



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Una introducción a los juegos de congestión:
Un caso de estudio de la optimización
de la infraestructura eléctrica

T E S I S

PRESENTA:

Lucía Itzel Rovelo Benítez

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuaria

TUTOR:

Dr. Frank Patrick Murphy Hernández

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2022





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del Jurado

1. Datos de la alumna:

Apellido paterno: Roveló

Apellido materno: Benítez

Nombre(s): Lucía Itzel

Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad: Facultad de Ciencias

Carrera: Actuaría

Número de cuenta: 313117987

2. Datos del tutor:

Grado: Doctor

Nombre(s): Frank Patrick

Apellido paterno: Murphy

Apellido materno: Hernández

3. Datos del sinodal 1:

Grado: Doctor

Nombre(s): Yuri

Apellido paterno: Salazar

Apellido materno: Flores

4. Datos del sinodal 2:

Grado: Licenciada

Nombre(s): Claudia

Apellido paterno: Villegas

Apellido materno: Azcorra

5. Datos del sinodal 3:

Grado: Licenciada

Nombre(s): Gabriela

Apellido paterno: García

Apellido materno: Verde

6. Datos del sinodal 4:

Grado: Licenciado

Nombre(s): Héctor

Apellido paterno: Gonzalez

Apellido materno: Alvarado

7. Datos de la tesis:

Título: Una introducción a los juegos de congestión: Un caso de estudio de la optimización de la infraestructura eléctrica

Número de páginas: 81 p.

Fecha: Ciudad Universitaria, CD. MX., 2022

Dedicado a mi mamá, a mi papá y a mi hermano.

Agradecimientos

A mi mamá, por la motivación, el apoyo y el amor. A mi papá, por el respaldo, el cariño y los ánimos. A mi hermano, por la complicidad y la incondicionalidad. A mi familia, mi abuelita, mi tía Tenchy, Ale, mi tío Benja, mi tía Maru, Ale, Arturo, Cristi, Eri, Martis, Viole, Carlos y Said, por escucharme y abrazarme.

A mis personas, Víctor, Paco, Dany, Charly, Alan, Carlos, Tania, Julio, Marco, Eduardo y Eli por los desayunos, las risas, los consejos, las pláticas, las retas, las clases, las fiestas, las películas y por caminar a mi lado.

A la Dra. Laura por siempre enseñarme, por la calidez y por brindarme su perspectiva desde la empatía, el respeto y el cariño.

A Alejandro Blanco-Moreno, por compartirme su experiencia, complementar ideas y por el apoyo.

Al Dr. Frank P. Murphy y a mis sinodales por guiarme en la realización de este trabajo, por resolver mis dudas y por brindarme su conocimiento, tiempo y paciencia.

Índice general

Resumen	XI
Introducción	XII
1 Antecedentes	1
1.1 La teoría de juegos	1
1.2 Juegos de congestión	2
1.2.1 Ejemplos de juegos de congestión	4
2 Preliminares Técnicos	7
2.1 Redes	7
2.1.1 Gráficas	7
2.1.2 Flujos	9
2.2 Juegos	10
2.2.1 Equilibrio de Nash	16
2.2.2 Precio de la anarquía	16
3 Juegos de congestión	19
3.1 Juegos de congestión sin peso	20
3.1.1 Juegos de congestión en redes	21
3.1.2 Juegos de potencial exacto	23
3.1.3 Juegos de coordinación	23
3.1.4 Juego dummy	24
3.1.5 Isomorfismo entre juegos	25
3.2 Juegos de congestión con peso	29
3.2.1 Juegos potenciales con peso	33

3.2.2	Conjunto consistente de funciones de costo	33
4	Cuotas en juegos de congestión	38
4.1	Cuotas	42
5	Caso de estudio	48
5.1	Reforma Energética	48
5.2	Mercado de energía	50
5.2.1	Mercado Eléctrico Mayorista	50
5.2.2	Precio Marginal Local	52
5.2.3	Despacho económico	53
6	Caso práctico	55
7	Conclusiones	72
	Glosario	75
	Bibliografía	77

Índice de figuras

1.1	Ejemplo de Pigou.	4
1.2	Ejemplo de Fisk	5
2.1	Arcos vs Aristas	7
2.2	Ejemplo de flujo-(s,t)	9
2.3	Equilibrios múltiples de Nash en juegos de diseño de red Shapley. . .	18
3.1	Juego de Congestión	20
3.2	Paradoja de Braess	22
3.3	Función potencial	22
3.6	Juego de congestión con peso	30
3.7	Para una función afín la función potencial es independiente del orden de los jugadores.	31
3.8	Juego de congestión construido en la prueba del Lema 3.2.3	34
6.1	Representación gráfica de la conexión de los nodos I, II y III	60
6.2	Representación gráfica del envío de más de 100 MWh a un centro de carga	62
6.3	Representación gráfica del envío máximo a cada nodo	62

Índice de tablas

2.1	Conjunto de arcos de entrada, conjunto de arcos de salida y valor de la Figura 2.2	9
2.2	Representación Estratégica del Dilema del Prisionero	11
2.3	Representación estratégica del ejemplo Águila o Sol	14
3.1	Representación estratégica de la Batalla de los sexos	24
4.1	Representación estratégica de las Figuras 4.1a y 4.1b	39
6.1	Capacidad y costo de cada planta para el ejemplo 17	55
6.2	Ejemplos de combinaciones posibles para el ejemplo 17	56
6.3	Capacidad, despacho mínimo y costo de cada planta para el ejemplo 18	57
6.4	Soluciones factibles para el ejemplo 18	57
6.5	Capacidad y costo asociado a la venta íntegra, despacho mínimo y costo correspondiente para el ejemplo 19	58
6.6	Ejemplos de las combinaciones posibles del ejemplo 19	58
6.7	Demanda, capacidad y costo de los nodos I, II y III	59
6.8	Generación, suministro y costos del ejemplo 20	60
6.9	Generación, suministro y costos del ejemplo 21	63
6.10	Demanda, capacidad, costo y despacho mínimo del ejemplo 22	63
6.11	Generación, suministro y costos del ejemplo 22	64
6.12	Generación, suministro y costos del ejemplo 23	64
6.13	Demanda, capacidad y costo del ejemplo 24	65
6.14	Generación, suministro y costos del ejemplo 24	65
6.15	Demanda, capacidad, costo y despacho mínimo de los nodos I, II y III	66
6.16	Generación, suministro y costos del ejemplo 25	66

6.17 PML del ejemplo 25	67
6.18 Demanda, capacidad, costo y despacho mínimo del ejemplo 26	67
6.19 Generación, suministro y costos del ejemplo 26	68
6.20 PML' del ejemplo 26	68
6.21 Componente de congestión prima del ejemplo 26	69
6.22 Datos obtenidos al utilizar el Teorema 4.1.1	70
6.23 PML del ejemplo 26	71
6.24 Generación, costo de transmisión y costo total del ejemplo 26	71

**Una introducción a los juegos de
congestión: Un caso de estudio de la
optimización de la infraestructura
eléctrica**

Lucía Itzel Roveló Benítez

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE

Actuaria

EN

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. 2022

Introducción

Desde el tiempo del Imperio Romano se demostró el beneficio de las redes de transporte para una sociedad. Estas redes fueron uno de los importantes factores que permitieron la grandeza del Imperio Romano. Como éste, se pueden encontrar numerosos ejemplos que no dejan lugar a duda de la necesidad de las redes de transporte. Cabe mencionar que, en el ejemplo anterior, la red de transporte también correspondía a la red de comunicación. Visto así que, estas redes están basadas en una infraestructura física que soporta servicios brindados a la sociedad. Además, estas redes son usadas por más de un usuario o agentes (entendiendo agentes como naciones o compañías), lo que conlleva al conflicto. El objetivo de la tesis no es estudiar este tipo de conflictos, sino suponer que tienen alguna solución acordada por las diferentes entidades que recurren a la red y optimizar dicha solución bajo un concepto preestablecido de bien común.

El término *sistema sociotécnico* se refiere a aquel sistema con un enfoque dual en la infraestructura tecnológica y el tejido social; su objetivo es el diseño eficaz de la organización de dichos conceptos a través de la optimización conjunta e interdependiente [1]. La operación de estos requiere la consideración de factores interdisciplinarios económicos, tecnológicos y de las ciencias sociales, conceptos estudiados en la teoría de juegos [2].

Los sistemas sociotécnicos surgen junto con un gran número de aplicaciones, dentro de las que se incluyen: plataformas de servicios vehiculares compartidos en donde ambos, usuarios y conductores, utilizan la infraestructura vehicular a través de rutas óptimas respecto a la demanda en línea y la ubicación de los vehículos considerando también los accidentes en el camino, las horas de mayor demanda junto con las rutas más transitadas, el tráfico, la afluencia, etc... [3]; las redes de trans-

misión eléctrica, donde la demanda de los consumidores determina la producción instantánea de energía incluyendo la congestión, el almacenamiento y la capacidad de la red así como la consulta de precios en tiempo real [4]; programación en la nube adaptable a diversos entornos computacionales designando de manera dinámica y proporcional al tiempo de respuesta y los recursos para los consumidores de acuerdo a su presupuesto [5]; redes de tránsito para las que se estima la distribución óptima de flujo de vehículos de acuerdo a la calidad de las rutas así como de la densidad del flujo [6]; entre otras.

Un problema común que surge en estos escenarios es la degradación del rendimiento cuando los objetivos individuales de los usuarios no están alineados con el “bien común”. Este fenómeno ha sido estudiado extensivamente dentro de las ciencias del medio ambiente y es conocido como “tragedy of the commons” [7]. Un buen ejemplo que describe cómo el comportamiento de los usuarios degrada el desempeño de la infraestructura física está dado por las redes de tránsito. En él se puede ver que, cuando los conductores eligen rutas que minimizan el tiempo de viaje individual, la congestión agregada podría ser mucho mayor en comparación a la de una política de rutas impuesta. Una estrategia para abordar este problema es influenciar el comportamiento de los usuarios a través del diseño apropiado de incentivos, como se ha abordado en la literatura para los campos de economía y ciencias de la computación ([8]- [10]).

Caso de estudio en el Mercado Eléctrico Mayorista

Después de la Reforma Energética de 2013, el sector energético tuvo una apertura de mercado que permitió la participación del sector privado en la generación y comercialización de electricidad. Algunos de sus objetivos fueron brindar mayor abastecimiento energético a mejores precios, considerar el desarrollo con responsabilidad social y ambiental así como, garantizar la operación continua y eficiente.

A partir de dicha reforma se creó el Mercado Eléctrico Mayorista (MEM), en el que, a través del despacho económico, se establecen los precios de la electricidad al coincidir la oferta de las generadoras con la demanda de los clientes. Los precios del MEM están dados por los Precios Marginales Locales (PMLs), los cuales son

precios nodales y comprenden la suma de los componentes de energía, pérdida y congestión. La finalidad de estos componentes es que el precio capture, además del costo marginal de generar electricidad, señales económicas que indiquen qué tan saturadas se encuentran las redes del sistema así como, el nivel de pérdidas en la transmisión.

El despacho económico corresponde a la determinación de la producción óptima de las instalaciones de generación para satisfacer la demanda del sistema al menor costo posible donde, los PMLs son consecuencia directa de este proceso. Debido a la naturaleza de los conceptos anteriores, en este trabajo se planteó un modelo, utilizando juegos de congestión, con el cual se realizó una interpretación económica y financiera de los componentes que conforman dichos precios.

En el capítulo 1 se presenta la historia de la teoría de juegos a través de los resultados más importantes, sus autores y sus campos de aplicación. Posteriormente se plantea el problema de transporte que dio origen a los juegos de congestión y se desarrollan 2 ejemplos contraintuitivos.

En el capítulo 2 se muestran las bases técnicas para poder introducir los modelos de juegos de congestión a través de los conceptos de teoría de redes y teoría de juegos. Se definen formalmente los siguientes términos: gráfica, vértice, arista, digráfica, arco, camino, ruta, gráficas con arcos paralelos, gráficas mixtas, flujo, juego, jugador/usuario/participante, estrategia, estrategia jugada, función que determina el resultado del juego o función de pagos/costos, representación estratégica, resultados estables, juegos simultáneos de una oportunidad, preferencia débil, solución de estrategia dominante, equilibrio de Nash, precio de la anarquía, entre otros. Se determina que se hablará de juegos atómicos no cooperativos cuando se refiera al término juego. Se enuncian los ejemplos más conocidos de teoría de juegos como: el Dilema del Prisionero así como su versión multijugador, Tragedy of the commons y una subasta de segundo precio (subasta de Vickrey).

En el capítulo 3 se definen formalmente los juegos de congestión. Se hará una división general entre juegos de congestión con y sin peso y, se darán tanto definiciones formales como descripción y ejemplificación a éstas. Encontrándose aquí los juegos de potencial exacto, los de coordinación, la Paradoja de Braess y la Batalla

de los Sexos. También se enuncian teoremas que relacionan isomorfismos entre juegos de coordinación, juegos dummy, juegos de potencial exacto, equilibrio de Nash, funciones de costo, consistencia, funciones afines y exponenciales.

En el capítulo 4 se desarrolla la teoría de cuotas en juegos de congestión introduciendo los términos: función de tiempo de viaje, función de cuota dependiente de la congestión, costo del sistema, estrategia ineficiente, estrategia óptima/eficiente, precio de la anarquía. Los términos anteriormente mencionados son interpretados conjuntamente en un ejemplo donde, se obtienen 4 casos distintos a través de la comparación de estas características. Y se enuncia el Teorema de Cuotas Óptimas Locales que muestra un mecanismo de impuestos locales que minimiza el precio de la anarquía.

El capítulo 5 brinda el contexto del caso de estudio, abordando los cambios proporcionados por la Reforma Energética de 2013 en México. A lo largo del apartado se habla acerca de los mercados de energía, del Mercado Eléctrico Mayorista (MEM), del Precio Marginal Local (PML) y sus componentes así como, del despacho económico.

El capítulo 6 desarrolla el caso práctico, donde se modelará un juego de congestión y, junto con los conceptos de los capítulos anteriores, se determinarán los tres componentes del PML considerando también los costos de transmisión.

Por último, en el capítulo 7 se encuentran las conclusiones. Haciendo un análisis del componente de congestión de los PMLs como mecanismo para incentivar al mercado eléctrico.

Posteriormente se anexa una glosario que incluye la notación utilizada a lo largo de los capítulos junto con una breve descripción de dichos conceptos.

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. La teoría de juegos

La teoría de juegos se dedica a crear modelos matemáticos de conflicto y cooperación entre tomadores de decisiones inteligentes y racionales.

Uno de los primeros antecedentes de la teoría de juegos corresponde a una carta escrita por C. Waldegrave en 1713. En esta carta, el autor proporciona una solución mínima de estrategia mixta en la versión para dos personas del juego de cartas francés *le Her* [11], [12]. En 1838, A. Cournot, el matemático que comenzó la sistematización formal de la economía, así como uno de los precursores de las teorías económicas del oligopolio, publicó un análisis teórico de teoría de juegos en general en el que se considera un duopolio, donde el producto es homogéneo, y se presenta un equilibrio de Nash como una solución.

La teoría de juegos moderna comenzó con el trabajo de E. Zermelo en 1913, quien probó que la estrategia de ajedrez óptima es estrictamente determinada [13]. Más tarde, H. Steinhaus propuso una definición formal inicial para el concepto de *estrategia* [14]. Sin embargo, la unificación de la teoría de juegos se dio después de que J. von Neumann publicó una serie de artículos en 1928 en los que propuso y demostró el Teorema minimax, en donde se afirma que en los juegos bipersonales de suma cero, donde cada jugador conoce de antemano la estrategia de su oponente y sus consecuencias, existe una estrategia que permite a ambos jugadores minimizar la pérdida máxima esperada [15]. Posteriormente, en 1938 E. Borel realizó publi-

caciones en las que conjeturó la existencia de equilibrios para una estrategia mixta en juegos de suma cero con 2 jugadores [16]. Finalmente, se hizo la publicación del gran libro seminal “Theory of Games and Economic Behavior” de J. von Neumann y O. Morgenstern [17]. Muchos de los primeros trabajos respecto a teoría de juegos fueron desarrollados durante la Segunda Guerra Mundial en Princeton.

A pesar de haber comenzado con un enfoque dirigido a la teoría económica, debido a la adaptabilidad del comportamiento irracional o resultados inesperados estudiados, la teoría de juegos tiene aplicaciones en disciplinas como ciencias políticas, biología, ciencias de la computación, sociología, etc...

1.2. Juegos de congestión

En 1973, el economista R. Rosenthal propuso los juegos de congestión en teoría de juegos [18], donde el pago (o análogamente, el costo) de cada jugador dependerá tanto de los recursos que elija como del número de jugadores que también lo hagan.

Los juegos de congestión surgen como resultado de plantear el siguiente problema. Se considera una red de tráfico en donde dos conductores se encuentran en el vértice origen s y quieren ir al vértice destino t . Se supondrá que s está conectado con t a través de los puntos de conexión u y w , con u más cercano a t que w es decir, la probabilidad que cualquier jugador elija u es mayor. Sin embargo, ambos puntos de conexión se congestionan fácilmente debido a que entre más jugadores pasan a través del punto de conexión, el tiempo para llegar al destino de cada jugador incrementa, por lo que si ambos jugadores pasan al mismo tiempo por el mismo punto tendrán mayor demora.

Algunas aplicaciones para los juegos de congestión son: dispersión animal [19], mercado de energía [20], programación de máquinas [21], redes de datos inalámbricos [22], asignación y distribución de sensores [23], diseño de redes [24], entre otras.

Antes de mencionar algunos ejemplos clásicos de juegos de congestión, se hará una breve introducción a los conceptos Equilibrio de Nash y Precio de Anarquía.

Equilibrio de Nash

Llamado así por el matemático estadounidense John Nash quien, a pesar de no haber inventado el concepto de *equilibrio* él mismo, aplicó esta idea para el análisis matemático en la teoría de juegos.

El concepto de equilibrio de Nash comienza su desarrollo con A. Cournot y su trabajo sobre oligopolios de 1838. En éste se plantea el modelo de diversas empresas que compiten por el mercado de un mismo bien y que pueden elegir cuánto producir para intentar maximizar su ganancia en función de la producción de las otras [25].

El equilibrio de Nash corresponde al concepto de solución para juegos con dos o más jugadores, en los cuales se supone que cada jugador conoce y ha adoptado su mejor estrategia, y todos los jugadores conocen las estrategias de las demás. Por ende, cada jugador no gana nada modificando su estrategia mientras los otros mantengan las suyas. Es decir, ningún jugador tiene incentivos para modificar individualmente su estrategia [26].

Es importante tener presente que un equilibrio de Nash no implica que se logre el mejor resultado conjunto para los participantes, sino solo el mejor resultado para cada uno de ellos personalmente. Hay que notar que es posible obtener un mejor resultado para todos si, de alguna manera, los jugadores coordinaran sus acciones.

Se denotará por Q^{Nash} al costo social incurrido en el equilibrio de Nash. Donde el costo social corresponde a la suma de los costos incurridos por todos los jugadores en el equilibrio de Nash.

Precio de la anarquía

El equilibrio de Nash puede ser ineficiente. Así, en 1999 E. Koutsoupas y C. Papadimitriou introdujeron el concepto de *proporción de coordinación* [27], más tarde conocida como *precio de la anarquía* y denotado por PA , para cuantificar la pérdida de eficiencia del equilibrio de Nash. El precio de la anarquía corresponde a la relación del “peor caso” calculando la proporción entre la peor función objetivo del equilibrio en un juego (Q^{Nash}) y un resultado óptimo (Q^{Opt}).

Para obtener el precio de la anarquía, se hará la siguiente fracción

$$PA = \frac{Q^{Nash}}{Q^{Opt}}$$

1.2.1. Ejemplos de juegos de congestión

Ejemplo 1. (Ejemplo de Pigou [28]) Se considerará una red como la que se muestra en la Figura 1.1, donde se encuentran los vértices s y t correspondientes al origen y destino, respectivamente. Cada recurso está modelado por un arco y se encuentra etiquetado con la función de costo $c(\cdot)$, la cual describe el costo incurrido por los usuarios del arco, como una función de la cantidad de tráfico o tiempo de viaje a través del arco. El arco superior a tiene una función de costo constante con $c_a(x) = 1$, y representa una ruta relativamente larga pero inmune a congestionarse. Mientras que el arco inferior b tiene una función de costo asociada de $c_b(x) = x$, que toma valores más elevados al congestionarse el arco b .

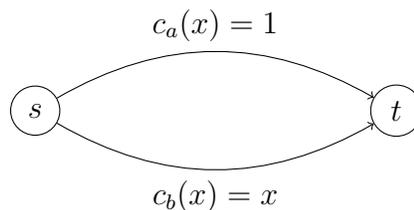


Figura 1.1: Ejemplo de Pigou.

Suponiendo un gran número de jugadores, cuyo peso individual es despreciable pero cuyo peso es de 1 considerándolos a todos en conjunto, cada uno debe elegir pasar por el arco a o por el arco b de manera independiente partiendo del nodo s para llegar a su destino en el nodo t . Se supone que cada jugador busca minimizar sus costos, por lo que cada uno elige pasar a través del arco b debido a que $c_b(x) \leq 1$. Así, todos los jugadores eligen la estrategia antes descrita y ninguno querrá cambiar su estrategia ya que esto resultaría en un costo más elevado, por lo que se alcanzará un equilibrio de Nash. De lo anterior se tiene que $Q^{Nash} = 1$, es decir todos los jugadores incurren en una unidad del costo.

