UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

CARACTERIZACIONES DE ANILLOS POR MEDIO DE PROPIEDADES DE FINITUD EN SUS RETÍCULAS DE CLASES DE MÓDULOS ASOCIADAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
OSCAR ALBERTO GARRIDO JIMÉNEZ

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. ALEJANDRO ALVARADO GARCÍA, F. CIENCIAS, UNAM
DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ, IMATE-CU

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., SEPTIEMBRE DE 2022

Agradecimientos

A mis profesores, porque sin conocerme, me dieron la oportunidad y me brindaron su apoyo en más de una ocasión. Gracias Toño, gracias Doctora Bertha, gracias Profe Hugo.

A Rodrigo, por convencerme de ingresar y apoyarme a lo largo de todo este proceso. A Artur, porque siempre me escuchó y me hizo ver las cosas desde otras perspectivas. A David, que desde la licenciatura ha estado aquí, apoyándome como solo la banda sabe hacerlo. A Raúl, que pasó de ser un alumno a un amigo y luego a ser un ejemplo de vida. Les agradezco porque a su manera, como debe ser, siempre me han apoyado.

A mis padres, Oscar y Estela. Simplemente no hay palabras suficientes para manifestarles mi agradecimiento. Gracias a ustedes siempre he logrado seguir.

A mi hermano y amigo Arturo, que, en las buenas y en las malas, siempre está conmigo.

A mis amadas hijas, mi Nadia y mi Gaby. Son mi más grande motivación y mi más grande orgullo. Gracias por ser ustedes.

Finalmente, debo agradecerme, porque solo yo sé el contexto en el que realicé este trabajo, lo que batalle y lo que me costó. Gracias Oscar.

Introducción

La teoría de retículas ha desempeñado un papel destacado en el Álgebra y en especial en la teoría de módulos y anillos. Dado un anillo, se pueden estudiar algunas retículas de clases de módulos para obtener información acerca de la estructura interna del anillo o de su categoría de módulos. En los tres capítulos de este trabajo utilizamos fuertemente esta herramienta, ya sea para obtener información de una retícula de clases de módulos en particular, o para caracterizar tipos de anillos.

En el primer capítulo estudiamos retículas seudocomplementadas. Siguiendo algunas ideas de [21], obtenemos una caracterización de cuándo una retícula distributiva y atómica es neteriana. Después, aplicamos estos resultados a la retícula de teorías de torsión hereditarias, obteniendo una caracterización de la neterianidad de R-tors en términos de la teoría de torsión de Dickson y de la cantidad de representantes de R-módulos simples.

En el segundo capítulo estudiamos los anillos mod-retráctiles. Estos anillos fueron caracterizados por Koşan y Žemlička a través de sus retículas de teorías de torsión y de torsión hereditarias, vea [17]. En este mismo orden de ideas, introducimos una condición para cualquier pareja de módulos, que llamamos la condición (HH). A través de retículas de clases de módulos, como la de clases naturales y la de clases conaturales, además de los anillos mod-retráctiles, caracterizamos los anillos que satisfacen la condición (HH).

También, en el segundo capítulo, introducimos los conceptos de módulo fuertemente retráctil y de anillo fuertemente mod-retráctil, a través de una condición para R-módulos M y N, que denotamos $M \operatorname{Ret} N$. Mediante esta condición, obtenemos una conexión de Galois entre las retículas de clases naturales y clases conaturales. Concluimos este capítulo con una caracterización de los anillos fuertemente mod-retráctiles.

Finalmente, en el tercer capítulo, estudiamos retículas de clases de módulos inducidas por un prerradical σ, las retículas de clases σ-hereditarias, de clases σ-cohereditarias, de clases σ-naturales y de clases σ-conaturales, todas estas introducidas por Cerda y Rincón en [8]. Estos mismos autores introdujeron los conceptos de módulo σ-retráctil y de anillo σ- (R-Mod)-retráctil. Generalizamos la condición (HH) del capítulo anterior obteniendo la condición (σ-HH) y caracterizamos los anillos que satisfacen esta condición.

Índice general

Capítulo 1

¿Cuándo R-tors es neteriana?

En este capítulo estudiamos condiciones necesarias y suficientes para que una retícula distributiva y atómica resulte neteriana, para después aplicar estos resultados y obtener condiciones necesarias y suficientes para que la retícula de teorías de torsión hereditarias sea neteriana.

1.1. Retículas

Sean $(\mathcal{L}, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq \mathcal{L}$. Un elemento $s \in \mathcal{L}$ es una **cota superior (inferior)** para A en $\mathcal{L}$ si $a \leq s$ $(s \leq a)$ para todo elemento $a \in A$. Un elemento $m \in A$ es el **elemento mayor (menor)** de A si $a \leq m$ $(m \leq a)$ para todo elemento $a \in A$. Diremos que un elemento $s \in \mathcal{L}$ es el **supremo (ínfimo)** del conjunto A si s el menor (mayor) elemento del conjunto de cotas superiores (inferiores) de A. Un elemento $m \in \mathcal{L}$ es un **elemento máximo (mínimo)** en A si $m \in A$ y para cualquier $a \in A$ tal que $m \leq a$ $(a \leq m)$ se tiene que $a = m$.

Definición 1.1 *Una **retícula** es un conjunto parcialmente ordenado en el que para cualesquiera elementos $a, b \in \mathcal{L}$ existe el supremo y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$. Denotamos por $a \vee b$ y por $a \wedge b$ el supremo y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$, respectivamente.*

*Si para cualquier $A \subseteq \mathcal{L}$ existe el supremo de A y el ínfimo de A decimos que $\mathcal{L}$ es una **retícula completa** y denotamos con $\bigvee A$ y con $\bigwedge A$ el supremo y el ínfimo del conjunto A respectivamente.*

Sea $\mathcal{L}$ una retícula. Note que si $\mathcal{L}$ tiene un elemento mayor y un elemento menor, entonces éstos son únicos y los denotamos por 1 y 0 respectivamente. Una retícula completa tiene elemento mayor y elemento menor.

Definición 1.2 *Sean $\mathcal{L}$ una retícula y $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$. $\mathcal{L}'$ es una **subretícula** de $\mathcal{L}$ si para cualesquiera $a, b \in \mathcal{L}'$ se tiene que $a \vee b \in \mathcal{L}'$ y $a \wedge b \in \mathcal{L}'$.*

Dada una retícula $\mathcal{L}$ y un par de elementos $a, b \in \mathcal{L}$, con $a \leq b$, denotamos por $[a, b]$ al conjunto $\{x \in \mathcal{L} \mid a \leq x \leq b\}$, es decir,

$$[a, b] = \{x \in \mathcal{L} \mid a \leq x \leq b\}$$

y lo llamamos **intervalo**. Observe que cualquier intervalo es una subretícula.

Definición 1.3 *Sean $\mathcal{L}$ una retícula con elemento menor 0 y $a \in \mathcal{L}$. Un elemento $b \in \mathcal{L}$ es un **seudocomplemento** de a en $\mathcal{L}$, si $a \wedge b = 0$ y b es máximo respecto a esta propiedad. Si b es un elemento mayor tal que $a \wedge b = 0$, b es llamado **un seudocomplemento fuerte** de a. Si cada elemento de $\mathcal{L}$ tiene un seudocomplemento (fuerte) en $\mathcal{L}$ decimos que $\mathcal{L}$ es una **retícula (fuertemente) seudocomplementada**.*

1.2. Sobre Retículas neterianas

Decimos que una retícula $\mathcal{L}$ satisface la **condición de cadena ascendente (CCA)** si para cualquier cadena ascendente $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ de elementos en $\mathcal{L}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = a_N$ para todo $n \geq N$.

Definición 1.4 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula. $\mathcal{L}$ es una* ***retícula neteriana*** *si $\mathcal{L}$ satisface la condición de cadena ascendente.*

Teorema 1.5 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\mathcal{L}$ es una retícula neteriana.

(2) Cualquier $A \subseteq \mathcal{L}$, no vacío, tiene elementos máximos.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que existe $A \subseteq \mathcal{L}$, no vacío, tal que A no tiene elementos máximos. Sea $a_1 \in A$. Como A no tiene elementos máximos, a_1 no es elemento máximo de A, por lo que existe $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$ con $a_1 \leq a_2$. Ahora, a_2 tampoco es un máximo de A, por lo que existe $a_3 \in A \setminus \{a_2\}$ con $a_2 \leq a_3$. Continuando de esta manera obtenemos una cadena $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ de elementos en A, y por tanto en $\mathcal{L}$, que no se estaciona, por lo que $\mathcal{L}$ no es una retícula neteriana.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$ una cadena en $\mathcal{L}$. Por hipótesis, el conjunto no vacío $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ tiene elementos máximos, esto es, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ con $a_N \leq a_n$ se tiene que $a_n = a_N$. Se sigue que $a_n = a_N$ para todo $n \geq N$, es decir, la cadena $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ se estaciona. Dado que esto vale para cualquier cadena en $\mathcal{L}$, se tiene que $\mathcal{L}$ es una retícula neteriana. ■

Definición 1.6 *Sean $\mathcal{L}$ una retícula completa. Un elemento $a \in \mathcal{L}$ es* ***finitamente generado*** *si para cada $A \subseteq \mathcal{L}$, no vacío, tal que $a = \bigvee A$, existe $F \subseteq A$ finito tal que $a = \bigvee F$.*

Teorema 1.7 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\mathcal{L}$ es una retícula neteriana.

(2) Todo elemento de $\mathcal{L}$ es finitamente generado.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $\mathcal{L}$ una retícula neteriana, $a \in \mathcal{L}$ y $A \subseteq \mathcal{L}$, no vacío, tales que $a = \vee A$. Consideremos el conjunto $\mathcal{F} = \{\vee F \mid F \subseteq A \text{ finito } \}$. Note que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, así que, por el Teorema 1.5, $\mathcal{F}$ tiene elementos máximos. Sea $F_0 \subseteq A$ un conjunto finito tal que $\vee F_0$ es un elemento máximo de $\mathcal{F}$. Es claro que $\vee F_0 \leq \vee A = a$, así que sólo resta demostrar que $\vee A \leq \vee F_0$. Para ello consideremos $x \in A$ un elemento cualquiera. Note que $\vee (F_0 \cup \{x\}) = \vee F_0$, pues $\vee (F_0 \cup \{x\}) \in \mathcal{F}$ y $\vee F_0$ es un elemento máximo de $\mathcal{F}$. Por otro lado, se tiene que $x \vee (\vee F_0) = \vee (F_0 \cup \{x\})$, así que $x \vee (\vee F_0) = \vee F_0$. Por lo tanto, $x \leq \vee F_0$ y como x es un elemento cualquiera de A, concluimos que $a = \vee A \leq \vee F_0$. Así, $a = \vee F_0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sean $\mathcal{L}$ una retícula en donde todo elemento es finitamente generado y $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ una cadena ascendente de elementos en $\mathcal{L}$. Consideremos $x = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Por hipótesis, existen números naturales $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ tales que $x = \bigvee_{j=1}^{k} a_{i_j}$. Luego, dado que la cadena es ascendente, se tiene que

$\bigvee_{j=1}^{k} a_{i_j} = a_{i_k}$. Ahora, para cada $j > i_k$, se tiene que $a_j \geq a_{i_k}$ y, por otro lado,

$$a_j \leq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n = a_{i_k}.$$

De donde $a_{i_k} = a_j$, para cada $j \geq i_k$, es decir, la cadena se estaciona. Concluimos que $\mathcal{L}$ es una retícula neteriana. ■

Proposición 1.8 *Si $\mathcal{L}$ es una retícula neteriana, entonces $\mathcal{L}$ es una retícula seudocomplementada.*

Demostración. Sean $a \in \mathcal{L}$ y $A = \{b \in \mathcal{L} \mid a \wedge b = 0\}$. Note que A es un conjunto no vacío, pues $0 \in A$. Ahora, como $\mathcal{L}$ es una retícula neteriana, por el Teorema 1.5, se sigue que A tiene elementos máximos. Sea b_0 un elemento máximo de A. Se tiene que b_0 es un seudocomplemento de a en $\mathcal{L}$. ■

Recordemos que una retícula $\mathcal{L}$ es una **retícula distributiva** si para cualesquiera $a, b, c \in \mathcal{L}$ se cumple que $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Proposición 1.9 *Si $\mathcal{L}$ es una retícula distributiva y seudocomplementada, entonces $\mathcal{L}$ es fuertemente seudocomplementada.*

Demostración. Sean $a, b, c \in \mathcal{L}$ tales que b es un seudocomplemento de a y $a \wedge c = 0$. Note que

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0 \vee 0 = 0.$$

Como $b \leq b \vee c$ y b es un seudocomplemento de a, entonces $b = b \vee c$, de donde $c \leq b$. Así, b es un seudocomplemento fuerte de a. ■

A partir de este momento usaremos libremente este último resultado.

Note que cuando existe un seudocomplemento fuerte de $a \in \mathcal{L}$, este seudocomplemento es único, en este caso lo llamamos el seudocomplemento de a y lo denotamos por $a^{\perp}$.

Observación 1.10 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula fuertemente seudocomplementada. Si $a, b \in \mathcal{L}$ satisfacen que $a \wedge b = 0$, entonces $b \leq a^{\perp}$.*

Corolario 1.11 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula fuertemente seudocomplementada. Si $a, b \in \mathcal{L}$ son tales que $a \leq b$, entonces $b^{\perp} \leq a^{\perp}$.*

Demostración. Como $a \leq b$, se tiene que $a \wedge b^{\perp} \leq b \wedge b^{\perp} = 0$, de donde $a \wedge b^{\perp} = 0$. Se sigue, de la Observación 1.10, que $b^{\perp} \leq a^{\perp}$. ■

Corolario 1.12 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula fuertemente seudocomplementada. Para cada $a \in \mathcal{L}$, se tiene que $a \leq a^{\perp\perp}$.*

Demostración. Como $a^{\perp} \wedge a = 0$, por la Observación 1.10, se tiene que $a \leq a^{\perp\perp}$. ■

Proposición 1.13 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula fuertemente seudocomplementada. Para cada $a \in \mathcal{L}$, se tiene que $a^{\perp\perp\perp} = a^{\perp}$.*

Demostración. Por el Corolario 1.12, tenemos que $a \leq a^{\perp\perp}$, y del Corolario 1.11, se sigue que $a^{\perp\perp\perp} \leq a^{\perp}$. Ahora, aplicando el Corolario 1.12 a $a^{\perp}$, tenemos que $a^{\perp} \leq (a^{\perp})^{\perp\perp} = a^{\perp\perp\perp}$. Así, $a^{\perp\perp\perp} = a^{\perp}$. ■

Definición 1.14 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula con 0. Decimos que un elemento $a \in \mathcal{L}$, no cero, es un **átomo** de $\mathcal{L}$ si para cualquier $b \in \mathcal{L}$ con $b < a$ se tiene que $b = 0$. Llamamos a $\mathcal{L}$ **retícula atómica** si para cada $a \in \mathcal{L}$, no cero, el intervalo $[0, a]$ contiene un átomo.*

A partir de este momento sólo consideraremos retículas completas.

Definición 1.15 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula. Para cada $a \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ definimos*

$$\mathcal{A}_a = \{b \in \mathcal{L} \mid b \leq a \text{ y } b \in Atom(\mathcal{L})\},$$

donde $Atom(\mathcal{L})$ denota al conjunto de átomos de $\mathcal{L}$.

Recordemos que una retícula $\mathcal{L}$ es llamada **retícula cocompacta** si para cualquier subconjunto $X \subseteq \mathcal{L}$ que satisface que $\bigwedge X = 0$, existe un subconjunto finito $F \subseteq X$ tal que $0 = \bigwedge F$.

Lema 1.16 *Si $\mathcal{L}$ es una retícula cocompacta, entonces $\mathcal{L}$ es una retícula atómica.*

Demostración. Sean $a \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ y $B = [0, a] \setminus \{0\}$. Si $\mathcal{C}$ es una cadena en B, afirmamos que $\bigwedge \mathcal{C} \neq 0$. En caso contrario, se tiene que $\bigwedge \mathcal{C} = 0$, pero $\mathcal{L}$ es cocompacta, por lo que existe un elemento c de la cadena $\mathcal{C}$ tal que $c = 0$, lo que contradice el hecho de que $\mathcal{C} \subseteq B$. Así, $\bigwedge \mathcal{C} \in B$. Finalmente, por el lema de Zorn (aplicado con el orden opuesto), tenemos que B tiene elementos mínimos. Es decir, $\mathcal{L}$ es atómica. ■

Corolario 1.17 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula cocompacta. Para cada $a \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ se tiene que $\mathcal{A}_a \neq \emptyset$*

Proposición 1.18 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula atómica y fuertemente seudocomplementada. Se tiene que $a^\perp = b^\perp$ si y sólo si $\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_b$.*

Demostración. Supongamos que $a^\perp = b^\perp$ y que existe $x \in \mathcal{A}_a$ tal que $x \notin \mathcal{A}_b$. Como $x \notin \mathcal{A}_b$, entonces $b \wedge x = 0$. Luego, por el Corolario 1.10, se cumple que $x \leq b^{\perp} = a^{\perp}$, pero $x \leq a$, así que $x = a \wedge a^{\perp} = 0$, lo que es un absurdo, pues $x \in Atom(\mathcal{L})$. Por lo tanto $\mathcal{A}_a \subseteq \mathcal{A}_b$. De manera simétrica se demuestra que $\mathcal{A}_b \subseteq \mathcal{A}_a$. Por lo tanto $\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_b$.

Supongamos ahora que $\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_b$. Mostraremos que $a^{\perp} \leq b^{\perp}$. Por el Corolario 1.10, basta ver que $b \wedge a^{\perp} = 0$. Supongamos que no es así, es decir, que $b \wedge a^{\perp} > 0$. Ahora, consideremos $x \in Atom(\mathcal{L})$ tal que $0 < x \leq b \wedge a^{\perp}$. Así, $0 < x \leq b, a^{\perp}$, de donde $x \in \mathcal{A}_b = \mathcal{A}_a$, luego $x \leq a$. Se sigue que $x \leq a \wedge a^{\perp} = 0$ lo que es un absurdo. Así, $b \wedge a^{\perp} = 0$ y de aquí que $a^{\perp} \leq b^{\perp}$. De forma simétrica se demuestra que $b^{\perp} \leq a^{\perp}$. ■

Como consecuencia del Lema 1.16 y de la proposición anterior, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.19 *Sean $\mathcal{L}$ una retícula cocompacta y fuertemente suplementada. Se tiene que $a^{\perp} = b^{\perp}$ si y sólo si $\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_b$.*

Definición 1.20 *Sean $\mathcal{L}$ una retícula fuertemente seudocomplementada y $a, b \in \mathcal{L}$. Decimos que a está relacionado con b, bajo la relación $\sim^{\perp}$, si $a^{\perp} = b^{\perp}$.*

Note que $\sim^{\perp}$ es una relación de equivalencia, así que denotaremos por $[a]_{\sim^{\perp}}$ la clase de equivalencia de a.

Definición 1.21 *Sean $\mathcal{L}$ una retícula y $a \in \mathcal{L}$. Decimos que a es* ***esencial*** *en $\mathcal{L}$ si $a \wedge b > 0$ para cada $b \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$. Escribimos $a \leq_e 1$ si a es un elemento esencial en $\mathcal{L}$.*

Proposición 1.22 *Si $\mathcal{L}$ es una retícula fuertemente seudocomplementada, entonces*

$$[1]_{\sim^{\perp}} = \{\ a \in \mathcal{L} \mid a \leq_e 1\ \}.$$

Demostración. Si $a \in [1]_{\sim^\perp}$, entonces $a^\perp = 1^\perp = 0$. Ahora, si $b \in \mathcal{L}$ cumple que $a \wedge b = 0$, por la Observación 1.10, $b \leq a^\perp$. De aquí que $b = 0$, es decir, $a \leq_e 1$.

Ahora, sea $a \in \mathcal{L}$ un elemento esencial. Como $a \wedge a^\perp = 0$, se sigue que $a^\perp = 0$ y de aquí que $a \in [1]_{\sim^\perp}$. ■

Recordemos que en una retícula $\mathcal{L}$, el supremo de todos los átomos es el **zoclo de $\mathcal{L}$** y se denota $\boldsymbol{Zoc(\mathcal{L})}$.

