



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Sobre las Componentes Conexas de Espacios de Polinomios
D-Hiperbólicos

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
Luis Antonio Cedeño Pérez

DIRECTOR
Federico Sánchez Bringas
Facultad de Ciencias

CIUDAD DE MÉXICO 7 de Agosto de 2022.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Sobre las Componentes Conexas de Espacios de Polinomios
D-Hiperbólicos

Luis Antonio Cedeño Pérez

Agradecimientos

Agradezco el apoyo brindado por el proyecto PAPIIT IN 121020, DGAPA, UNAM.

Índice general

Introducción	5
1. Espacios de Polinomios D-Hiperbólicos	7
1.1. Funciones Hiperbólicas	7
1.2. Ceros e Índices de Funciones Hiperbólicas	10
1.3. Ejemplos de Polinomios D -Hiperbólicos	12
1.4. La Conjetura de Arnold	15
1.5. Velocidad Angular y Polinomios 3-Hiperbólicos	16
2. Polinomios Reales y Trigonométricos	23
2.1. Teorema de Sturm-Hurwitz	23
2.2. Teorema de Sturm	25
2.3. Ceros de Polinomios en Intervalos No Acotados	32
2.4. Polinomios de Chebyshev	33
3. Nuevas Clases de Polinomios D-Hiperbólicos	35
3.1. Objetivo de las Nuevas Clases	35
3.2. Clase $\tilde{P}^3 R^{2n}$	37
3.3. Clase $\tilde{P}^5 R^{2n}$	38
3.4. Discusión de las Nuevas Clases	40
A. Series de Fourier e Identidades Trigonométricas	41
B. Cálculos con Mathematica	43
B.1. Criterio de Hiperbolicidad	43
B.2. Clase $\tilde{P}^3 R^{2n}$	44
B.3. Clase $\tilde{P}^5 R^{2n}$	46
B.4. Índices de $\tilde{P}^3 R^{2n}$ y $\tilde{P}^5 R^{2n}$	49
Bibliografía	53

Introducción

Entre las aplicaciones más exitosas de la teoría de singularidades se encuentra la clasificación de las singularidades genéricas de aplicaciones lagrangianas y legendrianas (ver la parte III de [AVGZ85]). Este tipo de singularidades están fuertemente relacionadas con el estudio de caústicas y frentes de onda. Por este motivo, V. I. Arnold se interesó en el estudio de las singularidades de este tipo de mapas incorporándolos a la teoría topológica de la propagación de ondas. En un artículo de 1996 titulado *Topological Problems of the Theory of Wave Propagation* [Arn96], Arnold determinó que la propagación de caústicas y frentes de onda se puede describir en términos de geometría astroidal. Esto lo llevó a estudiar funciones en dos variables cuyo hessiano es negativo definido en todo punto, las cuales llamó funciones hiperbólicas. El estudio de Arnold se basó en el desarrollo de una topología en el espacio de funciones hiperbólicas conocida como la topología hessiana. La relación entre la geometría astroidal y las funciones hiperbólicas fue tan fructífera que en 2001 Arnold publicó un nuevo artículo titulado *Astroidal Geometry of Hypocycloids and the Hessian Topology of Hyperbolic Polynomials* [Arn01], dedicado exclusivamente a exponer sus resultados en esta nueva dirección. En este artículo se trata con subespacios de funciones hiperbólicas, conocidos como espacios de polinomios D -hiperbólicos, donde D es un número natural, los cuales heredan la topología hessiana del espacio de funciones hiperbólicas. Arnold probó que el espacio de funciones hiperbólicas es desconexo con un número infinito de componentes conexas. Por ello resulta natural preguntarse si algo parecido sucede para los espacios de polinomios D -hiperbólicos. Arnold logró demostrar que el espacio de polinomios 5-hiperbólicos es desconexo, lo que lo llevó a hacer la siguiente conjetura:

El número de componentes conexas del espacio de polinomios D -hiperbólicos es no decreciente respecto a D y el crecimiento es al menos lineal.

Las técnicas empleadas por Arnold fueron suficientes para determinar que el número de componentes conexas es no decreciente en D , pero no para probar que el crecimiento es al menos lineal.

