UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

MAESTRIA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

ENTIDADES PARTICIPANTES: FACULTAD DE CIENCIAS

CAMPO DE CONOCIMIENTO: MATEMÁTICAS

MATERIAL DE APOYO PARA LA MATERIA DE PROBABILIDAD EN EL NIVEL BACHILLERATO

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

PRESENTA: GERMÁN HERNÁNDEZ GARCÍA

TUTOR PRINCIPAL: DRA. MARÍA DEL PILAR ALONSO REYES
FACULTAD DE CIENCIAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

M. EN PSICOLOGÍA CONSUELO ARCE ORTIZ, FES IZTACALA

M. EN C. JOSE ANTONIO GÓMEZ ORTEGA, FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., SEPTIEMBRE 2022

GERMÁN HERNÁNDEZ GARCÍA

MATERIAL DE APOYO PARA LA MATERIA DE PROBABILIDAD EN EL NIVEL BACHILLERATO

SEPTIEMBRE, 2022.

Contenido

Introducción

El alto índice de reprobación, la mala comprensión de conceptos matemáticos, así como la deficiente transmisión de conocimientos o la insuficiente asimilación de los mismos en cualquier área relacionada con la matemática, es una preocupación para los estratos involucrados en la sociedad actual, las instituciones educativas a nivel medio superior, los profesores, las familias y los alumnos. En esta problemática, los grupos que se encuentran en la primera línea son el personal docente y los discentes. Las consecuencias en estos últimos pueden ser devastadoras y están relacionadas con deserción escolar.

Para atenuar y coadyuvar al origen del que se considera el problema, se debe proveer al estudiante de diversos materiales, para que elija la opción que más se adecue a su forma de aprender o estudiar.

Por otra parte, la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística antes del ingreso al bachillerato es casi nula, y en este nivel educativo, se ofrecen como asignaturas optativas en el último año porque las herramientas matemáticas y conceptos que se utilizan como base para desarrollar las ideas necesarias se imparten en los dos primeros años. Se pueden citar, como ejemplos: Teoría de conjuntos, Álgebra y precálculo.

En consecuencia, las personas que elijan como optativas en el nivel bachillerato a la estadística y probabilidad, se enfrentarán a ideas y conceptos novedosos; como función de densidad, función de distribución acumulada, probabilidad condicional, combinaciones, permutaciones, eventos, espacio muestral, esperanza; por nombrar algunos, con el rigor del pensamiento matemático. Se considera que es el primer contacto del alumnado con estas áreas de la matemática en forma precisa.

Con base en estas ideas preliminares, el presente material tiene como propósito apoyar y/o coadyuvar al estudiante en el entendimiento, asimilación y aplicación de la Probabilidad.

Para este fin, se desarrollan minuciosamente los conceptos que han de ser útiles de tal forma que se comprendan de una manera fácil, incluyendo los pasos algebraicos, que se desglosan, para comodidad y simplicidad; de tal forma que el lector pueda reproducirlos y entenderlos.

Los ejemplos que se presentan tienen dos funciones: la primera como introducción para desarrollar la teoría y la segunda para reafirmar lo aprendido. En ambos casos, se incluye la exposición completa, para que el estudiante sea capaz de entender y replicar los procedimientos por sí mismo, y de esta manera, pueda resolver los ejercicios propuestos.

En una primera lectura, se pueden omitir las demostraciones de los teoremas. En algunos casos, se presenta el método de resolución que se va a utilizar en los ejercicios propuestos. Estos últimos, están pensados para apuntalar el objetivo: entender, asimilar y aplicar el conocimiento.

Antecedentes

De los autores más destacados sobre didáctica de la probabilidad, se encuentra la Doctora Carmen Batanero Bernabéu. Desarrolla investigación sobre el tema y cuenta con varios títulos relacionados. Además, dirige el Grupo de Investigación sobre Educación Estadística, perteneciente al Departamento de Didáctica de la Matemática, en la Facultad de Ciencias de la Educación, de la Universidad de Granada, en España.

Esta autora afirma que "*La introducción de la probabilidad en los diversos niveles educativos ha ocasionado un gran auge en la investigación sobre didáctica de la probabilidad en las últimas dos décadas*" (Batanero, C. Ortiz, J. J. y Serrano, L. 2007:7). Debido a lo cual, esta área es un campo reciente de investigación. Continua, en el mismo artículo, haciendo referencia al trabajo de Piaget e Inhelder con respecto al "*análisis detallado de las etapas en la adquisición de las ideas de aleatoriedad y probabilidad, el razonamiento combinatorio, distribución y* *convergencia, así como de la capacidad de cuantificación de probabilidades en niños y adolescentes*".

Hace un comparativo de las diferentes etapas del desarrollo humano con respecto a la enseñanza de la Probabilidad:

"… en el estado preoperacional (4-7 años) los niños rechazan la idea de azar o la conciben de una forma determinista; tienen dificultad para diferenciar certeza e incertidumbre, carecen de estrategias combinatorias y al comparar probabilidades sólo toman en cuenta los casos favorables. En el periodo de las operaciones concretas (7-11) los niños adquieren progresivamente una comprensión del azar, pero aún confían demasiado en la posibilidad de controlarlo …".

"*Finalmente en la etapa de operaciones formales (a partir de 12 años) los chicos progresivamente conciben el azar como ausencia de patrones e impredecibilidad, adquieren la intuición de la convergencia, llegan a usar proporciones en la comparación de probabilidades y alcanzan la capacidad de enumeración combinatoria*". En consecuencia, según los autores, la enseñanza de esta asignatura no se debe implementar antes de los 12 años.

En concordancia con los párrafos anteriores, las herramientas matemáticas que se utilizan para desarrollar los conceptos que han de enseñarse son expuestos hasta el nivel bachillerato.

En particular, con base en la experiencia como alumno y profesor de la asignatura de Probabilidad I, en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, se confrontaron las dificultades con las que estudiantes que iniciaban el estudio en esta disciplina, se enfrentaban. Entre estos se encuentran el cálculo combinatorio (por ejemplo, en qué casos aplicar cada técnica) y la compresión de conceptos nuevos como espacio muestral, evento, probabilidad condicional por nombrar algunos.

Un caso especial de lo anterior es el de eventos independientes y eventos ajenos. El primero hace referencia a que la ocurrencia de un evento no influye en la ocurrencia de otro evento determinado y en el otro caso no existe intersección en los eventos.

En el caso del bachillerato, la selección de materias en el último año, para carreras del área fisicomatemático y de las ingenierías la opción es preferir Cálculo Diferencial e Integral; mientras que, para el resto de las carreras, la selección es hacia la Estadística y la Probabilidad. En ambas, se aplicará lo aprendido en cursos previos (Álgebra, Geometría y Precálculo). Sin embargo, toda la preparación de los años anteriores del bachillerato está dirigida al Cálculo Diferencial e Integral. Antes del último año no se imparten, asignaturas que contemplen disciplinas como cálculo combinatorio, que en ocasiones se ofrece en Temas selectos de Matemáticas; o nociones de Cálculo Integral que es la opción para las áreas fisicomatemáticas y de las ingenierías. Lo anterior provoca que el estudiante se enfrente a conceptos y métodos matemáticos nuevos.

Planteamiento del problema

Derivado del alto índice de reprobación en las materias de Matemáticas, y en particular en las asignaturas de Estadística y Probabilidad en el bachillerato, se desea desarrollar un material de apoyo para el nivel, de tal forma que el estudiante comprenda las principales definiciones y sea capaz de resolver ejercicios inherentes a la materia.

Por tanto, el problema que se desea atenuar es el coadyuvar a la comprensión, asimilación y aplicación, para contribuir a combatir los altos índices de reprobación y la deserción, con un material de apoyo para la materia de Probabilidad en el nivel bachillerato.

Pregunta de investigación

¿Es posible desarrollar un material de apoyo que explique los conceptos básicos de Probabilidad con sencillez y claridad para el nivel bachillerato, de tal forma que los alumnos comprendan y/o asimilen los conceptos y sean capaces de resolver problemas concernientes a los temas desarrollados?

Justificación

Al desarrollar un material de apoyo para la asignatura de Probabilidad destinado al nivel bachillerato, se pretende contribuir a abatir el índice de reprobación que se encuentra, aproximadamente, entre 35 y el 40% sólo para el Colegio de Ciencias y Humanidades en el año 2013 (Mendoza, L. 2016).

Asimismo, comprender los conceptos y resolver ejercicios, proporcionará al alumno lo necesario para solucionar o entender situaciones cotidianas. Pero si desea continuar con estudios de licenciatura, se aportará un soporte en los conocimientos necesarios para enfrentar los diferentes escenarios en las carreras donde se imparten disciplinas relacionadas.

Para el profesor a cargo, se presentará como una opción, ya sea de libro de texto base o como consulta y referencia.

Objetivo general

Generar un material de apoyo para la asignatura de Probabilidad en el nivel bachillerato para que el alumno cuente con soporte que le explique los conceptos y operaciones necesarios para introducirlo en el estudio de esta disciplina.

Capítulo 1. Conceptos preliminares

1.1. Experimentos deterministas[1]

En la naturaleza, así como en las ciencias físicas, biológicas y químicas existen fenómenos que al analizarlos o modelarlos producirán el mismo resultado. Como ejemplos se pueden citar, en física, la presión que se ejerce en un área determinada es así, las patas de un camello deben ser grandes para que la presión ejercida por su peso no lo hunda en la arena del desierto. Esto puede ser calculado de la siguiente forma:

$$\text{presión} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}}$$

En química, al combinar sodio con oxígeno, invariablemente se obtendrá óxido de sodio, para cualquier metal que reacciona con oxígeno se tiene:

$$\text{metal} + \text{oxígeno} \longrightarrow \text{óxido del metal}$$

El agua es parte esencial de una planta debido a que, en algunas, ésta constituye el 95% de su masa. Las plantas no tienen esqueleto, así que a menudo dependen del apoyo del agua. Además de transportar los nutrientes, tiene un papel fundamental en la fotosíntesis. Así, la ecuación de la fotosíntesis es:

$$\text{dió}xido\ de\ carbono + \text{agua} \longrightarrow \text{glucosa y oxígeno}$$

Si en los ejemplos anteriores se modifica una parte de las fórmulas, se obtendrán resultados diferentes. Para un área mayor la presión disminuye; si se cambia el oxígeno por el hidrógeno no se conseguirá óxido; si el suministro de agua disminuye, la planta muere o producirá una cantidad menor de oxígeno y glucosa.

---

[1] Los ejemplos de esta sección fueron extraídos de Hawkins, L., et al (2018). *Cambridge Lower Secondary SCIENCE STAGE 9: STUDENT'S BOOK.* London, England: Collins.

Se debe garantizar las mismas cantidades de fuerza, área; metal, oxígeno; dióxido de carbono y agua para obtener los mismos resultados. En otras palabras, si se desean los mismos resultados se deben repetir los experimentos bajo las mismas condiciones.

Por tanto, si se repiten los experimentos anteriores, bajo las mismas condiciones, se obtendrán los mismos resultados. Sólo se obtendrá un resultado en cada experimento si se controlan los suministros: sodio reaccionando con oxígeno producirá óxido de sodio; con la misma cantidad de agua y dióxido de carbono siempre se alcanzará la misma cantidad de glucosa y oxígeno y si se aplica una fuerza de ocho newtons en un área de cuatro metros cuadrados, se conseguirá un total de dos newtons por metro cuadrado de presión.

Si un experimento se repite bajo las mismas condiciones y se obtiene siempre el mismo resultado, entonces se dice que es un experimento determinista. Es así como los modelos anteriores son ejemplos de experimentos o fenómenos deterministas.

1.2 Experimentos aleatorios

Existen otro tipo de experimentos o situaciones que se enfrentan en las ciencias, en lo cotidiano o en la naturaleza. Éstos tienen como rasgo distintivo que, bajo las mismas condiciones o ensayos del suceso no siempre se obtiene el mismo resultado. Esto sucede porque aun cuando se controlen los suministros, pueden obtenerse distintos resultados. Esto, a su vez, se origina porque interviene un desconocimiento de lo que sucederá en el futuro. Para medir este desconocimiento se utiliza la probabilidad.

Algunos ejemplos son: el precio del dólar, la posición de una partícula de un gas cuando se eleva la temperatura; el número de accidentes en un tramo de carretera; el tiempo de espera en una fila de banco; el pronóstico del tiempo; el llenado de botellas de cerveza; la posibilidad de un terremoto; el sexo de un bebé al momento de nacer y sin previo conocimiento (uso de ultrasonido), la vida (en horas) de un foco, entre otros.

La característica esencial de estos sucesos o experimentos es que interviene el azar, es decir, el desconocimiento del resultado. Lo anterior es debido a que existe más de uno. En el ejemplo del sexo del bebé, si la madre no se ha realizado un estudio previo que permita conocerlo, el resultado puede ser niño o niña, pero no lo sabrá hasta el momento del nacimiento. El precio del dólar puede ser mayor menor o igual que la moneda con la que se compara; la posición de la partícula, si el gas se encuentra en un recipiente, como un globo, y eligiendo un sistema coordenado adecuado, estará en un punto dentro del globo; el número de accidentes en una carretera pueden ser cero, uno y así continuar hasta ser muy grande; el tiempo de espera en la fila de un banco puede empezar desde cero y terminar en un intervalo de tiempo muy pequeño o muy grande dependiendo de la cantidad de cajeros que estén prestando servicio; el clima en una ciudad determinada puede ser soleado o lluvioso, frío o con temperatura elevada; si un inspector verifica el llenado de botellas, puede encontrar que falta líquido, que se encuentra en el nivel que indica el productor o puede ser que contenga más de lo que se especifica y en este caso el productor estará perdiendo dinero; un terremoto puede ocurrir en un segundo, en una hora, en diez días, en dos años o en décadas.

Las ideas anteriores se resumen en la siguiente definición.

Definición (Experimento aleatorio). Un experimento que se repite bajo las mismas condiciones y que no tiene los mismos resultados, es un experimento aleatorio.

Capítulo 2. Tipos de Probabilidad

2.1. Probabilidad clásica

El estudio ordenado de lo que se conoce como probabilidad tiene sus orígenes en los juegos de azar en el siglo XVII. Basándose en este tipo de juegos y para comprender, analizar y como última etapa construir una definición de probabilidad clásica se tomará el siguiente ejemplo.

Se lanzan dos monedas y se anotan los resultados. Estas monedas se pueden distinguir una de la otra. Dos personas juegan, Si las monedas muestran ambas caras iguales, el jugador uno gana. Si aparecen diferentes caras, el jugador 2 gana. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador uno gane?

Se debe comenzar observando cuáles son los resultados posibles del experimento. Para esto, nombramos águila y sol a cada una de las caras. Entonces los posibles resultados son:

$$\{(\acute{a}guila, \acute{a}guila);\ (\acute{a}guila, sol);\ (sol, \acute{a}guila)\ y\ (sol, sol)\}$$[2]

Cada lanzamiento de la primera moneda no influye en el resultado de la segunda. Esto se conoce como ensayos independientes. Más aún, cada par de resultados son independientes de cualquier otro par de resultados.

Asimismo, para cada moneda el resultado de un lanzamiento es águila o es sol. Y si la moneda está balanceada, es decir, no existe una razón para pensar que un resultado tiene más posibilidades de presentarse (más peso o material en una de las caras, por ejemplo), entonces águila o sol tienen la misma oportunidad de aparecer. Lo anterior es conocido como equiprobable (misma o igual probabilidad de aparecer). Del mismo modo, cada par de resultados es equiprobable. Por último, los resultados son finitos, en este caso son cuatro.

[2] Se ha encerrado en llaves de conjunto, pero esto se explica en el tercer capítulo.

Para resolverlo, se deben contar la cantidad de elementos que cumplen con la característica que solicita el enunciado: si las monedas muestran ambas caras iguales, el jugador uno, gana. Estos elementos son: (águila, águila) y (sol, sol). Si se compara con respecto al total de resultados, se puede decir que son dos resultados de cuatro.

Otra forma de comparar dos números es por medio de un cociente o división. Si se divide, lo que dice el cociente es que es la parte que se toma con respecto del total. Se seguirá este camino. En consecuencia, se tienen dos resultados favorables para el jugador uno, de un total de cuatro resultados posibles.

En números:

$$\frac{\text{2 casos en los que gana el jugador uno}}{\text{4 casos posibles}}.$$

Otro ejemplo se toma de la sección anterior. El sexo de un bebé al momento de nacer y sin previo conocimiento (uso de ultrasonido). Los resultados posibles en este experimento aleatorio y previo al nacimiento del bebé son femenino y masculino. Como antes, se encierran entre llaves de conjunto:

$$\{femenino, masculino\}$$

Si se observa más de un parto, cada uno es independiente del otro. Esto es, que en un parto nazca una persona de sexo femenino no depende (no tiene relación, no afecta), no interfiere en el resultado de que en otro parto el resultado sea femenino o masculino. Por tanto, son ensayos independientes.

Por otra parte, existe la misma posibilidad de que nazca una persona del sexo masculino que del sexo femenino. En otras palabras, el que nazca un bebé y su sexo sea femenino o masculino es equiprobable.

De los dos resultados posibles (los que se encerraron en llaves) {femenino, masculino}, sólo uno podrá asignarse al recién nacido. En consecuencia, solamente existe un caso favorable para femenino y uno para masculino de dos posibilidades.

Por consiguiente:

$$\frac{1 \text{ caso favorable para femenino}}{2 \text{ casos posibles}}.$$

Con base en lo anterior, podemos elaborar una definición de probabilidad en el sentido clásico.

Definición 2*.* (***Probabilidad clásica***). Si un experimento aleatorio tiene n posibles resultados igualmente probables (equiprobables) (de ocurrir) y si n_A de esos resultados tiene la condición A, entonces la probabilidad de A es el cociente $\frac{n_A}{n}$.

Esta clase de probabilidad, algunos autores la conocen como a priori, porque es calculada antes de ser ejecutado el experimento aleatorio.

2.2. Probabilidad frecuentista

Si se realiza un experimento aleatorio, bajo las mismas condiciones, y los resultados son anotados es posible observar una tendencia en el número de resultados que han aparecido.

El número de nacimientos en México, que pueden ser consultados en INEGI https://www.inegi.org.mx/sistemas/olap/consulta/general_ver4/MDXQueryDatos.asp?proy=nat_nac, en el año 2011 fue de $2{,}586{,}287$. De estos, $1{,}300{,}026$ fueron niños y $1{,}285{,}962$ fueron niñas. Los casos no especificados fueron 299. Los datos están resumidos en la siguiente tabla.

Resultado	Frecuencia observada	Frecuencia relativa observada	Frecuencia relativa esperada en el largo plazo
Niñas	1,285,962	0.4972	0.50
Niños	1,300,026	0.5027	0.50
Total	2,585,988	1.0000	1.00

Tabla 1. Nacimientos en México en el año 2011

En el apartado resultados se observa la división entre los dos géneros. Se omiten los 299 casos no especificados, debido a que no se determina en qué situación se encuentran.

La frecuencia observada es la cantidad de casos totales en cada apartado, el número de nacimientos en donde el resultado fue niña, $1{,}285{,}962$; y en el segundo renglón el de niños, $1{,}300{,}026$ casos; y en el último renglón, la suma de todos los nacimientos, $1{,}285{,}962$ sumado con $1{,}300{,}026$, para un total de $2{,}585{,}988$.

La tercera columna, frecuencia relativa observada, es calculada como el número de nacimientos observados para cada genero (frecuencia relativa) entre el total de nacimientos. Se tiene, entonces para el caso de las niñas:

Para los niños, se calcula de la siguiente forma:

En la última columna se coloca lo que se espera que suceda cuando la cifra de ensayos, nacimientos en este caso, incremente de tal forma que tienda hacia un punto infinito. Se puede decir que los nacimientos, cuando el total de estos crece, tienen una regularidad estadística.

Se puede observar, en la columna “frecuencia relativa observada”, el parecido con la última columna, que es lo que se espera cuando se hayan realizado una gran cantidad de nacimientos.

Capítulo 3. Probabilidad axiomática

Introducción

Una teoría axiomática está compuesta por conceptos no definidos y axiomas, que son verdades, estos últimos, que no se deben demostrar.

Como ejemplo de lo anterior se puede mencionar la Geometría euclidiana y el Álgebra. Para la primera, los conceptos sin definir son punto y recta y los axiomas son los postulados de Euclides. Para la segunda, los conceptos sin definir son número y los axiomas son las propiedades de campo de los números reales. En el caso de la Probabilidad, el concepto sin definir es la misma probabilidad y los axiomas serán expuestos en la sección 3.2.

En preparación, se introducen conceptos básicos de la Teoría de conjuntos, debido a que se le asignará un número, llamado probabilidad, a un conjunto, y sólo a conjuntos.

3.1 Conjuntos

A partir del concepto intuitivo de conjunto y elemento (es decir, no serán definidos formalmente, sino en una idea generalizada que se tiene del mismo) se desarrolla esta sección. Se continua con la relación que existe entre conjuntos y elementos, para después, describir la que existe entre conjuntos. Por último, se definen las operaciones entre conjuntos que se utilizan en el presente escrito.

3.1.1 Definiciones

Un conjunto está formado por elementos que deben satisfacer una condición dada. Como un ejemplo, se puede citar la inscripción a un club deportivo. Para ser miembro o ingresar al club, se debe pagar cuota y aprobar un examen médico.

Cuando se cumplen estas condiciones se puede decir que se pertenece a, es miembro o elemento del club.

Los conjuntos se representan por letras mayúsculas, como A, B, C, X, Y, y los elementos por letras minúsculas como a, b, c, x, y.

La relación que existe entre elementos y conjuntos es la pertenencia. Para denotar que un elemento pertenece a un conjunto se utiliza la notación $a \in A$. Para expresar que un elemento no pertenece a un conjunto se escribe: $a \notin A$.

Considere el siguiente conjunto: $A = \{3,6,9,12\}$. Entonces nueve pertenece al conjunto A y se denota por $9 \in A$ y $2 \notin A$, lo que se lee dos no pertenece al conjunto A.

Existen dos formas de representar, describir o escribir un conjunto: por extensión y por comprensión. Un conjunto se escribe por extensión si se encierran entre llaves sus elementos. Si los elementos de un conjunto son femenino y masculino, asociados con el sexo de un bebé al nacer, entonces el conjunto descrito por extensión, de los posibles resultados del parto será:

$$\{femenino, masculino\}$$

Está forma de escribir conjuntos parece adecuada cuando el conjunto es finito o el número de elementos que lo componen no es muy grande. Sin embargo, se puede escribir el conjunto de los números naturales de la siguiente manera:

$$\{1, 2, 3, \dots\}$$

En donde sólo se escriben los primeros elementos y se debe inferir el elemento que sigue. La forma de hacerlo es observando la relación o regla que guardan los elementos escritos. Se inicia con un primer elemento, en este caso el uno, y se suma a este primer elemento un uno para obtener el dos. Entonces para obtener el siguiente elemento se suma un uno al anterior.

Se analiza el siguiente conjunto:

$$\{33, 36, 39, \dots, 63\}$$

El elemento inicial es 33, para obtener el segundo, se sumaron tres al primero y así sucesivamente (esto lo dicen los tres puntos) hasta llegar al sesenta y tres.

Para un conjunto por comprensión, se escribe entre llaves la condición que deben cumplir los elementos para pertenecer al conjunto. Así, el conjunto de los números reales mayores o iguales a tres se escribe como:

$$\{x \in \mathbb{R} |\ x \geq 3\}$$

En donde la barra (pueden ser dos puntos), antes de la condición, se lee "tales que". Por tanto, este conjunto es el conjunto de los números reales tales que son mayores o iguales a tres. Para saber si un elemento pertenece o no al conjunto se debe sustituir en la condición por la variable x. Como ejemplo, se selecciona el número cinco. Sustituyendo:

$$5 \geq 3$$

Por tanto, el número cinco pertenece al conjunto. Si se elige, el número $\sqrt{2}$, se obtiene una condición falsa:

$$\sqrt{2} \geq 3$$

Entonces el número raíz de dos no pertenece al conjunto.

La relación que puede existir entre conjuntos se define como contención. Se dice que un conjunto A está contenido en un conjunto B sí y sólo sí, todo elemento de A está en B o es elemento de B y se denota como $A \subset B$.

Para mayor comprensión, se eligen los siguientes conjuntos:

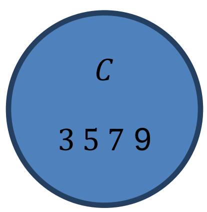
$A = \{2,4,6\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6\}$

Debido a que: $2 \in A$ y $2 \in B$, $4 \in A$ y $4 \in B$, $6 \in A$ y $6 \in B$. Entonces $A \subset B$. En palabras, cada elemento del conjunto A está en el conjunto B, por tanto. A está contenido en B. Formas equivalentes de la afirmación anterior son: B contiene a A o A es un subconjunto de B.

Dos conjuntos A y B son iguales, y se denota como $A = B$, sí y sólo sí, $A \subset B$ y $B \subset A$.

3.1.2 Diagramas de Venn

Una forma de representar conjuntos gráficamente son los diagramas de Venn. Generalmente, un conjunto en diagrama de Venn es un círculo que contiene todos sus elementos. El conjunto: $C = \{3,5,7,9\}$ se representa, por tanto, en diagrama de Venn de la siguiente forma:



El conjunto que contiene a todos los elementos se denomina conjunto universal. Para fines de la Probabilidad, este conjunto será el que contiene todos los resultados posibles del experimento. Esto será tratado cuando se defina el espacio muestral. El conjunto universal, por lo regular, se representa por un rectángulo que contiene todos los elementos (Figura 3.1).

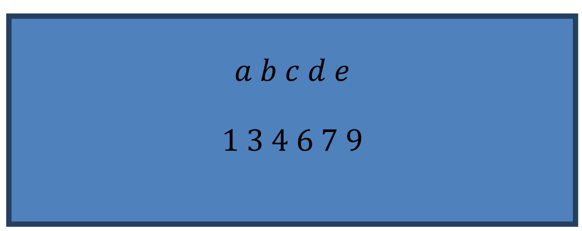


Figura 3.1 Conjunto universal

Por otro lado, el conjunto que no tiene elementos se define como el conjunto vacío y se denota como $\emptyset$.

3.1.2 Operaciones

Las operaciones entre conjuntos más comunes son la unión, intersección y complementos.

Definición (Unión de conjuntos).

Sean A y B dos conjuntos. La unión de A y B, que se denota por $A \cup B$, se define como el conjunto de los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos.

En otras palabras, $A \cup B$ es el conjunto de todos los elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos. En forma comprensiva se tendría:

$$A \cup B = \{x: x \in A \ o \ x \in B\}$$

Si $A = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$ y $B = \{0,1,2,3, \dots\}$, entonces, como el conjunto A consta de los enteros negativos y el cero y el conjunto B de los enteros positivos y el cero, la unión es de todos los enteros. En otras palabras: $A \cup B = \mathbb{Z}$. Donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros.

