se asemeja de mejor manera a las pruebas experimentales. El desarrollo general de esta modelación numérica se detallará en lo que resta de esta sección.

### 3.4.2 Parámetros de pruebas

#### Geometría

La geometría utilizada fue un ensamble importado desde inventor, basado en las dimensiones originales del PMP. Por practicidad, en el programa no se utilizaron todas las piezas, puesto que esto generaría mayores recursos computacionales, cálculos extensos y con poca relevancia.

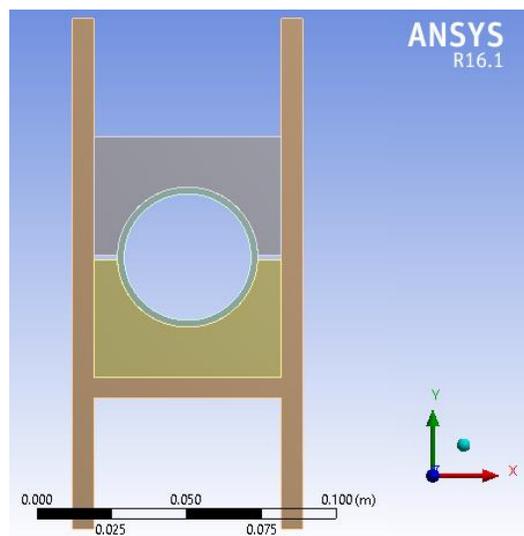


Figura 39. Geometría completa empleada.

Una vez insertadas las piezas en ANSYS se definió el material de cada una de ellas. En la Tabla 3 se muestran los materiales y sus parámetros utilizados. Como se puede ver en esta tabla, para ejecutar las simulaciones se tomaron en cuenta parámetros como el módulo de Young, módulo de Poisson, entre otros.

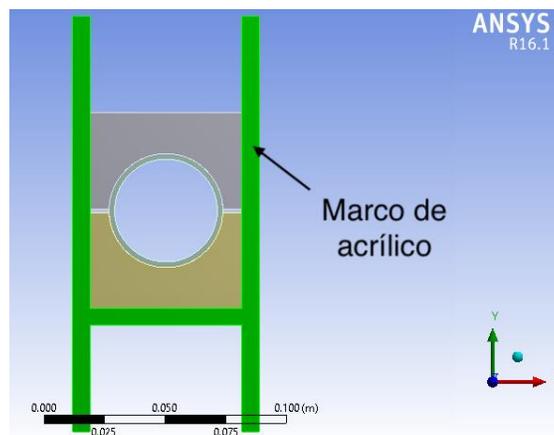
*Tabla 3. Especificaciones de los materiales.*

<i>Material</i>	<i>Densidad</i>	<i>Módulo de Young</i>	<i>Radio de Poisson</i>	<i>Módulo de corte</i>
<i>Acrílico</i>	$2800 \text{ Kg/m}^3$	2.8 GPa	0.33	1.053 GPa
<i>Polietileno</i>	$950 \text{ Kg/m}^3$	1.1 GPa	0.42	0.387 GPa
<i>Acero estructural</i>	$7850 \text{ Kg/m}^3$	200 GPa	0.3	76.920 GPa
<i>PVC</i>	$1250 \text{ Kg/m}^3$	3.275 GPa	0.38	1.186.6 GPa

Lo anterior permitió realizar diversas combinaciones de materiales en los confinamientos y ver de una manera general cómo se deforman las piezas, considerando lo siguiente:

- Base

Esta pieza es de gran utilidad porque, a pesar de que no se le aplica ninguna carga directamente, funciona como una restricción de movimiento debido a que es donde se apoyan los confinamientos. De esta manera se evitan confusiones a la hora de fijar los componentes. Al igual que el prototipo físico, el material con el que está hecho esta pieza es acrílico (Figura 40).



*Figura 40. Base de acrílico.*

- Tubo

El tubo está representado por un anillo de PVC comercial de Cédula 40 de 2 pulgadas de diámetro.

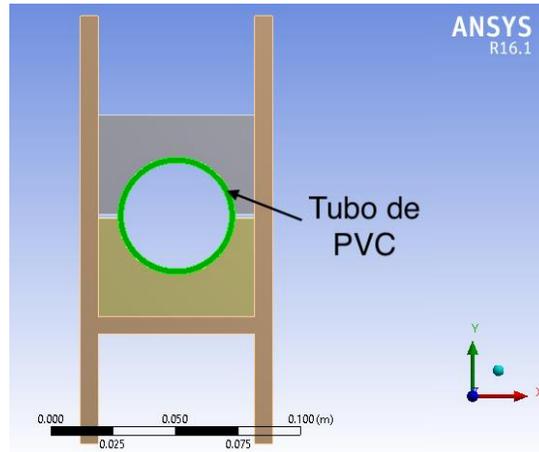


Figura 41. Tubo de PVC

- Confinamiento superior e inferior

Así como en las pruebas físicas, los confinamientos se alternaron según la combinación, con el fin de simular cómo cambia visualmente la geometría del tubo si se le compacta con un material rígido, uno suave o combinado. Los materiales utilizados fueron polietileno para el material suave, acrílico y acero para el material rígido.

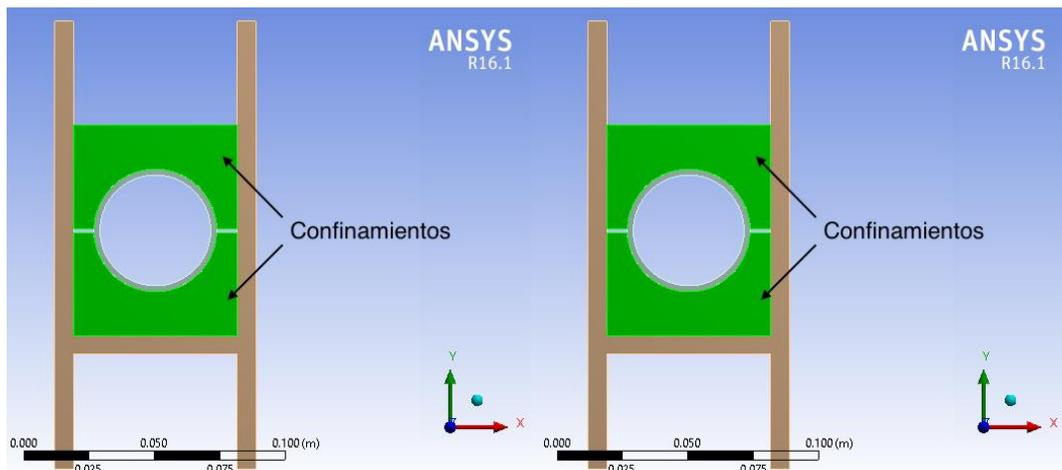


Figura 42. Confinamientos

- **Conexiones**

Para continuar, en la simulación se indicó de qué forma están unidos los materiales. Físicamente los confinamientos se encuentran en contacto lateralmente con la base del PM (Figura 43 a y b). De igual manera la cara exterior del tubo y la parte curva de los confinamientos están en contacto (Figura 43 c y d). Debe recalarse que los materiales están únicamente en contacto, esto quiere decir que pueden deslizarse entre ellos.

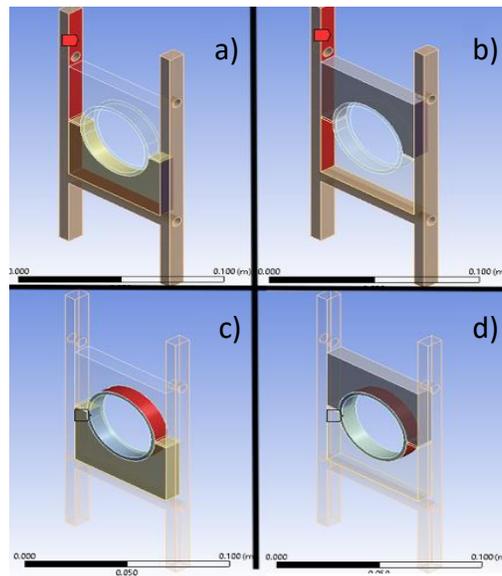


Figura 43. Contacto entre las piezas.

Como se mencionó anteriormente esto soluciona el problema de fijamiento de piezas que se tenía anteriormente en las simulaciones de ALGOR ya que se toma en cuenta la rigidez de los materiales y el marco sirve como restricción de los confinamientos.

- **Distribución de carga**

Para eliminar el problema de la distribución de carga mencionado en el capítulo 2, las simulaciones realizadas se hicieron en términos de desplazamiento-deformación. Al aplicar un desplazamiento en la parte superior del confinamiento (la cara amarilla en la Figura 44) se garantiza que el movimiento va a ser distribuido uniformemente y no únicamente en puntos específicos. La distancia recorrida que se utilizó fueron 3mm.

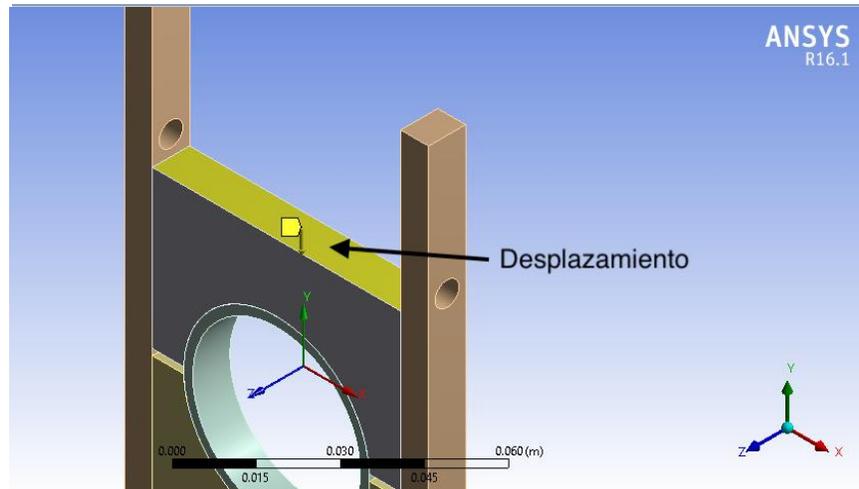


Figura 44. Asignación del desplazamiento.

La manera correcta de establecer las piezas fue fijar las superficies marcadas con azul en la Figura 45, que permitieran el apoyo para visualizar la deformación.

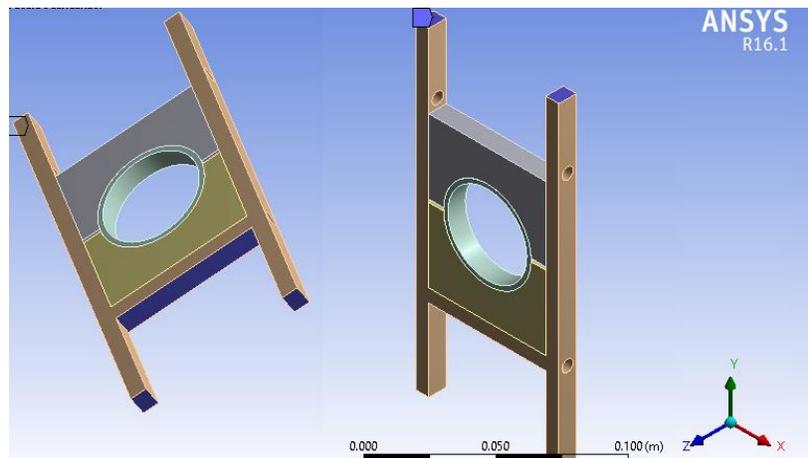


Figura 45. Superficies fijas.

- **Mallado**

Para la parte numérica es necesario determinar el mallado. Como se sabe, entre más nodos tenga será más preciso el estudio, pero hay que tener en cuenta que el programa utilizado requiere de equipo con una gran capacidad de procesamiento. Por estas razones se realizaron pruebas variando la cantidad de nodos en el mallado para determinar cuál era

mejor tomando en cuenta la relación precisión-capacidad de procesamiento. Se seleccionaron los 4 cuerpos mencionados anteriormente y se les asignó una malla con una distancia entre cada nodo de 3 mm (Figura 46).

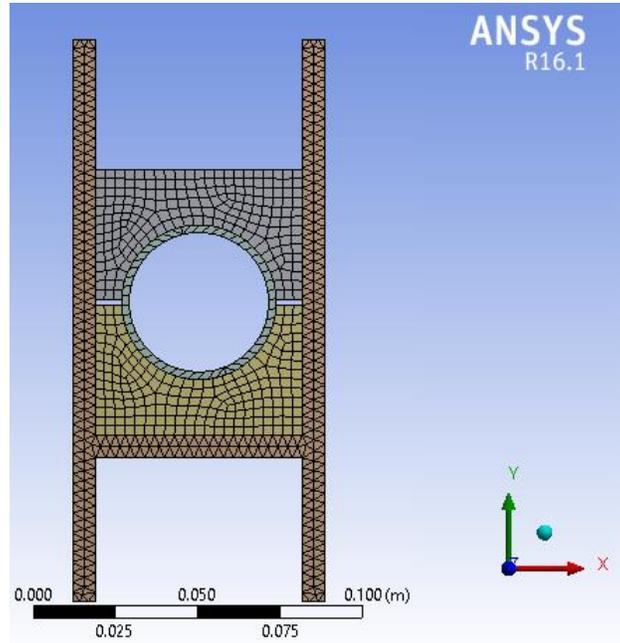


Figura 46. Mallado.

### 3.4.3 Pruebas realizadas

Después de la simulación, el programa proporciona valores de: esfuerzos, deformaciones, esfuerzos equivalentes de Von Mises, factores de seguridad, entre otros; sin embargo, para este caso se puntualizó en el análisis de la deformación elástica en el eje X para el análisis de los puntos instrumentados con los extensómetros 1 y 2, y en el eje Y para los extensómetros 3 y 4.

Al hacer la simulación se aprecia la deformación de todos los componentes y su valor asociado a un código de colores el cual permite de manera visual saber la deformación que se generó en cada punto. Como se sabe, los resultados obtenidos son adimensionales.

Para cada caso estudiado se realizaron 10 pruebas, variando el desplazamiento de 0 a 1 mm, avanzando 0.1 mm en cada simulación. Una vez obtenida la deformación en los puntos de interés se realizaron graficas con la finalidad de compararlas con las pruebas



experimentales. Para ello se realizaron las 4 combinaciones de confinamientos para el tubo de PVC: Rígido-Rígido, Suave-Suave, Rígido-Suave y Suave-Rígido.

