



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
“ZARAGOZA”**

**ESTUDIO DEL FLUJO DE UN LÍQUIDO DE
BINGHAM EN OCLUSIONES CENTRALES Y
PERIFÉRICAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO QUÍMICO

P R E S E N T A:

RODRIGO GONZÁLEZ GARCÍA



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA
ASESORES:
DR. FAUSTO CALDERAS GARCIA
M. EN C. LUIS ANTONIO RAMÍREZ TORRES**

CIUDAD DE MÉXICO 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

- ❖ A Dios por permitirme llegar tan lejos a pesar de todos los obstáculos de mi vida.
- ❖ A la máxima casa de estudios, mi querida Universidad Autónoma de México, en particular a mi institución de la cual estoy muy orgulloso de pertenecer la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.
- ❖ A la carrera de Ingeniería Química por la formación recibida.
- ❖ A mi asesor de tesis el Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia, por todos sus conocimientos que con gusto compartió conmigo, por su dedicación, paciencia y tiempo brindado para poder concluir este trabajo de licenciatura, por todos sus consejos fuera del ámbito escolar, que me ayudaron a tener una perspectiva diferente sobre lo que quería ser y hacer de mi vida, y sobre todo gracias por creer en mí.
- ❖ A todos los profesores que me apoyaron durante mi carrera universitaria.
- ❖ Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- ❖ Al seminario del laboratorio de Reología y Fenómenos de Transporte

DEDICATORIAS

- ❖ A mi querido padre Rodrigo González Hernández: Quien ha sido el pilar de mi vida, del cual estoy sumamente orgulloso de ser su hijo, porque sin sus grandes consejos, sin sus charlas que podían durar horas y horas, sin su apoyo y sin ese amor y preocupación de padre, yo jamás hubiera logrado llegar hasta aquí. Solo espero que un día puedas sentirte lo bastante orgulloso de mí. Jamás olvides que soy todo lo que soy gracias a ti. Te amo con toda mi vida.
- ❖ A mi grandiosa madre Ana Lilia García Chanocua: Quien ha sido mi razón de seguir adelante día con día, gracias por escucharme, por cobijarme cuando más lo necesitaba, por enseñarme a ser una buena persona y hacer siempre lo correcto, sin ti no hubiera sido la persona que soy hoy en día. Nunca dejes de sonreír, no apagues esa energía que solo tú puedes darme. Te amo con toda mi vida.
- ❖ A mi pequeña hermanita Emily Anahí González García: Gracias por estar conmigo en los peores momentos de mi vida, por escucharme siempre, darme consejos, regañarme, por estar para mí cuando más te necesito y sobre todo por ser mi amiga, eres la única persona que me conoce tal cual soy, con mis ocurrencias y defectos, no sabes lo importante que eres para mí. Te amo con toda mi vida.
- ❖ A mi mejor amiga Diana Laura Valencia Sánchez: Gracias por hacer más divertida y agradable mi estadía en la Facultad, te agradezco porque gracias a ti conocí el significado de la palabra incondicional, eres y serás siempre un gran apoyo, eres sin duda una persona que siempre querré conservar en mi vida. Espero jamás te alejes de mí, te amo.
- ❖ A mi asesor de tesis Edtson Emilio Herrera Valencia: Gracias por todo, por su paciencia, por su apoyo, por su confianza. Admiro la gran persona que es, tanto académicamente como personalmente, espero algún día poder llegar a ser tan grande como usted.
- ❖ A mis queridos amigos; Francisco, Iván y Marlon, gracias por todos esos buenos momentos en la facultad.
- ❖ Gracias a todas aquellas personas que siempre creyeron en mí.

ÍNDICE

I	CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN	2
1.1	¿Qué es una oclusión?.....	3
1.2	Aterosclerosis.....	3
1.2.1	Capa intima	4
1.3	Tipos de oclusión	4
1.4	Flujo pulsátil	5
1.5	Flujos inestables	6
1.6	Aplicaciones.....	7
1.7	Objetivos	9
1.8	Hipótesis del trabajo.....	9
1.9	Distribución del material.....	9
II	CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO	10
2.1	Reología	11
2.2	Esfuerzo	11
2.3	Fluidos newtonianos y no-newtonianos.....	13
2.4	Modelo reológico de Bingham.....	13
2.5	Numero de Bingham.....	14
2.6	La sangre humana	14
2.6.1	Flujo en la sangre	14
2.7	Hemorreología	16
III	CAPÍTULO III SISTEMA FÍSICO	18
3.1	Geometría.....	19
3.2	Restricciones y suposiciones del proceso	20
3.3	Ecuaciones de continuidad y movimiento	20
3.3.1	Ecuación de continuidad	20
3.3.2	Ecuación de movimiento.....	21
3.4	Ecuación constitutiva	21
3.4.1	Modelo reológico de Bingham.....	21
3.4.2	Modelo reológico de Bingham adimensional	22
3.5	Flujo volumétrico	22
3.6	Gradiente de presión pulsátil.....	22
IV	CAPÍTULO IV MODELADO MATEMÁTICO	23

4.1 Cálculo del campo de velocidades en geometría capilar, para el modelo reológico de Bingham.....	24
4.1.1 Campo de velocidad homogéneo.....	25
4.1.2 Campo de velocidad parabólico.....	25
4.2 Cálculo del flujo volumétrico a gradiente de presión constante en geometría capilar, para el modelo reológico de Bingham.....	25
4.3 Cálculo del campo de velocidades en corona circular, para el modelo reológico de Bingham.....	26
4.3.1 Cálculo de la velocidad ($\Phi -$) en la región I para el intervalo $\kappa \leq \xi \leq \lambda -$	28
4.3.2 Cálculo de la velocidad ($\Phi +$) en la región III para el intervalo $\lambda + \leq \xi \leq 1$	28
4.3.3 Cálculo de la velocidad ($\Phi 0$) en la región II para el intervalo $\lambda - \leq \xi \leq \lambda +$	28
4.4 Cálculo del flujo volumétrico a gradiente de presión constante en corona circular, para el modelo reológico de Bingham.....	29
4.4.1 Velocidad volumétrica de flujo para $Q -$	29
4.4.2 Velocidad volumétrica de flujo para $Q 0$	30
4.4.3 Velocidad volumétrica de flujo para $Q +$	30
4.5 Cálculo del aumento volumétrico para el modelo reológico de Bingham.....	32
V CAPÍTULO V ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	35
5.1 Geometría Capilar.....	36
5.1.1 Fluidez aparente en función del número de Bingham.....	36
5.1.2 Flujo volumétrico en función del número de Bingham.....	37
5.2 Geometría corona circular.....	38
5.2.1 Fluidez aparente en función del número de Bingham.....	38
5.2.2 Flujo volumétrico en función del número de Bingham.....	39
5.3 Aumento volumétrico en un capilar.....	40
5.4 Aumento volumétrico en una corona circular.....	41
VI CAPÍTULO VI CONCLUSIONES.....	42
VII APÉNDICE.....	46
VIII BIBLIOGRAFÍA.....	76

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Capas de la arteria.....	4
Figura 2. Oclusión periférica: Las lipoproteínas se adhieren a la pared arterial..	5
Figura 3. Oclusión central: Las lipoproteínas se acumulan en el centro de la arteria	5
Figura 4. Esfuerzo normal en una barra.....	11
Figura 5. Representación del tensor de esfuerzos tridimensional. Los componentes que tienen los mismos números en su subíndice son esfuerzos normales, mientras que los restantes son esfuerzos cortantes.....	12
Figura 6. Capilar de radio $r=R$ y longitud axial $z=L$	19
Figura 7. Corona circular de radios: $r=\kappa R$, $r=\lambda R$ y $r=R$, y longitud axial $z=L$	20
Figura 8. Perfil de velocidades de un fluido de Bingham en geometría capilar. 25	
Figura 9. Perfil de velocidades de un fluido de Bingham en una corona circular.	27
Figura 10. Fluidez aparente vs número de Bingham, para una geometría capilar.	36
Figura 11. Flujo volumétrico vs número de Bingham, para una geometría capilar.....	37
Figura 12. Fluidez aparente vs Numero de Bingham, para una corona circular.	38
Figura 13. Fluidez aparente vs Numero de Bingham, con diferentes valores de Lambda y Kappa.....	39
Figura 14. Flujo volumétrico vs Numero de Bingham, para una corona circular.	39
Figura 15. Aumento en el flujo volumétrico vs Numero de Bingham, para una geometría capilar.....	40
Figura 16. Aumento en el flujo volumétrico vs Numero de Bingham para una corona circular.....	41

GLOSARIO

Aumento en el flujo:	Porcentaje de aumento del flujo pulsátil con respecto a un gradiente de presión constante.
Deformación:	Cambio de posición de un punto material a otro.
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema.
Ecuación de continuidad:	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo.
Esfuerzo en la pared:	Esfuerzo evaluado en la pared.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Fluido:	Sustancia que al aplicarle un esfuerzo cortante sufre una deformación continua e irreversible.
Fluido de Bingham:	Material que se comportará como un cuerpo rígido mientras no se supere un esfuerzo de cedencia, después de este su comportamiento será similar a un fluido newtoniano.
Fluido incompresible:	Fluido que mantiene una densidad constante a lo largo de todo el flujo.
Fluido no newtoniano:	Fluido donde su viscosidad no muestra una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación.
Fluido newtoniano:	Fluido donde su viscosidad muestra una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación.
Flujo homogéneo:	Es el flujo en el cual las propiedades del sistema no dependen de la posición.
Flujo oscilante:	Flujo que se origina cuando
Flujo pulsátil:	Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.
Flujo volumétrico:	Volumen por unidad de tiempo.
Función estocástica:	Función probabilística que evoluciona en el tiempo
Gradiente:	Operador matemático espacial que físicamente describe los cambios de la propiedad respecto al espacio
Reología:	Ciencia que estudia la deformación y el flujo de materia cuando es sometida a un esfuerzo.
Viscosidad:	Medida de la resistencia a fluir de un material.

RESUMEN

En el presente trabajo de licenciatura, se estudia el efecto del gradiente de presión pulsátil en el flujo volumétrico de un líquido de Bingham con respecto a un gradiente de presión constante.

El estudio del sistema se lleva a cabo en dos tipos de situaciones físicas: (a) Oclusiones centrales y (b) Oclusiones periféricas. Donde se hacen las siguientes suposiciones: proceso isotérmico, flujo unidireccional, efectos inerciales despreciables, fluido incompresible, flujo en estado estacionario, flujo totalmente desarrollado y el fluido presenta esfuerzo de cedencia para poder moverse, mientras no se supere dicho esfuerzo el fluido se comportará como un sólido. El flujo se caracteriza con la ecuación constitutiva de Bingham, el cual es un modelo que posee dos parámetros.

Las oclusiones periféricas, pueden ser modeladas mediante un capilar de radio $r=R$ y longitud $z=L$. Las oclusiones centrales, se pueden describir mediante un sistema de tubos concéntricos de longitud $z=L$, el radio menor determinado por κR , y el radio mayor determinado por R .

Los resultados muestran que el flujo volumétrico depende de un cociente de esfuerzo relacionados con la fuerza motriz y el esfuerzo del material. Este cociente de esfuerzos se conoce como numero de Bingham y es una medida de los mecanismos de cedencia propios del material.

En la oclusión central se observa que el sistema depende de las características geométricas del sistema a través de los radios característicos κR y R y longitud L .

En el caso de un gradiente de presión pulsátil, el flujo volumétrico muestra un cambio significativo con aquel correspondiente a un gradiente de presión constante.

A partir de la expresión analítica del flujo volumétrico se calcula el aumento de este, mediante el uso de una función estocástica simple. Se hacen una serie de simulaciones en el programa Mathematica con el fin de obtener graficas que describen el comportamiento del sistema de estudio.

Los avances de este trabajo contribuyen al entendimiento de sistemas que presentan esfuerzo de cedencia y que son potencialmente útiles en sistemas biológicos de sangre con colesterol u otras patologías.

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN

1.1 ¿Qué es una oclusión?

Primero y para adentrarnos a esta investigación hay que entender que es una oclusión y para ello vamos a definir a la oclusión como aquel impedimento del flujo, ya sea parcial o total, a través de un conducto. Este tipo de situación siempre ha representado un problema pudiéndose encontrar desde los filtros en los motores, hasta las arterias del sistema cardiovascular (Colleparado-Guevara & Corvera Poiré, 2007).

La oclusión de conductos humanos representa un problema en el desarrollo de diversas enfermedades y el sistema cardiovascular es particularmente vulnerable a las obstrucciones, siendo las enfermedades cardiovasculares la principal muerte en los países desarrollados. Como ejemplo, después de una oclusión en una arteria, el flujo sanguíneo disminuye y en casos críticos es incapaz de fluir por el espacio restante, impidiendo la irrigación y provocando la eventual muerte de los tejidos (Bernardino de la Serna, Sancho Bueso, García Iglesias, Lavilla Uriol, & Gil Aguado, 2000; Colleparado-Guevara & Corvera Poiré, 2007).

1.2 Aterosclerosis

Una de las enfermedades que resulta de la oclusión en conductos humanos es la aterosclerosis, enfermedad provocada por la acumulación de depósitos lípidos y tejido fibroso en la pared arterial, produciendo la denominada placa aterosclerosa, que obstruye parcial o total el diámetro de la arteria. La aterosclerosis es la principal causa de mortalidad en los países desarrollados y representa el 20% de la mortalidad global en el mundo. En la década de los ochenta Ross (Ross & Glomset, 1976) desarrolla un modelo en el cual se considera a la aterosclerosis como un fenómeno inflamatorio, la hipótesis especula que diversos factores (agresiones mecánicas, químicas, víricas o metabólicas) provocan una disfunción endotelial (Bernardino de la Serna, Sancho Bueso, García Iglesias, Lavilla Uriol, & Gil Aguado, 2000).

La disfunción endotelial es provocada por: hipertensión arterial, diabetes mellitus, hipercolesterolemia, tabaquismo, entre otros factores genéticos, que desencadenara el fenómeno aterosclerótico. Cuando se altera la célula endotelial se genera la secreción de diversas sustancias (como citocinas), y con ello se llega a un estado protrombótico, atrayendo a los monocitos y a los linfocitos perpetuando el fenómeno inflamatorio (Bernardino de la Serna, Sancho Bueso, García Iglesias, Lavilla Uriol, & Gil Aguado, 2000).

El proceso ateroscleroso se desarrolla básicamente en la pared arterial, produciendo pérdida de elasticidad, depósito anormal de lípidos, produciendo obstrucciones y finalmente ocasiona isquemia (Suarez Loaizal, 2001).

El sistema arterial es el más frecuentemente atacado por la aterosclerosis. Las paredes arteriales están compuestas por tres capas (Fig.1) dispuestas como cilindros concéntricos que se denominan, desde el centro a la periferia de la arteria, como (Suarez Loaizal, 2001):

- 1.2.1** Intima arterial.
- 1.2.2** Capa media.
- 1.2.3** Capa externa o adventicia.

La zona de interés en esta investigación es la capa intima arterial puesto que ahí se forma la placa aterosclerosa.

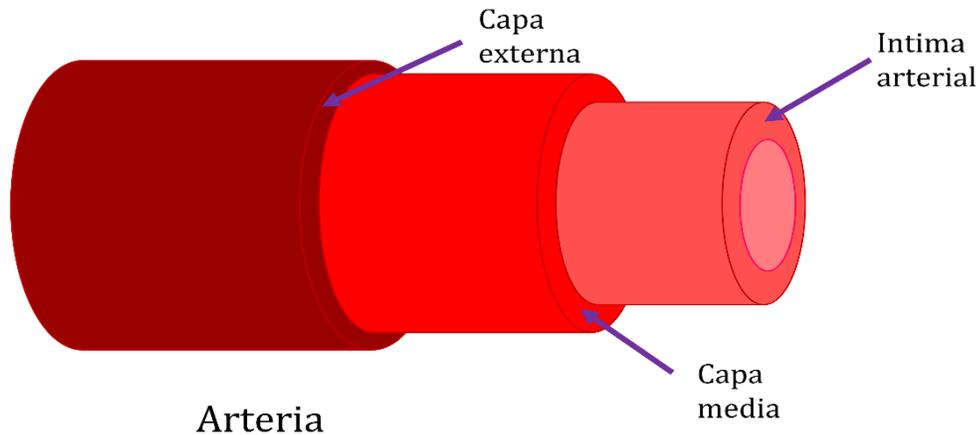


Figura 1. Capas de la arteria.

1.2.1 Capa intima

El endotelio es la zona más interna de la íntima arterial y el que se encuentra más próximo con el torrente circulatorio, las áreas con mayor predisposición al desarrollo de placas aterosclerosas se encuentran en curvaturas y ramificaciones.

Parámetros hemodinámicos y reológicos que determinan fenómenos de cizallamiento endotelial, ligados a la naturaleza del flujo sanguíneo, la geometría vascular, etc., intervienen en el fenómeno de adhesión plaquetaria al endotelio. El factor de Willebrand generado en el endotelio interviene en la adhesión plaquetaria, actuando como un pegamento entre la superficie de la plaqueta y el subendotelio, en presencia de daño en la continuidad de la pared endotelial (Suarez Loaizal, 2001).

Se ha comprobado la relación constante que existe entre la elevación crónica del colesterol y la producción de lesiones ateroscleróticas. La hipercolesterolemia puede ser de origen endógeno por factores genéticos, enfermedades metabólicas o de origen exógeno producido por una prolongada dieta rica en grasa y colesterol (Suarez Loaizal, 2001).

Las lesiones ateroscleróticas están formadas fundamentalmente por lipoproteínas de baja densidad (LDL o conocido comúnmente como colesterol “malo”), estas lipoproteínas LDL se adhieren por electrostática al subendotelio, ya que los glucosaminoglucanos (presentes en el subendotelio) ricos en condroitinsulfato de carga electronegativa ejercen atracción electrostática a la apoproteína B-100 de las LDL, ricas en arginina de carga electropositiva. Caso contrario sucede con las lipoproteínas de alta densidad (HDL o comúnmente conocido como colesterol “bueno”), cuya presencia en la placa aterosclerótica es nula, de manera que más alta la concentración de estas lipoproteínas, menor riesgo de desarrollo de aterosclerosis (Suarez Loaizal, 2001).

1.3 Tipos de oclusión

En este trabajo consideramos las oclusiones que resultan de la obstrucción parcial del flujo sanguíneo de dos formas diferentes. El primer tipo de oclusión es aquel en las que las paredes de las arterias han adherido, como mencionamos antes,

lipoproteínas que reducen así el radio de la arteria, a esto le llamaremos oclusión periférica, el flujo en esta oclusión fluye a través de un cilindro con un radio menor que un cilindro sin obstrucción (Fig. 2) (Ref.;Collepardo-Guevara & Corvera Poiré, 2007). El segundo tipo de oclusión es aquel que considera que el fluido debe fluir entre las paredes de la arteria y un obstáculo en su interior formado por tejido fibroso y lipoproteínas que se acumulan en el centro de la arteria, a esto le llamaremos oclusión central, el flujo en esta oclusión fluye a través del anulo formado por dos tubos concéntricos (corona circular), el mayor radio formado por la arteria, y el de menor radio formado por la obstrucción (Fig. 3) (Ref.;Collepardo-Guevara & Corvera Poiré, 2007).



Figura 2. Oclusión periférica: Las lipoproteínas se adhieren a la pared arterial.



Figura 3. Oclusión central: Las lipoproteínas se acumulan en el centro de la arteria

1.4 Flujo pulsátil

Una definición básica para el flujo pulsátil es cuando al gradiente de presión constante en la ecuación de movimiento se le suma una contribución que depende del tiempo, provocando que el flujo sea de tipo oscilante como se muestra a continuación (Phan-Thien & Dudek, 1982):

$$\nabla_z P(t) = \nabla_z P_0 + \nabla_z P_1 = P_0(1 + \varepsilon n(t)) \quad (1)$$

La primera contribución se debe al gradiente de presión en estado estacionario y la segunda a la fluctuación debido al ruido estocástico representado por $n(t)$ y el parámetro ε (menor a 1 y diferente de 0) que es perturbativo y que describe las desviaciones del valor promedio, el cual tiene un valor numérico muy pequeño y se introduce con el fin de obtener una contribución al flujo volumétrico asociado a los mecanismos pulsátiles (Phan-Thien & Dudek, 1982).

Una forma de cuantificar cuantas veces es mayor el flujo volumétrico pulsátil es mayor que el flujo a gradiente de presión constante a través del aumento volumétrico el cual se define de la siguiente manera (Phan-Thien & Dudek, 1982):

$$I(\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \times 100 \quad (2)$$

Donde $Q(t)$ representa el flujo pulsátil, mientras que Q_0 el flujo a gradiente de presión constante, los paréntesis significan un promedio de tipo temporal.

La expresión matemática para el promedio temporal del flujo volumétrico tiene la siguiente forma:

$$\langle Q(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} Q(t) dt \quad (3)$$

Donde ω representa la frecuencia angular, la cual se define como la inversa del periodo.

1.5 Flujos inestables

La mayoría de las investigaciones de flujo en tuberías que existen disponibles en la literatura está relacionada con el flujo constante. Sin embargo, debemos prestar atención a los flujos inestables, puesto que existen muchas aplicaciones tanto industriales como biológicas.

En la literatura podemos encontrarnos con que existen dos principales flujos inestables: flujo pulsátil y flujo oscilante puro (Amaratunga, Rabenjafimanantsoa, & Time, 2019). El flujo pulsátil consiste en un componente de velocidad que oscila con el tiempo, superpuesto a un componente de velocidad constante. Puede presentarse en flujo laminar, transitorio o turbulento. En el caso del flujo oscilante puro la velocidad varía con el tiempo y su velocidad constante es cero, este es un caso especial del flujo pulsátil (Fishier & Brodkey, 1991; Ramadan, Abdel-Rahman, & Ibrahim, 2017; Amaratunga, Rabenjafimanantsoa, & Time, 2019).