Observación 1.23 *En una retícula atómica $\mathcal{L}$ se cumple que $Zoc(\mathcal{L}) \leq_e 1$.*

Proposición 1.24 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula distributiva, seudocomplementada y atómica con un número finito de átomos. Entonces*

$$[1]_{\sim^\perp} = [Zoc(\mathcal{L}), 1].$$

Demostración. Por la Observación 1.23, basta demostrar que $Zoc(\mathcal{L})$ es el menor elemento esencial de $\mathcal{L}$. Sean $b \in \mathcal{L}$ un elemento esencial y $\{a_1, \ldots, a_n\}$ el conjunto de átomos de $\mathcal{L}$. Se tiene que

$$b \wedge Zoc(\mathcal{L}) = b \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i \right) = \bigvee_{i=1}^{n} (b \wedge a_i) = \bigvee_{i=1}^{n} a_i = Zoc(\mathcal{L}),$$

de donde $Zoc(\mathcal{L}) \leq b$. ■

Lema 1.25 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula distributiva y seudocomplementada. Para $a \in \mathcal{L}$, se tiene que $a^{\perp\perp}$ es el mayor elemento de $[a]_{\sim^\perp}$.*

Demostración. Por el Lema 1.13, $a^{\perp\perp\perp} = a^\perp$, así $a^{\perp\perp} \in [a]_{\sim^\perp}$. Ahora, si $b \in [a]_{\sim^\perp}$, se tiene que $b^\perp = a^\perp$, luego $a^{\perp\perp} = b^{\perp\perp}$ y por el Corolario 1.12, $b \leq a^{\perp\perp}$. ■

Definición 1.26 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula distributiva y seudocomplementada. Para cada $a \in \mathcal{L}$, definimos* $\boldsymbol{Zoc_a}$ *por*

$$Zoc_a = Zoc([0, a^{\perp\perp}]).$$

Teorema 1.27 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula distributiva, seudocomplementada y atómica con un número finito de átomos. Para cada $a \in \mathcal{L}$, se tiene que*

$$[a]_{\sim^\perp} = [Zoc_a, a^{\perp\perp}]. \tag{1.1}$$

Demostración. Si $b \in [a]_{\sim^\perp}$, entonces $a^\perp = b^\perp$ y también $a^{\perp\perp\perp} = b^{\perp\perp\perp}$. Luego, por el Lema 1.18, $\mathcal{A}_{a^{\perp\perp}} = \mathcal{A}_{b^{\perp\perp}}$ y de aquí que $Zoc_a = Zoc_b$. Ahora, como $b^\perp = b^{\perp\perp\perp}$, se tiene que $\mathcal{A}_b = \mathcal{A}_{b^{\perp\perp}}$, de donde $Zoc_a = Zoc_b \leq b$. Por lo tanto $b \in [Zoc_a, a^{\perp\perp}]$.
Para la otra contención basta ver que $Zoc_a \in [a]_{\sim^\perp}$, es decir, que $(Zoc_a)^\perp = a^\perp$ o de manera equivalente, que $\mathcal{A}_{Zoc_a} = \mathcal{A}_a$. Sin embargo, $\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_{a^{\perp\perp}}$, así que de la definición de Zoc_a se sigue que $\mathcal{A}_{Zoc_a} = \mathcal{A}_a$. ∎

Usando la descripción (1.1) de las clases de equivalencia obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.28 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula distributiva, seudocomplementada y atómica con un número finito de átomos. Para cada $a \in \mathcal{L}$, tenemos la siguiente función*

$$a^{\perp\perp} \wedge \_ : [1]_{\sim^\perp} \longrightarrow [a]_{\sim^\perp}.$$

Demostración. Sea $b \in [1]_{\sim^\perp}$. Como $b \leq_e 1$, se tiene que $Zoc_a \leq Zoc(\mathcal{L}) \leq b$, de donde $Zoc_a \leq b$. Luego,

$$Zoc_a = a^{\perp\perp} \wedge Zoc_a \leq a^{\perp\perp} \wedge b \leq a^{\perp\perp}.$$

Por lo tanto $a^{\perp\perp} \wedge b \in [a]_{\sim^{\perp}}$. ■

Teorema 1.29 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula distributiva y atómica con un número finito de átomos. Entonces, la función definida en Proposición 1.28 es suprayectiva.*

Demostración. Para demostrar la suprayectividad de $a^{\perp\perp}\wedge\_$ exhibiremos un inverso por la derecha. Por el Corolario 1.24, $Zoc(\mathcal{L})$ es el elemento menor de $[1]_{\sim^{\perp}}$, así, afirmamos que la función

$$Zoc(\mathcal{L})\vee\_ : [a]_{\sim^{\perp}} \longrightarrow [1]_{\sim^{\perp}}$$

es un inverso por la derecha de $a^{\perp\perp}\wedge\_$. Sean $b \in [a]_{\sim^{\perp}}$ y $\{a_1, \ldots, a_n\}$ el conjunto de átomos, se tiene que

$$\begin{aligned}
a^{\perp\perp} \wedge (Zoc(\mathcal{L}) \vee b) &= \big(a^{\perp\perp} \wedge Zoc(\mathcal{L})\big) \vee \big(a^{\perp\perp} \wedge b\big) \\
&= \big(a^{\perp\perp} \wedge Zoc(\mathcal{L})\big) \vee b \\
&= \left(a^{\perp\perp} \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i\right)\right) \vee b \\
&= \left(\bigvee_{i=1}^{n} \big(a^{\perp\perp} \wedge a_i\big)\right) \vee b \\
&= Zoc_a \vee b \\
&= b.
\end{aligned}$$

■

Lema 1.30 *Si $\mathcal{L}$ es una retícula distributiva y neteriana, entonces hay un número finito de átomos.*

Demostración. Note que si $Atom(\mathcal{L}) = \emptyset$ claramente se cumple la afirmación. Supongamos entonces que $Atom(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.7, tenemos que todo elemento de la retícula es finitamente generado. Así, $Zoc(\mathcal{L})$ es un supremo de una familia finita de átomos, digamos $Zoc(\mathcal{L}) = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$. Ahora, si $b \in Atom(\mathcal{L}) \setminus \{a_1, ..., a_n\}$, entonces

$$b = b \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i \right) = \bigvee_{i=1}^{n} (b \wedge a_i) = 0,$$

lo que es un absurdo, por lo tanto $Atom(\mathcal{L}) = \{a_1, ..., a_n\}$. ■

Corolario 1.31 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula distributiva, neteriana y atómica. Entonces, la función definida en Proposición 1.28 es suprayectiva.*

El siguiente resultado es, en cierto sentido, la versión dual de [21, Teorema 3.10].

Teorema 1.32 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula distributiva y atómica. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\mathcal{L}$ es neteriana

(2) $\mathcal{L}$ es seudocomplementada, satisface condición de cadena ascendente tanto para elementos esenciales como para seudocomplementos y tiene un número finito de átomos.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Se sigue de la Proposición 1.8, de la definición de retícula neteriana y del Lema 1.30.

(2) $\Rightarrow$ (1) Afirmamos que cualquier clase de equivalencia es una retícula neteriana. Sea $a \in \mathcal{L}$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots$ una cadena ascendente en $[a]_{\sim^{\perp}}$. Se

sigue que $Zoc(\mathcal{L}) \vee b_1 \leq Zoc(\mathcal{L}) \vee b_2 \leq \cdots$ es una cadena ascendente en $[1]_{\sim^\perp}$. Pero, por la Proposición 1.24 y por hipótesis, $[1]_{\sim^\perp}$ es una retícula neteriana, por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq N$ se tiene que $Zoc(\mathcal{L}) \vee b_n = Zoc(\mathcal{L}) \vee b_N$. Ahora, por el Teorema 1.29, tenemos que

$$b_n = a^{\perp\perp} \wedge (Zoc(\mathcal{L}) \vee b_n) = a^{\perp\perp} \wedge (Zoc(\mathcal{L}) \vee b_N) = b_N,$$

para todo $n \geq N$. Así, $[a]_{\sim^\perp}$ es una retícula neteriana.

Veamos ahora que $\mathcal{L}$ es neteriana, para ello consideremos $b_1 \leq b_2 \leq \cdots$ una cadena ascendente en $\mathcal{L}$. Por la Proposición 1.11, tenemos que $b_1^{\perp\perp} \leq b_2^{\perp\perp} \leq \cdots$ es una cadena ascendente de seudocomplementos, así que, por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_n^{\perp\perp} = b_N^{\perp\perp}$ para todo $n \geq N$. Luego, del Teorema 1.27, se tiene que $b_n \in [b_N]_{\sim^\perp}$ para cada $n \geq N$, pero $[b_N]_{\sim^\perp}$ es una retícula neteriana, por lo que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots$ se estaciona, es decir, $\mathcal{L}$ es neteriana. ∎

1.3. La retícula R-tors.

El estudio de las retículas ha desempeñado un papel destacado en el Álgebra, en particular en la teoría de módulos y anillos. Dado un anillo, se pueden estudiar algunas retículas de clases de módulos para obtener información acerca de la estructura interna del anillo o de su categoría de módulos. Por ejemplo, un anillo R es semiartiniano izquierdo si y sólo si la retícula formada por las clases de módulos cerradas bajo tomar submódulos, cocientes, extensiones y sumas directas es una retícula booleana (distributiva y complementada). La retícula que acabamos de mencionar es precisamente la retícula que nos interesa en esta sección, por ello proporcionamos un breve resumen acerca de la misma.

Definición 1.33 *Una **teoría de torsión** τ es una pareja de clases de módulos $\tau = (\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$ que satisface las siguientes condiciones:*

(1) $\mathrm{Hom}(T, F) = 0$, *para cualesquiera* $T \in \mathbb{T}_\tau$ *y* $F \in \mathbb{F}_\tau$.

(2) Si $\mathrm{Hom}(T, F) = 0$ *para todo* $F \in \mathbb{F}_\tau$, *entonces* $T \in \mathbb{T}_\tau$.

(3) Si $\mathrm{Hom}(T, F) = 0$ *para todo* $T \in \mathbb{T}_\tau$, *entonces* $F \in \mathbb{F}_\tau$.

Definición 1.34 *Una clase de módulos $\mathbb{T}$ es una **clase de torsión** si es cerrada bajo cocientes, extensiones y sumas directas. Una clase de módulos $\mathbb{F}$ es una **clase libre de torsión** si es cerrada bajo submódulos, productos directos y extensiones.*

Observación 1.35 *Dada una teoría de torsión $\tau = (\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$, se tiene que la clase $\mathbb{T}_\tau$ ($\mathbb{F}_\tau$) es una clase de torsión (libre de torsión) y, recíprocamente, si $\mathcal{C}$*

es una clase de torsión (libre de torsión), entonces existe una única teoría de torsión $\tau_{\mathcal{C}}$ *tal que* $\mathbb{T}_{\tau_{\mathcal{C}}} = \mathcal{C}$ ($\mathbb{F}_{\tau_{\mathcal{C}}} = \mathcal{C}$)*. De esta manera, una teoría de torsión queda totalmente determinada por la clase de torsión (libre de torsión) que define, vea [15].*

Es fácil ver que, dadas dos teorías de torsión $\tau = (\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$ y $\mu = (\mathbb{T}_\mu, \mathbb{F}_\mu)$, se cumple que $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{T}_\mu$ si y sólo si $\mathbb{F}_\mu \subseteq \mathbb{F}_\tau$.

Definición 1.36 *Sean* $\tau = (\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$ *y* $\mu = (\mathbb{T}_\mu, \mathbb{F}_\mu)$ *dos teorías de torsión. Escribimos* $\tau \leq \mu$ *si* $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{T}_\mu$.

Si denotamos ***R*-TORS** la colección de todas las teorías de torsión, se tiene que la relación "$\leq$" define un orden parcial en R-TORS.

Definición 1.37 *Sea* $\{\tau_i = (\mathbb{T}_{\tau_i}, \mathbb{F}_{\tau_i})\}_{i \in I}$ *una familia de teorías de torsión. Definimos la teoría de torsión* $\bigwedge_{i \in I} \tau_i$ *como la teoría de torsión cuya clase de torsión es* $\bigcap_{i \in I} \mathbb{T}_{\tau_i}$ *y la teoría de torsión* $\bigvee_{i \in I} \tau_i$*, como la teoría de torsión cuya clase libre de torsión es* $\bigcap_{i \in I} \mathbb{F}_{\tau_i}$.

Con el orden parcial de la Definición 1.36 y las operaciones de la Definición 1.37, R-TORS es una (gran[1]) retícula.

Definición 1.38 *Una teoría de torsión* $\tau = (\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$ *es una* ***teoría de torsión hereditaria*** *si* $\mathbb{T}_\tau$ *es una clase hereditaria.*

[1]Cuando a una clase propia se le puede dotar de una estructura de retícula se le llama *gran retícula*.

La colección de todas las teorías de torsión hereditarias resulta ser un conjunto. Así, si denotamos ***R*-tors** dicho conjunto, entonces R-tors es una subretícula de R-TORS y por tanto una retícula.

Es importante comentar que, debido a la Observación 1.35, es común referirse a la gran retícula de clases de torsión y a la retícula de clases de torsión hereditarias por R-TORS y R-tors, respectivamente.

En [15], se demuestra que R-tors es una retícula distributiva y atómica, más aún, que los átomos son generados por los módulos simples; también se demuestra que R-tors es fuertemente seudocomplementada y que si $\tau \in R$-tors, entonces $\tau^{\perp}$ es la teoría de torsión cogenerada por los módulos simples de τ-torsión. Note que entonces estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.32 a la retícula R-tors, pero antes, recordemos que $Zoc(R\text{-tors})$ es denotado por τ_D (conocida como la teoría de torsión de Dickson) y que χ denota el elemento mayor de R-tors.

Corolario 1.39 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo* R *:*

(1) R-tors es una retícula neteriana

(2) $[\tau_D, \chi]$ es una retícula neteriana y R-Simp es finito.

Capítulo 2

Anillos fuertemente mod-retráctiles

El concepto de *módulo retráctil* fue introducido por Khuri en [16], después Echevit y Koşan introdujeron el concepto de *anillo mod-retráctil* en [12]. En este capítulo definimos una clase especial de estos módulos y de estos anillos, los *módulos fuertemente retráctiles* y los *anillos fuertemente mod-retráctiles.* Además, caracterizamos a los *anillos fuertemente mod-retráctiles* a través de retículas de clases de módulos, entre otras cosas.

2.1. Anillos mod-retráctiles

Definición 2.1 *Un módulo M es* ***retráctil*** *si para cualquier submódulo no cero N de M, se tiene que* $\mathrm{Hom}(M,N) \neq 0$*. Un anillo R es* ***mod-retráctil izquierdo*** *(o simplemente* ***mod-retráctil****, si no hay riesgo de ambigüedad) si cada R-módulo es retráctil.*

Definición 2.2 *Un módulo M es un **módulo parainyectivo** si para cualquier módulo N y cualquier monomorfismo $f \in \mathrm{Hom}(M, N)$ existe un epimorfismo $g \in \mathrm{Hom}(N, M)$. M es un **módulo paraproyectivo** si para cualquier módulo N y cualquier epimorfismo $f \in \mathrm{Hom}(N, M)$ existe un monomorfismo $g \in \mathrm{Hom}(M, N)$.*

Recordemos que un anillo R es **semiartiniano izquierdo** si todo R-módulo, no cero, contiene un submódulo simple. Dualmente, un anillo R es **max izquierdo** si todo R-módulo, no cero, tiene un cociente simple.

Proposición 2.3 *Para un anillo R se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(1) Si cada R-módulo simple es paraproyectivo, entonces R es un anillo semiartiniano izquierdo.

(2) Si cada R-módulo simple es parainyectivo, entonces R es un anillo max izquierdo.

(3) Si R es mod-retráctil, entonces cada R-módulo simple es parainyectivo.

Demostración.

(1) Sean M un R-módulo no cero y $m \in M$ un elemento no cero. Se tiene que existe $S \in R$-Simp de tal manera que S es un cociente de Rm. Ahora, por hipótesis, S se sumerge en Rm y por lo tanto en M. Así R es un anillo semiartiniano izquierdo.

(2) Sean M un R-módulo no cero, $m \in M$ un elemento no cero y S un R módulo simple que es cociente de Rm. Componiendo el cociente anterior con la inclusión de S en su cápsula inyectiva, tenemos un morfismo de

Rm a $E(S)$. Dicho morfismo se extiende a un morfismo no cero $f : M \to E(S)$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[drr, dashed] & & \\ Rx \arrow[u, tail] \arrow[r, two heads] & S \arrow[r, tail] & E(S) \end{tikzcd}$$

Ahora, como S es un submódulo esencial de $E(S)$, se sigue que S se sumerge en $f(M)$. Luego, por ser S parainyectivo, se tiene que S es un cociente de $f(M)$ y por lo tanto un cociente de M. Esto es, R es un anillo max izquierdo.

(3) Por hipótesis, si un módulo simple S se sumerge en un módulo M, existe un morfismo no cero de M a S, que por ser S simple, resulta un epimorfismo. Así, S es un módulo parainyectivo.

$\blacksquare$

Definición 2.4 *Decimos que un anilo R satisface* ***la condición (HH)*** *si*

$$\mathrm{Hom}(M, N) \neq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}(N, M) \neq 0,$$

para cualesquiera R-módulos M, N, no cero.

Observación 2.5 *Si R es un anillo que satisface la condición (HH), entonces todos los módulos simples son parainyectivos y paraproyectivos y todos los módulos no cero son retráctiles.*

Observación 2.6 *Si R es un anillo que satisface la condición (HH), entonces R es un anillo semiartiniano izquierdo, max izquierdo y mod-retráctil.*

En [17] Koşan y Žemlička caracterizan a los anillos mod-retráctiles de la siguiente manera.

Teorema 2.7 *Un anillo R es mod-retráctil izquierdo si y sólo si*

$$R\text{-}TORS \subseteq R\text{-}tors.$$

Nosotros tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.8 *Si R satisface la condición (HH), entonces*

$$R\text{-}TORS \subseteq R\text{-}tors.$$

En [4], Alvarado, Rincón y Ríos estudiaron, entre otras cosas, los seudocomplementos en la gran retícula de clases cohereditarias en R-Mod (R-quot). Dichos seudocomplemetos se llaman **clases conaturales**. Las clases conaturales forman una retícula, que se denota ***R*-conat**.

Definición 2.9 *Sea $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod. La clase $\mathcal{C}$ satisface* ***la condición (CN)*** *si:*

$$\begin{pmatrix} \text{para todo } M \twoheadrightarrow L \neq 0, \text{ existen } C \in \mathcal{C}, \\ 0 \neq N \in R\text{-Mod tales que } L \twoheadrightarrow N \twoheadleftarrow C \end{pmatrix} \Longrightarrow M \in \mathcal{C}$$

En [4, Teorema 23] se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 2.10 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una clase de módulos $\mathcal{C}$:*

(1) $\mathcal{C} \in R$-conat.

(2) $\mathcal{C}$ satisface la condicicón (CN).

(3) $\mathcal{C} \in R$*-quot y* $\mathcal{C} = \left(\mathcal{C}^{\perp_{R\text{-}quot}}\right)^{\perp_{R\text{-}quot}}$*, donde* $\mathcal{C}^{\perp_{R\text{-}quot}}$ *denota el seudocomplemento de* $\mathcal{C}$ *en R-quot.*

El siguiente teorema relaciona la condición *(HH)* con la retícula de clases conaturales.

Teorema 2.11 *Si R es un anillo que satisface la condición* (HH)*, entonces*

$$R\text{-}TORS \subseteq R\text{-}conat.$$

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una clase de torsión. Sabemos que existe una clase de módulos $\mathbb{F}_{\mathcal{C}}$ de tal manera que la pareja $(\mathcal{C}, \mathbb{F}_{\mathcal{C}})$ es una teoría de torsión. Ahora, sea $\tau_{\mathcal{C}}$ el prerradical asociado a la teoría de torsión $(\mathcal{C}, \mathbb{F}_{\mathcal{C}})$. Mostraremos que $\mathcal{C}$ satisface la condición *(CN)* y para ello consideraremos un módulo M tal que para cualquier cociente no cero L de M existen $0 \neq N \in R$-Mod y $C \in \mathcal{C}$ tales que $L \twoheadrightarrow N \twoheadleftarrow C$. Note que en este caso por ser $\mathcal{C}$ una clase de torsión, en particular cerrada bajo cocientes, podemos suponer simplemente que existe $0 \neq N \in \mathcal{C}$ tal que N es cociente de L.