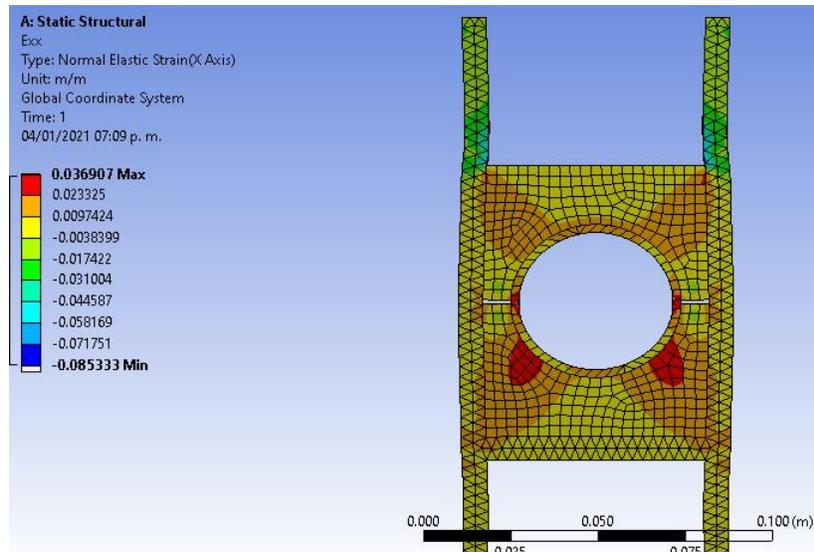


Figura 47. Ejemplo de simulación.

## CAPÍTULO 4. Resultados y discusión

En este capítulo se presentan los resultados tanto de las pruebas experimentales como de las obtenidas en las simulaciones numéricas y una comparación entre ambas.

### 4.1 Resultados experimentales

#### 4.1.1 Confinamiento libre

Cuando se realizó la prueba de compresión libre en el anillo plástico se observó, como era de esperarse, que la carga se transmite directamente a la superficie del anillo, ocasionando en este una deformación muy aparente, a tal grado que su geometría circular termina en forma de una elipse, Figura 48 (b). Por otro lado, en la prueba realizada al anillo de material birrefringente con mayor rigidez (Figura 48 d), se observó que en ese caso la deformación del anillo es menos aparente debido a que este ofrece mayor resistencia a la carga aplicada. En la Figura 48 se muestra la configuración sin carga y con carga de ambos casos.

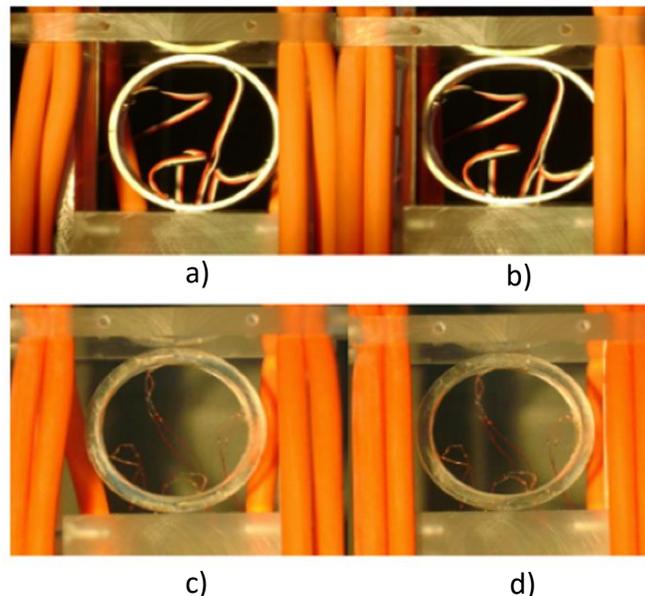


Figura 48. Prueba de confinamiento libre: a) Tubo de PVC sin carga, b) Tubo de PVC con carga, c) Tubo de material birrefringente sin carga, d) Tubo de material birrefringente con carga.

Para estas pruebas se aplicaron dos cargas, una de 3.2 N y otra de 6.6 N. En la Figura 49 se observa la gráfica de microdeformaciones contra carga para cada extensómetro



correspondientes al anillo plástico. Se decidió indicar en el eje horizontal la carga y en el vertical la deformación para una mejor visualización de los resultados, este procedimiento se hace de la misma manera en las siguientes pruebas mostradas en el presente capítulo.

Como se puede apreciar claramente en esta figura, las microdeformaciones de los extensómetros 1 y 2, en comparación con los extensómetros 3 y 4, mantienen una deformación proporcional, es decir, la compresión vertical es igual a la expansión horizontal conforme se incrementa la carga aplicada. El cambio de geometría que presenta el anillo circular a forma elíptica es debido a que los valores en tensión (positivos) tienden a ser mayores que los de compresión (negativos).

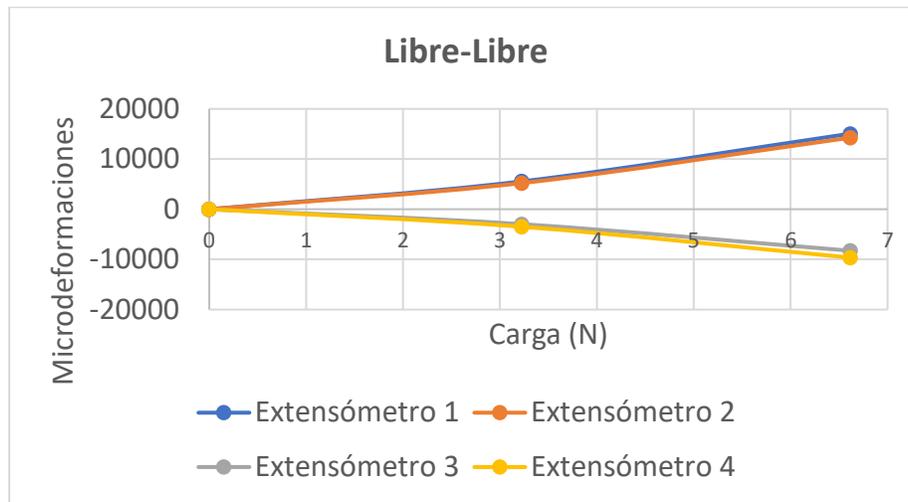


Figura 49. Gráfica de microdeformaciones-carga anillo plástico.

En el caso del anillo birrefringente se presentó un comportamiento similar al del anillo plástico, es decir, también existe compresión y expansión en los mismos puntos, aunque en esta prueba el valor de la deformación que presentan los extensómetros es mucho menor debido al aumento en la rigidez. Como puede observarse en la Figura 50, en este caso se aplicó una carga más que en el caso del anillo plástico.

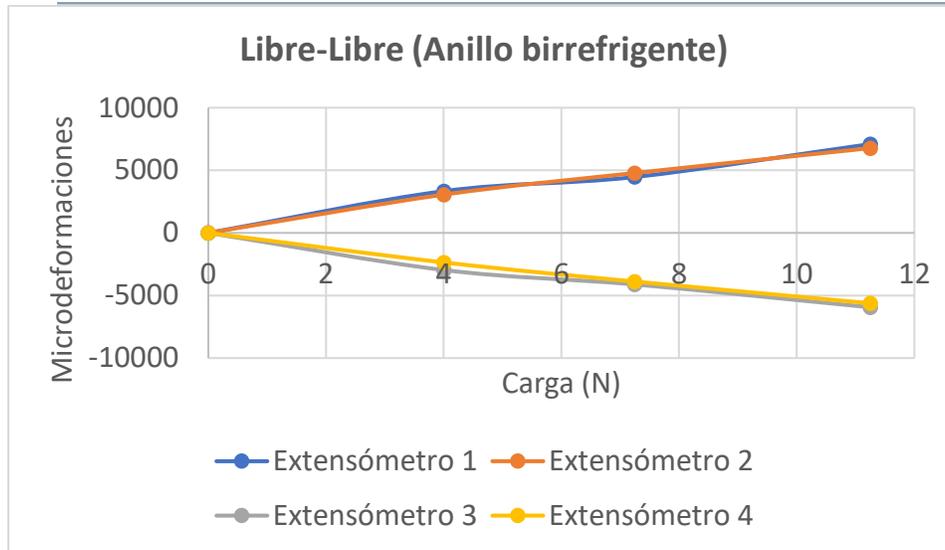


Figura 50. Gráfica microdeformaciones-carga A2.

#### 4.1.2 Confinamiento rígido

Una vez realizadas las pruebas de referencia se continuó con las pruebas en el tubo plástico con diferentes combinaciones de confinamientos. Como primera combinación se utilizó la configuración R1-R1, el comportamiento observado fue que la carga que el medio transmite al anillo es mínima, debido a que la deflexión es casi imperceptible a simple vista como se aprecia en Figura 51. Este caso podría ser análogo a un tubo enterrado y compactado de manera óptima, disminuyendo así el riesgo de colapso y las condiciones para la aparición de grietas.

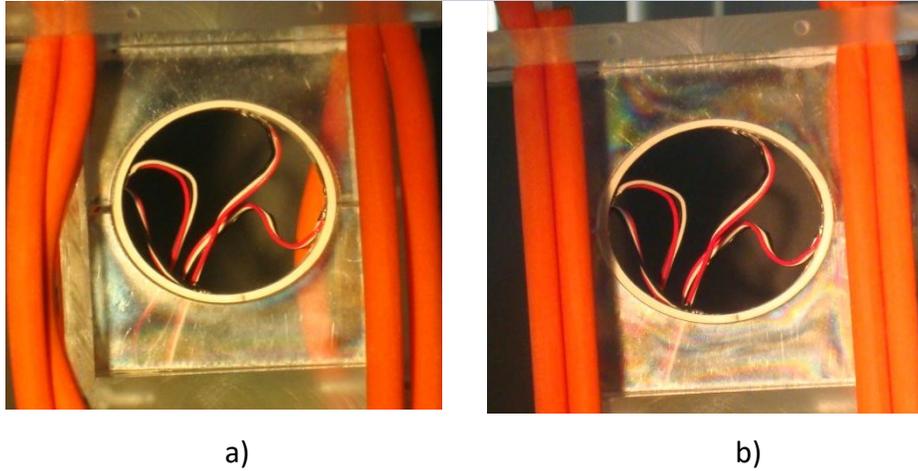


Figura 51. Confinamiento R1-R1: a) Sin carga. b) Con carga.

Posteriormente se realizaron las pruebas de extensometría para obtener las gráficas deformación-carga, se aplicaron nueve fuerzas diferentes. Los puntos obtenidos en los extensómetros 1 y 2 indican deformaciones de tensión muy pequeñas, incluso el extensómetro 2 inició con microdeformaciones positivas y terminó con negativas. Por otro lado, los extensómetros 3 y 4 presentaron deformaciones de compresión (Figura 52). Una vez más el patrón de deformación es similar al que se obtiene en las pruebas anteriores, sólo que en este caso la expansión horizontal es considerablemente menor que la contracción que sufre el tubo verticalmente.

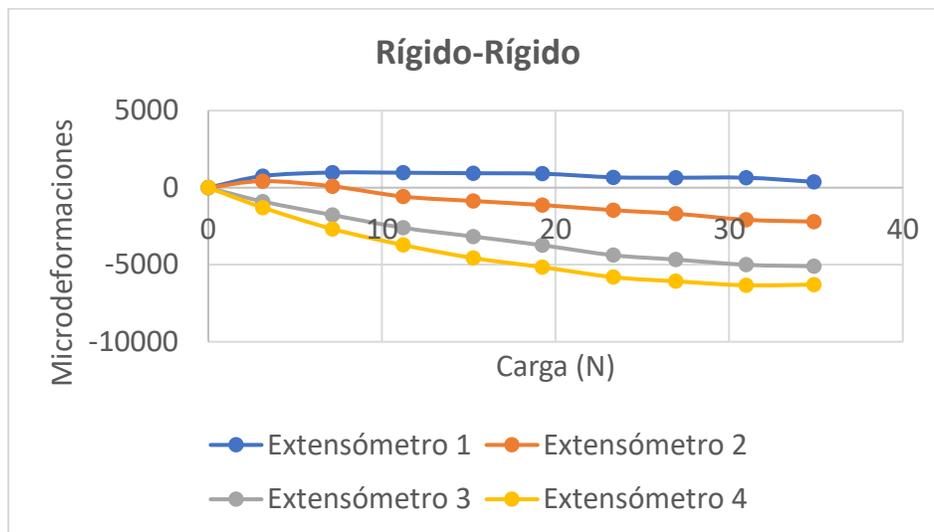


Figura 52. Curvas microdeformaciones-carga obtenidas en la prueba de confinamiento R1-R1.

La condición obtenida en esta parte del estudio es una condición ideal para un tubo enterrado, debido a que los esfuerzos de tensión son muy bajos o nulos, lo que contribuiría a disminuir el crecimiento de grietas en la pared interna y con ello el riesgo de colapso. Como la deflexión que sufre el anillo es prácticamente imperceptible a simple vista, correspondería al de un material bien compactado con un módulo elástico mayor.

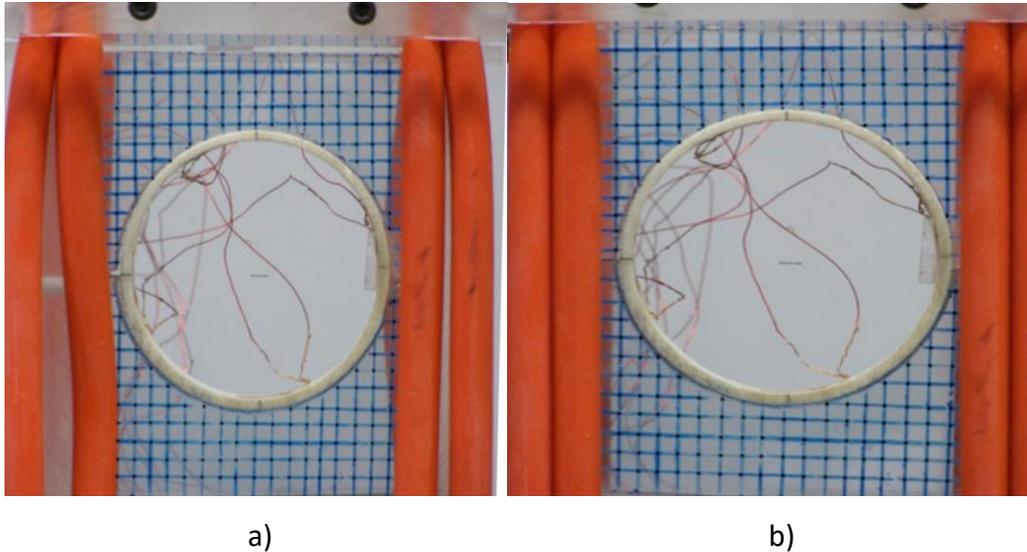


Figura 53. Confinamiento R1-R1 mallado: a) Sin carga b) Con carga.