Por otro lado, el costo óptimo está dado al dividir equitativamente el tráfico entre ambos arcos a y b , en donde la mitad de los jugadores tomarán el arco a incurriendo

en un costo de 1, mientras que la otra mitad pagará la mitad de unidades de costo al pasar por el arco b . Es decir,

$$Q^{opt} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Retomando ambos resultados se obtuvo como resultado óptimo un costo promedio de tráfico de $Q^{Opt} = 3/4$. Mientras que el costo social en el equilibrio de Nash fue de $Q^{Nash} = 1$. Al realizar la comparación entre estos se tiene $Q^{Nash} > Q^{Opt}$. Donde, el precio de la anarquía es $PA = 1/(3/4) = 4/3$.

Ejemplo 2. (Ejemplo de Fisk [29]) En este ejemplo existen tres pares de origen-destino: (s,t) , (s,r) , (t,r) , como se muestra en la Figura 1.2.

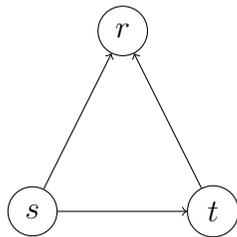


Figura 1.2: Ejemplo de Fisk

Hay que notar que únicamente los usuarios que se encuentren en s y quieran llegar a r pueden elegir entre dos rutas para llegar al destino, y que los demás usuarios tienen una sola opción.

Los usuarios a los que les gustaría ir de s a t forman un flujo total de 100. Mientras que el flujo total asociado al par de origen-destino (s,r) es 20 y el asociado al (t,r) es 1.

Suponiendo que los usuarios tienen las siguientes funciones de costo:

$$c_{st}(x) = x = c_{tr}(x) \quad y \quad c_{sr}(x) = x + 90.$$

El equilibrio es alcanzado cuando el flujo total de usuarios asociados al par origen-destino (s,r) está dividido de la siguiente manera: un flujo de 3 elige la ruta str y un flujo de 17 elige la ruta sr . El costo social, es decir, la suma de los costos incurrido por todos los usuarios es

$$Q^{Nash}(100, 20, 1) = (100 + 3) \times 103_{st} + 17 \times (17 + 90)_{sr} + (1 + 3) \times 4_{tr} = 12,444.$$

Suponiendo que el flujo total de usuarios con ruta- (t, r) incrementa de 1 a 4. El equilibrio es alcanzado cuando el flujo total de usuarios con par origen-destino (s, r) es dividido de la siguiente manera: un flujo de 2 elige la ruta str y un flujo de 18 elige la ruta sr . El costo social es $Q^{Nash}(100, 20, 4) = 12,384$.

Entonces $Q^{Nash}(100, 20, 1) > Q^{Nash}(100, 20, 4)$.

Esta paradoja muestra que algunas nociones intuitivas pueden no ser correctas: incrementando el número de usuarios en la red podría mejorar el costo del equilibrio.

Capítulo 2

Preliminares Técnicos

2.1. Redes

2.1.1. Gráficas

Una *gráfica* es un par $G = (V, \mathcal{E})$ donde V es un conjunto finito de *vértices* y \mathcal{E} una familia de *aristas*. Una *arista* es un subconjunto de V de dos elementos donde ambos elementos son distintos. Se denotará por uw o wu a aquella arista que relaciona los vértices $u, w \in V$.

Una *gráfica dirigida*, o *digráfica* para abreviar, es un par $D = (V, A)$ en el que V es un conjunto finito de *vértices* y A una familia de *arcos*. Un *arco* es una pareja ordenada de elementos de vértices. Para un arco $(u, q) \in A$, se dirá que éste es *arco de entrada* del vértice q y *arco de salida* del vértice u .

La diferencia entre *arcos* y *aristas* es que los primeros son pares de vértices ordenados y los segundos son no ordenados.

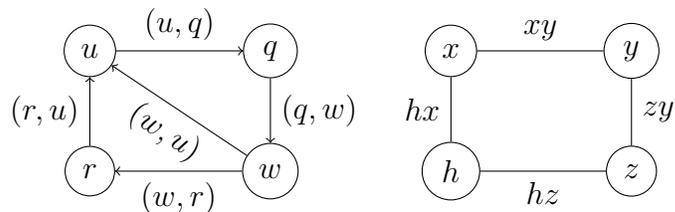


Figura 2.1: Arcos vs Aristas

Para un vértice v , se denota por $\Gamma^-(v)$ al conjunto de *arcos de entrada* de v y

$\Gamma^+(v)$ al conjunto de *arcos de salida* de v .

Un *camino* P en una gráfica dirigida D es una secuencia

$$P = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k)$$

donde $k \geq 0$, $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$ con v_0 el *inicio* del camino y v_k el *fin* del camino, $a_0, a_1, \dots, a_k \in A$ y $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ para $i = 1, \dots, k$. Cuando todos los v_i sean distintos, el camino será llamado *ruta*. Para $(s, t) \in V^2$, una *ruta*- (s, t) corresponderá a una ruta en la que se destaca el inicio y el final de la ruta, con $s = v_0$ y $t = v_k$. El conjunto de todas las rutas (resp. rutas- (s, t)) es denotado por \mathcal{R} (resp. $\mathcal{R}_{(s,t)}$).

Una gráfica $G' = (V', \mathcal{E}')$ es una *subgráfica* de una gráfica $G = (V, \mathcal{E})$ si $V' \subseteq V$ y $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$. Una gráfica G' es un *menor* de una gráfica G si G' es obtenida al contraer las aristas (posiblemente ninguna) de una subgráfica de G . *Contraer* una arista yz significa borrarla e identificar ambos *puntos finales*, y y z .

Los mismos conceptos coinciden para las definiciones de gráficas dirigidas.

Las *gráficas con arcos paralelos* son una clase especial de gráficas consideradas a menudo en juegos de congestión. Éstas representan un modelo de juegos en el cual los jugadores comparten un conjunto de recursos independientes.

Una gráfica con arcos paralelos hace referencia a la gráfica de oferta $G = (V, \mathcal{E})$ y a la digráfica de demanda $D = (V, L)$ donde $V = \{s, t\}$ tiene solamente dos elementos, cada arista de \mathcal{E} es una arista- $\{(s, t)\}$ y $L = \{(s, t)\}$ tiene un único elemento.

Se define a una *gráfica mixta* como una gráfica con aristas y arcos, de manera formal está representada por $M = (V, \mathcal{E}, A)$ donde V es un conjunto finito de vértices, \mathcal{E} es una familia de aristas y A la familia arcos. Dada una gráfica $G = (V, \mathcal{E})$, se definirá la *versión dirigida* de G como la digráfica $D = (V, A)$ obtenida al reemplazar cada arista de \mathcal{E} por dos arcos, uno de entrada y el otro de salida. En estas gráficas no se permiten *ciclos* – arcos o aristas que tienen puntos finales idénticos –, sin embargo, está permitido utilizar pares de vértices repetidos es decir, *arcos paralelos* o *aristas paralelas*. El concepto de subgráfica y menor se mantiene para gráficas mixtas.

Finalmente, sea $G = (V, \mathcal{E})$ una gráfica, $H = (T, L)$ una digráfica donde $T \subseteq V$, entonces $G + H$ denota la gráfica mixta (V, \mathcal{E}, L) .

2.1.2. Flujos

Dada una digráfica $D = (V, A)$ y $(s, t) \in V^2$, un *flujo* (s, t) es un vector $\mathbf{x} = (x_a)_{a \in A} \in \mathbb{R}^A$ donde x_a denota el flujo en el arco a , que cumple con las siguientes dos restricciones:

1. $x_a \geq 0$ para cada arco $a \in A$ y,
2. Se satisface la ley de la conservación del flujo para cada vértice $v \in V \setminus \{s, t\}$

$$\sum_{a \in \Gamma^+(v)} x_a = \sum_{a \in \Gamma^-(v)} x_a$$

El *valor* de un flujo (s, t) es $\sum_{a \in \Gamma^+(s)} x_a$, es decir, la cantidad de flujo que sale de s . Este valor también es igual a la cantidad de flujo que entra a t , es decir, $\sum_{a \in \Gamma^-(t)} x_a$.

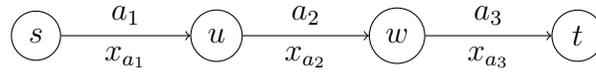


Figura 2.2: Ejemplo de flujo (s, t)

v	$\Gamma^-(v)$	$\Gamma^+(v)$	<i>valor</i>
s	\emptyset	$\{a_1\}$	x_{a_1}
u	$\{a_1\}$	$\{a_2\}$	$x_{a_2} - x_{a_1}$
w	$\{a_2\}$	$\{a_3\}$	$x_{a_3} - x_{a_2}$
t	$\{a_3\}$	\emptyset	$-(x_{a_3})$

Tabla 2.1: Conjunto de arcos de entrada, conjunto de arcos de salida y valor de la Figura 2.2

Como se ve en la Tabla 2.1 la ley de la conservación del flujo se cumple para los nodos u y w cuando $x_{a_1} = x_{a_2} = x_{a_3}$, bajo estas condiciones $\mathbf{x} = (x_{a_1}, x_{a_2}, x_{a_3})$ corresponderá al flujo (s, t) .

Dada una gráfica $G = (V, \mathcal{E})$ y una digráfica $H = (T, L)$ con $T \subseteq V$, un *multiflujo* es un vector $\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^{(s,t)})_{(s,t) \in \mathbb{R}^L}$ tal que para cada $(s, t) \in L$, $\mathbf{x}^{(s,t)}$ es un flujo (s, t) . A cada $(s, t) \in L$ se le llamará producto básico.

La gráfica G es llamada *gráfica de oferta* y H *digráfica de demanda*. El conjunto L es visto como el conjunto conformado por pares de origen-destino. Mientras que H corresponde al conjunto de todos los vértices unidos por los arcos de puntos finales de L .

2.2. Juegos

La teoría de juegos busca modelar situaciones en las cuales múltiples usuarios, también conocidos como jugadores o participantes, interactúan y afectan los resultados mutuos a través de la toma de decisiones. Un juego es una tripleta (J, E, R) donde $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ representa al *conjunto de jugadores* (finito), $E = \{E_1, \dots, E_n\}$ al *conjunto de posibles estrategias* de todos los jugadores donde $E_i = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}}\}$ es el *conjunto de posibles estrategias del jugador j_i* con e_i denotando la estrategia jugada y, finalmente, R corresponde a la función que determina el resultado del juego con $R : \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\bar{E} = \prod_{i=1}^n E_i$. Esta función puede ser vista como función de pago o de costos dependiendo del contexto.

En este trabajo se considerarán únicamente juegos del tipo *atómico* y *no cooperativo*. Un juego es atómico cuando la cantidad de tráfico no es despreciable mientras que, los juegos no cooperativos consisten en la toma de decisiones de manera independiente a pesar de haber llegado a un acuerdo de manera conjunta. Es decir, los jugadores no están obligados a llevar a cabo ni recibirán sanciones de no proceder con lo acordado. Así, cualquier jugador podrá elegir otra estrategia que minimice sus costos (o de manera análoga, maximice sus pagos).

A continuación se enunciará el juego atómico no cooperativo más estudiado.

Ejemplo 3. (*Dilema del Prisionero*). *Dos prisioneros se encuentran en juicio por haber realizado un crimen. Cada prisionero “P1” y “P2” tiene dos posibles estrategias, “confesar” o “no confesar”. Si ambos guardan silencio, las autoridades sólo serán capaces de presentar cargos por ofensas menores y ambos prisioneros tendrán una sentencia de 2 años. Si alguno de ellos confiesa, su sentencia será reducida a únicamente 1 año y será testigo en el juicio en contra de su compañero, quien tendrá una sentencia de 5 años. Finalmente, si ambos confiesan, ambos deberán cumplir*

una sentencia de 4 años por haber cooperado con las autoridades. A través de la siguiente matriz de 2×2 se pueden resumir los costos incurridos de los cuatro posibles resultados o en otras palabras, el tiempo de sentencia de P1 y de P2 a través de sus filas y columnas. Es decir, si ambos jugadores confesaran cada uno pasaría 4 años en la cárcel, estrategia representada en la matriz de costos para la entrada (confesar, confesar) = (4,4); mientras que si P1 confesara y P2 no lo hiciera, P1 pasaría 1 año en la cárcel mientras que P2 pasaría 5 años, que corresponde a (confesar, no confesar) = (1,5) en la matriz de costos.

		P2	
		Confesar	No Confesar
P1	Confesar	(4 , 4)	(1 , 5)
	No Confesar	(5 , 1)	(2 , 2)

Tabla 2.2: Representación Estratégica del Dilema del Prisionero

Hay que notar que la única situación estable en este juego corresponde a que ambos prisioneros confiesen debido a que, en cualquiera de los 3 casos restantes, al menos uno de ellos podría disminuir su tiempo de sentencia al cambiar su estrategia de “no confesar” a “confesar”. Por otro lado, si ningún prisionero confesara, ambos obtendrían la menor sentencia. Sin embargo, la solución antes mencionada no corresponde a una solución estable debido a que, aun cuando antes de ser aprehendidos ambos decidieran no confesar, cualquiera puede estar tentado a pensar que el otro la delató (debido a que el juego es no cooperativo) y por lo tanto, ambos buscarían pasar menos tiempo en la cárcel a través de la estrategia “confesar” .

Como complemento del ejemplo anterior, se enunciará su versión multijugador con un enfoque al control de contaminación.

Ejemplo 4. (Juego de contaminación). Se supone que en este juego hay n países y que cada uno tiene la elección de “aprobar” o “no aprobar” leyes para el control de contaminación de su respectivo país. Los países que aprueben las leyes deberán

pagar un precio de 3 unidades cada uno, mientras que, aquellos que continúen sin aprobarlas añadirán 1 unidad al costo de todos los países.

Suponiendo que k países no aprueban las leyes de control de contaminación, cada uno de ellos deberá realizar un pago de k unidades. Por otro lado, el costo de los $n - k$ países restantes es $k + 3$ cada uno debido a que, adicionalmente al costo de los países irresponsables, deben pagar el costo derivado de la aprobación del control de contaminación. La única solución estable es aquella en la que todos los países continúan contaminando, teniendo que pagar n unidades cada uno ya que el costo de la lucha contra la contaminación es considerablemente mayor al de no hacerlo. Mientras que si todos hubieran decidido aprobar las leyes de control de contaminación, el costo para cada país habría sido únicamente de 3 unidades.

En los ejemplos 3 y 4 se ha visto que, sin importar qué estrategia jueguen los oponentes, cada jugador se ve beneficiada al jugar su estrategia “egoísta”. A continuación, se mostrará un juego en el que la estrategia egoísta óptima no será independiente de las acciones de los otros jugadores.

Ejemplo 5. (“Tragedy of the commons”). Planteado en 1968 por el ecologista estadounidense Garret Hardin, este dilema describe una situación en la que un conjunto de individuos racionales e independientes, destruye de manera inconveniente un recurso colectivo limitado debido a su interés personal [7].

En este trabajo se describirá este problema bajo un contexto moderno, considerando el recurso común de la compartición de banda ancha.

Se supondrá que n jugadores quieren tener una porción cada uno, de un recurso compartido. Por ejemplo, cada jugador quiere enviar información a través de un canal compartido de capacidad máxima conocida, con valor igual a 1. En este juego, cada jugador tendrá un conjunto infinito de estrategias, donde la estrategia del jugador i es enviar x_{j_i} unidades de flujo a través del canal para algún valor de $x_{j_i} \in [0, 1]$.

Como se sabe, la calidad del canal empeora a mayor uso de banda ancha, sin embargo, se supone que cada jugador quisiera tener una gran parte de ésta. Se describirá el juego utilizando una función de pagos o beneficios para cada conjunto de estrategias. Si el total de banda ancha excede la capacidad del canal, es decir, $\sum_{j_k} x_{j_k} > 1$,

ningún jugador recibe beneficio alguno. Si por el contrario $\sum_{j_k} x_{j_k} < 1$, el valor del jugador i es $x_{j_i}(1 - \sum_{j_k} x_{j_k})$. Lo anterior modela exactamente el intercambio en donde el beneficio para un jugador se deteriora a medida que el flujo total del ancho de banda aumenta, pero incrementa debido a su propia participación.

Para entender qué estrategias estables se pueden encontrar para un jugador, se estudiará a j_i y se asumirá que los demás jugadores envían un flujo t definido como $t = \sum_{k \neq i} x_{j_k} < 1$. Así, j_i se enfrenta a un problema de optimización simple para seleccionar la cantidad de flujo que enviará. Hay que notar que el envío de un flujo x resultará en un beneficio de $x(1 - t - x)$ por lo que, la solución óptima para j_i es $x = (1 - t)/2$.

Un conjunto de estrategias es estable si todos los jugadores se encuentran jugando su estrategia óptima egoísta, dadas las estrategias de todos los demás jugadores. Para este caso, eso significa que $x_{j_i} = (1 - \sum_{k \neq i} x_{j_k})/2$ para todo i , que tiene solución única en $x_{j_i} = 1/(n + 1)$ para todo i .

Esta solución es una “tragedia” debido a que el valor total de la solución es muy pequeño. El valor para el jugador i es $x_{j_i}(1 - \sum_{k \neq i} x_{j_k}) = 1/(n + 1)^2$, y la suma de los valores para todos los jugadores es $n/(n + 1)^2 \approx 1/n$. En cambio, si el uso total de banda ancha fuera $\sum_i x_{j_i} = 1/2$ entonces, el valor total sería de $1/4$, aproximadamente $n/4$ veces mayor.

En este juego, los n jugadores que comparten el recurso lo usan de manera excesiva al punto que el valor total del recurso compartido se reduce de manera dramática. El ejemplo anterior (4) tiene un efecto similar, en donde el abuso ante las políticas ambientales de los n jugadores incrementa el costo de 3 a n para cada jugador.

En los juegos que se han considerado hubieron resultados que fueron estables, es decir, ninguno de los jugadores quería cambiar de manera individual sus resultados. En el siguiente ejemplo se mostrará que no todos los juegos tienen soluciones estables.

Ejemplo 6. (Águila o Sol). Dos jugadores, cada uno con una moneda, deben elegir entre dos estrategias: “águila” o “sol”. El jugador al que le corresponden las entradas azules o las primeras entradas de la matriz de costos gana si al tirar ambas monedas son iguales, mientras que el jugador al que le corresponden las entradas rojas o

segundas entradas gana si las dos monedas son distintas. La matriz muestra a través de los valores 1 y -1 si el jugador ganó o perdió, respectivamente.

		Jugador 2	
		Águila	Sol
Jugador 1	Águila	(1 , -1)	(-1 , 1)
	Sol	(-1 , 1)	(1 , -1)

Tabla 2.3: Representación estratégica del ejemplo Águila o Sol

Debido a que ambos jugadores podrán ganar cambiando su estrategia después del lanzamiento de la primera moneda este juego no tiene una solución estable. Por lo que es mejor que ambos jugadores elijan una estrategia aleatoria para impedir que el otra gane.

Los juegos considerados anteriormente son llamados *juegos simultáneos de una oportunidad*, en los que todos los jugadores eligen una acción del conjunto de posibles estrategias de manera simultánea.

El vector de estrategias seleccionadas por los jugadores o perfil estratégico $\mathbf{e} \in \bar{\mathbf{E}}$ con $\bar{\mathbf{E}} = \prod_{i=1}^n E_i$, determinan el resultado para cada jugador; en general, el resultado será diferente para diferentes jugadores. Se dice que j_i (el jugador i) *prefiere débilmente* E_1 a E_2 si j_i prefiere E_1 a E_2 o considera ambos resultados igualmente buenos. Recordando el Ejemplo 6, el Jugador 1 (jugador al que corresponden las entradas azules en la matriz de costos) prefiere débilmente el vector de estrategias en los que las dos monedas son iguales mientras que el Jugador 2 (jugador al que corresponden las entradas rojas) prefiere aquellos en los que las monedas sean diferentes.

En los ejemplos 3 y 4 se puede ver que en ambos juegos cada jugador tiene una mejor estrategia única independiente de las estrategias jugadas por los demás, así, se define la *solución de estrategia dominante*. Recordando que para un vector $\mathbf{e} \in \bar{\mathbf{E}}$ se denotan por e_i a la estrategia jugada por el jugador i , se denotará por \mathbf{e}_{-i} al vector (n-1)-dimensional de las estrategias jugadas por todos los demás jugadores. Así, al aplicar la función de resultados $r_k(\mathbf{e})$ se utilizará de manera análoga $r_k(e_i, \mathbf{e}_{-i})$ cuando resulte conveniente.

Se dice que el vector de estrategia $\mathbf{e} \in \bar{\mathbf{E}}$ es una *solución de estrategia dominante*, si para cada j_i , y cada vector de estrategia alterno $\mathbf{e}' \in \bar{\mathbf{E}}$, se cumple

$$r_k(e_i, \mathbf{e}'_{-i}) \geq r_k(e'_i, \mathbf{e}'_{-i})$$

es decir, una estrategia dominante es aquella que genera una recompensa más alta que cualquier otra independientemente de las estrategias de otros jugadores. De manera análoga, si se considera una función de resultados que refleje costos se cumplirá $r_k(e_i, \mathbf{e}'_{-i}) \leq r_k(e'_i, \mathbf{e}'_{-i})$.

