Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Topologías de Orden

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

Fernando Izquierdo Martínez

TUTOR

Dra. María Isabel Puga Espinosa

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2022

Agradecimientos

Primeramente, doy gracias a mi familia por darme siempre el apoyo necesario para poder sobrellevar mi vida académica en todo momento, a mis amigos por hacer de mi vida universitaria inolvidable. A esas personas especiales que siempre estuvieron motivándome a mejorar cada día y a mi asesora la Dra. María Isabel Puga Espinosa por todo el apoyo y compresión.

Finalmente agradezco a los sinodales que fueron de gran ayuda para poder terminar este trabajo en especial a la Dra. Rocío Leonel y así mismo quien se tome el tiempo de leer este trabajo que es resultado de mucho tiempo de esfuerzo y dedicación.

Introducción

La importancia del estudio de la Topología queda de manifiesto en el avance que ha dado a las diversas ramas que existen en las matemáticas, en los cursos elementales se aborda de manera muy completa contemplando un sinfín de espacios con mucha variedad de topologías.

En búsqueda de un espacio diferente a los que se estudian en estos cursos me resultó interesante basar el tema principal de mi tesis en el estudio de los espacios ordenados como lo son $\mathbb{R}$ con el orden usual y $[0,1]^2$ con el orden lexicográfico.

En el capítulo I, expondremos conceptos preliminares tales como conjuntos y espacios métricos, el capítulo II consta de de espacios topológicos, ejemplos y sus propiedades. En el capítulo III, estudiamos espacios ordenados en general y el capítulo IV está dedicado al cuadrado lexicográfico.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Teoría de conjuntos

Se supondrá que el lector tiene conocimiento de conceptos básicos de la teoría de conjuntos.

$\mathbb{N}$ denotará el conjunto de los números naturales y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.

Definición 1.1 *Decimos que $F = \{f_i\}_{i\in I}$ es una* familia de conjuntos *si I es un conjunto de índices y f_i es un conjunto para cada $i \in I$.*

Ejemplo 1: Si $F = \{f_i\}_{i\in\{1,2\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, F es una familia de conjuntos, pues $\{1, 2\}$ es un conjunto de índices y $\emptyset, \{\emptyset\}$ son conjuntos.

Ejemplo 2: Haciendo para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_i = \{i\}$, $F = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos pues $\mathbb{N}$ es un conjunto de índices y cada f_i es un conjunto.

Observación: Podemos definir las operaciones union, intersección y complemento de conjuntos en familias de conjuntos.

Definición 1.2 *Dado un conjunto X, decimos que una relación $\mathcal{R}$ entre pares de elementos de X, denotado por $x\mathcal{R}y$ es un* preorden *si cumple las siguientes propiedades:*

La relación $\mathcal{R}$ es reflexiva: Para cada $x \in X$, $x\mathcal{R}x$.

La relación $\mathcal{R}$ es transitiva: Si $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ entonces $a\mathcal{R}c$.

Ejemplo: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con el orden "$\leq$" el heredado por los números reales es un *preorden*.

Definición 1.3 *Sea* $X = [0, 1]^2$ *definimos el* orden lexicográfico *"*$\leq_X$*" como:* $(a_1, a_2) \leq_X (b_1, b_2)$ *si* $a_1 < b_1$ *o* $a_1 = b_1$ *y* $a_2 \leq b_2$. *(*$\leq$ *es el orden usual del* $[0, 1]$*).*

Ejemplo: $(3, 4) \leq_X (4, 2)$ puesto que $3 < 4$ y $(3, 1) \leq_X (3, 2)$ puesto que $3 = 3$ y $1 < 2$.

Definición 1.4 *Dado* X *un conjunto no vacío, decimos que* $(X, \leq)$ *es un* orden total *si* $\leq$ *es una relación entre elementos de* X *que cumple las siguientes propiedades:*

1. La relación $\leq$ es reflexiva: Para cada $x \in X$, $x \leq x$.
2. La relación $\leq$ es antisimétrica: Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.
3. La relación $\leq$ es transitiva: Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.
4. La relación $\leq$ es total: Si $x, y \in X$, entonces $x \leq y$ o $y \leq x$.

En este caso diremos que $(X, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

Ejemplo: El espacio $\mathbb{N}$ con el orden usual $\leq$ es un orden total.

Proposición 1.1 *El orden lexicográfico* $\leq$ *en* $[0, 1]^2 = L$ *es un orden total.*

Demostración:

Dados $(a, b) \in L$, *como* $a = a$ *y* $b \leq b$, $(a, b) \leq_L (a, b)$.

Por lo tanto, $\leq$ *es una relación reflexiva.*

Sean $(a, b), (c, d) \in L$ *tales que* $(a, b) \leq_L (c, d)$ *y* $(c, d) \leq_L (a, b)$.

Entonces $a \leq c$ *y* $c \leq a$ *por lo tanto* $a = c$ *y así* $b \leq d$ *y* $d \leq b$.

Por lo tanto, $(a, b) = (c, d)$.

Por lo tanto $\leq$ *es una relación antisimétrica.*

Dados $(a, b), (c, d)$ *y* $(e, f) \in L$ *tales que* $(a, b) \leq_L (c, d)$ *y* $(c, d) \leq_L (e, f)$ *tenemos que* $a \leq c$ *y* $c \leq e$, *lo que implica* $a \leq e$. *Si* $a < e$, *entonces* $(a, b) \leq_L (e, f)$. *Si* $a = e$, *entonces* $a = c = e$ *y por lo tanto* $b \leq d$ *y* $d \leq f$, *así* $b \leq f$ *y entonces* $(a, b) \leq_L (e, f)$.

Por lo tanto $\leq$ es una relación transitiva.

Por lo tanto $\leq$ es un orden parcial.

Si $(a,b),(c,d) \in [0,1]^2$.

Si $a \neq c$, entonces $a < c$ o $c < a$, si $a < c$, entonces $(a,b) \leq_L (c,d)$. Análogamente si $c < a$, en consecuencia $(c,d) \leq_L (a,b)$.

Si $a = c$, entonces $b \leq d$ o $d \leq b$ si $b \leq d$, entonces $(a,b) \leq_L (c,d)$. Análogamente si $d \leq b$, en consecuencia $(c,d) \leq_L (a,b)$.

Si $a = b$ y $c = d$, entonces $(a,b) \leq_L (c,d)$.

Por lo tanto $\leq$ es un orden total.

Definición 1.5 *Definimos los* intervalos *en $\mathbb{R}$ para cualesquiera $a,b \in \mathbb{R}$, donde $\leq$ es el orden usual, como sigue:*

1. $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
2. $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
3. $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.
4. $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Ejemplo: Tomamos $-1, \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$ y como $-1 < \frac{1}{3}$, tenemos el intervalo $\left[-1, \frac{1}{3}\right] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq \frac{1}{3}\}$.

Observemos que el intervalo $\left[\frac{1}{3}, -1\right] = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq x \leq -1\} = \emptyset$.

Definición 1.6 *Definimos los intervalos con el* orden lexicográfico $\leq_L$, *para cualesquiera $(a,b),(c,d) \in [0,1]^2$ como sigue:*

1. $<(a,b),(c,d)> = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid (a,b) <_L (x,y) <_L (c,d)\}$.
2. $\leqslant (a,b),(c,d)> = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid (a,b) \leq_L (x,y) <_L (c,d)\}$.
3. $<(a,b),(c,d) \geqslant = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid (a,b) <_L (x,y) \leq_L (c,d)\}$.
4. $\leqslant (a,b),(c,d) \geqslant = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid (a,b) \leq_L (x,y) \leq_L (c,d)\}$.

Ejemplo: Tomamos $(\frac{1}{3},1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \in [0,1]^2$ y como $(\frac{1}{3},1) <_L (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, tenemos el intervalo $< (\frac{1}{3},1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) >= \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid (\frac{1}{3},1) <_L (x,y) <_L (\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$.

Definición 1.7 *Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado, decimos que $A \subseteq X$ está* acotado superiormente *si existe $b \in X$ tal que $a \leq b$, $\forall\, a \in A$. Al elemento b lo llamamos* cota superior *de A.*

Análogamente decimos que $A \subseteq X$ está acotado inferiormente *si existe $c \in X$ tal que $c \leq a$ para cada $a \in A$. Al elemento c lo llamamos* cota inferior *de A.*

Ejemplo: Si $A = \{1,2,3,4,5\} \subseteq \mathbb{R}$, notemos que $c = 1$ es una cota inferior de A y $b = 5$ es una cota superior de A.

Observemos que no necesariamente las cotas están en el conjunto, si $A = (0,1)$ tenemos que $c = 0$ y $b = 1$.

Definición 1.8 *Sea $(X,\leq)$ un conjunto totalmente ordenado y $S \subseteq X$, el* supremo *de S, si existe, es la mínima cota superior de S y la denotamos por $sup(S)$.*

Análogamente el ínfimo *de S, si existe, es la máxima cota inferior de S y la denotamos $\acute{\imath}nf(S)$.*

Cuando $sup(S)$,$\acute{\imath}nf(S) \in S$, entonces $sup(S) = m\acute{a}x(S)$ *y* $\acute{\imath}nf(S) = m\acute{\imath}n(S)$.

Ejemplo 1: En $(\mathbb{N}, \leq)$, si tomamos $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, el $sup(S) = 8 = m\acute{a}x(S)$ e $\acute{\imath}nf(S) = 1 = m\acute{\imath}n(S)$.

Ejemplo 2: En $(\mathbb{R}, \leq)$, si tomamos $S = (0,1)$, entonces el $sup(S) = 1$ e $\acute{\imath}nf(S) = 0$.

Ahora definiremos las funciones que son un recurso que nos resultara muy util en resultados futuros.

Definición 1.9 *Dados A y B conjuntos, decimos que $f \subset A \times B$ es una* función *de A en B si $A = \{a \in A : (a,b) \in f$ para alguna $b \in B\}$ y si $(a,b),(a,c) \in f$, entonces $b = c$. Si $(a,b) \in f$, denotaremos a b por $f(a) = b$.*

Diremos que A es el dominio de f y lo denotamos por $Dom(f)$. Al conjunto B se le llama contradominio y lo denotamos por Img(f).

La imagen de f denotada por $Img(f)$, es el conjunto $\{b \in B \mid existe\ a \in A\ con\ (a,b) \in f\}$.

Ejemplo 1: Proponemos $f \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $\forall(a,b) \in f$, $b = c$ con c constante. Así f es una función llamada *función constante*.

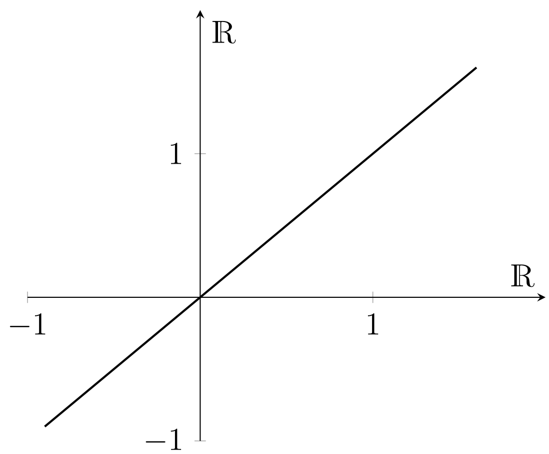

Figura 1.1: *Función identidad*

Ejemplo 2: Proponemos $f \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $\forall(a,b) \in f$, $a = b$, igualmente f es una función llamada *función identidad*. Ver Figura 1.1

Definición 1.10 *Consideremos $\mathbb{R}$ con las operaciones de suma y producto usuales y sean $A, B, C \subset \mathbb{R}$ subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Dadas $f : A \to B$ y $g : A \to B$ definimos:*

1. *La* función suma $f + g : A \to B$ *por* $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, *para todo* $x \in A$, *suponiendo que* $f(x) + g(x) \in B$.

2. *Análogamente la función resta $f - g : A \to B$ dada por $(f - g) := f(x) - g(x)$ para todo $x \in A$ tal que $f(x) - g(x) \in B$*

3. *Dadas $f : B \to C$ y $g : A \to B$ dos funciones, la* composición de funciones *es la función $f \circ g : A \to B$ definida por $(f \circ g) = f(g(x))$, para todo $x \in A$.*

1.2. Espacios métricos

En esta sección introduciremos la noción de espacio metrico y como son muy utiles para conocer la estructura del espacio donde podamos definir una función que llamaremos distancia donde estudiaremos sus propiedades.

Definición 1.11 *Sea X un conjunto, decimos que una función d: $X \times X \to \mathbb{R}$ es una* distancia *o* métrica *si satisface lo siguiente:*

1. $d(x, y) > 0$ *si* $x \neq y$ *y* $d(x, x) = 0$ *para cada* $x \in X$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todo* $x, y \in X$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *para cada* $x, y, z \in X$.

A esta última propiedad se le llama desigualdad del triángulo.

Cuando $X = \mathbb{R}$ la función $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $d(x, y) = |x - y|$. A esta función d la denotamos por $|\ |$.

Denotaremos por $|a| = \begin{cases} a \ Si\, a \geq 0, \\ -a \ Si\, a \leq 0. \end{cases}$ cumple que es una distancia.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x \neq y$, entonces $|x - y| > 0$ y si $x = y$, entonces $|x - y| = 0$.

Por lo tanto, $|\ |$ cumple la primera condición.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces $|x - y| = |y - x|$.

Por lo tanto, $|\ |$ cumple la segunda condición.

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, veamos $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

Primero observemos que $|a| \leq b$ si y solo si $-b \leq a \leq b$.

Ya que si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$, así $a \leq b$.

Si $a \leq 0$, entonces $|a| = -a$, así $-a \leq b$. Entonces $-b \leq a$.

Con lo que $-|x - z| \leq x - z \leq |x - z|$ y $-|z - y| \leq z - y \leq |z - y|$ sumando, $-|x - z| - |z - y| \leq x - z + z - y \leq |x - z| + |z - y|$ de aquí, $-(|x - z| + |z - y|) \leq x - y \leq |x - z| + |z - y|$.

Por lo tanto, $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

Por lo tanto, $|\ |$ cumple la tercera condición.

Por lo tanto, $|\ |$ es una distancia.

Definición 1.12 *Sea X un conjunto, decimos que (X, d) es un* espacio métrico *cuando a X se le asocia una función distancia.*

Ejemplo: En $\mathbb{R}$ con la distancia $d = |\ |$ es un espacio métrico.