### 4.1.3 Confinamiento suave

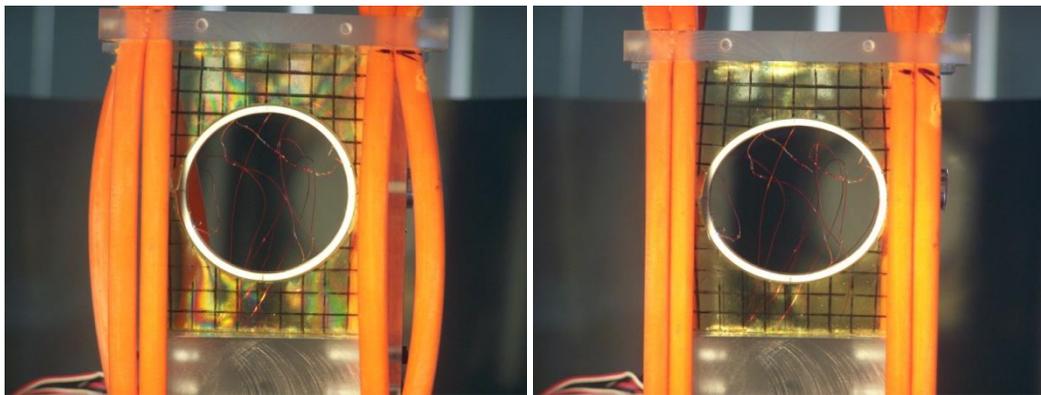
Para el tercer caso, el anillo plástico fue confinado con el material de menor rigidez (R2). El comportamiento manifestado indicó que se transmite mayor cantidad de carga al tubo que en las demás pruebas.

Se considera que esta simulación correspondería a un mal confinamiento para un tubo enterrado. Esta condición es totalmente indeseable, ya que facilitaría el colapso del tubo al transmitir mayor carga y el crecimiento de grietas preexistente debido a la aparición de esfuerzos de tensión.

Como en este confinamiento la deformación es más evidente, se pueden apreciar con más claridad los patrones isocromáticos de los confinamientos Figura 54. En esta misma figura se alcanza a apreciar cómo el anillo plástico sufre mayor deformación que en el caso anterior

(confinamiento R1-R1), por lo que las microdeformaciones indicaron que hay una cierta simetría entre las deformaciones de los puntos 1-2, y los 3-4, los cuales son prácticamente paralelos entre sí (Figura 55). En la figura es posible apreciar cómo las deformaciones en compresión (3 y 4) son ligeramente mayores que las de tensión (1 y 2).

Las condiciones a las que fueron sometidas las muestras en esta prueba corresponderían a las de un confinamiento pobre que no proporcionaría un buen apoyo a un tubo enterrado.



a)

b)

Figura 54. Confinamiento R2: a) Sin carga. b) Confinamiento R2 con carga.

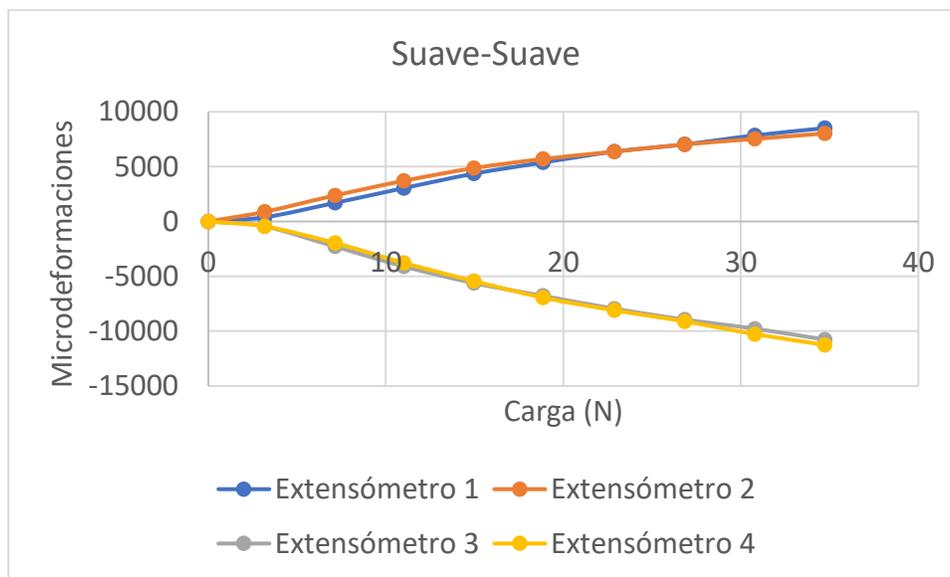


Figura 55. Gráfica micro deformaciones-carga confinamiento R2

En la Figura 55, se puede apreciar el comportamiento del anillo plástico confinado, cuando es sometido a la aplicación de la carga y la manera en que los nodos de la malla se desplazan conforme esta se va aplicando. Como se mencionó anteriormente, en este caso la deformación es más evidente dada la rigidez del confinamiento, haciendo más sencilla la interpretación de la transmisión de la carga.

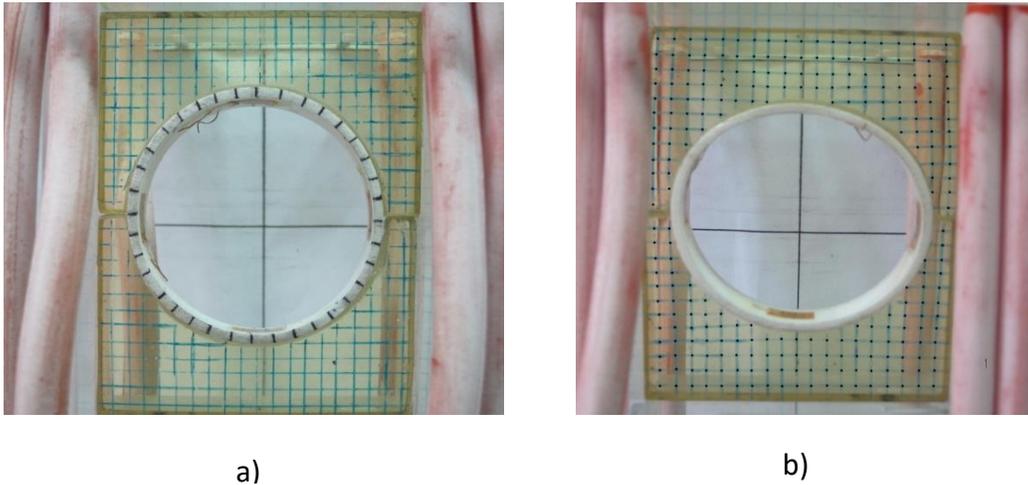
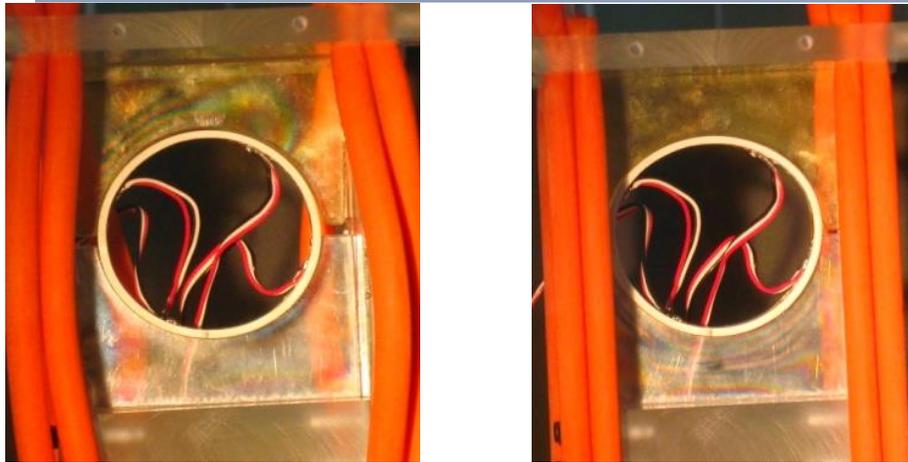


Figura 56. a) Confinamiento R2 mallado sin carga. b) Confinamiento R2 mallado con carga.

#### 4.1.4 Suave superior-rígido inferior

Los últimos dos casos consisten en una combinación de confinamientos, en los que se utilizan uno rígido y uno suave. Las cargas aplicadas al anillo plástico se transmiten de forma muy distinta. En el primer caso (Figura 57), donde el confinamiento de mayor rigidez es el inferior, los patrones isocromáticos muestran que el confinamiento suave absorbe la mayor cantidad de carga. Al ser transmitida la carga al anillo genera que éste se deforme gradualmente. Es necesario mencionar que únicamente sufre deformación el anillo en la periferia del confinamiento suave, debido a que en la periferia que está en contacto con el confinamiento rígido permanece estable y si se deforma es en una mínima proporción.



a)

b)

Figura 57. Confinamiento mixto R2-R1 con carga, b) Confinamiento mixto R2-R1 Sin carga.

Para este caso se observa que los extensómetros 3 y 4 mantienen un comportamiento parecido al tener valores similares de microdeformaciones (Figura 58). El extensómetro 2 tiene comportamiento similar (compresión) a los extensómetros 3 y 4 pero con valores menores, por esto se asume que la carga en ese punto es mínima, mientras que el extensómetro 1 presenta valores mayores de microdeformación (positivos), es decir, que la mayor cantidad de carga se trasmite a ese punto por medio del confinamiento suave.

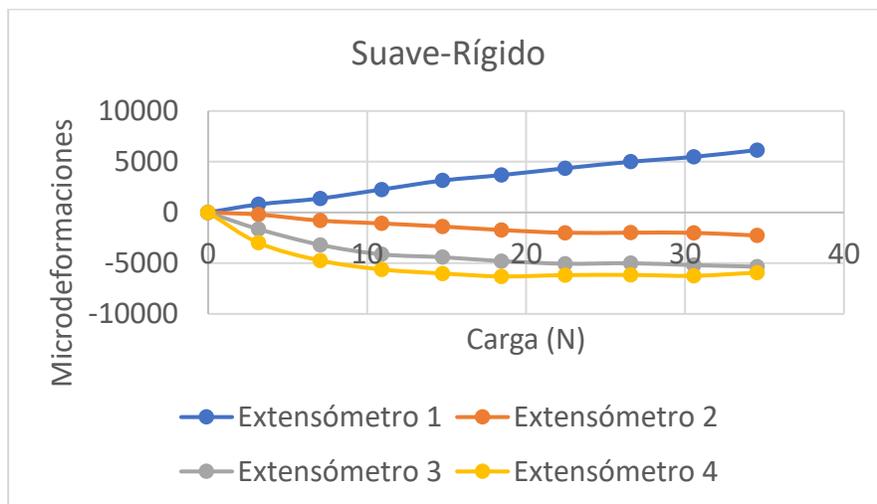
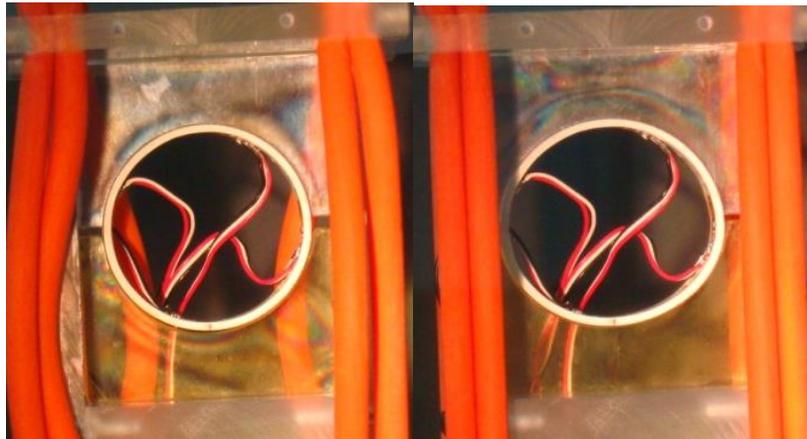


Figura 58. Gráfica microdeformaciones-carga confinamientos R2SR1.

#### 4.1.5 Rígido superior-suave inferior

Como último arreglo, se configuraron los confinamientos de manera contraria, el confinamiento rígido en la parte superior y el suave en la parte inferior. En éste arreglo se observa que el comportamiento de los patrones isocromáticos es similar al caso anterior. La mayor cantidad de esfuerzos se presentan en el confinamiento suave y por lo tanto el anillo se deforma en mayor proporción en esta superficie de contacto. Aunque la carga esta aplicada directamente sobre el confinamiento rígido, este no sufre deformación considerable por lo que la geometría del anillo no se ve afectada.



(b1)

(b2)

*Figura 59. Confinamiento mixto R1s y R2l: (b1) sin carga y (b2) con carga.*

Se observó en la gráfica correspondiente (Figura 60) que los valores de microdeformaciones del extensómetro 3 y 4 mantienen un comportamiento similar, y que el extensómetro 3 presenta el mayor valor de microdeformaciones (Figura 60). Lo anterior indica que la mayor cantidad de carga se trasmite a este punto por medio del confinamiento suave. En esta prueba el extensómetro 1 tiene un comportamiento interesante, debido a que presenta valores de microdeformaciones casi nulos durante toda la prueba. Mientras que el comportamiento del extensómetro 2 es parecido al de los extensómetros 3 y 4 pero con signo positivo.

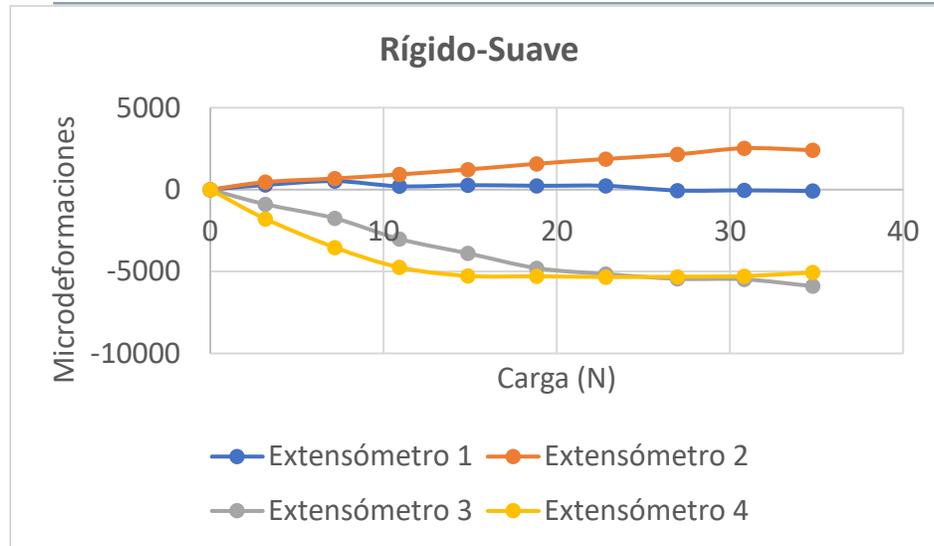


Figura 60. Gráfica microdeformaciones-carga confinamientos R15-R2I

## 4.2 Resultados de simulación numérica

Como se mencionó en la sección Pruebas realizadas para cada caso estudiado se realizaron 10 pruebas, variando el desplazamiento de 0 a 1 mm, avanzando 0.1 mm en cada simulación. En esta sección se muestran únicamente las imágenes con los desplazamientos máximos.