Existe un interés en los flujos pulsátiles tanto transitorios como turbulentos por su posible aplicación al flujo sanguíneo en las arterias. Estos flujos pulsátiles arteriales son complejos, por lo tanto, difíciles de modelar analíticamente.

Algunos fenómenos que se deben tener en cuenta en el flujo arterial son: la curvatura, la ramificación y estrechamiento del vaso, las propiedades de la pared, las propiedades del fluido y efectos de entrada. Para el flujo pulsátil laminar el problema de modelar no se complica demasiado, el problema surge cuando es flujo pulsátil turbulento, pues cualquier análisis analítico se vuelve extremadamente complicado con el conocimiento experimental de algunas de las propiedades del flujo (Fishier & Brodkey, 1991).

1.6 Aplicaciones

Actualmente, existen en la literatura dos grandes clasificaciones en fluidos oscilantes. Estas son: flujo a gradiente de presión pulsátil y flujo a gradiente de presión constante con perturbación oscilatoria en la pared. El flujo volumétrico de líquidos en estos sistemas ha sido estudiado ampliamente en muchas ramas de la ciencia desde la Ingeniería Química hasta Biorreología, esta última ha cobrado interés por el campo de la medicina (Collepardo-Guevara & Corvera Poiré, 2007).

Como ejemplo, en Biorreología, la caracterización reológica de la sangre humana pretende predecir el contenido de colesterol en la sangre como medida preventiva para su control, ya que los trastornos metabólicos actualmente son problemas que se presentan con mayor frecuencia en los seres humanos, entre ellos la hipercolesterolemia (altas concentraciones de colesterol en la sangre, arriba de los 240 mg/dL), tiene grandes repercusiones en la fisiología del sistema cardiovascular (Moreno, y otros, 2013).

Los flujos pulsátiles de fluidos no newtonianos pueden tener diversas aplicaciones en mecánica de biofluidos (ya que muchos flujos fisiológicos importantes son de naturaleza oscilatoria), membranas ferroeléctricas, así como fibras sintéticas (Kevlar) y naturales, como ejemplo de esto tenemos a los cristales líquidos viscoelásticos presentes en la seda producida por los arácnidos, ya que es bien sabido que los polipéptidos celulósicos, precursores de seda de araña, exhiben un comportamiento tipo cristal líquido (de Andrade Lima & Rey, 2005; Herrera-Valencia, Sánchez-Villavicencio, Calderas, Pérez-Camacho, & Medina-Torres, 2016). Las fibras de seda se hilan a partir de una fase cristalina líquida nemática liotropica que experimenta cambios estructurales significativos a lo largo de la vía del hilado, particularmente en el conducto de extrusión tubular justo antes del estirado de la fibra, este paso es de suma importancia porque determina los detalles microestructurales de la fibra de seda solidificada, y por lo tanto, sus propiedades mecánicas fenomenales que ni las super fibras sintéticas como el Kevlar han podido igualar, sin mencionar que son ecológicas, biodegradables y que se fabrican a temperatura y presión ambiental, es por esto y otras características que existe un gran interés en comprender el detalle del diseño y procesamiento de los materiales precursores de la seda (De luca & Rey, 2006).

La bioquímica precursora, el procesamiento reoquímico y las relaciones entre la estructura y las propiedades de las fibras del gusano de seda y la seda de araña son áreas de intensa investigación. El hilado de la seda de araña se basa en el confinamiento, el anclaje y la estructuración inducida por el flujo, además de los efectos químicos, que se ha demostrado que producen transiciones de textura. La gama de predicciones verificadas muestra que los modelos de cristal líquido desempeñaran un papel importante en la comprensión, caracterización y uso de mesofases biológicas y en futuros desarrollos biomiméticos (Rey & Herrera-Valencia, 2012).

Otras de las aplicaciones es el estudio de la curvatura promedio en sistemas biológicos que amplifican la respuesta mecánica y resonante en el odio humano. Muchas estructuras biológicas complejas exhiben un comportamiento de cristal líquido, como soluciones concentradas de proteína de seda de araña (como se ha mencionado con anterioridad) y las membranas biológicas en las células ciliadas externas. Las células ciliadas externas, son las causantes de amplificar la información en el odio interno, trabajan transformando la energía eléctrica a energía mecánica por medio de un

complejo dispositivo, el cual tiene que ver con la naturaleza elástica de la membrana y los líquidos viscoelásticos que entran en contacto con ellas, a través de la activación flexoeléctrica que utiliza un campo eléctrico impuesto para crear la flexión de la membrana y es utilizado por las células ciliadas externas. La flexoelectricidad de membrana debido a sus capacidades inherentes de sensor-actuador es un área de interés actual en materiales de materia blanda. Se han hecho estudios con el fin de modelar la dinámica oscilatoria de las células ciliadas externas con el fin de comprender su funcionamiento, ya que la pérdida auditiva es causada, en la mayoría de los casos, por el deterioro de estas (Abou-Dakka, Herrera-Valencia, & Rey, 2012).

El flujo pulsátil de líquidos complejos (sistemas micelares parecidos a gusanos y cristales líquidos liotropicos) tiene aplicaciones en la recuperación mejorada de petróleo. La extracción de cantidades adicionales de petróleo se puede lograr mediante la inducción hidráulica de fracturas en las formaciones rocosas, utilizando tensoactivos catiónicos viscoelásticos como modificadores reológicos en operaciones mejoradas de recuperación de petróleo, especialmente aquellas relacionadas con formaciones subterráneas. El fluido a base de polímero convencional tiene un residuo de tamaño de poro considerable que queda en los depósitos después de la fractura y obstruye los espacios porosos en el paquete de apuntalante, lo que reduce la permeabilidad o conductividad de la fractura. El tensoactivo, al ser una molécula pequeña, se recupera por completo, por lo tanto, la conductividad es muy alta sin daño a la formación, también tiene la ventaja de que se utilizan menos aditivos en comparación con la goma guar polimérica. No requieren fracturadores químicos ya que cambian a micelas esféricas o microemulsión. Cuando entra en contacto con el hidrocarburo producido por la fractura a través del paquete de apuntalante, la elasticidad de la viscosidad del fluido se reduce significativamente y por lo que es fácil fluir hacia atrás desde el paquete, provocando una mayor productividad del pozo (Yang, 2002).

Los tensoactivos viscoelásticos se caracterizan por una red entrelazada de grandes estructuras de micelas parecidas a gusanos. Estas estructuras se rompen y reforman durante el flujo, exhibiendo un vasto comportamiento reológico, las predicciones de este comportamiento mediante ecuaciones constitutivas ha sido un gran desafío para los investigadores de este campo (Herrera-Valencia, Calderas, Chávez, & Manero, 2010).

En resumen, en vista de su potencial aplicación en diferentes ramas de la ciencia, los sistemas de flujo vibrátil y pulsátil aplicados a líquidos complejos se han convertido en punto de partida de varios tipos de investigación en el mundo, de acuerdo con la revisión bibliográfica consultada concerniente al tema, a pesar de todos los intentos en describir las oclusiones centrales y periféricas en sangre, la mayoría de los modelos aplicados no contemplan del todo las propiedades características de la sangre: esfuerzo de cedencia, concentraciones altas de colesterol (hipercolesterolemia), viscosidad, etc., además de que no existen estudios de líquidos de Bingham sometidos a flujos pulsátiles en sistemas ocluidos. Por esta razón, la originalidad de esta propuesta de tesis de licenciatura radica en la aplicación de la ecuación constitutiva de Bingham (el cual considera la contribución del esfuerzo de cedencia) en el flujo a gradiente de presión pulsátil a través de sistemas ocluidos periféricamente y centralmente en sangre humana con hipercolesterolemia, obteniendo descripciones analíticas detalladas para el perfil de velocidades, el flujo volumétrico y aumento del flujo.

1.7 Objetivos

Objetivo general

Estudiar y entender el comportamiento del flujo volumétrico y el efecto del gradiente de presión pulsátil en un líquido de Bingham para dos sistemas de estudio:

- i. Oclusiones centrales.
- ii. Oclusiones periféricas.

Objetivos particulares

- Obtener expresiones analíticas para el perfil de velocidades (en dirección del eje coordinado z), flujo volumétrico y aumento del flujo volumétrico en función de las propiedades materiales del sistema.
- Caracterizar la transferencia de momento y reología con el modelo constitutivo de Bingham.
- Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar las ecuaciones y que se obtengan grupos adimensionales que describan los mecanismos físicos que gobiernan el sistema de estudio.
- Hacer una serie de simulaciones con el fin de obtener gráficas que describan mejor el fenómeno de estudio.

1.8 Hipótesis del trabajo

Si agregamos el efecto del gradiente de presión pulsátil a nuestro sistema de estudio este modificara el flujo volumétrico aumentado en comparación con un gradiente de presión constante.

Esta modificación dependerá de las características reológicas del sistema de estudio, así como del modelo reológico a emplear (en este caso particular el modelo característico es el de Bingham), también dependerá del tipo de oclusión.

1.9 Distribución del material

Para desarrollar el trabajo de esta tesis de licenciatura, el material será distribuido de la siguiente manera. En el capítulo I se presentan los preliminares, introducción, antecedentes, objetivos e hipótesis, en el capítulo II se da el marco teórico, en el capítulo III el sistema físico y ecuaciones de: continuidad, transporte y reológica, en el capítulo IV se mostrara el modelado matemático de los sistemas de estudio, en el capítulo V se presentan las simulaciones hechas en el programa Mathematica (licencia UNAM) y análisis de resultados, y por último en el capítulo VI el aporte al conocimiento de este trabajo, conclusiones y trabajo futuro. En los apéndices, se presentan los pasos matemáticos a detalle de manera explícita que resulten de este trabajo de tesis de licenciatura.

CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentarán las bases teóricas para comprender el trabajo de investigación de esta tesis de licenciatura. Es importante mencionar que cada referencia citada, así como las ecuaciones y bases se toman como referencia a los textos básicos de reología y fenómenos de transporte (Bird, Stewart, & Lightfoot, 2020).

2.1 Reología

La reología estudia la deformación y el comportamiento de flujo de la materia, a través de la relación entre el esfuerzo y deformación usando ecuaciones matemáticas constitutivas reológicas de estado (Méndez Montealvo, Núñez Santiago, & Solorza Feria, 2010). Estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos y materiales cristalinos. Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos, por una parte, hasta la elasticidad de Hooke por otra (Bird, Stewart, & Lightfoot, 2020).

El objetivo principal de la reología consiste en establecer la relación entre las fuerzas (externas) aplicadas a un cuerpo y los efectos geométricos (internos) inducidos por estas fuerzas en un punto, la forma matemática de esta relación se le llama ecuación reológica de estado o ecuación constitutiva (Malkin & Isayev, 2012).

2.2 Esfuerzo

Cualquier fuerza externa aplicada a un cuerpo conduce a un movimiento del cuerpo como un todo o bien a un cambio de su forma inicial. El movimiento de un cuerpo en el espacio es un tema de estudio por parte de la mecánica, para la reología el foco principal de interés son los cambios que ocurren dentro de un cuerpo al aplicar una fuerza externa. Las fuerzas aplicadas crean reacciones dinámicas que se caracterizan por un factor físico llamado esfuerzo (Malkin & Isayev, 2012).

El esfuerzo se puede explicar a través de la Fig. (4), donde consideraremos un cuerpo cuya sección transversal es A mientras que F es la fuerza normal al área A . La fuerza específica en cualquier punto de la sección transversal es igual a F/A , esta relación es un esfuerzo normal, es decir, el esfuerzo es la fuerza por unidad de área:

$$\sigma_E = \frac{F}{A} \quad (4)$$

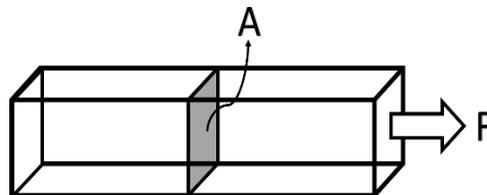


Figura 4. Esfuerzo normal en una barra.

Hay que recordar que la fuerza en cualquier superficie no siempre es constante, es decir, es una función de coordenadas, por lo tanto, es un vector \mathbf{F} . Este vector se puede descomponer en tres componentes, en particular en una perpendicular (esfuerzo normal) y dos tangenciales (esfuerzos cortantes). La selección de un área pequeña (ΔA) es arbitraria, por lo que se expresa mejor mediante el vector \mathbf{n} , que determina la orientación de ΔA a la orientación normal (Malkin & Isayev, 2012). El esfuerzo se describe mediante una combinación de dos vectores, \mathbf{F} y \mathbf{n} . En aplicaciones prácticas,

es más conveniente operar con sus proyecciones en los ejes coordenados que con un vector en sí, por ejemplo, en coordenadas cartesianas (x_1, x_2 y x_3). En resumen, una caracterización completa del esfuerzo como objeto físico requiere de dos vectores: una fuerza y una orientación normal a la superficie donde se aplica este vector. Los objetos físicos así determinados se les denomina tensores, por lo que un esfuerzo es de naturaleza tensorial (Malkin & Isayev, 2012).

Si \mathbf{F} y \mathbf{n} , están definidos en cualquier punto de referencia, representados por sus tres proyecciones a lo largo de los ejes de coordenadas ortogonales, entonces:

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2 + F_3 \mathbf{e}_3$$

Todos los valores de la fuerza F_i ($i=1,2,3$), deben dividirse por el área de la superficie para obtener los componentes de un tensor de esfuerzo, σ_{ij} . El primer índice da la orientación de una fuerza mientras que el segundo la orientación de una superficie. El resultado se escribe en forma de matriz de la siguiente manera:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Donde: La primera columna representa los componentes de una fuerza que actúa en el plano normal al eje x_1 , la segunda para el eje x_2 y la tercera para el eje x_3 . La Fig.(5) muestra todos los componentes del tensor de esfuerzos que actúan sobre un punto seleccionado. El tensor de esfuerzos es un tensor de segundo orden, el cual se puede describir como una matriz de 3×3 formada por nueve elementos. Los elementos fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzos normales. Los esfuerzos cortantes deforman continua e irreversiblemente el material, por lo que el sistema fluye. Mientras que los esfuerzos normales modifican la forma geométrica del elemento de control, pero no su volumen.

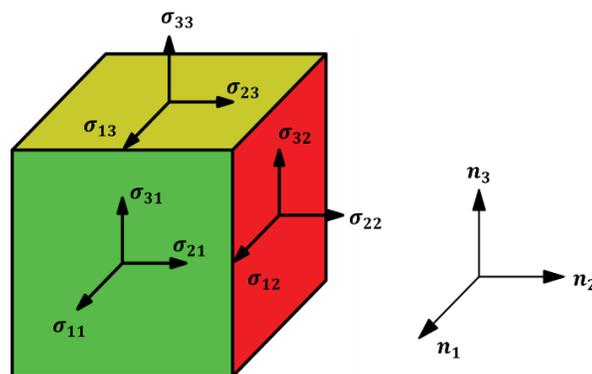


Figura 5. Representación del tensor de esfuerzos tridimensional. Los componentes que tienen los mismos números en su subíndice son esfuerzos normales, mientras que los restantes son esfuerzos cortantes.

2.3 Fluidos newtonianos y no-newtonianos

Un fluido se deformará continuamente bajo esfuerzos (tangenciales) cortantes, no importa cuán pequeños sean estos. Todos los gases, agua líquida y líquidos de moléculas sencillas (amoníaco, alcohol, benceno, petróleo, butano, etc.) son newtonianos. Un fluido se llama newtoniano (en honor a Isaac Newton) si el esfuerzo tangencial es directamente proporcional a la rapidez de deformación angular, la constante de proporcionalidad es denominada como viscosidad newtoniana (μ), como muestra la siguiente ecuación (Bird, Stewart, & Lightfoot, 2020):

$$\sigma_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad (6)$$

Cuando se grafica el esfuerzo cortante en función del gradiente de velocidad para un fluido newtoniano nos da como resultante una recta cuya pendiente es la viscosidad del fluido.

Las suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímeros de cadena larga, fluidos biológicos, pinturas, suspensiones de arcillas y mezclas de hormigón son en general, fluidos no newtonianos. El comportamiento reológico, en estado estacionario, de este tipo de fluidos puede establecerse mediante una forma generalizada (Bird, Stewart, & Lightfoot, 2020):

$$\sigma_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy} \quad (7)$$

La relación entre el esfuerzo tangencial y la rapidez de deformación no es lineal para el caso de los fluidos no-newtonianos, y la pendiente que resulta de graficar esta relación se conoce como viscosidad dinámica (η). Los fluidos que su viscosidad dinámica disminuye al aumentar el gradiente de velocidad se les conoce como fluidos pseudoplásticos y los que exhiben un comportamiento opuesto se les conoce como fluidos dilatantes. Algunos materiales presentan un esfuerzo de cedencia al flujo, por el cual debajo de este se comportarán como sólidos, pero una vez superado este esfuerzo de cedencia, van a fluir comportándose de manera similar a un fluido newtoniano, este tipo de materiales se les conoce como plásticos de Bingham (Bird, Stewart, & Lightfoot, 2020), siendo este tipo de fluidos el tema de interés principal en esta tesis de licenciatura.

2.4 Modelo reológico de Bingham

Se han propuesto numerosas ecuaciones empíricas para expresar la relación que existe, en estado estacionario, entre σ_{yx} y $\frac{dv_x}{dy}$. El modelo que representa con mayor precisión a muchas pastas y suspensiones finas es el modelo de Bingham (Bird, Stewart, & Lightfoot, 2020).

$$\sigma_{yx} = -\mu_c \frac{dv_x}{dy} \pm \sigma_c \quad (8)$$

Toda sustancia que se comporta de acuerdo con este modelo (Ec. 8) de dos parámetros se denomina plástico de Bingham; esta permanece rígida mientras el esfuerzo cortante es menor que un determinado valor de σ_c (esfuerzo de cedencia), por encima del cual se comporta de forma semejante a un fluido newtoniano (Bird, Stewart, & Lightfoot, 2020).

2.5 Numero de Bingham

Para estudiar flujos de Bingham se define un número adimensional denominado número de Bingham, Bn . El número de Bingham se define como:

$$Bn = \frac{\sigma_c}{\sigma_p} \quad (9)$$

El número de Bingham relaciona el esfuerzo de cedencia (σ_c) entre el esfuerzo de corte en la pared (σ_p). Para el caso de un fluido newtoniano el valor de Bn es nulo ($Bn=0$); en el límite opuesto, para fluidos en no cedencia (sólido) el número de Bingham puede tener valores muy altos, $Bn \rightarrow \infty$ (Moreno & Cervera, 2016).

2.6 La sangre humana

El sistema circulatorio forma un circuito cerrado para el flujo de sangre que transporta oxígeno desde los pulmones a los tejidos del cuerpo y transporta dióxido de carbono desde los tejidos de regreso a los pulmones. Hay dos bombas para vencer la resistencia y mantener un flujo constante. El corazón izquierdo recibe sangre rica en oxígeno de los pulmones y la bombea hacia las arterias sistémicas. El corazón derecho bombea sangre a las arterias pulmonares, que forman un árbol que distribuye la sangre a los pulmones. Cada latido del corazón envía un pulso de sangre a través de las arterias, y la forma de este pulso arterial cambia a medida que se aleja del corazón. Un problema interesante es comprender estos cambios y su importancia clínica en términos de las propiedades de la sangre y las paredes arteriales (Keener & Sneyd, 2009).

La sangre humana se compone principalmente de dos componentes: plasma sanguíneo y varios tipos de células suspendidas en este plasma. Las células constituyen el 40% del volumen total de la sangre, divididas en tres grupos; eritrocitos (glóbulos rojos), leucocitos (glóbulos blancos) y trombocitos (plaquetas). La función principal de los glóbulos rojos es la de transportar oxígeno y dióxido de carbono, los glóbulos blancos combaten las infecciones, mientras que las plaquetas ayudan principalmente en la coagulación de la sangre (Keener & Sneyd, 2009).

2.6.1 Flujo en la sangre

El término presión arterial se refiere a la fuerza por unidad de área que la sangre ejerce sobre las paredes de los vasos sanguíneos. La presión arterial varía tanto en el tiempo como en la distancia a lo largo del sistema circulatorio. La presión sistólica es el pico de presión más alto en una arteria y es el resultado de la expulsión de sangre por los ventrículos durante la contracción ventricular o sístole. La presión diastólica es la presión más baja que se alcanza durante la relajación y el llenado ventricular, denominada diástole. En la aorta de un ser

humano normal, la presión sistólica es de aproximadamente 120 mm Hg y la presión diastólica es de aproximadamente 80 mm Hg (Keener & Sneyd, 2009).

Si se ignoran los efectos de la gravedad, se puede suponer que la sangre fluye únicamente en respuesta a los gradientes de presión. La forma más sencilla de caracterizar un vaso sanguíneo es como un vaso de resistencia en el que el radio es constante y el flujo es linealmente proporcional a la caída de presión. En un vaso de resistencia lineal, el flujo, Q , está relacionado con la presión por :

$$Q = \frac{\Delta P}{R} \quad (10)$$

Donde P es la caída de presión y R es la resistencia.