Definición 1.13 *Sea X un espacio métrico, decimos que $f : X \to X$ es una* función continua *en $x_0 \in Dom(f)$ si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x, x_0 \in Dom(f)$ y $d(x, x_0) < \delta$, entonces $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*

Ejemplo 1: En $(\mathbb{R}, |\ |)$ la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = cx$, $c \in R$ constante es una función continua.

Demostración:

Sean $x, x_0 \in Dom(f)$ y $\varepsilon > 0$.

Si hacemos $\delta = \varepsilon$, entonces $d(x, x_0) = |x - x_0| < \delta$.

Así $d(f(x), f(x_0)) = |cx - cx_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Por lo tanto f es una función continua.

Ejemplo 2: En $(\mathbb{R},|\ |)$ para $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = (1 - t)x + ty$, es una función continua.

Demostración

Sea $t_0 \in Dom(f)$ y $\varepsilon > 0$.

Como $x \neq y$, hagamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|y - x|} > 0$, elegimos $t \in Dom(f)$ con $d(t, t_0) < \delta$, entonces $|t - t_0| < \delta$.

Así $d(f(t), f(t_0) = |(1-t)x+ty-((1-t_0)x+ty)| = |x-tx+ty-x+t_0x-t_0y| = |t(y - x) - t_0(y - x)| = |(y - x)(t - t_0)| \leq |y - x||t - t_0|$, entonces $|y - x||t - t_0| < \varepsilon$.

Por lo tanto f es una función continua en x_0.

Definición 1.14 *Sea X un espacio metrico, decimos que $f : X \to X$ es una* función continua *en X, si cumple que es continua en toda $x \in X$.*

Definición 1.15 *Sea (X, d) un espacio métrico, $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ y $a \in X$, definimos* la bola abierta de centro a y radio r *como el conjunto $B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$. Ver Figura 1.2*

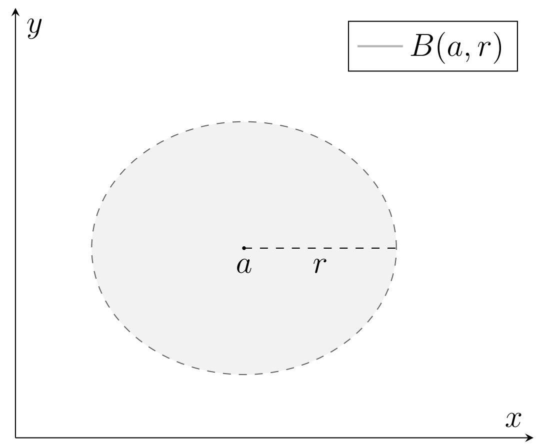

Figura 1.2: Bola abierta en $X = \mathbb{R}^2$

Definición 1.16 *Sea (X, d) un espacio métrico, decimos que $U \subseteq X$ es un* abierto *de X si $U = \bigcup_{i \in I} B(a_i, r_i)$ donde $a_i \in U$ y $r_i > 0$.*

Definición 1.17 *Sea (X, d) un espacio métrico, decimos que $A \subseteq X$* está acotado *si el conjunto $\{d(x, y) = |x - y| \mid x, y \in A\}$ está acotado superiormente.*

Ejemplo 1: En $(\mathbb{R}, \leq)$, si tomamos $A = [0, 1]$ el conjunto $C = \{d(x, y) = |x - y| \mid x, y \in A\}$ está acotado superiormente por 1.

Definición 1.18 *El conjunto $\mathbb{R}$ cumple la* propiedad arquimediana, *es decir dados $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$ existe un entero positivo n tal que $nb > a$.*

Capítulo 2

Topología

2.1. Definiciones

En esta sección introduciremos la noción de espacio topología, así como abiertos y cerrados así como los mismos caracterizan la estructura del espacio donde se definen, igualmente estudiaremos cualidades espacios topologicos como lo son: funciones continuas, abiertas y cerradas, conexidad y compacidad.

Definición 2.1 *Decimos que la pareja* (X, τ) *es un* espacio topológico *si* X *es un conjunto y* τ *es una* topología *sobre* X*, es decir, una colección de subconjuntos de* X *que cumple las tres propiedades siguientes:*

1. *El conjunto vacío y* X *están en* τ*, i.e.* $\emptyset \in \tau, X \in \tau$.
2. *La intersección de cualquier subcolección finita de conjuntos de* τ *está en* τ*, es decir, dado* $\mathbb{I}$ *finito, si* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{I}} \subset \tau$ *entonces* $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{I}} A_i \in \tau$.
3. *La unión de cualquier subcolección de conjuntos de* τ *está en* τ*, si* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{I}} \subset \tau$ *entonces* $\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i \in \tau$.

Definición 2.2 *Dado un espacio topológico* (X, τ)*, definimos los* conjuntos abiertos $A \subset X$ *como* $A \in \tau$ *y los* conjuntos cerrados $B \subset X$ *como* $B = X \backslash A$*, con* $A \in \tau$.

Definición 2.3 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico, decimos que* $V \subseteq X$ *es una* vecindad *de* x *si* $x \in V$ *y existe* $A \in \tau$ *tal que* $x \in A \subseteq V$.

Ejemplo 1: En $(\mathbb{R},\tau)$ con la topología usual en $\mathbb{R}$ tenemos que $V = [-1, 1]$ es una vecindad de $x = 0$, donde $\tau = \{\bigcup_{i\in\mathbb{I}} B_i \mid B_i$ es un intervalo abierto $\}$.

Ejemplo 2: En $(\mathbb{R}^2, \tau)$ donde $\tau = \{\bigcup_{i\in\mathbb{I}} B_i \mid B_i$ es una bola abierta$\}$ es la topología usual de $\mathbb{R}^2$ y $V = (-1, 1) \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ no es una vecindad del $(0, 0)$.

Supongamos que V es una vencidad del $(0, 0)$.

Sea A un abierto tal que $(0, 0) \in A \subset V$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$, así $(0, \varepsilon) \subset A$ y $(0, \varepsilon) \not\subseteq V$.

Por lo tanto V no es una vecindad de $(0, 0)$.

Ver Figura 2.1

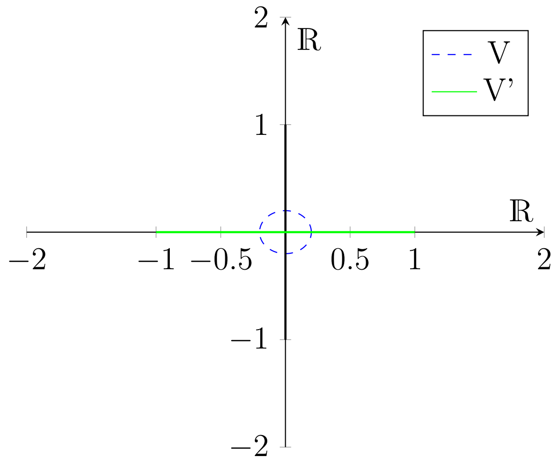

Figura 2.1: *Vecindad del* $(0, 0)$.

Definición 2.4 *Sea* (X,τ) *un espacio topológico y* $\mathcal{P}(X)$ *el conjunto potencia. Decimos que* $\beta \subseteq \mathcal{P}(X)$ *es* base de una topología *de* X *si se cumple:*

1. *La unión de todos los elementos de* β *es* X.

2. *Dados* B_1 *y* $B_2 \in \beta$ *y un punto* $x \in B_1 \cap B_2$, *existe* $B \in \beta$ *tal que* $x \in \beta \subseteq B_1 \cap B_2$.

Definición 2.5 *Sea* $\mathbb{R}$ *el conjunto de los números reales, decimos que* $\boldsymbol{S}$ *es la* topología del límite inferior *de* $\mathbb{R}$ *o de Sorgenfrey si* $\boldsymbol{S}$ *tiene la siguiente base* $\beta = \{[a_i, b_i) \subseteq \mathbb{R} \mid a_i < b_i, i \in I\}$, *con* I *un conjunto de índices.*

Veamos que es una base.

Es claro que $\bigcup\limits_{i\in I}[a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$.

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\exists a_i, b_i$ tales que $a_i < b_i$ y $x \in [a_i, b_i)$.

$\therefore \bigcup\limits_{i\in I}[a_i, b_i) = \mathbb{R}$.

Dados $[a_1, b_1), [a_2, b_2) \in \beta$ y $x \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$ se cumple que $a_i \leq x < b_i$, $i \in \{1, 2\}$, entonces, sin pérdida de generalidad, $a_1 \leq a_2$.

Si $b_1 < b_2$, entonces $x \in [a_2, b_1) \subset [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$.

Si $b_2 < b_1$, entonces $x \in [a_2, b_2) \subset [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$.

Por lo tanto β es una base.

Definición 2.6 *Sea X un conjunto, decimos que τ es la* topología discreta de X *si se cumple que τ es el conjunto potencia.*

Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. X es un espacio topológico no vacío y discreto.

2. Todo conjunto de un elemento, i.e. $\{x\}$ con $x \in X$ es un conjunto abierto.

Demostración:

1) $\longrightarrow$ 2)

Supongamos que (X,τ) es un espacio con la topología discreta.

Sea $x \in X$, por definición de conjunto potencia $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$ con lo que $\{x\} \in \tau$, i.e. $\{x\}$ es un conjunto abierto.

2) $\longrightarrow$ 1)

Sea (X,τ) un espacio topológico tal que $\{x\}$ es abierto, para toda $x \in X$.

Sea $A \subseteq X$.

Si $A = \emptyset$, entonces $A \in \tau$.

Si $A \neq \emptyset$, entonces sea $x \in A$, así $\{x\} \subseteq A$ y por hipótesis $\{x\} \in \tau$ con lo que $\bigcup\limits_{x\in A}\{x\} \in \tau$ y se cumple que $\bigcup\limits_{x\in A}\{x\} = A$.

Así, τ es la topología discreta.

Definición 2.7 *Sean $(X_i, \tau_i)_{i=1}^n$ espacios topológicos, para $X = \prod\limits_{i=1}^n X_i$, definimos la base $\beta = \{U \subset X \mid U = \prod\limits_{i=1}^n U_i, U_i \in \tau_i\}$ para la* topología producto.

Definición 2.8 *Sea (X,d) un espacio métrico, definimos una topología τ con base $\beta = \{B(x,r) \mid x \in X, r > 0\}$, donde $B(x,r)$ es la bola abierta de centro x y radio r.*

Definición 2.9 *Sea (X,τ) un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $V(x)$ el conjunto de vecindades de x, definimos el* interior, frontera *y* cerradura *de A como:*

1. $Int(A) = \{x \in A \mid \textit{existe } V \in V(x),\ V \subset A\}$.
2. $Fr(A) = \{x \in X \mid x \notin (Int(A) \cup Int(X \setminus A))\}$.
3. $Ce(A) = \{x \in X \mid V \cap A \neq \emptyset, \textit{ para todo } V \in V(x)\}$.

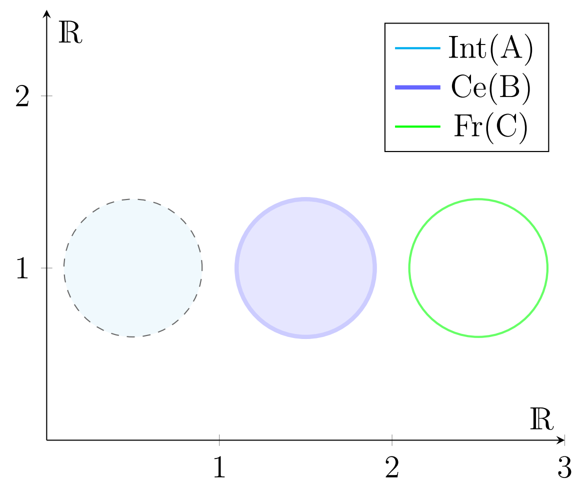

Figura 2.2: Int(A) Fr(B) Ce(C).

En la Figura 2.2 representamos el interior, frontera y cerradura de un círculo en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo: En $(\mathbb{R}, \tau)$ con τ la topología usual de $\mathbb{R}$, si $A = [-1, 1]$;

$Int(A) = (-1, 1)$, $Fr(A) = \{-1, 1\}$ y $Ce(A) = [-1, 1]$.

Si $A = \{x_n \in \mathbb{R} \mid x_n = \frac{1}{n} \textit{ con } n \in \mathbb{N}\}$;

$Int(A) = \emptyset$, $Fr(A) = A \cup \{0\}$ y $Ce(A) = A \cup \{0\}$.

Si $A = \mathbb{Q}$, afirmamos que $Ce(A) = \mathbb{R}$.

Demostración:

Sean $x \in \mathbb{R}$ y V una vecindad de x.

Veamos que para toda $\varepsilon > 0$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in (x, x + \varepsilon) \subset V$.

Por la propiedad arquimediana, como $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, entonces $1 < n\varepsilon$. Tomamos k el máximo entero que satisface $k \leq xn$, entonces $k+1 \leq xn+1$ y $xn + 1 < (x+\varepsilon)n$.

Así $xn < k+1 \leqslant xn+1 < (x+\varepsilon)n$, es decir $x < \dfrac{k+1}{n} < (x+\varepsilon)$.

Observación 1: Si el conjunto A es abierto, entonces $Int(A) = A$, si el conjunto A es cerrado, entonces $Ce(A) = A$.

Demostracion:

Es claro que $Int(A) \subset A$ y $A \subset Ce(A)$ para cualquier conjunto A.

1. Sea $x \in A$ donde A es un conjunto abierto. Entonces A es una vecindad de x tal que $A \subset A$ y $x \in Int(A)$.

   Por lo tanto $A = Int(A)$.

2. Sea A un conjunto cerrado, entonces $\bigcap\limits_{C \in \mathbf{C}} C \subset A$.

   Por lo tanto $A = Ce(A)$.

Observación 2: Si $A \subset B$, entonces $Ce(A) \subset Ce(B)$ e $Int(A) \subset Int(B)$

La cerradura y el interior preservan el orden con la contención.

Observación 3: Se cumple que $Int(A) \cup Fr(A) = Ce(A)$.

Demostración:

Primero veamos que $Ce(A) \subset Int(A) \cup Fr(A)$.