Es importante ver que una solución de estrategia dominante puede resultar en pagos o costos no óptimos para cualquier jugador. Este fue el caso en los ejemplos 3 y 4, en los que es posible mejorar los pagos de todos los jugadores de manera simultánea.

En un juego, tener una única estrategia dominante para cada jugador es un requisito sumamente estricto por lo que muy pocos juegos lo satisfacen. A continuación se mostrará un ejemplo que satisfaga dicha estrategia.

Ejemplo 7. (*Subasta de Vickrey*) Suponiendo que se está realizando la subasta de un piano, como en cualquier subasta, el ganador del piano será aquel que oferte el precio más elevado. Sin embargo, el precio del piano será igual que la oferta del segundo mejor postor. También conocidas como subastas de segundo precio, estas subastas tienen la propiedad que la estrategia dominante para cada jugador es ofrecer el valor real del objeto, independientemente de las estrategias del resto de los jugadores. Observando que incluso cuando el valor del objeto es muy elevado, no hay riesgo de pagar de más al reportar el precio real y, si llegara a ganar, solamente pagaría el segundo mejor precio.

Debido a que pocos juegos poseen soluciones de estrategia dominante, se busca una solución menos estricta. Una solución deseable en la teoría de juegos es aquella en la que los jugadores actúen de manera individual de acuerdo a sus incentivos, minimizando sus costos o maximizando sus propios pagos.

2.2.1. Equilibrio de Nash

El *equilibrio de Nash* captura la noción de solución estable antes discutida y utilizada en los ejemplos 5 y 11, en los que se llegó a una solución en la que ningún jugador puede mejorar individualmente sus beneficios al desviarse; ambos juegos tuvieron equilibrios de Nash *puros*.

Un vector de estrategia $\mathbf{e} \in \bar{\mathbf{E}}$ es un *equilibrio de Nash en estrategias puras* o *equilibrio de Nash puro* si para todos los jugadores j_i y cada estrategia alterna $e_i' \in E_i$

$$r_k(e_i, \mathbf{e}_{-i}) \geq r_k(e_i', \mathbf{e}_{-i})$$

En otras palabras, ningún j_i puede cambiar su estrategia elegida de e_i a e_i' para mejorar su resultado, asumiendo que todos los demás jugadores mantienen las estrategias elegidas en \mathbf{e} .

Claramente, una solución de estrategia dominante es un equilibrio de Nash. Además, si la solución es estrictamente dominante, es decir, al cambiar a ella el resultado mejora, ésta resultaría en el único equilibrio de Nash.

No obstante, el equilibrio de Nash puede no ser único. Un ejemplo de esto son los juegos de coordinación, los cuales tienen múltiples equilibrios como se muestra en el Ejemplo 11. Además, un juego no necesariamente debe poseer un equilibrio de Nash puro, lo cual podemos ver en el Ejemplo 6. Si los jugadores fueran capaces de elegir de manera aleatoria cada una de sus dos estrategias (águila o sol) con probabilidad 1/2 cada una, se obtiene una solución casi estable debido a que el pago esperado para cada jugador ahora será de 0 y ningún jugador podrá mejorarlo incluso si eligiera de manera aleatoria sus estrategias.

2.2.2. Precio de la anarquía

El *precio de la anarquía* es la medida más utilizada para determinar la ineficiencia de los equilibrios, ya que al adoptar el enfoque de “peor escenario” resuelve el problema de múltiples equilibrios.

Éste calcula la proporción entre el costo social en equilibrio (Q^{Nash}) y el costo social óptimo. Al decir costo social se hace referencia a la suma de los costos en los que incurren todos los jugadores, $Q = \sum_{k \in \{j_1, \dots, j_n\}} r_k(\mathbf{e})$. Mientras que para el costo social óptimo se supone que la función objetivo es minimizar el costo promedio incurrido por los jugadores, por lo que éste corresponde al costo social mínimo y se denotará por Q^{opt} . Para obtenerlo se hará la siguiente fracción

$$PA = \frac{Q^{Nash}}{Q^{opt}}$$

Es importante notar que el precio de la anarquía para un juego está definido respecto a la elección de la función objetivo y la elección del concepto de equilibrio por lo que, generalmente toma valores diferentes al considerar distintas funciones objetivo.

Debido a que el precio de la anarquía corresponde a una división, se muestra interés para identificar juegos en los que este precio sea cercano a 1, lo que significa que todos los equilibrios son buenas aproximaciones a un resultado óptimo. El comportamiento egoísta se considera intrascendente en dichos juegos.

Un juego con múltiples equilibrios tendrá un precio de la anarquía alto aun cuando tan sólo uno de sus equilibrios es altamente ineficiente.

Recordando el Ejemplo 3, el equilibrio de Nash es alcanzado cuando ambos prisioneros confiesan por lo que $Q^{Nash} = 4 + 4$, sin embargo, si ambos decidieran no confesar reducirían sus sentencias haciendo que $Q^{opt} = 2 + 2$, así $PA = 8/4 = 2$.

A continuación se enunciará otro ejemplo para mayor claridad.

Ejemplo 8. *Se considera una red como la que muestra la siguiente digráfica. Se supondrá que hay k jugadores, cada uno con el mismo par origen-destino (s,t) . El costo de los arcos a y b es k y $1 + \epsilon$, respectivamente donde $\epsilon > 0$ es arbitrariamente pequeño y el costo asociado a pasar a través de cualquier arco de la red es dividido equitativamente entre todos los jugadores que lo utilicen.*

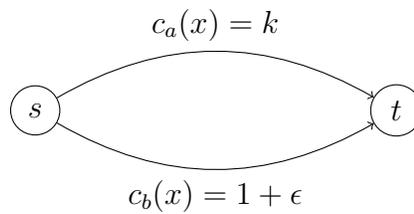


Figura 2.3: Equilibrios múltiples de Nash en juegos de diseño de red Shapley.

En el resultado óptimo, todos los jugadores eligen el arco inferior (como en el Ejemplo 1). Este resultado también es un equilibrio de Nash. Por otro lado, suponiendo que todos los jugadores eligieran el arco superior a, cada jugador incurriría en un costo de 1, y si algún jugador se desviara por el arco inferior b, pagaría un costo mayor que $1 + \epsilon$. Este resultado es un segundo equilibrio de Nash, de costo k .

El precio de la anarquía del juego del Ejemplo 8, considerando que $Q^{Nash} = k$ y $Q^{opt} = 1$, es aproximadamente el número de jugadores ya que $PA = k/1$, el cual puede tomar valores verdaderamente grandes.

Capítulo 3

Juegos de congestión

Estos juegos modelan la competencia entre jugadores sobre un conjunto finito de recursos cuyo costo cambia de acuerdo a la demanda. Tradicionalmente, son expresados como *juegos de minimización de costos* los cuales se definen a través de una tripleta $G = (J, E, R)$ donde J corresponde al conjunto de n jugadores, E al conjunto de estrategias y $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ con r_i denotando el costo incurrido por el jugador i y $r_i(\mathbf{e})$ como el *costo privado de j_i* en el vector de estrategias seleccionadas por los jugadores o perfil estratégico \mathbf{e} .

En un juego de congestión, cada jugador busca resolver un problema de optimización combinatoria de la forma:

$$\min \sum_{s \in A} q_s(\mathbf{e}) \quad \text{t.q.} \quad A \in \mathcal{A},$$

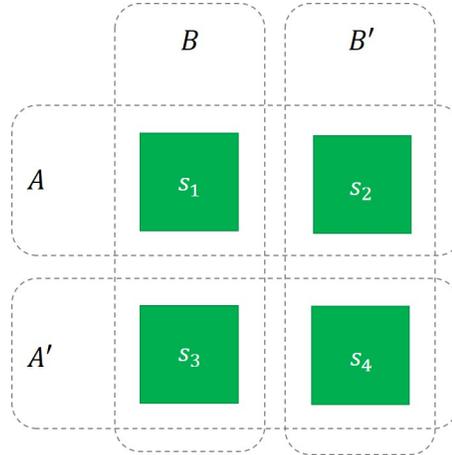
en donde $\mathcal{A} \subseteq 2^S$ es el conjunto de asignaciones factibles para j_i . Los problemas de optimización de los jugadores son modelados a través de las funciones de costo de los recursos mientras que el costo q_s del recurso s es una función del perfil estratégico. En el modelo más básico, se supone que el costo de un recurso es una función de sus jugadores, es decir, $q_s(\mathbf{e}) = q_s(\mathbf{t})$ con $\mathbf{e}, \mathbf{t} \in \bar{\mathbf{E}}$ siempre que

$$|\{j_i \in J : s \in e_i\}| = |\{j_i \in J : s \in t_i\}|$$

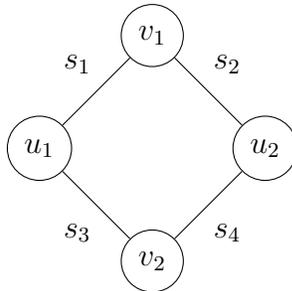
Tales problemas de optimización son representados por los juegos de congestión sin peso.

3.1. Juegos de congestión sin peso

Para un conjunto finito de recursos S con funciones de costo $(q_s)_{s \in S}$ y un vector de asignación $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_i)_{i \in J}$, el juego de congestión sin peso correspondiente es el juego de estrategia $G(\mathcal{A}) = (J, E, R)$, donde J es un conjunto finito no vacío de n jugadores, $E_i = \mathcal{A}_i$ para todos los jugadores j_i y $r_i(\mathbf{e}) = \sum_{s \in \mathbf{e}} q_s(x_s(\mathbf{e}))$ para todos los jugadores j_i , donde $x_s(\mathbf{e}) = |\{j_i \in J : s \in e_i\}|$.



(a) Representación de recursos



(b) Representación gráfica

	B	B'
A	(24 , 24)	(27 , 27)
A'	(27 , 27)	(24 , 24)

(c) Representación estratégica

Figura 3.1: Juego de Congestión

Ejemplo 9. Considerando el juego de la Figura 3.1b donde hay cuatro recursos

s_1, s_2, s_3 y s_4 con funciones de costo definidas por $q_{s_1}(x) = 3x^3 = q_{s_4}(x)$ y $q_{s_2}(x) = (x+1)^3 = q_{s_3}(x)$ para todas las $x \geq 0$. Las asignaciones satisfacibles del jugador 1 son $A = \{s_1, s_2\}$ y $A' = \{s_3, s_4\}$ mientras que las asignaciones satisfacibles para el jugador 2 son $B = \{s_1, s_3\}$ y $B' = \{s_2, s_4\}$.

Estableciendo $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_i)_{i \in \{1,2\}}$ con $\mathcal{A}_1 = \{A, A'\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{B, B'\}$ se define un juego de congestión. Revisando la representación estratégica del juego en la figura 3.1c, se observa que el juego tiene dos equilibrios de Nash, es decir, (A, B) y (A', B') .

Los juegos de congestión en los que las asignaciones satisfacibles de cada jugador i pueden ser representados como el conjunto de rutas entre 2 vértices designados u_i y v_i de una gráfica $D = (V, \mathcal{E})$ son de interés particular.

3.1.1. Juegos de congestión en redes

Un juego de congestión $G = (J, E, R)$ es llamado juego de congestión en redes si hay una digráfica $D = (V, A)$ y, para cada jugador i , dos vértices asignados $u_i, v_i \in V$ tales que para todos los jugadores j_i se cumple

$$E_i = \{\rho \subseteq A : \rho \text{ es una ruta-}(u_i, v_i) \text{ en } D\}$$

El juego del Ejemplo 9 es un juego de congestión en redes como se muestra en la gráfica que da la Figura 3.6b

Ejemplo 10. (*Paradoja de Braess*). Considerando la red de cuatro nodos mostrada en la Figura 3.2a, existen dos rutas- (u,v) por las cuales 100 jugadores intentan viajar. En el equilibrio de Nash la mitad de los jugadores toman los arcos superiores mientras que la otra mitad los inferiores, resultando en un costo de 151 unidades para cada ruta debido a que, ambas tienen los mismos costo y el mismo número de jugadores que viajan a lo largo de cada ruta- (u,v) . Después de añadir un nuevo arco con un valor de tiempo de viaje igual a 0, el nuevo equilibrio de Nash tendrá un costo de 200, el cual refleja que todos los jugadores buscaron minimizar sus costos a través del nuevo arco (N,S) como se ve en la Figura 3.2b.

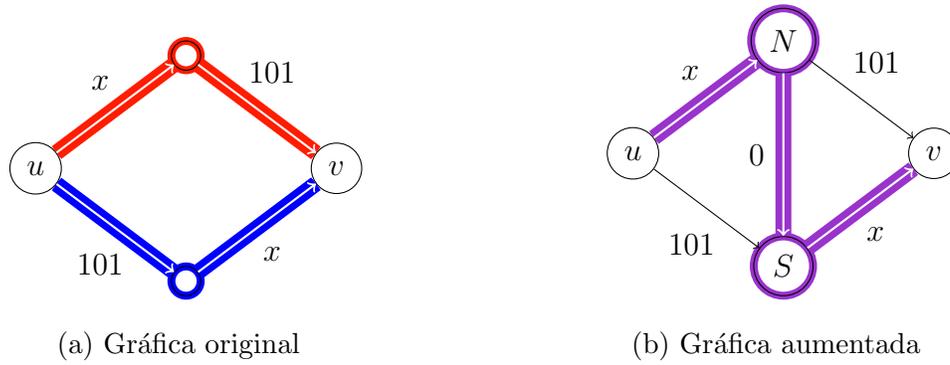


Figura 3.2: Paradoja de Braess

Teorema 3.1.1. *Todo juego de congestión sin peso tiene un equilibrio de Nash puro.*

Demostración. Se considera la función $P : \bar{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$P(\mathbf{e}) = \sum_{s \in S} \sum_{k=1}^{x_s(\mathbf{e})} q_s(k)$$

Hay que observar que la función P corresponde a una aproximación de la integral sobre las funciones de costo de los recursos, como muestra la siguiente figura.

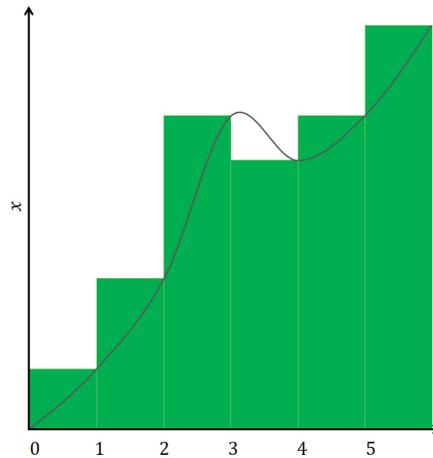


Figura 3.3: Función potencial

Sea $\mathbf{e} \in \bar{\mathbf{E}}$ arbitrario y sean $j_i \in J$ y $t_i \in E_i$. Y recordando que $x_s(t_i, \mathbf{e}_{-i})$ representa al número de jugadores que tienen al recurso s dentro de su estrategia jugada t_i , donde \mathbf{e}_{-i} representa el vector de las estrategias jugadas por todos los demás jugadores. Se obtiene

$$\begin{aligned}
P(t_i, \mathbf{e}_{-i}) &= \sum_{s \in S} \sum_{k=1}^{x_s(t_i, \mathbf{e}_{-i})} q_s(k) \\
&= \sum_{s \in S} \sum_{k=1}^{x_s(\mathbf{e})} q_s(k) + \sum_{s \in t_i \setminus e_i} q_s(x_s(\mathbf{e}) + 1) - \sum_{s \in e_i \setminus t_i} q_s(x_s(\mathbf{e})) \\
&= P(\mathbf{e}) + r_i(t_i, \mathbf{e}_{-i}) - r_i(\mathbf{e})
\end{aligned}$$

Así, para todo $\mathbf{e} \in \bar{\mathbf{E}}$, $j_i \in J$ y $t_i \in E_i$

$$P(t_i, \mathbf{e}_{-i}) - P(\mathbf{e}) = r_i(t_i, \mathbf{e}_{-i}) - r_i(\mathbf{e}).$$

En particular, $P(t_i, \mathbf{e}_{-i}) < P(\mathbf{e})$ cuando $r_i(t_i, \mathbf{e}_{-i}) < r_i(\mathbf{e})$.

Considerando la sucesión

$$\mathbf{e}^0, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots$$

donde para toda $l = 0, 1, \dots$ hay un jugador j_{i_l} tal que $\mathbf{e}^{l+1} = (t_{i_l}, \mathbf{e}_{-i_l}^l)$ para alguna $t_{i_l} \in E_i$ y $q_{i_l}(t_{i_l}, \mathbf{e}_{-i_l}^l) < q(\mathbf{e}^l)$. Entonces, P es decreciente a lo largo de la sucesión y recordando que $\bar{\mathbf{E}}$ es finito, cada sucesión debe ser finita. El punto final de dicha sucesión es un equilibrio de Nash puro. \square

3.1.2. Juegos de potencial exacto

Un juego de estrategia $G = (J, E, R)$ es llamado *juego de potencial exacto* si hay una función $P : \bar{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P(t_i, \mathbf{e}_{-i}) - P(\mathbf{e}) = r_i(t_i, \mathbf{e}_{-i}) - r_i(\mathbf{e})$$

para todos los $\mathbf{e} \in \bar{\mathbf{E}}$, $j_i \in J$ y $t_i \in S_i$

Es decir, si el estado actual del juego es \mathbf{e} , y j_i cambia de la estrategia e_i a t_i , entonces el ahorro de j_i coincide exactamente con el valor del decremento de la función potencial.

3.1.3. Juegos de coordinación

Un juego de estrategia $G = (J, E, R)$ es un *juego de coordinación* si $r_i(\mathbf{e}) = r_k(\mathbf{e})$ para todos los $\mathbf{e} \in \bar{\mathbf{E}}$. En otras palabras, un juego de coordinación tiene el mismo costo para $j_i \neq j_k$ al elegir el mismo vector de estrategias \mathbf{e} .

A continuación se mostrará un juego simple de coordinación, el cual involucra a dos jugadores, con dos opciones a elegir, a quienes les gustaría elegir la misma opción.

Ejemplo 11. (*Batalla de los sexos*). Considere que dos jugadores, una niña y un niño están intentando decidir cómo pasar la tarde. Ambos pueden elegir entre ir a la playa o ir al cine. A la niña le gustaría ir a la playa, mientras que al niño ir al cine, sin embargo, ambos prefieren pasar la tarde juntos a estar separados. En la siguiente matriz de costos se representarán mediante beneficios las preferencias de ambos.

		Niña	
		<i>Playa</i>	<i>Cine</i>
Niño	<i>Playa</i>	(5 , 10)	(0 , 0)
	<i>Cine</i>	(0 , 0)	(10 , 5)

Tabla 3.1: Representación estratégica de la Batalla de los sexos

Es claro que las soluciones en las que ambos jugadores eligen actividades diferentes no son estables, debido a que cualquier de ellos puede mejorar sus beneficios cambiando de actividad. Por otro lado, las dos opciones restantes, en donde los dos niños realizan la misma actividad, ya sea ir a la playa o al cine, son soluciones estables; en las que la niña prefiere ir a la playa y el niño al cine.

3.1.4. Juego dummy

Un juego de estrategia $G = (J, E, R)$ es un *juego dummy* si $r_i(t_i, \mathbf{e}_{-i}) = r_i(t'_i, \mathbf{e}_{-i})$ para todos los $j_i \in J, \mathbf{e} \in \bar{\mathbf{E}}$ y $t_i, t'_i \in E_i$ con $t_i \neq t'_i$. Es decir, el costo siempre es el mismo a pesar de la estrategia que j_i tome. Visto a través de la representación gráfica para un juego de 2x2, esto se puede ver como valores constantes en los renglones para el jugador 1 y de manera análoga, valores constantes en las columnas para el jugador 2.

Teorema 3.1.2. *Un juego de estrategia $G = (J, E, R)$ es un juego de potencial exacto si y sólo si hay funciones $R^c : \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}$ y $R^d : \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que (J, E, R^c) es un juego de coordinación, (J, E, R^d) es un juego dummy y $r(\mathbf{e}) = r^c(\mathbf{e}) + r^d(\mathbf{e})$ para todos los $\mathbf{e} \in \bar{E}$.*

Demostración. Para la implicación: Se dice que $P = r_i^c = r_k^c$ es una función de potencial exacto. Para ver esto, nótese que

$$\begin{aligned} r_i(t_i, \mathbf{e}_{-i}) - r_i(\mathbf{e}) &= r_i^c(t_i, \mathbf{e}_{-i}) + r_i^d(t_i, \mathbf{e}_{-i}) - r_i^c(\mathbf{e}) - r_i^d(\mathbf{e}) \\ &= r_i^c(t_i, \mathbf{e}_{-i}) - r_i^c(\mathbf{e}) \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{e} \in \bar{E}$, $j_i \in J$ y $t_i \in E_i$.

Para el regreso: Sea P una función de potencial exacto para G . Para todos los jugadores j_i y todos los vectores de estrategias \mathbf{e} , sea $r_i^c(\mathbf{e}) = P(\mathbf{e})$ y $r_i^d(\mathbf{e}) = r_i(\mathbf{e}) - P(\mathbf{e})$. Entonces, $G = (J, E, R^c)$ es un juego de coordinación.