Para tener un mejor entendimiento supongamos que un fluido viscoso se mueve lenta y constantemente a través de un recipiente cilíndrico de radio fijo. La velocidad del fluido se describe mediante un vector \mathbf{u} que tiene componentes axiales, radiales y angulares. Debido a que el fluido es incompresible y el fluido se conserva, queda que:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (11)$$

Además, debido a que se conserva el momento, las ecuaciones de Navier-Stokes sostienen que:

$$\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (12)$$

Donde ρ es la densidad constante del fluido, P es la presión del fluido y μ es la viscosidad del fluido. Si el flujo es estable y los términos no lineales son pequeños en comparación con la viscosidad (en una escala adimensional apropiada), entonces:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla P \quad (13)$$

Esta simplificación de la ecuación de Navier-Stokes se denomina ecuación de Stokes. La aplicabilidad de la ecuación de Stokes al flujo sanguíneo es dudosa por varias razones. La contribución de la viscosidad (laplaciano) en la ecuación de Stokes se deriva de una supuesta ley constitutiva que relaciona tensiones y deformaciones en el fluido (Segel, 1977) que se sabe que no se mantiene en fluidos que contienen polímeros largos u otras estructuras químicas complicadas, incluidos los glóbulos rojos.

Además, en los capilares, el gran tamaño de los glóbulos rojos en comparación con el diámetro típico de un capilar sugiere que una descripción continua no es apropiada. Sin embargo, para fines prácticos aceptamos la descripción de la ecuación de Stokes como adecuada.

Buscamos una solución de la ecuación de Stokes cuyo único componente distinto de cero es el componente axial. Definimos las coordenadas en el cilindro de la manera habitual, dejando que z denote la distancia a lo largo del cilindro

en la dirección axial y dejando que r denote la dirección radial. La dirección angular, con coordenada θ , no entra en este análisis.

Primero observamos que, con solo flujo axial, la condición de incompresibilidad implica que $\partial u / \partial z = 0$, donde \mathbf{u} es el componente axial del vector velocidad.

Por tanto, \mathbf{u} es independiente de z . Luego, con un flujo constante, se reduce a la ecuación diferencial ordinaria:

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} u \right) = \frac{dP}{dz} = \frac{\Delta P}{L} \quad (14)$$

Donde ΔP es el gradiente de presión axial a lo largo del recipiente (L). Hay que tener en cuenta también que ΔP debe ser constante, independiente de r y z . Debido a la viscosidad, la velocidad debe ser cero en la pared del recipiente cilíndrico, $r = R$.

La integración de r a R da:

$$u(r) = -\frac{\Delta P}{4\mu L} (R^2 - r^2) \quad (15)$$

De lo cual se deduce que el flujo total a través del recipiente es (ley de Poiseuille):

$$Q = 2\pi \int_0^R u(r)r dr = -\frac{\pi \Delta P R^4}{8\mu L} \quad (16)$$

Esto concluye que el flujo total de sangre a través de una arteria es directamente proporcional a la cuarta potencia de su radio, de modo que el radio de la arteria es, con mucho, el factor más importante para determinar la velocidad del flujo a través de una arteria (Keener & Sneyd, 2009).

2.7 Hemorreología

La sangre humana es un fluido de reología muy compleja, porque la viscosidad de la sangre no es proporcional al esfuerzo aplicado, es decir es un fluido no newtoniano. La viscosidad de la sangre depende directamente de la relación entre la cantidad de células y el contenido de proteínas en el plasma. El comportamiento reológico de la sangre se ve fuertemente afectado por los niveles de colesterol, pero otros factores afectan la viscosidad de la sangre como el hematocrito, el contenido de glucosa, los triglicéridos, el tipo de sangre, y la forma de los glóbulos rojos (Herrera Valencia, y otros, 2017). El colesterol total junto con los triglicéridos son los que más afectan la reología de la sangre, ya que tienden a formar estructuras transitorias más complejas y aumentan el carácter pseudoplástico de la sangre (Moreno, y otros, 2013). El colesterol en general se considera una macromolécula con un peso molecular alto que, al estar en mayor proporción en la sangre humana, origina estructuras más complejas que se oponen en mayor grado al flujo normal, esto provoca que el corazón

tenga que trabajar más para poder transportar la sangre, pero los demás órganos también se ven afectados, ya que el desgaste de las venas y arterias es mayor. Como la sangre comienza a fluir a un ritmo más lento, se forman depósitos de calcio en las venas, lo que restringe todavía más la circulación sanguínea y el problema se agrava (Moreno, y otros, 2013). La sangre exhibe un fenómeno reológico complejo que involucra esfuerzo de cedencia cuando el contenido de colesterol es lo suficientemente alto (Herrera Valencia, y otros, 2017).

Las propiedades de agregación transitoria de las células sanguíneas, en este caso los glóbulos rojos y las plaquetas, obedecen a una teoría que sostiene que las macromoléculas, como el colesterol, promueven la agregación transitoria de los eritrocitos, ya que se interponen entre una célula y otra y generan puentes entre sus membranas para reducir la interacción electrostática natural entre dos células (Moreno, y otros, 2013).

CAPÍTULO III SISTEMA FÍSICO

En este capítulo se presenta el sistema físico de estudio para el flujo constante y pulsátil en dos geometrías diferentes (en un capilar y corona circular) para un fluido de Bingham. En ambas geometrías se deducen el perfil de velocidades, flujo volumétrico y el aumento en el flujo.

3.1 Geometría

Este trabajo se estudiarán dos sistemas físicos los cuales se describirán a continuación:

a) Capilar:

Cilindro de radio $r=R$ y longitud $z=L$. Las coordenadas que describen mejor el flujo y la reología son coordenadas cilíndricas (r,θ,z) . El capilar ($R \ll L$) se encuentra en posición horizontal. El sistema de referencia se coloca en el centro del tubo en $z=0$.

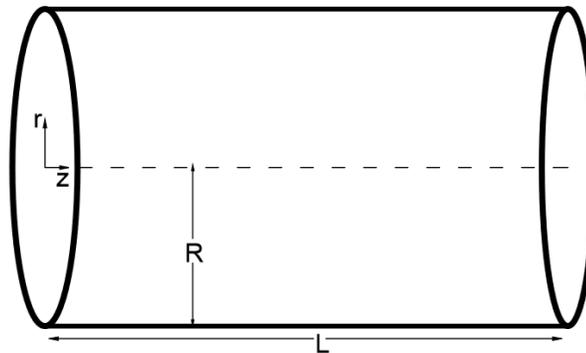


Figura 6. Capilar de radio $r=R$ y longitud axial $z=L$

b) Corona circular:

Cilindros concéntricos de radios; $r=\kappa R$ (radio del cilindro menor), $r=\lambda R$ (radio de la velocidad máxima) y $r=R$ (radio del cilindro mayor), y longitud $z=L$. Las coordenadas que describen mejor el flujo y la reología son coordenadas cilíndricas (r,θ,z) . La corona circular ($R \ll L$) se encuentra en posición horizontal. El sistema de referencia se coloca en el centro del tubo en $z=0$.

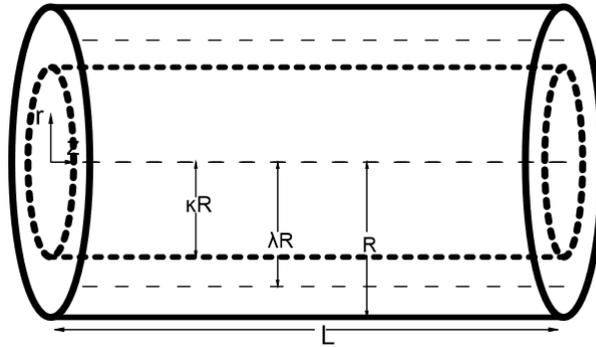


Figura 7. Corona circular de radios: $r=\kappa R$, $r=\lambda R$ y $r=R$, y longitud axial $z=L$.

3.2 Restricciones y suposiciones del proceso

Las condiciones que se toman en cuenta para ambas geometrías son las siguientes:

- a) El fluido de estudio es no-newtoniano caracterizado por la ecuación constitutiva del modelo de Bingham.
- b) El fluido presenta esfuerzo de cedencia para poder moverse, mientras no se supere dicho esfuerzo el fluido se comportará como un sólido.
- c) Fluido incompresible: La densidad no depende de la posición ni del tiempo.
- d) Proceso en estado estacionario: La velocidad y la presión no depende de la posición ni del tiempo, i.e. $V_z(r)$.
- e) El fluido se deforma continua e irreversiblemente debido a un gradiente de presión constante y pulsátil en la dirección axial.
- f) Los mecanismos gravitacionales se desprecian ($R \ll L$), $g=0$.
- g) El proceso es isotérmico.
- h) El fluido biológico que se estudia es sangre humana con hipercolesterolemia (exceso de colesterol).
- i) Existe simetría angular $\theta \in [0, 2\pi]$
- j) El flujo es unidireccional: El vector velocidad solo tiene una componente en la dirección z , i.e. $V=[V_r, V_\theta, V_z]=[0, 0, V_z(r)]$.
- k) Los mecanismos inerciales no son tomados en cuenta, debido a que los valores de velocidad son bajos.
- l) Flujo laminar.
- m) Flujo totalmente desarrollado.

3.3 Ecuaciones de continuidad y movimiento

3.3.1 Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial r} \rho v_r + \frac{\partial}{\partial \theta} \rho v_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right) = 0 \quad (17)$$

La ecuación de continuidad (Ec. 17) describe la conservación de la materia en un elemento de control. Si suponemos que el fluido es incompresible, es decir la densidad

no depende de la posición ni del tiempo, y que tenemos un flujo unidireccional en la coordenada axial z, entonces la ecuación se simplifica de la siguiente forma:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (18)$$

La ecuación (18) es la forma simplificada de la ecuación de continuidad para un fluido incompresible unidireccional, la cual nos indica que la velocidad no es función de la coordenada z, solamente puede ser función de las coordenadas r y θ , pero como se indica que existe simetría angular, la derivada con respecto a la coordenada angular θ es cero, por lo tanto, la componente z del campo de velocidades depende únicamente de la coordenada radial r.

3.3.2 Ecuación de movimiento

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sigma_{\theta z}) \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zz}) \right] + \rho g_z \quad (19)$$

De la ecuación de movimiento solo es necesario analizar la parte de la componente z (Ec.19) ya que nuestro sistema físico presenta flujo unidireccional en la coordenada axial z. Como se indicó anteriormente el proceso se encuentra en estado estacionario por lo que la velocidad y la presión no depende de la posición ni del tiempo, nuestro sistema de estudio se encuentra en posición horizontal por lo tanto los mecanismos gravitacionales se desprecian. Solo se tiene transferencia de momento en la componente rz. La ecuación (19) se simplifica de la siguiente manera:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (20)$$

3.4 Ecuación constitutiva

3.4.1 Modelo reológico de Bingham

Para caracterizar nuestro líquido no newtoniano se propone utilizar la ecuación constitutiva de Bingham, la cual se presenta a continuación:

$$\sigma_{rz} = \pm \sigma_c - \mu_c \frac{dv_z}{dr} \quad (21)$$

El modelo de Bingham contiene dos parámetros $[\sigma_c, \mu_c]$ los cuales están asociados a la cedencia propia del material. Este modelo fue seleccionado como una primera aproximación debido a su sencillez en comparación con otros modelos reológicos.

3.4.2 Modelo reológico de Bingham adimensional

Con el fin de simplificar ecuaciones en el capítulo siguiente haremos uso del modelo reológico de Bingham en una forma adimensional. Multiplicando la ecuación (21) por el inverso del esfuerzo en la pared ($\sigma_p = \frac{(\Delta P)R}{2L}$), simplificando y reacomodando, queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_p} \left(\sigma_{rz} = \pm \sigma_c - \mu_c \frac{dv_z}{dr} \right) \\ \frac{\sigma_{rz}}{\sigma_p} = \pm \frac{\sigma_c}{\sigma_p} - \frac{\mu_c}{\sigma_p} \frac{dv_z}{dr} \\ \frac{\sigma_{rz}}{\sigma_c} = \pm \frac{\sigma_c}{\sigma_p} - \frac{d \frac{2L\mu_c}{(\Delta P)R^2} v_z}{d \frac{r}{R}} \\ T = \pm Bn - \frac{d\phi}{d\xi} \end{aligned} \quad (21.1)$$

Donde: T=Esfuerzo de corte adimensional, Bn= número de Bingham, ξ coordenada radial adimensional y ϕ velocidad adimensional.

3.5 Flujo volumétrico

EL flujo volumétrico se puede calcular en coordenadas cilíndricas mediante una doble integral, por lo que se tiene la siguiente expresión:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r) r dr d\theta \quad (22)$$

3.6 Gradiente de presión pulsátil

Para representar el efecto del gradiente de presión pulsátil se hace uso de una función estocástica $n(t)$, la cual se expresa de la siguiente manera:

$$\nabla_z P(t) = \nabla_z P_0 (1 + \varepsilon n(t)) \quad (23)$$

El esfuerzo en la pared pulsátil queda de la siguiente manera, a través de una integración de la ecuación del gradiente de presión pulsátil:

$$\sigma_p(t) = \sigma_p + \sigma_p \varepsilon n(t) \quad (23.1)$$

En las Ecs. (23) y (23.1) ε es un parámetro de pequeñez, el cual se puede considerar como perturbativo porque nos desvía del estado estacionario.

CAPÍTULO IV MODELADO MATEMÁTICO

En este capítulo se obtienen las expresiones analíticas para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, flujo volumétrico promedio y aumento en el flujo volumétrico, a partir de las ecuaciones generales planteadas en el capítulo anterior, para ambas geometrías estudiadas en este trabajo, los pasos intermedios entre cada ecuación serán descritos de manera detallada en el apéndice.

4.1 Cálculo del campo de velocidades en geometría capilar, para el modelo reológico de Bingham

Partimos de la ecuación (20) e integrando se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{rz} = \left(\frac{\Delta P}{2L}\right)r \quad (24)$$

Uniendo la ecuación (24) con la ecuación (21) e integrando, se obtiene la siguiente expresión matemática:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta P}{2L}\right)r &= \sigma_c - \mu_c \frac{dv_z}{dr} \\ v_z &= -\left(\frac{\Delta P}{4\mu_c L}\right)r^2 + \left(\frac{\sigma_c}{\mu_c}\right)r + C_1 \end{aligned}$$

Aplicando la condición límite de no deslizamiento en la pared:

$$C_1 = \left(\frac{\Delta P}{4\mu_c L}\right)R^2 - \left(\frac{\sigma_c}{\mu_c}\right)R$$

El perfil de velocidades queda como:

$$v_z = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] + \frac{\sigma_c R}{\mu_c} \left[\frac{r}{R} - 1\right] \quad (25)$$

Al tener dos zonas en el campo de velocidades; una zona homogénea y otra variable (Fig.8), se calculan ambos perfiles de velocidad. La primera zona va desde $r=0$ a $r=r_c$ (campo homogéneo) y la segunda zona va de $r=r_c$ a $r=R$ (campo parabólico).

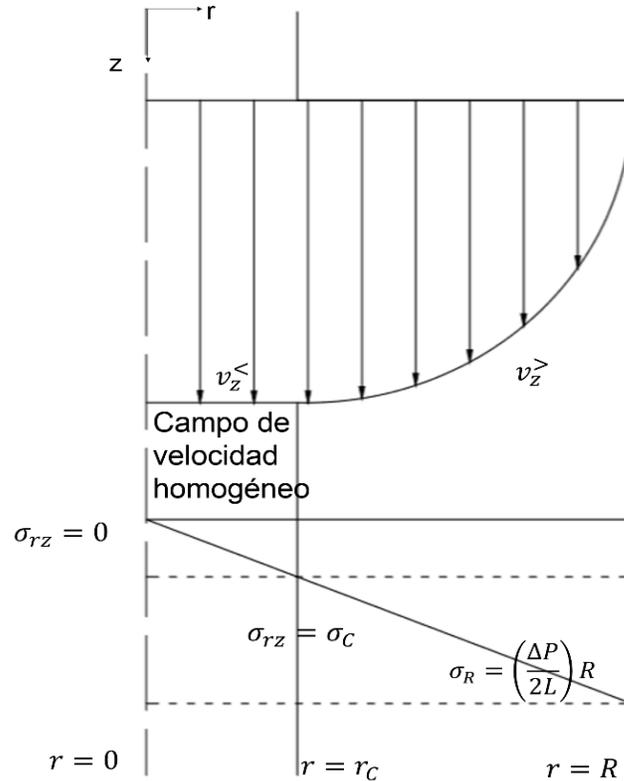


Figura 8. Perfil de velocidades de un fluido de Bingham en geometría capilar.

4.1.1 Campo de velocidad homogéneo

$$v_z^> = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] - \frac{\sigma_c R}{\mu_c} \left[1 - \frac{r}{R} \right] \quad r \geq r_c \quad (25.1)$$

4.1.2 Campo de velocidad parabólico

$$v_z^< = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(1 - \frac{r_c}{R} \right)^2 \quad r \leq r_c \quad (25.2)$$

4.2 Cálculo del flujo volumétrico a gradiente de presión constante en geometría capilar, para el modelo reológico de Bingham

El flujo volumétrico Q_{ee} (en estado estacionario) se obtiene a partir de la integración del perfil de velocidades:

$$Q_{ee} = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta \quad (26)$$

Integrando la parte angular:

$$Q_{ee} = 2\pi \int_0^R v_z r dr \quad (26.1)$$

Como ya se mencionó antes, tenemos dos zonas en el campo de velocidades por ende nuestra integral se transforma de la siguiente manera:

$$Q_{ee} = 2\pi \left[\int_0^{r_c} v_z^< r dr + \int_{r_c}^R v_z^> r dr \right] \quad (26.2)$$

a) Resolviendo la primera integral:

$$\int_0^{r_c} v_z^< r dr = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(\frac{r_c^2}{2} - \frac{r_c^3}{R} + \frac{r_c^4}{2R^2} \right)$$

b) Resolviendo la segunda integral:

$$\int_{r_0}^R v_z^> r dr = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2}{4} - \frac{Rr_c}{3} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^3}{R} - \frac{5r_c^4}{12R^2} \right]$$

Finalmente unimos ambos resultados:

$$Q_{ee} = 2\pi \left\{ \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(\frac{r_c^2}{2} - \frac{r_c^3}{R} + \frac{r_c^4}{2R^2} \right) + \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2}{4} - \frac{Rr_c}{3} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^3}{R} - \frac{5r_c^4}{12R^2} \right] \right\} \quad (27)$$

Factorizando la ecuación (27) se obtiene el flujo volumétrico a gradiente de presión constante:

$$Q_{ee} = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{8\mu_c L} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_p} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_p} \right)^4 \right) \quad (28)$$

Donde:

σ_p = Esfuerzo cortante en la pared

σ_c = Esfuerzo de cedencia

4.3 Cálculo del campo de velocidades en corona circular, para el modelo reológico de Bingham

Partimos de la ecuación (20) e integrando se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{rz} = \left(\frac{\Delta P}{2L} \right) r + \frac{C_1}{r} \quad (29)$$

La primera condición límite nos indica que en la velocidad máxima hay un mínimo en el esfuerzo de corte:

$$\sigma_{rz} (r = \lambda R) = 0$$

El esfuerzo cortante nos queda de la siguiente forma:

$$\sigma_{rz} = \frac{(\Delta P)R}{2L} \left[\frac{r}{R} - \frac{\lambda^2 R}{r} \right] \quad (30)$$

Para hacer adimensional la ecuación (30) y con el fin de simplificar las expresiones matemáticas siguientes, se multiplicará el esfuerzo cortante por el inverso del esfuerzo cortante en la pared, quedando de la siguiente manera:

$$T = \left[\xi - \frac{\lambda^2}{\xi} \right] \quad (31)$$

Donde:

T = Esfuerzo cortante adimensional.

$\xi = \frac{r}{R}$ = Coordenada radial adimensional

En la geometría de una corona circular se tendrán tres zonas (Fig. 9) en el campo de velocidades, a diferencia del capilar donde solo se tenían dos zonas.

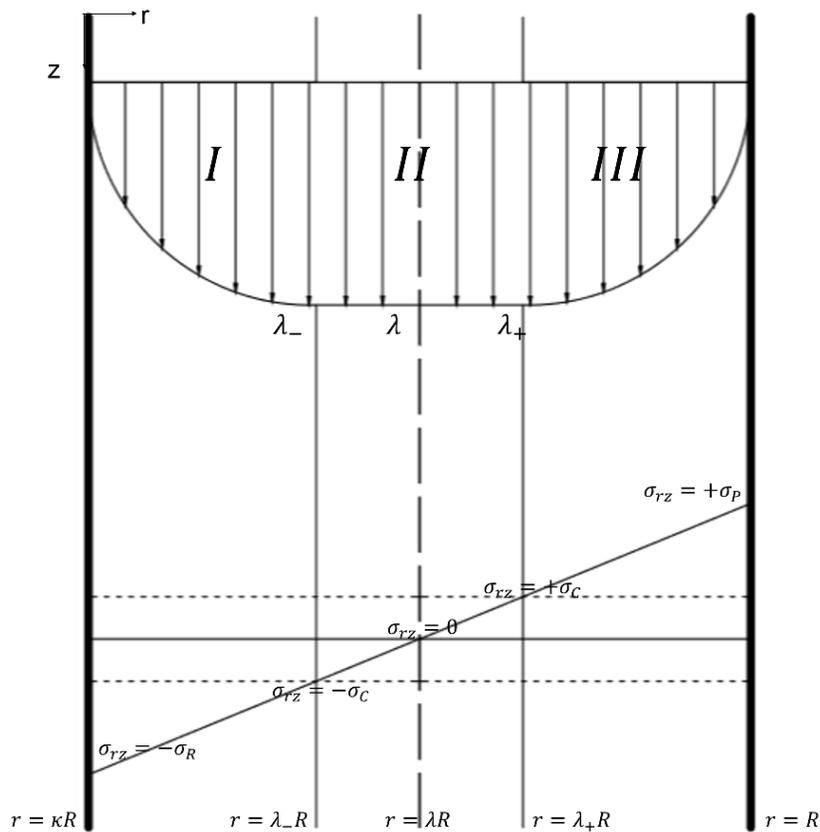


Figura 9. Perfil de velocidades de un fluido de Bingham en una corona circular.