Sea $x \in Ce(A)$, consideramos los casos:

1. Si $x \in Int(A)$, se cumple que $x \in Int(A) \cup Fr(A)$.

2. Si $x \notin Int(A)$. Sea $V \in \boldsymbol{\tau}$ tal que $x \in V$, como $x \in Ce(A)$ tenemos que $V \cap A \neq \emptyset$ y $V \nsubseteq A$, entonces $V \cap X \backslash A \neq \emptyset$, así $x \in Fr(A)$.

Por lo tanto $Ce(A) \subset Int(A) \cup Fr(A)$.

Después veamos que $Int(A) \cup Fr(A) \subset Ce(A)$.

Sea $x \in Int(A) \cup Fr(A)$, consideramos los casos:

1. Si $x \in Int(A) \subset Ce(A)$, i.e. $x \in Ce(A)$.

2. Si $x \in Fr(A)$. Sea $V \in \tau$ tal que $x \in V$, entonces $V \cap A \neq \emptyset$.

Por lo tanto $Int(A) \cup Fr(A) = Ce(A)$.

Definición 2.10 *Sea (X,τ) un espacio topológico, decimos que $A \subseteq X$ es* denso *en X si $Ce(A) = X$.*

Proposición 2.1 *Sea (X,τ) un espacio topológico, para un conjunto A denso en X los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$Ce(A) = X$.*
2. *Dado $A \subseteq B$, si B es cerrado, entonces $B = X$.*
3. *Si $V \in \tau$ y $A \cap V = \emptyset$, entonces $V = \emptyset$.*

Demostración:

1) $\longrightarrow$ 2)

Sea A denso en X con $A \subseteq B$ y B cerrado en X, como $A \subseteq B$, entonces $Ce(A) \subseteq Ce(B) = B$, como A es denso en X se cumple que $Ce(A) = X$ así $X \subseteq B$

Por lo tanto, $X = B$.

2) $\longrightarrow$ 3)

Sean $A \subseteq X$ y $V \in \tau$, tales que $A \cap V = \emptyset$, si llamamos $X \backslash V = B$, entonces $A \subseteq X \backslash V = B$. Como B es cerrado, $B = X$ y así $X \backslash V = X$.

Por lo tanto $V = \emptyset$.

3) $\longrightarrow$ 1)

Sea $A \subseteq X$. Supongamos que $Ce(A) \neq X$.

Sea $x \in X \backslash Ce(A)$ abierto de X, entonces existe $V \in V(x)$ una vecindad de x tal que $V \cap A = \emptyset$, con lo que $V = \emptyset$.

Lo cual es una contradicción ya que $V \neq \emptyset$

Por lo tanto, $Ce(A) = X$.

Definición 2.11 *Sea X un conjunto, decimos que S es una* sucesión *de X si $S : \mathbb{N} \to X$ es una función y la denotamos como $S = \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.*

Ejemplo: En $\mathbb{R}$, se cumple que $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión*.

Definición 2.12 *Sean (X,τ) un espacio topológico y S una sucesión de X, decimos que S* converge *a x si para todo $V \in V(x)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n \in V$.*

Definición 2.13 *Sean (X,τ) un espacio topológico y S una sucesión de X, decimos que K es una* subsucesión *de S, si $K : M \subseteq \mathbb{N} \to X$ es una función tal que $K(n) = S(n)$ para toda $n \in M$, M es infinito.*

Definición 2.14 *Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$, decimos que τ_A es la* topología que A hereda de X *si $\tau_A = \{A \cap U \mid U \in \tau\}$.*

Ejemplo 1: Si $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$, con la topología que hereda de la topología usual de $\mathbb{R}$ los abiertos son de la forma $\bigcup\limits_{i\in J}(a_i, b_i) \cap [0,1]$, donde J es un conjunto de índices. En particular nos interesa los que son de la forma: $(a,b) \cap [0,1]$ y tendremos tres casos:

1. Primero si $0, 1 \notin (a,b)$, entonces será de la forma $\emptyset, (a,b)$.

2. Segundo si $1 \notin (a,b)$ y $0 \in (a,b)$, entonces será de la forma $[0,b)$.

3. Tercero si $1 \in (a,b)$ y $0 \notin (a,b)$, entonces será de la forma $(a,1]$.

Ejemplo 2: Algunos de los abiertos de $\mathbb{N}$ con la topología que hereda de $\mathbb{R}$ son de la forma $(a,b) \cap \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid a < n < b\}$. Que resultan de la forma: $\{n\}$, $\{n-1, n, n+1\}$, etc.

Notemos que $\mathbb{N}$ hereda la topología discreta vista en la Definición 2.6.

Definición 2.15 *Sea X un espacio topológico, decimos que X es* disconexo *o* separado *si existen U y V abiertos que cumplen:*

1. U y V son no vacíos.

2. $U \cap V = \emptyset$.

3. $X = U \cup V$.

Decimos que un espacio topológico es conexo si no es disconexo.

Definición 2.16 *Sean* (X, τ) *y* (Y, Φ) *dos espacios topológicos, decimos que* f *es una* función continua en x, $f : X \to Y$ *si para toda* $V \in \Phi$ *tal que* $f(x) \in V$, *existe* $U \in \tau$ *con* $x \in U$ *y* $f(U) \subset V$.

Diremos que f es *continua* si es continua en todos lo puntos de X.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $f : X \to Y$ es continua.

2. Si B es abierto en Y, $f^{-1}(B)$ es abierto en X.

3. Si B es cerrado en Y, $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.

4. Si $A \subset X$, $f(Ce(A)) \subset f^{-1}(Ce(A))$.

5. Si $B \subset Y$, $Ce(f^{-1}Ce(B)) \subset f^{-1}(Ce(B))$.

Demostración:

1) $\longrightarrow$ 2)

Sea B abierto en Y y $p \in f^{-1}(B)$, entonces existe U abierto en X tal que $p \in U$ y $f(U) \subset V$, lo que implica $p \in U \subset f^{-1}(B)$, así $p \in Int(f^{-1}(B))$ y $f^{-1}(B)$ es abierto.

2) $\longrightarrow$ 3)

Sea B cerrado en Y, entonces $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$ es abierto en X. Por lo tanto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.

3) $\longrightarrow$ 4)

Sea $A \subset X$, entonces $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(Ce(f(A)))$. Dado que, por hipótesis $f^{-1}(Ce(f(A)))$ es cerrado, $Ce(A) \subset f^{-1}(Ce(f(A)))$, aplicando f, obtenemos $f(Ce(A)) \subset f(f^{-1}(Ce(f(A)))) \subset Ce(f(A))$.

4) $\longrightarrow$ 5)

Sea $B \in Y$, hacemos $A = f^{-1}(B)$. Aplicando la hipótesis $f(Ce(f^{-1}(B))) \subset Ce(f(f^{-1}(B)))$. Por lo tanto $f^{-1}(f(Ce(f^{-1}(B)))) \subset f^{-1}(Ce(f(f^{-1}(B))))$ lo que implica $Ce(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(Ce(B))$.

5) $\longrightarrow$ 1)

Sean $p \in X$ y V abierto en Y tal que $p \in V$ y $f(p) \in V$. Sea $U = Int(f^{-1}(V))$. Si $p \notin U$, entonces $p \in X \backslash Int(f^{-1}(V)) = Ce(X \backslash f^{-1}(V)) = Ce(f^{-1}(Y \backslash V)) \subset f^{-1}(Ce(Y \backslash V)) = f^{-1}(Y \backslash V)$ lo que implica que $f(p) \notin V$ contradiciendo nuestra elección de V. Por último, es claro que $f(U) \subset V$ lo que demuestra que f es continua en p y por lo tanto f es continua.

Definición 2.17 *Sean (X, τ) y (Y, Φ) espacios topológicos, definimos una base para la* topología producto *de $X \times Y$ como $\delta = \{A = B \times C \mid B \in \tau, C \in \Phi\}$.*

Definición 2.18 *Sea $(X \times Y, \delta)$ con la topología producto, definimos las funciones proyección de $X \times Y$ en X y Y resp. como $\pi_1(X \times Y) = \{a \in X \mid (a, b) \in X \times Y\} = X$ y $\pi_2(X \times Y) = \{b \in Y \mid (a, b) \in X \times Y\} = Y$.*

Lema 2.1 *Sea $(X \times Y, \delta)$ con la topología producto, entonces $\pi_1 : C \longrightarrow A \subset X$, y $\pi_2 : C \longrightarrow B \subset Y$ son funciones continuas.*

Demostración:

Sea $V \in \tau_A$, entonces $\pi_1^{-1}(V) = V \times Y \in \tau_X$.

Análogamente para π_2.

Por lo tanto π_1 , π_2 son funciones continuas.

Definición 2.19 *Sean (X, τ) y (Y, Φ) dos espacios topológicos, decimos que una función $f : X \to Y$ es* cerrada *si para todo $B \subset X$ cerrado, $f(B) \subset Y$ es cerrado.*

Teorema 2.2 *Sean (X, τ) y (Y, Φ) dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si X es conexo, entonces Y es conexo.*

Demostración:

Supongamos que Y es disconexo, entonces existen $U, V \in \Phi$ ajenos, no vacíos tales que $Y = U \cup V$. Como f es una función continua, entonces $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \tau$ son ajenos no vacíos. Dado que f es suprayectiva $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$, entonces X es disconexo.

Por lo tanto Y es conexo.

Teorema 2.3 *Sean (X, τ) un espacio topologico y $\boldsymbol{C} = \{C_i \mid i \in J\}$ una familia de subconjuntos conexos de X tal que $\bigcap_{i \in J} \boldsymbol{C}_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{i \in J} \boldsymbol{C}_i$ es conexo.*

Demostración:

Supongamos que $\bigcup_{i \in J} \mathbf{C}_i$ es disconexo, entonces existen $U, V \in \tau$ ajenos, no vacíos tales que $\bigcup_{i \in J} \mathbf{C}_i = U \cup V$. Como U es no vacío, existe $k \in J$ tal que $C_k \cap U \neq \emptyset$.

Si $C_k \cap V \neq \emptyset$, entonces U y V son una separación de C_k.

Con lo que $C_k \cap V = \emptyset$, entonces $C_k \subset U$.

Sea $x \in \bigcap_{i \in J} \mathbf{C}_i \subset \bigcup_{i \in J} \mathbf{C}_i$, entonces $x \in U$ o $x \in V$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in U$, por lo anterior cada C_k con $x \in C_k \subset U$, como $x \in C_i$, para cada $i \in J$, se cumple que $C_i \in U$. Así $V = \emptyset$.

Por lo tanto $\bigcup_{i \in J} \mathbf{C}_i$ es conexo.

Corolario 2.3.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico, si $A, B \subset X$ son conexos no vacíos tal que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es conexo.*

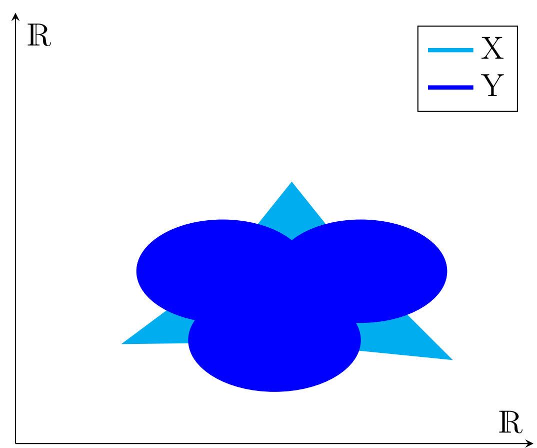

Figura 2.3: $X \cup Y \subset \mathbb{R}^2$ es conexo.

Ejemplo: Tomemos el espacio $(\mathbb{R}, \tau)$ donde τ es la topología usual, veamos que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ no es conexo.

Demostración: Sea $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{2}\} \cap \mathbb{Q}$ y $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{2}\} \cap \mathbb{Q}$. Notemos que $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ y $\mathbb{Q} = U \cup V$, notemos que U y V son abiertos en $\mathbb{Q}$ pues $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{2}\}$ y $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{2}\}$ son abiertos en $\mathbb{R}$ y al intersectar con $\mathbb{Q}$ heredan esta propiedad.

Por lo tanto $\mathbb{Q}$ no es conexo.

Lema 2.4 *Todo intervalo cerrado de* $\mathbb{R}$ *es conexo.*

Primero veremos que el intervalo $[0,1]$ *es conexo.*

Demostración:

Supongamos que $[0,1]$ no es conexo, entonces existen U, V abiertos no vacíos de $[0,1]$ tales que $U \cup V = [0,1]$ y $U \cap V = \emptyset$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $0 \in U$.

Sea $s = sup\{x \in [0,1] \mid [0,x) \subset U\}$.

Como U es abierto, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $[0,\varepsilon) \subset U$, así se cumple que $\{x \in [0,1] \mid [0,x) \subset U\} \neq \emptyset$.

Si $s \neq 1$, entonces tenemos dos casos:

1. Si $s \in U$, como U es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset U$, por lo tanto $[0, s+\varepsilon) \in U$, lo cual es una contradicción.

2. Si $s \notin U$, entonces $s \in V$ y como V es abierto existe $\delta > 0$ tal que $(s-\delta, s) \subset V$, lo cual no puede suceder.

Por lo tanto $s = 1$ y $V = \emptyset$.

Por lo tanto $[0,1]$ es conexo.

En general, dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cualquiera, hacemos $f : [0,1] \to [a,b]$ una función dada por $f(t) = (b-a)t + a$. Como $[0,1]$ es conexo, f es una función continua y suprayectiva, entonces por el Teorema 2.1.1, $[a,b]$ es conexo.

Observación: Si el intervalo es de la forma $[a,b)$, entonces $[a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}, \left[a, b-\frac{1}{n}\right]$. Notemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left[a, b-\frac{1}{n}\right]$ son conexos tales que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[a, b-\frac{1}{n}\right] \supset \{a\} \neq \emptyset$.

Por lo tanto $[a,b)$ es conexo.

Análogamente $(a,b]$ es conexo.

Si el intervalo es de la forma $[a,\infty)$, notemos que $[a,\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a, b+n]$ son conexos con intersección $[a,b]$, entonces $[a,\infty)$ es conexo.

Análogamente $[-\infty, b)$ es conexo.