Si se desea representar la unión de dos conjuntos, A y B por medio de diagramas de Venn, sería la zona azul de la Figura 3.2:

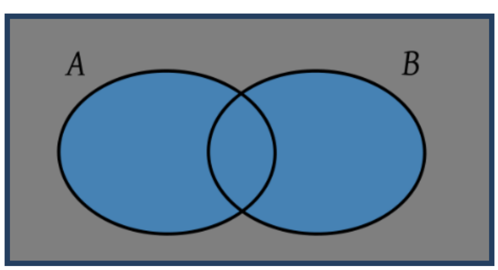


Figura 3.2. Unión de conjuntos

Definición (Intersección de conjuntos)

Sean A y B dos conjuntos. Se define la intersección de A y B como el conjunto que consiste (está formado) de todos los elementos los cuales pertenecen a A y a B. Se denota como $A \cap B$.

Por tanto, la intersección consiste en los elementos que son comunes a A y a B. En notación de conjuntos:

$$A \cap B = \{x: x \in A \ y \ x \in B\}$$

Si $A = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$ y $B = \{0,1,2,3, \dots\}$, entonces, debido a que el único elemento que es común a los dos conjuntos es el cero, se tiene: $A \cap B = \{0\}$.

Si la intersección no contiene elementos, es decir, no tienen elementos en común, se dice que los conjuntos son ajenos. En el caso que nos ocupa, el de la probabilidad, se dice que son mutuamente excluyentes. El diagrama de Venn de conjuntos ajenos se representa en la Figura 3.4.

En forma gráfica (diagramas de Venn), la intersección está representada por la zona azul en la Figura 3.3.

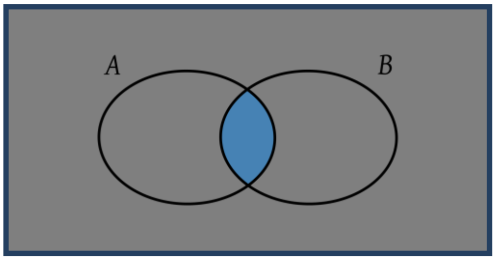


Figura 3.3. Intersección de conjuntos

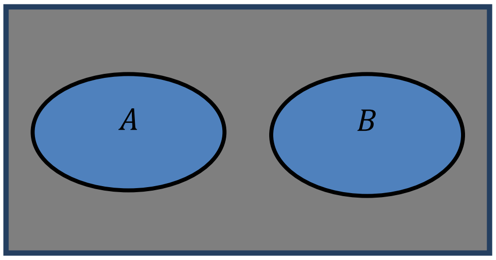


Figura 3.4. Conjuntos ajenos. (Mutuamente excluyentes)

Definición (Complemento con respecto a un conjunto)

Sea B cualquier conjunto y A un subconjunto de B. Entonces, el complemento de A con respecto a B, es el conjunto de los elementos que pertenecen a B y no pertenecen a A.

En notación de conjuntos, se tiene:

$$A^c = \{x \in B : x \in B \ \ y \ \ x \notin A\}$$

En el estudio de la probabilidad, por lo regular el complemento es con respecto al conjunto universal Ω.

Si se elige el conjunto $\mathbb{Z}$, de los números enteros y el conjunto A, definido como $A = \{0,1,2,3, \dots\}$, entonces, el complemento del conjunto A con respecto al conjunto $\mathbb{Z}$, es el conjunto $B = \{\dots, -3, -2, -1\}$ de los números negativos.

La representación por medio de diagramas de Venn del complemento de un conjunto con respecto a otro se puede observar en la Figura 3.5 en donde se encuentra el conjunto A y su complemento en color azul.

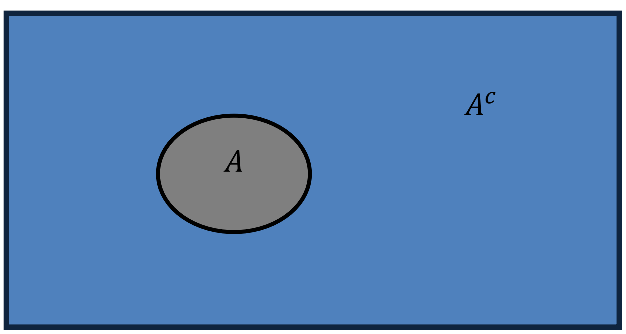


Figura 3.5. Complemento con respecto a un conjunto

Si Ω es el conjunto Universal y A es un subconjunto de Ω, entonces:

a) $\Omega^c = \emptyset$

b) $A \cup A^c = \Omega$

c) $\emptyset^c = \Omega$

d) $A \cap A^c = \emptyset$

e) $(A^c)^c = A$

Leyes de conjuntos

- Ley conmutativa

  $A \cup B = B \cup A$ Unión

  $A \cap B = B \cap A$ Intersección

- Ley asociativa

  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ Unión

  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ Intersección

- Ley distributiva

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Unión

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Intersección

- Leyes de D´Morgan

  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

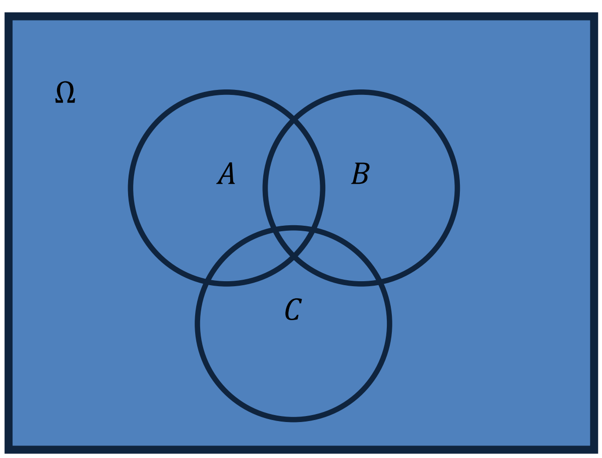
Ejercicios

1. Indique los elementos de los conjuntos por extensión.
   a) $\{x: x \text{ es una letra de la palabra hipopótamo}\}$.
   b) $B = \{x: 2 - x = 4, x \in \mathbb{Z}\}$.

2. Indique si el enunciado es verdadero o falso
   a) $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$
   b) $\{a, b, c\} = \{a, b, c, c\}$
   c) $\emptyset \subset A$
   d) $\emptyset \in A$
   e) $0 \in \emptyset$
   f) $A \subset A$

3. Sea $A = \{a, n, o, r, t\}$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales a A? ¿Cuáles están contenidos en A?
   a) $B = \{x: x \text{ es un letra de la palabra raton}\}$
   b) $C = \{x: x \text{ es una letra de la palabra ratton}\}$
   c) $D = \{x: x \text{ es una letra de la palabra taron}\}$

4. En la figura que se da, marque la parte que se desea en cada inciso. Use un gráfico para cada inciso.



a) $A \cup B \cup C$

b) $(A \cup B)^c \cup C$

c) $A^c \cup (B^c \cap C)$

d) $(A \cup B \cup C)^c$

5. Sea Ω el conjunto de todos los mexicanos. Sean:

$D = \{x \in \Omega : x \text{ es indígena}\}$

$E = \{x \in \Omega : x \text{ es campesino}\}$

$F = \{x \in \Omega : x \text{ es mujer}\}$

$G = \{x \in \Omega : x \text{ es anciano}\}$

Describa cada uno de los siguientes conjuntos en palabras.

a) $D \cap F$

b) $F^c \cap E$

c) $D \cap F \cap G^c$

6. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

b) $A \cup B = (A \cap B^c) \cup B$

c) $A^c \cap B = A \cup B$

d) $(A \cup B)^c \cap C = A^c \cap B^c \cap C^c$

e) $(A \cap B)^c \cap (B^c \cap C) = \emptyset$

7. Encontrar expresiones simples de:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c)$

b) $(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$

c) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

8. Si $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{\text{los números pares entre 0 y 9}\}$,

   $B = \{\text{los números impares entre 0 y 9}\}$, $C = \{2,3,4,5\}$, $D = \{1,6,7\}$.

   Dé explicitamente cada conjunto que se propone:

   a) $A \cup C$
   b) $(C^c \cap B) \cup D$
   c) $(\Omega \cap C^c)^c$
   d) $A \cap C \cap D^c$
   e) $A - (B^c \cup C)$
   f) $(C \cup D) - A^c$

9. Sean A y B los eventos, simplificar:

$$[(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] \cup [(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)]$$

10. Sean A, B, C y D los eventos y sean:

    $E = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$,

    $F = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$,

    $G = [(A \cup B)^c \cap C] \cup (A \cap B \cap D)$.

    Demuestre que se cumple:

    a) $A \cap E = A \cap B$
    b) $A \cup F = A \cup B$

Cardinalidad de un conjunto

Muchos de los problemas de la probabilidad requieren que se cuenten los elementos en los conjuntos a esto es lo que se le llama cálculo combinatorio.

El número de elementos en un conjunto finito se determina contando los elementos de ese conjunto. Si A es finito, entonces $\#A$ denota el número de elementos de A. Así, si $A = \{a, d, r, y, u, i\}$, entonces $\#A = 6$.

El conjunto vacío no tiene elementos entonces $\#\emptyset = 0$.

Si A y B son dos conjuntos ajenos entonces $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$.

Si A y B son dos cualesquiera conjuntos entonces:

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

Si los conjuntos no son ajenos (Es decir, existen elementos en la intersección), se está contando en dos ocasiones, los elementos de la intersección de los conjuntos: una ocasión en la cardinalidad de A, y una en la cardinalidad de B. Esta es la razón por lo que se debe restar la cardinalidad de la intersección.

Ejemplo. Sean $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $B = \{c, d, e, h, i, j, k, l\}$. Hallar $\#(A \cup B)$. Como los conjuntos no son ajenos, se debe encontrar la cardinalidad de cada conjunto y de la intersección. Entonces:

$$\#A = 7$$

$$\#B = 8$$

La intersección de A y B, es el conjunto de los elementos en común:

$$A \cap B = \{c, d, e\}$$

Por tanto, $\#(A \cap B) = 3$.

Sustituyendo:

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

$$= 7 + 8 - 3 = 12$$

Para corroborar el resultado, primero se encuentra $A \cup B$ y después se halla la cardinalidad de este:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$$

Entonces:

$$\#(A \cup B) = 12$$

Lo anterior se puede resolver debido a que se proporcionan los elementos de los conjuntos. Si solamente son dadas las cardinalidades, se debe utilizar la fórmula.

Lo anterior, se puede extender a tres conjuntos. La expresión de la cardinalidad de la unión de tres conjuntos queda:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

Ejercicios

1. En los siguientes ejercicios suponga:
   $\#\Omega = 200$,
   $\#A = 100$,
   $\#B = 80$,
   $\#(A \cap B) = 40$.

   Calcule:
   a) $\#A^c$
   b) $\#(A \cup B)$
   c) $\#(A \cap B^c)$
   d) $\#(A^C \cap B^c)$

2. Para ayudar a planear el número de raciones en una cafetería estudiantil, se realizó una encuesta que arrojó los siguientes datos:

   130 estudiantes desayunan

   180 estudiantes almuerzan

   275 estudiantes comen

   68 estudiantes desayunan y almuerzan

   112 estudiantes desayunan y comen

   90 estudiantes almuerzan y comen

   58 estudiantes toman las tres comidas

   ¿Cuántos estudiantes

a) hacen por lo menos una comida (desayuno, almuerzo o comida) en la cafetería?
b) hacen exactamente una comida (desayuno, almuerzo o comida) en la cafetería?
c) hacen sólo la comida en la cafetería?

¿Hacen exactamente dos comidas (desayuno, almuerzo o comida) en la cafetería?

3.2 Espacio muestral y eventos

En la sección 1.2 se definió lo que se va a entender por experimento aleatorio:

> "Un *experimento que se repite bajo las mismas condiciones y que no tiene los mismos resultados, es un experimento aleatorio*".

La diferencia entre la definición entre experimento aleatorio y determinista es que el experimento determinista siempre arroja un solo resultado, bajo las mismas condiciones. Mientras que el experimento aleatorio "*no tiene los mismos resultados*" aunque se repita bajo las mismas condiciones. En otras palabras, el experimento aleatorio tiene más de un resultado posible. En consecuencia, es plausible realizar una lista de estos "*posibles resultados*". Por tanto, se debe determinar cuáles y cuántos son "*los posibles resultados*" y agruparlos en un conjunto. De esta manera, si el experimento aleatorio es el lanzamiento de una moneda, los posibles resultados son dos: $\{\acute{a}guila, sol\}$.

De igual forma, con dos resultados, el experimento aleatorio que modela el nacimiento de un bebé, sin estudios previos que revele el sexo, sería el conjunto: $\{femenino, masculino\}$. Con tres resultados, se podría modelar el experimento aleatorio del cambio en el precio de una acción en la bolsa de valores: $\{Sube, baja, \sin cambio\}$. En un juego de cartas, existen cuatro mazos, palos o figuras que las catalogan en cuatro. Si la baraja es "americana", los mazos son: corazones diamantes tréboles y espadas. En la "española" se tienen: oros bastos, espadas y copas. Si se extrae una carta se anota el mazo al que pertenece, los conjuntos de los posibles resultados son: americana $\{corazones, diamantes, tr\acute{e}boles, espadas\}$, y para la española se tiene $\{oros, bastos, espadas, copas\}$

Se puede continuar con ejemplos que muestren conjuntos con los resultados de experimentos aleatorios. Con el próximo ejemplo, se desea contribuir con el nombre de la definición que se está gestando. Si se elabora un estudio, por ejemplo, en una población humana, se debe determinar, *a priori*, cuáles son los posibles resultados de la *muestra* en el cuestionario que se aplica en la población seleccionada. Si una de las preguntas es el estado civil, el conjunto que agrupa los posibles resultados es: $\{soltero, casado, union\ libre\}$.

Motivada por todo lo anterior, estas ideas se resumen en la siguiente definición.

Definición (Espacio muestral)

El espacio muestral, denotado por Ω, es la colección o conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

En la sección anterior se definió lo que es un conjunto. Se habló de que un conjunto está compuesto por elementos (excepto por el conjunto vacío). El espacio muestral, al ser un conjunto, está compuesto por elementos que son los resultados posibles de un experimento aleatorio. En otras palabras, un elemento de un conjunto es *lo que puede suceder*. Lo que puede suceder se llama evento.

Si elegimos el espacio muestral del nacimiento del bebé, donde la madre no se ha practicado un estudio previo para conocer el sexo del producto, el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio es $\{femenino\ , masculino\}$. *Lo que puede suceder*, al momento del parto, es que el sexo del bebe sea femenino o que sea masculino en otro caso. En consecuencia, se identifican dos eventos, a saber, $\{femenino\}$ y $\{masculino\}$. Nótese que se encierran entre llaves de conjunto.

Existen dos eventos que están asociados a todo espacio muestral o conjunto. El conjunto vacío y el total. El segundo es el espacio muestral completo, y también se conoce como el evento seguro, debido a que contiene todos los posibles resultados del experimento aleatorio, por lo que es seguro que ocurra.

Matemáticamente, se tiene un conjunto universal que se define, en términos probabilísticos, como el espacio muestral y los subconjuntos de este conjunto son los eventos. Se está en posibilidad de definir, por tanto, la noción de evento.

Definición (Evento)

Un evento es un subconjunto del espacio muestral. El espacio de eventos es la clase de todos los eventos asociados con un experimento.

Para completar esta serie de ideas, se toma el espacio muestral relacionado con el precio de una acción: $\{sube, baja, \sin cambio\}$. Si se toman subconjuntos o eventos de un sólo elemento, se tienen tres: $\{sube\}$, $\{baja\}$ y $\{\sin cambio\}$. Estos eventos o subconjuntos no se pueden dividir en subconjuntos con menos elementos. En otras palabras, estos eventos son *elementales* o *simples* porque sólo constan de un elemento. Se pueden ver como básicos, en el sentido que generan eventos más complejos o *compuestos*. Los eventos compuestos son combinaciones de más de un evento simple (subconjuntos de más de un elemento). Para este ejemplo, los eventos compuestos son: $\{sube, baja\}$, $\{sube, \sin cambio\}$, $\{baja, \sin cambio\}$ y el total o el evento seguro.

Ejercicios

1. En una planta química el volumen diario producido de cierto producto varía entre un valor mínimo (m) y uno máximo (M), que corresponde a la capacidad de producción. Se elige un día al azar y se observa la cantidad producida. ¿Cuál es el espacio muestral correspondiente?

2. En las encuestas usualmente las respuestas pueden ser categóricas y a menudo se codifican con números, para no acarrear tanto texto. Por ejemplo, si se pregunta el medio de transporte, se podría codificar como 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si corresponde respectivamente a: automóvil, camión, a pie, bicicleta, taxi, colectivos. Exprese cada uno de los eventos con sus palabras.

    a) $A = \{2,5\}$
    b) $B = \{1,6\}$
    c) $C = \{2,3,4\}$
    d) $D = \{1,3,5,6\}$

3. En una clase de 30 estudiantes, 20 obtuvieron 10 en Matemáticas; 23 en Química, 18 en Física; 15 en Matemáticas y Química; 12 en Matemáticas y Física y 14 en Química y Física. No hubo ninguno sin un diez, ¿cuántos de ellos obtuvieron diez en los tres cursos?

4. En un experimento, se considera la selección de un número entero, donde A, B y C son los eventos:

    a) "El número seleccionado está entre -8 y 8 inclusive"
    b) "El número seleccionado es un par positivo"
    c) "El número seleccionado es múltiplo de tres"

    Indique el evento "El número seleccionado no está entre -8 y 8, no es par positivo, ni es múltiplo de tres".

5. Un experimento consiste en sacar sucesivamente tres cartas de una baraja americana, no marcada. Sea A el evento "as en la primera sacada", B: "trébol en la segunda sacada" y C: "rey en la tercera sacada". Represente en términos de A, B y C el evento "en la primera sacada no aparece as o en la segunda aparece un trébol y en la tercera sacada no aparece rey"

6. Dos preguntas siguientes aparecen en el cuestionario de una encuesta. Cada respuesta se elige de la escala de 5 puntos 1 (nunca), 2, 3, 4, 5 (siempre).

   "¿El programa le ha beneficiado en su economía?"
   "¿Con qué frecuencia usted recurre al servicio médico?"
   Describa el espacio muestral.

7. La sangre humana se clasifica mediante la presencia o ausencia de tres antígenos principales (A, B y Rh). Al tipificar una muestra de sangre, la presencia de antígeno A y/o el B se indica enumerando la letra A y/o la letra B. Si ninguno de estos dos antígenos está presente, se utiliza la letra O en este caso. La presencia o ausencia del antígeno Rh se indica mediante los símbolos $+$ o $-$, respectivamente. Así si una muestra se clasifica como AB+, ésta contiene los tres antígenos. De manera análoga, la sangre O- no contiene los tres antígenos. Con esta información, determine el espacio muestral.

8. Se realizó una encuesta de opinión sobre los electores de un estado para determinar la relación entre sus niveles de ingreso y sus posiciones en cuanto a una propuesta de reducir los impuestos sobre el ingreso. Los votantes se clasificaron como pertenecientes a grupos de bajo, medio y alto ingreso. Se les pidió que dijeran si están a favor, en contra, o indecisos en cuanto a la propuesta. B, M y A representan los grupos de ingreso respectivamente y f, c, i representan las respuestas a favor, en contra e indecisos respectivamente.

    a) Describa el espacio muestral
    b) Describa el evento E_1 de que una persona responda que está a favor de la propuesta.
    c) Describa el evento E_2 de que una persona responda que está en contra de la propuesta y no pertenezca al grupo de bajo ingreso.
    d) Describa el evento E_3 de que una persona responda que no está a favor de la propuesta, ni pertenezca al grupo de alto ingreso.

9. Se usa una báscula digital que da los pesos hasta el gramo más próximo.

    a) ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

    Sean A el evento de que un peso exceda los 11 gramos; B el evento de que un peso sea menor o igual que 15 gramos y C el evento de que un peso sea mayor o igual que 8 gramos y menor que 12.

    Describa los siguientes eventos:

    b) $A \cup B$
    c) $A \cap B$
    d) A^c
    e) $A \cup B \cup C$

f) $(A \cup C)^c$
g) $A \cup (B \cap C)^c$

10. ¿Cuál es el espacio muestral para los siguientes experimentos aleatorios?

a) Se tiene una caja que contiene 9 esferas de color blanco y 8 de color rojo. Se extraen una tras otra las esferas y se anota su color. El proceso continúa hasta extraer de forma consecutiva dos esferas de color blanco, o más de cuatro esferas.

b) Lanzar tres veces al aire una moneda y observar el número total de soles

c) Un monito registra los conteos de emisión de una fuente radiactiva en un minuto.

d) Los pacientes que llegan a una clínica pueden seleccionar una de cuatro secciones donde se atenderá. Supóngase que los médicos se asignan al azar a las secciones y que los pacientes no tienen preferencia especial por ninguna de las secciones. Cuatro pacientes llegan a la clínica y se registra la sección que elijan.

11. Sean E, F, y G tres eventos. Encuentre expresiones para los siguientes eventos:

a) Sólo F ocurre
b) Ocurren E y F pero no G
c) Ocurre un evento
d) Ocurren dos eventos
e) Los tres eventos ocurren
f) Ninguno ocurre

12. Suponga que se lanzan dos dados y se observa el número de la cara resultante. Sea Ω el conjunto de pares posibles que pueden observarse. Defina los siguientes subconjuntos de Ω:

   a) A: El número del segundo dado es impar.
   b) B: La suma de los dos números es impar.
   c) C: Al menos un número en los dados es par.
   d) Liste los puntos de A, C^c, $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ y $C \cap B$.

13. Un agente visita cuatro clientes para tratar de venderles un artículo. Sean H, I, J, K los siguientes eventos:

   H: "El primer cliente compró el artículo".

   I: "El segundo cliente compró el artículo".

   J: "El tercer cliente compró el artículo".

   K: "El cuarto cliente compró el artículo".

   Indicar los eventos: "al menos dos clientes compraron el artículo" y cómo es "ninguno compró el artículo".

14. Sean A, B y C los eventos. Represente en términos de A, B y C los eventos que se enuncian en cada inciso:

   a) ocurre sólo A.
   b) ocurren los tres eventos.
   c) Por lo menos ocurre un evento.
   d) Por lo menos ocurren dos eventos.
   e) Ocurre exactamente un evento.
   f) No ocurre ningún evento.
   g) No ocurren no más de dos eventos.

3.3 Definición de Probabilidad

En la sección precedente se definieron los conceptos de espacio muestral y evento. En la presente se define una función que asigna a cada evento un número entre cero y uno, con ciertas propiedades. No proporciona la forma de calcular este número que se llamará probabilidad. Para encontrar este valor, debemos esperar las próximas dos secciones.

Definición (Función de Probabilidad)

Considérese un experimento aleatorio con espacio muestral Ω. Para cada evento E del espacio de eventos, se asume que el numero $P[E]$ está definido y satisface los siguientes axiomas:

i. $0 \leq P[E] \leq 1$

ii. $P[\Omega] = 1$

iii. Para cualquier sucesión de eventos $E_1, E_2, \ldots$ los cuales son mutuamente excluyentes, esto es, $E_n \cap E_m = \emptyset$ cuando $n \neq m$, entonces

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[E_i]$$

Dos dados distinguibles (por ejemplo, por color) son lanzados y el número que aparece en la cara superior se anota. El espacio muestral es el siguiente:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

Supóngase que los puntos son equiprobables (tienen la misma probabilidad), en símbolos:

$$P[\{(1,1)\}] = P[\{(1,2)\}] = \cdots = P[\{(6,6)\}] = \frac{1}{36}$$

Con esta asignación se cumple el primer axioma. Para el segundo, el conjunto Ω se puede escribir como la unión eventos elementales o simples:

$$\Omega = \{(1,1)\} \cup \{(1,2)\} \cup \ldots \cup \{(6,6)\}$$

Como cada conjunto o evento consta de un sólo elemento y son distintos, entonces son mutuamente excluyentes. Suponiendo que el axioma *iii*, se cumple:

$$\begin{aligned} P[\Omega] &= P[\{(1,1)\} \cup \{(1,2)\} \cup \ldots \cup \{(6,6)\}] \\ &= P[\{(1,1)\}] + P[\{(1,2)\}] + \cdots + P[\{(6,6)\}] \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{36} = 36\left(\frac{1}{36}\right) = 1 \end{aligned}$$

Para el axioma tres, si se tiene una sucesión de eventos mutuamente excluyentes (conjuntos ajenos), se pueden transformar, cada evento de la sucesión, en eventos simples. Como ilustración, supongamos que el siguiente evento pertenece a la sucesión:

$$E_1 = \{(3,3), (5,4), (2,6)\}$$

Asimismo, por ser un conjunto, se puede formar subconjuntos de éste. El número de subconjuntos depende de la cantidad de elementos que contiene el conjunto. Si tenemos un conjunto con un único elemento, solamente se tendrán dos posibilidades. A saber, el conjunto vacío (debido a que el conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos) y el mismo conjunto.

Regla de la suma. Si se desea calcular la probabilidad de la unión de dos conjuntos, se pueden observar dos situaciones: los conjuntos son ajenos o la intersección de los conjuntos es distinta del conjunto vacío.

En la primera situación, es suficiente utilizar el tercer axioma y calcular la probabilidad de cada conjunto por separado y sumar estos números. En el segundo caso, al igual que en el primero, se calculan las probabilidades de ambos conjuntos. Sin embargo, como existe una intersección distinta del conjunto vacío y estos elementos pertenecen a ambos conjuntos, son contados dos veces: Al computar la probabilidad de A y la de B. Por tanto, se debe restar o descontar la intersección.

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

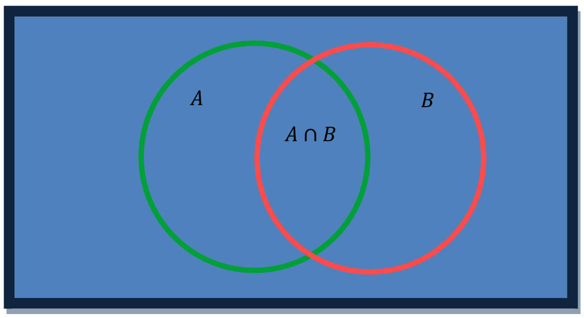


Figura. Probabilidad de la unión

Generalización de la Regla de la suma. Si E_1, E_2 y E_3 son tres eventos cualesquiera de un experimento, entonces:

$$P[E_1 \cup E_2 \cup E_3] = P[E_1] + P[E_2] + P[E_3] - P[E_1 \cap E_2] - P[E_1 \cap E_3] - P[E_2 \cap E_3] + P[E_1 \cap E_2 \cap E_3]$$

Regla del complemento. Si E es un evento de un experimento y E^c denota el complemento de E, entonces $P[E^C] = 1 - P[E]$.

