UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA CONTRACCIÓN PARA EL HIPERESPACIO DE SUCESIONES CONVERGENTES NO TRIVIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

IVAN DANIEL IYAÑEZ REYES

TUTOR

DR. JORGE MARCOS MARTÍNEZ MONTEJANO

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2022

1 . Datos del alumno

Apellido paterno	Iyañez
Apellido materno	Reyes
Nombre	Ivan Daniel
Teléfono	16 43 36 32
Universidad o Escuela	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o Escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	313293155

2 . Datos del tutor

Grado	Dr.
Nombre	Jorge Marcos
Apellido paterno	Martínez
Apellido materno	Montejano

3 . Datos del sinodal 1

Grado	Dra.
Nombre	Patricia
Apellido paterno	Pellicer
Apellido materno	Covarrubias

4 . Datos del sinodal 2

Grado	Dra.
Nombre	Verónica
Apellido paterno	Martínez de la Vega
Apellido materno	y Mansilla

5 . Datos del sinodal 3

Grado	Dr.
Nombre	Alejandro
Apellido paterno	Illanes
Apellido materno	Mejía

6 . Datos del sinodal 4

Grado	Dr.
Nombre	Max
Apellido paterno	Neumann
Apellido materno	Coto

7 . Datos del trabajo escrito

Título	Una contracción para el hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales
Número de páginas	52
Año	2022

A mi mamá, a mi papá;

por haberme dado más de lo que merecí.

Los límites de mi lenguaje significan los límites de mi mundo.
-Wittgenstein, Tractatus logico-philosophicus

Agradecimientos

A mi mamá.

Por ser siempre tan comprensiva, amorosa y atenta.

Por haber estado en cada momento de mi trayectoria escolar, siempre creyendo en mí y confiando en mis habilidades, incluso cuando yo no lo hacía.

A mi papá.

Por ser siempre tan comprensivo, amoroso y atento.

Por haberme llevado en bici a la parada del autobús cuando más joven, por tu música, por tus sacrificios y por los detalles que tú y mi mamá siempre nos procuraron.

A ambos.

Por todo el esfuerzo que han hecho para que mi única meta sea la de estudiar. No hago justicia en estas breves líneas. Cuando lo comprendí y hasta la fecha, profundamente y de todo corazón,

muchas gracias.

A mi familia.

Por una infancia tan maravillosa que atesoro con cariño en memorias. Gracias por ser tan unidos, por encontrar cualquier motivo para reunirse a festejar, y por estar y actuar en la adversidad.

Y sí, todo está saliendo muy bien.

A mis grandes amistades.

Por haber hecho todos los días de la universidad un regalo, por animarse a meter materias exóticas conmigo, por esas sesiones de estudio llenas de dulces, por ir a comer a otras facultades, por las largas e interesantes platicas que tuvimos en el Prometeo, por todas las actividades que hicimos fuera de la facultad, por esas risas que duraron minutos. No me olvido de nadie y, en este breve párrafo, los tengo a todos ustedes presentes.

Al Dr. Jorge Marcos Martínez Montejano.

Por haber aceptado dirigir mi tesis, por su infinita paciencia, por las grandiosas clases de Topología y la valiosa orientación que recibí durante mi carrera y en el desarrollo de este trabajo. Muchas gracias, profesor.

Prefacio

Este trabajo supone que la lectora o el lector ha cursado satisfactoriamente los cursos de Análisis Matemático I y Topología I como se imparten en la Facultad de Ciencias de la UNAM. De ser el caso, se puede omitir todo el Capitulo 1. Sin embargo, dado que soy alguien que le agradan las cosas auto contenidas; enunciaré algunos resultados, con referencias, que nos ayudarán a la argumentación de algunas pruebas.

Este trabajo busca, además, presentar teorías más complejas a aquellos estudiantes que buscan un "vistazo" de lo que se puede esperar de cursos posteriores a Topología I. Lo anterior manteniendo todas nuestras herramientas y procesos lo más "simple" posible.

Durante el desarrollo de este trabajo surge la noción de contractibilidad: un espacio topológico es contráctil si todo el espacio puede ser llevado continuamente hasta un punto fijo del espacio. Para lograr lo anterior, es necesario dar un breve (y simple) repaso sobre la Teoría de Homotopía. Existen muchas consecuencias de que un espacio sea contráctil, exhibir dichas consecuencias no es el objetivo de esta tesis.

Sumado a lo anterior, tenemos a la teoría de hiperespacios. No podemos hablar de ellos sin tener presente dos cosas: un espacio topológico y una condición. Existen muchos hiperespacios y cada uno es "generado" tanto por la condición dada como por el espacio topológico. Un ejemplo de condición sería fijarnos en los subconjuntos cerrados o en los que tengan cierta cantidad de componentes conexas. Para crearlos, necesitamos fijarnos en todos los subconjuntos del espacio que cumplan con la condición, esos subconjuntos serán considerados como puntos en su respectivo hiperespacio. La topología que les daremos también requiere de un respectivo análisis.

Estos dos conceptos son el eje principal de este trabajo y de su principal objetivo: dar una función que contrae al hiperespacio $S_c(X)$ cuando X es una dendrita. Para ello, vamos a tener que comprender en profundidad cuestiones tales como la homotopía entre dos funciones; la métrica convexa; la no inclusión de curvas cerradas simples; el concepto de cercanía entre dos conjuntos y la teoría de los hiperespacios y su relación con su "espacio base". Cuestiones que, al menos para mí, juegan con la intuición.

Recientemente, platicando con el Dr. Alejando Illanes, me hizo saber de la existencia del artículo *Hyperspaces of countable compacta* [1]; en el cual se generaliza el trabajo mostrado aquí: se demuestra que si un continuo es un retracto absoluto, entonces el hiperespacio de sucesiones convergentes no triviales es contráctil. Sin embargo, las herramientas que se emplean en dicho articulo son poco intuitivas. En comparación, la prueba que se da (para el caso de dendritas) en este trabajo es muy intuitiva y artesanal.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo vamos a presentar a todos aquellos símbolos que resultan básicos y fundamentales a la hora de comprender tanto el lenguaje usado como aquello a lo que nos referimos.

1.1. Notación

1.- Dados X un espacio topológico y A un subconjunto de X, $\overline{A}$, $int(A)$ y $Fr(A)$ denotan la cerradura, el interior y la frontera de A en X, respectivamente.

2.- $|A|$ indica la cantidad de elementos que hay en el conjunto A.

3.- Sean X un conjunto y $z \in X$. Entonces la función $C_z : X \to X$, donde para toda $x \in X$ se tiene que $C_z(x) = z$ es la función constante z en X.

4.- $A \approx B$ indica que los espacios topológicos A y B son homeomorfos.

5.- $A \approx_i B$ indica que los espacios métricos A y B son isométricos.

6.- d_R denotará a la métrica usual de $\mathbb{R}$.

7.- Si X y Z son conjuntos con una topología asociada a cada uno, entonces dichas topologías serán denotadas como τ_X y τ_Z respectivamente.

8.- $\mathscr{B}$ representa una base que genera a la topología τ.

9.- $\mathscr{S}$ representa una subbase que genera a la base $\mathscr{B}$.

1.2. Definiciones, teoremas y proposiciones esenciales

Definición 1.2.1. Sean X un espacio topológico y E, F subconjuntos de X. Decimos que E y F están *mutuamente separados* si $\overline{E} \cap F = E \cap \overline{F} = \emptyset$.

Definición 1.2.2. Sean X un espacio topológico y $p, q \in X$ distintos. Decimos que $z \in X$ *separa* a p y a q en X si existen A, B mutuamente separados tales que $p \in A$, $q \in B$ y $X \setminus \{z\} = A \cup B$.

Definición 1.2.3. Diremos que un espacio topológico X es *conexo* si no puede expresarse como la unión de dos subconjuntos no vacíos de X que estén mutuamente separados. De lo contrario, diremos que es *disconexo*.

Definición 1.2.4. Sea (X,d) un espacio métrico, acotado y no vacío. Para cualesquiera $x \in X$ y $\varepsilon{>}0$, definimos a

1.- $B^d_\varepsilon(x)$ como *la bola de radio ε centrada en x con la métrica d* y, de no existir confusión con la métrica que se está usando, solamente escribiremos $B_r(x)$;

2.- a $C_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(y,x) \leqslant \varepsilon\}$ como la *la bola cerrada de radio ε y centro x;*

3.- a $\text{diám}_d(X)$ como el diámetro de X usando la métrica d. De no existir confusión, escribiremos $\text{diám}(X)$.

4.- Para cualesquiera A,B subconjuntos no vacíos de X, el número $d(A,B) = \text{ínf}\{d(a,b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$ es la *distancia* entre A y B.

Teorema 1.2.5. *[4, Proposition 4.1.1, p.250]* Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ en A tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Corolario 1.2.6. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X. Entonces A es cerrado si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ en A tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, tenemos que $x \in A$.

Demostración. El Corolario 1.2.6 se sigue del Teorema 1.2.5. □

Lema 1.2.7 (de la subbase de Alexander)**.** *[4, Problems 3.12.2, p.221]* Sean (X,τ) un espacio topológico y $\mathscr{S}$ una subbase para τ. Si para toda cubierta $\mathscr{U}$ de X formada con elementos de $\mathscr{S}$ existen $N \in \mathbb{N}$ y $U_1,\dots,U_N \in \mathscr{U}$ tales que $X \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_i$, entonces X es compacto.

Lema 1.2.8. Sean X y Y espacios topológicos primero numerables y $f : X \to Y$ una función. Si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, con $x \in X$, existe una subsucesión $\{x_{n_m}\}_{m=1}^\infty$ de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} f(x_{n_m}) = f(x)$, entonces f es continua.

Demostración. Sean C un subconjunto cerrado de Y y $x \in \overline{f^{-1}(C)}$. Por el Teorema 1.2.5, existe $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $f^{-1}(C)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Por hipótesis, existe una subsucesión $\{x_{n_m}\}_{m=1}^\infty$ de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} f(x_{n_m}) = f(x)$. Como para toda $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $f(x_{n_m}) \in C$ tenemos, por el Corolario 1.2.6, que $f(x) \in C$; es decir, $x \in f^{-1}(C)$. Por lo tanto, $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$.

Concluimos que $f^{-1}(C)$ es un subconjunto cerrado de X. Así, f es continua. □

Teorema 1.2.9 (lema del pegado)**.** *[9, Teorema 18.3, p.123]* Sea $X = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos cerrados en X. Sean $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ continuas. Si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces f y g se combinan para dar una función continua $h : X \to Y$, definida mediante $h(x) = f(x)$ si $x \in A$, y $h(x) = g(x)$ si $x \in B$.

Teorema 1.2.10 (de la flor)**.** *[4, Corollary 6.1.10, p.354]* Sea X un espacio topológico. Si $X = \bigcup\limits_{\alpha\in\Omega} X_\alpha$ donde para todo $\alpha \in \Omega$ se tiene que X_α es un subconjunto conexo de X y $\bigcap\limits_{\alpha\in\Omega} X_\alpha \neq \emptyset$, entonces X es conexo.

Capítulo 2

Hiperespacios contráctiles

Un hiperespacio es un lugar generado por un espacio topológico: sus elementos son subconjuntos del espacio. Más adelante definirimos algunos y veremos la topología que se les da a dichos hiperspacios.

En este capítulo veremos algunas condiciones para que ciertos hiperespacios sean contráctiles, cómo es que se contraen, cómo proponer funciones que nos ayuden en esto y, en qué cosas nos debemos fijar al momento de contraerlos. Todo esto nos servirá para familiarizarnos con los dos temas más importantes de esta tesis: contractibilidad e hiperespacios.

2.1. Teoría de hiperespacios

La topología conjuntista estudia, entre otras cosas, las propiedades de los subconjuntos de un espacio topológico X y su relación con éste: determina cuándo y cómo los subconjuntos heredan propiedades de X y también si las propiedades de los mismos se extienden a X. Los subconjuntos son útiles, sin embargo, no es frecuente en los cursos básicos de Topología su estudio como puntos de un espacio "más" grande. Está sección está dedicada a una pequeña parte de dicho estudio, la teoría de hiperespacios.

Consideremos (X,d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Si quisiéramos definir una distancia en la potencia de X con base en d, tendríamos que asignar una distancia positiva entre A y $\overline{A}$ (si fuesen distintos), lo cual parece contraintuitivo pues los puntos de A y $\overline{A}$ están arbitrariamente cercanos. Otro inconveniente es interpretar (o dar una convención) a la distancia entre A y $\emptyset$ con la métrica d. Para evitar estos inconvenientes sólo consideramos subconjuntos cerrados y no vacíos.

Definición 2.1.1. Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Definimos a los siguientes conjuntos:

(1) $CL(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$ (de esta forma ya no nos preocupa pensar en la diferencia entre A y $\overline{A}$ pues son iguales y, tampoco, sobre qué significa estar cerca del $\emptyset$);

(2) $K(X) = \big\{A \in CL(X) : A \text{ es compacto}\big\}$;

(3) $KC(X) = \big\{A \in K(X) : A \text{ es conexo}\big\}$;

(4) $F_n(X) = \big\{A \in CL(X) : 1 \leqslant |A| \leqslant n\big\}$;

(5) $F(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i(X)$;

(6) $KC_n(X) = \{A \in K(X) : A$ tiene a lo más n componentes conexas$\}$.

Observación 2.1.2. Si X es un espacio topológico compacto y T_2, entonces $CL(X) = K(X)$.

2.1.1. Topología de Vietoris

Definición 2.1.3. Sean (X, τ) un espacio topológico y una colección finita de subconjuntos $A_1, ..., A_n$ de X. Definimos al *Vietórico* $\langle A_1, ..., A_n \rangle$ como el conjunto

$$\left\{ B \in CL(X) : B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ y para toda } i \in \{1, ..., n\}, B \cap A_i \neq \emptyset \right\}.$$

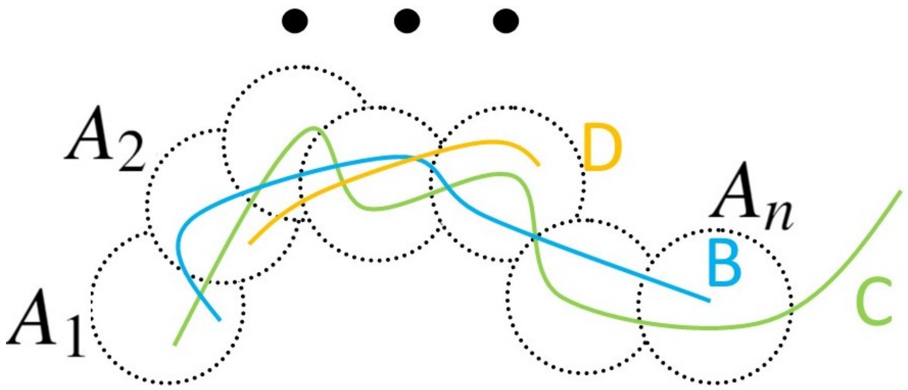

Figura 2.1: $B \in \langle A_1, ..., A_n \rangle$ y $C, D \notin \langle A_1, ..., A_n \rangle$

Note que si $B, E \in \langle A_1, ..., A_n \rangle$ es porque están cerca uno del otro en función de $\langle A_1, ..., A_n \rangle$.

Lema 2.1.4. Sean X un espacio topológico, $U_1, \dots, U_m$ y $V_1, \dots, V_n$ subconjuntos de X. Consideremos $\mathscr{U} = \langle U_1, ..., U_m \rangle$ y $\mathscr{V} = \langle V_1, ..., V_n \rangle$. Definimos $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, $U = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ y $\mathscr{W} = \langle V_1 \cap U, ..., V_n \cap U, U_1 \cap V, ..., U_m \cap V \rangle$. Entonces $\mathscr{W} = \mathscr{U} \cap \mathscr{V}$.

Demostración. Veamos las dos contenciones.

- $\subseteq$ Sea $B \in \mathscr{W}$. Entonces $B \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} (V_i \cap U)) \cup (\bigcup_{i=1}^{m} (U_i \cap V)) = V \cap U \subseteq V$. Además, para toda $i \in \{1, ..., n\}$, $B \cap (V_i \cap U) \neq \emptyset$. Lo cual implica que, $B \cap V_i \neq \emptyset$. Por lo tanto, $B \in \mathscr{V}$. Análogamente se prueba que $B \in \mathscr{U}$. Por lo tanto, $B \in \mathscr{V} \cap \mathscr{U}$.

- $\supseteq$ Sea $B \in \mathscr{V} \cap \mathscr{U}$. Entonces para cada $i \in \{1, \dots, n\}, B \cap V_i \neq \emptyset$. Como $B \subseteq U$, tenemos que $B \cap V_i = (B \cap U) \cap V_i = B \cap (V_i \cap U) \neq \emptyset$. Análogamente, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $B \cap (U_i \cap V) \neq \emptyset$. Por hipótesis, $B \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} V_i) \cap U$ y $B \subseteq (\bigcup_{i=1}^{m} U_i) \cap V$. Así, $B \subseteq \left((\bigcup_{i=1}^{n} V_i) \cap U \right) \cup \left((\bigcup_{i=1}^{m} U_i) \cap V \right)$. Por lo anterior, $B \in \mathscr{W}$.

$\square$

Consideremos a X un espacio topológico y a U,V dos subconjuntos. Vamos a interpretar a los siguientes Vietóricos: el primero es $\langle U\rangle$ que se puede pensar como el conjunto de todos los subconjuntos cerrados de X tales que se quedan contenidos en U; el segundo es $\langle X,V\rangle$ que se puede pensar como el conjunto de todos los subconjuntos cerrados de X tales que intersecan a V.

Observación 2.1.5. *Dados U,V subconjuntos de X tenemos, por el Lema 2.1.4, que*

- $\langle U\rangle\cap\langle V\rangle=\langle U\cap V\rangle$;
- $\langle X,U\rangle\cap\langle X,V\rangle=\langle X,U,V\rangle$;
- $\langle U\rangle\cap\langle X,V\rangle=\langle U,U\cap V\rangle$.

Proposición 2.1.6. Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces el conjunto

$$\mathscr{B}=\left\{\langle U_1,\ldots,U_n\rangle : n\in\mathbb{N} \text{ y para toda } i\in\{1,\ldots,n\}, U_i\in\tau\right\}$$

es una base para una topología en el hiperespacio $CL(X)$.

Demostración. Veamos que $\mathscr{B}$ cumple las dos condiciones que se necesitan para que sea base de una topología (ver [9, p.88]). Verifiquemos (1). Sea $A\in CL(X)$. Consideremos $\langle X\rangle\in\mathscr{B}$. Por la Definición 2.1.3, $A\in\langle X\rangle$. Ahora, verifiquemos (2). Dados $\mathscr{U},\mathscr{V}\in\mathscr{B}$ y $A\in\mathscr{U}\cap\mathscr{V}$, consideramos $\mathscr{W}=\mathscr{U}\cap\mathscr{V}$. Por el Lema 2.1.4, $\mathscr{W}\in\mathscr{B}$. Además, $A\in\mathscr{W}\subseteq\mathscr{U}\cap\mathscr{V}$.

Hemos mostrado que el conjunto $\mathscr{B}$ es una base para una topología en el hiperespacio $CL(X)$. $\square$

Proposición 2.1.7. Dado (X,τ) un espacio topológico, el siguiente conjunto

$$\mathscr{S}=\{\langle U\rangle : U\in\tau\}\bigcup\{\langle X,V\rangle : V\in\tau\}$$

es una subbase que genera la base $\mathscr{B}$ en la Proposición 2.1.6.

Demostración. Demostremos que $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}=\mathscr{B}$, donde $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ es la base generada por $\mathscr{S}$.

Tomemos $\langle U_1,\ldots,U_n\rangle\in\mathscr{B}$ y afirmamos que $\langle U_1,\ldots,U_n\rangle=(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\langle X,U_i\rangle)\cap(\langle\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i\rangle)$.

Sea $A\in\langle U_1,\ldots,U_n\rangle$. Entonces $A\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i$, lo cual implica que $A\in\langle\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i\rangle$. Ahora, para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$, $A\cap U_i\neq\emptyset$; es decir, $A\in\langle X,U_i\rangle$. Así, $A\in\bigcap\limits_{i=1}^{n}\langle X,U_i\rangle$. Por lo anterior, $A\in(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\langle X,U_i\rangle)\cap(\langle\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i\rangle)$ y de esta forma, $\langle U_1,\ldots,U_n\rangle\subseteq(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\langle X,U_i\rangle)\cap(\langle\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i\rangle)$.

Sea $B\in(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\langle X,U_i\rangle)\cap(\langle\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i\rangle)$. Entonces, para toda $i\in\{1,\ldots,n\}$, $B\in\langle X,U_i\rangle$, es decir, $B\cap U_i\neq\emptyset$. Además, dado que $B\in\langle\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i\rangle$, $B\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i$. Por lo tanto, $B\in\langle U_1,\ldots,U_n\rangle$. Esto nos dice que $\langle U_1,\ldots,U_n\rangle\supseteq(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\langle X,U_i\rangle)\cap(\langle\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_i\rangle)$. Con esto concluimos la prueba de nuestra afirmación y, así, $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$.

Verifiquemos la contención restante. Sea $\mathscr{U}\in\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$. Entonces existen $n\in\mathbb{N}$ y $\mathscr{M}_1,\ldots,\mathscr{M}_n\in\mathscr{S}$ tales que $\mathscr{U}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathscr{M}_i$. Consideremos $J=\{i\in\{1,\ldots,n\}:$ existe U un abierto tal que $\mathscr{M}_i=\langle U\rangle\}$. Si $i\in\{1,\ldots,n\}\setminus J$, entonces existe V_i un abierto tal que $\mathscr{M}_i=\langle X,V_i\rangle$. Así, $\mathscr{U}=$

$\bigcap_{i\in J}\langle U_i\rangle \cap \bigcap_{i\notin J}\langle X,V_i\rangle$. Por la Observación 2.1.5, tenemos que $\bigcap_{i\in J}\langle U_i\rangle = \langle \bigcap_{i\in J} U_i\rangle$; también que $\bigcap_{i\notin J}\langle X,V_i\rangle = \langle X,V_1,\ldots,V_m\rangle$ donde $m=|\{1,\ldots,n\}\setminus J|$ y $\langle \bigcap_{i\in J} U_i\rangle \cap \langle X,V_1,\ldots,V_m\rangle = \langle \bigcap_{i\in J} U_i, V_1 \cap \bigcap_{i\in J} U_i,\ldots,V_m \cap \bigcap_{i\in J} U_i\rangle$. Así,$\mathscr{U}\in\mathscr{B}$. Por lo tanto, $\mathscr{B}=\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$. □

Definición 2.1.8. La topología de Vietoris, denotada por $Viet$, es aquella que genera la subbase $\mathscr{S}$ de la Proposición 2.1.7 y, de no indicarse lo contrario, será la topología asociada a $CL(X)$. Así, $(CL(X),Viet)$ es ahora un hiperspacio.

Teorema 2.1.9. Sea X un espacio topológico T_1. Entonces X es compacto si y sólo si $CL(X)$ es compacto.

Demostración. Veamos ambas implicaciones.

$\Longrightarrow$ Mostremos que $CL(X)$ es compacto. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de $CL(X)$ formada por elementos de $\mathscr{S}$, esto es,

$$\mathscr{U}=\{\langle U_\alpha\rangle : \alpha\in\Lambda\}\cup\{\langle X,V_\beta\rangle : \beta\in\Delta\}.$$

- Caso 1 $\{V_\beta : \beta\in\Delta\}$ es una cubierta abierta de X.

  Como X compacto, tenemos que existen $n\in\mathbb{N}$ y $\beta_1,\ldots,\beta_n\in\Delta$ tales que $\{V_{\beta_1},\ldots,V_{\beta_n}\}$ es una cubierta abierta finita de X.

  Consideremos $\mathscr{V}=\{\langle X,V_{\beta_1}\rangle,\ldots,\langle X,V_{\beta_n}\rangle\}$. Notemos que $\mathscr{V}$ es un subconjunto finito de $\mathscr{U}$. Veamos que $\mathscr{V}$ es una cubierta de $CL(X)$. Sean $A\in CL(X)$ y $p\in A$. Entonces existe $j\in\{1,\ldots,n\}$ tal que $p\in V_{\beta_j}$. Por lo tanto, $A\in\langle X,V_{\beta_j}\rangle$.

  Así, hemos encontrado una subcubierta finita de $\mathscr{U}$.

- Caso 2 $\{V_\beta : \beta\in\Delta\}$ no es una cubierta abierta de X, esto es, $X\nsubseteq\bigcup_{\beta\in\Delta}V_\beta$.

  Definimos a $S=X\setminus\bigcup_{\beta\in\Delta}V_\beta$. Tenemos que S es un subconjunto cerrado y no vacío de X, es decir, $S\in CL(X)$. Además, como $S=X\setminus\bigcup_{\beta\in\Delta}V_\beta=\bigcap_{\beta\in\Delta}(X\setminus V_\beta)$, obtenemos que, para toda $\beta\in\Delta$, $S\notin\langle X,V_\beta\rangle$. Como $\mathscr{U}$ es cubierta, existe $\alpha_0\in\Lambda$ tal que $S\in\langle U_{\alpha_0}\rangle$; lo que nos dice que $S\subseteq U_{\alpha_0}$.

  Notemos que $X\setminus U_{\alpha_0}$ es compacto y que $X\setminus U_{\alpha_0}\subseteq X\setminus S=\bigcup_{\beta\in\Delta}V_\beta$. Entonces existen $n\in\mathbb{N}$ y $\beta_1,\ldots,\beta_n\in\Delta$ tales que $X\setminus U_{\alpha_0}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}V_{\beta_i}$. Definimos $\mathscr{V}=\{\langle U_{\alpha_0}\rangle,\langle X,V_{\beta_1}\rangle,\ldots,\langle X,V_{\beta_n}\rangle\}$. Notemos que $\mathscr{V}$ es un subconjunto finito de $\mathscr{U}$.

  Veamos que $\mathscr{V}$ es una cubierta de $CL(X)$. Sea $A\in CL(X)$. Si $A\subseteq U_{\alpha_0}$, entonces $A\in\langle U_{\alpha_0}\rangle$. Si $A\nsubseteq U_{\alpha_0}$, entonces existe $p\in A\setminus U_{\alpha_0}\subseteq X\setminus U_{\alpha_0}$. Así, existe $j\in\{1,\ldots,n\}$ tal que $p\in V_{\beta_j}$, por ello $A\in\langle X,V_{\beta_j}\rangle$. Hemos encontrado una subcubierta finita de $\mathscr{U}$.

  En ambos casos encontramos una subcubierta finita de $\mathscr{U}$. Por el Lema 1.2.7, $CL(X)$ es compacto.

$\Longleftarrow$ Mostremos que X es compacto. Sea $\mathscr{U}=\{V_\beta : \beta\in\Delta\}$ una cubierta abierta de X. Consideremos $\mathscr{V}=\{\langle X,V_\beta\rangle : \beta\in\Delta\}$. Notemos que todos los elementos de $\mathscr{V}$ son subconjuntos abiertos de $CL(X)$.

Veamos que $\mathscr{V}$ es una cubierta de $CL(X)$. Sea $A \in CL(X)$. Tomemos $p \in A$. Como $\mathscr{U}$ es una cubierta de X, existe $\beta_0 \in \Delta$ tal que $p \in V_{\beta_0}$. De modo que $A \in \langle X, V_{\beta_0} \rangle$. Por lo tanto, $\mathscr{V}$ es una cubierta de $CL(X)$.

Ahora, como $CL(X)$ es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \Delta$ tales que $CL(X) = \bigcup_{i=1}^{n} \langle X, V_{\beta_i} \rangle$. Consideremos $\mathscr{W} = \{V_{\beta_1}, \ldots, V_{\beta_n}\}$. Notemos que $\mathscr{W}$ es un subconjunto finito de $\mathscr{U}$.

Veamos que $\mathscr{W}$ es una cubierta de X. Sea $x \in X$. Como X es T_1, $\{x\} \in CL(X)$. Entonces existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\{x\} \in \langle X, V_{\beta_j} \rangle$. De donde obtenemos que $x \in V_{\beta_j}$. Por lo tanto, $\mathscr{W}$ es una cubierta abierta de X. Con lo que concluimos que X es compacto.

$\square$

2.1.2. Métrica de Hausdorff

Para construir la métrica de Hausdorff es necesario tener un espacio métrico y acotado. Ahora, para todo espacio métrico (X,d) existe una métrica acotada y equivalente a d (ver [4, Theorem 4.1.4, p.250]). Así, pediremos que el espacio métrico sea acotado.

Definición 2.1.10. Sea (X,d) un espacio métrico y acotado.

1.- Dadas $0 < \varepsilon$ y $A \in CL(X)$, definimos a *la nube con centro en A y de radio ε* como $N_\varepsilon(A) = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$.

2.- Dados $A, B \in CL(X)$, definimos a $E(A,B) = \{\varepsilon > 0 : A \subseteq N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subseteq N_\varepsilon(A)\}$.

3.- Definimos a la *métrica de Hausdorff* como la función $H : CL(X) \times CL(X) \to [0, \infty)$ tal que $H(A,B) = \text{ínf}\, E(A,B)$.