Definición 2.20 *Si (X,τ) es un espacio topológico y $B \subseteq X$, decimos que C es una* componente conexa *de B si dado C' conexo, $C' \subset B$ y $C' \cap C \neq \emptyset$, entonces $C' \subset C$.*

Definición 2.21 *Sea (X,τ) un espacio topológico, decimos que X es* conexo por trayectorias *si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$, existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.*

Ejemplo 1: En $(\mathbb{R},\tau)$ para $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = (1-t)x + ty$, es una función continua por lo visto en el ejemplo 2 de la definición 1.13, que cumple $f(0) = x$ y $f(1) = y$ con lo que $\mathbb{R}$ es conexo por trayectorias.

Ejemplo 2: En $(\mathbb{R},\tau)$, dadas las bolas con centro en 1 y -1 de radio 1 hacemos $X = B(-1,1) \cup B(1,1) \subset \mathbb{R}$, Figura 2.4 entonces no es conexo por trayectorias, puesto que $0 \notin X$.

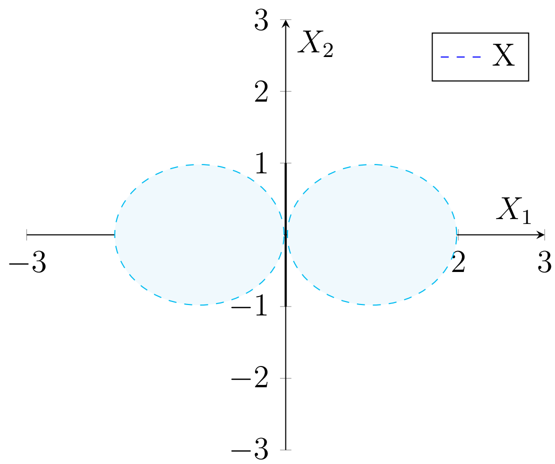

Figura 2.4: $X = B(-1,1) \cup B(1,1)$.

Definición 2.22 *Sea (X,τ) un espacio topológico, decimos que X es* localmente conexo *en x, si para toda vecindad U de x, existe $V \subseteq U$ abierto, conexo y $x \in V$.*

Ejemplo: $\mathbb{R}$ con su topología usual es locamente conexo.

Demostración:

Sean $x \in \mathbb{R}$ y U_x una vecindad de x, entonces existe $A \in \tau$ un intervalo abierto tal que $x \in A \subseteq U_x$, como los intervalos son conexos se cumple que $\mathbb{R}$ es localmente conexo.

Definición 2.23 *Sean (X,τ) un espacio topológico. Una* cubierta *S de X es una familia $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ con A una familia de índices y donde cada $S_\alpha \subset X$ cumple que $\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha = X$.*

Además, diremos que S es una cubierta abierta *de X si cada S_α es un subconjunto abierto de X.*

Ejemplo 1: En $\mathbb{R}$ con su topología usual, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_n = B(n,1)$ es una cubierta de $\mathbb{R}$.

Dado que $B_n = (n-1, n+1) \subset \mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$.

1. Si $x = n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in B_n$.

2. Si $x \notin \mathbb{N}$, por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n < x < n+1$; entonces $x \in B_n$.

Por lo tanto $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2: Veamos que $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $B_n = B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \cap [0,1]$, no es una cubierta de $[0,1]$ con la topología que hereda de $\mathbb{R}$.

Claramente $B_n \subset [0,1]$.

Sea $x \in [0,1]$.

Si $x > 0$, entonces $x \in (0,1] = B_1 = B(1,1) \cap [0,1]$.

Si $x = 0$, supongamos que existe B_k tal que $x \in B_k = B\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \cap [0,1] = \left(0, \frac{2}{k}\right)$, tendríamos que $x \in \left(0, \frac{2}{k}\right)$.

Por lo tanto $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es una cubierta de $[0,1]$.

Definición 2.24 *Sea (X,τ) un espacio topológico. Una cubierta $T = \{T_\beta\}_{\beta\in B}$ es* subcubierta *de otra cubierta $S = \{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ si para cada β existe un α tal que $T_\beta = S_\alpha$.*

Definición 2.25 *Decimos que un espacio topológico (X,τ) es* Lindelöf *si cada cubierta abierta tiene una subcubierta numerable.*

Definición 2.26 *Una familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de conjuntos tiene la* propiedad de la intersección finita *(*pif*), si cada subfamilia finita y no vacía de $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene intersección no vacía.*

Definición 2.27 *Sea (X,τ) un espacio topológico, decimos que X es* compacto *si para cualquier cubierta abierta de X existe una subcubierta finita.*

Proposición 2.2 *Sea (X,τ) un espacio topológico si X es compacto entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es compacto.*
2. *Si $\{F_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados en X con la pif, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.*

Demostración:

Primero veamos que 1 implica 2.

Sean X un espacio compacto y $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de X con la pif. Si $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$, entonces $X = \bigcup\limits_{i\in I} X\backslash F_i$ con lo que $\{X\backslash F_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de X. En consecuencia existe $J \subset \mathbb{N}$, J finito tal que $\{X\backslash F_i\}_{i\in J}$ es una cubierta abierta de X.

Así $X = \bigcup\limits_{i\in J} X\backslash F_i = X\backslash \bigcap\limits_{i\in J} F_i$, entonces $\bigcap\limits_{i\in J} F_i = \emptyset$

Por lo tanto $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Veamos que 2 implica 1.

Si X no es compacto, existe $\{C_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta que no tiene subcubierta finita, $\{X\backslash C_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos cerrados en X con la pif, luego $X = \bigcup\limits_{i\in I} C_i = X\backslash(\bigcap\limits_{i\in I} X\backslash C_i)$ así $\bigcap\limits_{i\in I} X\backslash C_i = \emptyset$

Por lo tanto X es compacto.

Definición 2.28 *Sea (X,τ) un espacio topológico, decimos que X es* primero numerable *si cada punto del espacio tiene una base numerable de vecindades.*

Ejemplo: El espacio $\mathbb{R}$ con su topología usual τ es primero numerable.

Demostración:

Dado $x \in \mathbb{R}$, proponemos $\beta = \{B_n \subseteq \mathbb{R} \mid B_n = B\left(x, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{Q}^+\}$ como base numerable de vecindades de x.

Donde $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$.

Es claro que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Q}^+} B_n = \mathbb{R}$

Sean $B_n, B_m \in \beta$ con $x \in B_n \cap B_m$.

Sea $l \in \mathbb{Q}^+$ tal que $l > n, m$. Entonces $B\left(x, \frac{1}{l}\right) \subseteq B\left(x, \frac{1}{m}\right), B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ y por lo tanto $B\left(x, \frac{1}{l}\right) \subset B\left(x, \frac{1}{m}\right) \cap B\left(x, \frac{1}{n}\right)$.

Así $B = B\left(x, \frac{1}{l}\right) \subseteq \mathbb{R}$ cumple que $x \in B \subset B_n \cap B_m$.

Por lo tanto β es una base numerable de vecindades de x.

Definición 2.29 *Sea (X,τ) un espacio topológico, decimos que X es* segundo numerable *si τ tiene una base numerable.*

Ejemplo: $(\mathbb{R}, \tau)$ con τ la topología usual, es segundo numerable.

Proponemos como base $\beta = \{B(q, \frac{1}{n})\ con\ q \in \mathbb{Q}\ y\ n \in \mathbb{N}\}$ como base numerable.

Por el ejemplo anterior $\forall\, q \in \mathbb{Q}$ se tiene que β es base numerable.

Por lo tanto β es numerable.

Definición 2.30 *Sea (X,τ) un espacio topológico, decimos que X es* separable *si existe $A \subset X$, donde A es denso numerable.*

Ejemplo 1: El espacio $\mathbb{R}$ es separable.

Demostración:

Proponemos el conjunto $\mathbb{Q}$ como denso numerable de $\mathbb{R}$.

Veamos que $\mathbb{Q}$ es denso, es decir, $Ce(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Dada $x \in \mathbb{R}$.

Sea $U(x)$ una vecindad de x. Entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$ y $(a, b) \subset U(x)$ pues los intervalos son una base de la topología usual de $\mathbb{R}$.

1. Como $b - a > 0$, tomamos $\frac{1}{b-a} > 0$. Por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{b-a}$, i.e. $b - a > \frac{1}{n}$.

2. Dado que $n \in \mathbb{N}$ hacemos $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $\frac{1}{2^n} \in (a,b) \in U(x)$.

Entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in U(x)$. Así $x \in Ce(\mathbb{Q})$.

Por lo tanto $\mathbb{R}$ es separable.

Ejemplo 2: El espacio $[0,1]^2$ con la topología que hereda de $\mathbb{R}^2$ es separable.

Demostración:

Proponemos el conjunto $A = \{(a,b) \subset \mathbb{R}^2 \mid a,b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$ como denso y numerable de $[0,1]^2$.

Sea $U(x)$ una vecindad de $x = (x_1,x_2)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B((x_1,x_2),\varepsilon) \subset U$.

Por el ejemplo anterior existen $p,q \in \mathbb{Q}$ tales que $x_1 \leq p \leq x_1+\varepsilon$ y $x_2 \leq q \leq x_2+\varepsilon$ por lo que $(p,q) \in B(x,\varepsilon) \subset U$. En consecuencia, $U \cap A \neq \emptyset$.

Por lo tanto $\mathbb{R}$ es separable.

Observación: Dado X un espacio topologíco si contiene una colección no numerable de conjuntos abiertos ajenos dos a dos, entonces X no es separable.

Definición 2.31 *Sea (X,τ) un espacio topológico conexo, decimos que p es un* punto de corte *si $X\backslash\{p\}$ tiene al menos dos componentes.*

Ejemplo 1: En $(\mathbb{R},\tau)$ cualquier punto es de corte.

Demostración:

Sea $x \in \mathbb{R}$ proponemos las siguiente separación de $\mathbb{R}\backslash\{x\} = U \cup V$, con $U = (-\infty,x)$ y $V = (x,\infty)$.

Por lo tanto x es un punto de corte.

Definición 2.32 *Sean (X,τ) y (Y,Φ) dos espacios topológicos, decimos que una función f: $X \to Y$ es un* homeomorfismo *si es una función biyectiva, continua y su inversa es continua. Si existe un homeomorfismo de X en Y, decimos que X y Y son homeomorfos y lo denotamos como $X \cong Y$.*

Ejemplo: En $(\mathbb{R},\tau)$ cualquier intervalo abierto (a,b) es homeomorfo al $(0,1)$.

Demostración:

Proponemos la función $f : (a, b) \to (0, 1)$ como $f(t) = \dfrac{t-a}{b-a}$. Veamos que f es una función biyectiva.

Sean $t, t_0 \in (a, b)$ distintos, entonces $\frac{t-a}{b-a} \neq \frac{t_0-a}{b-a}$ con lo que f es inyectiva.

Sea $y \in (0, 1)$, entonces $x = y(b-a) + a$ cumple que $f(x) = f(y(b-a) + a) = \frac{y(b-a)+a-a}{b-a} = y$, con lo que f es suprayectiva.

Dado $(c, d) \subseteq (0, 1)$ abierto calculamos $f^{-1}[(c, d)] = (a + (b-a)c, a + (b-a)d)$ que es un intervalo abierto en (a, b).

Por lo tanto f es una función continua.

Dado $(e, f) \subseteq (a, b)$ abierto calculamos $f[(e, f)] = \left(\frac{e-a}{b-a}, \frac{f-a}{b-a}\right)$ que es un intervalo abierto en $(0, 1)$. Con lo que f^{-1} es una función continua.

Por lo tanto $(a, b) \cong (0, 1)$.

Ejemplo 2: Análogamente en $(\mathbb{R}, \tau)$, para $a \in \mathbb{R}$ los intervalos:

$A = \{(-\infty, b), (a, \infty), (-\infty, \infty)\}$ son homeomorfos al $(0, 1)$.

Proponemos las función $f : A \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ como $f(t) = arctang(t)$ es una función biyectiva, continua con inversa continua.

Usando el ejemplo anterior sabemos que $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es homeomorfo al $(0, 1)$.

2.2. Resultados

En esta sección trabajaremos con lo introducido en los capítulos anteriores para tener resultados que usaremos posterioremente,

Definición 2.33 *Sea (X, τ) un espacio topológico:*

1. *Decimos que X es T_0 si para $x, z \in X$, existe A un abierto, tal que $x \in A$ y $z \notin A$ o $x \notin A$ y $z \in A$.*

2. *Decimos que X es T_1 si para $x, z \in X$, existen U, V abiertos, tal que $x \in U$, $x \notin V$ y además $z \in V$ pero $z \notin U$.*

3. *Decimos que X es T_2 o Hausdorff si para $x, z \in X$, existen U, V abiertos disjuntos, tal que $x \in U$ y $z \in V$. Ver Figura 2.4*

4. *Decimos que X es T_3 si es T_1 y para cualquier cerrado F de X y cualquier punto $x \in X \backslash F$, existen U, V abiertos ajenos, tales que $x \in U$ y $F \subset V$.*

5. *Decimos que X es T_4 si es T_1 y cada F, G subconjuntos cerrados ajenos, existen U, V abiertos ajenos, tales que $F \subset U$ y $G \subset V$. Ver Figura 2.5*

Observación: Podemos notar que si X es T_4, entonces X es T_3; si X es T_3, entonces X es T_2; si X es T_2, entonces X es T_1; y si X es T_1, entonces X es T_0.

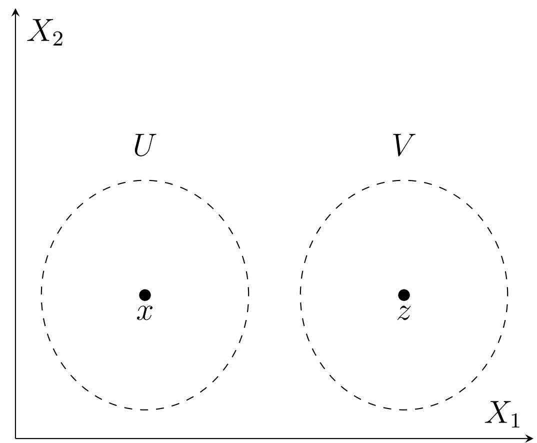

Figura 2.5: Ejemplo de espacio T_2.

Teorema 2.5 *Un espacio topológico es T_1 si y sólo si los conjuntos con un solo punto son cerrados.*

Demostración:

Sean X un espacio topológico T_1 y $x \in X$. Para cada $y \in X \backslash \{x\}$, existe B_y abierto tal que $y \in B_y$ y $x \notin B_y$ como cada B_y es abierto, $B = \bigcup_{y \in X} B_y$ es abierto y $B = X \backslash \{x\}$. Así, $\{x\}$ es cerrado.