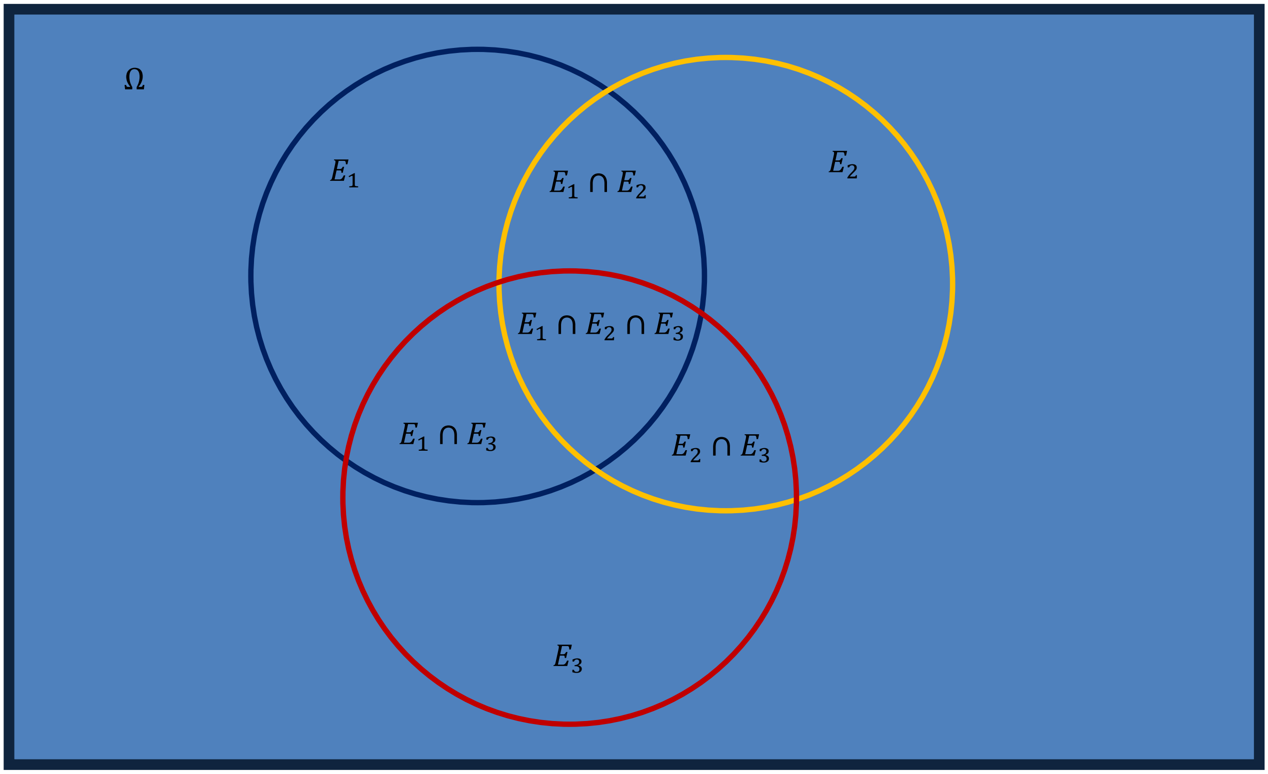


Figura. Regla de la suma con tres eventos

Una compañía de pilas está desarrollando una batería de alta capacidad y amperaje como fuente de poder para aparatos eléctricos muy particulares. La batería se prueba en un prototipo y prueban el aparato hasta que la batería pierde la energía. Luego se registra la medida del aparato con la pila. El aparato en cuestión recorre distancias y se realizaron un experimento con 200 ensayos y los resultados fueron.

Distancia recorrida en m.	**Frecuencia ocurrida**
$0 \leq x \leq 50$	4
$50 < x \leq 100$	10
$100 < x \leq 150$	30
$150 < x \leq 200$	100
$200 < x \leq 250$	40
$250 < x$	16

Al nombrar los eventos simples que componen al espacio muestral se tiene:

$$0 \leq x \leq 50 = \omega_1$$

$$50 < x \leq 100 = \omega_2$$

$$100 < x \leq 150 = \omega_3$$

$$150 < x \leq 200 = \omega_4$$

$$200 < x \leq 250 = \omega_5$$

$$250 < x = \omega_6$$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

La probabilidad asociada a cada evento simple será:

$$P[\omega_i] = \frac{\text{número de ensayos donde ocurre } \omega_i}{\text{Número total de ensayos}}$$

Así se tendrá:

$$P[\omega_1] = \frac{4}{200} = 0.02$$

$$P[\omega_2] = \frac{10}{200} = 0.05$$

$$P[\omega_3] = \frac{30}{200} = 0.15$$

$$P[\omega_4] = \frac{100}{200} = 0.50$$

$$P[\omega_5] = \frac{40}{200} = 0.20$$

$$P[\omega_6] = \frac{16}{200} = 0.08$$

Puede revisarse las propiedades que se dieron de todos los eventos simples del espacio muestral y efectivamente comprobar que cada probabilidad es mayor que cero y menor que uno. Que la suma de las seis probabilidades es 1, que es precisamente la probabilidad del espacio muestral. Por último, faltaría ver que como los eventos simples son siempre eventos ajenos, entonces se puede preguntar, por ejemplo:

$P[\omega_2 \cup \omega_4] = P[\omega_2 \cup \omega_4] = 0.05 + 0.20 = 0.25$, si además se define a $E = \omega_2 \cup \omega_4$ se genera lo que se llaman los ***eventos compuestos***.

Otro tipo de evento compuesto pudiera ser aquel que considere, por ejemplo, que se quiere calcular la probabilidad de que la distancia recorrida sea mayor a 150m, lo que indica que $F = \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6$; así que su probabilidad será:

$$P[F] = 0.50 + 0.20 + 0.08$$

En un estudio de 2140 maestros de cierta ciudad realizado por una organización no lucrativa con relación a las actitudes de los maestros, se obtuvieron los siguientes datos.

- 900 maestros dijeron que la falta de apoyo por parte de los padres es un problema
- 890 señalaron que el abuso o abandono de los niños es un problema.
- 680 opinaron que la mala nutrición o la salud deficiente de los estudiantes es un problema.
- 120 comentaron que la carencia de apoyo por parte de los padres y el abuso o el abandono de los niños son problemas.
- 110 comentaron que la carencia de apoyo por parte de los padres y la mala nutrición o la salud deficiente de los estudiantes son problemas.
- 140 dijeron que el abuso o el abandono de los niños ya la mala nutrición o la salud deficiente de los estudiantes son problemas.
- 40 subrayaron que la carencia de apoyo por parte de los padres, el abuso o abandono y la mala nutrición o la salud deficiente de los estudiantes son problemas.

¿Cuál es la probabilidad de que un maestro elegido al azar en este grupo haya dicho que la carencia de apoyo por parte de los padres es el único problema que afecta el desempeño escolar del estudiante?

Definiendo los conjuntos:

A: La falta de apoyo por parte de los padres es un problema.

B: El abuso o abandono de los padres es un problema

C: La mala nutrición o la salud deficiente es un problema

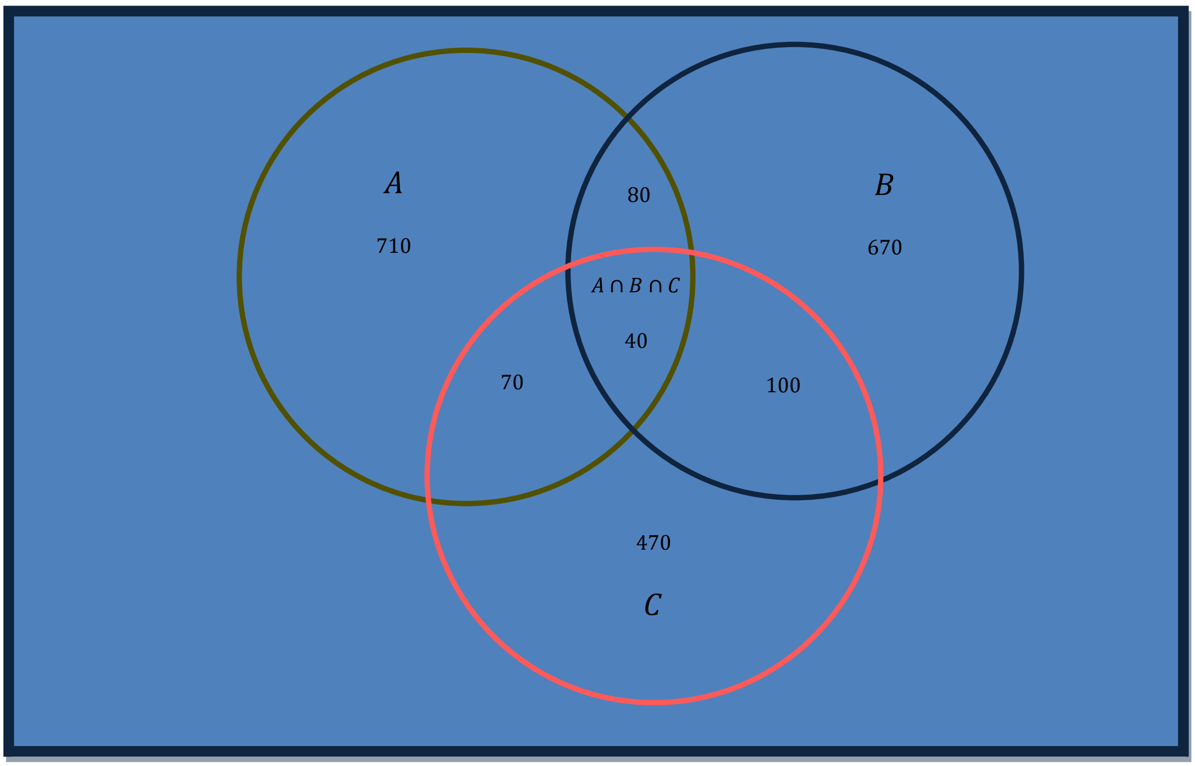


Figura 3.1. Diagrama de Venn

Para resolverlo se planteará un diagrama de Venn (Figura 3.1) con los tres conjuntos.

$$P[A\ solamente] = \frac{710}{2140} = 0.3317$$

Las autoridades de una parte del INFONAVIT han recibido 50 solicitudes que cumplen los requisitos para 8 departamento de renta baja. Tres están en el norte de la ciudad y cinco en el sur, ¿cuál es la probabilidad de que

a) elegir cierto solicitante para uno de estos departamentos

$$P(Un\ solicitante\ para\ el\ departamneto)\frac{\binom{8}{1}}{\binom{50}{1}}=\frac{8}{50}=0.16$$

b) elegir dos solicitantes específicos para departamentos en la misma zona de la ciudad?

$$P(dos\ en\ la\ misma\ zona)=\frac{\binom{3}{2}+\binom{5}{2}}{\binom{50}{2}}=\frac{3+10}{1225}=0.0106$$

Ejercicios

1. Sea $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$ el espacio muestral asociado a un experimento que tiene la siguiente distribución de probabilidad.

Resultado	$\{\omega_1\}$	$\{\omega_2\}$	$\{\omega_3\}$	$\{\omega_4\}$	$\{\omega_5\}$	$\{\omega_6\}$
probabilidad	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

Determine la probabilidad de los eventos:

a) $A=\{\omega_1,\omega_3\}$

b) $B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$

c) $C=\Omega$

2. Los estudiantes de una Universidad fueron encuestados en relación con el número de horas por semana que pasan estudiando en la biblioteca. Los resultados de la encuesta revelaron la siguiente información.

Total: ocupado en horas $(\boldsymbol{x})$	**Porcentaje de estudiantes**
$0 \leq x \leq 1$	32.3
$1 < x \leq 4$	40.7
$4 < x \leq 10$	16.5
$10 < x$	10.5

Determine la distribución de probabilidad asociada con los datos. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar en esta Universidad estudie en la biblioteca

a) ¿más de 4 horas por semana?
b) ¿No más de 10 horas por semana?

3. Existen doce signos del zodiaco, cada signo corresponde a un período distinto del calendario, de aproximadamente un mes. Si se supone que hay la misma probabilidad de que una persona nazca bajo un signo u otro, indique la probabilidad de que en un grupo de 5 individuos.

a) Al menos dos tengan el mismo signo.
b) Al menos dos hayan nacido bajo el signo de Aries.

4. Se extraen al azar cuatro bolas de una urna, sin reemplazarlas; la urna contiene 10 bolas blancas y 8 rojas, ¿cuál es la probabilidad de que todas las bolas extraídas sean blancas?

3.4 Cálculo combinatorio

Introducción

Dado un experimento aleatorio, éste puede ser modelado de forma precisa, suponiendo que los puntos muestrales son igualmente probables (equiprobables). Es decir, si:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

Entonces

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n)$$

En estos casos, para calcular la probabilidad de cualquier evento sólo basta con conocer la cardinalidad de Ω y la cardinalidad del evento. Por tanto, el cálculo de las probabilidades se traduce en un problema de conteo.

Reglas básicas

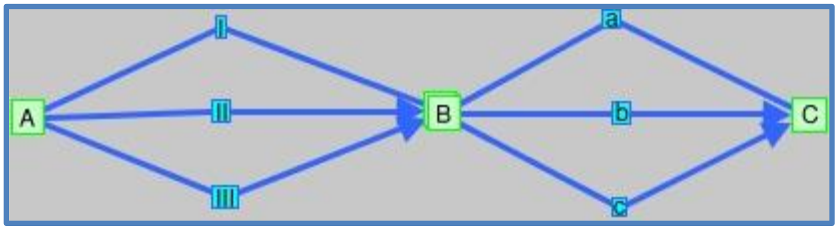
Regla de la multiplicación. Supóngase que existen $\boldsymbol{m}$ formas de realizar la tarea T_1 y $\boldsymbol{n}$ formas de realizar la tarea T_2. Entonces existen $\boldsymbol{nm}$ formas de realizar la tarea T_1 y la tarea T_2 conjuntamente.

Principio de multiplicación generalizado. Supóngase que una Tarea T_1 se puede realizar de N_1 formas, una tarea T_2 de N_2 formas, ..., y finalmente una tarea T_n se puede llevar a cabo de N_n formas. Entonces, el número de formas en que se puede realizar las tareas $T_1, T_2, \dots, T_n$ en orden, está dado por el producto:

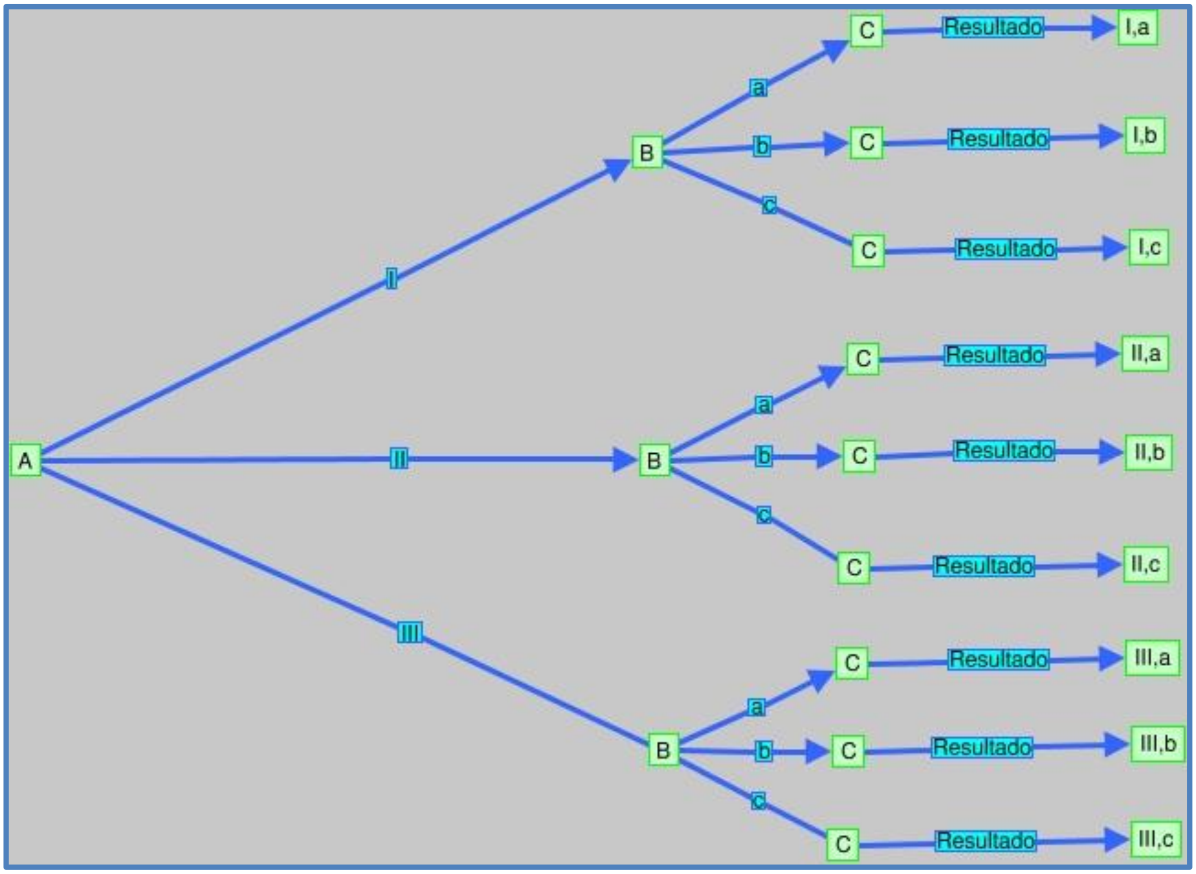
$$N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_n.$$

Tres carreteras principales unen la población A con la población B y 3 unen la población B con la C. Utilizar el número de formas que se pude unir la población A con la C.

La siguiente figura es una representación del problema:



Se puede hacer un diagrama de árbol para dar las rutas:

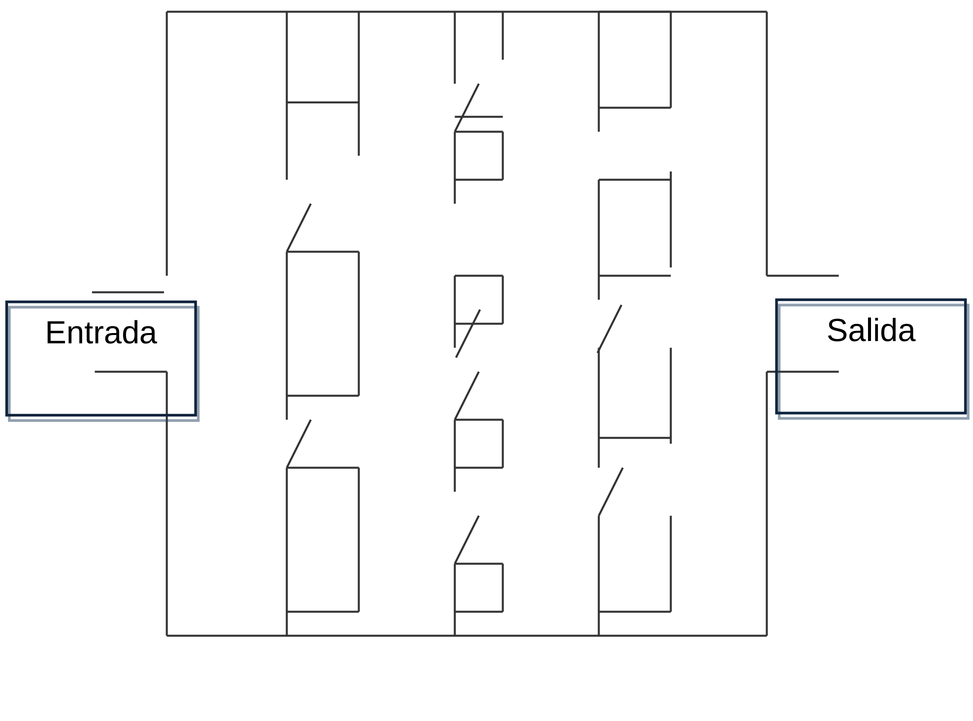


Ejercicios

1. En un estudio realizado por un sindicato, los miembros de éste debían calificar la importancia de los siguientes temas:
    - Menos horas de trabajo
    - Mayores prestaciones
    - Mejores condiciones de trabajo

    Se permitían cinco respuestas distintas por tema. Entre las encuestas realizadas, ¿cuántas respuestas diferentes existen?

2. Un psicólogo ha construido el laberinto de la ilustración para su uso en un experimento. El laberinto está construido de forma que una rata debe pasar por una serie de puertas con un sólo sentido. ¿Cuántos caminos diferentes hay desde el inicio hasta el final?



Principio de adición.

Principio de adición. Si se puede realizar una acción A de n formas distintas, y se puede realizar una acción B de m formas distintas, y A y B son excluyentes, entonces el número de formas de realizar la acción "A o B" es $n + m$.

Una persona posee tres pares de botas y dos de zapatos, ¿de cuantas formas puede calzar en un día determinado?

Debido a que puede utilizar botas o zapatos entonces el resultado es $3 + 2 = 5$.

Permutaciones y combinaciones

Permutación. Dado un conjunto de objetos distintos, una permutación del conjunto es un arreglo de estos objetos en un orden definido.

Por ejemplo, si la lotería de una escuela el número ganador es 234, no es lo mismo 432 o que 324, esas dos últimas formas son llamadas permutaciones.

Si se quiere determinar de cuántas maneras se pueden sentar tres personas en una fila se tendrá:

1er. lugar	2do. lugar	3er. lugar
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

Como puede notarse la cantidad de formas son $6 = 3(2)(1) = 3!$

Al seguir esta forma de resolver, pero ahora suponiendo que se tienen n elementos en el conjunto. De hecho, se puede pensar que cada permutación se obtiene llenando cada uno de los n espacios en blanco con uno y sólo un elemento del conjunto. Existen n maneras de llenar el primer espacio, seguidas de $n-1$ formas de llenar el segundo espacio y así sucesivamente, de modo que por el principio de multiplicación generalizado existen:

$$n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)$$

maneras de permutar los elementos del conjunto.

Factorial de un número. Llámese $n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ el factorial del número n. Es importante señalar que $0! = 1$.

El número de permutaciones de n objetos distintos considerados n a la vez, $P(n,n) = n!$

El principio de multiplicación generalizado permite concluir que el número de formas de permutar n objetos distintos, considerados r a la vez ($r \leq n$), $P(n,r)$ está dado por:

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

Permutaciones de n objetos distintos. El número de permutaciones de n objetos distintos considerados r a la vez es $P(n,r) = \frac{n!}{r!}$.

Permutaciones de n objetos, no todos distintos. Dado un conjunto de n objetos, donde n_1 objetos son similares y de un mismo tipo, n_2 objetos son similares y de otro tipo, ..., n_r objetos son similares y de otro tipo más, de modo que: $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, entonces el número de permutaciones de esos n objetos considerados n a la vez está dado por:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_r!}$$

Combinaciones de n objetos. El número de combinaciones de n objetos distintos, considerados r a la vez está dado por:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Ejemplo. ¿Cuántas palabras diferentes de tres letras pueden formarse con las letras de la palabra ARCO, sin repetir ninguna letra?

Lo primero que hay que aclarar que cuando se solicita este tipo de respuesta las palabras que se formen no necesariamente tienen sentido o corresponden a la estructura en el español.

Se tiene cuatro letras: A, R, C y O

Se quiere llenar 3 huecos que forman los espacios de la palabra: $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ en cada hueco hay que ir poniendo las posibles letras procediendo en orden. Algunos ejemplos:

$\boxed{C}\ \boxed{A}\ \boxed{R}$ $\qquad$ $\boxed{A}\ \boxed{R}\ \boxed{O}$ $\qquad$ $\boxed{O}\ \boxed{R}\ \boxed{A}$

La forma que hay que hacer para contar los casos es considerando la cantidad de letras, con las que se pueden llenar cada celda, considerando que no debe haber repeticiones de letra; además hay que utilizar la regla de la multiplicación vista en el punto 2.1.

$$\boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{= (4)(3)(2) = 24}$$

Ejercicios.

1. ¿Cuántos números pueden formarse con 4, 5, 5, 6, 6, 8, 9, 9; si se usan todos ellos?

2. En la preparatoria las calificaciones permitidas son: 0, 5, 6, 7, 8, 9, y 10. Si un alumno está cursando el quinto año y las materias correspondientes son: Matemáticas, Química, Biología, Etimología, Ética, Literatura mexicana, inglés, ¿Cuál es el número de calificaciones diferentes que podrían aparecer en su boleta de calificaciones para un mes específico?

3. Durante un congreso, a los participantes se les ofrecen 5 recorridos culturales por día para visitar lugares, durante los 2 días del evento. ¿En cuántas formas se puede una persona acomodar para hacer alguno de ellos?

4. Indique el número de placas diferentes que se pueden formar en el Distrito Federal, si cada placa tiene 3 números y tres letras (considere 26 letras del alfabeto).

5. A una fiesta asisten 5 hombres y 7 mujeres. Si todos bailan, ¿cuántas parejas diferentes se pueden formar? Recuerde que sólo se acepta que bailen parejas de los dos sexos.

6. Un testigo de un accidente automovilístico en el que el causante huyó del mismo, le indica a la policía que el número de la placa del automóvil tenía como primer dígito el número 6 y que las letras eran DJR. El testigo no puede recordar los otros dos números, pero está seguro de que eran diferentes entre sí y al 6, encuentre el número máximo de registros de automóvil que puede verificar la policía.

7. Puede adquirirse un medicamento para la cura del asma en forma líquida, tabletas o polvo, a cuatro diferentes fabricantes, y todas las presentaciones en 100mg o 200mg. ¿En cuántas formas puede un doctor recetar el medicamento a un paciente que sufre de este padecimiento?

8. Diez hombres y diez mujeres con las mismas habilidades solicitan dos empleos. Debido a que los dos empleados deben trabajar estrechamente, sus personalidades deben ser compatibles para llevar a éxito el trabajo. Para lograr esto, el encargado de personal ha aplicado una prueba y debe comparar calificaciones para cada posibilidad, ¿cuántas comparaciones debe efectuar?

9. De un comité de 10 personas, se debe escoger un subcomité de 3 personas. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

10. Un estudiante efectúa un examen que consta de dos secciones. La sección A, la primera, tiene 8 preguntas y la B, 10. ¿De cuántas maneras diferentes puede responder el estudiante el examen si deja de contestar dos preguntas de cada parte?

11. ¿De cuántas formas pueden sentarse 4 hombres y 4 mujeres a una mesa redonda si:

    a) no se imponen restricciones?
    b) Dos mujeres particulares no pueden sentarse juntas?
    c) Cada mujer ha de estar entre dos hombres?

12. Un equipo de béisbol se debe formar con un conjunto de doce personas. Dos equipos formados por las mismas nueve personas son diferentes si al menos alguna de ellas está asignada a una posición distinta. ¿de cuántas maneras puede formarse un equipo si no hay restricciones?

3.5. Probabilidad condicional y eventos independientes

Probabilidad condicional. La probabilidad condicional de un evento B dado A, es calculada como:

$$P[B/A] = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \qquad P(A) > 0$$

De esta definición sale inmediatamente una regla que es llamada ***regla del producto***: $P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$. Bajo la misma condición de que $P(A) \neq 0$.

Esta sencilla regla del producto permite introducir el concepto de independencia de eventos, que indica que si se quiere saber la probabilidad de que dos eventos ocurran de manera simultánea, si éstos son independientes sólo bastará multiplicar las probabilidades de cada ocurrencia, esto es. Dos eventos A y B son independientes sí $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Ejemplo 1. En un estudio realizado en una comunidad, se determinó que, de cada 1000 personas, 600 hombres y 400 mujeres, 50 hombres y 4 mujeres sufrían daltonismo. Se elige una persona al azar de ese grupo de daltonismo, ¿cuál es la probabilidad de que sea un hombre?

C: evento que indica que sufre daltonismo la persona

H: el evento que mide que sea hombre la persona

$$P(C) = \frac{54}{1000} = 0.054$$

Lo que se quiere es la probabilidad de que, dado que es daltónico, sea hombre, entonces: $P[H/C] = \frac{P(H \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{50}{1000}}{\frac{54}{1000}} = \frac{25}{27}$.