Además,

$$r_i(\mathbf{e}) - r_i(t_i, \mathbf{e}_{-i}) = P(\mathbf{e}) - P(t_i, \mathbf{e}_{-i})$$

que es equivalente a

$$r_i(\mathbf{e}) - P(\mathbf{e}) = r_i(t_i, \mathbf{e}_{-i}) - P(t_i, \mathbf{e}_{-i})$$

Así, $G = (J, E, R^d)$ es un juego dummy. \square

3.1.5. Isomorfismo entre juegos

Dos juegos $G = (J, E, R)$ y $G' = (J, E', R')$ son isomorfos si, para todos los $j_i \in J$, hay una biyección $\phi : E_i \rightarrow E'_i$ tal que para todos los jugadores j_i y todos los vectores de estrategias $\mathbf{e} \in \bar{E}$, con $e_i \in E_i$

$$r_i(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}}) = r'_i(\phi_i(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}}))$$

Teorema 3.1.3. *Todo juego de coordinación es isomorfo a un juego de congestión.*

Demostración. Sea $G = (J, E, R)$ un juego de coordinación de n jugadores. Se definirá al juego de congestión $G = (J, E', R')$ isomorfo a G . Para todos los $\mathbf{e} \in \bar{E}$, se introduce un recurso $s(\mathbf{e})$ con función de costo

$$q_{s(\mathbf{e})}(x) = \begin{cases} r_l(\mathbf{e}), & \text{si } x = n \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, para un jugador i y una estrategia $t_i \in E_i$, sea

$$\phi_i(t_i) = \bigcup_{\mathbf{t}_{-i} \in \bar{E}_{-i}} \{s(t_i, \mathbf{e}_{-i})\}$$

con $\bar{E}_{-i} = \prod_{k=1}^n E_k$ con $k \neq i$. Y sea

$$E'_i = \left\{ \phi_i(t_i) : t_i \in E_i \right\}$$

Para todo $\mathbf{e} \in \bar{E}$, sea $\mathbf{e}' = \phi_i(t_{i_1}, \dots, t_{i_{n_i}})$. Se obtiene

$$r'_i(\mathbf{e}') = \sum_{s \in \phi(t_i)} q_s(x_s(\mathbf{e}')) = \sum_{s \in E'_i: x_s(\mathbf{e}')=n} q_s(x_s(\mathbf{e}')) = r_l(\mathbf{e}) = r_i(\mathbf{e}),$$

en donde la última igualdad utiliza que G es un juego de coordinación. Para obtener un juego de congestión isomorfo se introduce el recurso $s(\mathbf{e})$ para todos los vectores de estrategias $\mathbf{e} \in \bar{E}$, ver Figura 3.6b. \square

Ejemplo 12. (*Juego de congestión isomorfo a un juego de coordinación*). Se considera el juego de coordinación G de la Figura 3.6a. Para obtener un juego de congestión isomorfo, se introduce un recurso para cada vector de estrategias \mathbf{e} de G y se definen las estrategias de los jugadores como en la Figura 3.6b.

Teorema 3.1.4. *Todo juego dummy es isomorfo a un juego de congestión.*

Demostración. Sea $G = (J, E, R)$ un juego dummy. Para todos los jugadores j_i y todos los $\mathbf{e}_{-i} \in \bar{E}_{-i}$, se introduce un recurso $s(\mathbf{e}_{-i})$ con función de costo

$$q_{s(\mathbf{e}_{-i})}(x) = \begin{cases} r_i(t_i, \mathbf{e}_{-i}), & \text{si } x = 1 \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

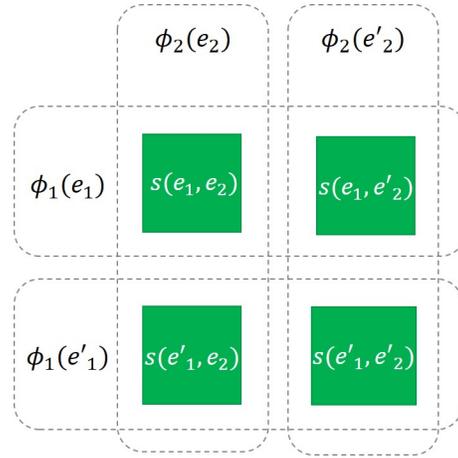
donde $t_i \in E_i$ es arbitrario.

Sea E el conjunto de recursos introducidos de esta manera. Además, para un jugador i con estrategia $e_i \in E_i$, sea

$$\phi_i(e_i) = \bigcup_{\mathbf{t}_{-i} \in \bar{E}_{-i}} \{s(\mathbf{t}_{-i})\} \cup \bigcup_{j_k \in J \setminus \{j_i\}} \bigcup_{\mathbf{t}_{-k} \in \bar{E}_{-k}: t_i \neq e_i} \{s(\mathbf{t}_{-k})\}$$

	e_2	e'_2
e_1	$(0 , 0)$	$(1 , 1)$
e'_1	$(2 , 2)$	$(3 , 3)$

(a) Juego de coordinación



(b) Juego de congestión isomorfo

y sea

$$E'_i = \{\phi(e_i) : e_i \in E_i\}$$

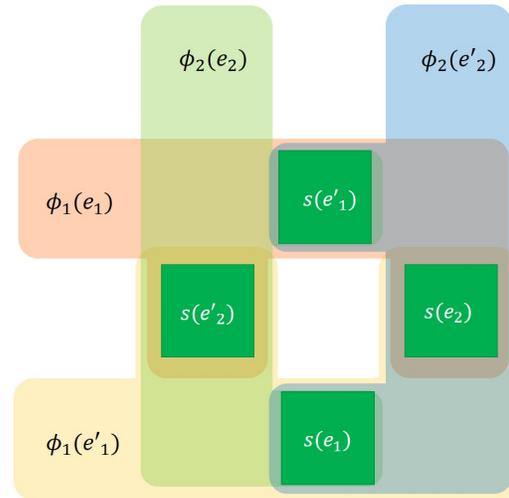
Sean $j_i \in J, e_i \in E_i$ y $e_{-i} \in \bar{E}_{-i}$ arbitrarios y considerando la estrategia $e = (e_i, e_{-i})$.

Se dice que para cualquier recurso $s \in S$ se tiene

$$\begin{aligned} \{j_k \in J : s \in \phi_k(e_k)\} &= \{i\}, & \text{si } s = s(e_{-i}) \text{ para algún jugador } i, \\ |\{j_k \in J : s \in \phi_k(e_k)\}| &\geq 2, & \text{en otro caso.} \end{aligned}$$

	e_2	e'_2
e_1	$(0 , 0)$	$(1 , 1)$
e'_1	$(2 , 2)$	$(3 , 3)$

(a) Juego de coordinación



(b) Juego de congestión isomorfo

Primero, hay que notar que $s(e_{-i}) \in \phi_i(e_i)$. Más aun, para cualquier jugador $j_k \neq j_i$, se tiene que

$$s(e_{-i}) \notin \bigcup_{t_{-i} \in E_{-i}: t_k \neq e_k} s(t_{-i})$$

y, así, también $s(\mathbf{e}_{-i}) \notin \phi_k(e_k)$. Por otro lado, para cualquier otro recurso $s \in S \setminus (\bigcup_{j_i \in J} s(\mathbf{e}_{-i}))$, se tiene que $s = s(\mathbf{t}_{-i})$ para algún $j_i \in J$ y $\mathbf{t}_{-i} \in \mathbf{E}_{-i}$ y, así, $s \in \phi_k(e_k)$. Usando que $\mathbf{t}_{-k} \neq \mathbf{e}_{-k}$, se deriva la existencia de un jugador $j_h \in J \setminus \{j_k\}$ con $t_h \neq e_h$ implicando que $s(\mathbf{t}_{-k}) \in \phi_h(e_h)$.

Para todo $\mathbf{e} \in \bar{\mathbf{E}}$, sea $\mathbf{e}' = \phi_i(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}})$. Entonces se obtiene

$$\begin{aligned} r'_i(\mathbf{e}') &= \sum_{s \in \phi(e_i)} q_s(x_s(\mathbf{e}')) \\ &= \sum_{\mathbf{t}_{-i} \in \mathbf{E}_{-i}} q_{s(\mathbf{t}_{-i})}(x_{s(\mathbf{t}_{-i})}(\mathbf{e}')) + \sum_{j_k \in J \setminus \{j_i\}} \sum_{\mathbf{t}_{-k} \in \mathbf{E}_{-k}: \mathbf{t}_{-k} \neq \mathbf{e}_{-k}} q_{s(\mathbf{t}_{-i})}(x_{s(\mathbf{t}_{-i})}(\mathbf{e}')) \\ &= r_i(e_i, \mathbf{e}_{-i}), \end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. □

Ejemplo 13. (*Juego de congestión isomorfo a juego dummy*). Se considera el juego dummy $G = (J, E, R)$ de la Figura 3.6a. Para cada $j_i \in J$ y cada vector de estrategia parcial $\mathbf{e}_{-i} \in \bar{\mathbf{E}}_{-i}$, se introduce el recurso $s(\mathbf{e}_{-i})$, el cual lleva a las estrategias mostradas en la Figura 3.6b

En seguida, se enuncia el principal resultado de isomorfismo para juegos de congestión.

Teorema 3.1.5. *Todo juego de potencial exacto es isomorfo a un juego de congestión sin peso.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.2, se puede escribir cada juego de potencial exacto $G = (J, E, R)$ como la suma de un juego de coordinación $G^c = (J, E, R^c)$ y un juego dummy $G^d = (J, E, R^d)$. Por los Teoremas 3.1.3 y 3.1.4, hay juegos de congestión $G' = (J, E', R')$ y $G'' = (J, E'', R'')$ con recursos S' y S'' que son isomorfos a G^c y G^d , respectivamente, es decir, hay biyecciones $\phi'_i : E_i \rightarrow E'_i$ y $\phi''_i : E_i \rightarrow E''_i$ para todos los jugadores j_i tales que

$$r_i^c(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}}) = r'_i(\phi'_i(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}})) \quad \text{y} \quad r_i^d(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}}) = r''_i(\phi''_i(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}}))$$

Al renombrar los recursos, se supone que S y S' son disjuntos. Considerando el juego de congestión $\tilde{G} = (J, \tilde{E}, \tilde{R})$ con recursos $S = S' \cup S''$, funciones de costo como G' y G'' y la biyección $\phi_i : E_i \rightarrow 2^S$ definida como $\phi_i(e_i) = \phi'_i(e_i) \cup \phi''_i(e_i)$. Se obtiene

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_i(\phi_i(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}})) &= r_i(\phi'(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}})) + r_i(\phi''(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}})) \\
&= r_i^c(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}}) + r_i^d(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}}) \\
&= r_i(\mathbf{e}),
\end{aligned}$$

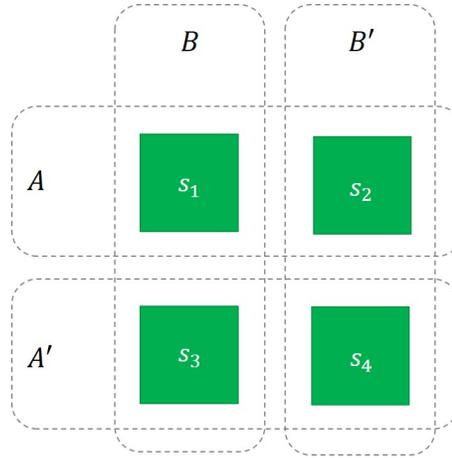
donde la primera ecuación utiliza que S' y S'' son disjuntas. Concluyendo que \tilde{G} es isomorfo a G . \square

3.2. Juegos de congestión con peso

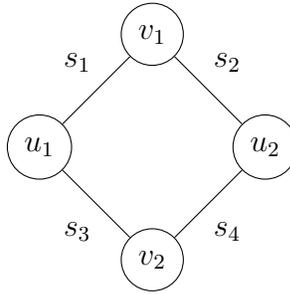
Los juegos de congestión con peso son una generalización de aquellos sin peso en los que el jugador contribuye de manera diferente a la congestión de los recursos.

Sea S un conjunto finito de recursos con funciones de costo $(q_s)_{s \in S}$, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_i)_{i \in J}$ el vector de asignación y $\mathbf{d} = (d_i)_{i \in J} > 0$ un vector de demanda, se define un *juego de congestión con peso* como el juego de estrategia $G(\mathcal{A}) = (J, E, R)$ donde N es un conjunto finito no vacío de n jugadores, $E_i = \mathcal{A}_i$ para todos los jugadores j_i y $r_i(\mathbf{e}) = \sum_{s \in e_i} d_i q_s(x_s(\mathbf{e}))$ para todos los jugadores j_i , donde $x_s(\mathbf{e}) = \sum_{j_i \in J: s \in e_i} d_i$.

Ejemplo 14. *Se considera una variante del juego de congestión del Ejemplo 9 añadiendo peso. En este ejemplo, las funciones de costo son definidas como $q_{s_1}(x) = q_{s_4}(x) = 2x^3$ y $q_{s_2}(x) = q_{s_3}(x) = (x + 1)^3$ para toda $x \geq 0$. Las demandas de los jugadores son $d_1 = 1$ y $d_2 = 2$. Este juego no tiene un equilibrio de Nash puro como se ve en la Figura 3.6.*



(a) Representación de recursos



(b) Representación gráfica

	B	B'
A	(62 , 162)	(66 , 160)
A'	(66 , 160)	(62 , 162)

(c) Representación estratégica

Figura 3.6: Juego de congestión con peso

Teorema 3.2.1. *Los juegos de congestión con peso con funciones de costo afines tienen un equilibrio de Nash puro.*

Demostración. Considerando la función $P : \bar{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$P(\mathbf{e}) = \sum_{s \in S} \sum_{j_i \in J: s \in e_i} d_i q_s \left(\sum_{j_k \in \{j_1, \dots, j_i\}: s \in e_k} d_k \right)$$

Para jugadores de peso unitario, la función P es igual a la función potencial dada por los juegos de congestión sin peso. Se sabe que la contribución de un recurso a

la función potencial corresponde a una aproximación discreta de un integral. Sin embargo, esta aproximación no es uniforme entonces, depende de los índices de los jugadores (respectivamente, sus demandas), en general. La observación crucial es que para funciones afines, el potencial es independiente del orden de los jugadores, como se muestra en la siguiente figura.

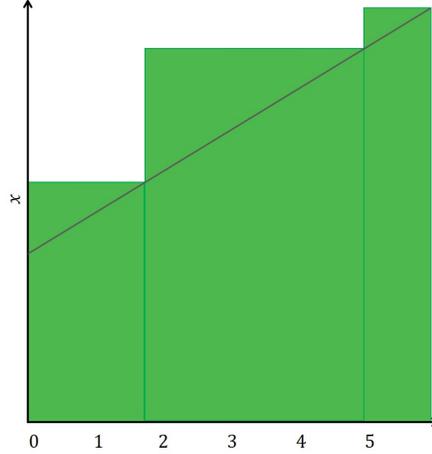


Figura 3.7: Para una función afín la función potencial es independiente del orden de los jugadores.

De hecho, para funciones de costo de la forma $q_s(x) = a_s x + b_s$ con $a_s, b_s \in \mathbb{R}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{e}) &= \sum_{s \in S} \sum_{j_i \in J: s \in e_i} d_i q_s \left(\sum_{j_k \in \{j_1, \dots, j_i\}: s \in e_k} d_k \right) \\
 &= \sum_{s \in S} \left(b_s x_s(\mathbf{e}) + \sum_{j_i, j_k \in J: s \in e_i \cap e_k, i \leq k} a_s d_i d_k \right) \\
 &= \sum_{s \in S} \left(b_s x_s(\mathbf{e}) + \frac{1}{2} \sum_{j_i, j_k \in J: s \in e_i \cap e_k} a_s d_i d_k + \frac{1}{2} \sum_{j_i \in J: s \in e_i} a_s d_i^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{s \in S} \left(q_s(x_s(\mathbf{e})) + q_s(0) \right) x_s(\mathbf{e}) + \frac{1}{2} \sum_{j_i \in J} \sum_{s \in e_i} \left(q_s(d_i) - q_s(0) \right) d_i
 \end{aligned}$$

Por lo que se afirma que P es un potencial exacto, es decir, $P(t_i, \mathbf{e}_{-i}) - P(\mathbf{e}) = r_i(t_i, \mathbf{e}_{-i}) - r_i(\mathbf{e})$ para todo $j_i \in J, \mathbf{e} \in \bar{\mathbf{E}}$ y $t_i \in S_i$.

Debido a que la función potencial es independiente del orden de los jugadores,

sin pérdida de generalidad se supone que $j_i = j_n$. Se calcula

$$\begin{aligned} P(t_n, \mathbf{e}_{-n}) &= P(\mathbf{e}) + d_n \sum_{s \in t_n \setminus e_n} q_s(x_s(t_n, \mathbf{e}_{-n})) - d_n \sum_{s \in e_n \setminus t_n} q_s(x_s(\mathbf{e})) \\ &= P(\mathbf{e}) + r_i(t_n, \mathbf{e}_{-i}) - r_i(\mathbf{e}) \end{aligned}$$

Se concluye que P es una función potencial por lo que el juego tiene un equilibrio de Nash puro. \square

Para $\phi \in \mathbb{R}$, sea

$$\mathcal{C}_{exp}(\phi) = \{f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = as^{\phi x} + b \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\}$$

Teorema 3.2.2. *Para cada $\phi \in \mathbb{R}$, cada juego de congestión con peso con funciones de costo en $\mathcal{C}_{exp}(\phi)$ tiene un equilibrio de Nash puro.*

Demostración. Para $\phi = 0$, el teorema se sigue del Teorema 3.2.1 por lo que se supone que $\phi \neq 0$. Considerando la función $P : \bar{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$P(\mathbf{e}) = \sum_{s \in S} \sum_{j_i \in J: s \in e_i} \text{sgn}(\phi) (1 - s^{-\phi d_i}) q_s \left(\sum_{j_k \in \{j_1, \dots, j_i\}: s \in e_k} d_k \right)$$

con

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para funciones de costo de la forma $q_s(x) = a_s s^{\phi x} + b_s$, se tiene

$$\begin{aligned} P(\mathbf{e}) &= \sum_{s \in S} \sum_{j_i \in J: s \in e_i} \left(\text{sgn}(\phi) (1 - s^{-\phi d_i}) a_s \exp \left(\phi \sum_{j_k \in \{j_1, \dots, j_i\}: s \in e_k} d_k \right) + b_s \right) \\ &= \sum_{s \in S} \sum_{j_i \in J: s \in e_i} \left(\text{sgn}(\phi) a_s s^{\phi \sum_{j_k \in \{j_1, \dots, j_i\}: s \in e_k} d_k} - \text{sgn}(\phi) a_s s^{\phi \sum_{j_k \in \{j_1, \dots, j_{i-1}\}: s \in e_k} d_k} + b_s \text{sgn}(\phi) (1 - s^{-\phi d_i}) \right) \end{aligned}$$

Después de desarrollar la suma telescópica, se obtiene

$$P(\mathbf{e}) = \text{sgn}(\phi) \sum_{s \in S} \left(a_s (s^{\phi x(\mathbf{e})} - 1) + b_s \sum_{j_i \in J: s \in e_i} (1 - s^{-\phi d_i}) \right),$$

la cual es independiente del orden de los jugadores. Para $\lambda_i = \text{sgn}(\phi)(1 - s^{-\phi d_i})$ se obtiene

$$\begin{aligned} P(t_n, \mathbf{e}_{-n}) &= P(\mathbf{e}) + \lambda_n \sum_{s \in t_n \setminus e_n} q_s(x_s(t_n, \mathbf{e}_{-n})) - \lambda_n \sum_{s \in e_n \setminus t_n} q_s(x_s(\mathbf{e})) \\ &= P(\mathbf{e}) + \frac{d_n}{\lambda_n} (r_i(t_n, \mathbf{e}_{-i}) - r_i(\mathbf{e})) \end{aligned}$$

Utilizando que $d_n/\lambda_n > 0$, se concluye que cada sucesión de mejoras unilaterales benéficas es finita. Así, el juego tiene un equilibrio de Nash puro. \square

3.2.1. Juegos potenciales con peso

Un juego de estrategia $G = (J, E, R)$ es un *juego potencial con peso* si hay un vector $(w_i)_{j_i \in J} > 0$ y una función $P : \bar{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todos los $\mathbf{e} \in \bar{\mathbf{E}}$, $j_i \in J$ y $t_i \in E_i$

$$P(t_i, \mathbf{e}_{-i}) - P(\mathbf{e}) = w_i (r_i(t_i, \mathbf{e}_{-i}) - r_i(\mathbf{e}))$$

A continuación, se mostrará que el conjunto de funciones de costo afín y el conjunto de funciones de costo exponencial son los únicos conjuntos de funciones de costo para los que la existencia general de resultados como el Teorema 3.2.1 y el Teorema 3.2.2 son posibles. Para hacer más precisa la declaración anterior, se introduce la noción de consistencia de un conjunto de funciones de costo.

3.2.2. Conjunto consistente de funciones de costo

Un conjunto \mathcal{C} de funciones de costo $q : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ es llamado *consistente* (para juegos de congestión con peso) si cada juego de congestión con peso con la propiedad $q_s \in \mathcal{C}$ para todo $s \in S$ tiene un equilibrio de Nash puro.

Con el fin de caracterizar los conjuntos de funciones de costo, el siguiente lema será de utilidad.

