UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
DOCTORADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y LA LÓGICA DE LA CIENCIA

EL PROBLEMA DE LA INTERPRETACIÓN DE LA MECÁNICA CUÁNTICA: UNA APROXIMACIÓN DESDE LAS LÓGICAS NO CLÁSICAS Y LA TEORÍA DE TOPOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
PRESENTA:
FERNANDO CANO JORGE

TUTORES:
DR. ELÍAS OKÓN GURVICH, UNAM-IIF
DR. J.J. MAX FERNÁNDEZ DE CASTRO TAPIA, UAM-I
DR. LUIS ESTRADA GONZÁLEZ, UNAM-IIF
DR. CRISTIAN A. GUTIÉRREZ RAMÍREZ, UNAM-FFYL
DR. JORGE ALBERTO MANERO OROZCO, ACRP-IF

CIUDAD DE MÉXICO, 2022

Le dedico este trabajo a mis padres, quienes hicieron posible mi sueño de realizar un doctorado.

Le dedico este trabajo al Dr. José Luis Rivera Noriega, quien me inició en las artes de la lógica y su filosofía.

También dedico este trabajo a la memoria de mi Abue, que siempre está presente.

Y por último, dedico este trabajo a la memoria de Richard Routley/Sylvan, cuyas ideas inspiraron este trabajo.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca académica que me otorgó desde enero de 2017 hasta enero de 2021, tiempo durante el cual fue elaborado este trabajo.

Este trabajo de investigación fue realizado gracias al apoyo de los proyectos PAPIIT IN403719 “Intensionalidad hasta el final: un nuevo plan para la relevancia lógica” e IG400422 “Variables proposicionales y constantes proposicionales: aspectos lógicos, epistémicos y metafísicos”.

Índice general

Capítulo 0

Introducción

Uno de los principales intereses de la filosofía de la ciencia es ofrecer un fundamento conceptual y argumentativo que, de acuerdo con ciertas posiciones y compromisos, explique el éxito de nuestras mejores teorías científicas, por un lado, y, por el otro, proporcione interpretaciones de las teorías científicas evaluadas con vistas a aclarar las nociones que están involucradas en la práctica científica. En la medida en que explicamos el éxito de una teoría, generalmente detectamos factores metodológicos, epistemológicos y ontológicos que amplían nuestra comprensión de la tarea científica como tal; y en la medida en la que realizamos un análisis conceptual adecuado de las nociones que conforman el cuerpo de conocimientos de una teoría científica, generalmente se desprende una multiplicidad de interpretaciones posibles para la misma e, incluso, se le relaciona con otras teorías en competencia.

La mecánica cuántica ha mostrado ser una de las teorías científicas con mayor éxito predictivo y, sin embargo, aún no parece claro, desde el punto de vista filosófico, el por qué de su éxito. Más aún, los conceptos principales de la mecánica cuántica han sido evaluados y replanteados desde inicios del s. XX y no existe aún un concenso para la interpretación de múltiples fenómenos, deducciones y nociones involucradas en la teoría. Una de muchas posturas que podría tomarse frente a estos dos problemas es que la falta de una explicación para el éxito de la mecánica cuántica podría deberse a que muchos de los resultados correctamente predichos por el aparato matemático de la teoría nos parecen altamente contraintuivos; y podría ser que la ausencia de un concenso interpretativo esté vinculado con la dificultad de abandonar los paradigmas clásicos a los que nos hemos apegado hasta antes de la aparición de la teoría.

Frente a las dificultades de elaborar un discurso filosófico que dé cuenta de la extraña naturaleza de los fenómenos cuánticos y el rompimiento con los paradigmas de la física clásica, y ante el sorprendente éxito experimental de la teoría, una estrategia viable para continuar el desarrollo de la teoría consiste en reducir las pretenciones intelectuales: buscar que la comunidad científica que trabaja en la mecánica cuántica se concentre exclusivamente en el terreno científico —entendiendo por esto la prueba de teoremas, el diseño de experimentos y la recolección de datos estadísticos, entre otras prácticas— y que haga caso omiso de toda pregunta de naturaleza interpretativa —esto es, filosófica— o, por lo menos, que no pretenda responder preguntas trascendentales e ir más allá de los datos que arrojan los experimentos y los resultados previstos por los cálculos realizados.

Aunque lo anterior ciertamente es útil para dirigir sin demasiadas desviaciones la investigación científica hacia una posición de consolidación empírica, la estrategia equivale a cerrar los ojos frente a un problema; ignorar el obstáculo que se tiene en frente no lo hace desaparecer. No obstante, parece que la posición opuesta —concentrar la atención en el diseño de interpretaciones justificadas sólidamente— no ha mostrado ser igual de exitosa. Más aún, los esfuerzos por dotar a la mecánica cuántica de una interpretación adecuada que pueda gozar de una aprobación general en la comunidad científica han llevado a los científicos y filósofos a más preguntas que respuestas.

En su etapa más temprana, la mecánica cuántica fue estudiada y desarrollada principalmente bajo la interpretación de Copenhague, atribuida Max Born, Niels Bohr y Werner Heisenberg en 1927. Esta interpretación, tan aceptada entre los físicos durante el s. XX que llegó a ser llamada la interpretación *estándar*, sirvió de punto de partida para esclarecer los problemas fundacionales de la mecánica cuántica y la actitud a tomar frente a ellos.[1] La restricción a afirmaciones sustentadas en evidencia estadísticamente validada y la aceptación de una naturaleza no determinista de los objetos y fenómenos cuánticos, junto con el reconocimiento del colapso de la función de onda, entre otros principios, caracterizan a esta interpretación.

A pesar de su tremenda aceptación general en la comunidad científica, la interpretación de Copenhague fue severamente criticada incluso por pensadores como Albert Einstein, quien jamás estuvo de acuerdo en reconocer la no localidad de la teoría, pues esto implica aceptar que puede haber influencias causales de forma instantánea entre objetos aribitrariamente distantes entre sí. En ese sentido, las discutibles pero efectivas posiciones ontológicas y metafísicas subyacentes a la interpretación de Copenhague dieron lugar a la búsqueda y propuesta de interpretaciones alternativas capaces de brindar una postura que, sin dejar de ser compatible con los resultados de experimentos motivados por la dualidad partícula-onda, fueran capaces de vincular nuestra concepción del mundo mesoscópico y macroscópico con el mundo cuántico en una sola filosofía natural.

Ante este problema, de ninguna manera simple, surgieron diversas interpretaciones alternativas —cada una de ellas con posiciones filosóficas distintas o hasta contrarias entre sí—: la interpretación de variables ocultas, atribuia a David Bohm en 1952; la interpretación de multiversos o múltiples mundos, atribuida a Hugh Everett en 1957; la

[1] Tal vez la interpretación de Von Neumann de 1932 sea la versión más aceptada entre los físicos de su tiempo pues incluye espacios de Hilbert, el colapso de la función de onda y la distinción entre observador interno y observador externo. La interpretación de Copenhague incorpora diferentes pronunciaciones; por ejemplo, Heisenberg tenía una lectura indeterminista de la teoría y Bohr una lectura probabilista. Esto, por supuesto, llevó a debates y desacuerdos importantes en el desarrollo de interpretaciones alternativas.

interpretación de múltiples mentes, atribuida a Dieter Zeh en 1970; y las interpretación de colapso objetivo, atribuida a Ghirardi-Rimini-Weber en 1986; entre otras. Si bien la lista es aún mayor y cada una de las interpretaciones recién mencionadas cuenta con variantes o forma ella misma una familia de posibles interpretaciones, es notable que el hilo conductor de estas posiciones sea la actitud metafísica y epistémica que se toma: a favor o en contra de compromisos realistas, a favor o en contra de compromisos deterministas, a favor o en contra de compromisos subjetivistas, etc. En ese sentido, parece que la mecánica cuántica requiere de una revisión filosófica que contribuya sustancialmente a la explicitación y discusión de los problemas interpretativos que enfrentan los físicos en sus investigaciones.

Aunque hoy el problema de la interpretación de la mecánica cuántica permanece abierto, existe un fuerte y constante trabajo académico al rededor del mismo por parte de filósofos y físicos. En este trabajo de investigación nos desviaremos de la ruta medianamente tradicional (al menos en lo que respecta a fundamentos lógicos y probabilísticos de la mecánica cuántica) —i.e. la ruta de la lógica cuántica (Birkhoff & von Neumann 1936)— y estudiaremos algunos sistemas formales alternativos para la teoría cuántica y que están motivados por diferentes compromisos filosóficos; por un lado, recorreremos el camino de reciente y breve aparición de la *teoría de topos aplicada a la mecánica cuántica*, y por otro lado, mostraremos que otras lógicas no clásicas distintas a la tradicional lógica cuántica de Birkhoff y Von-Neumann son úliles para plantear las paradojas y resultados contraintuitivos de la teoría cuántica que dificultan su integración con el resto de nuestra experiencia, y específicamente sugeriremos sistemas de lógica relevante para lograr este objetivo, siguiendo a Richard Routley/Sylvan.

Estos estudios conducirán a la defensa de la siguiente **tesis**:
Los topos cuánticos no resuelven los problemas de interpretación de la mecánica cuántica pero otros sistemas formales que emplean lógicas subestructurales como la lógica lineal y las lógicas relevantes sí ofrecen soluciones a diversos problemas interpretativos de la mecánica cuántica.

En este trabajo restringiremos la evaluación a la interpretación de Copenhague o también llamada interpretación estándar de la teoría cuántica; como apuntamos en el capítulo 1, existe una variedad de familias de interpretaciones que compiten con la de Copenhague y cada una responde de forma diferente a las preguntas o problemas interpretativos. Para precisar exactamente de qué problemas interpretativos estamos hablando, y en última instancia qué tipo de aportaciones producen (o no) los formalismos de los topos y de las lógicas subestructurales, consideraremos:

1. Si los argumentos sorprendentes o contraintuitivos de la mecánica cuántica son sólidos o si existen maneras de disolverlos o bloquearlos. Veremos que las lógicas relevantes ofrecen salidas a estos argumentos y que esto no ocurre con los esfuerzos de los topos cuánticos como $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$ ni las categorías simétricas monoidales como **FdHilb**.

2. Si hay una manera de acomodar las relaciones de incertidumbre que caracterizan a las teorías cuánticas. Veremos que esto ocurre en las lógicas relevantes que permiten razonar válidamente en contextos en los que una proposición no es ni verdadera ni falsa, y que también ocurre con la interpretación computacional de **FdHilb**, que parte del concepto de qubit. En particular, veremos que $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$ deja fuera todo contexto en el que dos operadores no conmutan, por lo que ignora las relaciones de incertidumbre.

3. Si hay una manera de acomodar la localidad en la teoría cuántica, que típicamente se considera una teoría no local. En este trabajo elaboramos una revisión relevantista del teorema de Bell que conduce a la posibilidad de teorías locales de variables ocultas. $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$ no tiene la capacidad de capturar comportamientos no locales porque ignora las relaciones de incertidumbre. Por su lado, **FdHilb** incorpora la no localidad y se aprovecha de ella, por ejemplo en su protocolo de teletransportación cuántica.

4. Si el problema de la medición persiste. Veremos que ninguno de los formalismos empleados ofrece una explicación alternativa al colapso de onda provocado por la intervención de un observador externo que perturba el estado de un sistema por medio de un instrumento de medición.

0.1 Planteamiento del problema

La mecánica cuántica se encuentra, desde sus primeras formulaciones, en una encrucijada: o bien detenemos la investigación y la experimentación hasta dar con una interpretación de la teoría que responda adecuadamente cómo considerar fenómenos como la incertidumbre, la superposición, el entrelazamiento, o el colapso de onda, y que vincule nuestra teoría del mundo microscópico con la cosmología y otras ramas de la física; o bien hacemos a un lado toda pretensión de responder a preguntas de naturaleza conceptual o filosófica que en nada o en poco afectan los avances técnicos, experimentales o empíricos que ciertamente pueden conseguirse apegándonos al aparato matemático y a una posición interpretativa convencional como la de Copenhague u otras. Definitivamente, la posición es incómoda y ninguno de los extremos es realmente una solución.

Sin embargo, una manera de abordar esta encrucijada —la mejor manera, en mi opinión— consiste en traer al foro a la filosofía de la ciencia y analizar cómo debería ser la colaboración entre ella y la física para ofrecer mejores respuestas a problemas plenamente conceptuales; específicamente, sería deseable que, para cualquier teoría física —particularmente, la mecánica cuántica— exista una participación directa o indirecta de la filosofía de la ciencia con el fin de atender los siguientes problemas:

p_1) ¿Qué es el sistema que se investiga?

p_2) ¿Cuál es el estatus ontológico de los términos físicos?

p_3) ¿Cuál es el estatus epistemológico de los términos físicos?

p_4) ¿Cómo pueden ser verificados o falseados los enunciados sobre eventos, fenómenos u objetos físicos?

p_5) ¿Cuál es la relación que existe entre el modelo matemático y el mundo físico?

Efectivamente, estas preguntas son ontológicos, metafísicas, epistemológicas y metodológicas. Es fácil ver, creemos, que el problema de la interpretación de la mecánica cuántica está directamente vinculado con la dificultad que tenemos para responder p_1) – p_5), especialmente si las respuestas en competencia no provienen de un terreno con una aguda educación filosófica.

El hecho de que el problema de la interpretación de la mecánica cuántica sea aún un problema abierto se debe a múltiples complicaciones epistemológicas, ontológicas y metafísicas, principalmente. Esto debería ser un indicador para llamar a la filosofía de la ciencia a la discusión; en la medida en la que realicemos un análisis detallado de los aspectos conceptuales que articulan el cuerpo de la teoría cuántica, será más claro cuáles son las carencias, deficiencias e impedimentos involucrados.

Así, si la filosofía de la ciencia puede y debe atender problemas interpretativos, ¿exactamente qué estrategias son adecuadas para contribuir a la física con posibles vías de revisión para la construcción de interpretaciones mejor justificadas?

0.2 Respuestas y objetivos

0.2.1 Justificación de la investigación y estrategia general

A manera de motivación para la investigación, el capítulo 1 abordará dos grandes temas: *a*) cuál es la situación crítica o problemática de la que adolece la mecánica cuántica en términos filosóficos y por qué la física habría de recurrir a la filosofía de la ciencia y a la lógica para encontrar un marco teórico que constituya una interpretación adecuada para una de sus teorías más exitosas; *b*) cuáles son las principales interpretaciones que se han ofrecido para articular un discurso que satisfaga las inquietudes extra científicas de los investigadores involucrados en la mecánica cuántica.

Decimos que este acercamiento cuenta como motivación para la investigación porque se da a la tarea de reconocer un problema que debe ser atendido con especial cuidado desde la filosofía de la ciencia —aunque quizá no tenga que ser atendido exclusivamente por ésta. Esto es particularmente importante porque siempre es posible colocarse en una posición que sostenga, por ejemplo, que los problemas inherentes a las teorías físicas son, en última instancia, responsabilidad de los físicos. De suerte que existe una necesidad de justificar la aparición de la filosofía de la ciencia en el foro de discusión y responder cómo es que ella puede ayudar a aclarar la situación.

A manera de respuesta al problema b), ofreceremos un recuento filosófico de una plétora de interpretaciones de la mecánica cuántica en el capítulo 1 de este trabajo por medio del análisis ontológico y epistémico de las respuestas a estas preguntas (donde $\mathcal{I}$ es una interpretación de la mecánica cuántica):

b_1) ¿$\mathcal{I}$ es determinista o indeterminista?

b_2) ¿$\mathcal{I}$ es realista o no realista (particularmente, en cuanto a la función de onda)?

b_3) ¿$\mathcal{I}$ sostiene la unicidad de las historias o no?

b_4) ¿$\mathcal{I}$ acepta o rechaza el colapso de la función de onda?

b_5) ¿$\mathcal{I}$ otorga o no un rol al observador?

Si bien estas preguntas se encuentran enlazadas en más de una manera, creemos que se muestran útiles para dirigir la discusión.

0.2.2 Respondiendo desde los topos

La teoría de categorías fue introducida por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane entre 1942 y 1945 tras estudiar los procesos que preservan estructuras matemáticas. Desde entonces, la teoría de categorías ha mostrado ser un marco conceptual de enorme poder de abstracción, pues no sólo permite modelar por separado teorías o universos matemáticos como la teoría de conjuntos, los anillos, los grupos, entre otros, sino que además permite abstraer de forma tal que podamos dar cuenta de las relaciones y transformaciones entre diversas categorías o estructuras matemáticas. En cierto sentido, la teoría de categorías es una *lingua franca* para las diversas teorías matemáticas.

Los conceptos esenciales de la teoría de categorías son los "objetos" de una categoría y los "morfismos" entre sus objetos. La manera en como interpretemos estos objetos y estos morfismos determina la categoría que estudiamos: si nuestros objetos son conjuntos y los morfismos son funciones entre conjuntos, nos encontramos en la categoría de conjuntos; si nuestros objetos son espacios topológicos y nuestros morfismos son funciones continuas, nos encontramos en la categoría de los espacios topológicos; etc. El distintivo de la teoría de categorías es el uso de las flechas o morfismos y sus múltilpes interpretaciones posibles; mientras exista el morfismo identidad y los morfismos puedan componerse y sean asociativos, es posible construir una categoría de cualquier clase de concepto que posea una estructura matemática.

Dentro de la teoría de categorías, un área importante es la teoría de topos. Un topos es una categoría con cerradura cartesiana y un clasificador de subobjetos (Goldblatt 1984, p. 84), lo cual dota a esta categoría con la estructura suficiente como para modelar desde el interior ciertos conceptos matemáticos. Se dice, en ese sentido, que un topos es una categoría que viene equipada con una especie de "lógica interna", según se le defina. Es por ello que la teoría de topos ha reconstruido no sólo el cálculo proposicional y la lógica de primer orden, sino la teoría de conjuntos y muchas lógicas no clásicas también.

La estrecha relación entre los cálculos lógicos y las álgebras también aparece en la teoría de topos. Es posible construir el topos de diferentes álgebras y estudiar el comportamiento interno de estas construcciones; es posible, también, trazar relaciones entre un topos y otro, de suerte que nuestra comprensión de los conceptos matemáticos modelados con topos se ve enriquecida. Esta observación —que los topos capturan álgebras y lógicas— será de especial importancia para lo siguiente, especialmente si recordamos que la mecánica cuántica ha recurrido a diversas álgebras como las C*-álgebras o las álgebras de Von Neumann, o la misma lógica cuántica, entre otras.

Los trabajos de A. Döring (2007, 2008, 2010a, 2010b), C. Flori (2009, 2010, 2013) y C. J. Isham (1996, 2005a, 2005b, 2010), entre otros, han propuesto que los principales problemas en el formalismo estándar de la mecánica cuántica son, por un lado, el uso de ingredientes matemáticos críticos que parecen asumir ciertas propiedades del espacio-tiempo que no están enteramente justificadas y, por el otro, que la interpretación instrumental de la mecánica cuántica impide que hablemos de sistemas sin referencia a un observador externo.

Para sobreponerse a estos problemas, ellos proponen una reformulación de la mecánica cuántica en términos de un marco matemático diferente: la teoría de topos. De acuerdo con ellos, este acercamiento proporciona una interpretación más realista —entendiendo por esto una visión en la que nuestras proposiciones sobre fenómenos cuánticos forman un álgebra booleana en la que siempre podemos decidir la verdad o falsedad de las mismas—, resolviendo así el segundo problema, y no se parte de presupuestos acerca del espacio-tiempo, evitando el primer problema. En particular, una pretensión importante de su proyecto es aclarar cómo debería ser una teoría de la gravedad cuántica.

La idea principal en la formulación de la mecánica cuántica mediante topos es que la estructura matemática de la mecánica cuántica se redefina de manera tal que *parezca* o se vea como la física clásica. En efecto, al perseguir que a las proposiciones involucradas en la mecánica cuántica puedan asignárseles valores de verdad sin invocar conceptos como el de "medida" u "observador", constituye un esfuerzo por hacer menos contraintuitiva a la mecánica cuántica y, en cierto sentido, acercarla a los parámetros de la física clásica, donde los criterios booleanos operan sin problemas.

En ese sentido, Döring, Flori e Isham proponen el uso de *contextos* —matemáticamente hablando, subálgebras abelianas de un álgebra no conmutativa $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de todos los operadores acotados en un espacio de Hilbert— para mostrar que la mecánica cuántica se comporta de manera clásica *localmente* —es decir, con referencia a estos contextos— aunque en una perspectiva más amplia —fuera de los contextos— ese comportamiento clásico se pierda. En ese sentido, la colección de los contextos, o lo que ellos llaman *classical snapshots*, forma una categoría ordenada por inclusión, lo cual implica que aunque uno defina cada objeto cuántico de manera local, la información global es preservada. El topos que cumple con los requerimientos del proyecto de Döring, Flori e Isham para reconstruir la mecánica cuántica al definir objetos cuánticos como colecciones de aproximaciones clásicas es el topos de los prehaces (*pre-sheaves*) sobre la categoría de subálgebras abelianas de Von Neumann.

De acuerdo con Döring, Flori e Isham, los topos cuánticos nos permiten realizar aproximaciones clásicas hacia los objetos cuánticos y ofrecer así una interpretación más realista para esta teoría física, donde *más realista* quiere decir (1) que toda proposición física tiene un valor de verdad y (2) que la lógica de las proposiciones físicas es clásica. En el capítulo 2 de este trabajo presentamos el formalismo categorista del proyecto de los topos cuánticos, así como algunos de sus presupuestos filosóficos. En el capítulo 3 mostramos que el proyecto de los topos cuánticos es insuficiente para dar solución a los problemas interpretativos de la mecánica cuántica.

0.2.3 Respondiendo desde las lógicas no clásicas

El esfuerzo por dar con "la lógica de la mecánica cuántica" se hizo ya en el s. XX con los trabajos de Birkhoff y von Neumann (1936) con la así llamada *lógica cuántica* (QL).[2] Efectivamente, la propuesta de un lenguaje formal que fuera adecuado para modelar fenómenos cuánticos, como la probabilidad, la incertidumbre y la superposición, entre otros, tuvo un desarrollo importante a lo largo del s. XX y llegó a su apogeo durante los 80's. No obstante, la recepción de la lógica cuántica dentro de la comunidad científica no es contundentemente favorable ni lo fue en su momento. Creemos, sin embargo, que el fracaso de la lógica cuántica no es el fracaso de la lógica en general, y por ello seguiremos utilizando métodos lógicos para hacer filosofía de la física.

Nuestra investigación sugiere que la mejor reexploración de lo que sería una lógica adecuada a la mecánica cuántica consiste en el estudio de los sistemas subestructurales —i.e. aquellos sistemas lógicos que rechazan alguna de las reglas estructurales del cálculo de secuentes de la lógica clásica. Por un lado, existe una interpretación computacional, informática, o de recursos, para la mecánica cuántica y es sabido que una lógica subestructural que permite modelar el manejo de recursos informáticos es la *lógica lineal*. En el capítulo 4 discutimos las características y méritos del rival directo de la teoría de topos cuánticos, a saber: la teoría categorista de la mecánica cuántica, propuesta por Abrahamsky y Coecke, que utiliza lógica lineal.

Por otro lado, también en los 80's pero en Nueva Zelanda y Australia, hubo desarrollos en torno a lógicas no clásicas diseñadas para disolver paradojas cuánticas. El trabajo

[2] Ver Apéndice 2.

de Richard Routley en *Ultralogic as universal?* persigue la idea de que la ciencia y la filosofía pueden librarse de problemas y paradojas si abandonamos la lógica clásica como la lógica de uso y comenzamos a utilizar lógicas relevantes, que —al igual que las lógicas lineales— son lógicas subestructurales. Dentro de su ambicioso proyecto existen algunas sugerencias de cómo llevar a cabo ciertas reformulaciones de la teoría de la probabilidad, e incluso qué resultados importantes de la mecánica cuántica, como el teorema de Bell y el teorema Kochen-Specker, deberían fallar si usáramos lógicas relevantes. En el capítulo 4 utilizaremos lógicas de la relevancia y sus sistemas probabilísticos asociados para mostrar y desarrollar algunos de los resultados y sugerencias de Routley/Sylvan y que no han recibido suficiente atención en la literatura.

Capítulo 1

¿Tenemos problemas para interpretar la física cuántica?

Objetivos: En este capítulo se abordarán tres problemas relacionados: (*i*) exactamente qué cuenta como un problema de interpretación en mecánica cuántica, tomando en cuenta sus consecuencias epistemológicas y ontológicas; (*ii*) por qué existe la necesidad de un análisis filosófico en torno a la interpretación de la mecánica cuántica; y (*iii*) qué valor filosófico tienen algunas de las distintas interpretaciones que ha recibido la mecánica cuántica.

1.1 Introducción

La historia de la ciencia contiene numerosos ejemplos de teorías que dieron lugar a un hito o, en términos de Thomas Kuhn, al rompimiento de paradigmas bajo los cuales se desarrollan las prácticas científicas de una época dada. Incluso sin circunscribirnos a la teoría kuhniana de las revoluciones científicas, podemos proporcionar un par de ejemplos que motivan la discusión que tendremos.

Consideremos a la física newtoniana, que al introducir la noción de fuerza gravitacional, acabó con la idea aristotélica de movimiento y de lugar natural, provocando así una sacudida en la filosofía natural que por entonces se tenía por correcta. O consideremos a la física relativista introducida por Einstein, misma que modificó radicalmente las concepciones aristotélicas y kantianas que se tenían con respecto al espacio y el tiempo, por mencionar un par de consecuencias.

Estos ejemplos tratan de señalar que con el advenimiento de ciertas teorías científicas, es posible que se dé un replanteamiento filosófico de nociones básicas —por nombrarlas de alguna manera. Ese replanteamiento admite graduación; esto es, podemos modificar nuestras concepciones en mayor o menor medida según lo exijan los postulados y las consecuencias de una teoría científica emergente. Y nada impide que el mismo fenómeno ocurra en la dirección opuesta: que diversas propuestas filosóficas revolucionarias afecten a su vez el planteamiento de teorías científicas —pensemos en el caso del éter aristotélico, por ejemplo, que más adelante se utilizó en la etapa de formación de la teoría del electromagnetismo.

En ese sentido, y en la medida en que la ciencia y la filosofía pretenden ser racionales y explicativas, existe una estrecha relación entre lo que postula una u otra. Al menos desde la naturalización de diversas ramas de la filosofía —particularmente, desde la naturalización de la metafísica en el s. XXI—, hay en el mundo de la filosofía una profunda preocupación por escuchar lo que nuestras mejores teorías científicas tienen que decir sobre el mundo; y esta preocupación obedece a la idea de que el filósofo debe alinear su análisis con lo que la ciencia nos reporta como verdadero. De nuevo, si bien existe el movimiento en la dirección opuesta —científicos influenciados por ideas filosóficas—, me concentraré por el momento en lo contrario.

El caso de la mecánica cuántica no es diferente, en mi opinión. No sólo los físicos y los químicos se replantearon ciertos conceptos —como el de energía o el de estado— sino que los filósofos también corrigieron su ontología con los reportes que esta teoría ofreció al mundo a inicios del s. XX. Más aún, el hecho de que algunos conceptos, reportes y resultados de la mecánica cuántica parecieran contraintuitivos o incluso contradictorios con algunas creencias arraigadas, ha despertado la necesidad filosófica —si somos naturalistas— de comprender mejor lo que esta teoría física tiene que decir para que la filosofía pueda construir sus propias teorías de manera acorde a ésta —especialmente en lo referente a metafísica, ontología y epistemología.

Es por ello que vemos con frecuencia que algunos argumentos filosóficos contemporáneos echan mano de proposiciones propias de la mecánica cuántica —el caso más simple consiste en aceptar que todo objeto del mundo está compuesto de partículas. Por ejemplo, las discusiones sobre mereología y superviniencia en metafísica y ontología, o sobre fisicalismo y epifenomenalismo en la filosofía de la mente, e incluso algunas teorías de la referencia en filosofía del lenguaje, suelen dar por hecho que las partículas elementales existen y se comportan como lo describe la mecánica cuántica —o la teoría de campos cuánticos. Ese es el proceder del espíritu naturalista en la filosofía contemporánea.

Sin embargo, aún suponiendo que la postura naturalista debe seguirse, no queda claro cómo es que los filósofos pueden recoger ideas y resultados de la mecánica cuántica si no existe una única manera de entender o interpretar esta teoría. Y esto resulta aún más sorprendente si se considera que, en comparación con otras teorías físicas, la mecánica cuántica tiene un éxito predictivo superior. Es decir, la pregunta es doble: ¿cómo puede una teoría tan exitosa tener más de una interpretación y cómo puede el filósofo realizar su labor contemplativa si hay más de una manera de entender una teoría sobre la realidad física más básica hasta donde conocemos? Hablamos, pues, de una falta de *consenso interpretativo* en torno a una teoría sumamente fundamental y exitosa de la cual dependen múltiples concepciones sobre la ontología de nuestro mundo, entre otras cosas.

Un filósofo naturalista, en un sentido amplio y bajo las líneas recién aludidas, tiene dentro de su quehacer —entre otras cosas— preguntarse qué es lo que las diversas ciencias reportan que hay y cómo funciona lo que hay, a grandes rasgos, tanto al interior de su estructura o configuración como con respecto a su rol en la interacción con todo lo demás; esto para que la reflexión filosófica —en especial la reflexión metafísica y ontológica— cuente con un punto de partida que permita construir una imagen de la realidad que no se limita pero sí se basa en los reportes de la ciencia natural. Cabría pensar, entonces, que el filósofo naturalista desearía que lo que reportan las ciencias naturales fuera un conjunto de conocimientos y descripciones acerca de las cuales la comunidad científica se pronuncia fuertemente y, sobretodo, de forma unánime. Esto es, cabría esperar que algo así como un

> **Principio de unicidad exegética (PUE)**: para cada teoría científica exitosa existe una y sólo una interpretación que la dota de sentido.

se cumpliera en todo momento.

No obstante, tal pretención es poco razonable. Sabemos, por la historia de la ciencia, que rara vez existe una única teoría en discusión dentro de la comunidad científica para explicar algo o predecir ciertos fenómenos. En general, las teorías científicas se encuentran en competencia y esto complica, en cierto sentido, la labor del filósofo naturalista.

En efecto, podría argüirse, quizá estamos caracterizando la falta de un consenso interpretativo como un impedimento o como una cualidad contraria a las virtudes epistémicas que una teoría científica debería poseer. Es decir, cabe preguntarse por qué habríamos de esperar que toda teoría científica exitosa y suficientemente virtuosa deba tener exactamente una interpretación compartida por la comunidad científica involucrada. Y esta crítica sería, en mi opinión, correcta: amén de un realismo ingenuo —es decir, una postura en la cual se espera encontrar una única lectura de la realidad a través de la ciencia—, nada parece impedir que nuestras mejores teorías científicas sean interpretables en más de una forma. Esto parece ocurrir con la mecánica cuántica.

1.2 ¿Interpretación o interpretaciones?

Pensemos, de nuevo, en la física newtoniana. Al estudiar las ideas de Newton por primera vez, a uno se le ofrece en los libros y en los cursos universitarios una historia acompañada de un formalismo matemático. Se dice, en esta historia, que el objetivo era explicar el movimiento de los astros, la aceleración de los objetos en caída libre, etc., utilizando los conceptos de masa y fuerza, principalmente. Y se dice, en este formalismo matemático, que dicho movimiento y dicha aceleración, etc., obedecen determinadas ecuaciones. Uno aprende la teoría al estudiar cómo es que un problema (particular o general) tiene una solución gracias al formalismo de la teoría y ello permite que uno se genere una idea de cómo funcionan las cosas según la teoría, modificando, en consecuencia, su visión *naïve* (si previamente la había) de cómo ocurren ciertos movimientos, aceleraciones, etc., o incluso adopta dentro de su ontología (esto es, acepta que en el mundo existen) nuevos elementos como las fuerzas y las masas.

El simple escenario anterior invita a pensar que uno se encontraría sumamente confundido si se le preguntara cómo debe interpretarse la teoría newtoniana, o qué otras posibles interpretaciones valdría la pena considerar. La situación parece demasiado simple: hay una historia razonable sobre lo que hay en el mundo y una manera clara de calcular y predecir cómo interactúa y evoluciona todo aquello que hay de acuerdo con la teoría. Preguntar por una interpretación, además, parece ir más del lado de la historia que ofrece la teoría que del lado del aparato formal de ésta. Así, si la historia que nos ha sido ofrecida no provoca demasiadas preguntas y embona bastante bien con lo que sabemos y lo que obsevamos, sería poco razonable buscar otra manera de leer la teoría, o al menos careceríamos de suficientes motivaciones para hacerlo.

Pero si, como dijimos, la pregunta por la interpretación de una teoría tiene que ver con la historia que cuenta la teoría, ¿qué hay del formalismo? Una posibilidad es que primero se cuente con un esquema conceptual de lo que hay en el mundo para que después, y en función de esto, se construya un formalismo matemático adecuado o compatible con dicho esquema. En esta dirección, puede ocurrir que el esquema se corresponda de forma casi natural con alguna teoría o estructura matemática conocida, o bien que una nueva teoría matemática comience a construirse. En cualquier caso, la aproximación es clara: primero contamos con una idea de lo que hay y posteriormente buscamos una manera matemática para expresar cómo funciona aquello que hay. Por otro lado, sin embargo, las cosas podrían (en principio) ir en la dirección opuesta: contar con una teoría matemática primero y buscar, posteriormente, una historia que nos permita entender qué representa cada parámetro y qué influencias aparecen entre objetos, y, sobretodo, cómo acomodar las predicciones del aparato matemático en el sentido de asignarles una explicación en términos de objetos del mundo y sus relaciones.

El caso de la física newtoniana, me parece, corresponde a la primera dirección: uno tiene una historia primero y después construye o adapta un formalismo matemático —por supuesto, y de forma interesante, el formalismo revela detalles que en ocasiones requiere ajustar o precisar la historia originalmente esbozada.[1] Por ello, creo, es que resulta confuso o contraintuitivo preguntar por otras interpretaciones para la teoría newtoniana. Es decir, parecería que, en general, una teoría científica que construye primero su historia —para adoptar un vocabulario filosófico más preciso: su ontología, sus principios, sus roles causales, etc.— y sólo después añade un formalismo matemático, tendrá una y sólo una interpretación. Este último punto podría cumplirse, incluso, si para una misma historia se cuenta con más de un formalismo matemático. Es decir, uno podría pensar en términos

[1]Esto afecta la credibilidad de la historia. Más aún, dichos detalles pueden ser inconsistentes con la historia y por tanto esta debe abandonarse o modificarse radicalmente. Así, no es de extrañar que Newton terminara por proponer nociones como la de fuerza o la de espacio absoluto.

de masas y fuerzas para hablar de los cuerpos y sus movimientos, y calcular, sin embargo, esta dinámica por medio de las ecuaciones clásicas de newton, o bien hacerlo a través de un formalismo más general (p.ej. el formalismo de Hamilton).[2]

Si bien lo anterior es una simplificación, me permite postular lo siguiente: hasta antes de investigar fenómenos subatómicos, la construcción de teorías físicas seguía la ruta de observar la realidad, construir un esquema conceptual que postule qué hay en el mundo y qué lo hace funcionar como lo hace, para después introducir maquinaria matemática que permita predecir con exactitud los resultados de un experimento propuesto en los términos de la teoría. Es sólo hasta que estudiamos la realidad subatómica que esta ruta deja de encontrarse disponible *precisamente porque la observación directa del fenómeno físico nos es imposible*. En la física cuántica, sostengo, caminamos en la dirección opuesta: tenemos un aparato matemático bien estudiado que ayuda a predecir con gran exactitud los resultados de determinados experimentos, y después buscamos hacer sentido de lo que el aparato matemático suscribe y de los resultados que los experimentos arrojan.

Esto último requiere ser precisado. En un principio, es decir, durante el nacimiento de la física cuántica, se contaba con lo que aquí he llamado esquema conceptual para la realidad subatómica: pensábamos en partículas puntuales perfectamente bien ubicadas en una región del espacio, equipadas con ciertas propiedades como el espín, etc. En función de esto, se quiso tomar lo que sabíamos de dinámica de acuerdo con nuestras teorías matemáticas disponibles y aprendimos que las teorías matemáticas utilizadas para describir la dinámica de objetos cotidianos o celestiales no embonaba del todo con lo que ciertos experimentos debían predecir sobre el mundo subatómico. Así, utilizamos ese conocimiento para rediseñar la matemática conocida y adaptarla a las necesidades empíricas que la experimentación impone sobre nosotros. Eventualmente, una teoría matemática bastante simple y elegante pasó a ser el núcleo de la teoría cuántica y desde entonces las predicciones experimentales y nuestras observaciones y mediciones coincidían en grado incluso superior a lo que antes se había visto en el contexto de otras áreas de la física. Pero a pesar de contar con una teoría matemática que armonizaba predicción y experimentación, la historia de la teoría no había sufrido modificación alguna y con el tiempo dejó de parecer convincente dada su dificultad para explicar ciertos fenónemos o dadas sus contraintuitivas consecuencias —contraintuitivas, en específico, por ser inconsistentes con el resto

[2]Por supuesto, mi lectura sobre el caso de la física newtoniana podría debatirse. Ambos componentes, la interpretación y el lenguaje matemático, juegan un rol importante en los procesos de descubrimiento científico. El lenguaje matemático pertinente para la física newtoniana (cálculo, geometría analítica, etc.) se desarrolló paralelamente a (o incluso antes que) la historia newtoniana. Y Newton demostró que la existencia de la fuerza se fundamenta, en parte, en el tratamiento matemático de los fenómenos del movimiento —e.g., la ley gravitatoria Newtoniana como el resultado de una deducción matemática (geométrica) de los resultados de Kepler. Estrictamente hablando, la lectura que hago es errónea pues podría objetarse que de haber existido la historia newtoniana antes que su modelación matemática, nunca se hubiera podido descubrir la ley de inercia o cualquier ley que versa en una idealización. Lo que pretendo capturar con lo que llamo primera y segunda dirección son dos *orientaciones* diferentes y que una puede preponderar sobre la otra en nuestros procesos de descubrimiento.

del cuerpo de conocimiento sobre la naturaleza. Esto llevó a que los físicos y los filósofos se preguntaran de nuevo por la interpretación de la teoría y desde entonces la situación en la que nos encontramos es la que describí aquí como la segunda ruta: contamos con un formalismo matemático sólido y que satisface las exigencias para las cuales fue diseñado o adoptado, y ahora nos damos a la tarea de construir una historia que dé cuenta de los fenómenos que pretendemos modelar y que asigne a cada pieza de la maquinaria matemática un rol claro en la descripción del mundo subatómico.

En ese sentido o bajo esa aproximación, la física cuántica parece no tener *una interpretación* sino que es susceptible de tener *interpretaciones*. Si en efecto este es el estado de la cuestión, la pregunta inmediata es: ¿qué cuenta como una interpretación y qué características debe satisfacer una interpretación para ser preferible sobre otra?

1.3 Hacia una noción de interpretación de teorías científicas y sus *desiderata*

¿Qué es, pues, una interpretación? De manera más específica, ¿qué es una interpretación para una teoría científica? No hay una única noción de interpretación; parece que, dependiendo el contexto, la noción de interpretación toma diferentes sentidos: en el contexto de una obra dramática, interpretar quiere decir actuar el papel o rol de un personaje; en el contexto literario, interpretar quiere decir construir o extraer significado a partir del simbolismo ofrecido en la obra; en el contexto de la traducción, interpretar consiste en encontrar una expresión del lenguaje al que se traduce de forma que ésta sea equivalente a la idea no directamente traducible sugerida por el texto original; pero tratándose de teorías científicas, interpretar debe significar algo distinto.

Nuestras intuiciones iniciales sobre la interpretación nos conducen, en su mayoría, a pensar que interpretar involucra, de alguna forma, la *asignación de significado* o incluso la *relectura de algo en términos distintos*. Analizar nuestras intuiciones iniciales ayudará a dar con una idea propiamente filosófica sobre la interpretación, en general, y esto permitirá, en consecuencia, acotar en qué consiste interpretar una teoría científica. Para ello, introducimos a continuación algunas distinciones.

Independientemente de si el contexto interpretativo[3] es el de una obra dramática, una pieza literaria, la traducción de un texto, o una teoría científica, podremos identificar siempre *objetos* y *relaciones entre objetos*. En el caso de la obra dramática, los objetos pueden ser los personajes y las relaciones entre objetos todas aquellas relaciones interpersonales que la narrativa entreteje para los personajes; en el caso de una obra literaria, cada objeto es un símbolo —quizá en la forma de una imagen, una metáfora, una analogía, un símil,

[3]Con *contexto interpretativo* quiero decir todas aquellas situaciones en las que un sujeto o grupo de sujetos se enfrentan a algo que deben dotar de sentido o que deben releer de manera distinta. No pretendo definir rigurosamente esta noción y apelo a la pragmática para reconocer un contexto interpretativo.

etc.— y las relaciones entre los símbolos son todas aquellas conexiones coherentes que uno puede reconocer en el/los mensaje(s) de la obra; en el contexto de la traducción, los objetos son las palabras y expresiones de ambos lenguajes, y las relaciones entre objetos son los significados adscritos a cada palabra y a cada expresión en cada lenguaje, etc.

Sea, pues, O la colección de objetos $o_1, \ldots, o_n$ que pueden jugar un papel dentro de un contexto interpretativo como los recién descritos, y sea $R^n \subseteq O^n$ determinada relación sobre una n-tupla de objetos. Entonces,

Definición 1.1. Decimos que un agente A realiza una **interpretación constructiva** dentro de un contexto interpretativo si y sólo si A relaciona a cada o_i de O y a cada R^n con un significado libremente elegido y adopta esta convención para sus propósitos en el contexto.

y

Definición 1.2. Decimos que un agente A realiza una **interpretación asociativa** dentro de un contexto interpretativo si y sólo si, dadas dos colecciones de objetos O_i y O_j, y dadas dos colecciones de relaciones n-ádicas R_i^n y R_j^n, ocurre que A asocia cada x de O_i con un único objeto y de O_j, y asocia cada n-tupla de R_i^n con una única n-tupla de R_j^n.

Con la definición 1.1 damos cuenta de fenómenos como la interpretación del simbolismo en obras literarias o incluso en otras expresiones artísticas como la pintura o la fotografía, entre otras (aunque nada impide que en el arte ocurran interpretaciones asociativas al mismo tiempo). Esta clase de interpretación toma un signo o un grupo de signos sin un significado fijo y les asigna uno libremente y con vistas a determinados propósitos. Por otro lado, con la definición 1.2 damos cuenta de fenómenos como la traducción, donde hay que releer una palabra o una expresión en otro lenguaje. Esta clase de interpretación toma algo conocido y lo utiliza para comprender, en esos términos, algo desconocido, o bien algo cuya estructura o configuración resulta compatible (incluso isomorfa) con lo ya conocido.

Pero, ¿qué nos dice todo esto sobre la interpretación de una teoría científica? ¿Diríamos que una teoría científica debe ser interpretada de forma constructiva como se hace con una obra de arte llena de simbolismo? Parece que no, pues la comunidad científica busca, en principio, describir la naturaleza de la forma más fiel posible —es decir, con el menor uso posible de simbolismo— y pretende que esta descripción sea objetiva —es decir, que sea independiente de lo que el agente A interprete. ¿Diríamos, entonces, que una teoría científica debe ser interpretada de forma asociativa como se hace con una traducción? Esto último no parece descabellado si se considera que en ocasiones una teoría científica nueva —por ejemplo, la teoría general de la relatividad— echa mano de ideas conocidas —como las de masa y gravedad— y las lleva más lejos o les añade algún elemento original —como la curvatura del espaciotiempo—, etc. Sin embargo, no es claro que esto siempre sea el caso; en realidad, podría argüirse, una teoría científica no pretende ser leída en términos de otras teorías, sino en los propios, pues de lo contrario no la contaríamos como otra teoría más.

Pienso que hablar de interpretación de teorías científicas implica hablar de *compromisos ontológicos*: uno acepta los postulados de la teoría, entiende cómo funcionan sus elementos, aprende a calcular y experimentar dentro de sus límites, y toma postura con respecto a la pregunta "¿qué es lo que hay en el mundo?" Tratándose de teorías científicas, cuyos objetivos claramente son muy distintos a los del arte y la traducción, resulta inevitable tomar una postura metafísica al interpretar —misma que, además, debe satisfacer ciertos criterios epistémicos arraigados en la práctica científica. Por ello, con respecto a las interpretaciones de teorías científicas, deberíamos buscar:

D1 que la interpretación describa claramente cómo podemos acceder epistémicamente a las entidades involucradas en la teoría y que ofrezca una metodología formal y empírica para verificar o falsear proposiciones construidas en el lenguaje de la teoría;

D2 que la interpretación de la teoría exhiba, al menos, las siguientes virtudes teóricas[4]: adecuación evidencial, coherencia universal, simplicidad, y fructiferidad.[5]

Los *desiderata* **D1-2** pretenden ser criterios que nos indiquen bajo qué situación se tiene realmente una interpretación para una teoría científica y qué cualidades colocan a una interpretación por encima de otra. Sin embargo, aún hace falta decir algo más elemental.

1.4 La noción lógica de interpretación

Una manera clara de acercarse a una noción de *interpretación* para las teorías científicas consiste en leer este término como se hace en la *lógica*.

[4]De acuerdo con la sistematización de Keas (2017), hay cuatro grupos de virtudes teóricas: 1) virtudes evidenciales —adecuación evidencial, adecuación causal, y profundidad explicativa—; 2) virtudes coherenciales —consistencia interna, coherencia interna, y coherencia universal—; 3) virtudes estéticas —belleza, simplicidad, y unificación—; y 4) virtudes diacrónicas —durabilidad, fructiferidad, y aplicabilidad—.

[5]Lo primordial aquí es que la interpretación de la teoría sea tal que sus postulados, sus teoremas, y sus predicciones sean compatibles —esto es, entren en una relación de coherencia epistémica— con el resto del conocimiento científico disponible. Keas (2017, 2) describe estas virtudes como sigue:

> *Evidential accuracy*: A theory (T) fits the empirical evidence well (regardless of causal claims).
>
> *Universal coherence*: T sits well with (or is not obviously contrary to) other warranted beliefs.
>
> *Simplicity*: T explains the same facts as rivals, but with less theoretical content.
>
> *Fruitfulness*: T has generated additional discovery by means such as successful novel prediction, unification, and non ad hoc theoretical elaboration.

En particular, la virtud epistémica de simplicidad pide que la interpretación introduzca parsimoniosamente entidades a la ontología derivada del cuerpo de conocimientos científicos, o bien que utilice entidades que ya pertenecían a la ontología conocida (aceptada), pero dotándolas de nuevas funciones, roles o disposiciones —en ambos casos, el manejo de la ontología persigue siempre fines explicativos

Partiendo del supuesto de que una teoría científica T es representable o modelable a través de los lenguajes formales y sus métodos lógicos, es posible determinar exactamente qué significa interpretar una teoría científica. Para ello, definiremos las nociones de *a*) *teoría formal*; *b*) *teoría de primer orden*[6]; y *c*) *teoría interpretada.*

Definición 1.3. Sea K un lenguaje formal. K es una **teoría formal** sii:

1. Existe un conjunto contable de símbolos de K y una secuencia finita de éstos es una expresión de K.

2. Existe un subconjunto del conjunto de las expresiones de K llamado *fórmulas bien formadas* (fbf's) y un procedimiento efectivo para determinar si una expresión de K es una fbf.

3. Existe un conjunto de fbf's que son los *axiomas* de K.

4. Existe un conjunto finito de relaciones entre fbf's, llamado *reglas de inferencia.*

La definición 1.3 distingue entre cadenas arbitrarias de símbolos y expresiones reguladas tanto en su construcción como en las relaciones de consecuencia lógica que pueden existir entre ellas. En ese sentido, las teorías formales, como el cálculo proposicional, son un conjunto de símbolos y reglas para emplear estos símbolos.

Definición 1.4. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Una **teoría de primer orden** en el lenguaje $\mathcal{L}$ es una teoría formal K cuyos símbolos y fbf's son símbolos y fbf's de $\mathcal{L}$ y cuyos axiomas y reglas de inferencia son de dos tipos: axiomas lógicos y axiomas no lógicos.

Los axiomas lógicos mencionados en la definición 1.4 son enunciados tautológicos (o verdades lógicas) que regulan, echando mano de las reglas de inferencia, qué expresiones (teoremas) pueden deducirse a partir de ellas; estos teoremas serán de carácter puramente lógico. Los axiomas no lógicos, por otro lado, son enunciados que no gozan de carácter tautológico, es decir, son enunciados contingentes que pueden tomarse por verdaderos para un contexto dado. Esto último cobra más sentido cuando entendemos que

Definición 1.5. Una teoría de primer orden se considera **interpretada** sii existe un modelo (interpretación de $\mathcal{L}$) de K que hace verdadero a cada axioma de K.

Puesto que una teoría interpretada goza de un modelo —es decir, hay una asignación para cada variable, constante, predicado y función del lenguaje de primer orden (o sea, una manera de leer estos símbolos)— que hace verdaderos a los axiomas no lógicos, las

[6]En efecto, hablar sólo de teorías de primer orden es una simplificación; los órdenes superiores son necesarios en teorías incluso tan elementales como la aritmética, por ejemplo. Considérese que esta maniobra explicativa —limitarnos, por ahora, a las teorías de primer orden— obedece meramente a un interés expositivo.

construcciones capturadas por la definición 1.5 reflejan el comportamiento de cierto tipo de objetos que deseamos describir.

Por ejemplo, ZFC es una teoría de primer orden puesto que ella está expresada en términos de un lenguaje de primer orden y puesto que ella contiene axiomas lógicos —todos los axiomas del cálculo de predicados estándar— y axiomas no lógicos —enunciados contingentes acerca de los conjuntos—; más aún, ZFC resulta ser una teoría interpretada puesto que tiene un modelo que nos dice cómo interpretar cada variable y cada constante, a saber, como conjuntos, y dicho modelo —presumiblemente— hace verdaderos a los axiomas de ZFC.

En ese sentido, es decir, en sentido lógico, una teoría científica capturada por un lenguaje formal tendrá una interpretación si somos capaces de ofrecer un modelo para los axiomas no lógicos de la teoría. Esto consiste en leer los términos y fórmulas de la teoría formal como ciertas entidades que pretendemos describir. De esto se sigue que si somos capaces de codificar nuestros conocimientos sobre la mecánica cuántica, por ejemplo, en un lenguaje de primer orden y si somos capaces de axiomatizar nuestros enunciados sobre los aspectos regulares del mundo cuántico en este lenguaje de forma tal que sea posible dar un modelo para esos postulados, entonces habremos dado con una interpretación para la mecánica cuántica.

Ahora bien, una teoría interpretada no necesariamente tiene un único modelo, en general. Si esto es así, nada impide que nuestra hipotética teoría interpretada de primer orden para la mecánica cuántica tenga más de una interpretación, más de un modelo que haga verdaderos a los axiomas no lógicos que, por experimentación, hemos visto que rigen el comportamiento de los fenómenos subatómicos que pretendemos describir. Es decir, bien podríamos contar con dos modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, distintos entre sí, tales que ambos satisfagan los axiomas de la teoría interpretada pero nos indiquen, de forma muy distinta, cómo leer una constante, una variable, un predicado o una función.

Lo anterior indica de forma muy clara qué es una interpretación para una teoría científica, pero supone que hay algo así como una axiomatización para la mecánica cuántica, lo cual puede (y parece) no ser el caso. La naturaleza axiomática de las teorías formales difícilmente es perfectamente trasladable a las teorías donde la experimentación es un factor determinante para la aceptación o postulación de principios de la teoría. No es común en la práctica científica recurrir a un lenguaje formal con métodos lógicos para desarrollar axiomáticamente una teoría empírica, y salvo en casos particulares que estudiaremos más adelante, como el de la *lógica cuántica*, las diversas interpretaciones conocidas para la mecánica cuántica no surgieron así.

Si bien la caracterización que hemos hecho aquí tiene por objetivo ser meramente explicativa y no pretende afirmar que la mecánica cuántica de hecho está construida axiomáticamente ni que de hecho tiene un modelo, etc., más adelante echaremos mano de algunas ideas que se definieron por estas vías. Diremos por lo pronto que la vía lógica para comprender en qué consiste interpretar una teoría científica coincide, en principio, con el rechazo al **PUE**, pues una teoría interpretada puede, en principio, tener más de un modelo y, por tanto, dar lugar a más de una interpretación adecuada.

1.5 La noción modal de interpretación

Nuestras teorías físicas, las más de las veces, están formuladas en términos de estructuras matemáticas; por ejemplo, una estructura $\langle V, +, * \rangle$ donde V es un espacio vectorial, $+$ la suma de vectores y $*$ la multiplicación por escalares, es una estructura matemática que nos permite modelar ciertos fenómenos físicos como el desplazamiento, etc. La física matemática, en ese sentido, consistiría en el estudio de todas aquellas estructuras matemáticas que tienen *instanciaciones físicas*, es decir, modelos matemáticos que se ajustan a las características de ciertos objetos físicos y sus dinámicas, comportamientos, propiedades, etc. —y, claro, pueden existir estructuras matemáticas que no cuentan con instanciaciones físicas. Sin embargo, aún concediendo que toda teoría física es una estructura matemática —lo cual no necesariamente es el caso—, si uno pretendiera decir que una estructura matemática tiene una interpretación física únicamente si es instanciada, nos encontraríamos frente a una idea de *interpretación* que no es suficientemente clara debido a que la noción de *instanciación* es poco informativa.[7] Por ello, si bien esta propuesta parece intuitiva o que se encuentra en el fondo de la discusión acerca de la interpretación de teorías físicas como la mecánica cuántica, nos será provechoso considerar otros acercamientos.

En la literatura filosófica contemporánea, a partir de David Lewis, se ha difundido ampliamente la idea de que el contenido de una proposición es el conjunto de mundos posibles donde dicha proposición es verdadera. Si bien el término *mundos posibles* podría sugerir un compromiso con tesis que suelen generar controversia, como el *realismo modal*, es posible darle una lectura muy clara e intuitiva sin introducir mundos literalmente a nuestra ontología: comprender el contenido de una proposición P es ser capaz de reconocer en qué situaciones o contextos se da el caso que P, y distinguirlos de todos aquellos donde P no ocurre.

En ese sentido, uno podría afirmar que el agente s *interpreta* la proposición P sii s asigna w_i a P, donde $w_i = \{w \in W : w \text{ es un mundo donde } v(P) = \top\}$.[8] Dicho de otro modo y sin involucrar agentes, una interpretación $i : \{P\} \to \wp W$ de P es una función que asigna a la proposición P el conjunto $w_i \subseteq W$ de mundos posibles w donde $v(P) = \top$.

[7] No sólo eso, sino que parece ser también una posición que, así formulada, se compromete con que existen previamente diversas estructuras matemáticas y, por alguna razón, algunas de ellas pasan a ser instanciadas en el mundo físico en segundo término. Esta posición quizá sea atractiva para alguien que sostiene un *realismo matemático*, pero definitivamente no sería compartida por aquellos que no sostienen esta creencia.

[8] De acuerdo con nuestra notación, W es el conjunto o clase de todos los mundos posibles w. Por otro lado, w_i es un subconjunto de W, especificamente aquel que reúne a todos y sólo aquellos mundos w donde P es verdadera bajo la evaluación v.

Igualmente, una idea muy difundida en filosofía de la ciencia, desde tiempos del así llamado Círculo de Viena, es aquella que afirma que una teoría (científica) es, en esencia, un conjunto de proposiciones. Por supuesto, no cualquier conjunto de proposiciones es una teoría (científica); existe una serie de requisitos técnicos que cubrir para que un conjunto de proposiciones tenga carácter de teoría. En ese sentido, toda teoría (científica) es un conjunto de proposiciones, pero no todo conjunto de proposiciones es una teoría (científica).

Dado lo anterior, formulamos a continuación la

Interpretación Modal de Teorías (IMT) Una interpretación $i : \{T\} \to \wp W$ de una teoría T es una función que asigna a la teoría T el conjunto $w_i \subseteq W$ de mundos posibles w donde T es el caso.

La **IMT** tiene una estrecha relación con el realismo semántico (en el cual toda proposición —dentro o fuera de la teoría— tiene un valor de verdad determinado) y con el realismo epistémico (donde las proposiciones de la teoría son todas ellas verdaderas o refieren de hecho al mundo real porque hay adecuación empírica), discutidos por Psillos y Van Fraassen. Algunos filósofos de la ciencia, como Ruetsche (2011, p.6), consideran que **IMT** es la posición estándar de lo que significa interpretar una teoría científica. Esta posición afirma que interpretar una teoría es dar su contenido, esto es, el conjunto de mundos posibles donde la teoría se cumple. Esto último querría decir, de acuerdo con nuestra lectura, determinar las situaciones o contextos donde los principios, afirmaciones y predicciones de la teoría son el caso. En palabras de van Fraassen:

> When we come to a specific theory, there is an immediate philosophical question, which concerns the content alone: *how can the world possibly be the way this theory says it is?* This is for me the foundational question *par excellence* (1989, p.193).
> *The question of interpretation*: Under what conditions is the theory true? What does it say the world is like? (1991, p.242)

Si interpretar una teoría significa equiparla de contenido, esto es, determinar los mundos posibles donde T es el caso, entonces será necesario dar cuenta de la noción de *posibilidad* que admite T, esto es, dar cuenta de qué es algo T-posible. Tratándose de teorías físicas, el tipo de posibilidad con la que tratamos es, evidentemente, la *posibilidad física*, también llamada *posibilidad nomológica*. En ese sentido, una teoría física T debe describir, primero que nada, objetos y comportamientos físicamente posibles, pues nadie contará como una teoría física aquel conjunto de enunciados que contemplen objetos y situaciones que sabemos que no pueden ocurrir, dadas las leyes físicas de otras teorías físicas ya establecidas dentro de la comunidad científica. Pero en segundo lugar, una teoría física T pretende no sólo ser coherente con nuestro cuerpo de conocimientos sino también dar cuenta de aquello que es posible según las leyes particulares de T. Así pues, si T tiene las leyes $L_1, \ldots, L_n$, todo aquello que sea T-posible será aquello que está de acuerdo con $L_1, \ldots, L_n$ pero que también esté de acuerdo con todo aquello que sabemos que es posible según nuestros otros conocimientos de la física.