Ejemplo 2. Hay 500 estudiantes del último año en una Facultad X, de los cuales 300 son hombres. Se sabe que el 80% de los hombres y el 60% de las mujeres tienen licencia de conducir. Si se elige al azar un estudiante de ese último año de esa Facultad.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y tenga licencia para conducir?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no tenga licencia para conducir?

H: evento que indica que la persona es hombre

M: evento que indica que la persona es mujer

L: evento que indica que se tiene licencia para conducir.

a) $P(H) = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$, $P[L/H] = 0.8$

se quiere entonces $P(H \cap L) = P(H)P(L/H) = \frac{3}{5}(0.8) = 0.48$

b) $P(M) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$, $P(L^c/M) = 1 - P(L/M) = 1 - 0.6 = 0.4$,

se quiere ahora: $P(M \cap L^c) = P(M)P(L^c/M) = \frac{2}{5}(0.4) = 0.16$.

Ejemplo 3. En un análisis de 1000 votantes elegidos al azar, se determinó que 80 tenían licenciatura. Además, se determinó que 80% de los que tenían alguna licenciatura votaron en la última elección presidencial, mientras que el 55% de las personas que no tenían licenciatura también votaron. Suponga que esta muestra es representativa de todos los votantes y determine la probabilidad de que un votante elegido al azar.

a) Tenga una licenciatura y haya votado en la última elección presidencial.

b) No tenga una licenciatura y no haya votado.

c) Haya votado.

d) No haya votado.

A: evento que indica que se tiene licenciatura

B: evento que mide votar

$$P(A) = \frac{80}{1000} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

$$P(B/A) = 0.8$$

$$P(B/A^c) = 0.55$$

a) $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{2}{25}(0.8) = 0.064$
b) $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c/A^c) = \big(1 - P(A)\big)\big(1 - P(B/A^c)\big)$
c) $= \left(1 - \frac{2}{25}\right)(1 - 0.55) = 0.414$
d) $P(B) = P(A)P(B/A) + P(A^c)P(B/A^c) = \frac{2}{25}(0.8) + \frac{23}{25}(0.55) = 0.57$
e) $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - P(B) = 1 - 0.57 = 0.43$

Este último ejemplo hace surgir una regla que es llamada de ***la probabilidad total*** que para el caso de dos eventos queda.

Para cualesquiera dos eventos A y B,

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$$

$$= P(A)P(B/A) + P(A^c)P(B/A^c)$$

Esta regla se puede generalizar a más de dos eventos. Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ mutuamente excluyentes y exhaustivos. Entonces,

$$P(B) = P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + \cdots + P(B \cap E_n)$$

$$= P(E_1)P(B/E_1) + P(E_2)P(B/E_2) + \cdots + P(E_n)P(B/E_n)$$

Este tipo de particiones que se hace muestra un resultado muy importante en la Probabilidad que es el ***teorema de Bayes***.

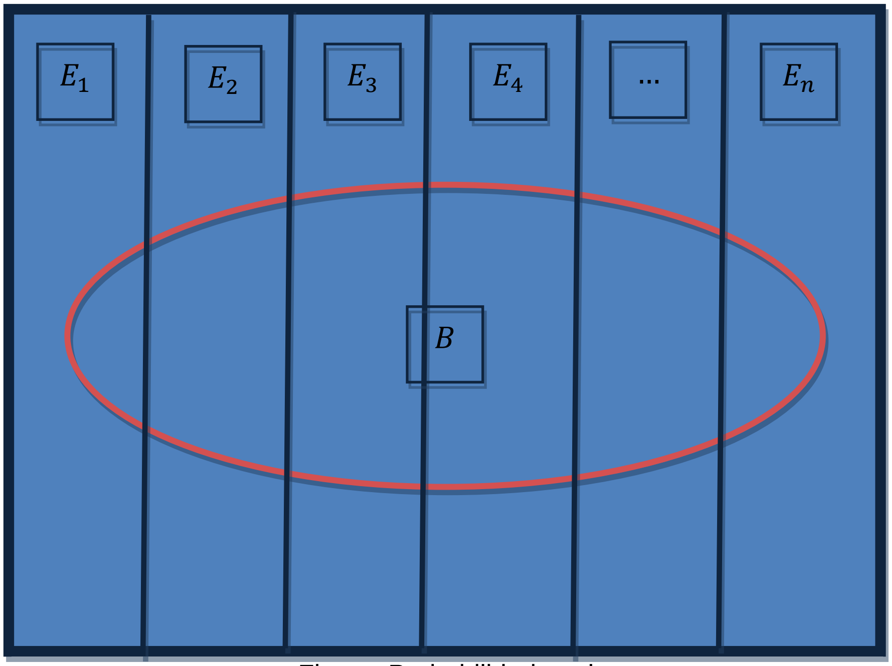


Figura. Probabilidad total

Sea $H_1, H_2, \dots, H_n$ una partición del espacio muestral Ω y sea E un evento del experimento tal que $P(E) \neq 0$, entonces la

$$P(H_1/E) = \frac{P(H_1 \cap E)}{P(E)} = \frac{P(H_1)P(E/H_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_1)P(E/H_1)}$$

Ejemplo 1. Se realizó un estudio en un área metropolitana para determinar los ingresos anuales de las parejas casadas en que sólo los maridos proveían de dinero y aquellas en que ambos cónyuges estaban empleados. La tabla proporciona la información.

Ingreso familiar mensual	**% de parejas casadas**	**% de grupo de ingreso con ambos cónyuges trabajando**
Menos de 3000	11	28
De 3000 a 4900	30	43
De 5000 a 9,999	24	63
De 10,000 a 20,000	25	68
Más de 20,000	10	73

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una pareja elegida al azar en esta área tenga dos ingresos?

b) Si una pareja al azar tiene dos ingresos, ¿cuál es la probabilidad de que el ingreso anual de esta pareja sea mayor de $\$20{,}000$?

c) Si una pareja elegida al azar tiene dos ingresos, ¿cuál es la probabilidad de que su ingreso anual sea mayor de $\$5{,}000$?

Los eventos serán llamados de la siguiente manera.

Ingreso familiar mensual
Menos de 3000 = A
De 3000 a 4900 = B
De 5000 a $9{,}999$ = C
De $10{,}000$ a $20{,}000$ = D
Más de $20{,}000$ = E

Además, considere T = evento en donde ambos cónyuges trabajan.

a) La probabilidad de que una pareja elegida al azar tenga dos ingresos es:

$$P(T) = P(A)P(T/A) + P(B)P(T/B) + P(C)P(T/C) + P(D)P(T/D) + P(E)P(T/E)$$

$$= (0.11)(0.28) + (0.3)(0.43) + (0.24)(0.63) + (0.25)(0.68) + (0.10)(0.73)$$

$$= 0.554$$

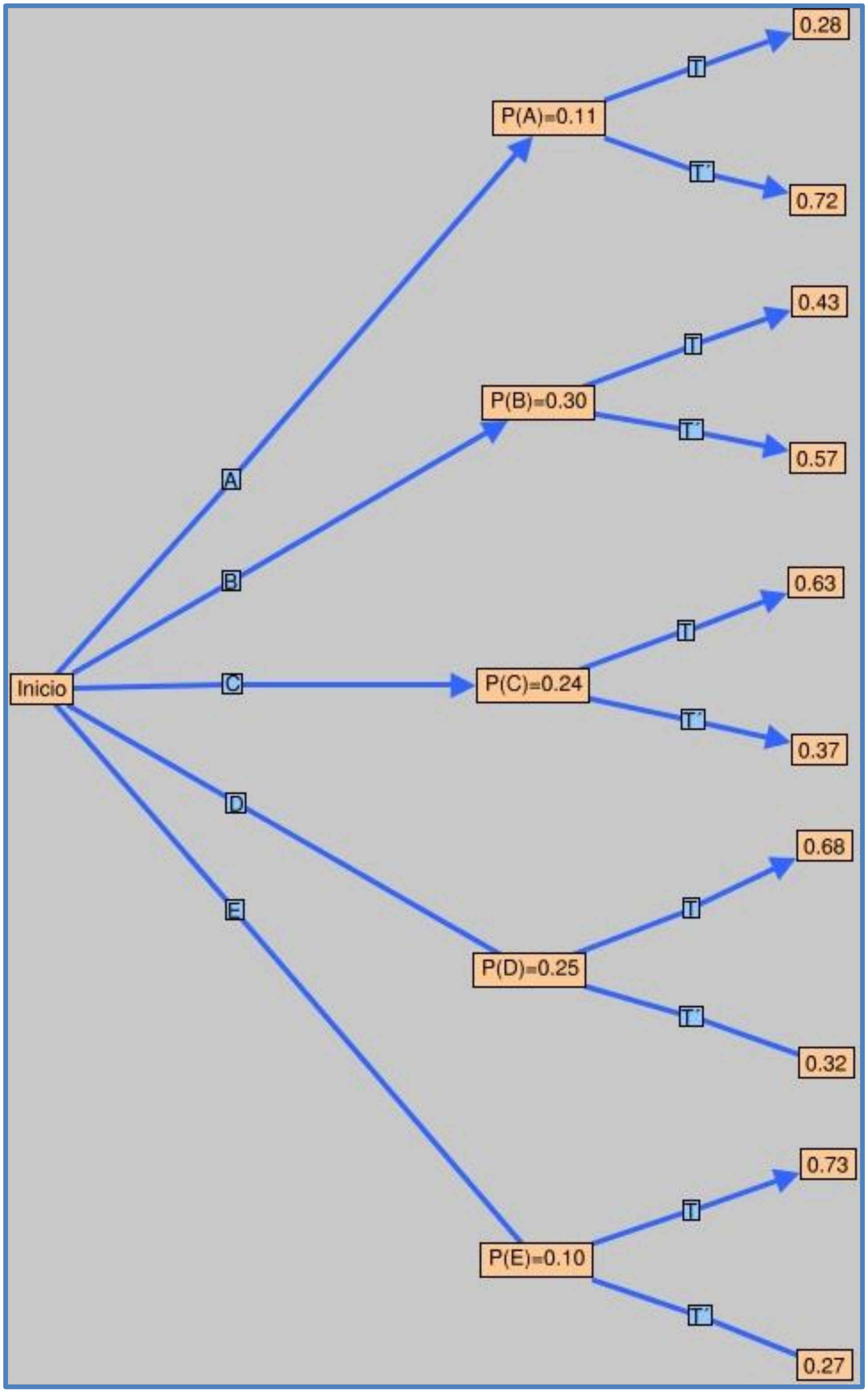
b) Usando el teorema de Bayes: $P(E/T) = \frac{P(E)P(T/E)}{P(T)} = \frac{(0.10)(0.73)}{0.554} = 0.1317$

c) Se quiere tres veces el teorema de Bayes, es decir:

$$P(C/T) + P(D/T) + P(E/T) = \frac{P(C)P(T/C) + P(D)P(T/D) + P(E)P(T/E)}{P(T)}$$

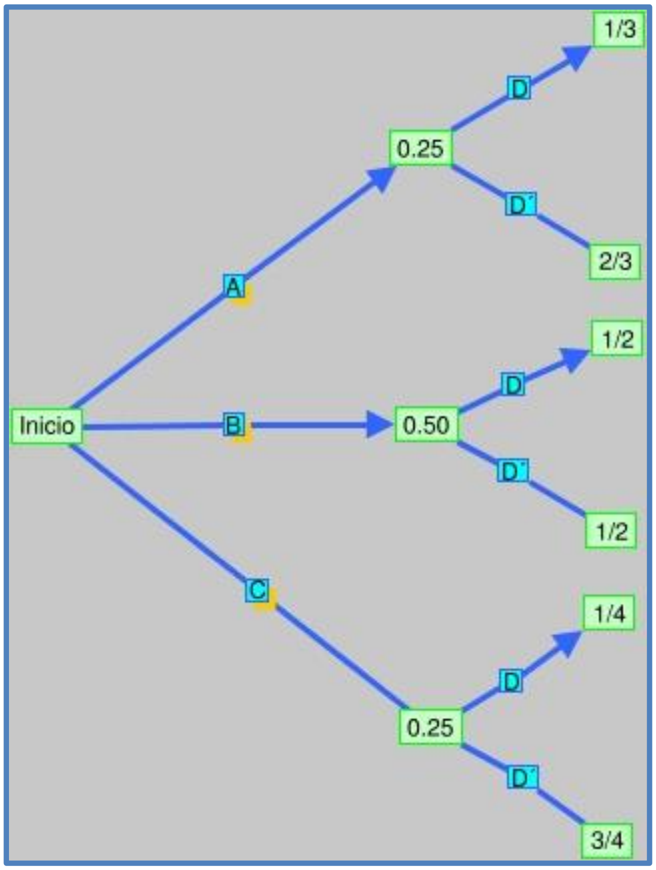
$$= \frac{(0.24)(0.63) + (0.25)(0.68) + (0.10)(0.73)}{0.554} = 0.7115$$

El proceso se puede representar en un diagrama de árbol como el siguiente:



Ejercicios

1. El siguiente diagrama de árbol representa un experimento en dos etapas. Utilice el diagrama para determinar $P(B/D)$.



2. Un examen médico está diseñado para detectar la presencia de cierta enfermedad. Entre las personas que la sufren, la probabilidad de detectarla por el examen es de 0.95. Por otro lado, la probabilidad de que el examen la encuentre en personas que no la padecen es 0.04. Se estima que el 4% de la población que realiza este examen tiene la enfermedad.

a) Si el examen practicado a una persona es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona tenga efectivamente la enfermedad?

b) Si una persona realiza el examen dos veces y en ambas ocasiones el examen resulta positivo, ¿cuál es la probabilidad de que efectivamente tenga la enfermedad?

3. Una agencia inmobiliaria realizó una encuesta en cierta ciudad, la cual reveló la siguiente información relativa a la distribución de las edades entre los inquilinos de esa ciudad.

Edad	**Porcentaje de población adulta**	**Porcentaje del grupo que son inquilinos**
$21 - 44$	0.51	0.58
$45 - 64$	0.31	0.45
65 o más	0.18	0.60

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un adulto elegido al azar de esa población sea un inquilino?

b) Si se escoge un inquilino al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté en la franja de edad $21 - 44$?

c) Si se selecciona un inquilino al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga 45 o más años?

Capítulo 4. Variables aleatorias

Introducción

El concepto de *variable aleatoria* juega un papel determinante en la teoría de la Probabilidad y Estadística. Casi cualquier afirmación que se elabore a partir de este punto, se mencionará una variable aleatoria.

Para obtener la comprensión de qué es una variable aleatoria, se analizan dos ejemplos. Posteriormente, se clasifican en discretas y continuas. Se definen las funciones de densidad y de distribución para terminar con los importantes conceptos de esperanza y varianza de una variable aleatoria.

Motivación

Con frecuencia, se está más interesado en alguna función o transformación de los resultados del experimento aleatorio que en el resultado mismo. Como un ejemplo, se puede mencionar el lanzamiento de dos dados. El objetivo es conocer la suma de las caras de los dados y en particular cuando esta es siete. No importa si el resultado real es $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$ o $(6,1)$. Esa función (suma de las caras de los dados) de valores reales definida sobre el espacio muestral, es conocida como *variable aleatoria*.

La función X, suma de las caras en el lanzamiento de dos dados se especifica por completo de la siguiente forma:

$X\big((1,1)\big) = 2;$

$X\big((1,2)\big) = X\big((2,1)\big) = 3;$

$X\big((1,3)\big) = X\big((2,2)\big) = X\big((3,1)\big) = 4;$

$X\big((1,4)\big) = X\big((2,3)\big) = X\big((3,2)\big) = X\big((4,1)\big) = 5;$

$X\big((1,5)\big) = X\big((2,4)\big) = X\big((3,3)\big) = X\big((4,2)\big) = X\big((5,1)\big) = 6;$

$X\big((1,6)\big) = X\big((2,5)\big) = X\big((3,4)\big) = X\big((4,3)\big) = X\big((5,2)\big) = X\big((6,1)\big) = 7;$

$X\big((2,6)\big) = X\big((3,5)\big) = X\big((4,4)\big) = X\big((5,3)\big) = X\big((6,2)\big) = 8;$

$X\big((3,6)\big) = X\big((4,5)\big) = X\big((5,4)\big) = X\big((6,3)\big) = 9;$

$X\big((4,6)\big) = X\big((5,5)\big) = X\big((6,4)\big) = 10;$

$X\big((5,6)\big) = X\big((6,5)\big) = 11;$

$X\big((6,6)\big) = 12.$

Otro ejemplo lo proporciona el ***nacimiento de un bebé*** cuando la madre desconoce el sexo del producto. El conjunto $\Omega = \{femenino, masculino\}$ es el dominio de la función X, dada por la regla de correspondencia:

$$X(femenino) = 1$$

$$X(masculino) = 0$$

En otras palabras, el investigador desea conocer el número de nacimientos femeninas en un parto. Figura 4.1.

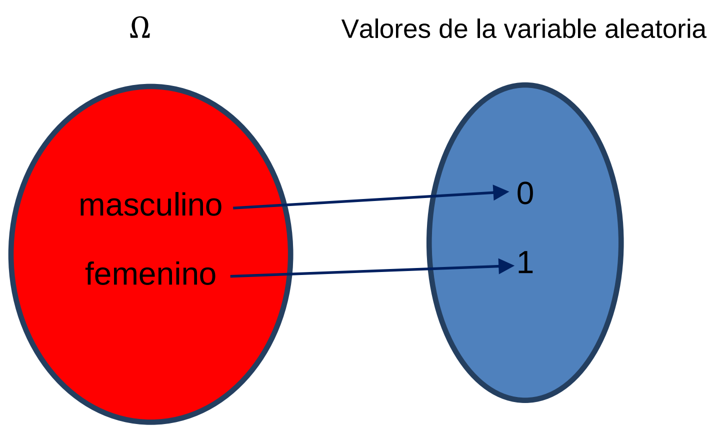


Figura 4.1. Variable aleatoria: número de niñas en un nacimiento

Número de hijos por familia. En un estudio demográfico se desea conocer el número de hijos que tiene cada familia, en un municipio o región, para brindar algún tipo de apoyo. El espacio muestral está compuesto por el conjunto de todas las familias en el estudio. En otras palabras:

$\Omega = \{familia\ 1, familia\ 2, \ldots, familia\ n\}$. La variable aleatoria es el número de hijos por familia y los valores que puede tomar son $\{1,2,3,\ldots\}$. Aunque parece exagerado que una familia pueda engendrar un numero infinito de hijos, se considera de esta manera porque no se sabe cuántos hijos pueden tener. Es decir, se tiene:$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$.

Llenado de botellas.

Si se desea que la botella contenga 500ml de un líquido (puede ser detergente líquido, bebidas azucaradas, agua para beber). El llenador automático debe dispensar una cantidad de líquido muy cercana a 500ml (por ejemplo, entre 497 y 503ml) para que apruebe el control de calidad. De la misma forma que en el ejemplo anterior, si el líquido de la botella se encuentra entre el intervalo que la empresa considera adecuado, entonces se asigna un cero por medio de la variable aleatoria y un uno si se encuentra fuera de este. Por tanto, la variable aleatoria lo que está contando son el número de botellas llenadas erróneamente. El espacio muestral puede ser una muestra de la producción seleccionada al azar.

En el ejemplo anterior, llenado de botellas, se puede asignar otra variable aleatoria: cantidad de líquido que contiene una botella. Si la cantidad máxima que cabe en la botella son 550ml, entonces los valores que puede tomar la variable aleatoria están en el intervalo $[0,\ 550]$. En tal caso: $X: \Omega \longrightarrow [0,\ 550]$. Figura 4.2.

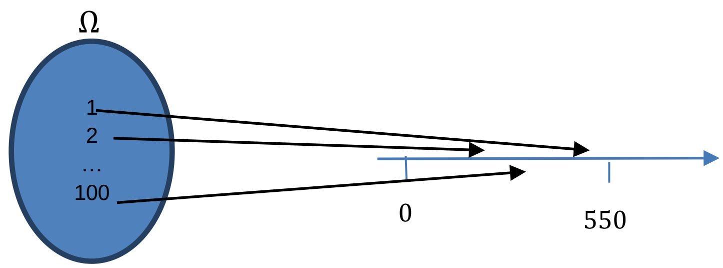


Figura 4.2. Variable aleatoria: cantidad de líquido que contiene una botella.

Tiempo de espera en la fila de un banco. En un banco, los clientes hacen una fila de espera para ser atendidos, se mide el tiempo desde que se forman hasta que son llamados a recibir el servicio. El espacio muestral es el conjunto de los clientes a los que se les ha tomado el tiempo, y los valores que puede tomar la variable aleatoria se encuentran en el intervalo $[0, \infty)$. En este ejemplo, si es posible asignar un valor al extremo derecho del intervalo si es conocido el horario del banco.

Clientes que llegan a un banco. La cantidad de clientes que llegan a un banco puedes ser uno o diez o cien, en un intervalo de tiempo dado. A cada cliente se le asocia un numero natural consecutivo o se puede extender un turno. Debido a que no es posible conocer a priori la cantidad de clientes que llegarán a un banco en un determinado intervalo de tiempo, la variable aleatoria puede tomar valores en el conjunto de los números naturales unido con el cero:

$$X: \{Sin\ clientes, Cliente\ 1, Cliente\ 2, \dots, Cliente\ n, \dots\} \longrightarrow \{0,1,2,3, \dots\}$$

Intervalo de tiempo en el que un foco falla. La empresa que fabrica focos desea conocer cuánto tiempo dura su producto. Para esto, inicia una prueba con 400 focos seleccionados al azar de la producción y los pone a funcionar hasta que se funden. El espacio muestral es la muestra de los 400 focos y el rango de la variable aleatoria sería el intervalo $[0, \infty]$. En símbolos: $X: \{1,2, \dots, 400\} \longrightarrow [0, \infty)$.

Con lo anterior en mente, se está en posibilidad de definir lo que se entiende por variable aleatoria.

4.1. Variable aleatoria

Definición. (Variable aleatoria)

Una variable aleatoria es una función X con dominio Ω y contra dominio la recta real.

En símbolos se tiene: $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

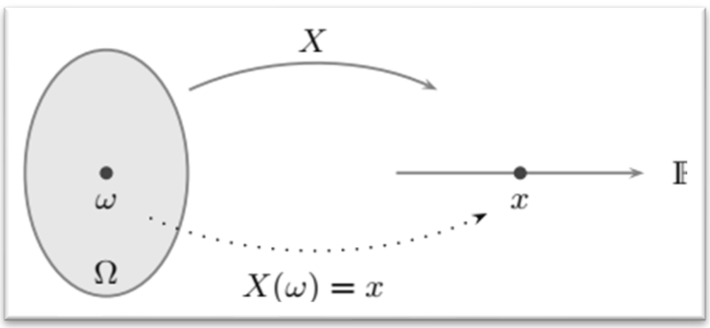


Figura 4.3. Variable aleatoria[3]

Se harán varias observaciones con respecto a la notación y convenciones que se utilizan.

- El nombre variable aleatoria es un poco desafortunada en el sentido de que no existe una noción intuitiva o justificación para asignar este nombre. Se podría argumentar este nombre porque es una función que toma valores de una *variable aleatoria* a una variable real.

- Las variables aleatorias se denotan por letras mayúsculas y éstas por lo general, son las últimas letras del alfabeto: U, V, X, Y, Z.

[3] Figura extraída de Rincón, L. (2007). *Curso elemental de Probabilidad*. México: UNAM

- Los valores asignados por medio de la variable aleatoria se representan con letras minúsculas, asociadas con el nombre de la función: si la variable aleatoria es X, entonces el valor que toma la función se representa por x (Figura 4.3).

La notación $\{X = x\}$ hace referencia a los elementos de Ω que toman el valor x bajo la función. En otras palabras, el evento que consiste en los elementos de Ω que, al aplicar la función tienen como imagen x.

Esta última observación es muy importante, porque es la que se utiliza para asignar probabilidades a los conjuntos. Para ayudar a la comprensión de la notación se retoma el primer ejemplo de esta sección.

Sea X la variable aleatoria definida como la suma de las caras, asociado al experimento aleatorio de lanzar dos dados, entonces:

$$X\big((1,1)\big) = 2$$

La notación $\{X = 2\}$ hace referencia al evento o subconjunto formado por todos los elementos de Ω que, al ser evaluados en la variable aleatoria se obtiene 2, esto es: $\{(1,1)\}$.

Para $\{X = 3\}$, se tiene:

$$X\big((1,2)\big) = X\big((2,1)\big) = 3$$

Entonces el conjunto que representa $\{X = 3\}$, es $\{(1,2),(2,1)\}$.

Para el resto de los resultados:

$X\big((1,3)\big) = X\big((2,2)\big) = X\big((3,1)\big) = 4$,

$\{X = 4\} \Longrightarrow \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$;

$X\big((1,4)\big) = X\big((2,3)\big) = X\big((3,2)\big) = X\big((4,1)\big) = 5,$

$\{X = 5\} \Longrightarrow \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\};$

$X\big((1,5)\big) = X\big((2,4)\big) = X\big((3,3)\big) = X\big((4,2)\big) = X\big((5,1)\big) = 6,$

$\{X = 6\} \Longrightarrow \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\};$

$X\big((1,6)\big) = X\big((2,5)\big) = X\big((3,4)\big) = X\big((4,3)\big) = X\big((5,2)\big) = X\big((6,1)\big) = 7,$

$\{X = 7\} \Longrightarrow \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\};$

$X\big((2,6)\big) = X\big((3,5)\big) = X\big((4,4)\big) = X\big((5,3)\big) = X\big((6,2)\big) = 8;$

$\{X = 8\} \Longrightarrow \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\};$

$X\big((3,6)\big) = X\big((4,5)\big) = X\big((5,4)\big) = X\big((6,3)\big) = 9,$

$\{X = 9\} \Longrightarrow \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\};$

$X\big((4,6)\big) = X\big((5,5)\big) = X\big((6,4)\big) = 10,$

$\{X = 10\} \Longrightarrow \{(4,6), (5,5), (6,4)\};$

$X\big((5,6)\big) = X\big((6,5)\big) = 11,$

$\{X = 11\} \Longrightarrow \{(5,6), (6,5)\};$

$X\big((6,6)\big) = 12.$

$\{X = 12\} \Longrightarrow \{(6,6)\}.$

De esta forma se puede asignar probabilidades con una notación más concisa:

$$P\{X = 2\} = P\{(1,1)\} = \frac{1}{36}$$

$$P\{X = 3\} = P\{(1,2), (2,1)\} = \frac{2}{36}$$

$$P\{X = 4\} = P\{(1,3),(2,2),(3,1)\} = \frac{3}{36}$$

$$P\{X = 5\} = P\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} = \frac{4}{36}$$

$$P\{X = 6\} = P\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} = \frac{5}{36}$$

$$P\{X = 7\} = P\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} = \frac{6}{36}$$

$$P\{X = 8\} = P\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} = \frac{5}{36}$$

$$P\{X = 9\} = P\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} = \frac{4}{36}$$

$$P\{X = 10\} = P\{(4,6),(5,5),(6,4)\} = \frac{3}{36}$$

$$P\{X = 11\} = P\{(5,6),(6,5)\} = \frac{2}{36}$$

$$P\{X = 12\} = P\{(6,6)\} = \frac{1}{36}$$

Siendo así, la variable aleatoria puede tomar valores enteros entre 2 y 12 inclusive y la probabilidad para cada valor que toma la variable aleatoria está dada por la lista anterior.