Donde la región I y III serán de tipo parabólico, mientras que la región II será homogénea. Los límites de la región del campo de velocidades homogéneo están dados por λ_- y λ_+ .

4.3.1 Cálculo de la velocidad (Φ_-) en la región I para el intervalo $\kappa \leq \xi \leq \lambda_-$

De la ecuación (21.1) tomamos la parte negativa e integramos:

$$\phi_- = -\frac{\xi^2}{2} + \lambda^2 \ln \xi - Bn\xi + C_2 \quad (32)$$

Aplicando la condición de no deslizamiento en la pared del cilindro interior nos queda que:

$$\phi_- = \lambda^2 \ln \frac{\xi}{\kappa} + \frac{(\kappa^2 - \xi^2)}{2} + Bn(\kappa - \xi) \quad (33)$$

4.3.2 Cálculo de la velocidad (Φ_+) en la región III para el intervalo $\lambda_+ \leq \xi \leq 1$

De la ecuación (21.1) tomamos la parte positiva e integramos:

$$\phi_+ = -\frac{\xi^2}{2} + \lambda^2 \ln \xi + Bn\xi + C_3 \quad (34)$$

Aplicando la condición de no deslizamiento en la pared del cilindro exterior nos queda que:

$$\phi_+ = \lambda^2 \ln \xi + \frac{(1 - \xi^2)}{2} + Bn(\xi - 1) \quad (35)$$

4.3.3 Cálculo de la velocidad (Φ_0) en la región II para el intervalo $\lambda_- \leq \xi \leq \lambda_+$

Sabemos que $\phi_0 = \phi_+$ ($\xi = \lambda_+$):

$$\phi_0 = \lambda^2 \ln \lambda_+ + \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} + Bn(\lambda_+ - 1) \quad (36)$$

En resumen, las distribuciones de velocidad en las diferentes regiones de nuestro sistema (I, II y III) quedan de la siguiente manera:

$$\phi \begin{cases} \lambda^2 \ln \frac{\xi}{\kappa} + \frac{(\kappa^2 - \xi^2)}{2} + Bn(\kappa - \xi) & \kappa \leq \xi \leq \lambda_- \\ \lambda^2 \ln \xi + \frac{(1 - \xi^2)}{2} + Bn(\xi - 1) & \lambda_- \leq \xi \leq \lambda_+ \\ \lambda^2 \ln \lambda_+ + \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} + Bn(\lambda_+ - 1) & \lambda_+ \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

4.4 Cálculo del flujo volumétrico a gradiente de presión constante en corona circular, para el modelo reológico de Bingham

El flujo volumétrico Q_{ee} (en estado estacionario) se obtiene a partir de la integración del perfil de velocidades:

$$Q_{ee} = \int_0^{2\pi} \int_{\kappa R}^R v_z r dr d\theta \quad (37)$$

Integrando la parte angular:

$$Q_{ee} = 2\pi \int_{\kappa R}^R v_z r dr \quad (37.1)$$

Como ya se sabemos, tenemos tres zonas en el campo de velocidades por ende nuestra integral se transforma de la siguiente manera:

$$Q_{ee} = 2\pi \left[\int_{\kappa R}^{\lambda_{-R}} v_{z-} r dr + \int_{\lambda_{-R}}^{\lambda_{+R}} v_{z0} r dr + \int_{\lambda_{+R}}^R v_{z+} r dr \right] \quad (37.2)$$

Para hacer más sencillo el problema, la ecuación 37.2 se dividirá en tres flujos para las tres zonas de estudio, quedando de la siguiente manera:

$$Q_{ee} = Q_- + Q_0 + Q_+ \quad (37.3)$$

4.4.1 Velocidad volumétrica de flujo para Q_-

$$Q_- = 2\pi \int_{\kappa R}^{\lambda_{-R}} v_{z-} r dr$$

Para hacer consistente la integral con todo el problema se debe hacer adimensional:

$$Q_- = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \int_{\kappa}^{\lambda_-} \phi_- \xi d\xi \quad (38)$$

Sustituyendo la ecuación (33) en (38):

$$Q_- = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \int_{\kappa}^{\lambda_-} \left[\lambda^2 \ln \frac{\xi}{\kappa} + \frac{(\kappa^2 - \xi^2)}{2} + Bn(\kappa - \xi) \right] \xi d\xi \quad (39)$$

Resolviendo la integral y factorizando nos queda:

$$Q_- = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left[\lambda^2 \left(\frac{\lambda_-^2}{2} \ln \frac{\lambda_-}{\kappa} - \frac{\lambda_-^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right) + \frac{\lambda_-^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_-^4}{8} - \frac{\kappa^4}{8} + Bn \left(\kappa \frac{\lambda_-^2}{2} - \frac{\lambda_-^3}{3} - \frac{\kappa^3}{6} \right) \right] \quad (40)$$

4.4.2 Velocidad volumétrica de flujo para Q_0

$$Q_0 = \int_{\lambda_- R}^{\lambda_+ R} v_{z_0} r dr$$

Para hacer consistente la integral con todo el problema se debe hacer adimensional:

$$Q_0 = \frac{2\pi(\Delta P)R^4}{2L\mu_c} \int_{\lambda_-}^{\lambda_+} \phi_0 \xi d\xi \quad (41)$$

Sustituyendo la ecuación (25) en (30):

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \int_{\lambda_-}^{\lambda_+} \left[\lambda^2 \ln \lambda_+ + \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} + Bn(\lambda_+ - 1) \right] \xi d\xi \quad (42)$$

Resolviendo la integral y factorizando nos queda:

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_-^2}{2} \right) + \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_-^2}{2} \right) + Bn(\lambda_+ - 1) \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_-^2}{2} \right) \right\} \quad (43)$$

4.4.3 Velocidad volumétrica de flujo para Q_+

$$Q_+ = \int_{\lambda_+ R}^R v_{z_+} r dr$$

Para hacer consistente la integral con todo el problema se debe hacer adimensional:

$$Q_+ = \frac{2\pi(\Delta P)R^4}{2L\mu_c} \int_{\lambda_+}^1 \phi_+ \xi d\xi \quad (44)$$

Sustituyendo la ecuación (35) en (44):

$$Q_+ = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \int_{\lambda_+}^1 \lambda^2 \ln \xi + \frac{(1-\xi^2)}{2} + Bn(\xi-1)\xi d\xi \quad (45)$$

Resolviendo la integral y factorizando nos queda:

$$Q_+ = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \left(-\frac{1}{4} - \frac{\lambda_+^2}{2} \ln \lambda_+ + \frac{\lambda_+^2}{4} \right) + \frac{1}{8} - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+^4}{8} + Bn \left(-\frac{1}{6} - \frac{\lambda_+^3}{3} + \frac{\lambda_+^2}{2} \right) \right\} \quad (46)$$

Para reducir términos en los pasos finales del problema a resolver, y con esto facilitar la resolución del problema, las ecuaciones (40 y 43) se dejaron en términos de λ_+ , mientras que de la ecuación (46) se desarrollan términos y se simplifica, quedando de las siguientes formas respetivamente:

$$Q_- = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left[\lambda^2 \left(\left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_-}{\kappa} \right) - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right) - \frac{\lambda_+^4}{8} + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{Bn^4}{8} + \frac{\lambda_+^3 Bn}{6} + \frac{\lambda_+^2 Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} + \frac{Bn^4}{3} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} + \frac{Bn^3 \kappa}{2} - \frac{\kappa^4}{8} \right] \quad (40.1)$$

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(+\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda_+ Bn^2 + \frac{5\lambda_+^2 Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+^3 Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} + \frac{Bn^3}{2} \right\} \quad (43.1)$$

$$Q_+ = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \lambda^2 \left(-\frac{1}{4} - \left(\frac{\lambda_+^2}{2} \right) \ln(\lambda_+) + \frac{\lambda_+^2}{4} \right) + \frac{1}{8} - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+^4}{8} - \frac{Bn}{6} - \frac{\lambda_+^3 Bn}{3} + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} \right\} \quad (46.1)$$

Finalmente sustituimos las ecuaciones (40.1, 43.1 y 46.1) en la ecuación (37.3):

$$\begin{aligned}
Q_{ee} = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} & \left[\lambda^2 \left(\left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_-}{\kappa} \right) - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right) - \frac{\lambda_+^4}{8} \right. \\
& + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{Bn^4}{8} + \frac{\lambda_+^3 Bn}{6} \\
& \left. + \frac{\lambda_+^2 Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} + \frac{Bn^4}{3} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} + \frac{Bn^3 \kappa}{2} - \frac{\kappa^4}{8} \right] \\
& + \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(+\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda_+ Bn^2 + \frac{5\lambda_+^2 Bn^2}{4} \right. \\
& \left. - \frac{\lambda_+^3 Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} + \frac{Bn^3}{2} \right\} \\
& + \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \lambda^2 \left(-\frac{1}{4} - \left(\frac{\lambda_+^2}{2} \right) \ln(\lambda_+) + \frac{\lambda_+^2}{4} \right) + \frac{1}{8} - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+^4}{8} - \frac{Bn}{6} \right. \\
& \left. - \frac{\lambda_+^3 Bn}{3} + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} \right\} \tag{47}
\end{aligned}$$

Factorizando la ecuación (47) se obtiene el flujo volumétrico a gradiente de presión constante:

$$Q_{ee} = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{8\mu_c L} \left\{ (1 - \kappa^4) - 2\lambda^2(1 - \kappa^2) - \frac{4}{3}Bn(1 + \kappa^3) + \frac{Bn}{3} \left[(4\lambda^2 + Bn^2)^{\frac{3}{2}} \right] \right\} \tag{48}$$

4.5 Cálculo del aumento volumétrico para el modelo reológico de Bingham

En esta sección se calculará las contribuciones a orden cero y primero del flujo pulsátil a partir de las definiciones del capítulo anterior.

Usando una serie de Taylor en función del esfuerzo en la pared nos queda la siguiente ecuación:

$$Q(\sigma_p(t)) = Q_0 + (\sigma_p(t) - \sigma_p) \frac{\partial Q(t)}{\partial \sigma_p(t)} \Big|_{\sigma_p(t) \rightarrow \sigma_p} \tag{49}$$

Sustituyendo la ecuación (23.1) en (49):

$$Q(\sigma_p(t)) = Q_0 + \sigma_p \varepsilon n(t) \frac{\partial Q(t)}{\partial \sigma_p(t)} \Big|_{\sigma_p(t) \rightarrow \sigma_p}$$

$$Q(\sigma_p(t)) = Q_0 + \sigma_p \varepsilon n(t) \frac{\partial Q_0}{\partial \sigma_p} \tag{50}$$

Expandiendo el flujo volumétrico pulsátil en términos del parámetro ε nos queda de la siguiente manera:

$$Q(t) = \varepsilon^0 Q_0 + \varepsilon^1 Q_1 + O(\varepsilon^1) \quad (51)$$

Aproximado las contribuciones de ordenes (0, y 1) en términos de flujo no estacionario y homogéneo de Poiseuille, se tiene lo siguiente:

$$Q(t) = \varepsilon^0(Q_0 = Q_{ee}) + \left(\varepsilon^1(Q_1) = \sigma_p n(t) \frac{\partial(Q_0 = Q_{ee})}{\partial \sigma_p} \right) + O(\varepsilon^1)$$

$$Q(t) = Q_{ee} + \varepsilon \sigma_p n(t) \frac{\partial Q_{ee}}{\partial \sigma_p} + O(\varepsilon^1) \quad (52)$$

Para expresar nuestro flujo en términos del número de Bingham se usa regla de la cadena quedando la ecuación (52) de la siguiente forma:

$$Q(Bn, t) = Q_{ee}(Bn) + \varepsilon Bn \left(-\frac{\partial Q_{ee}(Bn)}{\partial Bn} \right) n(t) + O(\varepsilon^1) \quad (53)$$

Recordando que el aumento de flujo volumétrico está definido como:

$$I = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} (100) \quad (54)$$

Sustituyendo la ecuación (51) en la ecuación (54):

$$I = \frac{\langle \varepsilon^0 Q_0 + \varepsilon^1 Q_1 + O(\varepsilon^1) \rangle - Q_0}{Q_0} (100)$$

El aumento de flujo volumétrico queda como se muestra a continuación:

$$I = 10^2 \varepsilon \frac{\langle Q_1 \rangle}{Q_0} \quad (55)$$

Por último, el aumento será expresado en términos del número de Bingham, esto se logra sustituyendo los términos correspondientes de la ecuación (53):

$$I = 10^2 \varepsilon \frac{Bn \left(-\frac{\partial Q_{ee}(Bn)}{\partial Bn} \right)}{Q_{ee}(Bn)} \langle n(t) \rangle \quad (56)$$

Las ecuaciones anteriores, son punto de partida en las simulaciones en el programa Mathematica y serán examinadas con las dos geometrías de estudio en la presente tesis de licenciatura.

CAPÍTULO V ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se discutirán los resultados obtenidos en las simulaciones hechas en el programa Mathematica, para ambas geometrías de estudio (capilar y corona circular) en la presente tesis de licenciatura.

5.1 Geometría Capilar

5.1.1 Fluidez aparente en función del número de Bingham

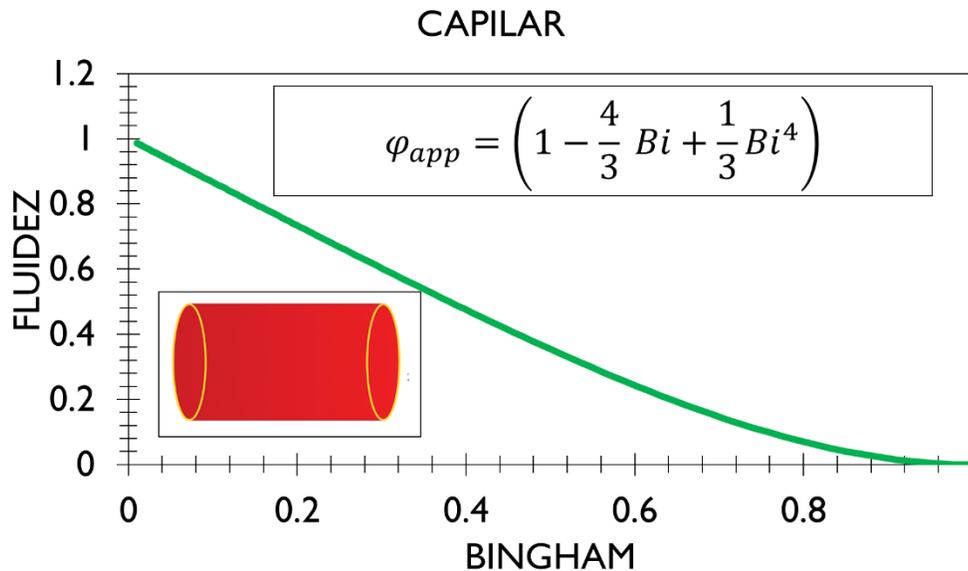


Figura 10. Fluidez aparente vs número de Bingham, para una geometría capilar.

En la Fig. 10 se simuló la fluidez aparente vs el número de Bingham en una geometría capilar de un líquido de Bingham. Se observa que mientras se tenga un número de Bingham con valor cercano a cero el fluido se comporta como líquido, teniendo la fluidez aparente con el mayor valor numérico. Mientras que conforme se aumenta el número de Bingham, el fluido muestra un comportamiento monótono (curva color verde) decreciente, en el cual el sistema experimenta constantes cambios en su viscosidad por efecto de la fuerza motriz, este cambio en la viscosidad irá en aumento gradualmente, por lo que el fluido le costará desplazarse por el sistema con mayor dificultad. A valores cercanos a uno en el número de Bingham el sistema tiende a comportarse como un sólido, ya que se acerca a la zona de esfuerzo de cedencia, teniendo la fluidez con el menor valor numérico. Y a valores mayores de uno el sistema se encuentra en la zona de esfuerzo de cedencia, donde el fluido es incapaz de fluir.

Como se mencionó con anterioridad, el número de Bingham relaciona el esfuerzo de cedencia propio del material en cuestión, entre el esfuerzo de corte en la pared. Dada que es una relación directamente proporcional entre el número de Bingham y el esfuerzo en la pared (ecuación 9), se tiene que a un número de Bingham cercano a 0 el esfuerzo de cedencia será menor y por ende el fluido puede fluir de

manera mejor que a un número cercano a 1 donde el esfuerzo de cedencia es mucho mayor y se dificulta el flujo.

5.1.2 Flujo volumétrico en función del número de Bingham

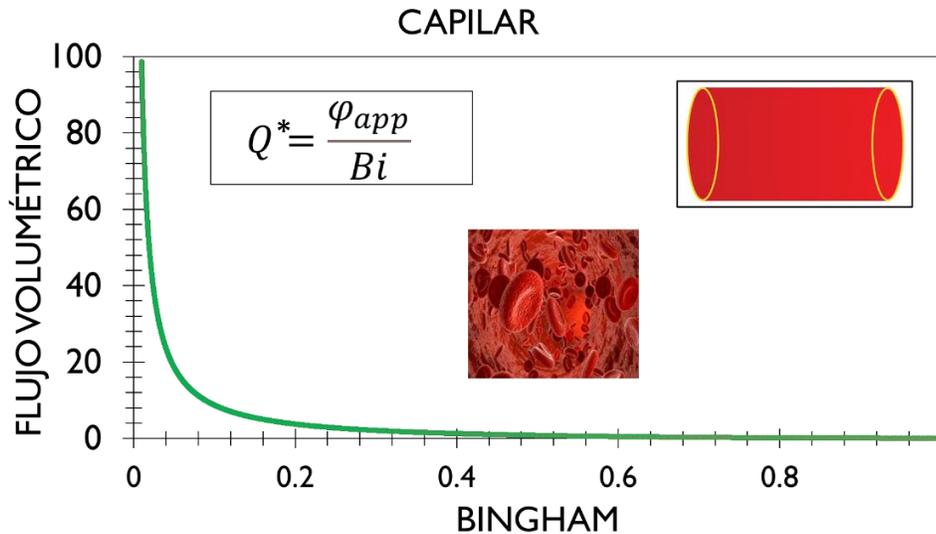


Figura 11. Flujo volumétrico vs número de Bingham, para una geometría capilar. Donde Q^* representa un flujo volumétrico adimensional.

En la Fig. 11 se simuló el flujo volumétrico vs el número de Bingham en una geometría capilar. Es importante mencionar que para estas simulaciones se hizo uso de un flujo volumétrico adimensional (Q^*) que relacionara la fluidez aparente y el número de Bingham, esto con el fin de simplificar la expresión analítica. Se observa que a un número de Bingham cercano a 0 el sistema muestra el máximo valor de flujo volumétrico en comparación con un número de Bingham cercano a 1 donde se puede ver el mínimo valor de flujo volumétrico. Con esto se puede observar que un cambio mínimo en el número de Bingham puede reducir drásticamente el flujo volumétrico, teniendo una caída exponencial en el valor del flujo volumétrico dejando en claro que el número de Bingham está fuertemente relacionado con el flujo volumétrico.

5.2 Geometría corona circular

5.2.1 Fluidez aparente en función del número de Bingham

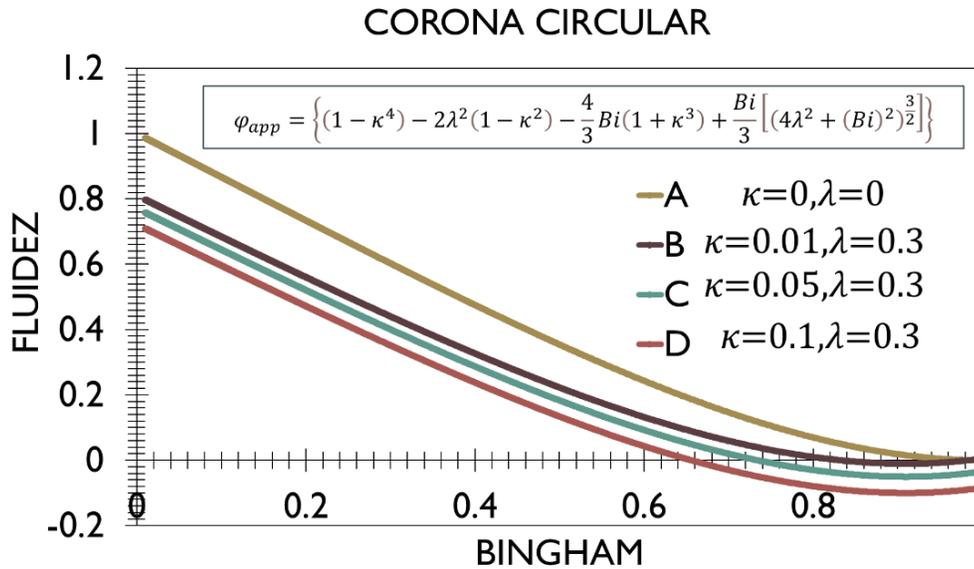


Figura 12. Fluidez aparente vs Numero de Bingham, para una corona circular.