Quizá lo anterior parece ofrecer una respuesta para la pregunta "¿qué es una interpretación de una teoría científica?", además de dar cuenta de por qué **PUE** puede fallar. Sin embargo, ¿qué nos dice **IMT** sobre la mecánica cuántica y sus interpretaciones? Cada una de ellas sería una diferente asignación de mundos posibles que equipa de contenido a la teoría; en algunos mundos la realidad física es tal que hay, por ejemplo, colapso de la función de onda, pero en otros es tal que en vez de ésto hay decoherencia cuántica, etc. Esto no parece decirnos nada nuevo, en principio; y, por otro lado, hay nociones importantes en este modelo —como la de necesidad nomológica y su relación de accesibilidad— que definitivamente no son obvias en cuanto a su naturaleza y funcionamiento, como ha sido discutido ampliamente en la literatura. No obstante, algunos de los principios trazados aquí serán relevantes más adelante.

1.6 Los límites de los métodos formales

Aproximarnos a la noción de interpretación desde la lógica —esto es, por medio de la definición de teoría interpretada y por medio de la construcción modal de interpretaciones de teorías— nos deja con dos propuestas bastante claras, pero demasiado generales, de qué significa interpretar una teoría. La generalidad con la que tratan el problema estas propuestas es tal que dejar claro qué es una interpretación viene con el costo de omitir muchos detalles. Dicho de forma más directa: tenemos un par de esquemas formales que ofrecen una abstracción de la situación concreta que vive la comunidad científica y dichos esquemas no vienen equipados de contenido empírico alguno, lo cual no debe desaparecer de nuestra atención si pretendemos hablar de la mecánica cuántica.

Dijimos, con respecto a la noción de teoría interpretada, que difícilmente encontraremos teorías físicas que han sido formuladas en un lenguaje formal con métodos lógicos y que han sido, además, axiomatizadas adecuadamente. Esta objeción es pragmática: vemos que la práctica científica, la conducta controlada de los científicos, de hecho no procede como se ha descrito en la lógica formal, y sin embargo tenemos ciencia y tenemos teorías con diversas interpretaciones, por lo cual debemos concluir que esta propuesta no describe adecuadamente el fenómeno que queremos modelar.

Sin embargo lo anterior no implica que esa primera ruta carece de toda utilidad. Hay dos puntos que me parecen relevantes y que pretendo conservar.

Primero, es conveniente distinguir entre *lo formal y lo no formal*: una cosa es el aparato matemático utilizado en la teoría, y otra cosa muy distinta es el pronunciamiento que se toma al asignarle un correlato empírico a ciertos elementos del aparato matemático.

Sabemos que las diversas interpretaciones de la mecánica cuántica tienen bastante en común con respecto a las matemáticas que utilizan: encontramos en ellas un espacio de Hilbert donde codificamos información por medio de vectores estado, hablamos de propiedades de sistemas cuánticos en términos de operadores hermitianos, utilizamos la función de onda para conocer, por ejemplo, la probable ubicación de una partícula, etc. Sin embargo, algunas teorías asignan un correlato o referente empírico a estas entidades matemáticas y otras no lo hacen; el caso más claro, me parece, es el de la función de onda, misma que puede verse como un mero formalismo que ayuda a calcular ciertas predicciones o que puede verse, por ejemplo, como un (multi)campo tan real o tan empírico como los campos electromagnéticos, etc.

Y, segundo, es conveniente mantener la idea de *modelo de una teoría*. Una vez que hemos separado lo formal de lo no formal dentro de una teoría, es necesario introducir un modelo que determine claramente cómo cierta asignación de contenido empírico a los elementos formales de la teoría hacen que ésta sea verdadera según sus principios más básicos. Dicho de forma más clara: dos modelos diferentes pueden o no asignarle un referente o correlato empírico a, por ejemplo, la función de onda como elemento formal de la teoría y, sin embargo, satisfacer en ambos casos los principios elementales de la mecánica cuántica o tener adecuación empírica, por ejemplo. Mantener la noción de modelo de una teoría nos ayudará a dar cuenta de por qué en la mecánica cuántica existen diversas interpretaciones en competencia, ya que en múltiples casos la matemática de la teoría no es lo que cambia, sino la historia que construimos al rededor de los elementos matemáticos de la teoría, entre otras cosas.

¿Qué es, pues, lo que desechamos de la aproximación lógica? El requisito de codificar las teorías en lenguajes formales con métodos lógicos y axiomatizarlas. Hemos dado ya suficientes razones para pensar que este requisito no debe imponerse a la noción de interpretación de teorías científicas, en general, ni a las diversas interpretaciones de la mecánica cuántica, en particular. ¿Cuáles son los límites de la aproximación lógica, entonces? Además de lo que recién adujimos, hay que decir que la lógica por sí misma nunca nos dirá cómo construir el (los) modelo(s) para la teoría ya que estos surgen, por lo menos para el caso de las teorías físicas como la mecánica cuántica, de la observación y la experimentación, que claramente son procesos extra lógicos —por llamarlos de alguna manera.

Por otro lado, en cuanto a la aproximación modal, también hay elementos que vale la pena conservar y otros que es mejor desechar. Esta aproximación nos dice que interpretar una teoría consiste en asignar un conjunto de mundos posibles que se comportan de acuerdo con las leyes o descripciones de la teoría. La receta que tenemos para asignar estos mundos es simple: hay que tomar aquellos que obedecen las leyes físicas conocidas además de obedecer las leyes de la teoría en cuestión (pero procurando la adecuación empírica). Sin embargo, podríamos tener una interpretación para una teoría dada sin atender adecuadamente a la experiencia: uno puede generar una teoría compatible con el resto de teorías científicas comprobadas pero que consiste únicamente de un aparato matemático acompañado de postulados que no han sido empíricamente verificados. Por ejemplo, cierta formulación de la teoría de cuerdas podría ser compatible con nuestros conocimientos de la física y describir ciertos mundos posibles en términos de lo que ella postula sin siquiera haber verificado por medio de la observación y la experimentación que dichos postulados se cumplen en el mundo actual; es decir, podemos saber cuáles y cómo son los mundos asignados pero desconocer si uno de ellos es, de hecho, el mundo actual, y aún así tendríamos, bajo **IMT**, una interpretación para la teoría de cuerdas.

Podría objetarse a lo anterior que si una teoría involucra elementos no verificables, entonces simplemente no es una teoría. Y quizá esa objeción es razonable. No obstante, en el caso de la mecánica cuántica contamos con observación y experimentación para verificar una gran cantidad de predicciones que se desprenden de la teoría, pero seguimos sin conocer si el mundo actual es tal que lo postulado por Copenhague, Bohm, GRW, etc. es el caso.

Adicionalmente, no queda claro qué debe hacerse con una teoría que carece de leyes o si uno tiene la creencia de que no existen las leyes de la física. En el caso de una teoría sin leyes, ¿cómo señalamos los mundos posibles que deben ser asignados a la teoría? Bien podría ser que, por vacuidad, todos los mundos donde las leyes conocidas se cumplen son, al mismo tiempo, mundos que cumplen las leyes de la teoría en cuestión — a saber, ninguna ley—, lo cual claramente no nos dice nada nuevo. Y si uno cree que no existen las leyes físicas, el acercamiento modal simplemente no tiene sentido.

Me parece que del acercamiento modal debemos rescatar lo siguiente: interpretar una teoría implica dar una descripción del mundo, pronunciarse a favor de la existencia de determinadas entidades cuya configuración se rige por algunos principios explicativos — sean éstos leyes o no. Esta descripción del mundo permite construir retrodicciones y predicciones para cualquier contexto relevante —donde "contexto relevante" viene a suplir "mundos posibles nomológicamente accesibles", es decir, persigue un interés explicativo. Parece claro, entonces, que esta tarea es imposible sin recurrir a la experiencia para verificar si nuestra descripción es acertada, y por tanto debemos priorizar la adecuación empírica (y la coherencia universal) de los principios explicativos.

Si bien ambos acercamientos delimitan con generalidad una noción de interpretación para teorías científicas, sabemos ahora que estos formalismos tienen serias limitaciones. Tomaremos de ellos lo que nos es útil y eventualmente revisaremos otros formalismos —en particular, los topos cuánticos de la teoría de categorías—; y por lo pronto trataremos de recurrir a aproximaciones no formales para compensar las carencias que las vías lógica y modal presentan.

1.7 Más allá del formalismo

Podemos recurrir a argumentos más bien ontológicos para acercarnos a una mejor noción de interpretación de teorías científicas y para mostrar, como hemos hecho antes, que **PUE** no siempre es el caso y, en particular, que dentro de la mecánica cuántica definitivamente no se cumple.

Digamos que

Definición 1.6. Una **interpretación** I para una teoría científica T es una pronunciación a favor de la existencia de las entidades descritas[9] por T y una aceptación de la creencia de que cada una de estas entidades se comportará de acuerdo con T. Diremos que I es una **interpretación analógica** si las entidades descritas por la teoría tienen un correlato análogo (o isomorfo) en la ontología del mundo; y diremos que I es una **interpretación literal** si T indica directamente en la ontología del mundo cuáles son aquellas entidades que describe.

Es decir, la definición 1.6 consiste en un compromiso ontológico con lo que describen las teorías científicas. Si T habla de objetos x con P_i propiedades reguladas por ciertas leyes, entonces: *a*) podemos interpretar literalmente T pensando que x de hecho forma parte de la ontología del mundo (es un objeto espaciotemporal) y se comporta como lo describe T; o bien, *b*) podemos interpretar T analógicamente pensando que las x con P_i de las que hablan no son, directamente, objetos del mundo, sino estructuras que podemos encontrar en algunos sistemas de la naturaleza y que se comportan aproximadamente como lo dice T.

En ese sentido, si la mecánica cuántica describe, entre otras cosas, sistemas de partículas en estados superpuestos $c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle$, entonces existen, en general, dos opciones interpretativas: pensar que la propiedad de tener superposiciones de estados forma parte de la ontología del mundo físico (i.e. es una propiedad o forma de ser de los objetos espaciotemporales); o bien, pensar que lo que el aparato teórico o matemático de la mecánica cuántica nos está diciendo es que pensar los estados de los sistemas cuánticos como sumas de vectores es una forma de aproximarse a comportamientos o fenómenos en el mundo natural que siguen, en algún aspecto aunque quizá no literalmente, tal estructura —algo como afirmar que los sistemas de partículas realmente no poseen como propiedad la superposición de ciertos estados sino que la teoría utiliza esta representación matemática para describir nuestro proceso de adquisición de conocimiento aproximado sobre la naturaleza de estas entidades.

Independientemente de qué posición tomemos —literal o analógica—, es claro que hay

[9]Puede no ser siempre claro exactamente qué entidades se pretenden describir pero mínimamente debe ser claro que se tienen ciertas entidades con propiedades o comportamientos específicos que podemos representar y testear para obtener un conocimiento aproximado acerca de las entidades pretendidas por la teoría.

un problema de realismo en el fondo de la discusión. Por ejemplo, acerca de qué significa dar una interpretación para la mecánica cuántica, Redhead (1989, p.44) sostiene:

> [An interpretation of quantum mechanics] is simply some account of the nature of the external worlds and/or our epistemological relation to it that serves to explain how it is that the statistical regularities predicted by the formalism with the minimal statistical interpretation come out the way they do.

Claramente, la opinión de Redhead es de corte realista: interpretar la mecánica cuántica consiste en conciliar el mundo externo (la ontología de nuestro mundo) con lo que la teoría nos reporta, de forma tal que para nosotros, como agentes epistémicos, exista una relación explicativa (o incluso causal) de la teoría para con el mundo.

Pero, claramente, uno puede diferir. Perfectamente podemos pensar que más de una de las interpretaciones ofrecidas para la mecánica cuántica obtienen la conciliación recién descrita. Es decir, nada impide que la relación de explicación entre teoría y mundo se obtenga con más de una de las diferentes interpretaciones que tenemos a la mano. En ese sentido, independientemente de si nuestras interpretaciones son literales o analógicas, la exigencia de Redhead se cumple y, con ello, obtenemos el mismo resultado que nuestro análisis lógico obtuvo anteriormente: el **PUE** no necesariamente es el caso.

Recurrimos a argumentos de corte más bien ontológico para acercarnos a la noción de interpretación de una teoría científica ahora que hemos mostrado que la vía del formalismo —lo que hemos encontrado desde la aproximación lógica y desde la aproximación modal— no es enteramente satisfactoria. Como vimos, la posición de Redhead involucra dos elementos: 1) pronunciarse sobre el/los mundo(s) externo(s) —es decir, ofrecer una ontología— y 2) dar cuenta de nuestra relación epistémica con el/los mundo(s) externo(s). Coincidimos con Redhead en que el problema de la interpretación de la mecánica cuántica debe considerar estos dos elementos y a continuación desarrollaremos estas ideas.

1.8 Ontología y epistemología

Cuando dimos los *desiderata* de una interpretación para una teoría científica quedaron implícitos los elementos para una

Definición 1.7. ***[Definición general de interpretación de teorías científicas]:*** una estructura $\langle \mathcal{O}, \mathcal{E} \rangle$ compuesta por una ontología $\mathcal{O}$ y una epistemología interna $\mathcal{E}$, adjunta a una teoría científica T, es una **interpretación de T**.

Dijimos con **D2** que la interpretación introduciría —respetando parsimonia— entidades a la ontología derivada del cuerpo de conocimientos científicos, o bien que la interpretación utilizaría entidades que ya pertenecían a la ontología aceptada pero asignándoles nuevos roles o disposiciones. Con esto obtenemos una descripción de $\mathcal{O}$: por un lado, hay una *ontología aceptada por la comunidad científica* (OA) y la interpretación de una teoría T puede a) incorporar una *ontología propuesta* (OP) a OA —es decir, generar una nueva OA^*, donde OA^* es la unión de OA y OP, y OA es distinta de OP—, o b) puede mantener OA como está —o, en términos de lo anterior, tener que OP es idéntica a OA— y describir a sus elementos de forma distinta en cuanto a sus roles o disposiciones—; pero por otro lado, como dijimos en la definición 1.6, cuando nos pronunciamos a favor de la existencia de las entidades descritas por T lo podemos hacer de manera analógica o de manera literal, y esto debe darnos una descripción directa o indirecta, según sea el caso, de el/los mundo(s) y lo que es posible en él/ellos.

Dijimos con **D1** que la interpretación describiría cómo accedemos epistémicamente a las entidades de OP y que ofrecería una metodología formal —esto es, principios para utilizar el aparato matemático de T— y empírica —esto es, maneras en las que se puede diseñar experimentos — para determinar si una proposición de la teoría es verdadera o falsa. Con esto obtenemos una descripción de $\mathcal{E}$: hay una serie de principios en T que describen cómo obtener conocimientos según T partiendo de que las matemáticas de T, junto con sus protocolos experimentales, permiten justificar las creencias construibles en términos de T. Evidentemente, esta descripción de $\mathcal{E}$ permite ver por qué la hemos nombrado "epistemología *interna*".

Dijimos también con **D2** que la interpretación de la teoría exhibiría, al menos, las virtudes teóricas de adecuación evidencial, coherencia universal, simplicidad, y fructiferidad. Esto nos permite, por un lado, reconocer cuándo tenemos frente a nosotros una *buena* interpretación para T; y, por otro lado, nos permite comparar diferentes interpretaciones de T que se encuentran en competencia, de manera que sea determinable si **PUE** se cumple —en cuyo caso estaríamos suscribiendo un acercamiento del tipo IME (inferencia a la mejor explicación) para con los fenómenos estudiados en las diversas interpretaciones— o si, por el contrario, **PUE** falla —en cuyo caso, tendríamos que adoptar una especie de *pluralismo teórico*, en el sentido en que se suscribe que hay más de una manera de estudiar adecuadamente los fenómenos que pretendemos capturar con nuestras teorías.

Sentado lo anterior, podemos ofrecer la siguiente

Definición 1.8. ***[Definición general de problema de interpretación de una teoría científica]:*** llamamos **problema de interpretación de una teoría científica** a la situación de tener dificultades para incorporar $[\langle\mathcal{O},\mathcal{E}\rangle|T]$ a la red de conocimientos científicos.

En la definición 1.8 echamos mano de la notación $[\langle\mathcal{O},\mathcal{E}\rangle|T]$, misma que codifica la noción de *interpretación de T*. Partimos del supuesto de que hay algo así como conocimiento científico y lo describimos, a la Quine, como una red de creencias anclada a la experiencia. En ese sentido, la dificultad para incorporar $[\langle\mathcal{O},\mathcal{E}\rangle|T]$ a dicha red consiste, necesariamente, en alguna de las siguientes situaciones:

P1 hay razones para pensar que OA no debería ser expandida con la OP de T —es decir, $\mathcal{O}$ entra en conflicto con la red de conocimientos científicos porque introduce entidades que no estamos preparados para aceptar según lo que sabemos;

P2 hay razones para pensar que $\mathcal{E}$ justifica creencias que no entran en relación de coherencia epistémica con algún nodo (creencia) de la red de conocimientos científicos (entra en conflicto con la espistemología *externa* a la teoría);

P3 tanto **P1** como **P2** ocurren.

P4 en el proceso de cambio teórico, donde una nueva teoría $T\prime$ reemplaza a otra teoría previa T y trae con ello un cambio en la ontología y/o en la epistemología interna, puede ocurrir que las virtudes teóricas de T no se trasladen (o incorporen) a $T\prime$.[10]

Es importante observar que problemas como los capturados en la definición 1.8 ocurren como consecuencia de tener problemas más bien *internos* para construir la interpretación $\langle \mathcal{O}, \mathcal{E} \rangle$, como pueden ser el fallar a alguna de las virtudes teóricas —e.g. adecuacion evidencial—, carecer de una metodología empírica —e.g. carecer de un protocolo experimental para contrastar la teoría, como ocurre (según parece) con la teoría de cuerdas—, o faltar a la parsimonia durante la introducción de entidades a la ontología.

Y, claramente, dado que el planteamiento que hemos hecho aquí es general, un problema de interpretación de la mecánica cuántica es sólo un caso particular de nuestra noción de problema de interpretación de una teoría científica.

Si lo anterior cuenta como una respuesta al problema (i) planteado en los objetivos de este capítulo —exactamente qué cuenta como un problema de interpretación en mecánica cuántica, tomando en cuenta sus consecuencias epistemológicas y ontológicas—, parecerá claro, entonces, que la respuesta al problema (ii) —por qué existe la necesidad de un análisis filosófico en torno a la interpretación de la mecánica cuántica— es la siguiente: si los componentes de la mecánica cuántica en tanto teoría—es decir, el aparato matemático y los principios generales de la mecánica cuántica— permiten hacer predicciones acertadamente (o lo suficientemente acertadas) pero aún así tenemos dificultades para incorporar alguna de sus diversas interpretaciones a la red de conocimientos científicos, entonces es necesario revisar las ontologías y/o las epistemologías involucradas en las interpretaciones de la teoría, lo cual es una tarea para el filósofo naturalista. En consecuencia, examinaremos a continuación los compromisos ontológicos y epistémicos de algunas de las interpretaciones de la mecánica cuántica, lo cual dará una respuesta a (iii) —qué valor filosófico tienen algunas de las distintas interpretaciones que ha recibido la mecánica cuántica.

[10]Este fenómeno es similar al concepto de *pérdidas de Kuhn* —donde parte del éxito teórico o empírico de un paradigma científico previo no se hereda al paradigma científico que la reemplaza.

1.9 Una plétora de interpretaciones

La comunidad científica ha propuesto numerosas interpretaciones para la mecánica cuántica. Si bien cada una presenta particularidades que dificultan un análisis comparativo entre las distintas propuestas en competencia, mencionaremos a continuación algunos criterios relevantes para el estudio de los compromisos ontológicos y epistémicos que adopta cada una de las principales interpretaciones que conocemos. Estos criterios son:

C1 Si la teoría es determinista.

> Este criterio nos permite separar a las teorías que emplean la ecuación de Schrödiger pero no la regla de Born, de entre aquellas que además de emplear Schrödinger usan Born. La ecuación de Schrödinger se considera el elemento que introduce determinismo en la teoría ya que ella permite conocer —esto es, predecir— la evolución de un estado físico a través del tiempo con total certeza. Por otro lado, la regla de Born se considera el elemento que introduce indeterminismo en la teoría ya que ella utiliza la función de onda para obtener una distribución de probabilidad que representa, por ejemplo, dónde es más probable encontrar una partícula en un tiempo específico, sin garantizarnos que, de hecho, la partícula se encuentra en una ubicación determinada y no en otras.

C2 Si la teoría es local.

> Este criterio nos permite separar a aquellas teorías en las que la acción a distancia es posible de entre aquellas en las que no es así. Dicha acción a distancia ocurriría cuando, dadas dos partículas enredadas, por ejemplo, el acto de medir una hace que el estado de la otra —sin importar cuán lejos esté— colapse a algún estado determinado. Por supuesto, se ha argumentado que la no localidad de la teoría cuántica no necesariamente implica acción a distancia sino que puede verse de forma restringida como algo acerca de las probabilidades y las predicciones permitidas por la teoría.

C3 Si la función de onda colapsa.

> Este criterio nos permite separar a las teorías que postulan el colapso de la función de onda de un estado superpuesto para explicar por qué no observamos superposiciones de estados —por ejemplo, porque nuestra medición o nuestra consciencia causa el colapso— de entre aquellas que no colapsan la función pero explican el hecho de que no observemos superposiciones al postular múltiples mundos o múltiples mentes, o incluso variables ocultas.

C4 Si la función de onda es real.

> Este criterio nos permite separar a las teorías en las que la función de onda es considerada como un objeto físico —por ejemplo, un campo— o como una

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Copenhague	×	×	✓	×	✓	✓	×
DeBroglie-Bohm	✓	×	×	✓	×	✓	✓
Múltiples mundos	✓	✓	×	✓	×	×	×
Múltiples mentes	✓	✓	×	✓	×	×	×
Consciencia y colapso	×	×	✓	✓	✓	✓	×
Colapso objetivo	×	×	×	×	×	✓	×
Transaccional	×	×	✓	✓	×	✓	×
Historias consistentes	×	✓	×	×	×	×	×
QBism	×	×	✓	×	✓	✓	×

Cuadro 1.1: Criterios que se cumplen o no en algunas interpretaciones de la mecánica cuántica.

distribución de masa, de entre aquellas que la consideran un mero formalismo matemático con fines predictivos.

C5 Si el observador tiene un rol.

Este criterio nos permite separar a las teorías en las que el colapso de la función de onda se debe a que un observador interviene en el sistema físico —por ejemplo, al medir—, de entre aquellas en las que o bien la función de onda no colapsa o bien su colapso es objetivo —es decir, donde el colapso ocurre como un hecho natural regulado por leyes físicas y no por elementos subjetivos o antropocéntricos—.

C6 Si la historia del sistema cuántico es única.

Este criterio nos permite separar a las teorías que emplean múltiples mundos o múltiples mentes o ramificación del espacio-tiempo, de entre aquellas que consideran que un único mundo existe o que el espacio-tiempo no se ramifica.

C7 Si el formalismo contempla variables ocultas.

Este criterio nos permite separar a las teorías cuyas descripciones de las funciones de onda son completas de entre aquellas que son incompletas.

Podemos relacionar algunas de las principales interpretaciones de la mecánica cuántica con los siete criterios recién aludidos, como se hace en el cuadro 1.1. Además de esto, hace falta determinar cuáles son los compromisos ontológicos y epistémicos de los criterios **C1-7**; esto lo desarrollamos a continuación.

Si la teoría es determinista (**C1**):

- Compromiso(s) ontológico(s): los objetos en el mundo no evolucionan azarosamente sino que ocurren de acuerdo con leyes naturales que normalmente expresamos con modelos de cobertura con cláusulas *ceteris paribus*, etc.
- Compromiso(s) epistémico(s): el conocimiento total y preciso de los eventos y objetos pretendidos por la teoría es, *en principio*, siempre predecible si ella es determinista;

esto es, a un agente epistémico idealizado le bastaría conocer las leyes de la teoría y la configuración inicial del universo para conocer la evolución completa de cada evento natural.

Si la teoría no es determinista ($\neg$**C1**):

- Compromiso(s) ontológico(s): existen algunos eventos que evolucionan azarosamente y el mejor acercamiento que podemos tener hacia ellos es estadístico y probabilístico.
- Compromiso(s) epistémico(s): no todos los aspectos de la realidad nos son epistémicamente accesibles, es decir, la teoría no tiene predicciones para todo evento o dispone de predicciones apenas aproximadas a lo que de hecho es el caso.

Si la teoría es local (**C2**):

- Compromiso(s) ontológico(s): la acción a distancia no es posible, los objetos físicos son tales que se ven influenciados únicamente por objetos y fuerzas inmediatos, de forma que, dados dos eventos A y B tales que A influye sobre B y la distancia entre A y B es d, ocurre que existe un medio —por ejemplo, un campo— a través del cual se da dicha influencia y la velocidad en la que se transmite la influencia desde A hacia B a lo largo de d es menor a la velocidad de la luz.
- Compromiso(s) epistémico(s): el conocimiento revelado por las mediciones no es afectado por factores arbitrariamente lejanos, sino únicamente por lo que hay en el entorno inmediato o cercano.

Si la teoría no es local ($\neg$**C2**):

- Compromiso(s) ontológico(s): un objeto físico puede influir inmediatamente sobre otro sin importar a qué distancia se encuentren, de forma que el límite natural de la velocidad de la luz se rompe.
- Compromiso(s) epistémico(s): un agente A que mide una partícula enredada puede conocer el estado de la otra partícula del par enredado (aquella que un agente B, a cualquier otra distancia, se dispone a medir por su lado) de forma inmediata, sin ir a medirla, y de forma instantánea; y, al mismo tiempo, el conocimiento de B deberá coincidir con lo que A midió por su lado.

Si la función de onda colapsa (**C3**):

- Compromiso(s) ontológico(s): o bien el colapso ocurre porque el sistema cuántico es afectado por la medición, o bien el colapso ocurre de forma natural como una consecuencia de alguna ley natural.
- Compromiso(s) epistémico(s): asumiendo que el colapso no es objetivo, el estado de un sistema cuántico antes de ser medido es inaccesible para el agente epistémico, de suerte que nuestro conocimiento sobre el mundo cuántico reporta cómo afectamos al

sistema y no cómo se encontraba el sistema; y asumiendo que el colapso es objetivo, el conocimiento del estado del sistema nos es accesible de acuerdo con las condiciones de colapso.

Si la función de onda no colapsa ($\neg$**C3**):

- Compromiso(s) ontológico(s): todos los posibles estados contemplados por la superposición ocurren de forma efectiva, cada uno en diferentes mundos tipo Everett, o múltiples ramificaciones temporales.
- Compromiso(s) epistémico(s): la función de onda es la descripción total del estado del sistema y refleja todo lo que puede conocerse sobre este en un momento dado.

Si la función de onda es real (**C4**):

- Compromiso(s) ontológico(s): existen correlatos físicos en el mundo para el objeto matemático Ψ, tales como un campo o una distribución de masa, etc.
- Compromiso(s) epistémico(s): tenemos acceso epistémico a este campo físico por medio del cálculo probabilístico y la medición.

Si la función de onda no es real ($\neg$**C4**):

- Compromiso(s) ontológico(s): la función de onda es un mero formalismo que sirve para realizar predicciones con un alto grado de probabilidad, pero no es un hecho o un objeto del mundo.
- Compromiso(s) epistémico(s): la función de onda es una idealización que permite establecer conocimiento de manera probabilística.

Si el observador tiene un rol (**C5**):

- Compromiso(s) ontológico(s): el observador construye, en cierta medida, la realidad.
- Compromiso(s) epistémico(s): el conocimiento del mundo cuántico se construye, no se adquiere.

Si el observador no tiene un rol ($\neg$**C5**):

- Compromiso(s) ontológico(s): la realidad es independiente del observador.
- Compromiso(s) epistémico(s): el conocimiento del mundo cuántico se adquiere, no se construye.

Si la historia del sistema cuántico es única (**C6**):

- Compromiso(s) ontológico(s): nuestro mundo y todo lo que ocurre en él es lo único que se da, no existen realidades alternativas.
- Compromiso(s) epistémico(s): una vez que el agente epistémico adquiere conocimiento sobre un sistema cuántico determinado, su conocimiento sobre éste es necesario, pues no existen mundos posibles (u otros contextos a considerar) donde no ocurra lo que el agente adquiere en su práctica científica.

Si la historia del sistema cuántico no es única ($\neg$**C6**):

- Compromiso(s) ontológico(s): existen muchos mundos tipo Everett y el nuestro es sólo uno de ellos.
- Compromiso(s) epistémico(s): una vez que el agente epistémico adquiere conocimiento sobre un sistema cuántico determinado, su conocimiento sobre éste es contingente ya que existen otros mundos, presumiblemente, donde ocurren situaciones diferentes a la conocida, y nuestro conocimiento se limita a lo que ocurre en nuestro mundo.

Si el formalismo contempla variables ocultas (**C7**):

- Compromiso(s) ontológico(s): un sistema y sus propiedades están objetivamente determinadas según su función de onda, misma que está completamente descrita en la teoría por medio de variables ocultas.
- Compromiso(s) epistémico(s): nuestro conocimiento disponible para la descripción de la función de onda es insuficiente para una descripción completa del estado de un sistema y por tanto debe ser suplementado por variables adicionales.

Si el formalismo no contempla variables ocultas ($\neg$**C7**):

- Compromiso(s) ontológico(s): un sistema y sus propiedas no están objetivamente determinados por su función de onda.
- Compromiso(s) epistémico(s): el agente epistémico sabe todo sobre el estado de un sistema cuántico si conoce su función de onda.

Hemos desarrollado, *grosso modo*, cuáles son los diversos compromisos ontológicos y epistémicos que vienen con las diferentes interpretaciones de la mecánica cuántica para darnos una idea de cómo nuestro análisis echa luz sobre la situación actual en la mecánica cuántica —a saber, el tener una plétora de interpretaciones en competencia—, pero ¿cómo determinar si una interpretación en concreto es *aceptable* en función de las consecuencias ontológicas y epistemológicas que vienen con los diversos criterios que satisfacen?

Capítulo 2

La reformulación topos teórica de la física cuántica

2.1 Introducción

Después de casi un siglo de trabajo en teorías cuánticas, los físicos y los filósofos no contamos con un entendimiento claro y compartido de lo que nuestras mejores teorías tienen que decir con respecto a los fenómenos cuánticos. Por un lado, el aparato matemático que anima a la teoría estándar —y a muchas otras variantes— es lo suficientemente adecuado para modelar los fenómenos cuánticos dado que el éxito predictivo de la teoría se ve respaldado por la experimentación de forma sorprendentemente satisfactoria. Pero por otro lado, no sólo la teoría estándar sino múltiples variantes de esta adolecen de problemas interpretativos —una noción que contempla no sólo las preguntas por el significado de las proposiciones matemáticas de la teoría sino también las limitaciones epistémicas, los compromisos ontológicos y las posturas filosóficas que el usuario de la teoría presupone para contar una buena historia sobre lo que ocurre con los fenómenos cuánticos y su relación con el resto de la naturaleza conocida.

El tremendo esfuerzo de los físicos dedicados a estas teorías nos ha dejado —al menos a los filósofos— con más preguntas que respuestas: si el mundo es fundamentalmente indeterminista, si el mundo es no local, si existen múltiples mundos o si el nuestro se ramifica espontáneamente y de manera continua, si un sistema puede estar al mismo tiempo en dos estados mutuamente incompatibles, si el simple hecho de medir un sistema altera su naturaleza, si el mundo requiere de un observador para ser lo que es, entre muchas otras preguntas que se originan no sólo a partir de argumentos filosóficos sino también de las observaciones empíricas reproducibles en condiciones de laboratorio.

Por si lo anterior fuera poca cosa, existe entre los físicos una preocupación adicional: nuestras dos mejores teorías físicas —la teoría cuántica y la teoría de la relatividad— gozan de un alto grado de confirmación empírica pero no empatan del todo entre sí.[1]

[1] Hay algunos intentos por relativizar teorías cuánticas; por ejemplo: (Dürr, Goldstein, Norsen, Struyve,

Considérese, por ejemplo, que la formulación estándar de la teoría cuántica asigna un rol importante al observador (sus mediciones colapsan las funciones de onda), lo cual implicaría que el universo se encuentra en cierto estado debido a que algún observador externo a éste midió o provocó de alguna manera el colapso al estado actual del universo, lo cual no sólo es improbable sino inexpresable también ya que el marco de referencia del observador externo estaría fuera del espacio-tiempo. El esfuerzo más reciente por unificar estos dos frentes es la búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad y está por verse si una teoría como esa unificaría y aclararía nuestro conocimiento físico.[2]

A la par de un siglo de trabajo en torno a la física de los fenómenos cuánticos, se dieron diversos desarrollos matemáticos independientes de entre los cuales resalta la teoría de categorías[3], cuyo éxito para modelar teorías matemáticas con un alto grado de abstracción y generalidad permitió agrupar y conectar éstas entre sí. A partir del álgebra topológica nacieron ideas categoristas de gran importancia como la de functor o la de transformación natural, y esto es también el caso para los topos —categorías con una riqueza estructural notable que dan lugar a la construcción de universos matemáticos (lo cual querría decir algo así como teorías matemáticas con enorme generalidad, como la teoría de conjuntos) o de espacios particularmente informativos, entre otras cosas. El uso y la importancia de la teoría de categorías ha ido en aumento e incluso se han propuesto generalizaciones dentro de proyectos de fundamentación de las matemáticas, como es el caso con la teoría homotópica de tipos; más aún, hoy existen esfuerzos por aplicar la teoría de categorías a las ciencias naturales y la filosofía.[4]

Una aplicación relevante de la teoría de categorías —o, para ser precisos, de la teoría de topos— es la teoría de topos cuánticos, introducida por Chris Isham (1996) y desarrollada en conjunto con Andreas Döring, Cecilia Flori y otros con la finalidad de reformular el aparato matemático de la mecánica cuántica en términos topos teóricos que

---

Zanghì, 2014). Por otro lado, hay quienes cuestionan la calidad de "nuestras mejores teorías físicas" y piensan que debemos ser más cuidadosos al partir de esta idea; por ejemplo, Barrett, J. (2003) cree que la relatividad especial y la mecánica cuántica estándar no sólo son lógicamente incompatibles, sino que probablemente también son equivocadas cada una por separado. No discutiré este problema en el trabajo, pero es importante señalar que este punto de partida para el proyecto topos teórico es un tema de investigación vigente que se tendría que explorar con cuidado.

[2]Es a partir de 1916, un año después de que dar a conocer la teoría general de la relatividad, que Einstein detectó la necesidad de una teoría cuántica de la gravedad. Para un recuento histórico de los casi cien años de investigación transcurridos desde entonces, véase (Ashtekar, A., 2005).

[3]McLarty (1990) ofrece un recuento histórico de la teoría de categorías y la teoría de topos donde, además, muestra que es un error decir que la teoría de topos surge como una generalización de la teoría de conjuntos.

[4]Para reflejar la importancia que ha cobrado la teoría de categorías, véanse: (Landry E., 1999) para una defensa de la teoría de categorías como lenguaje (no como fundamento) de las matemáticas; (Bell, J., 1981) y (Marquis, J., 1995) para introducirse a la discusión acerca de la viabilidad de fundamentar las matemáticas en teoría de categorías y (Univalent Foundations Program, 2013) para el proyecto de la teoría homotópica de tipos; (Bain, J., 2013), (Landry, E., 2011) y (Pedroso, M., 2009) acerca de algunas posturas estructuralistas en filosofía de las matemáticas que apelan a la teoría de categorías; y (Landry, E., 2018), (Hansson, Hendricks, Michelsen, 2018), y (Spivak, 2014) para aplicaciones de teoría de categorías a la filosofía y las ciencias.

posibiliten una interpretación *Neorrealista*[5] de la teoría cuántica y, eventualmente, sirvan de base para una teoría de gravedad cuántica. El trabajo que ellos han realizado en los últimos años comienza a cobrar importancia para algunos filósofos de la física y de la lógica que comienzan a analizar los presupuestos e implicaciones filosóficas propias del proyecto, así como las consecuencias filosóficas más generales que orbitan la discusión de la interpretación de las teorías cuánticas.[6]

En este capítulo expondré las motivaciones detrás del proyecto topos teórico y su formalismo. El objetivo es sentar las bases, al menos esquemáticamente, para revisar en el próximo capítulo algunas discusiones muy puntuales sobre una noción de *realismo*, las consecuencias del teorema Kochen-Specker, cómo (si acaso) lidiar con el problema de la medición en esta nueva propuesta, y temas concernientes a la filosofía de la lógica tales como el pluralismo lógico y la noción de clasicidad para un sistema lógico.

2.2 Motivaciones del proyecto topos teórico

Un tema recurrente en la literatura de la filosofía de la física y de la lógica durante los años ochentas era el de la lógica cuántica, un intento desde las ciencias formales para esclarecer nuestra comprensión sobre los fenómenos cuánticos.[7] A partir de esas investigaciones hemos aprendido bastante sobre lo que ahora se conoce como computabilidad cuántica y las variantes de lógicas cuánticas que pueden formularse, pero no hemos avanzado en igual medida en lo que concierne a problemas como el de la medición y el colapso de la función de onda, o sobre la incompleción de la teoría cuántica (en el sentido de EPR), o en el debate determinismo vs. indeterminismo en el mundo cuántico, o sobre la frontera (o hasta incompatibilidad) entre la física clásica y la física cuántica.

Recientemente ha surgido un nuevo y aún más ambicioso proyecto que también acude a la lógica y las matemáticas para atacar o disolver los problemas conceptuales de la física cuántica. Durante la última década se han publicado numerosos trabajos de investigadores como Chris Isham, Andreas Döring, J. Butterfield, Cecilia Flori y otros de sus colaboradores, quienes proponen utilizar teoría de categorías —específicamente, teoría de topos— para reformular la teoría cuántica, o su formalismo al menos, de manera realista —esto es, bajo una lectura muy particular de *realismo* que ellos adoptan—, lo cual permitiría, en principio, encontrar estrategias para resolver o evitar los problemas fundacionales de la teoría cuántica y así avanzar hacia una teoría cuántica de la gravedad. Isham (1996) publicó el primer trabajo del proyecto topos teórico[8]; Isham y Döring (2007a, 2007b, 2007c,

[5]Hablaremos de esto más adelante en nuestro trabajo; la referencia directa es (Döring, 2007).

[6]Algunos ejemplos de esto son (Eva, 2017), (Zafiris y Karakostas, 2013, 2017) y (Karakostas, 2014).

[7]Dickson (2001) ofrece algunos argumentos a favor de la vigencia y relevancia del movimiento de las lógicas cuánticas, así como algunas notas históricas al respecto.

[8]El resumen de este artículo ayuda a comprender de dónde surgió el proyecto:

> A major problem in the consistent-histories approach to quantum theory is contending with

2007d, 2008) discuten y desarrollan a detalle la formulación topos teórica para teorías físicas; Döring (2007) propone una noción de Neorrealismo para caracterizar la interpretación de la teoría cuántica que construyen en la propuesta; Butterfield e Isham (1998a, 1998b, 1999) examinan el teorema Kochen-Specker desde el punto de vista de la teoría de topos y discuten maneras de abordar el problema de generar una teoría cuántica de la gravedad utilizando sus métodos; y Cecilia Flori (2008, 2013, 2018) ofrece una formulación topos teórica de la teoría cuántica bajo la interpretación de historias consistentes, así como estudios extendidos sobre otros topos cuánticos.

De manera esquemática, los argumentos[9] que motivan el proyecto de los proponentes de los topos cuánticos son:

1. Uno de los más grandes retos que los físicos contemporáneos enfrentan consiste en formular una teoría cuántica de la gravedad. Para muchos, es razonable sospechar que esta teoría debería surgir de la unificación de la teoría (general/especial) de la relatividad con la teoría cuántica. Sin embargo, hay buenas razones para pensar que estas dos grandes teorías físicas del siglo XX son incompatibles entre sí —al menos, bajo cierta formulación—; más aún, hay diversos argumentos a favor de que dicha incompatibilidad se debe, exclusivamente, a los problemas conceptuales fundamentales de la teoría cuántica —o, al menos, a la incompletitud de la teoría— por lo cual es necesario atender estos problemas antes de perseguir una teoría cuántica de la gravedad.

2. En general, la teoría cuántica estándar o bien (a) es suficientemente correcta aunque incompleta, (b) es incorrecta, más allá de que sea completa o no, o (c) es completa y correcta. Quienes se inclinan a pensar que (a) ó (b) son más cercanos a la verdad han ido lo suficientemente lejos como para proponer interpretaciones o teorías alternativas para la física cuántica, tales como "múltiples mundos", "múltiples mentes", "historias consistentes", y "variables ocultas", y en lugar de un concenso

the potentially large number of consistent sets of history propositions. One possibility is to find a scheme in which a unique set is selected in some way. However, in this paper we consider the alternative approach in which all consistent sets are kept, leading to a type of "many world-views" picture of the quantum theory. It is shown that a natural way of handling this situation is to employ the theory of varying sets (presheafs) on the space $\mathcal{B}$ of all Boolean subalgebras of the orthoalgebra $\mathcal{UP}$ of history propositions. This approach automatically includes the feature whereby probabilistic predictions are meaningful only in the context of a consistent set of history propositions. More strikingly, it leads to a picture in which the "truth values", or "semantic values" of such contextual predictions are not just two-valued (i.e., true and false) but instead lie in a larger logical algebra —a Heyting algebra— whose structure is determined by the space $\mathcal{B}$ of Boolean subalgebras of $\mathcal{UP}$.

This topos-theoretic structure thereby gives a coherent mathematical framework in which to understand the internal logic of the many world-views picture that arises naturally in the approach to quantum theory based on the ideas of consistent histories. (p. 1)

[9]Para una presentación concisa de los argumentos, véase la introducción en Flori (2013), misma que seguimos en buena medida a lo largo de esta exposición.

interpretativo contamos con una diversidad de acercamientos. Por otro lado, quienes consideran que (c) es el caso afirman que los presuntos problemas de interpretación de la mecánica cuántica se deben a que uno insiste en imponer conceptos clásicos a la teoría cuántica —o, dicho de otro modo, pensar clásicamente acerca de un fenómeno que sencillamente no se comporta de manera clásica.

3. La mayoría de los intentos por formular una teoría cuántica de la gravedad parten de la mecánica cuántica estándar y los principales problemas del formalismo estándar de la mecánica cuántica son: (A) el uso de ciertos ingredientes matemáticos que nos compromenten a asumir que el espacio y/o el tiempo poseen determinadas propiedades que quizá no están enteramente justificadas —en particular, podría ser que esos presupuestos sobre el espacio y el tiempo no sean compatibles con una teoría cuántica de la gravedad—; y (B) que la interpretación instrumental de la teoría cuántica impide que hablemos de sistemas cerrados —esto es, sin referirnos a un observador externo –, lo cual es un problema para la cosmología cuántica.

4. Una manera de superar los problemas (A) y (B) consiste en reformular la teoría cuántica en términos de un aparato matemático diferente: la teoría de topos; con ella es posible superar (A) y (B) dado que ella permite dar una formulación que, por un lado, no asume que el espacio y/o el tiempo tienen determinadas propiedades y, por otro lado, se trata de una formulación "más realista", lo cual quiere decir (i) que las proposiciones de la teoría forman una álgebra booleana y (ii) siempre tienen un valor de verdad determinado —condiciones que se pueden obtener del hecho de que los topos poseen una lógica interna y además se asemejan a los conjuntos.

5. Para que la formulación topos teórica de la teoría cuántica estándar sea más realista, debemos hacer que la teoría cuántica se "vea como" física clásica, que es el paradigma de una teoría realista en este sentido. Esto es conveniente ya que de esa forma —y relacionado con el problema (A)— (i) el continuo no juega un rol fundamental y —relacionado con el problema (B)— (ii) se puede asignar un valor de verdad a las proposiciones sin necesidad de invocar conceptos como "medición" u "observador", altamente problemáticos para la cosmología. Como tal, la teoría cuántica estándar no es realista y esto se ve reflejado en el teorema Kochen-Specker, que implica que cualquier enunciado formulado en la teoría adquiere significado (valor de verdad) sólo después de la medición.

6. La estructura que hace que la física clásica sea una teoría realista consta de los siguientes cuatro elementos, de los cuales se debe encontrar un análogo cuántico: 1) un espacio de estados, S; 2) cantidades físicas, A, representadas por funciones $f_A : S \to \mathbb{R}$; 3) proposiciones, $A \in \Delta$ ("el valor de la cantidad A se encuentra en $\Delta \subseteq \mathbb{R}$), representadas por los subespacios de S donde la proposición es verdadera,

i.e. $f_A^{-1}(\Delta) = \{s \in S | f_A(s) \in \Delta\}$, y la colección de dichos subespacios genera una álgebra boolena, $Sub(S)$; y 4) los estados, ψ, son homomorfismos booleanos $\psi : Sub(S) \rightarrow \{0, 1\}$ (donde 0 y 1 son "falso" y "verdadero", respectivamente), de tal forma que a cada subconjunto $f_A^{-1}(\Delta)$ se le asocia una función característica $\chi_{A\in\Delta} : S \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $\chi_{A\in\Delta}(s) = 1$ si $f_A(s) \in \Delta$, y en caso contrario es igual a 0.

7. Específicamente por el teorema Kochen-Specker, la única manera de obtener los análogos cuánticos de los cuatro elementos descritos en el punto anterior es definiéndolos con respecto a las subálgebras conmutativas (los "contextos") de la álgebra no conmutativa $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de todos los operadores acotados sobre el espacio de Hilbert. De manera "local", con respecto a estos contextos, la teoría cuántica se comporta de manera clásica; la colección de todos estos contextos o "fotografías clásicas" forman una categoría ordenada por inclusión, lo cual implica que uno define cada objeto cuántico localmente, en términos de estos contextos abelianos, como una colección de aproximaciones clásicas.

A continuación hablaremos brevemente sobre el realismo del que se habla en el proyecto topos teórico; en el siguiente capítulo cuestionaremos algunas de las ideas que ahora sólo serán mencionadas.

2.3 Realismo y física clásica

El aspecto filosófico central de la propuesta de los teóricos de los topos cuánticos es su concepción de *realismo* —y, más adelante y de manera derivada, su concepción de *Neorrealismo*. Para ellos, el teorema Kochen-Specker trae como consecuencia que el formalismo estándar de la teoría cuántica sea no realista; este resultado da lugar a una interpretación instrumentalista de la teoría y trae consigo una serie de problemas conceptuales que pueden superarse, de acuerdo con ellos, redefiniendo la teoría cuántica en el lenguaje de la teoría de topos.

Sin embargo, existen otros presupuestos filosóficos importantes en el proyecto. En Flori (2013, p. 8) se habla de que una imagen filosófica del mundo puede derivarse de la formulación matemática de una teoría física si se atienden las siguientes preguntas:

P1 ¿Qué es el sistema que se encuentra bajo investigación?

P2 ¿Cuál es el estatus ontológico de los términos físicos?

P3 ¿Cuál es el estatus epistemológico de los términos físicos?

P4 ¿Cómo se verifican o falsifican los enunciados físicos?

P5 ¿Cuál es la relación entre el modelo matemático y el mundo físico?

Lo anterior pretende motivar la idea de que la posición filosófica que corresponde a la física clásica es la de un *realismo* descrito en términos de las siguientes dos características:

R1 Es posible adscribir propiedades al sistema en un determinado momento sin depender del acto de medición.

R2 La lógica subyacente (de la teoría) es la lógica booleana, caracterizada por (i) ser distributiva, (ii) emplear únicamente dos valores de verdad, y (iii) usar conectivas lógicas que corresponden a nuestras conectivas lingüísticas "y", "o" (excluyente), "no", "entonces".

Que una teoría sea realista, bajo esta óptica, implica que un objeto (una cosa) se define en términos de una colección de propiedades que se dice que pertenecen al sistema y pueden ser de dos tipos:

- *Propiedades internas*: pertenecen exclusivamente al sistema; p.ej. la masa, la carga, etc.
- *Propiedades externas*: definen relaciones con otros sistemas; p.ej. la posición, la velocidad, etc.

Estas bases filosóficas del proyecto topos teórico conducen, de acuerdo con Flori (2013, p. 9), a una solución para las preguntas P1-P5 en el caso de la física clásica. En esta teoría, las preguntas P1 y P2 adquieren una respuesta directa: en las teorías realistas, el mundo externo (el mundo físico) existe independientemente de nosotros y los términos físicos representan objetos reales que existen "ahí fuera". En cuanto a P3 y P4, es verdad que el conocimiento de la física clásica se adquiere a través del proceso de medición, pues nos permite conocer los valores de cierto sistema; sin embargo, en este contexto, el rol de la medición no es especial, pues se trata tan sólo de otro tipo de interacción entre sistemas físicos y, además, tanto el objeto como el sujeto existen de manera independiente. Finalmente, la pregunta P5 se contesta diciendo que la teoría clásica nos provee de un modelo matemático que describe adecuadamente el mundo externo bajo una correspondencia biyectiva.

Independientemente de las diversas críticas que podamos presentar, lo anterior pretende motivar la idea de que una estrategia prometedora para hacer más realista a la teoría cuántica consiste en detectar cuáles son los elementos que hacen realista a la teoría de la física clásica, e importarlos a una reformulación de la teoría cuántica. Los elementos o conceptos cuya descripción matemática hacen que la teoría clásica sea realista son:

1. *El espacio de estados*: en la física clásica, el espacio de estados, S, se define como la colección de todos los estados $s_i \in S$ del sistema tales que cada s_i, en un tiempo t_i, comprende todas las propiedades del sistema en ese tiempo.

2. *La definición de cantidades físicas*: una cantidad física en la física clásica se identifica con la colección de los valores que puede tener un sistema dado. En física clásica, todas las cantidades tienen un valor determinado que las caracteriza.

3. *La definición de las proposiciones*: el tipo de proposiciones con las que lidiamos en física clásica son de la forma $A \in \Delta$ (el valor de la cantidad física A se encuentra en el intervalo $\Delta \subseteq \mathbb{R}$). Tal proposición se identifica con la colección de los estados $s_i \in S$ para los cuales la cantidad A tiene un valor dentro de Δ, por lo cual $A \in \Delta$ se identifica con un subconjunto del espacio de estados, exactamente aquel subconjunto para el cual la proposición es verdadera.

4. *La lógica booleana*: la lógica que gobierna las proposiciones clásicas es la lógica booleana, que es distributiva y emplea sólo dos valores de verdad. La verificación de tales valores de verdad se da a través de la interacción de medición.

5. *Las probabilidades*: podemos dar una interpretación epistémica a las probabilidades que utilizamos en física clásica ya que la discrepacia entre nuestro conocimiento y el estado actual del sistema puede reducirse al mínimo mientras refinemos nuestras mediciones y/o nuestras descripciones del sistema.

El objetivo de los teóricos de los topos cuánticos será dar con el análogo cuántico de los elementos recién descritos y acoplarlos en un topos adecuado. No obstante, la teoría cuántica presenta algunas diferencias importantes, con respecto a la teoría clásica, que dificultan o impiden una traducción directa entre los elementos realistas de la teoría clásica y los de la teoría cuántica; dichas diferencias incluyen lo siguiente:

1. En la formulación estándar de las teoría cuántica no es correcto decir que un sistema posee, *a priori*, determinadas propiedades. Lo único que puede decirse correctamente al respecto es que el sistema "adquiere" algunas propiedades "latentes" tras el proceso de medición.

2. Si bien cualquier enunciado sobre un "estado de cosas" acerca del sistema puede determinarse sólo después de una medición, dicho enunciado no puede considerarse como una descripción de las propiedades del sistema, sino únicamente como la descripción de las probabilidades de cada resultado posible (*outcomes*) de una medición.

3. La medición es un tipo muy especial de interacción.

4. Hay una clara distinción cualitativa entre el observador y el sistema observado. Esta distinción se presenta cuando el observador y lo observado se rigen por físicas distintas —física clásica para el observador a nivel meso/macro, física cuántica para el sistema a nivel micro.

5. Los estados no son portadores de propiedades físicas sino que simplemente son las herramientas más eficientes para determinar o calcular predicciones para posibles mediciones. No se trata de predicciones de resultados, sino de predicciones de probabilidades de diferentes resultados posibles.

6. La teoría cuántica es determinista pero con respecto a la evolución de predicciones de probabilidades para los resultados de una medición, no con respecto a la medición como tal.

7. Algunas de las incertidumbres que se dan en la teoría, como las previstas por el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, no pueden eliminarse refinando nuestras mediciones.

A continuación hablaremos acerca del teorema Kochen-Specker y su importancia para el proyecto topos teórico. En el próximo capítulo regresaremos a esta discusión para revisarla con mayor detalle.

2.4 El teorema Kochen-Specker

Uno de los teoremas limitativos más importantes de la física cuántica es el teorema Kochen-Specker. Es un resultado acerca de teorías cuánticas de variables ocultas, i.e. teorías que completan la descripción (las funciones de onda) de la realidad física según la formulación estándar de la teoría cuántica por medio de añadir ciertas variables adicionales, también llamadas variables ocultas. Kochen-Specker (1967) muestran que en estas teorías no es posible una asignación funcional en la que a cada observable le corresponde una cantidad determinada como valor. Las implicaciones de este teorema representan un reto importante para los teóricos de topos cuánticos que prentenden que la reformulación de la teoría cuántica sea más realista. El problema principal que Kochen-Specker plantea al proyecto topos teórico es la consecuencia de que ni en la teoría cuántica estándar ni en las teorías de variables ocultas se cumple que todas las proposiciones físicas tienen un valor de verdad. Veamos cómo se aborda este problema desde la propuesta; en la exposición de Flori, la comprensión del teorema Kochen-Specker y sus consecuencias depende de dos ideas: la función de evaluación y la condición de composición funcional.

Una *función de evaluación* es un mapeo que a cada cantidad física le asigna su valor, y es tal que satisface determinadas condiciones de consistencia que discutiremos más abajo. En el caso de la física clásica, las cantidades físicas se representan con funciones que van del espacio de estados a los números reales. Así, cada cantidad física A se representa con una función $f_A : S \to \mathbb{R}$ de manera que para cada estado $s_i \in S$ del sistema, $f_A(s_i) \in \mathbb{R}$ representa el valor de A dado el estado s_i; en consecuencia, a cada cantidad A le corresponde una y sólo una función f_A. Lo anterior implica que una función de evaluación para la física clásica se define, para cada s_i, como el mapeo $V_{s_i} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, donde $\mathcal{O}$ es el conjunto de observables (cantidades físicas), de forma que para cada $A \in \mathcal{O}$ tenemos que

$$A \mapsto V_{s_i}(A) := f_A(s_i)$$

donde $V_{s_i}(A)$ representa el valor de la cantidad física A dado el estado s_i.

La condición de consistencia que las funciones de evaluación deben cumplir recibe el nombre de *condición de composición funcional* (FUNC): para toda $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ocurre que

$$V_{s_i}(h(A)) = h(V_{s_i}(A))$$

donde $h(A) \in \mathcal{O}$ se define en términos de composición de funciones:

$$h(A) := h \circ f_A : S \xrightarrow{f_A} \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$$

Lo anterior implica, por ejemplo, que si A representa la energía y h es una función que arroja el cuadrado del valor utilizado como argumento —i.e. si $h(A) = A^2$—, entonces "$V_{s_i}(h(A)) = h(V_{s_i}(A))$" significa que "el valor del cuadrado de la energía es igual al cuadrado del valor de la energía".

Si la teoría cuántica ha de imitar a la teoría clásica, debemos adaptar la definición de función de evaluación como sigue: para el caso cuántico, una función de evaluación es un mapeo $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, donde $\mathcal{O}$ es el conjunto de los operadores autoadjuntos sobre el espacio de Hilbert, tal que (i) que para cada $\hat{A} \in \mathcal{O}$, $V(\hat{A}) \in \mathbb{R}$ representa el valor del operador $\hat{A}$; y (ii) para toda $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $V(h(\hat{A})) = h(V(\hat{A}))$.

¿Exactamente qué es $h(\hat{A})$? Sea $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ un eigenvector[10] de $\hat{A}$. Dado que para cualquier función polinomial[11] Q tenemos que $Q(\hat{A})|\psi\rangle = Q(a)|\psi\rangle$, se puede definir, para cualquier $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que $h(\hat{A})|\psi\rangle = h(a)|\psi\rangle$. Para generalizar lo anterior de manera que incluya cualquier estado arbitrario (no sólo eigenvectores), se debe tomar en consideración que el conjunto de eigenvectores de un operador autoadjunto forma una base ortonormal para $\mathcal{H}$, lo cual quiere decir que cualquier estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ puede escribirse en términos de esa base. Así, si tomamos la descomposición espectral de $\hat{A}$ como

$$\sum_{m=1}^{M} a_m \hat{P}_m$$

donde M es un conjunto de m índices,$\{a_1, \ldots, a_m\}$ es el conjunto de los eigenvalores de $\hat{A}$ y cada $\hat{P}_m$ es el operador de proyección sobre el subespacio de eigenvectores con eigenvalor

[10]Es decir, $\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$, donde a es un escalar.

[11]Pensemos en que $\hat{A}^n|\psi\rangle = a^n|\psi\rangle$, para toda n.

a_m, obtendremos, entonces

$$h(\hat{A})|\psi\rangle := \sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{d(m)} |a_m, j\rangle\langle a_m, j| = \sum_{m=1}^{M} h(a_m)\hat{P}_m$$

donde $j = 1, \ldots, d(m)$ etiqueta aquellos eigenvectores degenerados con eigenvalor común a_m.

En el caso cuántico, la condición de composición funcional para las funciones de evaluación es una consecuencia[12] de tres supuestos y un principio (Flori 2013, p. 16):

- *Principio estadístico de composición funcional*: dado un operador autoadjunto $\hat{A}$ que representa un observable A y dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para cualquier número real a ocurre que

$$prob[V(f(\hat{A})) = a] = prob[f(V(\hat{A})) = a]$$

- *No contextualidad*: el valor de cada observable es independiente de cualesquiera otros observables que se midan al mismo tiempo

- *Valor definido*: los observables poseen un determinado valor en todo momento

- *Realismo de valores*: para todo número α tal que $\alpha = prob(V(\hat{A}) = \beta)$, a un operador $\hat{A}$ le corresponde un observable A con valor β.

Este par de nociones —función de evaluación y principio de composición funcional— son necesarias para comprender la formulación del teorema Kochen-Specker que Flori (2013) ofrece en su texto. En ella podemos detectar que el teorema Kochen-Specker surge de la incompatibilidad de dos supuestos con respecto a los observables de la teoría cuántica:

- Todos los observables en $\mathcal{O}$ tienen, de manera simultánea, un valor determinado.

- Los valores de los observables son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.[13]

Dicha formulación[14] es como sigue:

[12]Sea B un observable representado por $\hat{B}$. El supuesto del *valor definido* garantiza que el observable tiene un valor, $V(\hat{B}) = b$. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, obtenemos la cantidad $f(V(\hat{B})) = f(b) = a$. Pero el *principio estadístico de composición funcional*, $prob[f(V(\hat{B})) = a] = prob[V(f(\hat{B})) = a]$, implica que existe un operador de la forma $f(\hat{B})$ cuyo correspondiente observable tiene, en virtud del *realismo de valores*, el valor a, de donde $f(V(\hat{B})) = V(f(\hat{B}))$ de forma única, gracias a *no contextualidad*.