Como la función X cubre todo Ω y el contra dominio esta entre 2 y 12 inclusive, por las propiedades *i* y *iii* de la definición de función de Probabilidad se tiene:

$$1 = P\{\Omega\} = P\left\{\bigcup_{x=2}^{12}\{X = x\}\right\} = \sum_{x=2}^{12} P\{X = x\}$$

Debido a que $\{X = x_i\}\cap\{X = x_j\} = \emptyset;\ i \neq j;\ i,j = 2,3,\ldots,12$.

4.1.1. Variables aleatorias discretas y continuas

En la sección anterior se definió lo que se va a entender por una variable aleatoria. Se exhibieron varios ejemplos y de éstos se puede observar que los valores que toma una variable aleatoria son de dos tipos: finitos o infinitos numerables lo que se conoce como contables o infinitos no numerables que pueden tomar valores en un intervalo de los números reales y que se les asigna el nombre de continuas.

Para explicar de una mejor forma esta clasificación, se tomarán los ejemplos de la sección anterior. Para la vida útil de los focos, la variable aleatoria toma valores en un intervalo de tiempo, por tanto, es una variable aleatoria continua. De igual modo, en el llenado de botellas, se expusieron dos variables aleatorias. En la segunda opción, cantidad de líquido que contiene una botella, la variable aleatoria asigna valores en el intervalo $[0, 550]$; y por esta razón es una variable aleatoria continua.

Hay que observar que ambas variables aleatorias son mediciones: una de tiempo y la segunda de líquidos. En consecuencia, se asocia a las variables aleatorias continuas con mediciones de longitud, masa, tiempo, velocidad y volumen entre otras.

Un ejemplo de variable aleatoria discreta está dado por el llenado de botellas, pero en la primera variable aleatoria, en donde se acepta la botella si fue llenada en un rango que permite la compañía y las autoridades. La variable aleatoria cuenta el número de envases erróneamente llenados, al asignar cero a las que se encuentran dentro del rango permitido y uno a las que se encuentran fuera de este rango. El número de valores que puede tomar la variable aleatoria son dos; y ésta es la razón por la que se considera discreta.

Si se considera los clientes que pueden llegar a una sucursal bancaria en un día, la variable aleatoria puede tomar un número infinito de valores, a saber: $\{0,1,2,3,..\}$. La variable aleatoria que cuenta el número de clientes que pueden llegar a un banco a solicitar un servicio, se considera una variable aleatoria discreta.

Una ***variable aleatoria*** se considera ***discreta*** si está en cualquiera de las dos situaciones mencionadas en los últimos dos párrafos. En general, una variable aleatoria es discreta si los valores que puede tomar son contables; en otras palabras, finitos o se pueden poner en correspondencia con los números naturales.

4.2. Función de distribución acumulativa de una variable aleatoria discreta

Se ha calculado la probabilidad del siguiente conjunto: $\{X = x\}$. Puede surgir la siguiente pregunta, ¿Cuál es la probabilidad del conjunto $\{X \leq x\}$? Para responder, se procederá a desarrollar algunos ejemplos.

Considérese el experimento aleatorio del nacimiento de un bebé. El espacio muestral del experimento es: $\Omega = \{femenina, masculino\}$. La variable aleatoria que se considera es el número de niñas en un nacimiento. Los resultados que puede tomar la variable aleatoria son cero, si el bebé es niño; y uno si el nacimiento es de una niña, esto lo hace una variable aleatoria discreta. Adicional a lo anterior, la probabilidad de que en el nacimiento el producto sea niña es igual a 0.52 y de niño 0.48. En símbolos:

$$P\{niña\} = 0.52$$

$$P\{niño\} = 0.48$$

Sea $b \in \mathbb{R}$. Se calculará $P\{X \leq b\}$. La variable aleatoria toma dos valores, cero y uno. b, se puede encontrar en las siguientes situaciones: $b < 0$, $b = 0$, $0 < b < 1$, $b = 1$ y $b > 1$ (Figura 4.4).

Figura 4.4. Posibilidades de elegir a b

Si $b < 0$, entonces $P\{X \leq b\} = 0$, en virtud de que no existen valores de la variable aleatoria asignados en este intervalo. Como ejemplo, se podría seleccionar $b = -1$, por tanto, $P\{X \leq -1\} = 0$.

Si $b = 0$, entonces $P\{X \leq 0\} = 0.48$, debido a que el valor de la variable aleatoria en el cero es $.48$.

Si $0 < b$ y $b < 1$, entonces $P\{X \leq b\} = 0.48$. Continua con el mismo valor, debido a que, aunque es mayor a cero, el único elemento de la variable aleatoria que se encuentra en el intervalo $(-\infty, b)$ es el cero. El ejemplo que se selecciona es $b = \frac{11}{12}$. Sustituyendo: $P\left\{X \leq \frac{11}{12}\right\} = 0.48$.

Si $b = 1$, entonces $P\{X \leq 1\} = 1$. El total de los valores de la variable aleatoria se encuentran en el intervalo $(-\infty, 1)$. En consecuencia, Este intervalo contiene a todos los valores que toma la variable aleatoria. En símbolos:

$$1 = P\{\Omega\} = P\left\{\bigcup_{x=0}^{1}\{X = x\}\right\} = \sum_{x=0}^{1} P\{X = x\} = P\{X \leq 1\}$$

Para cualquier valor de b mayor a uno ($b > 1$), se tiene que: $P\{X \leq b\} = 1$, porque contiene a todos los valores que toma la variable aleatoria.

Si se grafica la información obtenida, se obtiene la Figura 4.5. Esta gráfica tiene la forma de una función escalonada o definida por partes. El dominio seria la Figura 4.4 y el rango es el intervalo $[0,1]$. Haciendo una analogía, se podría pensar que la recta real se corta en pedazos en cada valor de la variable aleatoria y que se suma el valor de lo anterior para colocar cada pedazo a la altura de la suma.

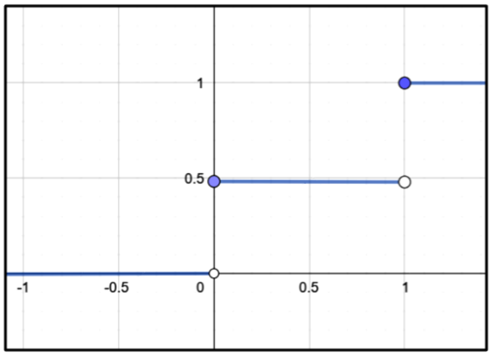


Figura 4.5. Gráfica de la Función de distribución acumulativa

La función del ejemplo del nacimiento de un bebé tendrá la siguiente definición:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0 \\ .48, & si\ 0 \leq x < 1 \\ 1, & si\ 1 \leq x \end{cases}$$

La función de distribución acumulativa asociada con la variable aleatoria X, está definida como la función con dominio la recta real y contra dominio el intervalo $[0,1]$, que satisface:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\}]$$

El nombre *función de distribución acumulativa*, se puede sustentar de la siguiente forma. Es una función que nos indica como están distribuidos los valores de la variable aleatoria y conforme se avanza hacia la derecha de la recta real se acumulan o se suman las probabilidades asociadas con los valores que toma la variable aleatoria.

Propiedades de la función de distribución acumulativa en el caso discreto

A continuación, se enumeran las propiedades que cualquier función de distribución acumulativa para el caso discreto debe cumplir.

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.
- $F_X(x)$ es una función monótona no decreciente; esto es, si $F_X(a) \leq F_X(b)$ entonces $a < b$.
- $F_X(x)$ es continua por la derecha; esto es, $\lim_{0<h \to 0} F_X(x+h) = F_X(x)$.

4.3. Función de densidad de probabilidad en el caso discreto

Se ha utilizado, en los ejemplos de variables aleatorias discretas, la notación $P(X = x)$ o $P\{X = x\}$ para señalar la probabilidad de un evento. Adicional a lo anterior se ha definido la función de distribución acumulativa que proporciona la probabilidad acumulada de los valores que toma la variable aleatoria. Si se desea obtener solamente la probabilidad de cada evento (no la acumulada), se requiere una lista de cada valor de la variable aleatoria. Recurriendo a la definición de función, es posible realizar esta lista y proporcionar la distribución de valores de una manera más simple.

Definición. (Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria discreta)

Si X es una variable aleatoria discreta con valores $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, entonces la función, denotada por f_X, y definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} P[X = x] & si\ x = x_i,\ \ i = 1,2,\dots \\ 0 & si\ x \neq x_i \end{cases}$$

es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X discreta.

Si se suman los valores que toma la función de densidad de una variable aleatoria discreta, se obtiene la función de distribución de la misma variable aleatoria discreta. Esto es:

Sean $x_1, x_2, \dots$ los valores que toma la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X, entonces

$$F_X(b) = \sum_{x_i \leq b} f_X(x_i), \text{ para toda } b \in \mathbb{R}.$$

La notación en los índices de la suma indica que ésta se calcula con los valores que toma la variable aleatoria menores o iguales que $b \in \mathbb{R}$; como se mostro en el ejemplo cuando se definió la función de distribución acumulativa en el caso discreto.

De forma similar, Incluso es posible calcular la función de densidad de probabilidad discreta si se tiene la función de distribución acumulativa:

$$f_X(x_1) = F_X(x_1)$$

$$f_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) \ \ i = 2,3,\dots$$

Las propiedades que caracterizan a una función de densidad se resumen en la siguiente definición alterna:

Definición (función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria discreta)

Cualquier función f con dominio la recta real y contra dominio el intervalo $[0,1]$ se define como una función de densidad discreta si para algún conjunto contable $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$; se cumple:

i. $f(x_i) > 0,\ i = 1,2, \ldots$

ii. $f(x) = 0$ para $x \neq x_i;\ i = 1,2, \ldots$

iii. $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$

Función de distribución acumulativa en el caso continuo

Para variables aleatorias continuas (los valores que puede tomar la variable aleatoria se encuentran en un intervalo) se define la función de distribución acumulada como:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

donde f_X es una función de densidad de probabilidad, $f_X: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, que cumple con:

1) $f_X(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

4.4. Esperanza y varianza de una variable aleatoria X

Cada variable aleatoria tiene características específicas que la identifican. En esta sección se definen la esperanza y la varianza que son las más importantes.

Definición (Esperanza)

Sea X una variable aleatoria. La esperanza (media o valor esperado) de la variable aleatoria X, denotada por $E[X]$ (μ_X o simplemente μ) está definida por:

$$E[X] = \sum_x x f_X(x)$$

Si X es discreta. La suma se efectúa sobre los posibles valores que toma la variable aleatoria, finitos o infinitos numerables. Si la variable aleatoria es continua, se define como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

La función de densidad de una variable aleatoria se muestra en la siguiente tabla:

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$

Por ser una variable aleatoria discreta, se debe elegir la suma del producto.

$$E[X] = \sum_{i=1}^{5} x_i f(x_i)$$

$$= (-2)\frac{2}{5} + (-1)\frac{1}{10} + (1)\frac{1}{10} + (2)\frac{2}{5} = 0$$

Si la variable aleatoria X tiene como función de densidad $f_X(x) = 4x^3$; para toda $x \in [0,1]$, hallar la esperanza.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$= \int_{0}^{1} x(4x^3) dx$$

$$= \int_{0}^{1} 4x^4 dx$$

$$= \frac{4}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{4}{5}$$

Se puede extender la idea de esperanza a cualquier función de la variable aleatoria.

Propiedades de la esperanza de una variable aleatoria.

Proposición 4.1.

Sean X e Y variables aleatorias con valor esperado $E[X]$ y $E[Y]$ respectivamente; $c \in \mathbb{R}$ una constante. Entonces

a) $E[c] = c$
b) $E[cX] = cE[X]$
c) Si $X \geq 0$, entonces $E[X] \geq 0$
d) $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Proposición 4.2.

Si X es una variable aleatoria discreta con función de densidad $f_X(x)$, entonces para cualquier función de valor real, $g(X)$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) f_X(x)$$

a) Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x)$, entonces para cualquier función de valor real, $g(X)$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Derivado de esta proposición, podemos definir la varianza, que mide la dispersión con respecto a su valor esperado.

Definición (Varianza)

Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x)$ y $E[X]$ su esperanza. Entonces la varianza de la variable aleatoria X, denotada por $Var[X]$, está definida por:

$$Var[X] = \sum_x (x - E[X])^2 f_X(x)$$

Si la variable aleatoria es discreta y la suma es sobre todos los valores que toma la variable aleatoria.

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f_X(x) dx$$

Si la variable aleatoria es continua.

Propiedades de la varianza

Proposición 4.3.

Sea X una variable aleatoria y $c \in \mathbb{R}$ una constante, entonces:

a) $Var\ [X] \geq 0$
b) $Var[c] = 0$
c) $Var[cX] = c^2 Var[X]$

Existe una forma equivalente de calcular la varianza de una variable aleatoria. Esto se describe en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.

$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$.

Demostración.

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

Desarrollando el cuadrado

$$= E\left[X^2 - 2XE[X] + E^2[X]\right]$$

Aplicando las propiedades de la esperanza:

$$= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E^2[X]$$

$$= E[X^2] - 2E^2[X] + E^2[X]$$

$$= E[X^2] - E^2[X]$$

Capítulo 5. Familia de distribuciones

Introducción

Para modelar cualquier tipo de fenómeno de la naturaleza, en ocasiones, surgen patrones que pueden ser generalizados y, entonces, aplicados a todos los experimentos que cumplan con las mismas condiciones.

En este capítulo se desarrollan cuatro de estas generalizaciones o familias del tipo discreto (uniforme, Bernoulli, binomial y binomial negativa) y tres de tipo continuo (uniforme, exponencial y normal).

Para cada familia, se parte de uno o varios ejemplos, para después obtener las condiciones que debe cumplir cada una y sus características principales.

5.1. Familias de variable aleatoria discreta

5.1.1. Uniforme discreta

Supóngase que se lanza un dado balanceado (es decir, que no existe una mayor posibilidad de caer una cara con respecto a otra, sino que todas tienen la misma posibilidad de aparecer); en otras palabras; equiprobable. El espacio muestral, Ω, de resultados es el siguiente:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

La probabilidad de que aparezca cualquiera de sus caras, por ser equiprobable, está dada por:

$$P[\{1\}] = P[\{2\}] = P[\{3\}] = P[\{4\}] = P[\{5\}] = P[\{6\}] = \frac{1}{6}$$

Esta función de densidad se puede escribir, de una forma más concisa, como:

$$f_X(x) = P[X = x] = \begin{cases} \frac{1}{6}; & si\ x = 1,2,3,4,5,6 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Para obtener la esperanza de la variable aleatoria (valor esperado), se recurre a la fórmula:

$$E[X] = \sum_{x=1}^{N} x f_X(x)$$

Sustituyendo:

$$E[X] = \sum_{x=1}^{6} x f_X(x) =$$

$$= 1 \cdot f_X(1) + 2 \cdot f_X(2) + 3 \cdot f_X(3) + 4 \cdot f_X(4) + 5 \cdot f_X(5) + 6 \cdot f_X(6)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

La varianza, para esta variable aleatoria, es calculada por la siguiente fórmula:

$$Var[X] = \sum_{x=1}^{6} (x - E[X])^2 f_x(x)$$

Sustituyendo:

$$= \sum_{x=1}^{6} \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{x=1}^{6} \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{25}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{70}{4}\right] = \frac{70}{24}$$

La desviación estándar se obtiene sustituyendo en:

$$DE(X) = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{\frac{70}{24}}$$

La función de distribución de acumulación toma la siguiente forma:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{6}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{6}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{6}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{6}, & 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6}, & 5 \leq x < 6 \\ 1, & 6 \leq x \end{cases}$$

Del ejemplo anterior, se puede estipular la naturaleza o las características básicas para distinguir esta familia. La familia se conoce como ***uniforme discreta***. De esta manera, cuando se tenga un problema con condiciones similares, con certeza, se podrá modelar como un miembro de ésta.

El espacio muestral debe contar con N elementos; éstos son equiprobables. Incluso, los valores que toma la variable aleatoria son N.

No es necesario que los valores que toma la variable aleatoria empiecen o se asignen desde el número uno. Lo anterior dependerá de las necesidades del investigador o del problema a modelar. Sin embargo, para hacerlo más simple, se puede trasladar y asignar desde el número uno. Para mejor comprensión de esta familia, se seleccionan los primeros N naturales.

La función de densidad de probabilidad entonces será:

$$P[\{1\}] = P[\{2\}] = \cdots = P[\{N\}] = \frac{1}{N}$$

O en forma concisa:

$$f_X(x) = P[X = x] = \begin{cases} \frac{1}{N}, & N = 1,2, \dots, N \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

El valor esperado, varianza y desviación estándar se establecen en el siguiente teorema.

Teorema. 5.1

El valor esperado, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria uniforme discreta (distribución uniforme discreta) son:

$$E[X] = \frac{N+1}{2};$$

$$Var[X] = \frac{N^2-1}{12};$$

$$DE[X] = \sqrt{\frac{N^2-1}{12}}$$

Demostración:

- Esperanza. Se parte de la definición.

$$E[X] = \sum_{x=1}^{N} x f_X(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{N} x \left(\frac{1}{N}\right)$$

Por ser equiprobables.

$$= \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} x$$

Por las propiedades de suma, debido a que es una constante, es decir, no depende de la variable de la suma. Esta suma es de los primeros N términos y se cuenta con una fórmula.

$$\sum_{x=1}^{N} x = \frac{N(N+1)}{2}$$

Sustituyendo:

$$= \left(\frac{1}{N}\right) \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

- Varianza. Se calcula por medio de la siguiente formula alterna de varianza:

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

En tal caso, se obtiene a continuación, $E[X^2]$.

$$E[X^2] = \sum_{x=1}^{N} x^2 f_X(x) =$$

$$= \sum_{x=1}^{N} (x^2)\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} x^2 =$$

Existe una fórmula para la suma de los primeros enteros positivos que están elevados al cuadrado:

$$\sum_{x=1}^{N} x^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Sustituyendo:

$$E[x^2] = \frac{1}{N}\left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right] = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

Por tanto:

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

$$= \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2$$

$$= (N+1)\left[\frac{(2N+1)}{6} - \frac{N+1}{4}\right]$$

$$= (N+1)\left[\frac{(2N+1)}{6}\cdot\frac{2}{2} - \frac{N+1}{4}\cdot\frac{3}{3}\right]$$

$$= (N+1)\left[\frac{2(2N+1)}{12} - \frac{3(N+1)}{12}\right]$$

$$= (N+1)\left[\frac{4N+2}{12} - \frac{3N+3}{12}\right]$$

$$= (N+1)\left[\frac{4N+2-3N-3}{12}\right]$$

$$= (N+1)\left[\frac{N-1}{12}\right] = \frac{N^2-1}{12}$$

- Desviación estándar. Es suficiente con extraer la raíz cuadrada de la varianza.

$$DE[X] = \sqrt{Var[X]}$$

Sustituyendo:

$$DE[X] = \sqrt{\frac{N^2 - 1}{12}}$$

La función de densidad junto con el valor esperado y la varianza caracterizan completamente la familia o un miembro de ésta.

Ejercicios

1. Una perinola tiene seis caras o posibilidades de que, al detenerse, mostrar un mensaje. Estos mensajes son los siguientes: toma uno, toma dos, toma todo, pon uno, pon dos y todos ponen. Si la perinola está bien balanceada, cada cara tendrá la misma posibilidad de aparecer. Encuentre la función de distribución, la media y varianza de la variable aleatoria.
2. En el sorteo *Melate* existen 56 esferas, numeradas desde el número uno hasta el cincuenta y seis inclusive, que se encuentran en una urna esférica. Por esta última se introduce aire a presión que hace que las esferas se empiecen a mover (el movimiento es parecido al de un gas, por ejemplo, en un globo, cuando se aumenta la temperatura y las partículas del gas empiezan a moverse). Se extrae una por medio de un mecanismo. El peso de cada esfera es el mismo para que cada una tenga la misma probabilidad de ser seleccionada. Encuentre el modelo que ajusta a la extracción de una sola esfera. Encuentre la esperanza y la varianza.

5.1.2. Distribución Bernoulli

En particular, esta distribución lleva el nombre del autor, como el inicio para comprender y desarrollar procesos más complejos como el binomial y la distribución normal; que será analizada, esta última, en la sección de *Familias continuas*. Es por este motivo, que será revisada con mayor detenimiento.

Se comenzará analizando los siguientes experimentos aleatorios:

- El nacimiento de un bebé (se desconoce el sexo del producto antes del parto). Se puede distinguir entre hombre y mujer. El conjunto de los posibles resultados es:

$$\Omega = \{mujer, hombre\}$$

- Lanzamiento de una moneda. Los posibles resultados son águila y sol. Por tanto:

$$\Omega = \{\acute{a}guila, sol\}$$

- El lanzamiento de un dado. Si aparece seis, se gana y con otro resultado se pierde.

$$\Omega = \{6, no\ 6\}$$

- Sondeo de opinión. Se pregunta a una persona si le gusta la pizza. Los resultados posibles son:

$$\Omega = \{gusta, no\ gusta\}$$

- Precio de una acción. En una jornada (posiblemente un día), en resumen, solamente es de interés si una acción *subió o permanece sin cambio*, o si *bajó* su precio.

$$\Omega = \{sube\ o\ permanece\ \text{sin}\ cambio, baja\}$$

- Producción de una hectárea de maíz. La producción en el campo mexicano es de importancia para las familias que viven de lo que se produce. Es importante que la producción por hectárea sea mayor a cierto número medido en toneladas, para que se pueda vivir por el resto del año. La media por hectárea para el campo mexicano es de 3.2 toneladas. Si una familia logra una producción mayor o igual a la media nacional, garantiza la supervivencia de esta por un año.

$$\Omega = \{sea\ mayor\ o\ igual, sea\ menor\}$$

Lo que tienen en común es que el conjunto de resultados probables, Ω, se puede separar en dos conjuntos ajenos, de tal forma (y dependiendo del fin del investigador) que se diferencia entre lo que es deseable y lo que no es deseable. En otras palabras, en éxito y fracaso.

La variable aleatoria asociada con este tipo de experimentos aleatorios es:

$$X = \text{número de éxitos en un ensayo del experimento aleatorio.}$$

Los valores que puede tomar la variable aleatoria, al ser un sólo ensayo del experimento, son:

$$x = 0{,}1$$

Para el *fracaso* se le asigna el 0 y para el *éxito* el 1.

Como se comentó en líneas arriba, esta asignación se basa en lo que el investigador desea conocer. Si en un experimento aleatorio se selecciona una muestra de la producción, por ejemplo, de pañales, y éstos se inspeccionan para conocer cuántos son defectuosos, el éxito se le asigna a los pañales defectuosos y la variable aleatoria es el número de defectuosos en la muestra.

Se abordarán dos ejemplos para desarrollar y después se generalizan para deducir el caso general.

- Nacimiento de un bebé.

Aproximadamente, hace 45 años se desarrolló la tecnología del ultrasonido. Hoy en día es de uso común para conocer, además de la salud del producto durante un embarazo, el sexo del bebé. Antes de este invento, las características sexuales del producto se conocían hasta el momento del nacimiento.

Con base en lo descrito, se construye el siguiente modelo.

Se desea modelar el nacimiento de un bebe; la madre no se ha efectuado un estudio previo para determinar el sexo del producto. El espacio muestral de este experimento aleatorio es, como se describió en el inicio de esta sección, igual a:

$$\Omega = \{mujer, hombre\}$$

Por alguna razón atribuible a la madre, desea que el producto sea mujer. Entonces la variable aleatoria, X, es el número de mujeres en un nacimiento.

Los valores que puede tomar la variable aleatoria son: $x = 0,1$.

Para el éxito (mujer) se le asigna el valor de 1, para el fracaso (hombre) el valor de 0. Este último se puede ver también como cero “mujer” en un nacimiento.

La probabilidad asociada a cada evento es:

$$P[mujer] = P[X = 1] = .52$$

$$P[hombre] = P[X = 0] = .48$$

Estas probabilidades son hipotéticas (no están relacionadas con la realidad).

La información obtenida se puede resumir en la siguiente tabla.

	Fracaso	Éxito
$\boldsymbol{x}$	0	1
$\boldsymbol{f_X(x) = P[X = x]}$	$.48$	$.52$

Tabla 5.2.1

Es posible, combinar la información del último renglón de la tabla en una sola expresión:

$$f_X(x) = P[X = x] = (.52)^x (.48)^{1-x} \;\; ; \quad x = 0,1$$

Que es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria. Incluso, es posible escribirla como una función definida por partes:

$$f_X(x) = P[X = x] = \begin{cases} .48, & x = 0 \\ .52, & x = 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La gráfica de la función de densidad, para esta variable aleatoria, está descrita en la Figura 5.1. El valor de la función, cuando toma el valor cero es $.48$ y en el uno es $.52$. Para cualquier número real distinto de cero y uno el valor que asigna la función es cero.

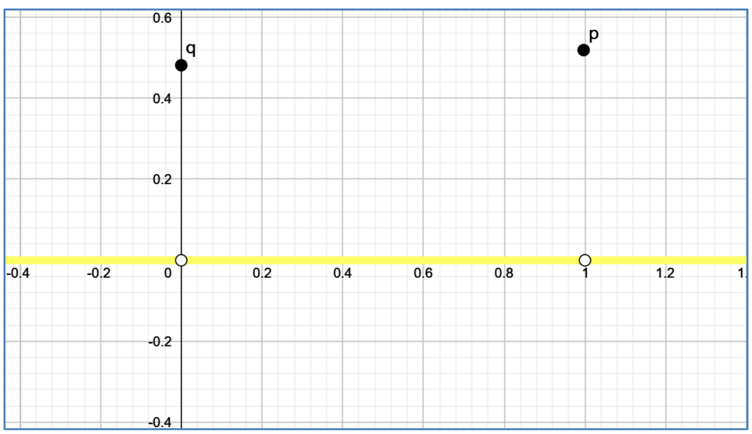


Figura 5.2.1. Función de densidad

La función de distribución de acumulación, para esta variable aleatoria, toma tres valores:

- Para el intervalo $(-\infty, 0)$, el valor de la función es cero.
- En el intervalo $[0, 1)$, la función toma el valor $.48$.
- Si $x \in [1,\infty)$, el valor asociado a la función es uno.

O en forma simplificada:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ .48 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 1 & si\ 1 \leq x \end{cases}$$

El primer valor que es distinto de cero es $.48$ y lo toma en el cero y se conserva en el intervalo $0 \leq x < 1$. El próximo valor que toma la función es $.52$, al evaluarla en el uno. Esto se suma al valor anterior con lo que se obtiene: $.48 + .52 = 1$. Como no existe otro valor, a partir de uno; es decir, $1 \leq x$ en el dominio (que son los reales), la función toma el valor que ha sumado.