Observación 2.1.11. *Como X es acotado, para cualesquiera $A, B \in CL(X)$ el conjunto $E(A,B) \neq \emptyset$; ya que, si definimos $\varepsilon = \text{diám}(X) + 1$, entonces $\varepsilon \in E(A,B)$. Luego, como $E(A,B)$ está acotado inferiormente por 0, podemos calcular el ínfimo. Así, $H(A,B) = \text{ínf}\, E(A,B) \geqslant 0$ y, con ello, H está bien definida.*

Teorema 2.1.12. Sea (X,d) un espacio métrico y acotado. Entonces la función $H : CL(X) \times CL(X) \to [0, \infty)$ es una métrica en el hiperespacio $CL(X)$.

Demostración. Sean A, B y $C \in CL(X)$. Entonces se satisfacen los siguientes puntos que definen a una métrica (ver [3, p.3]):

1.- $H(A,B) = 0$ si y sólo si $A = B$.

$\Longrightarrow$ Supongamos que $H(A,B) = 0 = \text{ínf}\, E(A,B)$. Sea $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $E(A,B)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Tomemos $a \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Como $A \subseteq N_{\varepsilon_n}(B)$, existe $b_n \in B$ tal que $d(a, b_n) < \varepsilon_n$. Hemos construido una sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ en B que cumple $0 \leqslant \lim_{n\to\infty} d(a, b_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Por lo tanto, $d(a, \lim_{n\to\infty} b_n) = 0$; es decir, $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. Como B es cerrado, tenemos que $a \in B$. Por lo tanto $A \subseteq B$.

Análogamente podemos probar que $B \subseteq A$.

$\Longleftarrow$ Supongamos que $A = B$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq N_{\frac{1}{n}}(B)$ y $B \subseteq N_{\frac{1}{n}}(A)$. Lo que nos dice que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \inf E(A,B) \leqslant \frac{1}{n}$. Por lo tanto, $H(A,B) = 0$.

2.- $H(A,B) = \inf E(A,B) = \inf E(B,A) = H(B,A)$.

3.- $H(A,B) \leqslant H(A,C) + H(C,B)$.

Sean $a \in A$, $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $E(A,C)$ y $E(C,B)$ respectivamente tales que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \inf E(A,C)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \inf E(C,B)$. Dada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $A \subseteq N_{r_n}(C)$ y $C \subseteq N_{t_n}(B)$, así, existen $c \in C$ y $b \in B$ tales que $d(a,c) < r_n$ y $d(c,b) < t_n$. Como $d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b)$ tenemos que $d(a,b) < r_n + t_n$. Así, $A \subseteq N_{r_n+t_n}(B)$. Similarmente se tiene que $B \subseteq N_{r_n+t_n}(A)$. Por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$, $r_n + t_n \in E(A,B)$.

Como $H(A,B) = \inf E(A,B) \leqslant r_n + t_n$, tenemos, aplicando límites en ambos lados, que $H(A,B) \leqslant \inf E(A,C) + \inf E(C,B) = H(A,C) + H(C,B)$.

Se concluye que H es una métrica en $CL(X)$. □

Lema 2.1.13. Sean (X,d) un espacio métrico y compacto; $\varepsilon > 0$ y $A,B \in CL(X)$. Entonces $H(A.B) < \varepsilon$ si y sólo si $B \subseteq N_\varepsilon(A)$ y $A \subseteq N_\varepsilon(B)$.

Demostración. Supongamos que $H(A,B) < \varepsilon$. Entonces ε no es cota inferior de $E(A,B)$. Así, existe $\delta \in E(A,B)$ tal que $H(A,B) \leqslant \delta < \varepsilon$. Por definición, $B \subseteq N_\delta(A)$ y $A \subseteq N_\delta(B)$. Por lo tanto, $B \subseteq N_\varepsilon(A)$ y $A \subseteq N_\varepsilon(B)$.

Supongamos que $B \subseteq N_\varepsilon(A)$ y $A \subseteq N_\varepsilon(B)$. La idea de la demostración es la siguiente: debemos encontrar $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$ y $\delta \in E(A,B)$.

Como $B \subseteq N_\varepsilon(A)$, tenemos que $B \cap (X \setminus N_\varepsilon(A)) = \emptyset$. Notemos que ambos conjuntos son cerrados, compactos y no vacíos; así que $d(B, X \setminus N_\varepsilon(A)) = r > 0$. Definimos a $\delta_1 = \varepsilon - \frac{r}{3}$. Notemos que $\delta_1 < \varepsilon$, por ello $N_{\delta_1}(A) \subseteq N_\varepsilon(A)$. Supongamos que existe $b_0 \in B$ tal que $b_0 \notin N_{\delta_1}(A)$. Como $b_0 \in N_\varepsilon(A)$ y $b_0 \notin N_{\delta_1}(A)$, tenemos que $d(b_0, X \setminus N_\varepsilon(A)) < d(B, X \setminus N_\varepsilon(A)) = \text{mín}\{d(b,x) : b \in B \text{ y } x \in X \setminus N_\varepsilon(A)\}$; una contradicción. Por lo tanto, $B \subseteq N_{\delta_1}(A)$.

Análogamente, si definimos $\delta_2 = \varepsilon - \frac{d(A, X \setminus N_\varepsilon(B))}{3}$, podemos probar que $A \subseteq N_{\delta_2}(B)$. Definimos $\delta = \text{máx}\{\delta_1, \delta_2\}$. Por lo anterior, $\delta \in E(A,B)$. Además, $\delta < \varepsilon$. Por lo tanto, $H(A,B) < \varepsilon$. □

Observación 2.1.14. *Si (X,d) es un espacio métrico y compacto y $A,B \in CL(X)$, entonces el conjunto $E(A,B)$ no es cerrado.*

Notemos que $H(A,B) \in \overline{E(A,B)}$. Supongamos que $H(A,B) \in E(A,B)$. Podemos argumentar como en el regreso del Lema 2.1.13 para generar una contradicción. Por lo tanto, $H(A,B) \notin E(A,B)$ y $E(A,B)$ no es cerrado.

Lema 2.1.15. Sean (X,d) un espacio métrico y acotado y $\varepsilon > 0$. Si A,B,C y D son subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que $H(A,B) < \varepsilon$ y $H(C,D) < \varepsilon$, entonces $H(A \cup C, B \cup D) < \varepsilon$.

Demostración. Sea $x \in A \cup C$. Si $x \in A$, entonces existe $b \in B$ tal que $x \in B_\varepsilon(b) \subseteq N_\varepsilon(B) \subseteq N_\varepsilon(B \cup D)$. Si $x \in C$, entonces existe $d \in D$ tal que $x \in B_\varepsilon(d) \subseteq N_\varepsilon(D) \subseteq N_\varepsilon(B \cup D)$. Así, $A \cup C \subseteq N_\varepsilon(B \cup D)$.

La contención $B \cup D \subseteq N_\varepsilon(A \cup U)$ se obtiene de manera análoga. Por lo tanto, $H(A \cup C, B \cup D) < \varepsilon$. □

Teorema 2.1.16. Sea (X,d) un espacio métrico y compacto. Entonces $(CL(X), Viet)$ es metrizable. De hecho, $Viet = \tau_H$ donde τ_H denota la topología inducida por la métrica H.

Demostración. Verifiquemos por doble contención que $Viet = \tau_H$. Para ello, basta con mostrar la inclusión de los subbásicos; es decir, dado U un abierto de X debemos ver $\langle U \rangle, \langle X, U \rangle \in \tau_H$. Similarmente, dados $A \in CL(X)$ y $\varepsilon > 0$, debemos ver que $B_\varepsilon^H(A) \in Viet$.

Primero veamos que $Viet \subseteq \tau_H$. Sea U un abierto de X. Si $U = X$, entonces, por definición, $\langle U \rangle = CL(X)$. Así, $\langle U \rangle \in \tau_H$. Si $U = \emptyset$, entonces, por definición, $\langle U \rangle = \emptyset$. Así, $\langle U \rangle \in CL(X)$. Ahora, si U es un subconjunto propio y no vacío de X, entonces tomemos $A \in \langle U \rangle$. Notemos que A y $X \setminus U$ son subconjuntos cerrados, no vacíos, compactos y ajenos de X; consideremos $\varepsilon = d(A, X \setminus U) = \text{ínf}\{d(a,x) : a \in A \text{ y } x \in X \setminus U\}$. Por construcción, $\varepsilon > 0$. Ahora, demostremos que $B_\varepsilon^H(A) \subseteq \langle U \rangle$. Sea $B \in B_\varepsilon^H(A)$. Por definición, $B \subseteq N_\varepsilon(A)$. No es difícil notar que $N_\varepsilon(A) \subseteq U$. Así, $B \in \langle U \rangle$. Por lo tanto, $B_\varepsilon^H(A) \subseteq \langle U \rangle$; así que A está en el interior de $\langle U \rangle$ con respecto a τ_H. Concluimos que $\langle U \rangle \in \tau_H$.

Ahora, tomemos U un abierto de X. Demostremos que $\langle X, U \rangle \in \tau_H$. Si $U = \emptyset$, entonces $\langle X, U \rangle = \emptyset$, el cual es un elemento de τ_H. Si $U \neq \emptyset$, tomemos $A \in \langle X, U \rangle$. Como $A \cap U \neq \emptyset$, existe $p \in A \cap U$. Además, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta^d(p) \subseteq U$. Ahora, demostremos que $B_\delta^H(A) \subseteq \langle X, U \rangle$. Sea $B \in B_\delta^H(A)$. Como $A \subseteq N_\delta(B)$, existe $b \in B$ tal que $d(b,p) < \delta$; es decir, $b \in B_\delta^d(p)$. Por lo tanto, $B \cap U \neq \emptyset$; en otras palabras, $B \in \langle X, U \rangle$. Hemos demostrado que $B_\delta^H(A) \subseteq \langle X, U \rangle$. Por lo anterior, A está en el interior de $\langle X, U \rangle$ con respecto a τ_H. Concluimos que $\langle X, U \rangle \in \tau_H$.

Ahora, demostremos que $\tau_H \subseteq Viet$. Sean $A \in CL(X)$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos el básico $B_\varepsilon^H(A)$. Definamos $\mathscr{U} = \{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(a) : a \in A\}$. Como A es compacto y $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de A, existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{4}}(a_i)$. Así, $A \in \langle B_{\frac{\varepsilon}{4}}(a_1), \ldots, B_{\frac{\varepsilon}{4}}(a_n) \rangle$. Ahora, demostremos que $\langle B_{\frac{\varepsilon}{4}}(a_1), \ldots, B_{\frac{\varepsilon}{4}}(a_n) \rangle \subseteq B_\varepsilon^H(A)$. Sea $B \in \langle B_{\frac{\varepsilon}{4}}(a_1), \ldots, B_{\frac{\varepsilon}{4}}(a_n) \rangle$. Entonces $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{4}}(a_i) \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(A)$. Sea $a \in A$. Entonces existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a \in B_{\frac{\varepsilon}{4}}(a_j)$. Por construcción, $B \cap B_{\frac{\varepsilon}{4}}(a_j) \neq \emptyset$; entonces existe $b \in B \cap B_{\frac{\varepsilon}{4}}(a_j)$. Finalmente, $d(a,b) \leqslant d(a,a_j) + d(a_j,b) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$; así que $A \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(B)$. Por lo anterior, $B \in B_\varepsilon^H(A)$. Como $\langle B_{\frac{\varepsilon}{4}}(a_1), \ldots, B_{\frac{\varepsilon}{4}}(a_n) \rangle \subseteq B_\varepsilon^H(A)$, tenemos que A está en el interior de $B_\varepsilon^H(A)$ con respecto a $Viet$. Por lo tanto, $B_\varepsilon^H(A) \in Viet$.

Dadas las contenciones anteriores, concluimos que $Viet = \tau_H$. □

Consideremos a X un espacio métrico y compacto. Sea $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $(K(X), H)$ convergente a $A \in K(X)$. La definición de convergencia en el espacio métrico $(K(X), H)$ no nos permite observar el comportamiento (a veces muy sutil) de cada uno de los elementos de los conjuntos A_n en X; sin embargo, su simpleza será de utilidad. Por ello, buscamos "ver" la convergencia de $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ en X a través de los elementos de cada A_n.

Lema 2.1.17. Sean (X,d) un espacio métrico y compacto y $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $K(X)$ tal que converge a $A \in K(X)$. Entonces $a \in A$ si y sólo si existe $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en X tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Demostración. Por la Observación 2.1.2 y el Teorema 2.1.16, podemos usar la métrica de Hausdorff en $K(X)$; es decir, la convergencia será la de un espacio métrico.

$\Longleftarrow$ Supongamos que $a \notin A$. Como A es compacto y $\{a\}$ es cerrado, $d(a,A) = r > 0$. Notemos que $N_{\frac{r}{3}}(A) \cap B_{\frac{r}{3}}^d(a) = \emptyset$. Consideremos a $B_{\frac{r}{3}}^H(A)$. Como $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, existe $N \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geqslant N$, entonces $A_n \subseteq N_{\frac{r}{3}}(A)$ y $a_n \in B_{\frac{r}{3}}^d(a)$; esto es una contradicción. Por lo tanto, $a \in A$.

$\Longrightarrow$ Nuestro objetivo es construir una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X convergente a $a \in A$ tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$. Sea $B_1^H(A)$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, existe $M \in \mathbb{N}$, tal que $H(A_M, A) < 1$. Definimos para toda $n \in \mathbb{N}$, $r_n = H(A, A_{M+n})$. Consideremos $B^H_{r_n+\frac{1}{n}}(A)$. Como $A_{M+n} \in B^H_{r_n+\frac{1}{n}}(A)$ y $a \in A$, existe $a_{M+n} \in A_{M+n}$ tal que $d(a, a_{M+n}) < r_n + \frac{1}{n}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N$, entonces $r_n < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, para toda $n \geqslant N$, $d(a, a_{M+n}) < r_n + \frac{1}{n} < \varepsilon$. Por lo anterior, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{M+n} = a$.

Dada $i \in \{1, \ldots, M\}$, $A_i \in K(X)$; así que $A_i \neq \emptyset$, tomemos $a_i \in A_i$.

Hemos construido una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$. Y por como la construimos, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

□

2.2. Breve teoría de homotopía

Definición 2.2.1. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es *conexo por trayectorias* si para cualesquiera par de puntos $x, y \in X$ existe una función continua $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

Definición 2.2.2. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es *conexo por arcos* si para cualesquiera par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un encaje (un homeomorfismo cuando restringimos el codominio a su imagen) $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. A $\alpha([0,1])$ le llamaremos un *arco* que va de x a y. En algunas ocasiones este arco será denotado por xy.

La característica principal de un arco $\big(\alpha([0,1])\big)$ es la no auto intersección; es decir, α es inyectiva. Para las trayectorias, lo anterior es algo que puede no ocurrir.

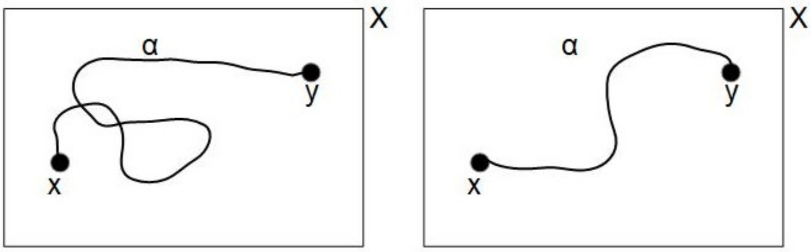

Figura 2.2: A la izquierda, una trayectoria; a la derecha, un arco

Definición 2.2.3. Sean X, Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Decimos que f es *homotópica* a g si existe una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que para toda $x \in X$ se cumple que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$.

A H se le llama una *homotopía* entre f y g.

Definición 2.2.4. Un espacio topológico X es *contráctil* si y sólo si la identidad $Id_X : X \to X$ es homotópica a la función constante C_x para algún $x \in X$.

Observación 2.2.5. *Dada la Definición 2.2.4, tenemos que el espacio topológico X es contráctil si y sólo si existen $x_0 \in X$ y una función continua $H : X \times [0,1] \to X$ tales que para todo $x \in X$ se cumple que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_0$.*

La teoría de homotopía es realmente interesante: con ella podemos dar una introducción a la topología algebraica mediante grupos fundamentales. No es menos la teoría de la contractibilidad; encontrar formas de llevar continuamente un espacio a un punto o probar que esto no es posible es un problema difícil.

2.3. Algunas contracciones conocidas de hiperespacios

Ahora que ya tenemos la noción de hiperspacio y de contractibilidad podemos juntarlas. Está sección está dedicada a la contracción de los hiperespacios definidos anteriormente: cómo proponer la contracción y en qué nos debemos fijar. Al final de está sección responderemos una pregunta que surge del proceso de contracción.

Proposición 2.3.1. *[9, Ejercicios 6, p.194]* Sean X un espacio topológico compacto y Y un espacio topológico T_2. Si $f : X \to Y$ es continua, entonces f es cerrada.

Teorema 2.3.2. Sean (X,τ) un espacio topológico compacto y T_2 y $n \in \mathbb{N}$. Si X es contráctil, entonces $CL(X)$ es contráctil. Además, los subhiperespacios $KC(X), F_n(X), F(X)$ y $KC_n(X)$ de $CL(X)$ también lo son.

Demostración. Comenzaremos probando que $CL(X)$ es contráctil y después, nos enfocaremos a cada uno de los otros hiperespacios. Como X es contráctil, existen $p \in X$ y una función continua $H : X \times [0,1] \to X$ tales que, para toda $x \in X$, $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = p$. Observemos que, como H tiene dominio compacto y T_2 y codominio T_2, tenemos, por la Proposición 2.3.1, que H es cerrada. También, si $A \in CL(X)$, entonces, para todo $t \in [0,1]$, $A \times \{t\}$ es un subconjunto cerrado de $X \times [0,1]$. Por lo tanto, $H(A \times \{t\}) \in CL(X)$.

Definimos $\lambda : CL(X) \times [0,1] \to CL(X)$ como $\lambda(A,t) = H(A \times \{t\})$. Veamos que λ es continua. Para esto probaremos las siguientes dos afirmaciones.

<u>Afirmación 1</u> Si U es un subconjunto abierto de X, entonces $\lambda^{-1}(\langle U \rangle)$ es un subconjunto abierto de $CL(X) \times [0,1]$.

Sea $(A,t) \in \lambda^{-1}(\langle U \rangle)$. Entonces, $\lambda(A,t) = H(A \times \{t\}) \subseteq U$; es decir, $A \times \{t\} \subseteq H^{-1}(U)$. Dada $a \in A$, $(a,t) \in H^{-1}(U)$ y, como $H^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de $X \times [0,1]$, existen un subconjunto abierto V_a de X y un subconjunto abierto I_a de $[0,1]$ tales que $(a,t) \in V_a \times I_a \subseteq H^{-1}(U)$. Como $\{V_a : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A y A es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \dots, a_n \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}$. Consideremos $\mathscr{U} = \langle \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i} \rangle \times \bigcap_{i=1}^{n} I_{a_i}$. Notemos que $(A,t) \in \mathscr{U}$ y que $\mathscr{U}$ es un subconjunto abierto de $CL(X) \times [0,1]$. Ahora, probemos que $\mathscr{U} \subseteq \lambda^{-1}(\langle U \rangle)$. Tomemos $(B,s) \in \mathscr{U}$. Entonces $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}$ y $s \in \bigcap_{i=1}^{n} I_{a_i}$. Dada $b \in B$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $b \in V_{a_j}$. Así, $(b,s) \in V_{a_j} \times I_{a_j} \subseteq H^{-1}(U)$; esto es, $H(b,s) \in U$. Por lo anterior, $\lambda(B,s) = H(B \times \{t\}) \subseteq U$; es decir, $\lambda(B,s) \in \langle U \rangle$. Lo que nos dice que $(B,s) \in \lambda^{-1}(\langle U \rangle)$. Por lo tanto, $\mathscr{U} \subseteq \lambda^{-1}(\langle U \rangle)$.

Tenemos que $\mathscr{U}$ es un subconjunto abierto de $CL(X) \times [0,1]$ tal que $(A,t) \in \mathscr{U} \subseteq \lambda^{-1}(\langle U \rangle)$, con lo que obtenemos que $\lambda^{-1}(\langle U \rangle)$ es un subconjunto abierto de $CL(X) \times [0,1]$. Esto concluye la prueba de la Afirmación 1.

Afirmación 2 Si U es un subconjunto abierto de X, entonces $\lambda^{-1}(\langle X,U\rangle)$ es un subconjunto abierto de $CL(X)\times[0,1]$.

Sea $(A,t)\in\lambda^{-1}(\langle X,U\rangle)$. Entonces $\lambda(A,t)=H(A\times\{t\})\in\langle X,U\rangle$; es decir, $H(A\times\{t\})\cap U\neq\emptyset$. Tomemos $a_0\in A$ tal que $H(a_0,t)\in U$, por ello $(a_0,t)\in H^{-1}(U)$. Como $H^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de $X\times[0,1]$, existen un subconjunto abierto V_{a_0} de X y un subconjunto abierto I_{a_0} de $[0,1]$ tales que $(a_0,t)\in V_{a_0}\times I_{a_0}\subseteq H^{-1}(U)$. Consideremos $\mathscr{U}=\langle X,V_{a_0}\rangle\times I_{a_0}$. Notemos que $(A,t)\in\mathscr{U}$ y que $\mathscr{U}$ es un subconjunto abierto $CL(X)\times[0,1]$. Ahora, probemos que $\mathscr{U}\subseteq\lambda^{-1}(\langle X,U\rangle)$. Sea $(B,s)\in\mathscr{U}$. Entonces $B\in\langle X,V_{a_0}\rangle$ y $s\in I_{a_0}$; esto es, $B\cap V_{a_0}\neq\emptyset$. Tomemos $b_0\in B\cap V_{a_0}$. Entonces $(b_0,s)\in V_{a_0}\times I_{a_0}\subseteq H^{-1}(U)$. Lo que nos dice que $H(b_0,s)\in U$. Por lo tanto, $H(B\times\{s\})\cap U\neq\emptyset$; es decir, $\lambda(B,s)=H(B\times\{s\})\in\langle X,U\rangle$. Lo que nos dice que $(B,s)\in\lambda^{-1}(\langle X,U\rangle)$. Por lo tanto, $\mathscr{U}\subseteq\lambda^{-1}(\langle X,U\rangle)$.

Tenemos que $\mathscr{U}$ es un subconjunto abierto de $CL(X)\times[0,1]$ tal que $(A,t)\subseteq\mathscr{U}\subseteq\lambda^{-1}(\langle X,U\rangle)$. Con esto obtenemos que $\lambda^{-1}(\langle X,U\rangle)$ es un subconjunto abierto de $CL(X)\times[0,1]$. Esto finaliza la prueba de la Afirmación 2.

De las Afirmaciones 1 y 2 se sigue que λ es continua.

Además, para toda $A\in CL(X)$, $H(A\times\{0\})=A$ y $H(A\times\{1\})=\{p\}$. Por la Observación 2.2.5, $CL(X)$ es contráctil. Estas últimas igualdades nos servirán para demostrar la contractibilidad de los subhiperespacios reduciendo su prueba a exhibir que la respectiva restricción de λ está bien definida.

Demostremos que $KC(X)$ **es contráctil**. Sea $(A,t)\in KC(X)\times[0,1]$. Como A es un subconjunto conexo y compacto de X, tenemos que $A\times\{t\}$ es un subconjunto conexo y compacto de $X\times[0,1]$. Así, $H(A\times\{t\})\in KC(X)$. Por la Observación 2.1.2, $KC(X)\subseteq K(X)=CL(X)$. Definimos $\lambda|_{KC(X)\times[0,1]}:KC(X)\times[0,1]\to KC(X)$ como $\lambda|_{KC(X)\times[0,1]}(A,t)=\lambda(A,t)$. Por lo tanto, $\lambda|_{KC(X)\times[0,1]}$ es una función continua. Por la Observación 2.2.5, $KC(X)$ es contráctil.

Lo siguiente es demostrar que $F_n(X)$ **es contráctil**. Sea $(A,t)\in F_n(X)\times[0,1]$. Así, $A=\{a_1,\dots,a_m\}$ con $m\leqslant n$. Notemos que $H(A\times\{t\})=\{H(a_1,t),\dots,H(a_m,t)\}$. Lo anterior nos dice que $H(A\times\{t\})\in F_n(X)$. Consideremos $\lambda|_{F_n(X)\times[0,1]}:F_n(X)\times[0,1]\to F_n(X)$ definida como $\lambda|_{F_n(X)\times[0,1]}(A,t)=\lambda(A,t)$. Por lo tanto, $\lambda|_{F_n(X)\times[0,1]}$ es una función continua. Por la Observación 2.2.5, $F_n(X)$ es contráctil.

Ahora, demostremos que $F(X)$ **es contráctil**. Sea $(A,t)\in F(X)\times[0,1]$. Entonces existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $A\in F_m(X)$; es decir, $A=\{x_1,\dots,x_r\}$ con $1\leqslant r\leqslant m$. Además, $H(A\times\{t\})=\{H(x_1,t),\dots,H(x_r,t)\}$. Lo anterior nos dice que $H(A\times\{t\})\in F(X)$. Consideremos $\lambda|_{F(X)\times[0,1]}:F(X)\times[0,1]\to F(X)$ definida como $\lambda|_{F(X)\times[0,1]}(A,t)=\lambda(A,t)$. Por lo tanto, $\lambda|_{F(X)\times[0,1]}$ es una función continua. Por la Observación 2.2.5, $F(X)$ es contráctil.

Finalmente, demostremos que $KC_n(X)$ **es contráctil**. Sea $(A,t)\in KC_n(X)\times[0,1]$. Por definición $A=\bigcup\limits_{i=1}^{m}C_i$ donde $C_1,...,C_m$ son componentes conexas de A con $m\leqslant n$. No es difícil notar que $H(A\times\{t\})=\bigcup\limits_{i=1}^{m}H(C_i\times\{t\})$. Como para toda $i\in\{1,\dots,m\}$, $C_i\times\{t\}$ es un subconjunto conexo y compacto de $X\times[0,1]$, tenemos que $H(C_i\times\{t\})\in KC(X)$. Así, $H(A\times\{t\})$ tiene a lo más, m componentes conexas; es decir, $H(A\times\{t\})\in KC_n(X)$. Por la Observación 2.1.2, $KC_n(X)\subseteq K(X)=CL(X)$. Consideremos $\lambda|_{KC_n(X)\times[0,1]}:KC_n(X)\times[0,1]\to KC_n(X)$ definida como $\lambda|_{KC_n(X)\times[0,1]}(A,t)=\lambda(A,t)$. Por lo tanto, $\lambda\,|_{KC_n(X)\times[0,1]}$ es una función continua. Por la Observación 2.2.5, $KC_n(X)$ es contráctil. □

En la demostración anterior sólo bastó con verificar que la restricción de λ estuviese bien definida. Entonces ¿es cierto el Teorema 2.3.2 para cualquier subhiperespacio? Concretamente:

sea X un espacio topológico compacto y T_2. Si X es contráctil, entonces para todo subhiperespacio Ω de $CL(X)$ tenemos que Ω es contráctil mediante la función $\lambda\mid_{\Omega\times[0,1]}$ donde la función $\lambda : CL(X)\times[0,1]\to CL(X)$ se define en el Teorema 2.3.2.

Supongamos verdadero el razonamiento. Sea $X = D^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|\leqslant 1\}$. Claramente X es compacto y T_2. Definimos $H : X\times[0,1]\to X$ como $H((x,y),t) = (1-t)(x,y)+t(0,0)$. Como H es continua y, para toda $(x,y)\in X$, $H((x,y),0) = (x,y)$ y $H((x,y),1) = (0,0)$, tenemos que X es contráctil.

Por el Teorema 2.3.2, $CL(X)$ es contráctil. Como X es T_2, tenemos que $X\approx F_1(X)$. Además, existe un subhiperespacio Ω de $F_1(X)$ tal que $\Omega\approx S^1$. Por nuestra suposición, la función $\lambda\mid_{\Omega\times[0,1]}: \Omega\times[0,1]\to\Omega$ definida como $\lambda\mid_{\Omega\times[0,1]}(\{x\},t) = \lambda(\{x\},t)$ contrae a Ω al punto $\{(0,0)\}$. Notemos que $\lambda\mid_{\Omega\times[0,1]}$ no está bien definida. Además, como $\Omega\approx S^1$, S^1 es contráctil al punto $(0,0)$; una contradicción. Por lo tanto, nuestro razonamiento, aunque deseable, es falso.

Definición 2.3.3. Sean X y Y dos espacios topológicos tales que $Y\subseteq X$. Decimos que Y es contráctil en X si existen $x\in X$ y una función continua $G : Y\times[0,1]\to X$ tales que, para toda $y\in Y$, se cumple que $G(y,0) = y$ y $G(y,1) = x$.

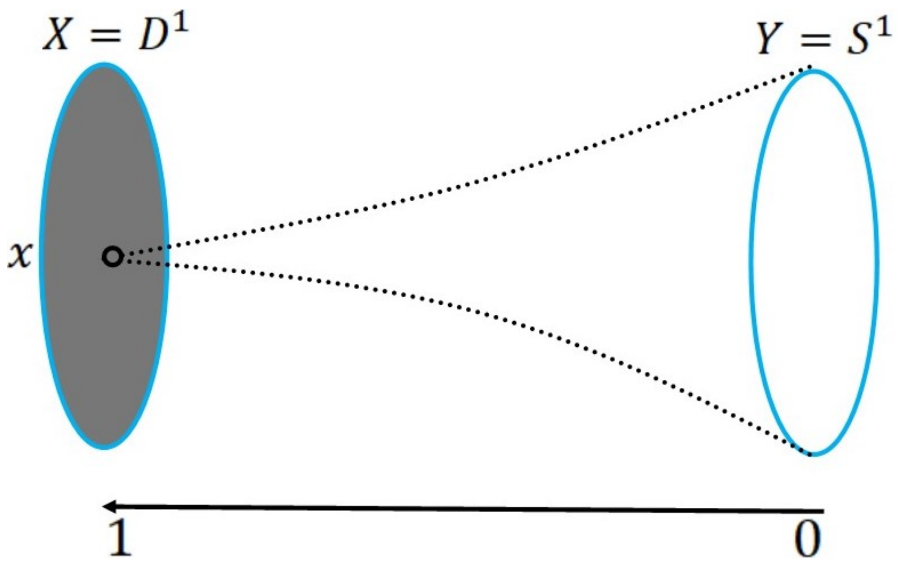

Figura 2.3: S^1 es contráctil en D^1

Corolario 2.3.4. Sea X un espacio topológico compacto y T_2. Si X es contráctil, entonces para todo subhiperespacio Ω de $CL(X)$ se cumple que Ω es contráctil en $CL(X)$.