En la Fig 12. Se ilustra la fluidez aparente vs número de Bingham, el cual relaciona un cociente de esfuerzo asociados a la fuerza motriz y al esfuerzo interno del material, para una corona circular en función de la geometría del sistema. En esta simulación se tienen dos parámetros cruciales los cuales muestran la importancia del efecto de la razón de radios en el sistema (lambda y kappa). Por una parte, el parámetro lambda describe el valor en donde el esfuerzo cortante es cero, más sin en cambio el parámetro kappa describe el valor que multiplica al radio menor de nuestros tubos concéntricos. Es claro, que el comportamiento es similar al de la fluidez en un capilar, sin embargo, existe una diferencia crucial que nos marca la pauta para los valores mínimos de los parámetros geométricos (kappa y lambda). En ese punto las simulaciones B, C y D nos dan una zona negativa de fluidez lo que no tiene ningún significado físico es decir los valores combinados de kappa y lambda deben de tener ciertas restricciones de tipo geométrico para que el estado del sistema tenga una interpretación física. Nótese, que los valores de kappa y lambda no son arbitrarios debido a que los valores de kappa deben ser menores a los de lambda. Se realizó una segunda simulación con diferentes valores (E, F, G y H) de los parámetros geométricos para no tener zonas negativas en nuestra fluidez, y con esto poder interpretar un mejor significado físico.

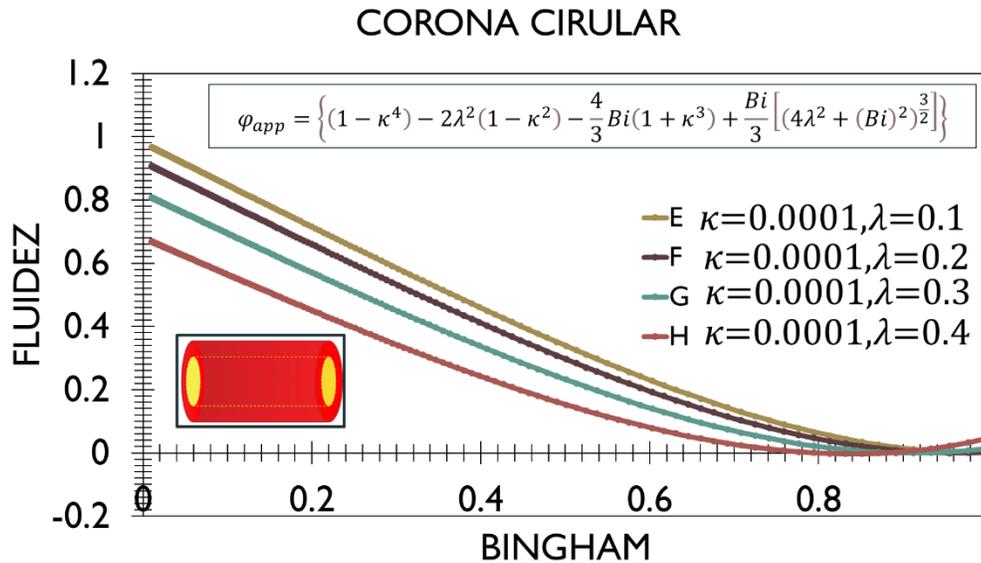


Figura 13. Fluidez aparente vs Numero de Bingham, con diferentes valores de Lambda y Kappa.

En la Fig 13. Se ilustra la fluidez aparente vs número de Bingham. En ese punto las simulaciones E, F, G y H ya nos dan una zona positiva de fluidez. En esta simulación se dejó un valor de kappa fijo (0.0001), ya que, si este valor se modifica, el sistema se ve afectado. El valor que se fue modificando fue lambda, del cual podemos observar que entre menor sea su valor favorece más la fluidez, ya que, si este es mayor, la fluidez decae y es más afectado por el número de Bingham.

5.2.2 Flujo volumétrico en función del número de Bingham

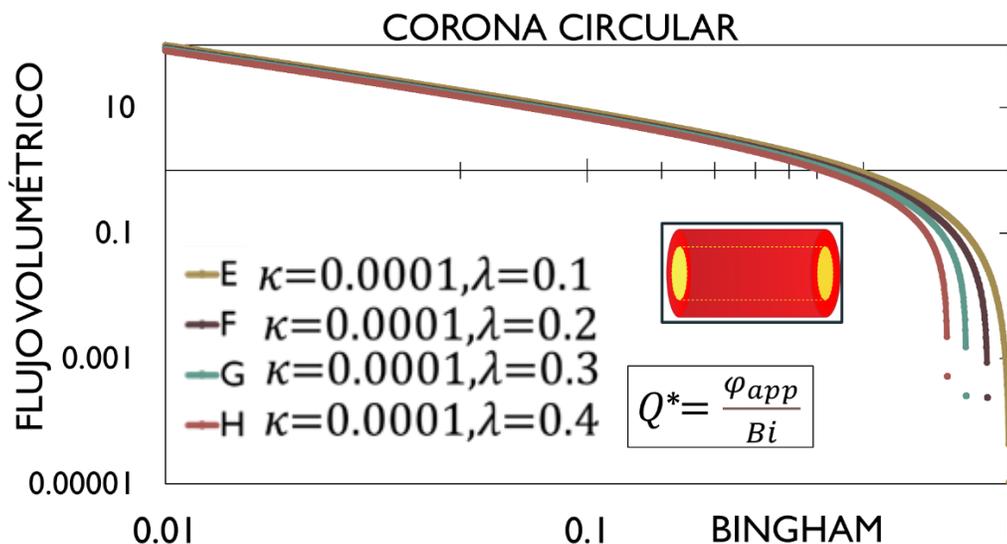


Figura 14. Flujo volumétrico vs Numero de Bingham, para una corona circular.

En la Fig 14. Se ilustra el flujo volumétrico vs el número de Bingham en una corona circular. Se puede notar que un aumento en kappa no afecta el flujo volumétrico en mucha proporción, sin embargo, un aumento relativamente pequeño en lambda reduce drásticamente el flujo volumétrico en función del número de Bingham. Al igual que la Fig. (13) se hizo fijo el valor de kappa mientras que el valor de lambda se fue modificando. De igual forma que en una geometría capilar se mira que el Bingham está fuertemente relacionado con el flujo volumétrico pues un cambio en este número afecta en gran medida al flujo volumétrico del material en cuestión.

5.3 Aumento volumétrico en un capilar

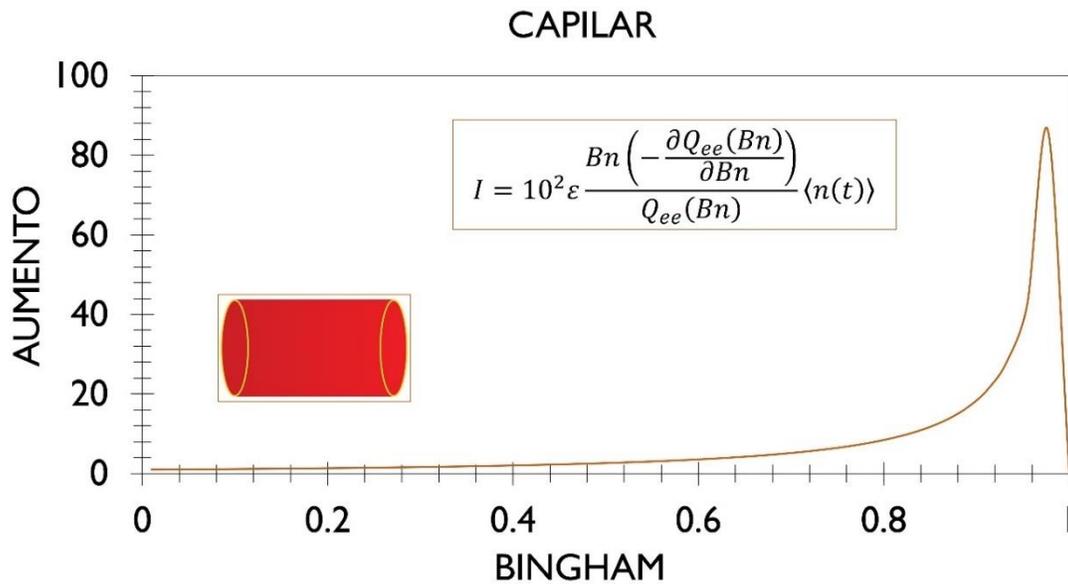


Figura 15. Aumento en el flujo volumétrico vs Numero de Bingham, para una geometría capilar.

En la Fig. (15) se simuló el aumento en el flujo volumétrico en función del número de Bingham, a valores cercanos a cero el aumento es mínimo y conforme el número de Bingham aumenta el sistema experimenta un comportamiento monótono creciente cercano a la unidad, y a Bingham igual a uno, el aumento decrece monótonamente hasta un valor de cero, ya que no puede haber aumento al ser ya un sólido. Es claro, que cuando a valores del número de Bingham cercanos a cero el sistema se comporta como un líquido y que conforme este aumenta su valor, el fluido experimenta una transición del líquido a sólido, lo que implica que, el sistema presente una estructura mayor, lo que hace que el sistema aumente en el flujo volumétrico. En el punto Bingham igual a uno el sistema es un sólido y entonces ya no se registra aumento. Un hecho importante, es que para que exista aumento en el flujo volumétrico, la viscosidad del fluido debe presentar un cambio en su estructura para que se induzca un aumento en el flujo volumétrico.

5.4 Aumento volumétrico en una corona circular

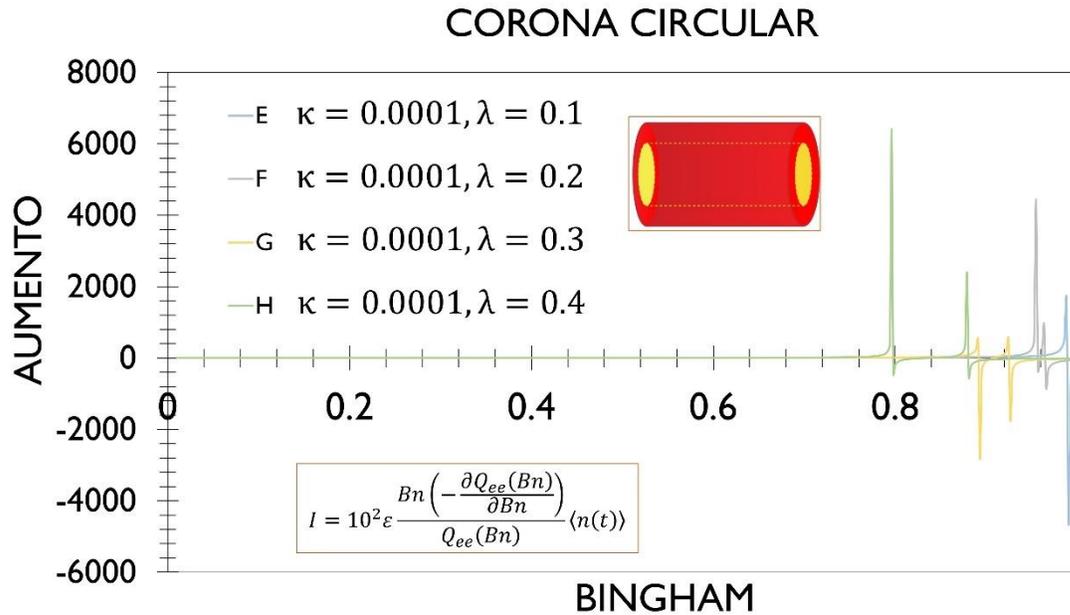


Figura 16. Aumento en el flujo volumétrico vs Numero de Bingham para una corona circular.

En la Fig. (16) se representa el aumento de flujo volumétrico en función del número de Bingham para una corona circular, para diferentes valores geométricos, de los parámetros kappa y lambda que están asociados a la geometría del sistema, siendo el valor de lambda el que se va variando y dejando el valor de kappa fijo en un valor determinado. Se observan en todos los casos curvas resonantes y anti-resonantes. Estas curvas son típicas de los sistemas que presentan discontinuidades por lo que se pueden asociar a las propiedades matemáticas de las funciones que aparecen en las soluciones. Es claro que el parámetro lambda nos da una relación que permite obtener gráficamente el valor en donde la velocidad alcanza su máximo. Si lambda es cercano a la unidad, el máximo de las curvas de velocidad se obtiene cercano a la pared interna del tubo exterior, mientras que, cuando lambda decrece el máximo se ve desplazado hacia el área exterior del tubo interior. Esto significa que el mayor de los aumentos se obtiene cuando existe un área mayor de contacto lo que implica que el fluido presenta el menor esfuerzo, mientras que al disminuir el área de contacto el esfuerzo aumenta y el sistema necesita mayor estructura para que exista un cambio en el flujo volumétrico. Es importante mencionar que, en una corona circular, en la cual fluye un líquido de Bingham, el efecto del área en donde se aplique el esfuerzo cortante juega un papel importante en el cambio en el flujo volumétrico.

CAPÍTULO VI CONCLUSIONES

En este capítulo se presentarán las conclusiones más importantes de esta tesis de licenciatura.

En el presente trabajo se analizó el efecto que tiene el gradiente de presión constante y pulsátil sobre el flujo de un líquido no-newtoniano de BINGHAM en dos geometrías diferentes: (a) capilar ($a/L \ll 1$) y (b) corona circular. Para caracterizar nuestro líquido no newtoniano se emplea el modelo reológico no newtoniano de Bingham. Se asumió un estado estacionario, a temperatura constante, que nuestro fluido es incompresible, a un flujo cortante simple y unidireccional. Para reducir y simplificar el problema se propusieron un conjunto de variables adimensionales las cuales fueron: coordenada radial adimensional (ξ), velocidad adimensional (ϕ), flujo adimensional (Q^*) y esfuerzo de corte adimensional (T).

Se obtuvieron expresiones analíticas para el perfil de velocidades, tanto para una geometría capilar como para una corona circular. De las cuales se obtienen diferentes zonas (homogéneas y parabólicas) para ambas geometrías.

Se concluye que para la geometría capilar tenemos:

- Dos zonas en el campo de velocidades.
- La zona I ($v_z^>$), que va desde el $r=0$ hasta el $r=r_0$, nos indica un perfil de velocidad homogéneo, donde tenemos lo que comúnmente se conoce como “flujo tapón”, en esta zona el esfuerzo cortante no supera al esfuerzo de cedencia propio del material por lo cual el flujo es incapaz de fluir y se comporta como un sólido.
- La zona II ($v_z^<$), que va desde el $r=r_0$ hasta el $r=R$, representa un perfil de velocidad parabólico, donde el esfuerzo cortante ha superado al esfuerzo de cedencia del material en cuestión, teniendo un comportamiento similar a un fluido newtoniano.

Se concluye que para la corona circular tenemos:

- Tres zonas en el campo de velocidades.
- La zona I (ϕ_-), que va desde $\xi=\kappa$ hasta $\xi=\lambda_-$, nos indica un perfil parabólico negativo, donde el esfuerzo cortante es mayor al esfuerzo de cedencia y por lo cual el líquido puede fluir de manera similar a un líquido newtoniano.
- La zona II (ϕ_0), que va desde $\xi=\lambda_+$ hasta $\xi=\lambda_-$, representa un perfil de velocidad homogéneo, donde tenemos el “flujo tapón”, de igual forma que en la geométrica capilar el esfuerzo cortante no supera al esfuerzo de cedencia propio del material por lo cual el flujo es incapaz de fluir y se comporta como un sólido.
- La zona III (ϕ_+), que va desde $\xi=\lambda_+$ hasta $\xi=1$, es la zona donde se encuentra la parte positiva del perfil de velocidades parabólico, donde tenemos un comportamiento similar al de un fluido newtoniano.

Para poder entender mejor el número de Bingham y como este afecta en el flujo, se hicieron simulaciones en el programa Mathematica para la fluidez aparente en función del número de Bingham.

De los resultados obtenidos lo más importante a destacar es lo siguiente:

- Las oclusiones periféricas son a las que se le deben dar una mayor atención, puesto que, en la oclusión central se presentó una fluidez mucho menor en comparación con la oclusión periférica, siendo la oclusión central la que más se vio afectada por las variaciones del número de Bingham, y en particular por los parámetros kappa y lambda.
- En la oclusión central el parámetro kappa es el que nos modifica más la fluidez del líquido, siendo que una mínima variación en este cambia drásticamente el flujo, como se observó en la Fig. (12) donde se nos muestra que las curvas llegan a zonas de fluidez negativa. Siendo que entre mas grande sea el valor de Kappa la fluidez ira decreciendo a zonas negativas.
- Podemos concluir que para una oclusión central el parámetro lambda también modifica en gran medida el flujo, no con la misma magnitud que kappa, pero si, una variación en este parámetro va a modificar la fluidez, observando que mientras se tenga una lambda menor se tiene una fluidez mejor, en cambio una lambda mucho mayor afecta de forma negativa la fluidez, siendo que entre más grande lambda menor fluidez tendrá nuestro líquido.
- Se observa que para ambas geometrías mientras el numero de Bingham se acerque mas al valor de cero este mostrara la mayor fluidez siendo que en esta zona el fluido tiende a comportarse más como un líquido, por el lado contrario mientras el numero de Bingham sea mas cercano a uno la fluidez mostrara un valor menor ya que en esta zona el liquido se comporta mas como un solido y por lo tanto es más difícil que fluya.

También se desarrollaron expresiones analíticas para el flujo volumétrico, tanto para una geometría capilar como para una corona circular. Para luego hacer una serie de simulaciones en el programa Mathematica para ver el comportamiento del flujo volumétrico adimensional (Q^*) en función del número de Bingham.

La conclusión mas importante que se puede observar para ambas geometrías es que el flujo volumétrico es más susceptible a un cambio en el número de Bingham, puesto que si tenemos una variación muy pequeña en el número de Bingham los valores en el flujo volumétrico decrecen de manera exponencial. Para el caso de una corona circular el valor de lambda juega un papel importante, ya que este debe ser menor, si este aumenta, el flujo volumétrico decae de manera considerable. Al igual que para la fluidez aparente, valores de kappa mayores, nos arrojaban zonas negativas, es por eso por lo que para simular el flujo volumétrico se fijó un valor de kappa, el cual fue de 0.0001, como se observa en la Fig. (14).

Por último, se hicieron dos graficas para el aumento en el flujo volumétrico, una para la geometría capilar y otra para una corona circular. Para el caso de un capilar se puede concluir que, si tenemos un valor, en el número de Bingham, más cercano a cero el aumento es mínimo y conforme este se acerca a uno entonces tendremos el mayor aumento en el flujo volumétrico, ya que en esta zona se encuentra la transición del líquido a sólido, donde podemos encontrar una estructura mayor en el fluido y la viscosidad en este punto presenta un cambio en su estructura, pudiéndose inducir un aumento en el flujo.

Por otra parte, para una corona circular tenemos dos parámetros a considerar (κ y λ), κ al igual que en las anteriores simulaciones se le dio un valor fijo, mientras que λ se iba modificando, como se observa en la Fig. (16). Para las variaciones en λ (E, F, G y H) se obtuvieron curvas resonantes y anti-resonantes. Podemos concluir que el parámetro λ nos indica gráficamente cuando la velocidad en el flujo alcanza su máximo. Si λ es mas cercano a uno presentaremos un máximo cercano a la pared interna del tubo exterior, por el lado contrario cuando λ decrece a cero entonces el máximo se va a desplazar a la pared exterior del tubo interior. Con esto podemos entonces concluir que el mayor en los aumentos para el flujo volumétrico va a ocurrir cuando exista un área mayor de contacto ya que el fluido presentara el menor esfuerzo, mientras que si el área de contacto decrece el esfuerzo aumenta y el sistema necesita mayor estructura para que exista un aumento en el flujo volumétrico. Al igual que en una geometría capilar el numero de Bingham esta relacionado con el aumento en el flujo, pues a un Bingham cercano a uno tendremos el aumento mayor para los diferentes valores de λ .

Este trabajo de investigación representa un esfuerzo en la búsqueda constante de soluciones de fluidos no newtonianos en sistemas biológicos, tomando como punto de partida fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos.