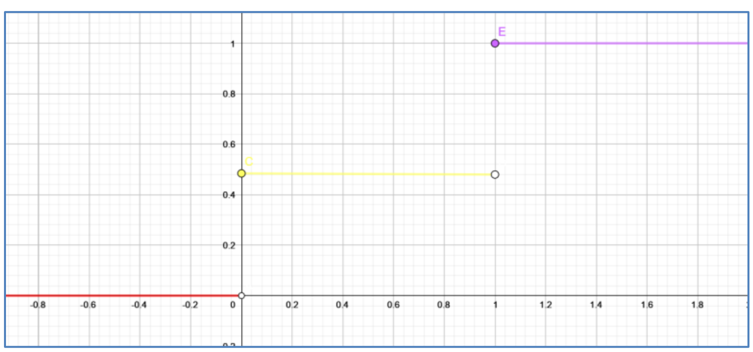


Figura 5.2.2. Función de distribución acumulativa

Para determinar completamente la variable aleatoria, se calcula la esperanza y la varianza.

- Esperanza. Se parte de la definición de esperanza.

$$E[X] = \sum_{x} x f_X(x)$$

Sustituyendo:

$$= \sum_{x=0}^{1} x p^x (1-p)^{1-x}$$

$$= 0 \cdot (.52)^0 (.48)^{1-x} + 1 \cdot (.52)^1 (.48)^{1-1}$$

$$= 0 + .52 = .52$$

- Varianza. De forma similar, se parte de la definición.

$$Var[X] = \sum_{x} (x - E[x])^2 f_x(x)$$

Sustituyendo:

$$= \sum_{x=0}^{1} (x - .52)^2 p^x (1-p)^{1-x}$$

$$= (0 - .52)^2 (.52)^0 (.48)^{1-0} + (1 - .52)^2 (.52)^1 (.48)^{1-1}$$

$$= (.52)^2 (.48) + (.48)^2 (.52)$$

$$= (.52)(.48)[(.52) + (.48)]$$

$$= (.52)(.48)[1] = (.52)(.48)$$

El siguiente ejemplo se seleccionó debido a que se puede pensar que el espacio muestral de un experimento Bernoulli debe tener dos resultados.

- Lanzamiento de un dado.

Se lanza un dado bien equilibrado (cualquiera de las caras tiene la misma posibilidad de aparecer: equiprobable). Si aparece un seis gana el que lo lanza (éxito) y si aparece otro número pierde (fracaso). El espacio muestral está dado por: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Se observa que el espacio de posibles resultados está dividido en dos: éxito y fracaso. Se tienen seis resultados posibles y de éstos, sólo con uno se gana. Por tanto, la probabilidad de ganar o de éxito es $\frac{1}{6}$.

$$P[\{6\}] = \frac{1}{6}$$

Para la probabilidad de fracaso se tiene:

$$P[\{1,2,3,4,5\}] = \frac{5}{6}$$

Que es el complemento de la probabilidad de éxito.

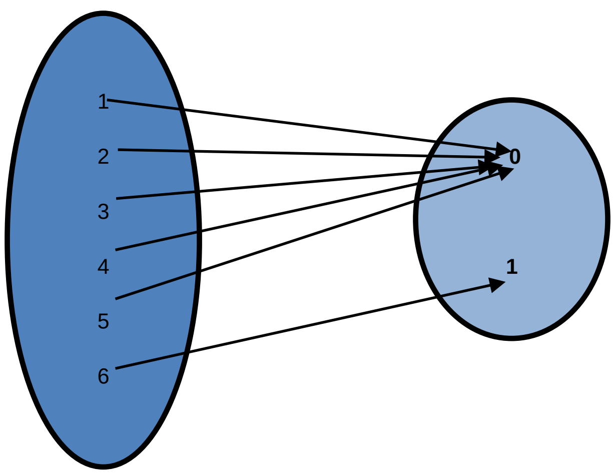


Figura 5.2.3.

La variable aleatoria asociada es:

X =número de veces que aparece seis en un dado al ser lanzado.

Los valores (o número de veces que aparece un seis en un lanzamiento del dado) que toma la variable aleatoria son: $x = 0{,}1$. En la Figura 5.3 se aprecia el dominio de la variable aleatoria y los valores que ésta toma.

Como en el ejemplo anterior, se resume en una tabla:

	Fracaso	Éxito
$\boldsymbol{x}$	0	1
$\boldsymbol{f_X(x) = P[X = x]}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Tabla 5.2.2.

Con lo anterior, la función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f_X(x) = P[X = x] = \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x} \quad ; \quad x = 0{,}1$$

O en forma escalonada:

$$f_X(x) = P[X = x] = \begin{cases} \frac{5}{6} & si\ x = 0 \\ \frac{1}{6} & si\ x = 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La gráfica de la función de densidad se puede observar en la Figura 5.4. en ésta se aprecia que el valor que toma en cero la función $\left(\frac{5}{6}\right)$, está arriba del valor $.8$, y el valor en el uno es, aproximadamente, $.17$. Para otro valor en la recta real la función asigna el cero, marcado en amarillo.

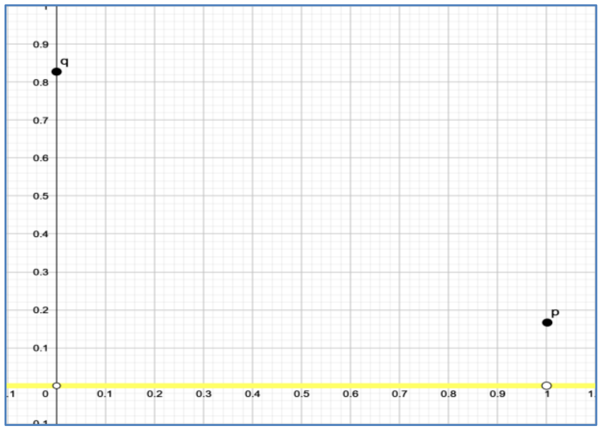


Figura 5.2.4

Para la función de distribución de acumulada, el primer valor con que se encuentra está en el cero. Antes del cero, la función vale 0; marcada en rojo en la Figura 5.5. en el cero da un salto a $\frac{5}{6}$, y continúa con este valor durante el intervalo $0 \leq x < 1$; marcado de amarillo en la Figura 5.5. El segundo valor que encuentra para ser sumado está en el uno. En este valor, tiene un salto de $\frac{1}{6}$, que al ser sumado al valor de $\frac{5}{6}$ da como resultado 1. Este valor de la función inicia en el uno y continua sin cambio hacia la derecha de forma indefinida; marcado de color morado en la Figura 5.5.

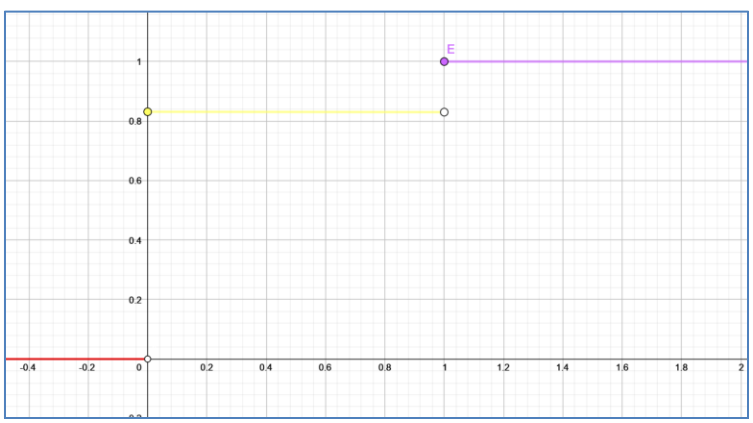


Figura 5.2.5

Algebraicamente, la función de distribución de acumulación se puede escribir como:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{5}{6} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

Para completar las características de la variable aleatoria, se calculan el valor esperado y la varianza.

- Valor esperado. Partiendo de la definición y sustituyendo:

$$E[X] = \sum_x x f_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{1} x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x}$$

$$= 0\left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{1-0} + 1\left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{1-1}$$

$$= 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

- Varianza.

$$Var[X] = \sum_x (x - E[X])^2 f_X(x)$$

$$= \left(0 - \frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{1-0} + \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{1-1}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left[\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right]$$

$$= \frac{5}{36}$$

¿Qué se necesita para conocer o poder desarrollar la distribución Bernoulli? En otras palabras, si se conoce uno o varios números, a partir de éstos, ¿es posible construir y determinar los elementos que componen a la distribución Bernoulli? Esto es conocido como parámetro. El parámetro de la distribución Bernoulli es p, la probabilidad de éxito. Si se observa con este número se puede determinar la probabilidad de fracaso, la función de densidad y distribución. Adicional a lo anterior, es el valor esperado y la varianza es el producto de esta probabilidad con la probabilidad de fracaso.

De los ejemplos tratados, se puede obtener una generalización de la distribución Bernoulli:

Un ensayo Bernoulli es un experimento aleatorio con únicamente dos resultados, llamados éxito y fracaso.

Si al resultado del experimento aleatorio que se denomina éxito, la variable aleatoria le asigna el valor de uno, y al designado como fracaso se le da el valor cero, entonces se dice que la variable aleatoria se distribuye Bernoulli con parámetro p, donde este parámetro es la probabilidad asignada al evento éxito. Para representar que la variable aleatoria se distribuye Bernoulli con parámetro p, se denota por:

$$X \sim Bernoulli(p)$$

Donde $0 \leq p \leq 1$ por ser una probabilidad.

La probabilidad de fracaso es $1 - p$; porque el espacio muestral está partido en éxito y fracaso. Este último es el complemento del primero.

La función de densidad de probabilidad de una distribución Bernoulli con parámetro p, se escribe como:

$$f_x(x) = P[X = x] = p^x(1-p)^{1-x};$$

$$x = 0,1$$

Cuando se sustituye el valor cero, la función arroja el $1 - p$ como resultado. Si se reemplaza por uno, la función da como resultado p. Resumido en una tabla:

	Fracaso	Éxito
$\boldsymbol{x}$	0	1
$\boldsymbol{f_X(x) = P[X = x]}$	$(1-p)$	p

Tabla 5.2.3

Para la función de distribución acumulada el primer valor que se encuentra es en $x = 0$ y la función le asigna el valor $1 - p$. Este valor permanece sin cambio para el intervalo $0 \leq x < 1$. El siguiente y último valor está en $x = 1$; la función le asigna p, y al sumarlo al anterior se obtiene uno. Se resume de la siguiente forma:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ (1-p) & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

Con respecto al valor esperado, como en los ejemplos, se parte de la definición:

$$E[X] = \sum_x x f_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{1} x p^x (1-p)^{1-x}$$

$$= 0 \cdot p^0(1-p)^{1-0} + 1 \cdot p^1(1-p)^{1-1}$$

$$= 0 + 1 \cdot p(1-p)^0 = p$$

Por tanto, el valor esperado de una variable aleatoria Bernoulli es p. En símbolos:

$$E[X] = p$$

Para la varianza se tiene, a partir de la definición:

$$Var[X] = \sum_x (x - E[X])^2 f_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{1} (x - p)^2 p^x (1 - p)^{1-x}$$

$$= (0 - p)^2 p^0 (1 - p)^{1-0} + (1 - p)^2 p^1 (1 - p)^{1-1}$$

$$= p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p$$

$$= p(1 - p)[p - (1 - p)]$$

$$= p(1 - p)$$

En otras palabras, la varianza para una distribución Bernoulli es $p(1 - p)$.

Con las características desarrolladas es posible determinar, en lo general, la distribución Bernoulli y para cada elemento de la familia, con sólo sustituir la probabilidad de éxito se determina este.

5.1.3. Distribución binomial

En esta sección se desarrolla la distribución binomial con base en ensayos Bernoulli. Se construye con ejemplos, para después, generalizar y abstraer las características del proceso y de esta manera, pasar del ejemplo a la generalización.

Un proceso Bernoulli, como se discutió en la sección anterior, se compone de un ensayo de un experimento aleatorio en el que el espacio muestral se divide en éxito y fracaso. La variable aleatoria, designada como el número de éxitos en un ensayo del experimento, asigna al evento éxito el número uno y al evento fracaso el cero. El parámetro de esta distribución (lo que se necesita conocer para determinar el elemento de la familia) es la probabilidad de éxito, p.

Con base en el párrafo anterior, se puede preguntar si en lugar de ser sólo un ensayo del experimento se tienen dos o tres o más. Al ser más de un experimento, ¿Cómo serán el valor esperado y la varianza? ¿Tienen relación con las de un ensayo? Para aclarar ideas, se retoma el ejemplo del sexo del bebé al momento del parto y sin conocerlo por medio de estudios como el ultrasonido.

- Sexo de un bebé al momento del nacimiento.

El administrador de un hospital realiza un estudio que le solicitó la Secretaría de Salud, para conocer el sexo de los recién nacidos en una noche en particular. Llegan tres mujeres en labor de parto. El administrador desea ver cuáles son las posibilidades para el sexo de los productos. Asigna a las futuras madres un distintivo; a la primera le llama M_1, a la segunda M_2 y a la tercera M_3. La primera posibilidad que considera es que en todos los partos el producto sea niña. El segundo caso es que un nacimiento de los tres, es decir, en alguno de los partos, sea niña. Otra posibilidad es que en dos de los partos nazcan dos niñas y un niño. Es posible, incluso, que en los tres nacimientos sólo nazcan niños.

Lo que el administrador está buscando, es el número de niñas en tres nacimientos o ensayos independientes. Esto es la variable aleatoria.

$X =$ número de nacimientos de niñas en tres ensayos independientes Bernoulli.

Se consideran independientes porque son de distinta progenitora, concebidos en distinto momento y porque no afecta el que en cualquiera de los partos el producto sea niña o niño y que esto afecte el resultado en otro nacimiento.

El administrador conoce (o le fue proporcionado por la Secretaría de Estado) que la probabilidad de que el producto sea niña es $.52$. Por lo anterior, la probabilidad de que sea niño es:

$$1 = P[\Omega] = P[niña] + P[niño]$$
$$1 = .52 + P[niña]$$
$$P[niño] = 1 - .52 = .48$$

El administrador considera cada caso por separado. Inicia con cero nacimientos niñas en los partos y los coloca en una tabla:

Clave progenitora	**M1**	**M2**	**M3**
Sexo del producto	masculino	masculino	masculino
Probabilidad asociada	$\mathbf{.48}$	$.48$	$.48$

Tabla 5.3.1.

Cero niñas en tres nacimientos

En tal caso, por ser independientes, la probabilidad de cero nacimientos de niñas en tres partos es:

$$P[X = 0] = (.48)(.48)(.48) = (.48)^3 = 0.11$$

Después, analiza el suceso: una niña y dos niños. Esto puede suceder de tres formas: una niña en el primer nacimiento, un niño para la segunda y tercera madre; un niño para la primera y la tercera opción y una niña para la segunda o un niño para el primer y segundo parto y una niña para el tercero. Las posibilidades se resumen en la siguiente tabla.

Clave progenitora	M1	M2	M3
Primer caso	niña	niño	niño
Segundo caso	niño	niña	niño
Tercer caso	niño	niño	niña

Tabla 5.3.2.

Posibilidades de una femenina y dos masculinos en tres nacimientos

Las probabilidades asociadas a cada situación son las siguientes:

$$P[Primer\ caso] = P[niña] \cdot P[niño] \cdot P[niña] = (.52)(.48)(.48) = 0.1198$$

$$P[Segundo\ caso] = P[niño] \cdot P[niña] \cdot P[niño] = (.48)(.52)(.48) = 0.1198$$

$$P[Tercer\ caso] = P[niño] \cdot P[niño] \cdot P[niña] = (.48)(.48)(.52) = 0.1198$$

Estas probabilidades se resumen en la Tabla 5.3.3. Siendo así, la probabilidad de que en tres nacimientos sólo se obtenga una femenina es:

$$P[X = 1] = P[niña] \cdot P[niño] \cdot P[niño] + P[niño] \cdot P[niña] \cdot P[niño] + P[niño] \cdot P[niño] \cdot P[niña] =$$

$$= (.52)(.48)(.48) + (.48)(.52)(.48) + (.48)(.48)(.52) = 0.1198 + 0.1198 + 0.1198 = 3(0.1198) = 0.3594$$

Más allá del resultado numérico, se puede observar que cada renglón tiene la misma probabilidad (0.1198); esto porque en cada uno hay una niña y dos niños. Por lo anterior, cada renglón corresponde a una posibilidad o *combinación* de una niña y dos niños. Se puede, entonces considerar una posibilidad y multiplicarla por tres, que son el número de combinaciones que existen para el evento una niña y dos niños en tres nacimientos.

M1	M2	M3	
$\mathbf{.52}$	$.48$	$.48$	$(.52)(.48)(.48)$
$\mathbf{.48}$	$.52$	$.48$	$(.48)(.52)(.48)$
$\mathbf{.48}$	$.48$	$.52$	$(.48)(.48)(.52)$

Tabla 5.3.3.

Probabilidades asociadas al evento una femenina y dos masculinos en tres nacimientos

Para el evento de obtener dos femeninas y un masculino en tres nacimientos el administrador lo analiza de la siguiente manera:

- Primer caso. M1 tiene niña, M2 tiene niña y M3 tiene niño.
- Segundo caso. M1 tiene niña, M2 tiene niño y M3 tiene niña.
- Tercer caso. M1 tiene niño, M2 tiene niña y M3 tiene niño.

Y, como en los casos anteriores, lo resume en una tabla:

Clave progenitora	M1	M2	M3
Primer caso	niña	niña	niño
Segundo caso	niña	niño	niña
Tercer caso	niño	niña	niña

Tabla 5.3.4.

Combinaciones de un masculino con dos femeninas

Las probabilidades asociadas para cada caso o renglón se presentan a continuación:

- Primer caso: $(.52)(.52)(.48) = (.52)^2(.48) = 0.1297$
- Segundo caso: $(.52)(.48)(.52) = (.52)^2(.48) = 0.1297$
- Tercer caso: $(.48)(.52)(.52) = (.52)^2(.48) = 0.1297$

En tal caso, la probabilidad de que la variable aleatoria tome el valor dos es:

$$P[X = 2] = 3(0.1297) = 0.3893$$

El evento tres niñas, sólo puede suceder de una forma. Los tres productos son niñas. En esta situación, la variable aleatoria toma el valor tres y la probabilidad se calcula de la siguiente manera:

$$P[X = 3] = (.52)(.52)(.52) = (.52)^3 = 0.14$$

Lo anterior, debido a que la probabilidad para cada ensayo Bernoulli es $.52$; y se tienen tres ensayos.

Esta información se va a condensar para conocer las características de la distribución.

La variable aleatoria asociada al experimento aleatorio es el número de nacimientos en los que el producto es una femenina de tres posibles.

$X =$ número de nacimientos de niñas en tres ensayos independientes.

La palabra *independientes* es de suma importancia debido a que por esta razón es posible calcular las probabilidades. Son independientes porque no tiene relación o no influye en el resultado de otro experimento el que sea niña o niño. Los valores que puede tomar la variable aleatoria son: $x = 0,1,2,3$. Estos valores se pueden traducir como 0 niñas (o éxitos) en tres nacimientos, una niña en tres nacimientos, dos niñas en tres nacimientos y tres niñas en tres nacimientos. El número de ensayos o experimentos es $n = 3$.

La función de densidad de probabilidad, de esta variable aleatoria discreta, es, para cada valor que toma la variable aleatoria, la siguiente:

$$f_X(0) = P[X = 0] = (.48)(.48)(.48) = (.48)^3 = 0.11$$

$$f_X(1) = P[X = 1] = 3(.52)(.48)(.48) = 3(.52)(.48)^2 = 0.3594$$

$$f_X(2) = P[X = 2] = 3(.52)(.52)(.48) = 3(.52)^2(.48) = 0.3893$$

$$f_X(3) = P[X = 3] = (.52)(.52)(.52) = (.52)^3 = 0.14$$

Como se esperaba:

$$\sum_{x=0}^{3} f_X(x) = 1$$

Esto es posible resumirlo en una tabla:

x	**0**	**1**	**2**	**3**
$\boldsymbol{f_X(x) = P[X = x]}$	0.11	0.3594	0.3893	0.14

Tabla 5.3.5.

Función de densidad de probabilidad para el número de femeninas en tres nacimientos

Como se comentó en el desarrollo del ejemplo, en los eventos una niña y dos niños y dos niñas y un niño; asociados cuando la variable aleatoria toma los valores uno y dos $(X = 1; X = 2)$, aparece un tres que corresponde a las combinaciones del resultado. Matemáticamente, las combinaciones de un resultado se cuentan por medio de:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$$

Las combinaciones asociadas a cada uno de los eventos, dado que $n = 3$ son:

- Cero niñas en tres nacimientos ($X = 0$).

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{(3-0)!\,0!} = 1$$

- Una niña en tres nacimientos ($X = 1$). $\binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)!1!} = \frac{3!}{2!1!} = 3$
- Dos niñas en tres nacimientos ($X = 2$). $\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$
- Tres niñas en tres nacimientos ($X = 3$). $\binom{3}{3} = \frac{3!}{(3-3)!3!} = \frac{3!}{0!3!} = 1$

Con lo anterior, es posible escribir la función de densidad de probabilidad en una sola fórmula: $f_X(x) = \binom{3}{x}(.52)^x(.48)^{3-x} \quad x = 0, 1, 2, 3;$

La gráfica de la función de densidad de probabilidad se presenta en la Figura 5.3.1. La función de distribución de acumulación, para esta variable aleatoria, tiene la forma:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 0.11 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 0.47 & si\ 1 \leq x < 2 \\ 0.86 & si\ 2 \leq x < 3 \\ 1 & si\ 3 \leq x \end{cases}$$

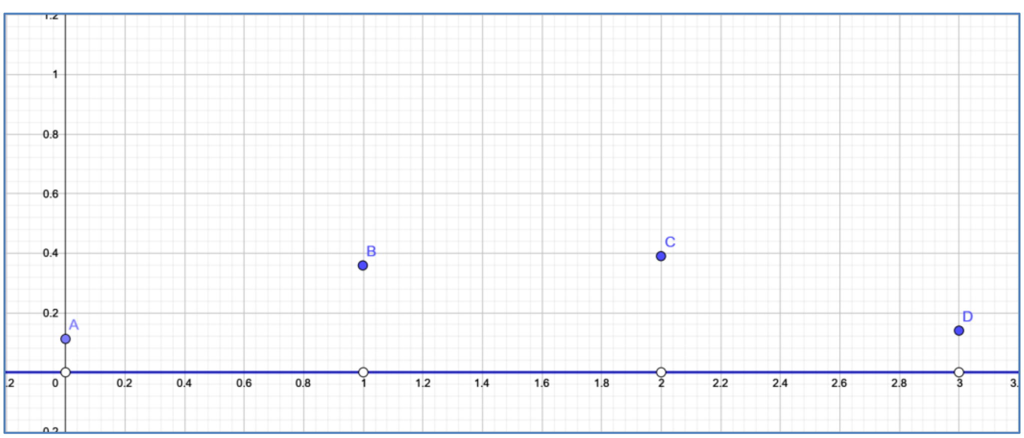


Figura 5.3.1. Función de densidad de probabilidad para una distribución binomial

La gráfica de la función de distribución de acumulación se describe en la Figura 5.3.2.

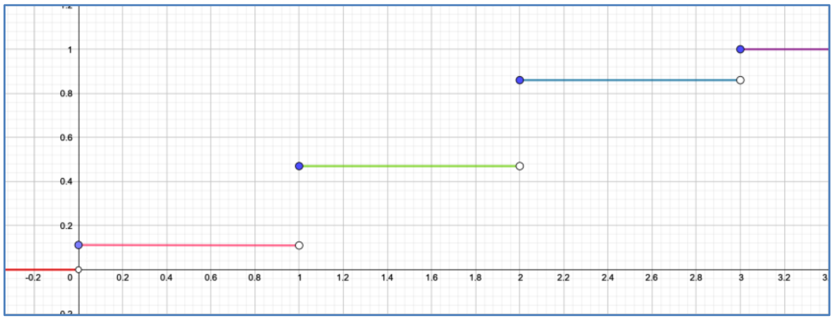


Figura 5.3.2. Función de distribución de acumulación para un proceso binomial

Para caracterizar completamente el elemento de la familia a la que pertenece, se calcula el valor esperado partiendo de la definición y la varianza por medio de la esperanza de la fórmula alterna.

- Valor esperado.

$$E[X] = \sum_x x f_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{3} x \binom{3}{x} (.52)^x (.48)^{3-x}$$

$$= 0\binom{3}{0}(.52)^0(.48)^{3-0} + 1\binom{3}{1}(.52)^1(.48)^{3-1} + 2\binom{3}{2}(.52)^2(.48)^{3-2}$$

$$+ 3\binom{3}{3}(.52)^3(.48)^{3-3}$$

$$= 0 + 3(.52)^1(.48)^2 + 2\cdot 3(.52)^2(.48)^1 + 3(.52)^3(.48)^0$$

$$= 3(.52)(.48)^2 + 2\cdot 3(.52)^2(.48) + 3(.52)^3$$

$$= (0.3594) + 2(0.3893) + 3(0.14) = 1.558$$

- Varianza. Por medio de la esperanza de X^2 se calcula la varianza.

$$E[X^2] = \sum_x x^2 f_x(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{3} x^2 \binom{3}{x} (.52)^x (.48)^{3-x}$$

$$= 0^2 \cdot \binom{3}{0} (.52)^0 (.48)^{3-0} + 1^2 \cdot \binom{3}{1} (.52)^1 (.48)^{3-1} + 2^2 \cdot \binom{3}{2} (.52)^2 (.48)^{3-2}$$

$$+ 3^2 \cdot \binom{3}{3} (.52)^3 (.48)^{3-3}$$

$$= 0 + 1 \cdot 3(.52)(.48)^2 + 4 \cdot 3(.52)^2(.48) + 9 \cdot (.52)^3$$

$$= 0.3594 + 4(0.3893) + 9(0.14)$$

$$= 0.3594 + 1.5572 + 1.26 = 3.1766$$

Ya con esta esperanza, se sustituye en la siguiente fórmula:

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

Sustituyendo:

$$Var[X] = 3.1766 - (1.558)^2$$

$$= 3.1766 - 2.427364$$

$$= 0.749236$$

El desarrollo que se hizo para este ejemplo en particular se puede generalizar, omitiendo las demostraciones de la esperanza y la varianza.

Se tiene una sucesión de n ensayos independientes Bernoulli con probabilidad de éxito p, para cada uno de éstos.

La variable aleatoria asociada es: $X =$ número de éxitos en n ensayos independientes Bernoulli.

Los valores que toma la variable aleatoria son: $x = 0,1,2, \dots, n$.

Entonces la variable aleatoria tiene una distribución binomial con parámetros n y p. En símbolos:

$$X \sim Bin(n, p)$$

La función de densidad de probabilidad para esta variable aleatoria está dada por:

$$f_X(x) = P[X = x] = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}; & si\ x = 0,1,2, \dots, n \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La función de distribución de acumulación está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{\substack{0 \leq u \leq x \\ u \in \mathbb{Z}}} \binom{n}{u} p^u (1-p)^{n-u} & 0 \leq x \leq n \\ 1 & x > n \end{cases}$$

El valor esperado y la varianza son dados, respectivamente por:

$$E[X] = np$$

$$Var[X] = np(1-p)$$

Para la función de distribución de acumulación se debe aclarar la notación que puede resultar confusa. Lo primero que se debe observar es que los valores que puede tomar la función son reales. Es decir, $x \in \mathbb{R}$. Para valores reales menores a cero o mayores a uno, que toma la función, ésta arroja como resultado cero o uno respectivamente.