En este trabajo estudiamos los espacios de polinomios D -hiperbólicos, explicamos las técnicas desarrolladas por Arnold y proponemos técnicas nuevas con la intención de determinar si la conjetura es verdadera y tratar de demostrarla.

Ahora damos una descripción imprecisa pero instructiva de la estructura de este trabajo.

En el capítulo 1 trabajamos los espacios de polinomios D -hiperbólicos. Damos las definiciones necesarias para definir la topología del espacio de polinomios D -hiperbólicos y probar los resultados más importantes desarrollados por Arnold en [Arn01]. De particular importancia es asociar a cada función hiperbólica un número natural llamado índice el cual es el mismo para cada función hiperbólica en la misma componente conexa, es decir, es un invariante de las componentes conexas. Esto implica que el número de componentes conexas de los espacios de polinomios D -hiperbólicos es al menos tan grande como el número de posibles valores del índice, lo cual permite dar una cota inferior al número de componentes conexas de estos espacios. Un resultado importante del índice es que se puede relacionar con el número de ceros de la derivada de su parte angular, lo cual más adelante nos lleva a estudiar métodos para estimar el número de ceros de una función en un intervalo. Después probamos un teorema de Arnold que determina que el número de componentes conexas de los espacios de polinomios D -hiperbólicos crece con D , pero no prueba que el crecimiento es al menos lineal (teorema 1.7). Una vez establecido esto explicamos y discutimos la conjetura de Arnold de manera detallada. Finalmente probamos que el espacio de polinomios 3-hiperbólicos es conexo (teorema 1.16). La prueba de este hecho permite dar una intuición de por qué los espacios de polinomios D -hiperbólicos dejan de ser conexos para D suficientemente grande.

En el capítulo 2 desarrollamos técnicas para dar cotas sobre el número de ceros de polinomios en una variable y polinomios trigonométricos. El primer resultado que probamos es el teorema de Sturm-Hurwitz, el cual da una cota inferior al número de ceros de un polinomio trigonométrico a partir del primer armónico (teorema 2.1). Este teorema se menciona en el trabajo de Arnold debido a que consideraba que a pesar de que existen muchas pruebas de este resultado ninguna alcanza un nivel de nitidez apropiado. El siguiente teorema, quizá el más importante para nuestros fines, es el teorema de Sturm, el cual proporciona una herramienta para determinar el número de ceros de un polinomio de variable real en un intervalo acotado por medio de la derivada y el algoritmo de la división euclidiana (teorema 2.7). Posteriormente generalizamos este teorema al caso en el que el intervalo no necesariamente es acotado (teorema 2.10). Finalmente desarrollamos las propiedades básicas de los polinomios de Chebyshev, los cuales nos permiten llevar polinomios trigonométricos a polinomios de una variable real y relacionar los teoremas de ceros de polinomios en una variable real con ceros de polinomios trigonométricos.

En el capítulo 3 aplicamos las técnicas expuestas en el capítulo 2 para trabajar sobre la conjetura de Arnold. Los resultados obtenidos en este capítulo dependen fuertemente de cálculos realizados con Mathematica. Intuitivamente, las técnicas de Arnold no permiten demostrar la conjetura ya que conforme D crece se “pierden” valores del índice que se alcanzaban en grados más bajos. Tomando esto en cuenta, la idea principal es “empujar” polinomios hiperbólicos de grado bajo a espacios de grado mayor por medio de polinomios elípticos de tal manera que el producto sea hiperbólico y tenga el mismo índice que el polinomio hiperbólico de grado bajo. Esto permite identificar nuevas componentes conexas recuperando valores del índice que se perdían con las técnicas de Arnold. No tratamos el caso general, sino dos casos particulares que se resuelven por dos métodos distintos. El primer método consiste en utilizar polinomios de Chebyshev para obtener polinomios de una variable real y aplicar el teorema de Sturm en un intervalo acotado. La desventaja de este método es que no se puede aplicar a cualquier polinomio en dos variables. El segundo método consiste en “proyectivizar” un polinomio en dos variables reales para obtener un polinomio de una variable real y utilizar el teorema de Sturm en intervalos no acotados. Este método tiene la ventaja de que se puede aplicar a cualquier polinomio en dos variables reales, pero tiene la desventaja de que el polinomio de una variable real obtenido está definido en un intervalo no acotado, complicando el análisis. Las dos clases que se obtienen son nuevas, pero falta una manera sistemática de encontrar otras clases.