[13]"Mutuamente excluyentes" quiere decir que un sólo valor de un observable puede darse efectivamente a un tiempo dado; "colectivamente exhaustivos" quiere decir que al menos uno de los valores debe darse efectivamente a un tiempo dado.

[14]En (Carsten 2018) esencialmente se dice que el teorema Kochen-Specker muestra que existe una contradicción entre *no contextualidad*, *valor definido*, y la idea de que existe una correspondencia entre las propiedades del sistema cuántico y los operadores de proyección sobre el espacio de Hilbert del sistema.

Teorema 2.1 (Kochen-Specker)**.** Si la dimensión de $\mathcal{H}$ es mayor a 2, entonces no existe una función de evaluación $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ que satisfaga FUNC para todo $\hat{A} \in \mathcal{O}$

Esto quiere decir que los siguientes dos enunciados son contradictorios:

1. Todos los observables asociados con operadores de proyección en $\mathcal{O}$ tienen, de manera simultánea, un valor.

2. Los valores de los observables cumplen FUNC.

Y una implicación del teorema es que uno o ambos de los siguientes supuestos deben abandonarse:

1. El conjunto de valores de verdad es $\{0, 1\}$

2. FUNC; pero si abandonamos FUNC, debemos abandonar también algunos o todos los supuestos desde los cuales derivamos ese principio:

    - No contextualidad
    - Valor definido
    - Realismo de valores

La estrategia[15] topos teórica involucra, como veremos, abandonar la idea de que los únicos valores de verdad son 1 y 0; se apostará, más bien, por una lógica intuicionista multivaluada. Por otro lado, abandonar FUNC trae como consecuencia que la teoría cuántica sea contextual[16]. En consecuencia, el teorema Kochen-Specker nos dice que el criterio de realismo R1 que formulamos tras Flori (2013) no se puede cumplir.

A continuación describiremos brevemente la ideas categoristas que dan lugar a la construcción de un topos.

2.5 ¿Qué es un topos?

Existen diversas maneras (todas ellas equivalentes)[17] de definir un topos. Una definición[18] que resalta la riqueza estructural que debe poseer una categoría para ser un topos es la siguiente:

[15]"This is precisely what is done in topos quantum theory. In fact, in this setting the FUNC principle is conserved, but the set of truth values is replaced by some larger set than simply $\{0, 1\}$ leading to a multivalued logic. The interpretation we end up with is not strictly realist, due to the multivalued nature of the resulting logic. However we reach a more realist interpretation of the theory since now it makes sense to say that values are possessed by quantities in a context independent way" (Flori 2013, p. 24).

[16]Nótese que si *contextualidad* falla, también falla *valor definido*: si midiéramos dos cantidades (A, B) y (A, C) y obtuviéramos los valores (a, b) y $(a\prime, c)$, donde $a \neq a\prime$, entonces no sabríamos qué valor posee la cantidad A.

[17]Algunas de ellas se encuentran en el prefacio de (Johnstone, P., 2002).

[18]Nuestra presentación sigue a Goldblatt (1984).

Definición 2.1. Un topos τ es una categoría que cuenta con un objeto terminal, producto fibrado, exponenciación y un clasificador de subobjetos.

A continuación ofrecemos la definición de cada noción introducida en la Definición 1.

Definición 2.2. Una *categoría* $\mathbf{C}$ se compone de

1. una colección de cosas llamada $\mathbf{C}$-*objetos*;

2. una colección de cosas llamada $\mathbf{C}$-*flechas*;

3. operaciones que asignan a cada $\mathbf{C}$-flecha f un $\mathbf{C}$-objeto $\mathrm{dom}(f)$ (el "dominio" de f) y un $\mathbf{C}$-objeto $\mathrm{cod}(f)$ (el "codominio" de f). Si $a = \mathrm{dom}(f)$ y $b = \mathrm{cod}(f)$ representamos esto como
$$f : a \to b \qquad \text{ó} \qquad a \xrightarrow{f} b;$$

4. una operación que asigna a cada par $\langle g, f\rangle$ de $\mathbf{C}$-flechas con $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)$, una $\mathbf{C}$-flecha $g \circ f$, la *composición de* f *y* g, donde $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f)$ y $\mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g)$, i.e. $g\circ f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{cod}(g)$, y tal que las siguientes condiciones se satisfacen:
Ley Asociativa: Dada la configuración
$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$$
de $\mathbf{C}$-objetos y $\mathbf{C}$-flechas, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

   La ley asociativa afirma que un diagrama con la forma
$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right=2, "h\circ(g\circ f)"'] \arrow[d, shift left=2, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[dr, "g\circ f"] & b \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "h\circ g"'] \\
d & c \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$
siempre conmuta;

5. una asignación para cada $\mathbf{C}$-objeto b de una $\mathbf{C}$-flecha $1_b : b \to b$, llamada *la flecha identidad sobre* b, tal que
Ley de la Identidad: Para cualesquiera $\mathbf{C}$-flechas $f : a \to b$ y $g : b \to c$
$$1_b \circ f = f \qquad \text{y} \qquad g \circ 1_b = g$$
i.e. el diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[d, "1_b"] \arrow[dr, "g"] & \\
& b \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 2.3. Un objeto 0 es *inicial* en la categoría $\mathbf{C}$ si para cada $\mathbf{C}$-objeto a existe una y sólo una $\mathbf{C}$-flecha $f : 0 \to a$ en $\mathbf{C}$.

Definición 2.4. Un objeto 1 es *terminal* en la categoría $\mathbf{C}$ si para cada $\mathbf{C}$-objeto a existe una y sólo una $\mathbf{C}$-flecha $f : a \to 1$ en $\mathbf{C}$.

Definición 2.5. Un *producto fibrado* de un par de $\mathbf{C}$-flechas $a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$ con un codominio común es el límite (ver Apéndice 3, p.158) en $\mathbf{C}$ para el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, "f"] & c
\end{tikzcd}$$

Definición 2.6. Una *suma amalgamada* de dos $\mathbf{C}$-flechas $b \xleftarrow{f} a \xrightarrow{g} c$ es un co-límite (ver Apéndice 3, p.158) para el diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & c \\
b &
\end{tikzcd}$$

Definición 2.7. Una categoría $\mathbf{C}$ tiene *exponenciación* si tiene un producto para cualquier par de $\mathbf{C}$-objetos, y si para cualesquiera $\mathbf{C}$-objetos a y b existe un $\mathbf{C}$-objeto b^a y una $\mathbf{C}$-flecha $ev : b^a \times a \to b$, llamada *morfismo evaluación*, tal que para cualquier $\mathbf{C}$-objeto c y cualquier $\mathbf{C}$-flecha $g : c \times a \to b$, existe una única $\mathbf{C}$-flecha $\hat{g} : c \to b^a$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
b^a \times a \arrow[dr, "ev"] & \\
& b \\
c \times a \arrow[uu, dashed, "\hat{g} \times 1_a"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e. una única $\hat{g}$ tal que $ev \circ (\hat{g} \times 1_a) = g$.

Y finalmente,

Definición 2.8. Un *clasificador de subobjetos* para $\mathbf{C}$ es una $\mathbf{C}$-flecha $true : 1 \to \Omega$ del objeto terminal 1 de $\mathbf{C}$ a un $\mathbf{C}$-objeto Ω tal que el siguiente axioma se cumple:
Ω-AXIOMA. Para cada monomorfismo $f : a \rightarrowtail d$ existe una única $\mathbf{C}$-flecha $\chi_f : d \to \Omega$ tal que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "true"] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un *producto fibrado*. La flecha χ_f se llama *morfismo característico*[19] del monomorfismo f (el subobjeto de d). La flecha *true* puede denotarse como $\top$.

2.5.1 Un ejemplo y algunas propiedades de los topos

A manera de ejemplo, la categoría **Sets** (donde los objetos son conjuntos y los morfismos son funciones entre conjuntos) es un topos.

Su objeto inicial es el conjunto vacío, ya que existe una y sólo una función que va del conjunto vacío a cualquier conjunto; y su objeto terminal es el conjunto unitario, ya que existe una y sólo una función que a cada conjunto le asigna su correspondiente unitario. El producto cartesiano se puede describir a partir del producto fibrado y, de igual manera, la operación de unión se puede describir a partir de la suma amalgamada. Contamos con exponenciación en **Sets** ya que b^a se ve como el conjunto de funciones con dominio a y codominio b y siempre podemos preguntar cómo cierta función de b^a evalúa cierto elemento de a. Y, finalmente, el clasificador de objetos en **Sets** es cualquier conjunto de dos elementos, por ejemplo el conjunto $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, sobre el cual puede construirse la función característica de cualquier subconjunto, misma que logra capturar el morfismo *true*.

Como sabemos, la teoría de conjuntos es y ha sido ampliamente utilizada para formalizar los conceptos de la mayoría de las teorías matemáticas modernas. **Sets** es, entonces, una reformulación topos teórica de la teoría de conjuntos —en el mismo sentido en que pretenderán Isham, Doring, Flori, et. al. que hay una reformulación topos teórica del formalismo de la mecánica cuántica.

No obstante, en cuanto topos, **Sets** posee características que arrojan luz sobre las posibles teorías de conjuntos que uno podría, en principio, formular. Esto es así ya que la teoría de topos permite estudiar la estructura fundamental de conceptos matemáticos asociados con un grado de generalidad y expresividad tal que ocurre, de manera general, que todo topos tiene un lenguaje y una lógica interna que lo caracteriza, y esa lógica es,

[19] Este tipo de morfismos se comportan como las funciones características en teoría estándar de conjuntos: dado un subconjunto $A \subseteq D$, definimos la función característica de A como $\chi_A : D \to 2$, donde $2 = \{0, 1\}$ con la regla $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

al menos intuicionista. ¿Qué tipo de lógica está asociada, por ejemplo, al topos **Sets**? Por como está construida —especialmente por como está definido el clasificador de subobjetos que posee—, **Sets** tiene asociada una lógica booleana, pero perfectamente podríamos hacer los ajustes necesarios para que tuviera una lógica intuicionista u otra lógica no clásica y estudiar, entonces, qué ocurre con nuestra concepción de los conjuntos tras revisar diferentes maneras de formular teorías para éstos.

Si lo anterior se debe a propiedades o características topos teóricas, es fácil ver la motivación para encontrar una reformulación topos teórica de la mecánica cuántica: uno podría ver cuáles son los requisitos mínimos e indispensables con los que debe contar una teoría cuántica para modelar adecuadamente los fenómenos que estudia y aprender más al respecto de lo que debe o no incluirse en una teoría de esta naturaleza.

A continuación nos introduciremos al formalismo topos teórico propuesto por Isham y Döring (2007a, 2007b, 2007c, 2007d). En un momento posterior de nuestro trabajo revisaremos la variante que Flori (2008) extrae de aquéllas referencias.

2.6 El topos cuántico $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{\mathbf{op}}}$

Doring, Isham, Flori et al. quieren ofrecer una reformulación de la teoría cuántica proporcionando un marco matemático topos teórico. Pero uno de los fines expresos que persiguen es que dicha reformulación sea "más realista", que "se vea más como" física clásica: «*use topos theory to redefine the mathematical structure of quantum theory in such a way that it 'looks like' classical physics*»(Flori 2011, p.2). Ellos creen que esta maniobra tiene la doble ventaja de (i) no ofrecer un rol fundamental a alguna noción de continuo, y (ii) que se puede asignar un valor de verdad determinado a las proposiciones sin necesidad de invocar conceptos como "medición" u "observador". Para determinar una respuesta a la pregunta "¿cuál es la estructura subyacente que hace que la física clásica sea una teoría realista?", ellos proponen una estructura compuesta por los siguientes elementos:

1. Un espacio de estados S.

2. Cualquier cantidad física A es representada por una función $f_A : S \to \mathbb{R}$ que va del espacio de estados a los números reales.

3. Cualquier proposición de la forma $A \in \Delta$ (el valor de la cantidad A está en el subconjunto $\Delta \subset \mathbb{R}$, que es un conjunto Borel) se representa por medio de un subconjunto de S, a saber, el subespacio para el cual la proposición es verdadera: $f_A^{-1}(\Delta) = \{s \in S \,|\, f_A(s) \in \Delta\}$. La colección de todos esos subconjuntos forma un álgebra booleana $\mathrm{Sub}(S)$.

4. Los estados ψ se identifican con los homomorfismos booleanos $\psi : \mathrm{Sub}(S) \to \{0, 1\}$, donde 0 y 1 se identifican con "falso" y "verdadero", respectivamente. A cada sub-

conjunto $f_A^{-1}(\{\Delta\})$ se le asocia una función característica $\chi_{A\in\Delta} : S \to \{0,1\}$ definida por

$$\chi_{A\in\Delta}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f_A(s) \in \Delta \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

de tal forma que, dado un estado s, cualquier proposición sobre el valor de una cantidad física en ese estado es o verdadera o falsa.

En la teoría cuántica estándar, los análogos de los constructos matemáticos recién descritos son:

Q1. El espacio de estados representado por el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Q2. Una cantidad física A se representa por medio de un operador autoadjunto $\hat{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ actuando sobre el espacio de Hilbert.

Q3. Una proposición $A \in \Delta$ se representa por medio del operador de proyección $\hat{E}[\hat{A} \in \Delta]$ que proyecta sobre el subconjunto $\Delta \cap sp(\hat{A})$ del espectro $sp(\hat{A})$ de la cantidad $\hat{A}$. La colección de todas esas proposiciones forma una lógica no distributiva.

Q4. Un estado ψ es un vector en el espacio de Hilbert.

Con base en esta propuesta de una caracterización realista de la física clásica, Doring, Isham, Flori et al. afirman que la razón por la cual el "no realismo" emerge como consecuencia directa en la teoría cuántica estándar es que la lógica de las proposiciones es no distributiva. Si buscamos una reformulación topos teórica, deberemos hallar un topos cuya lógica de proposiciones sea distributiva. Las lógicas distributivas emergen de forma natural en cualquier topos de manera similar a como las álgebras booleanas emergen de la teoría de conjuntos. Así, el problema de encontrar un topos compuesto por los elementos de la teoría cuántica estándar recién descritos y que además evite el "no realismo" de alguna manera, se soluciona, según ellos, mediante la noción de *contextos* —misma que más bien convierte la reformulación en "Neorrealista", como veremos.

Debido a que el famoso teorema Kochen-Specker[20] asegura que la teoría cuántica estándar es contextual, la única manera de obtener un topos con los elementos Q1-Q4

[20]El teorema prueba que hay una contradicción entre dos supuestos básicos de las teorías cuánticas de variables ocultas que pretenden usarse para reproducir los resultados de la mecánica cuántica; dichos supuestos son: (a) que todas las variables ocultas que corresponden a observables de la mecánica cuántica tienen un valor definido en cualquier momento; y (b) que los valores de dichas variables son intrínsecos e independientes del aparato con el que los medimos. Tal contradicción ocurre debido a que los observables de la mecánica cuántica no necesariamente son conmutativos, de forma que es imposible (si la dimensión de $\mathcal{H}$ es al menos 3) incrustar todas las subálgebras conmutativas del álgebra de observables en una álgebra conmutativa que se asume que representa la estructura clásica de las teorías cuánticas de variables ocultas.

El teorema de Kochen–Specker demuestra que es imposible que los observables de la mecánica cuántica representen elementos de la realidad física; es decir, excluye a las teorías de variables ocultas que requieren que los elementos de la realidad física sean no contextuales, i.e. independientes de los arreglos de la medición. Así, no podemos asignar valores a todas las cantidades físicas y preservar, al mismo tiempo, la relación funcional que hay entre ellas.

es definiéndolos con respecto a las subálgebras conmutativas (de contextos) del álgebra no conmutativa $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de todos los operadores acotados sobre el espacio de Hilbert. El conjunto de dichas álgebras conmutativas (álgebras abelianas de von Neunmann, de hecho) forma la categoría de contextos $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ y dichos contextos representan "fotografías" *clásicas* de la realidad o "visiones (*clásicas*) del mundo".

Para garantizar la conmutatividad, Doring, Isham, Flori et al. utilizan álgebras de von Neumann V ya que la transformada de Gel'fand $V \to C(\underline{\Sigma}_V)$ mapea cada operador autoadjunto $\hat{A} \in V$ con su transformada de Gel'fand $\bar{A} : \underline{\Sigma}_V \to \mathbb{C}$, definida por $\lambda \mapsto \bar{A}(\lambda) := \lambda(\hat{A})$, donde $im(\bar{A}) = sp(\hat{A})$. A $\underline{\Sigma}_V$ se le conoce como el espectro de Gel'fand de V, i.e. el conjunto de funcionales lineares multiplicativos[21] $\lambda : V \to \mathbb{C}$ de norma 1.

Es en este punto donde aparece la teoría de categorías:

Definición 2.9. La categoría $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ de álgebras abelianas de von Neumann se compone de:

- objetos: las subálgebras abelianas de von Neumann que se obtienen del álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de todos los operadores acotados en $\mathcal{H}$.

- morfismos: dadas dos álgebras V y $V\prime$ existe una flecha $i_{VV\prime} : V \to V\prime$ si y sólo si $V \subset V\prime$.

Así, la categoría $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ corresponde a un conjunto parcialmente ordenado bajo inclusión ($\subset$). Sobre ella se puede construir el topos que perimte obtener descripciones clásicas locales de los objetos: el topos de los *prehaces* sobre $\mathcal{V}(\mathcal{H})$, denotado como $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{\mathrm{op}}}$.

Definición 2.10. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un *prehaz* es un functor contravariante tal que a cada $\mathcal{D}$-objeto A le corresponde un $\mathcal{C}$-objeto $X(A)$, y a cada $\mathcal{D}$-flecha $f : A \to B$ le corresponde una $\mathcal{C}$-flecha $X(f) : X(B) \to X(A)$ tal que *(i)* $X(1_A) = 1_{X(A)}$ y *(ii)* $X(f \circ g) = X(g) \circ X(f)$ para toda $g : C \to A$.

Así, la colección de todos esos functores contravariantes que van de la categoría base $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ a la categoría **Sets** forman el topos $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{\mathrm{op}}}$ con el que se describirá la teoría cuántica.

Un punto de inflexión en el proyecto de Doring, Isham, Flori et al. es la íntima conexión entre los topos y la lógica. La manera en que definen qué es una teoría física en el marco topos teórico involucra dichas ideas directamente, pues:

1. cada sistema físico S tiene un lenguaje local $\mathcal{L}(S)$ asociado;

2. se debe encontrar una representación de $\mathcal{L}(S)$ en un topos apropiado τ, dentro de cuyo marco se formulará e interpretará la teoría, en tanto aplicada a S; y

[21] Un funcional $\lambda : V \to \mathbb{C}$ es linear si $\lambda(ax+by) = a\lambda(x)+b\lambda(y)$, y es multiplicativo si $\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y)$.

3. dado que cada topos tiene un lenguaje interno asociado, resulta que una teoría física consiste en encontrar una traducción o representación de $\mathcal{L}(S)$ en términos del lenguaje interno del topos en cuestión.

Es decir que debido a que cada topos tiene un lenguaje asociado que codifica la lógica intuicionista[22] (y viceversa), el papel que tiene la lógica para definir qué es una teoría física resulta determinante. Esto es reminiscente, de alguna forma, de las lógicas cuánticas —mismas que Putnam y otros estudiaron en los 80's para tratar de arrojar luz sobre la mecánica cuántica—, pero definitivamente se trata de un esfuerzo distinto, como veremos.

Por lo anterior, dado un sistema físico S con lenguaje local $\mathcal{L}(S)$, deberemos encontrar una representación de cada tipo de objeto de $\mathcal{L}(S)$ en un topos τ apropiado para modelar al sistema dentro del marco topos teórico. $\mathcal{L}(S)$ se compondrá, al menos, de:

1. El objeto *espacio de estados*, cuyo tipo de símbolo es Σ, y el objeto *valor de una cantidad*, cuyo tipo de símbolo es $\mathcal{R}$ (algo similar a $\mathbb{R}$ pero más general). En un topos τ, los objetos $\underline{\Sigma}$ y $\underline{\mathcal{R}}$ son la representación de Σ y $\mathcal{R}$, respectivamente.

2. El conjunto de símbolos de funciones $F_{\mathcal{L}(S)}(\Sigma, \mathcal{R}) = \{\Sigma \to \mathcal{R}\}$, donde cada cantidad física es representada por un símbolo $A_i : \Sigma \to \mathcal{R}$. En un topos τ, estas cantidades físicas son representadas por medio de las τ-flechas $\underline{A} : \underline{\Sigma} \to \underline{\mathcal{R}}$ y dicha representación es fiel pues se requiere que $A \to \underline{A}$ sea uno a-uno.

3. Los valores de las cantidades físicas, que se definen como términos de tipo $\mathcal{R}$ con variables libres s de tipo Σ; es decir que $A(s)$ es el valor de una cantidad física $A : \Sigma \to \mathcal{R} \in F_{\mathcal{L}(S)}(\Sigma, \mathcal{R}) = \{\Sigma \to \mathcal{R}\}$. La representación de dichos términos en un topos se da a través de objetos de tipo $\underline{\mathcal{R}}$.

4. El objeto Ω que codifica los valores de verdad que pueden asignarse a la lógica interna. La representación de este objeto en un topos τ es el clasificador de subobjetos $\underline{\Omega}$.

5. Las proposiciones $A \in \Delta$ se escriben como términos de tipo $P(\Sigma)$. La representación de las proposiciones en un topos τ está dada por elementos de $P(\underline{\Sigma})$ (subobjetos del objeto espacio de estados).

Lo anterior vale para un lenguaje local $\mathcal{L}(S)$ de un sistema S y un topos τ. Veamos cómo ocurre esto en el caso particular de los sistemas cuánticos y el topos $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$ que proponen Doring, Isham, Flori et al.

El análogo topos teórico del espacio de estados se define como sigue:

Definición 2.11. El *prehaz espectral* $\underline{\Sigma}$ es el functor covariante que va de la categoría $\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}$ a la categoría **Sets** definido como:

[22] De manera más precisa, un topos puede verse como la representación de la lógica intuicionista (de orden superior).

- **Objetos**: dado un objeto V en $\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}$, el conjunto asociado $\underline{\Sigma}(V) = \underline{\Sigma}_V$ se define como el espectro de Gel'fand de la subálgebra conmutativa de von Neumann V, i.e., el conjunto de todos los funcionales lineares y multiplicativos $\lambda : V \to \mathbb{C}$ tales que $\lambda(\hat{1}) = 1$;

- **Morfismos**: dado un morfismo $i_{V\prime,V} : V\prime \to V$ (i.e. que $V\prime \subseteq V$ en $\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}$) , la función asociada $\underline{\Sigma}(i_{V\prime,V}) : \underline{\Sigma}(V) \to \underline{\Sigma}(V\prime)$ está definida para todo $\lambda \in \underline{\Sigma}(V)$ como la restricción del funcional $\lambda : V \to \mathbb{C}$ a la subálgebra $V\prime \subseteq V$, i.e. $\underline{\Sigma}(i_{V\prime,V})(\lambda) := \lambda_{|V\prime}$

Las proposiciones, i.e. los objetos de tipo $P(\Sigma)$ en $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$, se representan a través de los operadores de proyección en la teoría cuántica y en nuestro topos se identifican con los subobjetos *clopen*[23] del prehaz espectral. Un subobjeto clopen $\underline{S} \subseteq \underline{\Sigma}$ es un objeto tal que, para cada contexto $V \in \mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}$, el conjunto $\underline{S}(V)$ es un subconjunto clopen de $\underline{\Sigma}(V)$.

Las proposiciones se definen a través de un proceso llamado *daseinización*, que consiste en aproximar los operadores de forma tal que encajen en cualquier contexto V que haya sido dado, de forma que cualquier proposición que uno quiera estudiar deberá ser considerada dentro de (con respecto a) cada contexto $V \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$. La daseinización *externa* $\delta^o(\hat{P})$ del operador de proyección $\hat{P}$ está definida en cada contexto V como sigue:

$$\delta^o(\hat{P})_V := \bigwedge\{\hat{R} \in P(V) \,|\, \hat{R} \geq \hat{P}\}$$

de forma que para cada operador de proyección existe una colección de operadores de proyección daseinizados, una para cada contexto V, i.e.:

$$\hat{P} \mapsto \{\delta^o(\hat{P})_V \,|\, V \in \mathcal{V}(\mathcal{H})\}$$

La transformada de Gel'fand asigna a cada operador $\hat{P} \in P(V)$ un mapeo $\bar{P} : \underline{\Sigma}_V \to \mathbb{C}$ que toma un valor en $\{0, 1\} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ya que $\hat{P}$ es un operador de proyección; así, $\bar{P}$ es una función característica del subconjunto $S_{\hat{P}} \subseteq \underline{\Sigma}(V)$ definido como

$$S_{\hat{P}} := \{\lambda \in \underline{\Sigma}(V) \,|\, \bar{P}(\lambda) := \lambda(\hat{P}) = 1\}$$

En el topos $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$, la representación de Ω se identifica con el siguiente prehaz:

Definición 2.12. El prehaz $\underline{\Omega} \in \mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$ se define como sigue:

1. Para cada $V \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$, el conjunto $\underline{\Omega}(V)$ se define como el conjunto de todos los tamices[24] (*sieves*) sobre V.

[23]En topología, se le llama *clopen* a todo conjunto que sea tanto abierto como cerrado.

[24]Un *tamiz* (*sieve*) sobre un conjunto parcialmente ordenado, en nuestro caso $\mathcal{V}(\mathcal{H})$, se define como

Definición 2.13. Para toda $V \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$, un tamiz S sobre V es una colección de subálgebras $V\prime \subseteq V$ tal

2. Dado un morfismo $i_{V'V} : V' \to V$, la función asociada es $\underline{\Omega}(i_{V'V}) : \underline{\Omega}(V) \to \underline{\Omega}(V')$ donde $S \mapsto \underline{\Omega}(i_{V'V})(S) := \{V'' \subseteq V' \,|\, V'' \in S\}$

Los valores de verdad se identifican con los elementos globales del prehaz $\underline{\Omega}$ —i.e. una colección de elementos locales en $\underline{\Omega}_V$ para cada V. El elemento global que consiste por completo de tamices principales se interpreta como "totalmente verdadero", mientras que el elemento global que consiste por completo de tamices vacíos se interpreta como "totalmente falso".

2.7 Problemas filosóficos

El problema filosófico más grande que observo en la propuesta topos teórica es la noción de *realismo* con la que califican a su propuesta (una aproximación "más *realista*"). Döring, Isham, Flori, et al. consideran que aunque el término "realista" es infinitamente debatible, el uso que le dan los físicos corresponde a las siguientes creencias:

1. La idea de una "propiedad del sistema" (i.e. "el valor de una cantidad física") es significativa y representable en la teoría

2. Las proposiciones sobre un sistema se modelan con lógica booleana, especialmente porque los humanos pensamos con lógica booleana

3. Existe un espacio de "microestados" tal que especificar un microestado lleva de forma inequivoca al valor de verdad de cada proposición acerca del sistema. La existencia de tal espacio de estados es una manera natural de garantizar que los dos puntos recién anotados se cumplan.

De acuerdo con ellos, la física clásica cumple estos tres puntos y la teoría cuántica carece de una interpretación realista, en esas líneas, debido al teorema Kochen-Specker.

Me parece que un problema importante de adoptar esta noción de realismo es tratar de imponer condiciones booleanas a la lógica subyacente de la teoría; creo que eso no la hace ni más ni menos realista que otra teoría cuya lógica subyacente fuera otra aunque adecuada para modelar determinadas situaciones.

Un segundo problema es justificar la idea de que contextualizar la teoría cuántica es una maniobra adecuada para describir los fenómenos cuánticos. La estrategia de contextualización obedece al interés de tener "fotografías clásicas (booleanas)" de fenómenos no clásicos y surge la pregunta, naturalmente, de qué tan fidedigna será una teoría compuesta de esta clase de contextos.

que: si $V' \in S$ y $V'' \subseteq V'$, entonces $V'' \in S$; así, S es un conjunto cerrado hacia abajo (*downward closed set*).

El tamiz maximal o principal sobre V es $\downarrow V := \{V' \in \mathcal{V}(\mathcal{H}) \,|\, V' \subseteq V\}$.

Un tercer problema de la propuesta topos teórica es que ella no ha atentido el problema de la medición, tan importante y limitativo en la filosofía de la física cuántica y en las teorías cuánticas mismas. Si no existe un tratamiento para este problema, difícilmente se puede convencer a la audiencia de que esta propuesta de reconstrucción matemática es atractiva y esclarecedora. En el siguiente capítulo de este trabajo discutiremos los puntos que aquí hemos mencionado.

Capítulo 3

Realismo, clasicidad y contextualidad en los topos cuánticos

3.1 Introducción

Frente a las peculiaridades de la teoría cuántica y las dificultades que tenemos para interpretarla, Chris Isham, Andreas Döring, Cecilia Flori y otros teóricos de los topos cuánticos se han embarcado en un proyecto matemático y filosófico bastante original. El proyecto de los teóricos de los topos cuánticos persigue una reconstrucción (o una reorganización) del aparato matemático de la teoría cuántica en términos categoristas, específicamente en términos del topos $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$ de los prehaces entre la categoría $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ de subálgebras abelianas de Von Neumann y la categoría de conjuntos **Sets**, que también es un topos. La finalidad de este proyecto es filosófica: dar con una lectura más realista de la teoría cuántica a través de un aparato categorista que garantice aproximaciones clásicas hacia fenómenos cuánticos (no clásicos).

En este capítulo cuestiono exactamente qué cuenta como una lectura "más realista" de la teoría cuántica y en qué sentido son "clásicas" la aproximaciones hacia fenómenos cuánticos, pues estos son los conceptos filosóficos más importantes del proyecto de los topos cuánticos.

3.2 Realismo y contextualidad

Isham, Döring y Flori hablan, por un lado, de una idea de *realismo* que involucra (i) que la idea de una propiedad del sistema físico (el valor de una cantidad física) es significativa y representable en el topos $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$, (ii) que las proposiciones sobre un sistema físico se modelan con lógica booleana (clásica) y (iii) que existe un espacio de microestados tal que especificar un mictroestado lleva de forma inequívoca al valor de verdad de cada proposición acerca del sistema.

Por otro lado, Isham, Döring y Flori hablan de una idea de *contextos* en la teoría cuántica de topos que ellos proponen, pues tienen en mente que cada elemento de la teoría cuántica es definido como la coleción de descripciones "dependientes de contexto" que hacen las veces de una fotografía clásica o booleana (*classical snapshot*) de fenómenos cuánticos (no clásicos). Estos contextos son las subálgebras abelianas de Von Neumann que forman la categoría poset $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ bajo inclusión. Así, aunque dentro del topos cuántico se está definiendo la teoría cuántica en términos de fotografías clásicas, la información global de los fenómenos cuánticos se pone de vuelta en su lugar por la estructura categorista de la colección de todos los contextos (fotografías clásicas $V \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{V}(\mathcal{H})}$).

El teorema Kochen-Specker parece implicar que la teoría cuántica es contextual, pues los valores de las cantidades dependen de qué otras cantidades se están midiendo al mismo tiempo. Pero la contextualidad de la teoría cuántica de topos es de otro tipo, si bien se desprende del teorema Kochen-Specker; este teorema nos prohibe definir valores para todas las cantidades al mismo tiempo y de manera consistente, pero permite asignar valores a subconjuntos conmutantes de cantidades. Estos subconjuntos son las fotografías clásicas ya que todas las peculiaridades de la teoría cuántica surgen de operadores no conmutantes (e.g. posición y momento: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$).[1] Así, con respecto a estas fotografías clásicas (contextos), la teoría cuántica se comporta de forma clásica, es la colección de aproximaciones clásicas en el topos cuántico.

3.3 Clasicidad(es) y otras preocupaciones

La estrategia de Isham, Döring y Flori es interesante. Parece, según lo que proponen, que al organizar la información (las matemáticas) de la teoría cuántica con herramientas topos teóricas desaparece (aunque solo si nos fijamos en un tipo de contexto) la separación entre la física clásica y la física cuántica (no clásica), pues ellos entienden que una teoría física clásica (que, además, se modela en términos categoristas) debe tener *a*) un espacio de estados, *b*) valores para todas las cantidades físicas y *c*) una lógica interna clásica o booleana. Puesto que $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$ codifica las distintas álgebras de operadores acotados a un espacio de Hilbert en términos del topos **Sets**, cuya lógica interna es clásica, hay garantía de que el resultado de evaluar un contexto $V \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{V}(\mathcal{H})}$ es una descripción con una lógica interna clásica. Además, al utilizar (i) el prehaz espectral $\underline{\Sigma} : \mathcal{V}(\mathcal{H}) \to \mathbf{Sets}$ como el espacio de estados cuánticos; y al utilizar (ii) el prehaz $\Omega : \mathcal{V}(\mathcal{H}) \to \mathbf{Sets}$ y la transformación natural $\top : 1 \to \Omega$ con componente $\top_V : \{*\} \to \Omega(V)$ (el tamiz principal $\downarrow V$ sobre $V \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{V}(\mathcal{H})}$) como clasificador de subobjetos, se sigue que $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$ cumple las características *a*), *b*) y *c*) de una categoría de teorías físicas clásicas.

[1] Aquí "peculiaridades de la teoría cuántica" se refiere a las relaciones limitativas fundamentales que hay entre pares de operadores no conmutantes de un sistema físico según el Principio de Incertidumbre de Heisenberg para posición y momento.

Sin embargo, mi preocupación con respecto a esta propuesta es triple: (i) hay poco cuidado en el manejo del término *clásico*, pues se utiliza como apellido para teorías y fenómenos físicos y para las lógicas internas booleanas; (ii) la concepción de *realismo* utilizada implica que las teorías con lógica interna no booleana no son teorías realistas (así, la teoría estándar con la lógica cuántica de Birkhoff y Von Neumann no sería una teoría realista, lo cual no ha sido suficientemente motivado); y (iii) suponiendo que los teóricos de los topos cuánticos obtuvieron una presentación de una teoría cuántica completa (i.e. que tiene valores para todas las cantidades físicas), cosa que no es el caso pues explícitamente dejan fuera a los contextos con cantidades fuertemente incompatibles, eso entraría en conflicto con teoremas limitativos como el teorema de Bell y el teorema Kochen-Specker.

En primer lugar, vale la pena distinguir la *clasicidad física* de la *clasicidad lógica*.

La clasicidad lógica suele describirse en términos de conectivas bivalentes veritativo-funcionales que satisfacen principios lógicos clásicos como *tercero excluso* y ambas direcciones de *doble negación*; matemáticamente, identificamos la lógica clásica con la lógica inducida por un álgebra booleana B. En ese sentido, diremos que Isham, Döring y Flori hablan de *booleanidad* cuando hablan de la clasicidad lógica.

Por otro lado, la clasicidad física suele describirse en términos de completitud física y determinismo, más que en términos de booleanidad; suele decirse que las teorías físicas clásicas (como la mecánica clásica) son completas (asignan valores a todas las cantidades físicas) y deterministas (dado cierto conocimiento del pasado, como las condiciones iniciales de un sistema, se puede predecir con exactitud el estado futuro del sistema).[2] Sin embargo, la teoría cuántica o ciertas formulaciones de la misma pueden ser incompletas (por el teorema Kochen-Specker) e indeterministas (a partir de conocer el estado de un sistema, solo podemos predecir la probabilidad de que dicho sistema se encuentre en cierto estado u otro en el futuro). En ese sentido, diremos que Isham, Döring y Flori hablan de *completitud física* y *determinismo* cuando hablan de clasicidad física.

En segundo lugar, la concepción de realismo utilizada por Isham, Döring y Flori es una aplicación del principio de Michael Dummett (1978, cap. 10) a las teorías físicas, mismo que afirma que cuando uno es realista con respecto a los elementos de un dominio particular de discurso se está, por tanto, comprometido a utilizar lógica clásica para razonar dentro de ese dominio. Este principio está motivado por la idea de que *tercero excluso* codifica una forma de realismo, en tanto que requiere que la disyunción de cualquier proposición con su negación sea verdadera, de forma que este principio impide que el mundo sea indiferente al valor de verdad de cualquier proposición dada (como un realismo de valores de verdad).

Sin embargo, dicha motivación es bastante endeble pues (i) *tercero excluso* por sí

[2]Nótese que el criterio de localidad no es distintivo de la física clásica, pues la teoría newtoniana de la gravitación es no local (donde que una teoría sea *local* quiere decir que la medición de las propiedades de un sistema en una región espacio-temporal no afecta el valor de las propiedades de otro sistema en otra región espacio-temporal).

mismo no es suficiente para obtener la lógica clásica —hay lógicas no clásicas que cumplen este principio, como la lógica cuántica de Birkhoff y Von Neuman—; (ii) la ausencia de *tercero excluso* no necesariamente implica algún tipo de indeterminismo, en el sentido en que alguna proposición no tenga un valor determinado (o determinable) de verdad (como ciertas lecturas intuicionistas de la lógica y las matemáticas); y (iii) si bien Isham y Döring afirman que la condición de booleanidad es deseable porque los seres humanos pensamos de manera booleana (cosa que es cuestionable), no hay una razón obvia (o un principio antrópico) para que la realidad física se comporte de manera coincidente con el pensamiento humano.

Y en tercer lugar, es importante monitorear si el proyecto de los topos cuánticos entra en conflicto con alguno de los teoremas limitativos (*no go theorems*) de la teoría cuántica. Las subálgebras de operadores acotados a un espacio de Hilbert pueden no inducir una lógica booleana, sino una lógica ortomodular, por ejemplo, de forma que al seleccionar aquellas álgebras de Von Neumann que son abelianas y distributivas, Döring, Isham y Flori nos conducen irremediablemente a una estructura algebraica booleana en **Sets**, el codominio del topos de prehaces $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$. Esta maniobra, a mi entender, está motivada por la preocupación de no contradecir el teorema Kochen-Specker; sin embargo: *a*) me parece que la única razón por la que no se viola este teorema es porque no se contemplan los “contextos peculiares” (subálgebras $V \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{V}(\mathcal{H})}$ que contienen operadores no conmutantes) en la aproximación clásica de $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$ a la teoría cuántica, cosa que trivializa el proyecto; y *b*) no queda claro si hay algún otro teorema limitativo (por ejemplo, el teorema de Bell) que pueda violarse al utilizar la reconstrucción de $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$.

3.4 Neorrealismo

Con frecuencia, Isham, Döring y Flori llaman *Neorrealismo* al tipo de realismo que proponen en su proyecto. En su revisión del proyecto, Benjamin Eva (2017) caracteriza con tres criterios la propuesta de realismo para teorías físicas propuesto por Isham, Döring y Flori, y muestra que el proyecto de los topos cuánticos no logra satisfacer estos criterios pero satisface otros, muy similares, que caracterizan al así llamado *Neorrealismo* en los topos cuánticos. Los criterios para las teorías físicas realistas son:

PROP: Una propiedad de un sistema físico (el valor de una cantidad física) es significativa y representable en la teoría.

BOOLE: En cualquier teoría física realista las proposiciones sobre el sistema físico se manejan utilizando lógica booleana.

STATE: Se requiere la existencia de un espacio de microestados tal que la especificación de un microestado conduce inequívocamente al valor de verdad de cada proposición sobre el sistema físico.

PROP parece ser una buena condición que imponer al ofrecer una propuesta de realismo de teorías físicas, pues es tan sólo natural esperar que una teoría realista nos permita hablar sobre cierta cantidad física Q asociada a un sistema físico S, i.e. hablar sobre el valor de Q para S. De hecho, uno de los problemas de interpretación de la teoría cuántica consiste, precisamente, en qué es lo que uno debería decir sobre aquellas cantidades físicas que son representadas por operadores autoadjuntos para los cuales el estado de un sistema no es un eigenestado (este es el problema de reconciliar la teoría cuántica con **PROP**).

Hemos hablado ya de **BOOLE** y su relación con una posición realista a través del principio de Dummett. Aquí hay un punto importante: si bien hay razones para rechazar **BOOLE**, es verdad que debe haber alguna restricción estructural a la lógica de una teoría física realista, pues hay lógicas, como la lógica cuántica (que no es distributiva), que sufren de problemas que hacen que su estatus de "lógica" sea dudoso (p. ej. la lógica cuántica generalmente carece de un teorema de la deducción y no permite definir el condicional de forma natural o intuitiva[3]). Parece razonable imponer como condición que la lógica subyacente de una teoría física realista al menos tenga un condicional definido de forma significativa pero no es del todo necesario que ese condicional esté sujeto a un teorema de la deducción —como ocurre en las lógicas de la relevancia, que revisaremos en Capítulo 4 de este trabajo. No obstante, lo dudoso que pueda parecerle a alguien que esas lógicas no clásicas llenas de peculiaridades o divergencias son "lógicas" genuinas, no prueba nada a favor ni en contra de ninguna lógica y habla tan solo de una falta de familiaridad con estos sistemas formales.

Y, finalmente, **STATE** parece bastante intuitivo. La noción de estado físico puede verse como la formalización del concepto de "cómo son las cosas" con respecto al sistema en cuestión y una característica de las teorías físicas realistas debería ser que nos dicen, precisamente, cómo son las cosas que describen.

Sin embargo, la teoría cuántica de topos no satisface **BOOLE** ni **STATE**, según Eva (2017, p. 28). En cambio, satisface los siguientes criterios para una teoría física *Neorrealista*:

PROP: La idea de una "propiedad del sistema físico" (el "valor de una cantidad física") es significativa y representable en la teoría.

HEYT: Las proposiciones sobre el sistema físico se manejan utilizando lógica intuicionista.

TRUTH: Siempre es posible asignar valores de verdad determinados a todas las proposiciones físicas asociadas con un sistema de manera consistente.

Puesto que $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$ representa las proposiciones físicas con subobjetos clopen del prehaz espectral, $Sub_{cl}(\underline{\Sigma})$ representa un retículo (*lattice*) de proposiciones físicas que, de

[3]Ver (Malinowski, 1990).

hecho, forma un álgebra de Heyting y, por tanto, tiene asociada la lógica intuicionista, por lo cual debemos reemplazar **BOOLE** con **HEYT**. Si bien $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$ no cumple **BOOLE**, que es estrictamente más fuerte que **HEYT**, la situación con respecto a la lógica de la teoría cuántica "ha mejorado": una ventaja de $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$ es que la lógica que induce es intuicionista, pues la lógica intuicionista es más cercana a la lógica clásica (y, por lo tanto, para ellos "más realista") que la lógica inducida por un retículo ortomodular no distributivo (i.e. la lógica cuántica no distributiva o la ortológica).

La diferencia entre **TRUTH** y **STATE** es que **TRUTH** no invoca ninguna noción de "estado físico", pues esta noción es problemática de acuerdo con el Teorema 2.5.2. en (Eva 2017, p. 9): el teorema Kochen-Specker es equivalente al hecho de que el prehaz espectral sobre $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ (para $\mathcal{H}$ con 3 o más dimensiones) no tiene elementos globales. Si interpretamos el prehaz espectral sobre $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ como el espacio de estados de un sistema cuántico S descrito por el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, e interpretamos de forma correspondiente los estados cuánticos individuales como los elementos globales del prehaz espectral, entonces el teorema Kochen-Specker es equivalente al hecho de que no existan estados cuánticos para S (que el prehaz espectral no tenga elementos globales).

Eva (2017, p. 32) concluye que decir que la teoría cuántica de topos es una teoría realista resulta engañoso, pues no se cumplen las condiciones de una teoría física realista (que sus mismos creadores impusieron). Si bien lo que se cumple en el proyecto son las condiciones que Eva describe, nosotros consideramos que esto no hace que tengamos si quiera una interpretación "relativamente realista" de la teoría cuántica; más bien, creemos que el proyecto de Isham y Döring fracasa fatalmente debido a las siguientes deficiencias filosóficas importantes:

- Una filosofía monista de la lógica —i.e. que considera que la única lógica "correcta", si queremos ser realistas respecto a nuestras teorías científicas, es la lógica clásica— que no está suficientemente motivada y que incluso ha sido descartada en las últimas décadas dentro de la literatura de filosofía de la lógica en favor de su contraria, la filosofía pluralista de la lógica (ver, e.g. (Russell 2008) , y (Russell 2018) para otro caso límite).

- Una completa desatención, en lo que concierne a filosofía de la teoría cuántica, al problema de la medición y a consideraciones de no localidad. Sabemos que el problema de la medición —ver (Okón 2014)— es central y distintivo de la teoría cuántica, de forma que cualquier interpretación de ésta deberá dar una solución (si es posible) o aceptar las limitantes que este problema conlleva en materia de realismo científico y los límites del conocimiento. El proyecto de Isham y Döring no hace ni una cosa ni la otra; incluso parece que la única razón por la que "evita" este problema es porque se salen de la discusión de la teoría cuántica al dejar fuera los contextos de medición de operadores no conmutantes (relaciones de incertidumbre) con tal de recuperar la lógica clásica (o más bien intuicionista) y evitar el teorema Kochen-Specker. De esa misma manera, y en consecuencia, se dejan fuera las discusiones sobre la localidad o no localidad de la teoría cuántica, que requiere hablar de contextos de medición de operadores no conmutantes. En consecuencia, es claro que el proyecto topos teórico no está interpretando la teoría cuántica sino a una especie de fragmento o aproximación a esta, ni ofrece respuestas a los problemas filosóficos fundamentales de la física cuántica.

No obstante, otros teóricos de topos-cuánticos que divergen de los presupuestos filosóficos, lógicos y matemáticos empleados por Isham y Döring, como Olivia Carmello y Cecilia Flori, podrían ofrecer mejores propuestas para recuperar la teoría cuántica con teoría de categorías; también, como veremos en el Capítulo 4 con el proyecto de Abrahamsky y Coecke, hay otras representaciones categoristas de la teoría cuántica que no usan topos y que son más neutrales y fieles en su representación. Esto conduce a cuestionarnos qué tipo de realismo deberíamos esperar de nuestras teorías científicas, especialmente si están formuladas en términos de teoría de categorías.

Si bien existen múltiples propuestas de tesis realistas en filosofía de la ciencia (y en filosofía de las matemáticas) que podrían responder a la cuestión anterior, hay una propuesta —y aquí pensamos igual que Eva (2016)— que parecería natural adoptar cuando se trabaja física con teoría de categorías: el *Realismo Óntico Estructural*. En lo sucesivo describimos brevemente esta forma de realismo científico y nos preguntamos si los proyectos categoristas (con o sin uso de topos) alrededor de la física (cuántica o no) se beneficiarían de ceñirse alguna forma de) el realismo estructural. Como veremos, el principal beneficio de esta propuesta gira en torno al problema del cambio teórico, mismo que es fácil encontrar en la historia de la física cuántica.

3.5 Neorrealismo topos teórico vs. realismo óntico estructural

Hemos visto, con Benjamin Eva, que la propuesta de realismo en el proyecto topos teórico de la reformulación de la teoría cuántica no sólo es deficiente como tesis metafísica en el contexto de la filosofía de la ciencia —esto es, como pronunciación en torno a la naturaleza de la relación entre nuestras teorías científicas y lo que estas pretenden explicar, modelar, acomodar, etc.—, sino que además no es satisfecha siquiera por el topos $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$ mismo, pues su lógica asociada no es booleana sino intuicionista y multivaluada, y no es claro si resuelve sus problemas frente al teorema Kochen-Specker. Ahora nos interesa contemplar si proyectos categoristas similares o paralelos, en torno a la física, pueden beneficiarse de adoptar cierto realismo estructural en lugar de imponer presupuestos como **PROP**, **BOOLE** y **STATE**.

Isham y Döring han escrito acerca de lo que para ellos significa dar una teoría física. El enfoque que toman es categorista: piden que los estados físicos que hacen las veces de datos de la teoría se acomoden como objetos y que las cantidades físicas de la teoría sean morfismos definidos sobre los números reales de forma que se pueda construir proposiciones acerca del valor de las cantidades físicas. Este enfoque es adicionado con requisitos que ya hemos mencionado que nos parecen cuestionables —como que las proposiciones de la teorías físicas formen un álgebra booleana—, sin embargo, la idea básica no es poco razonable: la teoría de categorías le ha permitido a los matemáticos gozar de un aparato formal en el cual la información matemática (objetos y sus transformaciones o morfismos) se puede organizar, comparar y conectar de manera clara y uniforme, por lo que las teorías físicas —entendidas como construcciones matemáticas— pueden beneficiarse de estos métodos.

Actualmente, Isham y Döring no están solos en la propuesta de dar formulaciones categoristas de teorías físicas. En (Landry 2018, ch. 17) encontramos una propuesta para la construcción categorista de teorías científicas; tanto ese como otros capítulos contienen diversos ejemplos provinientes de la física. Hay una serie de razones para que la teoría de categorías aparezca en la escena de la filosofía de la ciencia como un formalismo para, entre otras cosas, la (re)construcción de teorías científicas. Por ejemplo, Hans Halvorson y Dimitris Tsementzis afirman:

> [W]e suggest that category theory unifies various approaches to formal philosophy of science, and shows that some of the debates between various approaches have been misguided. But most importantly, our proposal is not ideological; i.e. we have no stake in the claim that category theory is the "one and only correct" approach to scientific theories, much less that "a scientific theory *is* a category". Rather, we are merely sketching a program of research in formal philosophy of science: we suggest that it might be interesting to think of the "universe" of scientific theories as a *category of categories*, more precisely, as a 2-*category*[4] *of categories*.
>
> Our proposal includes the idea that familiar scientific theories (e.g. Hamiltonian mechanics, special and general relativity, quantum mechanics, quantum field theory) can themselves fruitfully be described as categories. (Landry 2018, p. 402)

De forma general, incluso sin comprometernos con (los detalles de) la visión particular de Halvorson y Tsementzis, parece razonable considerar que en la teoría de categorías existen los medios formales necesarios para agrupar y estudiar algunas teorías científicas de manera uniforme y general.

[4]Una 2-categoría consiste de una clase de 0-*celdas* (u objetos) $A, B, \dots$, una clase de 1-*celdas* compuesta por morfismos $f, g : A \to B$, y morfismos $\alpha : f \Rightarrow g$ llamados 2-*celdas*. La composición en una 2-categoría se da de forma vertical entre 1-celdas y de forma horizontal entre 0-celdas. Así, dadas dos categorías $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$, la 2-categoría $\mathbf{Cat}(\mathbb{C}, \mathbb{D})$ tiene como objetos (0-celdas) a todos los functores $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ (y composición vertical como composición de functores) y como morfismos (1-celdas) a todas las transformaciones naturales entre los functores (y composición horizontal como composición de transformaciones naturales).

A nuestra consideración, una de las motivaciones implícitas detrás de planteamientos como el recién mencionado es que la teoría de categorías tiene entre sus virtudes la capacidad de expresar las propiedades estructurales de un sin fin de construcciones matemáticas. De hecho, la teoría de categorías no sólo ha aparecido en la discusión de los fundamentos de la matemática como un competidor directo para la teoría de conjuntos, sino que además ha gozado de un interesante recibimiento en la literatura del estructuralismo matemático dado que se cree que ella sistematiza la intuición filosófica de que las matemáticas estudian diversos tipos de estructuras formales y sus relaciones. Aquí no discutiremos esto último.[5] Ahora mismo estamos interesados en sugerir que la idea de formular teorías científicas en términos categoristas empata bien con la tesis del realismo óntico estructural precisamente porque la teoría de categorías es una teoría acerca de las estructuras matemáticas y sus propiedades invariantes.

3.5.1 Realismo óntico estructural

El ya muy conocido *Argumento No Milagro* de Hilary Putnam sugiere una justificación razonable para ser realistas con respecto a la ciencia:

> The positive argument for realism is that it is the only philosophy that doesn't make the success of science a miracle (1975, 73).

El problema que se suscita, sin embargo, al justificar el realismo científico de esta forma es que se adopta la creencia de que las descripciones de nuestras teorías científicas exitosas hablan de la realidad cuando toda la historia de la ciencia muestra evidencias del *cambio teórico*, donde muchas teorías son significativamente reformadas y otras tantas incluso desechadas, de forma que, ¿cómo pueden ser realistas nuestras teorías científicas si sus términos teóricos dejan de referir conforme la ciencia se revisa y se modifica?

El cambio teórico es un fenómeno en el proceso del pensamiento científico que ha sido objeto de interés en la historia y filosofía de la ciencia de forma sistemática desde Thomas Kuhn (1962). Como parte natural del proceso de desarrollo de la ciencia, incluso ha provocado la formulación del argumento famosamente conocido como *Meta Inducción Pesimista*, que nos conmina a no depositar mucho compromiso en nuestras mejores teorías actuales, pues ellas también serán desechadas por otras mejores. Larry Laudan (1981) lo presenta como sigue:

L1. Hemos tenido múltiples teorías científicas que fueron empíricamente exitosas en la historia de la ciencia pero que de forma subsecuente han sido rechazadas y contienen términos teóricos que, de acuerdo con nuestras mejores teorías actuales, no refieren.

L2. Nuestras mejores teorías actuales no son distintas en naturaleza de aquellas teorías descartadas, por lo que no tenemos razones para pensar que ellas no serán finalmente reemplazadas también.

[5] Véase (Lawvere, 1966), (MacLane, 1986), (Awodey, 1996) y (Hellman, 2003).

Esto coloca al realista en un *impasse*: no puede pronunciarse de forma realista acerca de la ontología de la teoría y sus términos teóricos porque las teorías científicas no son productos terminados o creaciones estáticas, sino que son cuerpos de conocimiento inmersos en dinámicas de desarrollo y revisión constante.[6] ¿Cómo ser realista ante el cambio teórico, entonces?

Si bien hay quien ha objetado que la Meta Inducción Pesimista es falaz [7], una de las respuestas mejor acogidas en la literatura contemporánea ante el problema de la inconsistencia entre el realismo y el cambio teórico es el *Realismo Estructural*, desde (Worrall 1989). Esta filosofía admite el Argumento No Milagro y admite que en la ciencia hay cambio teórico, pero evita la aparente inconsistencia señalando que en el paso de una teoría T_n a otra T_{n+1} generalmente se preservan las partes estructurales aunque los términos teóricos sufran grandes modificaciones. Dicho de otro modo, aunque pueda perderse el contenido en el cambio teórico, hay aspectos formales que se conservan. Así, uno puede pronunciarse como *realista de los aspectos estructurales preservados* sin serlo respecto a la ontología particular de las teorías.

> John Worrall (1989) introduced *structural realism* (although he attributes its original formulation to Poincaré). [...] According to Worrall, we should not accept full-blown scientific realism, which asserts that the *nature* of things is correctly described by the metaphysical and physical content of our best theories. Rather we should adopt the structural realist emphasis on the mathematical or *structural* content of our theories. Since there is (says Worrall) retention of structure across theory change, structural realism both (a) avoids the force of the pessimistic meta induction (by not committing us to belief in the theory's description of the furniture of the world) and (b) does not make the success of science (especially the novel predictions of mature physical theories) seem miraculous (by committing us to the claim that the theory's structure, over and above its empirical content, describes the world) (Ladyman y Ross 2007, p. 93).

Al tiempo que Döring (2007) publicaba su trabajo acerca de la teoría de topos y la teoría cuántica Neorrealista, Ladyman y Ross (2007) publicaron su notado libro donde avanzan el *Realismo Óntico Estructural* (ROE), en el que se defiende que las estructuras matemáticas son preservadas a través del cambio teórico y es con respecto a ellas que se es realista; a lo largo de su exposición, esta tesis es motivada por medio de numerosas discusiones en torno a la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica ya que uno de los principales indicadores de que se tiene una buena metafísica naturalizada es que se pueda dar cuenta de lo que ocurre en la física a través de la evolución de sus teorías y las explicaciones que ofrecen.

[6]Ni siquiera podemos decir que estos cuerpos de conocimiento están sujetos a un perfeccionamiento progresivo —que supone que el conocimiento científico es acumulativo— ya que en el cambio teórico puede darse lo que Heinz Post llamó *pérdidas de Kuhn* (*Kuhn's losses*), i.e. que en el proceso de cambio teórico puede suceder que algún aspecto exitoso, ya sea teórico o empírico, de la teoría previa no se traslade a (o sea incorporado en) la teoría que la reemplaza.

[7]E.g. Peter Lewis (2001), Marc Lange (2002) y Magnus y Callender (2004) consideran que se trata de una falacia del razonamiento probabilista.

> Ontic Structural Realism (OSR) is the view that the world has an objective modal structure that is ontologically fundamental, in the sense of not supervening on the intrinsic properties of a set of individuals. According to OSR, even the identity and individuality of objects depends on the relational structure of the world. Hence, a first approximation to our metaphysics is: "There are no things. Structure is all there is". We of course acknowledge that special sciences are richly populated with individual objects. Thus, to accommodate their elimination from metaphysics we will owe a non-ad hoc account of the point and value of reference to and generalization over objects in sciences other than fundamental physics. We will argue that objects are pragmatic devices used by agents to orient themselves in regions of spacetime, and to construct approximate representations of the world (Ladyman y Ross 2007, p. 130).

De hecho, Ladyman y Ross (2007) son muy conscientes de la importancia de que su propuesta de metafísica naturalizada goce de una relación saludable con la física contemporánea y para ello formulan del principio de

Constreñimiento de la Primacía de la Física (CPF) Toda hipótesis de las ciencias especiales que entre en conflicto con la física fundamental, o el consenso que exista en la física fundamental, debe ser rechazada por esta misma razón. Las hipótesis de la física fundamental no guardan esta relación de forma simétrica con las conclusiones de las ciencias especiales (p.44).

Aunque no es requerido para nuestra discusión, **CPF** motiva un realismo en cascada que ellos llaman "*rainforest realism*", donde los compromisos realistas de la física fundamental permean hacia el resto de las ciencias especiales. En ese sentido, Ladyman y Ross (2007 p.37) sostienen que la diferencia más importante entre la física —o al menos aquella parte de la física que podemos llamar "fundamental"— y otras ciencias es que ella es mucho más abarcante que aquéllas, tiene un mayor espectro.

Por su parte, la metafísica, entendida como el proyecto de unificar la visión científica del mundo, coincide con la física fundamental en que su espectro o campo de conocimiento es máximamente abarcante. Estas reflexiones se cristalizan en la formulación del

Principio de Cierre Naturalista (PCN) Toda aserción metafísica nueva que sea tomada en serio al tiempo t debe estar motivada por, y sólo por, el servicio que proveerá, en caso de ser verdadera, al mostrar cómo dos o más hipótesis científicas —de las cuales al menos una se deriva de la física fundamental— explican de manera conjunta más que la suma de lo que explican cada una por separado (p.37).