Proposición 3.2.3. *Sea \mathcal{C} un conjunto consistente de funciones estrictamente crecientes cerrado bajo la multiplicación escalar de un entero positivo. Si \mathcal{C} es consistente para juegos de congestión con peso entonces,*

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{f(x+y) - f(y)} = \frac{g(x+y+t) - g(x+t)}{g(x+y+t) - g(y+t)}$$

para toda $f, g \in \mathcal{C}$ y $x, y, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Demostración. Sean $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ arbitrarios y considerando un juego de congestión con peso con cuatro recursos $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ con funciones de costo $q_{s_1} = q_{s_4} = \kappa g$, $q_{s_2} = q_{s_3} = \lambda f$ y cuatro jugadores $j_i, j_h, j_k, j_{k'}$ con demandas $d_i = x, d_h = y, d_k = d_{k'} = t$ y conjuntos de estrategia $E_i = \{\{s_1, s_2\}, \{s_3, s_4\}\}$, $E_h = \{\{s_1, s_3\}, \{s_2, s_4\}\}$, $E_k = \{\{s_1\}\}$ y $E_{k'} = \{\{s_4\}\}$.

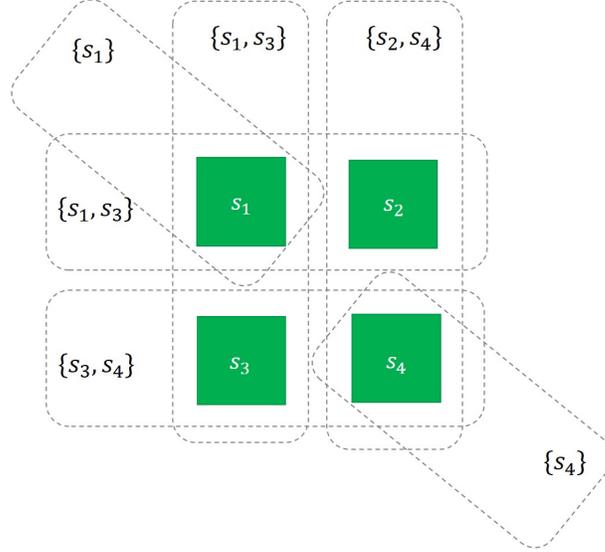


Figura 3.8: Juego de congestión construido en la prueba del Lema 3.2.3

Donde j_i y j_h tienen dos estrategias cada uno, mientras que j_k y $j_{k'}$ tienen una estrategia cada uno, resultando en cuatro perfiles estratégicos distintos. Sólo hay dos tipos de estrategia: en el primer tipo, los jugadores i y h se encuentran juntos en un recurso con función de costo κg , pero no se encuentran juntos en un recurso con función de costo λf y viceversa para el segundo tipo. En el vector de estrategias e^1 del primer tipo de estrategia se tiene

$$r_i(e^1) = \kappa g(x + y + t) + \lambda f(x) \quad r_h(e^1) = \kappa g(x + y + t) + \lambda f(y) \quad (3.1)$$

mientras que en el vector de estrategias e^2 del segundo tipo se tiene

$$r_i(e^2) = \kappa g(x + t) + \lambda f(x + y) \quad r_h(e^2) = \kappa g(y + t) + \lambda f(x + y) \quad (3.2)$$

Con el fin de obtener un equilibrio de Nash puro, uno de los dos tipos de estrategia debe beneficiar a ambos jugadores, es decir, al menos uno de los siguientes dos casos

se mantiene

$$r_l(\mathbf{e}^1) \leq r_l(\mathbf{e}^2) \text{ para } j_l \in \{j_i, j_h\} \quad \text{ó} \quad r_l(\mathbf{e}^1) \geq r_l(\mathbf{e}^2) \text{ para } j_l \in \{j_i, j_h\}. \quad (3.3)$$

De (3.1), (3.2) y (3.3) se obtiene que al menos uno de los siguientes casos se mantiene:

$$\frac{\kappa}{\lambda} \leq \min \left\{ \frac{f(x+y) - f(x)}{g(x+y+t) - g(x+t)}, \frac{f(x+y) - f(y)}{g(x+y+t) - g(y+t)} \right\} \quad \text{ó}$$

$$\frac{\kappa}{\lambda} \geq \max \left\{ \frac{f(x+y) - f(x)}{g(x+y+t) - g(x+t)}, \frac{f(x+y) - f(y)}{g(x+y+t) - g(y+t)} \right\}$$

Lo que lleva a

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{g(x+y+t) - g(x+t)} = \frac{f(x+y) - f(y)}{g(x+y+t) - g(y+t)}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{g(x+y+t) - g(x+t)}{f(x+y) - f(y)}$, se concluye la demostración. \square

Proposición 3.2.4. *Sea f una función continua estrictamente creciente tal que*

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{f(x+y) - f(y)} = \frac{f(x+y+t) - f(x+t)}{f(x+y+t) - f(y+t)} \quad (3.4)$$

para toda $x, y, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Entonces, f es una de las dos formas funcionales:

$$f(x) = ax + b, \quad \text{ó} \quad f(x) = as^{\phi x} + b.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario donde $x = \varepsilon$, $y = 2\varepsilon$, y $t = m\varepsilon$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Utilizando la ecuación 3.4, se define

$$\gamma := \frac{f(3\varepsilon) - f(1\varepsilon)}{f(3\varepsilon) - f(2\varepsilon)} = \frac{f((m+3)\varepsilon) - f((m+1)\varepsilon)}{f((m+3)\varepsilon) - f((m+2)\varepsilon)}$$

para toda $m \in \mathbb{N}$. Hay que notar que $\gamma \neq 1$ debido a que $f(1\varepsilon) \neq f(2\varepsilon)$. Estableciendo $a_m := f(m\varepsilon)$ para toda $m \in \mathbb{N}$ y reorganizando términos, se deduce que la sucesión $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ obedece la fórmula recursiva

$$0 = a_{m+3} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} a_{m+2} + \frac{1}{\gamma - 1} a_{m+1}$$

para toda $m \in \mathbb{N}$. La ecuación característica de esta relación recurrente es igual a

$$x^2 - \frac{\gamma}{\gamma-1}x + \frac{1}{\gamma-1} = (x-1)\left(x - \frac{1}{\gamma-1}\right)$$

Si $\gamma \neq 2$, la ecuación característica tiene dos raíces distintas y a_m puede ser calculado explícita y únicamente como

$$a_m = a\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)^m + b \quad (3.5)$$

para alguna constante $a, b \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, si $\gamma = 2$, a_m se puede calcular como

$$a_m = am + b \quad (3.6)$$

para algunas constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, f es afín o exponencial para cada entero múltiplo de ε . Debido a que ε era arbitrario se concluye que f es afín o exponencial en un subconjunto denso de $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Utilizando que f es continua, se concluye la demostración. \square

Teorema 3.2.5. *Un conjunto \mathcal{C} de funciones continuas estrictamente crecientes cerrado bajo la multiplicación escalar de un entero positivo es consistente para juegos de congestión con peso si y sólo si cumple uno de los siguientes dos casos:*

1. \mathcal{C} únicamente contiene funciones afines de la forma $c(x) = ax + b$.
2. \mathcal{C} únicamente contiene funciones exponenciales de la forma $c(x) = as^{\phi x} + b$, donde ϕ es el mismo para todas las funciones en \mathcal{C} .

Demostración. La implicación: Se sigue de los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2.

Para el regreso: De acuerdo al Lema 3.2.4, todas las funciones en \mathcal{C} son lineales o exponenciales. Falta mostrar que \mathcal{C} no contienen ni funciones exponenciales ni afines, además de no contener funciones exponenciales con ϕ distintas en el exponente. Además, recordando el Lema 3.2.3, es necesario que

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{f(x+y) - f(y)} = \frac{g(x+y+t) - g(x+t)}{g(x+y+t) - g(y+t)}$$

para toda $f, g \in \mathcal{C}$ y $x, y, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Para toda $x, y, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, la proporción $\frac{f(x+y+t)-f(x)}{g(x+y+t)-f(y+t)}$ es igual a x/y si f es lineal, y es igual a $s^{\phi(x-y)}$ si f es de la forma $as^{\phi x} + b$. Entonces, la ecuación 3.4 se satisface para toda x, y sólo si \mathcal{C} es como se plantea. \square

Capítulo 4

Cuotas en juegos de congestión

Dada una digráfica $D = (V, A)$ representando la red de tránsito, con V un conjunto finito de vértices y A un conjunto de arcos, en un juego de congestión en redes $G = (J, E, \mathcal{L})$ se define J como el conjunto de n usuarios que desean viajar a través de la red, E corresponde al conjunto de estrategias, traducidas en este contexto, como todas las opciones de *caminos* que los usuarios tienen para llegar a su destino pudiendo elegir entre distintos subconjuntos de A , mientras que $E_i \subseteq 2^A$ denotará al conjunto que contiene a todos los diferentes *caminos factibles* para el usuario i , y finalmente se sustituirá R , la notación anteriormente usada correspondiente a los costos o pagos, haciendo ahora referencia a los tiempos de viaje, en inglés *latency*, por lo que se utilizará $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n\}$ el conjunto de tiempos de viaje con \mathcal{L}_i el tiempo de viaje incurrido por el usuario i .

Se definirá la *función de tiempo de viaje en el arco* u como $\ell_u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ con base a que el tiempo empleado por transitar a través del arco $u \in A$ depende del número de usuarios viajando a través de éste, además de considerar propiedades físicas (como la capacidad de la red, la pérdida derivada del transporte, la situación geográfica de la red), económicas (distintos tipos de combustible, potencia requerida, tarifas de los proveedores), sociales y políticas (distribución, demanda así como la congestión asociada a ésta) del arco u [30].

Una vez que todos los usuarios hayan seleccionado su camino $e_i \in E_i$, cada usuario experimentará un tiempo de viaje igual a la suma de los tiempos de viaje de los arcos que seleccionó junto con la congestión asociada a ellos, así el tiempo de

viaje del usuario i en la estrategia \mathbf{e} es

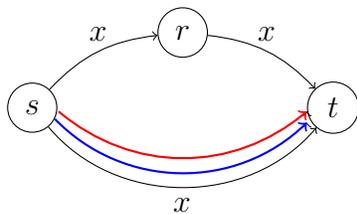
$$\mathcal{L}_i(\mathbf{e}) = \sum_{u \in e_i} \ell_u(|\mathbf{e}|_u)$$

donde $|\mathbf{e}|_u$ es el número de usuarios seleccionando el arco u en el perfil estratégico $\mathbf{e} = (e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$.

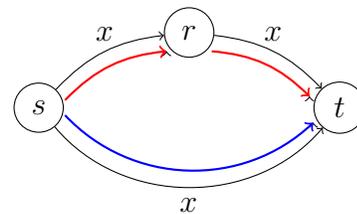
Finalmente, el costo del sistema describe el tiempo pasado en la red por *todos* los usuarios, es decir,

$$Q(\mathbf{e}) = \sum_{u \in A} |\mathbf{e}|_u \ell_u(|\mathbf{e}|_u),$$

Ejemplo 15. *Dos usuarios necesitan viajar del nodo de origen s al nodo de destino t , transitando a través de la ruta superior o inferior. El tiempo de viaje de cada conexión es igual al número de usuarios que seleccionen esa conexión, es decir $\ell_u(x) = x$ para todos los arcos $u \in A$.*



(a) $Q^{Nash} = 4$



(b) $Q^{opt} = 3$

U2

	ruta-(s,t)	ruta-(s,r,t)
U1	ruta-(s,t)	(2, 2) (1, 2)
	ruta-(s,r,t)	(2, 1) (4, 4)

Tabla 4.1: Representación estratégica de las Figuras 4.1a y 4.1b

Como representa la figura de la izquierda (4.1a), ambos usuarios $U1$ y $U2$ seleccionan la ruta inferior, resultando en un tiempo de viaje de 2 para cada uno. Esta configuración es un equilibrio de Nash debido a que ningún usuario puede reducir su tiempo de viaje al seleccionar la ruta alterna (ruta superior) ya que esto también resultaría en un tiempo de viaje de 2. La suma del tiempo de viaje de ambos o en otras palabras, el costo del sistema, es 4. En la figura 4.1b, los usuarios toman decisiones

opuestas. Así, el usuario $U1$ representado por la flecha roja incurre en un tiempo de viaje de 2 al seleccionar la ruta superior, mientras que $U2$ incurrirá en un tiempo de viaje de 1 al seleccionar la ruta inferior. Esta última configuración minimiza la suma del tiempo de viaje de los usuarios, es decir es socialmente óptima, con un costo del sistema de 3. A partir de lo anterior, utilizando el concepto de precio de la anarquía, se dice que la configuración del equilibrio de la figura izquierda tiene eficiencia de $4/3 \approx 1.33$.

Ya que la congestión general puede ser mucho mayor cuando los conductores actúan de manera egoísta [28], se considera el uso de cuotas como mecanismo de influencia en el comportamiento [31] - [36]. Considerando lo anterior, cada arco u es asociado a una *función de cuota dependiente de la congestión* $\tau_u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que en este trabajo se considerará que tomará un valor monetario. Así, el usuario i incurre en un costo tomando en cuenta tanto el tiempo de viaje, como los peajes cobrados a lo largo de su camino como se muestra en la siguiente ecuación

$$\bar{\mathcal{L}}_i(\mathbf{e}) = \mathcal{L}_i(\mathbf{e}) + \tau_u(|\mathbf{e}|_u) = \sum_{u \in e_i} \ell_u(|\mathbf{e}|_u) + \tau_u(|\mathbf{e}|_u)$$

Se supone que todos los usuarios buscarán minimizar su tiempo de viaje, en particular, este trabajo buscará cuotas que modifiquen el costo social reduciendo a su vez los tiempos de viaje de los usuarios. El desempeño de un conjunto de cuotas dado es típicamente medido a través del precio de la anarquía.

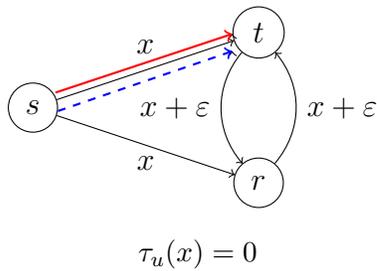
Como ya se mostró en el capítulo 2, el equilibrio de Nash no siempre representa la estrategia óptima, en otras palabras, la estrategia con el menor costo social. Debido a lo anterior, se definirá como estrategia *eficiente* a aquella estrategia que minimice la función del costo social, de lo contrario se dirá que es *ineficiente*. Se garantiza que al menos existe una estrategia mínima debido a que el conjunto de estrategias es finito.

A continuación, se mostrará un ejemplo que ilustre las ventajas y los retos asociados al uso de cuotas que influyen el comportamiento.

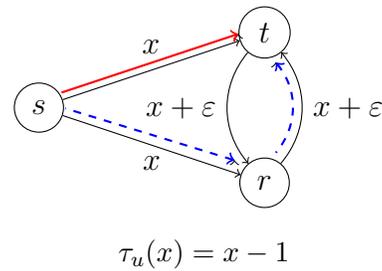
Ejemplo 16. *Se mostrará el efecto de utilizar un esquema de cuotas proporcionales con $\tau_u(x) = x - 1$ en problemas de rutas que difieren únicamente en los nodos de*

origen y de destino. El tiempo de viaje $\ell_u(x)$ de cada conexión se muestra en la figura, donde ε es un número positivo arbitrario pequeño.

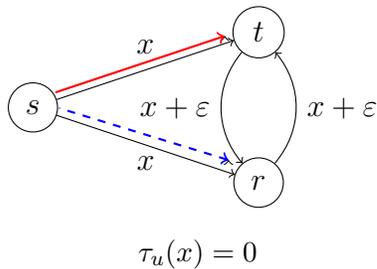
Las siguientes figuras muestran a los usuarios U_1 y U_2 representados por las flechas roja y azul, respectivamente, que viajan a lo largo de rutas desde un nodo de origen s al nodo de destino t en el caso de las figuras (a) y (b), y con nodos destino t y r para cada usuario en el caso (c) y (d). Hay que notar que las figuras (a) y (c) no utilizan un esquema de cuotas, es decir $\tau_u(x) = 0$, mientras que en las figuras (b) y (d), la cuota correspondiente a tomar el recurso u definida por $\tau_u(x) = x - 1$, representa un descuento asociado a tomar una ruta alternativa que previene la congestión.



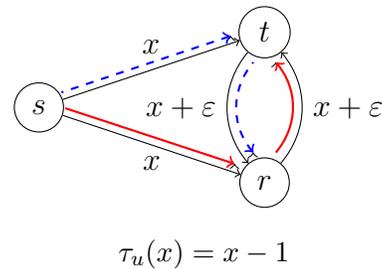
(a) Ruta de Nash ineficiente



(b) Ruta de Nash óptima



(c) Ruta de Nash óptima



(d) Ruta de Nash ineficiente

En el caso sin cuota (a), la ruta de Nash genera un costo del sistema de 4 mostrando el “egoísmo” de las participantes al tomar la ruta $-(s, t)$. En cambio, en el ejemplo (b), hubo una minimización en el costo del sistema tomando un valor de $3 + \varepsilon$ debido a que el usuario 2 toma una ruta más larga, es decir, una ruta en la cual el usuario invirtió más tiempo en la red. En estos ejemplos se puede ver que la función de cuota dependiente de la congestión ayudó a minimizar el costo del sistema a través de su influencia en el comportamiento de U_2 y que la ruta de Nash no corresponde a la ruta óptima en todos los casos.

Mientras tanto, en los casos (c) y (d) se cambiará únicamente el destino de U_2 de t a r como se mencionó anteriormente. En el caso sin cuota (c), el equilibrio de Nash lleva a un costo del sistema de 2 y es óptimo. Sin embargo, en el caso con cuotas (d), el costo del sistema se duplicó tomando un valor de $4 + 2\varepsilon$.

Con lo anterior es fácil ver que, si las funciones del tiempo de viaje son mal caracterizadas o si la red cambia de topología, no se encontrarán estrategias más eficientes que las que se encuentren en equilibrio de Nash.

4.1. Cuotas

A partir de ahora, se considerarán juegos de congestión en donde todos los tiempos de viaje pertenecerán a un conjunto común de funciones \mathcal{L} , los cuales se generan por una combinación lineal de bases $\beta_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ con $k = 1, \dots, m$, y con coeficientes no negativos. Este marco de trabajo puede ser utilizado para el desarrollo de problemas muy estudiados, como lo son los juegos de congestión polinomiales [37]. Por ejemplo, suponiendo $\beta_1(x) = 1$, $\beta_2(x) = x$ se obtienen juegos de congestión afines. Se denotará por \mathcal{G} al conjunto de juegos de congestión con un máximo de n jugadores que puedan ser construidos con tiempos de viaje generados por la base $\{\beta_k\}_{k=1}^m$ y no negativas. El objetivo es asociar cada tiempo de viaje ℓ a una cuota correspondiente, denotada por $\tau = T(\ell)$, cabe observar que $\tau : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ depende de la congestión, es decir, asocia un número real a cada entero en $\{1, \dots, n\}$. La ineficiencia del mecanismo de cuotas T es comúnmente medido por el precio de la anarquía [27], definido por

$$PA(T) = \sup_{G \in \mathcal{G}} \frac{Q^{Nash}(G, T)}{Q^{\min}(G)}, \quad (4.1)$$

donde $Q^{\min}(G)$ es el costo social mínimo y $Q^{Nash}(G, T)$ el mayor costo social en un equilibrio de Nash al aplicar el mecanismo T en el juego G . Por definición $PA \geq 1$, con lo que valores menores del precio de la anarquía corresponden a cuotas más eficientes. Dentro de este contexto, es de interés diseñar un mecanismo T que minimice el precio de la anarquía. Inesperadamente, este problema puede ser resuelto bajo un programa lineal tractable.

Con el fin de obtener el componente de congestión de lo Precios Marginales Locales y, para el desarrollo del caso práctico, se usará el siguiente teorema. A partir de la red propuesta se buscará resolver un juego de congestión cuyos costos estarán dados por aquellos asociados a los de los arcos, obtenidos como las diferencias entre el nodo de inyección y de extracción en cada caso. Basándose en estos se determinarán los valores de las cuotas τ asociadas a cada arco para posteriormente, al contar con los valores antes mencionados, obtener los costos correspondientes al componente de congestión de cada nodo. Al hacerlo de esta manera se tendrá una aproximación local al realizar el ejercicio para cada nodo de la red. Se tomó este enfoque en lugar del global ya que, de la segunda manera, se tendría un programa computacionalmente pesado.

Teorema 4.1.1. Cuotas Óptimas Locales. *Sea $\ell(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \beta_k(x)$ una función de tiempo de viaje. Un mecanismo de impuestos locales que minimice el precio de la anarquía definido por la Ecuación 4.1 está dado por*

$$T^{\text{ópt}}(\ell) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \tau_k^{\text{ópt}},$$

donde $\tau_k^{\text{ópt}}(x) = f_k^{\text{ópt}}(x) - \beta_k(x)$, y $f_k^{\text{ópt}} : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución al programa lineal

$$\begin{aligned} & \underset{f_k \in \mathbb{R}^n, \psi \in \mathbb{R}}{\text{máx}} \quad \psi \quad \text{tal que} \\ & \beta_k(x+z)(x+z) - \psi \beta_k(x+y)(x+y) + f_k(x+y)y - f_k(x+y+1)z \geq 0 \\ & \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \quad \text{con} \quad 1 \leq x+y+z \leq n, \\ & f_k(x) \geq \beta_k(x) \quad \forall x \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde se define $\beta_k(0) = f_k(0) = f_k(n+1) = 0$ para facilitar la notación. El precio de la anarquía óptimo resultante es $\text{máx}_k \{1/\psi_k^{\text{ópt}}\}$, donde $\psi_k^{\text{ópt}}$ es el valor del programa lineal de la ecuación 4.2.