Demostración. La demostración se deduce del Teorema 2.3.2 y de la Definición 2.3.3. $\square$

Capítulo 3

El hiperespacio $S_c(X)$

Este capítulo y los siguientes están basados en el artículo: *The hyperspace of sequences of a dendrite is contractible*, escrito por A. Illanes [6]. Estudiaremos este nuevo hiperespacio introducido por primera vez por S. García-Ferreira y Y. F. Ortiz-Castillo en [5].

Vamos a trabajar con continuos, en particular con dendroides y dendritas que definiremos a continuación. Además, veremos las implicaciones que tiene el hecho de que toda dendrita posea una métrica convexa, y cómo influye tener una métrica con estas características en el hiperespacio a estudiar.

Definición 3.0.1. *La sucesión armónica con límite* es el subespacio de $\mathbb{R}$ igual a $\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}$ y lo denotaremos por Ω. También, denotamos como $\lim \Omega$ al 0.

Definición 3.0.2. Sea X un espacio topológico T_2. *El hiperespacio de las sucesiones convergentes no triviales*, denotado por $S_c(X)$, está definido como

$$S_c(X) = \{A \subseteq X : A \approx \Omega\}.$$

Note que $S_c(X) \subseteq K(X)$. Este hiperespacio será considerado con la topología de Vietoris.

Supongamos que X es un espacio topológico contráctil y T_2 ¿esto implica que $S_c(X)$ sea contráctil? Una solución general para esta última pregunta parece ser muy difícil. Entonces, dadas las hipótesis del Teorema 2.3.2 ¿restringir λ a $S_c(X) \times [0,1]$ hace que $S_c(X)$ sea contráctil? No, pues $\lambda|_{S_c(X)\times[0,1]}(S,1) \notin S_c(X)$. A partir de este momento, nos dedicaremos a probar que, si X es una dendrita, entonces $S_c(X)$ es contráctil.

Definición 3.0.3. Un espacio topológico X es un *continuo* si es compacto, conexo, métrico y tiene al menos dos elementos.

Definición 3.0.4. Sea X un continuo. Si además X es conexo por trayectorias y cumple que para cualesquiera $A, B \in KC(X)$, $A \cap B$ es conexo, entonces decimos que X es un *dendroide*.

Definición 3.0.5. Un continuo X es una *dendrita* si es un dendroide localmente conexo.

Teorema 3.0.6. *[11, Theorem 10.2, p.166]* Un continuo X es una dendrita si y sólo si para cualesquiera par de puntos de X se tiene que están separados en X por un tercer punto de X.

Corolario 3.0.7. Si X es una dendrita y $p,q \in X$, entonces el arco que va de p a q es único.

Demostración. El Corolario 3.0.7 se sigue del Teorema 3.0.6. □

Lema 3.0.8. Sean X es una dendrita, $A \in KC(X)$ y $p,q \in A$. Entonces $pq \subseteq A$.

Demostración. Por la Definición 3.0.5, X es un dendroide. Notemos que $pq \in KC(X)$. Entonces $pq \cap A$ es un conexo; en particular es un subconjunto conexo de pq que contiene a p y a q. Así, $pq \cap A = pq$. Como $pq \cap A \subseteq A$, concluimos que $pq \subseteq A$. □

3.1. Métrica convexa

Definición 3.1.1. Sean (X,d_X) y (Y,d_Y) espacios métricos. Una *isometría* es una función $f: X \to Y$ tal que, para cualesquiera z_1, $z_2 \in X$, se tiene que $d_X(z_1,z_2) = d_Y(f(z_1),f(z_2))$.

Note que una isometría es una función continua, inyectiva y no necesariamente suprayectiva (por ejemplo, $g:([0,1],D) \to ([0,2],D)$ dada por $g(r)=r$). Además, si restringimos el codominio a su imagen, entonces $X \approx_i f(X)$.

Definición 3.1.2. Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que d es una *métrica convexa* si para cualesquiera $x,y \in X$ existe una isometría $f:[0,d(x,y)] \to X$ tal que $f(0)=x$ y $f(d(x,y))=y$.

Teorema 3.1.3. Sean X y Y espacios métricos. Si $f: X \to Y$ es una isometría suprayectiva, entonces f es una función abierta.

Demostración. Dado que f es una isometría, $f^{-1}: Y \to X$ también lo es. Por ello f^{-1} es una función continua. Lo anterior nos dice que f es abierta. $\square$

Teorema 3.1.4. Sean (X,d_X) y (Y,d_Y) dos espacios métricos. Si $f: X \to Y$ es una función continua y D es un subconjunto denso de X tal que $f|_D: D \to Y$ es una isometría, entonces f es una isometría.

Demostración. Sean $x,y \in X$. Entonces existen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en D tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Como f es continua, $d_X(x,y) = d_X(\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d_X(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d_Y(f(x_n),f(y_n)) = d_Y(\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n), \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)) = d_Y(f(x),f(y))$.

Por lo tanto, f es una isometría. $\square$

Teorema 3.1.5. Sean X, Y espacios métricos y D un subconjunto compacto de X. Si $f: X \to Y$ es una función continua y $f(D)$ es un subconjunto denso de Y, entonces f es suprayectiva.

Demostración. Note que, como f es continua y D es compacto, $\overline{f(D)} = f(D)$. Por lo tanto $Y = \overline{f(D)} = f(D) \subseteq f(X) \subseteq Y$. Lo que nos dice que f es suprayectiva. $\square$

Teorema 3.1.6. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Entonces d es una métrica convexa si y sólo si para cualesquiera $x,y \in X$, existe $z \in X$ tal que $d(x,z) = d(y,z) = \frac{d(x,y)}{2}$.

Demostración. Demostremos ambas implicaciones.

$\Longleftarrow$ Primero, dados dos puntos $x,y \in X$ vamos a construir recursivamente un subconjunto M de X, el cual será isométrico a un subconjunto denso de $[0,d(x,y)]$.

Sean $x,y \in X$. Definimos $m_0 = x$, $m_1 = y$ y $m_{\frac{1}{2}} \in X$ como un punto medio entre x y y; es decir, $d(m_0,m_{\frac{1}{2}}) = \frac{d(m_0,m_1)}{2} = d(m_1,m_{\frac{1}{2}})$.

Supongamos que para $n \in \mathbb{N}$ y para toda $k \in \{0,\dots,2^n\}$, $m_{\frac{k}{2^n}}$ ha sido definido.

Sea $k \in \{0,\dots,2^{n+1}\}$. Si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $k = 2p$, entonces $m_{\frac{k}{2^{n+1}}} = m_{\frac{p}{2^n}}$ con $p \in \{0,\dots,2^n\}$. Es decir, $m_{\frac{k}{2^{n+1}}}$ ya está definido. Si k es impar, entonces $k-1$ y $k+1$ son pares, es decir, $m_{\frac{k-1}{2^{n+1}}}$ y $m_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}$ ya están definidos. Definimos a $m_{\frac{k}{2^{n+1}}}$ como un punto medio entre $m_{\frac{k-1}{2^{n+1}}}$ y $m_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}$; es decir, $d(m_{\frac{k-1}{2^{n+1}}},m_{\frac{k}{2^{n+1}}}) = \frac{d(m_{\frac{k-1}{2^{n+1}}},m_{\frac{k+1}{2^{n+1}}})}{2} = d(m_{\frac{k+1}{2^{n+1}}},m_{\frac{k}{2^{n+1}}})$.

Consideremos $M = \left\{m_{\frac{k}{2^n}} \in X : n \in \mathbb{N} \text{ y } k \in \{0,...,2^n\}\right\}$. Veamos las siguientes propiedades de M.

Propiedad 1 Dados $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0,\dots,2^n-1\}$, $d(m_{\frac{k}{2^n}}, m_{\frac{k+1}{2^n}}) = \frac{d(x,y)}{2^n}$.

Haremos la prueba por inducción. Es claro que, si $n=1$, la afirmación se cumple. Supongamos la afirmación cierta para n y probémosla para $n+1$.

Sea $k \in \{0,\dots,2^{n+1}-1\}$. Si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $k=2p$, entonces $k+2$ es par y $k+2 \leqslant 2^{n+1}$. Así, $m_{\frac{k}{2^{n+1}}} = m_{\frac{p}{2^n}}$ y $m_{\frac{k+2}{2^{n+1}}} = m_{\frac{p+1}{2^n}}$ con $p \in \{0,\dots,2^n-1\}$. Por hipótesis de inducción, $d(m_{\frac{p}{2^n}}, m_{\frac{p+1}{2^n}}) = \frac{d(x,y)}{2^n}$ y, como $m_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}$ es punto medio entre $m_{\frac{k}{2^{n+1}}}$ y $m_{\frac{k+2}{2^{n+1}}}$, tenemos que $d(m_{\frac{k}{2^{n+1}}}, m_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}) = \frac{1}{2}(\frac{d(x,y)}{2^n}) = \frac{d(x,y)}{2^{n+1}}$. Si k es impar, entonces $k-1$ y $k+1$ son pares y $k+1 \leqslant 2^{n+1}$, por ello $m_{\frac{k-1}{2^{n+1}}} = m_{\frac{p}{2^n}}$ y $m_{\frac{k+1}{2^{n+1}}} = m_{\frac{p+1}{2^n}}$ donde $k-1=2p$ y $p \in \{0,\dots,2^n-1\}$. Por hipótesis de inducción, $d(m_{\frac{p}{2^n}}, m_{\frac{p+1}{2^n}}) = \frac{d(x,y)}{2^n}$ y, como $m_{\frac{k}{2^{n+1}}}$ es punto medio entre $m_{\frac{k-1}{2^{n+1}}}$ y $m_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}$, tenemos que $d(m_{\frac{k}{2^{n+1}}}, m_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}) = \frac{1}{2}(\frac{d(x,y)}{2^n}) = \frac{d(x,y)}{2^{n+1}}$.

Por lo tanto, la Propiedad 1 es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que, dados $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0,\dots,2^n\}$, $d(x, m_{\frac{k}{2^n}}) \leqslant \frac{kd(x,y)}{2^n}$ debido a que $d(x, m_{\frac{k}{2^n}}) \leqslant d(x, m_{\frac{1}{2^n}}) + \cdots + d(m_{\frac{(k-1)}{2^n}}, m_{\frac{k}{2^n}})$.

Propiedad 2 Dados $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0,1,...,2^n-1\}$ y $p \in \{0,...,2^n-k\}$, $d(m_{\frac{k}{2^n}}, m_{\frac{k+p}{2^n}}) = \frac{pd(x,y)}{2^n}$.

Afirmamos que para toda $r \in \{0,\dots,2^n\}$, $d(m_{\frac{r}{2^n}}, y) = d(x,y) - \frac{rd(x,y)}{2^n}$.

Dado que $d(x,y) \leqslant d(x, m_{\frac{r}{2^n}}) + d(m_{\frac{r}{2^n}}, y)$, $d(x,y) - d(m_{\frac{r}{2^n}}, y) \leqslant d(x, m_{\frac{r}{2^n}}) \leqslant \frac{rd(x,y)}{2^n}$. Despejando tenemos que $d(m_{\frac{r}{2^n}}, y) \geqslant d(x,y) - \frac{rd(x,y)}{2^n}$. Ahora, como $d(m_{\frac{r}{2^n}}, y) \leqslant d(m_{\frac{r}{2^n}}, m_{\frac{r+1}{2^n}}) + \cdots + d(m_{\frac{2^n-1}{2^n}}, y) = \frac{(2^n-r)d(x,y)}{2^n}$, tenemos que $d(m_{\frac{r}{2^n}}, y) = d(x,y) - \frac{rd(x,y)}{2^n}$. Esto concluye nuestra afirmación.

Por la Propiedad 1, sucede que $d(m_{\frac{k}{2^n}}, m_{\frac{k+p}{2^n}}) \leqslant \frac{pd(x,y)}{2^n}$. Usando la desigualdad del triángulo, $d(m_{\frac{k}{2^n}}, y) \leqslant d(m_{\frac{k}{2^n}}, m_{\frac{k+p}{2^n}}) + d(m_{\frac{k+p}{2^n}}, y)$. Entonces $d(m_{\frac{k}{2^n}}, y) - d(m_{\frac{k+p}{2^n}}, y) \leqslant d(m_{\frac{k}{2^n}}, m_{\frac{k+p}{2^n}})$. Por nuestra afirmación, $d(x,y) - \frac{kd(x,y)}{2^n} - (d(x,y) - \frac{(k+p)d(x,y)}{2^n}) = d(m_{\frac{k}{2^n}}, y) - d(m_{\frac{k+p}{2^n}}, y) \leqslant d(m_{\frac{k}{2^n}}, m_{\frac{k+p}{2^n}})$; es decir, $\frac{pd(x,y)}{2^n} \leqslant d(m_{\frac{k}{2^n}}, m_{\frac{k+p}{2^n}})$. Por lo tanto, $d(m_{\frac{k}{2^n}}, m_{\frac{k+p}{2^n}}) = \frac{pd(x,y)}{2^n}$.

Ahora, consideremos $f : (\overline{M}, d) \to ([0, d(x,y)], d_R)$ como $f(z) = d(x,z)$. Exhibamos que f es una isometría si restringimos su dominio a M. Sean $m_{\frac{k}{2^n}}, m_{\frac{q}{2^r}} \in M$. Supongamos sin perder generalidad que $n \leqslant r$. Tenemos los siguientes casos.

Caso 1 $q \leqslant k$. Notemos que $m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}} = m_{\frac{k}{2^n}}$. Definimos $p = (2^{r-n}k) - q$. Como $q \leqslant k \leqslant 2^{r-n}k$, tenemos que $0 \leqslant 2^{r-n}k - q$; es decir, $0 \leqslant p$. Como $m_{\frac{k}{2^n}} \in M$, $k \leqslant 2^n$. Así, $2^{r-n}k \leqslant 2^r$ y, con ello, $2^{r-n}k - q \leqslant 2^r - q$. Por lo tanto, $p \in \{0,...,2^r-q\}$.

Por la Propiedad 2, $d(m_{\frac{q}{2^r}}, m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}}) = d(m_{\frac{q}{2^r}}, m_{\frac{q+p}{2^r}}) = \frac{pd(x,y)}{2^r} = \frac{((2^{r-n}k)-q)d(x,y)}{2^r} = \frac{(2^{r-n}k)d(x,y)}{2^r} - \frac{qd(x,y)}{2^r} = f(m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}}) - f(m_{\frac{q}{2^r}}) = d_R(f(m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}}), f(m_{\frac{q}{2^r}}))$.

Hemos mostrado que $d(m_{\frac{q}{2^r}}, m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}}) = d_R(f(m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}}), f(m_{\frac{q}{2^r}}))$.

Caso 2 $k<q$. Notemos que $m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}} = m_{\frac{k}{2^n}}$. Supongamos que $2^{r-n}k>2^r$. Entonces $\frac{2^{r-n}k}{2^r}>1$, es decir, $\frac{k}{2^n}>1$; una contradicción. Por lo tanto, $2^{r-n}k \leqslant 2^r$.

Si $q<2^{r-n}k$, entonces existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $q+p=2^{r-n}k$. Demostremos que $p\in\{1,\dots,2^r-q\}$. Como $q<2^{r-n}k$, pasa que $0<p$; es decir, $1\leqslant p$. Como $m_{\frac{k}{2^n}}\in M$, $k\leqslant 2^n$. Entonces $2^{r-n}k\leqslant 2^r$ y $2^{r-n}k-q\leqslant 2^r-q$. De esta forma, $p\in\{1,\dots,2^r-q\}\subsetneq\{0,\dots,2^r-q\}$.

Por la Propiedad 2, $d(m_{\frac{q}{2^r}},m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}})=d(m_{\frac{q}{2^r}},m_{\frac{q+p}{2^r}})=\frac{pd(x,y)}{2^r}=\frac{((2^{r-n}k)-q)d(x,y)}{2^r}=\frac{(2^{r-n}k)d(x,y)}{2^r}-\frac{qd(x,y)}{2^r}=f(m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}})-f(m_{\frac{q}{2^r}})=d_R(f(m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}}),f(m_{\frac{q}{2^r}}))$.

Si $2^{r-n}k<q$, entonces existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $2^{r-n}k+p=q$. Demostremos que $p\in\{1,\dots,2^r-2^{r-n}k\}$. Como $2^{r-n}k<q$, pasa que $2^{r-n}k\leqslant q-1$; esto es, $1\leqslant p$. Como $m_{\frac{q}{2^r}}\in M$, $q\leqslant 2^r$. Entonces $q-2^{r-n}k\leqslant 2^r-2^{r-n}k$. De esta forma, $p\in\{1,\dots,2^r-2^{r-n}k\}\subsetneq\{0,\dots,2^r-2^{r-n}k\}$.

Por la Propiedad 2, $d(m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}},m_{\frac{q}{2^r}})=d(m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}},m_{\frac{2^{r-n}k+p}{2^r}})=\frac{pd(x,y)}{2^r}=\frac{(q-(2^{r-n}k))d(x,y)}{2^r}=\frac{qd(x,y)}{2^r}-\frac{2^{r-n}kd(x,y)}{2^r}=f(m_{\frac{q}{2^r}})-f(m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}})=d_R(f(m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}}),f(m_{\frac{q}{2^r}}))$.

Hemos mostrado que $d(m_{\frac{q}{2^r}},m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}})=d_R(f(m_{\frac{2^{r-n}k}{2^r}}),f(m_{\frac{q}{2^r}}))$.

Por lo tanto, f es una isometría en M.

Como M es un subconjunto denso de $\overline{M}$ tenemos que, por el Teorema 3.1.4, f es una isometría.

Nuestro penúltimo paso consiste en exhibir que $f(\overline{M})$ es un subconjunto denso de $[0,d(x,y)]$. Sean $b\in[0,d(x,y)]$ y $\varepsilon>0$. Entonces existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{d(x,y)}{2^N}<\varepsilon$. Como $b\in[0,d(x,y)]=\left[0,\frac{d(x,y)}{2^N}\right]\cup\dots\cup\left[\frac{(2^N-1)d(x,y)}{2^N},d(x,y)\right]$, existe $k\in\{0,\dots,2^N-1\}$ tal que $b\in\left[\frac{kd(x,y)}{2^N},\frac{(k+1)d(x,y)}{2^N}\right]$. Definimos $b_N=\frac{kd(x,y)}{2^N}$. Por la Propiedad 2, $b_N=f(m_{\frac{k}{2^N}})=d(x,m_{\frac{k}{2^N}})=\frac{kd(x,y)}{2^N}$; es decir, $b_N\in f(M)\subseteq f(\overline{M})$.

Ahora, $d_R(b,b_N)\leqslant\frac{(k+1)d(x,y)}{2^N}-\frac{kd(x,y)}{2^N}=\frac{d(x,y)}{2^N}<\varepsilon$. Lo que nos dice que $b_N\in B_\varepsilon(b)$, es decir, $B_\varepsilon(b)\cap f(\overline{M})\neq\emptyset$. Así, $f(\overline{M})$ es un subconjunto denso de $[0,d(x,y)]$.

Finalmente, como X es compacto, $\overline{M}$ es compacto. Por el Teorema 3.1.5, f es suprayectiva. Sea $f^{-1}:[0,d(x,y)]=f(\overline{M})\to X$. Entonces f^{-1} es una isometría tal que $f^{-1}(0)=x$ y $f^{-1}(d(x,y))=y$. Por lo tanto, ocurre la Definición 3.1.2; es decir, d es una métrica convexa.

$\Longrightarrow$ Sean $x,y\in X$. Por hipótesis existe una isometría $f:[0,d(x,y)]\longrightarrow X$ tal que $f(0)=x$ y $f(d(x,y))=y$.

Veamos que existe $z\in X$ tal que $d(x,z)=d(y,z)=\frac{d(x,y)}{2}$. Definimos $z=f\left(\frac{d(x,y)}{2}\right)$. Entonces $d(x,z)=d_R(f^{-1}(x),f^{-1}(z))=d_R\left(0,\frac{d(x,y)}{2}\right)=\frac{d(x,y)}{2}$. Análogamente, $d(y,z)=d_R(f^{-1}(y),f^{-1}(z))=d_R\left(d(x,y),\frac{d(x,y)}{2}\right)=\frac{d(x,y)}{2}$.

Por lo tanto, ambas proposiciones son equivalentes. □

Teorema 3.1.7. Sea X un continuo localmente conexo. Entonces X admite una métrica convexa.

Demostración. La demostración se encuentra en los artículos de R. Bing [2] y de E. E. Moise [8]. □

Teorema 3.1.8. Sean (X,E) un continuo y E una métrica convexa. Entonces la función $\diamondsuit : X \times X \to [0,\infty)$ definida como $\diamondsuit(x,y) = \frac{E(x,y)}{\text{diám}(X)}$ es también una métrica convexa. Además, $\text{diám}_{\diamondsuit}(X) = 1$.

Demostración. Sean $x,y \in X$, como E es convexa, existe $z \in X$ tal que $E(x,z) = E(y,z) = \frac{E(x,y)}{2}$. Por lo tanto, $\diamondsuit(x,z) = \frac{E(x,z)}{\text{diám}(X)} = \frac{1}{2}\frac{E(x,y)}{\text{diám}(X)} = \frac{1}{2}\diamondsuit(x,y)$ y $\diamondsuit(y,z) = \frac{E(y,z)}{\text{diám}(X)} = \frac{1}{2}\frac{E(x,y)}{\text{diám}(X)} = \frac{1}{2}\diamondsuit(x,y)$.

Por el Teorema 3.1.6, $\diamondsuit$ es una métrica convexa. □

Observación 3.1.9. *Por la Definición 3.0.5, toda dendrita es un continuo localmente conexo. Así, por el Teorema 3.1.7, toda dendrita admite una métrica convexa. A partir de aquí, todas nuestras dendritas tendrán dicha métrica convexa y, cuando necesitemos que nuestro espacio tenga diámetro igual a uno, usaremos la métrica* $\diamondsuit$.

Lema 3.1.10. Sea (X,E) un continuo con E una métrica convexa. Entonces para cualesquiera $x \in X$ y $\varepsilon{>}0$, $B_\varepsilon(x)$ es conexa por trayectorias.

Demostración. Sean $x \in X$, $\varepsilon{>}0$ y $y \in B_\varepsilon(x)$.

Por hipótesis, existe una isometría $\Psi : ([0,E(x,y)],d_R) \to (X,E)$ tal que $\Psi(0) = x$ y $\Psi(E(x,y)) = y$. Notemos que si $t \in [0,E(x,y)]$, entonces $t{<}\varepsilon$ y, además, $t = d_R(0,t) = E(\Psi(0),\Psi(t)) = E(x,\Psi(t))$. Lo anterior nos dice que $\Psi(t) \in B_\varepsilon(x)$; así, $\Psi([0,E(x,y)]) \subseteq B_\varepsilon(x)$.

Definimos $\alpha : [0,1] \to B_\varepsilon(x)$ como $\alpha(t) = \Psi(E(x,y)t)$. Así, $\alpha(0) = \Psi(0) = x$ y $\alpha(1) = \Psi(E(x,y)) = y$. Como α es continua tenemos, por la Definición 2.2.1, que $B_\varepsilon(x)$ es conexa por trayectorias. □

Lema 3.1.11. Sea (X,E) un continuo con una métrica convexa E. Entonces para cada par de puntos distintos $x,y \in X$, se tiene que $\Psi([0,E(x,y)] \approx_i [0,E(x,y)]$ donde Ψ es una isometría tal que $\Psi(0) = x$ y $\Psi(E(x,y)) = y$. Por lo anterior, $\Psi([0,E(x,y)]$ es un arco con puntos extremos x y y.

Demostración. Por hipótesis, existe una isometría $\Psi : ([0,E(x,y)],d_R) \to X$ tal que $\Psi(0) = x$ y $\Psi(E(x,y)) = y$. Consideremos $f : \Psi([0,E(x,y)]) \to [0,E(x,y)]$ como $f(z) = \Psi^{-1}(z)$. Como Ψ es una isometría, f también y por como definimos a f, f es un homeomorfismo; es decir, $\Psi([0,E(x,y)] \approx_i [0,E(x,y)]$. □

Lema 3.1.12. Sean (X,E) un continuo con una métrica convexa E y $x,y \in X$. Entonces para toda $z \in \Psi([0,E(x,y)]$, se tiene que $E(x,z)+E(z,y) = E(x,y)$ donde $\Psi : ([0,E(x,y)],d_R) \to (X,E)$ es una isometría que existe tal que $\Psi(0) = x$ y $\Psi(E(x,y)) = y$.

Demostración. Sea $z \in \Psi([0,E(x,y)])$. Entonces $\Psi^{-1}(z) \in [0,E(x,y)]$. Notemos que $E(x,y) = \Psi^{-1}(z)+(E(x,y)-\Psi^{-1}(z)) = d_R(0,\Psi^{-1}(z))+d_R(\Psi^{-1}(z),E(x,y))$. Como Ψ es una isometría, $E(x,y) = d_R(0,\Psi^{-1}(z))+d_R(\Psi^{-1}(z),E(x,y)) = E(x,z)+E(z,y)$. □

Teorema 3.1.13. Sea (X,E) un continuo con una métrica convexa E. Entonces para toda $a \in X$ y $\varepsilon{>}0$, $\overline{B_\varepsilon(a)} = C_\varepsilon(a)$ donde $C_\varepsilon(a)$ se definió en la Definición 1.2.4.

Demostración. Demostraremos por doble contención.

$\supseteq$ Sea $y \in C_\varepsilon(a)$. Entonces $E(a,y) \leqslant \varepsilon$. Si $E(a,y) < \varepsilon$, entonces $y \in B_\varepsilon(a) \subseteq \overline{B_\varepsilon(a)}$. Si $E(a,y) = \varepsilon$, entonces, por hipótesis, existe una isometría $\Psi : ([0,E(a,y)],d_R) \to (X,E)$ tal que $\Psi(0) = a$ y $\Psi(E(a,y)) = y$. Tomemos $x \in \Psi([0,E(a,y)]) \setminus \{y\}$. Por el Lema 3.1.12, $E(a,x) + E(x,y) = E(a,y)$, entonces $E(a,x) = \varepsilon - E(x,y) < \varepsilon$. Así, $\Psi([0,1]) \setminus \{y\} \subseteq B_\varepsilon(a)$.

Como Ψ es continua, $\Psi([0,E(a,y)]) = \Psi(\overline{[0,E(a,y))}) \subseteq \overline{\Psi([0,E(a,y)))} = \overline{\Psi([0,1]) \setminus \{y\}} \subseteq \overline{B_\varepsilon(a)}$.

$\subseteq$ Sea $y \in \overline{B_\varepsilon(a)}$. Entonces existe $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $B_\varepsilon(a)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Como E es continua, $\lim\limits_{n\to\infty} E(y_n,a) = E(y,a)$. Además, como para toda $n \in \mathbb{N}$, $E(y_n,a) < \varepsilon$; tenemos que $E(y,a) = \lim\limits_{n\to\infty} E(y_n,a) \leqslant \varepsilon$. Por lo tanto, $y \in C_\varepsilon(a)$.

Concluimos que $\overline{B_\varepsilon(a)} = C_\varepsilon(a)$.

□

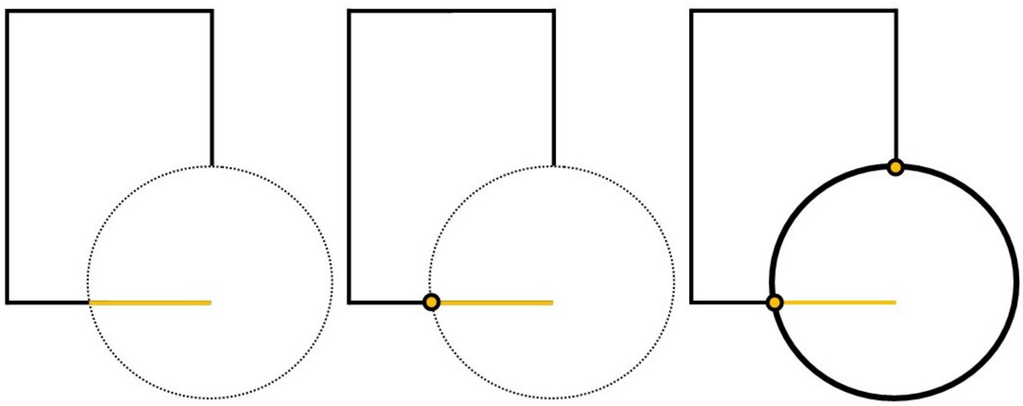

Figura 3.1: La diferencia entre un bola abierta, su cerradura y la bola cerrada.