Observe que si $M \notin \mathcal{C}$, entonces $M/\tau_{\mathcal{C}}(M)$ es un módulo no cero libre de $\tau_{\mathcal{C}}$-torsión. Ahora, por hipótesis, tenemos que existe $0 \neq N \in \mathcal{C}$ y un epimorfismo $f : M/\tau_{\mathcal{C}}(M) \twoheadrightarrow N$. Luego, como R satisface la condición *(HH)*, se tiene que existe un morfismo no cero $g \in Hom(N, M/\tau_{\mathcal{C}}(M))$, de donde $g(N) = g(\tau_{\mathcal{C}}(N)) \subseteq \tau_{\mathcal{C}}(M/\tau_{\mathcal{C}}(M)) = 0$, es decir, $g(N) = 0$, lo que contradice el hecho de que g es un morfismo no cero. Así, $M \in \mathcal{C}$ y por lo tanto $\mathcal{C}$ satisface la condición *(CN)*. Luego, por el Teorema 2.10, $\mathcal{C}$ es una clase conatural. ■

El siguiente resultado puede consultarse en [1, Proposición 2.11]

Teorema 2.12 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R :*

(1) Todo módulo simple es parainyectivo.

(2) Toda clase conatural es una clase de torsión hereditaria.

(3) Toda clase conatural es una clase hereditaria.

Teorema 2.13 *Si R es un anillo que satisface la condición (HH), entonces*

$$R\text{-}TORS = R\text{-}conat = R\text{-}tors.$$

Demostración. Este resultado se sigue del Teorema 2.11, de la Observación 2.5, del Teorema 2.12 y del hecho de que R-tors $\subseteq$ R-TORS. ■

Definición 2.14 *Decimos que un anillo R es un* ***anillo BKN*** *si para cada par de R-módulos M y N, no cero, se tiene que*

$$\mathrm{Hom}(M, N) \neq 0.$$

Recordemos que un anillo R es llamado **anillo local izquierdo** si sólo hay un tipo de R-módulo simple.

Lema 2.15 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R.*

(1) R es un anillo BKN.

(2) R satisface la condición (HH) y es un anillo local izquierdo.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Es claro que se cumple la condición (HH). Ahora, si S_1 y S_2 son dos módulos simples, por hipótesis, se tiene que $Hom(S_1, S_2) \neq 0$, así que hay un morfismo no cero entre S_1 y S_2 que necesariamente resulta un isomorfismo. Así, R es un anillo local izquierdo.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sean M, N dos R-módulos no cero. Por la Observación 2.6 R es un anillo max izquierdo y semiartiniano izquierdo, por lo que existen módulos simples S y T tales que S es un cociente de M y T un submódulo de N. Ahora, como R es un anillo local izquierdo, entonces $S \cong T$. Luego, la composición

$$M \twoheadrightarrow S \cong T \rightarrowtail N$$

es un morfismo no cero de M a N. Así, R es un anillo BKN. ■

Una clase de R-módulos es llamada **clase natural** si es cerrada bajo tomar submódulos, sumas directas y cápsulas inyectivas. La clases naturales y la retícula que éstas forman (que denotamos por ***R*-nat**) son estudiadas con detalle por Dauns y Zhou en [13].

Para continuar es necesario recordar que, dado un módulo M, $\xi_{nat}(M)$ denota la clase natural generada por M, mientras que $\xi_{conat}(M)$ denota la clase conatural generada por M. Además, en [13] y en [19] se demuestra que

$$\begin{aligned}\xi_{nat}(M) = \{N \in R\text{-Mod} \mid & \text{ cualquier submódulo no cero de } N \\ & \text{comparte un submódulo no cero con } M\}\end{aligned} \tag{2.1}$$

y que

$$\begin{aligned}\xi_{conat}(M) = \{N \in R\text{-Mod} \mid & \text{ cualquier cociente no cero de } N \\ & \text{comparte un cociente no cero con } M\},\end{aligned} \tag{2.2}$$

respectivamente.

Teorema 2.16 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo* R :

(1) R *satisface la condición* (HH).

(2) R *es un anillo mod-retráctil y todo módulo simple es paraproyectivo.*

(3) Todo módulo simple es parainyectivo y paraproyectivo.

(4) R*-nat* $=$ R*-conat.*

(5) R*-nat* $=$ R*-conat* $=$ R*-tors.*

(6) $R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ *donde cada* R_i *es un anillo* BKN.

(7) $R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ *donde cada* R_i *es un anillo local izquierdo y perfecto izquierdo y derecho.*

(8) $R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ *donde cada* R_i *es un anillo completo de matrices sobre un anillo perfecto por ambos lados y local.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Se sigue de las Observaciones 2.5 y 2.6.
(2) $\Rightarrow$ (3) Se sigue de la Proposición 2.3.
(3) $\Rightarrow$ (1) Sean $M, N \in R$-Mod y $0 \neq f \in \mathrm{Hom}(M, N)$. Por la Proposición 2.3, R es un anillo semiartiniano izquierdo, por lo que existe un módulo simple S tal que $S \leq Im(f)$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ f^{-1}(S) \arrow[u, hook, "\iota_1"] \arrow[r, "f\lceil"] & S \arrow[u, hook, "\iota_2"'] \end{tikzcd}$$

Como S es paraproyectivo, existe un monomorfismo $g : S \longrightarrow f^{-1}(S)$. Por otro lado, como S se sumerge en N y S es parainyectivo, entonces existe un epimorfismo $h : N \longrightarrow S$. Así, $\iota_1 \circ g \circ h : N \longrightarrow M$ es un homomorfismo no cero de N a M.

(3) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7) $\Leftrightarrow$ (8) Se siguen de [2, Teorema 4.7].

(4) $\Rightarrow$ (3) Note que si las retículas R-nat y R-conat coinciden, entonces, dado un módulo arbitrario M, la clase natural generada por M es la misma clase que la clase conatural generada por M. Así, si S es un submódulo simple de M, entonces $S \in \xi_{nat}(M) = \xi_{conat}(M)$. Luego, por la descripción dada en (2.2), se tiene que S es un cociente de M. Es decir, S es un módulo parainyectivo. De manera simétrica, si S es un cociente simple de un módulo M, entonces S pertenece a la clase $\xi_{conat}(M)$ y por lo tanto a la clase $\xi_{nat}(M)$, así que, por la descripción (2.1), S se sumerge en M. Esto es, S un módulo paraproyectivo.

(5) $\Rightarrow$ (4) Es clara. ■

2.2. Anillos fuertemente mod-retráctiles

Definición 2.17 *Sean M y N dos R-módulos. Escribimos* $\boldsymbol{M}$ **Ret** $\boldsymbol{N}$ *si para cada submódulo no cero M' de M y para cada cociente no cero N' de N se tiene que* $\mathrm{Hom}(N', M') \neq 0$.

En el siguiente diagrama se muestra la situación de la definición anterior.

$$\begin{tikzcd} M & N \arrow[d, two heads, "\forall"] \\ M' \arrow[u, hook, "\forall"] & N' \arrow[l, dashed, "\exists\neq 0"'] \end{tikzcd}$$

Definición 2.18 *Decimos que un módulo M es* ***fuertemente retráctil*** *si $M \operatorname{Ret} M$ y que un anillo R es* ***fuertemente mod-retráctil*** *si cada R-módulo es fuertemente retráctil.*

Observación 2.19 *Note que si M es un módulo fuertemente retráctil y M' es cualquier submódulo no cero de M, entonces se tiene la siguiente situación*

$$\begin{tikzcd} M & M \arrow[d, equal] \\ M' \arrow[u, hook, "\forall"] & M \arrow[l, dashed, "\exists \neq 0"'] \end{tikzcd}$$

con lo que, $Hom(M, M') \neq 0$, es decir, M es retráctil. De lo anterior se sigue que si R es un anillo fuertemente mod-retráctil entonces R es un anillo mod-retráctil.

El siguiente ejemplo muestra que los conceptos de anillo mod-retráctil y anillo fuertemente mod-retráctil son, en general, distintos, es decir, que no todo anillo mod-retráctil es fuertemente mod-retráctil.

Ejemplo 2.20 *Sean p, q dos números primos distintos, n, m dos números naturales mayores que 1 y $R = \mathbb{Z}_{p^n} \times \mathbb{Z}_{q^m}$. Por el Teorema 2.16(7), se tiene que R es un anillo retráctil. Ahora, note que $\mathbb{Z}_{p^n}$ se sumerge en R y que $\mathbb{Z}_{q^m}$ es un cociente de R, pero $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_{q^m}, \mathbb{Z}_{p^n}) = 0$, con lo que R no es un anillo fuertemente mod-retráctil.*

Definición 2.21 *Para cualesquiera módulos M, N definimos las clases de módulos $\mathbf{Ret}(\boldsymbol{M})$ y $\mathbf{Ret}^{-1}(\boldsymbol{N})$ como sigue:*

$$\operatorname{Ret}(M) = \{N \mid M \operatorname{Ret} N\} \quad y \quad \operatorname{Ret}^{-1}(N) = \{M \mid M \operatorname{Ret} N\}.$$

Enseguida estudiamos las clases de módulos anteriormente definidas.

Proposición 2.22 *Para cada* $M \in R$*-Mod se tiene que* $\mathrm{Ret}(M)$ *es una clase conatural.*

Demostración. Para mostrar que $\mathrm{Ret}(M)$ es una clase conatural, mostraremos que $\mathrm{Ret}(M)$ satisface la condición (CN). Supongamos entonces que N es un módulo tal que para cada uno de sus cocientes no cero N' existe un módulo no cero K y un módulo $N'' \in \mathrm{Ret}(M)$ de tal manera que K es un cociente tanto de N' como de N''. En esta situación, dado que $N'' \in \mathrm{Ret}(M)$ se sigue que $\mathrm{Hom}(K, M') \neq 0$ para cualquier submódulo no cero M' de M. Luego, $\mathrm{Hom}(N', M') \neq 0$. Esto es, $N \in \mathrm{Ret}(M)$. Concluimos que $\mathrm{Ret}(M)$ es una clase conatural. ■

Corolario 2.23 *Para una clase de módulos* $\mathcal{A}$ *se tiene que*

$$\mathrm{Ret}(\mathcal{A}) = \{N \in R\text{-}Mod \mid M \,\mathrm{Ret}\, N \text{ para todo } M \in \mathcal{A} \}$$

es una clase conatural.

Proposición 2.24 *Para cada* $N \in R$*-Mod se tiene que* $\mathrm{Ret}^{-1}(N)$ *es una clase natural.*

Demostración. Para ver que $\mathrm{Ret}^{-1}(N)$ es una clase natural mostraremos que es una clase cerrada bajo tomar submódulos, sumas directas y cápsulas inyectivas.

$\mathrm{Ret}^{-1}(N) \in \mathcal{L}_{\leq}$: Sean $M \in \mathrm{Ret}^{-1}(N)$ y M' un submódulo de M. Note que si M'' es un submódulo no cero de M', entonces también es un submódulo de M, así que $\mathrm{Hom}(N', M'') \neq 0$ para cualquier cociente no cero N' de N.

Por lo tanto, $M' \in \mathrm{Ret}^{-1}(N)$, es decir, $\mathrm{Ret}^{-1}(N)$ es una clase cerrada bajo tomar submódulos.

Para mostrar que $\mathrm{Ret}^{-1}(N)$ es una clase cerrada bajo tomar sumas directas, mostraremos antes que es una clase cerrada bajo extensiones. Para ello consideremos una sucesión exacta corta con $A, C \in \mathrm{Ret}^{-1}(N)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, tail, "f"] & B \arrow[r, two heads, "g"] & C \arrow[r] & 0 \\ & & B' \arrow[u, hook] & & \end{tikzcd}$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que f es una inclusión. Luego, sean B' un submódulo no cero de B y N' un cociente no cero de N. Note que, si $B' \cap A \neq 0$, entonces existe un morfismo no cero $h : N' \longrightarrow B' \cap A$ que se puede extender a un morfismo de N' a B', pues $A \in \mathrm{Ret}^{-1}(N)$. Ahora, si $B' \cap A = 0$, entonces B' se sumerge en C. Dado que $C \in \mathrm{Ret}^{-1}(N)$ se tiene que existe un morfismo de N' a B'. En cualquier caso, $Hom(N', B') \neq 0$. Así, $\mathrm{Ret}^{-1}(N)$ es una clase cerrada bajo extensiones y como consecuencia de este hecho, $\mathrm{Ret}^{-1}(N)$ es una clase cerrada bajo tomar sumas directas finitas.

$\mathrm{Ret}^{-1}(N) \in \mathcal{L}_{\oplus}$: Sean $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de módulos en $\mathrm{Ret}^{-1}(N)$, U un submódulo no cero de $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ y N' un cociente no cero de N. Note que si $0 \neq x \in U$, entonces $x = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_n}$, donde $0 \neq m_{i_j} \in M_{i_j}$, para cada $j \in \{i, \ldots, n\}$. Como $\mathrm{Ret}^{-1}(N)$ es una clase cerrada bajo tomar sumas directas finitas, se tiene que $\bigoplus\limits_{j=1}^{n} M_{i_j} \in \mathrm{Ret}^{-1} N$, por lo que existe un morfismo no cero $h : N' \longrightarrow Rx$ que se extiende a un morfismo de N' en U, es decir $Hom(N', U) \neq 0$. Esto es, $\mathrm{Ret}^{-1}(N)$ es una clase cerrada bajo tomar sumas directas.

$\mathrm{Ret}^{-1}(N) \in \mathcal{L}_{E(\ )}$: Sean $M \in \mathrm{Ret}^{-1}(N)$ y H un submódulo no cero de $E(M)$. Como $M \leq_e E(M)$, se tiene que $H \cap M \neq 0$. Así, para cualquier cociente no cero N' de N se tiene que $\mathrm{Hom}(N', H \cap M) \neq 0$. De aquí que $\mathrm{Hom}(N', H) \neq 0$, con lo que $E(M) \in \mathrm{Ret}^{-1}(N)$. ■

Corolario 2.25 *Para una clase de módulos $\mathcal{A}$ se tiene que*

$$\mathrm{Ret}^{-1}(\mathcal{A}) = \{M \in R\text{-}Mod \mid M \,\mathrm{Ret}\, N \text{ para todo } N \in \mathcal{A}\ \}$$

es una clase natural.

Observación 2.26 *Note que para cualesquiera clases de módulos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ que satisfacen que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, se tiene que*

$$\mathrm{Ret}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{Ret}(\mathcal{A}) \qquad y \qquad \mathrm{Ret}^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{Ret}^{-1}(\mathcal{A}).$$

Lema 2.27 *Para una clase de módulos $\mathcal{A}$ se tiene que*

$$\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Ret}(\mathrm{Ret}^{-1}(\mathcal{A})) \qquad y \qquad \mathcal{A} \subseteq \mathrm{Ret}^{-1}(\mathrm{Ret}(\mathcal{A})).$$

Demostración. Es suficiente notar que

$$\mathrm{Ret}^{-1}(\mathrm{Ret}(\mathcal{A})) = \{M \mid M \,\mathrm{Ret}\, N \text{ para todo } N \text{ tq } K \,\mathrm{Ret}\, N \text{ para todo } K \in \mathcal{A}\}$$

y que

$$\mathrm{Ret}(\mathrm{Ret}^{-1}(\mathcal{A})) = \{N \mid M \,\mathrm{Ret}\, N \text{ para todo } M \text{ tq } M \,\mathrm{Ret}\, K \text{ para todo } K \in \mathcal{A}\}.$$

■

Antes de continuar recordemos que un **operador de cerradura** en una retícula $\mathcal{L}$ es una función $\phi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ que satisface las siguientes condiciones:

(1) Para cualesquiera $x, y \in \mathcal{L}$, con $x \leq y$, se tiene que $\phi(x) \leq \phi(y)$.

(2) Para cualquier $x \in \mathcal{L}$ se tiene que $x \leq \phi(x)$.

(3) Para cualquier $x \in \mathcal{L}$ se cumple que $\phi\phi(x) = \phi(x)$

Un elemento $x \in \mathcal{L}$ es un cerrado bajo ϕ si $\phi(x) = x$.

Ahora, si denotamos por $\mathcal{P}(R\text{-Mod})$ a la gran retícula de clases de R-módulos, tenemos como consecuencia de la Observación 2.26 y del Lema 2.27 el siguiente corolario.

Corolario 2.28 *Las correspondencias* $\operatorname{Ret}\operatorname{Ret}^{-1} : \mathcal{P}(R\text{-}Mod) \to \mathcal{P}(R\text{-}Mod)$ *y* $\operatorname{Ret}^{-1}\operatorname{Ret} : \mathcal{P}(R\text{-}Mod) \to \mathcal{P}(R\text{-}Mod)$ *son operadores de cerradura en* $\mathcal{P}(R\text{-}Mod)$.

Una **conexión de Galois (antítona)** entre dos retículas completas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ es una pareja de funciones $\lambda : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ y $\mu : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(1) Para cualesquiera $x, y \in \mathcal{L}$, con $x \leq y$, se tiene que $\lambda(x) \geq \lambda(y)$.

(2) Para cualesquiera $x', y' \in \mathcal{L}'$, con $x' \leq y'$, se tiene que $\mu(x') \geq \mu(y')$.

(3) $x \leq \mu\ \lambda(x)$, para cualquier $x \in \mathcal{L}$ y $x' \leq \lambda\ \mu(x')$, para cualquier $x' \in \mathcal{L}'$.

Como consecuencia de la Observación 2.26 y el Lema 2.27, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.29 *El siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(R\text{-}Mod) \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Ret}"] & & \mathcal{P}(R\text{-}Mod) \arrow[ll, bend left, "\mathrm{Ret}^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

es una conexión de Galois (antítona) con cerrados en R-conat y R-nat respectivamente.

Lema 2.30 *Para cualquier módulo M se tiene que* $\mathrm{Ret}(M) = \mathrm{Ret}(\xi_{nat}(M))$.

Demostración. Dado que $\{M\} \subseteq \xi_{nat}(M)$, por la Observación 2.26, se tiene que $\mathrm{Ret}(\xi_{nat}(M)) \subseteq \mathrm{Ret}(M)$. Ahora, sean $N \in \mathrm{Ret}(M)$ y $W \in \xi_{nat}(M)$.

$$\begin{tikzcd}
W & M & N \arrow[d, two heads, "\forall"] \\
W' \arrow[u, hook, "\forall"] & W'' \arrow[l, hook', "\exists"'] \arrow[u, hook, "\exists"] & N' \arrow[l, dashed, "\exists\neq 0"']
\end{tikzcd}$$

Se tiene que para cada submódulo no cero W' de W existe un submódulo no cero W'' de W' tal que W'' se sumerge en M. Supongamos, sin pérdida de generalidad que W'' es un submódulo de M. Así, $\mathrm{Hom}(N', W'') \neq 0$ para cada cociente no cero N' de N y de aquí que $\mathrm{Hom}(N', W') \neq 0$. Por lo tanto $\mathrm{Ret}(M) = \mathrm{Ret}(\xi_{nat}(M))$. ■

Por supuesto que tenemos la versión dual del lema anterior.

Lema 2.31 *Para cualquier módulo N se tiene que*

$$\mathrm{Ret}^{-1}(N) = \mathrm{Ret}^{-1}(\xi_{conat}(N)).$$

Demostración. Como $\{N\} \subseteq \xi_{conat}(N)$, se sigue, de la Observación 2.26, que

$\mathrm{Ret}^{-1}(\xi_{conat}(N)) \subseteq \mathrm{Ret}^{-1}(N)$. Luego, si $M \in \mathrm{Ret}^{-1}(N)$ y $W \in \xi_{conat}(N)$, se tiene que para cualquier cociente no cero W' de W existe un cociente no cero W'' de W' tal que W'' es también un cociente de N.

$$\begin{tikzcd}
M & N \arrow[d, two heads] & W \arrow[d, two heads, "\forall"] \\
M' \arrow[u, hook, "\forall"] & W'' \arrow[l, dashed, "\exists"'] & W' \arrow[l, dashed, "\exists"']
\end{tikzcd}$$

Por lo que, $\mathrm{Hom}(W', M') \neq 0$ para cualquier submódulo no cero M' de M, esto es $M \,\mathrm{Ret}\, W$. Por lo tanto $\mathrm{Ret}(M) = \mathrm{Ret}(\xi_{nat}(M))$. ■

Como consecuencia de los dos lemas anteriores tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.32 *Para una clase de módulos $\mathcal{A}$ se tiene que*

$$\mathrm{Ret}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ret}(\xi_{nat}(\mathcal{A})) \quad y \quad \mathrm{Ret}^{-1}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ret}^{-1}(\xi_{conat}(\mathcal{A})).$$

Para continuar, recordemos que cualquier clase natural generada por un módulo simple es un átomo en R-nat (vea [23, Proposición 1.3]) y, dualmente, cualquier clase conatural generada por un módulo simple es un átomo en R-conat (vea [4, Corolario 40]) .