Los resultados obtenidos en este trabajo son prometedores, en el sentido de que parecen indicar que la conjetura es verdadera. Más aún, proponemos dos métodos que pueden servir para dar la prueba de la conjetura e indicamos las distintas direcciones en las que se puede continuar este trabajo para finalmente dar una prueba a la conjetura de Arnold.

Anexamos dos apéndices. El primero contiene resultados básicos de polinomios trigonométricos y series de Fourier que se utilizarán en el capítulo 2. El segundo contiene los cálculos realizados en Mathematica para el capítulo 3, de manera que la lectura de este capítulo sea más fácil.

Capítulo 1

Espacios de Polinomios D -Hiperbólicos

En este capítulo desarrollamos los conceptos básicos que necesitaremos a lo largo del trabajo. El primer objetivo es proveer la definición de polinomio D -hiperbólico. Después caracterizamos a los polinomios D -hiperbólicos de distintas maneras y definimos el índice de una función hiperbólica. Posteriormente damos algunas propiedades de estos espacios de polinomios y enunciamos la conjetura de Arnold. La mayoría de los resultados de este capítulo provienen de [Arn01].

1.1. Funciones Hiperbólicas

Consideramos el espacio de formas cuadráticas de la forma

$$\omega = a dx^2 + 2b dx dy + c dy^2,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Esto es equivalente a que

$$\omega(x, y) = a x^2 + 2b xy + c y^2.$$

Identificamos a este espacio con \mathbb{R}^3 por medio de la aplicación

$$a dx^2 + 2b dx dy + c dy^2 \mapsto (a, b, c).$$

Definición 1.1. Una forma cuadrática $a dx^2 + 2b dx dy + c dy^2$ es una **forma hiperbólica** si cumple que $ac - b^2 < 0$.

Es conveniente notar que esta condición es equivalente a que la forma tenga signatura $(+, -)$. Al conjunto de formas hiperbólicas identificado como subconjunto de \mathbb{R}^3 lo denotamos por \mathcal{H} . Notamos que el conjunto $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid ac - b^2 = 0\}$ es un cono con eje $b = 0$ y $a = c$, por lo que es fácil ver que \mathcal{H} es una componente conexa del complemento de este cono. Se sigue que \mathcal{H} es un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^3 que no es denso ni simplemente conexo.

Dada $\gamma(t) = (a(t), b(t), c(t))$ una curva continua en $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ le podemos asociar una curva plana en \mathbb{C} dada por $\tilde{\gamma}(t) = a(t) - c(t) + 2b(t)i$. Aunque no es evidente la relación entre estas dos curvas, su utilidad proviene de que podemos definir el índice de γ por medio de esta curva plana.

Definición 1.2. El **índice** de una curva cerrada γ en $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ es el índice de $\tilde{\gamma}$, es decir,

$$ind(\gamma) = ind(a - c + 2bi).$$

Es bien conocido que el índice de cualquier curva plana cerrada γ es un número entero (ver, por ejemplo, las secciones 65 y 66 de [Mun00]). También se cumple que el índice es constante en cada clase de homotopía de curvas cerradas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, que es una consecuencia sencilla del resultado análogo de curvas planas.

Teorema 1.1. *El índice de dos curvas cerradas continuas en $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ es el mismo si ambas curvas son homotópicas en \mathcal{H} .*

Demostración. Consideramos γ_1 y γ_2 dos curvas cerradas continuas en $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ y $(a(s, t), b(s, t), c(s, t))$ una homotopía entre ellas, es decir,

$$\begin{aligned} (a(0, t), b(0, t), c(0, t)) &= \gamma_1(t), \\ (a(1, t), b(1, t), c(1, t)) &= \gamma_2(t) \end{aligned}$$

y para cada s fija en $[0, 1]$ la curva $t \mapsto (a(s, t), b(s, t), c(s, t))$ pertenece a \mathcal{H} . Usando esto, se sigue que la función

$$a(s, t) - c(s, t) + 2b(s, t)i$$

es una homotopía entre las curvas planas $\tilde{\gamma}_1(t) = a(0, t) - c(0, t) + 2b(0, t)i$ y $\tilde{\gamma}_2(t) = a(1, t) - c(1, t) + 2b(1, t)i$, que tienen los mismos índices que γ_1 y γ_2 . Como las curvas planas $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ son homotópicas sus índices son los mismos y $\text{ind}(\gamma_1) = \text{ind}(\gamma_2)$. \square