Ahora si los conjuntos con un punto son cerrados, sean $x, y \in X$ distintos como $\{x\}$ y $\{y\}$ son conjuntos cerrados, $X \backslash \{x\}$ y $X \backslash \{y\}$ son conjuntos abiertos. Notemos que $x \notin X \backslash \{x\}$ e $y \in X \backslash \{x\}$ pues $x \neq y$ análogamente $y \notin X \backslash \{y\}$ y $x \in X \backslash \{y\}$ con lo que X es T_1.

Lema 2.6 *Sea X un espacio topológico compacto. Si $A \subset X$ es cerrado, entonces A es compacto.*

Demostración:

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de A, donde $U_i = V_i \cap A$ con $V_i \in \boldsymbol{\tau}$ como A es cerrado $X \backslash A$ es abierto. Se cumple que $\{V_i\}_{i \in I} \cup (X \backslash A)$ es una cubierta abierta de X, entonces existe $J \subseteq I$ donde $\{V_i\}_{i \in J} \cup (X \backslash A)$ es una subcubierta finita de X.

Así $\{U_i\}_{i \in J} = \{V_i \cap A\}_{i \in J}$ es una subcubierta finita de A.

Por lo tanto A es compacto.

Teorema 2.7 *Si X es un espacio topológico T_2 y compacto, entonces X es T_3.*

Demostración:

Sean F un subconjunto cerrado y $x \notin F$. Como X es T_2, para cada $y \in F$ existen abiertos disjuntos V_y, W_y tales que $x \in V_y$, $y \in W_y$. Los abiertos W_y cubren a F, por ser X compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i} \supset F$ y basta tomar $U = V_{y_1} \cap ... \cap V_{y_n}$, $V = \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}$. Donde U y V son abiertos tales que $x \in U$ y $F \subset V$ que cumplen $U \cap V = \emptyset$

Por lo tanto X es T_3.

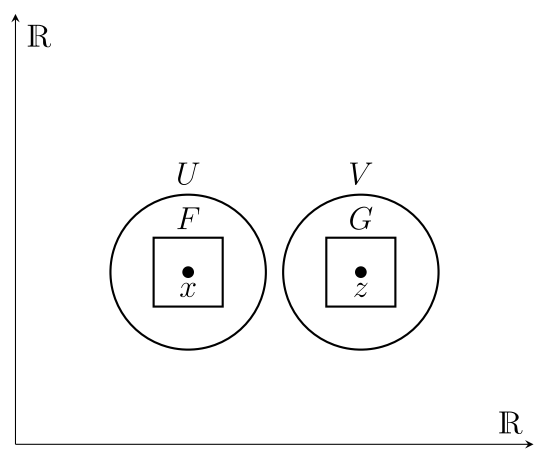

Figura 2.6: Ejemplo de un espacio T_4.

Teorema 2.8 *Si X es un espacio topológico T_2 y compacto, entonces X es T_4.*

Demostración:

Sean F, G cerrados disjuntos de X, dado que X es T_3 para cada $x \in F$ existen abiertos disjuntos V_x, W_x de X tales que $x \in V_x$ y $G \subset W_x$. Como X es compacto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \supset F$ y tomamos $U = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$, $V = W_{x_1} \cap ... \cap W_{x_n}$. Donde U y V son abiertos tales que $F \subset U$ y $G \subset V$ que cumplen $U \cap V = \emptyset$.

Por lo tanto X es T_4.

Lema 2.9 *Si $f : X \to Y$ una función biyectiva, entonces los siguientes son equivalentes:*

1. *f es un homeomorfismo.*
2. *f es continua y abierta.*
3. *f es continua y cerrada.*

Demostración:

Probaremos primero que $f[X \backslash B] = f[X] \backslash f[B]$.

Sea $y \in f[X \backslash B]$, esto nos dice que $f^{-1}(y) \in X \backslash B$ si y solo si $f^{-1}(y) \in X$ *y* $f^{-1}(y) \notin B$ si y solo si $y \in f[X]$ *e* $y \notin f[B]$. Así $y \in f[X] \backslash f[B]$.

1) $\longrightarrow$ 2)

Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo, entonces f es continua. Sea $A \in \tau_X$ como $f^{-1} : Y \to X$ es continua se cumple que $(f^{-1})^{-1}[A] = f[A] \in \tau_Y$, i.e. f manda abiertos en abiertos.

Por lo tanto f es una función abierta.

2) $\longrightarrow$ 3)

Sea $f : X \to Y$ continua y abierta. Si B es cerrado, $X \backslash B \in \tau_X$, así $f[X \backslash B] \in \tau_Y$.

Notemos que como $f[X \backslash B] \in \tau_Y$, entonces $f[X] \backslash f[B] = Y \backslash f[B] \in \tau_Y$ con lo que $f[B]$ es un conjunto cerrado.

Por lo tanto f es una función cerrada.

3) $\longrightarrow$ 1)

Si f es continua y cerrada, sea $A \in \tau_X$, así $X \backslash A$ es un cerrado de X, con lo que $f[X \backslash A] = Y \backslash f[A]$ es un cerrado en Y, entonces $f[A] \in \tau_Y$.

Por lo tanto f^{-1} es una función continua.

Por lo tanto f es un homeomorfismo.

Lema 2.10 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si X es un espacio Hausdorff, entonces dado $A \subseteq X$ compacto se tiene que A es cerrado.*

Demostración:

Sea $A \subseteq X$ compacto.

Caso 1:

Si $A = X$, entonces $X \setminus A = \emptyset \in \tau_X$ con lo que A es cerrado.

Caso 2:

Si $A \neq X$, sea $y \in X \setminus A$, como X es Hausdorff para cada $x \in A$, existen U_x y V_y abiertos de X tales que $y \in V_y$ y $x \in U_x$ donde $U_x \cap V_y = \emptyset$.

Notemos que $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, como A es compacto existen $x_1, x_2, ..., x_n \in A$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i} = U$.

Consideremos $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$, que es abierto pues cada V_{x_i} es abierto. Por otra parte $U_{x_i} \cap V = U_{x_i} \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (V_{x_i} \cap U_{x_i}) = \emptyset$.

Por lo tanto $V \cap U = \emptyset$ lo que implica $V \cap A = \emptyset$

Así $V \subseteq X \setminus A$ y $V \in \tau$ entonces $X \setminus A$ es abierto.

Por lo tanto A es cerrado.

Teorema 2.11 *Sea X un espacio topológico segundo numerable. Entonces X es separable.*

Demostración:

Sea $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable de τ, tomamos $k_n \in B_n$ un punto cualquiera para cada B_n tal que $n \in \mathbb{N}$. Proponemos $K = \{k_n \mid k_n \in B_n\}$ que es numerable.

Veremos que K es denso.

Sea $x \in X$, entonces para cada $A \in \tau$ tal que $x \in A$, como $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base, entonces existe $B_0 \in \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $B_0 \subset A$ con lo que existe $k_0 \in B_0 \subset A$, en consecuencia $A \cap K \neq \emptyset$.

Así, K es denso en X y por lo tanto X es separable.

Observación: De aquí se deduce que si X no es separable, entonces X no es segundo numerable.

Lema 2.12 *Sean (X, τ) y (Y, Φ) dos espacios topológicos, de tal forma que X es compacto y $f : X \to Y$ es una función continua, entonces $f[X]$ es compacto.*

Demostración:

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de $f[X]$. Como f es una función continua, $f^{-1}(U_i)$ es un abierto de X.

Si $x \in X$, entonces existe $U_k \subseteq f[X]$ tal que $f(x) \in U_k$. Así, $x \in f^{-1}(U_k)$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(U_i) = X$, con lo que $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de X, en consecuencia existe $J \subseteq I$ tal que $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in J}$ es una subcubierta finita de X.

Afirmamos que $\{U_i\}_{i\in J}$ es una subcubierta finita de $f[X]$.

Sea $y \in f[X]$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, así existe $U_k \in \{U_i\}_{i\in J}$ donde $x \in f^{-1}(U_k)$, entonces $y \in U_k$.

Por lo tanto $f[X]$ es compacto.

Teorema 2.13 *Sean (X, τ) y (Y, Φ) dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua, se cumple:*

1. *Si X es compacto, Y es Hausdorff y f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

2. *Si X es separable y f es suprayectiva, entonces $f[X]$ es separable.*

Demostración:

1. Sea A un cerrado de X. Como X es compacto, A es compacto y dado que f es una función continua, $f[A]$ es compacto en Y. Además, como Y es Hausdorff por el Lema 2.2.6, $f[A]$ es cerrado y en consecuencia f es cerrada y por el Lema 2.2.5, f es un homeomorfismo.

2. Sea $Q \subseteq X$ un denso numerable. Entonces $f(Q)$ es numerable.

   Afirmamos que $Ce(f(Q)) = Y$, i.e. $f(Q)$ es denso en Y. Sea $V \in \tau_Y$, $V \neq \emptyset$.

   Entonces $f^{-1}(V) \in \tau_X$ y se cumple que $f^{-1}(V) \cap Q \neq \emptyset$ puesto que Q es denso en X. Por lo que $V \cap f(Q) \neq \emptyset$, y por lo tanto Y es separable.

Teorema 2.14 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si X es conexo por trayectorias, entonces X es conexo.*

Demostración:

Supongamos que X es disconexo, entonces existen U, V abiertos de X no vacíos tales que $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = X$.

Si tomamos $x \in U, y \in V$, entonces $\exists\, f : [0,1] \to X$ una función continua tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Como $Img(f)$ es conexa, si $A = Img(f)$ como $x \in U \cap A$, $y \in V \cap A$, entonces $(U \cap A) \cup (V \cup A) = A$ es una separación de A, ya que $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$ lo que contradice la conexidad de A.

Por lo tanto X es conexo.

Teorema 2.15 *Si Y es un espacio topológico numerable, entonces Y es Lindelöf.*

Desmotración:

Sean $y \in Y$ y $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de Y, entonces se cumple que $\exists\, S_\alpha$ tal que $y \in S_\alpha$.

Así para cada y definimos $T_y = S_\alpha$, tal que $y \in S_\alpha$ es claro que $\{T_y\}_{y \in Y}$ es una subcubierta numerable de $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Por lo tanto Y es Lindelöf.

Capítulo 3

Espacios ordenados

3.1. Topología del orden

En este capítulo abordaremos el tema central de esta tesis "Espacios topológicos ordenados", así como resultados generales de los mismos.

Definición 3.1 *Dado* $(Y, \leq)$ *un conjunto ordenado y* $a, b \in Y$*, distintos tales que* $a < b$ *definimos los* intervalos *como:* $(a, b) = \{x \in Y \mid a < x < b\}$.

Decimos que Y tiene primer elemento α y último elemento β si $\alpha \leq x \leq \beta$ para todo $x \in Y$.

Si Y tiene primer elemento α, el intervalo $[\alpha, \beta) = \{x \in Y \mid \alpha \leq x < \beta\}$.

Si Y tiene último elemento β, el intervalo $(\alpha, \beta] = \{x \in Y \mid \alpha < x \leq \beta\}$.

Denotaremos como espacio ordenado a un conjunto ordenado al que le asociamos una topología.

Lema 3.1 *Sea* $(Y,\leq)$ *un espacio ordenado. Entonces el conjunto de intervalos es base para una topología en* Y*.*

Demostración:

Si $Y = \emptyset$, se cumple por vacuidad.

Si $Y \neq \emptyset$, sea $x \in Y$, entonces existen $a, b \in Y$ tales que $a \leq x$, $x \leq b$, de este modo x está en los intervalos $(a, b), [a, b), (a, b]$ dependiendo de ser el primer o último elemento. En consecuencia $Y = \bigcup_{i \in I}(a_i, b_i)$ donde cada $i \in I$ depende de cada x.

Si U, V son intervalos de X, entonces $U = (a, b)$ y $V = (c, d)$.

Si $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $U \cap V = (x, y)$, $x < y$, con $x, y \in \{a, b, c, d\}$.

Por lo tanto los intervalos abiertos forman una base.

Definición 3.2 *Sea (Y, τ) un espacio topológico ordenado, llamaremos* topología del orden *a la topología en X que tiene como una base a la familia de intervalos abiertos.*

Definición 3.3 *Sea (Y, τ) un espacio topológico ordenado, decimos que el orden es* denso en sí mismo *si dados $a, b \in Y$ tales que $a < b$, existe $c \in Y$ que cumple $a < c < b$.*

Observación: Y no es denso en sí mismo si existen $u, v \in Y$ tales que $u < v$ y si $u \leq z \leq v$, entonces $z = u$ o $z = v$.

Lema 3.2 *Si Y es un espacio finito ordenado, entonces Y es discreto.*

Desmostración:

Sea $b \in Y$ tal que b no es primero ni último elemento de Y entonces existen $a, c \in Y$ tal que $a < b < c$.Por ser Y finito podemos suponer también que no hay elementos de Y entre a y b ni entre b y c y como Y tiene la topología del orden entonces $(a, c) \in \tau$. Así $(a, c) = \{b\} \in \tau$. Si b es primero o último elemento de Y, hacemos $[b, c) = \{b\} \in \tau$ o $(a, b] = \{b\} \in \tau$ respectivamente.

Por lo tanto Y es discreto.

Teorema 3.3 *Si Y un espacio topológico ordenado, entonces Y es T_1.*

Demostración:

Sea Y un espacio topológico ordenado; $a, b \in Y$ con $a < b$. Tomemos $e, f \in Y$ tales que $e < a$ y $b < f$, así definimos a los abiertos $U = (e, b)$ y $V = (a, f)$.

Si a es el primer elemento de Y, tomamos $b < f$, así definimos los abiertos $U = [a, b)$ y $V = (a, f)$.

Si b es el último elemento de Y, tomamos $e < a$, así definimos los abiertos $U = (e, b)$ y $V = (a, b]$.

Finalmente, si a es el primer elemento de Y y b es el último elemento de Y. Definimos $U = [a, b)$ y $V = (a, b]$.

Así en todos los casos $a \in U$, $b \in V$, $a \notin V$ y $b \notin U$.

Por lo tanto Y es T_1.