Proposición 2.33 *Sea $\mathcal{A} \in R$-nat un átomo generado por un módulo simple. Entonces* $\mathrm{Ret}(\mathcal{A})$ *es un átomo en R-conat.*

Demostración. Sea $S \in R$-simp tal que $\mathcal{A} = \xi_{nat}(S)$. Por el Lema 2.30, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ret}(\mathcal{A}) &= \mathrm{Ret}(\xi_{nat}(S)) \\
&= \mathrm{Ret}(S) \\
&= \{N \mid S\,\mathrm{Ret}\,N\ \} \\
&= \{N \mid \forall N \twoheadrightarrow N' \neq 0, \exists\ N' \xrightarrow{\neq 0} S\ \} \\
&= \xi_{conat}(S).
\end{aligned}$$

Así, $\mathrm{Ret}(\mathcal{A})$ es un átomo en $R - conat$. ∎

De manera dual, enunciamos y demostramos la siguiente proposición.

Proposición 2.34 *Sea $\mathcal{A} \in$ R-conat un átomo generado por un módulo simple. Entonces $\mathrm{Ret}^{-1}(\mathcal{A})$ es un átomo en R-nat.*

Demostración. Sea S un R-módulo simple tal que $\mathcal{A} = \xi_{conat}(S)$. Se tiene, por el Lema 2.31, que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ret}^{-1}(\mathcal{A}) &= \mathrm{Ret}^{-1}(\xi_{conat}(S)) \\
&= \mathrm{Ret}^{-1}(S) \\
&= \{M \mid M\,\mathrm{Ret}\,S\ \} \\
&= \{M \mid \forall 0 \neq M' \hookrightarrow M, \exists\ S \xrightarrow{\neq 0} M'\ \} \\
&= \xi_{nat}(S).
\end{aligned}$$

Así, $\mathrm{Ret}^{-1}(\mathcal{A})$ es un átomo en $R - nat$. ∎

El siguiente ejemplo muestra que la imagen bajo Ret de un átomo, que no es generado por un módulo simple, no es necesariamente un átomo.

Ejemplo 2.35 *Dado que $\mathbb{Z}$ es uniforme, se tiene que la clase natural generada por $\mathbb{Z}$ es un átomo en $\mathbb{Z}$-nat. Ahora, consideremos M un $\mathbb{Z}$-módulo no cero tal que $M \in \mathrm{Ret}(\mathbb{Z})$. Si M es divisible, entonces $M \in \mathbb{T}_d$, donde d denota* *la parte divisible. Ahora, si M no es divisible, entonces $nM \lneqq M$ para algún $n > 1$, así que $0 \neq M/nM \in \mathbb{T}_t$, donde t denota la parte de torsión usual. En cualquier caso, dado que $\mathbb{Z} \in \mathbb{F}_d \cap \mathbb{F}_t$, no puede suceder que $\mathbb{Z} \operatorname{Ret} M$.*

Este ejemplo se puede generalizar como sigue.

Teorema 2.36 *Si R es un anillo neteriano y $\mathcal{A} \in R$-nat es un átomo que no es generado por un módulo simple, entonces* $\operatorname{Ret}(\mathcal{A}) = \{0\}$.

Demostración. Supongamos que existe un módulo no cero $N \in \operatorname{Ret}(\mathcal{A})$. Dado que $\mathcal{A}$ es un átomo en R-nat, se tiene que si $M \in \mathcal{A}$ es un módulo no cero, entonces $\xi_{nat}(M) = \mathcal{A}$. Así, $\operatorname{Ret}(\mathcal{A}) = \operatorname{Ret}(M)$ y de aquí que $M \operatorname{Ret} N$. Se tiene entonces que $\operatorname{Hom}(N, Rm) \neq 0$ para cada $m \in M$ no cero. Ahora, como Rm es neteriano, N tiene un cociente no cero finitamente generado, luego N tiene un cociente simple S. Pero $S \in \operatorname{Ret}(\mathcal{A})$, pues $\operatorname{Ret}(\mathcal{A})$ es una clase conatural. Entonces $M \operatorname{Ret} S$. En particular, tenemos que S se sumerge en M, de donde $\xi_{nat}(S) = \mathcal{A}$, lo que es una contradicción. ■

Teorema 2.37 *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

(1) R es un anillo local izquierdo y max izquierdo.

(2) $\operatorname{Ret}^{-1}(R\text{-}Mod) \neq \{0\}$.

Demostración. (2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $\operatorname{Ret}^{-1}(R\text{-Mod}) \neq \{0\}$ y sea $0 \neq M \in \operatorname{Ret}^{-1}(R\text{-Mod})$. Se tiene que $M \operatorname{Ret} N$ para cada R-módulo N. En particular, $M \operatorname{Ret} S$ para cada $S \in R$-simp. Así, S se sumerge en cada submódulo no cero de M. Ahora, si S' es otro módulo simple, entonces S' se sumerge en S, lo cual ocurre solo si S y S' son isomorfos. De aquí que R es un anillo local izquierdo.

Ahora, como $S \leq M$ y $\mathrm{Ret}^{-1}(R\text{-Mod})$ es una clase natural, se tiene que $S \in \mathrm{Ret}^{-1}(R\text{-Mod})$. Así, $S \,\mathrm{Ret}\, N$ para cada R-módulo N. Por lo tanto, cada R-módulo no cero tiene un cociente simple, esto es, R es un anillo max izquierdo.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos ahora que R es un anillo local izquierdo y max izquierdo. Entonces, para cada R-módulo N, se tiene que $S \,\mathrm{Ret}\, N$, donde S es el único representante en R-simp. Así, $0 \neq S \in \mathrm{Ret}^{-1}(R\text{-Mod})$. ■

Enseguida demostraremos la versión dual de este resultado.

Teorema 2.38 *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

(1) R es un anillo local izquierdo y semiartiniano izquierdo.

(2) $\mathrm{Ret}(R\text{-}Mod) \neq \{0\}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Si R es un anillo local izquierdo y semiartiniano izquierdo, entonces, para cada R-módulo M, se tiene que $M \,\mathrm{Ret}\, S$, donde S es el único representante en R-simp. Así, $0 \neq S \in \mathrm{Ret}(R\text{-Mod})$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Ahora, supongamos que $\mathrm{Ret}(R\text{-Mod}) \neq \{0\}$ y sea $0 \neq N \in \mathrm{Ret}(R\text{-Mod})$. Dado que $M \,\mathrm{Ret}\, N$ para cada $M \in R\text{-Mod}$, en particular se tiene que $S \,\mathrm{Ret}\, N$ para cada $S \in R$-simp. Así, S es un cociente de N. Luego, si S' es otro módulo simple, entonces S' es un cociente de S, esto por la

descripción de $\operatorname{Ret}(R\text{-Mod})$. Pero esto ocurre solo si S y S' son isomorfos. Por lo tanto, R es un anillo local izquierdo.

Ahora, como S es un cociente de N y $\operatorname{Ret}(R\text{-Mod})$ es una clase conatural, se tiene que $S \in \operatorname{Ret}(R\text{-Mod})$. Así, $M \operatorname{Ret} S$ para cada R-módulo no cero M. Por lo tanto, cada R-módulo contiene un submódulo simple, es decir, R es un anillo semiartiniano izquierdo. ■

Proposición 2.39 *Sean M y N dos R-módulos no cero y $S \in R$-simp. Si $M \operatorname{Ret} S$ y $S \operatorname{Ret} N$, entonces $M \operatorname{Ret} N$.*

Demostración. Sean M' un submódulo no cero de M y N' un cociente no cero de N. Por hipótesis, se tiene que $\operatorname{Hom}(S, M') \neq 0$ y $\operatorname{Hom}(N', S) \neq 0$, así que $\operatorname{Hom}(N', M') \neq 0$. Por lo que $M \operatorname{Ret} N$. ■

Teorema 2.40 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(1) R es un anillo local izquierdo y semiartiniano izquierdo

(2) Existe $S \in R$-simp tal que $\operatorname{Ret}^{-1}(S) = R$-Mod.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea S el único representante en R-simp. Como R es semiartiniano izquierdo, se tiene que $\operatorname{Hom}(S, M) \neq 0$ para cada R-módulo no cero M. Se sigue que $M \operatorname{Ret} S$ para cada R-módulo no cero M. Por lo tanto, $\operatorname{Ret}^{-1}(S) = R$-Mod.
(2) $\Rightarrow$ (1) Si $S \in R$-simp es tal que $\operatorname{Ret}^{-1}(S) = R$-Mod, entonces para cada R-módulo no cero M se tiene que $M \operatorname{Ret} S$ y de aquí que $\operatorname{Hom}(S, M) \neq 0$. Por lo tanto R es un anillo semiartiniano izquierdo.

Ahora, si $S' \in R$-simp, dado que $\operatorname{Hom}(S, S') \neq 0$, entonces S y S' son isomorfos. Esto es, R es un anillo local izquierdo. ■

Dualmente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.41 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R.*

(1) R es un anillo local izquierdo y max izquierdo.

(2) Existe $S \in R$-simp tal que $\operatorname{Ret}(S) = R$*-Mod.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea S el único representante en R-simp. Se tiene que $\operatorname{Hom}(M, S) \neq 0$ para cada R-módulo no cero M, pues R es un anillo max izquierdo. De aquí que $\operatorname{Ret}(S) = R$-Mod.
(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $S \in R$-simp tal que $\operatorname{Ret}(S) = R$-Mod. Se tiene que $S \operatorname{Ret} M$ para cada R-módulo no cero M, en particular S es un cociente de cada módulo no cero M. Es decir, R es un anillo max izquierdo.

Ahora, si $S' \in R$-simp, dado que $S \operatorname{Ret} S'$, se tiene que $\operatorname{Hom}(S', S) \neq 0$, de donde S' y S son isomorfos. Así, R es un anillo local izquierdo. ■

Corolario 2.42 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R.*

(1) R es un anillo local izquierdo, semiartiniano izquierdo y max izquierdo.

(2) Existe $S \in R$-simp tal que $\operatorname{Ret}^{-1}(S) = R$*-Mod* $= \operatorname{Ret}(S)$.

Terminamos este capítulo caracterizando a los anillos fuertemente mod-retráctiles.

Teorema 2.43 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R.*

(1) R es un anillo fuertemente mod-retráctil.

(2) R es un anillo BKN.

(3) R satisface la condición (HH) y es local izquierdo.

(4) R es un anillo local izquierdo, semiartiniano izquierdo y max izquierdo.

(5) R es un anillo local izquierdo y perfecto izquierdo y derecho.

(6) Existe $S \in R$-simp tal que $\mathrm{Ret}(S) = R$-Mod $= \mathrm{Ret}^{-1}(S)$.

(7) R es isomorfo a un anillo completo de matrices sobre un anillo perfecto por ambos lados y local.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (4) Como R es fuertemente mod-retráctil, todo R-módulo simple es parainyectivo y paraproyectivo, así que, por la Proposición 2.3, R es un anillo semiartiniano izquierdo y max izquierdo. Ahora, ${}_RR$ es un módulo fuertemente retráctil, así que cualquier módulo simple se sumerge en cualquier submódulo no cero de ${}_RR$. Esto implica que sólo hay un módulo simple, salvo isomorfismo, por lo que R es local izquierdo.
(4) $\Rightarrow$ (5) Como R es un anillo local izquierdo y semiartiniano izquierdo, entonces es perfecto derecho (vea [7, Teorema V.3.4]). Ahora, todo anillo perfecto derecho es semilocal y todo anillo semilocal y max izquierdo es perfecto izquierdo (vea [6, Teorema 28.4]).
(5) $\Rightarrow$ (4) Todo anillo perfecto izquierdo es max izquierdo y todo anillo perfecto derecho es semiartiniano izquierdo (vea [6, Teorema 28.4]).

(4) $\Rightarrow$ (2) Sean M, N dos módulos no cero y S el único tipo de módulo simple. Como R es semiartiniano izquierdo, S se sumerge en N. Ahora, como R es máx izquierdo, entonces S es un cociente de M. Así, la composición de estos dos morfismos nos proporciona un morfismo no cero de M a N.

(2) $\Rightarrow$ (4) Note que para cualesquiera dos módulos simples S y S' se tiene que $\mathrm{Hom}(S, S') \neq 0$, por lo que son isomorfos. Así, R es un anillo local izquierdo. Ahora, si S es el único tipo de módulo simple y M es cualquier módulo no cero, por hipótesis, se tiene que $\mathrm{Hom}(S, M) \neq 0$ y $\mathrm{Hom}(M, S) \neq 0$, de donde R es un anillo semiartiniano izquierdo y max izquierdo.

(4) $\Leftrightarrow$ (6) Es justo el Corolario 2.42.

(6) $\Rightarrow$ (1) Se sigue de la Proposición 2.39.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Esto es el Lema 2.15.

Finalmente, (2) $\Leftrightarrow$ (7) es una parte de [7, Proposición VI.2.3] $\blacksquare$

Capítulo 3

Sobre σ-clases

En [8] y [9], Cerda y Rincón introducen grandes retículas de módulos inducidas por un prerradical σ. Por ejemplo, las retículas de clases σ-hereditarias, las de clases σ-cohereditarias, las de clases de σ-torsión, las de clases de σ-torsión hereditarias, las de clases σ-naturales y las de clases σ-conaturales. En este capítulo introducimos nuevos conceptos relativos a un prerradical σ, por mencionar algunos, la condición (σ-HH) y los anillos σ- (BKN) . También caracterizamos los anillos σ-mod retráctiles, introducidos también por Cerda y Rincón.

3.1. Prerradicales

Como ya hemos mencionado antes, la teoría desarrollada en este capítulo está elaborada a partir del concepto de *prerradical*, por esta razón comenzamos dando un breve resumen y algunos resultados acerca de *prerradicales*.

Definición 3.1 *Sea R un anillo. Un **prerradical** en R es un funtor σ :*

*R-Mod $\to$ R-Mod tal que para cada R-módulo M se tiene que $\sigma(M) \leq M$ y para cada R-morfismo $f : M \to N$ se cumple que $f(\sigma(M)) \leq \sigma(N)$. Denotamos por **R-pr** a la colección de todos los prerradicales en R-Mod.*

Note que un prerradical σ es un subfuntor del funtor identidad en R-Mod.

Definición 3.2 *Dados $\sigma, \tau \in$ R-pr, escribimos $\boldsymbol{\sigma \leq \tau}$, si $\sigma(M) \leq \tau(M)$, para cada $M \in$ R-Mod. Note que $\leq$ es un orden parcial en R-pr.*

Definición 3.3 *Dados $\sigma, \tau \in$ R-pr, definimos cuatro operaciones, denotadas por $\boldsymbol{\sigma \wedge \tau}$, $\boldsymbol{\sigma \vee \tau}$, $\boldsymbol{\sigma\tau}$ y $\boldsymbol{\sigma : \tau}$ respectivamente, definidas en cada $M \in$ R-Mod, como sigue:*

(1) $(\sigma \wedge \tau)(M) = \sigma(M) \cap \tau(M)$.

(2) $(\sigma \vee \tau)(M) = \sigma(M) + \tau(M)$.

(3) $(\sigma\tau)(M) = \sigma(\tau(M))$.

(4) $(\sigma : \tau)(M)$ *es tal que* $(\sigma : \tau)(M)/\sigma(M) = \tau(M/\sigma(M))$.

Las operaciones de los incisos (1) y (2) de la definición anterior pueden generalizarse para una clase de prerradicales $\mathcal{C}$, de la siguiente manera:

(1) $\left(\bigwedge_{\sigma \in \mathcal{C}} \sigma\right)(M) = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{C}} \sigma(M)$.

(2) $\left(\bigvee_{\sigma \in \mathcal{C}} \sigma\right)(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}} \sigma(M)$.

De esta manera, con el orden parcial de la Definición 3.2, tenemos que R-pr es una retícula completa.

Cada prerradical σ tiene asociadas dos clases, a saber,

$$\mathbb{T}_\sigma = \{M \in R\text{-Mod} \mid \sigma(M) = M\}$$

y

$$\mathbb{F}_\sigma = \{M \in R\text{-Mod} \mid \sigma(M) = 0\}.$$

Note que $\mathbb{T}_\sigma$ es una clase cerrada bajo tomar cocientes y sumas directas arbitarias mientras que $\mathbb{F}_\sigma$ es una clase cerrada bajo tomar submódulos y productos arbitrarios.

Definición 3.4 *Sea $\sigma \in R$-pr. Diremos que σ*

(1) es un prerradical ***idempotente*** *si $\sigma\sigma = \sigma$. A la colección de todos los prerradicales idempotentes la denotamos por* ***R-idem****.*

(2) es un ***radical*** *si $\sigma : \sigma = \sigma$. A la colección de todos los radicales la denotamos por* ***R-rad****.*

(3) es un prerradical ***exacto izquierdo*** *si como funtor es exacto izquierdo. A la colección de todos los prerradicales exactos izquierdos la denotamos por* ***R-pei****.*

El siguiente resultado puede consultarse en [20].

Proposición 3.5 *Sea $\sigma \in R$-pr. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\sigma \in R$-pei.

(2) Si $N \leq M$, entonces $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N$.

(3) $\sigma \in R$-idem y $\mathbb{T}_\sigma$ es una clase cerrada bajo tomar submódulos.

Definición 3.6 *Sea $\sigma \in R$-pr. Diremos que un R-módulo M se **escinde por σ** si $M = \sigma(M) \oplus M'$ para algún $M' \leq M$. Note que en este caso se tiene que $\sigma(M') = 0 = \sigma(M/\sigma(M))$ y $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$.*

Definición 3.7 *Sea $\sigma \in R$-pr. Diremos que σ:*

*(1) es **estable** si todo R-módulo inyectivo se escinde por σ.*

*(2) es **coestable** si todo R-módulo proyectivo se escinde por σ.*

*(3) se **escinde centralmente** si existe un elemento idempotente central $e \in R$ tal que $\sigma(M) = eM$, para todo R-módulo M. Note que en este caso, para cada R-módulo M, se tiene que $M = \sigma(M) \oplus M'$, donde $M' = \{m \in M |\ \sigma(R)m = 0\}$.*

El siguiente resultado puede consultarse en [7, Proposición I.7.1].

Proposición 3.8 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un prerradical σ:*

(1) σ es exacto y coestable.

(2) σ es exacto y estable.

(3) σ se escinde centralmente.

Observación 3.9 *Sean $\sigma \in R$-pr exacto y M un R-módulo. Si σ es estable o coestable, entonces $\sigma(M)$ es un cociente de M.*

3.2. σ-clases

En [8], Cerda y Rincón introducen retículas de clases de módulos inducidas por un prerradical σ, las clases σ-hereditarias, σ-cohereditarias, σ-naturales y σ-conaturales, denotadas por σ-(R-her), σ-(R-coher), σ-(R-nat) y σ-(R-conat), respectivamente. A continuación recordamos las definiciones de estas retículas y algunos resultados relacionados a éstas.

Definición 3.10 *Sea $\sigma \in R$-pr. Una clase de R-módulos $\mathcal{C}$ es una* ***clase σ-hereditaria*** *si satisface las siguientes condiciones:*

(1) $\mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathcal{C}$.

(2) Para cada $M \in \mathcal{C}$ y cada $N \leq M$ se tiene que $\sigma(N) \in \mathcal{C}$.

Denotamos por **σ-(R-*her*)** *a la colección de todas las clases σ-hereditarias.*

Lema 3.11 *[8, Lema 1] Sea $\sigma \in R$-pr. La colección σ-(R-her) es una gran retícula seudocomplementada. Más aún, si σ es idempotente, entonces σ-(R-her) es fuertemente seudocomplementada y para cada $\mathcal{C} \in \sigma$-(R-her) su seudocomplento, denotado por $\mathcal{C}^{\perp_{\leq\sigma}}$, está dado por*

$$\mathcal{C}^{\perp_{\leq\sigma}} = \{M \in R\text{-}Mod \mid \forall\ N \leq M,\ \sigma(N) \in \mathcal{C} \Rightarrow N \in \mathbb{F}_\sigma\}.$$

Además Skel (σ-(R-her)) es una retícula buleana.