Nos encontramos entonces frente a una metafísica naturalizada que da prioridad epistémica a la física fundamental y que parece resolver la incompatibilidad del Argumento No Milagro y la Meta Inducción Pesimista. Si bien, como es de esperar, al realismo óntico estructural se le han presentado importantes objeciones[8] , introducirlo a la discusión de la teoría cuántica de topos es preferible por encima del Neorrealismo de Döring porque:

1. ROE no requiere comprometerse con una visión clásica de la física o de la lógica (aunque sí tiene que explicar su éxito relativo)

2. ROE ha sido implementado ampliamente en la filosofía de la física

3. ROE ofrece una respuesta al problema de la inconsistencia entre el realismo científico y el cambio teórico, mientras que el Neorrealismo cae presa de este problema

Sin embargo, ROE pone toda la importancia en la noción de estructura matemática y su preservación. Al respecto de esto, Ladyman y Ross (2007, pp. 159-161) sólo mencionan la importancia de tener una buena filosofía de las matemáticas y notan que en los últimos años se ha dado un giro estructuralista en filosofía de las matemáticas a través de autores como Maddy (1990), Resnik (1997), Shapiro (1997), y Hellman (2005). Uno podría esperar que para aceptar el realismo óntico estructural en la filosofía de la física sería necesario contar con una teoría acerca de las estructuras matemáticas y sus transformaciones, pues son estas acerca de las que se puede ser realista dado que se preservan a través del cambio teórico. Si bien Ladyman y Ross no nos ofrecen esto, creo que podemos decir, siguiendo a Steve Awodey (1996), que de hecho ya tenemos una teoría matemática acerca de las estructuras matemáticas, su preservación y sus transformaciones: *¡la teoría de categorías!*

Ante la crítica más popular contra ROE, i.e. sobre la incoherencia o la imposibilidad de que existan relaciones sin *relata*, Bain (2013) ha argumentado recientemente que el lenguaje matemático de la teoría de categorías permite una articulación coherente de ROE. Wüthrich y Lam (2014) y Lal y Teh (2015) respondieron a Bain argumentando que a la teoría de categorías no le va mejor que a la teoría de conjuntos en lo que concierne a una articulación coherente de ROE. No obstante, Bejamin Eva (2016) —quien también nos ofreció las críticas al Neorrealismo de Döring y evaluó el proyecto topos teórico que hemos revisado en este trabajo de investigación— ofrece una defensa de Bain ante sus críticos y, además de elaborar sobre la idea de que la teoría de categorías provee una articulación coherente de ROE, considera la relación entre ROE y la mecánica cuántica categorista.

En particular, lo que un realista estructural quiere es identificar una estructura que pueda preservarse aproximadamente a lo largo de varias teorías científicas (clásica, cuántica, relatividad, etc.) y que pueda dar una explicación exhaustiva de las predicciones exitosas de cada una de estas teorías sin dejar de considerar las predicciones exitosas de teorías pasadas, i.e. que fueron reemplazadas en el proceso de cambio teórico. Pero para la presente investigación, la pregunta de fondo es: ¿la teoría de categorías es el lenguaje

[8](Chakravartty 1998), (Psillos (1995), (Gower 2000), (Stanford 2003), (Cao 2003) y (van Fraassen 2006) contienen las más conocidas; ver (Ladyman y Ross 2007, pp. 154-159).

indicado con el cuál podemos identificar estructuras preservadas bajo cambio teórico? En este trabajo consideramos que así es, pues la teoría de categorías es utilizada hoy en día como una *lingua franca* en matemáticas que permite organizar (y relacionar) claramente las diferentes construcciones o estructuras matemáticas —y dado que nuestras teorías científicas conllevan una formulación matemática, se sigue que las teorías científicas son representables en la teoría de categorías.

Respecto a la posibilidad de sostener ROE y utilizar una lógica no clásica, notamos que toda lógica subestructural contiene principios válidos de la lógica clásica, por lo que una teoría científica que emplea una lógica no clásica podría preservar buena parte de la estructura de otra teoría (desechada, por ejemplo) que utiliza lógica clásica. El éxito que puedan tener estas versiones no clásicas de las teorías científicas puede ser explicado por el éxito que han tenido las teorías científicas basadas en lógica clásica, pues si las lógicas no clásicas, particularmente las subestructurales, constituyen un refinamiento de la lógica clásica en función de determinados contextos de aplicación, entonces las teorías científicas basadas en lógicas no clásicas bien pueden ser refinamientos de nuestras teorías basadas en lógica clásica. Esta última idea será capital en el siguiente capítulo.

Conclusiones

1. Andreas Döring erró al proponer una filosofía Neorrealista que le permitía dar una lectura artificial de la teoría cuántica. Al respecto, si se ha de adoptar alguna forma de realismo, para el físico (y quizá para el filósofo de la física) es preferible adoptar una forma de metafísica naturalizada como lo es el realismo óntico estructural, pues se evita el problema del cambio teório —tan presente en el desarrollo de las diversas interpretaciones de la teoría cuántica.

2. El realismo óntico estructural requiere de una buena filosofía de las matemáticas para dar cuenta de la noción de estructura matemática, que es central en su propuesta, y la presencia de programas estructuralistas en la literatura de la filosofía de las matemáticas, defendidas desde la teoría de categorías, motiva a pensar que la teoría de categorías es un excelente compañero de esta metafísica naturalizada.

Capítulo 4

Alternativas no clásicas para interpretar la física cuántica

La discusión sobre clasicidad física y clasicidad lógica que tuvimos en el capítulo pasado es una razón más para decir que tenemos problemas para interpretar la teoría cuántica, ya que (1) no hay en uso (de la comunidad científica) un criterio de demarcación para distinguir qué hace clásica a la física clásica y qué hace no clásica a la física cuántica, mismo que —sostenemos— puede ser suplementado por la idea de que ésta usa una lógica no clásica mientras que aquélla permanece fiel a la lógica booleana o clásica; y (2) no hay en uso (de la comunidad científica) un método lógico no clásico para analizar los experimentos y argumentos propios de la mecánica cuántica (estándar).

En este capítulo sugerimos dos teorías formales que utilizan lógicas no clásicas para analizar argumentos y experimentos propios de la teoría cuántica (estándar, al menos); la primera es una respuesta desde la teoría de categorías y la segunda es una respuesta desde la lógica de la relevancia. Lo que ambos acercamientos tienen en común es el uso de *lógicas subestructurales*; estas lógicas se caracterizan por rechazar o abandonar alguna de las reglas estructurales (a la izquierda o a la derecha de $\vdash$, o ambas) del cálculo de secuentes de la lógica clásica de acuerdo con la axiomatización de Gentzen (Paoli 2002, pp. 6 y 7) —donde $\Gamma \vdash \Delta$ es un secuente, $\vdash$ es una relación de consecuencia lógica clásica, Γ y el resto de letras mayúsculas griegas son conjuntos posiblemente vacíos de fórmulas A, B, etc. de un lenguaje formal L, y la línea horizontal indica que el secuente sobre ella implica válidamente el secuente por debajo de ella:

- Axiomas:

$$\frac{}{A \vdash A}(ID)$$

- Reglas estructurales:

1. Intercambio:

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Pi}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash \Pi}(EL) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Pi}(ER)$$

2. Debilitamiento:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}(WL) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}(WR)$$

3. Contracción:

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}(CL) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}(CR)$$

4. Corte:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, \quad A, \Pi, \vdash \Sigma}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma}(Cut)$$

- Reglas operacionales:

1. Negación:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\sim A, \Gamma \vdash \Delta}(\sim L) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \sim A}(\sim R)$$

2. Conjunción:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \quad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}(\wedge L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}(\wedge R)$$

3. Disyunción:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}(\vee L) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}(\vee R)$$

4. Implicación:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Pi, \vdash \Sigma}{A \to B, \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma}(\to L) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B}(\to R)$$

Evidentemente, cualquier lógica subestructural es una lógica no clásica. Por ejemplo, las lógicas paraconsistentes rechazan (WR) y las lógicas relevantes además rechazan (WL); las lógicas intuicionistas rechazan (CR) y las lógicas lineales además rechazan (CL) y ambas direcciones de Debilitamiento; etc. (Paoli 2002, cap. 2).

Las lógicas *relevantes* rechazan Debilitamiento para bloquear las *paradojas de la implicación*:

1. **Implosión** $A \to (\sim B \vee B)$: si $\Gamma \vdash \sim B \vee B$ entonces $\Gamma, A \vdash \sim B \vee B$ por (WL) y $\Gamma \vdash A \to (\sim B \vee B)$ por $(\to R)$.

2. **Explosión** $(A \wedge \sim A) \to B$: si $\Gamma, A, \sim A \vdash \Delta$ entonces $\Gamma, A \wedge \sim A \vdash \Delta$ por $(\wedge L)$ y entonces $\Gamma, A \wedge \sim A \vdash \Delta, B$ por (WR) y $\Gamma \vdash \Delta, (A \wedge \sim A) \to B$ por $(\to R)$.

3. **Paradoja positiva** $A \to (B \to A)$: si $\Gamma, A \vdash A$ entonces $\Gamma, A, B \vdash A$ por (WL) y luego $\Gamma, A \vdash B \to A$ y $\Gamma \vdash A \to (B \to A)$ por $(\to R)$.

4. **Mingle** $A \to (A \to A)$: si $\Gamma \vdash A \to A$ entonces $\Gamma, A \vdash A \to A$ por (WL) y $\Gamma \vdash A \to (A \to A)$ por $(\to R)$.

El bloqueo de estos principios de la lógica clásica, conocidos como paradojas de la implicación, trae consigo el bloqueo de más principios paradójicos de la implicación, como el *principio de expansión* $A \to (A \wedge (\sim B \vee B))$, pues si Identidad $A \vdash A$ e Implosión $A \vdash \sim B \vee B$ son válidas, entonces $A \vdash A \wedge (\sim B \vee B)$ por $(\wedge R)$ y $\vdash A \to (A \wedge (\sim B \vee B))$ por $(\to R)$. El rechazo a estos principios de la implicación, como veremos, será central para el análisis relevantista y ultramodal de la teoría cuántica.

Por su parte, las lógicas *lineales* rechazan Contracción, además de Debilitamiento, lo que las hace adquirir una sensibilidad a los recursos (*resource sensitive*), interpretando las fórmulas A, B, etc. de L como recursos informáticos. Esta interpretación de la lógica es popular en la teoría de la computación, especialmente en la computación cuántica. Como veremos, las categorías simétricas monoidales cerradas permiten interpretar la teoría cuántica y obedecen una lógica lineal.

4.1 Mecánica cuántica categorista: el rival directo de $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})^{op}}$

El proyecto de los topos cuánticos no fue el único intento categorista por formalizar la mecánica cuántica en 2009. Samson Abramsky y Bob Coecke (2009) han desarrollado otro formalismo categorista para la mecánica cuántica que no utiliza un topos, como Döring e Isham, sino *categorías simétricas monoidales* con ciertas características. Existen diferencias notables entre ambos enfoques, mismas que expondremos en lo sucesivo, y parece, como argumentaremos más adelante, que el formalismo categorista de Abramsky y Coecke recupera más y de mejor forma las nociones físicas clave como medición, enredamiento y no localidad, a diferencia del enfoque topos teórico.

4.1.1 Procesos vs. proposiciones

La mecánica cuántica categorista (MCC) de Abramsky y Coecke es un programa de investigación distinto al de la lógica cuántica de Birkhoff y Von Neumann. Mientras que ésta es el estudio de los retículos de subespacios lineales cerrados de un espacio de Hilbert, aquélla es una teoría de tipos lógicos para procesos cuánticos tal que es sensible a los recursos en la misma manera en que la lógica lineal de Girard (1987) lo es (Abramsky y Coecke, 2009 p.265); su motivación para acercarse a la lógica lineal es el *principio de No Clonación / No Eliminación* de la información cuántica.

Teorema de no clonación En la mecánica cuántica, es imposible crear copias idénticas de un estado cuántico arbitrario desconocido (Wooters y Zurek 1982).

Formalmente, este resultado dice que no existe una transformación unitaria que haga copias perfectas de un estado cuántico puro *desconocido*. Para ver esto, hay que asumir (para reducir al absurdo) que existe una transformación unitaria U tal que

$$U|\psi\rangle_A|X\rangle_B = e^{i\alpha}|\psi\rangle_A|\psi\rangle_B$$

donde $|X\rangle$ es un estado desconocido y $e^{i\alpha}$ es una fase, y ver que en general

$$U|\phi\rangle_A|X\rangle_B = e^{i\beta}|\phi\rangle_A|\phi\rangle_B \Longleftrightarrow \langle\phi|_A\langle X|_B U^\dagger = e^{-i\beta}\langle\phi|_A\langle\phi|_B$$

por lo que la multiplicación

$$\langle\phi|_A\langle X|_B U^\dagger U|\psi\rangle_A|X\rangle_B = e^{i(\alpha-\beta)}\langle\phi|_A\langle\phi|_B|\psi\rangle_A|\psi\rangle_B$$

nos indica que

$$|\langle\phi|\psi\rangle\cdot\langle X|X\rangle| = |e^{i(\alpha-\beta)}\langle\phi|\psi\rangle\cdot\langle\phi|\psi\rangle|$$

lo cual (asumiendo estados normalizados) solo puede ser si

$$|\langle\phi|\psi\rangle| = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$$

Esto indica que si $|\langle\phi|\psi\rangle| = 1$ entonces $|\psi\rangle = e^{i\gamma}|\phi\rangle$; y si $|\langle\phi|\psi\rangle| = 0$ entonces $|\psi\rangle \perp |\phi\rangle$, por lo que la transformación unitaria U puede realizar la clonación cuando $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$ son el mismo estado o cuando $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$ son ortogonales, pero no para cualesquiera estados en general, lo que contradice el supuesto.

Teorema de no eliminación En la mecánica cuántica, dadas dos copias de un estado cuántico arbitrario desconocido, es imposible eliminar alguna de ellas (Pati y Braunstein 2000).

Este resultado utiliza razonamientos similares a los que hemos visto pues considera una transformación U tal que

$$U|X\rangle_A|X\rangle_B|\phi\rangle_C = |X\rangle_A|0\rangle_B|\phi\prime\rangle_C$$

donde el estado desconocido $|X\rangle_B$ (que es una copia de $|X\rangle_A$) ha sido eliminado (o reemplazado por el estado vacío $|0\rangle_B$) y $|\phi\rangle_C$ es el estado inicial de la máquina y $|\phi\prime\rangle_C$ el estado final de la máquina.

MCC también es diferente al proyecto topos teórico de Isham y Döring —y a otros acercamientos categoristas a las teorías físicas, como el uso de n-categorías en teoría topológica de campos cuánticos (Baez y Dolan 1995). Las diferencias no son sólo lógico-matemáticas o formales, sino también filosóficas pues MCC, a diferencia de la reformulación topos teórica, permanece neutra ante las preguntas por el realismo o las presuntas anomalías de la teoría cuántica y se concentra en formalizar *procesos* cuánticos con teoría de categorías partiendo de la correspondencia Curry-Howard entre computación, lógica y categorías; en cambio, tanto la ortológica (y la lógica cuántica) de Birkhoff y Von Neumann como los topos cuánticos de Isham y Döring estudian *proposiciones* que expresan propiedades de sistemas cuánticos.

	Abramsky y Coecke	Isham y Döring
Matemática	usan categorías simétricas monoidales cerradas	usan un topos (categorías cerradas cartesianas con clasificador de subobjetos)
Lógica	usan lógica lineal	usan lógica intuicionista y aspiran a usar lógica clásica
Filosofía	estudian representaciones categoristas de procesos cuánticos	estudian proposiciones que expresan propiedades de sistemas cuánticos

El enfoque de *procesos* en el trabajo de Abramsky y Coecke refiere a la expresión categorista de nociones físicas como *preparación*, *medición*, *regla de Born*, *enredamiento*, entre otras incluso tan inusuales como la supuesta "teletransportación cuántica" pero siempre aprovechando el carácter dinámico de las descripciones matemáticas en términos de morfismos, functores y transformaciones naturales. Esto, por sí mismo, tiene una lógica propia; los autores defienden que esa lógica es la *lógica lineal* y exploraremos esto más adelante. Ciertamente es una lógica distinta (y un enfoque distinto) a la del proyecto topos teórico que utiliza una lógica intuicionista (o clásica) y se basa en las propiedades algebraicas de las proposiciones y sus pruebas en lugar de centrarse en las nociones físicas centrales de la mecánica cuántica y las matemáticas que les corresponden.

En lo que sigue introduciremos la maquinaria categorista necesaria para comprender la propuesta de Abramsky y Coecke.

4.1.2 Categorías simétricas monoidales cerradas

Definición 4.1. Una *categoría monoidal* es una estructura $\langle \mathbf{C}, \otimes, \mathbb{1}, \alpha, \lambda, \rho \rangle$ donde:

- $\mathbf{C}$ es una categoría
- $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es el functor *tensor*
- $\mathbb{1}$ es un objeto distinguido de $\mathbf{C}$, llamado *unidad*
- α, λ y ρ son los siguientes isomorfismos naturales (transformaciones naturales reversibles):

1. Asociatividad: $\alpha_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{\cong} (A \otimes B) \otimes C$
2. Unidad a la izquierda: $\lambda_A : \mathbb{1} \otimes A \xrightarrow{\cong} A$
3. Unidad a la derecha: $\rho_A : A \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\cong} A$

y son tales que $\lambda_{\mathbb{1}} = \rho_{\mathbb{1}} : \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \to \mathbb{1}$ y los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (\mathbb{1} \otimes B) \arrow[r, "\alpha_{A,\mathbb{1},B}"] \arrow[d, "id_A \otimes \lambda_B"'] & (A \otimes \mathbb{1}) \otimes B \arrow[dl, "\rho_A \otimes id_B"] \\
A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[r, "\alpha_{A,B,C,D}"] \arrow[d, "id_A \otimes \alpha_{B,C,D}"] & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[r, "\alpha_{A,B,C,D}"] & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C,D}"] & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[u, "\alpha_{A,B,C} \otimes id_D"']
\end{tikzcd}$$

Es importante advertir que el bifunctor tensor $\otimes$ no es el producto categorista $\times$. Mientras que éste es un objeto $A \times B$ de ciertas categorías, equipado con las proyecciones $\pi_1 : A \times B \to A$ y $\pi_2 : A \times B \to B$, y equipado con la diagonal $\Delta_A : A \to A \times A$ para cualesquiera objetos A, B de esas categorías, el tensor no necesariamente tiene proyecciones y diagonales. De la misma forma, la unidad del tensor $\mathbb{1}$ no necesariamente es el objeto terminal 1. Estas características separan a las categorias monoidales de las categorías cartesianas.

Definición 4.2. Una *categoría simétrica monoidal* es una categoría monoidal con un isomorfismo natural adicional:

4. Simetría: $\sigma_{A,B} : A \otimes B \xrightarrow{\cong} B \otimes A$

y es tal que $\sigma_{B,A} = \sigma_{A,B}^{-1}$ y los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_{A,\mathbb{1}}"] \arrow[dr, "\rho_A"'] & \mathbb{1} \otimes A \arrow[d, "\lambda_A"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "id_A \otimes \sigma_{B,C}"] \arrow[d, "\alpha_{A,B,C}"'] & A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "\alpha_{A,C,B}"] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[d, "\sigma_{A,C} \otimes id_B"] \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\sigma_{A \otimes B,C}"] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[r, "\alpha_{C,A,B}"] & (C \otimes A) \otimes B
\end{tikzcd}$$

Las categorías simétricas monoidales, que aparecieron originalmente en (MacLane 1997), tienen una conexión muy interesante con la lógica. Todos sus morfismos pueden ser interpretados como pruebas que van de un tipo lógico o proposición a otra, lo que genera un cálculo de secuentes propio de esa categoría al estilo de Lambek y Scott (1988). En ese sentido, la presencia del isomorfismo natural $\sigma_{A,B}$ en una categoría monoidal implica que su cálculo de secuentes cumple la regla Intercambio. Sin embargo, para satisfacer Contracción la categoría debe tener diagonales $\Delta_A : A \to A \otimes A$ respecto al tensor y para satisfacer Debilitamiento la categoría debe tener proyecciones $\pi_1 : A \otimes B \to A$ y $\pi_2 : A \otimes B \to B$ respecto al tensor. Hablaremos más de esto en la siguiente subsección.

Definición 4.3. Una *categoría simétrica monoidal cerrada* (CSMC) es una categoría simétrica monoidal tal que, para cualesquiera objetos A y B de $\mathbf{C}$, existe un objeto $A \multimap B$ y un morfismo

$$ev_{A,B} : (A \multimap B) \otimes A \to B$$

tal que, para cada morfismo $f : C \otimes A \to B$ existe un único morfismo $\hat{f} : C \to (A \multimap B)$ tal que

$$ev_{A,B} \circ (\hat{f} \otimes id_A) = f$$

Finalmente, mientras que las categorías cerradas cartesianas son cerradas respecto al objeto exponencial categorista B^A equipado con evaluación ev y residuación o transpuesto $\hat{f}$ de f, las categorías simétricas monoidales son cerradas respecto al exponencial $A \multimap B$.[1]

Definición 4.4. Una categoría $\mathbf{C}$ es **-autónoma* si es una categoría simétrica monoidal equipada con un functor lleno (*full*) y fidedigno (*faithful*) de la forma $()^* : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{C}$ tal que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A \otimes B, C^*) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, (B \otimes C)^*)$$

.

Definición 4.5. Una categoría *cerrada compacta* es una categoría *-autónoma con los siguientes isomorfismos naturales:

$$u_{A,B} : (A \otimes B)^* \simeq A^* \otimes B^* \qquad\qquad u_I : I^* \simeq I$$

4.1.3 La CSMC FdHilb

Abrahamsky y Coecke (2009, p.283) estudian espacios de Hilbert de dimensión finita (para facilitar la discusión) de forma categorista —específicamente como una CSMC

[1] Podemos describir una *categoría cerrada cartesiana* (la base de un topos) como un caso particular de categoría simétrica monoidal cerrada, i.e. podemos describirla como una estructura $\langle \mathbf{C}, \otimes, \mathbb{1}, \supset \rangle$, donde $\otimes = \times$ es el producto categorista (equipado con proyecciones y diagonales), $\mathbb{1} = 1$ es el objeto terminal y $A \supset B \overset{df}{=} B^A$ para el exponencial categorista. Los isomorfismos naturales de asociatividad, simetría, unidad a la izquierda y a la derecha valen para $\times$ porque el producto categorista es asociativo y conmutativo (salvo isomorfismo).

cerrada compacta llamada **FdHilb**— considerando lo siguiente:

- tomamos espacios vectoriales complejos de dimensión finita equipados con un producto interno sesquilinear $\langle\phi|\psi\rangle$ que es conjugado-lineal en el primer argumento y lineal en el segundo;

- organizamos estos espacios como la categoría **FdHilb**:

  - *objetos*: espacios vectoriales complejos de dimensión finita;
  - *morfismos*: mapeos (transformaciones) lineales.

En esta construcción, a cada función lineal $\bar{\phi} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos, le corresponde un vector $\phi \in \mathcal{H}$ tal que $\bar{\phi} = \langle\phi|\cdot\rangle$. Tenemos también un *espacio conjugado* de Hilbert $\bar{\mathcal{H}}$ con el que se cumple lo siguiente para la multiplicación por escalares y el producto interno:

$$\alpha \cdot_{\bar{\mathcal{H}}} \phi = \bar{\alpha} \cdot_{\mathcal{H}} \phi \qquad\qquad \langle\phi|\psi\rangle_{\bar{\mathcal{H}}} = \langle\psi|\phi\rangle_{\mathcal{H}}$$

donde $\cdot$ representa la multiplicación. Un *estado* se representa como un subespacio unidimensional $\mathcal{A}$ de $\mathcal{H}$ por medio de un vector $\phi \in \mathcal{A}$ de norma unitaria.

El producto tensorial o functor tensor $\otimes$ que caracteriza a las categorías simétricas monoidales se introduce para expresar *sistemas compuestos* cuya forma general es

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \phi_i \otimes \psi_i$$

lo que a su vez permite capturar sistemas enredados. La *adjunción* de un mapeo lineal $f : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ es un mapeo lineal $f^\dagger : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ tal que

$$\langle\phi|f(\psi)\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle f^\dagger(\phi)|\psi\rangle_{\mathcal{H}_1}$$

para todo $\phi \in \mathcal{H}_2$ y $\psi \in \mathcal{H}_1$. Una *transformación unitaria* es un isomorfismo lineal $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que $U^{-1} = U^\dagger : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$. Un *operador autoadjunto* es una transformación lineal $M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $M = M^\dagger$; estas representan las *mediciones* que podemos realizar a un sistema. Además, definimos $f^\dagger = (f^*)_* = (f_*)^*$ donde, en términos de matrices, $()^*$ es *transpuesto*, $()_*$ es *complejo conjugado* y la adjunción es el *conjugado transpuesto*.

La categoría **FdHilb** puede ser entonces descrita como una *categoría daga*.

Definición 4.6. Una *categoría daga* es una categoría **C** equipada con un functor $\dagger$ tal que

$$\mathbb{1}^\dagger = \mathbb{1} \qquad\qquad (g \circ f)^\dagger = f^\dagger \circ g^\dagger \qquad\qquad f^{\dagger\dagger} = f$$

Definición 4.7. Una *categoría simétrica monoidal daga* $\langle \mathbf{C}, \otimes, \mathbb{1}, \lambda, \rho, \alpha, \sigma, \dagger \rangle$ combina la estructura de una categoría daga y una categoría simétrica monoidal y requiere

$$(f \otimes g)^\dagger = f^\dagger \otimes g^\dagger$$

De esta forma, podemos interpretar la notación de Dirac fácilmente. Un *ket* es una flecha

$$\phi : \mathbb{1} \to A$$

que podemos escribir como $|\phi\rangle$ y corresponde a un *estado* de un sistema tipo A. El correspondiente *bra* es una flecha

$$\phi^\dagger : A \to \mathbb{1}$$

que podemos escribir como $\langle \phi|$ y que podemos pensar como un *coestado*. Así, dado dos estados $\phi, \psi : \mathbb{1} \to A$ definimos su *producto interno* $\langle \psi|\phi\rangle$ como la flecha

$$\psi^\dagger \circ \phi : \mathbb{1} \to \mathbb{1}$$

Adicionalmente, el *proyector* sobre un objeto A es una flecha $P : A \to A$ tal que $P \circ P = P$ y $P = P^\dagger$, de forma que, para un estado normalizado $\phi : \mathbb{1} \to A$, el *ket-bra*

$$|\phi\rangle\langle\phi| = \phi \circ \phi^\dagger : A \to A$$

es un proyector. A partir de esto (y otros detalles sobre la descomposición espectral por medio de biproductos) tenemos la *regla de Born*; para una preparación $\phi : \mathbb{1} \to A$ y una medición $\langle P_i \rangle_{i=1}^{i=n} : A \to n \cdot A$ definimos los escalares

$$Prob(P_i, \phi) := \langle \phi|P_i|\phi\rangle = \phi^\dagger \circ P_i \circ \phi$$

de donde se sigue que

$$Prob(P_i, \phi) = (Prob(P_i, \phi))^\dagger \qquad\qquad \sum_{i=1}^{i=n} Prob(P_i, \phi) = 1$$

de forma que el escalar $Prob(P_j, \phi)$ se interpreta como "la probabilidad de obtener el j-ésimo resultado de la medición $\langle P_i \rangle_{i=1}^{i=n}$ sobre el estado ϕ".

Si bien estos son los aspectos directamente relacionados a la física en la mecánica cuántica categorista de Abramsky y Coecke, consideraremos con mayor detenimiento los detalles lógicos de su propuesta. Las categorías simétricas monoidales, independientemente de lo que pueda hacerse con respecto a la mecánica cuántica, tienen una lógica interna de tipo lineal visto desde el punto de vista de la lógica categorista, como mostraremos en lo que sigue. Abramsky y Coecke defienden que los teoremas de No Clonación y No

Eliminación están incluidos en la estructura lógica de la categoría con la que están trabajando y mostraremos que esto se corresponde a la invalidez de las reglas estructurales de Contracción y Debilitamiento.

4.1.4 Lógica lineal en CSMC's

Si interpretamos los morfismos de **C** como secuentes entre *conjuntos* (que no multiconjuntos) de fórmulas de un lenguaje formal L, **C** tiene un cálculo de secuentes que cumple las siguientes reglas estructurales:

Secuentes	Morfismos
$\dfrac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}(EL)$	$\dfrac{f : \Gamma \times A \times B \times \Delta \to C}{f \circ (id_\Gamma \times \sigma_{A,B} \times id_\Delta) : \Gamma \times B \times A \times \Delta \to C}$
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Pi}(ER)$	$\dfrac{f : \Gamma \to \Delta \times A \times B \times \Pi}{f \circ (id_\Delta \times \sigma_{A,B} \times id_\Pi) : \Gamma \to \Delta \times B \times A \times \Pi}$
$\dfrac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}(CL)$	$\dfrac{f : \Gamma \times A \times A \to B}{f \circ (id_\Gamma \times \Delta_A) : \Gamma \times A \to B}$
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}(CR)$	$\dfrac{f : \Gamma \to \Delta \times A \times A}{f \circ (id_\Delta \times \Delta_A^{-1}) : \Gamma \to \Delta \times A}$
$\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}(WL)$	$\dfrac{f : \Gamma \to B}{f \circ \pi_1 : \Gamma \times A \to B}$
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}(WR)$	$\dfrac{f : \Gamma \to \Delta}{f \circ \lambda_\Delta^{-1} \circ (id_\Delta \times !_A^{-1}) : \Gamma \to \Delta \times A}$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad A, \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}(Cut)$	$\dfrac{f : \Gamma \to A \quad g : A \times \Delta \to B}{g \circ (f \times id_\Delta) : \Gamma \times \Delta \to B}$

y, por supuesto, el axioma de identidad

$$\frac{}{A \vdash A}(ID) \qquad\qquad \frac{}{id_A : A \to A}$$

para toda A.

Aunque equipar a las categorías cerradas cartesianas (bicompletas) con un clasificador de subobjetos nos lleva a los topos elementales —que cuentan con una lógica interna de tipo intuicionista y que puede extenderse a una lógica booleana o clásica si se cumplen ciertas condiciones adicionales (Goldblatt 1984, pp. 156-62)—, es notable que encontramos un manejo más sutil de la lógica en las categorías simétricas monoidales cerradas porque el tensor $\otimes$ puede o no tener diagonales y proyecciones, a diferencia del producto categorista $\times$ (que siempre las tiene), y porque la unidad $\mathbb{1}$ puede o no comportarse como el objeto terminal 1 (e incluso, en caso de comportarse como terminal, hay que considerar si hay garantía de que $!_A : A \to 1$ tiene siempre un inverso o no, pues si lo hay para cualquier A entonces no hay objetos vacíos o sin lo que en teoría de categorías se llama "elementos generalizados") lo que impacta en la validez de ciertas reglas estructurales del cálculo de secuentes tipo Gentzen, pues:

- Una categoría monoidal sin el isomorfismo natural $\sigma_{A,B}$ de simetría, tendrá un cálculo de secuentes donde no se cumple Intercambio en ninguna de sus direcciones.
- Una categoría monoidal en la que $\otimes$ no tiene diagonales $\Delta_A : A \to A \otimes A$ para todo objeto A de $\mathbf{C}$, tendrá un cálculo de secuentes que no cumple Contracción en ninguna de sus direcciones.
- Una categoría simétrica monoidal en la que $\otimes$ no tiene proyecciones $\pi_1 : A \otimes B \to A$ y $\pi_2 : A \otimes B \to B$ para cualesquiera objetos A, B de $\mathbf{C}$, tendrá un cálculo de secuentes donde no se cumple Debilitamiento a la izquierda; y si $!_A^{-1} : \mathbb{1} \to A$ no existe para toda A (i.e. si hay un A que no tiene elementos generalizados) entonces no se cumple Debilitamiento a la derecha (pues añadimos el secuente vacío).
- Finalmente, para que falle Corte tendrían que fallar las condiciones sobre la composición $\circ$ de morfismos y la identidad $id_A : A \to A$, lo que haría que $\mathbf{C}$ deje de ser una categoría.

A continuación desarrollaremos brevemente el caso de la *lógica lineal*, donde fallan Contracción y Debilitamiento en ambas direcciones; más específicamente:

> Linear logic is a refinement of classical and intuitionistic logic. Instead of emphasizing truth, as in classical logic, or proof, as in intuitionistic logic, linear logic emphasizes the role of formulas as resources. To achieve this focus, linear logic does not allow the usual structural rules of contraction and weakening to apply to all formulas but only those formulas marked with certain modals (Di Cosmo y Miller 2019).

Sea **C** una CSMC cuyo tensor $\otimes$ no cuenta con proyecciones ni con diagonales. La interpretación de un secuente linear

$$A_1, \ldots, A_n \vdash A$$

que contiene n apariciones de la fórmula A es un **C**-morfismo

$$f : A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \to A$$

donde las comas de los secuentes pasan como tensores. En la lógica lineal, las letras griegas mayúsculas Γ, Δ, etc. en los secuentes no se interpretan como conjuntos sino como *multiconjuntos* posiblemente vacíos de fórmulas A, B, etc. de un lenguaje formal L. Mientras que en teoría de conjuntos estándar se puede eliminar elementos duplicados en un conjunto, e.g. $\{x, x\} = \{x\}$ por el axioma del conjunto par y por el axioma de extensionalidad en ZF, en teoría de multiconjuntos $\{x, x\} \neq \{x\}$ pues cada aparición del elemento x cuenta en un multiconjunto (también llamado *bolsa* o *lista*).[2]

Esta diferencia es crucial para que la lógica lineal sea sensible a los recursos informáticos, pues bajo esta interpretación de Γ, Δ, etc. vemos que Contracción falla. Por otro lado, algo en lo que coinciden la lógica lineal y la lógica relevante es que Debilitamiento debe fallar también, pues para ninguna de estas lógicas tiene sentido introducir recursos informáticos no dados. Sin embargo, para ambas lógicas, las reglas de Intercambio y Corte se cumplen gracias al isomorfismo natural $\sigma_{A,B}$ y gracias a las estructuras categoristas básicas de la composición y la identidad, respectivamente.

Por último, la lógica lineal tiene tres clases de conectivas.

Conectivas	Aditivas	Multiplicativas	Exponenciales
0-arias	$\top, \bot$	$\mathbf{1}, \mathbf{0}$	ninguna
1-arias	$\cdot^{\bot}$	$\cdot^{\bot}$	!, ?
2-arias	$\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$	$\boxtimes$, $⅋$, $\multimap$	ninguna

En primer lugar, tiene tres conectivas *multiplicativas*: la conjunción multiplicativa $\boxtimes$, la disyunción multiplicativa $⅋$ y el condicional $\multimap$, cuyas reglas operacionales son como sigue:

[2] Véase (Hickman 1980) para la exposición tradicional de este concepto y (Monro 1987) para el tratamiento categorista.

Secuentes	Morfismos
$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \boxtimes B \vdash C}(\boxtimes L)$	$\dfrac{f : (\Gamma \otimes A) \otimes B \to C}{f \circ \alpha_{A,B,C} : \Gamma \otimes (A \boxtimes B) \to C}$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \boxtimes B}(\boxtimes R)$	$\dfrac{f : \Gamma \to A \quad g : \Delta \to B}{f \otimes g : \Gamma \otimes \Delta \to A \boxtimes B}$
$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Theta, B \vdash \Psi}{\Gamma, \Theta, A \parr B \vdash \Delta, \Psi}(\parr L)$	$\dfrac{f : \Gamma \otimes A \to \Delta \quad g : \Theta \otimes B \to \Psi}{id_\Gamma \otimes id_\Theta \otimes (id_A + id_B) \circ (f \otimes g)^{-1} : \Gamma \otimes \Theta \otimes A \parr B \to \Delta \otimes \Psi}$
$\dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \parr B, \Delta}(\parr R)$	$\dfrac{f : \Gamma \to A \otimes B \otimes \Delta}{(id_A + id_B) \otimes id_\Delta \circ f : \Gamma \to A \parr B \otimes \Delta}$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \multimap B, \Delta \vdash C}(\multimap L)$	$\dfrac{f : \Gamma \to A \quad g : B \otimes \Delta \to C}{h : \Gamma \otimes (A \multimap B) \otimes \Delta \to C}$
$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}(\multimap R)$	$\dfrac{f : \Gamma \otimes A \to B}{\hat{f} : \Gamma \to (A \multimap B)}$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \multimap B \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B}(MMP)$	$\dfrac{f : \Gamma \to (A \multimap B) \quad g : \Delta \to A}{ev_{A,B} \circ (f \otimes g) : \Gamma \otimes \Delta \to B}$

donde (MMP) quiere decir *Modus Ponens multiplicativo* y $h = ev_{B,C} \circ \sigma_{B,B \multimap C} \circ id_B \otimes \widehat{g \circ \sigma_{B,A}} \circ ev_{A,B} \otimes id_\Delta \circ \sigma_{A,A \multimap B} \otimes id_\Delta \circ f \otimes id_{A \multimap B} \otimes id_\Delta$ en la regla de morfismos correspondiente a $(\multimap L)$.

En segundo lugar, la lógica lineal tiene dos conectivas *aditivas*: la conjunción extensional estándar $\wedge$ y la disyunción extensional estándar $\vee$ (aunque usualmente denotada por $\oplus$ en la literatura); sus reglas operacionales son:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}(\wedge L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}(\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}(\vee L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}(\vee R)$$

En este grupo (o en el multiplicativo, es igual) podemos incluir a la negación $\cdot^{\perp}$:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, A^{\perp} \vdash \Delta}(\cdot^{\perp} L) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A^{\perp}, \Delta}(\cdot^{\perp} R)$$

Y en tercer lugar, la lógica lineal tiene dos *conectivas exponenciales* que funcionan como operadores modales: por un lado !, llamado *¡ciertamente!* (*of course!*), y por el otro ?, llamado *¿por qué no?* (*why not?*), que permiten aplicaciones controladas de las reglas de Debilitamiento y Contracción; sus reglas operacionales son:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta}(!W) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, ?A \vdash \Delta}(?W)$$

$$\frac{\Gamma, !A, !A \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta}(!C) \quad \frac{\Gamma \vdash ?A, ?A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash ?A \vdash \Delta}(?C)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta}(!L) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash ?A, \Delta}(?R)$$

$$\frac{!\Gamma, \vdash A, ?\Delta}{!\Gamma \vdash !A, ?\Delta}(!R) \quad \frac{!\Gamma, A \vdash ?\Delta}{!\Gamma, ?A \vdash ?\Delta}(?L)$$

En esta lógica, la implicación lineal es multiplicativa y se define como

$$A \multimap B \stackrel{df}{=} A^{\perp} \parr B$$

mientras que la implicación intuicionista es aditiva y se define como

$$A \Rightarrow B \stackrel{df}{=} !A \multimap B$$

y las conectivas 0-arias cumplen

$$!\top \equiv \mathbf{1} \qquad ?\mathbf{0} \equiv \bot$$

donde $A \equiv B \stackrel{df}{=} (A \multimap B) \wedge (B \multimap A)$. Además, los operadores exponenciales permiten las siguientes equivalencias

$$!(A \wedge B) \equiv (!A \boxtimes !B) \qquad ?(A \vee B) \equiv (?A \parr ?B)$$

4.1.5 Objeción a MCC

MCC es esencialmente una presentación categorista de las matemáticas que hay detrás de la *teoría de la información cuántica* y constituye una **interpretación computacional de la mecánica cuántica** (o simplemente “computación cuántica”). Esta interpretación piensa los estados como recursos informáticos (*qubits*) y, por tanto, la lógica lineal (que es una lógica subestructural) es adecuada para este contexto. Sin embargo, hay que notar lo siguiente:

- Asumiendo que la ortológica y la lógica cuántica de Birkhoff y Von Neumann son las lógicas adecuadas para las proposiciones (que forman un retículo ortomodular) de la mecánica cuántica estándar (la interpretación de Copenhague), y que la lógica lineal es la lógica adecuada para la intepretación computacional de la mecánica cuántica, entonces queda claro que *existen algunas interpretaciones de la mecánica cuántica que tienen diferentes lógicas no clásicas regulando su descripción de los fenómenos físicos.*

- Sin embargo la interpretación computacional es una entre varias; si bien es cierto que mientras que esta logra utilizar la teoría de categorías para capturar una versión de la mecánica cuántica, los teóricos de los topos cuánticos pretendían dar una nueva interpretación “más realista” a través de las categorías, lo que ya hemos criticado y que pone a MCC como un mejor enfoque lógico-categorista para la física cuántica que el de los topos cuánticos.

- Pero, ¿por qué deberíamos aceptar que la interpretación computacional de la mecánica cuántica es correcta? Alquien podría objetar que la teoría de la información cuántica es una aplicación de las matemáticas más generales como el álgebra lineal y otras que se comparten con otras interpretaciones de la mecánica cuántica que podrían pensarse como competidores perfectamente válidos (e.g. la interpretación de muchos mundos).

- Lo anterior puede resumirse en la siguiente **objeción**: la matemática de los *qubits* no agota la física de los sistemas cuánticos porque no nos dice nada acerca del colapso de la función de onda ni de la no localidad —problemas de gran importancia para una interpretación de la mecánica cuántica— que asume en protocolos de teletransportación cuántica, por ejemplo; y aún cuando MCC estuviera rescatando correctamente buena parte de la mecánica cuántica estándar parece que aceptar que la interpretación computacional de la mecánica cuántica es correcta (y completa) significa aceptar que la mecánica cuántica se reduce a una realización/aplicación muy específica que parecería natural que fuese tan sólo parte de una teoría cuántica más general.

En vista de que es posible dar diversas interpretaciones a la mecánica cuántica utilizando diferentes lógicas no clásicas, procederemos en la siguiente sección con la investigación del programa *ultramodal y relevante* de Richard Routley, que sigue de cerca la interpretación de Copenhague pero utiliza lógica relevante en su intento por analizar las proposiciones de la mecánica cuántica.

4.2 Relevancia lógica y ultramodalidad

> *Many of the important applications of improved logical theory lie in philosophy of science. That area remains (like economics) a major refuge for positivism, a positivism attached to classical logic. It is not going too far to claim that crude empiricists and unreconstructed or only slightly reconstructed positivists are still enjoying field days in philosophy of science. These ideological luddities have resisted new logical technology, setting their fields up for technological invasion and take-over. (New science is one thing, and to be welcomed, new logic and logical methodology quite another, and to be avoided and rubbished.)*
>
> Richard Routley/Sylvan (Hyde y Priest 2017, p. 7)

En la introducción a la primera sección de este capítulo observamos algunas características de las lógicas relevantes, tales como que son lógicas subestructurales porque rechazan Debilitamiento (en ambas direcciones) con el fin de bloquear o invalidar las paradojas de la implicación. Hay diversas maneras de estudiar la lógica de la relevancia de acuerdo con la semántica que se maneje para la negación (Restall y Berto 2019); se ha hecho bajo el *plan americano* —que sugiere un tratamiento multivaludado (verdadero, falso, ambos y ninguno) para la negación—; nosotros lo haremos bajo una vertiente particular del *plan australiano* —que es bivaluado (verdadero y falso) y utiliza conectivas *intensionales*, i.e. que consideran diversas situaciones deductivas o mundos para evaluarse, además de valores de verdad (que es lo único que considera el enfoque *extensional*).

El filósofo, ambientalista y lógico neozelandés Richard Sylvan (nacido Routley), quizá uno de los pensadores más prolíficos de Australasia en el siglo XX, desarrolló un ambicioso programa de investigación en lo que él llamó *lógica universal* (1980). El ensayo *Ultralogic as Universal?*[3] sugiere que es posible dar solución (o disolución, tratándose de argumentos paradójicos) a diversos problemas de la ciencia y la filosofía por medio de una lógica *relevante* y *ultramodal* (que él llama *ultralógica* o lógica universal) y ahí se esbozan algunas líneas de investigación en direcciones tan diferentes como la teoría de conjuntos, la aritmética, la teoría de la información, la teoría de la probabilidad y la teoría cuántica.

Como uno de los principales contribuyentes en los estudios fundacionales sobre lógicas relevantes y lógicas paraconsistentes, argumentó en contra de la idea dominante de que la lógica subyacente al pensamiento filosófico y científico es la lógica clásica (como lo sugiere la tesis **BOOLE** del Neorrealismo de Andreas Döring). Las lógicas relevantes y en particular la ultralógica son refinamientos de la lógica clásica que nos permiten evitar las paradojas de la implicación validadas en la lógica clásica (y sus extensiones modales)

[3]Recientemente reeditado por Zack Weber (2019).

y por ello Routley sugirió, entre otras cosas, que más bien deberíamos emplear lógicas relevantes para analizar de mejor forma los enunciados y principios condicionales y así librarnos de argumentos paradójicos en ciencia y filosofía.

En (Routley 1980, §13) se discute la posibilidad de aplicar la ultralógica en teoría cuántica:

> There is a basis for claiming that the bad effects of classical logic extend into science itself, at least in the case of quantum physics, and perhaps in systematic taxonomy and rigid body dynamics. An outcome in the case of quantum physics —where proposals for quantum logics date back to the decade of inauguration of quantum theory— is that many of those who have new-look logics have suggested that their sort of logic will work for quantum theory. (Hence the labyrinth of quantum logics that van Fraassen has observed.) Ultralogic may as well be on the act. There are several approaches that an ultramodalist may take with respect to alleged logical anomalies generated by quantum phenomena, in particular, a *soft* line which weakens the sentential logic by dropping or qualifying distribution, $A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, in line with the initial quantum logics, and a *hard* line which leaves the basic sentential logic unchanged (p. 955).

Routley piensa que la *línea suave*, que consiste en debilitar o abandonar el principio de Distribución en la lógica subyacente (generalmente la ortológica) a las lógicas cuánticas, no es prometedora: las ortológicas relevantes[4] no admiten Silogismo Disyuntivo (también llamado Regla Gamma): $(A \wedge ({\sim} A \vee B)) \rightarrow B$ y por tanto son incapaces de recuperar sistemas como la lógica clásica y sus extensiones modales; además (y de forma más importante) las soluciones lógicas que cualifican o dejar de incluir el principio de Distribución son contrarias a los objetivos de universalidad de la ultralógica, que considera esta regla dentro de su sistema.[5]

En (Brady y Routley et al. 1982) se han esbozado lógicas adecuadas para la *línea suave*, mismas que exploramos en la sección 4.2.8. de este trabajo; en la sección 4.2.9 ofrecemos el sistema **DQL** como una extensión de las lógicas de la línea suave que incluye un condicional relevante para dar una solución simple al viejo problema sobre la formulación adecuada para una conectiva condicional en las lógicas cuánticas tradicionalmente formuladas (i.e. *à la* Birkhoff y Von Neumann).

Por otro lado, Routley argumenta que la *línea dura* (usar lógica relevante y ultramodal, como el sistema **DK**) ofrece un mejor prospecto para evadir paradojas cuánticas. Al final de (Routley 1980, §13) encontramos, a manera de ejemplo de la aplicabilidad de la ultralógica, un análisis de los argumentos de (Finkelstein 1972) contra el uso de lógica clásica en argumentos de la teoría cuántica (particularmente, contra el uso del principio de Distribución); y años más adelante, en sus ensayos tardíos (Hyde y Priest 2017, cap. 3), Sylvan sugiere que las lógicas relevantes también pueden aplicarse para examinar y

[4]Ver el Apéndice 2 para la formulación estándar de la ortológica y la sección 4.2.8 de este trabajo para la versión relevante.

[5]Ver la secciones 4.2.3, 4.2.6 y 4.2.9 de este trabajo.

bloquear (i) el teorema de John Stewart Bell sobre la imposibilidad de tener una teoría cuántica local y de variables ocultas que reproduzca las predicciones de la teoría estándar; y (ii) el teorema Kochen-Specker sobre la imposibilidad de tener una teoría cuántica de variables ocultas que asigne de manera funcional un valor a todos los observables de un sistema[6]. Ambos enfoques (el temprano y el tardío) hacia la filosofía de la física, como veremos, discuten la dependencia de *principios de expansión* al hablar de anomalías o paradojas cuánticas.

No obstante, lo que hace dura a la línea que Routley considera prometedora, es que para seguirla cabalmente habría que rediseñar las teorías matemáticas del ánalisis y la probabilidad bajo principios relevantistas (i.e. habría que abandonar la base clásica de la teoría de conjuntos y la aritmética, como se hace en *Ultralogic as Universal?*, y desarrollar las teorías matemáticas relevantistas lo suficiente como para capturar estructuras sofisticadas como los espacios de Hilbert), lo cual sigue siendo una línea insuficientemente explorada hoy en día.[7]

En la sección 4.2.10 de este trabajo ofrecemos algunos desarrollos en torno a la teoría relevantista de la probabilidad bajo el programa de la línea dura de acuerdo con (Routley 1980, §12). Finalmente, en la sección 4.2.11 ofrecemos un análisis sobre las críticas al principio de Distribución (basadas en principios de la teoría cuántica) y exponemos algunos avances en torno a las críticas relevantistas al teorema de Bell y el teorema Kochen-Specker. Las secciones 4.2.1-7 son una exposición sistemática e introductoria a la lógica relevante y otros conceptos que requeriremos para explorar la viabilidad de las líneas suave y dura, y se basan en (Brady y Routley et al. 1982, cap. 2).

4.2.1 ML: lógica principal

Sea L un lenguaje formal con una cantidad denumerable de fórmulas bien formadas $A, B, C, \ldots$. Sean $\Delta, \Gamma, \ldots$ conjuntos no vacíos y contables de fórmulas bien formadas de L. Sea $\vdash_L$ una relación de derivabilidad sobre L. La lógica más rudimentaria basada en L es la *lógica principal* **ML** y tiene como única regla de formación lo siguiente:

- Si A es una fórmula bien formada de L, entonces $\vdash_L A$ y $\Delta \vdash_L A$ son fórmulas bien formadas de **ML**.

En lo sucesivo dejaremos de usar el subíndice en $\vdash_L$. El único esquema de axioma en **ML** es

[6]Una manera de leer este teorema es como que la mecánica cuántica es contextual, en el sentido de que si $[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{C}] = 0$ (el operador $\hat{A}$ conmuta con el operador $\hat{B}$ y también con el operador $\hat{C}$) y $[\hat{B}, \hat{C}] \neq 0$ (el operador $\hat{B}$ no conmuta con el operador $\hat{C}$), entonces el resultado de una medición de $\hat{A}$ no puede ser independiente de si únicamente se mide $\hat{A}$, o si se mide $\hat{A}$ en conjunto con $\hat{B}$, o si se mide $\hat{A}$ en conjunto con $\hat{C}$.

[7]Ver (Meyer 1976), (Meyer y Mortensen 1984) y (Routley 1980, §9) para el caso de la aritmética, y (Weber 2010) y (Routley 1980, §6 y 8) para el caso de la teoría de conjuntos.

(ML_1) *Identidad*: $A \vdash A$

Sus reglas son:

(Cut) *Corte/Transitividad*: de $\Delta \vdash B$ y $B, \Gamma \vdash C$ se deriva $\Delta, \Gamma \vdash C$

(Aug) *Aumento*: de $\Delta \vdash B$ y $\Delta \subseteq \Gamma$ se deriva $\Gamma \vdash B$

(MP) *Modus Ponens*: de $\vdash B$ y $B \vdash C$ se deriva $\vdash C$

Un **ML**-modelo es la estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbf{0}, K, I \rangle$ donde K es un conjunto de mundos, $\mathbf{0}$ es el conjunto de mundos normales/regulares[8] y $\mathbf{0}$ es un subconjunto de K, e I es una función bivalente de interpretación $I : L \times K \to \{0, 1\}$ que asigna únicamente un valor en $\{0, 1\}$ a cada fórmula bien formada A de L en un mundo o situación $a \in K$.

$\Delta \vdash A$ es *verdadero en* $\mathcal{M}$ sii siempre que $I(B, a) = 1$, para toda $B \in \Delta$, es el caso que $I(A, a) = 1$ para toda $a \in K$. Por otro lado, $\vdash A$ sii $I(A, a) = 1$ para toda $a \in \mathbf{0}$. Por último, $\Delta \vdash A$ es *válido* sii $\Delta \vdash A$ en todo **ML**-modelo.

4.2.2 SLL: lógica de semi-retículos

La *lógica de semi-retículos* **SLL** resulta de añadir a **ML** los siguientes postulados o esquemas de axioma para la conectiva de la *conjunción*[9]:

(SLL_1) *Simplificación*: $A \wedge B \vdash A$ y $A \wedge B \vdash B$

(SLL_2) *Adjunción/$\wedge$-Composición*: $A, B \vdash A \wedge B$

Un **SLL**-modelo es un **ML**-modelo tal que

$$I(A \wedge B, a) = 1 \, \text{sii} \, I(A, a) = 1 \, \text{y} \, I(B, a) = 1$$

para toda $a \in K$ y para cualesquiera fórmulas bien formadas A, B.

4.2.3 DLL: lógica de retículos distributivos

Para obtener una *lógica de retículos distributivos* **DLL**, tomemos **SLL** con (SLL_1), (SLL_2), ($SLL_1\prime$) y ($SLL_2\prime$). En **DLL** vale

[8]Son mundos *normales o regulares* aquellos mundos $a \in K$ tales que en a se cumplen las leyes de la lógica clásica.

[9]De forma dual, también se obtiene una lógica de semi-retículos si añadimos a **ML** los postulados correspondientes a la *disyunción*:

($SLL_1\prime$) *Adición*: $A \vdash A \vee B$ y $B \vdash A \vee B$

($SLL_2\prime$) $\vee$-*Composición*: $\Gamma, A \vdash C$; $\Gamma, B \vdash C \Rightarrow \Gamma, A \vee B \vdash C$

Sin embargo, la ruta que establece Routley sí tiene preferencia por introducir primero la conjunción a **ML** y luego la negación para definir la disyunción en términos de éstas.

(Dist) *Distribución*: $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$

Demostración: por un lado, $A,\ B \vdash (A \wedge B) \vee C$ por Adjunción, Adición y Transitividad; y por otro lado, $C \vdash (A \wedge B) \vee C$ por Adición. Por Aumento, $A, C \vdash (A \wedge B) \vee C$ y por $\vee$-Composición $A,\ B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C$ de forma que por el teorema derivable $X, Y \vdash Z \to X \wedge Y \vdash Z$, obtenemos que $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$.

Un **DLL**-modelo canónico es un **SLL**-modelo $\mathcal{M}_c = \langle K_c, I\rangle$ donde K_c es la clase de todas las **DLL**-teorías prima[10] tal que

$$I(A \vee B, a) = 1 \,\text{sii}\, I(A, a) = 1 \,\text{ó}\, I(B, a) = 1$$

4.2.4 BL: lógica de retículos booleanos o lógica clásica

La lógica de la relevancia y la lógica clásica tienen tratamientos distintos para la negación y es ahí donde parten sus caminos. La *lógica booleana* o clásica **BL** se obtiene de añadir a **DLL** los siguientes postulados para la *negación*:

(BL_1) *Doble Negación*: $A \vdash \sim\sim A$ y $\sim\sim A \vdash A$

(BL_2) † *Antilogismo*: $\Gamma,\ A \vdash B \Rightarrow \Gamma,\ \sim B \vdash \sim A$

De hecho, **BL** es una lógica *irrelevante* (no relevante), ya que valida la paradoja de la implicación llamada *Explosión*:

$$A,\ \sim A \vdash B$$

Demostración: por Adjunción, Simplificación y Transitividad, $A, \sim B \vdash A$. Y por Antilogismo y Doble Negación, $A,\ \sim A \vdash B$.[11]

A su vez, Explosión valida

(DS) † *Silogismo Disyuntivo*: $A, \sim A \vee B \vdash B$

un principio rechazado por las lógicas de la relevancia.[12] *Demostración*: si $A, \sim A \vee B \vdash A$ entonces, (i) $\sim A \vdash A \wedge \sim A$ por Adjunción y $\sim A \vdash B$ por Explosión y Transitividad; por otro lado, (ii) $B \vdash B$ por Identidad. Por lo tanto $A, \sim A \vee B \vdash B$ por $\vee$-Composición.

[10]Una **DLL**-teoría c es una clase de fórmula bien formadas de **DLL** cerrada bajo $\vdash$ y Adjunción, i.e. si $A, B \in c$ entonces $(A \wedge B) \in c$. Una **DLL**-teoría *prima* c es una **DLL**-teoría tal que si $(A \vee B) \in c$, entonces $A \in c$ ó $B \in c$.

[11]Marcamos este y otros principios con el signo † para indicar que se trata de un principio irrelevante, i.e. indeseable en una lógica relevante.

[12]El rechazo a Silogismo Disyuntivo es la principal estrategia de las lógicas relevantes para bloquear el principio de Explosión, una de las paradojas de la implicación; en consecuencia, toda lógica de la relevancia será paraconsistente. La característica falla de (DS) en las lógicas relevantes se da porque hay situaciones (información) inconsistente (mas no trivializante) que sirven como contra-modelo para invalidar (DS), razón por la cual este principio sólo es válido en situaciones completas y consistentes, y *a fortiori* en la lógica clásica.

Principios de expansión

Si tomamos $A \triangleq B$ como una fórmula bien formada, leyendo $\triangleq$ como interderivabilidad (i.e. $A \vdash B$ y $B \vdash A$), podemos presentar la formalización ecuacional del álgebra booleana **BA** (Brady y Routley et al. 1982, pp.118-9):

- Esquemas de axioma:

† (B1) $A \wedge \sim(B \wedge \sim B) \triangleq A$

† (B2) $A \wedge \sim A \triangleq B \wedge \sim B$

(B3) $A \wedge (B \wedge C) \triangleq (A \wedge B) \wedge C$

(B4) $A \wedge (B \vee C) \triangleq (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(B5) $A \triangleq \sim\sim A$

- Reglas:

Transitividad: $A \triangleq B, C \triangleq B \Rightarrow A \triangleq C$

Factor: $A \triangleq B \Rightarrow (C \wedge A) \triangleq (B \wedge C)$

Contraposición: $A \triangleq B \Rightarrow \sim B \triangleq \sim A$

Resaltamos esta formulación porque nos permite detectar otro tipo de implicaciones irrelevantes en la lógica clásica. Gracias a que † (B2) no distingue el contenido de dos contradicciones arbitrarias, es posible definir un único elemento mínimo como $\bot \overset{df}{=} A \wedge \sim A$ y un único elemento máximo como $\top \overset{df}{=} \sim \bot$; entonces † (B1) toma la forma conocida $A \wedge \top \triangleq A$ y † (B2) $A \wedge \sim A \triangleq \bot$. Hemos marcado (B2) con † porque es un principio inaceptable para lógicas paraconsistentes y, *a fortiori*, para lógicas relevantes. Y hemos marcado (B1) con † porque este principio depende de implicaciones irrelevantes llamadas *principios de expansión* (y dualmente, de *principios de eliminación*). Diremos conforme a (Cano Jorge y Estrada-González 2020) que

Definición 4.8. $A \rightarrow B$ es un 0-*principio de expansión* sii (i) A es una sub-fórmula[13] propia de B y (ii) $A \leftrightarrows B$ es válido[14] en una lógica al menos tan fuerte como **S4** (clásica).