### 4.2.1 Confinamiento rígido

#### Acrílico-Acrílico

En este primer caso se consideró inicialmente al acrílico como el material rígido debido a sus propiedades mecánicas.

Para poder tener una correcta interpretación de cómo se distorsiona tanto el tubo como los confinamientos, es necesario obtener las vistas de la deformación elástica en  $\epsilon_{xx}$  y en  $\epsilon_{yy}$  (Figura 61).

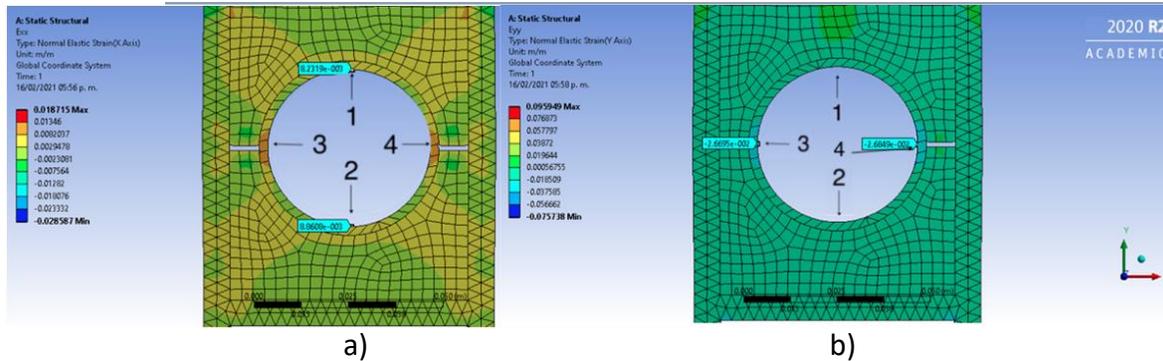


Figura 61. Simulación de la deformación elástica de acrílico-acrílico en: a)  $\epsilon_{xx}$  y b)  $\epsilon_{yy}$

Hablando únicamente del tubo, al momento de simular esta prueba se puede notar cómo éste tiene valores de deformación similares tanto en la parte superior como en la inferior (Figura 61). Su forma circular se pierde y adquiere ligeramente una forma elíptica.

En la Figura 61 (a), la gama de colores indica que las deformaciones son un poco simétricas entre ambos confinamientos. Se puede apreciar que en la parte superior e inferior del tubo hay un tono de amarillo y no rojo, esto quiere decir que en los puntos 1 y 2 hay poca deformación debido a que el confinamiento es rígido-rígido.

Ahora, analizando la Figura 61 (b), podemos apreciar que, en los puntos horizontales del tubo (puntos 3 y 4), la deformación incrementa de manera negativa, ya que los colores se acercan más al tono azul.

### Acero-Acero

Como en el programa es posible analizar varias combinaciones, se aprovechó este recurso para simular las pruebas con materiales aún más rígidos. La intención fue poder analizar qué pasaría si la compactación fuera incluso más rígida, esto llevo a resultados que se asemejan al caso anterior, pero la deformación se transmite de manera ligeramente diferente (Figura 62).

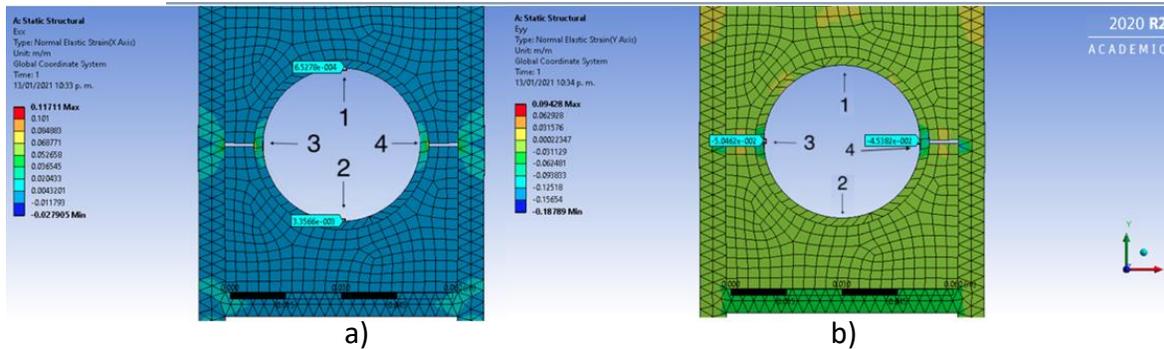


Figura 62. Simulación de la deformación elástica de acero-acero en: a)  $\epsilon_{xx}$  y b)  $\epsilon_{yy}$

A diferencia del caso anterior (Acrílico-Acrílico), la forma de círculo en el tubo se mantiene mejor tanto en el confinamiento superior como inferior. Se entiende que al ser más rígido el material este sufre menos distorsión. Algo que se puede notar es que el marco de acrílico no sufre una distorsión notoria en sus partes laterales, esto se debe a que el confinamiento casi no presenta desplazamientos laterales.

Se debe recordar que, aunque los colores estén cambiando en la imagen, es necesario siempre tomar en cuenta la barra de escala que se encuentra en la parte de la izquierda de las imágenes, ya que esta escala es determinada acorde a la diferencia de deformaciones en cada simulación. Sabiendo esto, se aprecia que en la Figura 62 (a), en los puntos 1 y 2 del tubo, no hay mucho cambio, se mantienen en una tonalidad intermedia de azul que equivale aproximadamente entre 4320 y -11793 microdeformaciones, teniendo valores exactos de 652.78 microdeformaciones en el punto 1 y 3356.6 microdeformaciones en el punto 2. Se destaca que el color del tubo en la simulación es muy parecido al de los confinamientos. En la Figura 62 (b), la situación cambia, pues se ve cómo en los confinamientos, la deformación es casi 0; sin embargo, en los puntos 3 y 4 la deformación se eleva de manera negativa a más de 30000 microdeformaciones. Esto indica que si en el tubo hay alguna zona donde pueda haber alguna fractura, sería en esos puntos.

#### 4.2.2 Confinamiento suave

En este tipo de combinación únicamente bastó con tomar un solo material, el polietileno. Este fue utilizado en ambos confinamientos y es la combinación con menor rigidez (Figura

63).

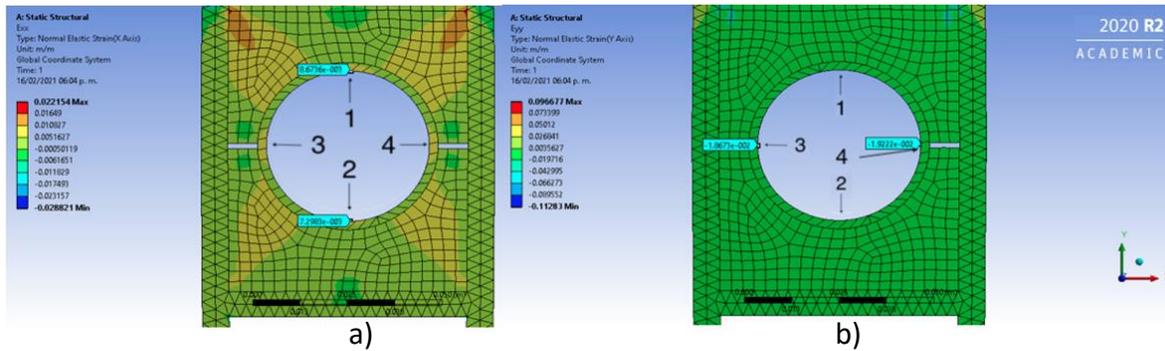


Figura 63. Simulación de la deformación elástica de polietileno-polietileno en: a)  $\epsilon_{xx}$  y b)  $\epsilon_{yy}$

Debido a que el material esta vez es suave, se puede apreciar claramente en la Figura 63, que las deformaciones en ambos confinamientos (arriba y abajo) es muy parecida, incluso se acerca mucho a lo simétrico. La forma circular se comienza a perder. Se entiende que, al ser un material blando, la deformación se distribuye de la misma manera tanto arriba como abajo, porque el material no presenta tanta resistencia a la carga o al desplazamiento que se le aplique.

La Figura 64 permite visualizar los puntos 1 y 2 de mejor manera, así se puede entender que en esos dos puntos específicos del tubo aumenta más la deformación, pues se ve que los colores cambian notablemente a un tono amarillo. En la Figura 63 (a), los puntos 1 y 2 del tubo indican una deformación aproximada de entre 5162 y 10827 microdeformaciones, según la escala de colores.

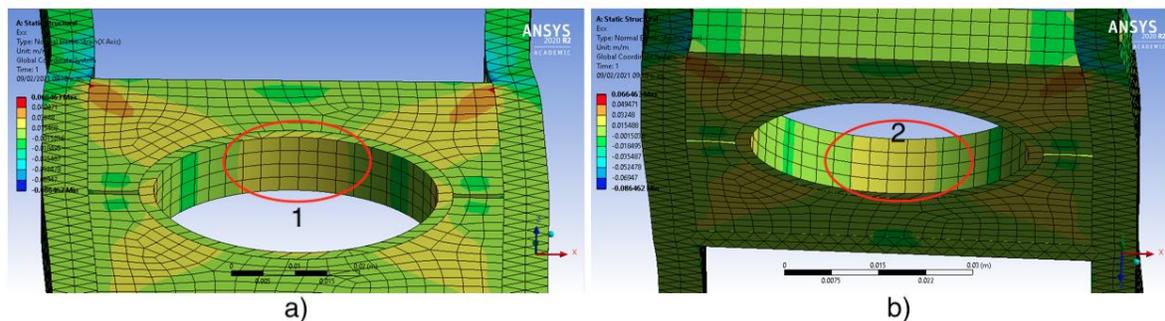


Figura 64. Simulación de la deformación elástica de polietileno-polietileno en a)  $\epsilon_{xx}$ : a) Vista Superior b) Vista inferior.

Por otro lado, en los puntos 3 y 4 de la Figura 65, se encuentra un mayor valor de deformación, aproximadamente de entre -19716 y -42995 microdeformaciones. Esto se aprecia mejor cuando se rota la imagen y se observa en el interior del tubo los colores azules que representan deformaciones negativas.

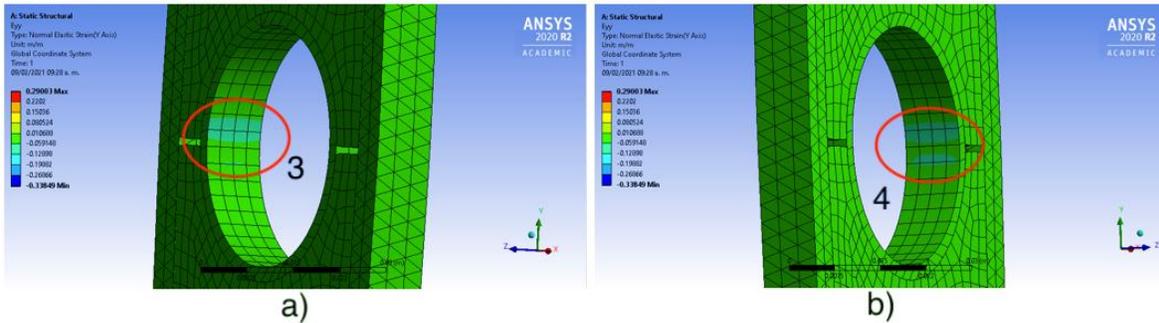


Figura 65. Simulación de la deformación elástica de polietileno-polietileno en  $\epsilon_{yy}$ : a) Vista Superior b) Vista inferior.

### 4.2.3 Confinamiento suave rígido

Las siguientes simulaciones realizadas son la combinación de los confinamientos mencionados anteriormente (R1 y R2). La primera de ellas es, suave arriba y rígido abajo (R2-R1).

#### Polietileno-Acrílico

Primeramente, se definió que el material rígido iba a ser el acrílico debido a que es más rígido que el polietileno. En esta combinación, el material birrefringente blanco fue representado por el acrílico y el material birrefringente amarillo (suave) por el polietileno.

En el confinamiento superior de la Figura 66 (a), se ve a simple vista que las deformaciones no son iguales a las deformaciones del confinamiento inferior, ya que en las esquinas superiores se eleva tanto en la escala de colores que toca el color rojo, denotando mayores deformaciones. Lo más importante de observar es que en los puntos 1 y 2 del tubo, los colores amarillos son muy parecidos indicando aproximadamente 17970

microdeformaciones. Por esto se optó más adelante por cambiar de material por otro aún más rígido en el confinamiento inferior.

Por otro lado, en los puntos 3 y 4 de la Figura 66, la deformación aumentó constantemente en ambos puntos durante las 10 pruebas. Esto será mostrado con más detalle en la sección de comparación de resultados.

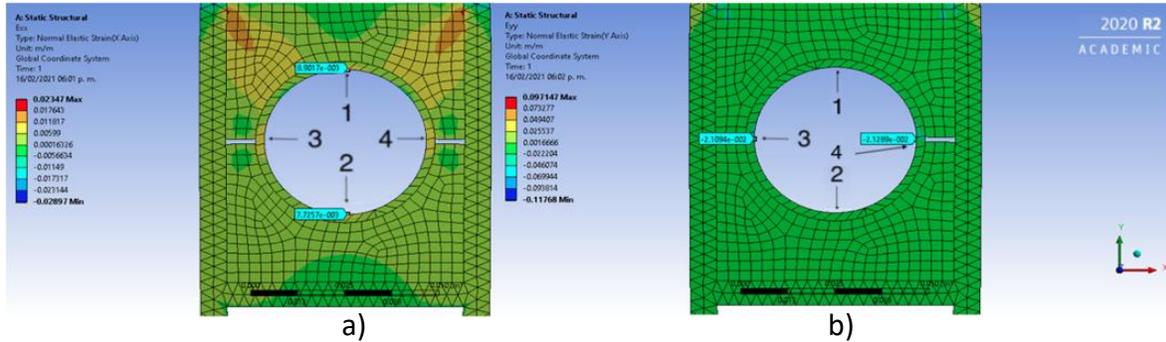


Figura 66. Simulación de la deformación elástica de polietileno-acrílico en: a)  $\epsilon_{xx}$  y b)  $\epsilon_{yy}$

### Polietileno-Acero

Con la intención de hacer más notorio el efecto visual de la distorsión en el tubo se tomó el material más suave de todos arriba (Polietileno) y el material más rígido (Acero) abajo (Figura 67).