Teorema 3.4 *Si Y un espacio topológico ordenado, entonces Y es T_3.*

Demostración:

Sean C cerrado y $p \in Y \backslash C$.

Veamos que existen un intervalo abierto V en $Y \backslash C$ y U un abierto tales que $p \in V$, $C \subset U$ e U y V tienen intersección vacía.

Consideremos 4 casos:

1. Si existen $r, s \in Y$ tales que $a < r < p < s < b$, hacemos $U = \{y \in Y \mid y < r\} \cup \{y \in Y \mid y > s\}$, entonces $C \subseteq U$ donde U es abierto y $U \cap (r, s) = \emptyset$.

2. Si existe s tal que $p < s < b$, pero no existe r tal que $a < r < p$, hacemos $U = \{y \in Y \mid y < p\} \cup \{y \in Y \mid y > s\}$, $p \in (a, s)$, entonces $C \subseteq U$ donde U es abierto y $U \cap (a, s) = \emptyset$.

3. Si existe r tal que $a < r < p$. Pero no existe s tal que $p < s < b$ es análogo al anterior.

4. Si no existen r, s tales que $a < r < p$ y $p < s < b$ es análogo a 2 y 3.

En cada caso existen dos abiertos, ajenos U y V tal que $p \in V$ y $C \subseteq U$.

Por lo tanto Y es T_3.

Y es T_2 ya que los conjuntos con un solo punto son cerrados y el espacio Y es T_3.

Teorema 3.5 *Si (Y,τ) es un espacio topológico ordenado y $J \subseteq Y$ es conexo, entonces J es un intervalo.*

Demostración:

Sea $J \subset Y$ tal que J es conexo y no es un singular.

Sean $u, v \in J$ tales que existe $k \in Y \backslash J$ donde $u < k < v$. Proponemos $U = \{y \in Y \mid y < k\}$ y $V = \{y \in Y \mid y > k\}$. Como $(U \cap J) \cup (V \cap J)$ es una separación de J, entonces J es disconexo. Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto J es conexo.

Por lo tanto J es un intervalo.

Teorema 3.6 *Sea (Y, τ) un espacio topológico ordenado. Si todo subconjunto de Y tiene supremo e ínfimo, entonces Y es compacto.*

Demostración:

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de Y.

Definimos $m = mín(y \in Y)$, $M = máx(y \in Y)$ y $A = \{a \in Y \mid [m, a)$ se puede cubrir con un número finito de $U_i\}$. Como $\{U_i\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de Y, existe U_k tal que $m \in U_k$.

Como U_k es abierto, existe $b \in Y$ tal que $[m, b) \subseteq U_k$ así $b \in A$.

Por lo tanto $A \neq \emptyset$

Sea $s = sup(A)$ suponemos que $s < M$.

Caso 1:

Si $s \in A$, existe $J \subset \mathbb{N}$ finito tal que $[m, s) \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$. Como $\{U_i\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de Y, existe U_r con $s \in U_r$. Por lo tanto, existe $(t_1, t_2) \subseteq Y$ tales que $s \in (t_1, t_2) \subseteq U_r$, entonces $[m, s) \cup (t_1, t_2) = [m, t_2) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \cup U_r$.

Entonces $t_2 \in A$, lo cual es una contradicción puesto que $s = sup(A)$.

Caso 2:

Si $s \notin A$, existe $U_k \in \{U_i\}_{i \in I}$ tal que $s \in U_k$, como U_k es un abierto, entonces existe $f < s$ tal que $(f, s) \subset U_k$, así $[m, f) \cup [f, s) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \bigcup U_k$ y se tiene que $s \in A$, pero supusimos que $s \notin A$, por lo que $s = M$. En consecuencia, $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, por lo tanto Y es compacto.

Teorema 3.7 *Sea Y un espacio finito ordenado con $|Y| \geq 2$. Entonces*

1. *Y es normal.*

2. *Y no es conexo.*

3. *Y es métrico.*

Demostración:

Recordemos que todo espacio finito ordenado es discreto por el Lema 3.2.

1. Sean $E, F \subset Y$ cerrados ajenos. Por ser Y discreto, tenemos que cualquier subconjunto finito es abierto, con lo que E, F son abiertos, entonces Y es normal.

2. Sea $A \subset Y$ no vacío y distinto de Y. Entonces $Y = A \cup (Y \setminus A)$ es una separación de Y.

3. Definimos $d : Y^2 \to \{0, 1\}$ como $d(x, y) = \begin{cases} 0 \; Si \, x = y, \\ 1 \; Si \, x \neq y. \end{cases}$

Veremos que d es una distancia.

a) Sean $x, y \in Y$ tales que $x \neq y$, entonces $d(x, y) = 1 > 0$.

b) Sean $x, y \in Y$.

   Si $x = y$, entonces $d(x, y) = 0 = d(y, x)$.

   Si $x \neq y$, entonces $d(x, y) = 1 = d(y, x)$.

c) Sean $x, y, z \in Y$.

   Si $x \neq z$, entonces $d(x, z) = 1$, así tenemos que $d(x, y) = 1$ o $d(y, z) = 1$ en cualquier caso $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

   Si $x = z$, entonces $d(x, z) = 0$, por definición $d(x, y) > 0$ y $d(y, z) > 0$, entonces $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Con lo que d es una distancia.

La distancia d genera la topología discreta en Y. Ya que dado $y \in Y$ se cumple que $\{y\} = B(y, \frac{1}{2}) \in \tau$.

Entonces Y es métrico.

Lema 3.8 *Sea Y ordenado y no denso en sí mismo. Entonces Y es disconexo.*

Demostración:

Sean $u, v \in Y$ tales que $u < v$ y $(u, v) = \emptyset$.

Sea $U = \{y \in Y \mid y < v\}$ y $V = \{y \in Y \mid y > u\}$, es claro que $Y = U \cup V$ es una separación de Y.

Por lo tanto Y es disconexo.

Aplicando el lema anterior al espacio $\mathbb{N}$ con la topología que hereda de $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ es disconexo.

Definición 3.4 *Sean X, Y espacios topológicos ordenados, decimos que una función $f : X \to Y$* preserva el orden*si dados $a, b \in X$ tales que $a \leq_X b$, entonces $f(a) \leq_Y f(b)$.*

Teorema 3.9 *Si Y es un espacio topológico ordenado, numerable y el orden es denso en sí mismo, sin primer ni último elemento, entonces existe $f : Y \to \mathbb{Q}$ una función que preserva el orden.*

Demostración:

Sean $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una numeración de Y y $\{q_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una numeración de $\mathbb{Q}$.

Proponemos $f : Y \to \mathbb{Q}$ de la siguiente manera, $f(a_1) = q_1$, después tomamos q_2.

Si $q_1 < q_2$ (*resp.* $q_2 > q_1$) tomamos a_{i2} tal que $a_1 < a_{i2}$ (*resp.* $a_1 > a_{i2}$) donde $i_2 = mín(i \mid a_1 < a_i(resp.\ a_1 > a_i))$ y hacemos $f(a_{i2}) = q_2$ y $g(q_2) = a_{i2}$, donde $g = f^{-1}$ puesto que $g : \mathbb{Q} \to Y$.

Para a_3 veamos los siguientes casos:

Si $a_3 < a_1 < a_2$ tomamos q_j tal que j es el mínimo índice que cumple $q_j < q_1 < q_2$ y hacemos que $f(a_3) = q_j$. Análogamente si $a_3 < a_2 < a_1$.

Respectivamente si $a_1 < a_2 < a_3$ y $a_2 < a_1 < a_3$.

Si $a_1 < a_3 < a_2$, tomamos q_j tal que j es el mínimo índice que cumple $q_1 < q_j < q_2$ y hacemos que $f(a_3) = q_j$. Análogamente si $a_2 < a_3 < a_1$.

Ahora veamos q_3.

Caso 1:

Si $q_3 = q_j$ en alguno de los casos anteriores, entonces tomamos q_4.

Si $q_4 < q_i$ con $i = 1, 2, 3$, entonces tomamos a_k tal que k es el mínimo índice que cumple $a_k < a_i$ con $i = 1, 2, 3$ y hacemos $f(a_k) = q_4$. Análogamente si $q_i < q_4$ con $i = 1, 2, 3$.

Si $q_r < q_4 < q_s$ con $r, s = 1, 2, 3$, entonces tomamos a_k tal que k es el mínimo índice que cumple $a_r < a_k < a_s$ con $f(a_r) = q_r$ y $f(a_s) = q_s$ y hacemos $f(a_k) = q_4$.

Caso 2:

Si $q_3 \neq q_j$ en todos los casos anteriores vemos los siguientes:

Si $q_3 < q_i$ con $i = 1, 2$, entonces tomamos a_k tal que k es el mínimo índice que cumple $a_k < a_i$ con $i = 1, 2$ y hacemos $f(a_k) = q_3$. Análogamente si $q_i < q_3$ con $i = 1, 2$.

Si $q_1 < q_3 < q_2$, entonces tomamos a_k tal que k es el mínimo índice que cumple $a_1 < a_k < a_2$ con $i = 1, 2$ y hacemos $f(a_k) = q_3$. Análogamente si $q_2 < q_3 < q_1$.

Hacemos el n-esimo paso de la construcción:

Para a_n veamos los siguientes casos:

Si $a_n < a_i$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tomamos q_j tal que j es el mínimo índice que cumple $q_j < q_i$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y hacemos que $f(a_n) = q_j$. Análogamente si $q_i < q_j$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Si $a_l < a_3 < a_m$, tomamos q_j tal que j es el mínimo índice que cumple $q_l < q_j < q_m$ y hacemos que $f(a_n) = q_j$.

Ahora veamos q_n.

Caso 1:

Si $q_n = q_j$ en alguno de los casos anteriores, entonces tomamos q_{n+1}.

Si $q_{n+1} < q_i$ con $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces tomamos a_k tal que k es el mínimo índice que cumple $a_k < a_i$ con $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y hacemos $f(a_k) = q_{n+1}$. Análogamente si $q_i < q_{n+1}$ con $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Caso 2:

Si $q_n \neq q_j$ en todos los casos anteriores vemos los siguientes:

Si $q_n < q_i$ con $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces tomamos a_k tal que k es el mínimo índice que cumple $a_k < a_i$ con $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y hacemos $f(a_k) = q_n$. Análogamente si

$q_i < q_n$ con $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Si $q_l < q_n < q_m$, entonces tomamos a_k tal que k es el mínimo índice que cumple $a_l < a_k < a_m$ con $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y hacemos $f(a_k) = q_n$.

Por construcción se cumple que f es una función biyectiva que preserva el orden.

Corolario 3.9.1 *Sea Y un espacio numerable, ordenado, sin primer ni último elementos, donde el orden es denso en sí mismo. Entonces Y es homeomorfo a $\mathbb{Q}$ con la topología que $\mathbb{Q}$ hereda de $\mathbb{R}$.*

Demostración:

Veamos que si $f : Y \to \mathbb{Q}$ es una función que preserva el orden, entonces f es continua.

Sea V un abierto de $\mathbb{Q}$, entonces $V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_i, b_i)$. Así

$f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_i, b_i)) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}((a_i, b_i)) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (f^{-1}(a_i), f^{-1}(b_i)) \in \tau_Y$

Entonces f es continua.

Análogamente f^{-1} es continua.

Es claro que si f es definida como en el teorema anterior la función es biyectiva.

Por lo tanto f es homeomorfismo entre Y y $\mathbb{Q}$.

Teorema 3.10 *Si Y es un espacio topológico ordenado, sin primer ni último elemento, entonces cualquier $z \in Y$ es punto de corte.*

Demostración:

Sea $z \in Y$, entonces $Y \setminus \{z\}$ tiene las siguientes componentes $U = \{y \in Y \mid y < z\}$ y $V = \{y \in Y \mid z < y\}$.

Por lo tanto z es punto de corte.

Observación: Si Y tiene primer o último elemento, entonces estos no serán puntos de corte.

Capítulo 4

Cuadrado Lexicográfico

4.1. Resultados topológicos

Denotaremos por L al ***Cuadrado Lexicográfico*** con el orden definido en el capítulo 1 y $J^n = [0,1]^n$ con la topología que hereda de $\mathbb{R}^n$.

Para ver que L no es el mismo espacio que J^2 con la topología que hereda de $\mathbb{R}^2$, veamos que son espacios no homeomorfos.

Proposición: Los espacios L y J^2 no son homeomorfos.

Demostración:

El conjunto $A = \{< (x,0),(x,1) >| \ x \in J\} \subset L$ cumple que sus elementos son abiertos por definición y ajenos dos a dos. Ya que dados $y, z \in J$ distintos, tenemos que $< (y,0),(y,1) > \cap < (z,0),(z,1) > = \emptyset$.

Esto demuestra que L no es separable mientras que J^2 sí es separable y como la separabilidad se preserva bajo homeomorfismos.

Por lo tanto L no es homeomorfo a J^2.

Denotamos el límite en L por $lim_L(x_n, y_n)$ y para el límite en J^2 lo denotamos por $lim_{J^2}(x_n, y_n)$, donde $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset J^2$.

Teorema 4.1 *Sea $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge en J^2. Supongamos que $lim_J \, x_n = x$ y $x_n < x_{n+1} < x$ (resp. $x > x_{n+1} > x_n$) para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$lim_L(x_n, y_n) = (x, 0)$ *(resp.* $lim_L(x_n, y_n) = (x, 1)$*).*

Demostración:

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente con el orden de J. Entonces dada V una vecindad de $(x, 0)$ en L, se cumple que existen $\delta > 0$ y $a, b \in J$, tales que $<(x - \delta, a), (x, b)> \subset V$ así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > n_0$, $(x_n, y_n) \in <(x - \delta, a), (x, b)>$, lo que demuestra que $lim_L(x_n, y_n) = (x, 0)$.

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente con el orden de J. Entonces dada V una vecindad de $(x, 1)$ en L, se cumple que $\exists\,\delta > 0$ y $a, b \in J$, tales que $<(x, a), (x + \delta, b)> \subset V$ así, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > n_0$, $(x_n, y_n) \in <(x, a), (x + \delta, b)>$, lo que demuestra que $lim_L(x_n, y_n) = (x, 1)$.

Por lo tanto $lim_L(x_n, y_n) = (x, 0)$ (resp. $lim_L(x_n, y_n) = (x, 1)$).