Definición 4.9. $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ es un 1-*principio de expansión* sii (i) cada A_i es una sub-fórmula propia de B y (ii) $A_1, \ldots, A_n \triangleq B$ es válido en una lógica al menos tan fuerte como **S4** (clásica).

[13]Esto quiere decir que A aparece en B pero no es B.

[14]En lógica modal, la implicación estricta $A \prec B$ se define como $\Box(A \supset B)$, i.e. "necesariamente, si A entonces B", donde $\supset$ es un condicional material. En consecuencia, la equivalencia estricta $A \leftrightarrows B$ se define como $(A \prec B) \wedge (B \prec A)$. La lógica modal **S4** es una extensión de la lógica clásica y se caracteriza por el axioma (**4**): $\Box A \supset \Box\Box A$ y por tener un marco transitivo, i.e. su relación R de accesibilidad entre mundos es transitiva.

Definición 4.10. "Si $A_1 \ldots, A_n \vdash B$ entonces $C_1, \ldots, C_m \vdash D$" es un 2-*principio de expansión* sii (i) cada A_i y cada C_j es una sub-fórmula propia de D y (ii) "$A_1 \ldots, A_n \vdash B$ si y sólo si $C_1, \ldots, C_m \vdash D$" es válido en una lógica al menos tan fuerte como **S4** (clásica).

Vemos que, en (B1), $A \vdash A \wedge \top$ es un 1-principio de expansión porque A es una sub-fórmula propia de $A \wedge \top$ y porque $\vdash_{\mathbf{S4}} A \strictiff A \wedge \top$[15]; también vemos que, en (B1), $A \wedge \top \vdash A$ es un 1-principio de eliminación[16] porque A es una sub-fórmula propia de $A \wedge \top$ y porque $\vdash_{\mathbf{S4}} A \strictiff A \wedge \top$. De los postulados y reglas de **BA** se sigue, además de Antilogismo, el principio $A \vee \sim A \triangleq \top$ con el cual es fácil ver en qué sentido se puede "expandir" el contenido: si A entonces $A \wedge \top$, es decir $A \wedge (B \vee \sim B)$ para cualquier B (relacionada o no con A de algún modo, de ahí la irrelevancia lógica).

Los principios de expansión y eliminación son importantes en el acercamiento ultramodal de Richard Routley hacia las paradojas de la teoría cuántica, donde *ultramodal* quiere decir que las expresiones necesariamente equivalentes entre sí no se tratan como lógicamente equivalentes. Como veremos más adelante, el 0-principio de expansión $A \rightarrow (A \wedge (\sim B \vee B))$ —que se sigue de la paradoja de la implicación $A \rightarrow (\sim B \vee B)$, llamada *Implosión*, y del principio de Identidad $A \rightarrow A$ por medio de Adjunción— es el verdadero culpable en los argumentos contra la validez de Distribución en lógica cuántica.

4.2.5 DML: lógica de retículos De Morgan

La *lógica de retículos De Morgan* **DML** se obtiene de añadir a **DLL** ambas direcciones de Doble Negación y, en lugar de Antilogismo, se añade

(DM$_1$) *Contraposición*: $A \vdash B \Rightarrow \sim B \vdash \sim A$

Observemos que la diferencia entre Antilogismo y Contraposición es que el parámetro Γ en Antilogismo puede ser no vacío y por tanto añadir contenido irrelevante.

A diferencia de **BL**, el análisis semántico de **DML** demanda enriquecer los **ML**-modelos para proporcionar semánticamente una regla apropiada para la negación. Un **DML**-modelo es una estructura $\mathcal{M} = \langle K, *, I \rangle$, donde K e I son como antes[17] y $*$ es una operación involutiva sobre K, i.e. $a^* \in K$ sii $a \in K$ y $a^{**} = a$, llamada *reversal* o *estrella de Routley* que nos permite definir la regla semántica para la *negación normal*:

(NN) *Negación normal*: $I(\sim A, a) = 1$ sii $I(A, a^*) \neq 1$

[15] *Demostración*: si $I(A \strictif (A \wedge \top), a) \neq 1$ entonces existe b tal que Rab y $I(A \supset (A \wedge \top), b) \neq 1$, por lo que $I(A, b) = 1$ y $I(A \wedge \top, b) \neq 1$, i.e. $I(A \wedge \sim (B \wedge \sim B), b) \neq 1$ y como $I(A, b) = 1$ entonces $I(\sim (B \vee \sim B), b) \neq 1$ y $I(B \wedge \sim B, b) = 1$, lo cual es imposible en **S4**; por otro lado, si $I((A \wedge \top) \strictif A, a) \neq 1$ entonces existe b tal que Rab y $I((A \wedge \top) \supset A, b) \neq 1$, por lo que $I(A \wedge \top, b) = 1$ y $I(A, b) \neq 1$, pero si $I(A \wedge \top, b) = 1$ entonces $I(A, b) = 1$, una contradicción.

[16] Los principios de eliminación se definen de forma similar a como se definen los principios de expansión. Por ejemplo, $A \rightarrow B$ es un 0-*principio de eliminación* sii B es una sub-fórmula propia de A y (ii) $A \strictiff B$ es válido en una lógica al menos tan fuerte como **S4** (clásica).

[17] En el modelo estándar, K es un conjunto de dos mundos: $K = \{a, a^*\}$.

De esta definición se sigue que $\Delta \vdash A$ es un teorema de **BL** sii $\Delta \vdash A$ es verdadero en todo **DML**-modelo $\mathcal{M} = \langle K, *, I \rangle$ en el que $a^* = a$ para toda $a \in K$, pues entonces la regla de la negación normal colapsa en la regla *clásica de la negación*:

(CN) *Negación clásica*: $I(\sim A, a) = 1$ sii $I(A, a) \neq 1$

Siguiendo (Dunn 1993, p.332), podemos pensar en un mundo estrella a^* como una especie de gemelo de a tal que a^* afirma todo lo que a no niega.

De forma importante, para que $\Gamma \vdash B$ sea un teorema de **DML**, Γ y B deben compartir un parámetro proposicional, i.e. deben satisfacer al menos este Criterio de Relevancia[18] de Compartición de Contenido, que separa a **DML** de la lógica clásica **BL**. Dicho criterio hace que Antilogismo no sea una regla admisible[19] en **DML** y también cualifica la regla de Transitividad o Corte: $\Delta \vdash B\,; B, \Gamma \vdash C \Rightarrow \Delta, \Gamma \vdash C$ siempre y cuando C y $\Delta \cup \Gamma$ comparten un parámetro proposicional en la conclusión.

En **DML** valen (son derivables) las cuatro leyes de De Morgan utilizando (NN):

(DM_2) $\sim(A \wedge B) \vdash \sim A \vee \sim B$

(DM_3) $\sim A \vee \sim B \vdash \sim(A \wedge B)$

(DM_4) $\sim(A \vee B) \vdash \sim A \wedge \sim B$

(DM_5) $\sim A \wedge \sim B \vdash \sim(A \vee B)$

Esto es importante porque algunas negaciones no normales no satisfacen esto —e.g. la negación de la lógica intuicionista es no normal (en un sentido que explicamos en la siguiente sección) y no satisface (DM_2).

Finalmente, si añadimos la constante $\mathbf{t}$ a **DML**, añadiendo a los **DML**-modelos $\langle \mathbf{0}, K, *, I \rangle$ la condición $I(\mathbf{t}, a) = 1$ sii $a \in \mathbf{0}$, obtenemos **DMLt** —y la correspondiente noción de **DMLt**-modelo. Los **DMLt**-modelos *extendidos* (Brady y Routley et al. 1982, p.167) son estructuras $\langle \mathbf{0}, K, \leq, *, I \rangle$ donde $\leq$ es un orden reflexivo y transitivo sobre K que impone los siguientes requisitos:

(F*) si $a \leq b$ entonces $b^* \leq a^*$

(F**0**) si $a \leq b$ y $a \in \mathbf{0}$, entonces $b \in \mathbf{0}$

[18] Otros criterios de relevancia incluyen *uso efectivo en la prueba*, i.e. que las derivaciones relevantes válidas no contienen fórmulas que no son utilizadas en la derivación, y el *dediseratum de Ackermann*, i.e. que el estatus modal de las fórmulas en una implicación relevante siempre debe ser el mismo (e.g. bajo este criterio, $A \vdash (A \to A)$ es una implicación irrelevante porque la A a la izquierda de $\vdash$ puede ser una verdad contingente mientras que $A \to A$, del otro lado de $\vdash$, es una verdad necesaria para las lógicas con condicionales reflexivos).

[19] En efecto, no puede serlo, pues de Antilogismo también se sigue (DS). *Demostración*: la instancia de Adjunción $A, \sim B \vdash A \wedge \sim B$ implica por Antilogismo $A, \sim(A \wedge \sim B) \vdash \sim\sim B$ y, por definición de la disyunción y por Doble Negación, se sigue $A, \sim A \vee B \vdash B$. Además, es claro que la A a la izquierda de $\vdash$ no hizo ningún trabajo para derivar (DS), i.e. es contenido irrelevante.

(H) *Heredabilidad*: si $a \leq b$ y $I(A, a) = 1$ entonces $I(A, b) = 1$

En los **DMLt**-modelos extendidos, se puede modelar $\vdash A \vee \sim A$ si añadimos el requisito

(EM) si $a \in \mathbf{0}$ entonces $a^* \leq a$, para toda $a \in K$.

4.2.6 Modelos para la negación

Tomemos un sistema con una conjunción normal, i.e. un sistema que contenga **SLL**. Si añadimos una negación normal, obtendremos una disyunción normal a través de la definición $A \vee B \overset{df}{=} \sim(\sim A \wedge \sim B)$. *Demostración*:

$$\begin{aligned} I(A \vee B, a) = 1 \,\text{sii}\, & I(\sim(\sim A \wedge \sim B), a) = 1 \\ \text{sii}\, & I(\sim A \wedge \sim B, a^*) \neq 1 \\ \text{sii}\, & I(\sim A, a^*) \neq 1 \,\text{ó}\, I(\sim B, a^*) \neq 1 \\ \text{sii}\, & I(A, a) = 1 \,\text{ó}\, I(B, a) = 1 \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que una disyunción no normal implica una negación no normal. Esto, como veremos, es precisamente lo que ocurre en la formulación de la lógica cuántica de Birkhoff y Von Neumann, donde falla Distribución —i.e donde tenemos una disyunción no normal. Por otro lado, ninguna restricción posible para $*$ invalidará Distribución (Brady y Routley et al. 1982, p.121).

Si añadimos la negación normal a **SLL** obtendremos **DML** y los postulados de la negación normal serán:

- Doble negación *intuicionista*: $A \vdash \sim\sim A$ (si sólo se quiere esta dirección, en el modelo se tiene que debilitar la involución a la forma $a \leq a^{**}$)

- Doble negación *dialéctica*: $\sim\sim A \vdash A$ (si sólo se quiere esta dirección, en el modelo se tiene que debilitar la involución a la forma $a^{**} \leq a$)

- Contraposición: $A \vdash B \Rightarrow \sim B \vdash \sim A$ (si se quiere que contraposición falle, en el modelo se debilita la cerradura de $*$ sobre K: i.e. si $a \in K$ entonces $a^* \in K$)

- Distribución: $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$, que por definición de la disyunción es $A \wedge \sim(\sim B \wedge \sim C) \vdash \sim(\sim(A \wedge B) \wedge \sim C)$

Muchos sistemas que cuentan con el postulado de Contraposición (como la lógica intuicionista, la lógica mínima y la ortológica de Birkhoff y Von Neumann) se pueden capturar semánticamente con la siguiente regla para la negación no normal $\neg$, dependiendo de las restricciones sobre una relación binara de accesibilidad $R \subseteq K \times K$:

(WN) *Negación débil*: $I(\neg A, a) = 1$ sii, para toda $b \in K$ tal que Rab, $I(A, b) \neq 1$

La *lógica básica de la contraposición* **BCL** (Brady y Routley et al. 1982, p. 122) resulta de extender **SLL** al incluir específicamente la operación de negación débil (WN) y añadir únicamente el postulado de Contraposición. Diremos que un **BCL**-modelo es una estructura $\langle K, R, I\rangle$ donde K es un conjunto no vacío de mundos, R es una relación binaria sobre K, e I es una función de interpretación que satisface las reglas para la conjunción normal (como en **SLL**) y la negación débil (WN). Un **BCL**-modelo no impone restricciones sobre R, no obstante:

1. si R es reflexiva, vale (EFQ) † *Explosión*: $A \wedge \neg A \vdash B$:

   Si $I(A \wedge \neg A, a) = 1$ pero $I(B, a) \neq 1$ entonces $I(A, a) = 1 = I(\neg A, a)$. Por (WN), $I(A, b) \neq 1$ para cualquier b tal que Rab. Pero si R es reflexiva, Raa y por tanto $I(A, a) \neq 1$, contradiciendo $I(A, a) = 1$.

2. si R es simétrica, vale la doble negación intuicionista $A \vdash \neg\neg A$:

   Si $I(A, a) = 1$ pero $I(\neg\neg A, a) \neq 1$ entonces $I(\neg A, b) = 1$ para cualquier b tal que Rab. Pero si R es simétrica entonces Rba y por (WN) $I(A, a) \neq 1$, contradiciendo $I(A, a) = 1$.

3. y la doble negación dialéctica $\neg\neg A \vdash A$ vale si tenemos R-*cerradura* (para todo $Y \subseteq K$, si $a \in Y$ entonces, para alguna b, Rab y para toda c tal que Rbc, $c \in Y$):

   Si $I(\neg\neg A, a) = 1$ pero $I(A, a) \neq 1$ entonces $I(\neg A, b) \neq 1$ para toda b tal que Rab. Como $a \in \{b \in K \mid I(A, b) \neq 1)\}$ sii $I(A, a) \neq 1$ y $\{b \in K \mid I(A, b) \neq 1)\} \subseteq K$, entonces por R-cerradura, para toda c tal que Rbc, $c \in \{b \in K \mid I(A, b) \neq 1\}$; por tanto, $I(A, c) \neq 1$ y, por (WN), $I(\neg A, b) = 1$, contradiciendo $I(\neg A, b) \neq 1$.

Nótese que para validar Contraposición no hace falta restringir R: si $A \vdash B$ es válido y $I(\neg B, a) = 1$, entonces por la regla (WN), para toda $b \in K$ tal que Rab, $I(B, b) \neq 1$; y como $A \vdash B$ es válido, se sigue que $I(A, b) \neq 1$ por lo que $I(\neg A, a) = 1$, como queríamos.

De forma interesante, (WN) rápidamente vuelve irrelevante a la lógica que la utiliza mientras que (NN) evita esto, pues (WN) con R reflexiva permite validar (DS) mientras que (NN) no lo valida:

- Supongamos que $I(A \wedge ({\sim} A \vee B), a) = 1$ pero $I(B, a) \neq 1$. Entonces $I(A, a) = 1$ y $I({\sim} A \vee B, a) = 1$. Si $I(B, a) = 1$ entramos en contradicción con $I(B, a) \neq 1$; pero si $I({\sim} A, a) = 1$ entonces $I(A, a^*) \neq 1$, lo cual es un modelo donde falla (DS) si $a \neq a^*$. Por tanto $A \wedge ({\sim} A \vee B) \nvdash B$ usando (NN).

- Supongamos que $I(A \wedge (\neg A \vee B), a) = 1$ pero $I(B, a) \neq 1$. Entonces $I(A, a) = 1$ y $I(\neg A \vee B, a) = 1$. Si $I(B, a) = 1$ entramos en contradicción con $I(B, a) \neq 1$; y si

$I(\neg A, a) = 1$ entonces, para toda $b \in K$ tal que Rab, $I(A, b) \neq 1$. Si R es reflexiva, entonces Raa y $I(A, a) \neq 1$, una contradicción. Por tanto $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash B$ usando (WN).

De forma central para la discusión que tendremos sobre ortológica y lógica cuántica, (NN) valida el postulado de Distribución expresado por medio de la definición de la disyunción en términos de la negación y la conjunción:

- Supongamos que $I(A \wedge \sim(\sim B \wedge \sim C), a) = 1$ pero $I(\sim(\sim(A \wedge B) \wedge \sim C), a) \neq 1$. Entonces $I(A, a) = 1$ y $I(\sim(\sim B \wedge \sim C), a) = 1$, y $I(\sim(A \wedge B) \wedge \sim C, a^*) = 1$. Luego $I(\sim(A \wedge B), a^*) = 1$ y por tanto $I(A \wedge B, a) \neq 1$, y $I(\sim C, a^*) = 1$ y por tanto $I(C, a) \neq 1$; además $I(\sim B \wedge \sim C, a^*) \neq 1$. Como $I(A \wedge B, a) \neq 1$ y $I(A, a) = 1$, se sigue que $I(B, a) \neq 1$ y entonces $I(\sim B, a^*) = 1$ y entramos en contradicción con $I(\sim B \wedge \sim C, a^*) \neq 1$ porque $I(\sim C, a^*) = 1$. Por tanto, $A \wedge \sim(\sim B \wedge \sim C) \vdash \sim(\sim(A \wedge B) \wedge \sim C)$ usando (NN).

Y, de hecho, (WN) también valida Distribución, e.g. en lógica intuicionista, expresada en términos de conjunciones y negaciones:

- Supongamos que $I(A \wedge \neg(\neg B \wedge \neg C), a) = 1$ pero $I(\neg(\neg(A \wedge B) \wedge \neg C), a) \neq 1$. Por un lado, para algún $b \in K$ tal que Rab, $I(\neg(A \wedge B) \wedge \neg C, b) = 1$, por lo que $I(\neg(A \wedge B), b) = 1 = I(\neg C, b)$; entonces, para cualquier $c \in K$ tal que Rbc, $I(A \wedge B, c) \neq 1$ y $I(C, c) \neq 1$, por lo que $I(A, c) \neq 1$ ó $I(B, c) \neq 1$. Por otro lado, $I(A, a) = 1 = I(\neg(\neg B \wedge \neg C), a)$, de forma que, para todo $b \in K$ tal que Rab, $I(\neg B \wedge \neg C, b) \neq 1$, por lo que $I(\neg B, b) \neq 1$ ó $I(\neg C, b) \neq 1$; como $I(A, a) = 1$ y Rab y Rbc, por (H) tenemos que $I(A, c) = 1$, lo que contradice $I(A, c) \neq 1$ y nos permite inferir entonces que $I(B, c) \neq 1$ lo que significa que $I(\neg B, b) = 1$, que contradice $I(\neg B, b) \neq 1$ y nos permite inferir entonces que $I(\neg C, b) \neq 1$, lo que contradice que $I(\neg C, b) = 1$. Por tanto, $A \wedge \neg(\neg B \wedge \neg C) \vdash \neg(\neg(A \wedge B) \wedge \neg C)$ usando (WN).

Como veremos en las siguientes dos secciones, el tratamiento de la negación debe ser radicalmente no normal para abandonar o cualificar Distribución.

4.2.7 OL y QL: ortológica y lógica cuántica

De acuerdo conl enfoque de Richard Routley, que se basa en la semántica tradicional de (Goldblatt, 1974), la ortológica[20] **OL** es una lógica de deducibilidad de primer grado (*first degree deducibility logic*) que tiene los siguientes postulados[21]:

[20]Para una presentación estándar de la ortológica y la lógica cuántica, véase el Apéndice 2.

[21]Se toma $\wedge$, $\sim$ y $\vdash$ como primitivas y $\vee$ definida como $A \vee B \overset{df}{=} \sim(\sim A \wedge \sim B)$. Las flechas $\Rightarrow$ son condicionales que pertenecen al metalenguaje y se utilizan para hablar de meta reglas, i.e. reglas de derivación entre argumentos, a diferencia de las reglas de derivación entre fórmulas.

(ML$_1$) *Identidad*: $A \vdash A$

(Cut) *Transitividad*: $A \vdash B$, $B \vdash C \Rightarrow A \vdash C$

(SLL$_1$) *Simplificación*: $A \wedge B \vdash A$ y $A \wedge B \vdash B$

(SLL$_2$) *Adjunción*: A, $B \vdash A \wedge B$

(BL$_1$) *Doble Negación*: $A \vdash \sim\sim A$ y $\sim\sim A \vdash A$

(DM$_1$) *Contraposición*: $A \vdash B \Rightarrow \sim B \vdash \sim A$

(EFQ) † *Explosión*: $A \wedge \sim A \vdash B$

En esta lógica, la negación se modela con (WN). Por tanto, un **OL**-modelo es un **BCL**-modelo $\langle K, R, I\rangle$ tal que $R \subseteq K \times K$ es reflexiva, simétrica y R-cerrada sobre K. No obstante, la semántica estándar de Goldblatt (1974, p. 23) suplanta R con una relación de ortogonalidad $\perp$ sobre K (i.e. $x \perp y$ sii Ryx), tal que $\perp$ es irreflexiva y simétrica. Diremos que $\langle K, \perp\rangle$ es un *orto*-marco (también llamado *espacio de ortogonalidad*). La relación R de la que depende un ortomarco satisface R-cerradura, que se reemplaza con:

($\perp$-C) $\perp$-*cerradura*: un subconjunto Y de K es $\perp$-*cerrado* sii para toda $a \in K$, si $a \notin Y$, entonces, para alguna $b \in K$, $b \perp Y$ pero no es el caso que $a \perp b$, donde $b \perp Y$ sii $b \perp c$ para toda $c \in Y$.

De acuerdo con lo anterior, un *ortomodelo* es una estructura $\langle K, \perp, \mathcal{I}\rangle$, donde $\langle K, \perp\rangle$ es un ortomarco e $\mathcal{I}$ es una función de interpretación tal que para toda A, $\mathcal{I}(A)$ es un subconjunto $\perp$-cerrado de K. Entonces, tomando la definición $\mathcal{I}(A) = \{a \in K \mid I(A, a) = 1\}$, tenemos $I(A, a) = 1$ sii $a \in \mathcal{I}(A)$; de hecho, esta conexión hace que I pueda ser extendida recursivamente sobre toda fórmula suplantando R con $\perp$, o bien podemos extenter $\mathcal{I}$ usando las cláusulas $\mathcal{I}(A \wedge B) = \mathcal{I}(A) \cap \mathcal{I}(B)$ y $\mathcal{I}(\neg A) = \{a \in K \mid a \perp \mathcal{I}(A)\}$. Así, de acuerdo conl teorema de adecuación (Brady y Routley et al. 1982, p. 124), $\Gamma \vdash A$ es válido en **OL** sii $\Gamma \vdash A$ es verdadero en todo ortomodelo.

Routley señala dos defectos en **OL** (que atendemos en la siguiente sección): por un lado, **OL** incluye (EFQ) y es, en consecuencia, una lógica irrelevante; por otro lado, **OL** no incluye Distribución en ninguna de sus formas —esto último, como hemos visto, se cumple a niveles tan bajos como **DLL** y es un principio deseable dentro de la ultralógica, como veremos en la sección 4.2.9.

Por otro lado, para obtener la *lógica cuántica* **QL** debe añadirse a **OL** el siguiente principio:

(OM) *Ortomodularidad*: $C \vdash A \Rightarrow A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$

El principio de Ortomodularidad —que es una forma debilitada de Distribución que Birkhoff y Von Neumann consideraron adecuada para la lógica de la mecánica cuántica— junto con Explosión y Simplificación permite derivar (o reducir (OM) a):

(QDS) † *Silogismo Disyuntivo Cuántico*: $A \wedge (\sim A \vee (A \wedge B)) \vdash B$

Demostración: escribimos el esquema (OM) como

$$(A \wedge B) \vdash A \Rightarrow A \wedge (\sim A \vee (A \wedge B)) \vdash (A \wedge \sim A) \vee (A \wedge B)$$

sustituyendo C por $A \wedge B$ y B por $\sim A$. Puesto que Simplificación, el antecedente de la flecha $\Rightarrow$, está dado en (SLL_1), se sigue que

$$A \wedge (\sim A \vee (A \wedge B)) \vdash (A \wedge \sim A) \vee (A \wedge B)$$

Pero ambos disyuntos del lado derecho de $\vdash$ implican B: (i) por Explosión, $A \wedge \sim A \vdash B$, y (ii) por Simplificación, $A \wedge B \vdash B$; por lo tanto, por $\vee$-Composición obtenemos el Silogismo Disyuntivo Cuántico

$$A \wedge (\sim A \vee (A \wedge B)) \vdash B$$

que es una implicación irrelevante y por ello la marcamos con † también. Es interesante notar, para efectos de la relevancia lógica, que el segundo coyunto del antecedente de Silogismo Disyuntivo Cuántico es utilizado para definir la conectiva condicional más conocida para las lógicas cuánticas (Humberstone 2011, p.300): el *anzuelo de Sasaki* (*Sasaki hook*), i.e. $A \rightharpoondown B \overset{df}{=} \sim A \vee (A \wedge B)$, lo cual es muy similar a como se define el condicional material de la lógica clásica, $A \supset B \overset{df}{=} \sim A \vee B$, de forma que Silogismo Disyuntivo Cuántico (al igual que su versión no cuántica en la lógica clásica) representa la regla de inferencia Modus Ponens.

Así, **QL**, al igual que **OL**, es una lógica irrelevante.

Goldblatt (1974, pp.32-3.) ofrece una semántica (que va más allá del primer orden) para **QL** en la que se añade ∇ a los **OL**-modelos, donde ∇ es un conjunto no vacío de conjuntos $\perp$-cerrados. Así, un **QL**-modelo es una estructura $\langle K, \perp, \nabla, \mathcal{I} \rangle$, donde $\langle K, \perp \rangle$ es un ortomarco; ∇ es un conjunto no vacío de subconjuntos $\perp$-cerrados de K tales que:

1. ∇ es cerrado bajo la intersección de conjuntos $\cap$ y la operación $\flat$ definida como $Y^{\flat} = \{x \in K \mid x \perp Y\}$

2. Si $Y, Z \in \nabla$ y $Y \subseteq Z$ entonces Y es $\perp$-cerrado en Z —donde si $Y, Z \subseteq K$, Y es $\perp$-cerrado en Z sii, para toda $a \in Z$, si $a \notin Y$ entonces, para algún $b \in Z$, tenemos que $b \perp Y$ pero no es el caso que $a \perp b$

3. $\mathcal{I}$ es una función que asigna a cada fórmula A un elemento $\mathcal{I}(A) \in \nabla$

4.2.8 ROL y RQL: ortológica relevante y lógica cuántica relevante

Respecto al primer defecto de **OL**, para obtener una lógica (débilmente) relevante a partir de **OL**, basta con abandonar el postulado † (EFQ). Para obtener la *ortológica relevante* **ROL** más cercana a la formulación de **OL**, no sólo debe abandonarse (EFQ) sino que debe ser sustituido por el siguiente principio

(ROL_1) *Tercero Excluso*: $\mathfrak{t} \vdash A \vee \sim A$

donde la constante $\mathfrak{t}$ es como en los **DMLt**-modelos extendidos y se cumple (EM). Así, por Contraposición tendremos $\sim(A\vee \sim A) \vdash \sim\mathfrak{t}$, i.e. $\sim A \wedge A \vdash \mathfrak{f}$, que no es una implicación irrelevante.

Respecto al segundo defecto de **OL**, si abandonamos (EFQ) pero añadimos (Dist) en lugar de (OM), regresamos a **DML**. Esto quiere decir que las lógicas cuánticas relevantes son sistemas muy cercanos o similares a **DML** y sus extensiones más inmediatas (i.e. **DMLt** y **DK**), como veremos en la siguiente sección.

Para obtener la *lógica cuántica relevante* **RQL** debe añadirse (OM) a **ROL** y debemos ajustar la regla (WN) de la negación a su forma de segundo orden:

(WN^2) *Negación débil (2do orden)*: $I(\neg A, a) = 1$ sii $\widetilde{S}a[A]$, i.e. sii $\widetilde{S}a\{b \in K \mid I(A, b) = 1\}$

donde los **BLC**-modelos se ajustan como una estructura $\langle K, \widetilde{S}, I\rangle$ en las que $\widetilde{S} \subseteq K \times \wp(K)$ es una relación entre mundos y conjuntos de mundos. Así, los postulados de la negación se modelan como sigue, para cualesquiera $[A], [B], [C] \subseteq \wp(K)$:

(BL_1^2) *Doble negación (2do orden)*: $a \in [A]$ sii $\widetilde{S}a\{a \in K \mid \widetilde{S}a[A]\}$

(DM_1^2) *Contraposición (2do orden)*: si $[A] \subseteq [B]$ entonces $\{a \in K \mid \widetilde{S}a[B]\} \subseteq \{a \in K \mid \widetilde{S}a[A]\}$

(OM^2) *Ortomodularidad (2do orden)*: si $[C] \subseteq [A]$ y $a \in [A]$ y $\widetilde{S}a\{a \in K \mid \widetilde{S}a[B]\} \cap \{a \in K \mid \widetilde{S}a[C]\}$, entonces $\widetilde{S}a\{a \in K \mid \widetilde{S}a([A] \cap [B])\} \cap \{a \in K \mid \widetilde{S}a[C]\}$

donde (OM^2) corresponde a $C \vdash A$, y A, y $\sim(\sim B \vee \sim C)$ (i.e. $B \vee C$), y $\sim(\sim(A\wedge B) \wedge \sim C)$ (i.e. $(A \wedge B) \vee C$), respectivamente. Así, un **RQL**-modelo es una estructura $\langle K, \widetilde{S}, I\rangle$ que satisface los postulados de la negación recién descritos.

Mientras que (QDS) es derivable en **QL**, no lo es en **RQL** porque **RQL** no cuenta con Explosión, por lo que la composición de la disyunción del lado derecho de $\vdash$ no implica B en los dos casos de la prueba que ofrecimos en la sección 4.2.7.

Evidentemente, esta semántica es capaz de recuperar la versión irrelevante **QL** si en vez de (OM^2) imponemos, para cualesquiera $[A], [B] \subseteq \wp(K)$:

(EFQ^2) † *Explosión (2do orden)*: $[A] \cap \{a \in K \mid \widetilde{S}a[A]\} \subseteq [B]$

(QDS^2) † *Silogismo disyuntivo cuántico (2do orden)*: si $a \in [A]$ y $\widetilde{S}a([A] \cap \{a \in K \mid \widetilde{S}a([A] \cap [B])\})$ entonces $a \in [B]$

donde (QDS^2) corresponde a A, y $\sim(A \wedge \sim(A \wedge B))$ (i.e. $\sim A \vee (A \wedge B)$), y B, respectivamente.

Por último, **RQL** es completa y correcta bajo esta semántica (Brady y Routley et al. 1982, pp.125-6).

4.2.9 La lógica relevante DK y la lógica cuántica DQL

Como dijimos arriba, si añadimos (OM) a **ROL**, obtenemos **RQL**; pero si en lugar de (OM) añadimos (Dist), regresamos a **DML** —que es una lógica de implicación en primer grado y no contiene la conectiva para el condicional. Para añadir un *condicional relevante* $\rightarrow$ al sistema **DML** (o más precisamente a **DMLt**), tendremos que (a) dar las condiciones modelo teóricas para el condicional; y (b) añadir axiomas y reglas acerca del condicional.

El condicional relevante se modela a través de una relación ternaria[22] $R \subseteq K \times K \times K$ de la siguiente forma:

(RC) *Condicional relevante*: $I(A \rightarrow B, a) = 1$ sii, para cualesquiera $b, c \in K$ tales que $Rabc$, si $I(A, b) = 1$ entonces $I(B, c) = 1$

Llamaremos **DK**-modelo a todo **DMLt**-modelo extendido $\langle \mathbf{0}, K, \leq, *, R, I \rangle$ que, equipado con una relación ternaria R, satisface (RC). La lógica relevante **DK** añade a **DMLt** los siguientes postulados sobre el condicional[23]:

($\text{ML}_1^{\rightarrow}$) *Identidad*: $A \rightarrow A$

($\text{Cut}^{\rightarrow}$) *Transitividad*: $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

($\text{SLL}_1^{\rightarrow}$) *Simplificación*: $(A \wedge B) \rightarrow A$ y $(A \wedge B) \rightarrow B$

($\text{Dist}^{\rightarrow}$) *Distribución*: $A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee C$

($\text{DM}_1^{\rightarrow}$) *Contraposición*: $(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$

($\text{BL}_1^{\rightarrow}$) *Doble Negación*: $A \rightarrow \sim\sim A$ y $\sim\sim A \rightarrow A$

($\text{ROL}_1^{\rightarrow}$) *Tercero Excluso*: $\mathbf{t} \rightarrow (A \vee \sim A)$

[22] Hay al menos tres interpretaciones filosóficas interesantes para esta relación ternaria; ver (Beall et al., 2012). Para evaluar condicionales, Routley y Meyer (1976, p.7) introdujeron la notación $Rabc \overset{df}{=} b <_a c$ para indicar que, desde el punto de vista de a (donde se evalúa el condicional), $b < c$ en el orden sobre K.

[23] Otra presentación de **DK** incluye $(A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow \sim A)$ en lugar de incluir explícitamente $A \rightarrow \sim\sim A$ y $(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$, que se reducen a ese principio. En la presentación que aquí damos se hacen explícitos los principios de Doble Negación y Contraposición para facilitar la exposición.

y tiene las siguientes reglas:

(SLL$_2$) *Adjunción*: $A, B \vdash A \wedge B$

(MP$^{\rightarrow}$) *Modus ponens*: $A, A \rightarrow B \vdash B$

(DK$_1$) $A \rightarrow B, C \rightarrow D \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow D)$

La lógica **DK** es la mejor propuesta de Routley para la ultralógica ya que, entre otras cosas:

- No contiene paradojas de la implicación, i.e. es una lógica relevante.
- Es ultramodal, i.e. no considera lógicamente equivalentes a aquellas fórmulas que se co-implican necesariamente.
- Su versión de primer orden[24] es suplementada con un axioma de extensionalidad y un esquema de comprensión irrestricta en (Routley 1980, Apéndice I §6) para construir una teoría inconsistente pero no trivial de conjuntos.
- También se puede definir la aritmética relevante a partir de **DK** (Routley 1980, Apéndice I §9).
- Como veremos en la sección 4.2.10, también podemos recuperar con **DK** la teoría de la probabilidad (Routley 1980, Apéndice I §12).

La cercanía entre **DK** y las lógicas cuánticas **ROL** y **RQL** invita a preguntarnos si **DK** (o una lógica muy similar) es una lógica cuántica relevante con un condicional bien definido, pues, como discutimos brevemente en el Apéndice 2, las ortológicas y las lógicas cuánticas padecen de una ambigüedad sobre cómo definir el condicional (sobretodo siguiendo la pauta del condicional material). Llamaremos **DQL** a la lógica cuántica relevante que resulta de añadir a **RQL** un condicional relevante con los postulados y reglas de **DK** —excepto por (Dist) en cualquiera de sus formas, que es reemplazada por (OM).

[24]Para obtener la lógica de primer orden **DKQ** se añaden a **DK** los siguientes postulados sobre el condicional y el cuantificador universal (el cuantificador particular se define a partir de éste como es usual):

(UE$^{\rightarrow}$) *Eliminación del cuantificador universal*: $\forall x A \rightarrow A(t/x)$ donde t/x indica la sustitución de la variable x por un término t

(U$_1$) $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$ donde x no está libre en A

(U$_2$) $\forall x(A \vee B) \rightarrow (A \vee \forall x B)$ donde x no está libre en A

y se añade la regla

(Gen) *Generalización*: $A \vdash \forall x A$

extendiendo los modelos con la condición para el cuantificador universal: $I(\forall x A, a) = 1$ sii $I(A(t/x), a) = 1$ para cualquier término t.

Hemos mencionado en secciones anteriores que Distribución es válida desde niveles tan elementales como **SLL** y que no hay manera de invalidarla en sistemas que usan la negación normal. Como veremos en la sección 4.2.11, las críticas que se han dado para rechazar Distribución en el contexto de las lógicas cuánticas están mal dirigidas y pueden disolverse utilizando **DK** para analizar los argumentos donde presuntamente Distribución debe fallar.

Algo notable es que no sería correcto añadir a **DQL** el siguiente principio

(OM$^{\rightarrow}$) † *Ortomodularidad*: $C \rightarrow A \vdash (A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$

pues es una implicación irrelevante (el antecedente de $\vdash$ no es relevante para establecer el consecuente). *Demostración*: supongamos que $I(C \rightarrow A, a) = 1$ pero que $I((A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C), a) \neq 1$. Entonces, para cualesquiera $b, c \in K$ tales que $Rabc$, si $I(C, b) = 1$ entonces $I(A, c) = 1$; y también $I((A \wedge (B \vee C)), b) = 1$ pero $I(((A \wedge B) \vee C), c) \neq 1$. De esto se sigue que $I(A, b) = 1$ y $I(B \vee C, b) = 1$, por un lado, y que $I(A \wedge B, c) \neq 1$ y $I(C, c) \neq 1$, por el otro. Supongamos que $I(B, b) = 1$. Entonces por Heredabilidad, $I(B, c) = 1$ y $I(A, c) = 1$, lo que contradice $I(A \wedge B, c) \neq 1$. Supongamos entonces que $I(C, b) = 1$. De nuevo, por Heredabilidad, $I(C, c) = 1$, lo que contradice $I(C, c) \neq 1$. Pero entonces es imposible que $I(B \vee C, b) = 1$ porque, por lo anterior, ni B ni C pueden ser verdaderas en b. Este argumento bastaría para demostrar la verdad de (OM$^{\rightarrow}$) si no tuviéramos el criterio de relevancia de *uso efectivo en la prueba*, pues vemos que el condicional $C \rightarrow A$ es innecesario para demostrar la conclusión del argumento (no es utilizado nunca). La prueba que hemos dado establece que $\vdash (A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$, que es (Dist$^{\rightarrow}$), un principio válido en **DK** pero que las lógicas cuánticas tradicionales rechazan. Por lo tanto, † (OM$^{\rightarrow}$) es una implicación irrelevante y no debe ser incluída en **DQL** ni en otras lógicas relevantes.

Es importante advertir que lo anterior no implica que (OM) es también una implicación irrelevante. (OM) está dada en forma de meta regla (usa $\Rightarrow$ entre secuentes) y es un principio de implicación en primer grado (i.e. no incluye condicionales $\rightarrow$ sino únicamente relaciones de consecuencia $\vdash$) y es verdadera en todo **RQL**-modelo (de segundo orden) a través de la relación $\widetilde{S}$ para los postulados de la negación.

La introducción de un condicional relevante, en conjunto con la negación normal, permite definir conectivas *intensionales*, i.e. que se evalúan a través de mundos o situaciones (consistentes o inconsistentes, y completas o incompletas) bajo ciertas relaciones (de orden o accesibilidad), a diferencia de las extensionales que sólo requieren de valores de verdad para evaluarse:

Conectivas	Extensionales	Intensionales
0-arias	$\top$, $\bot$	$\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$
1-arias	$\neg$	$\sim$
2-arias	$\wedge$, $\vee$, $\supset$	$\circ$, $\bullet$, $\rightarrow$

donde $\circ$ es la conectiva *fusión* definida como $A \circ B \stackrel{df}{=} \sim(A \rightarrow \sim B)$, $\bullet$ es la conectiva *fisión* definida como $A \bullet B \stackrel{df}{=} \sim A \rightarrow B$, y $\rightarrow$ es el condicional relevante.

La conectiva fusión (también llamada *conjunción intensional*) es interpretable como una relación de *compatibilidad*: A y B son *compatibles*, i.e. $A \circ B$, sii A no implica la negación de B (por Contraposición y Doble Negación vemos que también es el caso que B no implica la negación de A); dualmente, la conectiva fisión (también llamada *disyunción intensional*) es interpretable como una relación de *incompatibilidad*: A y B son *incompatibles*, i.e. $A \bullet B$, sii la negación de A implica B (por Contraposición y Doble Negación vemos que también es el caso que la negación de B implica A). Esto es interesante para posibles aplicaciones en teoría cuántica pues sabemos que hay cantidades o información cuántica que bajo ciertas circunstancias son incompatibles (como determinar simultáneamente la posición y el momento de una partícula).

Algunas semánticas para lógicas cuánticas utilizan una relación C de compatibilidad definida como xCy sii no es el caso que $x \perp y$, para cualesquiera mundos x, y, y se interpreta como "lo que sea que x afirme, y no lo niega" con el fin de conectar los distintos tratamientos de la negación como ortocomplemento y lo que aquí hemos llamado negación normal (Dunn 1993, p. 332). Esta definición tiene el defecto de incluir una negación del meta lenguaje (i.e. no del lenguaje objeto) y por tanto es dependiente de una noción indefinida de *negación* que queda fuera del formalismo de las lógicas cuánticas; además pretende forzar una identificación entre ambos tratamientos de la negación cuando, siguiendo (Brady y Routley et al 1982), es claro que se trata de dos filosofías diferentes de la negación. En cambio, la conectiva fusión permite dar una noción de compatibilidad que depende enteramente de las conectivas del lenguaje objeto, en concreto de la negación normal y el condicional relevante —y es claro que tanto **DQL** como **DK** tienen la capacidad de recuperar este acercamiento. Otras nociones, como mencionamos al final de este apartado, son más deficientes en lo que concierne a intereses relevantistas.

La lógica relevante **T** resulta de añadir a **DK** los siguientes principios (Brady y Routley et al. 1982, pp. 38-9):

(Abs) *Absorción*: $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$

(Pre) *Prefijación*: $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$

(Suf) *Sufijación*: $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Evidentemente, **DQL** podría ser extendida a otro sistema similar a **T** añadiendo (Abs), (Pre) y (Suf) si existiera suficiente motivación para fortalecer **DQL** de esa manera.

Las lógicas adecuadas para perseguir la línea suave de la que habla Routley son precisamente **ROL**, **RQL** y, especialmente, la extensión **DQL** que aquí presentamos, pues en este sistema se debilita Distribución al incluirla como Ortomodularidad, y se incluye un condicional relevante que se define de forma natural dentro de los **DMLt**-modelos.

Por otro lado, **DK** y su extensión de primer orden **DKQ** son las lógicas adecuadas para perseguir la línea dura, o parecen serlo, pues esta lógica relevante y ultramodal (además de incluir Distribución) sirve de base para reconstruir de forma relevantista la teoría ingenua de conjuntos, la aritmética, la teoría de la información y la teoría de la probabilidad, según lo esboza Routley en *Ultralogic as Universal?*.

En la literatura no existen muchas referencias (además del trabajo de Routley) a las lógicas cuánticas relevantes.

Por un lado está (Georgakarakos 1979) que, motivado por la falta de ejemplos de retículos ortomodulares como modelos de lógicas distintas a la lógica cuántica de Birkhoff y Von Neumann, sugiere una manera de modelar ciertas lógicas relevantes con estos retículos por medio de una relación de compatibilidad definida como aCb sii $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^{\perp})$, la expresión algebraica (en un ortorretículo) del principio de expansión (y el correspondiente principio de eliminación) $A \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge \sim B)$ lo que hace que su esfuerzo no sea ultramodal porque valida principios de expansión y con ello, entre otras cosas, permite ciertas implicaciones irrelevantes, de forma que su concepción de relevancia como compatibilidad definida en dichos términos es errónea de acuerdo con lo que hemos expuesto en este trabajo.

Por otro lado tenemos (Kron et al 1981) que sigue el temprano plan americano de la relevancia al utilizar (Anderson y Belnap 1975) para tratar de responder si se puede añadir un condicional a los retículos ortomodulares que cumpla con (a) satisfacer las propiedades deseables[25] de una implicación, (b) interactuar adecuadamente con la relación $\leq$ de los ortoretículos, (c) interactuar adecuadamente con las operaciones de los ortoretículos, y (d) que añadirlo a los ortoretículos no destruya las propiedades de los mismos. No obstante, las lógicas que ellos investigan son más fuertes que las que aquí hemos considerado, pues se basan en **T**, **E**, y **R**, y no satisfacen los criterios de relevancia que se buscan en el plan australiano pues los sistemas que ellos proponen asumen (QDS) como axioma, que, como hemos demostrado, es un principio irrelevante.

4.2.10 Lógica ultramodal de la probabilidad

Las lógicas cuánticas suelen ir ligadas de alguna forma a la teoría de la probabilidad (ver Apéndice 2) porque todos los formalismos para las diferentes interpretaciones de la teoría cuántica utilizan algún cálculo probalilístico (generalmente clásico). En este apartado ofrecemos avances en la teoría ultramodal de la probabilidad para acompañar los sistemas de lógica cuántica relevante, particularmente **DQL** y, de forma ideal, **DK**. Esto representa un esfuerzo en la línea dura de la teoría ultramodal de la física cuántica.

Aunque hay otros trabajos sobre teoría paraconsistente de la probabilidad, como (Priest 2006, p.107) y (Mares 1997), y otras interpretaciones relevantistas de la pro-

[25] (Kron et al 1981) refiere al trabajo de Hardegree (1979) para esta noción.

babilidad condicional (Mares 2006), nos centramos en la teoría original de Routley (1980) porque su carácter ultramodal nos permite analizar cuidadosamente a los principios de expansión y comprender cómo es que estos generan razonamientos paradójicos en física cuántica.

Routley utiliza teoría de la medida para hablar de la probabilidad como *implicación parcial* (*partial entailment*) partiendo de estas tesis: (i) la implicación parcial es una relación lógica entre antecedente y consecuente que se puede medir, i.e. se puede medir exactamente a qué grado cierta(s) premisa(s) implica(n) una conclusión; y (ii) dicha relación lógica provee una buena explicación de la relación de *probabilidad lógica* e incluso, bajo cierta interpretación, es también una buena explicación de la *confirmación* (1980, p.947).

El objetivo es investigar las propiedades lógicas de la relación de probabilidad condicional $P(H, E) = r$, donde cierta evidencia E implica la hipótesis H en grado r para $r \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Cuando $P(H, E) = 1$, i.e. cuando E implica en grado máximo a H, se tiene una implicación deductivamente válida (*entailment*) y por ello podemos considerar que cuando $P(H, E) < 1$ y $P(H, E) \neq 0$ se tiene una implicación inductivamente válida en cierto grado. No obstante, será importante que la implicación de la que estemos hablando sea una implicación relevante (y ultramodal) y no, como se hace en las teorías clásicas (irrelevantes), con una implicación estricta ($\dashv$).

Routley retoma el trabajo de Rudolf Carnap (1950) sobre lógica inductiva en términos de la teoría de la probabilidad pero lo critica y ajusta su teoría a las demandas ultramodales. El enfoque de Routley se distingue por:

1. su manejo de la negación; y
2. por ser, algebraicamente, una medida sobre los retículos de De Morgan en lugar de ser una medida sobre los retículos booleanos.

En teoría de la medida, un *espacio de probabilidad* es una tripla $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$, donde

- Ω es un conjunto no vacío llamado *espacio muestral*;
- $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre Ω; i.e. $\mathcal{F} \subseteq \wp(\Omega)$ es cerrado bajo las operaciones conjuntistas de unión contable $\cup$ y complemento relativo $\setminus$ (y, por tanto, también es cerrado bajo intersección $\cap$), y cumple que
    1. $\Omega \in \mathcal{F}$ es el conjunto universal
    2. si $A \in \mathcal{F}$ entonces $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
    3. si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ entonces $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$

- P es una *función de probabilidad* $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ que asigna un valor en el intervalo unitario $[0,1] \subset \mathbb{R}$ de los números reales a cada elemento de $\mathcal{F}$ (a cada *evento* del espacio de probabilidad).[26]

Siguiendo a Routley, podemos tomar la definición estándar de espacio de probabilidad y aplicarla a los retículos de De Morgan —la estructura algebraica que subyace a las lógicas relevantes— de la siguiente manera:

- tomamos como espacio muestral $\Omega = K$, que es el conjunto de situaciones deductivas o mundos (que incluye mundos normales —al menos uno, que pertenece a $\mathbf{0} \subset K$— y no normales —también al menos uno, que pertenece a $K - \mathbf{0}$) de los **DMLt**-modelos extendidos;
- tomamos como σ-álgebra $\mathcal{F} = \wp(K)$, que es el conjunto de proposiciones del lenguaje formal L;
- tomamos $P = \mu$ como medida de probabilidad sobre las proposiciones de L

En esta teoría, escribiremos la medida de probabilidad de una proposición somo la suma de las medidas sobre los mundos donde la proposición es verdadera:

Definición 4.11.

$$\mu(A) = \sum_{a \in r(A)} \mu(a)$$

donde $r(A) = \{k \in K \mid I(A,k) = 1\}$ es el *rango de la proposición* A.

Las siguientes definiciones son cruciales para la teoría ultramodal:

Definición 4.12. Una situación o mundo $a \in K$ tal que, para todo parámetro proposicional p_0, $I(p_0 \wedge \sim p_0, a) \neq 1$ es una situación o mundo *consistente.*

Definición 4.13. Una situación o mundo $a \in K$ tal que, para todo parámetro proposicional p_0, $I(p_0 \vee \sim p_0, a) = 1$ es una situación o mundo *completo.*

Definición 4.14. Un *mundo normal* es un mundo $a \in \mathbf{0} \subset K$, i.e. a es una situación o mundo completo y consistente.

Definición 4.15. Un *mundo no normal* es un mundo $a \in K - \mathbf{0}$, i.e. a no es una situación completa o a no es una situación consistente, o ambas.

Evitamos llamar *mundos posibles* a los mundos normales y *mundos imposibles* a los mundos no normales porque eso parecería sugerir, contrario a las intuiciones de la teoría ultramodal, que no hay algo así como situaciones *incompletas* o *inconsistentes*, donde:

[26] Para que esta construcción seas aplicable a la mecánica cuántica es preciso que la función de probabilidad esté definida sobre los números complejos; por simplicidad, en esta presentación dejamos la formulación en los reales siguiendo a Routley.

- una situación *incompleta* es una situación no completa, i.e. es una situación $a \in K-\mathbf{0}$ tal que, para algún parámetro proposicional p_0, $I(p_0\vee \sim p_0, a) \neq 1$

- una situación *inconsistente* es una situación no consistente, i.e. es una situación $a \in K - \mathbf{0}$ tal que, para algún parámetro proposicional p_0, $I(p_0\wedge \sim p_0, a) = 1$

Nótese que para que a sea completo o consistente, necesariamente $a = a^*$, pues (1) si $I(p_0\vee \sim p_0, a) = 1$ entonces $I(p_0, a) = 1$ o $I(\sim p_0, a) = 1$, i.e. $I(p_0, a^*) \neq 1$, por lo que $p_0\vee \sim p_0$ tiene un contraejemplo si $a \neq a^*$ y $I(p_0, a) \neq 1$ y $I(p_0, a^*) \neq 1$, pero no lo tiene (i.e. es válido) sólo si $a = a^*$, pues entonces $I(p_0, a) = 1$ o $I(p_0, a) \neq 1$; (2) si $I(p_0\wedge \sim p_0, a) = 1$ entonces $I(p_0, a) = 1$ y $I(\sim p_0, a) = 1$, i.e. $I(p_0, a^*) \neq 1$, por lo que $p_0\wedge \sim p_0$ tiene un modelo si $a \neq a^*$, de lo contrario es inválido, pues $I(p_0, a) = 1$ y $I(p_0, a) \neq 1$ no es satisfacible si $a = a^*$.

En lo sucesivo, se presentan teoremas básicos de la lógica ultramodal de la probabilidad y se muestra la invalidez de algunos resultados clásicamente válidos (i.e. que en una teoría booleana o clásica de la probabilidad lógica serían válidos) con el fin de mostrar las similitudes y diferencias entre las aproximaciones relevantista y clásica de la probabilidad. Los resultados siguen de cerca a (Routley 1980, p.947 y ss.) y se proporcionan las pruebas y contraejemplos que Routley omitió.

Teorema 4.1. Si $A \vdash B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$

Prueba. Si $A \vdash B$ entonces, para todo $a \in K$, si $I(A, a) = 1$ entonces $I(B, a) = 1$; se sigue que $r(A) \subseteq r(B)$ y, por la monotonicidad[27] de μ, obtenemos $\mu(A) \leq \mu(B)$. □

Teorema 4.2. Si $A \vdash B$ y $B \vdash A$ entonces $\mu(A) = \mu(B)$

Prueba. Si A y B se implican mutuamente, entonces $r(A) \subseteq r(B)$ y $r(B) \subseteq r(A)$, así que por el axioma de extensionalidad de conjuntos tenemos $r(A) = r(B)$, por lo que necesariamente $\mu(A) = \mu(B)$ por la Definición 4.11. □

Teorema 4.3. $\mu(A \wedge B) \leq \mu(A)$

[27] En teoría de la medida, esta propiedad significa lo siguiente: si S_1 y S_2 son conjuntos mensurables tales que $S_1 \subseteq S_2$ entonces $\mu(S_1) \leq \mu(S_2)$, i.e. la función μ es monotónica ya que preserva el orden parcial de la inclusión $\subseteq$ sobre conjuntos mensurables.

Prueba.

$$\begin{aligned}
\mu(A \wedge B) &= \sum_{a \in r(A \wedge B)} \mu(a) \\
&= \sum_{a \in \{k \in K \mid I(A \wedge B, k)=1\}} \mu(a) \\
&= \sum_{a \in \{k \in K \mid I(A,k)=1\} \cap \{k \in K \mid I(B,k)=1\}} \mu(a) \\
&\leq \sum_{a \in \{k \in K \mid I(A,k)=1\}} \mu(a) \\
&\leq \mu(A)
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.4. $\mu(A \vee B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \wedge B)$

Prueba.

$$\begin{aligned}
\mu(A \vee B) + \mu(A \wedge B) &= \sum_{a \in r(A) \cup r(B)} \mu(a) + \sum_{a \in r(A) \cap r(B)} \mu(a) \\
&= \left(\sum_{a \in r(A)} \mu(a) + \sum_{a \in r(B)} \mu(a) - \sum_{a \in r(A) \cap r(B)} \mu(a) \right) + \sum_{a \in r(A) \cap r(B)} \mu(a) \\
&= \sum_{a \in r(A)} \mu(a) + \sum_{a \in r(B)} \mu(a) \\
&= \mu(A) + \mu(B)
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.5. $\mu(A) \leq \mu(A \vee B)$

Prueba.

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \sum_{a \in r(A)} \mu(a) \\
&\leq \sum_{a \in r(A)} \mu(a) + \sum_{a \in r(B)} \mu(a) - \sum_{a \in r(A) \cap r(B)} \mu(a) \\
&\leq \mu(A \vee B)
\end{aligned}$$

□

De acuerdo con lo anterior, como es esperable, contaremos con la validez de las versiones probabilistas de fórmulas válidas en **DLL**, tales como la siguiente versión de Distribución:

$$\mu(A \wedge (B \vee C)) \leq \mu((A \wedge B) \vee C)$$

.

En conformidad con los requisitos de relevancia impuestos a una teoría de la probabilidad, la implicación estricta $\dashv$ y la equivalencia estricta $\leftrightarrow\!\!\!\!\dashv$ de las lógicas modales normales no reúnen las condiciones apropiadas para la implicación; los siguientes no son teoremas:

- Si $A \dashv B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$

  Contraejemplo: sea A de la forma $p_0 \wedge \sim p_0$ y B de la forma $p_1 \wedge \sim p_1$. Claramente, $(p_0 \wedge \sim p_0) \dashv (p_1 \wedge \sim p_1)$ es verdadero en lógicas modales normales con implicación estricta (e.g., en el sistema $\mathbf{S}_4$), pero dependiendo del significado de $p_0 \wedge \sim p_0$ y de $p_1 \wedge \sim p_1$, puede ocurrir que $\mu(p_0 \wedge \sim p_0) > \mu(p_1 \wedge \sim p_1)$. La lógica clásica no hace distinción alguna entre contradicciones (en efecto, $(A \wedge \sim A) \equiv (B \wedge \sim B)$ es uno de sus teoremas), i.e. ellas tienen el mismo significado o el mismo contenido, por lo que la teoría clásica de la probabilidad asignaría $P(p_0 \wedge \sim p_0) = 0 = P(p_1 \wedge \sim p_1)$. Pero la lógica ultramodal de la probabilidad puede capturar estas diferencias de significado; por ejemplo, si $p_0 \wedge \sim p_0$ representa la paradoja del mentiroso (es verdad que "este enunciado no es verdadero" y no es verdad que "este enunciado no es verdadero") y $p_1 \wedge \sim p_1$ representa, por ejemplo, que es verdad que "los caballos tienen cuatro patas" y no es verdad que "los caballos tienen cuatro patas", entonces podría haber más situaciones en las que $p_0 \wedge \sim p_0$ es verdad que situaciones en las que $p_1 \wedge \sim p_1$ es verdad.

- Si $A \leftrightarrow\!\!\!\!\dashv B$ entonces $\mu(A) = \mu(B)$

  Contraejemplo: tomamos $(p_0 \wedge \sim p_0) \leftrightarrow\!\!\!\!\dashv (p_1 \wedge \sim p_1)$, que es válida para la implicación estricta en una lógica modal normal. Siguiendo el argumento anterior, claramente $\mu(p_0 \wedge \sim p_0) \neq \mu(p_1 \wedge \sim p_1)$.