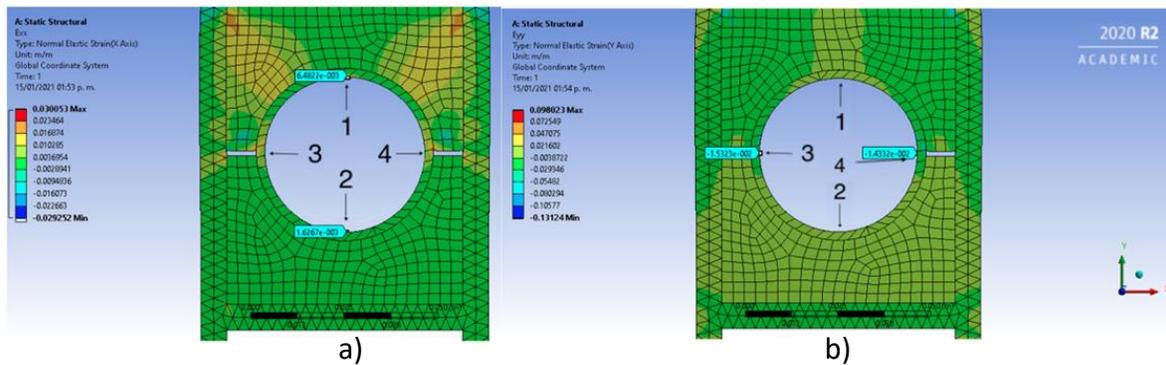


Figura 67. Simulación de la deformación elástica de polietileno-acero en: a)  $\epsilon_{xx}$  y b)  $\epsilon_{yy}$ .

Lo primero que resalta es que en el confinamiento superior empuja al marco de acrílico lateral aún más que en el caso anterior. La sección circular mantiene la forma un poco similar a la Figura 67, sólo que en esta se deforma más la parte superior del tubo.

La Figura 68 es el resultado de rotar la figura hacia arriba y hacia abajo. Se observa en el punto 1 un ligero toque de amarillo que tiene un valor de 6482 microdeformaciones, como se observa en la Figura 67 b. En el punto 2 no se nota un incremento alto de deformación; el valor de deformación está alrededor de las 3695 microdeformaciones, según la escala de colores. Es evidente que la deformación no es igual en los puntos 1 y 2. Esto se mencionará con más detalle en la sección de análisis de resultados.

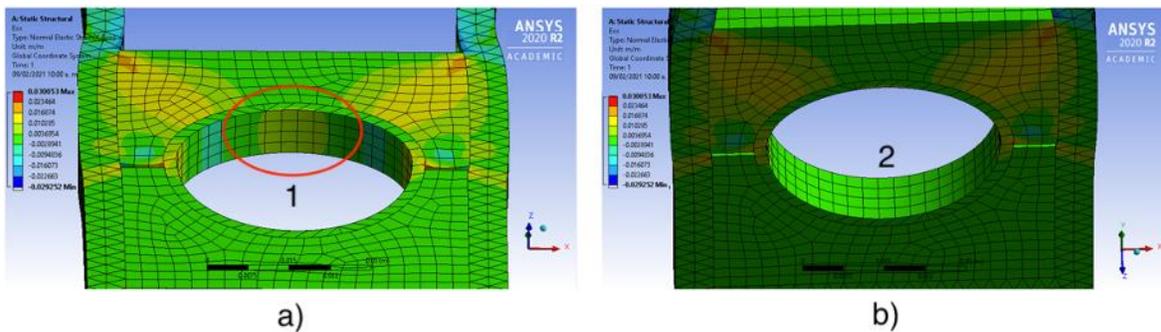


Figura 68. Simulación de la deformación elástica de polietileno-acero en  $\epsilon_{xx}$ : a) Vista Superior b) Vista inferior.

### Acrílico-Acero

La prueba acrílico-Acero se hizo únicamente con el fin de ampliar las combinaciones. Anteriormente se había determinado que el acrílico sería el elemento rígido. Como en esta ocasión el acrílico se combina con el acero, se entiende que al ser menos rígido que el acero, este va a fungir como el material suave y el acero seguirá siendo el material rígido (Figura 69).

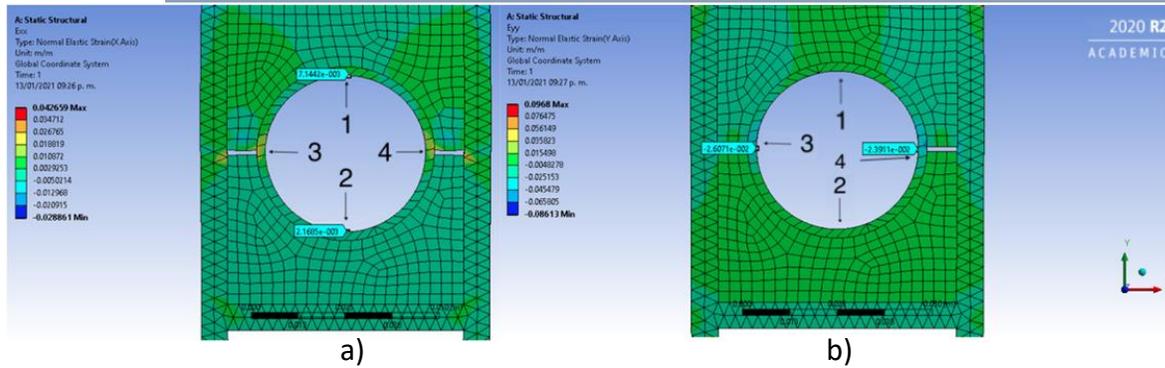


Figura 69. Simulación de la deformación elástica de acrílico-acero en: a)  $\epsilon_{xx}$  y b)  $\epsilon_{yy}$ .

En este caso se mantiene un poco la proporción que en los demás casos de suave-rígido, a pesar de que el acrílico no sea tan suave como el polietileno. La razón es que entre el acero y el acrílico sigue habiendo una gran diferencia de rigidez.

#### 4.2.4 Confinamiento rígido-suave

La última combinación es inversa a la de la sección anterior. En esta se estudia el caso del confinamiento rígido arriba y el confinamiento suave abajo. De la misma manera, se tomó en cuenta al acrílico como el material rígido y al polietileno como el material suave (Figura 70), aunque posteriormente se utilizó también el acero en las combinaciones (Figura 72 y Figura 74).

#### Acrílico- Polietileno

Para este caso (Figura 70) el confinamiento superior conserva una forma un poco más circular, a diferencia del confinamiento inferior, en la que se nota que ligeramente se distorsiona el tubo de una manera irregular.

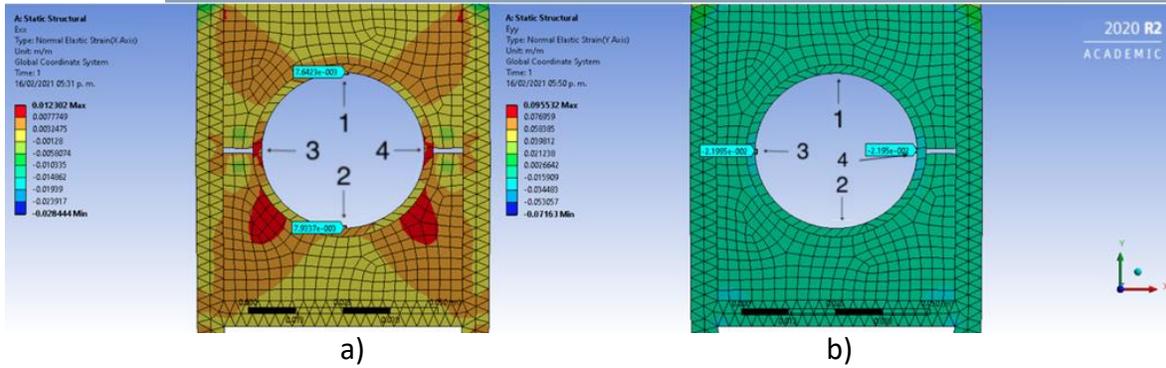


Figura 70. Simulación de la deformación elástica de Acrílico-Polietileno en: a)  $\epsilon_{xx}$  y b)  $\epsilon_{yy}$ .

Considerando que entre ambos materiales no hay tanta diferencia de rigidez, no es suficiente sacar conclusiones sólo con la imagen. Sin embargo, siempre es notorio que en los puntos 3 y 4 es donde hay mayor deformación, como se ve en la Figura 71.

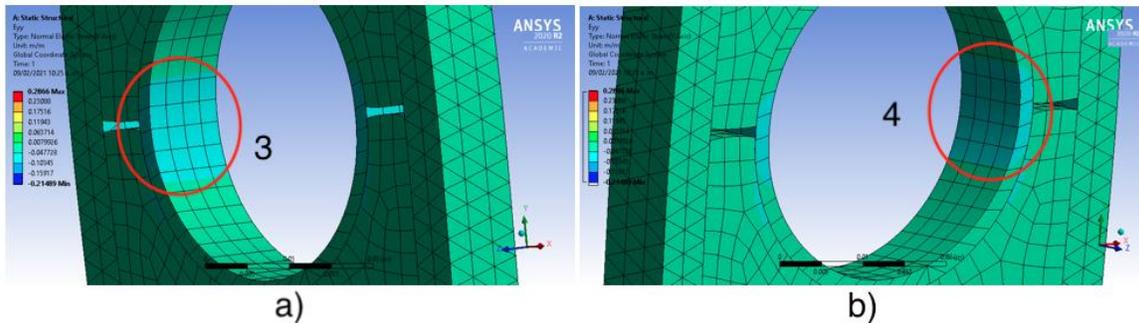


Figura 71. Simulación de la deformación elástica de acrílico-polietileno en  $\epsilon_{yy}$ : a) Izquierda b) Vista derecha.

Para poder visualizar mejor la diferencia entre ambos confinamientos se cambió el material rígido por acero estructural.

### Acero-Polietileno

Esta combinación contiene tanto al material más rígido como al más suave, o sea, acero-polietileno (Figura 72). Con esta nueva combinación se pudo notar mejor la diferencia de la distribución de las deformaciones en los confinamientos.

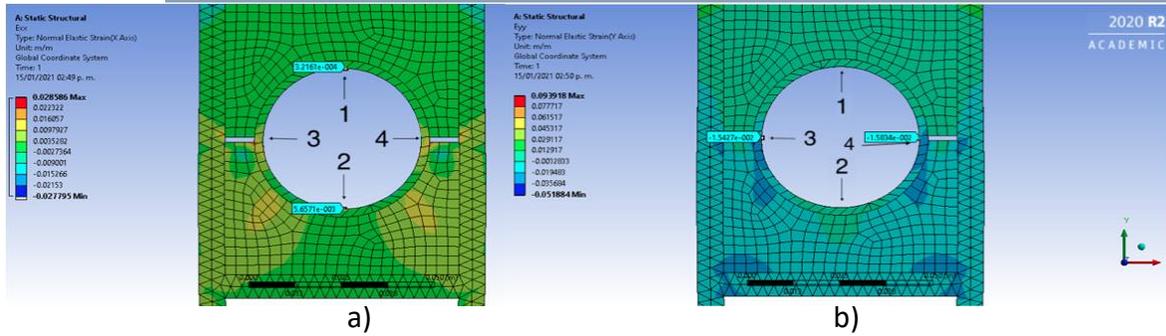


Figura 72. Simulación de la deformación elástica de Acero-Polietileno en: a)  $\epsilon_{xx}$  y b)  $\epsilon_{yy}$ .

Lo primero que se nota es que la deformación del tubo en la parte inferior es más evidente. Los tonos azules denotan un incremento de deformación de manera negativa. Por otra parte, la zona superior del tubo conserva su forma circular debido a que el material es más rígido. La Figura 73 muestra que en el punto 2 hay un ligero toque de amarillo que indica 11691 microdeformaciones aproximadamente, a diferencia del punto 1 donde únicamente hay 963 microdeformaciones. Esto demuestra una vez más que un extensómetro tendrá mayor incremento de deformación, que en este caso será el punto 2. Esto se detallará de mejor manera más adelante.

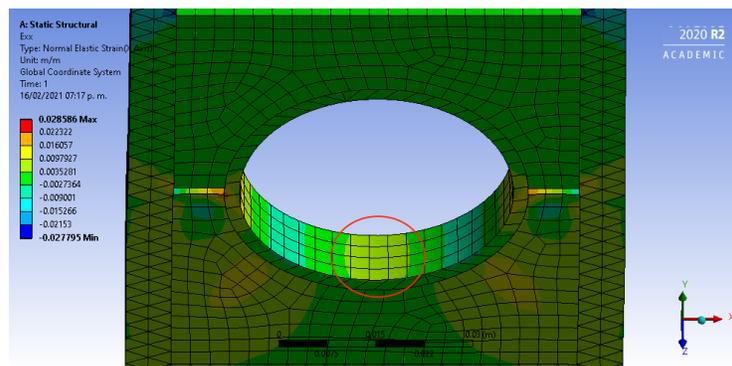


Figura 73. Simulación de la deformación elástica de acero-polietileno en  $\epsilon_{yy}$ : a) Vista superior.

Como era de esperarse, en los puntos 3 y 4 de la Figura 72 (b), hay más deformación, aunque en sentido negativo. Esta deformación es similar entre esos dos puntos.

**Acero-Acrílico** En la Figura 74 se muestra esta combinación en la que se decidió también utilizar el acrílico como un material suave y al acero como material rígido.