Dado el lema anterior, a los autores del artículo citado les fue posible dar la siguiente definición.

Definición 3.12 *Sean R un anillo y $\sigma \in R$-pr exacto izquierdo y estable. Definimos* ***la retícula de clases $\boldsymbol{\sigma}$-naturales****, denotada por* **$\boldsymbol{\sigma}$-(R-*nat*)**, *como*

$$\sigma\text{-}(R\text{-}nat) = Skel(\sigma\text{-}(\mathrm{R}\text{-}her)).$$

Definición 3.13 *Sea $\sigma \in R$-pr. Una clase de R-módulos $\mathcal{C}$ es una* ***clase $\boldsymbol{\sigma}$-cohereditaria*** *si satisface las siguientes condiciones:*

(1) $\mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathcal{C}$.

(2) Para cada $M \in \mathcal{C}$ y cada epimorfismo $M \twoheadrightarrow N$ se tiene que $\sigma(N) \in \mathcal{C}$.

Denotamos **$\boldsymbol{\sigma}$-(R-*coher*)** *la colección de todas las clases σ-cohereditarias.*

Proposición 3.14 *[8, Proposición 11] Sea $\sigma \in R$-pr. Si σ es idempotente y cohereditario, entonces σ-(R-coher) es una gran retícula fuertemente seudocomplementada y para cada $\mathcal{C} \in \sigma$-(R-coher) su seudocomplemento, denotado por $\mathcal{C}^{\perp/\sigma}$, está dado por*

$$\mathcal{C}^{\perp/\sigma} = \{M \in R\text{-}Mod \mid \forall\ M \twoheadrightarrow L,\ \sigma(L) \neq 0 \Rightarrow \sigma(L) \notin \mathcal{C}\} \cup \mathbb{F}_\sigma.$$

Además, $Skel\,(\sigma\text{-}(\mathrm{R}\text{-}coher))$ es una retícula buleana.

Definición 3.15 *Sean R un anillo y $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Definimos* ***la retícula de clases $\boldsymbol{\sigma}$-conaturales****, denotada por* **$\boldsymbol{\sigma}$-(R-*conat*)** *como*

$$\sigma\text{-}(\mathrm{R}\text{-}conat) = Skel(\sigma\text{-}(\mathrm{R}\text{-}coher)).$$

Más tarde, en [9], Cerda y Rincón introdujeron las retículas σ-(R-TORS) y σ-(R-tors) como sigue:

Definición 3.16 *Sea $\sigma \in R$-pr. Una clase de R-módulos $\mathcal{C}$ es una clase de **σ-torsión** si $\mathcal{C}$ es una clase σ-cohereditaria, cerrada bajo tomar sumas directas arbitrarias y bajo tomar extensiones. Si además es una clase σ-hereditaria, entonces diremos que $\mathcal{C}$ es una clase de **σ-torsión hereditaria.***

Definición 3.17 *Sea $\sigma \in R$-pr. Denotamos por **σ-(R-$TORS$)** la colección de todas las clases de σ-torsión y denotamos por **σ-(R-$tors$)** la colección de todas las clases de σ-torsión hereditarias.*

Los autores observaron que dado un prerradical σ, hay dos asignaciones:

(1) $\sigma^* : \mathcal{P}(R\text{-Mod}) \to \mathcal{P}(R\text{-Mod})$ dada por $\sigma^*(\mathcal{C}) = \{\sigma(M) \mid M \in \mathcal{C}\}$ y

(2) $\overleftarrow{\sigma} : \mathcal{P}(R\text{-Mod}) \to \mathcal{P}(R\text{-Mod})$ dada por $\overleftarrow{\sigma}(\mathcal{C}) = \{M \mid \sigma(M) \in \mathcal{C}\}$.

Además, se tiene que $\sigma^*(\overleftarrow{\sigma}(\sigma^*(\mathcal{C}))) = \sigma^*(\mathcal{C})$ y $\overleftarrow{\sigma}(\sigma^*(\overleftarrow{\sigma}(\mathcal{C}))) = \overleftarrow{\sigma}(\mathcal{C})$, para cada $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(R\text{-Mod})$.

Y los autores demostraron los siguientes resultados.

Proposición 3.18 *[9, Corolario 3.10] Si σ es un radical, entonces*

$$\sigma\text{-(R-}tors\text{)} = \{\mathcal{C} \in R\text{-}tors \mid \mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathcal{C}\}.$$

Teorema 3.19 *[9, Teorema 3.13] Si σ es un prerradical exacto, entonces*

$$\sigma\text{-(R-}TORS\text{)} = \{\overleftarrow{\sigma}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in R\text{-}TORS\}.$$

Los módulos σ-retráctiles y los anillos σ- (R-Mod)-retráctiles también son introducidos en [9].

Definición 3.20 *Sean R un anillo y $\sigma \in R$-pr. Diremos que un R-módulo $M \neq 0$ es* ***σ-retráctil*** *si para cada submódulo $N \leq M$ con $\sigma(N) \neq 0$ se tiene que $Hom\,(M, \sigma(N)) \neq 0$ y diremos que R es un* ***anillo σ-(R-Mod)-retráctil*** *si cada R-módulo es σ-retráctil.*

A continuación, generalizamos varios conceptos y resultados del Capítulo 2.

Definición 3.21 *Sean R un anillo y $\sigma \in R$-pr. Diremos que R satisface la* ***condición (σ-HH)*** *si para cualesquiera módulos M, N con $\sigma(M), \sigma(N) \neq 0$, se tiene que*

$$Hom(\sigma(N), M) \neq 0 \Longleftrightarrow Hom(M, \sigma(N)) \neq 0.$$

Observación 3.22 *Note que si $\sigma = 1_{R\text{-}Mod}$, entonces tenemos la condición (HH), es decir, para cualesquiera R-módulos M y N se tiene que*

$$Hom(N, M) \neq 0 \Longleftrightarrow Hom(M, N) \neq 0.$$

Observación 3.23 *Sean R un anillo y $\sigma \in R$-pr. Si R satisface la condición* (σ-HH), *entonces:*

(1) R es un anillo σ- (R-*Mod*)*-retráctil.*

(2) Para cualquier $S \in R$-$Simp \cap \mathbb{T}_\sigma$, se tiene que S es parainyectivo.

(3) Para cualquier $S \in R$-$Simp \cap \mathbb{T}_\sigma$, se tiene que S es paraproyectivo.

Demostración.

(1) Es claro.

(2) Sea $S \in R\text{-}Simp \cap \mathbb{T}_\sigma$ y M un R-módulo tal que S se sumerge en M. Como $S \in \mathbb{T}_\sigma$, se tiene que $\sigma(S) = S$, por lo que $Hom(\sigma(S), M) \neq 0$. Luego, $Hom(M, \sigma(S)) \neq 0$, pues R satisface la condición (σ-HH). Así, $Hom(M, S) \neq 0$, esto es, S es un cociente de M, de donde S es parainyectivo.

(3) Sea $S \in R\text{-}Simp \cap \mathbb{T}_\sigma$ y M un R-módulo tal que S es cociente de M. Se tiene que $Hom(M, \sigma(S)) \neq 0$, pues $S = \sigma(S)$ ya que $S \in \mathbb{T}_\sigma$. Luego, de la condición (σ-HH), se tiene que $Hom(\sigma(S), M) \neq 0$, es decir, $Hom(S, M) \neq 0$, de donde, S se sumerge en M. Por lo tanto, S es paraproyectivo.

■

Definición 3.24 *Sean R un anillo y $\sigma \in R$-pei. Diremos que un R-módulo $M \neq 0$ es **σ-atómico** si cualquier submódulo N de M con $\sigma(N) \neq 0$ contiene un submódulo $S \in R\text{-}Simp \cap \mathbb{T}_\sigma$ y diremos que R es un **anillo σ-semiartiniano izquierdo** si cualquier R-módulo es σ-atómico.*

Definición 3.25 *Sean R un anillo y $\sigma \in R$-idem. Diremos que un R-módulo $M \neq 0$ es **σ-coatómico** si cualquier cociente L de M con $\sigma(L) \neq 0$ tiene un cociente $S \in R\text{-}Simp \cap \mathbb{T}_\sigma$ y diremos que R es un **anillo σ-max izquierdo** si cualquier R-módulo es σ-coatómico.*

Teorema 3.26 *Sean R un anillo y $\sigma \in R$-pei. Si cualquier $S \in R\text{-}Simp \cap \mathbb{T}_\sigma$ es parainyectivo, entonces R es un anillo σ-max izquierdo.*

Demostración. Sean $M \neq 0$ un R-módulo y L un cociente de M, con $\sigma(L) \neq 0$. Consideremos Rx un submódulo cíclico de $\sigma(L)$. Como $\sigma \in R$-pei, entonces σ es idempotente y $\mathbb{T}_\sigma$ es una clase hereditaria. Así, $\sigma(L) \in \mathbb{T}_\sigma$ y luego $Rx \in \mathbb{T}_\sigma$. Ahora, si consideramos un cociente simple de Rx, digamos S, se tiene que $S \in \mathbb{T}_\sigma$, pues $\mathbb{T}_\sigma$ es una clase cohereditaria. Así, $S \in R\text{-}Simp \cap \mathbb{T}_\sigma$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, two heads] & L \arrow[ddrr, dashed] & & \\
& \sigma(L) \arrow[u, tail] & & \\
& Rx \arrow[u, tail] \arrow[r, two heads] & S \arrow[r, tail] & E(S)
\end{tikzcd}$$

Componiendo el cociente anterior con la inclusión de S en su cápsula inyectiva $E(S)$, tenemos un morfismo de Rx en $E(S)$. Dicho morfismo se extiende a un morfismo no cero $f : L \to E(S)$. Note que S se sumerge en $f(L)$, pues S es esencial en $E(S)$. Como S es parainyectivo, entonces es un cociente de $f(L)$ y de aquí que S es un cociente de L. ■

Teorema 3.27 *Sean R un anillo y $\sigma \in R$-pei. Si cualquier $S \in R\text{-}Simp \cap \mathbb{T}_\sigma$ es paraproyectivo, entonces R es un anillo σ-semiartiniano izquierdo.*

Demostración. Sean $M \neq 0$ un R-módulo, N un submódulo de M con $\sigma(N) \neq 0$ y Rx un submódulo cíclico de $\sigma(N)$. Como $\sigma \in R$-pei, $\sigma(N) \in \mathbb{T}_\sigma$ y luego $Rx \in \mathbb{T}_\sigma$.

$$\begin{tikzcd}
\sigma(N) \arrow[r, tail] & N \arrow[r, tail] & M \\
Rx \arrow[u, tail] \arrow[r, two heads] & S &
\end{tikzcd}$$

Ahora, si S es un cociente simple de Rx, se tiene que $S \in \mathbb{T}_\sigma$, así, por hipótesis, S es paraproyectivo. Luego S se sumerge en Rx y de aquí que S se sumerge en M. ■

Corolario 3.28 *Sean R un anillo y $\sigma \in R$-pei. Si R es un anillo que satisface la condición* (σ-HH)*, entonces R es un anillo σ-max izquierdo y σ-semiartiniano izquierdo.*

Demostración. Se sigue de los incisos 2 y 3 de la Observación 3.23 y de los Teoremas 3.26 y 3.27. ■

Teorema 3.29 *Sean R un anillo y $\sigma \in R$-pei. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) R satisface la condición (σ-HH)*.*

(2) R es un anillo σ- (R-*Mod*)*-retráctil y cualquier $S \in R$-Simp $\cap \mathbb{T}_\sigma$ es paraproyectivo.*

(3) Cualquier $S \in R$-Simp $\cap \mathbb{T}_\sigma$ es paraproyectivo y parainyectivo.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Se sigue de los incisos 1 y 3 de la Observación 3.23.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es claro.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sean M y N dos R-módulos tales que $\sigma(M), \sigma(N) \neq 0$ y supongamos que $f \in Hom\,(\sigma(N), M)$ es no cero. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\sigma(N) \arrow[r, two heads, "f|"] & f\left(\sigma(N)\right) \arrow[r, tail] & M \arrow[dl, dashed, two heads] \\
f^{-1}(S) \arrow[u, tail] \arrow[r, two heads, "f|"] & S \arrow[u, tail] &
\end{tikzcd}$$

Como $\sigma \in R$-pei, se tiene que $\sigma(N) \in \mathbb{T}_\sigma$ y de aquí que $f\left(\sigma(N)\right) \in \mathbb{T}_\sigma$ y es no cero. Ahora, por el Teorema 3.27, existe $S \in R$-*Simp* $\cap \mathbb{T}_\sigma$ submódulo de $f\left(\sigma(N)\right)$, que por hipótesis es parainyectivo, así que es cociente de M.

Por otro lado, S es un cociente de $f^{-1}(S)$, por lo que S se sumerge en $f^{-1}(S)$, ya que, por hipótesis, S es paraproyectivo. De esta manera tenemos que $Hom\,(M, \sigma(N)) \neq 0$. Así, hemos mostrado que si $Hom\,(\sigma(N), M) \neq 0$, entonces $Hom\,(M, \sigma(N)) \neq 0$.

Veamos ahora que si $Hom\,(M, \sigma(N)) \neq 0$, entonces $Hom\,(\sigma(N), M) \neq 0$. Para ello, consideremos $0 \neq f \in Hom\,(M, \sigma(N))$. Dado que $\sigma \in R$-pei y $0 \neq f(M) \leq \sigma(N)$, entonces $f(M) \in \mathbb{T}_\sigma$, es decir, $\sigma\,(f(M)) = f(M) \neq 0$. Así, por el Teorema 3.27, existe $S \in R\text{-Simp} \cap \mathbb{T}_\sigma$ tal que S se sumerge en $\sigma\,(f(M))$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, two heads, "f|"] & f(M) \arrow[r, tail] & \sigma(N) \arrow[dl, dashed, two heads] \\
f^{-1}(S) \arrow[u, tail] \arrow[r, two heads, "f|"] & S \arrow[u, tail] &
\end{tikzcd}$$

Luego, usando que todo módulo simple de σ-torsión es parainyectivo, tenemos que S es un cociente de $\sigma(N)$. Finalmente, usando que todo módulo simple de σ-torsión es paraproyectivo, tenemos que S se sumerge en $f^{-1}(S)$ y luego en M. De esta manera obtenemos un morfismo no cero de $\sigma(N)$ en M. ■

La siguiente definición generaliza los anillos BKN de la Definición 2.14.

Definición 3.30 *Sean R un anillo y $\sigma \in R$-pr. Diremos que R es un **anillo σ- (BKN)** si para cualesquiera R-módulos M y N con $\sigma(M), \sigma(N) \neq 0$, se tiene que*

$$Hom\,(\sigma(N), \sigma(M)) \neq 0.$$

Y la siguiente definición generaliza el concepto de anillo local izquierdo.

Definición 3.31 *Sea R un anillo y $\sigma \in R$-pr. Diremos que R es un **anillo σ-local izquierdo** si*

$$|R\text{-}Simp \cap \mathbb{T}_\sigma| = 1.$$

Teorema 3.32 *Sean R un anillo y $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) R es un σ- (BKN)*-anillo.*

(2) R satisface la condición (σ-HH) *y es un anillo σ-local izquierdo.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean M y N dos R-módulos tales que $\sigma(M)$, $\sigma(N) \neq 0$. Supongamos primero que $Hom\,(M, \sigma(N)) \neq 0$. Dado que R es un anillo σ- (BKN), existe $0 \neq g \in Hom\,(\sigma(N), \sigma(M))$. Luego, si $\iota : \sigma(M) \to M$ denota la inclusión, se tiene que ιg es un morfismo no cero de $\sigma(N)$ en M, es decir, $Hom\,(\sigma(N), M) \neq 0$.

Supongamos ahora que $Hom\,(\sigma(N), M) \neq 0$. Como R es un σ- (BKN)-anillo, se tiene $Hom(\sigma(M), \sigma(N)) \neq 0$ y dado que σ es exacto y coestable, por la Observación 3.9, se tiene que $\sigma(M)$ es un cociente de M. De donde $Hom(M, \sigma(N)) \neq 0$. Así, R satisface la condición (σ-HH).

Veamos ahora que R es un anillo σ-local izquierdo. Para ello, sean $S_1, S_2 \in R$-Simp $\cap\, \mathbb{T}_\sigma$. Se tiene, por hipótesis, que $Hom\,(\sigma(S_1), \sigma(S_2)) \neq 0$, es decir, $Hom(S_1, S_2) \neq 0$. Luego $S_1 \cong S_2$, esto es, R es un anillo σ-local izquierdo.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sean M y N dos R-módulos tales que $\sigma(M), \sigma(N) \neq 0$. Del Corolario 3.28, se tiene que R es σ-semiartiniano, por lo que existen $S_1, S_2 \in R$-Simp$\cap\mathbb{T}_\sigma$ tales que S_1 se sumerge en $\sigma(M)$ y S_2 se sumerge en $\sigma(N)$. Ahora,

como R satisface la condición (σ-HH), se sigue que $Hom\,(\sigma(M), S_1) \neq 0$. Finalmente, por ser R un anillo σ-local izquierdo, $S_1 \cong S_2$ y de aquí que $Hom\,(\sigma(M), \sigma(N)) \neq 0$. ■

En la siguiente definición generalizamos la condición (CN) (vea Definición 2.9).

Definición 3.33 *Sea $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod. Diremos que $\mathcal{C}$ satisface* ***la condición (σ-CN)*** *si*

$$\left(\begin{array}{c} \textit{para todo epimorfismo } M \twoheadrightarrow L \textit{ con } \sigma(L) \neq 0, \\ \textit{existen } C \in \mathcal{C}, N \in R\textit{-Mod}, \textit{ con } \sigma(N) \neq 0 \\ \textit{y epimorfismos } L \twoheadrightarrow N \twoheadleftarrow C \end{array}\right) \Longrightarrow M \in \mathcal{C}$$

Observación 3.34 *Sea $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Si $\mathcal{C}$ es una clase de R-módulos que satisface la condición (σ-CN), entonces, por vacuidad, $\mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathcal{C}$.*

Lema 3.35 *Sean $\sigma \in R$-pr exacto y coestable, $\mathcal{C}$ una clase de R-módulos que satisface la condición (σ-CN) y $C \in \mathcal{C}$. Si L es un cociente de C entonces $L \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Si $L \in \mathbb{F}_\sigma$, por la Observación 3.34, se tiene que $L \in \mathcal{C}$. Supongamos entonces que $\sigma(L) \neq 0$ y sea H un cociente de L con $\sigma(H) \neq 0$. Note que H es también un cociente de C y como $\mathcal{C}$ satisface la condición (σ-CN), se sigue que $L \in \mathcal{C}$. ■

El siguiente teorema es una generalización del Teorema 23 de [4].

Teorema 3.36 *Sean $\sigma \in R$-pr exacto y coestable y $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para $\mathcal{C}$:*

(1) $\mathcal{C} \in \sigma$-(R-*conat*) *.*

(2) $\mathcal{C}$ *satisface la condición* (σ-CN)*.*

(3) $\mathcal{C}$ *es una clase* σ*-cohereditaria y* $\mathcal{C} = \left(\mathcal{C}^{\perp/\sigma}\right)^{\perp/\sigma}$ *.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $\mathcal{C} \in \sigma$-(R-conat) y M un R-módulo. Como $\mathcal{C} \in \sigma$- (R-conat), se tiene que $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{\perp/\sigma}$, para alguna clase σ-cohereditaria $\mathcal{A}$, y, por la Proposición 3.14,

$$\mathcal{A}^{\perp/\sigma} = \{M \in R\text{-Mod} \mid \forall\ M \twoheadrightarrow L,\ \sigma(L) \neq 0 \Rightarrow \sigma(L) \notin \mathcal{A}\} \cup \mathbb{F}_\sigma.$$

Note que si para cualquier cociente no cero L de M, con $\sigma(L) \neq 0$, se tiene que $\sigma(L) \notin \mathcal{A}$, entonces $M \in \mathcal{A}^{\perp/\sigma}$, es decir, $M \in \mathcal{C}$. Supongamos entonces que L es un cociente no cero de M, con $\sigma(L) \neq 0$, tal que $\sigma(L) \in \mathcal{A}$ y que existen $C \in \mathcal{C}$ y $N \in R$-Mod, con $\sigma(N) \neq 0$, tales que $L \twoheadrightarrow N \twoheadleftarrow C$. Dado que $C \in \mathcal{C}$ y $C \twoheadrightarrow N$, con $\sigma(N) \neq 0$, se tiene que $\sigma(N) \notin \mathcal{A}$.