De hecho, todos los resultados positivos (i.e. libres de negaciones) de la teoría clásica de la probabilidad que no involucran probabilidades condicionales son también válidos en la teoría de Routley (1980, pp. 958-9). Como se mencionó anteriormente, el tratamiento para la negación hace toda la diferencia entre estas teorías, tal y como ocurre entre **DML** y **BL**. Aunque Routley no lo explicita, de acuerdo con la Definición 4.11 tenemos la siguiente condición de medida para proposiciones negativas:

$$\begin{aligned}
\mu(\sim A) &= \sum_{a \in r(\sim A)} \mu(a) \\
&= \sum_{a \in \{k \in K \,|\, I(\sim A, k) = 1\}} \mu(a) \\
&= \sum_{a \in \{k \in K \,|\, I(A, k^*) \neq 1\}} \mu(a)
\end{aligned}$$

Podemos probar algunas de las afirmaciones de Routley sobre la negación en la lógica ultramodal de la probabilidad introduciendo la constante lógica $\mathfrak{t}$ de los **DMLt**-modelos (que son tan solo una expansión de los **DML**-modelos que incluye a la constante lógica $\mathfrak{t}$ y su condición de verdad $I(\mathfrak{t}, a) = 1$ sii $a \in \mathbf{0}$) con el fin de definir los valores máximo y mínimo para μ:

Definición 4.16. Sea $\mathfrak{f} \stackrel{df}{=} \sim \mathfrak{t}$. Entonces,

$$\mu(\mathfrak{t}) = 1$$
$$\mu(\mathfrak{f}) = 0$$

La constante $\mathfrak{t}$ (que puede ser entendida como la conjunción de todos los teoremas) nos permite representar la teoría clásica de la probabilidad de forma ultramodal. Si A es un teorema, entonces $\mathfrak{t} \to A$, de forma que si $\mu(\mathfrak{t}) = 1$ entonces $\mu(A) = 1$; de forma similar, si A es un teorema, entonces $\sim A \to \sim \mathfrak{t}$, de forma que $\mu(\sim A) \leq \mu(\mathfrak{f}) = 0$ por lo cual $\mu(\sim A) = 0$ ya que, por definición, $\mu(\mathfrak{f}) = 0$. Esto se reduce a la validez restringida de resultados de la teoría clásica de la probabilidad, como $P(A \wedge \sim A) = 0$ y $P(A) + P(\sim A) = 1$, i.e. $P(\sim A) = 1 - P(A)$, pues estos se cumplen *en mundos normales* donde los teoremas son verdades; en ese sentido, entonces, la condición de medida de cualquier proposición A colapsaría en

$$\mu(A) = \sum_{a \in r(A) \cap \mathbf{0}} \mu(a)$$

Sin embargo, esta recaptura clásica de resultados no es el objetivo principal de Routley; más bien, se interesa en mostrar cómo podemos distanciarnos de esos resultados clásicos que solo valdrían en mundos normales. Como ejemplo de esto último, considérense el siguiente teorema y los siguientes contraejemplos:

Teorema 4.6. $\mu(A) + \mu(\sim A) \leq 1$

Prueba.

$$\begin{aligned}
\mu(A)+\mu(\sim A) &= \sum_{a\in r(A)}\mu(a)+\sum_{a\in r(\sim A)}\mu(a)\\
&= \sum_{a\in\{k\in K\,|\,I(A,k)=1\}}\mu(a)+\sum_{a\in\{k\in K\,|\,I(\sim A,k)=1\}}\mu(a)\\
&= \sum_{a\in\{k\in K\,|\,I(A,k)=1\}}\mu(a)+\sum_{a\in\{k\in K\,|\,I(A,k^*)\neq 1\}}\mu(a)\\
&\leq \sum_{a\in\mathbf{0}}\mu(a)\\
&\leq \sum_{a\in r(\mathsf{t})}\mu(a)\\
&\leq \sum_{a\in\{k\in K\,|\,I(\mathsf{t},k)=1\}}\mu(a)\\
&\leq \mu(\mathsf{t})\\
&\leq 1
\end{aligned}$$

$\square$

Los siguientes no son teoremas:

- *Definición clásica de la negación en probabilidad*: $\mu(\sim A)=1-\mu(A)$

  Contraejemplo: por el teorema anterior, $\mu(A)+\mu(\sim A)=1$ si $a=a^*$, i.e. para cualquier $a\in\mathbf{0}$, y por tanto $\mu(\sim A)=1-\mu(A)$, pues en ese caso:

$$\begin{aligned}
\mu(A)+\mu(\sim A) &= \sum_{a\in\{k\in\mathbf{0}\,|\,I(A,k)=1\}}\mu(a)+\sum_{a\in\{k\in\mathbf{0}\,|\,I(\sim A,k)=1\}}\mu(a)\\
&= \sum_{a\in\{k\in\mathbf{0}\,|\,I(A,k)=1\}}\mu(a)+\sum_{a\in\{k\in\mathbf{0}\,|\,I(A,k)\neq 1\}}\mu(a)\\
&= \sum_{a\in\mathbf{0}}\mu(a)\\
&= \sum_{a\in\{k\in\mathbf{0}\,|\,I(\mathsf{t},k)=1\}}\mu(a)\\
&= \sum_{a\in r(\mathsf{t})}\mu(a)\\
&= \mu(\mathsf{t})\\
&= 1
\end{aligned}$$

  Pero si existe al menos un $a\in K\backslash\mathbf{0}$ tal que $a\neq a^*$, entonces $\mu(A)+\mu(\sim A)<1$ y por tanto $\mu(\sim A)\neq 1-\mu(A)$, pues entonces $\sum_{a\in\{k\in K\,|\,I(A,k)=1\}}\mu(a)+\sum_{a\in\{k\in K\,|\,I(A,k^*)\neq 1\}}\mu(a)\neq\sum_{a\in\mathbf{0}}\mu(a)$.

- *Principio de Expansión*[28]: $\mu(A) = \mu(A\wedge \sim B) + \mu(A \wedge B)$

  Contraejemplo: $\mu(A) = \mu(A\wedge \sim B) + \mu(A \wedge B)$ si $a = a^*$, i.e. para toda $a \in \mathbf{0}$, pues en ese caso:

$$\begin{aligned}
\mu(A\wedge \sim B) + \mu(A \wedge B) &= \sum_{a\in r(A)\cap r(\sim B)} \mu(a) + \sum_{a\in r(A)\cap r(B)} \mu(a) \\
&= \sum_{a\in r(A)\cap (r(B)\cup r(\sim B))} \mu(a) \\
&= \sum_{a\in \{k\in\mathbf{0}\,|\,I(A,k)=1\}\cap(\{k\in\mathbf{0}\,|\,I(B,k)=1\}\cup\{k\in\mathbf{0}\,|\,I(B,k)\neq 1\})} \mu(a) \\
&= \sum_{a\in \{k\in\mathbf{0}\,|\,I(A,k)=1\}\cap\mathbf{0}} \mu(a) \\
&= \sum_{a\in r(A)} \mu(a) \\
&= \mu(A)
\end{aligned}$$

  pero si existe al menos un $a \in K\backslash\mathbf{0}$ tal que $a \neq a^*$, entonces $\mu(A) \neq \mu(A\wedge \sim B) + \mu(A \wedge B)$ pues entonces $a \in r(B) \cup r(\sim B)$ sii $a \in \{k \in K \,|\, I(B,k) = 1\} \cup \{k \in K \,|\, I(B,k^*) \neq 1\} \neq \mathbf{0}$.

Otra manera de ver que el Principio de Expansión es inválido es usando la instancia $P(C) = P(C \wedge C) + P(C\wedge \sim C) = P(C) + P(C\wedge \sim C)$, donde $P(C\wedge \sim C)$ puede ser distinta a cero en la lógica ultramodal de la probabilidad. De forma notable, la Ley de Probabilidad Total $P(A) = P(B)P(A|B) + P(\sim B)P(A| \sim B)$ de la teoría clásica es inválida en la teoría ultramodal, pues $\mu(A) = \mu(B)\frac{\mu(B\wedge A)}{\mu(B)} + \mu(\sim B)\frac{\mu(\sim B\wedge A)}{\mu(\sim B)} = \mu(A\wedge B) + \mu(A\wedge \sim B)$, i.e. el Principio de Expansión.

Respecto al estatus modal de las fórmulas, tenemos los siguientes resultados:

Teorema 4.7. $0 \leq \mu(A) \leq 1$ para toda A

Prueba.

$$\begin{aligned}
0 &= \mu(\mathfrak{f}) \\
&\leq \mu(A) \\
&\leq \mu(\mathfrak{t}) \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

[28]La ultramodalidad demanda que los*principios de expansión*, como $A \vdash (A\wedge \sim B) \vee (A \wedge B)$, y sus duales, los *principios de eliminación o supresión* como $(A\wedge \sim B) \vee (A \wedge B) \vdash A$, sean inválidos; ver (Hyde y Priest 2017, p.17). Ver (Cano Jorge y Estrada-González 2020) para definiciones generalizadas de estas nociones y un estudio de su rol en argumentos paradójicos de la física cuántica, particularmente en el teorema de Bell.

$\square$

Los siguientes no son teoremas:

- $0 < \mu(A) < 1$ sii A es contingente.

  Contraejemplo: podemos tener $0 < \mu(A) < 1$ con una fórmula A que no sea contingente, como con una falsedad lógica de la forma $p_0 \wedge \sim p_0$, puesto que $I(p_0 \wedge \sim p_0, k) = 1$ para algún mundo no normal k, por lo que $\mu(A) \neq 0$; por otro lado, $\mu(A) \neq 1$ pues hay al menos un mundo normal, a saber $T \in \mathbf{0}$, tal que $I(p_0 \wedge \sim p_0, T) \neq 1$.

- $\mu(A) = 1$ sii A es una verdad lógica.

  Contraejemplo: sea A una verdad lógica de la forma $p_0 \vee \sim p_0$ que es válida únicamente en situaciones completas; puesto que hay situaciones incompletas $k \in K$ tales que $I(p_0 \vee \sim p_0, k) \neq 1$, entonces $\mu(A) \neq 1$.

- $\mu(A) = 0$ sii A es una falsedad lógica.

  Contraejemplo: sea A una falsedad lógica de la forma $p_0 \wedge \sim p_0$ que es inválida únicamente en situaciones consistentes; puesto que hay situaciones inconsistentes $k \in K$ tales que $I(p_0 \wedge \sim p_0, k) = 1$, entonces $\mu(A) \neq 0$.

Quizá la característica más importante de la lógica ultramodal de la probabilidad es su función c, que es introducida para calcular probabilidades condicionales como implicaciones parciales.

Definición 4.17. La medida de *implicación parcial* entre dos fórmulas B y A, denotado $c(B, A)$ —léase "A implica parcialmente a B"—, se define a partir de las *funciones de confirmación* (c-funciones) como la proporción de B-situaciones (mundos donde B es verdad) donde también es verdad que A:

$$c(A, B) \overset{df}{=} \frac{\mu(A \wedge B)}{\mu(B)}$$

y se estipula que $c(A, B) = 1$ cuando $\mu(B) = 0$.

Teorema 4.8. $0 \leq c(H, E) \leq 1$

Prueba. Si $\mu(H \wedge E) \neq 0$, entonces, puesto que $\mu(H \wedge E) \leq \mu(E)$ tenemos que $c(H, E) = \frac{\mu(H \wedge E)}{\mu(E)} \leq 1$; y si $\mu(A \wedge B) = 0$, entonces $c(H, E) = \frac{\mu(H \wedge E)}{\mu(E)} = 0$ $\square$

Teorema 4.9. Si $E \rightarrow H$ entonces $c(H, E) = 1$

Prueba. Si $E \rightarrow H$ entonces $E \leftrightarrow (H \wedge E)$, por lo que $\mu(E) = \mu(H \wedge E)$, y entonces

$$c(H, E) = \frac{\mu(H \wedge E)}{\mu(E)} = \frac{\mu(H \wedge E)}{\mu(H \wedge E)} = 1$$

. $\square$

Teorema 4.10. Si $E_1 \leftrightarrow E_2$ entonces $c(H, E_1) = c(H, E_2)$

Prueba. Si $E_1 \leftrightarrow E_2$ entonces $\mu(E_1) = \mu(E_2)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} c(H, E_1) &= \frac{\mu(H \wedge E_1)}{\mu(E_1)} \\ &= \frac{\mu(H \wedge E_2)}{\mu(E_2)} \\ &= c(H, E_2) \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.11. Si $H_1 \leftrightarrow H_2$ entonces $c(H_1, E) = c(H_2, E)$

Prueba. Si $H_1 \leftrightarrow H_2$ entonces $\mu(H_1) = \mu(H_2)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} c(H_1, E) &= \frac{\mu(H_1 \wedge E)}{\mu(E)} \\ &= \frac{\mu(H_2 \wedge E)}{\mu(E)} \\ &= c(H_2, E) \end{aligned}$$

$\square$

Sin embargo, los siguientes no son teoremas:

- Si $E \supset H$ entonces $c(H, E) = 1$

  Contraejemplo: si E es contradictoria (de la forma $p_0 \wedge \sim p_0$), por *Ex Contradictione Quodlibet* se sigue $E \supset H$ para cualquier H, pero bien puede que $\mu(E) \neq 0$ porque hay un mundo no normal donde $p_0 \wedge \sim p_0$ es verdad, lo cual evitaría tener un denominador de valor cero al calcular la c-función, lo cual implicaría $c(H, E) = \frac{\mu(H \wedge E)}{\mu(E)} = 1$ por la estipulación de la Definición 4.17; así, puede haber situaciones en las que $p_0 \wedge \sim p_0$ es verdad pero alguna H es falsa, lo que no queda capturado por el condicional material.

- Si $E \supset \sim H$ entonces $c(H, E) = 0$

  Contraejemplo: supongamos que $E \supset \sim H$ y sea H de la forma $p_0 \wedge \sim p_0$, así que $E \supset \sim (p_0 \wedge \sim p_0)$, i.e. $E \supset (\sim p_0 \vee p_0)$ por leyes de De Morgan y Doble Negación; para tener que $c(H, E) = 0$ necesitamos que $\{k \in K \,|\, I(H, k) = 1\} \cap \{k \in K \,|\, I(E, k) = 1\} = \emptyset$ pero, por Imposión, todos los mundos que hacen verdadero a E también hacen verdadero a $\sim p_0 \vee p_0$, por lo cual dicha intersección es no vacía.

- Si $E \prec H$ entonces $c(H, E) = 1$

  Contraejemplo: si $E \prec H$ entonces $I(\Box(E \supset H), a) = 1$, i.e. para todo $b \in K$ tal que $\mathcal{R}ab$, $I(E \supset H, b) = 1$ por lo cual $I(E, b) \neq 1$ o $I(H, b) = 1$. Para tener que $c(H, E) = 1$ necesitamos que $\{k \in K \mid I(H, k) = 1\} \cap \{k \in K \mid I(E, k) = 1\} = \{k \in K \mid I(E, k) = 1\}$ pero esto no se cumple si E es de la forma $p_0 \wedge \sim p_0$ y existe algún $c \in K$ inaccesible desde a donde $I(p_0 \wedge \sim p_0, c) = 1$ a pesar del hecho de que $E \prec H$ es verdad en virtud de que $I(p_0 \wedge \sim p_0, b) \neq 1$, i.e. a pesar de que también haya situaciones (aquellas accesibles desde a) donde $p_0 \wedge \sim p_0$ no es verdad, pues (contra *Ex Contradictione Quodlibet*) H podría no tener ninguna relación con E y por tanto podría haber situaciones inaccesibles desde a donde E es verdad pero H no lo es.

- Si $E_1 \succ\prec E_2$ entonces $c(H, E_1) = c(H, E_2)$

  Contraejemplo: dado que, como mostramos arriba, no es el caso que la equivalencia estricta entre dos fórmulas implica que sus medidas son idénticas, no es posible substituir tales fórmulas dentro de las c-funciones.

- Si $H_1 \succ\prec H_2$ entonces $c(H_1, E) = c(H_2, E)$

  Contraejemplo: como en el argumento previo.

- Si H es una verdad lógica, entonces $c(H, E) = 1$.

  Contraejemplo: H podría ser de la forma $p_0 \vee \sim p_0$ y E podría no tener relación alguna con H (por no compartir entre ellas ningún parámetro proposicional, por ejemplo); así que si Implosión debe ser inválido por criterios de relevancia lógica, entonces $\mu(E) \neq \mu(H \wedge E)$, pues $p_0 \vee \sim p_0$ será verdad en mundos normales (donde E puede o no ser verdad también) pero también hay situaciones incompletas donde E puede ser verdad pero $p_0 \vee \sim p_0$ no lo es.

- Si H es una falsedad lógica, entonces $c(H, E) = 0$.

  Contraejemplo: H podría ser de la forma $p_0 \wedge \sim p_0$ porque hay alguna E que imiplica (confirma) tanto p_0 como $\sim p_0$, y así la intersección $\{k \in K | I(E, k) = 1\} \cap \{k \in K | I(H, k) = 1\}$ es no vacía y contiene mundos no normales.

- $c(\mathfrak{t}, E) = 1$

  Contraejemplo: si E es de la forma $p_0 \wedge \sim p_0$ entonces los mundos $a \in r(E)$ son no normales y son tales que $a \notin r(\mathfrak{t}) \subseteq O$.

- $c(\sim\mathfrak{t}, E) = 0$

  Contraejemplo: la intersección $r(E) \cap r(\mathfrak{f})$ podría ser no vacía ya que E podría ser de la forma $p_0 \wedge \sim p_0$ y ser verdad en mundos no normales..

Finalmente, enunciamos sin probar los resultados más robustos de la lógica ultramodal de la probabilidad.[29]

Teorema 4.12. (*Teorema General de la Adición*):

$$c(H \vee J, E) = c(H, E) + c(J, E) - c(H \wedge J, E)$$

Teorema 4.13. (*Teorema General de la Multiplicación*):

$$c(H \wedge J, E) = c(H, E) \times c(J, E \wedge H) = c(J, E) \times c(H, E \wedge J)$$

Teorema 4.14. (*Teorema General de la División*):

$$c(H, E \wedge J) = \frac{c(H, E) \times c(J, E \wedge H)}{c(J, E)}$$

Teorema 4.15. (*Teorema Ultramodal de Bayes*): si $c(J, E) > 0$ y $H_1, \ldots, H_n$ son tales que

(i) $(E \wedge J) \to (H_1 \vee \cdots \vee H_n)$ y

(ii) $H_1, \ldots, H_n$ son excluyentes en parejas[30] con respecto a E o a J

entonces,

a)
$$c(H, E \wedge J) = \frac{c(J \wedge H, E)}{\sum_{i=1}^{n} c(J \wedge H_i, E)} = \frac{c(H, E) \times c(J, E \wedge H)}{\sum_{i=1}^{n}(c(H_n, E) \times c(J, E \wedge H_i))}$$

b) si $c(H_i, E)$ tiene el mismo valor para cada i (desde 1 hasta n) entonces,

$$c(H, E \wedge J) = \frac{c(J, E \wedge H)}{\sum_{i=1}^{n} c(J, E \wedge H_i)}$$

Si bien esta teoría relevantista de la probabilidad no ha sido desarollada con suficiencia[31], contar con ella (o alguna teoría similar a ella) sería un requisito indispensable para

[29]Las pruebas que dio Routley para estos se encuentran en (Routley 1980, pp. 950, 954).

[30]Un conjunto S de fórmulas bien formadas es *excluyente en parejas* si cada fórmula de S excluye cualquier otra fórmula de S, donde una fórmula A *excluye* a una fórmula B sii $r(A) \cap r(B) = \emptyset$ (Routley 1980, p.953).

[31]El texto original de Routley es solo un esbozo de la teoría y no fue trabajado en obras posteriores de su autor ni recuperado por otras personas en la literatura desde su aparición. En (Cano Jorge y Estrada-González (2021) se ofrecen algunos avances y direcciones a seguir para continuar la investigación de esta teoría matemática inconsistente.

desarrollar el programa relevantista en física cuántica. Esto es, si las críticas relevantistas a las paradojas cuánticas (que revisaremos en seguida) son correctas, entonces una teoría cuántica que use una lógica relevante de trasfondo tendrá que venir acompañada de una teoría de la probabilidad igualmente relevantista para modelar las predicciones probabilísticas de la teoría cuántica (hasta donde sea correcto). Este argumento podría extenderse a otras áreas de la matemática, es decir, podría argumentarse que el programa relevantista también requiere una reformulación de las teorías matemáticas detrás de los espacios de Hilbert, o del análisis complejo, etc., pues dichas teorías empleadas por la física cuántica están basadas en lógica clásica (o forman parte de la matemática clásica basada en lógica clásica); y esto es algo que Routley (1980) notó al final su obra, que coincide plenamente con el espíritu reconstructivo anunciado en dicho texto, pero que queda fuera de los límites de este trabajo y en espera de desarrollarse en futuras investigaciones. No obstante, hemos mostrado aquí los primeros pasos a dar para desarrollar el programa relevantista y que, efectivamente, dar estos pasos es posible.

4.2.11 DQL y DK contra las paradojas cuánticas

Hay una manera de mostrar que razonar con la lógica clásica o booleana genera efectos negativos o perniciosos en el desarrollo de ciertas teorías científicas. El caso de la teoría cuántica estándar es interesante para argumentar en esa dirección, ya que la lógica cuántica nace para capturar adecuadamente la lógica de las proposiciones de esta teoría física y algunos de sus defensores tomaron la existencia de esta teoría científica con dicha lógica no clásica como base para argumentar en contra del uso (incuestionado) de la lógica clásica en ciencia. Aunque aquí hemos dicho que la postura relevantista ultramodal se opone a la primacía de la lógica clásica en la ciencia y la filosofía, y señala las paradojas de la implicación como las causantes de argumentos paradójicos en teorías científicas, i.e. como efectos perniciosos, típicamente se ha discutido este punto desde una dirección distinta y equivocada (bajo la perspectiva relevantista) en su identificación de las causas lógicas de los argumentos paradójicos en la teoría cuántica, como veremos en nuestra discusión acerca del rechazo a Distribución. En este apartado final hablaremos de las posibles aplicaciones de **DQL** y/o **DK** en torno al análisis de argumentos, experimentos y teoremas limitativos que son característicos de la teoría cuántica.

Como hemos adelantado a lo largo de este capítulo, los principios de expansión (y eliminación) son centrales en la estrategia de Routley para disolver las paradojas de la teoría cuántica. En particular —y esta es la motivación física para utilizar lógica relevante y ultramodal— la invalidez del principio de expansión

$$A \vdash A \wedge ({\sim} B \vee B)$$

captura los aspectos torales de la física cuántica: el *problema de la medición* y, relacionado con esto, el *Principio de Incertidumbre*. Para ver esto, consideremos el experimento Stern-Gerlach.

Siguiendo a Hughes (1989, pp. 1-8), imaginemos una fuente que dispara átomos de plata hacia una pantalla que los detecta tras pasar en el trayecto entre los polos de un par de magnetos cortados en forma especial, i.e. un aparato Stern-Gerlach. La observación obtenida tras realizar este experimento es que el rayo o haz de átomos de plata se divide en dos, probando que las partículas —específicamente los electrones— tienen una característica intrínseca llamada espín (1/2) y que reacciona o interactúa con campos electromagnéticos al tomar las modalidades "arriba" o "abajo" respecto a cierta dirección o componente.

El experimento Stern-Gerlach ilustra perfectamente el problema de la medición porque muestra como el colapso de la función de onda provocado por una segunda medición altera la información previamente obtenida en la primera, y consiste en el siguiente arreglo: la fuente dispara el rayo de átomos de plata, este pasa por un primer aparato Stern-Gerlach orientado de forma vertical y el haz se bifurca según se trate de partículas con espín arriba o abajo a lo largo de la componente x; el rayo de átomos con espín arriba en x continúa viajando para pasar por un segundo aparato Stern-Gerlach orientado de forma horizontal que bifurcará el haz según se trate de partículas con espín arriba o abajo a lo largo de la componente y.

La conclusión intuitiva —y errónea— de tal arreglo es que todas las partículas detectadas con espín arriba a lo largo de y también tienen espín arriba a lo largo de x porque todas las partículas a las que se les midió espín en y son aquellas partículas que el primer aparato permitió pasar hacia el segundo por tener espín arriba en x. Pero lo que ocurre en realidad es que si volvemos a medir espín sobre x a aquellas partículas que el aparato deja pasar al medir espín en y, el haz o rayo de partículas nuevamente se bifurca en partículas con espín arriba en x o espín abajo en x, contrario a lo que se esperaría (i.e. que todas las partículas tuvieran espín arriba en x).

Esto sugiere que alguno(s) de los siguientes supuestos es incorrecto (Hughes 1989, p. 6):

1. Cuando asignamos un valor numérico a una cantidad física de un sistema podemos pensar esta cantidad como una *propiedad* del sistema, i.e. hablamos significativamente al decir que el electrón *tiene* espín arriba a lo largo de cierta componente.

2. Podemos asignar un valor a cada cantidad física de un sistema en cualquier instante —e.g. podemos hablar significativamente de que el electrón tiene espín arriba en x y espín arriba en y.

3. Que el aparato separa átomos de acuerdo con los valores de una cantidad física particular, i.e. de acuerdo con *las propiedades que poseen* las partículas.

4. Que mientras el aparato hace 3., las otras propiedades de la partícula o el sistema no cambian.

Así, en consonancia con el principio de incertidumbre, la información obtenida en la primera medición —espín a lo largo de x— ya no es la misma tras efectuar la segunda medición —espín a lo largo de y—. Esto indica que la segunda medición ha alterado los resultados obtenidos en la primera y, por tanto, que no es posible conocer el espín de una partícula en dos componentes diferentes de manera simultánea —i.e. tenemos una relación de incertidumbre.

Ahora es claro que el principio de expansión $A \vdash A \wedge (\sim B \vee B)$ debe ser inválido según estos principios básicos de la teoría cuántica, pues siguiendo la interpretación del experimento Stern-Gerlach:

- A es la proposición "la partícula tiene espín arriba con respecto a la dirección x";
- B es la proposición "la partícula tiene espín arriba con respecto a la dirección y"; y
- $\sim B$ es la proposición "la partícula tiene espín abajo con respecto a la dirección y".

Entonces, la inferencia desde A hacia $A \wedge (\sim B \vee B)$ es inválida, pues si una partícula tiene espín arriba en x entonces no es el caso que tiene espín arriba en x y además tiene espín arriba o abajo en y, pues esto violaría la relación de incertidumbre mencionada. La razón es que la medición realizada para establecer si $\sim B$ o si B es el caso, aniquila la información obtenida en la primera medición que estableció que A es el caso. Claramente, aplicar Distribución al principio de expansión genera una versión equivalente de esta argumentación inválida:

$$A \vdash (A \wedge \sim B) \vee (A \wedge B)$$

no puede ser válido que "si la partícula tiene espín arriba en x, entonces la partícula tiene espín arriba en x y espín abajo en y, o bien tiene espín arriba en x y espín arriba en y", de nuevo violando la relación de incertidumbre.

De forma dual, el correspondiente principio de eliminación

$$A \wedge (\sim B \vee B) \vdash A$$

es inválido por razones similares: si suponemos que la conjunción $A \wedge (\sim B \vee B)$ es verdadera, no necesariamente se sigue A pues la medición que determine $\sim B$ ó B, altera el valor del espín en la dirección x que se supuso como "arriba". Lógicamente, este principio de eliminación es una instancia de (SLL_1), i.e. del principio de Simplificación o eliminación de la conjunción, lo que quiere decir que el análisis relevantista ultramodal de la teoría cuántica ofrece un caso en el que (SLL_1) es inválido y esto permite, quizá no de forma sorprendente, una conexión directa con las lógicas *conexivas*.[32]

Las lógicas conexivas pertenecen a la familia de las lógicas *sociativas*, i.e. todas aquellas lógicas que rechazan alguno de los principios lógicos involucrados en la siguiente prueba de (EFQ):

1	$(A\wedge \sim A) \rightarrow\sim A$	Simplificación
2	$\sim A \rightarrow (\sim A \vee B)$	Adición
3	$(A\wedge \sim A) \rightarrow (\sim A \vee B)$	Transitividad de $\rightarrow$, 1, 2
4	$(A\wedge \sim A) \rightarrow A$	Simplificación
5	$(A\wedge \sim A) \rightarrow (A \wedge (\sim A \vee B))$	Regla de Composición, 3, 4
6	$(A \wedge (\sim A \vee B)) \rightarrow B$	Silogismo Disyuntivo
7	$(A\wedge \sim A) \rightarrow B$	Transitividad de $\rightarrow$, 5, 6

Las líneas 1, 2, 4 y 6 son instancias de sus correspondientes principios lógicos. Los principios involucrados en la prueba de (EFQ) son:

($\text{SLL}_1^{\rightarrow}$) Simplificación: $(A \wedge B) \rightarrow A$ y $(A \wedge B) \rightarrow B$

($\text{SLL}_1^{\rightarrow\prime}$) Adición: $A \rightarrow (A \vee B)$ y $B \rightarrow (A \vee B)$

($\text{Cut}^{\rightarrow}$) Transitividad de $\rightarrow$: si $D \rightarrow E$ y $E \rightarrow F$, entonces $D \rightarrow F$

($\text{SLL}_2^{\rightarrow}$) Regla de Composición: si $D \rightarrow E$ y $D \rightarrow F$, entonces $D \rightarrow (E \wedge F)$

($\text{DS}^{\rightarrow}$) Silogismo Disyuntivo: $(A \wedge (\sim A \vee B)) \rightarrow B$

Rechazar al menos uno de estos principios es suficiente para invalidar (EFQ). Esto hace que toda lógica sociativa sea paraconsistente. Pero de acuerdo con esta definición, el rechazo a cada principio involucrado en la prueba determina un tipo diferente de lógica sociativa (Hyde y Priest 2017, p. 12):

1. Lógicas que no simplifican: rechazan ($\text{SLL}_1^{\rightarrow}$); e.g. lógicas *conexivas*.
2. Lógica no aditivas: rechazan ($\text{SLL}_1^{\rightarrow\prime}$); e.g. lógicas de Parry.
3. Lógicas no transitivas o sin corte: rechazan ($\text{Cut}^{\rightarrow}$); e.g. lógicas relacionantes.
4. Lógicas no compositivas o no adjuntivas: rechazan ($\text{SLL}_2^{\rightarrow}$); e.g. lógicas de la confirmación.

[32]Típicamente, decimos que una lógica es conexiva si valida la Tesis de Aristóteles $\sim (A \rightarrow\sim A)$ y su conversa $\sim (\sim A \rightarrow A)$, así como la Tesis de Boecio $(A \rightarrow B) \rightarrow\sim (A \rightarrow\sim B)$ y su conversa $(A \rightarrow\sim B) \rightarrow\sim (A \rightarrow B)$; para un recuento general sobre estas lógicas véase (Estrada-González, L. y Ramírez-Cámara, E. 2016).

5. Lógicas que rechazan (DS$^{\rightarrow}$); e.g. lógicas de la *relevancia*.

Por eso es quizá poco sorprendente la conexión o relación entre las lógicas conexivas y el análisis ultramodal de la teoría cuántica; y quizá algo similar podría decirse acerca de la teoría ultramodal de la probabilidad como lógica de la confirmación. Cualificar o incluso rechazar Simplificación es característico de las lógicas conexivas y estas pueden combinarse con criterios de relevancia como los que hemos revisado en este trabajo, por lo que no sólo parece claro que la teoría cuántica requiere una lógica no clásica (una lógica subestructural, de hecho) sino que incluso parece razonable que requiera una lógica *contra-clásica* como la lógica conexiva.[33]

Relevancia lógica y las relaciones de incertidumbre

De acuerdo con Routley (1980, p. 956), las críticas a la lógica clásica provenientes de la filosofía de la teoría cuántica —especialmente aquellas dirigidas hacia el principio de Distribución— dependen de propiedades de la negación de la teoría clásica de la probabilidad que, como hemos visto, no están presentes en la negación de la teoría ultramodal de la probabilidad ya que depende de la condición (NN) de **DMLt**.

A partir de (Finkelstein 1972), que defiende que todas las anomalías de la teoría cuántica surgen por utilizar la lógica clásica, Routley muestra el terreno común (la necesidad de una lógica no clásica para analizar los argumentos y experimentos de la teoría cuántica) entre el enfoque relevantista-ultramodal y el enfoque de Finkelstein, quien propone tres ejemplos donde cierta proposición debe ser falsa bajo las consideraciones de la teoría cuántica pero es válidamente deducida a partir de principios de la lógica clásica. No obstante, mientras que Finkelstein sugiere abandonar la lógica clásica por una lógica cuántica *à la* Birkhoff y Von Neumann, Routley propone su ultralógica.

Los ejemplos paradójicos que propone Finkelstein efectivamente deberían ser considerados como tales desde la perspectiva relevantista ya que dependen de Silogismo Disyuntivo. Veamos dos de ellos.

El primer ejemplo de paradoja cuántica involucra la relación de incertidumbre entre posición y momento. Supongamos que la medición del momento angular J de una molécula diatómica determina que $J = 0$. El rango de coordenadas angulares acimutales del eje molecular (i.e. el rango de posiciones que puede ocupar la partícula) se divide en n celdas iguales $I_1(0 \leq \theta \leq \delta\theta)$, $I_2(\delta\theta \leq \theta \leq 2\delta\theta), \ldots$, donde $\delta\theta = 2\pi/n$. Entonces

1. $\theta \in I_1 \vee \theta \in I_2 \vee \cdots \vee \theta \in I_n$

Pero de acuerdo con el Principio de Incertidumbre, para toda molécula es falso que

[33] Una lógica es contra-clásica cuando incluye dentro de sus axiomas o principios válidos alguna tesis que sea inválida en la lógica clásica. Por ejemplo, las tesis de Aristóteles y Boecio no son válidas en la lógica clásica pero sí lo son en la lógica conexiva; lo mismo ocurre con el principio de Relatividad $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow A$, que caracteriza otra clase de lógicas contra-clásicas llamadas *lógicas abelianas*.

2. $J = 0 \wedge \theta \in I_j$

para toda j, $1 \leq j \leq n$. Si abreviamos la premisa que establece que $J = 0$ como q y usamos p_j para representar que $\theta \in I_j$, entonces estos supuestos se reconstruyen lógicamente como:

1. $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$
2. $\sim(q \wedge p_j)$ para toda j
3. q

No obstante, por De Morgan en 2. se sigue que

4. $\sim q \vee \sim p_j$ para cada j

y si utilizamos lógica clásica entonces de 3. y 4. se sigue, por Silogismo Disyuntivo, que

5. $\sim p_j$ para cada j, i.e. $\sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \cdots \wedge \sim p_n$

lo cual establece la paradoja ya que, por De Morgan, 5. es $\sim(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n)$, lo que contradice 1. Evidentemente el enfoque ultramodal bloquea este argumento paradójico al invalidar Silogismo Disyuntivo.

El segundo ejemplo de paradoja cuántica involucra la relación de incertidumbre entre espines a lo largo de dos distintas componentes a través del experimento Stern-Gerlach que discutimos al rededor del principio de Expansión. En ese caso, p_x^+ representa que la partícula tiene espín arriba a lo largo de x (i.e. que $\sigma_x = +h/2$) y p_x^- representa que la partícula tiene espín abajo a lo largo de x (i.e. que $\sigma_x = -h/2$), y de forma similar para p_y^+ y p_y^-. Los supuestos del argumento Stern-Gerlach son:

1. p_x^+
2. $p_y^+ \vee p_y^-$
3. $\sim(p_x^+ \wedge p_y^+)$
4. $\sim(p_x^+ \wedge p_y^-)$

Por De Morgan en 3. (que es una relación de incertidumbre entre espines),

5. $\sim p_x^+ \vee \sim p_y^+$

y si usamos lógica clásica entonces por Silogismo Disyuntivo entre 1. y 5.,

6. $\sim p_y^+$

pero por De Morgan en 4. (que también es una relación de incertidumbre entre espines),

7. $\sim p_x^+ \vee \sim p_y^-$

y por Silogismo Disyuntivo entre 1. y 7.,

8. $\sim p_y^-$

así que $\sim p_y^+ \wedge \sim p_y^-$ por Adjunción y $\sim (p_y^+ \vee p_y^-)$ por De Morgan, lo que contradice 2. Nuevamente, este argumento queda bloqueado en el enfoque ultramodal.

Estos dos ejemplos muestran que, efectivamente, el uso de lógica clásica en razonamientos sobre la teoría cuántica conduce a paradojas (como quería Finkelstien) pero en concreto establecen que una lógica relevante es el candidato ideal para disolver estas paradojas ya que dependen de Silogismo Disyuntivo, un principio característicamente inválido en las lógicas de la relevancia. En realidad, nada en estos argumentos sugiere la posibilidad de bloquearlos por medio del uso de ortológica o lógica cuántica.

Distribución y el experimento de doble rendija

El experimento de doble rendija es fundamental en la teoría cuántica ya que establece la dualidad partícula-onda. El experimento consiste de una fuente que dispara fotones hacia una pantalla que los detectará después de que pasen en el trayecto por una barrera que tiene dos rendijas. Es posible abrir una, ambas o ninguna de las rendijas. Si abrimos solo una de ellas, en la pantalla queda registrado el impacto de los fotones en el lado correspondiente a la rendija abierta; pero si abrimos ambas rendijas, lo que se observa en la pantalla es un patrón de interferencia que corresponde al comportamiento de una onda. Esto nos dice que un fotón se comporta como partícula pero también como onda.

El ataque a Distribución que Routley estudia es el de Putnam (1975, p. 180-181), que utiliza el experimento de doble rendija como ejemplo de una situación donde falla dicho principio lógico. Supongamos que A_1 representa que el fotón pasa por la rendija 1, A_2 que el fotón pasa por la rendija 2, y B que el fotón cae en algún punto de la pantalla. Si bien es verdad que $A_1 \vee \sim A_1$ (y lo mismo para A_2), es un error asumir en el contexto de este experimento que

$$B \to ((B \wedge A_1) \vee (B \wedge A_2))$$

un principio que depende no sólo de Distribución sino principalmente del principio de expansión $B \to (B \wedge (A_1 \vee \sim A_1))$; i.e. si $B \to (B \wedge (A_1 \vee \sim A_1))$ entonces, por Distribución, $B \to ((B \wedge A_1) \vee (B \wedge \sim A_1))$ i.e. $B \to ((B \wedge A_1) \vee (B \wedge A_2))$.

La crítica de Routley va en la dirección de que la conclusión paradójica de que el fotón pasa por ambas rendijas lo es (i.e. es paradójica) en el contexto clásico pero las lógicas y la teoría de la probabilidad basadas en **DMLt** son capaces de acomodar tal conclusión en un marco paraconsistente. Como hemos visto, los principios de expansión (y eliminación) son implicaciones irrelevantes; en particular, el principio $B \to (B \wedge (A_1 \vee \sim A_1))$ no puede ser válido en el contexto de la teoría cuántica porque el problema de la medición establece condiciones bajo las cuales dicho principio puede fallar —e.g. con el experimento Stern-Gerlach.

El ataque a Distribución viene motivado en buena medida por el hecho de que Distribución es inválido en la ortológica y la lógica cuántica, pues sus estructuras algebraicas son retículos no distributivos. Sin embargo la observación de Routley es que las paradojas están presentes en la forma de principios de expansión antes de aplicar Distribución. El hecho de que los principios de expansión sean el problema u origen de las paradojas cuánticas se debe fundamentalmente al principio de incertidumbre de Heisenberg y el problema de la medición.

Efectivamente, $B \vee \sim B$ es lógicamente verdadero en el contexto de las proposiciones experimentales de la lógica cuántica; pero si la propiedad medida en la proposición B es un operador que no conmuta con otro cuya medición queda expresada por la proposición A, entonces es falaz afirmar que $A \vdash A \wedge (B \vee \sim B)$ es válido ya que el hecho de medir B simultáneamente con A, haría que el resultado de la medición de A sea alterado por la medición de B. Esto nos dice que en el primer momento, cuando medimos A, el valor de $B \vee \sim B$ no puede estar definido, no puede ser ni verdadero ni falso, sino hasta que midamos B, cosa que alterará el valor de A si A y B no conmutan.

Por ejemplo, si A representa una proposición sobre la velocidad de una partícula y si B representa una proposición sobre la posición de esa misma partícula, entonces medir A en un primer momento (y obtener a como velocidad, por ejemplo) y luego concluir que hay una medición simultánea de B asumiendo que la velocidad de la partícula sigue siendo a, producirá una posición determinada b para la partícula pero su velocidad ya no será a. Así, A no necesariamente es el elemento mínimo de la conjunción $A \wedge (B \vee \sim B)$; dicho de otro modo, puede ser que sea verdadera A por sí sola, pero A puede dejar de ser verdadera si tomamos esa verdad en conjunción con $B \vee \sim B$ donde B no conmuta con A. Por tanto, el principio de expansión es válido si y sólo si A y B representan mediciones de cantidades compatibles, i.e. operadores conmutantes, pero como la teoría cuántica debe incorporar relaciones de incertidumbre de acuerdo conl principio de Heisenberg, el principio de expansión es inválido en general para las lógicas que pretendan recuperar nociones cuánticas.

Contra el teorema de Bell

A diferencia de lo que ocurre en teorías físicas clásicas, la formulación ortodoxa de la teoría cuántica incluye entre sus principios que la medición de cualidades físicas no revela simplemente valores preexistentes o predeterminados. Más bien, el resultado particular de una medición es una consecuenca de la interacción entre el sistema medido y el sistema de medición. Sin embargo, este principio, de acuerdo con (Einstein, Podolsky, Rosen 1935), entra en conflicto con cierta idea de localidad.

En 1935, Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) propusieron una paradoja que pretende mostrar que la descripción de la realidad física proporcionada por la teoría cuántica es *incompleta*. Sostienen que hay "elementos de la realidad" que no están contenidos en la teoría cuántica y conjeturan que es posible construir una teoría que sí los contenga. El criterio de compleción utilizado en la paradoja es el siguiente:

Compleción (EPR) : *Una descripción del mundo es completa solo si nada que sea verdadero del mundo (nada que sea un "elemento de la realidad") queda fuera de esa descripción.*

En el experimento mental planteado en su artículo, tomamos dos partículas A y B que interactuaron de forma tal que quedaron enredadas y después se separaron en direcciones opuestas hasta que existiera una distancia (arbitrariamente) enorme entre ellas. De un lado del universo, Alice mide el momento de la partícula A; mientras que del otro lado del universo Bob mide la posición de la partícula B.

Al estar A y B enredadas, la teoría cuántica predice que:

1. Si Alice mide el momento de A, de inmediato sabemos el momento de B sin que Bob mida el momento de B, pues es su opuesto.

2. Si Bob mide la posición de B, de inmediato sabemos la posición de A sin que Alice mida la posición de A, pues es su opuesto.

Por el Postulado del Colapso, el momento de B y la posición de A son "elementos de la realidad" una vez que medimos el momento de A y la posición de B. Así, *la realidad de B depende de lo que mida Alice en A; y la realidad de A depende de lo que mida Bob en B, no importa qué tan lejos estén, y esto ocurre de forma instantánea.*

Pero si se realiza dicho experimento, habrá un "elemento de la realidad" (posición y momento determinados para A y para B) que no se encuentra en la teoría física (pues *el Principio de Incertidumbre explícitamente lo excluye*). Ergo, *la teoría cuántica es incompleta.*

Además de criticar la compleción de la teoría cuántica —tema que fue muy debatido desde la publicación de esta paradoja—, el argumento que presentaron permitió acuñar un concepto contraintuitivo: la *no localidad* de la teoría cuántica. Diremos que una teoría cuántica es *no local* sii el siguiente criterio de localidad falla:

Localidad (EPR) : *Si dos sistemas están espacialmente separados, la medición realizada en uno de los sistemas no afecta directamente la realidad del otro.*

Vimos en el argumento EPR que Localidad falla para sistemas de partículas enredadas. Además, parece haber una influencia causal instantánea entre el estado de una partícula y la otra sin importar la distancia que hay entre ellas. Como consecuencia, se pensó que la no localidad de la teoría cuántica *viola la teoría general de la relatividad* (pues nada puede viajar más rápido que la luz y la influencia causal o señalización entre partículas parece ser instantánea, i.e. superlumínica). Así, la paradoja EPR sugiere también una tensión entre la teoría cuántica y la teoría de la relatividad.

Sin embargo, el principal problema en el texto de EPR es la compleción de la teoría cuántica. Al final del artículo, los autores se preguntan si la teoría cuántica puede ser completada con variables adicionales que además restauren la causalidad local. Y tres décadas después, el teorema de Bell daría una *respuesta negativa*.

En 1964, John S. Bell retomó la paradoja EPR, formalizó matemáticamente el concepto de Localidad (EPR) y mostró que ninguna teoría local con "variables ocultas/adicionales" puede reproducir las predicciones de la teoría cuántica. El argumento simplificado es:

1. Si el estado de una partícula enredada con otra está determinado localmente por ciertas variables adicionales, entonces la desigualdad de Bell debe cumplirse.

2. Para determinados arreglos, la desigualdad de Bell no se cumple.

$\therefore$ El estado de una partícula enredada con otra no está determinado localmente por ciertas variables adicionales.

Los supuestos del teorema son:

1. La descripción del estado de una partícula es completada con variables adicionales λ.

2. **Localidad (Bell)**: la probabilidad de obtener los resultados A y B con las configuraciones $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dado λ puede escribirse como el producto de la probabilidad de obtener el resultado A con la configuración $\vec{a}$ dado λ y la probabilidad de obtener el resultado B con la configuración $\vec{b}$ dado λ:

$$P_{\vec{a},\vec{b}}(A, B|\lambda) = P_{\vec{a}}(A|\lambda)P_{\vec{b}}(B|\lambda)$$

Si tomamos un experimento como el planteado en EPR pero esta vez midiendo espines a lo largo de diferentes direcciones, podemos usar la definición de **Localidad (Bell)** para derivar la *desigualdad de Bell*:

$$1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \geq |P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})|$$

El objetivo del teorema es mostrar que existen configuraciones del experimento que violan la desigualdad de Bell, que se sigue de Localidad (Bell). Esto indicaría que *el supuesto de Localidad (Bell) debe estar equivocado*. Notamos que esto ocurre aunque se haya tratado de completar la teoría cuántica con variables adicionales, como conjeturaron EPR.

Como consecuencias del teorema de Bell tenemos las siguientes:

- Cualquier teoría cuántica (con o sin variables adicionales) debe ser no local.
- Si la teoría cuántica describe la realidad, entonces esta dice que existen influencias causales no locales que determinan el mundo físico.
- Dichas influencias causales no locales se dan de forma instantánea (i.e. superlumínica, más rápida que la velocidad de la luz) y esto parece violar la teoría de la relatividad. Así que o la teoría cuántica es incorrecta o la teoría de la relatividad es incorrecta.

Bell consideró una teoría cuántica enriquecida con variables adicionales que especifican por completo el estado de un sistema cuántico dado y probó que ninguna teoría física que satisfaga su condición de causalidad local sería capaz de reproducir por completo las predicciones estadísticas de la teoría cuántica. El teorema de Bell muestra que las teorías locales en general (deterministas o no, con variables adicionales o sin ellas) son incompatibles con las predicciones de la teoría cuántica. Para una interesante y clara exposición del teorema y sus supuestos, véase (Norsen 2007).

Por otro lado, Richard Sylvan (Hyde y Priest 2017, cap. 3) proyecta una lista de aplicaciones —principalmente en filosofía de la ciencia pero extendidas a áreas muy diversas— de lo que él llama *lógicas sociativas*, y esta lista incluye al teorema de no localidad de John Stewart Bell (1964), uno de los teoremas más importantes en teoría cuántica. En concreto, Sylvan conjeturó que podríamos objetar contra la validez del teorema de Bell arguyendo que los ya mencionados *principios de expansión* se encuentran presentes en la prueba.

En (Cano Jorge y Estrada-González 2020) se muestra que si leemos las probabilidades del argumento de Bell de manera lógica, entonces la validez de la desigualdad de Bell depende de la validez de principios de expansión.

Utilizando la versión de Harrison de la desigualdad de Bell

$$N(\alpha, \sim\gamma) \leq N(\alpha, \sim\beta) + N(\beta, \sim\gamma)$$

y reescribiéndola de manera conjuntista como

$$(\alpha \cap \gamma^c) \subseteq ((\alpha \cap \beta^c) \cup (\beta \cap \gamma^c)) \cap (((\alpha \cap \beta^c) \cap (\beta \cap \gamma^c))^c) \tag{4.1}$$

para terminar con una reconstrucción lógica de la forma

$$P\wedge \sim R \vdash ((P\wedge \sim Q) \vee (Q\wedge \sim R))\wedge \sim((P\wedge \sim Q) \wedge (Q\wedge \sim R)) \tag{4.2}$$

observamos que (4.2) es un principio de expansión, como Sylvan conjeturó. El argumento para mostrar esta consecuencia consiste en una examinación de los siguientes supuestos aritméticos en la prueba de Bell: sea E cualquier término aritmético; para cualesquiera w, x, y and z tenemos

$0 \leq N(x, \sim y, z) + N(x, y, \sim z)$

Si $N(x_1, \ldots, x_n) \leq N(y_1, \ldots, y_m) + N(z_1, \ldots, z_i)$ entonces $N(x_1, \ldots, x_n) + E \leq N(y_1, \ldots, y_m) + N(z_1, \ldots, z_i) + E$

$0 + N(x_1, \ldots, x_n) = N(x_1, \ldots, x_n)$

$N(x_1, \ldots, x_n) + (N(y_1, \ldots, y_m) + N(z_1, \ldots, z_i)) = N(x_1, \ldots, x_n) + (N(z_1, \ldots, z_i) + N(y_1, \ldots, y_m)) = (N(x_1, \ldots, x_n) + N(y_1, \ldots, y_m)) + N(z_1, \ldots, z_i)$

$N(x, \sim y, z) + N(x, y, z) = N(x, z) \times (N(\sim y) + N(y))$

que, en términos lógicos, se reducen a los siguientes principios:

(R1) $\perp \vdash (A \wedge \sim B \wedge C) \veebar (A \wedge B \wedge \sim C)$

(R2) Si $A \vdash B$ entonces $(A \vee C) \wedge \sim (A \wedge C) \vdash (B \vee C) \wedge \sim (A \wedge C)$

(R3) $(\perp \vee A) \wedge \sim (\perp \wedge A) \dashv\vdash A$

(R4) $A \veebar (B \veebar C) \dashv\vdash A \veebar (C \veebar B) \dashv\vdash (A \veebar B) \veebar C$

(R5) $A \wedge A \dashv\vdash A$

(R6) $A \vee \sim A \dashv\vdash \top$

(R7) $A \wedge \top \dashv\vdash A$

donde (R7) contiene claramente al principio de expansión (y de eliminación).

Estos análisis llevan a la siguiente *conjetura*: tal vez exista esperanza para las teorías cuánticas de variables ocultas por medio de la revisión relevantista de la teoría estándar de la probabilidad y otras formas de razonamiento lógico y matemático, como Sylvan señaló originalmente. La opción de revisar la teoría de la probabilidad ha sido notada —y rechazada— por algunos autores, pero sus argumentos podrían ser insuficientes. Dejamos esto para futuras investigaciones.

Contra el teorema Kochen-Specker

Un punto común entre la aproximación topos teórica de Döring e Isham y la aproximación relevantista de Routley/Sylvan es que ambos proyectos pretender esquivar las consecuencias del teorema Kochen-Specker.

Por un lado, vimos en la Sección 2.4 de este trabajo que los topos cuánticos pretenden que toda proposición física tenga, de manera simultánea, un valor de verdad y la estrategia para lograr esto es abandonar la idea de que los únicos valores de verdad de Ω son 1 y 0 y apostar por una lógica intuicionista multivaluada para sus topos.

Por otro lado, Sylvan dice que el teorema Kochen-Specker podría no sostenerse bajo consideraciones relevantistas puesto que, al igual que el teorema de Bell, su prueba utiliza principios de expansión (Hyde y Priest 2017, p.27), pero no existe ningún trabajo al respecto. Esto es algo que dejamos para investigaciones futuras.

Conclusiones

En este trabajo exploro el proyecto de Döring e Isham sobre los topos cuánticos y critico negativamente los argumentos filosóficos que sugieren para defender que los topos cuánticos dan una interpretación "más realista" de la mecánica cuántica con dicha reformulación categorista, pues, entre otras cosas, sugieren que se obtiene una forma de realismo al utilizar lógica clásica (o al menos intuicionista) en su reconstrucción de la mecánica cuántica.

También comparo dicho proyecto con su rival directo, que es la teoría cuántica categorista de Abrahamsky y Coecke, y que se basa en la interpretación de la teoría cuántica de la computación y la información, pues en dicha teoría utilizan categorías simétricas monoidales (en lugar de topos, i.e. categorías cerradas cartesianas con clasificador de subobjetos) y trabajan con una lógica lineal, que es una lógica no clásica de tipo subestructural que se caracteriza por rechazar las reglas estructurales de Contracción y Debilitamiento.

Tras las críticas y el análisis comparativo, cierro mi trabajo sugiriendo que el uso de ciertas lógicas de la relevancia (que también son no clásicas y subestructurales) propuestas por Richard Routley/Sylvan ayudan a razonar de acuerdo con ciertos principios físicos centrales como el de Heisenberg sobre las relaciones de incertidumbre entre pares de operadores no conmutantes, así como a tratar de diluir o resolver algunas paradojas sobre la no localidad de la mecánica cuántica, y otros problemas interpretativos importantes.

En este trabajo he defendido la siguiente **tesis**:

Los topos cuánticos no resuelven los problemas de interpretación de la mecánica cuántica pero otros sistemas formales que emplean lógicas subestructurales como la lógica lineal y las lógicas relevantes sí ofrecen soluciones a diversos problemas interpretativos de la mecánica cuántica.

En el capítulo 1 ofrecimos un planteamiento filosófico del problema de la interpretación de la mecánica cuántica basado en las consecuencias y compromisos de carácter ontológico y epistémicos que hay detrás de las diferentes interpretaciones de la mecánica cuántica. De entre estos, cobraron importancia hacia el final del trabajo los criterios sobre el colapso de la función de onda, la no localidad de la teoría, y la introducción de variables ocultas, pues parte de los resultados del capítulo 4 han sido generalizados en (Cano Jorge y Estrada-González, 2020) y (Cano Jorge, 2020), que siguen a Routley y su crítica al uso de principios de expansión en las pruebas del teorema de Bell.

Mientras que el capítulo 2 de este trabajo presenta los detalles del proyecto topos teórico para la mecánica cuántica, el capítulo 3 señala sus principales problemas técnicos y filosóficos. La filosofía Neorrealista de Döring e Isham y sus métodos categoristas no proporcionan soluciones al problema de la interpretación de la mecánica cuántica porque

a) desde el punto de vista filosófico, el realismo que proponen es demasiado ingenuo al suponer que la adecuación de una teoría física con las leyes de la lógica clásica implican, inspirados en la lectura metafísica de Dummet para el principio de Tercero Excluso, que la teoría física es, por tanto, realista; y

b) desde el punto de vista técnico, no solo es el caso que los topos cuánticos que proponen no utilizan lógica clásica, sino que la supuesta maniobra para evitar las consecuencias del teorema Kochen-Specker y así poder asignar un valor de verdad a toda proposición física del topos, o es inválida o trivializa el proyecto en caso de ser correcta, pues la teoría física de los topos cuánticos no estaría considerando los contextos de medición que involucran pares de operadores no conmutantes, como posición y momento, de forma que no recuperan el principio de incertidumbre de Heisenberg, que es central en las teorías cuánticas.

Con motivo de *a*) y el problema del realismo científico en el contexto de la teoría de categorías, sugerimos, de forma tangencial a nuestro proyecto, una alternativa filosófica: no es necesario dar lecturas como la del Neorrealismo u otras a las categorías que codifican teorías físicas, pues la teoría de categorías y sus métodos son un excelente compañero del realismo óntico estructural, una forma de metafísica naturalizada que permite dar un recuento filosófico de nuestras teorías y sus métodos formales en términos de estructuras matemáticas únicamente y que permite, también, que el realismo científico conviva pacíficamente con el fenómeno del cambio teórico. Este fue precisamente el rumbo que siguió Benjamin Eva al alejarse de la propuesta original de Döring e Isham, por ejemplo.

No obstante, el fracaso del proyecto topos teórico no es el fracaso de la teoría de categorías aplicada a la mecánica cuántica. En el capítulo 4 revisamos los detalles técnicos del rival directo de los topos cuánticos: la mecánica cuántica categorista de Abramsky y Coecke. Vimos que el uso de espacios de Hilbert como categorías simétricas monoidales cerradas permite dar una formulación categorista del aparato formal de la mecánica cuántica bajo la interpretación informática o computacional de los recursos cuánticos llamados *qubits*. Adujimos:

1. que esta formulación categorista rescata más fielmente las nociones físicas clave como la de medición y colapso, estados enredados, y no localidad; y

2. señalamos que la lógica interna de estas categorías es la lógica lineal, una lógica no clásica de tipo subestructural.

Y objetamos que la matemática de los *qubits* no agota la física de los sistemas cuánticos porque, al estilo de la interpretación de Copenhague y el adagio de David Mermin comúnmente atribuido a Richard Feynman, *shut up and calculate*, la interpretación informática de la mecánica cuántica no se pronuncia frente a preguntas sobre la naturaleza de la función de onda y su colapso, sino que simplemente toma el formalismo del enredamiento de estados para generar protocolos de computación, algunos tan insospechados como el protocolo de teletransportación cuántica.

Interpretar los estados cuánticos como información sujeta a ciertas leyes matemáticas es ciertamente una propuesta más que goza del éxito predictivo y experimental que caracteriza al aparato formal de las teorías cuánticas. Sin embargo, parece extraño aceptar que la mecánica cuántica se reduce a una realización o aplicación muy específica, como lo es la computación en las tecnologías de información, pues uno esperaría más bien que la aplicación computacional fuese tan solo parte de una interpretación más general de la teoría cuántica.

El punto sobre lógica lineal no es el único en favor del uso de lógicas subestructurales en las teorías cuánticas. En el capítulo 4 exploramos el programa ultramodal de Richard Routley para la física cuántica, que propone utilizar lógicas relevantes en lugar de lógicas cuánticas o lógica clásica para analizar los argumentos y proposiciones de la mecánica cuántica y disolver algunas de sus paradojas.

Las lógicas relevantes, al igual que la lógica lineal, son lógicas no clásicas de tipo subestructural que se caracterizan por rechazar únicamente ambas direcciones de la regla estructural Debilitamiento, y adujimos que estas ofrecen soluciones a los problemas interpretativos de la mecánica cuántica porque el análisis lógico de paradojas como el experimento de doble rendija, el experimento Stern-Gerlach, y el teorema de Bell, muestra que estos argumentos no son válidos bajo los criterios de la relevancia lógica, lo que motiva la posibilidad de construir teorías alternativas para la matemática y la física utilizando sistemas relevantes. A diferencia de los topos cuánticos, el proyecto ultramodal de Routley sí recupera el principio de incertidumbre de Heisenberg al invalidar los principios de expansión, como explicamos en nuestra discusión sobre el experimento Stern-Gerlach.

El principio de expansión $A \vdash A \wedge (B \vee \sim B)$ es inválido para los contextos cuánticos por dos razones:

1. Si A y B representan proposiciones físicas que involucran la medición de dos propiedades físicas cuyos correspondientes operadores no conmutan, i.e. $0 \neq [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$, entonces la medición simultánea de $\hat{A}$ y $\hat{B}$ representada en la conjunción $A \wedge (B \vee \sim B)$ queda prohibida por el principio de incertidumbre de Heisenberg (para posición y momento); así, suponer que cierto valor a resulta de una medición para un observable $\hat{A}$ —i.e. suponer que A es verdadera— no nos permite concluir que en una medición simultánea de $\hat{A}$ y $\hat{B}$ será el caso que a es el valor de $\hat{A}$ y b es el valor de $\hat{B}$ o no lo es —i.e. concluir que $A \wedge (B \vee \sim B)$ es verdadera. Esto es

precisamente lo que vimos en nuestro análisis del experimento Stern-Gerlach con las relaciones de incertidumbre para espines a lo largo de diversas componentes.