3.2. La función K

Sea X un espacio topológico. Recordemos que $K(X) = \big\{A \in CL(X) : A \text{ es compacto}\big\}$ donde $CL(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$.

Definición 3.2.1. Sea (X,d) un continuo. Definimos a $K : K(X) \times [0,\infty) \to K(X)$ como sigue:

$$K(A,t) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(x,a) \leqslant t\}.$$

Notemos que $K(A,t) = \bigcup\limits_{a\in A} C_t(a)$. Así, podemos interpretar a $K(A,t)$ como "inflar" a A con un "radio" de tamaño t. También, para toda $A \in K(X)$, $K(A,0) = \bigcup\limits_{a\in A} C_0(a) = \bigcup\limits_{a\in A} \{a\} = A$.

Lema 3.2.2. La función $K : K(X) \times [0,\infty) \to K(X)$ está bien definida.

Demostración. Sea $(A,t) \in K(X) \times [0,\infty)$. Como A es un subconjunto no vacío de $K(A,t)$, $K(A,t) \neq \emptyset$. Para ver que $K(A,t)$ es compacto, basta ver que $K(A,t)$ es un subconjunto cerrado de X.

Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $K(A,t)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$. Notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in A$ tal que $d(r_n, a_n) \leqslant t$. Como A es compacto, existe $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ para alguna $a \in A$. Dicha subsucesión define $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $d(r_{n_k}, a_{n_k}) \leqslant t$. Como d es continua, $\lim\limits_{k\to\infty} d(r_{n_k}, a_{n_k}) = d(r,a)$. Además, $d(r,a) = \lim\limits_{k\to\infty} d(r_{n_k}, a_{n_k}) \leqslant t$. Por lo tanto, $r \in K(A,t)$ y, por el Corolario 1.2.6, $K(A,t)$ es cerrado.

Concluimos que $K(A,t) \in K(X)$; por tanto K está bien definida. □

Observación 3.2.3. *Sea X un continuo. Entonces, para todo $(a,t) \in X \times [0,\infty)$, $C_t(a) = K(\{a\},t)$.*

Lema 3.2.4. Sea (X,E) una dendrita con E una métrica convexa. Entonces para todo $L \in K(X)$ y cualesquiera $t_1, t_2 \geqslant 0$, se tiene que $K(K(L,t_2),t_1) = K(L, t_1 + t_2)$.

Demostración. Consideremos $A = K(K(L,t_2),t_1)$ y $B = K(L,t_1+t_2)$. Procedamos demostrando ambas contenciones.

- $\subseteq$ Sea $a \in A$. Entonces existe $x \in K(L,t_2)$ tal que $E(a,x) \leqslant t_1$ y, como $x \in K(L,t_2)$, existe $q \in L$ tal que $E(x,q) \leqslant t_2$. Como $E(a,q) \leqslant E(a,x) + E(x,q) \leqslant t_1 + t_2$, $a \in B$.

- $\supseteq$ Sea $b \in B$. Entonces existe $q \in L$ tal que $E(b,q) \leqslant t_1 + t_2$. Si $E(b,q) \leqslant t_2$, entonces $b \in K(L,t_2) \subseteq K(K(L,t_2),t_1) = A$. Si $t_2 < E(b,q)$, entonces, por hipótesis, existe una isometría $\Psi : [0, E(q,b)] \to X$ tal que $\Psi(0) = q$ y $\Psi(E(q,b)) = b$. Por el Lema 3.1.11, tenemos que $\Psi([0,E(b,q)]) \approx_i [0,E(b,q)]$. Por lo anterior, existe $x \in \Psi([0,E(b,q)])$ tal que $E(x,q) = t_2$, así que $x \in K(L,t_2)$. Por el Lema 3.1.12, $E(b,q) = E(b,x) + E(x,q)$. Como $E(b,q) \leqslant t_1 + t_2$, tenemos que $E(b,x) \leqslant t_1$. Así, $b \in A$.

Por lo tanto, $A = B$. □

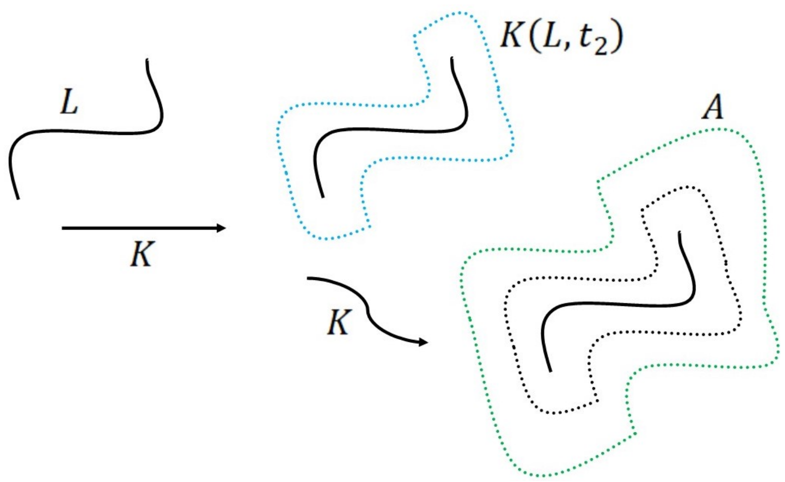

Figura 3.2: Inflar y volver a inflar

Teorema 3.2.5. Sea (X,d) un continuo. Entonces las siguientes son equivalentes:

(1) K es una función continua.

(2) Para cualesquiera $t > 0$ y $a \in X$, $\overline{B_t(a)} = C_t(a)$.

(3) Para cualesquiera $t>0$ y $A \in K(X)$, $K(A,t) = \overline{N_t(A)}$.

Demostración. Demostremos que (1) $\implies$ (2). Sean $a \in X$ y $t>0$. Tomemos $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0,\infty)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$ y, para toda $n \in \mathbb{N}$, $0<t_n<t$. Como K es continua, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} K(\{a\},t_n) = K(\{a\},t)$. Ahora, exhibamos que $C_t(a) = \overline{B_t(a)}$ por doble contención.

$\subseteq$ Por la Observación 3.2.3, $C_t(a) = K(\{a\},t)$. Sea $x \in C_t(a) = \lim\limits_{n\to\infty} K(\{a\},t_n)$. Por el Lema 2.1.17, existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K(\{a\},t_n)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Notemos que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $K(\{a\},t_n) \subseteq B_t(a)$; así que $x_n \in B_t(a)$. Así, por el Teorema 1.2.5, $x \in \overline{B_t(a)}$.

$\supseteq$ Sea $y \in \overline{B_t(a)}$. Por el Teorema 1.2.5, existe $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $B_t(a)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Como d es continua, $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n,a) = d(y,a)$. Además, como para toda $n \in \mathbb{N}$, $d(y_n,a)<t$, tenemos que $d(y,a) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n,a) \leqslant t$. Así, $y \in C_t(a)$.

Por lo tanto, $\overline{B_t(a)} = C_t(a)$.

Ahora, demostremos que (2) $\implies$ (3). Lo haremos por doble contención.

$\subseteq$ Como para toda $a \in A$, $B_t(a) \subseteq N_t(A)$, tenemos que $C_t(a) = \overline{B_t(a)} \subseteq \overline{N_t(A)}$. Dado que $K(A,t) = \bigcup\limits_{a\in A} C_t(a)$, se sigue que $K(A,t) \subseteq \overline{N_t(A)}$.

$\supseteq$ Es claro que $N_t(A) \subseteq K(A,t)$. Por el Lema 3.2.2, $\overline{N_t(A)} \subseteq \overline{K(A,t)} = K(A,t)$.

Por lo tanto, $K(A,t) = \overline{N_t(A)}$.

Finalmente, demostremos que (3) $\implies$ (1). Como X es un continuo, por el Teorema 2.1.16, sabemos que $(CL(X), Viet) = (CL(X), H)$. Además, por la Observación 2.1.2, $K(X) = CL(X)$. Para ver que la preimagen de los subbásicos de $CL(X)$ son subconjuntos abiertos; verifiquemos las siguientes dos afirmaciones:

<u>Afirmación 1</u> Sea U un subconjunto abierto propio de X. Veamos que $K^{-1}(\langle U\rangle) = \{(A,t) \in CL(X) \times [0,\infty) : K(A,t) \subseteq U\}$ es un subconjunto abierto de $K(X) \times [0,\infty)$.

Sea $(A,t) \in K^{-1}(\langle U\rangle)$. Vamos a exhibir un abierto M tal que $(A,t) \in M \subseteq K^{-1}(\langle U\rangle)$. Para ello, analicemos los siguientes casos.

Con el fin de construir dicho abierto, mostremos que no ocurre que $d(A, X\setminus U) \leqslant t$. Supongamos que sí ocurre. Como A y $X\setminus U$ son subconjuntos compactos de X, existen $a \in A$ y $x \in X\setminus U$ tales que $d(A,X\setminus U) = d(a,x)$, lo que nos dice que $x \in K(A,t) \cap (X\setminus U)$; una contradicción. Por lo tanto, $d(A,X\setminus U)>t$.

Consideremos a $s = \frac{d(A,X\setminus U)-t}{3}>0$. Notemos que $d(A,X\setminus U) = 3s+t$. Además, observemos que $B_s^H(A) \times [0,t+s)$ es un subconjunto abierto de $K(X) \times [0,\infty)$ tal que $(A,t) \in B_s^H(A) \times [0,t+s)$.

Sea $(B,r) \in B_s^H(A) \times [0,t+s)$. Supongamos que existe $q \in K(B,r) \cap (X\setminus U)$. Entonces existe $b \in B$ tal que $d(q,b) \leqslant r$ y existe $p \in A$ tal que $d(p,b)<s$. Tenemos que

$$d(A,X\setminus U) \leqslant d(p,q) \leqslant d(p,b)+d(b,q)<s+r<s+t+s = t+2s<d(A,X\setminus U);$$

una contradicción. Por lo tanto, $K(B,r) \subseteq U$. Así, $B_s^H(A) \times [0,t+s) \subseteq K^{-1}(\langle U \rangle)$.

Hemos demostrado que $K^{-1}(\langle U \rangle)$ es un subconjunto abierto de $K(X) \times [0,\infty)$. Esto concluye la prueba de la Afirmación 1.

Afirmación 2 Sea V un abierto de X. Entonces $K^{-1}(\langle X,V \rangle) = \{(A,t) \in CL(X) \times [0,\infty) : K(A,t) \cap V \neq \emptyset\}$ es un subconjunto abierto de $K(X) \times [0,\infty)$.

Sea $(A,t) \in K^{-1}(\langle X,V \rangle)$. Nuevamente, vamos a exhibir un abierto M tal que $(A,t) \in M \subseteq K^{-1}(\langle X,V \rangle)$. Para ello, analicemos los siguientes casos.

Caso 1 $t>0$. Como $K(A,t) \cap V \neq \emptyset$ y $K(A,t) = \overline{N_t(A)}$, podemos tomar $z \in V \cap \overline{N_t(A)}$. Entonces existe $p \in N_t(A) \cap V$. Como $p \in N_t(A)$, existe $a \in A$ tal que $d(p,a)<t$. Dado que $\{p\}$ y A son subconjuntos compactos, existe $x \in A$ tal que $d(p,A) = d(p,x) = r$. Note que $r \leqslant d(p,a)<t$. Definimos $s = \frac{t-r}{2}>0$. Como $2s+r=t$, tenemos que $s+r<t$. Observemos que $B_s^H(A) \times (s+r,\infty)$ es un subconjunto abierto de $K(X) \times [0,\infty)$ tal que $(A,t) \in B_s^H(A) \times (s+r,\infty)$.

Sea $(B,q) \in B_s^H(A) \times (s+r,\infty)$. Como $x \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(x,b)<s$. Entonces $d(b,p) \leqslant d(b,x)+d(x,p)<s+r<q$. Por lo tanto, $p \in N_q(B) \subseteq K(B,q)$; es decir, $p \in V \cap K(B,r)$. Así, $(B,r) \in K^{-1}(\langle X,V \rangle)$.

Concluimos que $B_s^H(A) \times (s+r,\infty) \subseteq K^{-1}(\langle X,V \rangle)$.

Caso 2 $t=0$. Tomemos $z \in V \cap A$. Entonces existe $\varepsilon>0$ tal que $B_\varepsilon(z) \subseteq V$. Observemos que $B_\varepsilon^H(A) \times [0,\infty)$ es un subconjunto abierto de $K(X) \times [0,\infty)$ tal que $(A,t) \in B_\varepsilon^H(A) \times [0,\infty)$.

Sea $(B,q) \in B_\varepsilon^H(A) \times [0,\infty)$. Como $z \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(z,b)<\varepsilon$; es decir, $b \in B_\varepsilon(z)$. Así, $b \in V \cap K(B,q)$. Por lo tanto, $(B,q) \in K^{-1}(\langle X,V \rangle)$. Así, $B_\varepsilon^H(A) \times [0,\infty) \subseteq K^{-1}(\langle X,V \rangle)$.

En ambos casos hemos demostrado que $K^{-1}(\langle X,V \rangle)$ es un subconjunto abierto de $K(X) \times [0,\infty)$. Esto finaliza la prueba de la Afirmación 2.

Por las Afirmaciones 1 y 2 se sigue que K es una función continua. □

Corolario 3.2.6. Si X es un continuo con una métrica convexa, entonces la función K es continua. En particular, K es una función continua cuando X es una dendrita.

Demostración. Por el Teorema 3.1.13, para cualesquiera $a \in X$ y $t>0$, $\overline{B_t(a)} = C_t(a)$. Por ello se satisface 2 del Teorema 3.2.5 y, así, K es continua.

□

Teorema 3.2.7. Sean $(X,\diamondsuit)$ una dendrita y $A \in K(X)$. Entonces:

(1) $K(A,1) = X$;

(2) si $t \in [0,1]$, entonces cada componente conexa de $K(A,t)$ interseca a A;

(3) si $t>0$, entonces $K(A,t)$ tiene un número finito de componentes conexas.

Demostración. Para demostrar (1), notemos que, como diám$(X) = 1$, $K(A,1) = \bigcup_{a \in A} C_1(a) = X$.

Ahora, demostremos (2). Sean D una componente conexa de $K(A,t)$ y $p \in D$. Entonces existe $a \in A$ tal que $\diamondsuit(p,a) \leqslant t$. Por hipótesis existe una isometría $\Psi : [0,\diamondsuit(p,a)] \to X$ tal que $\Psi(0) = p$ y $\Psi(\diamondsuit(p,a)) = a$. Tomemos $z \in \Psi([0,\diamondsuit(p,a)])$. Por el Lema 3.1.12, $\diamondsuit(p,a) = \diamondsuit(p,z) +$

$\diamondsuit(z,a)$. Entonces $\diamondsuit(z,a) \leqslant \diamondsuit(p,a) \leqslant t$. Así, $z \in K(A,t)$; entonces $\Psi([0,\diamondsuit(p,a)]) \subseteq K(A,t)$. Además, $\Psi([0,\diamondsuit(p,a)]) \cap D \neq \emptyset$. Como $\Psi([0,\diamondsuit(p,a)])$ es un subconjunto conexo de $K(A,t)$, $\Psi([0,\diamondsuit(p,a)]) \subseteq D$. Por lo tanto, $D \cap A \neq \emptyset$.

Finalmente, probemos (3). Sea D una componente conexa de $K(A,t)$. Por (2), existe $a \in A \cap D$. Dado que A es compacto, existen $r \in \mathbb{N}$ y $a_1,...,a_r \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B_t(a_i)$; entonces existe $j \in \{1,...,r\}$ tal que $a \in B_t(a_j)$. Por el Lema 3.1.10, para cada $i \in \{1,\ldots,r\}$, $B_t(a_i)$ es conexa. Notemos que $B_t(a_j) \subseteq K(A,t)$ y $B_t(a_j) \cap D \neq \emptyset$, entonces $B_t(a_j) \subseteq D$ y, así, $a_j \in D$.

Mostramos que cada componente conexa de $K(A,t)$ tiene un punto a_j. Como $\{a_1,\ldots,a_r\}$ es un conjunto finito, $K(A,t)$ tiene una cantidad finita de componentes conexas. $\square$

3.3. La función puerta

Observación 3.3.1. *Sea (X,E) una dendrita con E una métrica convexa. Entonces para cualesquiera $p,q \in X$ se tiene que $pq = \Psi([0,E(p,q)])$ donde Ψ es una isometría que existe tal $\Psi(0) = p$ y $\Psi(E(p,q)) = q$. Lo anterior se debe al Corolario 3.0.7.*

Teorema 3.3.2. Sean $(X,\diamondsuit)$ una dendrita, A un subcontinuo de X y $p \in X$. Entonces existe un punto $\sigma(p,A) \in A$ tal que:

(1) $p\sigma(p,A) \cap A = \{\sigma(p,A)\}$,

(2) si $q \in A$, entonces $\sigma(p,A) \in pq$,

(3) $\diamondsuit(p,\sigma(p,A)) = \text{mín}\{\diamondsuit(p,a) : a \in A\}$.

Demostración. Sea $a \in A$. Tomemos $\alpha : [0,1] \to pa$ una función continua tal que si $p \neq a$, entonces α es un homeomorfismo tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = a$ y, si $p = a$, entonces α es la función constante que sólo toma el valor p. Ahora, como $1 \in \alpha^{-1}(A)$ y $\alpha^{-1}(A)$ es un subconjunto cerrado de $[0,1]$, existe $t_0 = \text{mín}\,\alpha^{-1}(A)$. Definimos $\sigma(p,A) = \alpha(t_0)$. Note que $\sigma(p,A) \in A$.

Primero demostraremos (1) y (2) para los siguientes dos casos.

<u>Caso 1</u> $t_0 = 0$. Entonces $p = \alpha(t_0) = \sigma(p,A)$. Así, $p\sigma(p,A) \cap A = \{p\} \cap A = \{p\}$; es decir, se satisface (1). Además, si $q \in A$, entonces $\sigma(p,A) \in pq$. Por lo anterior, se satisface (2).

<u>Caso 2</u> $t_0>0$. Entonces $\alpha([0,t_0])$ es un arco con extremos p y $\sigma(p,A)$; es decir, $p\sigma(p,A) = \alpha([0,t_0])$. Por lo anterior, $p\sigma(p,A) \cap A = \alpha([0,t_0]) \cap A = \{\alpha(t_0)\}$; es decir, se satisface (1).

Ahora, demostremos (2). Sea $q \in A$. Como X es una dendrita y los conjuntos pq y $p\sigma(p,A) \cup A$ son subcontinuos de X, tenemos que $pq \cap (p\sigma(p,A) \cup A)$ es un subcontinuo del arco pq que contiene a p y q. Por lo anterior, $pq \cap (p\sigma(p,A) \cup A) = pq$.

Dado que $pq \cap p\sigma(p,A)$ y $pq \cap A$ son dos cerrados no vacíos cuya unión es pq y pq es un subconjunto conexo, tenemos que

$$\emptyset \neq (pq \cap p\sigma(p,A)) \cap (pq \cap A) = pq \cap p\sigma(p,A) \cap A = pq \cap \{\sigma(p,A)\}.$$

Por lo tanto, $\sigma(p,A) \in pq$; es decir, se satisface (2).

Finalmente, sin importar el valor de t_0, probemos (3). Sea $a \in A$. Entonces existe una isometría $\Psi : [0, \diamondsuit(p,a)] \to X$ tal que $\Psi(0) = p$ y $\Psi(\diamondsuit(p,a)) = a$. Por la Observación 3.3.1, $\Psi([0, \diamondsuit(p,a)]) = pa$. Por (2), $\sigma(p,A) \in pa$. Entonces existe $s_0 \in [0, \diamondsuit(p,a)]$ tal que $\Psi(s_0) = \sigma(p,A)$. Como Ψ es una isometría, $\diamondsuit(p, \sigma(p,A)) = s_0 \leqslant \diamondsuit(p,a)$. Lo anterior nos dice que $\diamondsuit(p, \sigma(p,A)) = \text{mín}\{\diamondsuit(p,a) : a \in A\} = \diamondsuit(p,A)$.

Por lo tanto, se satisface (3). □

Observación 3.3.3. *El punto $\sigma(p,A)$ es único. De existir otro punto a_0 distinto en A, que satisfaga (1), (2) y (3) del Teorema 3.3.2, entonces habría dos subcontinuos cuya intersección es disconexa (a saber, A y $p\sigma(p,A) \cup pa_0$).*

Teorema 3.3.4. Sean $(X, \diamondsuit)$ una dendrita, A un subcontinuo de X y $p \in X$. Entonces la función $\sigma_A : X \to A$ definida como $\sigma_A(p) = \sigma(p,A)$, es continua.

Demostración. La función $f : X \to [0,1]$ definida como $f(p) = \diamondsuit(p,A)$ es continua (ver [4, Theorem 4.1.10, p.254]). Por (3) del Teorema 3.3.2, $\diamondsuit(p,A) = \diamondsuit(p, \sigma(p,A))$. Por la Observación 3.3.3, dicha distancia únicamente se alcanza en $\sigma(p,A)$.

Por el Lema 1.2.8, podemos demostrar la continuidad de σ_A mediante subsucesiones. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Consideremos la sucesión $\{\sigma_A(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Como A es compacto, existe una subsucesión $\{\sigma_A(x_{n_m})\}_{m=1}^{\infty}$ de $\{\sigma_A(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ que cumple que $\lim_{m\to\infty} \sigma_A(x_{n_m}) = a$ para algún $a \in A$. Lo anterior también define una subsucesión $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como f es continua, $\lim_{m\to\infty} f(x_{n_m}) = f(\lim_{m\to\infty} x_{n_m}) = \diamondsuit(\lim_{m\to\infty} x_{n_m}, A) = \diamondsuit(x,A)$. Pero $\lim_{m\to\infty} f(x_{n_m}) = \lim_{m\to\infty} \diamondsuit(x_{n_m}, A) = \lim_{m\to\infty} \diamondsuit(x_{n_m}, \sigma_A(x_{n_m})) = \diamondsuit(x,a)$. Así, $\diamondsuit(x,a) = \diamondsuit(x,A) = \diamondsuit(x, \sigma_A(x))$. Por la unicidad de $\sigma_A(x)$, tenemos que $\sigma_A(x) = a$. Por lo tanto, $\lim_{m\to\infty} \sigma_A(x_{n_m}) = \sigma_A(x)$. Por lo tanto, σ_A es una función continua. □

Definición 3.3.5. Sean $(X, \diamondsuit)$ una dendrita, A un subcontinuo de X y $p \in X$. A σ_A le llamaremos *la función puerta de A*. Al punto $\sigma(p,A)$, le llamaremos *la puerta de A para p*.

Notemos que dado $p \in X$ y $A \in KC(X)$, el punto $\sigma(p,A)$ se puede pensar como aquel punto por el cual se debe "pasar" forzosamente si se quiere llegar desde p a cualquier otro punto de A. Como si de una puerta se tratase, de ahí el nombre para $\sigma(p,A)$.

A partir de aquí, **fijaremos un punto $p_0 \in X$. Dicho punto será fijo por lo que resta de este trabajo.**

Lema 3.3.6. Sea $(X, \diamondsuit)$ una dendrita. Si $(S,t) \in S_c(X) \times (0,1]$ y $p, p_0 \in X$, entonces para cada componente conexa D de $K(S,t) \cap p_0p$ existe un subconjunto finito J de S tal que $D = K(J,t) \cap p_0p$.

Demostración. Si $K(S,t) \cap p_0p = \emptyset$, entonces todo se sigue por vacuidad. Si $K(S,t) \cap p_0p \neq \emptyset$, entonces, dada D una componente conexa de $K(S,t) \cap p_0p$, definimos a $R = \{q \in S : K(\{q\},t) \cap D \neq \emptyset\}$. Veamos que R es no vacío. Sea $j \in D$, como $D \subseteq K(S,t) \cap p_0p \subseteq K(S,t)$ existe $y \in S$ tal que $\diamondsuit(j,y) \leqslant t$. Por ello, $j \in K(\{y\},t) \cap D$; así que $y \in R$.

Afirmación 1 $K(R,t) \cap p_0p = D$.

Sea $q \in R$. Como $D \subseteq p_0q$, tenemos que $K(\{q\},t) \cap p_0p \neq \emptyset$. Por la Observación 3.2.3, $K(\{q\},t)$ es un subcontinuo de X. Como X es una dendrita, $K(\{q\},t) \cap p_0p$ es conexo. Ya que $K(\{q\},t) \subseteq K(S,t)$, tenemos que $K(\{q\},t) \cap p_0p \subseteq K(S,t) \cap p_0p$. Por definición, $\emptyset \neq K(\{q\},t) \cap D = K(\{q\},t) \cap D \cap p_0p$. Por tanto $K(\{q\},t) \cap p_0p$ es conexo, está contenido en $K(S,t)\cap p_0p$ e intersecta a la componente conexa D. De modo que $K(\{q\},t)\cap p_0p \subseteq D$. Eso prueba que $K(R,t)\cap p_0p \subseteq D$.

Dada $x\in D\subseteq K(S,t)\cap p_0p$, existe $q\in S$ tal que $x\in K(\{q\},t)\cap p_0p$. De modo que $q\in R$ y $x\in K(R,t)\cap p_0p$. Por tanto $D\subseteq K(R,t)\cap p_0p$. Esto termina la prueba de la Afirmación 1.

En el caso en que R sea finito, la prueba del Lema termina haciendo $J=R$. Supongamos que R es infinito.

Afirmación 2 R es un subconjunto compacto de S.

Sea $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en R tal que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w_0$ con $w_0\in X$. Demostremos que $w_0\in R$. Por (1) del Teorema 3.2.7, $\lim\limits_{n\to\infty} K(\{w_n\},t)=K(\{w_0\},t)$. Supongamos que $K(\{w_0\},t)\cap D=\emptyset$. Entonces $K(\{w_0\},t)\in\langle X\setminus D\rangle$. Como D es compacto, $\langle X\setminus D\rangle$ es abierto en $K(X)$. De manera que existe $N\in N$ tal que $K(\{w_n\},t)\in\langle X\setminus D\rangle$ para toda $n\geqslant N$. En particular $K(\{w_N\},t)\in\langle X\setminus D\rangle$; así que $K(\{w_N\},t)\subseteq X\setminus D$, lo cual es una contradicción. Por tanto $K(\{w_0\},t)\cap D\neq\emptyset$ y $w_0\in R$. Por el Corolario 1.2.6, R es cerrado. Como X es compacto, R es compacto. Esto concluye la prueba de la Afirmación 2.

Con el fin de no saturar la notación, consideremos la función $g:R\to D$ definida como $g=\sigma_{D|_R}$. Por el Teorema 3.3.4, g es continua.

Dada $x\in Im(g)$, por la Afirmación 2, $g^{-1}(\{x\})$ es compacto; así que podemos elegir un punto $\mathbf{h(x)}\in\mathbf{g^{-1}}(\{\mathbf{x}\})$ tal que $\diamondsuit(x,h(x))=\diamondsuit(x,g^{-1}(\{x\}))=\text{mín}\{\diamondsuit(x,q):q\in g^{-1}(\{x\})\}$ (podemos pensar a $h(x)$ como uno de los “primeros usuarios” de la puerta $\sigma(x,D)$). Esta asignación define una función $h:Im(g)\to R$. Notemos que $g(h(x))=x$. Esto implica que h es inyectiva.

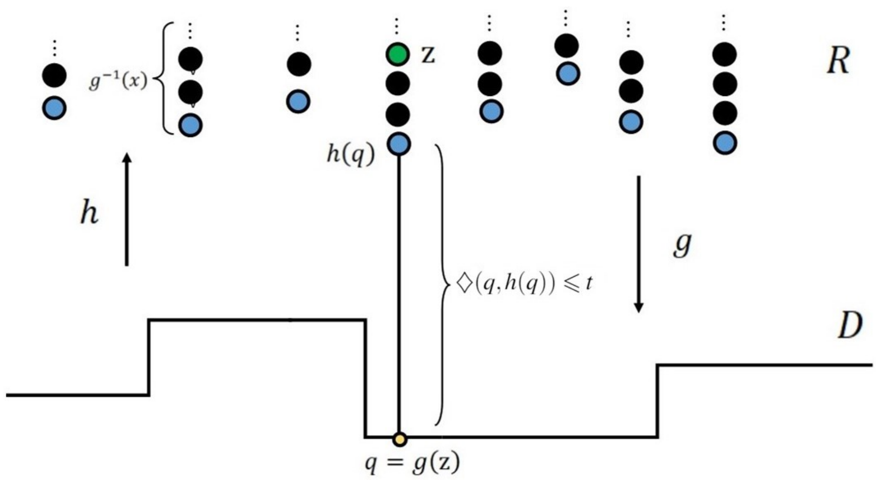

Figura 3.3: Para ilustrar mejor la idea

Afirmación 3 Para cada $x\in Im(g)$, $K(\{h(x)\},t)\cap p_0p=K(g^{-1}(\{x\}),t)\cap p_0p$. Esta igualdad es la que nos permite reducir el número de puntos necesarios para obtener $K(R,t)\cap p_0p$.

$\supseteq$ Sea $y\in K(g^{-1}(\{x\}),t)\cap p_0p$. Entonces existe $q\in g^{-1}(\{x\})$ tal que $\diamondsuit(y,q)\leqslant t$. Así, $y\in K(\{q\},t)\cap p_0p$. Como $q\in R$ tenemos, por la Afirmación 1, que $y\in D$.
Como $q\in g^{-1}(\{x\})$, $g(h(x))=x=g(q)$. Por (2) del Teorema 3.3.2, $x\in h(x)y\cap qy$. Por el Lema 3.1.12, $\diamondsuit(h(x),y)=\diamondsuit(h(x),x)+\diamondsuit(x,y)\leqslant\diamondsuit(q,x)+\diamondsuit(x,y)=\diamondsuit(q,y)\leqslant t$. Por lo tanto, $y\in K(\{h(x)\},t)\cap p_0p$.