A cada función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^2 se le puede asociar una forma cuadrática en cada punto \vec{x}_0 de \mathbb{R}^2 de manera natural por medio de su hessiano como sigue

$$\text{Hess}(f)_{\vec{x}_0} = \partial_{xx}^2 f(\vec{x}_0) dx^2 + 2 \partial_{xy}^2 f(\vec{x}_0) dx dy + \partial_{yy}^2 f(\vec{x}_0) dy^2.$$

Se sigue que el hessiano de f define una función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 por medio de la identificación del espacio de formas cuadráticas con \mathbb{R}^3 . Esto quiere decir que tenemos la función $\text{Hess}(f): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\vec{x} \mapsto \text{Hess}(f)_{\vec{x}}.$$

Esta consideración nos lleva al siguiente concepto.

Definición 1.3. Una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 es una **función hiperbólica** si $\text{Hess}(f)_{\vec{x}} \in \mathcal{H}$ para cada \vec{x} en \mathbb{R}^2 .

De sustituir las componentes del hessiano en la definición de forma hiperbólica podemos ver que la condición de hiperbolicidad de f es equivalente a que

$$\partial_{xx}^2 f(\vec{x}) \partial_{yy}^2 f(\vec{x}) - (\partial_{xy}^2 f(\vec{x}))^2 < 0$$

para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Para dar una interpretación simple de la condición de hiperbolicidad recordamos que si S es la superficie dada por la gráfica de una función f entonces su curvatura gaussiana está dada por

$$K(\vec{x}) = \frac{\partial_{xx}^2 f(\vec{x}) \partial_{yy}^2 f(\vec{x}) - (\partial_{xy}^2 f(\vec{x}))^2}{(1 + (\partial_x f(\vec{x}))^2 + (\partial_y f(\vec{x}))^2)^2}.$$

Esto quiere decir que una función f es hiperbólica si la curvatura de su gráfica es negativa en todo punto.

Definición 1.4. Una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es **homogénea de grado D** si existen un número $D \in \mathbb{N}$ y una función 2π periódica $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(x, y) = r^D F(\varphi),$$

donde r y φ son las coordenadas polares del plano. A la función F se le llama la parte angular de f .

De la definición se sigue que si restringimos una función homogénea de grado D a un rayo por el origen esta función se comporta como $r \mapsto ar^D$, donde tanto el signo como la magnitud de $a \in \mathbb{R}$ pueden variar. Esto implica que las funciones homogéneas están determinadas por su valor en el círculo unitario y su grado de homogeneidad. Es conveniente notar que una función en dos variables f es homogénea de grado D si y sólo si

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^D f(x, y).$$

El siguiente teorema muestra que la hiperbolicidad de una función homogénea está completamente determinada por su parte angular y el grado de homogeneidad.

Teorema 1.2. Una función homogénea $f = r^D F$ de clase \mathcal{C}^2 y grado $D > 1$ es hiperbólica si y sólo si cumple que

$$D^2 F^2 + D F F'' - (D - 1) F'^2 < 0.$$

Nota: De aquí en adelante escribimos $cx = \cos x$ y $sx = \sin x$.

Demostración. Omitiendo la evaluación en \vec{x} , la condición de hiperbolicidad de la función es

$$\partial_{xx}^2 f \partial_{yy}^2 f - (\partial_{xy}^2 f)^2 < 0,$$

por lo que basta calcular estas derivadas en coordenadas convenientes. La regla de transformación de derivadas parciales nos da

$$\begin{aligned} \partial_x &= \frac{\partial r}{\partial x} \partial_r + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \partial_\varphi \\ &= \frac{x}{r} \partial_r - \frac{y}{r^2} \partial_\varphi \\ &= c\varphi \partial_r - \frac{1}{r} s\varphi \partial_\varphi. \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\partial_y = s\varphi \partial_r + \frac{1}{r} c\varphi \partial_\varphi.$$