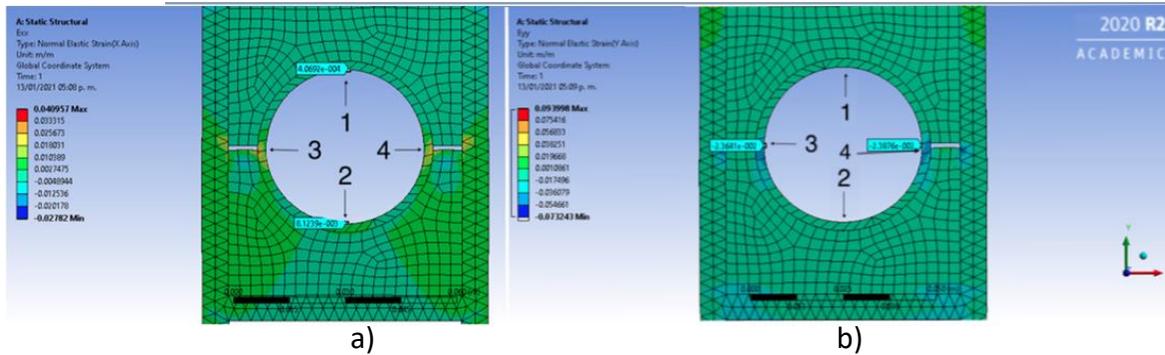


Figura 74. Simulación de la deformación elástica de Acero-Acrílico en: a)  $\epsilon_{xx}$  y b)  $\epsilon_{yy}$ .

Esta combinación fue muy útil, pues en ella se observa que en el punto 2 de la Figura 74 (a), el tono verde es más claro en el punto 1. En el punto 2 hay entre 2747 y 10389 microdeformaciones, según la escala de colores, mientras que en el punto 1 apenas hay 406 microdeformaciones.

Por otro lado, la Figura 74 (b) permite ver que en los puntos 3 y 4 es donde se ubica un mayor valor de deformación que cualquier otro punto, por lo que se considera que en esta región hay más riesgo de colapso del tubo.

### 4.3 Discusión y comparación de resultados

En esta sección se comparan los resultados de las pruebas realizadas (experimental y numéricamente) con el fin de encontrar las similitudes y diferencias entre ellas. Primeramente, se realiza la comparación de las combinaciones rígidas y posteriormente las rígidas y suaves.

Las pruebas y comparaciones realizadas en esta sección se muestran en la Tabla 4.

*Tabla 4. Combinaciones de materiales.*

<b>Tipo de confinamiento</b>	<b>Prueba Experimental</b>	<b>Prueba numérica</b>
<b>Rígido-Rígido</b>	Material birrefringente (R1 R1)	Acrílico-Acrílico
		Acero-Acero
<b>Suave-Suave</b>	Material birrefringente (R2- R2)	Polietileno-Polietileno
<b>Suave-Rígido</b>	Material birrefringente (R2- R1)	Polietileno-Acrílico
		Polietileno-Acero
		Acrílico-Polietileno
<b>Rígido-Suave</b>	Material Birrefringente (R1-R2)	Acrílico-Polietileno
		Acero-Polietileno
		Acero-Acrílico

#### **4.3.1 Confinamiento rígido-rígido**

Como se muestra en la Tabla 4, para el caso rígido se utilizaron las combinaciones acrílico-acrílico y posteriormente acero-acero en la simulación numérica.

Visualmente la deformación de la combinación acrílico-acrílico se asemeja bastante a la prueba experimental. En la Figura 75 se aprecia cómo la forma original de círculo se convierte a elíptica. En este caso se presenta cierta oposición por parte de los confinamientos rígidos y, aunque el cambio de forma es igual en ambos confinamientos, es mínimo.

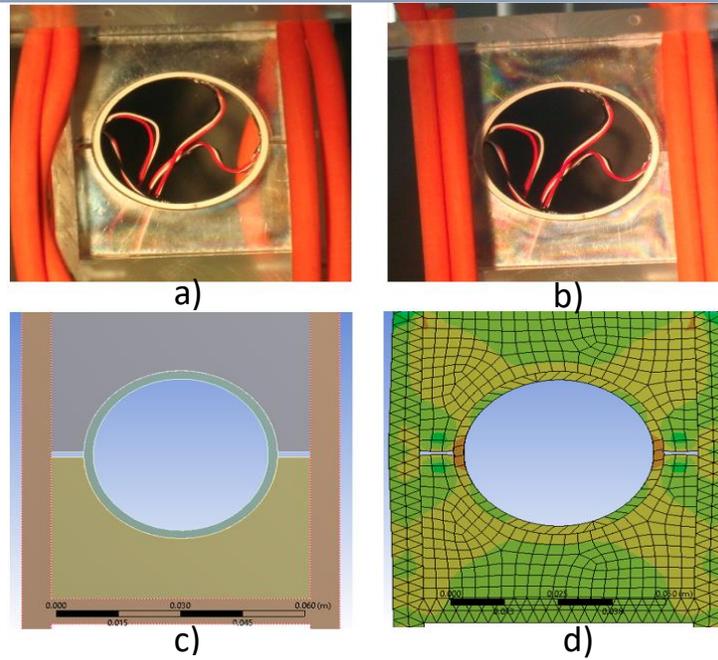


Figura 75. Confinamientos acrílico-acrílico. Prueba experimental: a) Sin carga, b) Con Carga; Prueba numérica: c) Sin desplazamiento. d) Con desplazamiento.

Como se mencionó en la sección anterior, con la intención de ver como se comportaría el tubo utilizando un material aún más rígido, se simuló la misma prueba, pero con acero como material para ambos confinamientos (Figura 76).

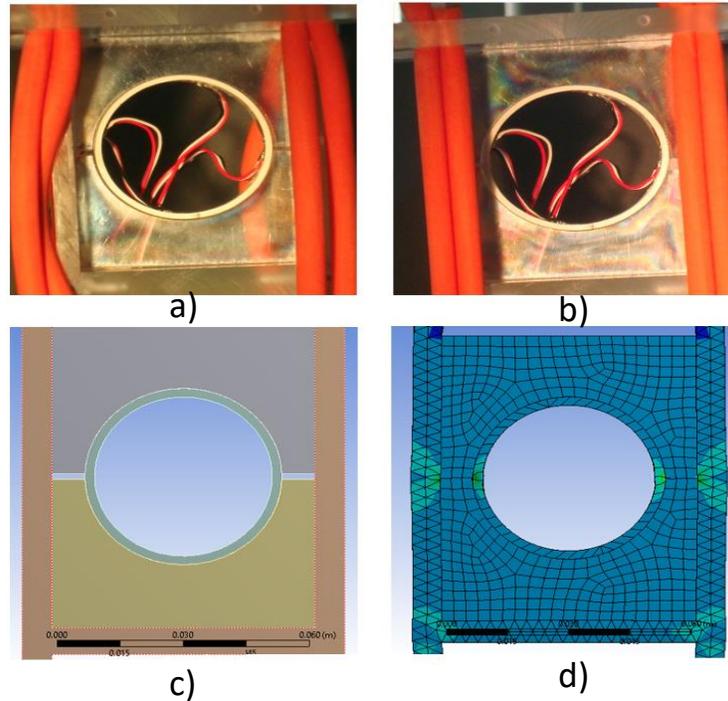
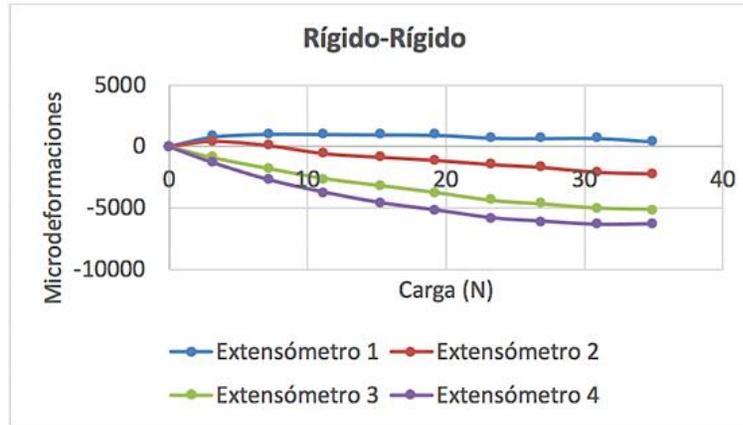


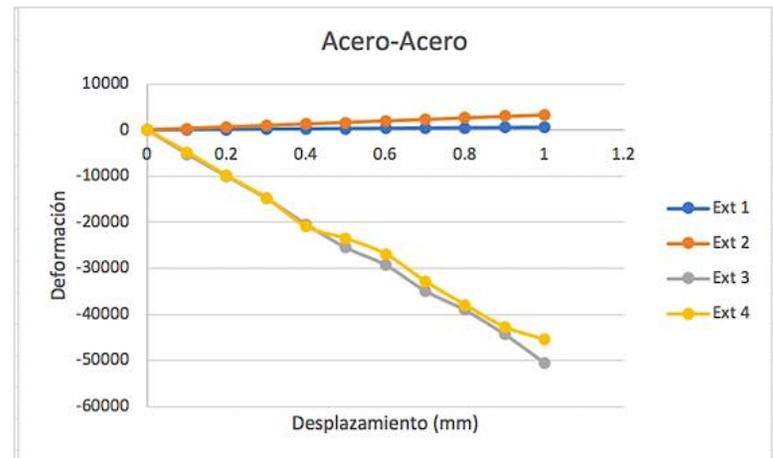
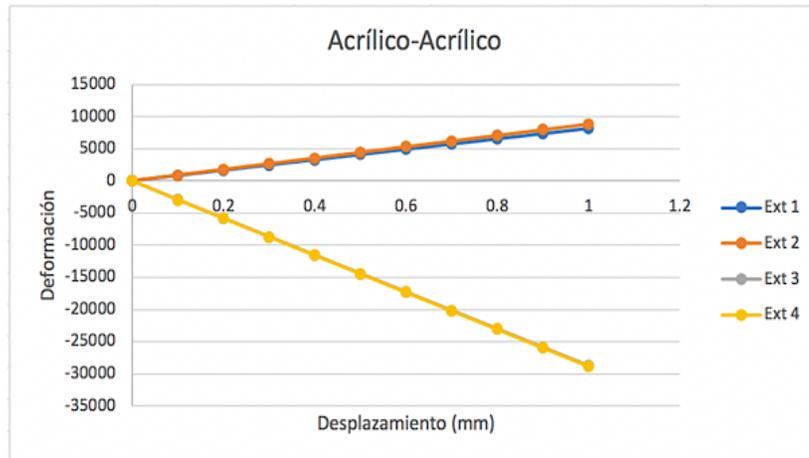
Figura 76. Confinamientos acero-acero. Prueba experimental: a) Sin carga, b) Con Carga; Prueba numérica: c) Sin desplazamiento. d) Con desplazamiento.

Lo primero a destacar en la Figura 76 es que se vuelve a deformar ligeramente el tubo a una forma elíptica. Aunque en este caso, observando detalladamente la figura, se puede ver que conserva más su forma circular que en la combinación Acrílico-Acrílico (Figura 75). Esto se debe a que, al ser más rígido el material, éste hace que la distorsión sea menor. Por otra parte, también se observa que el marco de acrílico lateral se deforma menos, porque al ser más rígido el material, hay menor transmisión de fuerza hacia los lados.

En el modelo físico se obtuvieron los datos del incremento de la deformación en relación con la rigidez y como se explicó en el capítulo anterior se intentaron replicar estas mismas gráficas, pero ahora con el modelo numérico. En este caso se recolectaron 10 valores de deformación igual que en la prueba física. En la Figura 77 se muestran éstas gráficas junto con la experimental:



### Prueba experimental



### Pruebas con modelación numérica

Figura 77. Comparación de gráficas entre la prueba experimental y la prueba numérica para los confinamientos Rígido-Rígido.

Las gráficas indican que en los puntos de los extensómetros 1 y 2 de la prueba experimental y de la prueba numérica de acero-acero, la tendencia de las líneas es a hacerse cero, indicando que no hay mucha deformación en el punto más alto del tubo y en el más bajo. A diferencia de los extensómetros 3 y 4 donde claramente las deformaciones aumentan considerablemente de manera negativa.

Lo anterior no sucede con la combinación acrílico-acrílico en la simulación numérica, lo cual indica que mientras más rígido sea el material, la tendencia a coincidir de la simulación numérica con la experimental será mayor.

### 4.3.2 Confinamiento suave

Ahora la combinación es suave en ambos confinamientos. En la Figura 79 se encuentra la comparación del cambio de forma entre el modelo experimental y el modelo numérico.

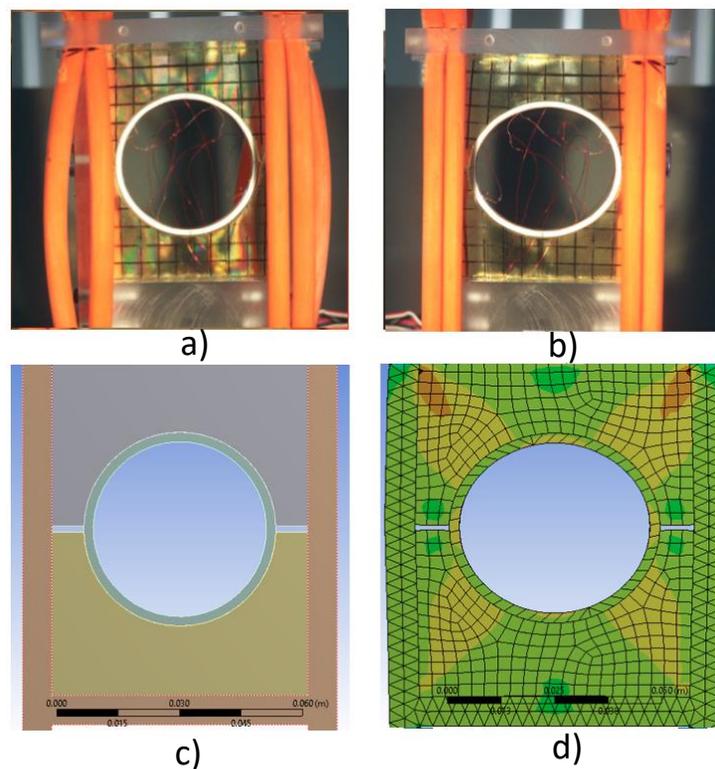
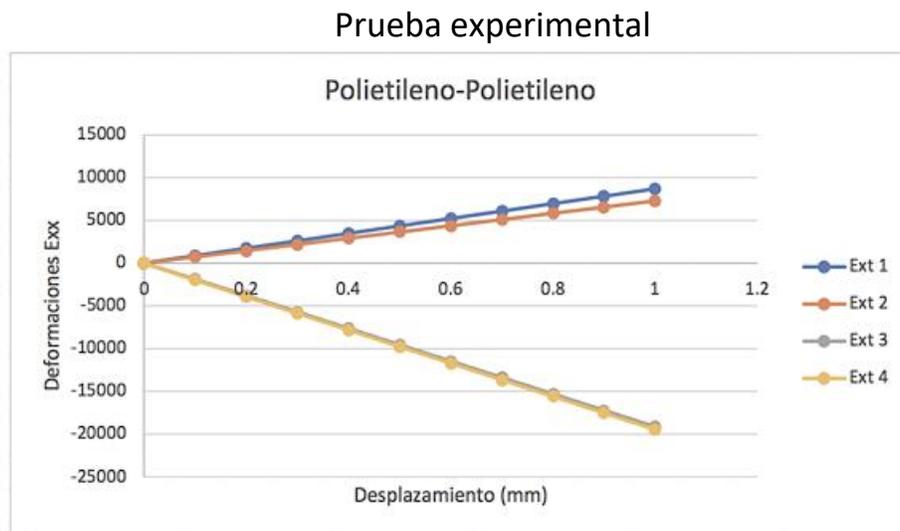
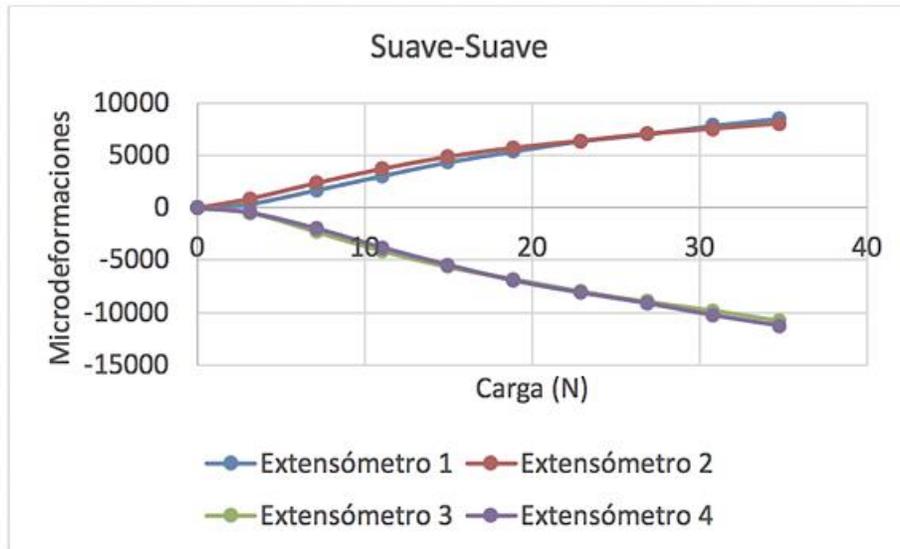