$\subseteq$ Como $\{h(x)\} \subseteq g^{-1}(x)$, tenemos que $K(\{h(x)\},t) \subseteq K(g^{-1}(x),t)$. Por lo anterior, pasa que $K(\{h(x)\},t) \cap p_0p \subseteq K(g^{-1}(x),t) \cap p_0p$.

Por lo tanto, son iguales. Así, terminamos la prueba de la Afirmación 3.

Afirmación 4 Si $Im(h)$ es un subconjunto cerrado de R, entonces $K(R,t) \cap p_0p = K(Im(h),t) \cap p_0p$.

Por la Afirmación 3, $\bigcup\{K(\{h(x)\},t) \cap p_0p : x \in Im(g)\} = \bigcup\{K(g^{-1}(\{x\}),t) \cap p_0p : x \in Im(g)\}$. No es difícil notar que $R = \bigcup\{g^{-1}(x) : x \in Im(g)\}$; así que $K(R,t) \cap p_0p = \bigcup\{K(g^{-1}(\{x\}),t) \cap p_0p : x \in Im(g)\} = \bigcup\{K(\{h(x)\},t) \cap p_0p : x \in Im(g)\} = K(Im(h),t) \cap p_0p$. Esto concluye la prueba de la Afirmación 4.

Si $Im(h)$ es finito, entonces es un conjunto cerrado. Hacemos $J = Im(h)$. Y, por las Afirmaciones 3 y 1, $D = K(J,t) \cap p_0p$. En este caso terminamos la prueba del Lema.

Si $Im(h)$ es un conjunto infinito, entonces R es un subconjunto compacto e infinito de S (Afirmación 2); así que tiene que tener un punto de acumulación que no puede ser otro que el límite de S. Denotemos $s_0 = \text{lím} S$ y $q_0 = g(s_0)$. Además, como el dominio de h es $Im(g)$, tenemos que $Im(g)$ es un conjunto infinito; a saber, $Im(g) = \{q_0, q_1, q_2, ...\}$ donde $q_j \neq q_i$ si y sólo si $i \neq j$. Como h es inyectiva, tenemos que $\mathbf{h(q_j)} \neq \mathbf{h(q_i)}$. Notemos que $Im(h) = \{h(q_0), h(q_1), h(q_2), ...\}$. Ya que $Im(h)$ es un subconjunto infinito de S, $\lim\limits_{\mathbf{n\to\infty}} \mathbf{h(q_n)} = \mathbf{s_0}$. Ahora, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \lim\limits_{n\to\infty} g(h(q_n)) = g(\lim\limits_{n\to\infty} h(q_n)) = g(s_0) = q_0$.

Para mostrar que $s_0 \in D$, supongamos que $s_0 \notin D$. Definimos $M = C_w(s_0)$ donde $w = \frac{\diamondsuit(s_0,D)}{2} > 0$. Notemos que M es un subcontinuo de X y que $M \cap D = \emptyset$. Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} h(q_n) = s_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N$, entonces $h(q_n) \in B_w(s_0)$. Por el Lema 3.0.8, $h(q_n)s_0 \subseteq M$. Como $s_0g(s_0)$ es el arco que va de s_0 a su puerta $g(s_0)$, tenemos que $(M \cup s_0g(s_0)) \cap D = \{g(s_0)\}$. Así, para toda $n \geqslant N$, sucede que $h(q_n)g(s_0) \subseteq h(q_n)s_0 \cup s_0g(s_0)$. Además, $h(q_n)g(s_0) \cap D = \{g(s_0)\}$ implica que $q_0 = g(s_0) = g(h(q_n)) = q_n$. Esto contradice la elección de los puntos q_n. Por lo tanto, $s_0 \in D$; así que $g(s_0) = s_0$ (la puerta es él mismo). Entonces $s_0 = h(g(s_0)) = h(s_0)$. De manera que $s_0 \in Im(h)$. Por tanto $Im(h)$ es un subconjunto de S que tiene a s_0. Entonces $Im(h)$ es cerrado.

En particular $s_0 = q_0$, así que $h(s_0) = h(q_0)$.

Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como $g(h(q_n)) = q_n$ y $q_n \in p_0p$, tenemos que la puerta por la que $h(q_n)$ entra a p_0p es q_n. Ya que $K(\{h(q_n)\},t)$ es un subcontinuo de X, $K(\{h(q_n)\},t) \cap p_0p$ es un subcontinuo, de hecho, un subarco, de p_0p. Supongamos que los extremos de este arco son a_n y b_n, con a_n más cercano a p_0 y b_n a p (ver figura 3.4). Podemos decir aún más, por el Lema 3.1.11, $\Psi([0, \diamondsuit(p_0,p)]) \approx_i [0, \diamondsuit(p_0,p)]$ donde $\Psi : [0, \diamondsuit(p_0,p)] \to X$ es una isometría tal que $\Psi(0) = p_0$ y $\Psi(\diamondsuit(p_0,p)) = p$. Como para toda $n \in N$, $q_n \in p_0p$, definimos $Q_n = \Psi^{-1}(q_n)$. Definimos

$$A_n = \text{máx}\{0, Q_n - (t - \diamondsuit(h(q_n),q_n))\} \text{ y}$$
$$B_n = \text{mín}\{\diamondsuit(p_0,p), Q_n + (t - \diamondsuit(h(q_n),q_n))\}.$$

También, $a_n = \Psi(A_n)$ y $b_n = \Psi(B_n)$.

Por construcción,

$$\diamondsuit(p_0,a_n) = \diamondsuit(p_0, K(\{h(q_n)\},t) \cap p_0p) \text{ y } \diamondsuit(p,b_n) = \diamondsuit(p, K(\{h(q_n)\},t) \cap p_0p).$$

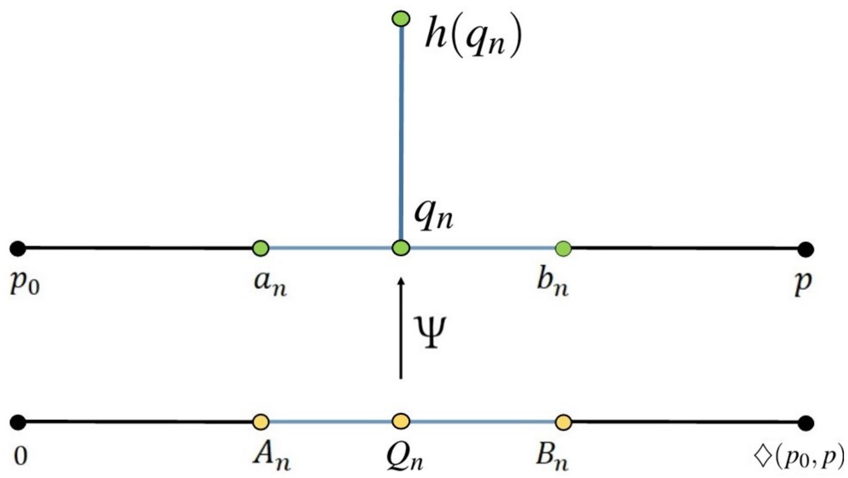

Figura 3.4: En este caso, $A_n \neq 0$ y $B_n \neq \diamondsuit(p_0,p)$

Afirmación 5 Para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\Psi([A_n,B_n]) = K(\{h(q_n)\},t) \cap p_0p$.

$\subseteq$ Como $A_n \leqslant Q_n \leqslant B_n$, tenemos que $a_nb_n = a_nq_n \cup q_nb_n$. Dado que $K(\{h(q_n)\},t) \cap p_0p \in KC(X)$ tenemos, por el Lema 3.0.8, que $a_nq_n \subseteq K(\{h(q_n)\},t) \cap p_0p$ y $q_nb_n \subseteq K(\{h(q_n)\},t) \cap p_0p$. Por lo tanto, $\Psi([A_n,B_n]) \subseteq K(\{h(q_n)\},t) \cap p_0p$.

$\supseteq$ Sea $y \in K(\{h(q_n)\},t) \cap p_0p$. Por definición de a_n, $d(p_0,a_n) \leqslant d(p_0,y)$. Como Ψ es una isometría, $d_R(0,A_n) \leqslant d_R(0,Y)$ donde $\Psi(Y) = y$. Por lo anterior, $A_n \leqslant Y$. Similarmente tenemos que $Y \leqslant B_n$. Por lo anterior $Y \in [A_n,B_n]$. Así, $y \in \Psi([A_n,B_n])$; esto es, $K(\{h(q_n)\},t) \cap p_0p \subseteq \Psi([A_n,B_n])$.

Por lo tanto, son conjuntos iguales. Esto concluye la prueba de la Afirmación 5.

Afirmación 6 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Primero demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$. Dada la isometría Ψ, basta con probar que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A_0$ para los siguientes casos.

Caso 1 Para toda $n \in N$, $A_n = Q_n - (t - \diamondsuit(h(q_n),q_n))$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \lim\limits_{n\to\infty} h(q_n) = q_0$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = Q_0$. Así, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} (Q_n - (t - \diamondsuit(q_n,h(q_n)))) = Q_0 - t$. Si $A_0 = Q_0 - t$, terminamos. Si no, entonces $A_0 = 0$. Como para toda $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant A_n$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} 0 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} Q_n - (t - \diamondsuit(h(q_n),q_n))$; es decir, $0 \leqslant Q_0 - t \leqslant A_0$. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0 = A_0$.

Caso 2 Para toda $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 0$. Entonces $Q_n - (t - \diamondsuit(h(q_n),q_n)) \leqslant 0$. Ahora, como $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \lim\limits_{n\to\infty} h(q_n) = q_0$, tenemos $Q_0 - t \leqslant 0$. Como $A_0 = \max\{0, Q_0 - t\}$, tenemos que $A_0 = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Caso 3 Existen dos subsucesiones de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$: una constante de valor 0 y la otra con términos igual a $Q_n - (t - \diamondsuit(h(q_n),q_n)$. En este caso, como ambas subsucesiones conforman a la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y porque los límites de ambas subsucesiones son el mismo, sucede que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A_0$.

Similarmente se prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_0$. Esto concluye la prueba de la Afirmación 6.

Dado que $K(Im(h),t)\cap p_0p=\bigcup\{K(\{h(q_n)\},t)\cap p_0p : n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$, por las Afirmaciones 1 y 4, $D=\bigcup\{K(\{h(q_n)\},t)\cap p_0p : n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$. Notemos que $a_nb_n=\Psi([A_n,B_n])$. Por la Afirmación 5, $D=\bigcup\{a_nb_n : n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} q_n=q_0$, existe $N_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geqslant N_0$, entonces $q_n\in[a_0,b_0]$.

Probemos la existencia de $n_1,n_2,N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ tales que $N\geqslant N_0$ y, para cada $n\geqslant N$, $a_n,b_n\subseteq a_{n_1},b_{n_1}\cup a_0,b_0\cup a_{n_2},b_{n_2}$.

Si existe $n_1\geqslant N_0$ tal que $0\leqslant a_{n_1}<a_0$, entonces, como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a_0$, existe $N_a\in\mathbb{N}$ tal que $N_a\geqslant N_0$ y, si $n\geqslant N_a$, entonces $a_{n_1}\leqslant a_n$. Si para toda $n\in\mathbb{N}$, $a_0\leqslant a_n$, definimos $n_1=0$ y $N_a=N_0$.

Hemos demostrado la existencia de $N_a\geqslant N_0$ y $n_1\in\mathbb{N}$ tales que si $n\geqslant N_a$, entonces $a_{n_1}\leqslant a_n$. Además, debido a que $n_1\geqslant N_0$, se tiene $q_{n_1}\in a_0b_0$. Así, $a_0\leqslant b_{n_1}$.

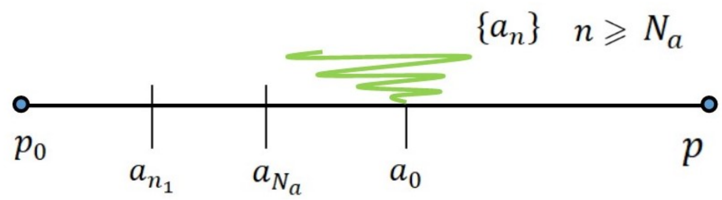

Figura 3.5: La interpretación de los índices n_1 y N_a.

Análogamente, existen $N_b\geqslant N_0$ y $n_2\in\mathbb{N}$ tales que si $n\geqslant N_b$ entonces $b_n\leqslant b_{n_2}$. Además, debido a que $n_2\geqslant N_0$, se tiene que $q_{n_2}\in a_0b_0$. Así, $a_{n_2}\leqslant b_0$.

Una vez construidos dichos índices, tenemos un caso donde $B_{n_1}<A_{n_2}$. Esto dejaría un segmento de $a_{n_1}b_{n_2}$ sin cubrir. Por ello debemos unir el segmento a_0b_0. En cualquier otro caso, podemos prescindir del segmento a_0b_0.

La construcción anterior nos garantiza que $a_{n_1}b_{n_2}=a_{n_1}b_{n_1}\cup a_0b_0\cup a_{n_2}b_{n_2}$. Definimos $N=\text{máx}\{N_a,N_b\}$. Si $n\geqslant N$, entonces $a_nb_n\subseteq a_{n_1}b_{n_1}\cup a_0b_0\cup a_{n_2}b_{n_2}$.

Definimos a $L=\{0,1,2,...,N\}\cup\{n_1,n_2\}$ y hacemos $J=\{h(q_n) : n\in L\}$. Entonces

$$D=\bigcup\{a_nb_n : n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}=\bigcup\{a_nb_n : n\in L\}=\bigcup\{K(\{h(q_n)\},t)\cap p_0p : n\in L\}= K(J,t)\cap p_0p.$$

□

Definición 3.3.7. Dado A un subconjunto cerrado de $(\mathbb{R},d_R)$ con m componentes conexas $C_1,...,C_m$ definimos a

$$\lambda(A)=\sum_{i=1}^{m}\text{diám}(C_i).$$

Lema 3.3.8. Sean $e>0$, $\delta>0$ y $A,B\in K([0,e])$ tales que A tiene m componentes conexas $C_1,...,C_m$, y B tiene k componentes conexas $D_1,...,D_k$; además $H(A,B)<\delta$ y $d_R(C_i,C_j)\geqslant 4\delta$ si $i\neq j$ donde d_R es la métrica usual de $\mathbb{R}$ y H es la métrica de Hausdorff. Entonces $|\lambda(A)-\lambda(B)|<4k\delta$.

Demostración. Sean $A,B\in K([0,e])$ como se indicaron. Entonces para toda $i\in\{1,...,m\}$ definimos $C_i=[a_i,b_i]$ con $a_i,b_i\in[0,e]$. Supongamos que $a_1<a_2<\ldots<a_m$. Como $d_R(C_i,C_{i+1})=d_R(b_i,a_{i+1})\geqslant 4\delta$, tenemos que $b_i+4\delta\leqslant a_{i+1}$. Así, $(a_1-\delta,b_1+\delta),...,(a_m-\delta,b_m+\delta)$ son m conjuntos ajenos dos a dos.

Demostremos que $\bigcup\limits_{a\in A}B_\delta(a)=\bigcup\limits_{i=1}^{m}(a_i-\delta,b_i+\delta)$.

$\subseteq$ Sea $y \in \bigcup\limits_{a\in A} B_\delta(a)$. Entonces existe $x \in A$ tal que $y \in B_\delta(x)$. Como $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} C_i$, existe $j \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $x \in [a_j, b_j]$. Por lo tanto, $B_\delta(x) \subseteq (a_j - \delta, b_j + \delta) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} (a_i - \delta, b_i + \delta)$.

$\supseteq$ Sea $z \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} (a_i - \delta, b_i + \delta)$. Entonces existe $j \in \{1,...,m\}$ tal que $z \in (a_j - \delta, b_j + \delta)$. Así, $a_j - \delta < z$ y $z < b_j + \delta$. Ahora, analicemos los siguientes casos.

Caso 1 $z - \delta < a_j$ o $b_j < z + \delta$. Si $z - \delta < a_j$, entonces $a_j - \delta < z < a_j + \delta$; es decir, $z \in B_\delta(a_j) \subseteq \bigcup\limits_{a\in A} B_\delta(a)$. Análogamente se ve que si $b_j < z + \delta$, entonces $z \in B_\delta(b_j)$.

Caso 2 $z - \delta \geqslant a_j$ y $b_j \geqslant z + \delta$. Entonces, $z \in B_\delta(z) \subseteq [a_j, b_j]$. Así $z \in \bigcup\limits_{a\in A} B_\delta(a)$.

En ambos casos, concluimos que $z \in \bigcup\limits_{a\in A} B_\delta(a)$. Por lo tanto, ambos conjuntos son iguales.

Por hipótesis, $B \subseteq N_\delta(A) = \bigcup\limits_{a\in A} B_\delta(a) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} (a_i - \delta, b_i + \delta)$, y como $A \subseteq N_\delta(B)$, todo conjunto de la forma $(a_i - \delta, b_i + \delta)$ intersecta a B. De manera que B tiene al menos m componentes conexas. De manera que $m \leqslant k$. Así, dado $i \in \{1,...,m\}$ sean $\{D_1^i, ..., D_{r(i)}^i\} \subseteq (a_i - \delta, b_i + \delta)$ las componentes conexas de B contenidas en $(a_i - \delta, b_i + \delta)$ donde para toda $j \in \{1,...,r(i)\}$, $\mathbf{D_j^i} = [\mathbf{c_j^i}, \mathbf{e_j^i}]$. Podemos suponer que $c_1^i < c_2^i < \ldots < c_{r(i)}^i$.

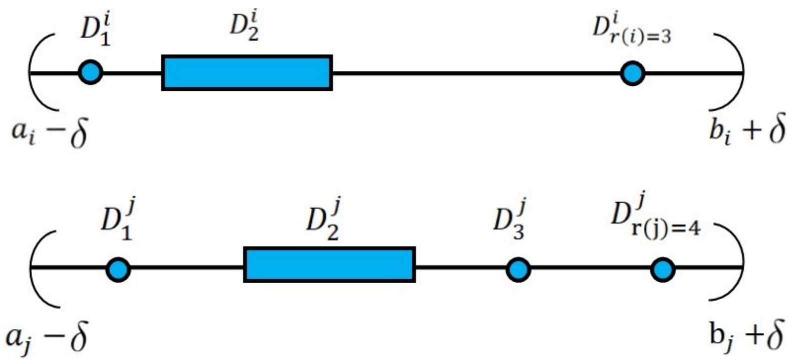

Figura 3.6: Las distintas componentes de B.

Sean $i \in \{1,\ldots,m\}$ y $1 \leqslant j < r(i)$. Si ocurre que $e_j^i + \delta < c_{j+1}^i - \delta$, elegimos $u \in (e_j^i + \delta, c_{j+1}^i - \delta)$. Notemos que, para ninguna $n \in \{1,\ldots,m\}$, puede suceder que $c_{r(n)}^n = e_{r(n)}^n = b_n + \delta$. Por ello, $c_{j+1}^i < b_i + \delta$; es decir, $u < c_{j+1}^i - \delta < b_i$. Análogamente $a_i - \delta < e_j^i$; es decir, $a_i < e_j^i + \delta < u$. Por lo tanto, $u \in (a_i, b_i) \subseteq A$. Notemos que e_j^i y c_{j+1}^i son los puntos de B más cercanos a u. Así, $d_R(u,B) > \delta$. Por lo anterior, $u \notin N_\delta(B)$; en otras palabras, $H(A,B) > \delta$; una contradicción. Por lo tanto, $c_{j+1}^i - \delta \leqslant e_j^i + \delta$.

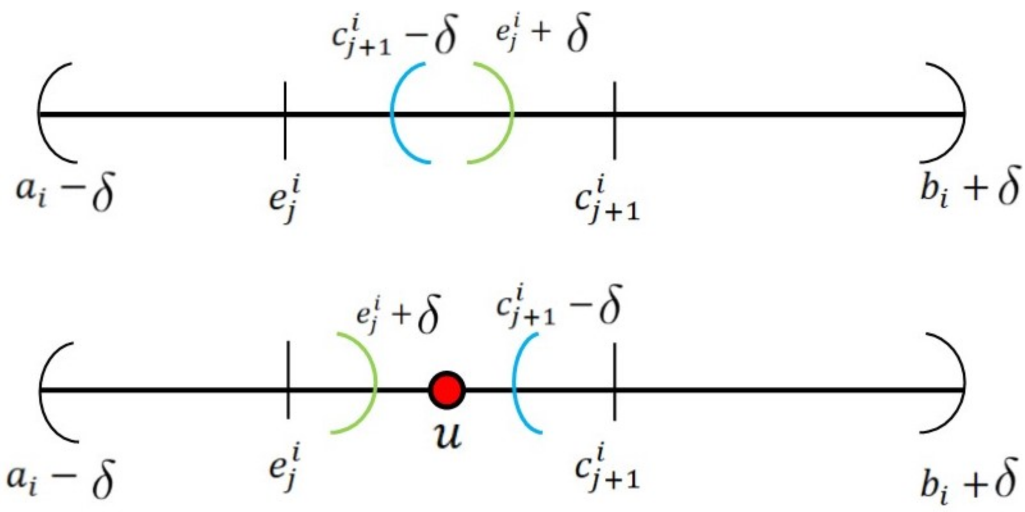

Figura 3.7: El caso verdadero y el falso

Ahora notemos que c^i_1 y $e^i_{r(i)}$ son los puntos de B más cercanos a a_i y b_i respectivamente. Si suponemos que $a_i \leqslant c^i_1 - \delta$, entonces $\delta \leqslant c^i_1 - a_i = d_R(c^i_1, a_i)$. Así, $d_R(c^i_1, a_i) \nless \delta$; es decir, $a_i \notin B_\delta(c^i_1)$. Lo anterior nos dice que $A \nsubseteq N_\delta(B)$; una contradicción. Por lo tanto, $\mathbf{c^i_1} - \delta < \mathbf{a_i}$. Análogamente $\mathbf{b_i} < \mathbf{e^i_{r(i)}} + \delta$ (ya tenemos la certeza de cubrir a A). De esta forma se cumple que

$$c^i_1 - \delta < a_i \leqslant b_i < e^i_{r(i)} + \delta. \tag{3.1}$$

Notemos que $e^i_{r(i)} - c^i_1 \geqslant \sum_{j=1}^{r(i)} (e^i_j - c^i_j) = \sum_{j=1}^{r(i)} \text{diám}(D^i_j)$. Por lo tanto, $\lambda(B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r(i)} (e^i_j - c^i_j) \leqslant \sum_{i=1}^{m} (e^i_{r(i)} - c^i_1)$.

Observemos que para cualesquiera $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, r(i)\}$, $[c^i_j, e^i_j] \subseteq (a_i - \delta, b_i + \delta)$. Así, $a_i - \delta < c^i_j \leqslant e^i_j < b_i + \delta$. Entonces $a_i - \delta < c^i_1 \leqslant e^i_1 \leqslant e^i_2 \leqslant \ldots \leqslant e^i_{r(i)} < b_i + \delta$; es decir, $a_i - \delta < c^i_1 \leqslant e^i_{r(i)} < b_i + \delta$. Por lo tanto, $e^i_{r(i)} - c^i_1 < (b_i + \delta) - (a_i - \delta)$. De esta manera,

$$\sum_{i=1}^{m} (e^i_{r(i)} - c^i_1) < \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i + 2\delta) = \sum_{i=1}^{m} b_i - a_i + \sum_{i=1}^{m} 2\delta = \lambda(A) + 2m\delta \leqslant \lambda(A) + 2k\delta.$$

Por lo tanto, $\lambda(B) \leqslant \lambda(A) + 2k\delta < \lambda(A) + 4k\delta$; así que

$$\lambda(B) - \lambda(A) < 4k\delta. \tag{3.2}$$

Por la desigualdad (3.1),

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^{m} b_i - a_i < \sum_{i=1}^{m} (e^i_{r(i)} + \delta) - (c^i_1 - \delta) = 2m\delta + \sum_{i=1}^{m} (e^i_{r(i)} - c^i_1).$$

Notemos que

$$e^i_{r(i)} - c^i_1 =$$
$$(e^i_{r(i)} - c^i_{r(i)}) + (c^i_{r(i)} - e^i_{r(i)-1}) + (e^i_{r(i)-1} - c^i_{r(i)-1}) + \ldots + (e^i_2 - c^i_2) + (c^i_2 - e^i_1) + (e^i_1 - c^i_1).$$

Para el siguiente paso, recordemos que dados $i \in \{1,...,m\}$ y $j \in \{1,...,r(i)\}$, se tiene que $c^i_{j+1} - e^i_j \leqslant 2\delta$ (ver Figura 3.7). Notemos que $\sum\limits_{i=1}^{m} r(i) = k$. Al ordenar los términos tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda(A) &< 2m\delta + \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{r(i)}(e^i_j - c^i_j) + \sum_{j=1}^{r(i)-1}(c^i_{j+1} - e^i_j)\Big) \\
&= 2m\delta + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r(i)}(e^i_j - c^i_j) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r(i)-1}(c^i_{j+1} - e^i_j) \\
&= 2m\delta + \lambda(B) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r(i)-1}(c^i_{j+1} - e^i_j) \leqslant 2m\delta + \lambda(B) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r(i)-1}(2\delta) \\
&= 2m\delta + \lambda(B) + \sum_{i=1}^{m}(2\delta(r(i)-1)) < 2m\delta + \lambda(B) + \sum_{i=1}^{m}(2\delta r(i)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda(A) < 2m\delta + \lambda(B) + 2\delta k \leqslant \lambda(B) + 4k\delta$; es decir, $\lambda(A) - \lambda(B) < 4k\delta$.

Usando esto último y la desigualdad (3.2) concluimos que $|\lambda(A) - \lambda(B)| < 4k\delta$.

□

3.4. Punto de propagación

Definición 3.4.1. Sean $(S,t) \in S_c(X) \times (0,1]$ y $p_0 \in X$ el punto que fijamos al inicio del capítulo. Entonces por (3) del Teorema 3.2.7, podemos ver a $K(S,t)$ como la unión finita de sus componentes conexas. A saber $K(S,t) = \bigcup\limits_{i=1}^{m(S,t)} D_i(S,t)$.

Definimos $L : S_c(X) \times (0,1] \to F(X) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n(X)$ como

$$L(S,t) = \{\sigma(p_0, D_1(S,t)), ..., \sigma(p_0, D_{m(S,t)}(S,t))\}.$$

La notación $\sigma(p_0, D_1(S,t))$ se definió en la Definición 3.3.5.

Proposición 3.4.2. La función L no necesariamente es continua.

Demostración. Demos un contraejemplo. Sea $(\mathbb{R}^2, W)$ con W la métrica usual de $\mathbb{R}^2$. Definimos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, |x| \leqslant \frac{1}{2}\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\}$. Consideremos a $X = A \cup B$. Notemos que X es un subespacio arcoconexo, localmente conexo y compacto de $\mathbb{R}^2$; es decir, X es un continuo localmente conexo.

Definimos $\diamondsuit : X \times X \to [0,\infty)$ como

$$\diamondsuit(u,v) = \begin{cases} W(u,v), & \text{si} \quad u,v \in A \text{ o } u,v \in B, \\ W(u,\vec{0}) + W(\vec{0},v), & \text{si} \quad (u \in A \text{ y } v \in B) \text{ o } (v \in A \text{ y } u \in B). \end{cases}$$

De las tres propiedades que definen una métrica (ver [3, p.3]) solamente probaremos la desigualdad del triángulo (las otras 2 son claras). Para esto tomemos $u,v,z \in X$. Si $u,v,z \in A$, la desigualdad del triángulo se sigue de que W es una métrica. El caso donde $u,v,z \in B$ se resuelve de manera idéntica. Si $u,v \in A$ y $z \in B$, en este caso $W(u,v) \leqslant W(u,\vec{0}) + W(\vec{0},v)$. Así,

$W(u,v) \leqslant W(u,\vec{0}) + 2W(\vec{0},z) + W(\vec{0},v)$. Por lo anterior, $\diamondsuit(u,v) \leqslant \diamondsuit(u,z) + \diamondsuit(z,v)$. El caso donde $z \in A$ y $u,v \in B$ se resuelve de manera análoga. Si $u \in A, v \in B$ y $z \in A$, entonces, por construcción $W(u,\vec{0}) \leqslant W(u,z) + W(\vec{0},z)$. Por lo anterior, $\diamondsuit(u,v) \leqslant \diamondsuit(u,z) + \diamondsuit(z,v)$. El caso donde $v \in A, u \in B$ y $z \in B$ se resuelve de manera análoga.

Hemos demostrado que $\diamondsuit$ es una métrica.

Por construcción, diám$(X) = 1$. No es dificil ver que X es una dendrita.

Afirmación 1 $\diamondsuit$ es una métrica convexa en X.

Sean $u,v \in X$. Veamos los siguientes casos.

Caso 1 $u,v \in A$ o $u,v \in B$. Si $u,v \in A$, entonces $u = (u_1,0)$ y $v = (v_1,0)$. Proponemos a $z = (\frac{u_1+v_1}{2},0)$ como su punto medio. Notemos que $\diamondsuit(u,z) = \frac{\diamondsuit(u,v)}{2} = \diamondsuit(v,z)$. Si $u,v \in B$, procedemos de manera análoga.