Por otro lado, si $f : L \twoheadrightarrow N$ es el cociente dado, como σ es exacto, es idempotente y cohereditario, entonces se tiene que $\sigma(N) = \sigma(\sigma(N))$ y $f\lfloor\colon \sigma(L) \twoheadrightarrow \sigma(N)$. Ahora, como $\mathcal{A}$ es una clase σ-cohereditaria, se sigue que $\sigma(N) \in \mathcal{A}$, lo que es una contradicción. Así, $\sigma(L) \notin \mathcal{A}$ y por lo tanto $M \in \mathcal{C}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $\mathcal{C}$ una clase de R-módulos que satisface la condición (σ-CN). Veamos primero que $\mathcal{C}$ es una clase σ-cohereditaria. De la Observación 3.34, se tiene que $\mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathcal{C}$. Ahora, consideremos $C \in \mathcal{C}$ y $L \in R$-Mod un cociente de C con $\sigma(L) \neq 0$. Como σ es un prerradical exacto y coestable se tiene, por la Observación 3.9, que $\sigma(C)$ es un cociente de C, luego, por el Lema 3.35, $\sigma(L) \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es una clase σ-cohereditaria.

Mostremos ahora que $\mathcal{C} = \left(\mathcal{C}^{\perp/\sigma}\right)^{\perp/\sigma}$. Del Corolario 1.12 se sigue que $\mathcal{C} \subseteq \left(\mathcal{C}^{\perp/\sigma}\right)^{\perp/\sigma}$.

Para la otra contención, es necesario recordar la siguiente descripción del doble seudocomplemento de $\mathcal{C}$,

$$\left(\mathcal{C}^{\perp/\sigma}\right)^{\perp/\sigma} = \{M \in R\text{-Mod} \mid \forall M \twoheadrightarrow K,\ \sigma(K) \neq 0 \\ \Rightarrow \exists \sigma(K) \twoheadrightarrow L,\ \sigma(L) \neq 0 \text{ y } \sigma(L) \in \mathcal{C}\} \cup \mathbb{F}_\sigma, \tag{3.1}$$

vea [8, Definición 4].

Ahora, consideremos $M \in \left(\mathcal{C}^{\perp/\sigma}\right)^{\perp/\sigma}$ y L un cociente de M con $\sigma(L) \neq 0$. Como $\sigma(L)$ es un cociente de L, entonces $\sigma(L)$ es un cociente de M, además $\sigma(\sigma(L)) = \sigma(L) \neq 0$. Así, dado que $M \in \left(\mathcal{C}^{\perp/\sigma}\right)^{\perp/\sigma}$, existe T un cociente de $\sigma(L)$ con $\sigma(T) \neq 0$ y $\sigma(T) \in \mathcal{C}$. Finalmente, como $\mathcal{C}$ satisface la condición (σ-CN), se tiene que $M \in \mathcal{C}$. Así, $\left(\mathcal{C}^{\perp/\sigma}\right)^{\perp/\sigma} \subseteq \mathcal{C}$, de donde $\mathcal{C} = \left(\mathcal{C}^{\perp/\sigma}\right)^{\perp/\sigma}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Es claro. ■

Observación 3.37 *Sean $\sigma \in R$-pr exacto y coestable y $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod. Si $\xi_{\sigma\text{-}conat}(\mathcal{C})$ denota la menor clase σ-conatural que contiene a $\mathcal{C}$, entonces*

$$\xi_{\sigma\text{-}conat}(\mathcal{C}) = \{M \in R\text{-}Mod \mid \forall M \twoheadrightarrow L,\ \sigma(L) \neq 0 \text{ existen } C \in \mathcal{C}, \\ N \in R\text{-}Mod, \text{ con } \sigma(N) \neq 0, \text{ tales que } L \twoheadrightarrow N \twoheadleftarrow C\}$$

En [4, Teorema 42], los anillos max izquierdos son caracterizados vía clases conaturales. El siguiente teorema generaliza dicho resultado.

Proposición 3.38 *Sea $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) R es un anillo σ-max izquierdo.

(2) Cada clase σ-conatural está determinada por una familia de módulos simples de σ-torsión.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $\mathcal{C}$ una clase σ-conatural no trivial, es decir $\mathcal{C} \neq \mathbb{F}_\sigma$, y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ la clase de todos los módulos simples de σ-torsión de $\mathcal{C}$. Note que $\mathcal{S}$ es una familia no vacía pues R es un anillo σ-max izquierdo. Ahora, si $0 \neq M \in \mathcal{C}$ y L es un cociente, no cero, de M con $\sigma(L) \neq 0$, por ser R un anillo σ-max, existe $S \in R\text{-Simp} \cap \mathbb{T}_\sigma$ un cociente de L. Por el Lema 3.35, $S \in \mathcal{C}$, luego, por la Observación 3.37, se tiene que $M \in \xi_{\sigma\text{-conat}}(\mathcal{S})$. Se sigue que $\mathcal{C} = \xi_{\sigma\text{-conat}}(\mathcal{S})$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $M \in R$-Mod y L un cociente, no cero, de M con $\sigma(L) \neq 0$. Por hipótesis, se tiene que, existe $\mathcal{S} \subseteq R\text{-Simp} \cap \mathbb{T}_\sigma$ tal que $\xi_{\sigma\text{-conat}}(M) = \xi_{\sigma\text{-conat}}(\mathcal{S})$. Como $M \in \xi_{\sigma\text{-conat}}(M)$, existe $S \in \mathcal{S}$ tal que S es un cociente de L. De aquí que R es un anillo σ-max izquierdo. ■

El siguiente teorema generaliza [1, Proposición 2.11].

Teorema 3.39 *Sea $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) Cada $S \in R\text{-Simp} \cap \mathbb{T}_\sigma$ es parainyectivo.

(2) σ-(R-conat) $\subseteq \sigma$-(R-tors).

(3) Toda clase σ-conatural es σ-hereditaria.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) En [8, Proposición 12], se demuestra, para un prerradical exacto σ, que toda clase σ-conatural es cerrada bajo tomar extensiones. Luego, en [9, Proposición 6.5], para un prerradical exacto y coestable σ y un anillo σ-max izquierdo, se muestra que toda clase σ-conatural es cerrada bajo tomar sumas directas. Ahora, por hipótesis, cada $S \in R\text{-Simp} \cap \mathbb{T}_\sigma$ es parainyectivo, luego del Teorema 3.26, se tiene que R es un anillo σ-max izquierdo. Por lo tanto, solo resta mostrar que cualquier clase σ-conatural es una clase σ-hereditaria.

Para ello, consideremos $\mathcal{C} \in R$-(σ-conat), $M \in \mathcal{C}$ y $N \leq M$ con $\sigma(N) \neq 0$. Sea $S \in \mathrm{Simp} \cap \mathbb{T}_\sigma$ cualquier cociente de $\sigma(N)$, que existen pues R es un anillo σ-max izquierdo. Si en el siguiente diagrama T es el *push-out* de $\sigma(N) \twoheadrightarrow S$ y $\sigma(N) \hookrightarrow M$,

$$\begin{tikzcd}
\sigma(N) \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & N \arrow[r, tail] & M \arrow[d, two heads, dashed] \\
S \arrow[rr, tail, dashed] & & T
\end{tikzcd}$$

entonces S se sumerge en T, pero por hipótesis S es parainyectivo, por lo que S es un cociente simple, de σ-torsión, de T, luego S es un cociente simple, de σ-torsión, de M. Lo anterior muestra que cualquier cociente simple de σ-torsión de $\sigma(N)$ pertenece a $\mathcal{C}$, luego, por la Proposición 3.38, $\sigma(N) \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ es una clase σ-hereditaria.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es clara.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $S \in \mathrm{Simp} \cap \mathbb{T}_\sigma$ y M un R-módulo tal que S se sumerge en M. Por hipótesis, se tiene que $S \in \xi_{\sigma\text{-conat}}(M)$. Se sigue de la Observación 3.37 que S es un cociente de M, luego S es parainyectivo. ■

Observación 3.40 *Si σ es un prerradical exacto y coestable, entonces, para cada R-módulo M, se tiene que $M = \sigma(M) \oplus M'$, donde $M' = \{m \in M \mid \sigma(R)m = 0\}$. Observe entonces que σ tiene un complemento en R-pr, denotado por σ', dado por*

$$\sigma'(M) = M',$$

para cada $M \in R$-Mod.

Teorema 3.41 *Sea $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Si R satisface la condición* (σ-HH) *y la condición* $(\sigma'\text{-}HH)$, *entonces R satisface la condición* (HH).

Demostración. Sean $M, N \in R$-Mod tales que $Hom(N, M) \neq 0$. Consideremos $f \in Hom(N, M)$, no cero. Si $\nu : M = \sigma(M) \oplus \sigma'(M) \to \sigma(M)$ denota la proyección natural sobre $\sigma(M)$ y $\nu f \neq 0$, entonces $Hom(N, \sigma(M)) \neq 0$. Así, por la condición (σ-HH), se tiene que existe $g : \sigma(M) \to N$, no cero, de donde $g\nu : M \to N$ es un morfismo no cero, es decir, $Hom(M, N) \neq 0$.

Ahora, si $\nu f = 0$, entonces, correstringiendo f a su imagen, tenemos que $f \restriction: N \to \sigma'(M)$ es un morfismo no cero. Luego, de la condición $(\sigma'\text{-}HH)$, se tiene que existe un morfismo no cero $h : \sigma'(M) \to N$. Finalmente, $h\nu' : M \to N$ es un morfismo no cero, donde $\nu' : M \to \sigma'(M)$ es la proyección natural sobre $\sigma'(M)$. Es decir, $Hom(M, N) \neq 0$. ■

En el Teorema 2.11 se demuestra que, si R satisface la condición (HH), entonces toda clase de torsión es una clase conatural. Ahora tenemos la siguiente versión.

Corolario 3.42 *Sea $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Si R satisface la condición* (σ-HH) *y la condición* $(\sigma'\text{-}HH)$, *entonces toda clase de torsión es una clase conatural.*

Teorema 3.43 *Sea $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Si R satisface la condición* (σ-HH) *y la condición* $(\sigma'\text{-}HH)$, *entonces*

$$\sigma\text{-}(\text{R-}TORS) \subseteq \sigma\text{-}(\text{R-}conat)\,.$$

Demostración. Sea $\mathcal{C} \in \sigma$-(R-TORS). Como σ es exacto, por el Teorema 3.19, existe $\mathcal{D} \in R$-TORS tal que $\mathcal{C} = \overleftarrow{\sigma}(\mathcal{D})$. Ahora, por el Corolario 3.42, tenemos que $\mathcal{D} \in R$-conat. Luego, por ser σ un prerradical exacto y coestable, se tiene que $\overleftarrow{\sigma}(\mathcal{D}) \in \sigma$-(R-conat), vea [8, Proposición 14], es decir, $\mathcal{C} \in \sigma$-(R-conat). ■

Teorema 3.44 *Sea $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Si R satisface la condición* (σ-HH) *y la condición* (σ'-HH)*, entonces*

$$\sigma\text{-(R-}TORS) = \sigma\text{-(R-}conat) = \sigma\text{-(R-}tors)\,.$$

Demostración. Se sigue del Teorema 3.43, de la Observación 3.23, del Teorema 3.39 y del hecho de que σ-(R-tors) $\subseteq \sigma$-(R-TORS) . ■

Lema 3.45 *Sean $\sigma \in R$-pr exacto y coestable, R un anillo que satisface la condición* (σ-HH)*, $\mathcal{C} \in \sigma$-(R-$TORS$) y $M \in R$-Mod. Si existe L, un cociente de M, con $L \in \mathcal{C}$ y $\sigma(L) \neq 0$, entonces, existe un submódulo, no cero, N de M tal que $N \in \mathcal{C} \cap \mathbb{T}_\sigma$. Más aún, existe K el mayor submódulo de M respecto a la propiedad de que $K \in \mathcal{C} \cap \mathbb{T}_\sigma$.*

Demostración. Como σ es un prerradical exacto y coestable, se tiene que $\sigma(L)$ es un cociente de L. Ahora, como $\mathcal{C}$ es una clase de σ-torsión y $\sigma(L) \neq 0$, se sigue que $\sigma(L) \in \mathcal{C}$.

Note que $\sigma(L)$ es un cociente, no cero, de M, por lo que $Hom(M, \sigma(L)) \neq 0$. Así, de la condición (σ-HH), se tiene que existe un morfismo $0 \neq h : \sigma(L) \to M$. Sea $N = h(\sigma(L))$, note que N es un submódulo, no cero, de M. Más aún, como N es un cociente de $\sigma(L)$, se tiene que $\sigma(N)$ es un cociente de $\sigma(\sigma(L))$, pues σ es cohereditario, pero $\sigma(\sigma(L)) = \sigma(L)$, así que $\sigma(N) = N$ y además $\sigma(N) \in \mathcal{C}$. Esto es, $N \in \mathcal{C} \cap \mathbb{T}_\sigma$.

Ahora, como $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo sumas directas y $\mathcal{C}_M = \{N \leq M \mid 0 \neq N \in \mathcal{C} \cap \mathbb{T}_\sigma\} \neq \emptyset$, se tiene que

$$\bigoplus_{C \in \mathcal{C}_M} C \in \mathcal{C} \cap \mathbb{T}_\sigma.$$

Luego, por ser $\sum\limits_{C \in \mathcal{C}_M} C$ un cociente de $\bigoplus\limits_{C \in \mathcal{C}_M} C$ y σ un prerradical cohereditario, se sigue que $\sum\limits_{C \in \mathcal{C}_M} C \in \mathcal{C} \cap \mathbb{T}_\sigma$. Así, $K = \sum\limits_{C \in \mathcal{C}_M} C$ es el mayor submódulo de M de σ-torsión que pertenece a $\mathcal{C}$. $\blacksquare$

Lema 3.46 *Sean $\sigma \in R$-pr exacto y coestable, R un anillo que satisface la condición* (σ-HH) *y $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod. Si $\mathcal{C} \in R$-(σ-TORS), entonces $\sigma^*(\mathcal{C}) \in R$-conat.*

Demostración. Veamos que $\sigma^*(C)$ cumple la condición (CN). Para ello, consideremos un R-módulo M tal que para cualquier cociente no cero N de M existen $C \in \mathcal{C}$ y $0 \neq L \in R$-Mod de tal manera que

$$M \twoheadrightarrow N \twoheadrightarrow L \twoheadleftarrow \sigma(C)$$

y veamos que $M \in \sigma^*(\mathcal{C})$.

Observe que $\sigma(C) \in \mathcal{C}$, pues $\sigma(C)$ es un cociente de C, por ser σ exacto y coestable, y $\mathcal{C}$ una clase σ-cohereditaria. Ahora, note que, $L = \sigma(L)$ pues σ es cohereditario y $\sigma(C) = \sigma\left(\sigma(C)\right)$, de aquí que $L \in \mathcal{C}$. Así, por el Lema 3.45, podemos considerar K el mayor submódulo de M respecto a la propiedad de que $K \in \mathcal{C} \cap \mathbb{T}_\sigma$. Note que si $K = M$, entonces terminamos, pues $M = \sigma(K)$ con $K \in \mathcal{C}$, es decir, $M \in \sigma^*(\mathcal{C})$. Supongamos entonces que $K \lneq M$. Así, $M/K \neq_R 0$.

Ahora, tomando $N = M/K$ y procediendo como en el párrafo anterior, se tiene que existe $0 \neq U \in \mathcal{C} \cap \mathbb{T}_\sigma$ el mayor submódulo de M/K con la propiedad de pertenecer a $\mathcal{C} \cap \mathbb{T}_\sigma$, como en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, tail] & M \arrow[r, two heads, "\pi"] & M/K \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, tail] \arrow[u, equal] & \pi^{-1}(U) \arrow[r, two heads] \arrow[u] & U \arrow[r] \arrow[u] & 0.
\end{tikzcd}$$

Pero $\mathcal{C} \cap \mathbb{T}_\sigma$ es una clase cerrada bajo extensiones (por ser σ un radical), por lo que $\pi^{-1}(U)$ es un submódulo de M en $\mathcal{C} \cap \mathbb{T}_\sigma$, que contiene propiamente a K, lo que es una contradicción. Por lo tanto $K = M$. ■

Recordemos que para cualquier clase $\mathcal{D} \subseteq R$-Mod, se tiene que $\overleftarrow{\sigma}(\mathcal{D}) = \overleftarrow{\sigma}\sigma^*\overleftarrow{\sigma}(\mathcal{D})$; que si σ es un prerradical exacto, entonces una clase $\mathcal{C}$ es de σ-torsión si y sólo si $\mathcal{C} = \overleftarrow{\sigma}(\mathcal{D})$, donde $\mathcal{D}$ es una clase de torsión; y que si σ es un prerradical exacto y coestable y $\mathcal{D}$ es una clase conatural, entonces $\overleftarrow{\sigma}(\mathcal{D})$ es una clase σ-conatural, vea [8] y [9].

Teorema 3.47 *Sea $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Si R satisface la condición* (σ-HH), *entonces*

$$R\text{-}(\sigma\text{-}TORS) \subseteq R\text{-}(\sigma\text{-}conat).$$

Demostración. Sea $\mathcal{C} \in R$-(σ-TORS). Entonces existe una clase de torsión $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{C} = \overleftarrow{\sigma}(\mathcal{D})$. Luego, se tiene que

$$\mathcal{C} = \overleftarrow{\sigma}(\mathcal{D}) = \overleftarrow{\sigma}\sigma^*\overleftarrow{\sigma}(\mathcal{D}).$$

Así, basta ver que $\sigma^*\overleftarrow{\sigma}(\mathcal{D})$ es una clase conatural y para ver esto, por el Lema 3.46, es suficiente demostrar que $\overleftarrow{\sigma}(\mathcal{D})$ es una clase de σ-torsión, lo cual ocurre por hipótesis. ■

Teorema 3.48 *Sea $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Si R satisface la condición* (σ-HH), *entonces*

$$\sigma\text{-(R-}TORS) = \sigma\text{-(R-}conat) = \sigma\text{-(R-}tors)\,.$$

Demostración. Se sigue del Teorema 3.39, del Teorema 3.47 y del hecho de que σ-(R-tors) $\subseteq$ σ-(R-TORS) . ■

La siguiente definición es la versión dual de la Definición 3.33.

Definición 3.49 *Sea $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod. Diremos que $\mathcal{C}$ satisface* ***la condición (σ-N)*** *si*

$$\left(\begin{array}{c} \textit{para todo monomorfismo } L \rightarrowtail M \ \textit{ con } \sigma(L) \neq 0, \\ \textit{existen } C \in \mathcal{C}, N \in R\textit{-Mod}, \ \textit{con } \sigma(N) \neq 0 \\ \textit{y monomorfismos } L \leftarrowtail N \rightarrowtail C \end{array} \right) \Longrightarrow M \in \mathcal{C}$$

Observación 3.50 *Si $\mathcal{C}$ es una clase de R-módulos que satisface la condición (σ-CN), entonces, por vacuidad, $\mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathcal{C}$.*

Lema 3.51 *Sea $\mathcal{C}$ una clase de R-módulos que satisface la condición (σ-N) y $C \in \mathcal{C}$. Si L es un módulo que se sumerge en C, entonces $L \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Si $L \in \mathbb{F}_\sigma$, por la Observación 3.50, se tiene que $L \in \mathcal{C}$. Supongamos entonces que $\sigma(L) \neq 0$ y sea K un R-módulo que se sumerge en L, con $\sigma(K) \neq 0$. Note que K también se sumerge en C y como $C \in \mathcal{C}$, se tiene que $K \in \mathcal{C}$. ■

Observación 3.52 *En [8, Corolario 2] se demuestra, para σ exacto izquierdo y estable, que*

$$\sigma\text{-}(R\text{-}nat) = \mathcal{L}_{\{\leq_\sigma, \oplus, \sigma(E()), ext\}}.$$

Teorema 3.53 *Sean $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod y $\sigma \in R$-pr exacto izquierdo y estable. $\mathcal{C} \in \sigma$-$(R$-nat$)$ si y sólo si $\mathcal{C}$ satisface la condición $(\sigma$-$N)$.*

Demostración. Supongamos primero que $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod es una clase σ-natural. Por definición de σ-(R-nat), se tiene que $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{\perp_{\leq\sigma}}$, para alguna clase $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq\sigma}$. Ahora, por el Lema 3.11, se tiene que

$$\mathcal{A}^{\perp/\sigma} = \{M \in R\text{-Mod} \mid \forall\ L \rightarrowtail M,\ \sigma(L) \in \mathcal{A} \Rightarrow L \in \mathbb{F}_\sigma\}.$$

Sea M un R-módulo. Note que, si para cualquier $L \rightarrowtail M$ sucede que $\sigma(L) \in \mathcal{A} \Rightarrow L \in \mathbb{F}_\sigma$, entonces $M \in \mathcal{A}^{\perp_{\leq\sigma}} = \mathcal{C}$. Supongamos entonces que existe $L \rightarrowtail M$ con $\sigma(L) \in \mathcal{A}$, pero que $L \notin \mathbb{F}_\sigma$. Adicionalmente, supongamos que existe $N \in R$-Mod, con $\sigma(N) \neq 0$ y $C \in \mathcal{C}$ tales que $C \leftarrowtail N \rightarrowtail L$.