Figura 78. Confinamientos Polietileno-Polietileno. Prueba experimental: a) Sin carga, b) Con Carga; Prueba numérica: c) Sin desplazamiento. d) Con desplazamiento.

En este caso se aprecia claramente el cambio de forma que hubo en el tubo. Al ser más suave el material, la distorsión se distribuye entre los dos confinamientos y hace que la forma elíptica sea más pronunciada que en la combinación anterior.

La Figura 79 compara los datos obtenidos en la prueba experimental y en la prueba numérica:



**Prueba con numérica**

*Figura 79. Comparación de gráficas entre la prueba experimental y la prueba numérica para los confinamientos Rígido-Rígido.*

Al incrementar varias veces el desplazamiento e ir capturando los datos, se puede notar cómo, tanto los extensómetros verticales como los horizontales, incrementan de la misma manera aunque con sentido contrario. En este caso las líneas si parecen simétricas entre sí, debido a que el material permite que haya más deformaciones. Esto puede hacer que el material, sea más propenso a presentar tensión y compresión en el tubo, haciendo que éste sea más propenso a presentar fracturas en el mismo. Este caso es similar al de un tubo pobremente compactado

### 4.3.3. Confinamiento suave rígido

Para este caso se utilizaron tres tipos de combinaciones de materiales: Polietileno-Acrílico, Polietileno-Acero y Acrílico-Polietileno.

La Figura 80 contiene la comparación del modelo experimental y el modelo numérico de la combinación Polietileno-Acrílico.

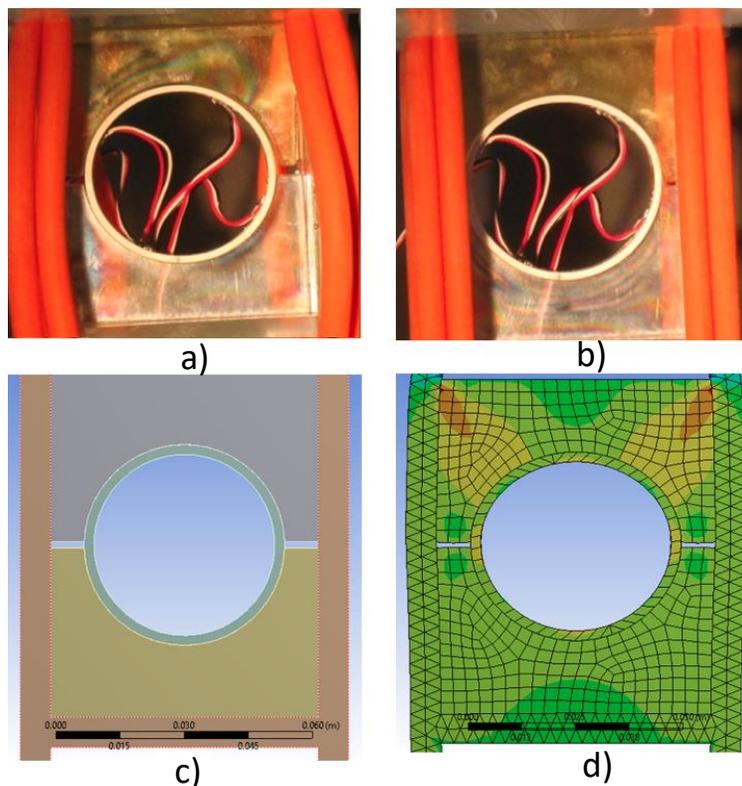


Figura 80. Confinamientos Polietileno-Acrílico. Prueba experimental: a) Sin carga, b) Con Carga; Prueba numérica: c) Sin desplazamiento. d) Con desplazamiento.

A simple vista se observa que la simulación numérica es muy parecida a la prueba física. El tubo, en la zona del confinamiento inferior se deforma sólo ligeramente, esto pasa debido a que el confinamiento rígido no se distorsiona tanto e impide que el círculo se deforme de la misma manera.

Por supuesto, lo más destacable es que el confinamiento superior, al ser más blando, permite una mayor distorsión en el tubo, tanto, que incluso el confinamiento superior empuja al marco de acrílico hacia los lados.

En la Figura 81 se muestra la combinación Polietileno-Acero.

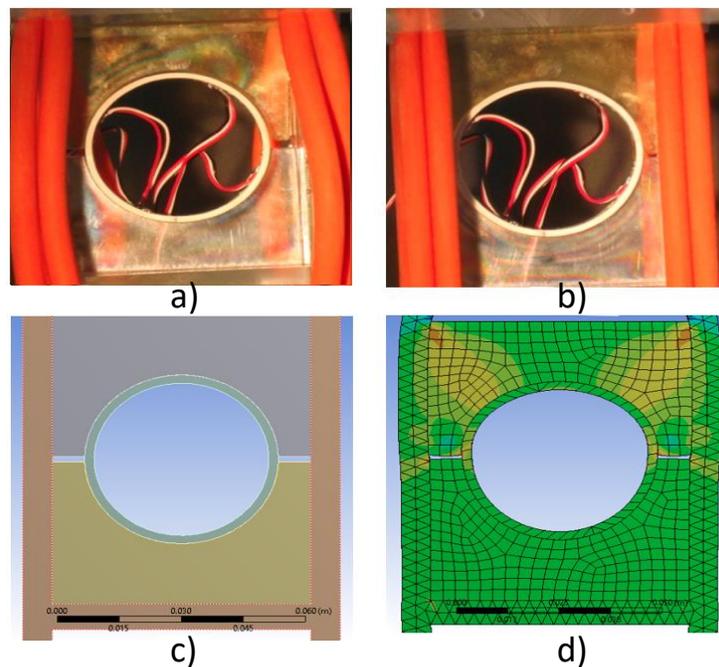


Figura 81. Confinamientos Polietileno-Acero. Prueba experimental: a) Sin carga, b) Con Carga; Prueba numérica: c) Sin desplazamiento. d) Con desplazamiento.

La Figura 81 (d) refleja cómo se comporta un medio suave cuando hay un material aún más rígido en el confinamiento inferior. En este caso la forma del tubo en la prueba numérica es parecida a la de la prueba experimental, aunque se puede notar que la distorsión en la

simulación supera a la de la prueba experimental. La Figura 82 contiene la combinación de confinamientos Acrílico-Acero.

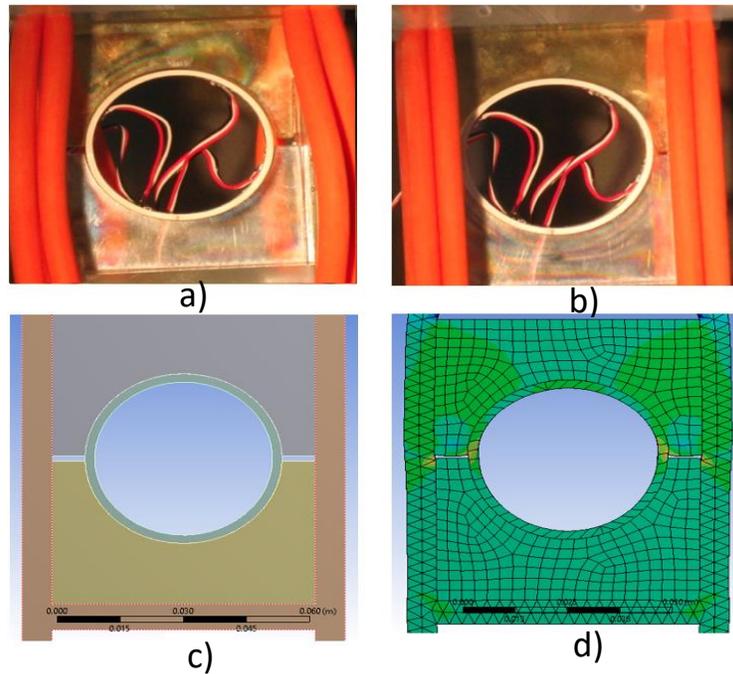
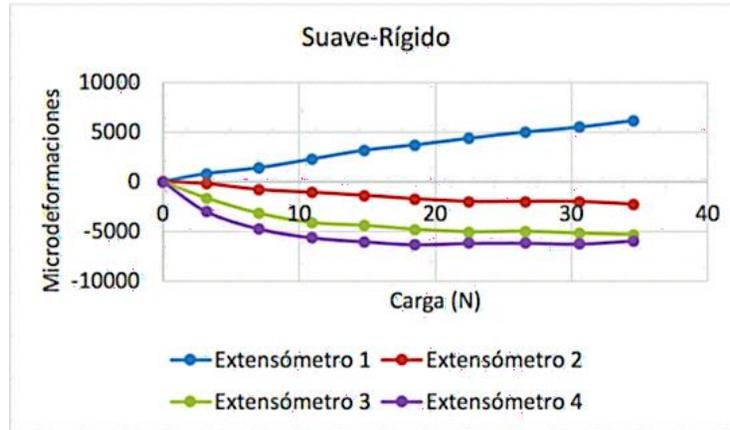


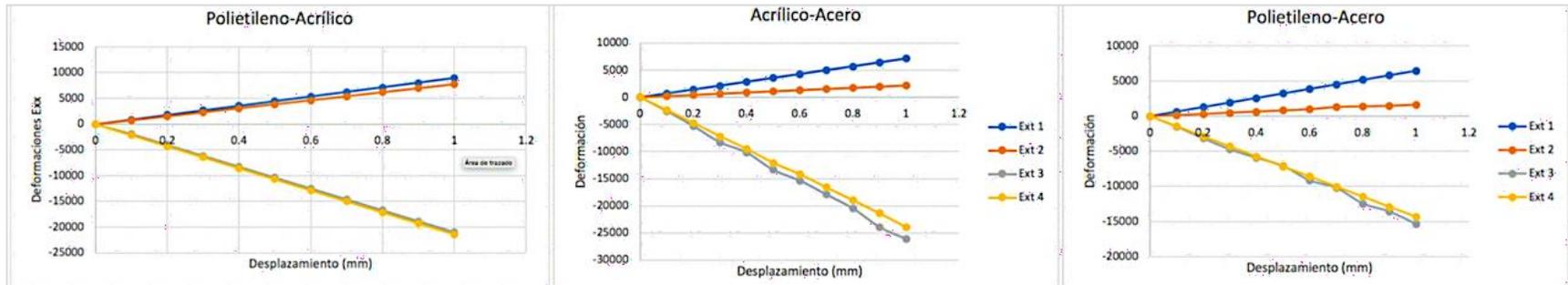
Figura 82. Confinamientos acrílico-acero. Prueba experimental: a) Sin carga, b) Con Carga; Prueba numérica: c) Sin desplazamiento. d) Con desplazamiento.

En este caso es muy notoria la semejanza entre el modelo físico y el numérico. En la zona del confinamiento superior, el tubo tiene una forma irregular muy parecida a la del modelo experimental y en la parte inferior conserva bastante la forma circular.

En la Figura 83 se muestran las gráficas de los datos obtenidos tanto en la prueba física, como en las experimentales.



### Prueba experimental



### Pruebas con modelacion numérica

Figura 83. Comparación de gráficas entre la prueba experimental y la prueba numérica para los confinamientos Suave-Rígido.

La Figura 83 es muy interesante, ya que esta explica la diferencia de tonalidades en la Figura 66, Figura 67 y Figura 69. Se puede apreciar que el tubo, en la zona superior, tiene mayores deformaciones en comparación con la zona inferior. Se observa cómo la gráfica del extensómetro 1 (la azul) incrementa más en los cuatro casos. Esto se debe a que, como la parte superior es suave, en esta se queda la mayoría de la deformación y donde se ubica el extensómetro 2, la deformación tiende a hacerse 0, o sea que en esa parte casi no se deforma el tubo.

### 4.3.3 Confinamiento rígido-suave

En este último caso las combinaciones de materiales fueron: Acrílico-Polietileno (Figura 84), Acero-Polietileno (Figura 85) y Acero-Acrílico (Figura 86).