Caso 2 Sin pérdida de generalidad $u = (u_1,0) \in A$ y $v = (0,v_2) \in B$.

Caso 2.1 $|u_1| \leqslant v_2$. Entonces $0 \leqslant v_2 - \left(\frac{v_2+|u_1|}{2}\right)$. Definimos $z = \left(0, v_2 - \left(\frac{v_2+|u_1|}{2}\right)\right)$. Entonces $\diamondsuit(u,z) = W(u,\vec{0}) + W(\vec{0},z) = |u_1| + v_2 - \left(\frac{v_2+|u_1|}{2}\right) = \frac{v_2+|u_1|}{2} = \frac{W(u,\vec{0})+W(\vec{0},v)}{2} = \frac{\diamondsuit(u,v)}{2}$. También, $\diamondsuit(v,z) = W(v,z) = \sqrt{\left(\frac{v_2+|u_1|}{2}\right)^2} = \left|\frac{v_2+|u_1|}{2}\right| = \frac{W(u,\vec{0})+W(\vec{0},v)}{2} = \frac{\diamondsuit(u,v)}{2}$.

Caso 2.2 $|u_1| > v_2$. Entonces $|u_1| - \left(\frac{|u_1|+v_2}{2}\right) > 0$. Si $u_1 \geqslant 0$, entonces definimos $z = \left(u_1 - \left(\frac{|u_1|+v_2}{2}\right), 0\right)$. Entonces $\diamondsuit(u,z) = \sqrt{\left(\frac{|u_1|+v_2}{2}\right)^2} = \left|\frac{|u_1|+v_2}{2}\right| = \frac{W(u,\vec{0})+W(\vec{0},v)}{2} = \frac{\diamondsuit(u,v)}{2}$. También, $\diamondsuit(v,z) = W(v,\vec{0}) + W(\vec{0},z) = v_2 + \left|u_1 - \left(\frac{|u_1|+v_2}{2}\right)\right| = \frac{|u_1|+v_2}{2} = \frac{\diamondsuit(u,v)}{2}$. Similarmente se hace la prueba en el caso en que $u_1 < 0$, considerando $z = \left(u_1 + \left(\frac{|u_1|+v_2}{2}\right), 0\right)$.

Por el Teorema 3.1.6, $\diamondsuit$ es una métrica convexa. Terminamos la prueba de la Afirmación 1.

Definimos $h : \Omega \to A$ como $h(t) = (t - \frac{1}{2}, 0)$ donde Ω se definió en la Definición 3.0.1. Notemos que h está bien definida, es inyectiva y es continua.

Afirmación 2 $Im(h) \in S_c(X)$.

Definimos $M : \Omega \to Im(h)$ como $M(t) = h(t)$. Claramente M es suprayectiva. Así, M es una biyección continua. No es difícil notar que M es una isometría y, con ello, M es un isomorfismo. Por el Teorema 3.1.3, M es abierta. Por lo tanto, $Im(h) \approx_i \Omega$. Así, $Im(h) \in S_c(X)$. Esto concluye la prueba de la Afirmación 2.

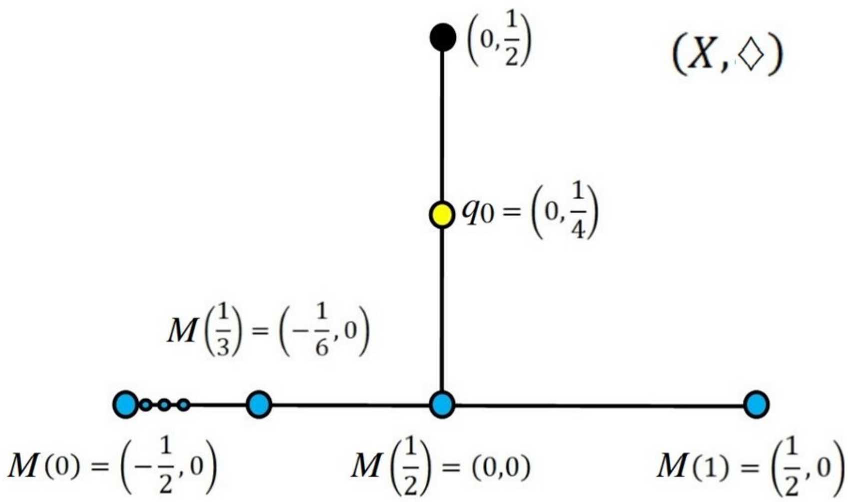

Figura 3.8: El contraejemplo

<u>Afirmación 3</u> La función L no necesariamente es continua.

Fijemos el punto $q_0=(0,\frac{1}{4})$. Para toda $n\in\mathbb{N}$ definimos $t_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{8+n}$. Así, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=\frac{1}{4}=t_0$. Consideremos $Im(h)=S$. Como la función K es continua, $\lim\limits_{n\to\infty} K(S,t_n)=K(S,t_0)$.

Dada $n\in\mathbb{N}$. Definimos $\Lambda_n=B^{\diamondsuit}_{t_n}(M(0))\cup B^{\diamondsuit}_{t_n}(M(\frac{1}{4}))\cup B^{\diamondsuit}_{t_n}(M(\frac{1}{2}))$. Vamos a argumentar que $M(0)M(\frac{1}{2})\subseteq\Lambda_n$. Notemos que $\frac{1}{8}>\frac{1}{8+n}$. Como $\frac{2}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$, si despejamos tenemos que $\frac{1}{4}-\frac{1}{8+n}>\frac{1}{8}$. Así,$\mathbf{\frac{1}{4}>t_n>\frac{1}{8}}$. Por lo tanto, $M(0)M(\frac{1}{2})\subseteq\Lambda_n$.

Hemos cubierto a $M\left([0,\frac{1}{2}]\right)$ con tres abiertos. La construcción que hicimos nos asegura que $\Lambda_n\cap B^{\diamondsuit}_{t_n}(M(1))=\emptyset$ y que $Fr(\Lambda_n)=\{(0,\frac{1}{4}-\frac{1}{8+n}),(\frac{1}{4}-\frac{1}{8+n},0)\}$. Además, $N_{t_n}(S)=\Lambda_n\bigcup B^{\diamondsuit}_{t_n}(M(1))$. Usando el Teorema 3.2.5, tenemos que $K(S,t_n)=\overline{N_{t_n}(S)}=\overline{\Lambda_n\bigcup B^{\diamondsuit}_{t_n}(M(1))}=\overline{\Lambda_n}\bigcup\overline{B^{\diamondsuit}_{t_n}(M(1))}=\overline{\Lambda_n}\bigcup C^{\diamondsuit}_{t_n}(M(1))$.

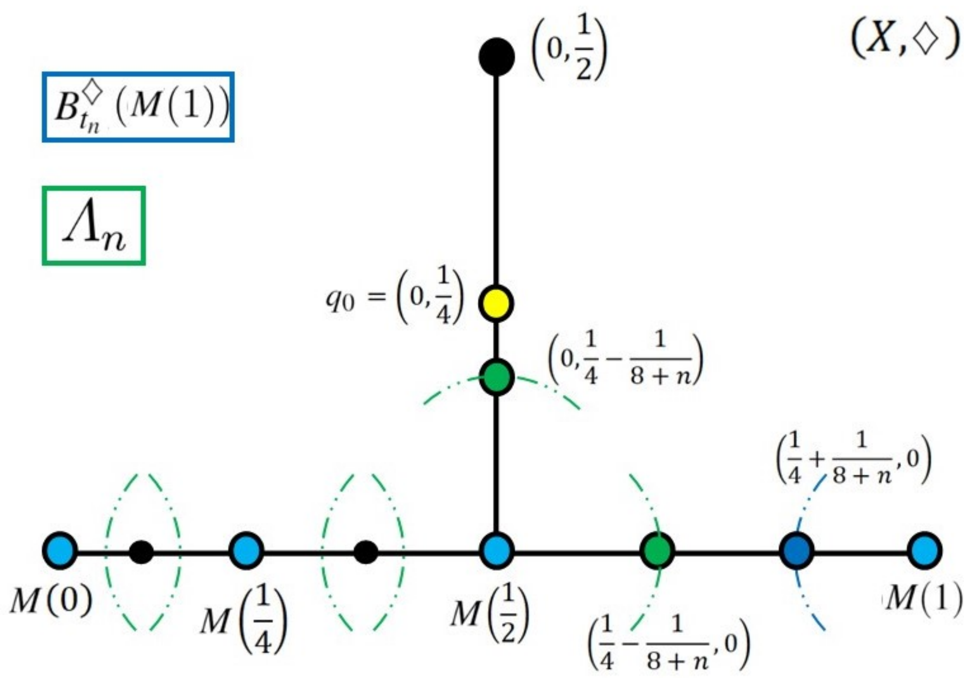

Figura 3.9: Un resumen de la idea principal

Dado que $\overline{\Lambda_n} \cap C_{t_n}^{\diamondsuit}(M(1)) = \emptyset$, tenemos que $K(S,t_n)$ tiene dos componentes conexas; es decir, $m(S,t_n) = 2$. Por lo tanto,

$$L(S,t_n) = \{\sigma(q_0,\overline{\Lambda_n}), \sigma(q_0, C_{t_n}^{\diamondsuit}(M(1)))\} = \{(0, \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8+n}), (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8+n}, 0)\}.$$

Notemos que $\{L(S,t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente en $CL(X)$. Además, para toda $n \in \mathbb{N}$, $L(S,t_n) \in K(X)$. Por el Lema 2.1.17, $(0,\frac{1}{4}), (\frac{1}{4},0) \in \lim\limits_{n\to\infty} L(S,t_n)$. **Notemos que $K(S,t_0)$ sólo tiene una componente conexa**. Entonces, $L(S,t_0) = \{(0,\frac{1}{4})\} \neq \lim\limits_{n\to\infty} L(S,t_n)$. Por lo tanto, L no necesariamente es una función continua. Esto concluye la demostración de la Afirmación 3.

$\square$

Proposición 3.4.3. Sean $(X,\diamondsuit)$ una dendrita y $p_0 \in X$. Entonces

(1) $|L(S,t)| = m(S,t)$;

(2) $L(S,1) = \{p_0\}$;

(3) Si $0<s<t<1$ entonces $|L(S,t)| \leqslant |L(S,s)|$.

Demostración. Demostremos (1). Dado que $K(S,t)$ tiene $m(S,t)$ componentes, basta ver que si tomamos distintos $j,k \in \{1,\ldots,m(S,t)\}$, entonces $q_j = \sigma(p_0, D_j(S,t)) \neq \sigma(p_0, D_k(S,t)) = q_k$.

Supongamos que existen $j,k \in \{1,...,m(S,t)\}$ tales que $q_j = q_k$. Así, $q_j \in D_j(S,t)$ y $q_k \in D_k(S,t)$. Lo anterior implica que $D_j(S,t) \cap D_k(S,t) \neq \emptyset$; al ser componentes conexas tenemos que son iguales, contradiciendo el hecho que $K(S,t)$ tiene $m(S,t)$ componentes. Por lo tanto, si $j \neq k$ entonces $q_j \neq q_k$; es decir, $|L(S,t)| = m(S,t)$.

Demostremos (2). Por (1) del Teorema 3.2.7, $K(S,1) = D_1(S,1) = X$. Como $p_0 \in X$, es claro que $\{p_0\} = \{\sigma(p_0, D_1(S,1))\} = L(S,1)$.

Demostremos (3). Como $s<t$, $K(S,s) \subseteq K(S,t)$. Sea $D_b(S,t)$ una componente conexa de $K(S,t)$. Por (2) del Teorema 3.2.7, $S \cap D_b(S,t) \neq \emptyset$. Así, $D_b(S,t) \cap K(S,s) \neq \emptyset$. Lo anterior nos dice que $K(S,s)$ interseca a cada componente conexa de $K(S,t)$.

Sea $a \in K(S,s) = \bigcup_{i=1}^{m(S,s)} D_i(S,s)$. Entonces existe un índice $i \in \{1,...,m(S,s)\}$ tal que $a \in D_i(S,s)$. Como $K(S,s) \subseteq K(S,t) = \bigcup_{k=1}^{m(S,t)} D_k(S,t)$, existe un índice $j \in \{1,...,m(S,t)\}$ tal que $a \in D_j(S,t)$. Por lo tanto, $D_i(S,s) \subseteq D_j(S,t)$.

Concluimos que cada $D_j(S,t)$ contiene al menos una componente conexa de $K(S,s)$. Por lo anterior, $m(S,t) \leqslant m(S,s)$; es decir, $|L(S,t)| \leqslant |L(S,s)|$. □

Observación 3.4.4. *Sean $(X,\diamondsuit)$ una dendrita, $(S,t) \in S_c(X) \times (0,1]$ y $p_0 \in X$. Para todo $p \in X$, los conjuntos $D_1(S,t) \cap p_0p, ..., D_{m(S,t)}(S,t) \cap p_0p$ pueden ser vacíos o un arco o un unitario. Lo anterior debido a que la intersección de dos subcontinuos en un dendroide es un subcontinuo.*

Definición 3.4.5. Sean $(X,\diamondsuit)$ una dendrita, $(S,t) \in S_c(X) \times (0,1]$ y $p_0, p \in X$. Definimos a la *Presencia de $K(S,t)$ en el arco p_0p* como el número

$$\chi(S,t)(p) = \sum_{i=1}^{m(S,t)} \text{diám}(D_i(S,t) \cap p_0p).$$

Observación 3.4.6. *Sean $(X,\diamondsuit)$ una dendrita, $(S,t) \in S_c(X) \times (0,1]$ y $p_0, p \in X$. Notemos que cada $D_i(S,t) \cap p_0p \subseteq p_0p$. Así,* diám$(D_i(S,t) \cap p_0p) \leqslant \diamondsuit(p_0,p)$. *Como $\bigcup_{i=1}^{m(S,t)} D_i(S,t) \cap p_0p \subseteq p_0p$ y, si $i \neq j$, entonces $(D_i(S,t) \cap p_0p) \cap (D_j(S,t) \cap p_0p) = \emptyset$, tenemos que $\chi(S,t)(p) \leqslant \diamondsuit(p_0,p)$. Por lo tanto, $0 \leqslant \diamondsuit(p_0,p) - \chi(S,t)(p)$. Definimos $J = \diamondsuit(p_0,p) - \chi(S,t)(p)$.*

Por la Observación 3.3.1, $p_0p = \Psi([0,\diamondsuit(p_0,p)])$ donde $\Psi : [0,\diamondsuit(p_0,p)] \to X$ es la isometría que existe tal que $\Psi(0) = p_0$ y $\Psi(\diamondsuit(p_0,p)) = p$. Notemos que $J \leqslant \diamondsuit(p_0,p)$; es decir, $J \in [0,\diamondsuit(p_0,p)]$. Por lo tanto, existe un único punto en p_0p al cual llamaremos ***Punto de propagación*** *y lo denotaremos $\beta(p)$ tal que $\Psi(J) = \beta(p)$. Además, $\diamondsuit(p_0,\beta(p)) = d_R(0,J) = J - 0 = \diamondsuit(p_0,p) - \chi(S,t)(p)$.*

Capítulo 4

Las funciones auxiliares

En este capítulo definiremos una contracción de $S_c(X)$. Antes de comenzar, vamos a explicar el movimiento que se hará. Usualmente una contracción se define comenzando en la identidad y terminando en alguna función constante, pero lo explicaremos al revés.

Al inicio del Capítulo 3, fijamos un punto p_0 de X. Dicho punto nos ayuda a generar una sucesión armónica S_0. Para llevar a S_0 a $S \in S_c(X)$, seguiremos el siguiente procedimiento: la función G_2 es una homotecia de S_0 con centro en p_0 y de razón menor a uno; es decir, G_2 "reducirá" a S_0 hasta llevarlo a $\{p_0\}$. La función G selecciona y genera puntos (de propagación) que van desde $\{p_0\}$ a S. La función G_3 une a S_0 los puntos que genera G al mismo tiempo que aplica la homotecia G_2; comenzando en $S_0 \cup \{p_0\}$ y terminando en $\{p_0\} \cup S$. Con esto, estamos a "mitad" del recorrido. La función G_1 unirá a S los puntos que genera G comenzando en $S \cup \{p_0\}$ y terminando en $S \cup S = S$. Así, llegaremos a S partiendo desde S_0. En resumen tenemos dos movimientos y cada uno tiene dos componentes: el primero es G_3 y sus componentes son la homotecia y los puntos de propagación; el segundo es G_1 y sus componentes son S y los puntos de propagación.

En las páginas siguientes notará que, en realidad, vamos a hacer el movimiento contrario; es decir, iremos de cualquier punto $S \in S_c(X)$ a S_0. Esto tiene que ver directamente con la contracción, pues el primer movimiento es G_1 y el último G_3. Cada sección de este capitulo está dedicada a una función (G, G_1, G_2, G_3 y $\mathfrak{F}$), vale mucho la pena detenerse a ver e interpretar (cosa que haremos) los detalles de cada función.

4.1. La función G

Definición 4.1.1. Sea $(X, \diamondsuit)$ una dendrita. Definimos la primera función auxiliar $G : S_c(X) \times [0,1] \to F(X) \cup S$ como

$$G(S,t) = \begin{cases} \{\beta(p) : p \in L(S,t)\}, & si \quad t>0, \\ S, & si \quad t=0. \end{cases}$$

Donde $\beta(p)$ y $L(S,t)$ fueron definidos en la Observación 3.4.6 y la Definición 3.4.1, respectivamente.

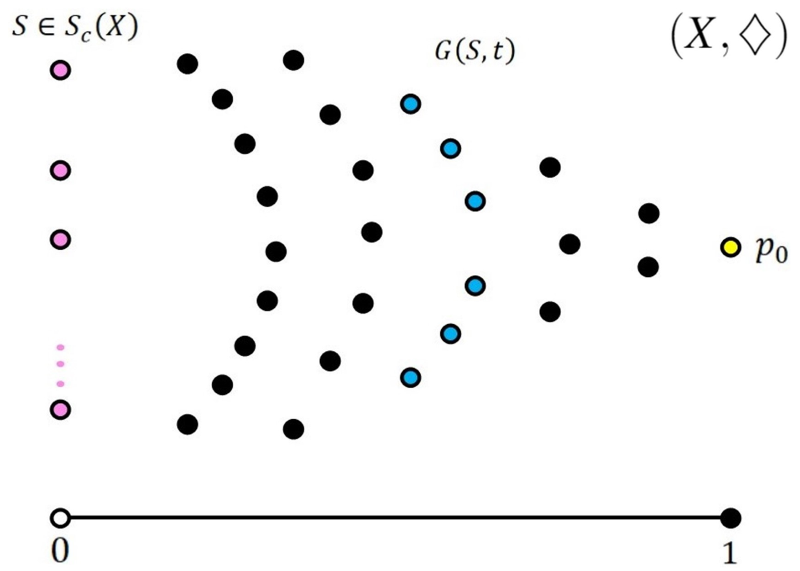

Figura 4.1: La propagación de los puntos

Notemos que esta función sólo selecciona puntos por los cuales nos moveremos en $S_c(X)$. Si fijamos S y movemos a t desde 0 hasta que 1, entonces veremos, en X, que los puntos $G(S,t)$ se propagan en X hasta "converger" a p_0. Es por esto que a $G(S,t)$ le llamamos **puntos de propagación**. Por (3) de la Proposición 3.4.3, mientras más cerca estemos de 1, entonces $G(S,t)$ tendrá menos puntos.

Nuestro objetivo es demostrar que G es una función continua, para hacerlo necesitamos mostrar los siguientes resultados.

Lema 4.1.2. Sean $(X,\diamondsuit)$ una dendrita y $\varepsilon>0$. Si $p \in X$ y $\{x_n\}_n^\infty$ es una sucesión en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N$, entonces $px_n \subseteq px \cup C_\varepsilon(x)$.

Demostración. Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N$, entonces $x_n \in C_\varepsilon(x)$. De manera que $px_n \cap (px \cup C_\varepsilon(x))$ es un subcontinuo de px_n que tiene a p y a x_n. De modo que $px_n \cap (px \cup C_\varepsilon(x)) = px_n$. Por tanto $px_n \subseteq px \cup C_\varepsilon(x)$. $\square$

Proposición 4.1.3. Sean $(X,\diamondsuit)$ una dendrita, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\{(S_n,t_n)\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $S_c(X) \times [0,1]$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n,t_n) = (S,t) \in S_c(X) \times [0,1]$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{(S_n,t_n)}(x_n) = \chi_{(S,t)}(x)$.

Demostración. Analicemos dos casos.

Caso 1 $K(S,t) \cap p_0x \subseteq \{x\}$.

Sea $\varepsilon>0$. Como $x \in C_\varepsilon(x)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N$, se cumple que $x_n \in C_\varepsilon(x)$. Supongamos que, para una cantidad infinita de índices mayores o iguales a N, sucede que $K(S_n,t_n) \cap (p_0x \setminus B_\varepsilon(x)) \neq \emptyset$; es decir, hay puntos que se quedan fuera del abierto. Dichos índices los denotaremos como $\{m_1, m_2, \dots\}$. Tomemos $z_{m_i} \in K(S_{m_i},t_{m_i}) \cap (p_0x \setminus B_\varepsilon(x))$. De esta manera $\{z_{m_i}\}_{i=1}^\infty$ es una sucesión en $p_0x \setminus B_\varepsilon(x)$. Como $p_0x \setminus B_\varepsilon(x)$ es compacto podemos suponer que la sucesión $\{z_{m_i}\}_{i=1}^\infty$ converge a un punto z; es decir, $\lim\limits_{i\to\infty} z_{m_i} = z$. Por construcción, $z \in p_0x \setminus B_\varepsilon(x)$ y, por el Lema 2.1.17, tenemos que $z \in K(S,t) \cap (p_0x \setminus B_\varepsilon(x)) = \emptyset$; una contradicción. Por lo tanto, $K(S_n,t_n) \cap (p_0x \setminus B_\varepsilon(x)) \neq \emptyset$ sólo para una cantidad finita de índices mayores o iguales a N, digamos $\{N,N_1,N_2,...,N_k\}$. Tomamos el máximo y lo llamamos W. Por el Lema 4.1.2, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant M$, entonces $p_0x_n \subseteq p_0x \cup C_\varepsilon(x)$. Consideremos $T = \text{máx}\{W+1,M\}$. Concluimos que, si $n \geqslant T$, entonces $K(S_n,t_n) \cap p_0x \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq C_\varepsilon(x)$. Además, existen $a_n, b_n \in K(S_n,t_n) \cap p_0x_n$ tales que $K(S_n,t_n) \cap p_0x_n \subseteq a_nb_n$.

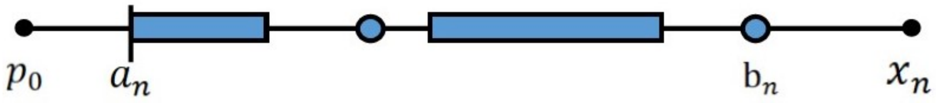

Figura 4.2: $K(S_n,t_n) \cap p_0x_n \subseteq a_nb_n$

Como $p_0x_n \subseteq p_0x \cup C_\varepsilon(x)$, tenemos que $K(S_n,t_n) \cap p_0x_n \subseteq K(S_n,t_n) \cap (p_0x \cup C_\varepsilon(x)) \subseteq C_\varepsilon(x)$. Como $\diamondsuit$ es convexa, $\chi_{(S_n,t_n)}(x_n) \leqslant \diamondsuit(a_n,b_n) \leqslant 2\varepsilon$. Ya podemos concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} \diamondsuit(a_n,b_n) = 0$. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{(S_n,t_n)}(x_n) = 0$. Y, así, $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{(S_n,t_n)}(x_n) = \chi_{(S,t)}(x)$.

Caso 2 $K(S,t) \cap p_0x$ no está contenido en $\{x\}$.

Sea $\varepsilon>0$. Fijamos $\delta_0>0$ tal que

(i) $4\delta_0<\varepsilon$;

(ii) $\delta_0<\frac{\diamondsuit(p_0,x)}{2}$;

(iii) $K(S,t) \cap (p_0x \setminus K(\{x\},\delta_0)) = (K(S,t) \cap p_0x) \setminus K(\{x\},\delta_0) \neq \emptyset$.

Definimos $w_0 = \sigma(p_0, K(\{x\},\delta_0))$. Por (2) del Teorema 3.3.2, $w_0 \in p_0x$. Como $0<\delta_0 = \diamondsuit(x,w_0)$, tenemos que $x \neq w_0$. Si $\diamondsuit(p_0,w_0) = 0$, entonces $\diamondsuit(x,p_0) = \diamondsuit(x,w_0) = \delta_0$. Por *(ii)*, $\diamondsuit(p_0,x)<\frac{\diamondsuit(p_0,x)}{2}$ una contradicción. Por lo tanto, $w_0 \notin \{p_0,x\}$.

Como $w_0 \in K(\{x\},\delta_0)$, tenemos que $p_0x \setminus K(\{x\},\delta_0) \subsetneq p_0w_0$. Por *(iii)*, $\emptyset \neq K(S,t) \cap p_0w_0$. Por (3) del Teorema 3.2.7, $K(S,t) = \bigcup\limits_{i=1}^{m(S,t)} D_i(S,t)$ donde para toda $i \in \{1,...,m(S,t)\}$, $D_i(S,t)$ es una componente conexa de $K(S,t)$. Por la Observación 3.4.4, tenemos que $D_i(S,t) \cap p_0w_0$ es, o bien un conjunto vacío, un conjunto unitario o un arco de p_0w_0, en cualquier caso $D_i(S,t) \cap p_0w_0$ es un subconjunto cerrado y conexo de X.

Afirmación 1 Sea $i \in \{1,\dots,m(S,t)\}$. Si $D_i(S,t) \cap p_0w_0 \neq \emptyset$, entonces $D_i(S,t) \cap p_0w_0$ es una componente conexa de $K(S,t) \cap p_0w_0$.

Como cada $D_i(S,t) \cap p_0w_0$ es un subconjunto cerrado y conexo de $K(S,t) \cap p_0w_0$, basta con ver que son ajenos dos a dos y que son conjuntos conexos maximales (en el sentido de la contención).

Sean $i,j \in \{1,\dots m(S,t)\}$ distintas. Entonces $\emptyset = (D_i(S,t) \cap D_j(S,t)) \cap p_0w_0 = (D_i(S,t) \cap p_0w_0) \cap (D_j(S,t) \cap p_0w_0)$; así que son ajenos.

Sea $i \in \{1,\dots,m(S,t)\}$ tal que $D_i(S,t) \cap p_0w_0 \neq \emptyset$. Supongamos que existe $C \subseteq K(S,t) \cap p_0w_0$ conexo tal que $D_i(S,t) \cap p_0w_0 \subseteq C$. Notemos que $C \subseteq K(S,t) = \bigcup\limits_{j=1}^{m(S,t)} D_j(S,t)$. Como $C \cap D_i(S,t) \neq \emptyset$ tenemos que $C \subseteq D_i(S,t)$. Finalmente, como $C \subseteq p_0w_0$, tenemos que $C = C \cap p_0w_0 \subseteq D_i(S,t) \cap p_0w_0$. Por lo tanto, $C = D_i(S,t) \cap p_0w_0$; de manera que $D_i(S,t) \cap p_0w_0$ es un conexo maximal. Concluimos que $D_i(S,t) \cap p_0w_0$ es una componente conexa de $K(S,t) \cap p_0w_0$.

Hemos demostrado la Afirmación 1.

Si m indica el número de componentes que tiene $K(S,t)\cap p_0w_0$, entonces, por la Afirmación 1, $m \leqslant m(S,t)$. Podemos suponer que las primeras m componentes de $K(S,t)$ intersectan a p_0w_0. No es difícil probar que $K(S,t)\cap p_0w_0 = \bigcup_{i=1}^{m}\big(D_i(S,t)\cap p_0w_0\big)$.

Por el Lema 3.3.6, para cada $i\in\{1,\dots,m\}$ existe $J_i\subseteq S$ finito tal que $D_i(S,t)\cap p_0w_0 = K(J_i,t)\cap p_0w_0$. A su vez, existe $R_i\subseteq S$ tal que $J_i\subseteq R_i$ donde $R_i=\{q\in S : K(\{q\},t)\cap (D_i(S,t)\cap p_0w_0)\neq\emptyset\}$. Por lo tanto, para todo $p\in J_i$, $K(\{p\},t)\cap p_0w_0\neq\emptyset$.

No es difícil notar que, si tomamos $i\neq j$, entonces $R_i\cap R_j=\emptyset$. Por lo anterior, $J_1,\ldots,J_m$ son conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos. Definimos $J=\bigcup_{i=1}^{m} J_i$. Así, $|J|\geqslant m$. Además, J es un subconjunto compacto de S tal que $\mathbf{K(S,t)\cap p_0w_0 = K(J,t)\cap p_0w_0}$.

Sea $\delta>0$ tal que

$$8\delta<\text{mín}\Big\{\{\diamondsuit(D_i(S,t)\cap p_0w_0, D_j(S,t)\cap p_0w_0) : i\neq j\}\cup\{\tfrac{\varepsilon}{2|J|},\diamondsuit(p_0,w_0),\delta_0\}\Big\}.$$

Dado que $\lim_{n\to\infty}(S_n,t_n)=(S,t)$ y $\lim_{n\to\infty}x_n = x$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geqslant N$, entonces $H(S_n,S)<\delta$, $|t_n-t|<\delta$ y $\diamondsuit(x_n,x)<\delta$. Sea $n\geqslant N$. Entonces para cada $u\in J\subseteq S$, existe $z\in S_n$ tal que $\diamondsuit(z,u)<\delta$. **Fijamos un punto** $\mathbf{v(u)\in S_n}$ tal que $\diamondsuit(u,v(u))<\delta$. Definimos $\mathbf{w(u)=\sigma(v(u),p_0w_0)}$.