2. Una razón lógica por la cual pueden fallar las proposiciones de la forma $B \vee \sim B$ es que existan situaciones en las que la verdad de B o su negación no ha sido establecida —por ejemplo, siguiendo la lógica intuicionista, $B \vee \sim B$ puede fallar en el contexto de las proposiciones matemáticas si no contamos con una prueba de B ni tampoco con su refutación, i.e. una prueba de que $\sim B$ es el caso—, lo que nosotros llamamos aquí, siguiendo a Routley, *situaciones incompletas*. La mecánica cuántica trabaja con situaciones incompletas en dos sentidos:

   - el primero es aquel según el cual una propiedad física, i.e. un operador $\hat{A}$, no tiene un valor definido o determinado sino hasta que hacemos una medición para $\hat{A}$ y colapsamos la función de onda; y
   - el segundo es aquel según el cual las relaciones de incertidumbre entre operadores no conmutantes representan la imposibilidad de contar con un conocimiento completo de los sistemas cuánticos al restringir la medición simultánea de algunas propiedades físicas como posición y momento.

   Así, una lógica para la mecánica cuántica debe ser capaz de discriminar la validez de las inferencias en situaciones incompletas[34] y las lógicas relevantes que estudiamos aquí tienen esa capacidad debido a las condiciones modelo teóricas para la negación.

Vimos que el principio de expansión es utilizado en el experimento Stern-Gerlach, en el experimento de doble rendija, y en el teorema de Bell; y que Sylvan sugiere que también se utiliza en la prueba del teorema Kochen-Specker, investigación que dejamos para un futuro trabajo. Basado en estos análisis y en las razones recién provistas para explicar por qué el principio de expansión debe fallar en contextos cuánticos, concluimos que las lógicas relevantes sí ayudan a disolver paradojas cuánticas y por tanto a resolver problemas interpretativos de la mecánica cuántica. Pensamos que estos resultados motivan la idea de que vale la pena explorar la reconstrucción relevantista de nuestras teorías matemáticas y físicas, aunque esta tarea nos sea ardua e inesperada.

Por último, es importante mencionar que el enfoque de las categorías simétricas monoidales puede ser combinado con el enfoque relevantista exigiendo que el tensor $\otimes$ no tenga proyecciones y que no exista $!_A^{-1} : \mathbb{1} \to A$ para al menos un objeto A.[35]

[34] De hecho, la observación lógica de que la mecánica cuántica trabaja con situaciones incompletas se ha dado en repetidas ocasiones. En el campo de la lógica, un ejemplo interesante es **R3V**, la lógica trivaluada de Reichenbach para la mecánica cuántica, que además de usar T para "verdadero" y F para "falso", utiliza I para "indeterminado", que es un valor de verdad que él, entre otras cosas, asigna a aquellas proposiciones que involucran la medición simultánea de propiedades cuyos operadores no conmutan. Véase (Estrada-González y Cano Jorge 2021) para un estudio filosófico de esta lógica (que, de hecho, es contra-clásica) y una propuesta de semántica relacionante tipo Dunn para **R3V**.

[35] Ver (Dosen y Petric 2005), quienes continuaron el trabajo de Alexandar Kron que mencionamos en la sección 4.2.9.

Apéndice 1: Física Cuántica[36]

Un vector es un objeto matemático con magnitud y dirección; generalmente, es conveniente pensar en vectores como flechas.

Un espacio vectorial V es una colección de vectores cerrada bajo suma vectorial y multiplicación por escalar.

$|A\rangle$ denota el vector llamado A; esta notación se debe a Dirac. Los vectores representan *estados físicos.*

La suma de vectores $|A\rangle + |B\rangle = |C\rangle$ está definida en V y consiste en que la cola de $|B\rangle$ se coloca en la punta de $|A\rangle$ sin alterar su magnitud ni su dirección, y la punta de $|C\rangle$ coincide con la punta de $|B\rangle$, mientras que la cola de $|C\rangle$ coincide con la cola de $|A\rangle$.

$3|A\rangle$ es el vector cuya dirección es la dirección de $|A\rangle$ y cuya longitud es 3 veces la de $|A\rangle$; es decir, $3|A\rangle = |A\rangle + |A\rangle + |A\rangle$. En mecánica cuántica, no sólo se utilizan números reales como escalares, sino números complejos también.

$|A\rangle$ multiplicado por $|B\rangle$ se escribe $\langle A|B\rangle$ y resulta en un número, no un vector. En general, $\langle A|B\rangle = \sqrt{|A| \times |B| \times \cos\theta}$, donde $|A|$ y $|B|$ representan, respectivamente, la longitud de $|A\rangle$ y la longnitud de $|B\rangle$ (también llamados, *norma* de A y *norma* de B), y donde θ es el ángulo entre $|A\rangle$ y $|B\rangle$. En particular, $|A| = \sqrt{\langle A|A\rangle}$.

$|A\rangle$ y $|B\rangle$ son *ortogonales* (perpendiculares) sii $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$ pero $\langle A|B\rangle = 0$. Esto ocurre porque el ángulo entre $|A\rangle$ y $|B\rangle$ sería de 90°, y como $\cos 90° = 0$, $\langle A|B\rangle = 0$.

La *dimensión* de un espacio vectorial es el máximo número N de vectores $|A_1\rangle, \ldots, |A_N\rangle$ que puede elegirse en el espacio tal que para cada valor de i y de j de 1 a N con $i \neq j$ ocurre que $\langle A_i|A_j\rangle = 0$. Es decir, que la dimensión del espacio es igual al número de direcciones mutuamente perpendiculares a las que los vectores dentro de un espacio pueden apuntar.

Una *base ortonormal* de un espacio de N-dimensiones es cualquier colección de N vectores mutuamente ortogonales tales que la norma de cada uno es 1. Si se tiene una base ortonormal, entonces es posible construir cualquier vector $|B\rangle$ de ese espacio como $|B\rangle = b_1|A_1\rangle + b_2|A_2\rangle + \ldots b_N|A_N\rangle$, donde cada $b_i = \langle B|A_i\rangle$.

En general, $\langle A||B\rangle + |C\rangle\rangle = \langle A|B\rangle + \langle A|C\rangle$, para cualesquiera vectores $|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle$.

[36] Este apéndice sigue muy de cerca el trabajo de Albert (1994).

Esto último permite mostrar que dados dos vectores $|M\rangle$ y $|Q\rangle$,

$$|M\rangle + |Q\rangle = (m_1 + q_1)|A_1\rangle + (m_2 + q_2)|A_2\rangle + \cdots + (m_N + q_N)|A_N\rangle$$

y que

$$\langle M|Q\rangle = m_1q_1 + m_2q_2 + \cdots + m_Nq_N$$

donde los m_i y los q_i son coeficientes de expansión de $|M\rangle$ y $|Q\rangle$, respectivamente, en una base particular $|A_i\rangle$.

Dada una base, para representar $|Q\rangle$ necesitamos los q_i de $|Q\rangle$. Así:

$$|Q\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

lo cual es el vector tridimensional para el cual $\begin{cases} \langle Q|A_1\rangle = 1 \\ \langle Q|A_2\rangle = 3 \\ \langle Q|A_3\rangle = -1/2 \end{cases}$ donde cada $|A_i\rangle$ son los vectores base elegidos.

Los *operadores* son mecanismos para producir nuevos vectores a partir de otros. Es decir, un operador es una función $O : V \to V$ del espacio vectorial al espacio vectorial.

$O|B\rangle$ significa que el operador O es aplicado al vector $|B\rangle$. En general, $O|B\rangle = |B\prime\rangle$, donde $|B\prime\rangle$ es un (nuevo) vector.

Un *operador lineal* es un operador tal que

$$O(|A\rangle + |B\rangle) = O|A\rangle + O|B\rangle$$

y

$$O(c|A\rangle) = c(O|A\rangle)$$

Un operador lineal sobre un espacio N-dimensional puede representarse con N^2 números. Por ejemplo, si $O : V^2 \to V$,

$$O = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{bmatrix}$$

donde cada $O_{ij} = \langle A_i|O|A_j\rangle\rangle$ y $|A_N\rangle$ son los vectores base de V.

Las matrices de operadores pueden multiplicarse por columnas de vectores, así:

$$\begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (O_{11}b_1 + O_{12}b_2) \\ (O_{21}b_1 + O_{22}b_2) \end{bmatrix}$$

Entonces, siempre podemos calcular el efecto de O sobre cualquier $|B\rangle$ simplemente multiplicando la O-matriz por la $|B\rangle$-columna. Es decir:

$$|B\prime\rangle = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (O_{11}b_1 + O_{12}b_2) \\ (O_{21}b_1 + O_{22}b_2) \end{bmatrix} = (O_{11}b_1+O_{12}b_2)|A_1\rangle+(O_{21}b_1+O_{22}b_2)|A_2\rangle$$

Si $O|B\rangle = x|B\rangle$, donde x es un número, entonces $|B\rangle$ es el *eigenvector* de O con *eigenvalor* x (y x es la longitud del nuevo vector) independientemente de la base.

Ej1. todo vector es un eigenvector del operador unitario y todos tienen eigenvalor 1.

Ej2. todo vector es un eigenvector del operador “multiplicar cada vector por 3” y todos tienen eigenvalor 3.

Ej3. Dado un operador 4-dimensional

$$O = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sus eigenvectores son

$$|A\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} |B\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} |C\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} |D\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y los eigenvalores son $2, 1/2, 5, -1$ respectivamente.

Los *estados físicos* se representan con los vectores y los llamamos *vectores estado*.

Las *propiedades medibles*, llamadas *observables*, de un sistema físico se representan con operadores lineales.

Si el vector asociado con un estado físico es un eigenvector con eigenvalor a para un operador asociado a cierta propiedad medible, tal estado se llama *eigenestado* de dicha propiedad con valor a.

Ej4.:

$$|duro\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |suave\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \langle duro|suave\rangle = 0$$

$$operador \;\; dureza = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donde $dureza = +1$ es *duro* y $dureza = -1$ es *suave*. Entonces $|duro\rangle$ y $|suave\rangle$ son eigenvectores de este operador.

Ej5.

$$|negro\rangle = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad |blanco\rangle = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \langle negro|blanco\rangle = 0$$

$$operador\ \ color = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $color = +1$ es *negro*, $color = -1$ es *blanco*, y $|negro\rangle$ y $|blanco\rangle$ son eigenvectores del operador.

Dado que si $|A\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ y $|B\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, entonces $|A\rangle + |B\rangle = \begin{bmatrix} (a+c) \\ (b+d) \end{bmatrix}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |negro\rangle &= 1/\sqrt{2}|duro\rangle + 1/\sqrt{2}|suave\rangle \\ |blanco\rangle &= 1/\sqrt{2}|duro\rangle - 1/\sqrt{2}|suave\rangle \\ |duro\rangle &= 1/\sqrt{2}|negro\rangle + 1/\sqrt{2}|blanco\rangle \\ |suave\rangle &= 1/\sqrt{2}|negro\rangle - 1/\sqrt{2}|blanco\rangle \end{aligned}$$

Podemos calcular, de forma determinista, cómo evoluciona un vector a través del tiempo y sujeto a fuerzas y constreñimientos. Para esto usamos la *ecuación de Schrödinger* (en sistemas no relativistas):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = \hat{H}\Psi(\mathbf{r},t)$$

donde i es un número imaginario, $\hbar$ es la constante de Planck (dividida por 2π), $\frac{\partial}{\partial t}$ es una derivada parcial con respecto al tiempo t, $\mathbf{r}$ es el vector de posición en tres dimensiones, Ψ es la función de onda del sistema cuántico en cuestión, y $\hat{H}$ es un operador hamiltoniano. Definiremos estos términos más abajo.

Cuando se mide la propiedad de un estado que es la superposición de otros estados, no se tiene una manera determinista de extraer conclusiones. Si $|a\rangle$ es un vector estado y queremos medirle la propiedad B (operador para el cual sus eigenvectores son $|B = b_i\rangle$ con eigenvalores b_i tal que $B|B = b_i\rangle = b_i|B = b_i\rangle$), entonces la *probabilidad* para tal medición ($B = b_j$) será

$$|\langle a|B = b_j\rangle|^2$$

Por eso, la probabilidad de que un electrón negro sea suave según una medición de dureza es precisamente 1/2.

Medir $|A\rangle$ y medir $-|A\rangle$ (por el exponente 2 en la última fórmula) da lo mismo y por eso decimos que $|A\rangle$ y $-|A\rangle$ son el mismo estado.

En principio, toda medición es repetible. Una vez que la medición ha tomado lugar y se obtuvo un resultado, el estado del sistema medido debe ser tal que garantice que si una medición es repetida, se obtendrá el mismo resultado.

Sin embargo, algo le ocurre al vector estado del sistema medido. Si, digamos, se realiza una medición de un observable O en el sistema S, y el resultado de tal medición es $O = x$, entonces, sin importar cual fuera el vector estado de S antes de la medición de O, ocurre que el vector estado de S tras la medición es, necesariamente,un eigenvector de O con eigenvalor x. El efecto de medir un observable necesariamente es cambiar el vector estado del sistema medido, hacerlo cambiar de lo que fuera antes de ser medido a un eigenvector del operador observable medido; a eso se le llama *colapso*. Saber a qué eigenvector en particular cambió el sistema queda determinado por el resultado de la medición, y tal resultado es un asunto de probabilidad. Es aquí donde entra un elemento de azar puro en la evolución del vector estado.

Si todos los eigenvectores de un operador están asociados únicamente con eigenvalores reales (no complejos), tal operador es un *operador hermitiano*. Dado que los valores de cantidades físicamente medibles son siempre números reales, los operadores asociados con propiedades medibles deben ser operadores hermitianos. Algunas propiedades de los operadores hermitianos son:

1. Si dos vectores son ambos eigenvectores del mismo operador hermitiano, y si los eigenvalores asociados con esos dos eigenvectores son dos números (reales) diferentes, entonces ambos vectores son ortogonales entre sí.

2. Todo operador hermitiano sobre un espacio N-dimensional tendrá siempre al menos un conjunto de N eigenvectores mutuamente ortogonales.

3. Si un operador hermitiano sobre un espacio N-dimensional tiene N diferentes eigenvalores, entonces hay un *único* vector en el espacio asociado con cada uno de los diferentes eigenvalores. Este tipo de operadores se llaman *completos* o *no degenerados*.

4. Todo operador hermitiano sobre un espacio estará invariablemente asociado con alguna propiedad medible del sistema físico conectado con ese espacio.

5. Cualquier vector en un espacio dado será invariablemente un eigenvector de algún operador hermitiano completo en ese espacio.

Nótese que estos hechos implican que todo sistema cuántico necesariamente tiene una infinidad de propiedades medibles mutuamente incompatibles.

Es posible sumar y restar matrices entre sí. El *conmutador* de dos matrices A y B, denotado $[A, B]$ se define como $AB - BA$ (donde la multiplicación de matrices no es conmutativa en general). Los conmutadores de matrices de observables incompatibles siempre resultan distinto a cero. El *principio de correspondencia* —la prescripción de que las predicciones sobre partículas corresponden a las predicciones newtonianas de los objetos ordinarios— relaciona los corchetes de Poisson de la teoría clásica con los conmutadores de la teoría cuántica.

Cada partícula puede ser representada con una *función de onda* Ψ que considera la posición x y el tiempo t, es decir $\Psi(x,t)$; la probabilidad de encontrar dicha partícula en una posición y tiempo específicos es $|\Psi(x,t)|^2$. Más aún, cualquier propiedad medible de las partículas —como el momento o la energía— es representable como un operador sobre la función de onda; en general, cualquier descripción que proporcione un vector estado es traducible en términos de una función de onda.

La mecánica aumenta su complejidad según incrementa la cantidad de partículas de un sistema. Hablando de sistemas de dos partículas "1" y "2" con estados $|\Psi_a\rangle$ y $|\Psi_b\rangle$, respectivamente, el vector estado cuántico de ese par de partículas se denota $|\Psi_a^1\rangle|\Psi_b^2\rangle$, que representa un vector en el espacio de estados del sistema de dos partículas, y el producto de vectores será $\langle\Psi_c^1,\Psi_d^2|\Psi_a^1,\Psi_b^2\rangle = \langle\Psi_c^1|\Psi_a^1\rangle \times \langle\Psi_d^2|\Psi_b^2\rangle$.

Finalmente, si los valores de m cantidades físicas de un sistema físico, separadas e independientes, requieren ser especificadas para determinar de forma única el estado físico de dicho sistema, entonces se dice que el sistema tiene *m grados de libertad*. Por ejemplo, una sola partícula sin estructura y confinada a un espacio con una sola coordenada (es decir, dimensión 1) tiene grado de libertad 1; pero una partícula que tiene propiedades color-dureza y puede moverse en tres coordenadas, tendrá grado 4 de libertad; etc.

Apéndice 2: Lógica Cuántica[37]

Lógica Cuántica (QL)

Birkhoff y von Neumann (1936) propusieron por primera vez lo que podemos llamar *lógica cuántica*. Para comprender este tipo de lógica no clásica (y sus derivadas), es necesario tomar en cuenta el formalismo matemático de la mecánica cuántica estándar (no relativista).

Dicho mecanismo utiliza la noción matemática de *espacio fase*: cualquier sistema físico $\mathcal{S}$ está, en cada instante, hipotéticamente asociado con un *punto* en un espacio fase Σ fijado; este punto representa matemáticamente el *estado* de $\mathcal{S}$.

Consideremos una *proposición experimental* $\mathbf{P}$ acerca de un sistema físico $\mathcal{S}$, tal que dicha proposición expresa que una cierta cantidad física tiene un determinado valor —e.g. "el valor de la posición en la direción x se encuentra en cierto intervalo"—. De tal forma, $\mathbf{P}$ será asociada con un subconjunto X de nuestro espacio fase Σ, donde X consiste de todos los estados puros para los cuales $\mathbf{P}$ es el caso. A la colección de esos subconjuntos le podemos llamar *eventos* o *cualidades físicas*. Cuando un estado puro p pertenece al evento X, decimos que nuestros sistema en estado p *verifica* tanto X como la correspondiente proposición experimental.

La estructura de todos los eventos es un álgebra booleana $\mathfrak{B}$ si tomamos $\mathcal{F}(\Sigma)$ como la colección de todos los subconjuntos medibles de Σ:

$$\mathfrak{B} = \langle \mathcal{F}(\Sigma), \subseteq, \cap, \cup, -, \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$$

donde

- $\subseteq, \cap, \cup, -$ son, respectivamente, la relación conjuntista de inclusión y las operaciones conjuntistas de intersección, unión y complemento, respectivamente.
- $\mathbf{1}$ es el espacio total Σ y $\mathbf{0}$ es el conjunto vacío.

Dado que las operaciones conjuntistas recién introducidas se pueden asociar naturalmente a las conectivas lógicas $\wedge$, $\vee$ y $\neg$, respectivamente, tenemos hasta aquí un comportamiento clásico:

[37]Este apéndice sigue muy de cerca el trabajo de Chiara y Giuntini (2002).

- un estado p verifica la conjunción $X \cap Y$ sii $p \in X \cap Y$ sii p verifica ambos miembros;
- p verifica una disyunción $X \cup Y$ sii $p \in X \cup Y$ sii p verifica al menos uno de los miembros;
- p verifica una negación $-X$ sii $p \notin X$ sii p no verifica X.

Para extender la información anterior a la teoría cuántica debemos notar que los puntos de Σ corresponden a las *funciones de onda* y esto hace que Σ sea un espacio-funcional, normalmente descrito como un *espacio de Hilbert*. A partir de esta interpretación, el contexto lógico deja de ser clásico: mientras que en un escenario clásico, se puede decidir siempre si $p \in X$ o si $p \in -X$, en el escenario cuántico tratamos con probabilidades.

Los estados puros asignarán *valores probabilísticos* a los eventos cuánticos. Sea ψ un estado puro (una función de onda) de un sistema cuántico y sea $\mathbf{P}$ una proposición experimental —e.g. "el valor de espín en la dirección x es *arriba*"—; entonces los siguientes casos son posibles:

(i) ψ asigna a $\mathbf{P}$ el valor probabilístico 1: $\psi(\mathbf{P}) = 1$;

(ii) ψ asigna a $\mathbf{P}$ el valor probabilístico 0: $\psi(\mathbf{P}) = 0$;

(iii) ψ asigna a $\mathbf{P}$ un valor probabilístico diferente a 1 y a 0: $\psi(\mathbf{P}) \neq 0, 1$

Para el primer caso, decimos que $\mathbf{P}$ es *verdadera*; para el segundo caso que es *falsa*; y para el tercer caso que $\mathbf{P}$ es *semánticamente indeterminada*.

Hasta ahora no hemos considerado los eventos de forma cuántica. Para esto hace falta considerar que, de acuerdo conl formalismo de la mecánica cuántica, cualquier combinación lineal de estados puros (bajo algunas restricciones que por el momento no son relevantes) es ella misma un estado puro (por el principio de *superposición*); e.g. si ψ_1 y ψ_2 son estados puros, entonces la combinación lineal $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ es también un estado puro (una superposición de ψ_1 y ψ_2, perfectamente bien definida), donde la probabilidad de que el sistema cuántico en estado ψ verifique las proposiciones que son ciertas para el estado ψ_1 es $|c_1|^2$ y la probabilidad de que el sistema en estado ψ verifique las proposiciones que son ciertas para el estado ψ_2 es $|c_2|^2$. Esto está permitido en el formalismo de la mecánica cuántica porque los subconjuntos (subespacios) de un espacio de Hilbert son cerrados bajo combinación lineal y secuencias de Cauchy.

En ese sentido, los *eventos cuánticos* se encuentran en el conjunto $C(\mathcal{H})$ de subespacios de Hilbert cerrados bajo combinación lineal y nuestra interpretación de las conectivas lógicas aplicadas a proposiciones sobre eventos cuánticos no será clásica, como mostramos arriba.

En primer lugar, la representación matemática de la *negación* de una proposición experimental es el complemento ortogonal de la representación matemática de la proposición experimental. El *complemento ortogonal* $X\prime$ de un subespacio X (también llamado *ortocomplemento*) se define como el conjunto de todos los vectores que son ortogonales a todos los elementos de X, es decir: $\psi \in X\prime$ sii $\psi \perp X$ sii para toda $\phi \in X : (\psi, \phi) = 0$ (donde (ψ, ϕ) es el producto interno de ϕ y ψ). El ortocomplemento tiene las siguientes propiedades: para cualquier evento X y cualquier estado puro ψ,

$$\psi(X) = 1 \text{ sii } \psi(X\prime) = 0;$$
$$\psi(X) = 0 \text{ sii } \psi(X\prime) = 1$$

En cuanto a la *conjunción*, el comportamiento sigue siendo clásico: dado que la intersección $X \cap Y$ de dos subespacios cerrados es, a su vez, un subespacio cerrado, las condiciones de verdad para la conjunción son

$$\psi \text{ verifica } X \cap Y \text{ sii } \psi \text{ verifica ambos miembros.}$$

Sin embargo, la *disyunción* no puede representarse por medio de la unión conjuntista tradicional; esto debido a que, en general, la unión de dos subespacios cerrados no necesariamente es, a su vez, un subespacio cerrado. Así pues, en lugar de usar la unión conjuntista, usaremos el *supremo* $X \sqcup Y$ de dos subespacios cerrados —i.e. el subespacio cerrado más pequeño que incluya tanto X como Y.

En consecuencia, obtenemos la siguiente estructura algebraica:

$$\mathcal{C}(\mathcal{H}) = \langle C(\mathcal{H}), \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \prime, \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$$

donde $\sqsubseteq, \sqcap$ son la inclusión y la intersección conjuntistas, $\sqcup, \prime$ se definen como hicimos arriba; y $\mathbf{1}$ y $\mathbf{0}$ representan, respectivamente, el espacio total $\mathcal{H}$ y el subespacio vacío.

Lo primero que hay que decir sobre $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ es que es un álgebra *cuasi*-booleana. Hace falta la distribución de la conjunción sobre la disyunción; es decir, en $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ ocurre en general que

$$X \sqcap (Y \sqcup Z) \neq (X \sqcap Y) \sqcup (X \sqcap Z)$$

Esto quiere decir que $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ pertenece a la variedad de *retículos* (*lattices*) *ortomodulares ortocomplementados*, que no necesariamente son distributivos.

Que no contemos con distribución tiene motivaciones interesantes y legítimas. A diferencia de una disyunción clásica, una disyunción cuántica $X \sqcup Y$ puede ser verdadera incluso si ninguno de sus miembros es verdadero; de hecho, puede ocurrir que un estado puro ψ perenezca al subespacio $X \sqcup Y$ incluso si ψ no pertenece ni a X ni a Y. Para comprender por qué la disyunción cuántica debe comportarse así, considérese el siguiente ejemplo: supongamos que tenemos un electrón cuyo espín puede asumir sólo dos posibles valores: o bien *arriba* o bien *abajo*; de acuerdo con uno de los *principios de incertidumbre*, el espín en la dirección x (espín$_x$) y el espín en la dirección y (espín$_y$) representan dos cantidades fuertemente *incompatibles* que no pueden medirse de forma simultánea. Supongamos que el electrón en estado ψ verifica la proposición "espín$_x$ es *arriba*". Como consecuencia del principio de incertidumbre, ambas proposiciones "espín$_y$ es *arriba*" y "espín$_y$ es *abajo*" serán fuertemente indeterminadas; sin embargo, la *disyunción* "o bien espín$_y$ es *arriba* o espín$_y$ es *abajo*" debe ser verdadera.

Estas son, pues, las caracterizaciones generales de la lógica cuántica que propusieron Birkoff y von Neumann. A continuación, y a modo de cierre de este apartado, consideramos dos especies de lógicas cuánticas que pueden ser interesantes para la discusión general de este trabajo.

Ortológica (OL)

El lenguaje de OL consiste de un conjunto denumerable de literales y dos conectivas primitivas: $\neg$ (no), $\wedge$ (y). La noción de *fórmula* del lenguaje se define como habría de esperarse. Usaremos la metavariables $p, q, r, \ldots$ para los literales y $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ para fórmulas. La conectiva $\vee$ para la disyunción se define vía De Morgan:

$$\alpha \vee \beta := \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

Los condicionales son problemáticos en las lógicas cuánticas; por lo pronto los denotaremos con el signo $\curvearrowright$. A continuación caracterizaremos OL bajo el marco de la semántica algebraica.

Definición 5.18. Un *ortoretículo* es una estructura $\mathfrak{B} = \langle B, \sqsubseteq, ', \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$ donde

(1) $\langle B, \sqsubseteq, \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$ es un retículo acotado, donde $\mathbf{1}$ es el *máximo* y $\mathbf{0}$ es el *mínimo*. Es decir:

(1.1) $\sqsubseteq$ es una relación de orden parcial sobre B (reflexiva, antisimétrica y transitiva);

(1.2) cualquier par de elementos a, b tiene un *ínfimo* $a \sqcap b$ y un *supremo* $a \sqcup b$ tales que:

$$a \sqcap b \sqsubseteq a, b \text{ y } \forall c : c \sqsubseteq a, b \curvearrowright c \sqsubseteq a \sqcap b;$$
$$a, b \sqsubseteq a \sqcup b \text{ y } \forall c : a, b \sqsubseteq c \curvearrowright a \sqcup b \sqsubseteq c;$$

(1.3) $\forall a : \mathbf{0} \sqsubseteq a; a \sqsubseteq \mathbf{1}$

(2) La operación unaria $'$ (llamada *ortocomplemento*) satisface las siguientes condiciones:

(2.1) $a'' = a$ (doble negación);

(2.2) $a \sqsubseteq b \curvearrowright b' \sqsubseteq a'$ (contraposición);

(2.3) $a \sqcap a' = \mathbf{0}$ (no contradicción)

Los ortoretículos no satisfacen, en general, las leyes de distribución para $\sqcap$ y $\sqcup$. Únicamente cumplen

$$(a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \sqsubseteq a \sqcap (b \sqcup c)$$

y la forma dual

$$a \sqcup (b \sqcap c) \sqsubseteq (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$$

Un ejemplo de ortoretículo no distributivo es el retículo $\langle C(\mathcal{H}), \sqsubseteq, \prime, \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle$ de todos los subespacios cerrados en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Definición 5.19. Una *realización algebraica* para OL es un par $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, v\rangle$ que consiste del ortoretículo $\mathcal{B} = \langle B, \sqsubseteq, \prime, \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle$ y una función de evaluación v que asocia, a cada fórmula α del lenguaje, un elemento (*valor de verdad*) en B, satisfaciendo las siguientes condiciones:

(1) $v(\neg\beta) = v(\beta)\prime$

(2) $v(\beta \wedge \gamma) = v(\beta) \sqcap v(\gamma)$

Definición 5.20. Una fórmula α es *verdadera* en una realización $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, v\rangle$ (abreviado como $\models_{\mathcal{A}} \alpha$) sii $v(\alpha) = 1$; α es una *verdad lógica* de OL ($\models_{OL} \alpha$) sii para cualquier realización algebraica $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, v\rangle$, $\models_{\mathcal{A}} \alpha$.

Definición 5.21. Sea T un conjunto de fórmulas y sea $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, v\rangle$ una realización. Una fórmula α es *consecuencia de* T en $\mathcal{A}$ ($T \models_{\mathcal{A}} \alpha$) sii para cada elemento $a \in B$: si para cualquier $\beta \in T$, $a \sqsubseteq v(\beta)$ entonces $a \sqsubseteq v(\alpha)$. Una fórmula α es una *consecuencia lógica* de T ($T \models_{OL} \alpha$) sii para cualquier realización algebraica $\mathcal{A}$, $T \models_{\mathcal{A}} \alpha$.

De forma equivalente, podemos caracterizar OL con semántica de Kripke:

Definición 5.22. Un *ortomarco* es la estructua relacional $\mathcal{F} = \langle I, R\rangle$, donde I es un conjunto no vacío de mundos y R es la relación reflexiva y simétrica de accesibilidad sobre I. Con frecuencia, se usa la notación $i \not\perp j$ (i no es ortogonal a j) para denotar que Rij; y $i \perp j$ (i es ortogonal a j) para denotar que no Rij.

Definición 5.23. Sea $\mathcal{F} = \langle I, R\rangle$ un ortomarco. Para cualquier conjunto de mundos $X \subseteq I$, el *ortocomplemento* $X\prime$ de X se define como

$$X\prime = \{i | \forall j (j \in X \curvearrowright j \perp i)\}$$

Con frecuencia, se usa la notación $i \perp X$ para denotar que $i \in X\prime$; similarmente, se usa $i \not\perp X$ para denotar que $i \notin X\prime$.

Definición 5.24. Sea $\mathcal{F} = \langle I, R\rangle$ un ortomarco. Un conjunto X de mundos posibles es una *proposición* de $\mathcal{F}$ sii

$$\forall i (i \in X \Leftrightarrow \forall j (i \not\perp j \curvearrowright j \not\perp X))$$

Definición 5.25. Una *realización de Kripke* para OL es un sistema $\mathcal{K} = \langle I, R, \Pi, \varrho\rangle$, donde:

(1) $\langle I, R\rangle$ es un ortomarco y Π es el conjunto de proposiciones del marco, mismo que contiene a $\emptyset$ y a I, y está cerrado bajo el ortocomplemento $'$ y le intersección conjuntista $\cap$;

(2) ϱ es una función que le asocia a cada fórmula α una proposición en Π, cumpliendo lo siguiente:

(2.1) $\varrho(\neg\beta) = \rho(B)'$

(2.2) $\varrho(\beta \wedge \gamma) = \rho(\beta) \cap \rho(\gamma)$

Escribiremos $i \models_{\mathcal{K}} \alpha$ para denotar que α es verdadera en el mundo i; si T es un conjunto de fórmulas, $i \models_{\mathcal{K}} T$ significa que $i \models_{\mathcal{K}} \beta$ para toda $\beta \in T$.

Definición 5.26. Una fórmula α es *verdadera* en una realización de Kripke $\mathcal{K}$ ($\models_{\mathcal{K}} \alpha$) sii $\varrho(\alpha) = I$; α es *consecuencia lógica* de OL ($\models_{OL} \alpha$) sii para cualquier realización de Kripke $\mathcal{K}$, $\models_{\mathcal{K}} \alpha$.

Definición 5.27. Sea T un conjunto de fórmulas y $\mathcal{K}$ una realización de Kripke. Una fórmula α es *consecuencia* de T en $\mathcal{K}$ ($T \models_{\mathcal{K}} \alpha$) sii para todo mundo i de $\mathcal{K}$, $i \models T \curvearrowright i \models \alpha$. Una fórmula α es *consecuencia lógica* de T ($T \models_{OL} \alpha$) sii para cualquier realización de Kripke $\mathcal{K}$, $T \models_{\mathcal{K}} \alpha$.

Dadas las caracterizaciones anteriores, de hecho ocurre que

Teorema 5.16. $\models^{\mathcal{A}}_{OL} \alpha$ sii $\models^{\mathcal{K}}_{OL} \alpha$, para cualquier α.

Aunque no probaremos aquí el teorema, es fácil ver que la prueba involucra establecer que $B = \Pi$; que para cada $a, b \in B : a \sqsubseteq b$ sii $a \subseteq b$; que $a' = \{i \in I | i \perp a\}$; que $\mathbf{1} = I$; que $\mathbf{0} = \emptyset$; y que $v(p) = \varrho(p)$.

Lógica Cuántica Ortomodular (OQL)

Definición 5.28. Una *retículo ortomodular* es una ortoretículo $\mathcal{B} = \langle B, \sqsubseteq, ', \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle$ tal que para cualesquiera $a, b \in B$:

$$a \sqcap (a' \sqcup (a \sqcap b)) \sqsubseteq b$$

Definición 5.29. Una *realización algebraica para OQL* es una realización algebraica $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, v\rangle$ para OL, donde $\mathcal{B}$ es un retículo ortomodular.

Las definiciones en la semántica algebraica para verdad, verdad lógica y consecuencia lógica en OQL son análogas a las correspondientes en OL. Al igual que en OL, podemos caraterizar OQL con una semántica de Kripke:

Definición 5.30. Una *realización de Kripke para OQL* es una realización de Kripke $\mathcal{K} = \langle I, R, \Pi, \varrho \rangle$ para OL, donde el conjunto de proposiciones Π satisface la *propiedad ortomodular*:

$$X \not\subseteq Y \curvearrowright X \cap (X \cap Y)' \neq \emptyset$$

Las definiciones en la semántica de Kripke para verdad, verdad lógica y consecuencia lógica en OQL son análogas a las correspondientes en OL. Igualmente, tenemos que

Teorema 5.17. $\models^{\mathcal{A}}_{OQL} \alpha$ sii $\models^{\mathcal{K}}_{OQL} \alpha$ para cualquier α.

Resulta que la caracterización de la lógica cuántica a través de una semántica de Kripke tiene una interpretación física bastante natural. Consideremos un sublenguaje elemental L^Q de QT (el formalismo matemático de la teoría cuántica), cuyas fórmulas atómicas representan posibles reportes de medición y supongamos que L^Q es cerrado bajo las conectivas logícas cuánticas. Dado un sistema físico S (cuyo espacio de Hilbert asociado es $\mathcal{H}$), uno puede con mucha naturalidad definir una realización de Kripke para el lenguaje L^Q como sigue:

$$\mathcal{K}^S = \langle I, R, \Pi, \varrho \rangle$$

donde

- I es el conjunto de todos los estados puros ψ de S
- R es la relación de no ortogonalidad entre vectores (i.e. dos estados puros son accesibles sii el producto interno entre ellos es diferente de cero)
- Π es el conjunto de todas las proposiciones unívocamente determinado por el conjunto de todos los subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ (uno puede ver que el conjunto de todos los vectores unitarios de un subespacio es una proposición)
- para cualquier fórmula atómica p, $\varrho(p)$ es la proposición que contiene todos los estados puros que asignan a p el valor probabilístico 1.

De hecho, la interpretación física de la relación de accesibilidad sería: Rij sii j es un estado puro en el cual se puede transformar i después de realizar la medición de un observable del sistema.

Finalmente, presentaremos el problema de la implicación en las lógicas cuánticas.

Definición 5.31. En cualquier semántica, una conectiva binaria $\overset{*}{\to}$ es una *conectiva de implicación* sii satisface al menos las siguientes dos condiciones:

(1) $\alpha \overset{*}{\to} \alpha$ siempre es verdad (identidad);

(2) si α es verdad y $\alpha \overset{*}{\to} \beta$ es verdad, entonces β es verdad (modus ponens).

De hecho, en el caso particular de la lógica cuántica, una condición suficiente para que la conectiva $\stackrel{*}{\to}$ sea una conectiva de implicación es que

- en el caso de la semántica algebraica, para cualquier realización $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, v \rangle$, $\models_{\mathcal{A}} \alpha \stackrel{*}{\to} \beta$ sii $v(\alpha) \sqsubseteq v(\beta)$; y
- en el caso de la semántica de Kripke, para cualquier realización $\mathcal{K} = \langle I, R, \Pi, \varrho \rangle$, $\models_{\mathcal{K}} \alpha \stackrel{*}{\to} \beta$ sii $\varrho(\alpha) \subseteq \varrho(\beta)$.

No es posible definir el condicional material como $\alpha \supset \beta := \neg\alpha \vee \beta$ porque podemos tener realizaciones algebraicas donde $v(\neg\alpha \vee \beta) = 1$ pero $v(\alpha) \not\sqsubseteq v(\beta)$. Por ello se ha considerado como candidatos de una conectiva de implicación a los siguientes *condicionales polinomiales* definibles en términos de las conectivas cuánticas estándar:

1. $v(\alpha \to_1 \beta) = v(\alpha)' \sqcup (v(\alpha) \sqcap v(\beta))$
2. $v(\alpha \to_2 \beta) = v(\beta) \sqcup (v(\alpha)' \sqcap v(\beta)')$
3. $v(\alpha \to_3 \beta) = (v(\alpha)' \sqcap v(\beta)) \sqcup (v(\alpha) \sqcap v(\beta)) \sqcup (v(\alpha)' \sqcap v(\beta)')$
4. $v(\alpha \to_4 \beta) = (v(\alpha)' \sqcap v(\beta)) \sqcup (v(\alpha) \sqcap v(\beta)) \sqcup ((v(\alpha)' \sqcup v(\beta)) \sqcap v(\beta)')$
5. $v(\alpha \to_5 \beta) = (v(\alpha)' \sqcap v(\beta)) \sqcup (v(\alpha)' \sqcap v(\beta)') \sqcup (v(\alpha) \sqcap (v(\alpha)' \sqcup v(\beta)))$

A modo de ejemplo, si usamos $\to_1$ como conectiva de implicación en una lógica cuántica, las siguientes fórmulas *no* son verdades lógicas:

- $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
- $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
- $(\alpha \wedge \beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$
- $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$

Apéndice 3: Teoría de Categorías y Teoría de Topos[38]

Definición Axiomática de una Categoría. Una *categoría* $\mathcal{C}$ se compone de

1. una colección de cosas llamada $\mathcal{C}$-*objetos*;

2. una colección de cosas llamada $\mathcal{C}$-*flechas*;

3. operaciones que asignan a cada $\mathcal{C}$-flecha f un $\mathcal{C}$-objeto $\mathrm{dom}(f)$ (el "dominio" de f) y un $\mathcal{C}$-objeto $\mathrm{cod}(f)$ (el "codominio" de f). Si $a = \mathrm{dom}(f)$ y $b = \mathrm{cod}(f)$ representamos esto como

$$f : a \to b \qquad \text{ó} \qquad a \xrightarrow{f} b;$$

4. una operación que asigna a cada par $\langle g, f\rangle$ de $\mathcal{C}$-flechas con $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)$, una $\mathcal{C}$-flecha $g\circ f$, la *composición de f y g*, donde $\mathrm{dom}(g\circ f) = \mathrm{dom}(f)$ y $\mathrm{cod}(g\circ f) = \mathrm{cod}(g)$, i.e. $g \circ f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{cod}(g)$, y tal que las siguientes condiciones se satisfacen:
   Ley Asociativa: Dada la configuración

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$$

   de $\mathcal{C}$-objetos y $\mathcal{C}$-flechas, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

   La ley asociativa afirma que un diagrama con la forma

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right=3, "h\circ(g\circ f)"'] \arrow[d, shift left=1, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[dr, "g\circ f"] & b \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "h\circ g"'] \\
d & c \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

   siempre conmuta;

[38]Este apéndice sigue de cerca el trabajo de Goldblatt (1984).

5. una asignación para cada $\mathcal{C}$-objeto b de una $\mathcal{C}$-flecha $1_b : b \to b$, llamada *la flecha identidad sobre* b, tal que

   LEY DE LA IDENTIDAD: Para cualesquiera $\mathcal{C}$-flechas $f : a \to b$ y $g : b \to c$

$$1_b \circ f = f \qquad \text{y} \qquad g \circ 1_b = g$$

   i.e. el diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[d, "1_b"] \arrow[dr, "g"] & \\ & b \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

   conmuta.

Una flecha $f : a \to b$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un *monomorfismo* (cancelable por la izquierda) en $\mathcal{C}$ si para cualquier par de flechas paralelas $g, h : c \rightrightarrows a$ de $\mathcal{C}$, la igualdad $f \circ g = f \circ h$ implica que $g = h$. El simbolismo $f : a \rightarrowtail b$ indica que f es un monomorfismo.

Una flecha $f : a \to b$ es un *epimorfismo* (cancelable por la derecha) en $\mathcal{C}$ si para cualquier par de flechas $g, h : b \rightrightarrows c$ de $\mathcal{C}$, la igualdad $g \circ f = h \circ f$ implica que $g = h$, i.e. siempre que el diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "h"'] & c \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $g = h$. La notación $f : a \twoheadrightarrow b$ denota que f es un epimorfismo.

Una $\mathcal{C}$-flecha $f : a \to b$ es un *isomorfismo*, o es una flecha *invertible*, en $\mathcal{C}$ si existe una $\mathcal{C}$-flecha $g : b \to a$, tal que $g \circ f = 1_a$ y $f \circ g = 1_b$. La notación $f : a \cong b$ denota que f es un isomorfismo.

Dos objetos a y b son *isomorfos* en $\mathcal{C}$, denotado $a \cong b$, si existe un isomorfismo $f : a \to b$ en $\mathcal{C}$, i.e. $f : a \cong b$.

Definición 6.32. Un objeto 0 es *inicial* en la categoría $\mathcal{C}$ si para cada $\mathcal{C}$-objeto a existe una y sólo una $\mathcal{C}$-flecha $f : 0 \to a$ en $\mathcal{C}$.

Definición 6.33. Un objeto 1 es *terminal* en la categoría $\mathcal{C}$ si para cada $\mathcal{C}$-objeto a existe una y sólo una $\mathcal{C}$-flecha $f : a \to 1$ en $\mathcal{C}$.

Dada cualquier categoría $\mathcal{C}$ construimos su categoría *dual* u *opuesta* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ de la siguiente manera:

$\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ tienen los mismos objetos. Para cada $\mathcal{C}$-flecha $f : a \to b$ introducimos una nueva flecha $f^{\mathrm{op}} : b \to a$ en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, siendo estas todas y sólo aquellas flechas en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. La composición $f^{\mathrm{op}} \circ g^{\mathrm{op}}$ está definida precisamente cuando $g \circ f$ está definida en $\mathcal{C}$ y ocurre que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[l, bend left, "f^{op}"] \arrow[r, "g"] & c \arrow[l, bend left, "g^{op}"] \end{tikzcd}$$

$f^{\mathrm{op}} \circ g^{\mathrm{op}} = (g \circ f)^{\mathrm{op}}$. Nótese que $\mathrm{dom}(f^{\mathrm{op}}) = \mathrm{cod}(f)$, y $\mathrm{cod}(f^{\mathrm{op}}) = \mathrm{dom}(f)$.

Definición 6.34. Un *producto* en una categoría $\mathcal{C}$ de dos objetos a y b es un $\mathcal{C}$-objeto $a \times b$ junto con el par $(pr_a : a \times b \to a, pr_b : a \times b \to b)$ de $\mathcal{C}$-flechas tales que para *cualquier* par de $\mathcal{C}$-flechas de la forma $(f : c \to a, g : c \to b)$ existe exactamente una flecha $\langle f, g\rangle : c \to a \times b$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "pr_a"'] \arrow[r, "pr_b"] & b \end{tikzcd}$$

conmute, i.e. tal que $pr_a \circ \langle f, g\rangle = f$ y $pr_b \circ \langle f, g\rangle = g$. $\langle f, g\rangle$ es la *flecha producto* de f y g con respecto a las *proyecciones* pr_a y pr_b.

Definición 6.35. Si $f : a \to b$ y $g : c \to d$ son $\mathcal{C}$-flechas entonces $f \times g : a \times b \to c \times d$ es la $\mathcal{C}$-flecha $\langle f \circ pr_a, g \circ pr_b\rangle$.

Definición 6.36. Un *coproducto* de $\mathcal{C}$-objetos a y b es un $\mathcal{C}$-objeto $a + b$ junto con un par $(i_a : a \to a + b, i_b : b \to a + b)$ de $\mathcal{C}$-flechas tales que para cualquier par de $\mathcal{C}$-flechas de la forma $(f : a \to c, g : b \to c)$, existe exactamente una flecha $[f, g] : a + b \to c$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "i_a"] \arrow[dr, "f"'] & a + b \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"] & b \arrow[l, "i_b"'] \arrow[dl, "g"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

conmute, i.e. tal que $[f, g] \circ i_a = f$ y $[f, g] \circ i_b = g$.

Una flecha $i : e \to a$ en $\mathcal{C}$ es un *igualador* de un par $f, g : a \to b$ de $\mathcal{C}$-flechas si

(i) $f \circ i = g \circ i$, y

(ii) Siempre que $h : c \to a$ tiene $f \circ h = g \circ h$ en $\mathcal{C}$ existe exactamente una $\mathcal{C}$-flecha $k : c \to e$ tal que $i \circ k = h$.

$$
\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "i"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\
& c \arrow[u, "h"'] \arrow[ul, dashed, "k"] &
\end{tikzcd}
$$

Un *diagrama* D en una categoría $\mathcal{C}$ es una colección de $\mathcal{C}$-objetos $d_i, d_j, \ldots$, junto con algunas $\mathcal{C}$-flechas $g : d_i \to d_j$ entre ciertos objetos del diagrama. (Posiblemente más de una flecha entre un par de objetos dados, posiblemente ninguna.)

Un *cono* para un diagrama D consiste de un $\mathcal{C}$-objeto c junto con una $\mathcal{C}$-flecha $f_i : c \to d_i$ para cada objeto d_i en D, tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
d_i \arrow[r, "g"] & d_j \\
c \arrow[u, "f_i"] \arrow[ur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}
$$

conmuta, siempre que g es una flecha en el diagrama D. Utilizamos el simbolismo $\{f_i : c \to d_i\}$ para denotar un cono para D.

Un *límite* para un diagrama D es un D-cono $\{f_i : c \to d_i\}$ con la propiedad de que para cualquier otro D-cono $\{f_{i'} : c' \to d_i\}$ existe exactamente una flecha $f : c' \to c$ tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
d_i & \\
c' \arrow[u, "f_{i'}"] \arrow[r, dashed, "f"'] & c \arrow[ul, "f_i"']
\end{tikzcd}
$$

conmuta para todo objeto d_i en D.

Se dice que este cono límite, cuando existe, posee la *propiedad universal* con respecto a D-conos.

Por *dualidad*, definimos un *co-cono* $\{f_i : d_i \to c\}$ para un diagrama D como un objeto c, y las flechas $f_i : d_i \to c$ para cada objeto d_i en D. Un *co-límite* para D es un co-cono $\{f_i : d_i \to c\}$ con la *propiedad co-universal* de que para cualquier otro co-cono $\{f'_i : d_i \to c'\}$ existe exactamente una flecha $f : c \to c'$ tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
d_i \arrow[d, "f_i"'] \arrow[dr, "f'_i"] & \\
c \arrow[r, dashed, "f"'] & c'
\end{tikzcd}
$$

conmuta para todo d_i en D.

El *coigualador* de un par (f, g) de $\mathcal{C}$-flechas paralelas es una $\mathcal{C}$-flecha $q : b \to e$ tal que

1. $q \circ f = q \circ g$, y

2. Siempre que $h : b \to c$ tenga $h \circ f = h \circ g$ en $\mathcal{C}$ existe exactamente una $\mathcal{C}$-flecha $k : e \to c$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "h"'] & e \arrow[d, dashed, "k"] \\ & & c \end{tikzcd}$$

conmuta.

Un *producto fibrado* de un par de $\mathcal{C}$-flechas $a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$ con un codominio común es el límite en $\mathcal{C}$ para el diagrama

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd}$$

Un cono para este diagrama consiste de tres flechas f', h, g' tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, "h"] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

conmuta. Dado que esto requiere que $h = g \circ f' = f \circ g'$, podemos decir simplemente que un cono es un par $a \xleftarrow{g'} d \xrightarrow{f'}$ de $\mathcal{C}$-flechas tales que el "cuadrado"

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e. $f \circ g' = g \circ f'$.

Así que por la definición de cono universal, un *producto fibrado* de $\mathcal{C}$-flechas $a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$ es un par de $\mathcal{C}$-flechas $a \xleftarrow{g'} d \xrightarrow{f'} b$ tales que

1. $f \circ g' = g \circ f'$, y

2. siempre que $a \xleftarrow{h} e \xrightarrow{i} b$ son tales que $f \circ h = g \circ i$, entonces existe exactamente una

$\mathcal{C}$-flecha $k : e \dashrightarrow d$ tal que $h = g\prime \circ k$ y $i = f\prime \circ k$, así:

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[rrd, bend left, "i"] \arrow[rd, dashed, "k"] \arrow[rdd, bend right, "h"'] & & \\
& d \arrow[r, "f\prime"'] \arrow[d, "g\prime"] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"] & c
\end{tikzcd}$$

Una *suma amalgamada* de dos $\mathcal{C}$-flechas $b \xleftarrow{f} a \xrightarrow{g} c$ es un co-límite para el diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & c \\
b &
\end{tikzcd}$$

Una categoría $\mathcal{C}$ es *completa* si todo diagrama en $\mathcal{C}$ tiene un límite en $\mathcal{C}$. Una categoría $\mathcal{C}$ es *co-completa* siempre que todo $\mathcal{C}$-diagrama tenga un co-límite. Una categoría es *bi-completa* si es completa y co-completa.

Un diagrama *finito* es un diagrama con un número finito de objetos y un número finito de flechas entre ellos.

Una categoría es *finitamente completa* si tiene un límite para todo diagrama finito. La co-completud finita y la bi-completud finita se definen de forma similar.

Una categoría $\mathcal{C}$ tiene *exponenciación* si tiene un producto para cualquier par de $\mathcal{C}$-objetos, y si para cualesquiera $\mathcal{C}$-objetos a y b existe un $\mathcal{C}$-objeto b^a y una $\mathcal{C}$-flecha $ev : b^a \times a \to b$, llamada *morfismo evaluación*, tal que para cualquier $\mathcal{C}$-objeto c y cualquier $\mathcal{C}$-flecha $g : c \times a \to b$, existe una única $\mathcal{C}$-flecha $\hat{g} : c \to b^a$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
b^a \times a \arrow[rd, "ev"] & \\
& b \\
c \times a \arrow[uu, dashed, "\hat{g} \times 1_a"] \arrow[ru, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e. una única $\hat{g}$ tal que $ev \circ (\hat{g} \times 1_a) = g$.

Se dice que una categoría finitamente completa con exponenciación es *cerrada cartesiana*.

Un *subobjeto* de un $\mathcal{C}$-objeto d es un monomorfismo $f : a \rightarrowtail d$ con codominio d.

Si una categoría $\mathcal{C}$ tiene un objeto terminal 1, entonces un *elemento* de un $\mathcal{C}$-objeto a

se define como la $\mathcal{C}$-flecha $x : 1 \to a$.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría con objeto terminal 1, entonces un *clasificador de subobjetos* para $\mathcal{C}$ es un $\mathcal{C}$-objeto Ω junto con una $\mathcal{C}$-flecha *true* : $1 \to \Omega$ tal que el siguiente axioma se cumple:

Ω-AXIOMA. Para cada monomorfismo $f : a \rightarrowtail d$ existe una única $\mathcal{C}$-flecha $\chi_f : d \to \Omega$ tal que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "true"] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un *producto fibrado*. La flecha χ_f se llama *morfismo característico*[39] del monomorfismo f (el subobjeto de d). La flecha *true* puede denotarse como $\top$.

Definición 6.37. Un *topos elemental* es una categoría $\mathcal{E}$ tal que

1. $\mathcal{E}$ es completa,
2. $\mathcal{E}$ es co-completa,
3. $\mathcal{E}$ tiene exponenciación, y
4. $\mathcal{E}$ tiene un clasificador de objetos.

Equivalentemente, un *topos* es una categoría cerrada cartesiana equipada con un clasificador de subobjetos.

Finalmente, Awodey (1996, p.223) introduce la noción de *topos* para mostrar que la teoría de categorías puede ser aplicada a un campo tan familiar como lo es el de la lógica. Habla de un *topos* como una especie de categoría que consiste de (i) objetos con alguna estructura arbitraria, i.e. morfismos entre ellos, y (ii) todo lo que pueda construirse a partir de ellos por medios lógicos. Incluso llega a afirmar que la noción de topos es de diferente orden, reflejando la diferencia entre la *estructura lógica en general* y un tipo particular de estructura matemática (p.224). Así,

T1. Un objeto X de un topos se verá como un tipo[40]. Así, e.g., los objetos de tipo $X \times Y$ son los pares $\langle x, y \rangle$ donde x es de tipo X y y es de tipo Y.

T2. El medio básico de construcción lógica en un topos será la comprensión (*comprehension*) de subobjetos por propiedades.

[39]Este tipo de morfismos se comportan como las funciones características en teoría estándar de conjuntos: dado un subconjunto $A \subseteq D$, definimos la función característica de A como $\chi_A : D \to 2$, donde $2 = \{0, 1\}$ con la regla $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

[40]I.e. como un tipo lógico, una especie de conjunto generalizado o clase de cosas tipo X.

T3. Las propiedades son locales: una propiedad siempre lo es de unas x de tipo X, de forma que cada propiedad tiene siempre un dominio de significado.

T4. Las propiedades son proposiciones variables: si φ es una propiedad con dominio de significado X, y $a : 1 \to X$ es un elemento constante de tipo X, entonces $\varphi(a)$ es una proposición —una *función proposicional sobre* X.

T5. Un topos incluye un objeto de proposiciones Ω y los puntos $p : 1 \to \Omega$ (si los hay) son proposiciones; los elementos generalizados $\varphi : X \to \Omega$ son proposiciones variables y, por tanto, funciones proposicionales.[41]

T6. Existe al menos una proposición verdadera, e.g. $p = p$, representada por $true : 1 \to \Omega$. Así, para cualquier X, $true \circ !_X : X \to 1 \to \Omega$ es una función proposicional veritativa (*true-valued*) constante sobre X, abreviada $true_X$.

T7. Las funciones proposicionales especifican subobjetos: dada una función proposicional $\varphi : X \to \Omega$, obtenemos el subobjeto de las x para las cuales φ es verdadera a través del igualador de φ y $true_X$; i.e. para un punto particular a de X, tendremos $a \in_X \{x \in X \mid \varphi \circ x = true_X\}$ si y sólo si $\varphi \circ a = true$. A dicho igualador lo llamamos la *extensión* de la función proposicional φ.

T8. Un topos tiene productos y exponenciales; lógicamente, los productos proveen relaciones entre funciones proposicionales (e.g. conectivas como la conjunción $\wedge$) y los exponenciales proveen funciones proposicionales sobre funciones proposicionales (i.e. lógica de orden superior) con el objeto Ω^X de funciones proposicionales sobre X.

T9. El objeto de proposiciones Ω se caracteriza con el *Axioma de Comprensión*: existe un morfismo $true : 1 \to \Omega$ tal que para cada $\varphi : X \to \Omega$ existe un igualador de φ y $true_X$, y todo monomorfismo $m : M \to X$ cuenta como tal igualador para una única φ. Esto quiere decir que toda función proposicional tiene una única extensión y que ellas son los únicos subobjetos. Por ello a Ω se le suele llamar "clasificador de subobjetos".

[41] E.g. si la proposición p factoriza como $p = \varphi(a) = \varphi \circ a : 1 \to X \to \Omega$, entonces p resulta de evaluar la función proposicional φ en el punto a de X.

Apéndice 4: Teoría de Topoi Cuánticos

Definición 7.38. Un **functor contravariante o prehaz** $X : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ mapea cada $\mathcal{C}$-objeto A a un $\mathcal{D}$-objeto $X(A)$ y cada $\mathcal{C}$-flecha $f : A \to B$ a una $\mathcal{D}$-flecha $X(f) : X(B) \to X(A)$ y satisface

$$X(1_A) = 1_{X(A)}$$
$$X(f \circ g) = X(g) \circ X(f)$$

Definición 7.39. Dados dos functores contravariantes X y Y, una **transformación natural** de $Y : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ a $X : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una flecha $N : Y \to X$ que asocia cada $\mathcal{C}$-objeto A con una $\mathcal{D}$-flecha $N_A : Y(A) \to X(A)$ que, para toda $\mathcal{C}$-flecha $f : A \to B$, obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & Y(B) \arrow[r, "N_B"] \arrow[d, "Y(f)"] & X(B) \arrow[d, "X(f)"] \\ B & Y(A) \arrow[r, "N_A"] & X(A) \end{tikzcd}$$

i.e. que $N_A \circ Y(f) = X(f) \circ N_B$

Definición 7.40. La *categoría de prehaces* $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ se conforma de:

- **objetos**: todos los functores contravariantes $X : \mathcal{C} \to \mathrm{SET}$
- **morfismos**: todas las transformaciones naturales $N : X \to Y$ entre los functores contravariantes tales que, dada una $\mathcal{C}$-flecha $f : D \to C$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X(C) \arrow[r, "X(f)"] \arrow[d, "N_C"] & X(D) \arrow[d, "N_D"] \\ Y(C) \arrow[r, "Y(f)"] & Y(D) \end{tikzcd}$$

Por ejemplo, si $\mathrm{Ob}_{\mathcal{C}} = (A, B, C, D)$, obtenemos este diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & B & & & & X(B) \arrow[dl, "X(h)"] \arrow[dr, "X(g)"] & \\
A \arrow[ur, "h"] & & C \arrow[ul, "g"'] & \xrightarrow{X} & X(A) \arrow[dr, "X(k)"] & & X(C) \arrow[dl, "X(f)"] \\
 & D \arrow[ul, "k"] \arrow[ur, "f"'] & & & & X(D) &
\end{tikzcd}$$

Veamos otro ejemplo: representemos dos prehaces $X : \mathcal{C} \to \mathrm{SET}$ y $\mathcal{C} \to \mathrm{SET}$ donde $\mathrm{Ob}_{\mathcal{C}} = (A, B, C)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} = (f : B \to A,\ g : C \to A)$. La transformación natural $N : X \to Y$ tiene los componentes $N(A) : X(A) \to Y(A)$, $N(B) : X(B) \to Y(B)$ y $N(C) : X(C) \to Y(C)$:

$$\begin{tikzcd}
X(B) \arrow[rrr, "N(B)"] \arrow[ddddd, dashed, no head, bend right] & & & Y(B) \arrow[ddddd, dashed, no head, bend left] \\
 & X(A) \arrow[ul, "X(f)"] \arrow[dl, "X(g)"'] \arrow[r, "N(A)"] \arrow[ddd, dashed, no head] & Y(A) \arrow[ur, "Y(f)"] \arrow[dr, "Y(g)"] \arrow[ddd, dashed, no head] & \\
X(C) \arrow[rrr, "N(C)"] \arrow[d, dashed, no head] & & & Y(C) \arrow[d, dashed, no head] \\
B \arrow[dr, "f"] & & & B \arrow[dl, "f"'] \\
 & A & A & \\
C \arrow[ur, "g"] & & & C \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

La *categoría de prehaces* $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ es un topos; tiene objeto inicial, objeto terminal, productos, coproductos, igualadores, coigualadores, productos fibrados, sumas amalgamadas, clasificador de subobjetos, elementos globales y objeto exponencial, como veremos.