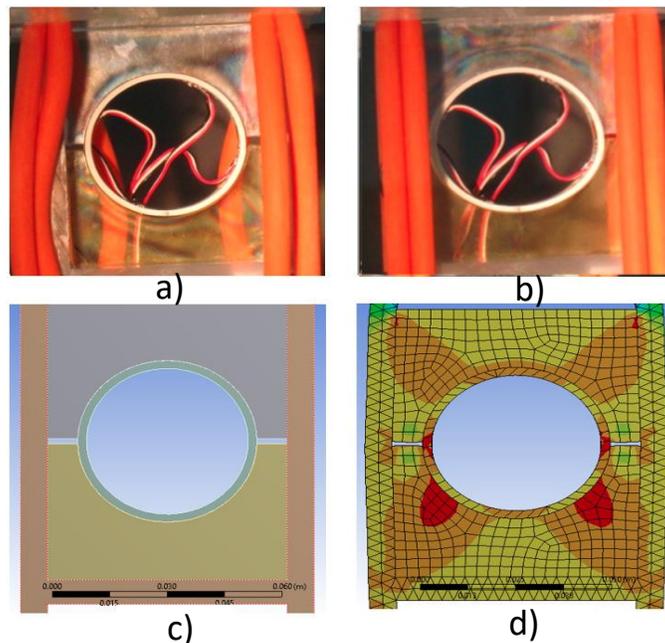


Figura 84. Confinamientos Rígido-Suave. Prueba experimental: a) Sin carga, b) Con Carga; Prueba numérica: c) Sin desplazamiento. d) Con desplazamiento.

Ahora se puede ver cómo en la parte superior, el tubo conserva ligeramente su misma forma circular, puesto que, al ser un material más rígido, este casi no sufre distorsión. En cambio, al ver la parte inferior del tubo se observa cómo el cambio de forma es más irregular

y sufre mayor distorsión, tanto, que incluso esa zona ya no se asemeja a una elipse. En la Figura 85 se muestra la combinación Acero-polietileno.

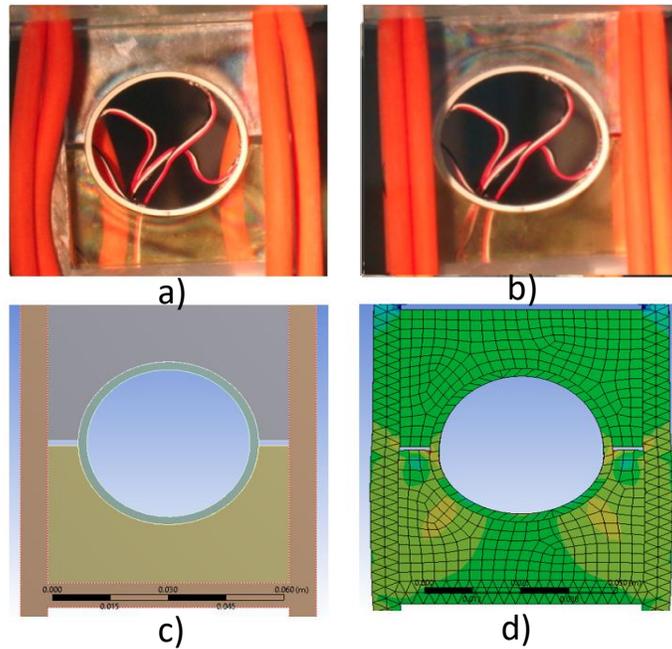


Figura 85. Confinamientos acero-polietileno. Prueba experimental: a) Sin carga, b) Con Carga; Prueba numérica: c) Sin desplazamiento. d) Con desplazamiento.

Al tener el material más rígido y el más suave se distingue la diferencia de formas en el tubo. Es interesante destacar que, a pesar del desplazamiento, ambos confinamientos no se tocan. Finalmente, en la Figura 86 se muestra la combinación Acero-Polietileno.

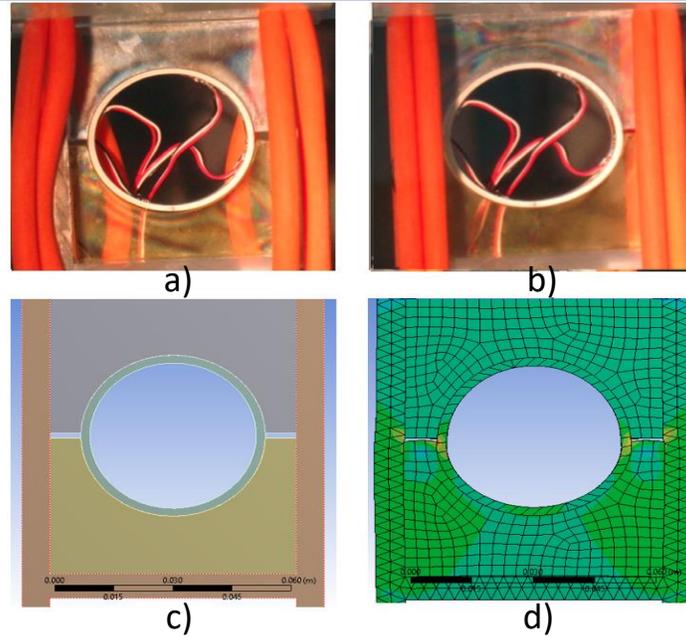
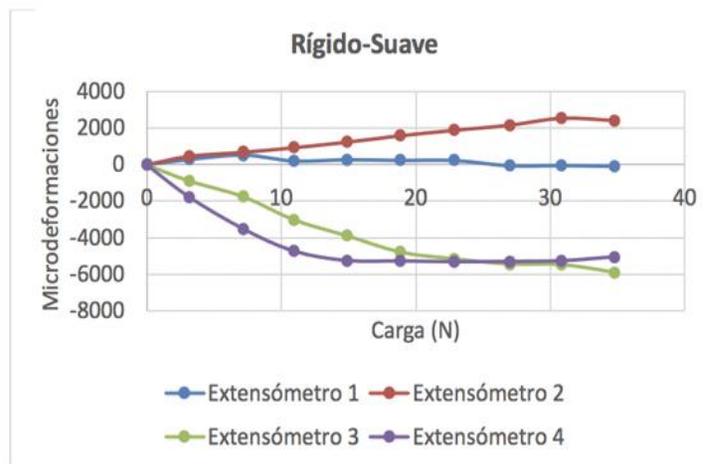
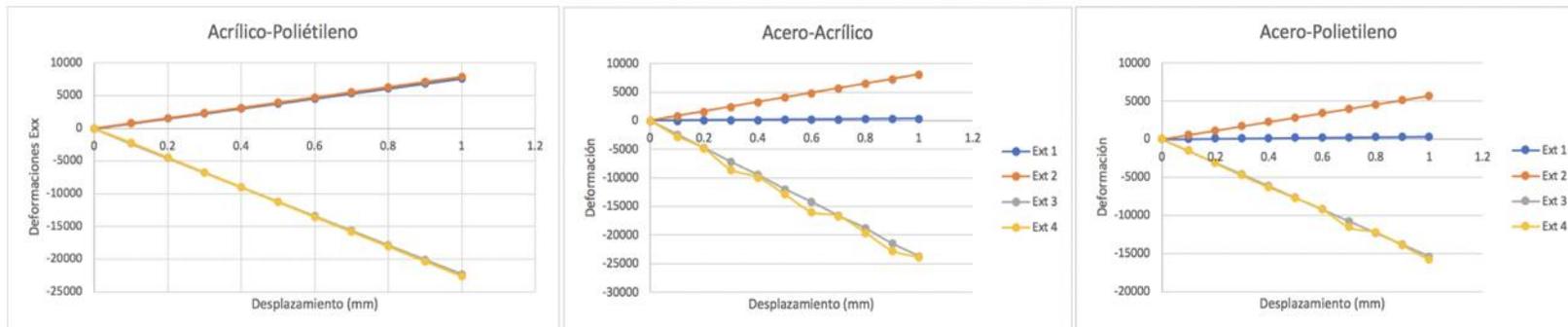


Figura 86. Confinamientos acero-acrílico. Prueba experimental: a) Sin carga, b) Con Carga; Prueba numérica: c) Sin desplazamiento. d) Con desplazamiento.

La forma del tubo obtenida en la prueba numérica es parecida a la del caso experimental. Esto indica que esta combinación de materiales es la más parecida a la realidad. De hecho, al realizar los incrementos de desplazamientos, la forma del tubo tanto en la prueba numérica como experimental se conserva. Con la finalidad de comparar la manera en que fue aumentando la deformación en los 3 casos, en la Figura 87 se muestran los datos obtenidos en todas las pruebas.



### Prueba experimental



### Pruebas con modelación numérica

Figura 87. Comparación de gráficas entre la prueba experimental y la prueba numérica para los confinamientos Rígido-Suave.

La prueba con modelación numérica muestra que hay más deformaciones en el extensómetro 2, a diferencia del extensómetro 1 que es tan bajo que incluso parece que se convierte en cero. Todo esto es más visible en la segunda y tercera prueba numérica debido a que hay mayor diferencia de rigidez entre ambos materiales.

Por último, se observa cómo en los extensómetros 3 y 4 de todas las pruebas, la deformación aumenta de manera similar, indicando que es la zona de mayor riesgo de posible formación de grietas.



## Conclusiones

En el presente trabajo se analizó el comportamiento de un tubo sometido a fuerzas de compresión bajo diferentes combinaciones de confinamiento de manera experimental y por medio de un modelo realizado en elemento finito.

En la parte experimental se utilizó la metodología en trabajos anteriores para estudios similares. Debido a ello se usó un probador mecánico portátil, confinamientos de material birrefringente de diferente rigidez y la técnica de extensometría eléctrica para la medición de las deformaciones en el interior del tubo. En estas primeras pruebas se observó claramente la variación del comportamiento en función de cada combinación estudiada. Esto permite confirmar la relación que existe entre la rigidez del medio que rodea al tubo y las deformaciones tangenciales en la pared interna del mismo.

La parte de modelación numérica se realizó con un modelo simplificado del equipo experimental y se simularon las pruebas para las mismas condiciones del experimento, excepto en las combinaciones del medio que rodea al tubo, ya que se consideraron más materiales para los confinamientos. Los valores de deformación obtenidos en estas simulaciones convergen con los medidos experimentalmente cuando la diferencia de rigideces es mayor entre los medios que rodean al tubo.

Los resultados de mayor relevancia se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Se confirmó la metodología para el estudio de un anillo circular sometido a cargas a través del medio que lo confina.
- Se realizó un modelo en elemento finito que presenta consistencias con las pruebas experimentales.
- El modelo numérico puede utilizarse como base para analizar casos más complejos de la transmisión de cargas entre medios elásticos.

Haciendo una analogía con tuberías enterradas se pueden mencionar las siguientes particularidades considerando la metodología desarrollada:



- Se identificaron los casos, en función del medio que rodea al tubo, donde se eliminan los esfuerzos de tensión en el mismo. Esto es importante porque son los esfuerzos que inducen fallas en el tubo.
- Se podrían realizar equivalencias de comportamiento entre un tubo más rígido y menos rígido.
- Se observó qué podría suceder si existieran combinaciones de confinamientos.
- Se identificó la distribución de deformaciones de forma interna.

El estudio presentado en este trabajo complementa los reportados anteriormente debido a que ahora es posible realizar estos estudios desde el punto de vista experimental, analítico y por el método de elemento finito.



## Bibliografía

- [1] M. H. Sadd, *Elasticity: Theory, applications and numerics*, Burlington, MA: Elsevier, 2005.
- [2] J. W. Dally y W. F. Riley, *Experimental stress analysis*, Mc Graw Hill, 1991.
- [3] F. Díaz del Castillo Rodríguez, *Fundamento de mecánica de sólidos*, CDMX, Cuatitlán Izcali: Facultad de Estudios Superiores Cuatitlán departamento de ingeniería laboratorio de tecnología de materiales, 2008.
- [4] Facultad de Ingeniería - UNAM, «Repositorio digital de la Facultad de Ingeniería - UNAM,» UNAM, 25 Marzo 2020. [En línea]. Available: <http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/jspui/bitstream/132.248.52.100/2548/11/011-MPM-Cap8-Final.pdf>. [Último acceso: 25 Marzo 2020].
- [5] M. Mendoza Linares, *Fundamento de mecánica de sólidos*, México D.F.: UNAM, 1997.
- [6] G. E. Mase, *Mecánica del medio continuo*, México: McGraw Hill, 1975.
- [7] E. Levi, *Elementos de mecánica del medio continuo*, México: Limusa, 1971.
- [8] M. Seely y B. Fred, *Resistencia de materiales*, D.F.: UTEHA, 1974.
- [9] R. Richards, Jr., *Principles of solid mechanics*, USA: CRC Press, 2000.
- [10] Byars y E. F., *Mecánica de cuerpos deformables*, Nueva York, E.U.A.: Intext Educational Publishers, 1975.
- [11] A. C. Ugural y S. K. Fenster, *Advanced strength and applied elasticity*, New Jersey: Prentice Hall, 2003.
- [12] M. E. Gurtin, *An introduction to continuum mechanics*, London: Academic Press, 1981.
- [13] «Vishay,» 2016. [En línea]. Available: <http://www.vishaypg.com/docs/50003/precsg.pdf>. [Último acceso: 5 Agosto 2020].
- [14] A. C. Ugural, *Mechanics of material*, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2008.



- [15] J. Cortés Pérez, S. V. Rivera C., F. N. García C. y A. Reyes S., Parámetros de diseño de juntas tipo espiga-campana, Memorias del XVIII congreso internacional anual de la SOMIM, 2012.
- [16] F. P. Beer y E. R. Johnson, Mecánica vectorial para ingenieros estática, México: Mc Graw Hill, 2010.
- [17] R. C. Hibbeler, Mecánica de materiales, México: Pearson, 2011.
- [18] E. Popov, Introducción a la mecánica de sólidos, México, D.F.: LIMUSA, 1989.
- [19] A. P. Moser y S. Folkman, Buried Pipe Design, Logan, Utah: McGraw-Hill, 2001.
- [20] Comisión Nacional del Agua, Manual de Instalación de Tubería para Drenaje Sanitario, México, D.F.: Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales, 2012.
- [21] J. Cortés Pérez, F. P. Delgado G., F. N. García Castillo, A. Reyes S., R. Cornejo T. y V. Raigosa, Transmisión de carga a través de un medio elástico a un anillo circular confinado, Memorias del XVI Congreso Internacional Anual de la SOMIM, 2010.
- [22] J. Cortés, F. N. García, F. M. Sánchez, A. Reyes y R. J. Montalvo, Load Transmission toward a plastic ring via an elastic media with several stiffness, 15th International conference on experimental mechanics, 2012.
- [23] J. Cortés Pérez y J. J. Llanito P., Diseño de un dispositivo mecánico para visualizar la distribución de esfuerzos en elementos típicos sometidas a cargas de compresión, Memorias del XIV congreso internacional anual de la SOMIM, 2008.
- [24] S. V. Rivera Cortés, Estudio del comportamiento mecánico de juntas tipo espiga - empaque - campana en tuberías plásticas., México D.F.: UNAM, 2014.
- [25] F. P. Beer y E. R. Johson, Mecánica de materiales, México D.F.: Mc Graw Hill, 2009.