Note que $\sigma(N) \in \mathcal{C}$, pues $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq\sigma}$ y $C \in \mathcal{C}$. Se sigue que $\sigma(N) \notin \mathcal{A}$, pues de lo contrario $N \in \mathbb{F}_\sigma$.

Por otro lado, dado que σ es exacto izquierdo y por lo tanto idempotente, se tiene que $\sigma(N) = \sigma(\sigma(N)) \rightarrowtail \sigma(\sigma(L)) = \sigma(L)$. Finalmente, como $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_{\leq\sigma}$ y $\sigma(L) \in \mathcal{A}$ se sigue que $\sigma(N) \in \mathcal{A}$, lo que es una contradicción. Así, no existe $L \rightarrowtail M$ con $\sigma(L) \in \mathcal{A}$ y tal que $L \notin \mathbb{F}_\sigma$. Por lo tanto $M \in \mathcal{C}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod es una clase que satisface la condición $(\sigma$-$N)$ y veamos que $\mathcal{C}$ es una clase σ-natural.

$\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\leq\sigma}$: Sea $M \in \mathcal{C}$ y $N \leq M$. Note que si $\sigma(N) = 0$, entonces $N \in \mathcal{C}$, pues $\mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathcal{C}$. Supongamos entonces que $\sigma(N) \neq 0$ y sea $L \rightarrowtail \sigma(N)$, con $\sigma(L) \neq 0$. Como $L \rightarrowtail M$, existe $H \in R$-Mod, con $\sigma(H) \neq 0$, y $C \in \mathcal{C}$ tales que $L \leftarrowtail H \rightarrowtail C$. Luego, dado que $\mathcal{C}$ satisface la condición $(\sigma$-$N)$, se sigue que $\sigma(N) \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\oplus}$: Sean $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{C}$ y $L \rightarrowtail \oplus_{i\in I} M_i$, con $\sigma(L) \neq 0$. Se tiene que $\sigma(L) \rightarrowtail \sigma\left(\oplus_{i\in I} M_i\right) = \oplus_{i\in I}\sigma(M_i)$. Ahora, por el argumento de la proyección, tenemos que, existe $l \in \sigma(L)$ y $0 \neq m_i \in \sigma(M_i)$, para algún $i \in I$, de tal manera que $Rl \cong Rm_i$. Note también que σ es idempotente y $\mathbb{T}_\sigma$ es una clase hereditaria, pues σ es exacto izquierdo. Se sigue que $\sigma(Rl) = Rl \neq 0$, pues $Rl \cong Rm_i \leq \sigma(M_i)$ y $\sigma(M_i) \in \mathbb{T}_\sigma$. Ahora, como $M_i \in \mathcal{C}$ y $Rm_i \rightarrowtail M_i$, con $\sigma(Rm_i) \neq 0$, entonces existe $C \in \mathcal{C}$ y $N \in R$-Mod, con $\sigma(N) \neq 0$, tales que

$$L \longleftarrow\!\prec Rl \cong Rm_i \longleftarrow\!\prec N \rightarrowtail C.$$

Esto es, $\oplus_{i\in I} M_i \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\sigma(E())}$: Sean $M \in \mathcal{C}$ y $L \rightarrowtail \sigma\left(E(M)\right)$, con $0 \neq \sigma(L)$. Como σ es exacto izquierdo y estable, se tiene que $\sigma\left(E(M)\right) = E\left(\sigma(M)\right)$ (vea [8, Proposición 2]). Ahora, dado que $\sigma(M) \leq_e E\left(\sigma(M)\right)$ y $\sigma(L) \neq 0$, se sigue que $\sigma(L) \cap \sigma(M) \neq 0$. Pero, note que $\sigma\left(\sigma(L) \cap \sigma(M)\right) = \sigma\left(E(M)\right) \cap \sigma(L) \cap \sigma(M) = \sigma(L) \cap \sigma(M) \neq 0$, pues σ es exacto izquierdo. Así, existe $C \in \mathcal{C}$ y $N \in R$-Mod, con $\sigma(N) \neq 0$, tales que

$$L \longleftarrow\!\prec \sigma(L) \cap \sigma(M) \longleftarrow\!\prec N \rightarrowtail C.$$

Con lo que, $\sigma\left(E(M)\right) \in \mathcal{C}$.

Finalmente, veamos que $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{ext}$: Sean

$$0 \longrightarrow M' \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta, con $M', M'' \in \mathcal{C}$, y $L \rightarrowtail M$ con $\sigma(L) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que f es la inclusión y que $L \leq M$. Note que, si $\sigma(L) \cap M' \neq 0$, entonces $\sigma\left(\sigma(L) \cap M'\right) = \sigma(L) \cap \sigma(L) \cap M' = \sigma(L) \cap M' \neq 0$, pues σ es exacto izquierdo. En este caso, tenemos entonces que existe $C \in \mathcal{C}$

y $N \in R$-Mod, con $0 \neq \sigma(N)$, tales que $L \hookleftarrow \sigma(L) \cap M' \hookleftarrow N \rightarrowtail C$, pues $M' \in \mathcal{C}$.

Ahora, si $\sigma(L) \cap M' = 0$, entonces $g\lfloor\colon \sigma(L) \rightarrowtail M''$ es un monomorfismo, de donde, existen $C \in \mathcal{C}$ y $N \in R$-Mod, con $0 \neq \sigma(N)$, tales que

$$L \hookleftarrow \sigma(L) \cong g\left(\sigma(L)\right) \hookleftarrow N \rightarrowtail C,$$

pues $M'' \in \mathcal{C}$. ■

Observación 3.54 *Sean $\sigma \in R$-pr exacto izquierdo y estable, y $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod. Si $\xi_{\sigma-nat}(\mathcal{C})$ denota la menor clase σ-natural que contiene a $\mathcal{C}$, entonces*

$$\xi_{\sigma-nat}(\mathcal{C}) = \{M \in R\text{-}Mod \mid \forall L \rightarrowtail M,\ \sigma(L) \neq 0 \text{ existen } C \in \mathcal{C}, N \in R\text{-}Mod,$$
$$\text{con } \sigma(N) \neq 0,\ \text{tales que } L \hookleftarrow N \rightarrowtail C\}$$

Proposición 3.55 *Sea $\sigma \in R$-pr exacto izquierdo y estable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) R es un anillo σ-semiartiniano izquierdo.

(2) Cada clase σ-natural está determinada por una familia de módulos simples de σ-torsión.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $\mathcal{C}$ una clase σ-natural no trivial, es decir $\mathcal{C} \neq \mathbb{F}_\sigma$, y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ la clase de todos los módulos simples de σ-torsión de $\mathcal{C}$. Note que la clase $\mathcal{S}$ es una familia no vacía pues R es un anillo σ-semiartiniano izquierdo. Consideremos $M \in \mathcal{C}$, no cero, y L un R-módulo, no cero, que se sumerge en M, con $\sigma(L) \neq 0$. Como R es un anillo σ-semiartiniano, existe $S \in R\text{-Simp} \cap \mathbb{T}_\sigma$ un submódulo de L. Por el Lema 3.51, $S \in \mathcal{C}$. Luego, por la Observación 3.54, se tiene que $M \in \xi_{\sigma\text{-nat}}(\mathcal{S})$. Se sigue que $\mathcal{C} = \xi_{\sigma\text{-nat}}(\mathcal{S})$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sean $M \in R$-Mod y L un submódulo, no cero, de M con $\sigma(L) \neq 0$. Por hipótesis, se tiene que, existe $\mathcal{S} \subseteq R$-Simp $\cap \mathbb{T}_\sigma$ tal que $\xi_{\sigma\text{-nat}}(M) = \xi_{\sigma\text{-nat}}(\mathcal{S})$. Ahora, como $M \in \xi_{\sigma\text{-nat}}(M)$, se tiene que existe $S \in \mathcal{S}$ tal que S se sumerge en L. Así, R es un anillo σ-semiartiniano izquierdo. ■

El siguiente teorema es casi una generalización de [1, Proposición 2.12].

Teorema 3.56 *Sea $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) Cada $S \in R$-Simp $\cap \mathbb{T}_\sigma$ es paraproyectivo.

(2) σ-(R-nat) $\subseteq \sigma$-(R-TORS).

(3) σ-(R-nat) $\subseteq \mathcal{L}_{/\sigma}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $\mathcal{C}$ una clase σ-natural. Como σ-(R-nat) $= \mathcal{L}_{\{\leq_\sigma, \oplus, \sigma(E()), ext\}}$ y σ-(R-TORS) $= \mathcal{L}_{\{/_\sigma, \oplus, ext\}}$ sólo resta demostrar que $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_{\{/_\sigma\}}$. Para ello, consideremos $M \in \mathcal{C}$ y $N \leq M$ con $\sigma(N) \neq 0$. Sea $S \in$ Simp $\cap \mathbb{T}_\sigma$ un submódulo de $\sigma(N)$, que existe pues R es un anillo σ-semiartiniano izquierdo. Si en el siguiente diagrama P es el pull-back de $M \twoheadrightarrow \sigma(N)$ y $S \rightarrowtail \sigma(N)$,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, two heads] \arrow[d, dashed, tail] & & S \arrow[d, tail] \\ M \arrow[r, two heads] & N \arrow[r, two heads] & \sigma(N). \end{tikzcd}$$

Entonces S es un cociente de P, pero por hipótesis S es paraproyectivo, por lo que S es un módulo simple, de σ-torsión, que se sumerge en P. Luego, S es un módulo simple, de σ-torsión, que se sumerge en M. Lo anterior muestra que cualquier submódulo simple de σ-torsión de $\sigma(N)$ pertenece a $\mathcal{C}$. Así, por la Proposición 3.55, $\sigma(N) \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ es una clase σ-cohereditaria.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es clara.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sean M un R-módulo y $S \in \mathrm{Simp} \cap \mathbb{T}_\sigma$ un cociente de M. Por hipótesis, se tiene que $S \in \xi_{\sigma\text{-nat}}(M)$. Se sigue de la Observación 3.54 que S se sumerge en M. Esto es, S es paraproyectivo. ■

Corolario 3.57 *Sea $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Si R satisface la condición* (σ-HH), *entonces*

$$\sigma\text{-(R-}nat) \subseteq \sigma\text{-(R-}TORS)\,.$$

Demostración. Se sigue de la Observación 3.23 y del Teorema 3.56. ■

Definición 3.58 *Sea $\sigma \in R$-pr y M un R-módulo. Diremos que un submódulo N de M es σ-esencial en M si $N \cap L \neq 0$ para cualquier submódulo L de M con $\sigma(L) \neq 0$.*

Observación 3.59 *Sean $\sigma \in R$-pr y M un R-módulo. Denotaremos por $Zoc_\sigma(M)$ a la suma de los submódulos simples de σ-torsión de M. Así, si $Zoc_\sigma(M) \neq 0$, entonces $\sigma(M) \neq 0$. También se tiene que*

$$Zoc_\sigma(M) = Zoc_\sigma\left(\sigma(M)\right).$$

Observación 3.60 *Si R es un anillo σ-semiartiniano, se tiene que*

$$\sigma(M) \neq 0 \Leftrightarrow Zoc_\sigma(M) \neq 0.$$

Más aún, si $\sigma(M) \neq 0$, entonces $Zoc_\sigma(M)$ es un submódulo σ-esencial de $\sigma(M)$.

Definición 3.61 *Sea R un anillo que satisface la condición (σ-HH) y $\sigma \in R$-pr exacto y estable. Definimos para cada ordinal α, un prerradical, que denotaremos por Zoc_σ^α, como sigue: Zoc_σ^0 como el prerradical $\underline{0}$. Ahora, para un ordinal sucesor $\alpha+1$, definimos $Zoc_\sigma^{\alpha+1}(M)/Zoc_\sigma^\alpha(M) = Zoc_\sigma(M/Zoc_\sigma^\alpha(M))$, como en el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Zoc_\sigma^\alpha(M)) \arrow[r] & M \arrow[r] & M/Zoc_\sigma^\alpha(M) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Zoc_\sigma^\alpha(M)) \arrow[r] \arrow[u, equal] & Zoc_\sigma^{\alpha+1}(M) \arrow[r] \arrow[u, hook] & Zoc_\sigma(M/Zoc_\sigma^\alpha(M)) \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0.
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Finalmente, si α es un ordinal límite, definimos $Zoc_\sigma^\alpha(M) = \sum_{\beta<\alpha} Zoc_\sigma^\beta(M)$.

Lema 3.62 *Sea $\sigma \in R$-pr exacto y estable y $\mathcal{C}$ una clase de σ-torsión hereditaria. Si R satisface la condición (σ-HH), se tiene que $M \in \mathcal{C}$ si y sólo si cada uno de los subcocientes simples de σ-torsión de $\sigma(M)$ pertenecen a $\mathcal{C}$.*

Demostración. Supongamos primero que $M \in \mathcal{C}$. Note que si $\sigma(M) = 0$, el resultado se sigue por vacuidad. Ahora, si $\sigma(M) \neq 0$ y $S \in R\text{-}simp \cap \mathbb{T}_\sigma$ es un subcociente de $\sigma(M)$, entonces por la Observación 3.23, S se sumerge en $\sigma(M)$. Como $\mathcal{C}$ es una clase σ-hereditaria, se tiene que $S \in \mathcal{C}$.

Supongamos ahora que cualquier subcociente simple de σ-torsión de $\sigma(M)$ pertenece a $\mathcal{C}$ y veamos que $M \in \mathcal{C}$.

Note que si $\sigma(M) = 0$, entonces $M \in \mathbb{F}_\sigma$ y luego $M \in \mathcal{C}$, pues $\mathbb{F}_\sigma$ está contenida en cualquier clase σ-hereditaria. Podemos entonces suponer que $\sigma(M) \neq 0$. Como σ es exacto y estable, se escinde centralmente, así que $M = \sigma(M) \oplus M'$, con $M' \in \mathbb{F}_\sigma$. Por lo tanto, es suficiente mostrar que $\sigma(M) \in \mathcal{C}$. Ahora, como R satisface la condición (σ-HH), del Corolario 3.28, se sigue que R es σ-semiartiniano izquierdo. Note también que $Zoc_\sigma(M) \in \mathcal{C}$, pues $\mathcal{C}$ es una clase de σ-torsión hereditaria y cada submódulo de σ-torsión de M es un subcociente de $\sigma(M)$ (cada submódulo de σ-torsión está contenido en $\sigma(M)$ y $\sigma(M)$ es un cociente de sí mismo). Por lo tanto, si ocurre que $\sigma(M) = Zoc_\sigma(M)$, entonces terminamos. Por otro lado, si $\sigma(M)/Zoc_\sigma(M) \neq 0$, tenemos dos casos, o $\sigma(M)/Zoc_\sigma(M) \in \mathbb{F}_\sigma$ o bien $\sigma(M)/Zoc_\sigma(M) \notin \mathbb{F}_\sigma$.

En el primer caso, $\sigma(M)/Zoc_\sigma(M) \in \mathcal{C}$, pues $\mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathcal{C}$. Ahora, dado que $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo extensiones y que en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Zoc_\sigma(M) \rightarrowtail \sigma(M) \twoheadrightarrow \sigma(M)/Zoc_\sigma(M) \longrightarrow 0$$

los módulos a los extremos pertenecen a $\mathcal{C}$, se tiene que $\sigma(M) \in \mathcal{C}$.

En el segundo caso, observemos primero que, como σ es exacto y por ello en particular un radical, $\mathbb{T}_\sigma$ es una clase de torsión. Teniendo esto en cuenta, es fácil verificar, por inducción sobre μ, que $Zoc_\sigma^\mu(N)$ es de σ-torsión para todo ordinal μ y cualquier módulo N.

Mostraremos ahora, de nuevo usando inducción, que para cualquier ordinal α, el módulo $Zoc_\sigma^\alpha(\sigma(M))$ pertenece a $\mathcal{C}$.

Es claro que

$$\underline{0}(\sigma(M)) = Zoc_\sigma^0(\sigma(M)) =_R 0$$

pertenece a $\mathcal{C}$. Ahora, supongamos que α es un ordinal tal que $Zoc_\sigma^\alpha(\sigma(M))$ pertenece a $\mathcal{C}$. Consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Zoc_\sigma^\alpha(\sigma(M)) \rightarrowtail Zoc_\sigma^{\alpha+1}(\sigma(M)) \twoheadrightarrow Zoc_\sigma\left(\frac{\sigma(M)}{Zoc_\sigma^\alpha(\sigma(M))}\right) \longrightarrow 0.$$

Note que cualquier submódulo simple de σ-torsión de $Zoc_\sigma(\sigma(M)/Zoc_\sigma^\alpha(\sigma(M)))$ es un subcociente simple de σ-torsión de $\sigma(M)$, que por hipótesis está en $\mathcal{C}$.

Luego, dado que $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo sumas directas y σ-cohereditaria, se tiene que $Zoc_{\sigma}\left(\sigma\left(M\right)/Zoc_{\sigma}^{\alpha}\left(\sigma\left(M\right)\right)\right)$ pertenece a $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es cerrada bajo extensiones, se sigue que $Zoc_{\sigma}^{\alpha+1}\left(\sigma\left(M\right)\right)\in\mathcal{C}$.

Supongamos ahora que α es un ordinal límite y que $Zoc_{\sigma}^{\beta}\left(\sigma\left(M\right)\right)\in\mathcal{C}$ para cada $\beta<\alpha$. Como $Zoc_{\sigma}^{\alpha}\left(\sigma\left(M\right)\right)=\sum\limits_{\beta<\alpha}Zoc_{\sigma}^{\beta}\left(\sigma\left(M\right)\right)$ y esta suma es un cociente de $\bigoplus\limits_{\beta<\alpha}Zoc_{\sigma}^{\beta}\left(\sigma\left(M\right)\right)$, se tiene que $Zoc_{\sigma}^{\alpha}\left(\sigma\left(M\right)\right)=\sigma\left(Zoc_{\sigma}^{\alpha}\left(\sigma\left(M\right)\right)\right)\in\mathcal{C}$, pues $\mathcal{C}$ es una clase cerrada bajo sumas directas y σ-cohereditaria.

Veamos ahora que $\sigma(M)=Zoc_{\sigma}^{\gamma}\left((\sigma(M)\right)$ para algún ordinal γ. Como $\left\{Zoc_{\sigma}^{\alpha}\left(\sigma\left(M\right)\right)\right\}$ es una cadena ascendente de submódulos de $\sigma\left(M\right)$, no pueden ser todos distintos, así que existe un primer ordinal γ tal que $Zoc_{\sigma}^{\gamma}\left(\sigma\left(M\right)\right)=Zoc_{\sigma}^{\gamma+1}\left(\sigma\left(M\right)\right)$. De aquí que

$$0=Zoc_{\sigma}^{\gamma+1}\left(\sigma\left(M\right)\right)/Zoc_{\sigma}^{\gamma}\left(\sigma\left(M\right)\right)=Zoc_{\sigma}(\sigma(M)/Zoc_{\sigma}^{\gamma}\left(\sigma\left(M\right)\right)).$$

Lo cual solo puede ocurrir si $\sigma(M)/Zoc_{\sigma}^{\gamma}\left(\sigma\left(M\right)\right)=0$. Por lo tanto, $\sigma(M)=Zoc_{\sigma}^{\gamma}\left(\sigma\left(M\right)\right)$. Así, $\sigma(M)\in\mathcal{C}$.