El otro hecho es la notación cuando $0 \leq x \leq n$. Para cualquier valor real que tome la función de distribución acumulada, en este intervalo, se debe elegir el entero menor o igual a x. A este valor entero se le asignó la letra u. Por tanto, Los cálculos se deben realizar hasta el valor u; es decir, la suma se evaluará desde cero y hasta u.

5.1.4. Binomial Negativa

Una pareja está por casarse y desea una niña como única hija. El ginecólogo les explica que es posible, con probabilidad $.52$, que esto ocurra en el primer embarazo. Sin embargo, les informa que puede ser en el segundo embarazo si es que el primero fue un niño; o en el tercer embarazo si es que los dos primeros partos son niños. De esta forma, explica el ginecólogo, se puede continuar hasta que en un parto sea de una niña. Explique cómo serían los eventos si hasta en el quinto parto se obtiene una niña. Si se desean dos niñas y hasta el sexto parto se obtienen. Calcula las probabilidades en ambos casos.

Se aprecian ensayos independientes Bernoulli. En la primera situación se tiene, si se identifica como E al éxito (nacimiento de una niña) y como F al fracaso (nacimiento de un niño), entonces que se puede escribir como una sucesión de eventos: $FFFFE$. Ésta es la única combinación posible si hasta el quinto parto se obtiene una niña. Si la probabilidad es la misma que se ha asignado en todo el capítulo para los eventos niña y niño, $.52$ y $.48$ respectivamente, la probabilidad de una niña en el quinto nacimiento es:

$$(.48)^4(.52) = 0.276$$

Para la segunda situación, incluso, se tienen ensayos independientes Bernoulli. Si se toma la misma notación que en el párrafo anterior (F para niño y E para niña), se tienen varias combinaciones para el mismo evento, debido a que una niña puede nacer en el primer parto, o en el segundo, o en el tercero, o en el cuarto, y si nace en el quinto, entonces nacen en el quinto y sexto las niñas. Por tanto:

- Una niña en el primer y una en el último parto: $EFFFFE$.
- Una niña en el segundo y una en el último parto: $FEFFFE$.
- Una niña en el tercero y una en el último parto: $FFEFFE$.
- Una niña en el cuarto y una en el último parto: $FFFEFE$.

- Una niña en el quinto y una en el sexto parto: $FFFFEE$.

En la Tabla 5.4.1 se condensan estos resultados.

Parto	1	2	3	4	5	6
Combinación 1	niña	niño	niño	niño	niño	niña
Combinación 2	niño	niña	niño	niño	niño	niña
Combinación 3	niño	niño	niña	niño	niño	niña
Combinación 4	niño	niño	niño	niña	niño	niña
Combinación 5	niño	niño	niño	niño	niña	niña

Tabla 5.4.1. Resultados de dos niñas en seis partos

Si se asignan las probabilidades $.52$ y $.48$ para niña y niño respectivamente, la probabilidad de cada combinación es la misma, porque se tienen dos niñas y cuatro niños en cada combinación. Esto se muestra en la Tabla 5.4.2. Se observa en esta tabla que cada reglón contiene $.52$ multiplicando en dos ocasiones. Multiplica porque los ensayos son independientes y son dos porque el resultado pide dos partos que son niñas y cuatro que son niños; por esta razón son cuatro las veces que multiplica $.48$. Es posible tomar, por tanto, un sólo representante y multiplicarlo por el número de combinaciones que se pueden formar con estas condiciones.

Combinación	Probabilidades
1	$(.52)(.48)(.48)(.48)(.48)(.52)$
2	$(.48)(.52)(.48)(.48)(.48)(.52)$
3	$(.48)(.48)(.52)(.48)(.48)(.52)$
4	$(.48)(.48)(.48)(.52)(.48)(.52)$
5	$(.48)(.48)(.48)(.48)(.52)(.52)$

Tabla 5.4.2.

Probabilidades asignadas a las combinaciones dos niñas en seis partos

En símbolos:

$$5(.52)^2(.48)^4 = 0.07176$$

Surge una pregunta: ¿Cómo saber cuántas combinaciones hay de los diferentes eventos? Esto, en cualquier caso, o en el caso general. Siendo así, a continuación, se desarrolla la forma general.

Dada una sucesión de ensayos Bernoulli independientes de la forma: $EEFFEFFFEFF$ ...

La variable aleatoria X cuenta el número de fracasos antes de obtener r éxitos; $r \in \mathbb{N}$.

$X =$número de fracasos antes de obtener r éxitos; $r \in \mathbb{N}$.

Como ejemplo, se puede asignar a r el número tres. En otras palabras:

$$r = 3$$

Entonces:

$$X(EEE \dots) = 0$$

El número de fracasos, antes de obtener tres éxitos, es cero

$$X(FEEE \dots) = 1$$

El número de fracasos, antes de obtener tres éxitos, es uno con esta sucesión. Esta sucesión no es la única que cumple con obtener tres éxitos con un fracaso. Se tienen, incluso: $EFEE$ ... y $EEFE$ ...

$$X(FEFEFE) = 3$$

El número de fracasos, antes de obtener tres éxitos, es tres con esta sucesión. Al igual que en el ejemplo anterior, no es la única posibilidad de obtener tres éxitos con tres fracasos.

Para determinar completamente la distribución, son necesarios tres parámetros, a saber:

- x, el número de fracasos
- r, el número de éxitos
- p, la probabilidad asociada a cada evento.

Por esta razón, la notación es la siguiente:

$$X \sim Bin.neg(r, x, p)$$

La función de densidad de probabilidad está dada por la siguiente expresión:

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x; & x = 0,1,2,\ldots;\ r \in \mathbb{N} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La fórmula se puede entender como “se requieren r éxitos” y esto se asocia a p^r; para los fracasos se designa $(1-p)^x$, porque se tienen x fracasos y por ultimo las posibles combinaciones de todos los éxitos más los fracasos sabiendo que el ultimo es éxito y es fijo (por lo tanto, se resta una unidad) con los fracasos ocupando todas las posiciones desde el primer lugar hasta el penúltimo lugar.

La esperanza y la varianza se enuncian sin demostración.

- Esperanza de una variable aleatoria $Bin.neg(r, x, p)$.

  Si $X \sim Bin.neg(r, x, p)$, entonces $E[X] = r\left(\frac{1-p}{p}\right)$.

- Varianza de una variable aleatoria $Bin.neg(r,x,p)$.

  Si $X \sim Bin.neg(r,x,p)$, entonces $Var[X] = r\left(\frac{1-p}{p^2}\right)$.

Ejercicios.

1. Un laboratorio que produce vacunas contra el coronavirus, SARS-COV2, afirma que su producto es efectivo para 64% de los casos contra contagios. Calcule la probabilidad de infectarse y su valor esperado si se es vacunado con esta vacuna.

2. Considere, para el ejercicio anterior, que se vacunan 7 personas. Calcule la función de densidad de probabilidad, media y varianza de la nueva variable aleatoria.

3. Un futbolista es designado para tirar un penalti. Con base en la experiencia del ejecutante, la probabilidad de que acierte es $.85$. Calcule la probabilidad de éxito y la probabilidad de fracaso. ¿Cuál es la esperanza y la varianza de la variable aleatoria?

4. El futbolista del ejercicio anterior tiene una sesión de tiros penales. Él realiza cinco disparos. ¿Cuál es la variable aleatoria? Escriba la función de densidad de probabilidad y diga cuál es el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria.

5. Una persona invierte en la bolsa de valores por primera vez. Su principal temor es perder. La probabilidad de perder es de $.25$. Calcule la función de densidad de probabilidad para este caso y encuentre la función de distribución de acumulación. ¿Cuál es el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria?

6. Una fábrica produce un lote diario de productos. La probabilidad de que un producto sea defectuoso es de $.05$. Exhiba la función de densidad de probabilidad y calcule la esperanza y la varianza de la variable aleatoria.

7. En el ejercicio anterior suponga una muestra aleatoria de productos de tamaño 5 y exhiba la función de densidad de probabilidad. Calcule la probabilidad de que tres productos sean defectuosos. ¿Cuál es la media y la varianza de la variable aleatoria?

8. Una máquina solda chips en una de sus partes. Al realizar esta tarea la probabilidad de que no sea precisa en la soldadura es de $.01$. ¿Cuál es la probabilidad de que en seis chips dos sean defectuosos? ¿Qué en siete chips tres sean defectuosos?

5.2. Familias de variable aleatoria continua

En la sección anterior se explicó que las variables aleatorias continuas están relacionadas con mediciones. Éstas pueden ser de longitud, como la estatura o distancia; de tiempo; volumen o peso. La primera distribución que se aborda es la uniforme discreta que está relacionada con la precisión de cortes o de instrumentos, así como en la generación de números aleatorios cuando el intervalo es $[0,1]$. La segunda distribución continua que se trata está relacionada con el tiempo. Tiempo de espera en un banco o duración de la vida útil de un artefacto. La última, y más importante, es la distribución normal o gaussiana. Sus características la hacen única y es ampliamente utilizada en la estadística y el muestreo.

Como en el caso discreto, el camino que se seguirá es por medio de uno o varios ejemplos para después generalizar los conceptos.

5.2.1. Distribución Uniforme continua

La báscula con la que Doña Panchita pesa el azúcar en su tienda tiene un margen de error de ± 25 gramos y se distribuye de manera uniforme en este intervalo. Por tanto, cada kilo de azúcar pesado en esta báscula oscila entre 1.025 y 0.975 gramos. Calcule la probabilidad de que el kilo de azúcar que compre contenga 1000 gramos. Calcule la mediana.

Para calcular la probabilidad se necesita conocer la función de densidad de probabilidad. Lo que debe cumplir una función de densidad de probabilidad es:

- $f_X(x) \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

El intervalo en donde la función es distinta de cero es $(0.975, 1.025)$. Por distribuirse uniforme, significa que, para cada punto de ese intervalo la función asigna el mismo número o altura. Como conclusión, es un rectángulo. La base del rectángulo es:

$$1.025 - 0.975 = 0.05$$

El área de este rectángulo debe ser uno por la segunda condición que debe cumplir la función de densidad. Adicionalmente, se conoce la forma de calcular esta área (largo por alto) y uno de los lados.

Por lo anterior:

$$(largo) \cdot (alto) = 1$$

$$alto = \frac{1}{largo}$$

Sustituyendo:

$$f_X(x) = \frac{1}{1.025 - 0.975} = \frac{1}{0.05} = \frac{1}{\frac{5}{100}} = \frac{100}{5} = 20$$

En consecuencia:

$$f_X(x) = \begin{cases} 20 & si\ 0.975 \leq x \leq 1.025 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Esta función de densidad de probabilidad cumple con las dos condiciones: es mayor o igual a cero y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 20\, dx = 20x \Big|_{0.975}^{1.025} = 20(0.05) = 1$$

Observación. Cuando sea explícito en el problema que *se distribuye de manera uniforme en el intervalo*, no es necesario desarrollar la función de densidad de probabilidad; esto se construyó para deducir la fórmula. Sólo se debe sustituir en la fórmula que se obtenga cuando se desarrolle en forma general.

Con la función de densidad de probabilidad, se puede calcular la mediana. En otras palabras $P[X \leq x] = 0.5$:

$$\int_{0.975}^{x} 20du = 20u \Big|_{0.975}^{x} = 0.5$$

$$20x - 20(0.975) = 0.5$$

$$20(x - 0.975) = 0.5$$

$$x - 0975 = \frac{0.5}{20} = 0.025$$

$$x = 0.025 + 0.975 = 1$$

Por tanto, $P[X \leq 1] = 0.5$.

La variable aleatoria es la cantidad de azúcar que contiene una bolsa de un kilo pesada con la báscula de Doña Panchita. Se puede calcular (el ejercicio no lo pide) la función de distribución de acumulación, esperanza y varianza.

- Función de distribución de acumulación.

A partir de la definición se sustituye:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{0.975} 0du = \int_{0.975}^{x} 20du = 20u \Big|_{0.975}^{x}$$

$$= 20x - 20(0.975) = 20x - 19.5$$

Representa una recta con pendiente 20 y ordenada al origen -19.5. Inicia en el punto $(0.975,0)$ y termina en $(1.025,1)$. Escrita como una función escalonada, se tiene:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0.975 \\ 20x - 19.5 & si\ 0.975 \leq x < 1.025 \\ 1 & 1.025 \leq x \end{cases}$$

- Valor esperado

Partiendo de la definición:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

Sustituyendo:

$$= \int_{0.975}^{1.025} 20x dx = \frac{20}{2} x^2 \Big|_{0.975}^{1.025}$$

$$= 10x^2 \Big|_{0.975}^{1.025} = 10[(1.025)^2 - (0.975)^2]$$

$$= 10[1.050625 - 0.950625] = 10(0.1) = 1$$

- Varianza

Se utilizará la fórmula equivalente:

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

El valor esperado se ha calculado en el inciso anterior. Sólo resta calcular:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} 20x^2 dx = \int_{0.975}^{1.025} 20x^2 dx =$$

$$= \frac{20}{3} x^3 \Big|_{0.975}^{1.025} = \frac{20}{3}[(1.025)^3 - (0.975)^3] =$$

$$= \frac{20}{3}[1.076890625 - 0.926859375]$$

$$= \frac{20}{3}[0.15003125] = 1.000208$$

Por tanto, sustituyendo

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

$$Var[X] = 1.000208 - 1^2 = .000208$$

A continuación, se desarrolla el caso general para la distribución uniforme continua. Los parámetros de esta distribución (lo mínimo que se debe conocer para construir la distribución) son a y b; los extremos del intervalo.

Si una variable aleatoria X toma valores dentro de un intervalo $[a, b]$, a y b cumplen con $-\infty < a < b < \infty$, y la función de densidad de probabilidad asigna $\frac{1}{b-a}$, a cada x del intervalo; entonces la variable aleatoria se distribuye de forma uniforme continua en el intervalo. En símbolos:

$$X \sim U(a, b)$$

Si se multiplica (o se integra $\frac{1}{b-a}$) la distancia del intervalo con la altura de la función se obtiene uno.

La función de densidad de probabilidad, por lo descrito en los párrafos anteriores (Figura 5.5.1) es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}; & si\ a < x < b \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La función de distribución acumulada se obtiene integrando la función de densidad de probabilidad:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{du}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{x} du = \frac{1}{b-a} \left[u \Big|_{a}^{x} \right] =$$

$$= \frac{x-a}{b-a}$$

En otras palabras: $F_X(x) = \begin{cases} 0; & si\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a}; & si\ a \leq x \leq b \\ 1; & si\ b < x \end{cases}$

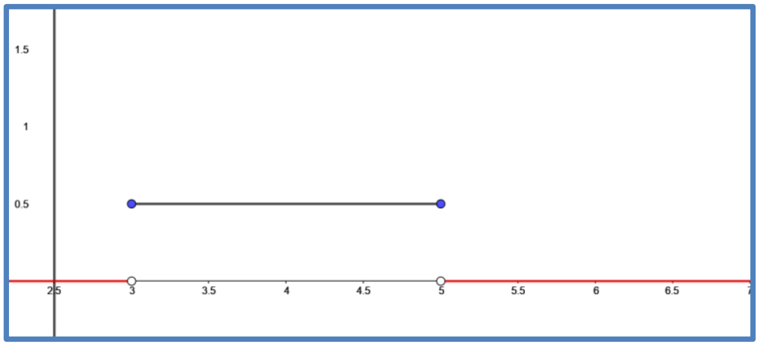


Figura 5.5.1.

Función de densidad de probabilidad de una distribución uniforme discreta

En la Figura 5.5.2 se puede observar la gráfica de esta función para $a = 3$ y $b = 5$.

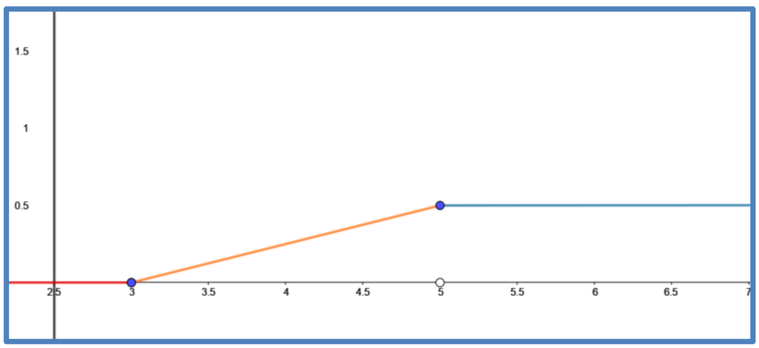


Figura 5.5.2.

Función de distribución de acumulación de una distribución uniforme continua

El valor esperado se calcula a partir de la definición.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Sustituyendo:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} x dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_a^b \right] = \frac{1}{2(b-a)} [b^2 - a^2] =$$

$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Este valor es el punto medio del intervalo.

Para la varianza se encuentra el valor de $E[X^2]$, para utilizarlo en la forma alternativa de la varianza: $Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$. Siendo así:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \Big|_a^b \right] = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} + \frac{-b^2 - 2ab - a^2}{4} =$$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \cdot \frac{4}{4} + \frac{-b^2 - 2ab - a^2}{4} \cdot \frac{3}{3} =$$

$$= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2}{12} + \frac{-3b^2 - 6ab - 3a^2}{12} =$$

$$= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2}{12} = \frac{4b^2 - 3b^2 + 4ab - 6ab + 4a^2 - 3a^2}{12} =$$

$$= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

5.2.2. Distribución exponencial

La distribución exponencial se asocia con el tiempo de espera (por ejemplo, el tiempo de espera para ser atendido en una fila de espera) o vida útil de un artefacto (como una máquina o un foco). Si se observa la gráfica de una función exponencial se puede entender el porqué. En la Figura 5.6.1 se presenta una gráfica de este tipo. Se aprecia que *decae*. En otras palabras, el área bajo la gráfica (o la altura de la función) conforme se avanza hacia la derecha (cuando el tiempo transcurre), se hace menor (o la altura de la gráfica se aproxima al eje X). Esto es lo que se desea cuando se encuentra en una fila de espera, que conforme transcurre el tiempo, éste sea menor para ser atendido. En el caso de maquinaria o artefactos, conforme transcurre el tiempo los componentes sufren desgaste y es más probable que fallen.

A continuación, se desarrollan dos ejemplos y con base en éstos se construye la distribución teórica.

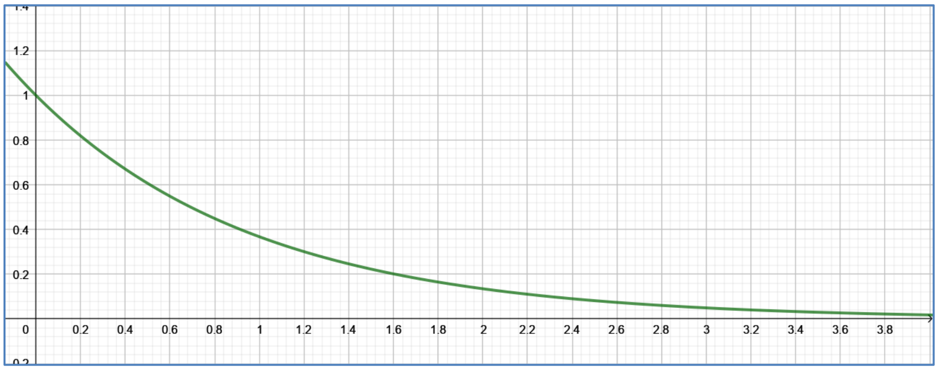


Figura 5.6.1 Exponencial negativa con $\lambda = 1$

Ejemplo: El tiempo de espera en un banco, en promedio, es de 10 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente espere más de quince minutos? ¿Qué espere entre cinco y diez minutos?

La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria está dada, en general, por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}; & si\ o \leq x \\ 0; & en\ otro\ caso \end{cases}$$

El parámetro λ, debe ser estrictamente mayor a cero ($\lambda > 0$). El valor esperado, que será demostrado cuando se desarrolle la distribución en general, es:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

En el ejercicio se especifica que el valor esperado es 10, en tal caso:

$$10 = \frac{1}{\lambda} \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{10}$$

Sustituyendo en la función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x}; & si\ o \leq x \\ 0; & en\ otro\ caso \end{cases}$$

En el ejemplo se pide, en la primera pregunta:

$$P[15 < X] = \int_{15}^{\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x} dx$$

$$= \frac{1}{10} \int_{15}^{\infty} e^{-\frac{1}{10}x} dx$$

$$= \frac{1}{10} \left[-10e^{-\frac{1}{10}x} \Big|_{15}^{\infty} \right]$$

$$= -\left[e^{-\frac{1}{10}x} \Big|_{15}^{\infty} \right] = -0 + e^{-\frac{15}{10}} = e^{-\frac{15}{10}} =$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4.481689} = .22313$$

La segunda pregunta, los índices de integración deben ser: el inferior cinco y el superior quince:

$$P[5 \leq x \leq 15] = \int_{5}^{15} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}} dx$$

$$= \frac{1}{10} \int_{5}^{15} e^{-\frac{1}{10}x} dx$$

$$= \frac{1}{10} \left[-10e^{-\frac{1}{10}x} \Big|_{5}^{15} \right] = -e^{-\frac{1}{10}x} \Big|_{5}^{15}$$

$$= -e^{-\frac{15}{10}} + e^{-\frac{5}{10}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1.648721} - \frac{1}{4.481689}$$

$$= 0.60653 - 0.22313 = 0.3834$$

Ejemplo: Una empresa produce focos y garantiza su vida media en 2000 horas. Calcule la probabilidad que dure más de 2000 horas. Adicional, calcule que no dure 1000 horas y la mediana.

Como en el ejercicio anterior, se tomará por cierta la igualdad:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Sin embargo, en el caso general se demuestra. Sustituyendo:

$$2000 = \frac{1}{\lambda} \implies \lambda = \frac{1}{2000}$$

La función de densidad de probabilidad se convierte en:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2000} e^{-\frac{1}{2000}x}; & si\ o \leq x \\ 0; & en\ otro\ caso \end{cases}$$

El evento que dure más de 2000 horas, se calcula:

$$P[2000 < X] = \frac{1}{2000} \int_{2000}^{\infty} e^{-\frac{x}{2000}} dx$$

$$= -e^{-\frac{x}{2000}} \Big|_{2000}^{\infty} = e^{-1} = \frac{1}{e} = 0.367879$$

En la segunda pregunta se pide que el foco empiece a funcionar hasta las 1000 horas. Siendo así:

$$P[0 \leq X \leq 1000] = \int_{0}^{1000} \frac{1}{2000} e^{-\frac{x}{2000}} dx$$

$$= -e^{-\frac{x}{2000}} \Big|_{0}^{1000} = 1 - e^{-\frac{1000}{2000}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = 1 - 0.606530 = 0.3934$$

En la tercera parte, se debe igualar la probabilidad a 0.5:

$$P[0 \leq X \leq x] = 0.5$$

Sustituyendo:

$$\int_{0}^{x} \frac{1}{2000} e^{-\frac{x}{2000}} dx = 1 - e^{-\frac{x}{2000}} = 0.5$$

$$1 - 0.5 = e^{-\frac{x}{2000}}$$

$$0.5 = e^{-\frac{x}{2000}}$$

$$ln(0.5) = -\frac{x}{2000}$$

$$-2000(-0.693147) = x$$

$$x = 1386.29$$

Con base en los ejemplos anteriores, se especifican los valores de la distribución exponencial. Se dice que una variable aleatoria se distribuye exponencial con parámetro $\lambda > 0$ y se escribe:

$$X \sim exp(\lambda)$$

Si tiene función de densidad de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}; & si\ o \leq x \\ 0; & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La función de distribución de acumulación está dada por el cálculo de:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

$$= \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda u}du = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda u}du$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda u} \Big|_{0}^{x} \right] = -e^{-\lambda x} + e^{-\lambda(0)}$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

Siendo así:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0; & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}; & si\ 0 \leq x \end{cases}$$

El valor esperado se calcula a partir de la definición:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

Sustituyendo:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

Esta integral se resuelve por partes:

$$u = x, \Longrightarrow du = dx$$

$$dv = \int \lambda e^{-\lambda x} dx \Longrightarrow v = -e^{-\lambda x}$$

Sustituyendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Para la varianza se utiliza la fórmula alternativa: $Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$. Siendo así, sólo se debe calcular:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda x^2 \, e^{-\lambda x} dx$$

Esta integral, también se resuelve por partes:

$$u = x^2, \Longrightarrow du = 2x dx$$

$$dv = \int \lambda e^{-\lambda x} dx \Longrightarrow v = -e^{-\lambda x}$$

Sustituyendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda x^2 \, e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x} dx$$

$$= 2\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx = 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)\int_0^{\infty} \lambda xe^{-\lambda x}$$

La última integral es el valor esperado de la variable aleatoria. Por tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda x^2\, e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

Sustituyendo en la fórmula alternativa de la varianza:

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

5.2.3. Distribución Normal

Seguramente, se ha escuchado en radio, televisión o algún medio de comunicación, que *se distribuye normal* o que el candidato no puede declararse ganador debido a que no es posible dar una tendencia, la responsable es esta distribución.

Es tan versátil que se encuentra en muestreo, pruebas de hipótesis, teoría de las decisiones, intervalos de confianza; en otras palabras, en casi todas las áreas de la estadística.

A diferencia de las distribuciones anteriores, los ejemplos vienen después de un poco de teoría. Lo anterior, debido a que para demostrar el valor esperado y la varianza se necesita una teoría matemática que se encuentra fuera del fin de este escrito.

Si se determina que una variable aleatoria X se distribuye normal, los parámetros que se necesitan conocer o proporcionar para determinar completamente la distribución son su valor esperado o media, μ; y la varianza σ^2. Para denotar que una variable aleatoria se distribuye normal con media μ y varianza σ^2 se escribe como:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

La función de densidad de probabilidad para esta distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; -\infty < \mu < \infty \quad \sigma > 0$$

La función de distribución de acumulación, por lo anterior, está dada por:

$$F_X(x) = P[X < x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

La pregunta es: cómo se calcula la función o cómo resolver la integral. Existen tablas para $N(0,1)$, pero no todas las variables se distribuyen de esta forma. Sin embargo, con esto en mente, ¿se podrá transformar cualquier $N(\mu, \sigma^2)$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$; en una $N(0,1)$? Y, de esta forma, utilizar las tablas de esta distribución. La Figura 5.7.1 muestra tres distribuciones, $N(3, .25)$, $N(3,1)$ y $N(3, 4)$; resaltadas en rojo, verde y azul respectivamente.