Afirmación 2 Para cualesquiera $u\in J$ y $n\geqslant N$ tenemos que

(a) si $K(\{v(u)\},t_n)\cap p_0w_0\neq\emptyset$, entonces

$$H(K(\{u\},t)\cap p_0w_0, K(\{v(u)\},t_n)\cap p_0w_0)<2\delta;$$

(b) si $K(\{v(u)\},t_n)\cap p_0w_0=\emptyset$, entonces

$$K(\{u\},t)\cap p_0w_0\subseteq N_{2\delta}(\{w(u)\})\subseteq K(\{w(u)\},2\delta).$$

Dada $y\in K(\{v(u)\},t_n)$, tenemos que $\diamondsuit(u,y)\leqslant\diamondsuit(u,v(u))+\diamondsuit(v(u),y)\leqslant\diamondsuit(u,v(u))+t_n<t_n+\delta$. Como $n\geqslant N$, ocurre que $|t_n-t|<\delta$. Por lo tanto,

$$\diamondsuit(u,y)<t+2\delta. \tag{4.1}$$

Similarmente, para cada punto $x\in K(\{u\},t)$, tenemos que $\diamondsuit(v(u),x)<t_n+2\delta$.

Demostremos (a). Definimos $w=\sigma(u,p_0w_0)$. Como $u\in J$, tenemos que $K(\{u\},t)\cap p_0w_0\neq\emptyset$; así que existe $y_1\in p_0w_0$ tal que $\diamondsuit(y_1,u)\leqslant t$. Por (2) del Teorema 3.3.2, $w\in uy_1$. Concluimos que $\diamondsuit(u,w)\leqslant\diamondsuit(u,y_1)\leqslant t$.

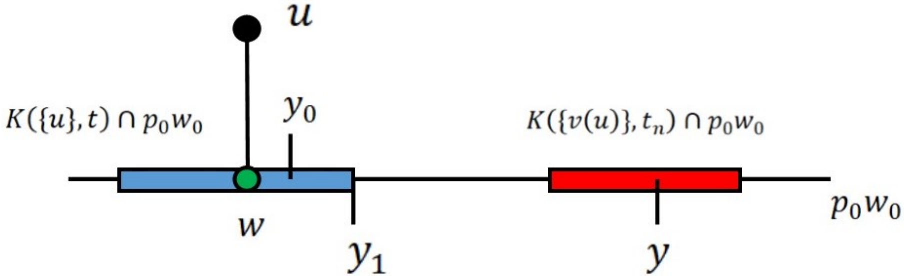

Figura 4.3: La idea del caso (a)

Dada $y \in K(\{v(u)\},t_n)\cap p_0w_0$, por la desigualdad (4.1) tenemos que $\diamondsuit(u,y)<t+2\delta$. Además, como X es una dendrita, $uy = uw \cup wy$. Si pasa que $\diamondsuit(\mathbf{u},\mathbf{y}) \leqslant \mathbf{t}$, entonces $y \in K(\{u\},t)\cap p_0w_0$. Por lo tanto, $y \in N_{2\delta}(K(\{u\},t)\cap p_0w_0)$.

Si $\diamondsuit(\mathbf{u},\mathbf{y})>\mathbf{t}$, entonces podemos tomar el punto $y_0 \in uy$ tal que $\diamondsuit(u,y_0) = t$. Por el Lema 3.1.12, $\diamondsuit(u,y_0)+\diamondsuit(y_0,y) = \diamondsuit(u,y)<t+2\delta$. Entonces, $\diamondsuit(y_0,y)<2\delta$. Como $\diamondsuit(u,w) \leqslant t = \diamondsuit(u,y_0)$, tenemos que $y_0 \in yw$. Por el Lema 3.0.8, $yw \subseteq p_0w_0$. Entonces $y_0 \in K(\{u\},t)\cap p_0w_0$ y cumple que $\diamondsuit(y,y_0)<2\delta$. De modo que $y \in N_{2\delta}(K(\{u\},t)\cap p_0w_0)$.

Concluimos que $K(\{v(u)\},t_n)\cap p_0w_0 \subseteq N_{2\delta}(K(\{u\},t)\cap p_0w_0)$.

Procediendo de manera análoga, teniendo en cuenta que para todo $x \in K(\{u\},t)\cap p_0w_0$, se tiene que $\diamondsuit(v(u),x)<t_n+2\delta$, podemos probar que $K(\{u\},t)\cap p_0w_0 \subseteq N_{2\delta}(K(\{v(u)\},t_n)\cap p_0w_0)$.

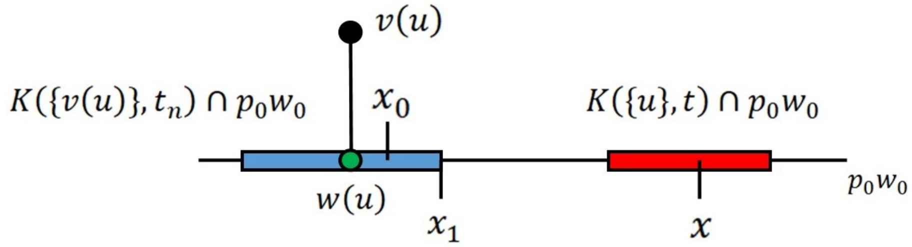

Figura 4.4: La idea del caso análogo para demostrar (a)

Demostremos (b). Como $K(\{v(u)\},t_n)\cap p_0w_0 = \emptyset$ y por (3) del Teorema 3.3.2, tenemos que $\diamondsuit(v(u),w(u))>t_n$.

Dada $z \in K(\{u\},t)\cap p_0w_0$, ya hemos visto que $\diamondsuit(v(u),z)<t_n+2\delta$. Como $w(u) \in v(u)z$ y por el Lema 3.1.12, tenemos que $\diamondsuit(v(u),z) = \diamondsuit(v(u),w(u))+\diamondsuit(w(u),z)$. Entonces $\diamondsuit(v(u),z)-\diamondsuit(w(u),z)>t_n$. Así, $t_n+2\delta>\diamondsuit(v(u),z)>t_n+\diamondsuit(w(u),z)$. Por lo tanto, $\diamondsuit(w(u),z)<2\delta$; por tanto $K(\{u\},t)\cap p_0w_0 \subseteq N_{2\delta}(\{w(u)\}) \subseteq K(\{w(u)\},2\delta)$.

Esto concluye la prueba de la Afirmación 2.

Sean $e = \diamondsuit(p_0,w_0)$ y $u \in J$. Definimos $A = K(S,t)\cap p_0w_0$ y

(a) si $K(\{v(u)\},t_n)\cap p_0w_0 \neq \emptyset$, definimos $B(u) = K(\{v(u)\},t_n)\cap p_0w_0$;

(b) si $K(\{v(u)\},t_n)\cap p_0w_0 = \emptyset$, definimos $B(u) = \{w(u)\}$.

Consideremos $B = \bigcup\{B(u) : u \in J\}$. Así, $B \subseteq p_0w_0$. Notemos que cada $B(u)$ es un conjunto conexo. Por lo tanto, si k es el número de componentes conexas de B, entonces $k \leqslant |J|$.

Afirmación 3 $H(A,B)<2\delta$.

Por la Afirmación 2 y por como definimos a B, tenemos que

(a) si $B(u) = K(\{v(u)\},t_n)\cap p_0w_0$, entonces $H(B(u),K(\{u\},t)\cap p_0w_0)<2\delta$;

(b) si $B(u) = \{w(u)\}$, entonces $K(\{u\},t)\cap p_0w_0 \subseteq N_{2\delta}(B(u)) \subseteq K(\{w(u)\},2\delta)$.

Esta última nos dice que, para toda $z \in K(\{u\},t)\cap p_0w_0$, tenemos que $\diamondsuit(w(u),z)<2\delta$. Así, $B(u) \subseteq N_{2\delta}(K(\{u\},t)\cap p_0w_0)$. Es por ello que en ambos casos se cumple que $H(B(u),K(\{u\},t)\cap p_0w_0)<2\delta$. Por lo tanto,

$$H\left(\bigcup\{B(u) : u \in J\},\bigcup\{K(\{u\},t)\cap p_0w_0 : u \in J\}\right)<2\delta.$$

Hemos demostrado la Afirmación 3.

Sea $n \geqslant N$. Entonces $x_n \in B_\delta(x) \subseteq K(\{x\},\delta_0)$ ya que $\delta<\delta_0$. Al inicio de este Caso 2, elegimos δ_0 tal que $4\delta_0<\varepsilon$. Por lo tanto, $\diamondsuit(x_n,x)<2\delta<2\delta_0<\frac{\varepsilon}{2}$.

Como $v(u) \in S_n$ para toda $u \in J$, tenemos que $B \subseteq \{K(S_n,t_n) \cap p_0w_0\} \bigcup \{w(u) : u \in J\}$. Al ser J finito, $\lambda(\{w(u) : u \in J\}) = 0$. Por el Lema 3.0.8, $w_0x_n \subseteq C_{\delta_0}(x)$ y por (ii), $p_0 \notin C_{\delta_0}(x)$. Entonces $p_0w_0 \subseteq p_0x_n$. Así, $K(S_n,t_n) \cap p_0w_0 \subseteq K(S_n,t_n) \cap p_0x_n$. Por lo tanto, $\lambda(B) \leqslant \lambda(K(S_n,t_n) \cap p_0w_0) \leqslant \lambda(K(S_n,t_n) \cap p_0x_n) = \chi_{(S_n,t_n)}(x_n)$.

Ahora, $p_0x = p_0w_0 \bigcup w_0x$. Así,

$$K(S,t) \cap p_0x = K(S,t) \cap (p_0w_0 \bigcup w_0x) = (K(S,t) \cap p_0w_0) \bigcup (K(S,t) \cap w_0x).$$

Por lo tanto, $\lambda(K(S,t) \cap p_0x) = \lambda(K(S,t) \cap p_0w_0) + \lambda(K(S,t) \cap w_0x)$.

Un posible escenario es que una componente de $K(S,t) \cap p_0w_0$ comparta un elemento con $K(S,t) \cap w_0x$. No pueden compartir otro elemento distinto a $\{w_0\}$ ya que no se pueden intersecar (encimar). De esta manera no estamos sumando dos veces un mismo segmento.

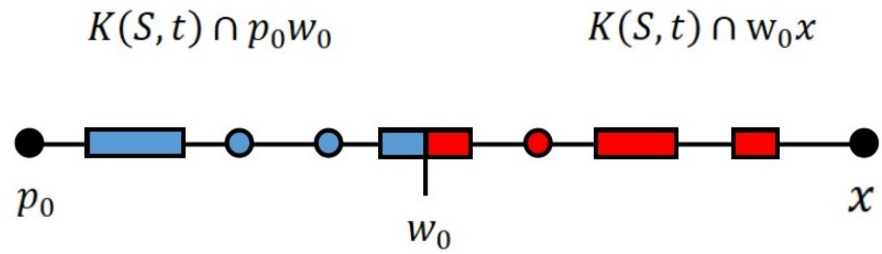

Figura 4.5: Estamos sumando diámetros de componentes, puede que en el total (p_0x) sea una única componente que dividimos en dos, pero $\diamondsuit$ es convexa y sumar los diámetros por separados es lo mismo que sumar el diámetro original.

Observemos que $\chi_{(S,t)}(x) = \lambda(K(S,t) \cap p_0x)$ y que $\lambda(A) = \lambda(K(S,t) \cap p_0w_0)$. Entonces,

$$\chi_{(S,t)}(x) = \lambda(A) + \lambda(K(S,t) \cap w_0x) \leqslant \lambda(A) + \diamondsuit(w_0,x) = \lambda(A) + \delta_0.$$

Por la Observación 3.4.4 tenemos que $A,B \in K([0,e])$. Como $8\delta = 4(2\delta)<\{\diamondsuit(D_i(S,t) \cap p_0w_0, D_j(S,t) \cap p_0w_0), i \neq j\}$, tenemos, por la Afirmación 3 y el Lema 3.3.8, que $|\lambda(A) - \lambda(B)|<4k(2\delta) \leqslant 4|J|(2\delta)$. De esta manera, $\lambda(A)<8|J|\delta + \lambda(B)$. Por lo tanto, $\lambda(A) + \delta_0<\lambda(B) + 8|J|\delta + \delta_0 \leqslant \chi_{(S_n,t_n)}(x_n) + 8|J|\delta + \delta_0$.

Ahora recordemos dos cosas:

(i) $8\delta<\frac{\varepsilon}{2|J|}$; es decir, $8|J|\delta<\frac{\varepsilon}{2}$ y

(ii) $4\delta_0<\varepsilon$; es decir, $\delta_0<\frac{\varepsilon}{4}$.

Por lo tanto, $8|J|\delta + \delta_0<\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon$. Concluimos que $\chi_{(S,t)}(x) - \varepsilon<\chi_{(S_n,t_n)}(x_n)$.

Vamos a demostrar que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant M$, entonces $\chi_{(S_n,t_n)}(x_n) - \varepsilon<\chi_{(S,t)}(x)$. Supongamos que $K(S,t) \cap p_0x$ tiene k_0 componentes conexas. Poco después de la Afirmación 1, supusimos que las m primeras componentes de $K(S,t)$ intersectan a p_0w_0, como $p_0w_0 \subseteq p_0x$ y $K(S,t) \cap p_0w_0$ tiene m componentes conexas, tenemos que $m \leqslant k_0$.

Definimos $D = K(S,t) \setminus D_1(S,t),\ldots,D_m(S,t)$. Por (3) del Teorema 3.2.7, $K(S,t)$ tiene una cantidad finita de componentes. Por ello D es igual a una cantidad finita de compactos y cerrados; es decir, D es cerrado y compacto.

Como $\frac{\varepsilon}{4(k_0+2)}<\frac{\varepsilon}{4}$ y $\delta_0<\frac{\varepsilon}{4}$, podemos pedir que $\delta_0<\frac{\varepsilon}{4(k_0+2)}$.

Sea $\delta_1>0$ tal que $\delta_1<\delta_0$ y $K(p_0w_0,2\delta_1)\cap D=\emptyset$. Como $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n,t_n)=(S,t)$ y $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, existe $M\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geqslant M$, entonces $H(S_n,S)<\delta_1$, $|t_n-t|<\delta_1$ y $\diamondsuit(x_n,x)<\delta_1$. Notemos que $\diamondsuit(x,w_0)=\delta_0$. Si $n\geqslant M$, entonces $\diamondsuit(x_n,w_0)\leqslant\diamondsuit(x_n,x)+\diamondsuit(x,w_0)<\delta_1+\delta_0<2\delta_0$.

Afirmación 4 Si $n\geqslant M$, entonces $K(S_n,t_n)\cap p_0w_0\subseteq N_{2\delta_1}(K(S,t)\cap p_0w_0)$.

Sea $v\in K(S_n,t_n)\cap p_0w_0$. Entonces existe $q\in S_n$ tal que $\diamondsuit(v,q)\leqslant t_n$. Dado que $H(S_n,S)<\delta_1$, existe $p\in S$ tal que $\diamondsuit(q,p)<\delta_1$. De esta manera $\diamondsuit(v,p)\leqslant\diamondsuit(v,q)+\diamondsuit(q,p)<t_n+\delta_1$. Como $|t_n-t|<\delta_1$, tenemos que $t_n<\delta_1+t$. Por lo tanto, $\diamondsuit(v,p)<t+2\delta_1$.

Si $\diamondsuit(v,p)\leqslant t$, entonces $v\in K(S,t)\cap p_0w_0$. Por lo tanto, $v\in N_{2\delta_1}(K(S,t)\cap p_0w_0)$.

Si $\diamondsuit(v,p)>t$, entonces existe un único $w_1\in vp$ tal que $\diamondsuit(w_1,p)=t$. Así, $w_1\in K(S,t)$. Por el Lema 3.1.12, $\diamondsuit(v,p)=\diamondsuit(v,w_1)+\diamondsuit(w_1,p)$. Como $\diamondsuit(v,p)<t+2\delta_1$, tenemos que $\diamondsuit(v,w_1)<2\delta_1$. Dado que $v\in p_0w_0$, sucede que $w_1\in K(p_0w_0,2\delta_1)$. Por cómo elegimos a δ_1, tenemos que $K(p_0w_0,2\delta_1)\cap D=\emptyset$. Así, $w_1\in K(S,t)\setminus D=D_1(S,t)\cup\ldots\cup D_m(S,t)$. Sin perder generalidad, supongamos que $w_1\in D_1(S,t)$. Si $w_1\in p_0w_0$, entonces $w_1\in K(S,t)\cap p_0w_0$. Como $\diamondsuit(v,w_1)<2\delta_1$, tenemos que $v\in N_{2\delta_1}(K(S,t)\cap p_0w_0)$. Si $w_1\notin p_0w_0$, entonces definimos $w_2=\sigma(w_1,p_0w_0)$. Sea $z\in D_1(S,t)\cap p_0w_0$. Como $v,z\in p_0w_0$ tenemos, por (2) del Teorema 3.3.2, que $w_2\in w_1z$ y $w_2\in w_1v$. Como X es una dendrita y $D_1(S,t)$ y w_1z son subcontinuos de X, tenemos que $w_1z\cap D_1(S,t)$ es un subcontinuo de X. En particular es un subconjunto conexo que contiene a w_1 y a z; entonces $w_1z\cap D_1(S,t)=w_1z$. De esta manera, $w_2\in D_1(S,t)\subseteq K(S,t)$. Como $w_1\notin p_0w_0$, entonces $w_2\neq w_1$ y, dado que $w_2\in w_1v$, tenemos que $\diamondsuit(w_1,v)=\diamondsuit(w_1,w_2)+\diamondsuit(w_2,v)$. Así, $\diamondsuit(v,w_2)<\diamondsuit(v,w_1)<2\delta_1$. Por lo anterior, $v\in N_{2\delta_1}(K(S,t)\cap p_0w_0)$.

Hemos mostrado que $K(S_n,t_n)\cap p_0w_0\subseteq N_{2\delta_1}(K(S,t)\cap p_0w_0)$. Terminamos la prueba de la Afirmación 4.

Sea $n\geqslant M$. Entonces $x_n\in K(\{x\},\delta_1)\subseteq K(\{x\},\delta_0)$. Como $w_0=\sigma(p_0,K(\{x\},\delta_0))$, tenemos que $x_n,w_0\in K(\{x\},\delta_0)$. Cuando definimos a M, probamos que $\diamondsuit(\mathbf{w_0},\mathbf{x_n})<\mathbf{2\delta_0}$. Como $w_0\in p_0x_n$, $p_0x_n=p_0w_0\cup w_0x_n$. Entonces $K(S_n,t_n)\cap p_0x_n=K(S_n,t_n)\cap(p_0w_0\cup w_0x_n)=(K(S_n,t_n)\cap p_0w_0)\cup(K(S_n,t_n)\cap w_0x_n)\subseteq(K(S_n,t_n)\cap p_0w_0)\cup w_0x_n$. Usando la Afirmación 4, obtenemos que $K(S_n,t_n)\cap p_0x_n\subseteq N_{2\delta_1}(K(S,t)\cap p_0w_0)\cup w_0x_n$.

No es difícil demostrar que $N_{2\delta_1}(K(S,t)\cap p_0w_0)=\bigcup\limits_{i=1}^{m}N_{2\delta_1}(D_i(S,t)\cap p_0w_0)$. No podemos asegurar que cada $N_{2\delta_1}(D_i(S,t)\cap p_0w_0)$ sea una componente conexa: puede que estas nubes se toquen. Por el párrafo anterior, $K(S_n,t_n)\cap p_0x_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{m}N_{2\delta_1}(D_i(S,t)\cap p_0w_0)\cup w_0x_n$. Así, $\lambda(K(S_n,t_n)\cap p_0x_n)\leqslant\lambda((\bigcup\limits_{i=1}^{m}N_{2\delta_1}(D_i(S,t)\cap p_0w_0))\cup w_0x_n)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{m}\text{diám}(N_{2\delta_1}(D_i(S,t)\cap p_0w_0))+\diamondsuit(w_0,x_n)$. Notemos que se da la igualdad si cada nube es una componente conexa y $w_0x_n=\{w_0\}$; la desigualdad si las condiciones anteriores no se cumplen.

Es claro que diám$(N_{2\delta_1}(D_i(S,t)\cap p_0w_0)) \leqslant 2\delta_1 +$ diám$(D_i(S,t)\cap p_0w_0)+2\delta_1$. Además, al inicio del Caso 2 vimos que $w_0 \notin \{p_0,x\}$; así que $p_0w_0 \subsetneq p_0x$. Por lo tanto, $\chi_{(S,t)}(w_0) \leqslant \chi_{(S,t)}(x)$.

Finalmente,

$$\chi_{(S_n,t_n)}(x_n) \leqslant 4m\delta_1 + \sum_{i=1}^{m} \text{diám}(D_i(S,t)\cap p_0w_0) + \diamondsuit(w_0,x_n) < 4m\delta_1 + \chi_{(S,t)}(x) + 2\delta_0.$$

Como $m \leqslant k_0$, $\delta_1 < \delta_0$ y $\delta_0 < \frac{\varepsilon}{4(k_0+2)}$, tenemos que

$$\chi_{(S_n,t_n)}(x_n) < 4k_0\delta_0 + 2\delta_0 + \chi_{(S,t)}(x) < \chi_{(S,t)}(x) + \varepsilon.$$

Sea $n \geqslant$ máx$\{N,M\}$. Entonces $|\chi_{(S_n,t_n)}(x_n) - \chi_{(S,t)}(x)| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{(S_n,t_n)}(x_n) = \chi_{(S,t)}(x)$.

$\square$

Proposición 4.1.4. Sean (X,E) una dendrita y $\varepsilon>0$. Si $x,y \in X$ son tales que $y \in B_\varepsilon(x)$, entonces $H(p_0x, p_0y) < \varepsilon$.

Demostración. Consideremos $p = \sigma(p_0, C_\varepsilon(x))$. Por (2) del Teorema 3.3.2, $p \in p_0x$. Como X es una dendrita, $p_0y = p_0p \cup py$. Dado que $py \subseteq B_\varepsilon(x) \cup \{p\}$, tenemos que

$$p_0y = p_0p \cup py \subseteq p_0p \cup B_\varepsilon(x) = p_0x \cup B_\varepsilon(x) \subseteq N_\varepsilon(p_0x).$$

La contención $p_0x \subseteq N_\varepsilon(p_0y)$ la obtenemos de manera análoga. Por lo tanto, $H(p_0x, p_0y) < \varepsilon$.
$\square$

Proposición 4.1.5. Sea $(X,\diamondsuit)$ una dendrita. Si $S \in S_c(X)$, entonces

(1) para toda $t>0$, $G(S,t) \in F(X)$;

(2) $G(S,1) = \{p_0\}$;

(3) si $t>0$, entonces $G(S,t) = \{\beta(q) : q \in K(S,t)\}$ donde $\beta(q)$ se definió en la Observación 3.4.6.

Demostración. Demostremos (1). Por la Defincíón 3.4.1, $L(S,t) \in F_{m(S,t)}(X)$. Además, para cada $p \in L(S,t)$ existe un único $\beta(p) \in p_0p$. Por lo tanto, $|\{\beta(p) : p \in L(S,t)\}| \leqslant m(S,t)$ ya que sólo hay $m(S,t)$ arcos. Concluimos que $G(S,t) \in F_{m(S,t)}(X) \subseteq F(X)$.

Ahora, demostremos (2). Como $G(S,1) = \{\beta(p) : p \in L(S,1)\} = \{\beta(p) : p \in \{p_0\}\}$, basta con ver quién es $\beta(p_0)$. En la Observación 3.4.6 justificamos la existencia del punto $\beta(p_0) \in p_0p_0 = \{p_0\}$. Así que $\beta(p_0) = p_0$. Por lo tanto, $G(S,1) = \{p_0\}$.

Finalmente, demostremos (3). Verifiquemos por doble contención.

$\subseteq$ Por definición $L(S,t) = \{\sigma(p_0, D_1(S,t)), \ldots, \sigma(p_0, D_{m(S,t)}(S,t))\}$. Si $q \in L(S,t)$, entonces $q \in K(S,t)$; entonces $L(S,t) \subseteq K(S,t)$. Por lo tanto, $G(S,t) = \{\beta(p) : p \in L(S,t)\} \subseteq \{\beta(p) : p \in K(S,t)\}$.

$\supseteq$ Sea $q \in K(S,t)$. Vamos a demostrar que $\beta(q) = \beta(p)$ para algún $p \in L(S,t)$. Entonces existe $j \in \{1,...,m(S,t)\}$ tal que $q \in D_j(S,t)$. Consideremos $p = \sigma(p_0, D_j(S,t))$. Así, $p \in L(S,t)$. Por (2) del Teorema 3.3.2, $p \in p_0q$. Además, $p_0q = p_0p \cup pq$. Notemos que $D_j(S,t)$ es un subcontinuo de X que contiene a p y a q. Así que $pq \subseteq D_j(S,t)$. Finalmente, como $D_j(S,t) \cap p_0q = pq$, tenemos que diám$(D_j(S,t) \cap p_0q) = \diamondsuit(p,q)$.

Si $i \in \{1,\ldots,m(S,t)\}$ es tal que $i \neq j$, entonces $D_i(S,t) \cap pq = \emptyset$, ya que $D_j(S,t)$ es una componente conexa. Por lo tanto, $D_i(S,t) \cap p_0q = D_i(S,t) \cap (p_0p \cup pq) = (D_i(S,t) \cap p_0p) \cup \emptyset$. Además, notemos que $(D_j(S,t) \cap p_0p) \cup (D_j(S,t) \cap pq) = pq$.

Notemos que $\chi_{(S,t)}(q) = \sum_{i=1}^{m(S,t)}$ diám$(D_i(S,t) \cap p_0q) = \diamondsuit(p,q) + \sum_{i \neq j}$ diám$(D_i(S,t) \cap p_0q) = \diamondsuit(p,q) + \sum_{i \neq j}$ diám$(D_i(S,t) \cap p_0p)$. Por lo anterior, $\chi_{(S,t)}(q) = \diamondsuit(p,q) + \chi_{(S,t)}(p)$. Por el Lema 3.1.12, $\diamondsuit(p_0,q) = \diamondsuit(p_0,p) + \diamondsuit(p,q)$. Despejando y sustituyendo tenemos que $\chi_{(S,t)}(q) = \diamondsuit(p_0,q) - \diamondsuit(p_0,p) + \chi_{(S,t)}(p)$. Por lo tanto, $\diamondsuit(p_0,p) - \chi_{(S,t)}(p) = \diamondsuit(p_0,q) - \chi_{(S,t)}(q)$; por tanto $\diamondsuit(p_0,\beta(p)) = \diamondsuit(p_0,\beta(q))$.

Como $p_0p \subseteq p_0q$ y $\beta(p) \in p_0p$, tenemos que $\beta(p) \in p_0q$. Como $\beta(q)$ es el único punto en el arco p_0q que satisface $\diamondsuit(p_0,\beta(q)) = \diamondsuit(p_0,q) - \chi_{(S,t)}(q)$ tenemos que $\beta(p) = \beta(q)$. Finalmente, como $p \in L(S,t)$, sucede que $\beta(p) = \beta(q) \in G(S,t)$. Por lo tanto, $\{\beta(q) : q \in K(S,t)\} \subseteq G(S,t)$.

$\square$

Teorema 4.1.6. Sea $(X,\diamondsuit)$ una dendrita. Entonces la función G es continua.

Demostración. Por el Lema 1.2.8, podemos demostrar la continuidad de G mediante subsucesiones. Sea $\{(S_n,t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $S_c(X) \times [0,1]$ tal que $\lim_{n\to\infty}(S_n,t_n) = (S,t)$. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $G(S_n,t_n) \in K(X)$. Como X es una dendrita y por el Teorema 2.1.9, $K(X)$ es compacto. Así, $\{G(S_n,t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, para no saturar la notación **supondremos que la subsucesión es la sucesión misma.** Veamos que $\lim_{n\to\infty} G(S_n,t_n) = G(S,t)$, para esto consideremos los siguientes casos.

Caso 1 $t>0$. En este caso, podemos suponer que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $t_n>0$; es decir, quitamos los términos que son iguales a 0. Por (3) de la Proposición 4.1.5, tenemos que $G(S,t) = \{\beta(p) : p \in K(S,t)\}$.

Afirmación 1 Sea $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} q_n = q$ y $q_n \in K(S_n,t_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \beta(q_n) = x$. Entonces $\beta(q) = x$.

Sea $\varepsilon>0$. Por hipótesis existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant M$, ocurre que $q_n \in B_\varepsilon(q)$. Por la Proposición 4.1.4, tenemos que $H(p_0q_n, p_0q)<\varepsilon$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} p_0q_n = p_0q$.

Por la Proposición 4.1.3, ocurre que $\lim_{n\to\infty} \chi_{(S_n,t_n)}(q_n) = \chi_{(S,t)}(q)$. Por la definición de $\beta(q_n)$, $\diamondsuit(p_0,\beta(q_n)) = \diamondsuit(p_0,q_n) - \chi_{(S_n,t_n)}(q_n)$, sucede que $\lim_{n\to\infty} \diamondsuit(p_0,\beta(q_n)) = \lim_{n\to\infty} \diamondsuit(p_0,q_n) - \lim_{n\to\infty} \chi_{(S_n,t_n)}(q_n) = \diamondsuit(p_0,q) - \chi_{(S,t)}(q) = \diamondsuit(p_0,\beta(q))$.