APÉNDICE

- **Cálculo del campo de velocidades en geometría capilar, para el modelo reológico de Bingham.**

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz})$$

$$\text{si: } \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\Delta P}{\Delta z} = \frac{\Delta P}{L}$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz})$$

$$\frac{\Delta P}{L} r \partial r = \partial (r \sigma_{rz})$$

$$\frac{\Delta P}{L} \int r \partial r = \int \partial (r \sigma_{rz})$$

$$\frac{\Delta P}{L} \left(\frac{r^2}{2} + C_1 \right) = r \sigma_{rz}$$

sabemos que $\sigma_{rz} = 0$ cuando $r = 0$

$$\frac{\Delta P}{L} \left(\frac{(0)^2}{2} + C_1 \right) = r(0)$$

$$C_1 = 0$$

$$r \sigma_{rz} = \frac{\Delta P}{L} \left(\frac{r^2}{2} + 0 \right)$$

$$\sigma_{rz} = \left(\frac{\Delta P}{2L} \right) r$$

$$\left(\frac{\Delta P}{2L} \right) r = \sigma_c - \mu_c \frac{dv_z}{dr}$$

$$\left(\frac{\Delta P}{2L} \right) r - \sigma_c = -\mu_c \frac{dv_z}{dr}$$

$$\left(\frac{\Delta P}{2\mu_c L} \right) r - \frac{\sigma_c}{\mu_c} = -\frac{dv_z}{dr}$$

$$-\left(\frac{\Delta P}{2\mu_c L} \right) r + \frac{\sigma_c}{\mu_c} = \frac{dv_z}{dr}$$

$$dv_z = \left[-\left(\frac{\Delta P}{2\mu_c L}\right)r + \frac{\sigma_c}{\mu_c} \right] dr$$

$$\int dv_z = -\left(\frac{\Delta P}{2\mu_c L}\right) \int r dr + \frac{\sigma_c}{\mu_c} \int dr$$

$$v_z = -\left(\frac{\Delta P}{4\mu_c L}\right)r^2 + \left(\frac{\sigma_c}{\mu_c}\right)r + C_1$$

Usando la condici3n limite de no deslizamiento:

$v_z = 0$ cuando $r = R$ podemos determinar C_1

$$0 = -\left(\frac{\Delta P}{4\mu_c L}\right)R^2 + \left(\frac{\sigma_c}{\mu_c}\right)R + C_1$$

$$C_1 = \left(\frac{\Delta P}{4\mu_c L}\right)R^2 - \left(\frac{\sigma_c}{\mu_c}\right)R$$

$$v_z = -\left(\frac{\Delta P}{4\mu_c L}\right)r^2 + \left(\frac{\sigma_c}{\mu_c}\right)r + \left(\frac{\Delta P}{4\mu_c L}\right)R^2 - \left(\frac{\sigma_c}{\mu_c}\right)R$$

Factorizando:

$$v_z = \left(\frac{\sigma_c}{\mu_c}\right)[r - R] + \left(\frac{\Delta P}{4\mu_c L}\right)[R^2 - r^2]$$

$$v_z = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] + \frac{\sigma_c R}{\mu_c} \left[\frac{r}{R} - 1 \right]$$

- **Campo de velocidad parab3lico**

$$v_z^< = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[1 - \left(\frac{r_c}{R}\right)^2 \right] + \frac{\sigma_c R}{\mu_c} \left[\frac{r_c}{R} - 1 \right] \quad r \leq r_c$$

$$\sigma_{rz} = \left(\frac{\Delta P}{2L}\right)r = \sigma_c = \left(\frac{\Delta P}{2L}\right)r_c$$

$$v_z^< = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[1 - \left(\frac{r_c}{R}\right)^2 \right] + \frac{(\Delta P)r_c R}{2\mu_c L} \left[\frac{r_c}{R} - 1 \right] \quad r \leq r_c$$

$$v_z^< = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[1 - \left(\frac{r_c}{R}\right)^2 \right] + \frac{(\Delta P)r_c R}{2\mu_c L} R \left[\frac{r_c}{R^2} - \frac{1}{R} \right] \quad r \leq r_c$$

$$v_z^< = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[1 - \left(\frac{r_c}{R} \right)^2 \right] + \frac{2(\Delta P)r_c R^2}{2 * 2\mu_c L} \left[\frac{r_c}{R^2} - \frac{1}{R} \right] \quad r \leq r_c$$

$$v_z^< = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[1 - \left(\frac{r_c}{R} \right)^2 \right] + \frac{(\Delta P)r_c R^2}{4\mu_c L} \left[2 \frac{r_c}{R^2} - \frac{2}{R} \right] \quad r \leq r_c$$

$$v_z^< = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[1 - \left(\frac{r_c}{R} \right)^2 \right] + \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[2 \frac{r_c^2}{R^2} - 2 \frac{r_c}{R} \right] \quad r \leq r_c$$

$$v_z^< = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[1 - \left(\frac{r_c}{R} \right)^2 + 2 \frac{r_c^2}{R^2} - 2 \frac{r_c}{R} \right] \quad r \leq r_c$$

$$v_z^< = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(1 - 2 \frac{r_c}{R} + \frac{r_c^2}{R^2} \right) \quad r \leq r_c$$

$$v_z^< = \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(1 - \frac{r_c}{R} \right)^2 \quad r \leq r_c$$

- **Cálculo del flujo volumétrico a gradiente de presión constante en geometría capilar, para el modelo reológico de Bingham.**

$$Q_{ee} = 2\pi \left[\int_0^{r_c} v_z^< r dr + \int_{r_c}^R v_z^> r dr \right]$$

Resolviendo la primera integral

$$\int_0^{r_c} v_z^< r dr$$

$$\int_0^{r_c} \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(1 - \frac{r_c}{R} \right)^2 r dr$$

$$\int_0^{r_c} \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(1 - 2 \frac{r_c}{R} + \frac{r_c^2}{R^2} \right) r dr$$

$$\int_0^{r_c} \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(r - 2 \frac{r_c}{R} r + \frac{r_c^2}{R^2} r \right) dr$$

$$\frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(\frac{r^2}{2} - 2 \frac{r_c}{R} \frac{r^2}{2} + \frac{r_c^2}{R^2} \frac{r^2}{2} \right)$$

$$\frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_c}{R} r^2 + \frac{r_c^2}{R^2} \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{r_c}$$

$$\frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(\frac{r_c^2}{2} - \frac{r_c}{R} r_c^2 + \frac{r_c^2}{R^2} \frac{r_c^2}{2} \right)$$

$$\frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(\frac{r_c^2}{2} - \frac{r_c^3}{R} + \frac{r_c^4}{2R^2} \right)$$

Haciendo la segunda integral

$$\int_{r_c}^R v_z^> r dr$$

$$\int_{r_c}^R \left\{ \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] - \frac{\sigma_c R}{\mu_c} \left[1 - \frac{r}{R} \right] \right\} r dr$$

$$\int_{r_c}^R \left\{ \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[r - \frac{r^3}{R^2} \right] - \frac{\sigma_c R}{\mu_c} \left[r - \frac{r^2}{R} \right] \right\} dr$$

$$\frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right] - \frac{\sigma_c R}{\mu_c} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R} \right] \Big|_{r_c}^R$$

$$\frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2} \right] - \frac{\sigma_c R}{\mu_c} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R} \right] - \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{r_c^2}{2} - \frac{r_c^4}{4R^2} \right] + \frac{\sigma_c R}{\mu_c} \left[\frac{r_c^2}{2} - \frac{r_c^3}{3R} \right]$$

$$\frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right] - \frac{\sigma_c R}{\mu_c} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3} \right] - \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{r_c^2}{2} - \frac{r_c^4}{4R^2} \right] + \frac{\sigma_c R}{\mu_c} \left[\frac{r_c^2}{2} - \frac{r_c^3}{3R} \right]$$

$$\frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2}{4} \right] - \frac{\sigma_c R}{\mu_c} \left[\frac{R^2}{6} \right] - \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{r_c^2}{2} - \frac{r_c^4}{4R^2} \right] + \frac{\sigma_c R}{\mu_c} \left[\frac{r_c^2}{2} - \frac{r_c^3}{3R} \right]$$

$$\frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2}{4} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^4}{4R^2} \right] - \frac{\sigma_c R}{\mu_c} \left[\frac{R^2}{6} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^3}{3R} \right]$$

$$\sigma_c = \left(\frac{\Delta P}{2L} \right) r_c$$

$$\frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2}{4} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^4}{4R^2} \right] - \left(\frac{\Delta P}{2\mu_c L} \right) R r_c \left[\frac{R^2}{6} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^3}{3R} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2}{4} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^4}{4R^2} \right] - \left(\frac{\Delta P}{2\mu_c L} \right) R r_c \frac{R}{2} \left[\frac{R^2}{6} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^3}{3R} \right] \\
& \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2}{4} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^4}{4R^2} \right] - \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \frac{2r_c}{R} \left[\frac{R^2}{6} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^3}{3R} \right] \\
& \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2}{4} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^4}{4R^2} \right] - \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2 2r_c}{6R} - \frac{r_c^2 2r_c}{2R} + \frac{r_c^3 2r_c}{3R^2} \right] \\
& \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2}{4} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^4}{4R^2} \right] - \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{Rr_c}{3} - \frac{r_c^3}{R} + \frac{2r_c^4}{3R^2} \right] \\
& \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2}{4} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^4}{4R^2} - \frac{Rr_c}{3} + \frac{r_c^3}{R} - \frac{2r_c^4}{3R^2} \right] \\
& \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2}{4} - \frac{Rr_c}{3} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^3}{R} - \frac{5r_c^4}{12R^2} \right]
\end{aligned}$$

Uniendo ambos resultados

$$Q_{ee} = 2\pi \left\{ \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(\frac{r_c^2}{2} - \frac{r_c^3}{R} + \frac{r_c^4}{2R^2} \right) + \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left[\frac{R^2}{4} - \frac{Rr_c}{3} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^3}{R} - \frac{5r_c^4}{12R^2} \right] \right\}$$

$$Q_{ee} = 2\pi \left\{ \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(\frac{r_c^2}{2} - \frac{r_c^3}{R} + \frac{r_c^4}{2R^2} + \frac{R^2}{4} - \frac{Rr_c}{3} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_c^3}{R} - \frac{5r_c^4}{12R^2} \right) \right\}$$

$$Q_{ee} = 2\pi \left\{ \frac{(\Delta P)R^2}{4\mu_c L} \left(\frac{R^2}{4} - \frac{Rr_c}{3} + \frac{r_c^4}{12R^2} \right) \right\}$$

$$Q_{ee} = \frac{\pi(\Delta P)R^2 R^2}{2\mu_c L} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{4r_c}{3R} + \frac{r_c^4}{3R^4} \right)$$

$$Q_{ee} = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{8\mu_c L} \left(1 - \frac{4r_c}{3R} + \frac{r_c^4}{3R^4} \right)$$

sí:

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_p} = \frac{\left(\frac{\Delta P}{2L} \right) r_c}{\left(\frac{\Delta P}{2L} \right) R} = \frac{r_c}{R}$$

entonces:

$$Q_{ee} = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{8\mu_c L} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_p} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_p} \right)^4 \right)$$

- **Cálculo del campo de velocidades en corona circular, para el modelo reológico de Bingham.**

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz})$$

$$\text{si: } \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\Delta P}{\Delta z} = \frac{\Delta P}{L}$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz})$$

$$\partial(r\sigma_{rz}) = \frac{\Delta P}{L} r \partial r$$

$$\int \partial(r\sigma_{rz}) = \frac{\Delta P}{L} \int r \partial r$$

$$r\sigma_{rz} = \frac{\Delta P}{2L} r^2 + C_1$$

$$\sigma_{rz} = \left(\frac{\Delta P}{2L} \right) r + \frac{C_1}{r}$$

Sabemos que: $\sigma_{rz} (r = \lambda R) = 0$

$$0 = \left(\frac{\Delta P}{2L} \right) \lambda R + \frac{C_1}{\lambda R}$$

$$C_1 = -\frac{\Delta P}{2L} (\lambda R)^2$$

$$\sigma_{rz} = \frac{\Delta P}{2L} r - \frac{\Delta P (\lambda R)^2}{2L r}$$

$$\sigma_{rz} = \frac{(\Delta P)R}{2L} \left[\frac{r}{R} - \frac{\lambda^2 R}{r} \right]$$

Haciendo la densidad de flujo de cantidad de movimiento adimensional:

$$\frac{2L}{(\Delta P)R} \left[\sigma_{rz} = \frac{(\Delta P)R}{2L} \left(\frac{r}{R} - \frac{\lambda^2 R}{r} \right) \right]$$

$$T = \left[\frac{r}{R} - \frac{\lambda^2 R}{r} \right] = \left[\frac{r}{R} - \frac{\lambda^2}{\frac{r}{R}} \right]$$

$$T = \left[\xi - \frac{\lambda^2}{\xi} \right]$$

- **Cálculo de la velocidad (Φ_-) en la región I para el intervalo $\kappa \leq \xi \leq \lambda_-$**

El modelo de Bingham nos indica:

$$\sigma_{rz} = \pm \sigma_c - \mu_c \frac{dv_z}{dr}$$

entonces:

$$\frac{(\Delta P)R}{2L} \left[\frac{r}{R} - \frac{\lambda^2 R}{r} \right] = \pm \sigma_c - \mu_c \frac{dv_z}{dr}$$

Transformando la ecuación a su forma dimensional:

$$\frac{2L}{(\Delta P)R} \left\{ \left[\frac{(\Delta P)R}{2L} \left(\frac{r}{R} - \frac{\lambda^2 R}{r} \right) \right] \right\} = \pm \sigma_c - \mu_c \frac{dv_z}{dr}$$

$$\left(\frac{r}{R} - \frac{\lambda^2 R}{r} \right) = \pm \frac{2L\sigma_c}{(\Delta P)R} - \frac{2L\mu_c}{(\Delta P)R} \frac{dv_z}{dr}$$

$$\left(\frac{r}{R} - \frac{\lambda^2}{\frac{r}{R}} \right) = \pm \frac{2L\sigma_c}{(\Delta P)R} - \frac{d \frac{2L\mu_c}{(\Delta P)R} v_z}{dr}$$

$$\left(\xi - \frac{\lambda^2}{\xi} \right) = \pm \frac{2L\sigma_c}{(\Delta P)R} - \frac{d \frac{2L\mu_c}{(\Delta P)R} \frac{1}{R} v_z}{d \frac{r}{R}}$$

Recordando que:

$$\sigma_p = \left(\frac{\Delta P}{2L} \right) R$$

$$\left(\xi - \frac{\lambda^2}{\xi}\right) = \pm \frac{\sigma_c}{\sigma_p} - \frac{d \frac{2L\mu_c}{(\Delta P)R^2} v_z}{d \frac{r}{R}}$$

$$\left(\xi - \frac{\lambda^2}{\xi}\right) = \pm Bn - \frac{d\phi}{d\xi}$$

$$T = \pm Bn - \frac{d\phi}{d\xi}$$

Limites de la region de flujo tapon estan dados por:

$$r = \lambda_+ R \quad y \quad r = \lambda_- R$$

despejando $\frac{r}{R} = \lambda_+$ y $\frac{r}{R} = \lambda_-$ entonces: $\lambda_{\pm} = \frac{r}{R} \rightarrow \lambda_{\pm} = \xi$

Por ende:

$$T = \left(\lambda_{\pm} - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\pm}}\right)$$

Pero como los limites de la region de tapon estan dados por:

$$\pm Bn = \frac{2L\sigma_c}{(\Delta P)R}$$

entonces, la ecuacion queda:

$$\pm Bn = \left[\lambda_{\pm} - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\pm}}\right]$$

Tomando la parte negativa:

$$\xi - \frac{\lambda^2}{\xi} = -Bn - \frac{d\phi_-}{d\xi}$$

$$-\frac{d\phi_-}{d\xi} = Bn + \xi - \frac{\lambda^2}{\xi}$$

$$\frac{d\phi_-}{d\xi} = -\xi + \frac{\lambda^2}{\xi} - Bn$$

$$d\phi_- = -\xi d\xi + \frac{\lambda^2}{\xi} d\xi - Bn d\xi$$

$$\int d\phi_- = -\int \xi d\xi + \lambda^2 \int \frac{1}{\xi} d\xi - Bn \int d\xi$$

$$\phi_- = -\frac{\xi^2}{2} + \lambda^2 \ln \xi - Bn\xi + C_2$$

$$C.L.1 \quad v_z = 0 \quad \text{cuando } r = \kappa R$$

Transformando a su forma adimensional:

$$C.L.1 \quad v_z \left(\frac{2L\mu_c}{(\Delta P)R^2} \right) = \left(\frac{2L\mu_c}{(\Delta P)R^2} \right) 0 \quad \text{cuando } \frac{r}{R} = \frac{\kappa R}{R}$$

$$C.L.1 \quad \phi_- = 0 \quad \text{cuando } \xi = \kappa$$

$$0 = -\frac{\kappa^2}{2} + \lambda^2 \ln \kappa - Bn\kappa + C_2$$

$$C_2 = \frac{\kappa^2}{2} - \lambda^2 \ln \kappa + Bn\kappa$$

$$\phi_- = -\frac{\xi^2}{2} + \lambda^2 \ln \xi - Bn\xi + \frac{\kappa^2}{2} - \lambda^2 \ln \kappa + Bn\kappa$$

$$\phi_- = \lambda^2 \ln \frac{\xi}{\kappa} + \frac{(\kappa^2 - \xi^2)}{2} + Bn(\kappa - \xi)$$

- **Cálculo de la velocidad (Φ_+) en la región III para el intervalo $\lambda_+ \leq \xi \leq 1$**

Tomando la parte positiva:

$$\xi - \frac{\lambda^2}{\xi} = +Bn - \frac{d\phi_+}{d\xi}$$

$$-\frac{d\phi_+}{d\xi} = -Bn + \xi - \frac{\lambda^2}{\xi}$$

$$\frac{d\phi_+}{d\xi} = -\xi + \frac{\lambda^2}{\xi} + Bn$$

$$d\phi_+ = -\xi d\xi + \frac{\lambda^2}{\xi} d\xi + Bnd\xi$$

$$\int d\phi_+ = -\int \xi d\xi + \lambda^2 \int \frac{1}{\xi} d\xi + Bn \int d\xi$$

$$\phi_+ = -\frac{\xi^2}{2} + \lambda^2 \ln \xi + Bn\xi + C_3$$

$$C.C.L.3 \quad v_z = 0 \quad \text{cuando } r = R$$

Haciendolo adimensional:

$$C.L.3 \quad v_z \left(\frac{2L\mu_c}{(\Delta P)R^2} \right) = \left(\frac{2L\mu_c}{(\Delta P)R^2} \right) 0 \quad \text{cuando } \frac{r}{R} = \frac{R}{R}$$

$$C.L.3 \quad \phi_- = 0 \quad \text{cuando } \xi = 1$$

$$0 = -\frac{1^2}{2} + \lambda^2 \ln 1 + Bn1 + C_3$$

$$C_3 = \frac{1}{2} - Bn$$

$$\phi_+ = -\frac{\xi^2}{2} + \lambda^2 \ln \xi + Bn\xi + \frac{1}{2} - Bn$$

$$\phi_+ = \lambda^2 \ln \xi + \frac{(1 - \xi^2)}{2} + Bn(\xi - 1)$$

- **Cálculo de la velocidad (Φ_0) en la región II para el intervalo $\lambda_- \leq \xi \leq \lambda_+$**

Sabemos que:

$$\phi_0 = \phi_+(\xi = \lambda_+)$$

Sustituyendo $\xi = \lambda_+$ en ϕ_0 :

$$\phi_0 = \lambda^2 \ln \lambda_+ + \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} + Bn(\lambda_+ - 1)$$

- **Cálculo del flujo volumétrico a gradiente de presión constante en corona circular, para el modelo reológico de Bingham.**

$$Q_{ee} = 2\pi \left[\int_{\kappa R}^{\lambda_- R} v_{z-} r dr + \int_{\lambda_- R}^{\lambda_+ R} v_{z0} r dr + \int_{\lambda_+ R}^R v_{z+} r dr \right]$$

- a) **Resolviendo la velocidad volumétrica de flujo para Q_- :**

$$Q_- = 2\pi \int_{\kappa R}^{\lambda_- R} v_{z-} r dr$$

Haciendo adimensional:

$$Q_- \frac{1}{R^2} \left(\frac{2L\mu_c}{(\Delta P)R^2} \right) = 2\pi \int_{\frac{\kappa R}{R}}^{\frac{\lambda_- R}{R}} v_{z-} \left(\frac{2L\mu_c}{(\Delta P)R^2} \right) \frac{r}{R} d\frac{r}{R}$$

$$Q_- = \frac{2\pi(\Delta P)R^4}{2L\mu_c} \int_{\kappa}^{\lambda_-} \phi_- \xi d\xi$$

Sustituyendo:

$$Q_- = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \int_{\kappa}^{\lambda_-} \left[\lambda^2 \ln \frac{\xi}{\kappa} + \frac{(\kappa^2 - \xi^2)}{2} + Bn(\kappa - \xi) \right] \xi d\xi$$

Resolviendo la primera parte:

$$\lambda^2 \int_{\kappa}^{\lambda_-} \left[\ln \frac{\xi}{\kappa} \right] \xi d\xi$$

$$u = \ln \frac{\xi}{\kappa} \quad dv = \xi d\xi$$

$$du = \frac{1}{\xi} d\xi \quad v = \frac{\xi^2}{2}$$

$$= \frac{\xi^2}{2} \ln \frac{\xi}{\kappa} - \int \frac{\xi^2}{2} \frac{1}{\xi} d\xi$$

$$= \frac{\xi^2}{2} \ln \frac{\xi}{\kappa} - \frac{1}{2} \int \xi d\xi$$

$$= \frac{\xi^2}{2} \ln \frac{\xi}{\kappa} - \frac{\xi^2}{4} \Big|_{\kappa}^{\lambda_-}$$

$$= \frac{\lambda_-^2}{2} \ln \frac{\lambda_-}{\kappa} - \frac{\lambda_-^2}{4} - \left(\frac{\kappa^2}{2} \ln \frac{\kappa}{\kappa} - \frac{\kappa^2}{4} \right)$$

$$= \frac{\lambda_-^2}{2} \ln \frac{\lambda_-}{\kappa} - \frac{\lambda_-^2}{4} - \frac{\kappa^2}{2} \ln 1 + \frac{\kappa^2}{4}$$

$$\lambda^2 \int_{\kappa}^{\lambda_-} \left[\ln \frac{\xi}{\kappa} \right] \xi d\xi = \lambda^2 \left(\frac{\lambda_-^2}{2} \ln \frac{\lambda_-}{\kappa} - \frac{\lambda_-^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right)$$

Resolviendo la segunda parte:

$$\int_{\kappa}^{\lambda_-} \left[\frac{(\kappa^2 - \xi^2)}{2} \right] \xi d\xi$$

$$\int_{\kappa}^{\lambda_-} \frac{\kappa^2}{2} \xi d\xi - \int_{\kappa}^{\lambda_-} \frac{\xi^3}{2} d\xi$$

$$\int_{\kappa}^{\lambda_-} \frac{\kappa^2}{2} \xi d\xi = \frac{\kappa^2}{2} \frac{\xi^2}{2} = \frac{\kappa^2}{2} \frac{\xi^2}{2} \Big|_{\kappa}^{\lambda_-} = \frac{\kappa^2}{2} \frac{\lambda_-^2}{2} - \frac{\kappa^2}{2} \frac{\kappa^2}{2} = \frac{\lambda_-^2 \kappa^2}{4} - \frac{\kappa^4}{4}$$

$$- \int_{\kappa}^{\lambda_-} \frac{\xi^3}{2} d\xi = - \frac{\xi^4}{8} = - \frac{\xi^4}{8} \Big|_{\kappa}^{\lambda_-} = - \frac{\lambda_-^4}{8} + \frac{\kappa^4}{8}$$

$$\int_{\kappa}^{\lambda_-} \left[\frac{(\kappa^2 - \xi^2)}{2} \right] \xi d\xi = \frac{\lambda_-^2 \kappa^2}{4} - \frac{\kappa^4}{4} - \frac{\lambda_-^4}{8} + \frac{\kappa^4}{8} = \frac{\lambda_-^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_-^4}{8} - \frac{\kappa^4}{8}$$