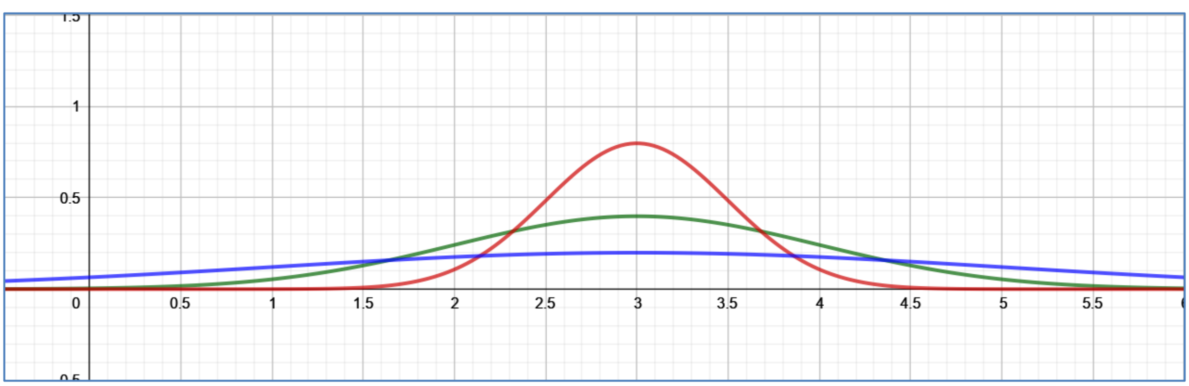


Figura 5.7.1. $N(3, .25)$**, en rojo;** $N(3, 1)$**, en verde;** $N(3, 4)$**, en azul**

Si estas distribuciones se recorren (se trasladan) hacia el origen su media seria: $\mu = 0$. La manera matemática de hacerlo es restando a la variable la media.

La forma que presentan las gráficas de las tres normales es parecida. Para lograr que se haga delgada o se haga más gruesa es dividiendo entre la desviación estándar. Con estos procesos se puede obtener una $N(0,1)$ a partir de cualquier $N(\mu, \sigma^2)$. El proceso es el siguiente: Dada una distribución normal con media μ y varianza $\sigma^2 > 0$, la probabilidad de que la variable aleatoria se encuentre entre a y b es equivalente a:

$$P[a \leq X \leq b] = P[a - \mu \leq X - \mu \leq b - \mu]$$

Con esto se recorre a cero la media y la distribución por completo.

$$P[a - \mu \leq X - \mu \leq b - \mu] = P\left[\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right]$$

Dividiendo entre $\sigma > 0$ se engrosa o se adelgaza la gráfica de la función, según sea el caso. Sea $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, entonces:

$$Z \sim N(0,1)$$

Con esta transformación, es posible utilizar las tablas de una $N(0,1)$ para calcular la probabilidad de cualquier $N(\mu, \sigma^2)$.

Dos hechos son necesarios para realizar el cálculo de cualquier probabilidad basándose en tablas de una $N(0,1)$. La primera está relacionada con el cómputo de:

$$P[a \leq X \leq b]$$

Este resultado se cumple para cualquier función de distribución acumulada. Se demuestra en el caso continuo:

$$P[X \leq b] = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx + \int_{a}^{b} f_X(x)dx$$

Si $a < b$.

Despejando:

$$\int_{a}^{b} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx$$

Sustituyendo:

$$P[a \leq X \leq b] = P[X \leq b] - P[X \leq a]$$

Proposición 5.7.1

Si $a < b$, entonces $P[a \leq X \leq b] = P[X \leq b] - P[X \leq a]$

La segunda es para una $N(0,1)$. Como la curva es simétrica con respecto al origen, entonces:

$$P[Z \leq -a] = P[a \leq Z]$$

Es decir:

$$\int_{-\infty}^{-a} f_Z(z)dz = \int_{a}^{\infty} f_Z(z)dz$$

Pero la última integral es igual, por complementos, a:

$$1 - \int_{-\infty}^{a} f_Z(z)dz$$

Por tanto, se tiene:

$$P[Z \leq -a] = 1 - P[Z \leq a]$$

Proposición 5.7.2

Sea Z una variable aleatoria normal, tal que $Z \sim N(0,1)$, con función de densidad de probabilidad $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{z^2}{2}}$. Entonces

$$P[Z \leq -a] = 1 - P[Z \leq a]$$

Como conclusión de la proposición anterior, se afirma que sólo es necesario conocer valores positivos de la abscisa de una $N(0,1)$ para encontrar la probabilidad acumulada o área bajo la curva; porque para valores negativos esta proposición soluciona el cálculo. Con la herramienta desarrollada, es posible resolver los ejemplos siguientes.

Ejemplo 1. En un grupo de alumnos se mide la estatura de cada uno y se encuentra que la media es de 170cm con una varianza de 4cm. Obtenga la probabilidad de que los alumnos midan más de 175cm. Que se encuentren entre 165 y 175cm.

Para la primera pregunta se tiene:

$$P[X \geq 175] = 1 - P[X \leq 175]$$

Por complementos

$$= 1 - P\left[\frac{X - 170}{2} \leq \frac{170 - 175}{2}\right]$$

Estandarizando (convirtiendo una $N(\mu, \sigma^2)$ en $N(0,1)$):

$$= 1 - P\left[Z \leq \frac{-5}{2}\right] = 1 - \left[1 - P[Z \leq 2.5]\right]$$

Utilizando la Proposición 5.7.2:

$$= P[Z \leq 2.5] = 0.994$$

Valor en tabla de una $N(0,1)$ (Apéndice A)[4].

Para la segunda:

$$P[165 \leq X \leq 175] = P[X \leq 175] - P[X \leq 165]$$

Por la Proposición 5.7.1

$$= P\left[\frac{X - 170}{2} \leq \frac{175 - 170}{2}\right] - P\left[\frac{X - 170}{2} \leq \frac{165 - 170}{2}\right]$$

Estandarizando

$$= P\left[Z \leq \frac{5}{2}\right] - P\left[Z \leq \frac{-5}{2}\right] = P[Z \leq 2.5] - P[Z \leq -2.5]$$

$$= P[Z \leq 2.5] - \left[1 - P[Z \leq 2.5]\right]$$

[4] Tabla reproducida de Hogg, R. V. y Craig, A. T. (1978). *Introduction to Mathematical Statistics*. New York, USA: Macmillan Publishing Co.

Utilizando la Proposición 5.7.2

$$= 2P[Z \leq 2.5] - 1 = 2(0.994) - 1$$

$$= 0.988$$

En el ejemplo anterior, se utilizó la tabla para una $N(0,1)$ que se encuentra en el Apéndice A. Esta tabla tiene dos columnas. En la primera se encuentra la abscisa y en la segunda el área bajo la curva o probabilidad acumulada.

De esta forma, si se desea encontrar la probabilidad acumulada hasta el valor 2.5, se debe buscar en la columna de las abscisas. Es decir, se tiene:

$$P[Z \leq 2.5]$$

Entonces se busca el valor 2.5 en la primera columna que es donde aparece la letra x. En el mismo renglón y en la columna $N(x)$, aparece el valor que se desea, la probabilidad acumulada hasta esta abscisa. Por tanto:

$$P[Z \leq 2.5] = .994$$

En forma general y para esta tabla, la columna de la izquierda contiene las abscisas (x) y en la de la derecha $(N(x))$ se encuentran las probabilidades acumuladas hasta esta abscisa. Siendo así, sólo se debe encontrar la abscisa, y en el mismo reglón se encuentra la probabilidad acumulada.

En el siguiente ejemplo se le solicita al lector justificar cada paso de la misma forma que en el ejemplo anterior y buscar el valor que se utiliza en la tabla del Apéndice A.

Ejemplo 2. Un despachador de gasolina es probado por la autoridad competente. El distribuidor asegura que la media es 1000ml con una desviación estándar de 4ml. ¿Cuál es la probabilidad de que el despachador distribuya entre 996 y 1004ml?

$$P[992 \leq X \leq 1008] = P\left[\frac{996-1000}{4} \leq \frac{X-1000}{4} \leq \frac{1004-1000}{4}\right] =$$

$$P\left[-\frac{4}{4} \leq Z \leq \frac{4}{4}\right] = P[-1 \leq Z \leq 1] =$$

$$= P[Z \leq 1] - P[Z \leq -1] = P[Z \leq 1] - \big[1 - P[Z \leq 1]\big] =$$

$$= 2P[Z \leq 1] - 1 = 2(0.841) - 1$$

$$= 0.682$$

Ejemplo 3. Si X se distribuye $N(\mu, \sigma^2)$, encuentre b tal que $P\left[-b < \frac{(X-\mu)}{\sigma} < b\right] = 0.90$.

En este ejemplo se invierte la búsqueda en la tabla del Apéndice A. Se tiene la probabilidad acumulada (0.90), que se encuentra en la columna derecha con encabezado $N(x)$, y se debe buscar la abscisa en la columna izquierda, marcada con la letra x, en el mismo reglón donde se encuentra la probabilidad acumulada. El valor que está relacionado con la probabilidad acumulada de 0.90 es: 1.282. Por tanto, $b = 1.282$ y se tiene:

$$P\left[-1.282 < \frac{(X-\mu)}{\sigma} < 1.282\right] = 0.90$$

Ejercicios.

1. Sea $Z \sim N(0,1)$. Hallar:

   a) $P[Z \leq 1.96]$

   b) $P[Z \leq -1.96]$

   c) $P[-1.5 < Z < 1.5]$

2. Sea $X \sim N(6,16)$. Encuentre:

   a) $P[X < 10]$

   b) $P[X < 14]$

   c) $P[10 < X < 14]$

3. Si $X \sim N(48,25)$, calcule:

   a) $P[51 < X]$

   b) $P[35.5 < X < 48]$

   c) $P[40 < X < 48]$

4. Sea $Z \sim N(0,1)$. Encuentre la abscisa que cumple con:

   a) $P[Z < z] = 0.599$

   b) $P[Z < z] = 0.802$

   c) $P[Z < z] = 0.939$

   d) $P[Z < z] = 0.989$

5. El peso de una manada de vacas se distribuye $N(750, 400)$. El propietario elige vender un espécimen de la manada. Calcule la probabilidad de que pese más de 790kg. Que el peso de la vaca esté entre 730 y 770kg.
6. La longitud media del camarón *Potimirin mexicana* es de 14mm con una desviación estándar de 4mm. Se elige un individuo de la población. Determine la probabilidad de que la longitud de este individuo se encuentre entre $12\ y\ 17$mm. Su longitud sea mayor a 15mm. La longitud sea menor a 10mm.
7. El llenador de refrescos de cola de una compañía está calibrado con una media de 355ml y una desviación estándar de 5ml. La autoridad responsable de certificar la calibración se pregunta si está fuera de rango. ¿Qué probabilidades debe calcular? ¿Cuál es esta probabilidad?

Bibliografía

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Granada, España: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Batanero, C., Ortiz, J. J. y Serrano L. (2007). *UNO: Revista de didáctica de las Matemáticas*, 44, 7-16.

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S. y Sánchez E. (2016). *Research on teaching and learning Probability*. Doi: 10.1007/978-3-319-31625-3.

Cárdenas, H., Lluis, E., Raggi, F. y Tomás F. (1986). Álgebra superior. México: Trillas.

Canavos, G. C. (1988). *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y métodos*. México: McGraw Hill.

Feller, W. (1968). *An introduction to Probability theory and its applications*. New York, USA: John Wiley and Sons.

Hawkins, L., Eardley, F., Lloyd, S., Young, G., Tarpey, S. (2018). *Cambridge Lower Secondary SCIENCE STAGE 9: STUDENT'S BOOK.* London, England: Collins.

Hogg, R. V. y Craig, A. T. (1978). *Introduction to Mathematical Statistics*. New York, USA: Macmillan Publishing Co.

Mendenhall, W., Beaver, R. J. y Beaver, B. M. (2010). *Introducción a la Probabilidad y Estadística*. México: Cengage.

Mendoza, L. (2016). *Aplicación de TIC para reforzar la enseñanza de la Estadística en el bachillerato*. Tesis para optar por el grado de maestra en docencia para la educación media superior (Matemáticas). Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México. México.

Mood, A. M., Graybill, F. A. y Boes, D. C. (1974). *Introduction to the theory of Statistics*. USA: McGraw Hill

Ross, S. M. (1989). *Introduction to Probability Models*. San Diego, CA, USA: Academic Press.

Ross, S. M. (2010). *A first course in Probability*. Upper Saddle, New Jersey, USA: Pearson Prentice Hall

Rincón, L. (2007). *Curso elemental de Probabilidad*. México: UNAM.

Rincón, L. (2014). *Introducción a la Probabilidad*. México: UNAM.

Vilenkin, N (1972). *¿De cuántas formas?* Moscú, URSS: Mir.

Apéndice A.

Tabla de valores Distribución Normal.

x	$N(x)$	x	$N(x)$	x	$N(x)$
0.00	0.500	1.10	0.864	2.05	0.980
0.05	0.520	1.15	0875	2.10	0.982
0.10	0.540	1.20	0.885	2.15	0.984
0.15	0.560	1.25	0.894	2.20	0.986
0.20	0.579	1.282	0.900	2.25	0.988
0.25	0.599	1.30	0.903	2.30	0.989
0.30	0.618	1.35	0.911	2.326	0.990
0.35	0.637	1.4	0.919	2.35	0.991
0.40	0.655	1.15	0.926	2.40	0.992
0.45	0.674	1.50	0.993	2.45	0.993
0.50	0.691	1.55	0.939	2.50	0.994
0.55	0.709	1.60	0.945	2.55	0.995
0.60	0.726	1.645	0.950	2.576	0.995
0.65	0.742	1.65	0.951	2.60	.0995
0.70	0.758	1.70	0.955	2.65	0.996
0.75	0.773	1.75	0.960	2.70	0.997
0.80	0.788	1.80	0.964	2.75	0.997
0.85	0.802	1.85	0.968	2.80	0.997
0.90	0.816	1.90	0.971	2.85	0.998
0.95	0.829	1.95	0.974	2.90	0.998
1.00	0.841	1.960	0.975	2.95	0.998
1.05	0.853	2.00	0.977	3.00	0.999

Apéndice B.

Soluciones a ejercicios.

Capítulo 3. Páginas 25, 26 y 27.

1.
   a) Para resolverlo, hay que recordar que se debe poner explícitamente los elementos que componen el conjunto, así se tiene: A={a,h,i,m,o,p,t}. Adicional a lo anterior, los elementos repetidos no se escriben.
   b) Se debe resolver la condición para encontrar que números cumplen con ésta:

$$2 - x = 4$$
$$2 - 2 - x = 4 - 2$$
$$-x = 2$$
$$x = -2$$

   Por tanto, el conjunto es: $B = \{-2\}$

2.
   a) Verdadero. El orden de los elementos no afecta en el conjunto.
   b) Verdadero. Los elementos repetidos no se incluyen
   c) Verdadero. El conjunto vacío, es por definición, subconjunto de cualquier conjunto
   d) Falso. El conjunto vacío no es un elemento.
   e) Falso. El conjunto vacío no contiene elementos.
   f) Verdadero. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

3.
   a) $A = B$. $A \subset B$ y $B \subset A$.
   b) $A = C$. $A \subset C$ y $C \subset A$.
   c) $A = D$. $A \subset D$ y $D \subset A$.

4. Ejercicio para el lector

5.
   a) $\{x \in \Omega: x \text{ es indígena y es mujer}\}$
   b) $\{x \in \Omega: x \text{ es hombre y campesino}\}$
   c) $\{x \in \Omega: x \text{ es indígena, mujer y joven}\}$

6.
   a) Verdadero. Es una de las Leyes distributivas
   b) Falso. Aplicando la ley distributiva del inciso anterior: $(A \cup B) \cap \emptyset = \emptyset$
   c) Falso.
   d) Falso. LA primera parte se cumple por las Leyes de D´Morgan
   e) Falso. Apíquese las Leyes de D´Morgan y dos veces la distibutiva.

7. En todos los incisos aplicar las Leyes Distributivas.
   a) A.
   b) $A \cap B$. Utilizar la conmutatividad y asociatividad de la intersección con el inciso anterior.
   c) $B \cup (A \cap C)$

8.
   a) $\{0,2,3,4,5,6,8\}$
   b) $\{1,6,7,9\}$
   c) C
   d) $\{2,4\}$
   e) $\emptyset$
   f) $\{2,4,6\}$

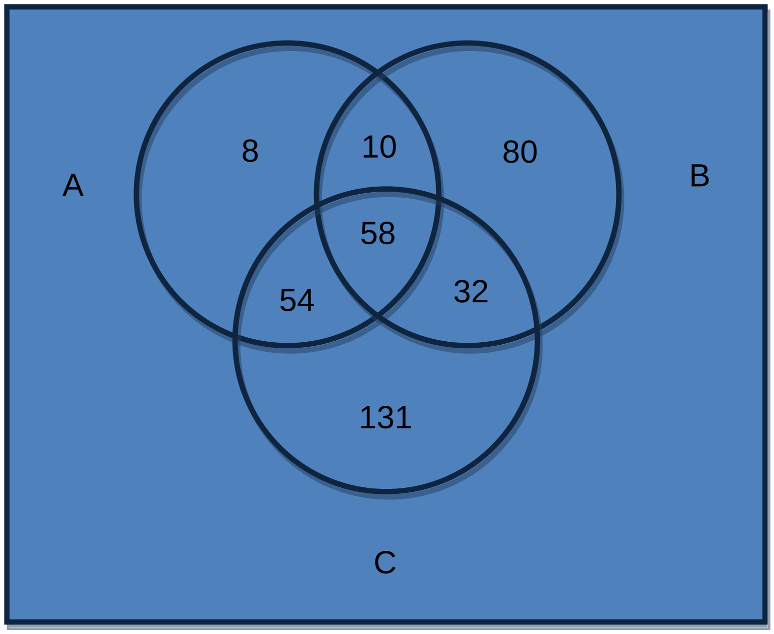
9. Ω

10.
   a) Utilizar las Leyes distributivas
   b) Utilizar las Leyes distributivas

Capítulo 3. Páginas 29 y 30.

1.
   a) 100
   b) 140
   c) 60
   d) 60

2. Para resolverlo, se hizo el siguiente diagrama de Venn



Conjunto	Descripción	Cardinalidad
A	Desayuno	130
B	Almuerzo	180
C	Comida	275
$A \cap B$	Desayuno y Almuerzo	68
$A \cap C$	Desayuno y Comida	112
$B \cap C$	Almuerzo y Comida	90
$A \cap B \cap C$	Desayuno, Almuerzo y Comida	58

a) Hacen por lo menos una comida. Este enunciado se traduce como: hacen una o hacen dos o hacen tres comidas.

$$\#(A) + \#(B) + \#(C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C) =$$
$$130 + 180 + 275 - 68 - 112 - 90 + 58 = 373$$

b) Hacen exactamente una comida

$$8 + 80 + 131 = 219$$

c) Hacen sólo la Comida

$$131$$

Capítulo 3. páginas 33,34,35,36,37 y 38.

1. $\Omega = \{m, m+1, m+2, \dots, M\}$

2. A: Utiliza camión y taxi
   B: Utiliza automóvil y colectivos
   C: Utiliza camión, a pie y bicicleta
   D: Utiliza Automóvil, a pie, taxi y colectivos

3. $\#(A) + \#(B) + \#(C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C) =$
   $$20 + 23 + 18 - 15 - 12 - 14 + \#(A \cap B \cap C) = 30$$
   $$\#(A \cap B \cap C) = 30 - 20 = 10$$

4. $A^C \cap B^C \cap C^C$

5. $A^C \cup B \cup C^C$

6. $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (5,5)\}$ son 25 puntos muestrales

7. $\Omega = \{O+,\ O-,\ A+,\ A-,\ B+,\ B-,\ AB+,\ AB\ -\}$

8.
   a) $\Omega = \{(B,f), (B,c), (B,i), (M,f), (M,c), (M,i), (A,f), (A,c), (A,i)\}$
   b) $E_1 = \{(B,f), (M,f), (A,f)\}$
   c) $E_2 = \{(M,c), (A,c)\}$Sd
   d) $E_3 = \{(B,c), (B,i), (M,c), (M,i)\}$

9.
   a) Si la báscula soporta un kilogramo, entonces
   $$\Omega = \{x \in \mathbb{N}: 1 \leq x \leq 1000\} = \{1,2,3, \dots, 1000\}$$
   b) $A \cup B = \{x \in \mathbb{N}: x \leq 15\}$
   c) $A \cap B = A = \{x \in \mathbb{N}: x < 11\}$
   d) $A^C = \{x \in \mathbb{N}: 11 \leq x \leq 1000\}$
   e) $A \cup B \cup C = A \cup B$
   f) $(A \cup C)^C = \{x \in \mathbb{N}: x \geq 12\}$
   g) $A \cup (B \cap C)^C = \{x \in \mathbb{N}: x < 11\} \cup \{x \in \mathbb{N}: 12 \leq x < 1000\}$

10.

a) Elabore un diagrama de árbol para encontrar los puntos muestrales. Sea B la esfera de color blanco y R la de color rojo, entonces

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (R,R,R,R,R);\ (R,R,R,R,B);\ (R,R,R,B,R);\ (R,R,R,B,B); \\ (R,R,B,R,R);\ (R,R,B,R,B);\ (R,R,B,B);\ (R,B,R,R,B); \\ (R,B,R,R,R,);\ (R,B,R,B,R);\ (R,B,R,B,B);\ (R,B,B); \\ (B,B);\ (B,R,R,R,R);\ (B,R,R,R,B);\ (B,R,R,B,R); \\ (B,R,R,B,B);\ (B,R,B,R,R);\ (B,R,B,R,B);\ (B,R,B,B) \end{array} \right\}$$

b) $\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (a,a,a);\ (a,a,s);\ (a,s,a);\ (s,a,a); \\ (a,s,s);\ (s,a,s);\ (s,s,a);\ (s,s,s) \end{array} \right\}$

c) Si el ojo del monito fuera capaz de percibir todos los destellos, entonces

$$\Omega = \{1,2,3,\ldots\}$$

d) $\Omega = \{\text{sección } 1, \text{sección } 2, \text{sección } 3, \text{sección } 4\}$

11.

a) $F \cap E^C \cap G^C$

b) $E \cap F \cap G^C$

c) $E \cup F \cup G$

d) $(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (F \cap G)$

e) $E \cap F \cap G$

f) $(E \cup F \cup G)^C = E^C \cap F^C \cap G^C$

12. Escriba los 36 puntos muestrales y observe cuales cumplen cada inciso

13. Análogo al ejercicio 11

14. Análogo al ejercicio 11

Capítulo 3. Páginas 46,47

1.
   a) $\frac{1}{6}$
   b) $\frac{5}{6}$
   c) 1

2.
   a) 27%
   b) 89.5%

3. Este ejercicio se plantea igual que "*la paradoja de los cumpleaños*".
   a) El evento es: al menos dos tengan el mismo signo. Se calcula el complemento de este evento.
   El evento que se calcula entonces es: Ninguno coincida en signo zodiacal (que nadie tenga el mismo signo).
   $n = 5$, para este caso. La primera persona (si se consideran los signos como "cajones" en donde pueden caer las personas) puede elegir cualquier signo de los 12. Análogamente para cada uno de los cuatro restantes. Por tanto, los casos totales son:
   $$12(12)(12)(12)(12) = 12^5$$
   Para los casos a favor, la primera persona "elige" una casilla. Como se está calculando el evento: Ninguno coincida, la segunda persona no puede elegir la misma casilla que la primera. Entonces tiene 11 opciones. Asimismo, la tercera persona no puede elegir ninguna de las dos casillas anteriores, por lo que tiene sólo 10 lugares para elegir. Se continúa de esta forma y se obtiene:
   $$12(11)(10)(9)(8)$$
   Realizando el cociente:
   $$0.38$$
   Como se calculó el complemento del evento, se debe utilizar la formula correspondiente:
   $$P[E] = 1 - 0.38 = .62$$

   b) Se deja al estudiante.

4. $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15} = 0.068$

Capítulo 3. Página 50.

1. 15.
2. 24.

Capítulo 3. Página 54 y 55.

1. $8! = 40320$
2. $7^7 = 823543$
3. $5^2 = 25$
4. Si se permite iniciar la placa con el cero: $17\ 576\ 000$
5. 35
6. 72
7. 24
8. 190
9. 120
10. 48
11.
    a) $(8-1)! = 7! = 5040$
    b) $(8-3)! = 5! = 120$
    c) 1152

12. Se deja al lector.

Capitulo 3. Página 62 y 63.

1. $\frac{1}{2}$
2.
    a) 0.4973
    b) Se deja al lector.

3.
    a) 0.5433
    b) 0.5444
    c) 0.4545

Capítulo 5. Página 89

1. $F_X(x)\begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{6} & si \ \ 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{3} & si \ \ 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{2} & si \ \ 3 \leq x < 4 \\ \frac{2}{3} & si \ \ 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6} & si \ \ 5 \leq x < 6 \\ 1 & si \quad\quad 6 < x \end{cases}$

$$E[X] = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}, \qquad Var[X] = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}$$

2. $f_X = \begin{cases} \frac{1}{56} & si\ x = 1,2,\dots,56 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

$$E[X] = \frac{56+1}{2} = \frac{57}{2}, \quad Var[X] = \frac{56^2-1}{2} = \frac{3135}{2}$$

Capitulo 5. Página 117 y 118.

1. $P[X=0] = (.64)^0(.36)^{1-0} = .36$

$$E[X] = .64$$
$$Var[X] = (.64)(.36) = 0.2304$$

2. $f_X(x) = P[X = x] = \begin{cases} \binom{7}{x}(.64)^x(.36)^{7-x}; & si\ x = 0,1,2,\dots,7 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

$$E[X] = 7(.64) = 4.48$$
$$Var[X] = 7(.64)(.36) = 0.1612$$

3. $P[E] = .85$

$$P[F] = .15$$
$$E[X] = .85$$
$$Var[X] = 0.1275$$

4. $X \sim Bin(5, .85)$

$$f_X(x) = P[X = x] = \begin{cases} \binom{5}{x}(.85)^x(.15)^{5-x}; & si\ x = 0,1,2,\dots,5 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$E[X] = 5(.85) = 4.25$$
$$Var[X] = 5(.85)(.15) = 0.6375$$

5. $f_x(x) = P[X = x] = (.25)^x(.75)^{1-x};\ x = 0,1.$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ .75 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x \end{cases}$$

$$E[X] = .25$$

$$Var[X] = .25(.75) = .1875$$

6. Si sólo es un producto:

$$X \sim Bernoulli(0.05)$$
$$f_x(x) = P[X = x] = (.05)^x(.95)^{1-x};\ x = 0,1.$$
$$E[X] = .05$$
$$Var[X] = 0.05(.95) = 0.0475$$

Si son n productos:

$$X \sim Bin(n, .05)$$
$$f_X(x) = P[X = x] = \begin{cases} \binom{n}{x}(.05)^x(.95)^{n-x}; & si\ x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$
$$E[X] = n(0.05)$$
$$Var[X] = n(0.0475)$$

7. $X \sim Bin(5, .05)$

$$f_X(x) = P[X = x] = \begin{cases} \binom{5}{x}(.05)^x(.95)^{5-x}; & si\ x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f_X(3) = P[X = 3] = \binom{5}{3}(.05)^3(.95)^{5-3} = .001128$$

$$E[X] = n(0.05)$$
$$Var[X] = n(0.0475)$$

8.
   a) 0.00048
   b) 0.0000144

Capitulo 5. Página 141 y 142.

1.
   a) 0.975
   b) 0.025
   c) 0.986

2.
   a) 0.841
   b) 0.977
   c) 0.136

3.
   a) 0.274
   b) 0.494
   c) 0.445

4.
   a) 0.25
   b) 0.85
   c) 1.55
   d) 2.30

5.

a) 0.023
b) 0.682

6.

a) 0.834
b) 0.309
c) 0.023

7.

a) $1 - P[350 \leq X \leq 360]$
b) 0.318