Definición 7.41. El **objeto inicial** de $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ es el functor constante $0 : \mathcal{C} \to \mathrm{SET}$ que mapea todo $\mathcal{C}$-objeto a $\emptyset$ y toda $\mathcal{C}$-flecha a $1_\emptyset$

$$\begin{tikzcd}
& & C \arrow[dl] & & & & \emptyset \\
E \arrow[d] & B \arrow[dl] & & \xrightarrow{0} & \emptyset & \emptyset \arrow[ur] & \\
A & D \arrow[l] & & & \emptyset \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & \emptyset &
\end{tikzcd}$$

Definición 7.42. El **objeto terminal** de $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ es el functor constante $1 : \mathcal{C} \to \mathrm{SET}$ que mapea todo $\mathcal{C}$-objeto a $\{*\}$ y toda $\mathcal{C}$-flecha a $1_{\{*\}}$

$$\begin{tikzcd}
& & C \arrow[dl] & & & & \{*\} \\
E \arrow[d] & B \arrow[dl] & & \xrightarrow{1} & \{*\} & \{*\} \arrow[ur] & \\
A & D \arrow[l] & & & \{*\} \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & \{*\} &
\end{tikzcd}$$

Definición 7.43. Dados dos prehaces $X, Y \in \mathrm{Ob}_{\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}}$, el **producto** $X \times Y$ es el prehaz que

1. $\forall C \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$, $(X \times Y)(C) := X(C) \times Y(C)$

2. $\forall f : C \to D \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$, $(X \times Y)(f) := X(f) \times Y(f) : X(D) \times Y(D) \to X(C) \times Y(C)$

de forma que obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& X(D) \arrow[r, "X(f)"] & X(C) \\
X(D) \times Y(D) \arrow[ur, "pr_1"] \arrow[dr, "pr_2"'] \arrow[rr, dashed, "X(f)\times Y(f)"] & & X(C) \times Y(C) \arrow[u, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"] \\
& Y(D) \arrow[r, "Y(f)"] & Y(C)
\end{tikzcd}$$

Definición 7.44. Dados dos prehaces $X, Y \in \mathrm{Ob}_{\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}}$, el **coproducto** $X + Y$ es el prehaz que

1. $\forall C \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$, $(X + Y)(C) := X(C) \amalg Y(C)$, que es la unión disjunta en SET

2. $\forall f: C \to D \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$, $(X+Y)(f) := X(f) + Y(f) : X(D) \amalg Y(D) \to X(C) \amalg Y(C)$

de forma que obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & X(D) \arrow[r, "X(f)"] \arrow[dl, "i_1"'] & X(C) \arrow[d, "i_1"] \\
X(D) \amalg Y(D) \arrow[rr, dashed, "X(f)+Y(f)"] & & X(C) \amalg Y(C) \\
 & Y(D) \arrow[r, "Y(f)"] \arrow[ul, "i_2"] & Y(C) \arrow[u, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

Definición 7.45. Dadas dos transformaciones naturales $N, M : X \to Y$ entre dos functores de $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$, un **igualador** $I : Z \to X$ es una transformación natural que:

1. $N \circ I = M \circ I$. Así, para cada $C \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$, las componentes de la transformación natural se componen en SET, i.e. $N_C \circ I_C = M_C \circ I_C$

2. Dada cualquier transformación natural $H : W \to Z$ t.q. $N \circ H = M \circ H$, existe una sola transformación natural $K : W \to Z$ tal que $I_C \circ K_C = H_C$

$$\begin{tikzcd}
Z(C) \arrow[r, "I"] & X(C) \arrow[r, shift left, "N_C"] \arrow[r, shift right, "M_C"'] & Y(C) \\
 & W(C) \arrow[u, "H_C"] \arrow[ul, dashed, "K_C"] &
\end{tikzcd}$$

Definición 7.46. Dadas dos transformaciones naturales $N, M : X \to Y$ entre dos functores de $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$, un **coigualador** $L : Y \to Z$ es una transformación natural que:

1. $L \circ N = L \circ M$. Así, para cada $C \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$, las componentes de la transformación natural se componen en SET, i.e. $L_C \circ N_C = L_C \circ M_C$

2. Dada cualquier transformación natural $H : Y \to W$ t.q. $H \circ N = H \circ M$, existe una sola transformación natural $K : Z \to Y$ tal que $K_C \circ L_C = H_C$

$$\begin{tikzcd}
X(C) \arrow[r, shift left, "N_C"] \arrow[r, shift right, "M_C"'] & Y(C) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "H_C"] & Z(C) \arrow[dl, dashed, "K_C"] \\
 & W(C) &
\end{tikzcd}$$

Definición 7.47. Si $X, Y, B \in \mathrm{Ob}_{\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}}$, entonces $P \in \mathrm{Ob}_{\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}}$ es un **producto fibrado**

en $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ si $\forall C \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ el siguiente diagrama es un producto fibrado en SET:

$$\begin{array}{ccc} P(C) & \xrightarrow{k} & Y(C) \\ \Big\downarrow h & & \Big\downarrow g \\ X(C) & \xrightarrow{l} & B(C) \end{array}$$

i.e. que $P(C) = (X \times_B Y)(C) \simeq X(C) \times_{B(C)} Y(C)$

Definición 7.48. Si $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}_{\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}}$, entonces $W \in \mathrm{Ob}_{\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}}$ es una **suma amalgamada** en $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ si $\forall C \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ el siguiente diagrama es una suma amalgamada en SET:

$$\begin{array}{ccc} X(C) & \xrightarrow{k} & Y(C) \\ \Big\downarrow h & & \Big\downarrow g \\ Z(C) & \xrightarrow{l} & W(C) \end{array}$$

i.e. que $W(C) = (Z +_X Y)(C) \simeq Z(C) +_{X(C)} Y(C)$

Definición 7.49. Un **tamiz** sobre un $\mathcal{C}$-objeto A es la colección S de morfismos de $\mathcal{C}$ cuyo codominio es A y es tal que, si $f : B \to A \in S$, entonces, dado cualquier $g : C \to B$, $f \circ g \in S$, i.e. S es cerrado bajo composición izquierda.

Definición 7.50. El **clasificador de subobjetos** de $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ es el prehaz $\Omega : \mathcal{C} \to \mathrm{SET}$ que

- a cada $\mathcal{C}$-objeto A le asigna un SET-objeto $\Omega(A)$ que representa el conjunto de tamices sobre A
- a cada $\mathcal{C}$-flecha $f : B \to A$ le asigna una SET-flecha $\Omega(f) : \Omega(A) \to \Omega(B)$ t.q. $\Omega(f)(s) := \{h : C \to B | f \circ h \in S\}$ es un tamiz sobre B
- existe la transformación natural $\top : 1 \to \Omega$ cuya componente $\top_A : \{*\} \to \Omega(A)$ está dada por $\top_A(*) = \downarrow A$ (el tamiz principal sobre A).

Consideremos el monomorfismo $\sigma : F \to X$ en $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ definido como $\sigma_A : F(A) \to X(A)$ y que representa la relación de inclusión ($\subseteq$). Ahora definamos $\chi^\sigma : X \to \Omega$, el morfismo característico de σ, que es la transformación natural entre los prehaces y es tal que las componentes χ^σ_A representan funciones de $X(A)$ a $\Omega(A)$:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \overset{\sigma_A}{\hookrightarrow} & X(A) \\ \Big\downarrow ! & & \Big\downarrow \chi^\sigma_A \\ \{*\} & \xrightarrow{\top_A} & \Omega(A) \end{array}$$

donde $\top(\{*\}) = \downarrow A$ y χ_A^σ asigna a cada elemento $x \in X(A)$ un tamiz $\chi_A^\sigma(x) \in \Omega(A)$ sobre A t.q. $\chi_A^\sigma(x) := \{f : B \to A | X(f)(x) \in F(B)\}$.

Los elementos del clasificador de subobjetos de $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ son tamices y los elementos de un clasificador de subobjetos se identifican con valores de verdad, por lo cual $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ induce una *lógica multivaluada*, a diferencia de lo que ocurre con Ω en SET, que induce una lógica bivaluada.

Definición 7.51. Una **sección global o elemento global** de un prehaz X en $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ es una flecha $k : 1 \to X$ del objeto terminal 1 al prehaz X. A cada $\mathcal{C}$-objeto A, k le asigna un elemento $k_A(\{*\}) \in X(A)$. Esta asignación es tal que, dada una flecha $f : B \to A$, se cumple que $X(f)(k_A(\{*\})) = k_B(\{*\})$

Un tipo importante de secciones globales son los elementos globales de Ω. De hecho, la colección $\Gamma(\Omega)$ de dichos elementos globales forma un álgebra de Heyting y representa la colección de todos los valores de verdad en la lógica de un topos. Esto induce una *lógica intuicionista* y, como dijimos, multivaluada.

Definición 7.52. Consideremos un functor $F \in \mathrm{Ob}_{\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}}$ t.q. dado $m \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$, F define un functor contravariante $F_m : \mathcal{C} \downarrow m \to \mathrm{SET}$ (donde $\mathcal{C} \downarrow m$ es una categoría coma, i.e. sus objetos son todos los $\mathcal{C}$-morfismos con codominio m y sus morfismos son las flechas entre los dominios de aquéllas). El **exponencial** $G^F : \mathcal{C} \to \mathrm{SET}$ entre dos functores contravariantes F y G es el functor con

- **Objetos**: $G^F(m) = \mathrm{Nat}[F_m, G_m]$, i.e. la colección de todas las transformaciones naturales de F_m a G_m

- **Morfismos**: dada una flecha $k : m \to n$, tenemos $G^F(k) : \mathrm{Nat}[F_n, G_n] \to \mathrm{Nat}[F_m, G_m]$

Así, si $\alpha \in \mathrm{Nat}[F_n, G_n]$ y $\theta \in \mathrm{Nat}[F_m, G_m]$, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F_n \arrow[d, "\alpha"', ""{name=A}] & F_m \arrow[d, "\theta", ""'{name=B}] \\
G_n & G_m
\arrow[from=A, to=B, bend left, "G^F(k)"]
\end{tikzcd}$$

i.e. $G^F(k)$ asigna a cada α de F_n a G_n una transformación natural θ de F_m a G_m.

La función de evaluación $ev : G^F \times F \to G$ en $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ es tal que

$$\begin{aligned}
ev_m : G^F(m) \times F(m) \to G(m) \\
\langle \theta, x \rangle \mapsto ev_m(\langle \theta, x \rangle) = \theta_{1_A}(x)
\end{aligned}$$

donde $\theta \in \mathrm{Nat}[F_m, G_m]$ y $x \in F(m)$.

Dependiendo de la elección de $\mathcal{C}$, hay diferentes categorías $\mathrm{SET}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ relevantes para la teoría cuántica. Consideremos la categorías $\mathcal{O}_d$ de operadores autoadjuntos (en un espacio de Hilbert) con espectros discretos, que es una subcategoría de la categoría $\mathcal{O}$ de todos los operadores autoadjuntos.

Definición 7.53. La categoría $\mathcal{O}$ consiste de

- **objetos**: operadores autoadjuntos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \ldots$

- **morfismos**: dada una función $f : \sigma(\hat{A}) \to \mathbb{R}$ (del espectro de $\hat{A}$ a los reales) tal que $\hat{B} = f(\hat{A})$, existe un único morfismo $f_O : \hat{B} \to \hat{A}$

- **identidad**: $\forall \hat{A} \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{O}}$, el morfismo identidad es $id_{O_A} : \hat{A} \to \hat{A}$ y le corresponde la identidad $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- **composición**: dadas $f_O : \hat{B} \to \hat{A}$ y $g_O : \hat{C} \to \hat{B}$ tales que $\hat{B} = f(\hat{A})$ y $\hat{C} = g(\hat{B})$, a $f_O \circ g_O$ le corresponde $f \circ g : \sigma(\hat{B}) \to \mathbb{R}$

$\mathrm{SET}^{\mathcal{O}_d^{\mathrm{op}}}$ es una versión simplificada del análogo topos teórico del espacio de estados en la teoría cuántica.

Definición 7.54. Un **prehaz espectral** sobre $\mathcal{O}_d$, denotado $\Sigma : \mathcal{O}_d \to \mathrm{SET}$, cumple:

1. $\forall \hat{A} \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{O}_d}$, $\hat{A} \mapsto \Sigma(\hat{A}) = \sigma(\hat{A})$ (a cada operador se le asocia su espectro en SET)

2. $\forall f_O \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_d}$ tal que $f_O : \hat{B} \to \hat{A}$ y $\hat{B} = f(\hat{A})$, $f_O \mapsto \Sigma(f_O) : \Sigma(\hat{A}) \to \Sigma(\hat{B})$, i.e. $\Sigma(f_O) : \sigma(\hat{A}) \to \sigma(\hat{B})$ y se define como $\Sigma(f_O)(\alpha) := f(\alpha)$, $\forall \alpha \in \sigma(\hat{A})$

Por ejemplo, consideremos una categoría de operadores autoadjuntos con espectro discreto que sólo contiene tres objetos:

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 \\
\hat{B} &= b_1 (P_1 \vee P_3) + b_2 P_2 \\
\hat{C} &= c_1 P_3 + c_2 (P_2 \vee P_2)
\end{aligned}$$

donde cada $\hat{P}_i$ es mutuamente ortogonal.

$$\begin{tikzcd}
& \hat{1} \arrow[dl, "g_O"'] \arrow[dr, "f_O"] & \\
\hat{B} \arrow[dr, "i_O"] & & \hat{C} \arrow[dl, "j_O"] \\
& \hat{A} & \\
& \hat{0} \arrow[u, "k_O"] &
\end{tikzcd}$$

El prehaz espectral Σ actúa así:

$$\sigma(\hat{A}) = \{a_1, a_2, a_3\}$$
$$\sigma(\hat{B}) = \{b_1, b_2\}$$
$$\sigma(\hat{C}) = \{c_1, c_2\}$$

y, por ejemplo, $j_O : \hat{C} \to \hat{A}$ se mapea a $\Sigma(j_O) : \sigma(\hat{A}) \to \sigma(\hat{C})$ y obtenemos estos mapeos:

$$\Sigma(j_O)(a_1) = c_2$$
$$\Sigma(j_O)(a_2) = c_2$$
$$\Sigma(j_O)(a_3) = c_1$$

La teoría cuántica de topos puede verse como una teoría cuántica contextual, en el sentido en que cada elemento es definido como la colección de descripciones “dependientes de contexto” que hacen las veces de *snapshot clásico*. Estos contextos son las subálgebras de Von Neumann; la colección de éstas forma una categoría bajo inclusión de subálgebras, denotada $\mathcal{V}(\mathcal{H})$. Así, aunque “localmente” se puede definir la teoría cuántica en términos de *snapshots clásicos*, la información global/cuántica se pone de vuelta en su lugar por medio de la estructura categorista de la colección de todos los *snapshots clásicos*.

La categoría de las subálgebras de Von Neumann $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ será la categoría base en el topos de prehaces $\mathrm{SET}^{\mathcal{V}(\mathcal{H})}$ utilizado para definir la teoría cuántica. En este topos, el análogo del espaciop de estados de la teoría cuántica es el prehaz espectral que a cada contexto V le asigna su *espectro de Gel’fand*.

El teorema Kochen-Specker parece implicar que la teoría cuántica es contextual, pues los valores de las cantidades dependen de qué otras cantidades se están midiendo al mismo tiempo. Pero la contextualidad en la teoría cuántica de topos es de otro tipo, si bien se desprende del teorema Kochen-Specker; este teorema nos prohibe definir valores para todas las cantidades al mismo tiempo de una manera consistente, pero permite asignar valores a subconjuntos conmutantes de cantidades. Estos subconjuntos son los snapshots clásicos, ya que todas las peculiaridades de la teoría cuántica surgen de operadores no conmutantes (e.g. posición y momento). Así, con respecto a estos snapshots clásicos (contextos), la teoría cuántica se comporta de forma clásica, es la colección de aproximaciones clásicas locales.

Consideremos el álgebra de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert, denotada $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Un álgebra de Von Neumann es una $*$-álgebra de operadores acotados. Definiremos esta noción paso a paso:

Definición 7.55. Un **anillo** $(X, +, \cdot)$ es un conjunto X con dos operaciones:

- $+ : X \times X \to X$ tal que $\langle x_1, x_2 \rangle \mapsto x_1 + x_2$
- $\cdot : X \times X \to X$ tal que $\langle x_1, x_2 \rangle \mapsto x_1 \cdot x_2$

y satisface que

- $(X, +)$ es un grupo abeliano bajo adición; $+$ es asociativa
- $(X, \cdot)$ es un monoide bajo multiplicación; $\cdot$ es asociativa

Definición 7.56. Un ***-anillo** es un anillo con un mapeo $* : A \to A$ tal que

$$
\begin{aligned}
(x + y)^* &= x^* + y^* \\
(x \cdot y)^* &= y^* \cdot x^* \\
1^* &= 1 \\
(x^*)^* &= x
\end{aligned}
$$

Definición 7.57. Una ***-álgebra** A es un $*$-anillo que es un módulo sobre un $*$-anillo conmutativo R y $*$ concuerda con $R \subseteq A$

Definición 7.58. Una **C^*-álgebra** $\mathfrak{A}$ es una $*$-álgebra Banach tal que

$$||a^* a|| = ||a||^2$$

Definición 7.59. Una **álgebra de Von Neumann** es una $*$-álgebra de operadores acotados sobre una espacio de Hilbert que es cerrado en la topología débil de operadores y contiene el operador identidad.

Definición 7.60. Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, la colección de todas las subálgebras abelianas de Von Neumann forma **la categoría $\mathcal{V}(\mathcal{H})$** conformada por

- **objetos**: $V \in \mathcal{V}(\mathcal{H})$, i.e. las subálgebras abelianas de Von Neumann
- **morfismos**: dadas dos subálgebras V_1 y V_2, existe una flecha $i : V_1 \to V_2$ si y sólo si $V_1 \subseteq V_2$

Bibliografía

Abramsky, S. & Coecke, B. (2009): "Categorical Quantum Mechanics" en Engesser, K., Gabbay, D.M. & Lehmann, D. *Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures: Quantum Logic*. Elsevier.

Albert, David (1994): *Quantum Mechanics and Experience*. Harvard University Press.

Albert, David (2016): *After Physics*. Harvard University Press.

Albert, David & Loewer, Barry (1988): "Interpreting the Many Worlds Interpretation". *Synthese*, Vol. 77, No. 2 (Nov., 1988), pp. 195-213.

Albert, David & Ney, Alissa (2013) (eds.): *The Wave Function: Essays on the Metaphysics of Quantum Mechanics*. Oxford University Press.

Allo, Patrick (2007): "Logical Pluralism and Semantic Information". *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 36, No. 6 (Dec., 2007), pp. 659-694.

Allori, Valia & Goldstein, Sheldon & Tumulka, Roderich & Zanghì, Nino (2008): "On the Common Structure of Bohmian Mechanics and the Ghirardi-Rimini-Weber Theory". *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 59, No. 3 (Sep., 2008), pp. 353-389.

Anderson, A.R. y Belnap Jr., N.D. *Entailment: the Logic of Relevance and Necessity* (Vol. 1). Princeton University Press.

Ashtekar, A. (2005). The winding road to quantum gravity. Current Science, 89(12), 2064-2074.

Awodey, S. (1996). "Structure in Mathematics and Logic: a Categorical Perspective". *Philosophia Mathematica*. 4(3): 209-237.

Baez, J.C. y Dolan, J. (1995). "Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory". *Journal of Mathematical Physics*, 36, pp.6073-6105.

Bain, J. (2013). "Category-theoretic structure and radical ontic structural realism", *Synthese*, 190: 1621-1635.

Baitag, Alexandru & Smets, Sonja (2011): "Quantum logic as a dynamic logic". *Synthese*, Vol. 179, No. 2, Logic and Philosophy of Science in the Footsteps of E. W. Beth (March 2011), pp. 285-306.

Baitag, Alexandru & Smets, Sonja (2012): "The dynamic turn in quantum logic". *Synthese*, Vol. 186, No. 3, Logic Meets Physics (June 2012), pp. 753-773.

Barrett, J. (2003). Are Our Best Physical Theories (Probably and/or Approximately)

True? Philosophy of Science, 70(5), 1206-1218. doi:10.1086/377401

Barrett, Jeffrey A. (2005). “Relativistic Quantum Mechanics through Frame-Dependent Constructions”. *Philosophy of Science*, Vol. 72, No. 5, Proceedings of the 2004 Biennial Meeting of The Philosophy of Science Association Part I: Contributed Papers Edited by Miriam Solomon (December 2005), pp. 802-813.

Beall, J.C. y Restall, G. (2000). “Logical pluralism”. *Australasian Journal of Philosophy*, 78: 475-93.

Beall, J.C. y Restall, G. (2006). *Logical Pluralism*. Oxford University Press.

Beall, J.C. et al. (2012). “On the Ternary Relation and Conditionality”. *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 41, pp. 1-18.

Béaver, O. R. & Cook, T. A. (1977): “States on Quantum Logics and Their Connection with a Theorem of Alexandroff”. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 67, No. 1 (Nov., 1977), pp. 133-134.

Bell, J. (1981). Category Theory and the Foundations of Mathematics. The British Journal for the Philosophy of Science, 32(4), 349-358. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/687305

Bell, J.L. & Hallet, M. (1982): “Logic, Quantum Logic and Empiricism”. *Philosophy of Science*, Vol. 49, No. 3 (Sep., 1982), pp. 355-379.

Bell, J.L. (1986). “A New Approach to Quantum Logic”. *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 37, No. 1 (Mar., 1986), pp. 83-99.

Bell, J.L. (1988). *Toposes and Local Set Theories*. Oxford University Press.

Bell, J.L. (2014). *Intuitionistic Set Theory*. Studies in Logic 50, College Publications.

Bell, J. S. (1964). “On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox”. *Physics*, vol. 1 no. 3.

Beltrametti, Enrico G. & Van Fraassen, Bas (eds.) (1981): *Current Issues in Quantum Logic*. Plenum Press, New York.

Benthem, Johan v. & Smets, Sonja (2012): “New logical perspectives on physics”. *Synthese*, Vol. 186, No. 3, Logic Meets Physics (June 2012), pp. 615-617.

Birkhoff, G., & Von Neumann, J. (1936): “The logic of quantum mechanics”. *Annals of Mathematics*, 37: 823-843.

Bub, Jeffrey (1968): “Hidden Variables and the Copenhaguen Interpretation–A Reconciliation”. *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 19, No. 3 (Nov., 1968), pp.185-210.

Bub, Jeffrey (1981): “Hidden Variables and Quantum Logic: A Sceptical Review”. *Erkenntnis (1975-)*, Vol. 16, No. 2, Measurement, Probability and Quantum Mechanics, Part 1 (Jul., 1981), pp. 275-293.

Bueno, Otávio & da Costa, Newton C. A. (2007): “Quasi-Truth, Paraconsistency, and the Foundations of Science”. *Synthese*, Vol. 154, No. 3, New Trends in the Foundations of Science (Feb., 2007), pp. 383-399.

Bueno, Otávio & Shalkowski, Scott A. (2009): “Modalism and Logical Pluralism”. *Mind*, New Series, Vol. 118, No. 470 (Apr., 2009), pp. 295-321.

Bugajski, Sławomir (1980): "Only If 'Acrobatic Logic' is Non-Boolean". *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Vol. 1980, Volume One: Contributed Papers (1980), pp. 264-271.

Bugajski, Sławomir (1982): "What Is Quantum Logic?" *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, Vol. 41, No. 4 (1982), pp. 311-316.

Butterfield, J. e Isham, C.J. (1998a). A Topos Perspective on the Kochen-Specker Theorem:I. Quantum States as Generalized Valuations. quant-ph/9803055.

Butterfield, J. e Isham, C.J. (1998b). A Topos Perspective on the Kochen-Specker Theorem:II. Conceptual Aspects,and Classical Analogues. quant-ph/9808067.

Butterfield, J. e Isham, C.J. (1999). Some Possible Roles for Topos Theory in Quantum Theory and Quantum Gravity. quant-ph/9910005.

Butterfield, J., Isham, C.J, Hamilton, J. (1999). A topos Perspective on the Kochen-Specker Theorem:III. Von Neumann Algebras as the Base Category. quant-ph/9911020.

Callender, Craig & Weingard, Robert (1997): "Trouble in Paradise? Problems for Bohm's Theory". *The Monist*, Vol. 80, No. 1, Quantum Mechanics and the Real World (January 1997), pp. 24-43.

Cano Jorge, Fernando (2020). "A relevantist revision of the CHSH inequality". Manuscrito no publicado.

Cano Jorge, Fernando y Estrada-González, Luis (2020). "A relevantist's glance at Bell's theorem". Sometido para publicación.

Cano Jorge, Fernando y Estrada-González, Luis (2021). "Ultramodal probability logic". Sometido para publicación.

Cao, T. (2003). "Structural realism and the interpretation of quantum field theory". *Synthese* 136: 3-24.

Caramello, O. (2017). *Theories, Sites, Toposes: relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges'.* Oxford University Press.

Carnap, Rudolf (1950): *Logical Foundations of Probability.* The University of Chicago Press.

Carsten, Held (2018). "The Kochen-Specker Theorem", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = `<https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/kochen-specker/>`

Cattaneo, Gianpiero & Chiara, Maria L. Dalla & Giuntini, Roberto (1993): "Fuzzy Intuitionistic Quantum Logics". *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, Vol. 52, No. 3 (Aug., 1993), pp. 419-442.

Chakravartty, A. (1998). "Semirealism". *Studies in History and Philosophy of Modern Science*, 29: 391-408.

Chakravartty, Anjan (2011): "Scientific Realism and Ontological Relativity". *The Monist*, Vol. 94, No. 2, The Architecture of Reality (April 2011), pp. 157-180.

Chiara, María L. Dalla (1977): "Quantum Logic and Physical Modalities". *Journal of*

Philosophical Logic, Vol. 6, No. 1 (Jan., 1977), pp. 391-404.

Chiara, María L. Dalla & Giuntini, Roberto (2000): "Paraconsistent Ideas in Quantum Logic". *Synthese*, Vol. 125, No. 1/2, Festschrift in Honor of Newton C. A. DaCosta on the Occasion of His Seventieth Birthday (Oct. - Nov., 2000), pp. 55-68.

Chiara, María L. Dalla & Giuntini, Roberto (2002): "Quantum Logics" en: Gabbay, D. & Guenthner F. (2002) (eds.): *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 6. Kluwer Academic Publications.

Clark, Ian D. (1973): "An Axiomatisation of Quantum Logic". *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 38, No. 3 (Dec., 1973), pp. 389-392.

Coecke, Bob (2002a): "Disjunctive Quantum Logic in Dynamic Perspective". *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, Vol. 71, No. 1 (Jun., 2002), pp. 47-56.

Coecke, Bob (2002b): "Quantum Logic in Intuitionistic Perspective". *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, Vol. 70, No. 3 (Apr., 2002), pp. 411-440.

Cohen, Jonathan & Rickless, Samuel C. (2007): "Binding Arguments and Hidden Variables". *Analysis*, Vol. 67, No. 1 (Jan., 2007), pp. 65-71.

Cook, R. (2010). "Let a thousand flowers bloom: a tour of logical pluralism", *Philosophy Compass*, 5(6): 492-504.

de Barros, J. Acacio & de Mendonça, J. P. R. F. & Pinto-Neto, N. (2007): "Realism in Energy Transition Processes: An Example from Bohmian Quantum Mechanics". *Synthese*, Vol. 154, No. 3, New Trends in the Foundations of Science (Feb., 2007), pp. 349-370.

Delmas-Rigoutsos, Yannis (1997): "A Double Deduction System for Quantum Logic Based on Natural Deduction". *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 26, No. 1 (Feb., 1997), pp. 57-67.

Denecke, Heinz-Martin (1977): "Quantum Logic of Quantifiers". *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 6, No. 1 (Jan., 1977), pp. 405-413.

Di Cosmo, Roberto y Miller, Dale, "Linear Logic", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <`https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/logic-linear/`>.

Dickson, Michael (2001): "Quantum Logic Is Alive $\wedge$ (It Is True $\vee$ It Is False)". *Philosophy of Science*, Vol. 68, No. 3, Supplement: Proceedings of the 2000 Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association. Part I: Contributed Papers (Sep., 2001), pp. S274-S287.

Döring, A. (2007): "Topos Theory and 'Neo-Realist' Quantum Theory". [`arXiv:0712.4003v1[quant-ph]`]

Döring, A. (2008): "Quantum States and Measures on the Spectral Presheaf". [`arXive:0809.4847v1[quantph]`]

Döring, A. (2010a): "Topos Quantum Logic and Mixed States". [`arXiv:1004.3561v1`]

Döring, A. (2010b): “The Physical Interpretation of Daseinisation” [`arXiv:1004.3573`]

Döring, A. & Isham, C. J (2007): “A Topos Foundation for Theories of Physics: I. Formal Languages for Physics”. [`quant-ph/0703060`]

Döring, A. & Isham, C. J (2007): “A Topos Foundation for Theories of Physics: II. Daseinisation and the Liberation of Quantum Theory”. [`quant-ph/0703062`]

Döring, A. & Isham, C. J (2007): “A Topos Foundation for Theories of Physics: III. The Representation of Physical Quantities With Arrows ”. [`quant-ph/0703064`]

Döring, A. & Isham, C. J (2007): “A Topos Foundation for Theories of Physics: IV. Categories of Systems”. [`quant-ph/0703066v1`]

Döring, A. & Isham, C. J. (2008): “‘What is a Thing?’: Topos Theory in the Foundations of Physics”. [`arXiv:0803.0417v1[quant-ph]`]

Döring, A & Isham, C. J. (2011): “Classical and Quantum Probabilities as Truth Values” [`arXiv:1102.2213v1`]

Dosen, K. y Petric, Z. (2005): “Relevant categories and partial functions”. *Publications de l’Institut Mathématique. Nouvelle Série.* 82(96): 17–23.

Drieschner, M. (1977): “Is (Quantum) Logic Empirical?” *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 6, No. 1 (Jan., 1977), pp. 415-423.

Dummett, Michael (1978). *Truth and Other Enigmas*. Harvard University Press.

Dunn, Michael J. (1993): “Star and perp: two treatments of negation”. *Philosophical Perspectives*, vol. 7, Language and Logic, pp. 331-357.

Dunn, Michael J. & Hagge, Tobias J. & Moss, Lawrence S. & Wang, Zhenghan (2005): “Quantum Logic as Motivated by Quantum Computing”. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 70, No. 2 (Jun., 2005), pp. 353-359.

Dürr, D., Goldstein, S., Norsen, T., Struyve, W., & Zanghì, N. (2014). Can Bohmian mechanics be made relativistic? Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 470(2162), 1-11.

Dvurečenskij, Anatolji & Neubrunn, Tibor & Pulmannová, Sylvia (1992): “Regular States and Countable Additivity on Quantum Logics”. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 114, No. 4 (Apr., 1992), pp. 931-938.

Egg, Matthias (2012): “Warrant for Realism about Particle Physics”. *Journal for General Philosophy of Science / Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie*, Vol. 43, No. 2, Philosophy of Physics (December 2012), pp. 259-280.

Einstein, A., Podolsky, B. y Rosen, N. (1935). “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” *Physical Review* 47.

Estrada-González, L. (2015a). “From (paraconsistent) topos logic to Universal (topos) logic”, en Arnold Koslow y Arthur Buchsbaum (eds.), *The Road to Universal Logic. Festschrift for Jean-Yves Béziau in his 50th Birthday*, Springer, vol. II: pp. 263-295.

Estrada-González, L. (2015b). “The evil twin: The basics of complement-toposes”, en Jean-Yves Béziau, Mihir Chakraborty y Somma Dutta (eds.), *New Directions in*

Paraconsistent Logic, Alemania: Springer, pp. 375-425.

Estrada-González, L. y Ramírez-Cámara, E. (2016). “A comparison of connexive logics”. *IfCoLog Journal of Logics and their Applications*, 3: 341-355.

Estrada-González, L. y Cano Jorge, F. (2021). “Revisiting Reichenbach’s logic”. *Synthese* 199, pp.11821–11845.

Eva, B. (2015). “Towards a paraconsistent quantum set theory” en Heunen, C. et al (eds.) *12th International Workshop on Quantum Physics and Logic (QPL 2015)*, EPTCS 195: 150-169.

Eva, B. (2016). “Category theory and physical structuralism”. *European Journal for the Philosophy of Science*, 6: 231-246.

Eva, Benjamin (2017). Topos-Theoretic Quantum Realism. *British Journal for the Philosophy of Science* 68(4): 1149-1181. Se citó con la numeración de la versión de arXiv.

Farr, Matt (2012): “On A-and B-theoretic elements of branching spacetimes”. *Synthese*, Vol. 188, No. 1, Branching-Time and Indeterminacy (September 2012), pp. 85-116.

Feferman, S. (1977). “Categorical foundations and foundations of category theory” en Butts, R.E. y Hintikka, J. (eds.), *Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory*. Dordrecht: Reidel.

Finkelstein, D. (1972). “The physics of logic” en Colodny, R.G. (ed.), *Paradigms and Paradoxes: The philosophical challenge of the quantum domain*, University of Pittsburg Press.

Flori, Cecilia (2009): *Approaches to Quantum Gravity*. [`arXiv:0911.2135v1`]

Flori, Cecilia (2011): “Review of the Topos Approach to Quantum Theory”. [`arXiv: 1106.5660v1`]

Flori, Cecilia (2013): *A First Course in Topos Quantum Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Flori, C. (2008). “A Topos Formulation of Consistent Histories”. arXiv:0812.1290v1

Flori, C. (2018). *A Second Course in Topos Quantum Theory*. Springer-Verlag Berlin.

Gabbay, D. & Guenthner, F. (2002) (eds.): *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 6. Kluwer Academic Publications.

Gardner, Michael R. (1971): “Is Quantum Logic Really Logic?” *Philosophy of Science*, Vol. 38, No. 4 (Dec., 1971), pp. 508-529.

Garola, Claudio (1992): “Truth versus Testability in Quantum Logic”. *Erkenntnis (1975-)*, Vol. 37, No. 2 (Sep., 1992), pp. 197-222.

Georgacarakos, G.N. (1979): “Orthomodularity and Relevance”. *Journal of Philosophical Logic*, vol. 8, no. 1, pp. 415-432.

Gibbins, P. F. (1984): “Why the Distributive Law Is Sometimes False”. *Analysis*, Vol. 44, No. 2 (Mar., 1984), pp. 64-67.

Girard, J. Y. (1987): “Linear logic”. *Theoretical Computer Science* 50, pp. 1-102.

Giuntini, Roberto (1987): “Quantum Logics and Lindenbaum Property”. *Studia Logica:*

An International Journal for Symbolic Logic, Vol. 46, No. 1 (Mar., 1987), pp. 17-35.

Goldblatt, R. (1974): "Semantic analysis of orthologic". *Journal of Philosophical Logic* 3(1974) 19-35.

Goldblatt, R. (1984): *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*. North-Holland, London.

Gower, B. (2000). "Cassirer, Schlick and 'structural' realism: the philosophy of exact sciences in the background to early logical empiricism". *British Journal for the Philosophy of Science* 8: 71-106.

Hardegree, Gary M. (1974): "The Conditional in Quantum Logic". *Synthese*, Vol. 29, No. 1/4, Logic and Probability in Quantum Mechanics (Dec., 1974), pp. 63-80.

Hardegree, Gary M. (1975): "Stalnaker Conditionals and Quantum Logic". *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 4, No. 4 (Nov., 1975), pp. 399-421.

Hardegree, Gary M. (1979): "The conditional in abstract and concrete quantum logic" en Hooker, C.A. (ed.), *Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics* (Vol. 2), Reidel Dordrecht, pp. 49-108.

Harding, John (1996): "Decompositions in Quantum Logic". *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 348, No. 5 (May, 1996), pp. 1839-1862.

Harrison, Jonathan (1983): "Against Quantum Logic". *Analysis*, Vol. 43, No. 2 (Mar., 1983), pp. 83-85.

Hanson, S., Hendricks V., y Michelsen, E. (2018). Introduction to Formal Philosophy. Springer

Healey, Richard A. (1984): "How Many Worlds?" *Noûs*, Vol. 18, No. 4, Special Issue on the Foundations of Quantum Mechanics (Nov., 1984), pp. 591-616.

Hellman, Geoffrey (1980): "Quantum Logic and Meaning". *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Vol. 1980, Volume Two: Symposia and Invited Papers (1980), pp. 493-511.

Hellman, G. (1989). *Mathematics without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation*. Oxford University Press.

Hellman, G. (2001). "Three varieties of mathematical structuralism". *Philosophia Mathematica*, 9(2): 184-211.

Hellman, G. (2003). "Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism?". *Philosophia Mathematica*, 11(2): 129–157.

Hellman, Geoffrey (2006): "Mathematical Pluralism: The Case of Smooth Infinitesimal Analysis". *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 35, No. 6 (Dec., 2006), pp. 621-651.

Hellman, G. (2005). "Structuralism" en Shapiro, S. (ed.) *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press.

Heunen, Chris & Landsman, Nicolaas P. & Spitters, Bas & Wolters, Sander (2010): "The Gelfand spectrum of a noncommutative C*-algebra: a topos-theoretic approach". [`arXiv:1010.2050v1[math-ph]`]

Hickman, J.L. (1980): "A note on the concept of multiset". *Bulletin of the Australian*

Mathematical Society, 22, pp. 211-217.

Hintikka, Jaakko (2002): "Quantum Logic as a Fragment of Independence-Friendly Logic". *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 31, No. 3 (Jun., 2002), pp. 197-209.

Hoering, Walter (1981): "On Understanding Quantum Logic". *Erkenntnis (1975-)*, Vol. 16, No. 2, Measurement, Probability and Quantum Mechanics, Part 1 (Jul., 1981), pp. 227-233.

Hughes, R.I.G. (1980): "Quantum Logic and the Interpretation of Quantum Mechanics". *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Vol. 1980, Volume One: Contributed Papers (1980), pp. 55-67.

Hughes, R.I.G. (1989): *The Structure and Interpretation of Quantum Mechanics*. Harvard University Press.

Humberstone, L. (2011): *The Connectives*. MIT Press.

Hyde, D. y Priest, G. (eds.) (2017). *Sociative Logics and Their Applications: Essays by the Late Richard Sylvan*, Routledge.

Isham, C. J. (1993): "Quantum logic and Histories Approach to Quantum Theory". [`arXiv:gr-qc/9308006v1`]

Isham, C. J. (1996): "Topos Theory and Consistent Histories: The Internal Logic of the Set of all Consistent Sets". [`arXiv:gr-qc/9607069v1`]

Isham, C. J. (2005a): "A Topos Perspective on State-Vector Reduction". [`quant-ph/0508225V1`]

Isham, C. J. (2005b): "Is it True or is it False; or Somewhere In Between? The Logic of Quantum Theory". *Contemporary Physics*, Vol. 46, No. 3, May–June 2005, pp. 207-219.

Isham, C. J. (2010): "Topos Methods in the Foundations of Physics". [`arXiv:1004.3564v1`]

Isham, C. J. & Butterfield, J. (1998): "A Topos Perspective on the Kochen-Specker Theorem: I. Quantum States as Generalized Valuations". [`quant-ph/9803055`]

Isham, C. J. & Butterfield, J. (1998): "A Topos Perspective on the Kochen-Specker Theorem: II. Conceptual Aspects and Classical Analogues". [`quant-ph/9808067`]

Isham, C. J. & Butterfield, J. & Hamilton, J. (1999): "A topos Perspective on the Kochen-Specker Theorem: III. Von Neumann Algebras as the Base Category" [`quant-ph/9911020`]

Isham, C. J. & Butterfield, J. (1999): "Some Possible Roles for Topos Theory in Quantum Theory and Quantum Gravity". [`quant-ph/9910005`]

Isham, C.J. y Döring, A. (2007a). A Topos Foundation for Theories of Physics: I. Formal Languages for Physics. quant-ph/0703060.

Isham, C.J. y Döring, A. (2007b). A Topos Foundation for Theories of Physics: II. Daseinisation and the Liberation of Quantum Theory. quant-ph/0703062.

Isham, C.J. y Döring, A. (2007c). A Topos Foundation for Theories of Physics: III. The

Representation of Physical Quantities With Arrows. quant-ph/0703064.

Isham, C.J. y Döring, A. (2007d). A Topos Foundation for Theories of Physics: IV. Categories of Systems. quant-ph/0703066v1.

Isham, C.J. y Döring, A. (2008). "What is a Thing?": Topos Theory in the Foundations of Physics. quantph/0803.0417v1.

Isham, C. J., y Döring, A. (2011). Classical and Quantum Probabilities as Truth Values. arXiv:1102.2213v1

Johnstone, P. (2002). Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium. Vol. 2. Oxford University Press.

Karakostas, Vassilios (2012): "Realism and Objectivism in Quantum Mechanics". *Journal for General Philosophy of Science / Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie*, Vol. 43, No. 1 (July 2012), pp. 45-65.

Karakostas ,V. (2014). Correspondence Truth and Quantum Mechanics. Axiomathes 24 (3): 343-358.

Keas, Michael N. (2017): "Systematizing the theoretical virtues". *Synthese*. Disponible en `https://link.springer.com/article/10.1007/s11229-017-1355-6`

Kerr, Stanley (1976): "Many Worlds Are Better than None". *Philosophy of Science*, Vol. 43, No. 4 (Dec., 1976), pp. 578-582.

Kochen, S. y Specker, E. (1967). "The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics", Journal of Mathematics and Mechanics, 17: 59–87.

Kron, A. y Maric, Z. y Slobodan, V. (1981): "Entailment and quantum logic" en Beltrametti, E.G. y van Fraassen, B.C. (eds.) *Current Issues in Quantum Logic*. Plenum Press, Springer US.

Kuhn, T. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. University of Chicago Press.

Ladyman, J. y Ross, D. (2007). *Every Thing Must Go: Metaphysics Naturalised*. Oxford University Press.

Lal, R. y Teh, N. (2015). "Categorical generalization and physical structuralism". *British Journal for the Philosophy of Science*.

Lam, Vincent & Esfeld, Michael (2012): "The Structural Metaphysics of Quantum Theory and General Relativity". *Journal for General Philosophy of Science / Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie*, Vol. 43, No. 2, Philosophy of Physics (December 2012), pp. 243-258.

Lambek, J. y Scott, P.J. (1988). *Introduction to Higher-Order Categorical Logic*. Cambridge University Press.

Landry, E. (1999). Category Theory: The Language of Mathematics. Philosophy of Science, 66, S14-S27.

Landry, E. (2011). "How to be a structuralist all the way down". *Synthese*, 179: 435-54.

Landry, E. (ed.) (2018). *Categories for the Working Philosopher*. Oxford University Press.

Lange, M. (2002). "Baseball, pessimistic inductions and the turnover fallacy", *Analysis*, 62: 281–285.

Laudan, L. (1981). “A confutation of convergent realism”. *Philosophy of Science*, 48: 19-49.

Lawvere, F.W. (1966). “The category of categories as a foundation for mathematics” en Eilenberg, S. et al (eds.) *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965*, Berlin: Springer Verlag, pp. 1-21.

Lewis, P. (2001). “Why the pessimistic induction is a fallacy”, *Synthese*, 129(3): 371– 380.

Lewis, Peter J. (2007a): “Empty Waves in Bohmian Quantum Mechanics”. *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 58, No. 4 (Dec., 2007), pp. 787-803.

Lewis, Peter J. (2007b): “Quantum Sleeping Beauty”. *Analysis*, Vol. 67, No. 1 (Jan., 2007), pp. 59-65.

Lewis, Peter J. (2009): “Probability, Self-Location, and Quantum Branching”. *Philosophy of Science*, Vol. 76, No. 5 (December 2009), pp. 1009-1019.

Lewis, Peter KJ. (2016): *Quantum Ontology: A Guide to the Metaphysics of Quantum Mechanics*. Oxford University Press.

Lockwood, Michael (1996): “‘Many Minds’. Interpretations of Quantum Mechanics”. *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 47, No. 2 (Jun., 1996), pp. 159-188.

Mac Lane, S. (1986). *Mathematics. Form and Function*. Berlin: Springer Verlag.

Mac Lane, S. (1997): *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag, London.

Mac Lane, S. y Moerdijk, I. (1992) *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, New York: Springer-Verlag.

Maddy, P. (1990). *Realism in Mathematics*. Oxford University Press.

Magnus, P. y Callender, C. (2004). “Realist ennui and the base rate fallacy”, *Philosophy of Science*, 71: 320–338.

Malinowski J. (1990). The Deduction Theorem for Quantum Logic - Some Negative Results. *The Journal of Symbolic Logic*, 55(2), pp. 615-625.

Mares, Edwin D. (1997). “Paraconsistent probability theory and paraconsistent Bayesianism”. *Logique et Analyse*, no. 160, pp. 375-84.

Mares, Edwin D. (2006). “Relevant logic, probabilistic information, and conditionals”. *Logique et Analyse*, no. 196, pp. 399-411.

Martínez, Sergio (1988): “Minimal Disturbance in Quantum Logic”. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Vol. 1988, Volume One: Contributed Papers (1988), pp. 83-88.

Marquis, J. (1995). Category Theory and the Foundations of Mathematics: Philosophical Excavations. Synthese, 103(3), 421-447.

Maudlin, Tim (2010): *The Metaphysics Within Physics*. Oxford University Press.

Maudlin, Tim (2011): *Quantum Non-Locality and Relativity: Metaphysical Intimations of Modern Physics*. Wiley-Blackwell.

McLarty, C. (1990). The Uses and Abuses of the History of Topos Theory. *British Journal for the Philosophy of Science* 41 (3):351-375.

McGrath, James H. (1978): “Only If Quanta Had Logic”. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Vol. 1978, Volume One: Contributed Papers (1978), pp. 268-275.

Meacham, Christopher J. G. (2005): “Three Proposals regarding a Theory of Chance”. *Philosophical Perspectives*, Vol. 19, Epistemology (2005), pp. 281-307.

Meyer, R.K. (1976): “Relevant arithmetic”, *Polish Academy of Sciences, Institute of Philosophy and Bulletin of the Section of Logic*, vol. 5, pp. 133-137.

Meyer, R.K. y Mortensen, C. (1984): “Inconsistent models for relevant arithmetics”. *Journal of Symbolic Logic*, 49: 917-929.

Misak, Cheryl (2005): “Pragmatism and Pluralism”. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, Vol. 41, No. 1 (Winter, 2005), pp. 129-135.

Mittelstaedt, Peter (1974): “Quantum Logic”. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Vol. 1974 (1974), pp. 501-514.

Mittelstaedt, Peter (1978): “The Metalogic of Quantum Logic”. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Vol. 1978, Volume One: Contributed Papers (1978), pp. 249-256.

Mittelstaedt, Peter (1979): “The Modal Logic of Quantum Logic”. *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 8, No. 1 (Jan., 1979), pp. 479-504.

Mittelstaedt, Peter (1986): “Empiricism and Apriorism in the Foundations of Quantum Logic”. *Synthese*, Vol. 67, No. 3, Issues in the Philosophy of Science (Jun., 1986), pp. 497-525.

Mittelstaedt, Peter (2012): “Are the Laws of Quantum Logic Laws of Nature?” *Journal for General Philosophy of Science / Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie*, Vol. 43, No. 2, Philosophy of Physics (December 2012), pp. 215-222.

Monro, G.P. (1987): “The concept of multiset”. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 33, pp. 171-178.

Mortensen, C. (1995). *Inconsistent Mathematics*. Kluwer Mathematics and Its Applications Series. Kluwer Academic Publishers.

Mortensen, C. (2003). “Closed set logic” en Brady, R. T. (ed.), *Relevant Logics and Their Rivals*, vol. II, pp. 254–26, Ashgate Publishing, Aldershot.

Müller, Thomas (2012): “Branching in the landscape of possibilities”. *Synthese*, Vol. 188, No. 1, Branching-Time and Ideterminacy (September 2012), pp. 41-65.

Navara, Mirko (1992): “Regularity and σ-Additivity of States on Quantum Logics”. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 115, No. 2 (Jun., 1992), pp. 427-429.

Nishimura, Hirokazu (1980): “Sequential Method in Quantum Logic”. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 45, No. 2 (Jun., 1980), pp. 339-352.

Norsen, T. (2007). “J.S. Bell’s Concept of Local Causality”. *American Journal of Physics*, 79(12).

Okón, E. (2014). “El problema de la medición”. *Revista Mexicana de Física*, E 60, pp. 130–140.

Paoli, F. (2002). *Substructural Logics: a primer*. Springer Science & Business Media.

Pati, A.K. y Braunstein, S.L. (2000): “Impossibility of deleting an unknown quantum state”. *Nature* 404, p. 164.

Pedersen, Nikolaj Jang Linding (2006): “What Can the Problem of Mixed Inferences Teach Us About Alethic Pluralism?” *The Monist*, Vol. 89, No. 1, Truth (January 2006), pp. 102-117.

Pedroso, M. (2009). On Three Arguments against Categorical Structuralism. Synthese, 170(1), 21-31.

Pitowsky, Itamar (1982): “Substitution and Truth in Quantum Logic”. *Philosophy of Science*, Vol. 49, No. 3 (Sep., 1982), pp. 380-401.

Priest, G. (2006). *In Contradiction*. Oxford University Press.

Psillos, S. (1995). “Is Structural Realism the Best of Both Worlds?” *Dialectica*, 49: 15-46.

Pulmannová, Sylvia & Riečanová, Zdenka (1989): “A Topology on Quantum Logics”. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 106, No. 4 (Aug., 1989), pp. 891-897.

Putnam, H. (1975). *Mathematics, Matter and Method*. Cambridge: Cambridge University Press.

Pykacz, Jarosław (2010): “Unification of Two Approaches to Quantum Logic: Every Birkhoff-von Neumann Quantum Logic is a Partial Infinite-Valued Łukasiewicz Logic”. *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, Vol. 95, No. 1/2, The Contributions of Logic to the Foundations of Physics (June/July 2010), pp. 5-20.

Qasim Malhas, Othman (1987): “Quantum Logic and the Classical Propositional Calculus”. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 52, No. 3 (Sep., 1987), pp. 834-841.

Read, S. (2006). “Monism: the one true logic” en DeVidi, D. y Kenyon, T. (eds.), *A Logical Approach to Philosophy: Essays in Honour of Graham Solomon*, Springer.

Redhead, Michael (1989): *Incompleteness, Nonlocality, and Realism: A Prolegomenon to the Philosophy of Quantum Mechanics* . Clarendon Press.

Resnik, M. (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford University Press.

Restall, G. y Berto, F. (2019): “Negation on the Australian plan”. *Journal of Philosophical Logic*, 48:6, pp. 1119-1144.

Routley, R. & Meyer, R. (1976). “Dialectical logic, classical logic, and the consistency of the world”. *Studies in Soviet Thought*, vol. 16, no. 1/2(Jun. 1976), pp. 1-25.

Routley, R. (1980). *Exploring Meinong’s Jungle and Beyond: an investigation of noneism and the theory of items*, Citeseer.

Routley, R., Meyer, R. K., Plumwood, V., & Brady, R. T. (1982). *Relevant Logics and their Rivals, vol. 1.* Atascadero. CA: Ridgeview Publishing Company.

Russell, G. (2002). “Carnap’s tolerance, language change and logical pluralism”. *Journal* *of Philosophy*, 99: 426-43.

Russell, G. (2008). “One true logic?” *Journal of Philosophical Logic*, 37(6): 593-611.

Russell, G. (2018). “Logical Nihilism: could there be no logic?” *Philosophical Issues*, 28(1): 308-24.

Saunders, Simon & Wallace, David (2008): “Branching and Uncertainty”. *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 59, No. 3 (Sep., 2008), pp. 293-305.

Shapiro, S. (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford University Press.

Shapiro, S. (2005). “Categories, structures, and the Frege-Hilbert controversy: The status of meta mathematics”. *Philosophia Mathematica*, 13(1), 61–77.

Scheibe, Erhard (1974): “Popper and Quantum Logic”. *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 25, No. 4 (Dec., 1974), pp. 319-328.

Schlosshauer, M. & Kofler, J. & Zeilinger, A. (2013): “A Snapshot of Foundational Attitudes Toward Quantum Mechanics”. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*. 44 (3): 222–230. [arXiv:1301.1069]

Spivak, D. (2014). *Category Theory for the Sciences*. Mit Press

Stachel, John (1974): “The ‘Logic’ of ‘Quantum Logic’ ”. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Vol. 1974 (1974), pp. 515-526.

Stachow, E. W. (1976): “Completeness of Quantum Logic”. *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 5, No. 2 (May, 1976), pp. 237-280.

Stachow, E. W. (1977): “How Does Quantum Logic Correspond to Physical Reality?” *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 6, No. 1 (Jan., 1977), pp. 485-496.

Stairs, Allen (1982): “Quantum Logic and the Luders Rule”. *Philosophy of Science*, Vol. 49, No. 3 (Sep., 1982), pp. 422-436.

Stairs, Allen (1983): “Quantum Logic, Realism, and Value Definiteness”. *Philosophy of Science*, Vol. 50, No. 4 (Dec., 1983), pp. 578-602.

Stairs, Allen (1985): “Bub on Quantum Logic and Continuous Geometry”. *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 36, No. 3 (Sep., 1985), pp. 313-325.

Stein, Howard (1984): “The Everett Interpretation of Quantum Mechanics: Many Worlds or None?”. *Noûs*, Vol. 18, No. 4, Special Issue on the Foundations of Quantum Mechanics (Nov., 1984), pp. 635-652.

Stanford, P. (2003). “Pyrric victories for scientific realism”. *Journal of Philosophy* 11: 551-72.

Tappolet, Christine (2000): “Truth Pluralism and Many-Valued Logics: A Reply to Beall”. *The Philosophical Quarterly* (1950-), Vol. 50, No. 200 (Jul., 2000), pp. 382-385.

Tokuo, Kenji (2003): “Extended Quantum Logic”. *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 32, No. 5 (Oct., 2003), pp. 549-563.

Tumulka, Roderich (2007): “Determinate Values for Quantum Observables”. *The British*

Journal for the Philosophy of Science, Vol. 58, No. 2 (Jun., 2007), pp. 355-360.

Turner, Jason (2010): "Ontological Pluralism". *The Journal of Philosophy*, Vol. 107, No. 1 (January 2010), pp. 5-34.

Turner, Jason (2012): "Logic and Ontological Pluralism". *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 41, No. 2 (April 2012), pp. 419-448.

Univalent Foundations Program (2013). Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics. Univalent Foundations Program Institute for Advanced Study.

Vaidya, Anand Jayprakash (2006): "The Metaphysical Foundation of Logic". *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 35, No. 2 (Apr., 2006), pp. 179-182.

Van Fraassen, Bas (1979): "Hidden Variables and the Modal Interpretation of Quantum Theory". *Synthese*, Vol. 42, No. 1, Issues in the Philosophy of Physics (Sep., 1979), pp. 155-165.

Van Fraassen, Bas (1989): *Laws and Symmetry*. Oxford University Press.

Van Fraassen, Bas (1991): *Quantum Mechanics: An Empiricist View*. Clarendon, Oxford University Press.

Van Fraassen, B. (2006). "Structure: its shadow and substance". *The British Journal for the Philosophy of Science* 57: 275-307.

Varzi, Achille C. (2007): "Supervaluationism and Its Logics". *Mind*, New Series, Vol. 116, No. 463 (Jul., 2007), pp. 633-675.

Vasyukov, V. (2007). "Structuring the universe of universal logic", *Logica Universalis* 1: 277-94.

Weber, Z. (2010): "Transfinite numbers in paraconsistent set theory", *Review of Symbolic Logic*, vol. 3, no. 1, pp. 71-92.

Weber, Z. (ed.) (2019). Routley, R. (1980), *Ultralogic as Universal? The Sylvan Jungle – Volume 4*. Synthese Library 396, Springer.

Wilson, Alastair (2012): "Everettian Quantum Mechanics without Branching Time". *Synthese*, Vol. 188, No. 1, Branching-Time and Indeterminacy (September 2012), pp. 67-84.

Wolters, Sander (2010): "Contravariant vs Covariant Quantum Logic: A Comparison of Two Topos Theoretic Approaches to Quantum Theory". [`arXiv:1010.2031v1[math-ph]`]

Wootters, W.K y Zurek, W.H. (1982): "A single quantum state cannot be cloned. *Nature* 299, pp. 802-803.

Worrall, J. (1989). "Structural realism: The best of both worlds?" *Dialectica*, 43: 99–124.

Wright, Cory D. (2012): "Is Pluralism about Truth Inherently Unstable?" *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition*, Vol. 159, No. 1 (May 2012), pp. 89-105.

Wüthrich, C. y Lam, V. (2014). "No categorial support for radical ontic structural realism", *British Journal for the Philosophy of Science*.

Zafiris, E. & Karakostas, V. (2017). Contextual semantics in quantum mechanics from a categorical point of view. Synthese 194 (3).