Nótese que cada restricción de la Ecuación 4.2 es obtenida para una elección diferente de la tupla (x, y, z) , y es, entonces, una expresión lineal de las incógnitas f_k y ψ .

Demostración. Esta prueba se dividirá en dos partes.

Parte 1. En esta parte se mostrará la existencia de cuotas óptimas que sean lineales. Así, se considerará un mecanismo óptimo lineal de cuotas $T^{\acute{o}pt}$, y se pondrá, por contradicción, que existe un mecanismo de cuotas \hat{T} tal que

$$PA(T^{\acute{o}pt}) > PA(\hat{T}).$$

Para esta prueba se define la clase de juegos $\mathcal{G}(\{0, 1\}) \subset \mathcal{G}$, en los que cualquier arco dado u tiene $\alpha_l^u = 1$ para al menos un $l \in \{1, \dots, m\}$, y $\alpha_k^u = 0$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$, $l \neq k$. Hay que observar que todos los mecanismos de cuotas son lineales en $\mathcal{G}(\{0, 1\})$, debido a que cada arco ahora puede utilizar solamente tiempos de viaje $\ell \in \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$. Entonces,

$$PA(\hat{T}) \geq \sup_{G \in \mathcal{G}(\{0, 1\})} \frac{Q^{Nash}(G, \hat{T})}{Q^{\min}(G)} \quad (4.3)$$

$$= \sup_{G \in \mathcal{G}(\mathbb{N})} \frac{Q^{Nash}\left(G, \sum_{k=1}^m \alpha_k \hat{T}(\beta_k)\right)}{Q^{\min}(G)} \quad (4.4)$$

$$= PA\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \hat{T}(\beta_k)\right) \quad (4.5)$$

donde $\mathcal{G}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{G}$ es la subclase de juegos con $\alpha_k \in \mathbb{N}$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$, para todos los arcos de A . La Ecuación 4.3 se mantiene porque $\mathcal{G}(\{0, 1\}) \subset \mathcal{G}$, la Ecuación 4.4 se mantiene porque cualquier juego en $\mathcal{G}(\mathbb{N})$ es equivalente a un juego en $\mathcal{G}(\{0, 1\})$ con $\ell \in \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, y la Ecuación 4.5 se mantiene por la Proposición 4.1.3. Como $T^{\acute{o}pt}$ es un mecanismo lineal de cuotas óptimo, se tiene que

$$PA\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \hat{T}(\beta_k)\right) \geq PA\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k T^{\acute{o}pt}(\beta_k)\right) = PA(T^{\acute{o}pt}), \quad (4.6)$$

combinada con las ecuaciones 4.3, 4.4 y 4.5, 4.6 contradice lo propuesto. Así, existe un mecanismo óptimo de cuotas $T^{\acute{o}pt}$ que es lineal.

Parte 2. Se utilizará el programa lineal obtenido en [38] para optimizar sobre todas las posibles cuotas lineales. Los autores de [38] muestran que el siguiente programa lineal calcula un conjunto de cuotas lineales óptimas $T^{\acute{o}pt}(\ell) = \sum_k \alpha_k \tau_k^{\acute{o}pt}$,

donde $\tau_k^{\acute{o}pt}(x) = f_k(x) - \beta_k(x)$, y cada función f_k resuelve

$$\begin{aligned} (\psi_k^{\acute{o}pt}, f_k^{\acute{o}pt}) &\in \underset{\psi \in \mathbb{R}, f_k \in \mathbb{R}^n}{\text{máx}} \psi \quad \text{tal que} \\ \beta_k(x+z)(x+z) - \psi \beta_k(x+y)(x+y) + f_k(x+y)y - f_k(x+y+1)z &\geq 0, \\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \text{ tal que } 1 \leq x+y+z \leq n, \end{aligned}$$

donde se establece $f(0) = f(n+1) = \beta(0) = 0$ para simplificar la notación. El precio de la anarquía óptimo correspondiente a la clase de juegos que minimicen costos es $\text{máx}\{1/\psi_1^{\acute{o}pt}, \dots, 1/\psi_m^{\acute{o}pt}\}$. Finalmente, se asegura que las cuotas son positivas al introducir la condición $f_k(x) \geq \beta_k(x)$ para toda $1 \leq x \leq n$.

Juntando ambas partes se concluirá la prueba. \square

El teorema de Cuotas Óptimas Locales contiene dos resultados fundamentales. La primera parte del enunciado muestra que un mecanismo óptimo de impuestos es un mapa lineal. Como consecuencia, la cuota aplicada a cualquier función de tiempo de viaje $\ell(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \beta_k(x)$ puede ser obtenida como la combinación lineal de $\tau_k^{\acute{o}pt}(x)$ con los mismos coeficientes α_k utilizados para definir $\ell(x)$. Complementando lo anterior, la segunda parte del enunciado proporciona una técnica práctica para calcular $\tau_k^{\acute{o}pt}(x)$ para cada base $\beta_k(x)$ como la solución de un programa lineal simple. Esto último es particularmente útil ya que, los programas lineales pueden ser resueltos eficientemente a través de paquetes de software ampliamente disponibles, por ejemplo ([39], [40]). Además, mediante el enfoque presentado, es posible calcular de antemano y guardar en una biblioteca los valores de $\tau_k^{\acute{o}pt}(x)$ para distintas funciones base, por ejemplo polinomiales. Al haber realizado lo anterior, las únicas operaciones requeridas para calcular una cuota óptima $T^{\acute{o}pt}(\ell)$ son sumas y multiplicaciones de $\tau_k^{\acute{o}pt}(x)$ – guardadas en la biblioteca – con α_k .

Proposición 4.1.2. *Considerando los juegos de congestión de clase \mathcal{G} , para cualquier mecanismo lineal de cuotas T , se tiene*

$$PA(T) = \sup_{G \in \mathcal{G}(\mathcal{Q})} \frac{Q^{\text{Nash}}(G, T)}{Q^{\text{mín}}(G)} =: PA_{\mathcal{Q}}(T),$$

donde $\mathcal{Q} \subset \mathcal{G}$ es la subclase de juegos con $\alpha_k \in \mathcal{Q}$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$, para todos los arcos de A .

Demostración. Hay que notar que el precio de la anarquía es definido como un supremo y que, en general, $PA_{\mathcal{Q}}(T) \leq PA(T)$. De acuerdo al Teorema 1 de [41], se sabe que el precio de la anarquía de una clase de juegos de minimización de costos dada es la solución de un programa lineal y que el juego G existe. Además, hay que observar que las variables de decisión que entran en el Teorema 1 de [41] son representadas por $\theta(x, y, z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, donde $x, y, z \in \mathbb{N}$ y $1 \leq x + y + z \leq n$, y que un conjunto de tuplas $\theta(x, y, z)$ dado, engloba el conjunto de acciones de las agentes así como los coeficientes de las funciones de tiempo de viaje correspondientes a cualquier juego G . Se denotará por $\theta^*(x, y, z)$ a la tupla que resuelve el problema lineal del Teorema 1 de [41]. Si todos los valores $\theta^*(x, y, z)$ son racionales, se concluye la prueba debido a que el juego correspondiente $G^* \in \mathcal{G}(\mathcal{Q})$. De otra manera, se puede mostrar que el supremo de los precios de la anarquía es igual al $PA(T)$. Esto se sigue porque el conjunto satisficible es un politopo compacto no vacío, así que existe una serie de juegos G_k con $\theta_k(x, y, z) \in \mathcal{Q}$ que converge a $\theta^*(x, y, z)$ que satisface las restricciones del programa lineal, y cuya eficiencia en el peor caso converge al $PA(T)$ descrito abajo. \square

Proposición 4.1.3. *Considerando los juegos de congestión de clase \mathcal{G} . Para cualquier mecanismo de cuota T , se tiene la siguiente igualdad*

$$PA(T) = PA_{\mathcal{Q}}(T) = \sup_{G \in \mathcal{G}(\mathbb{N})} \frac{Q^{Nash}(G, T)}{Q^{\min}(G)},$$

donde $\mathcal{G}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{G}$ es la subclase de juegos con $\alpha_k \in \mathbb{N}$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$, para todos los arcos en A .

Demostración. Hay que observar que la igualdad que se encuentra a la izquierda se mantiene de acuerdo a la Proposición 4.1.2. Dado un juego $G \in \mathcal{G}(\mathcal{Q})$ se denotará por δ_G al mínimo común denominador entre los coeficientes α_k de la función de tiempo de viaje, a lo largo de todos los arcos del juego. Se definirá por $\hat{\alpha}_k = \alpha_k \cdot \delta_G \in \mathbb{N}$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$, para todos los arcos en A . Como las condiciones del equilibrio son independientes a un escalamiento uniforme de las funciones de tiempo de viaje y de las cuotas, cualquier juego $G \in \mathcal{G}$ con coeficientes de tiempo de viaje, $\{\alpha_k\}_{k=1}^m$ tiene la misma eficiencia del equilibrio en el peor caso que un juego \hat{G} que es idéntico

a G a excepción de tener coeficientes de tiempo de viaje $\{\hat{\alpha}_k\}_{k=1}^m$. Observando que \hat{G} pertenece a ambos $\mathcal{G}(\mathcal{Q})$ y $\mathcal{G}(\mathbb{N})$ se concluye la prueba. \square

Capítulo 5

Caso de estudio

Se estudiará el Mercado Eléctrico Mexicano (MEM), creado a partir de la Reforma Energética de 2013. Se modelará un juego de congestión a partir de la red física nacional y junto con los conceptos de los capítulos anteriores se interpretará el Precio Marginal Local (PML) de la electricidad considerando también los costos de transmisión.

5.1. Reforma Energética

La Reforma Energética de 2013 en México, fue aprobada por el Congreso de la Unión y publicada en el Diario Oficial de la Federación en diciembre de 2013. En ella se reforman los párrafos cuarto, sexto y octavo del artículo 25; el párrafo sexto del artículo 27; los párrafos cuarto y sexto del artículo 28; y se adiciona un párrafo al artículo 27, así como al artículo 28 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos. Por su parte, el Congreso General expidió la Ley de la Industria Eléctrica (LIE) publicada en el Diario Oficial de la Federación el 11 de agosto de 2014, la cual corresponde a la legislación secundaria que tiene como guía la reforma constitucional. En conjunto, representan una renovación profunda del marco jurídico mexicano en materia energética.

La Reforma Energética tiene como objetivos principales:

1. Actualizar y fortalecer a las empresas públicas dedicadas a la producción y al aprovechamiento de los hidrocarburos y de la electricidad sin privatizarlas.

En el caso de México, dichas empresas son Petróleos Mexicanos (PEMEX) y la Comisión Federal de Electricidad (CFE). Se busca que ambas mantengan un carácter de Empresa Productiva del Estado es decir, que sean públicas y mexicanas en su totalidad.

2. Permitir que la Nación ejerza, de manera exclusiva, la planeación y control del Sistema Eléctrico Nacional (SEN) en beneficio de un sistema competitivo que permita reducir los precios de la energía eléctrica.
3. Contar con un mayor abasto de energéticos a mejores precios.
4. Garantizar estándares internacionales de eficiencia, calidad y confiabilidad de suministro energético.
5. Combatir de manera efectiva la corrupción en el sector energético.
6. Impulsar el desarrollo, con responsabilidad social y ambiental.

Mientras que la LIE tiene por finalidad:

1. Regular la planeación y el control del SEN, el Servicio Público de Transmisión y Distribución de Energía Eléctrica y las demás actividades de la industria eléctrica.
2. Promover el desarrollo sustentable de la industria eléctrica.
3. Garantizar la operación continua, eficiente y segura en beneficio de los usuarios.
4. Asegurar el cumplimiento de las obligaciones de servicio público y universal, de Energías Limpias y de reducción de emisiones contaminantes.

En resumen, se abre un mercado de generación de energía eléctrica con el objetivo de proveer energía a precios competitivos para que todos los usuarios puedan beneficiarse adquiriendo energía a precios más accesibles.

Así, se crea el Mercado Eléctrico Mayorista (MEM) integrado por la CFE y la industria privada, donde se otorga el permiso al sector privado de participar libremente en la generación y comercialización de electricidad. Este mercado tendrá a

la Secretaría de Energía (SENER) y a la Comisión Reguladora de Energía (CRE) como sus reguladores. Adicionalmente, existe un organismo público descentralizado llamado Centro Nacional de Control de Energía (CENACE) al cual, se le adjudica la responsabilidad del control operativo del SEN, de operar el MEM, así como garantizar el acceso abierto a la red nacional de transmisión y a las redes generales de distribución. Dichas actividades deberán regirse bajo condiciones de competencia, igualdad de circunstancias y libre competencia.

5.2. Mercado de energía

Los mercados de energía son mercados de productos básicos (commodities) en los cuales, la energía es comprada o vendida.

Los mercados de productos básicos relacionados con la energía negocian la producción de generación neta durante varios intervalos, normalmente en incrementos de 5, 15 y 60 minutos.

Dentro de ellos se encuentran los mercados eléctricos en los cuales, se comercializa tanto energía eléctrica como potencia. La potencia es la tasa de producción de energía medida en cualquier momento dado y se mide en megawatts (MW). Mientras que, la energía eléctrica es la electricidad que fluye a través de un punto medido durante un periodo dado y se mide en megawatts horas (MWh).

La energía eléctrica se compra, vende y comercializa en los mercados mayoristas y minoristas, que operan de manera similar a los mercados mayoristas y minoristas de otros productos. Los mercados mayoristas operan diario y los participantes del mercado establecen un precio para la electricidad al coincidir la oferta de las generadoras con la demanda de los clientes.

5.2.1. Mercado Eléctrico Mayorista

A partir de 2016, en el Mercado Eléctrico Mayorista (MEM) se pueden adquirir todos los productos que se requieren para la operación óptima y confiable del SEN. Dentro de este mercado se comercializan productos como energía eléctrica, potencia, Certificados de Energía Limpia (CEL), servicios conexos, entre otros.

El MEM es un mercado horario, es decir los productos asociados a la electricidad se compran y venden para cada hora del día. A su vez, se trata de un mercado de costos, es decir, el precio final dependerá del costo de generación.

El MEM se divide en cinco mercados. El primero corresponde al Mercado de Energía de Corto Plazo, integrado por el Mercado del Día en Adelanto (MDA) y de Tiempo Real (MTR); el segundo al Mercado para el Balance de Potencia, el tercero al Mercado de Certificados de Energía Limpia; y los último dos hacen referencia al de Subastas de Mediano y Largo Plazo y, al de Subastas de Derechos Financieros de Transmisión.

La CRE será responsable del otorgamiento de permisos para participar en el MEM, ya sea como adquirentes o suministradores de electricidad. Ésta también será responsable de publicar las tarifas de transmisión, distribución y venta del servicio básico de electricidad, establecer las condiciones generales para los participantes del mercado, expedir los modelos de contratos de interconexión del MEM, y de administrar los CELs.

En lo referente a la comercialización de energía eléctrica, existen principalmente 2 figuras: Suministradores de Servicios Básicos (SSB) y Suministradores de Servicios Calificados (SSC).

Los Suministradores de Servicios Básicos (SSB) son quienes ofrecen servicios de energía eléctrica a los usuarios residenciales o a usuarios no calificados, en otras palabras llevan el servicio eléctrico a todos los usuarios que no participan en el MEM. Se prevé que la CRE determine tarifas domésticas reguladas revisadas por la Secretaría de Hacienda, con el fin de, en su caso, aplicar subsidios a ciertos segmentos, como el residencial. Hoy en día se cuenta con cuatro SSB, la filial de la Comisión Federal de Electricidad, CFE Suministrador de Servicios Básicos (CFE SSB); y las empresas privadas BH Energy Supply; Enlace y Representación Gubernamental T&M; y Suministro Básico del Centro (SUBACE), creado por el Sindicato Mexicano de Electricistas (SME) y la Cooperativa Luz y Fuerza del Centro.

Mientras que los usuarios que requieran mayores volúmenes de energía podrán comprar a Suministradores de Servicios Calificados (SSC). Un SSC es un proveedor de servicios de comercialización de energía eléctrica, que compra electricidad en el

MEM con el fin de dar servicio eléctrico a los usuarios calificados con los que tenga un contrato de suministro y responde por ellos ante el CENACE. Bajo dicho esquema tanto la CFE como empresas privadas ofrecen a grandes y medianas consumidores dentro de todos los sectores productivos del país (clientes industriales y comerciales) precios competitivos en un entorno no regulado, incentivando así, la competencia y la mejora continua en los precios y condiciones.

5.2.2. Precio Marginal Local

El Precio Marginal Local (PML) se refiere al precio marginal de la energía en el lugar donde se entrega o recibe la misma. Para efectos cuantitativos, los PMLs se expresan en unidades del tipo de cambio correspondiente a cada entidad por megawatt hora ($\$/MWh$). Dentro del precio del PML se consideran: los costos de energía, de pérdida y en particular, la congestión del sistema de transmisión.

Para efectos de las Bases del Mercado Eléctrico, además de las definiciones del artículo 3 de la Ley de la Industria Eléctrica y del artículo 2 de su Reglamento, se definen los siguientes conceptos como se muestra a continuación.

Un Nodo de Precios (NodoP) puede corresponder a un Nodo de conectividad (NodoC) individual, o a un conjunto de NodosC donde se modela la inyección o retiro físicos y para el cual se determina un Precio Marginal Local (PML) para las liquidaciones financieras en el Mercado Eléctrico Mayorista (MEM). El conjunto de NodosC interconectados por ramas de la red constituye el Modelo de la Red Física, el cual se entiende como el modelo detallado de tipo nodo/interruptor usado en el Sistema de Administración de Energía (EMS, por sus siglas en inglés) para el control operativo del Sistema Eléctrico Nacional (SEN) en tiempo real.

Así, en el Modelo Comercial de Mercado, se define el Precio Marginal Local (PML) como el precio de la energía eléctrica en un Nodo de Precios (NodoP) determinado del Sistema Eléctrico Nacional (SEN), calculado por el CENACE para el Mercado de Energía de Corto Plazo.

Para cada hora del Día de Operación correspondiente y para cada NodoP, el CENACE calcula los PMLs del Mercado del Día en Adelanto (MDA) y del Mercado de Tiempo Real (MTR) y sus componentes: energía, congestión y pérdidas.

El *componente de energía* mantiene el mismo precio horario para todos los nodos incorporados al SEN. Por otro lado, el *componente de pérdidas* está asociado a las pérdidas técnicas. Finalmente, el *componente de congestión*, actúa como la condición que surge en el sistema de transmisión y distribución cuando una o más restricciones impiden el despacho económico de energía eléctrica de la carga de servicio.

5.2.3. Despacho económico

En general, el despacho económico se refiere a la determinación de la producción óptima de las instalaciones de generación para satisfacer la carga del sistema al menor costo posible, sujeto a restricciones de transmisión y operación.

Para el caso de México, el despacho económico describe el proceso del cálculo de la generación para suministrar los requerimientos de energía del SEN al mínimo costo de producción, cumpliendo con las restricciones operativas de la red eléctrica. Éste buscará maximizar el excedente económico total esperado sujeto a balancear inyecciones y retiros de energía eléctrica.

El CENACE será el encargado de calcular el despacho óptimo de la capacidad registrada en el MEM. Una vez recibidas las ofertas de compra y venta de energía, el CENACE realizará el despacho económico para cada uno de los mercados. Respetando las restricciones correspondientes, se emitirán instrucciones de despacho, en términos de energía neta, que sean técnica y operacionalmente viables a las Unidades de Central Eléctrica y a los Recursos de Demanda Controlable. Sin embargo, se permitirá la relajación de dichas restricciones cuando se requiera para asegurar la existencia de una solución factible.

Los representantes de Unidades de Central Eléctrica podrán presentar límites de despacho económico máximo y mínimo. Un ejemplo de restricción de transmisión es que el modelo asumirá un precio de penalidad por operar cada línea cerca a su límite.

Las Unidades de Central Eléctrica deberán registrarse bajo uno de los siguientes regímenes:

- **Firme despachable:** Fuente que tiene la capacidad de seguir instrucciones de despacho en tiempo real hasta su Capacidad Instalada (por ejemplo, ciclo

combinado, termoeléctrica convencional o carboeléctrica).

- Firme no-despachable: Fuente que tiene la capacidad de producir hasta su Capacidad Instalada bajo condiciones normales, sin la capacidad de controlar su nivel de producción en tiempo real (por ejemplo, ciertas instalaciones de cogeneración, generación nucleoelectrica o geotérmica).
- Intermitente despachable: Fuente que tiene la capacidad de seguir instrucciones de despacho en tiempo real desde su nivel de producción mínima y hasta una capacidad intermitente (por ejemplo, eólica o solar con la capacidad de reducir generación mediante instrucciones automáticas de despacho).
- Intermitente no-despachable: Fuente intermitente que no tiene la capacidad de controlar su nivel de producción en tiempo real.

El despacho económico considerará la generación de las Unidades de Central Eléctrica firmes (p.ej., geotérmicas) e intermitentes (eólicas o solares) que no sean despachables. En el despacho económico en tiempo real, estos recursos recibirán instrucciones de despacho mediante el Registro de Instrucciones de Despacho, iguales a la energía entregada en el intervalo previo, o cuando se encuentren disponibles, iguales a sus pronósticos actualizados en tiempo real de entrega de energía.

El resultado del despacho económico serán los precios marginales de las reservas en cada zona de reservas y los PMLs de la energía en cada nodo del SEN.