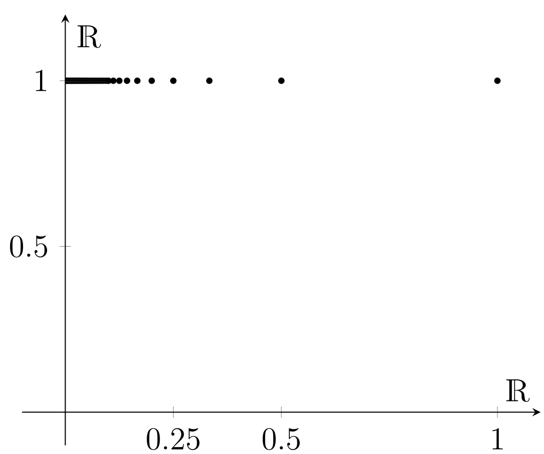

Figura 4.1: Sucesión $S = \{s_n \in J^2 \mid s_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)\ n \in \mathbb{N})\}$.

Teorema 4.2 *Si* $\{(x, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión que converge a* (x, y) *en* J^2*, entonces* $\{(x, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* (x, y) *en* L*.*

Demostración:

1. Si $y \notin \{0, 1\}$. Sea V una vecindad de (x, y) en L. Entonces para alguna $\varepsilon > 0$, $<(x, y - \varepsilon), (x, y + \varepsilon)> \subset V$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se cumple que $|y_n - y| < \varepsilon$. Por lo tanto $(x, y_n) \in V$, si $n > n_0$.

2. Si $y = 0$ y V una vecindad de $(x, 0)$ en L. Entonces para alguna $\varepsilon > 0$, $\leqslant (x, 0), (x, \varepsilon) > \subset V$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se cumple que $y_n < \varepsilon$. Por lo tanto $(x, y_n) \in V$, si $n > n_0$.

3. Si $y = 1$ y V una vecindad de $(x, 1)$ en L. Entonces para alguna $\varepsilon > 0$, $< (x, 1 - \varepsilon), (x, 1) \geqslant \subset V$ y $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se cumple que $y_n > 1 - \varepsilon$. Por lo tanto $(x, y_n) \in V$, si $n > n_0$.

Por lo tanto $lim_L(x_n, y_n)$.

Ejemplo: La sucesión $\{(1, \frac{1}{n})\}$ converge a $(1, 0)$ en J^2. En consecuencia del Teorema anterior $(1, \frac{1}{n})\}$ converge a $(1, 0)$ en L.

Teorema 4.3 *El cuadrado lexicográfico es T_1, T_2 y T_3.*

Demostración:

Todo espacio ordenado es T_1, T_2 y T_3. Véanse los Teoremas 3.3 y 3.4.

Teorema 4.4 *Todo subconjunto del cuadrado lexicográfico tiene ínfimo y supremo.*

Demostración:

Sea $A \subset L$ distinto del vacío. Veamos que existen el ínfimo y el supremo de A.

Definimos $m_1 = inf(\pi_1(A))$.

1. Si $(\{m_1\} \times [0, 1]) \cap A = \emptyset$, proponemos $(m_1, 1) = inf(A)$. Es claro que $(m_1, 1)$ es una cota inferior de A. Si (a, b) es una cota inferior tal que $(m_1, 1) < (a, b)$, entonces $m_1 < a$ y existe a_1 con $m_1 < a_1 < a$ tal que $a_1 \in \pi_1(A)$ por lo que $(a_1, t) \in A$ para alguna $t \in [0, 1]$, así (a, b) no es una cota inferior de A.

   Por lo tanto $(m_1, 1) = inf(A)$.

2. Si $(\{m_1\} \times [0, 1]) \cap A \neq \emptyset$, tomamos $inf(\pi_2((\{m_1\} \times [0, 1]) \cap A) = m_2$, así proponemos $(m_1, m_2) = inf(A)$. Veamos que (m_1, m_2) es una cota inferior de A. Supongamos que existe otra cota inferior (a, b) tal que $(m_1, m_2) < (a, b)$.

   Caso (I)

Si $m_1 < a$, entonces existe a_1, $m_1 < a_1 < a$ tal que $a_1 \in \pi_1(A)$ por lo que $(a_1, t) \in A$ para alguna $t \in [0,1]$, así (a, b) no es una cota inferior de A.

Caso (II)

Si $m_1 = a$, entonces $m_2 < b$, y así existe $b_1 \in [0,1]$, $m_2 < b_1 < b$ tal que $(m_1, b_1) \in A$, así (a, b) no es una cota inferior de A.

Entonces $(m_1, m_2) = inf(A)$.

Definimos $s_1 = sup(\pi_1(A))$.

1. Si $(\{s_1\} \times [0,1]) \cap A = \emptyset$, proponemos $(s_1, 0) = sup(A)$. Veamos que $(s_1, 0)$ es una cota superior de A. Si (a, b) es una cota superior tal que $(a, b) < (s_1, 0)$ se cumple que $a < s_1$, entonces existe a_1 con $a < a_1 < s_1$ tal que $a_1 \in \pi_1(A)$, por lo que $(a_1, t) \in A$ para alguna $t \in [0,1]$, así (a, b) no es una cota superior de A.

   Por lo tanto $(s_1, 0) = sup(A)$.

2. Si $(\{s_1\} \times [0,1]) \cap A \neq \emptyset$, tomamos $sup(\pi_2((\{s\} \times [0,1]) \cap A) = s_2$; así proponemos $(s_1, s_2) = sup(A)$. Veamos que (s_1, s_2) es una cota superior de A, si (a, b) es una cota superior tal que $(a, b) < (s_1, s_2)$ se cumple que:

   Caso (I)

   Si $a < s_1$, entonces $\exists\, a_1$, $a < a_1 < s_1$ tal que $a_1 \in \pi_1(A)$, por lo que $(a_1, t) \in A$ para alguna $t \in [0,1]$, así (a, b) no es una cota superior de A.

   Caso (II)

   Si $a = s_1$, entonces $b < s_2$ y así $\exists\, b_1$, $b < b_1 < s_2$ tal que $b_1 \in \pi_2(A)$, por lo que $(s_1, b_1) \in A$, así (a, b) no es una cota superior de A.

   Por lo tanto $(s_1, s_2) = sup(A)$.

Teorema 4.5 *El cuadrado lexicográfico L es compacto.*

Demostración:

Por el Teorema anterior todo subconjunto A de L tiene ínfimo y supremo. Entonces por el teorema 3.6, L es compacto.

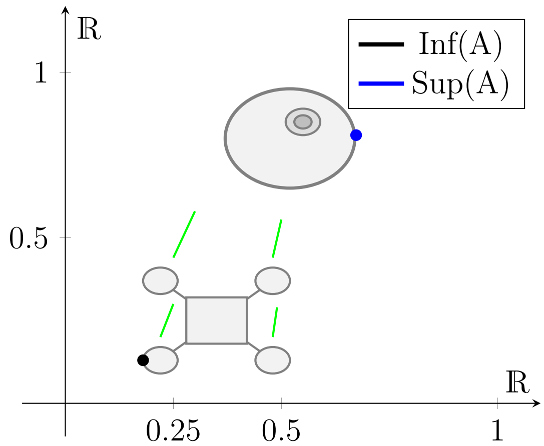

Figura 4.2: Ejemplo de $A \subset L$.

Teorema 4.6 *El cuadrado lexicográfico L es T_4.*

Desmotración: Por el Teorema 2.8 puesto que L es T_2 y compacto, entonces L es T_4.

Definición 4.1 *Sea $(L, \leq)$ el cuadrado lexicográfico, para $c \in L$ definimos el conjunto $I_C =\leqslant (c,0),(c,1) \geqslant$.*

Lema 4.7 *Se cumple que $I_C \cong J$.*

Sea $(c,y) \in I_C$, entonces proponemos la función $f : I_C \to J$ dada por $f((c,y)) = \pi_2((c,y)) \mid_{I_C} = y$.

Veamos que f es inyectiva. Sean $f((c,y)) = f((c,w))$, entonces $y = w$.

Por lo tanto f es una función inyectiva.

Ahora veamos que f es sobreyectiva. Dada $y \in J$ tenemos que $f((c,y)) = y$.

Por lo tanto f es una función sobreyectiva.

La topología que hereda I_C cumple que $U \in \tau_C$ si $U = A \cap I_C$ donde $A =< (a,b),(r,s) >$ es un abierto básico.

Así tenemos que existen $x, y \in J$ tales que.

1. Si $a < c$, entonces $U =\leqslant (c,0),(c,y) >$ o $U =\leqslant (c,0),(c,1) \geqslant$.

2. Si $a = c$, entonces $U =< (c,b),(c,s) >$ o $U =< (c,b),(c,1) \geqslant$.

3. Si $a > c$, entonces $U \cap I_c = \emptyset$.

Veamos si f es una función continua.

Sea A un abierto básico de J, calculamos $f^{-1}[A] = U$ para alguna U de las ya numeradas, por lo que U es un abierto básico de I_C.

Por lo tanto f es una función continua.

Finalmente veamos si f^{-1} es una función continua.

Sea V un abierto básico de I_C, calculamos $f[V] = (a, b)$ o $[0, b)$ o $(a, 1]$ que son abiertos básicos de J.

Así f^{-1} es una función continua.

Entonces f es un homeomorfismo.

Por lo tanto $I_C \cong J$.

Ahora nos centraremos en ver cómo son los cerrados de L.

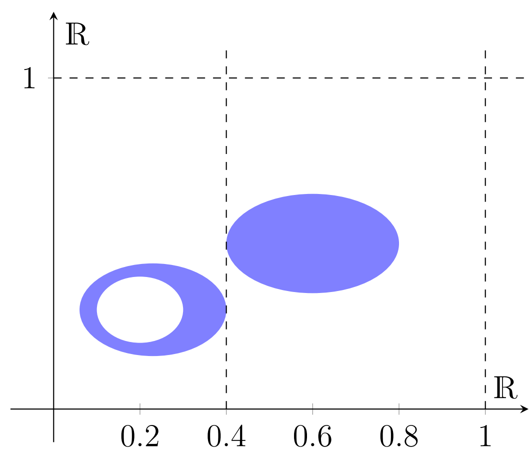

Figura 4.3: Propuesta a cerrado K.

Lema 4.8 *En el cuadrado lexicográfico L dado K un cerrado con $Int(\pi_1(K)) \neq \emptyset$ (interior de K en J), entonces todo $p \in int(\pi_1(K))$, cumple que $(p, 0), (p, 1) \in K$.*

Demostración:

Sea $p \in int(\pi_1(K))$.

Supongamos que $(p, 1) \in L \backslash K$, entonces existe $U =< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >\subset L \backslash K$ un intervalo abierto, con $(p, 1) \in U \subseteq L \backslash K$, así $(p, 1) < (x_2, y_2)$ con lo que $p < x_2$ como $p \in Int(\pi_1(K))$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(p, p + \varepsilon) \subseteq \pi_1(K)$.

Lo que implica que si $a \in (p, p+\varepsilon)$, existe $b \in J$ tal que $(a, b) \in U \cap K$, contradice que $U \subseteq L \backslash K$.

Por lo tanto $(p, 1) \in K$.

Análogamente si $(p, 0) \in L \backslash K$, entonces existe $U =< (x_1, y_1), (x_2, y_2) > \subset L \backslash K$ un intervalo abierto, con $(p, 0) \in U \subseteq L \backslash K$, así $(x_1, y_1) < (p, 0)$ con lo que $x_1 < p$ como $p \in Int(\pi_1(K))$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(p - \varepsilon, p) \subseteq \pi_1(K)$ lo que implica que si $a \in (p - \varepsilon, p)$ existe b tal que $(a, b) \in U \cap K$.

Por lo tanto $(p, 0) \in K$.

Lema 4.9 *Si K es un cerrado del cuadrado lexicográfico L, entonces $\pi_1(K) = \{x \in J \mid (x, y) \in K$ para alguna $y\}$ es cerrado en J con su topología usual.*

Demostración:

Por el lema 2.9, la función $\pi_1 : K \to J$ es cerrada ya que K es compacto y J es Hausdorff. Entonces $\pi_1[K]$ es cerrado.

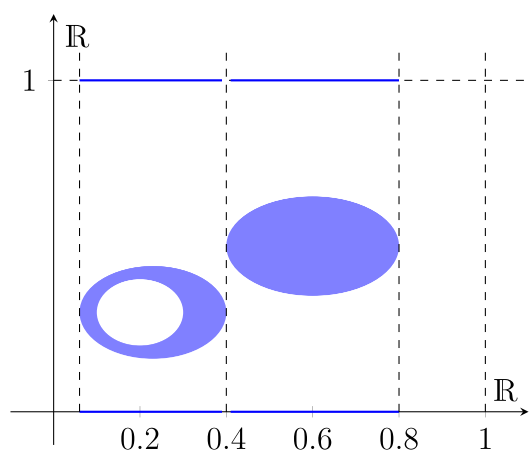

Figura 4.4: Cerrado de K en L.

Teorema 4.10 *El cuadrado lexicográfico L es primero numerable.*

Demostración:

Sea $p = (p_1, p_2) \in L$.

- Si $p_2 \notin \{0, 1\}$, proponemos:

$\beta = \{< \left(p_1, p_2 - \frac{1}{n}\right), \left(p_1, p_2 + \frac{1}{n}\right) > \cap(\{p\} \times J) \mid n \in \mathbb{N}\}$ que es claramente una base numerable para p.

- Si $p_2 = 0$ y $p_1 \neq 0$ proponemos:

$\beta = \{< \left(p_1 - \frac{1}{n}, 0\right), \left(p_1, \frac{1}{n}\right) > n \in \mathbb{N}\}$ como base numerable para p.

Veamos que β es base para p.

Sea U abierto tal que $p \in U$, entonces existen x, y, u, v tales que $p \in< (x, y), (u, v) >\subseteq U$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_1 - \frac{1}{n} < x$ y $\frac{1}{n} < v$.

Claramente $p \in< \left(p_1 - \frac{1}{n}, 0\right), \left(p_1, \frac{1}{n}\right) >\subseteq< (x, y), (u, v) >\subseteq U$.

- Si $p_2 = 1$ y $p_1 \neq 1$ proponemos:

$\beta = \{< \left(p_1, 1 - \frac{1}{n}\right), \left(p_1 + \frac{1}{n}, 0\right) >\mid n \in \mathbb{N}\}$ como base numerable para p.