Finalmente, concluimos que $M\in\mathcal{C}$. ■

Teorema 3.63 *Sea $\sigma\in R$-pr exacto y coestable. Si R satisface la condición* (σ-HH), *entonces*

$$\sigma\text{-(R-}tors)\subseteq\sigma\text{-(R-}nat).$$

Demostración. Sea $\mathcal{C}\in\sigma$-(R-tors). Para ver que $\mathcal{C}\in\sigma$-(R-nat) recordemos que σ-(R-nat) $=\mathcal{L}_{\leq_{\sigma},\oplus,\sigma(E()),ext}$ y que σ-(R-tors) $=\mathcal{L}_{\leq_{\sigma},\oplus,/_{\sigma},ext}$. Así, es suficiente mostrar que si $M\in\mathcal{C}$, entonces $\sigma\left(E(M)\right)\in\mathcal{C}$. Consideremos entonces $M\in\mathcal{C}$. Note que, por ser $\mathcal{C}$ una clase σ-hereditaria, se tiene que $\sigma(M)\in\mathcal{C}$.

Ahora, observe que para cualquier R-módulo N se tiene que

$$Zoc_{\sigma}(N) = Zoc_{\sigma}(E(N)), \tag{3.3}$$

pues N es un submódulo esencial de $E(N)$.

Por otro lado, como σ es un prerradical exacto y estable, en particular es exacto izquierdo y estable, por lo que

$$\sigma(E(M)) = E\left(\sigma(M)\right). \tag{3.4}$$

Luego, del Lema 3.62, y las igualdades (3.3) y (3.4), se tiene que

$$\begin{aligned}
\sigma(M) \in \mathcal{C} &\Longleftrightarrow Zoc_{\sigma}\left(\sigma(M)\right) \in \mathcal{C} \\
&\Longleftrightarrow Zoc_{\sigma}(E\left(\sigma(M)\right)) \in \mathcal{C} \\
&\Longleftrightarrow Zoc_{\sigma}(\sigma\left(E\left(M\right)\right)) \in C \\
&\Longleftrightarrow \sigma\left(E\left(M\right)\right) \in \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

Finalmente, como $\sigma(M) \in \mathcal{C}$, concluimos que $\sigma\left(E(M)\right) \in \mathcal{C}$. ■

Teorema 3.64 *Sean $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Si R satisface la condición* (σ-HH), *entonces*

$$\sigma\text{-}\left(R\text{-}nat\right) = \sigma\text{-}\left(R\text{-}conat\right).$$

Demostración. Consideremos $\mathcal{C}$ una clase σ-natural, es decir, una clase que satisface la condición $(\sigma\text{-}N)$. Demostraremos que $\mathcal{C}$ satisface la condición $(\sigma\text{-}CN)$, es decir, veremos que si M es un R-módulo tal que para cualquier cociente $M \twoheadrightarrow L$, con $\sigma(L) \neq 0$ existen $C \in \mathcal{C}$ y $N \in R$-Mod, con $\sigma(N) \neq 0$, que cumplen que $L \twoheadrightarrow N \twoheadleftarrow C$, entonces $M \in \mathcal{C}$.

Sea $f : K \rightarrowtail M$ un monomorfismo, con $\sigma(K) \neq 0$. Como R satisface la condición (σ-HH), por el Corolario 3.28, se tiene que R es un anillo σ-semiartiniano izquierdo, así que existe $S \in R\text{-}Simp \cap \mathbb{T}_\sigma$ tal que S se sumerge en K y por lo tanto se sumerge en M. Por la Observación 3.23, se tiene que S es parainyectivo, por lo que S es un cociente de M. Ahora, por hipótesis, tenemos que existe $C \in \mathcal{C}$ tal que S es un cociente de C. Por la Observación 3.23, tenemos que S es paraproyectivo, por lo que S se sumerge en C. Note que nos encontramos en la siguiente situación

$$\begin{tikzcd} M & K \arrow[l, tail] \\ & S \arrow[u, tail] \arrow[r, tail] & C. \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

Como $\mathcal{C}$ cumple la condición $(\sigma\text{-}N)$, de (3.5), se tiene que $M \in \mathcal{C}$. Es decir, $\mathcal{C} \in \sigma\text{-}(R\text{-conat})$.

Ahora, consideremos $\mathcal{C}$ una clase σ-conatural. Mostraremos que $\mathcal{C}$ satisface la condición $(\sigma\text{-}N)$, es decir, mostraremos que si M es un R-módulo tal que para cualquier monomorfismo $L \rightarrowtail M$, con $\sigma(L) \neq 0$ existen $C \in \mathcal{C}$ y $N \in R$-Mod, con $\sigma(N) \neq 0$, que cumplen que $L \leftarrowtail N \rightarrowtail C$, entonces $M \in \mathcal{C}$.

Consideremos entonces un epimorfismo $f : M \twoheadrightarrow K$, con $\sigma(K) \neq 0$. Como R satisface la condición (σ-HH), por el Corolario 3.28, R es un anillo σ-max izquierdo, así que existe $S \in R\text{-}Simp \cap \mathbb{T}_\sigma$ tal que S es un cociente de K y por lo tanto un cociente de M. Ahora, por la Observación 3.23, se tiene que S es paraproyectivo, por lo que S se sumerge en M. Luego, por hipótesis, tenemos que existe $C \in \mathcal{C}$ tal que S se sumerge en C. Note que, de la Observación 3.23, se tiene que S es parainyectivo, por lo que S es un cociente de C. Así, tenemos la siguiente situación

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads] & K \arrow[d, two heads] & \\ & S & C. \arrow[l, two heads] \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Ahora, como $\mathcal{C} \in \sigma\text{-}(R\text{-conat})$, $\mathcal{C}$ cumple la condición $(\sigma\text{-}CN)$, por lo que, de (3.6), se tiene que $M \in \mathcal{C}$. Así, $\mathcal{C} \in \sigma\text{-}(R\text{-nat})$. ■

Teorema 3.65 *Sea $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Si $\sigma\text{-}(R\text{-}nat) = \sigma\text{-}(R\text{-}conat)$, entonces cualquier módulo $S \in R\text{-}Simp \cap \mathbb{T}_\sigma$ es parainyectivo y paraprojectivo.*

Demostración. Sea M un R-módulo y $S \in R\text{-}Simp \cap \mathbb{T}_\sigma$. Si S se sumerge en M, como $S = \sigma(S)$, se tiene que $S \in \xi_{\sigma\text{-}nat}(M)$. Ahora, dado que $\sigma\text{-}(R\text{-nat}) = \sigma\text{-}(R\text{-conat})$, se sigue que $\xi_{\sigma\text{-}nat}(M) = \xi_{\sigma\text{-}conat}(M)$. Así, $S \in \xi_{\sigma\text{-}conat}(M)$, por lo que, de 3.37, S es un cociente de M, es decir, S es parainyectivo.

Por otro lado, si S es un cociente de M, entonces $S \in \xi_{\sigma\text{-}conat}(M)$, pues $S = \sigma(S)$. Se sigue del hecho de que $\sigma\text{-}(R\text{-nat}) = \sigma\text{-}(R\text{-conat})$, que $S \in \xi_{\sigma\text{-}nat}(M)$. Ahora, por 3.54, se tiene que S se sumerge en M, esto es, S es paraproyectivo. ■

Observación 3.66 *Sea $\sigma \in R$-pr. Si σ se escinde centralmente, entonces existe un idempotente central $e \in R$, tal que $\sigma(\_) = e \cdot \_$. Ahora, como $R = Re \oplus R(1-e)$, se sigue que $\sigma(R) \cong R/(1-e)R$, así que un $\sigma(R)$-módulo es un R-módulo anulado por $1-e$. Además, si M es un $\sigma(R)$-módulo, entonces $M = \sigma(M)$.*

Lema 3.67 *Sea $\sigma \in R$-pr. Si σ se escinde centralmente, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) R satisface la condición (σ-HH).

(2) $\sigma(R)$ satisface la condición (HH).

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean M, N dos $\sigma(R)$-módulos y sea $0 \neq f \in Hom_{\sigma(R)}(M, N)$. Como M y N son también R-módulos, se sigue que $0 \neq f \in Hom_R(M, N)$. Ahora, por la Observación 3.66, se tiene que $M = \sigma(M)$, así que $0 \neq f \in Hom_R(\sigma(M), N)$. Como R satisface la condición (σ-HH), se sigue que existe $0 \neq g \in Hom_R(N, \sigma(M))$, de donde $0 \neq g \in Hom_{\sigma(R)}(N, M)$. Esto es, $\sigma(R)$ satisface la condición (HH).

(2) $\Rightarrow$ (1) Sean M, N dos R-módulos tales que $\sigma(M), \sigma(N) \neq 0$ y $0 \neq f \in Hom_R(\sigma(M), N)$. Note que $\sigma(M)$ y $\sigma(N)$ son dos $\sigma(R)$-módulos. Ahora, como σ es un prerradical, f se puede correstringir a $\sigma(N)$, es decir, $f\lceil\colon \sigma(M) \to \sigma(N)$ es un $\sigma(R)$-morfismo no cero. Así, existe $0 \neq h \in Hom_{\sigma(R)}(\sigma(N), \sigma(M))$, pues $\sigma(R)$ satisface la condición (HH). Note que nos encontramos en la siguiente situación.

$$\begin{tikzcd}
\sigma(M) \arrow[rr, "f\lceil"] \arrow[d, equal] & & \sigma(N) \arrow[d, hook] \arrow[dll, "h\neq 0"] \\
\sigma(M) & & N = \sigma(N) \oplus (1-e)N. \arrow[ll, dashed, "h\oplus\overline{0}"]
\end{tikzcd}$$

Entonces, si $\overline{0}$ denota el morfismo cero, se tiene que $h \oplus \overline{0}$ es un morfismo no cero de N a $\sigma(M)$, es decir, $Hom_R(N, \sigma(M)) \neq 0$.

Veamos ahora que, si $Hom_R(N, \sigma(M)) \neq 0$, entonces $Hom_R(\sigma(M), N) \neq 0$. Sea $0 \neq g \in Hom_R(N, \sigma(M))$. Como σ se escinde centralmente, por la Proposición 3.8, σ es exacto y en particular exacto izquierdo, por lo que σ es idempotente y $\mathbb{T}_\sigma$ es una clase hereditaria. Dado que $0 \neq g(N) \leq \sigma(M)$, se tiene que $g(N) \in \mathbb{T}_\sigma$. Consideremos ahora el epimorfismo $g\lceil\colon N \twoheadrightarrow g(N)$. Por ser σ cohereditario, se tiene que el morfismo $g\lceil : \sigma(N) \to \sigma\left(g(N)\right)$ es un epimorfismo. Así, si $g(\sigma(N)) = 0$, entonces $g(N) = \sigma\left(g(N)\right) = 0$, lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto $g\lfloor\colon \sigma(N) \to \sigma(M)$ es un R-morfismo (y por lo tanto un $\sigma(R)$-morfismo) no cero. Luego, dado que $\sigma(R)$ satisface la condición (HH), se tiene que existe $0 \neq h \in Hom_{\sigma(R)}(\sigma(M), \sigma(N))$. Finalmente, $0 \neq \iota \circ h \in Hom_R(\sigma(M), N)$, donde ι denota la inclusión de $\sigma(N)$ en N. Esto es, $Hom_R(\sigma(M), N) \neq 0$.

Tenemos así que R satisface la condición (σ-HH). ■

El siguiente resultado, el último de este trabajo, generaliza el Teorema 2.16.

Teorema 3.68 *Sea R un anillo y $\sigma \in R$-pr exacto y coestable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *R satisface la condición* (σ-HH).

(2) *R es un anillo σ-* (R-*Mod*)*-retráctil y cada $S \in R$-Simp $\cap\, \mathbb{T}_\sigma$ es paraproyectivo.*

(3) *Cada $S \in R$-Simp $\cap\, \mathbb{T}_\sigma$ es paraproyectivo y parainyectivo.*

(4) σ-(R-*TORS*) $=$ σ-(R-*conat*) $=$ σ-(R-*tors*) $=$ σ-(R-*nat*).

(5) σ-(R-*nat*) $=$ σ-(R-*conat*).

(6) *$R = \sigma(R) \times R_2$, donde $\sigma(R)$ es un anillo que satisface la condición (HH).*

(7) $R = \sigma(R) \times R_2$, *donde* $\sigma(R)$ *es isomorfo a un producto finito de anillos, cada uno de los cuales es un anillo completo de matrices sobre un anillo perfecto por ambos lados y local.*

Demostración. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) es el Teorema 3.29. (1) $\Rightarrow$ (5) es el Teorema 3.64. (5) $\Rightarrow$ (3) Se sigue del Teorema 3.65. (1) $\Rightarrow$ (4) es consecuencia del Teorema 3.48 y del Teorema 3.64. (4) $\Rightarrow$ (5) Es claro. (1) $\Leftrightarrow$ (6) Es consecuencia del Lema 3.67 y porque σ se escinde centralmente. (6) $\Leftrightarrow$ (7) Se sigue del Teorema 2.16. ■

Finalmente, en la siguiente página, anexamos un diagrama que ilustra las relaciones existentes entre las retículas estudiadas en este capítulo.

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c} R=\sigma(R)\times R_2, \\ \text{donde } \sigma(R) \text{ es isomorfo a un producto finito de anillos,} \\ \text{cada uno de los cuales es un anillo completo de matrices} \\ \text{sobre un anillo perfecto por ambos lados y local.} \end{array} \arrow[d, Leftrightarrow, "\sigma \text{ exacto y coestable}"] & \\
\begin{array}{c} R \text{ es un anillo} \\ \sigma\text{- (BKN)} \end{array} \arrow[ddr, Rightarrow, "\sigma \text{ exacto y coestable}"] & \begin{array}{c} R=\sigma(R)\times R_2, \\ \text{donde } \sigma(R) \text{ es un anillo} \\ \text{que satisface la condición } (HH) \end{array} \arrow[dd, Leftrightarrow, "\sigma \text{ exacto y coestable}"] & \begin{array}{c} R \text{ es un anillo} \\ \sigma\text{- (R-Mod)-retráctil} \end{array} \\
\sigma\text{-(R-nat)} \subseteq \sigma\text{-(R-TORS)} & & R\text{-}(\sigma\text{-TORS}) \subseteq R\text{-}(\sigma\text{-conat}) \\
\sigma\text{-(R-conat)} \subseteq \sigma\text{-(R-tors)} \arrow[d, Leftrightarrow, "\sigma \text{ exacto y coestable}"] & \begin{array}{c} R \text{ satisface la} \\ \text{condición } (\sigma\text{-HH}) \end{array} \arrow[ul, Rightarrow, "\sigma \text{ exacto y coestable}"'] \arrow[uur, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow, "\sigma \text{ exacto y coestable}"'] \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Leftrightarrow, "\sigma \text{ exacto y coestable}"] & \sigma\text{-(R-nat)} \subseteq \sigma\text{-(R-TORS)} \arrow[d, Leftrightarrow, "\sigma \text{ exacto y coestable}"] \\
\begin{array}{c} \text{Cualquier } S \in R\text{-}Simp \cap \mathbb{T}_\sigma \\ \text{es parainyectivo} \end{array} \arrow[dd, Rightarrow, "\sigma \text{ exacto izquierdo}"] & & \begin{array}{c} \text{Cualquier } S \in R\text{-}Simp \cap \mathbb{T}_\sigma \\ \text{es paraproyectivo} \end{array} \arrow[dd, Rightarrow, "\sigma \text{ exacto izquierdo}"] \\
 & \sigma\text{-(R-TORS)} = \sigma\text{-(R-conat)} = \sigma\text{-(R-tors)} = \sigma\text{-(R-nat)} \arrow[d, Leftrightarrow, "\sigma \text{ exacto y coestable}"] & \\
\begin{array}{c} R \text{ es un anillo} \\ \sigma\text{-max izquierdo} \end{array} & \sigma\text{-(R-nat)} = \sigma\text{-(R-conat)} & \begin{array}{c} R \text{ es un anillo} \\ \sigma\text{-semiartiniano izquierdo} \end{array}
\end{tikzcd}$$

Bibliografía

[1] Alvarado-García, A.; Cejudo-Castilla, C.; Rincón-Mejía, H.; Vilchis-Montalvo, I. F.; Zorrilla-Noriega, M. On Boolean Lattices of Module Classes, Algebra Colloquium 25 : 2 (2018) 285-294

[2] Alvarado-García, A., Cejudo-Castilla, C., Rincón-Mejía, H., Vilchis-Montalvo, F.: Pseudocomplements and strong pseudocomplements in lattices of module classes. J. Algebra Appl. 17(1), 1850016 (2018)

[3] Alvarado-García, A,; Cejudo-Castilla, C.; Rincón-Mejía, H., Vilchis Montalvo, F.: Rings for Which the Lattice of Hereditary Torsion Theories and the Lattice of Natural Classes are Isomorphic, Communications in Algebra, 41:11, 4089-4097,(2013) DOI: 10.1080/00927872.2012.689589

[4] Alvarado-García, A.; Rincón-Mejía H.; Ríos-Montes, J. (2001). On the lattices of natural and conatural classes in R-Mod, 29:2, 541-556.

[5] Alvarado-García, A.; Rincón-Mejía H.; Ríos-Montes, J. (2001). On some lattices of module classes, Journal of Algebra and Its Applications, Vol. 5, No. 1, (2006), 105-117.

[6] Anderson, F. W., Fuller, K. R.; *Rings and Categories of Modules*, second edition; New York: Springer-Verlag, 1992

[7] Bican, L.; Kepka T. and Němec, P. Rings, Modules and Preradicals (Marcel Dekker, New York, 1982).

[8] Cerda-León E., Rincón-Mejía, H. *Big Lattices of module classes induced by preradicals*, São Paulo J. Math. Sci., 14, 185-206, 2020.

[9] Cerda-León E., Rincón-Mejía, H. *On lattices associated to rings with respect to a preradical* International Electronic Journal of Algebra, Volume 31, 13-37, 2022.

[10] Chiba, Katsuo; Tominaga, Hisao. On strongly regular rings. Proc. Japan Acad. 49 (1973), no. 6, 435–437.

[11] Cozzens, J. H., *Homological properties of the ring of differential polynomials*, Bulletin of the American Mathematical Society 76(1), 75–79, 1970.

[12] Ecevit & M. T. Koşan *On rings all of whose modules are retractable*, Arch. Math. (Brno) 45 (2009), 71–74.

[13] Dauns, J., Zhou, Y., *Classes of Modules*, Pure and Applied Mathematics, 281, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton FL., 2006.

[14] Fernández-Alonso, R.; Raggi-Cárdenas, F.; Ríos-Montes J.; Rincón-Mejía, H. ; Signoret C. The lattice structure of preradicals II. Partitions, J. Algebra Appl. 1 (2) (2002) 201–214.

[15] Golan, J. S., *Torsion Theories*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. **29**, Longman Scientific and Technical, Harlow, John Wiley and Sons, New York, 1986.

[16] Khuri, S. M., *Endomorphism rings and lattice isomorphisms*, J. Algebra, 56(1979), 401-408.

[17] Koşan, M. Tamer & Žemlička, Jan (2014) Mod-Retractable Rings, Communications in Algebra, 42:3, 998-1010.

[18] Hugo Alberto Rincón-Mejía, José Patricio Sánchez-Hernández, Martha Lizbeth Shaid Sandoval-Miranda & Manuel Zorrilla-Noriega (2019) On compactness and cocompactness conditions for R-tors, R-pr and (big) lattices of classes of modules, Communications in Algebra, 47:12, 5240-5260, DOI: 10.1080/00927872.2019.1617872.

[19] Rincón-Mejía, Hugo & Zorrilla-Noriega, Manuel. (2013). On some relations between the lattices R-nat, R-conat and R-tors and the rings they characterize. Journal of Algebra and Its Applications. 12.

[20] Stenström, B.; *Rings of Quotients*; Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1975

[21] Tütüncü, Derya & Toksoy, Sultan & Tribak, Rachid. (2012). *Noetherian and Artinian Lattices.* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.

[22] Wisbauer, R.; *Foundations of Module and Ring Theory*; Gordon and Breach Science Publishers, Reading.

[23] Zhou, Y. *The lattice of natural classes of modules.* Communications in Algebra, 24(5), 1637-1648 (1996).