Capítulo 6

Caso práctico

Ejemplo 17. *Se supondrá que se tiene un sistema con tres plantas generadoras de energía eléctrica a las que se denotará por $P(I)$, $P(II)$ y $P(III)$, y que el sistema tiene una demanda de 800 MWh en un horario entre las 12 pm y las 13 pm. Se busca saber cuál es la cantidad que despachará cada planta, para satisfacer la demanda, únicamente considerando la siguiente tabla.*

Planta	Capacidad	Costo
	MW	MXN/MWh
P(I)	600	300
P(II)	400	500
P(III)	200	1,000

Tabla 6.1: Capacidad y costo de cada planta para el ejemplo 17

Considerando que la función objetivo es minimizar los costos, se buscará despachar de manera que se obtenga el menor costo. En este caso no se cuenta con ninguna restricción. Así, la siguiente tabla mostrará algunas soluciones factibles:

Solución	P(I) MWh	P(II) MWh	P(III) MWh	Costo Total MXN
1	600	200	0	280,000
2	600	100	100	330,000
3	400	400	0	320,000
4	0	400	400	600,000
5	0	0	800	800,000
6	100	0	700	730,000

Tabla 6.2: Ejemplos de combinaciones posibles para el ejemplo 17

Debido a que el menor costo corresponde al ofertado por la planta I, se buscará generar la mayor cantidad de MWh o, incluso, la totalidad de la capacidad de dicha planta con la finalidad de alcanzar los 800 MW correspondientes a la demanda. En caso de no satisfacerla completamente con los MWh generados por P(I), se despacharán también las otras plantas considerando un criterio del segundo menor costo. En caso de que, incluso con la capacidad máxima de la segunda planta no se satisficiera el requerimiento, se generarán MWh de la planta con el tercer menor costo y así consecutivamente hasta solventar la demanda. De esta manera, a pesar de encontrar múltiples soluciones, se elige aquella asociada al menor costo total expresado en MXN.

Así, el despacho óptimo para una demanda de 800 MW quedará cubierto por 600 MWh comprados a la planta I y, los 200 MWh restantes, a la planta II. Obteniendo un costo total de:

$$(600 \text{ MWh} \times 300 \text{ MXN/MWh})_I + (200 \text{ MWh} \times 500 \text{ MXN/MWh})_{II} = 280,000 \text{ MXN}$$

como se muestra en la primera fila de la tabla anterior. Y un precio de 500 MXN/MWh asociado al costo de la última planta despachada.

Para el próximo caso se considerará una variación del ejemplo 17.

Ejemplo 18. Considerando los datos proporcionados por la tabla 6.1, y nuevamente una demanda de 800 MW, se buscará el costo mínimo que satisfaga la demanda junto

con la siguiente restricción. Cada planta pide que se despache una cantidad mínima de MW igual a su Capacidad menos 100 MW como se puede observar en la siguiente tabla. En caso contrario, el despacho de esa planta deberá tomar el valor de cero.

Planta	Capacidad MW	Despacho mínimo MW	Costo MXN/MWh
P(I)	600	500	300
P(II)	400	300	500
P(III)	200	100	1,000

Tabla 6.3: Capacidad, despacho mínimo y costo de cada planta para el ejemplo 18

Hay que notar que la restricción afectó de manera significativa el número de soluciones factibles así como la solución óptima encontrada en el ejemplo 17. Esto se puede ver cuando, al elegir producir 600 MWh de P(I), correspondientes a la planta con el costo unitario más barato, no se permite comprar los 200 MW restantes de la demanda a P(II) debido a que, la restricción fuerza la producción de al menos 300 MWh en la planta II. Por lo que, si se compraran los 600 MWh a P(I), los 200 MWh faltantes deberán ser comprados a P(III), quien ofrece un precio de 1,000 MXN/MWh como se muestra en la primera solución de la siguiente tabla.

Solución	P(I) MWh	P(II) MWh	P(III) MWh	Costo Total MXN
1	600	0	200	380,000
2	500	300	0	300,000

Tabla 6.4: Soluciones factibles para el ejemplo 18

De este modo, la solución óptima para este ejemplo corresponderá a la compra del despacho mínimo de las primeras dos plantas, obteniendo un costo total de $(500 \text{ MWh} \times 300 \text{ MXN/MWh})_I + (300 \text{ MWh} \times 500 \text{ MXN/MWh})_{II} = 300,000 \text{ MXN}$ el cual representa un aumento en 20,000 MXN respecto a la solución óptima encontrada en el ejemplo 17.

Aumentando las restricciones de los ejemplos pasados se tendrá lo siguiente.

Ejemplo 19. *Considerando el ejemplo 18 y añadiéndole que, no comprar la capacidad total de los MWh generados aumenta el costo unitario en 1,000 MXN, 500 MXN y 200 MXN a las plantas P(I), P(II) y P(III), respectivamente, se busca la solución que devuelva el costo mínimo.*

Esta restricción surge debido a que, en la práctica, la pérdida de eficiencia térmica resulta en costos más elevados al quemar más combustible.

Planta	Capacidad MW	Costo MXN/MWh	Despacho mínimo MW	Costo ineficiente MXN/MWh
P(I)	600	300	500	1,300
P(II)	400	500	300	1,000
P(III)	200	1,000	100	1,200

Tabla 6.5: Capacidad y costo asociado a la venta íntegra, despacho mínimo y costo correspondiente para el ejemplo 19

Como ya se vió en el ejemplo pasado, la solución óptima ante la restricción de despacho mínimo está dada por la siguiente combinación: 500 MWh generados por P(I) y 300 MWh por P(II). Sin embargo, al retomar esa idea se obtendría un costo total de

$$(500 \text{ MWh} \times 1,300 \text{ MXN/MWh})_I + (300 \text{ MWh} \times 1,000 \text{ MXN/MWh})_{II} = 950,000 \text{ MXN.}$$

Mientras que, como se muestra en la siguiente tabla, al elegir una combinación de generación eficiente se reducen los costos de manera significativa.

Solución	P(I) MWh	P(II) MWh	P(III) MWh	Costo Total MXN
1	600	0	200	380,000
2	500	300	0	950,000

Tabla 6.6: Ejemplos de las combinaciones posibles del ejemplo 19

De esta manera, una solución para este ejemplo está dada por la configuración de la solución 1 mostrada en la tabla anterior, la cual es el resultado de

$$(600 \text{ MWh} \times 300 \text{ MXN/MWh})_I + (200 \text{ MWh} \times 1,000 \text{ MXN/MWh})_{III} = 380,000 \text{ MXN}.$$

Este costo representa un aumento en 100,000 MXN respecto a la solución óptima mostrada en el ejemplo 17.

En dirección al caso de estudio, hay que recordar que se busca modelar el despacho de energía por la red nacional de transmisión. De este modo, a partir de ahora se supondrá que se cuenta con tres nodos denotados por I, II y III. Cada nodo cuenta con una planta de generación (P(I), P(II) y P(III)) y un centro de carga (C(I), C(II) y C(III)), a los cuales les corresponderá una oferta y una demanda, respectivamente. Tanto oferta como demanda serán fijas y estarán expresadas en MW, como se muestra a continuación.

Nodo i	Demanda de C(i) MW	Capacidad de P(i) MW	Costo MXN/MWh
I	200	600	300
II	300	400	500
III	200	200	1,000

Tabla 6.7: Demanda, capacidad y costo de los nodos I, II y III

Se busca obtener la representación gráfica del modelo anterior. Así, se dirá que además de tener los tres nodos compuestos por un centro de carga y una planta generadora, cada uno, como se describió anteriormente, se tendrá que las líneas de transmisión de la red física de distribución serán representadas por aristas y no arcos debido a que, en una línea de corriente alterna la energía puede fluir en cualquier sentido. Imaginando que los tres nodos se encuentran conectados entre ellos, la gráfica resultará en la siguiente.

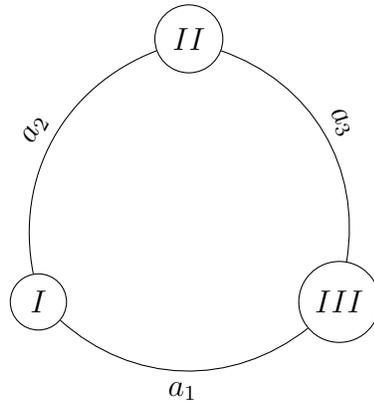


Figura 6.1: Representación gráfica de la conexión de los nodos I, II y III

Considerando los datos de la tabla 6.7, en el siguiente ejemplo se buscará satisfacer la demanda de los tres centros de carga, es decir, 700 MW resultado de la suma de las demandas de los tres nodos, obteniendo el costo mínimo.

Ejemplo 20. *A continuación se proporciona una solución de costo mínimo donde se obtuvo un costo total de 230,000 MXN y un precio, correspondiente al costo de la última planta generadora despachada, de 500 MXN/MWh.*

$$(600 \text{ MWh} \times 300 \text{ MXN/MWh})_I + (100 \text{ MWh} \times 500 \text{ MXN/MWh})_{II} = 230,000 \text{ MXN}$$

Nodo i	Producido por Pi MWh	Suministrado a Ci MWh	Costo Total MXN
I	600	200	180,000
II	100	300	50,000
III	0	200	0

Tabla 6.8: Generación, suministro y costos del ejemplo 20

Ahora, se considerará que las aristas tienen una capacidad máxima de flujo.

La restricción sobre las líneas de transmisión supondrá que éstas tienen una resistencia del 5%, lo cual significará que para poder llevar 95 MWh de una planta

a otra, se tendrán que generar y enviar 100 MWh. Es decir, la resistencia funciona como una tasa de descuento.

$$\frac{95 \text{ MWh}}{(1 - 0.05)} \approx 100 \text{ MWh}$$

De manera análoga se puede ver que al pasar aproximadamente 100 MWh por la línea de transmisión, el nodo receptor obtuvo en realidad 95 MWh. Por lo que se dice que la resistencia representa las pérdidas físicas al realizar la distribución.

$$100 \text{ MWh} \times (1 - .05) \approx 95 \text{ MWh}$$

Basándose en que la línea de transmisión tiene una capacidad máxima de 100 MW hay que notar que, a pesar de la restricción anterior, un centro de carga puede recibir más de 100 MW. A continuación se mostrará una propuesta que ejemplifique lo antes mencionado satisfaciendo, a costo mínimo, la demanda del centro de carga del nodo III.

Primero, se propone el suministro de 100 MWh generados por P(I) y enviados a través de la arista a_1 , la cual corresponde a la línea de transmisión que conecta a los nodos I y III de manera directa. Así, C(III) recibirá $100 \text{ MWh} \times (1 - .05) = 95 \text{ MWh}$. Sin embargo, como la demanda de C(III) no ha sido satisfecha completamente y, debido a que la restricción sólo permite pasar 100 MW por cada línea de transmisión, se complementará enviando la capacidad máxima de la línea de transmisión a través del camino (I, a_2, II, a_3, III) , es decir se enviarán 100 MWh provistos por P(I), los cuales pasarán primero por el nodo II. Debido al uso de ambas líneas de transmisión, a_2 y a_3 , C(III) en realidad recibirá $100 \text{ MWh} \times (1 - .05)^2 = 90.25 \text{ MWh}$, ya que se debe considerar una doble tasa de descuento correspondiente a cada vez que se utilizó cada línea de transmisión.

De este modo, C(III) recibe $95 \text{ MWh} + 90.25 \text{ MWh} = 185.25 \text{ MWh}$, los cuales representan una cantidad mayor a los 100 MW que topan a cada línea de transmisión.

Finalmente, P(III) producirá 14.75 MWh para cubrir su demanda.

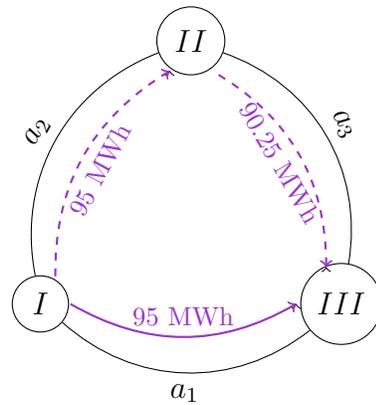


Figura 6.2: Representación gráfica del envío de más de 100 MWh a un centro de carga

De manera análoga, hay que notar que cada centro de carga podría recibir máximo $95 \text{ MWh} + 95 \text{ MWh} = 190 \text{ MWh}$ a través de las líneas de transmisión que lo conectan de manera directa con los nodos adyacentes, como se muestra en la siguiente figura.

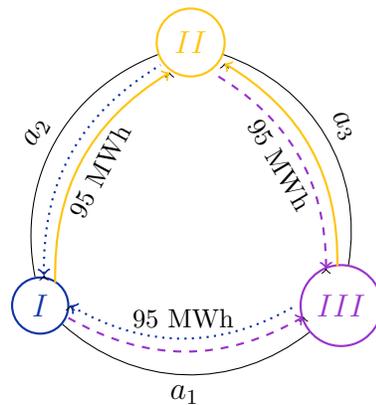


Figura 6.3: Representación gráfica del envío máximo a cada nodo

Retomando el ejemplo 20, y agregando la restricción sobre la línea de transmisión como se mencionó anteriormente, se propondrá una solución a costo mínimo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 21. *Utilizando la tabla mostrada abajo, se tuvo un costo total de 282,500 MXN y un precio de 1,000 MXN/MWh.*

Nodo i	Producido por $P(i)$ MWh	Suministrado a $C(i)$ MWh	Costo Total MXN
I	400	200	120,000
II	305	300	152,500
III	10	200	10,000

Tabla 6.9: Generación, suministro y costos del ejemplo 21

Comparando los últimos dos ejemplos, se puede observar que en el ejemplo 20 se encontró una solución de costo mínimo sin utilizar MWh producidos por $P(III)$. Por lo que, la planta generadora del nodo III no pertenece al despacho económico. Por el contrario, al considerar un límite en el flujo de las líneas de transmisión, como se hizo en el ejemplo 21, se necesitó que en $P(III)$ se generaran 10 MWh para que la solución fuera factible. Así, se dirá que $P(III)$ es necesaria para la confiabilidad del sistema, ya que sin ella no se podría encontrar una configuración posible que satisficiera todas las restricciones al mismo tiempo.

Siguiendo aumentando las restricciones, ahora se propondrá tomar en cuenta el despacho mínimo de cada generadora. Hay que recordar que, en caso de que la generadora no produzca al menos la cantidad establecida de MWh, no se le permitirá generar en absoluto.

Ejemplo 22. *En este ejemplo se buscará obtener una solución de costo mínimo que cubra todas las demandas de manera simultánea, ofertando una capacidad menor o igual a la máxima por nodo y, cumpliendo con la restricción de despacho mínimo.*

Nodo i	Demanda de $C(i)$ MW	Capacidad de $P(i)$ MW	Costo MXN/MWh	Despacho mínimo MW
I	300	300	300	200
II	300	400	500	300
III	200	200	1,000	100

Tabla 6.10: Demanda, capacidad, costo y despacho mínimo del ejemplo 22

Utilizando los datos proporcionados por la tabla anterior y, recordando que aún

no se considera la restricción respecto al flujo de las líneas de transmisión, se obtuvo la siguiente solución.

Nodo i	Producido por P(i) MWh	Suministrado a C(i) MWh	Costo Total MXN
I	300	300	90,000
II	400	300	200,000
III	100	200	100,000

Tabla 6.11: Generación, suministro y costos del ejemplo 22

Con lo que se obtiene un costo total de 390,000 MXN.

Para el siguiente ejemplo se considerará que hay una pérdida del 5% cada vez que se pase por alguna de las líneas de transmisión.

Ejemplo 23. Hay que notar que al considerar las pérdidas, se obtuvo un costo de 416,000 MXN, es decir, 26,000 MXN mayor al propuesto como solución de costo mínimo en el ejemplo 22. Este costo adicional corresponde exactamente a los MW faltantes para satisfacer la demanda del centro de carga del nodo III, derivados de las pérdidas.

Nodo i	Producido por P(i) MWh	Suministrado a C(i) MWh	Costo Total MXN
I	300	300	90,000
II	400	300	200,000
III	105	200	126,000

Tabla 6.12: Generación, suministro y costos del ejemplo 23

Ahora, se estudiará la red considerando un nodo de referencia arbitrario fijo en el que, a su centro de carga se le asignarán las demandas de los tres centros de carga así como, lo asociado a ellas.

Ejemplo 24. Tomando al nodo II como el nodo de referencia, se tendrá que la demanda total de C(II) será de $300 MW_I + 300 MW_{II} + 200 MW_{III} = 800 MW$.

Nodo <i>i</i>	Demanda de C(<i>i</i>) MW	Capacidad de P(<i>i</i>) MW	Costo MXN/MWh
I	200	600	300
II	300	400	500
III	200	200	1,000

Tabla 6.13: Demanda, capacidad y costo del ejemplo 24

Buscando el costo mínimo se encontró la siguiente solución.

Nodo <i>i</i>	Producido por P(<i>i</i>) MWh	Suministrado a C(<i>i</i>) MWh	Costo Total MXN
I	300	0	90,000
II	400	800	200,000
III	100	0	120,000

Tabla 6.14: Generación, suministro y costos del ejemplo 24

Finalmente, se obtuvo un costo total de 410,000 MXN y un precio de 1,000 MXN. Con lo cual las generadoras de los nodos recibirían un pago de

$$1,000 \text{ MXN} \times \text{MW generados}$$

El precio 1,000 MXN mencionado anteriormente, corresponderá precisamente al Precio Marginal Local (PML) en el que hasta el momento, únicamente se ha considerando el componente de energía. Dicho componente corresponde al costo de la última generadora despachada, es decir, al satisfacer la demanda se ha tenido que recurrir a obtener MWh de las generadoras no obstante su alto costo, así, aquella máquina que proporcionó MWh y tuvo el mayor costo será la que determine el costo asociado al componente de energía del sistema.

A partir de ahora se denotarán por NI, NII y NIII a los nodos I, II y III, respectivamente.

A continuación se estudiará la situación en la que el sistema cuente con NII como nodo de referencia. Además, se utilizarán los datos de la tabla encontrada abajo. Más aún, tomando en cuenta las pérdidas físicas.

Nodo i	Demanda de C(i) MW	Capacidad de P(i) MW	Costo MXN/MWh	Despacho mínimo MW
I	375	300	300	200
II	200	400	500	300
III	100	150	1,000	50

Tabla 6.15: Demanda, capacidad, costo y despacho mínimo de los nodos I, II y III

Ejemplo 25. Hay que observar que, la demanda total es de 675 MW. Sin embargo, al recordar que NII es el nodo de referencia, se debe tomar en cuenta la resistencia de las líneas de transmisión al llevar los MW asociados a las demandas de los centros de carga de NI y NIII al de NII. Así, se buscará satisfacer una demanda total de

$$\frac{(375 \text{ MW}_I)}{(1 - .05)} + 200 \text{ MW}_{II} + \frac{(100 \text{ MW}_{III})}{(1 - .05)} = 700 \text{ MW}$$

Luego, una solución será la mostrada en la siguiente tabla. Con la cual, se obtuvo un costo total de 323,750 MXN y un precio de 1,000 MXN.

Nodo i	Producido por P(i) MWh	Suministrado a C(i) MWh	Costo Total MXN
I	300	0	90,000
II	367.50	700	183,750
III	50	0	50,000

Tabla 6.16: Generación, suministro y costos del ejemplo 25

Como en el ejemplo 25 se consideran las pérdidas, a diferencia del planteamiento del ejemplo 24, el pago a las generadoras variará. Esta diferencia de pagos será utilizada como incentivo al proveer un precio más alto a las plantas generadoras que, a pesar de ser ineficientes por tener precios elevados, se encuentran generando de manera necesaria. Esto se ilustrará para el modelo con el que contamos, es decir, tres nodos interconectados que cuentan con una generadora y un centro de carga, cada uno. Así, pensando en el caso de pagar a todas las generadoras únicamente el precio, como en el ejemplo 24, aquella de mayor costo no recibirá una utilidad por lo que, a largo plazo no representará un negocio rentable. Por lo tanto, probablemente

la generadora deje de existir. Esto resultará en contar con una red conformada por dos generadoras y tres centros de carga. Y como ya se mostró en ejemplos anteriores, al proporcionar soluciones en donde P(III) genere, se están encontrando soluciones factibles, es decir, si no se dispusiera de la generadora del nodo III el sistema no podría funcionar.

Por otro lado, al tomar al nodo II como nodo de referencia, se dirá que cuando la energía fluya hacia él, las pérdidas serán negativas, mientras que si fluye en sentido contrario, entonces las pérdidas serán positivas.

Utilizando que la resistencia es del 5% se puede ver que el precio asociado al componente de pérdidas de cada nodo se verá como en la siguiente tabla, utilizando para NI y NIII que $1,000 \text{ MXN/MWh} \times (-.05) = -50 \text{ MXN/MWh}$.

Nodo i	C. energía MXN/MWh	C. pérdidas MXN/MWh	Precio (PML) MXN/MWh
I	1,000	-50	950
II	1,000	0	1,000
III	1,000	-50	950

Tabla 6.17: PML del ejemplo 25

En los últimos dos ejemplos se ha realizado el cálculo de los componentes de energía y de pérdida de los PMLs de cada nodo. A continuación, se propondrá un método para encontrar el componente de congestión.