Veamos que β es base para p.

Sea U abierto tal que $p \in U$, entonces existen x, y, u, v tales que $p \in< (x, y), (u, v) >\subseteq U$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < p - \frac{1}{n}$ y $p + \frac{1}{n} < u$.

Claramente $p \in< \left(p_1 - \frac{1}{n}, 1\right), \left(p_1 + \frac{1}{n}, 0\right) >\subseteq< (x, y), (u, v) >\subseteq U$

- Si $p = (1, 1)$ proponemos:

$\beta = \{< \left(1 - \frac{1}{n}, 0\right), (1, 1) \geqslant\mid n \in \mathbb{N}\}$ como base numerable para p.

- Si $p = (0, 0)$ proponemos:

$\beta = \{\leqslant (0, 0), \left(0, \frac{1}{n}\right) >\mid n \in \mathbb{N}\}$ como base numerable para p.

Por lo tanto L es primero numerable.

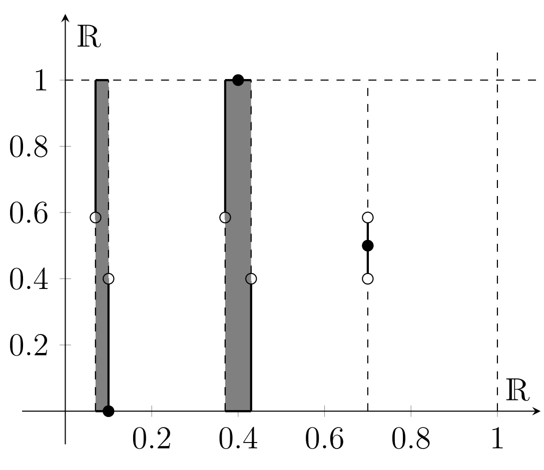

Figura 4.5: Base local de p en cada caso.

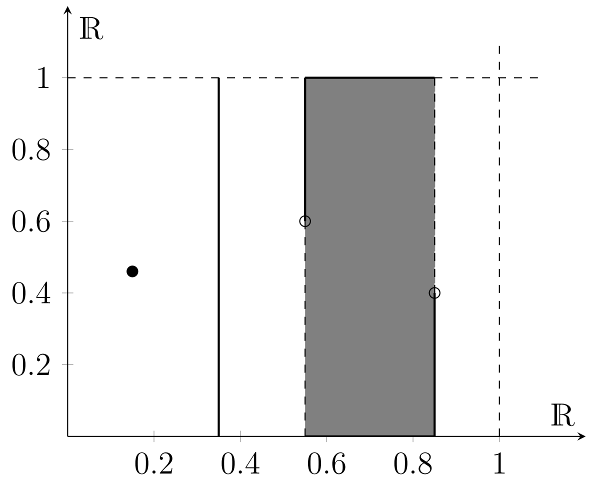

Figura 4.6: Conexos en L.

Lema 4.11 *Dados $C \subseteq L$ y $a, b, c, d, e, f \in J$ tenemos que C es conexo si $C = \{(a, b)\}$, $C =< (c, d), (c, f) >$, $C =< (c, d), (e, f) >$.*

Demostración:

• Un punto $C = \{(a, b)\}$ es conexo por que C consta de un sólo punto.

• Dado $C =< (c, d), (c, f) >$ tenemos el homeomorfismo $f : C \to [d, f]$ dado por $f(c, y) = y$ implica que como $[d, f]$ es conexo como subespacio de $\mathbb{R}$ entonces C es conexo.

• Sea $C =< (c, d), (e, f) >$. Supongamos que C no es conexo, entonces existen U, V abiertos no vacíos de C con $U \cup V = C$ y $U \cap V = \emptyset$.

Por la segunda estrella. $C_1 =< (c, d), (c, 1) \geqslant$ es conexo, entonces sin pérdida de generalidad supongamos que $C_1 \subseteq U$. Sea $A =< (a, b), (u, v) >$ un abierto básico de tal forma que $(c, 1) \in A \subset U$.

Como $c < u$. Entonces $M = \{x \in [0, 1] \mid < (c, d), (x, 0) > \subset U\} \neq \emptyset$ y e es una cota superior de M con lo que tomamos $s = sup(x \in [0, 1] \mid < (c, d), (x, 0) > \subseteq U)$.

Supongamos que $s \neq e$.

• Si $(s, 0) \in U$, entonces $(s, 1) \in U$ pues $< (s, 0), (s.1) \geqslant$ es conexo, con lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $< (c, d), (s + \varepsilon, 0) > \subseteq U$, lo cual no puede pasar.

• Si $(s, 0) \notin U$, entonces $(s, 0) \in V$ y así $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $< (s - \varepsilon, 0), (s, 0) > \subseteq V$, con lo que $< (c, d), (x, 0) > \nsubseteq U$.

Por lo tanto $s = e$.

Por lo tanto $< (c,d),(e,f) > \subset U$, entonces $V = \emptyset$.

Entonces C es conexo.

Observación 1: Si $(c,d) = (0,0)$ y $(e,f) = (1,1)$ tenemos que L es conexo igualmente.

Observación 2: Si L es el *cuadrado lexicográfico*, entonces L es localmente conexo puesto que los intervalos son conexos.

Teorema 4.12 *El cuadrado lexicográfico L es conexo.*

Demostración:

Supongamos que L no es conexo, entonces existen U, V abiertos de L tal que $U \cup V = L$ y $U \cap V = \emptyset$.

Por el Lema 4.11, I_0 es conexo, supongamos que $I_0 \subset U$. Sea $s = sup(x \in [0,1] \mid \leqslant (0,0),(x,0) \geqslant \subseteq U)$.

Como $I_0 \in U$, entonces $0 \in \{x \in [0,1] \mid \leqslant (0,0),(x,0) \geqslant \subseteq U\} \neq \emptyset$

Veamos los casos si $s \neq 1$.

Caso 1: Si $(s,0) \in U$ tenemos que $(s,1) \in U$ pues I_s es conexo, entonces, puesto que U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(s+\varepsilon,1) \in U$ y $(s+\varepsilon,0) \in U$ lo que contradice la definición de supremo.

Caso 2: Si $(s,0) \notin U$, entonces $(s,0) \in V$, con lo que $[s-\varepsilon, s] \subseteq V$. Lo cual es una contradicción.

Se concluye que $s = 1$ y $V = \emptyset$

Por lo tanto L es conexo.

Teorema 4.13 *En el cuadrado lexicografico L, dados $a, b \in J$ tales que $a < b$ y $x \in (0,1)$ se cumple que $C = ((a,x),(b,x)) \subseteq L$ hereda la topología discreta.*

Demostración:

Sean $(c,x) \in C$ y $S =< (s,0),(s,1) >$ que cumple $S \in \tau$ y $(c,x) \in S$.

Así $C \cap S$ es un abierto de la topología que C que hereda de L, notemos que $C \cap S = \{(c,x)\} \in \tau_C$.

Por lo tanto τ_C es la topología discreta.

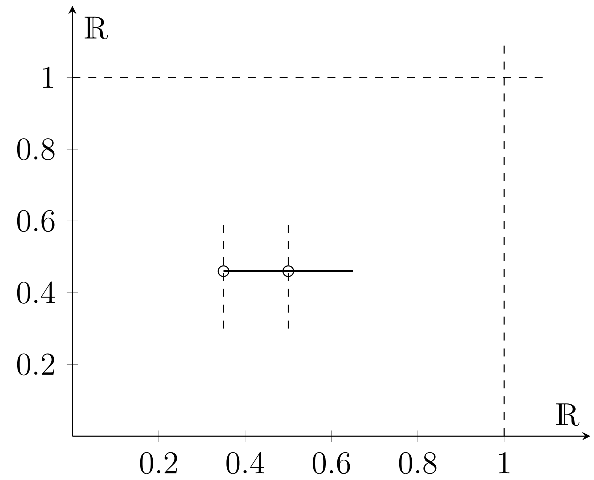

Figura 4.7: Un intervalo $C =< (a, y), (b, y) >$

Teorema 4.14 *En el cuadrado lexicográfico L, los conjuntos $C = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1\}$ heredan la topología del limite inferior o de Sorgenfrey.*

Demostración:

Denotamos por τ_σ a la topología de Sorgenfrey en C y por T_C a la topología que C hereda de L. Así $\tau_\sigma = \{\leqslant (a, 1), (b, 1) >\mid 0 < a < b < 1\}$ y $\tau_C = \{C \cap < (c, d), (e, f) > \mid c, d, e, f \in [0, 1]\}$.

Ya que $((a, 1), (b, 1)) = C \cap < (a, d), (b, 1) >$ con $d < 1$.

Por lo tanto $\tau_C = \tau_\sigma$

El resultado es análogo para $C = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1\}$ con $((a, 0), (b, 0)) = C \cap < (a, 0), (b, d) >$ con $d > 0$.

Teorema 4.15 *El cuadrado lexicográfico L no es separable.*

Demostración:

Sean $x, y \in J \backslash \{0, 1\}$, entonces los conjuntos de la forma $C_a =< (a, x), (a, y) >\subset L$ tienen la topología discreta, así $A = \{C_a \mid a \in [0, 1]\}$ es un subconjunto de τ_L con elementos ajenos dos a dos. Como A es no numerable, entonces no existe ningún subconjunto denso numerable de L que intersecte a todos los elementos de A.

Por lo tanto L no es separable

Dado que L no es separable, entonces L no es segundo numerable.

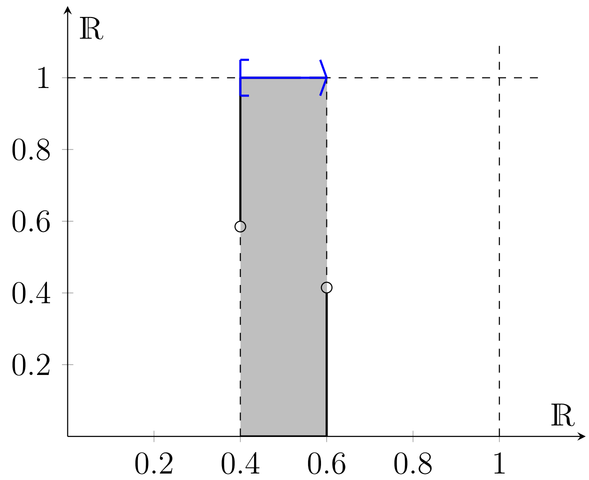

Figura 4.8: Un intervalo $B =< (a, x), (b, y) >\subseteq L$

Teorema 4.16 *En cuadrado lexicográfico L todos los puntos excepto $(0,0)$ y $(1,1)$ son de corte.*

Demostración:

Sea $(x, y) \in L$.

Los conjuntos $L \backslash \{(0,0)\} =< (0,0),(1,1) \geqslant$ y $L \backslash \{1,1\} =\leqslant (0,0),(1,1) >$ son conexos, entonces $(x, y) \in \{(0,0),(1,1)\}$ no son puntos de corte.

Si $p = (x, y) \in L \backslash \{(0,0),(1,1)\}$, entonces los conjuntos $U =\leqslant (0,0),(x,y) >$ y $V =< (x, y),(1,1) \geqslant$ son abiertos ajenos de $L \backslash \{p\}$ cuya union es $L \backslash \{p\}$.

Por lo tanto, todos los puntos en L excepto $(0,0)$ y $(1,1)$ son de corte.

Teorema 4.17 *El cuadrado lexicográfico L no es conexo por trayectorias.*

Demostración:

Sea $\sigma : [0,1] \to L$ una función continua tal que $\sigma(0) = (0,0)$ y $\sigma(1) = (1,1)$.

Afirmamos que σ es suprayectiva.

Supongamos que $\exists\,(p_1, p_2) \in L \backslash Img(\sigma)$, así $Img(\sigma) = \langle \leqslant (0,0),(p_1,p_2) > \cap\, Img(\sigma) \rangle \cup \langle < (p_1, p_2),(1,1) \geqslant \cap\, Img(\sigma) \rangle$, es una disconexión de $Img(\sigma)$ lo que contradice que es conexo ya que es la imagen de un conexo bajo una función continua.

Por lo tanto σ es suprayectiva.

Como J es separable, σ es continua y suprayectiva, entonces $Img(\sigma) = L$ es separable.

Pero ya habíamos demostrado que L no es separable en el comienzo del capítulo.

Por lo tanto L no es conexo por trayectorias.

Capítulo 5

Conclusiones

Considero que las topologías del orden resultan muy accesibles para el estudio de conceptos generales que son fundamentales en la topología como los axiomas de separación, compacidad, conexidad y numerabilidad, entre otros.

Estos espacios me parecen muy interesantes pues podemos hacer un estudio comparativo entre ellos y $\mathbb{R}$ con el orden usual $\leq$, mostrando sus similitudes o contraejemplos. Notamos que en los espacios ordenados es importante el número de elementos para poder hacer una similitud con los intervalos que conocemos como subconjuntos de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.

El tema principal de este trabajo es el estudio del cuadrado lexicográfico y sus peculiaridades ya que al ser una topología del orden es inmediato que muchas de las propiedades que se cumplen para los espacios ordenados, son heredadas por el cuadrado lexicográfico.

Los abiertos de este espacio tienen caracteristicas unicas como su forma, ya que son abiertas líneas verticales que llenan todo el cuadrado lexicográfico donde los puntos extremos de los mismos tienen vecindades muy peculiares que se estuadiaron a fondo.

Por otra parte los abiertos que resultan bajo proyecciones en el eje real, son de la misma forma que los abiertos dados por la topología del límite inferior.

Mientras que las líneas horizontales (no extremas) heredan la topología discreta. Otra peculiaridad de este espacio es la convergencia de sucesiones que hacen diferente a este espacio de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.

Un ejemplo concreto es la sucesión $(p + \frac{1}{n}, 0)$ que converge a $(p, 0)$ en $\mathbb{R}^2$ pero no converge en el cuadrado lexicográfico.

Finalmente, hay mucha diferencia entre los cerrados de $\mathbb{R}^2$ y los cerrados del cuadrado lexicográfico.

Bibliografía:

1. James Dugundji. (1978). TOPOLOGY. Estados Unidos: Allyn and Bacon, Inc.

2. John L. Kelley. (1975). General Topology. Estados Unidos: Springer Science Business Media.

3. Stephen Willard. (2012). General Topology. Mineola, New York: DOVER PUBLICATIONS INC.