Finalmente, para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\beta(q_n) \in p_0q_n$. Entonces, por el Lema 2.1.17, se cumple que $\lim_{n\to\infty} \beta(q_n) \in p_0q$. Como $\diamondsuit(p_0, \lim_{n\to\infty} \beta(q_n)) = \diamondsuit(p_0,\beta(q))$ y $\beta(q) \in p_0q$, ocurre que $\lim_{n\to\infty} \beta(q_n) = \beta(q)$.

Hemos demostrado la Afirmación 1.

Ahora probaremos que $\lim\limits_{n\to\infty} G(S_n,t_n) = G(S,t)$.

$\subseteq$ Sea $x \in \lim\limits_{n\to\infty} G(S_n,t_n)$. Por el Lema 2.1.17, existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $x_n \in G(S_n,t_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, existe $q_n \in K(S_n,t_n)$ tal que $\beta(q_n) = x_n$.

Como X es compacto, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente $\{q_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ a un punto $q \in X$. Por el Lema 2.1.17, $q \in \lim\limits_{m\to\infty} K(S_{n_m},t_{n_m}) = \lim\limits_{n\to\infty} K(S_n,t_n) = K(S,t)$. Por la Afirmación 1, $\beta(q) = x$. Así, $x \in G(S,t)$.

$\supseteq$ Sea $\beta(q) \in G(S,t)$, donde $q \in K(S,t)$. Como K es continua tenemos, por el Lema 2.1.17, que existe $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = q$ y $q_n \in K(S_n,t_n)$.

Como X es compacto, $\{\beta(q_n)\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente $\{\beta(q_{n_m})\}_{m=1}^{\infty}$ a un punto $x \in X$. Por la Afirmación 1, $\beta(q) = x$. Finalmente, por el Lema 2.1.17, ocurre que $\beta(q) \in \lim\limits_{m\to\infty} G(S_{n_m},t_{n_m}) = \lim\limits_{n\to\infty} G(S_n,t_n)$.

Hemos probado que, en este caso, usando el Lema 1.2.8, G es continua.

Caso 2 $t = 0$. Con el objetivo de probar que G es continua, usaremos el Lema 1.2.8. Consideremos dos subsucesiones de $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$. Si existe una subsucesión $\{t_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ tal que, para toda $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $t_{n_m} = 0$, entonces $\lim\limits_{m\to\infty} G(S_{n_m},0) = \lim\limits_{m\to\infty} S_{n_m} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S = G(S,0)$. Por lo anterior, en este caso, G es continua.

Ahora, si existe una subsucesión $\{t_{n_r}\}_{r=1}^{\infty}$ tal que, para toda $r \in \mathbb{N}$, se tiene que $t_{n_r}>0$, entonces consideremos $\varepsilon>0$ y $x_0 = \lim S$. Tomemos $\delta_0>0$ tal que $\delta_0<\frac{\varepsilon}{3}$ y $S \setminus K(\{x_0\},\delta_0)$ sea un subconjunto finito y no vacío de X. Consideremos $S \setminus K(\{x_0\},\delta_0) = \{x_1,...,x_k\}$. Así, $K(\{x_0\},\delta_0) \cap S = \{x_{k+1},x_{k+2},\dots\}$. Es posible encontrar $\delta>0$ tal que $\delta<\frac{\delta_0}{4(k+1)}$ y que los conjuntos $K(\{x_1\},2\delta),...,K(\{x_k\},2\delta)$ y $K(\{x_0\},\delta_0+2\delta)$ sean ajenos entre sí.

Como $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n,t_n) = (S,t)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} K(S_n,t_n) = K(S,t)$, podemos encontrar $R \in \mathbb{N}$ tal que si $r \geqslant R$ entonces $|t_{n_r} - 0|<\delta$; $H(S_{n_r},S)<\delta$ y $H(K(S_{n_r},t_{n_r}),K(S,t))<\delta$.

Afirmación 2 Si $r \geqslant R$ y $p \in K(S_{n_r},t_{n_r})$, entonces $\diamondsuit(\beta(p),p)<\varepsilon$.

Sean $r \geqslant R$ y $p \in K(S_{n_r},t_{n_r})$. Entonces existe $u \in S_{n_r}$ tal que $\diamondsuit(p,u) \leqslant t_{n_r}$. Como $H(K(S_{n_r},t_{n_r}),S)<\delta$, existe $w \in S$ tal que $\diamondsuit(u,w)<\delta$. Así, $\diamondsuit(p,w) \leqslant \diamondsuit(p,u) + \diamondsuit(u,w)<t_{n_r} + \delta<2\delta$. Por lo tanto, $p \in K(S,2\delta)$; por tanto $K(S_{n_r},t_{n_r}) \subseteq K(S,2\delta)$.

Como $K(S,2\delta) \subseteq K(\{x_1\},2\delta) \cup ... \cup K(\{x_k\},2\delta) \cup K(\{x_0\},\delta_0 + 2\delta)$ tenemos que $K(S_{n_r},t_{n_r}) \cap p_0p \subseteq (K(\{x_1\},2\delta) \cap p_0p) \cup ... \cup (K(\{x_k\},2\delta) \cap p_0p) \cup (K(\{x_0\},\delta_0 + 2\delta) \cap p_0p)$. Así, $\chi_{(S_{n_r},t_{n_r})}(p) \leqslant \underbrace{4\delta + ... + 4\delta}_{k-veces} + 2(\delta_0 + 2\delta) = 4k\delta + 2\delta_0 + 4\delta = 4(k+1)\delta + 2\delta_0$. Dado que $\delta<\frac{\delta_0}{4(k+1)}$ y $\delta_0<\frac{\varepsilon}{3}$, concluimos que $\chi_{(S_{n_r},t_{n_r})}(p) \leqslant 3\delta_0<\varepsilon$.

Por la definición de $\beta(p)$, $\diamondsuit(p_0,\beta(p)) = \diamondsuit(p_0,p) - \chi_{(S_{n_r},t_{n_r})}(p)>\diamondsuit(p_0,p) - \varepsilon$. Como $\beta(p) \in p_0p$ tenemos, por el Lema 3.1.12, que $\diamondsuit(p_0,p) = \diamondsuit(p_0,\beta(p)) + \diamondsuit(\beta(p),p)$. Sustituyendo tenemos que $\diamondsuit(p_0,\beta(p))>\diamondsuit(p_0,\beta(p)) + \diamondsuit(\beta(p),p) - \varepsilon$; por tanto $\diamondsuit(\beta(p),p)<\varepsilon$.

Esto concluye la prueba de la Afirmación 2.

Sea $\beta(q) \in G(S_{n_r},t_{n_r})$ donde $q \in K(S_{n_r},t_{n_r})$ (ver Proposición 4.1.5 (3)). Por la Afirmación 2, $\beta(q) \in K(K(S_{n_r},t_{n_r}),\varepsilon)$. Notemos que, por el Lema 3.2.4, $K(K(S_{n_r},t_{n_r}),\varepsilon) =$

$K(S_{n_r}, \varepsilon + t_{n_r})$. Como $H(K(S_{n_r}, t_{n_r}), S) < \delta$, tenemos que $K(S_{n_r}, t_{n_r}) \subseteq K(S, \delta)$. Por lo tanto, $K(S_{n_r}, t_{n_r} + \varepsilon) \subseteq K(S, \delta + \varepsilon)$. Finalmente, como $\delta < \delta_0 < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$, tenemos que $\beta(q) \in K(S, \delta + \varepsilon) \subseteq K(S, 2\varepsilon) \subseteq N_{3\varepsilon}(S)$. Por lo tanto, $G(S_{n_r}, t_{n_r}) \subseteq N_{3\varepsilon}(S)$.

Sea $q \in S$. Como $H(K(S_{n_r}, t_{n_r}), S) < \delta$, existe $p \in K(S_{n_r}, t_{n_r})$ tal que $\diamondsuit(q, p) < \delta$. Notemos que $\delta < \varepsilon$. Por la Afirmación 2, $\diamondsuit(\beta(p), p) < \varepsilon$. Lo anterior nos dice que $\diamondsuit(q, \beta(p)) \leqslant \diamondsuit(q, p) + \diamondsuit(p, \beta(p)) < 2\varepsilon$. Por (3) de la Proposición 4.1.5, $\beta(p) \in G(S_{n_r}, t_{n_r})$. Entonces $q \in K(G(S_{n_r}, t_{n_r}), 2\varepsilon)$. Por lo tanto, $S \subseteq K(G(S_{n_r}, t_{n_r}), 2\varepsilon) \subseteq N_{3\varepsilon}(G(S_{n_r}, t_{n_r}))$.

Hemos mostrado que si $r \geqslant R$, entonces $H(G(S_{n_r}, t_{n_r}), S) < 3\varepsilon$; por tanto $\lim\limits_{r \to \infty} G(S_{n_r}, t_{n_r}) = G(S, 0) = S$. Por lo anterior, en este caso, G es continua.

De ambos casos concluimos que G es continua. $\square$

4.2. La función G_1

Definición 4.2.1. Sea $(X, \diamondsuit)$ una dendrita. Definimos la segunda función auxiliar $G_1 : S_c(X) \times [0,1] \to S_c(X)$ como:

$$G_1(S, t) = G(S, t) \cup S.$$

Una vez seleccionados los puntos de propagación $G(S,t)$ debemos comenzar a movernos en el hiperespacio $S_c(X)$. Ese es precisamente el trabajo de G_1. Fácilmente uno podría creer que ésta es la función que nos permite contraer a todo $S_c(X)$, pero no es así: el punto al cual llegamos $\big(G_1(S,1)\big)$ depende totalmente del punto de partida $\big(G_1(S,0)\big)$.

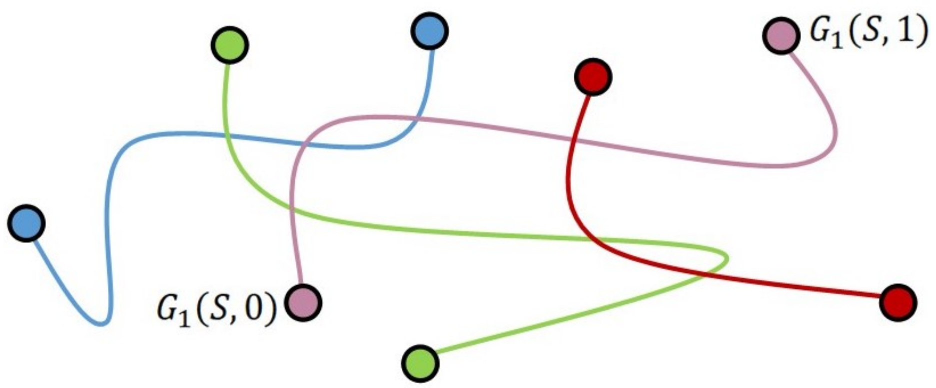

Figura 4.6: Distintas trayectorias en $S_c(X)$

Observación 4.2.2. *Sean $(X, \diamondsuit)$ una dendrita y $(S,t) \in S_c(X) \times [0,1]$. Entonces $G_1(S,t) \in K(X)$.*

Lo anterior se debe a que si $t = 0$, entonces $G_1(S,0) = S \in K(X)$. Además, si $t > 0$, tenemos, por (1) de la Proposición 4.1.5, que $G(S,t) \in F(X)$; es decir, $G(S,t) \in K(X)$. Por lo tanto, $G_1(S,t) \in K(X)$.

Observación 4.2.3. *Sea $S \in S_c(X)$. Como $G(S,0) = S$, tenemos que $G_1(S,0) = G(S,0) \cup S = S$. Además, por (2) de la Proposición 4.1.5, $G_1(S,1) = G(S,1) \cup S = \{p_0\} \cup S$.*

Proposición 4.2.4. Sea $(X, \diamondsuit)$ una dendrita. Si $(S,t) \in S_c(X) \times [0,1]$, entonces $G_1(S,t) \in S_c(X)$.

Demostración. Si $t = 0$, entonces $G_1(S,0) = G(S,0) \cup S = S \in S_c(X)$. Por ello consideremos $t>0$. Por (1) de la Proposición 4.1.5, $G(S,t) \in F(X)$. Definimos $k = \mid G(S,t) \setminus S \mid$ y $G(S,t) \setminus S = \{x_1, ..., x_k\}$.

Como $S \in S_c(X)$, existe $\Phi : \Omega \to S$ un homeomorfismo. Sean $s_0 = \Phi(0)$ y, para toda $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \Phi(\frac{1}{n})$. Definimos $F : \Omega \to G_1(S,t)$ como sigue:

$$F(n) = \begin{cases} x_m, & si \quad n \in \{1, \dots, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{k}\}, \\ s_0, & si \quad n = 0, \\ \Phi(\frac{1}{m}), & si \quad n \in \{\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots, \frac{1}{k+m}, \dots\}. \end{cases}$$

No es difícil notar que F está bien definida y que es biyectiva. Veamos que F es continua.

Por el Lema 1.2.8, podemos demostrar la continuidad de F mediante subsucesiones. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Ω convergente a un punto $z \in \Omega$. Como $G_1(S,t)$ es compacto, $\{F(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente $\{F(z_{n_m})\}_{m=1}^{\infty}$ a un punto $y \in G_1(S,t)$. Demostremos que $F(z) = y$. Si $z \neq 0$, entonces $\{z_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ se vuelve constante de valor z. Así, $\lim\limits_{m\to\infty} F(z_{n_m}) = F(z)$. Como $G_1(S,t)$ es T_2, $F(z) = y$. Si $z = 0$, entonces existe un momento $M \in \mathbb{N}$ a partir del cual los términos son mayores o iguales a $\frac{1}{k+1}$. Entonces $\lim\limits_{m\to\infty} F(z_{n_m}) = \lim\limits_{m\to\infty} \Phi(z_{n_m}) = \Phi(z)$, pues Φ es continua. Como $G_1(S,t)$ es T_2, $F(z) = y$.

Hemos demostrado que $\lim\limits_{m\to\infty} F(z_{n_m}) = F(z)$. Por lo tanto, F es continua.

Veamos que F es un homeomorfismo. Notemos que Ω es compacto y que $G_1(S,t)$ es T_2. Por la Proposición 2.3.1, F es cerrada. Así, F es un homeomorfismo. Concluimos que $G_1(S,t) \in S_c(X)$. $\square$

Proposición 4.2.5. Sea $(X, \diamondsuit)$ una dendrita. Entonces G_1 es continua.

Demostración. Sean $\{(S_n,t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $S_c(X) \times [0,1]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n,t_n) = (S,t)$ y $\varepsilon>0$. Como G es continua, $\lim\limits_{n\to\infty} G(S_n,t_n) = G(S,t)$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N$, se cumple que $H(S_n,S)<\varepsilon$ y $H(G(S_n,t_n),G(S,t))<\varepsilon$. Por el Lema 2.1.15, $H(G(S_n,t_n) \cup S_n, G(S,t) \cup S) = H(G_1(S_n,t_n), G_1(S,t))<\varepsilon$. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} G_1(S_n,t_n) = G_1(S,t)$; es decir, G_1 es continua. $\square$

4.3. La función G_2

Desde la mitad del Capítulo 3, hemos estado considerando un punto fijo p_0 en X, sin embargo, es hasta este momento cuando podemos apreciar el papel que va a desempeñar.

Sea $(X, \diamondsuit)$ una dendrita y fijamos un punto $q_0 \in X \setminus \{p_0\}$. Definimos $e_0 = \diamondsuit(p_0,q_0)$. Como $\diamondsuit$ es convexa, existe una isometría $\Psi : [0,e_0] \to X$ tal que $\Psi(0) = p_0$ y $\Psi(e_0) = q_0$. Por el Lema 3.1.11, $\Psi([0,e_0]) \approx_i [0,e_0]$. Como X es una dendrita, $p_0q_0 = \Psi([0,e_0])$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $p_n = \Psi(\frac{1}{n}e_0)$. Así, $p_n \in p_0q_0$. Definimos $S_0 = \{p_0, p_1, p_2, ...\}$. Por lo tanto, $\lim S_0 = p_0$.

Como $S_0 \approx \Omega$, tenemos que $S_0 \in S_c(X)$. Con esto en mente ya podemos definir a G_2.

Definición 4.3.1. Sean $(X, \diamondsuit)$ una dendrita y $q_0 \in X \setminus \{p_0\}$. Definimos a la tercera función auxiliar $G_2 : p_0q_0 \times [0,1] \to X$ como $G_2(p,t) = \Psi(t\diamondsuit(p_0,p))$. Podemos pensar a G_2 como la función que “encoje” subarcos de p_0q_0.

Observación 4.3.2. *Notemos que $\diamondsuit$ y Ψ son funciones continuas (pues $\diamondsuit$ es una métrica y por la Definición 3.1.1). Además, la función que toma valores en $(\mathbb{R}, d_R)$ y los multiplica, también es continua. Así, G_2 es continua al ser la composición de tres funciones continuas.*

4.4. La función G_3

Definición 4.4.1. Sea $(X, \diamondsuit)$ una dendrita. Definimos la última función auxiliar $G_3 : S_c(X) \times [0,1] \to S_c(X)$ como:

$$G_3(S,t) = G(S,t) \cup G_2(S_0 \times \{t\}).$$

La búsqueda por hacer que cada trayectoria $G_1(S \times [0,1])$ termine en el mismo elemento, nos hace primero definir dicho elemento. Lo definimos en la sección pasada, lo llamamos S_0. Notemos que G_3 hace el "último" movimiento: va a concluir lo que empezó G_1 partiendo desde donde lo dejo; es decir, $G_1(S,1) = \{p_0\} \cup S = G_3(S,0)$.

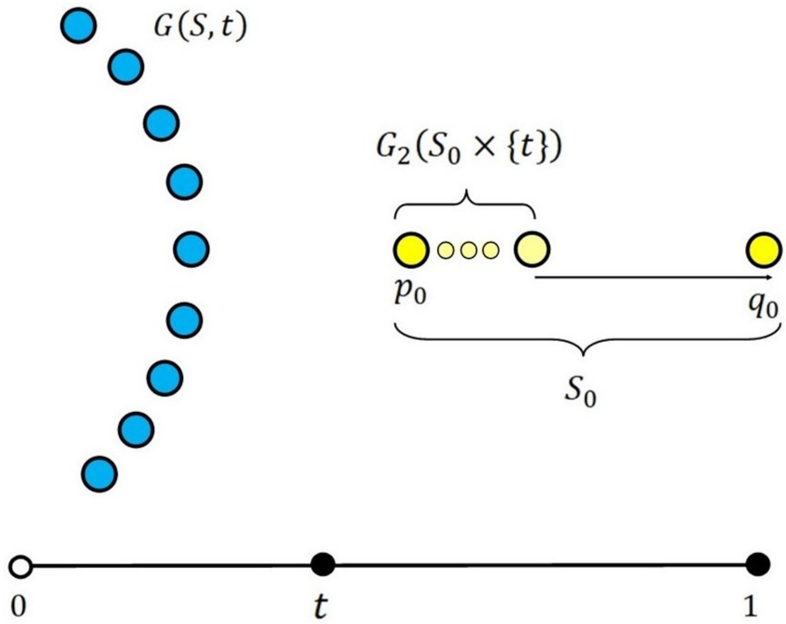

Figura 4.7: El movimiento visto en X se puede expresar de la siguiente forma: vamos a tomar los puntos de propagación $\big(G(S,t)\big)$ y, en $t = 0$, vamos a unirles $\{p_0\}$; en $t = 1$, vamos a unirles a todo S_0.

Observación 4.4.2. *Sean $(X, \diamondsuit)$ una dendrita y $(S,t) \in S_c(X) \times [0,1]$. Entonces $G_3(S,t) \in K(X)$. Partiendo del hecho de que $G_2(S_0 \times \{t\}) \in K(X)$, tenemos que la argumentación es similar a la de la Observación 4.2.2.*

Proposición 4.4.3. Sean $(X, \diamondsuit)$ una dendrita y $(S,t) \in S_c(X) \times [0,1]$. Entonces:

(1) $G_3(S,t) \in S_c(X)$;

(2) $G_3(S,0) = \{p_0\} \cup S$;

(3) $G_3(S,1) = S_0$.

Demostración. Demostremos (1). Consideremos los siguientes casos.

Caso 1 $t>0$. Como $G_2(S_0 \times \{t\}) \approx S_0 \approx \Omega$ y $G(S,t)$ es finito, podemos proceder de manera análoga a la prueba vista en la Proposición 4.2.4 para concluir que $G_3(S,t) \in S_c(X)$.

Caso 2 $t = 0$. En este caso $G_3(S,t) = G(S,0) \cup \{p_0\} = S \cup \{p_0\}$. Procediendo de manera análoga a la prueba vista en la Proposición 4.2.4 concluimos que $G_3(S,t) \in S_c(X)$.

Demostremos (2). Basta notar que $G_3(S,0) = G(S,0) \cup G_2(S_0 \times \{0\}) = S \cup \{p_0\}$.
Demostremos (3). Basta notar que $G_3(S,1) = G(S,1) \cup G_2(S_0 \times \{1\}) = \{p_0\} \cup S_0 = S_0$.
□

Proposición 4.4.4. Sea $(X, \diamondsuit)$ una dendrita. Entonces G_3 es continua.

Demostración. Sean $\{(S_n,t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $S_c(X) \times [0,1]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n,t_n) = (S,t)$ y $\varepsilon>0$. Como G es continua, $\lim\limits_{n\to\infty} G(S_n,t_n) = G(S,t)$. No es difícil probar que $\lim\limits_{n\to\infty} G_2(S_0 \times \{t_n\}) = G_2(S_0 \times \{t\})$. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N$, entonces $H(G(S_n,t_n), G(S,t))<\varepsilon$ y $H(G_2(S_0 \times \{t_n\}), G_2(S_0 \times \{t\}))<\varepsilon$. Por el Lema 2.1.15, $H(G(S_n,t_n) \cup G_2(S_0 \times \{t_n\}), G(S,t) \cup G_2(S_0 \times \{t\})) = H(G_3(S_n,t_n), G_3(S,t))<\varepsilon$. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} G_3(S_n,t_n) = G_3(S,t)$; es decir, G_3 es continua. □

4.5. Contracción

Definición 4.5.1. Sea $(X, \diamondsuit)$ una dendrita. Definimos a $\mathfrak{F} : S_c(X) \times [0,1] \to S_c(X)$ como:

$$\mathfrak{F}(S,t) = \begin{cases} G_1(S,2t), & si \quad t \in [0, \frac{1}{2}], \\ G_3(S,2t-1), & si \quad t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Es claro que si $t = \frac{1}{2}$, entonces $\mathfrak{F}(S, \frac{1}{2}) = G_1(S,1) = \{p_0\} \cup S = G_3(S,0)$. Además, por el Teorema 1.2.9, $\mathfrak{F}$ es continua.

Para concluir este trabajo, demostremos las siguientes propiedades de $\mathfrak{F}$.

1 .- $\mathfrak{F}(S,0) = Id_{S_c(X)}(S) = S$.
Basta notar que $\mathfrak{F}(S,0) = G_1(S,2(0)) = G_1(S,0) = G(S,0) \cup S = S$.

2 .- $\mathfrak{F}(S,1) = C_{S_0}(S_0) = S_0$.
Basta notar que $\mathfrak{F}(S,1) = G_3(S,2(1)-1) = G_3(S,1) = G(S,1) \cup G_2(S_0 \times \{1\}) = \{p_0\} \cup S_0 = S_0$.

Por la Observación 2.2.5, concluimos que $S_c(X)$ es contráctil.

A continuación, veremos un esquema llamado “El Árbol” en donde se puede observar cada movimiento que compone a $\mathfrak{F}$. Así como un breve resumen de todos los movimientos que hizo.

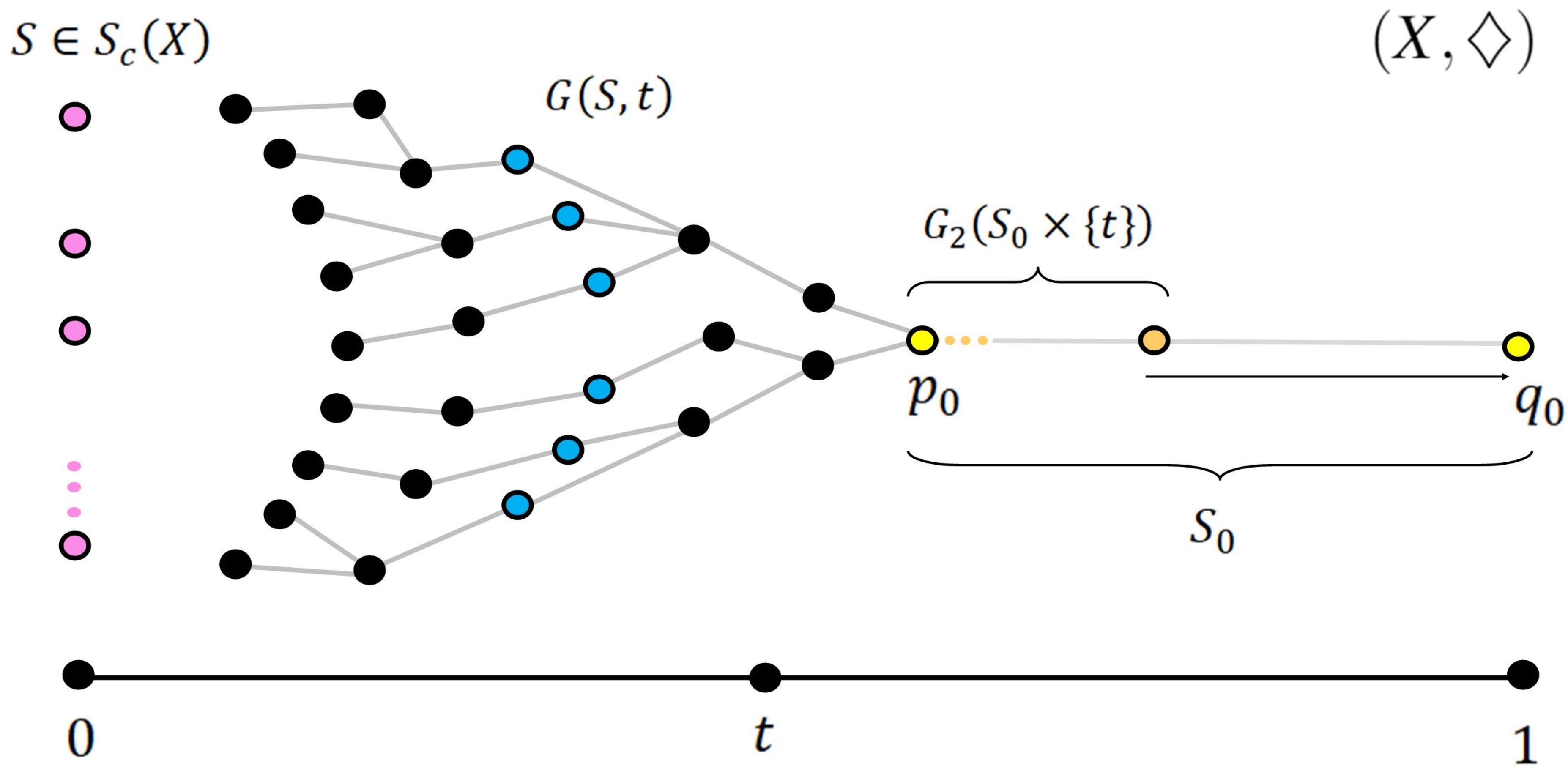

Figura 4.8: El Árbol. Aquí podemos observar distintos movimientos que conforman a la contracción: comenzamos con el conjunto S al cual le uniremos los puntos de propagación $\big(G(S,t)\big)$ hasta que lleguen a ser un único punto $\big(\{p_0\}\big)$. Cuando t es más grande que $\frac{1}{2}$, el conjunto S "desaparece" y toma su lugar el conjunto $G_2(S_0 \times \{t\})$. Además, los puntos de propagación se vuelven a "reiniciar"; es decir, harán el mismo comportamiento del inicio y lo harán mientras $G_2(S_0 \times \{t\})$ se "alarga" lo suficiente para convertirse en S_0.

Bibliografía

[1] T. Banakh; P. Krupski; K. Omiljanowski, *Hyperspaces of Countable Compacta*, Preprint, (2022)

[2] R. Bing, *Partitioning a set*, Bull. Amer. Math. Soc., **55** (1949), 1101-1110.

[3] F. Casarrubias Segura; A. Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas: Textos, **37**, Sociedad Matemática Mexicana, México; Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2012.

[4] R. Engelking, *General Topology*, Revised and completed edition, Sigma Series in Pure Mathematics, **6**, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] S. García-Ferreira; Y. F. Ortiz-Castillo, *The hyperspace of convergent sequences*, Topology Appl. **196** (2015), part B, 795-804.

[6] A. Illanes, *The hyperspace of sequences of a dendrite is contractible*, Topology Proc., **56** (2019), 57-70.

[7] A. Illanes; S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1999.

[8] E. E. Moise, *Grille decomposition and covexification theorems for compact metric locally connected continua*, Bull. Amer. Math. Soc., **55** (1949), 1111-1121.

[9] J. R. Munkres, *Topología*, Segunda edición, Pearson Educación, S. A., Madrid, 2002.

[10] S. B. Nadler, Jr., *A characterization of locally connected continua by hyperspace retractions*, Proc. Amer. Math. Soc., **67** (1977), no.1, 167-176.

[11] S. B. NadleR, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol.158, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1992.

[12] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol.49, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1978.