Resolviendo la tercera parte:

$$\int_{\kappa}^{\lambda_-} [Bn(\kappa - \xi)] \xi d\xi$$

$$Bn \left(\kappa \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right)$$

$$Bn \left(\kappa \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right) \Big|_{\kappa}^{\lambda_-} = Bn \left(\kappa \frac{\lambda_-^2}{2} - \frac{\lambda_-^3}{3} \right) - Bn \left(\kappa \frac{\kappa^2}{2} - \frac{\kappa^3}{3} \right)$$

$$Bn \left(\kappa \frac{\lambda_-^2}{2} - \frac{\lambda_-^3}{3} - \frac{\kappa^3}{2} + \frac{\kappa^3}{3} \right)$$

$$\int_{\kappa}^{\lambda_-} [Bn(\kappa - \xi)] \xi d\xi = \xi Bn \left(\kappa \frac{\lambda_-^2}{2} - \frac{\lambda_-^3}{3} - \frac{\kappa^3}{6} \right)$$

Uniendo las tres partes :

$$Q_- = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left[\lambda^2 \left(\frac{\lambda_-^2}{2} \ln \frac{\lambda_-}{\kappa} - \frac{\lambda_-^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right) + \frac{\lambda_-^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_-^4}{8} - \frac{\kappa^4}{8} \right. \\ \left. + Bn \left(\kappa \frac{\lambda_-^2}{2} - \frac{\lambda_-^3}{3} - \frac{\kappa^3}{6} \right) \right]$$

Dejando todo en terminos de λ_+

Recordando:

$$\pm Bn = \left[\lambda_{\pm} - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\pm}} \right]$$

$$Bn = \lambda_+ - \frac{\lambda^2}{\lambda_+}$$

$$-Bn = \lambda_- - \frac{\lambda^2}{\lambda_-}$$

$$0 = \lambda_+ - \frac{\lambda^2}{\lambda_+} + \lambda_- - \frac{\lambda^2}{\lambda_-}$$

$$0 = \lambda_+ - \lambda^2 \left(\frac{1}{\lambda_+} + \frac{1}{\lambda_-} \right) + \lambda_-$$

$$\lambda^2 \left(\frac{1}{\lambda_+} + \frac{1}{\lambda_-} \right) = \lambda_+ + \lambda_-$$

$$\lambda^2 = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{\frac{1}{\lambda_+} + \frac{1}{\lambda_-}}$$

$$\lambda^2 = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{\frac{\lambda_- + \lambda_+}{\lambda_+ \lambda_-}}$$

$$\lambda^2 = \frac{(\lambda_+ + \lambda_-)\lambda_+ \lambda_-}{\lambda_- + \lambda_+}$$

$$\lambda^2 = \lambda_+ \lambda_- \\ Bn = \lambda_+ - \lambda_+ \lambda_-^2$$

$$Bn = \lambda_+ (1 - \lambda_-^2)$$

$$-Bn = \lambda_- - \frac{\lambda_+ \lambda_-^2}{\lambda_-}$$

$$-Bn = \lambda_- - \lambda_+^2 \lambda_-$$

$$-Bn = \lambda_- (1 - \lambda_+^2)$$

$$Bn = \lambda_- (\lambda_+^2 - 1)$$

$$\lambda_+ = Bn + \frac{\lambda^2}{\lambda_+}$$

$$\lambda^2 = \frac{\lambda_+ - Bn}{\lambda_+}$$

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_+} = \lambda_+ - Bn$$

$$\lambda_- = \lambda_+ - Bn$$

$$\lambda_-^2 = \lambda_+^2 - 2\lambda_+ Bn + Bn^2$$

$$\lambda_-^3 = \lambda_+^3 - 3\lambda_+^2 Bn + 3\lambda_+ Bn^2 - Bn^3$$

$$\lambda_-^4 = \lambda_+^4 - 4\lambda_+^3 Bn + 6\lambda_+^2 Bn^2 - 4\lambda_+ Bn^3 + Bn^4$$

Sustituyendo:

$$Q_- = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left[\lambda^2 \left(\frac{\lambda_+^2 - 2\lambda_+ Bn + Bn^2}{2} \ln \frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa} - \frac{\lambda_+^2 - 2\lambda_+ Bn + Bn^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right) + \frac{(\lambda_+^2 - 2\lambda_+ Bn + Bn^2)\kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+^4 - 4\lambda_+^3 Bn + 6\lambda_+^2 Bn^2 - 4\lambda_+ Bn^3 + Bn^4}{8} - \frac{\kappa^4}{8} + Bn \left(\kappa \frac{(\lambda_+^2 - 2\lambda_+ Bn + Bn^2)}{2} - \frac{\lambda_+^3 - 3\lambda_+^2 Bn + 3\lambda_+ Bn^2 - Bn^3}{3} - \frac{\kappa^3}{6} \right) \right]$$

$$Q_- = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left[\lambda^2 \left(\frac{\lambda_+^2 - 2\lambda_+ Bn + Bn^2}{2} \ln \frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa} - \frac{\lambda_+^2 - 2\lambda_+ Bn + Bn^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right) + \frac{(\lambda_+^2 \kappa^2 - 2\lambda_+ Bn \kappa^2 + Bn^2 \kappa^2)}{4} - \frac{\lambda_+^4 - 4\lambda_+^3 Bn + 6\lambda_+^2 Bn^2 - 4\lambda_+ Bn^3 + Bn^4}{8} - \frac{\kappa^4}{8} + Bn \left(\frac{(\kappa \lambda_+^2 - 2\lambda_+ Bn \kappa + Bn^2 \kappa)}{2} - \frac{\lambda_+^3 - 3\lambda_+^2 Bn + 3\lambda_+ Bn^2 - Bn^3}{3} - \frac{\kappa^3}{6} \right) \right]$$

$$Q_- = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left[\lambda^2 \left(\left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa} \right) - \left(\frac{\lambda_+^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn}{2} + \frac{Bn^2}{4} \right) + \frac{\kappa^2}{4} \right) + \left(\frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} \right) - \left(\frac{\lambda_+^4}{8} - \frac{\lambda_+^3 Bn}{2} + \frac{3\lambda_+^2 Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} + \frac{Bn^4}{8} \right) - \frac{\kappa^4}{8} + Bn \left(\left(\frac{\kappa \lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn \kappa + \frac{Bn^2 \kappa}{2} \right) - \left(\frac{\lambda_+^3}{3} - \lambda_+^2 Bn + \lambda_+ Bn^2 - \frac{Bn^3}{3} \right) - \frac{\kappa^3}{6} \right) \right]$$

$$Q_- = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left[\lambda^2 \left(\left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa} \right) - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right) + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+^4}{8} + \frac{\lambda_+^3 Bn}{2} - \frac{3\lambda_+^2 Bn^2}{4} + \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} - \frac{Bn^4}{8} - \frac{\kappa^4}{8} + Bn \left(\frac{\kappa \lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn \kappa + \frac{Bn^2 \kappa}{2} - \frac{\lambda_+^3}{3} + \lambda_+^2 Bn - \lambda_+ Bn^2 + \frac{Bn^3}{3} - \frac{\kappa^3}{6} \right) \right]$$

$$Q_- = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left[\lambda^2 \left(\left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa} \right) - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right) \right. \\ \left. + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+^4}{8} + \frac{\lambda_+^3 Bn}{2} - \frac{3\lambda_+^2 Bn^2}{4} + \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} - \frac{Bn^4}{8} \right. \\ \left. - \frac{\kappa^4}{8} \right. \\ \left. + \left(\frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn Bn \kappa + \frac{Bn^2 Bn \kappa}{2} - \frac{\lambda_+^3 Bn}{3} + \lambda_+^2 Bn Bn - \lambda_+ Bn^2 Bn \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{Bn^3 Bn}{3} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} \right) \right]$$

$$Q_- = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left[\lambda^2 \left(\left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa} \right) - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right) \right. \\ \left. + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+^4}{8} + \frac{\lambda_+^3 Bn}{2} - \frac{3\lambda_+^2 Bn^2}{4} + \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} - \frac{Bn^4}{8} \right. \\ \left. - \frac{\kappa^4}{8} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^3 \kappa}{2} - \frac{\lambda_+^3 Bn}{3} + \lambda_+^2 Bn^2 - \lambda_+ Bn^3 + \frac{Bn^4}{3} \right. \\ \left. - \frac{\kappa^3 Bn}{6} \right]$$

$$Q_- = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left[\lambda^2 \left(\left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa} \right) - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right) \right. \\ \left. - \frac{\lambda_+^4}{8} + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{Bn^4}{8} + \frac{\lambda_+^3 Bn}{6} \right. \\ \left. + \frac{\lambda_+^2 Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} + \frac{Bn^4}{3} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} + \frac{Bn^3 \kappa}{2} - \frac{\kappa^4}{8} \right]$$

b) Resolviendo la velocidad volumétrica de flujo para Q_0 :

$$Q_0 = \int_{\lambda_{-R}}^{\lambda_{+R}} v_{z_0} r dr$$

Haciendo adimensional:

$$Q_0 \frac{1}{R^2} \left(\frac{2L\mu_C}{(\Delta P)R^2} \right) = 2\pi \int_{\frac{\lambda_- R}{R}}^{\frac{\lambda_+ R}{R}} v_{z0} \left(\frac{2L\mu_C}{(\Delta P)R^2} \right) \frac{r}{R} d\frac{r}{R}$$

$$Q_0 = \frac{2\pi(\Delta P)R^4}{2L\mu_C} \int_{\lambda_-}^{\lambda_+} \phi_0 \xi d\xi$$

Sustituyendo:

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_C} \int_{\lambda_-}^{\lambda_+} \left[\lambda^2 \ln \lambda_+ + \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} + Bn(\lambda_+ - 1) \right] \xi d\xi$$

Resolviendo la primera parte:

$$\int_{\lambda_-}^{\lambda_+} \lambda^2 \ln \lambda_+ \xi d\xi$$

$$\lambda^2 \ln \lambda_+ \left. \frac{\xi^2}{2} \right|_{\lambda_-}^{\lambda_+}$$

$$\lambda^2 \ln \lambda_+ \frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda^2 \ln \lambda_+ \frac{\lambda_-^2}{2}$$

$$\int_{\lambda_-}^{\lambda_+} \lambda^2 \ln \lambda_+ \xi d\xi = \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_-^2}{2} \right)$$

Resolviendo la segunda parte:

$$\int_{\lambda_-}^{\lambda_+} \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} \xi d\xi$$

$$\left. \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} \frac{\xi^2}{2} \right|_{\lambda_-}^{\lambda_+}$$

$$\frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} \frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} \frac{\lambda_-^2}{2}$$

$$\int_{\lambda_-}^{\lambda_+} \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} \xi d\xi = \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_-^2}{2} \right)$$

Resolviendo la tercera parte:

$$\int_{\lambda_-}^{\lambda_+} Bn(\lambda_+ - 1)\xi d\xi$$

$$Bn(\lambda_+ - 1)\frac{\xi^2}{2}\Big|_{\lambda_-}^{\lambda_+}$$

$$Bn(\lambda_+ - 1)\frac{\lambda_+^2}{2} - T_0(\lambda_+ - 1)\frac{\lambda_-^2}{2}$$

$$\int_{\lambda_-}^{\lambda_+} \mathbf{Bn}(\lambda_+ - \mathbf{1})\xi d\xi = Bn(\lambda_+ - 1)\left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_-^2}{2}\right)$$

Uniendo las tres partes :

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_-^2}{2} \right) + \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_-^2}{2} \right) + Bn(\lambda_+ - 1) \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_-^2}{2} \right) \right\}$$

Dejando todo en terminos de λ_+

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_+^2 - 2\lambda_+ Bn + Bn^2}{2} \right) + \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_+^2 - 2\lambda_+ Bn + Bn^2}{2} \right) + Bn(\lambda_+ - 1) \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_+^2 - 2\lambda_+ Bn + Bn^2}{2} \right) \right\}$$

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \right) + \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \right) + Bn(\lambda_+ - 1) \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \right) \right\}$$

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_+^2}{2} + \lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) \right. \\ \left. + \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_+^2}{2} + \lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) \right. \\ \left. + Bn(\lambda_+ - 1) \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \frac{\lambda_+^2}{2} + \lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) \right\}$$

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) + \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} \left(\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) \right. \\ \left. + Bn(\lambda_+ - 1) \left(\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) \right\}$$

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_+^2}{2} \right) \left(\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) \right. \\ \left. + (\lambda_+ Bn - Bn) \left(\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) \right\}$$

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) + \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_+^2}{2} \right) \lambda_+ Bn - \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_+^2}{2} \right) \frac{Bn^2}{2} \right) \right. \\ \left. + \left(\lambda_+ Bn(\lambda_+ Bn - Bn) - (\lambda_+ Bn - Bn) \frac{Bn^2}{2} \right) \right\}$$

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) + \left(\frac{\lambda_+ Bn}{2} - \frac{\lambda_+^2 \lambda_+ Bn}{2} - \left(\frac{1}{2} \frac{Bn^2}{2} - \frac{Bn^2 \lambda_+^2}{2} \right) \right) \right. \\ \left. + \left(\lambda_+ Bn \lambda_+ Bn - \lambda_+ Bn Bn - \left(\lambda_+ Bn \frac{Bn^2}{2} - \frac{Bn^2}{2} Bn \right) \right) \right\}$$

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) + \left(\frac{\lambda_+ Bn}{2} - \frac{\lambda_+^3 Bn}{2} - \left(\frac{Bn^2}{4} - \frac{Bn^2 \lambda_+^2}{4} \right) \right) \right. \\ \left. + \left(\lambda_+^2 Bn^2 - \lambda_+ Bn^2 - \left(\frac{\lambda_+ Bn^3}{2} - \frac{Bn^3}{2} \right) \right) \right\}$$

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \frac{\lambda_+^3 Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} + \frac{Bn^2 \lambda_+^2}{4} + \lambda_+^2 Bn^2 - \lambda_+ Bn^2 - \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} + \frac{Bn^3}{2} \right\}$$

$$Q_0 = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda_+ Bn^2 + \frac{5\lambda_+^2 Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+^3 Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} + \frac{Bn^3}{2} \right\}$$

c) Resolviendo la velocidad volumétrica de flujo para Q_+ :

$$Q_+ = \int_{\lambda_+ R}^R v_{z+} r dr$$

Haciendo adimensional:

$$Q_+ \frac{1}{R^2} \left(\frac{2L\mu_c}{(\Delta P)R^2} \right) = 2\pi \int_{\frac{\lambda_+ R}{R}}^{\frac{R}{R}} v_{z+} \left(\frac{2L\mu_c}{(\Delta P)R^2} \right) \frac{r}{R} d \frac{r}{R}$$

$$Q_+ = \frac{2\pi(\Delta P)R^4}{2L\mu_c} \int_{\lambda_+}^1 \phi_+ \xi d\xi$$

Sustituyendo:

$$Q_+ = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \int_{\lambda_+}^1 \lambda^2 \ln \xi + \frac{(1 - \xi^2)}{2} + Bn(\xi - 1) \xi d\xi$$

Resolviendo la primera parte:

$$\lambda^2 \int_{\lambda_+}^1 [\ln \xi] \xi d\xi$$

$$u = \ln \xi \quad dv = \xi d\xi$$

$$du = \frac{1}{\xi} d\xi \quad v = \frac{\xi^2}{2}$$

$$= \frac{\xi^2}{2} \ln \xi - \int \frac{\xi^2}{2} \frac{1}{\xi} d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\xi^2}{2} \ln \xi - \frac{1}{2} \int \xi d\xi \\
&= \frac{\xi^2}{2} \ln \xi - \frac{\xi^2}{4} \Big|_{\lambda_+}^1 \\
&= \frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1^2}{4} - \left(\frac{\lambda_+^2}{2} \ln \lambda_+ - \frac{\lambda_+^2}{4} \right) \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{\lambda_+^2}{2} \ln \lambda_+ + \frac{\lambda_+^2}{4} \\
\lambda^2 \int_{\lambda_+}^1 [\ln \xi] \xi d\xi &= \lambda^2 \left(-\frac{1}{4} - \frac{\lambda_+^2}{2} \ln \lambda_+ + \frac{\lambda_+^2}{4} \right)
\end{aligned}$$

Resolviendo la segunda parte:

$$\begin{aligned}
&\int_{\lambda_+}^1 \left[\frac{(1 - \xi^2)}{2} \right] \xi d\xi \\
&\int_{\lambda_+}^1 \frac{1}{2} \xi d\xi - \int_{\lambda_+}^1 \frac{\xi^3}{2} d\xi \\
\int_{\lambda_+}^1 \frac{1}{2} \xi d\xi &= \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{2} = \frac{\xi^2}{4} \Big|_{\lambda_+}^1 = \frac{1^2}{4} - \frac{\lambda_+^2}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\lambda_+^2}{4} \\
- \int_{\lambda_+}^1 \frac{\xi^3}{2} d\xi &= -\frac{\xi^4}{8} = -\frac{\xi^4}{8} \Big|_{\lambda_+}^1 = -\frac{1^4}{8} + \frac{\lambda_+^4}{8} \\
\int_{\lambda_+}^1 \left[\frac{(1 - \xi^2)}{2} \right] \xi d\xi &= \frac{1}{4} - \frac{\lambda_+^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{\lambda_+^4}{8} = \frac{1}{8} - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+^4}{8}
\end{aligned}$$

Resolviendo la tercera parte:

$$\begin{aligned}
&\int_{\lambda_+}^1 [Bn(\xi - 1)] \xi d\xi \\
&Bn \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$Bn \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{2} \right) \Big|_{\lambda_+}^1 = Bn \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right) - Bn \left(\frac{\lambda_+^3}{3} - \frac{\lambda_+^2}{2} \right)$$

$$Bn \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{\lambda_+^3}{3} + \frac{\lambda_+^2}{2} \right)$$

$$\int_{\lambda_+}^1 [Bn(\xi - 1)] \xi d\xi = Bn \left(-\frac{1}{6} - \frac{\lambda_+^3}{3} + \frac{\lambda_+^2}{2} \right)$$

Uniendo las tres partes :

$$Q_+ = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \left(-\frac{1}{4} - \frac{\lambda_+^2}{2} \ln \lambda_+ + \frac{\lambda_+^2}{4} \right) + \frac{1}{8} - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+^4}{8} + Bn \left(-\frac{1}{6} - \frac{\lambda_+^3}{3} + \frac{\lambda_+^2}{2} \right) \right\}$$

Desarrollamos terminos y simplificamos:

$$Q_+ = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \left(-\frac{1}{4} - \left(\frac{\lambda_+^2}{2} \right) \ln(\lambda_+) + \frac{\lambda_+^2}{4} \right) + \frac{1}{8} - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+^4}{8} \right. \\ \left. + \left(-\frac{Bn}{6} - \frac{\lambda_+^3 Bn}{3} + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} \right) \right\}$$

$$Q_+ = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{L\mu_c} \left\{ \lambda^2 \left(-\frac{1}{4} - \left(\frac{\lambda_+^2}{2} \right) \ln(\lambda_+) + \frac{\lambda_+^2}{4} \right) + \frac{1}{8} - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+^4}{8} - \frac{Bn}{6} - \frac{\lambda_+^3 Bn}{3} \right. \\ \left. + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} \right\}$$