Ejemplo 26. *Nuevamente se utilizarán los datos mostrados en la tabla 6.15. Además, se agregará la columna Costo ineficiente, la cual corresponderá al costo del despacho por el nodo en caso de no cumplir con el despacho mínimo. Con esto se obtendrá la siguiente tabla.*

Nodo i	Demanda de C(i) MW	Capacidad de P(i) MW	Costo MXN/MWh	Despacho mínimo MW	Costo ineficiente MXN/MWh
I	375	300	300	200	1,300
II	200	400	500	300	1,100
III	100	150	1,000	50	1,200

Tabla 6.18: Demanda, capacidad, costo y despacho mínimo del ejemplo 26

Adicionalmente, las líneas de transmisión estarán limitadas de acuerdo a la siguiente condición. El valor máximo de MW que puede pasar a través de cada línea, es 200.

A continuación se muestra una solución que satisface todas las restricciones antes mencionadas.

Nodo i	Producido por P(i) MWh	Suministrado a C(i) MWh	Costo Total MXN
I	300	0	90,000
II	320	700	352,000
III	105	0	105,000

Tabla 6.19: Generación, suministro y costos del ejemplo 26

Es importante notar que al hacer un análisis similar al de ejemplo pasado, se obtendría un PML como el que se muestra.

Nodo i	C. energía MXN/MWh	C. pérdidas MXN/MWh	Precio' (PML') MXN/MWh
I	1,100	-55	1,045
II	1,100	0	1,100
III	1,100	-55	1,045

Tabla 6.20: PML' del ejemplo 26

Mas, hay que recordar que las líneas de transmisión se encuentran restringidas. Con esto se dará la pauta para encontrar el componente de congestión.

Primero, hay que ver que tanto el componente de energía como el de pérdidas se mantendrán como en el ejemplo 25 debido a que, el despacho se vio modificado al cumplir con la cota de los arcos, condición asociada al componente de congestión. Por lo que, como idea inicial, se propondrá que la diferencia entre las sumas de los componentes de energía y de pérdidas planteado hasta ahora del ejemplo 26 (PML') y el del ejemplo 25 (PML), corresponda al componente de congestión prima.

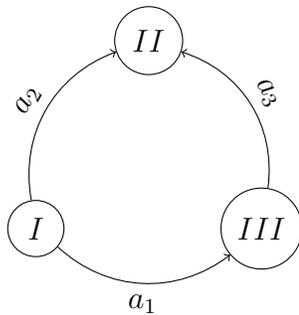
Nodo i	PML' MXN/MWh	PML MXN/MWh	Componente de congestión prima MXN/MWh
I	1,045	950	95
II	1,100	1,000	100
III	1,045	950	95

Tabla 6.21: Componente de congestión prima del ejemplo 26

Ahora, se calculará el costo de los arcos, es decir el costo asociado a pasar MW por las líneas de transmisión. Dicho costo será el resultado de realizar la diferencia entre el componente de congestión prima del nodo de inyección y el de extracción.

$$\text{COSTO DEL ARCO} = C. \text{ de congestión prima del nodo de inyección} - C. \text{ de congestión prima del nodo de extracción.}$$

De esta manera, al considerar que los nodos se encuentran interconectados como se muestra a continuación, se tendrá la siguiente tabla.



(a) Interconexión

Arco	Costo del arco ai MXN/MWh
a1	0
a2	5
a3	5

(b) Costo de los arcos

Así, se obtendrá un juego de congestión donde el costo de las líneas corresponderá a los costos del juego.

Hay que ver que al resolver dicho juego se obtendrá un nuevo equilibrio de Nash el cual, no necesariamente minimiza los costos. No obstante, los costos de las líneas modificarán los flujos (al menos de manera teórica debido a que, la electricidad no fluirá en relación a los precios presentados) de manera que los diferentes precios correspondan al precio “justo”.

Este precio es llamado así debido a que se agregó una variable que refleja la competitividad. Es decir, cuando los costos de los arcos son considerados en el juego de congestión, éste describe un programa de incentivos para las generadoras y los centros de carga al agregar al precio final un indicador de la eficiencia de la transmisión. Aun así, se busca obtener el mínimo costo. Por lo que se añadirá un mecanismo de oferta y demanda para hacer que el sistema tienda a un equilibrio a través de la cuota τ .

Las cuotas serán tales que el flujo resultante corresponda al nuevo equilibrio de Nash el cual, describe al costo de bienestar. Sin embargo, sólo se buscan las cuotas ya que, el flujo se sabe que está dado como en el ejemplo 25. La cuotas serán calculadas utilizando [20].

Arco	x	f_j^{opt}	b_j	$\tau_j = f_j^{opt} - b_j$
a1	100	51.25125	100	-48.748742
a2	200	51.25125	200	-148.74874
a3	200	51.25125	200	-148.74874

Tabla 6.22: Datos obtenidos al utilizar el Teorema 4.1.1

*Al obtener los valores de las cuotas se podrá plantear un sistema de ecuaciones utilizando el costo de los arcos, calculados como la diferencia de costos en los nodos de inyección y de extracción. Posteriormente dichos costos ayudarán a la división del costo en cada nodo en relación con la congestión. A este resultado se le llamará *Componente de congestión doble prima*.*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1.1 & 0 & 1 & -48.748742 \\ -1 & 1 & 0 & -148.74874 \\ 0 & 1 & -1 & -148.74874 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 487.48742 \\ 338.73868 \\ 487.48742 \end{array} \right)$$

Sumando ambos componentes de congestión prima y doble prima, se obtendrá el componente de congestión del ejemplo 26, donde su PML se dividirá de la siguiente manera

Nodo i	C. energía MXN/MWh	C. pérdidas MXN/MWh	C. congestión MXN/MWh	Precio (PML) MXN/MWh
I	1,000	-50	582.48742	1,532.48742
II	1,000	0	587.48742	1,587.48742
III	1,000	-50	433.73868	1,383.73868

Tabla 6.23: PML del ejemplo 26

Finalmente se obtendrá un costo total 545,000 MXN dentro del cual se consideraran los costos asociados a las restricciones de despacho eficiente y los costos de transmisión con los cuales se obtuvieron los PMLs correspondientes a cada nodo.

Nodo i	Producido por P(i) MWh	Costo MXN/MWh	Costo de transmisión MXN	Costo Total MXN
I	300	300	-1,000	89,000
II	320	1,100	0	352,000
III	105	1,000	-1,000	104,000

Tabla 6.24: Generación, costo de transmisión y costo total del ejemplo 26

Capítulo 7

Conclusiones

Al inicio del trabajo se aborda la teoría de juegos. De ésta surgen modelos más específicos y complejos como lo son los juegos de congestión, dentro de los cuales, se estudia cuál es su equilibrio de Nash como solución. Sin embargo, el equilibrio de Nash no siempre corresponderá a la solución óptima de maximizar el bienestar social. De esta manera, surge el concepto de precio de la anarquía con el cual, se obtiene un valor que cuantifica la desviación de las soluciones propuestas para los juegos de congestión. Por otro lado, se plantea la teoría de cuotas en juegos de congestión en redes donde se muestra que el uso de cuotas representa un mecanismo de influencia en el comportamiento de los jugadores. Más aún, se enuncia el Teorema de Cuotas Óptimas Locales con el cual se exhibe un mecanismo que, a través de impuestos locales, aproxima a un mínimo el precio de la anarquía. Es así que, mediante el teorema mencionado anteriormente, se dio una solución aproximada de costo mínimo al juego de congestión descrito en el caso de estudio. Dicho caso tiene como objetivo calcular el componente de congestión asociado al Precio Marginal Local (PML), definido como el conjunto de restricciones que impiden satisfacer la demanda del sistema al menor costo posible para el suministro de electricidad. Sin embargo, el concepto de congestión abarca más que eso. A lo largo de este trabajo se vió que el mecanismo de congestión en los precios establece una dinámica de precios que motiva la inversión en tecnologías eficientes respecto a costo, como lo son los ciclos combinados y las energías renovables, puesto que dichas centrales encuentran un incentivo económico. Así, el componente de congestión es un indicador de difi-

cultades en el mercado ya que, puede representar un indicador de la eficiencia de la transmisión y, a su vez, es una variable que afecta la competitividad. Aun más, el componente no sólo muestra que existe la necesidad de fuentes eficientes, sino que expresa puntualmente dicha necesidad de forma geográfica para que los inversionistas interesados construyan nuevas fuentes en los lugares donde más se requieran. Este mismo mecanismo refuerza la confiabilidad del sistema dando señales en el mercado para tener un portafolio equilibrado de centrales térmicas y renovables. De esta manera se promueve la continua inversión en la industria.

Otro método para el cálculo del componente de congestión es a través de los precios “sombra”, utilizados en la organización de transmisión regional PJM Interconnection LLC (PJM) en Estados Unidos. Los precios sombra muestran, en términos económicos, cuánto dinero adicional se podría ganar o ahorrar (de acuerdo a la función objetivo) al modificar alguna restricción. En los mercados de energía, estos precio sombra muestran el ahorro en los costos de producción de la oferta si las restricciones para mejorar la función objetivo son relajadas para tan sólo un MW.

Adicionalmente, al comparar el cálculo del componente de pérdidas de los PMLs también existe una diferencia entre el método utilizado en este trabajo y el ocupado por la PJM. En el segundo, se considera un factor de pérdidas relacionado al incremento porcentual de pérdidas del sistema provocadas por pequeñas inyecciones o retiros de potencia. Sin embargo, la situación geográfica de cada planta también afecta dicho componente en ambos procedimientos. En este trabajo las pérdidas corresponden a un acuerdo dentro del cual la demanda se calcula con respecto a un nodo de referencia, es decir, toda la energía llega a ese punto aunque no se consuma realmente ahí. Donde un precio negativo en el componente de pérdidas significa que la energía se consume en sitio, generando un ingreso para las generadoras debido a que se ve como una bonificación a la eficiencia, se dice que es más eficiente que el mercado.

Por último, una herramienta asociada al componente de congestión son los Derechos Financieros de Transmisión (DFTs). Como se mencionó en el capítulo 5, el MEM está dividido en cinco mercados dentro de los cuales se incluyen las Subastas de DFTs. Estos son productos financieros que otorgan a su titular el derecho y la

obligación de cobrar o pagar la diferencia que resulte del valor de los componentes de congestión marginal de los PMLs del Mercado del Día en Adelanto (MDA) en dos Nodos de Precio (NodosP), con un nodo de origen y un nodo de destino. Es decir, los DFTs ayudan a mitigar el riesgo de congestión que, como ya se vio, su cálculo presenta un grado de dificultad no menor, complicando la predicción de dicho componente. Otra ventaja importante es que el valor que los participantes pagan por el déficit se regresa en una inversión que ayuda a reforzar la infraestructura del país, lo que significa una mejor infraestructura de transmisión. Dentro de este trabajo no se ahondará en cómo utilizar los DFTs para la cobertura en distintos nodos del sistema ante la volatilidad del componente de congestión. No obstante, la implementación de las subastas de estos está postergada. Sin embargo, a las nuevas centrales se les otorgan DFTs por el reforzamientos a las líneas de transmisión necesarias para su interconexión.

Glosario

Q^{Nash}	costo social en equilibrio de Nash
$Q^{ópt}$	costo social óptimo
PA	precio de la anarquía
v	vértice
a	recurso
$c_a(x)$	función de costo asociada al recurso a
s	nodo origen
t	nodo destino
$ruta - (s, t)$	conjunto de arcos que se toman para atravesar la red desde el nodo s al nodo t
(u, v)	arco
$G = (V, \mathcal{E})$	gráfica
V	conjunto finito de vértices
\mathcal{E}	familia de aristas
uw	arista
$D = (V, A)$	digráfica
A	familia de arcos
$\Gamma^-(v)$	conjunto de arcos de entrada de v
$\Gamma^+(v)$	conjunto de arcos de salida de v
$camino P = (v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k)$	secuencia de vértices y arcos con v_0 y v_k como nodos origen y destino, respectivamente
$ruta$	camino P con $v_i \neq v_j \forall i \neq j$
$ruta-(s, t)$	ruta con $s = v_0$ y $t = v_k$
\mathcal{R}	conjunto de todas las rutas
$\mathcal{R}_{(s,t)}$	conjunto de todas las rutas- (s, t)
x_a	flujo en el arco a
$\vec{x} = (\mathbf{x}^{(s,t)})_{(s,t) \in L}$	multiflujo
$\mathbf{x}^{(s,t)}$	flujo- (s, t)
$L = \{(s, t)\}$	conjunto de arcos con un único elemento
$M = (V, \mathcal{E}, A)$	gráfica mixta
(J, E, R)	juego
$J = \{j_1, \dots, j_n\}$	conjunto finito de jugadores
$E = \{E_1, \dots, E_n\}$	conjunto de posibles estrategias
$E_i = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}}\}$	conjunto de posibles estrategias del jugador i
e_i	estrategia jugada por el jugador i
$R : \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$	función que determina el resultado del juego

$\bar{E} = \prod_{i=1}^n E_i$	conjunto de estrategias
x_{j_i}	unidades de flujo del jugador i
e	vector de estrategias seleccionadas por los jugadores o perfil estratégico
e_{-i}	estrategias jugadas por los jugadores diferentes a j_i , $\forall k \neq i$
$R = \{r_1, \dots, r_n\}$	conjunto de costos en un juego de congestión
r_i	costo incurrido por el jugador i
$r_i(e)$	costo privado de j_i en el perfil estratégico e
A	conjunto de asignaciones factibles para j_i
$q_s(e)$	costo del recurso s en el perfil estratégico (e)
S	conjunto de recursos
A	vector de asignación
$x_s(e)$	número de jugadores que tienen al recurso s dentro de su estrategia jugada en e_i
u_i	vértice asignado al jugadora i
ρ	ruta- (u_i, v_i) en D
$\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n\}$	conjunto de tiempos de viaje
\mathcal{L}_i	tiempo de viaje incurrido por el usuario i
$\ell_u(x)$	función de tiempo de viaje en el arco u
$\mathcal{L}_i(e)$	tiempo de viaje de el usuario i en la estrategia e
$Q(e)$	costo del sistema describe el tiempo pasado en la red por todas los usuarios
$\tau_u(x)$	función de cuota dependiente de la congestión
$\bar{\mathcal{L}}_i(e)$	costo incurrido por el jugador i que considera tanto el tiempo de viaje como los peajes cobrados a lo largo de su camino
\mathcal{L}	conjunto común de funciones a los que pertenecen todos los tiempos de viaje generados por una combinación lineal de bases base k
β_k	base k
\mathcal{G}	conjunto de juegos de congestión con un máximo de n jugadores
$\tau = T(\ell)$	cuota correspondiente al tiempo de viaje ℓ
$PA(T)$	precio de la anarquía que considera el mecanismo T
$Q^{\min}(G)$	costo social mínimo del juego de congestión G
$Q^{Nash}(G, T)$	el mayor costo social en un equilibrio de Nash al aplicar el mecanismo T en el juego de congestión G
$PA_{\mathbb{Q}}(T)$	precio de la anarquía que considera el mecanismo T para la subclase de juegos \mathbb{Q} con $\alpha_k \in \mathbb{Q}$ para toda $k \in \{1, \dots, m\}$, para todos los arcos de A

Bibliografía

- [1] FOX, W. M. (1995). Sociotechnical system principles and guidelines: past and present. *The Journal of applied behavioral science*, 31(1), 91-105.
- [2] MARDEN, J. R., & SHAMMA, J. S. (2015). Game theory and distributed control. In *Handbook of game theory with economic applications* (Vol. 4, pp. 861-899). Elsevier.
- [3] ALONSO-MORA, J., SAMARANAYAKE, S., WALLAR, A., FRAZZOLI, E., & RUS, D. (2017). On-demand high-capacity ride-sharing via dynamic trip-vehicle assignment. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 114(3), 462-467.
- [4] PALENSKY, P., & DIETRICH, D. (2011). Demand side management: Demand response, intelligent energy systems, and smart loads. *IEEE transactions on industrial informatics*, 7(3), 381-388.
- [5] TSAKALOZOS, K., KLLAPI, H., SITARIDI, E., ROUSSOPOULOS, M., PAPARAS, D., & DELIS, A. (2011, April). Flexible use of cloud resources through profit maximization and price discrimination. In *2011 IEEE 27th International Conference on Data Engineering* (pp. 75-86). IEEE.
- [6] BRAESS, D., NAGURNEY, A., & WAKOLBINGER, T. (2005). On a paradox of traffic planning. *Transportation science*, 39(4), 446-450.
- [7] HARDIN, G. (2009). The tragedy of the commons. *Journal of Natural Resources Policy Research*, 1(3), 243-253.

- [8] VICKREY, W. (1961). Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *The Journal of finance*, 16(1), 8-37.
- [9] MYERSON, R. B. (1981). Optimal auction design. *Mathematics of operations research*, 6(1), 58-73.
- [10] LAFFONT, J. J., & MARTIMORT, D. (2009). *The theory of incentives*. Princeton university press.
- [11] BELLHOUSE, D. (2007). The problem of Waldegrave. *Electronic Journal for the History of Probability and Statistics*, 3(2), 1-12.
- [12] BELLHOUSE, D. R., & FILLION, N. (2015). Le Her and other problems in probability discussed by Bernoulli, Montmort and Waldegrave. *Statistical Science*, 26-39.
- [13] ZERMELO, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. In *Proceedings of the fifth international congress of mathematicians* (Vol. 2, pp. 501-504). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [14] Monika Śliwa (May 4, 2010). "Hugo Steinhaus". University of Wrocław. Archived from the original on October 5, 2011.
- [15] NEUMANN, J. V. (1928). Zur theorie der gesellschaftsspiele. *Mathematische annalen*, 100(1), 295-320.
- [16] BOREL, E. (1938). *Applications aux jeux de hasard* (Vol. 2). Gauthier-Villars.
- [17] <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.215284>
- [18] ROSENTHAL, R. W. (1973). A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria. *International Journal of Game Theory*, 2(1), 65-67.
- [19] COLLET, S., & KORMAN, A. (2018, July). Intense competition can drive selfish explorers to optimize coverage. In *Proceedings of the 30th on Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures* (pp. 183-192).

- [20] PACCAGNAN, D., GENTILE, B., PARISE, F., KAMGARPOUR, M., & LYGEROS, J. (2018). Nash and wardrop equilibria in aggregative games with coupling constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(4), 1373-1388.
- [21] SURI, S., TÓTH, C. D., & ZHOU, Y. (2007). Selfish load balancing and atomic congestion games. *Algorithmica*, 47(1), 79-96.
- [22] TEKIN, C., LIU, M., SOUTHWELL, R., HUANG, J., & AHMAD, S. H. A. (2012). Atomic congestion games on graphs and their applications in networking. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 20(5), 1541-1552.
- [23] MARDEN, J. R., & WIERMAN, A. (2013). Distributed welfare games. *Operations Research*, 61(1), 155-168.
- [24] ANSHELEVICH, E., DASGUPTA, A., KLEINBERG, J., TARDOS, É., WEXLER, T., & ROUGHGARDEN, T. (2008). The price of stability for network design with fair cost allocation. *SIAM Journal on Computing*, 38(4), 1602-1623.
- [25] KREPS D.M. (1987) Nash Equilibrium. In *The New Palgrave Dictionary of Economics*. Palgrave Macmillan, London.
- [26] OSBORNE, MARTIN J., RUBINSTEIN, ARIEL (12 Jul 1994). A Course in Game Theory. Cambridge, MA: MIT. p. 14.
- [27] KOUTSOUPIAS, E., & PAPADIMITRIOU, C. (1999, March). Worst-case equilibria. In *Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science* (pp. 404-413). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [28] PIGOU, A. C. (1924). The economics of welfare. New Brunswick.
- [29] FISK, C. (1979). More paradoxes in the equilibrium assignment problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 13(4), 305-309.
- [30] WARDROP, J. G., & WHITEHEAD, J. I. (1952). Correspondence. some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 1(3), 325-362

-
- [31] MORRISON, S. A. (1986). A survey of road pricing. *Transportation Research Part A: General*, 20(2), 87-97.
- [32] BERGENDORFF, P., HEARN, D. W., & RAMANA, M. V. (1997). Congestion toll pricing of traffic networks. In *Network Optimization* (pp. 51-71). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [33] HEARN, D. W., & RAMANA, M. V. (1998). Solving congestion toll pricing models. In *Equilibrium and advanced transportation modelling* (pp. 109-124). Springer, Boston, MA.
- [34] COLE, R., DODIS, Y., & ROUGHGARDEN, T. (2006). How much can taxes help selfish routing? *Journal of Computer and System Sciences*, 72(3), 444-467.
- [35] CARAGIANNIS, I., KAKLAMANIS, C., & KANELLOPOULOS, P. (2010) Taxes for linear atomic congestion games. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 7(1), p. 13.
- [36] BILÒ, V., & VINCI, C. (2016). Dynamic taxes for polynomial congestion games. In *Proceedings of the 2016 ACM Conference on Economics and Computation. (ACM)*, pp. 839–856.
- [37] CHRISTODOULOU, G., & KOUTSOUPIAS, E. (2005, May). The price of anarchy of finite congestion games. In *Proceedings of the thirty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing* (pp. 67-73).
- [38] CHANDAN, R., PACCAGNAN, D., & MARDEN, J. R. (2019). Optimal mechanisms for distributed resource-allocation. *arXiv e-prints, arXiv-1911*.
- [39] CVX Research, I. (2012). CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0.
- [40] LOFBERG, J. (2004, September). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)* (pp. 284-289). IEEE.

-
- [41] CHANDAN, R., PACCAGNAN, D., & MARDEN, J. R. (2019, July). Optimal price of anarchy in cost-sharing games. In *2019 American Control Conference (ACC)* (pp. 2277-2282). IEEE.