Uniendo Q_- , Q_0 y Q_+ tenemos que:

$$\begin{aligned}
Q_{ee} = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} & \left[\lambda^2 \left(\left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa} \right) - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right) \right. \\
& - \frac{\lambda_+^4}{8} + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{Bn^4}{8} + \frac{\lambda_+^3 Bn}{6} \\
& \left. + \frac{\lambda_+^2 Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} + \frac{Bn^4}{3} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} + \frac{Bn^3 \kappa}{2} - \frac{\kappa^4}{8} \right] \\
& + \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda_+ Bn^2 + \frac{5\lambda_+^2 Bn^2}{4} \right. \\
& \left. - \frac{\lambda_+^3 Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} + \frac{Bn^3}{2} \right\} \\
& + \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \lambda^2 \left(-\frac{1}{4} - \left(\frac{\lambda_+^2}{2} \right) \ln(\lambda_+) + \frac{\lambda_+^2}{4} \right) + \frac{1}{8} - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+^4}{8} - \frac{Bn}{6} \right. \\
& \left. - \frac{\lambda_+^3 Bn}{3} + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} & \left[\lambda^2 \left(\left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa} \right) - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right) \right. \\
& - \frac{\lambda_+^4}{8} + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{Bn^4}{8} + \frac{\lambda_+^3 Bn}{6} \\
& + \frac{\lambda_+^2 Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} + \frac{Bn^4}{3} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} + \frac{Bn^3 \kappa}{2} - \frac{\kappa^4}{8} \\
& + \lambda^2 \ln \lambda_+ \left(\lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda_+ Bn^2 + \frac{5\lambda_+^2 Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+^3 Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} \\
& - \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} + \frac{Bn^3}{2} + \lambda^2 \left(-\frac{1}{4} - \left(\frac{\lambda_+^2}{2} \right) \ln(\lambda_+) + \frac{\lambda_+^2}{4} \right) + \frac{1}{8} - \frac{\lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+^4}{8} - \frac{Bn}{6} \\
& \left. - \frac{\lambda_+^3 Bn}{3} + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} \right]
\end{aligned}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \lambda^2 \left[\left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa} \right) + \ln \lambda_+ \left(-\frac{\lambda_+^2}{2} + \lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} - \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{8} - \frac{\kappa^4}{8} + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} \right. \\ \left. - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} + \frac{Bn^3 \kappa}{2} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda_+ Bn^2 + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} \right. \\ \left. + \frac{3\lambda_+^2 Bn^2}{2} - \frac{2\lambda_+^3 Bn}{3} - \lambda_+ Bn^3 + \frac{5Bn^4}{24} + \frac{Bn^3}{2} - \frac{Bn^2}{4} - \frac{Bn}{6} \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \lambda^2 \left[\left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \left[\ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa} \right) - \ln \lambda_+ \right] + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{8} - \frac{\kappa^4}{8} + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} \right. \\ \left. - \frac{\kappa^3 Bn}{6} + \frac{Bn^3 \kappa}{2} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda_+ Bn^2 + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} + \frac{3\lambda_+^2 Bn^2}{2} - \frac{2\lambda_+^3 Bn}{3} \right. \\ \left. - \lambda_+ Bn^3 + \frac{5Bn^4}{24} + \frac{Bn^3}{2} - \frac{Bn^2}{4} - \frac{Bn}{6} \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \lambda^2 \left[\left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\lambda_+} \right) + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \frac{Bn^2}{4} + \frac{\kappa^2}{4} - \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{8} \right. \\ \left. - \frac{\kappa^4}{8} + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} \right. \\ \left. + \frac{Bn^3 \kappa}{2} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda_+ Bn^2 + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} + \frac{3\lambda_+^2 Bn^2}{2} - \frac{2\lambda_+^3 Bn}{3} - \lambda_+ Bn^3 \right. \\ \left. + \frac{5Bn^4}{24} + \frac{Bn^3}{2} - \frac{Bn^2}{4} - \frac{Bn}{6} \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \lambda^2 \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa \lambda_+} \right) + \lambda^2 \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda^2 \frac{Bn^2}{4} + \lambda^2 \frac{\kappa^2}{4} \right. \\ \left. - \lambda^2 \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{\kappa^4}{8} + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} \right. \\ \left. - \frac{\kappa^3 Bn}{6} + \frac{Bn^3 \kappa}{2} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda_+ Bn^2 + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} + \frac{3\lambda_+^2 Bn^2}{2} - \frac{2\lambda_+^3 Bn}{3} \right. \\ \left. - \lambda_+ Bn^3 + \frac{5Bn^4}{24} + \frac{Bn^3}{2} - \frac{Bn^2}{4} - \frac{Bn}{6} \right\}$$

Sabemos que:

$$\phi_0 = \phi_-(\xi = \lambda_-) = \phi_+(\xi = \lambda_+)$$

$$\text{Entonces: } \phi_-(\xi = \lambda_-) - \phi_+(\xi = \lambda_+) = 0$$

Para $\phi_-(\xi = \lambda_-)$:

$$\phi_- = \lambda^2 \ln \frac{\lambda_-}{\kappa} + \frac{(\kappa^2 - \lambda_-^2)}{2} + Bn(\kappa - \lambda_-)$$

Para $\phi_+(\xi = \lambda_+)$:

$$\phi_+ = \lambda^2 \ln \lambda_+ + \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} + Bn(\lambda_+ - 1)$$

restando:

$$\lambda^2 \ln \frac{\lambda_-}{\kappa} + \frac{(\kappa^2 - \lambda_-^2)}{2} + Bn(\kappa - \lambda_-) - \lambda^2 \ln \lambda_+ - \frac{(1 - \lambda_+^2)}{2} - Bn(\lambda_+ - 1) = 0$$

$$\lambda^2 \ln \frac{\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa}}{\lambda_+} + \frac{(\kappa^2 - (\lambda_+^2 - 2\lambda_+ Bn + Bn^2) - 1 + \lambda_+^2)}{2} + Bn(\kappa - (\lambda_+ - Bn) - \lambda_+ + 1) = 0$$

$$\lambda^2 \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa \lambda_+} \right) + \frac{\kappa^2 - \lambda_+^2 + 2\lambda_+ Bn - Bn^2 - 1 + \lambda_+^2}{2} + Bn(\kappa - \lambda_+ + Bn - \lambda_+ + 1) = 0$$

$$\lambda^2 \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa \lambda_+} \right) + \frac{\kappa^2 + 2\lambda_+ Bn - Bn^2 - 1}{2} + Bn(\kappa - 2\lambda_+ + Bn + 1) = 0$$

$$\lambda^2 \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa \lambda_+} \right) + \frac{\kappa^2}{2} + \lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} - \frac{1}{2} + (\kappa Bn - 2\lambda_+ Bn + Bn Bn + Bn) = 0$$

$$\lambda^2 \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa \lambda_+} \right) + \frac{\kappa^2}{2} + \lambda_+ Bn - \frac{Bn^2}{2} - \frac{1}{2} + \kappa Bn - 2\lambda_+ Bn + Bn^2 + Bn = 0$$

$$\lambda^2 \ln \left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa \lambda_+} \right) - \frac{1}{2} + \frac{\kappa^2}{2} + \kappa Bn + \frac{Bn^2}{2} - \lambda_+ Bn + Bn = 0$$

despejando $\lambda^2 \ln\left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa\lambda_+}\right)$

$$\lambda^2 \ln\left(\frac{\lambda_+ - Bn}{\kappa\lambda_+}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\kappa^2}{2} - \kappa Bn - \frac{Bn^2}{2} + \lambda_+ Bn - Bn$$

Sustituyendo:

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\kappa^2}{2} - \kappa Bn - \frac{Bn^2}{2} + \lambda_+ Bn - Bn \right) + \lambda^2 \frac{\lambda_+ Bn}{2} \right. \\ \left. - \lambda^2 \frac{Bn^2}{4} + \lambda^2 \frac{\kappa^2}{4} - \lambda^2 \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{\kappa^4}{8} + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} \right. \\ \left. - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} + \frac{Bn^3 \kappa}{2} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda_+ Bn^2 + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} \right. \\ \left. + \frac{3\lambda_+^2 Bn^2}{2} - \frac{2\lambda_+^3 Bn}{3} - \lambda_+ Bn^3 + \frac{5Bn^4}{24} + \frac{Bn^3}{2} - \frac{Bn^2}{4} - \frac{Bn}{6} \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) - \frac{\kappa^2}{2} \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \kappa Bn \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) - \frac{Bn^2}{2} \left(\frac{\lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \right) \right] + \lambda^2 \frac{\lambda_+ Bn}{2} \right. \\ \left. - \lambda^2 \frac{Bn^2}{4} + \lambda^2 \frac{\kappa^2}{4} - \lambda^2 \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{\kappa^4}{8} + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} \right. \\ \left. - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} + \frac{Bn^3 \kappa}{2} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda_+ Bn^2 + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} \right. \\ \left. + \frac{3\lambda_+^2 Bn^2}{2} - \frac{2\lambda_+^3 Bn}{3} - \lambda_+ Bn^3 + \frac{5Bn^4}{24} + \frac{Bn^3}{2} - \frac{Bn^2}{4} - \frac{Bn}{6} \right\}$$

$$\begin{aligned}
Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} & \left\{ \left(\left(\frac{\lambda_+^2}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lambda_+ Bn + \frac{1}{2} \frac{Bn^2}{2} \right) - \left(\frac{\lambda_+^2}{2} \frac{\kappa^2}{2} - \lambda_+ Bn \frac{\kappa^2}{2} + \frac{\kappa^2 Bn^2}{2} \right) \right. \right. \\
& - \left(\frac{\lambda_+^2}{2} \kappa Bn - \kappa Bn \lambda_+ Bn + \kappa Bn \frac{Bn^2}{2} \right) \\
& - \left(\frac{\lambda_+^2}{2} \frac{Bn^2}{2} - \frac{Bn^2}{2} \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \frac{Bn^2}{2} \right) \\
& + \left(\frac{\lambda_+^2}{2} \lambda_+ Bn - \lambda_+ Bn \lambda_+ Bn + \frac{Bn^2}{2} \lambda_+ Bn \right) \\
& \left. - \left(\frac{\lambda_+^2}{2} Bn - \lambda_+ Bn Bn + T_0 \frac{T_0^2}{2} \right) \right) + \lambda^2 \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda^2 \frac{Bn^2}{4} + \lambda^2 \frac{\kappa^2}{4} - \lambda^2 \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\
& - \frac{\kappa^4}{8} + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} \\
& + \frac{Bn^3 \kappa}{2} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda_+ Bn^2 + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} + \frac{3\lambda_+^2 Bn^2}{2} - \frac{2\lambda_+^3 Bn}{3} - \lambda_+ Bn^3 \\
& \left. + \frac{5Bn^4}{24} + \frac{Bn^3}{2} - \frac{Bn^2}{4} - \frac{Bn}{6} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} & \left\{ \left(\left(\frac{\lambda_+^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn}{2} + \frac{Bn^2}{4} \right) - \left(\frac{\kappa^2 \lambda_+^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa^2 Bn^2}{4} \right) \right. \right. \\
& - \left(\frac{\lambda_+^2 \kappa Bn}{2} - \kappa \lambda_+ Bn^2 + \frac{\kappa Bn^3}{2} \right) - \left(\frac{\lambda_+^2 Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} + \frac{Bn^4}{4} \right) \\
& + \left(\frac{\lambda_+^3 Bn}{2} - \lambda_+^2 Bn^2 + \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} \right) - \left(\frac{\lambda_+^2 Bn}{2} - \lambda_+ Bn^2 + \frac{Bn^3}{2} \right) \right) + \lambda^2 \frac{\lambda_+ Bn}{2} \\
& - \lambda^2 \frac{Bn^2}{4} + \lambda^2 \frac{\kappa^2}{4} - \lambda^2 \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{\kappa^4}{8} + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} - \frac{\lambda_+^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} \\
& - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} + \frac{Bn^3 \kappa}{2} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda_+ Bn^2 + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} \\
& \left. + \frac{3\lambda_+^2 Bn^2}{2} - \frac{2\lambda_+^3 Bn}{3} - \lambda_+ Bn^3 + \frac{5Bn^4}{24} + \frac{Bn^3}{2} - \frac{Bn^2}{4} - \frac{Bn}{6} \right\}
\end{aligned}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \frac{\lambda_+^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn}{2} + \frac{Bn^2}{4} - \frac{\kappa^2 \lambda_+^2}{4} + \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} - \frac{\kappa^2 Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+^2 \kappa Bn}{2} + \kappa \lambda_+ Bn^2 \right. \\ \left. - \frac{\kappa Bn^3}{2} - \frac{\lambda_+^2 Bn^2}{4} + \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} - \frac{Bn^4}{4} + \frac{\lambda_+^3 Bn}{2} - \lambda_+^2 Bn^2 + \frac{\lambda_+ Bn^3}{2} - \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} \right. \\ \left. + \lambda_+ Bn^2 - \frac{Bn^3}{2} + \lambda^2 \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda^2 \frac{Bn^2}{4} + \lambda^2 \frac{\kappa^2}{4} - \lambda^2 \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{\kappa^4}{8} + \frac{\lambda_+^2 \kappa^2}{4} \right. \\ \left. - \frac{\lambda_+^2}{4} - \frac{\lambda_+ Bn \kappa^2}{2} + \frac{\kappa Bn \lambda_+^2}{2} - \lambda_+ Bn^2 \kappa + \frac{Bn^2 \kappa^2}{4} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} + \frac{Bn^3 \kappa}{2} + \frac{\lambda_+ Bn}{2} \right. \\ \left. - \lambda_+ Bn^2 + \frac{\lambda_+^2 Bn}{2} + \frac{3\lambda_+^2 Bn^2}{2} - \frac{2\lambda_+^3 Bn}{3} - \lambda_+ Bn^3 + \frac{5Bn^4}{24} + \frac{Bn^3}{2} - \frac{Bn^2}{4} \right. \\ \left. - \frac{Bn}{6} \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \lambda^2 \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda^2 \frac{Bn^2}{4} + \lambda^2 \frac{\kappa^2}{4} - \lambda^2 \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{\kappa^4}{8} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} + \frac{\lambda_+^2 Bn^2}{4} - \frac{\lambda_+^3 Bn}{6} \right. \\ \left. - \frac{Bn^4}{24} - \frac{Bn}{6} \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \left\{ \frac{1}{8} (1 - \kappa^4) + \frac{\lambda^2}{4} (\kappa^2 - 1) + \lambda^2 \frac{\lambda_+ Bn}{2} - \lambda^2 \frac{Bn^2}{4} - \frac{\kappa^3 Bn}{6} + \frac{\lambda_+^2 Bn^2}{4} \right. \\ \left. - \frac{\lambda_+^3 Bn}{6} - \frac{Bn^4}{24} - \frac{Bn}{6} \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{\mu_c L} \frac{1}{8} \left\{ \frac{8}{8} (1 - \kappa^4) + 8 \frac{\lambda^2}{4} (\kappa^2 - 1) + 8 \lambda^2 \frac{\lambda_+ Bn}{2} - 8 \lambda^2 \frac{Bn^2}{4} - 8 \frac{\kappa^3 Bn}{6} \right. \\ \left. + 8 \frac{\lambda_+^2 Bn^2}{4} - 8 \frac{\lambda_+^3 Bn}{6} - 8 \frac{Bn^4}{24} - 8 \frac{Bn}{6} \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{8\mu_c L} \left\{ (1 - \kappa^4) + 2\lambda^2 (\kappa^2 - 1) + 8\lambda^2 \frac{\lambda_+ Bn}{2} - 8\lambda^2 \frac{Bn^2}{4} - 4 \frac{\kappa^3 Bn}{3} + 2\lambda_+^2 Bn^2 \right. \\ \left. - 4 \frac{\lambda_+^3 Bn}{3} - \frac{Bn^4}{3} - 4 \frac{Bn}{3} \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{8\mu_c L} \left\{ (1 - \kappa^4) - 2\lambda^2(1 - \kappa^2) + 8\lambda^2 \frac{\lambda_+ Bn}{2} - 8\lambda^2 \frac{Bn^2}{4} - \frac{4}{3} Bn(1 + \kappa^3) \right. \\ \left. + 2\lambda_+^2 Bn^2 - 4 \frac{\lambda_+^3 Bn}{3} - \frac{Bn^4}{3} \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{8\mu_c L} \left\{ (1 - \kappa^4) - 2\lambda^2(1 - \kappa^2) - \frac{4}{3} Bn(1 + \kappa^3) - 2\lambda^2 Bn^2 + 4\lambda^2 Bn\lambda_+ \right. \\ \left. + 2Bn^2\lambda_+^2 - 4 \frac{Bn\lambda_+^3}{3} - \frac{Bn^4}{3} \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{8\mu_c L} \left\{ (1 - \kappa^4) - 2\lambda^2(1 - \kappa^2) - \frac{4}{3} Bn(1 + \kappa^3) \right. \\ \left. + Bn \left(-2\lambda^2 Bn + 4(\lambda^2)\lambda_+ + 2\lambda_+^2 Bn - 4 \frac{\lambda_+^3}{3} - \frac{Bn^3}{3} \right) \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{8\mu_c L} \left\{ (1 - \kappa^4) - 2\lambda^2(1 - \kappa^2) - \frac{4}{3} Bn(1 + \kappa^3) \right. \\ \left. + \frac{Bn}{3} (+8\lambda_+^3 - 12\lambda_+^2 Bn + 6\lambda_+ Bn^2 - Bn^3) \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{8\mu_c L} \left\{ (1 - \kappa^4) - 2\lambda^2(1 - \kappa^2) - \frac{4}{3} Bn(1 + \kappa^3) + \frac{Bn}{3} [(2\lambda_+ - Bn)^3] \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{8\mu_c L} \left\{ (1 - \kappa^4) - 2\lambda^2(1 - \kappa^2) - \frac{4}{3} Bn(1 + \kappa^3) \right. \\ \left. + \frac{Bn}{3} [(2\lambda_+ - Bn)^2(2\lambda_+ - Bn)] \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{8\mu_c L} \left\{ (1 - \kappa^4) - 2\lambda^2(1 - \kappa^2) - \frac{4}{3} Bn(1 + \kappa^3) \right. \\ \left. + \frac{Bn}{3} [(4\lambda^2 + Bn^2)(2\lambda_+ - Bn)] \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{8\mu_c L} \left\{ (1 - \kappa^4) - 2\lambda^2(1 - \kappa^2) - \frac{4}{3} Bn(1 + \kappa^3) \right. \\ \left. + \frac{Bn}{3} [(4\lambda^2 + Bn^2)(4\lambda^2 + Bn^2)^{\frac{1}{2}}] \right\}$$

$$Q = \frac{\pi(\Delta P)R^4}{8\mu_c L} \left\{ (1 - \kappa^4) - 2\lambda^2(1 - \kappa^2) - \frac{4}{3} Bn(1 + \kappa^3) + \frac{Bn}{3} [(4\lambda^2 + Bn^2)^{\frac{3}{2}}] \right\}$$

BIBLIOGRAFÍA

- Abou-Dakka, M., Herrera-Valencia, E., & Rey, A. D. (2012). Linear oscillatory dynamics of flexoelectric membranes embedded in viscoelastic media with applications to outer hair cells. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1-17.
- Amaratunga, M., Rabenjafimanantsoa, H. A., & Time, R. W. (2019). Comparison of oscillatory flow conditions in Newtonian and non-Newtonian fluids using PIV and high-speed image analysis. *Flow Measurement and Instrumentation*, 70, 1-18.
- Bernardino de la Serna, J., Sancho Bueso, T., García Iglesias, M., Lavilla Uriol, P., & Gil Aguado, A. (Noviembre de 2000). Aterosclerosis e infección. *Medicina Integral*, 36(9), 332-342.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. (2020). *Fenómenos de transporte*. Editorial Reverté.
- Collepardo-Guevara, R., & Corvera Poiré, E. (2007). Controlling viscoelastic flow by tuning frequency during occlusions. *PHYSICAL REVIEW E*.
- Daily, J. W., & Harleman, D. R. (1975). *Dinámica de los fluidos con aplicaciones en la ingeniería*. Mexico: Trillas.
- de Andrade Lima, L., & Rey, A. (2005). Pulsatile flow of discotic mesophases. *Chemical Engineering Science*, 60(23), 6622 – 6636.
- De luca, G., & Rey, A. (2006). Dynamic interactions between nematic point defects in the spinning extrusion duct of spiders. *THE JOURNAL OF CHEMICAL PHYSICS*, 124(14), 144904-144904-8.
- Fishier, L. S., & Brodkey, R. S. (1991). Transition, turbulence and oscillating flow in a pipe. *Experiments in Fluids*, 11, 338-398.
- Herrera Valencia, E. E., Calderas, F., Medina Torres, L., Perez Camacho, M., Moreno, L., & Manero, O. (2017). On the pulsating flow behavior of a biological fluid: human blood. *Rheol Acta*(56), 387-407.
- Herrera-Valencia, E., Calderas, F., Chávez, A., & Manero, O. (2010). Study on the pulsating flow of a worm-like micellar solution. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165, 174-183.
- Herrera-Valencia, E., Sánchez-Villavicencio, M., Calderas, F., Pérez-Camacho, M., & Medina-Torres, L. (2016). Simultaneous pulsatile flow and oscillating wall of a non-Newtonian liquid. *Korea-Australia Rheology Journal*, 28(4), 281-300.
- Keener, J., & Sneyd, J. (2009). *Mathematical Physiology*. Springer.
- Malkin, A., & Isayev, A. (2012). *Rheology : concepts, methods, and applications* (2nd ed.). ChemTec Publishing.
- Méndez Montealvo, M. G., Núñez Santiago, M., & Solorza Feria, J. (2010). *Introducción a la reología*. Instituto Politécnico Nacional.
- Moreno, E., & Cervera, M. (2016). Elementos finitos mixtos estabilizados para flujos confinados de Bingham y de Herschel-Bulkley. Parte I: Formulación. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 32(2), 100-109.
- Moreno, L., Calderas, F., Sánchez-Olivares, G., Medina-Torres, L., Sánchez-Solís, A., & Manero, O. (2013). La sangre humana desde el punto de vista de la reología. *Materiales avanzados*(20), 33-37.

- Phan-Thien, N., & Dudek, J. (1982). Pulsating flow revisited. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*(11), 147-161.
- Phan-Tien, N., & Dudek, J. (29 de Abril de 1982). Pulsating flow of a plastic fluid. *Nature*, 296, 843-844.
- Ramadan, I., Abdel-Rahman, E., & Ibrahim, A. H. (2017). Transition to Turbulence in Oscillating Flows. *24th international congress on sound and vibration*, 1-8.
- Rey, A. D., & Herrera-Valencia, E. E. (2012). Invited Review Liquid Crystal Models of Biological Materials and Silk Spinning. *Biopolymers*, 97(6), 374-396.
- Ross, R., & Glomset, J. A. (12 de Agosto de 1976). The Pathogenesis of Atherosclerosis (First of Two Parts). *The New England journal of medicine*, 295(7), 369-377.
- Suarez Loaizal, J. (2001). Fisiopatología de la aterosclerosis, primera parte. *Revista Costarricense de Cardiología*, 3(2), 54-63.
- Yang, J. (2002). Viscoelastic wormlike micelles and their applications. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, 7, 276-281.