Se sigue que los coeficientes del hessiano son

$$\begin{aligned} \partial_{xx}^2 f &= (c\varphi \partial_r - \frac{1}{r} s\varphi \partial_\varphi)(c\varphi \partial_r - \frac{1}{r} s\varphi \partial_\varphi) f, \\ \partial_{yy}^2 f &= (s\varphi \partial_r + \frac{1}{r} c\varphi \partial_\varphi)(s\varphi \partial_r + \frac{1}{r} c\varphi \partial_\varphi) f, \\ \partial_{xy}^2 f &= (c\varphi \partial_r - \frac{1}{r} s\varphi \partial_\varphi)(s\varphi \partial_r + \frac{1}{r} c\varphi \partial_\varphi) f, \end{aligned}$$

los cuales se calcularon usando Mathematica (el código se muestra en el apéndice B), para obtener

$$\begin{aligned} \partial_{xx}^2 f &= r^{D-2} \left(\frac{1}{2} D((D-2)c2\varphi + D)F - (D-1)s2\varphi F' + s^2\varphi F'' \right), \\ \partial_{yy}^2 f &= r^{D-2} \left(-\frac{1}{2} D((D-2)c2\varphi - D)F + (D-1)s2\varphi F' + c^2\varphi F'' \right), \\ \partial_{xy}^2 f &= \frac{1}{2} r^{D-2} ((D-2)Ds2\varphi F + 2(D-1)c2\varphi F' - s2\varphi F''). \end{aligned}$$

Utilizando Mathematica una vez más, obtenemos que

$$\partial_{xx}^2 f \partial_{yy}^2 f - (\partial_{xy}^2 f)^2 = (D-1)r^{2D-4} (D^2 F^2 + D F F'' - (D-1) F'^2).$$

Como $D > 1$, concluimos que el determinante del hessiano es negativo si y sólo si el término en el último paréntesis lo es. \square

Notemos primero que la hiperbolicidad de la función f depende sólo de D y de la función F , más aún, todos los coeficientes de $Hess(f)$ tienen un factor común de r^{D-2} por lo que tomando $r = 1$, o cualquier otro valor del radio, $Hess(f)$ define una curva en el espacio de formas cuadráticas con parámetro φ . Se sigue que las funciones hiperbólicas homogéneas de grado D se pueden representar como curvas en \mathcal{H} , permitiéndonos relacionar ambos espacios. A veces escribiremos $\gamma(\varphi) = Hess(f)$ para referirnos a esta curva.

Las funciones hiperbólicas y homogéneas de grado D son de importancia central en este trabajo, por lo que es conveniente que nuestra terminología represente este hecho.

Definición 1.5. Una función f es D -hiperbólica si es hiperbólica y homogénea de grado D . A la curva $\gamma(\varphi) = Hess(f)$ discutida anteriormente la llamamos la curva en \mathcal{H} asociada a f .

Ahora introducimos los espacios principales de nuestro estudio. Consideremos a P un polinomio en dos variables. Se verifica fácilmente que si P es un polinomio homogéneo de grado D entonces P es de la forma

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^D a_i x^i y^{D-i},$$

por lo que podemos identificar a P con $H(P) \in \mathbb{R}^{D+1}$ dado por $H(P) = (a_0, \dots, a_D) \in \mathbb{R}^{D+1}$. De esta manera, si $Ph^D(\mathbb{R}^2)$ denota al espacio de polinomios homogéneos de grado D en dos variables entonces la función $H: Ph^D(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^{D+1}$ es una biyección entre estos espacios. Se sigue que la función H genera una topología en $Ph^D(\mathbb{R}^2)$. Como el espacio de polinomios D -hiperbólicos es un subespacio de $Ph^D(\mathbb{R}^2)$ tenemos que los polinomios D -hiperbólicos heredan una topología τ de manera natural.

Definición 1.6. La topología τ construida en el párrafo anterior la llamamos la **topología del espacio de polinomios D -hiperbólicos**.

Es indispensable recordar que τ es la topología del espacio de polinomios D -hiperbólicos ya que nos interesan sus componentes conexas. De aquí en adelante cuando hagamos referencia a este espacio supondremos que está dotado de dicha topología.

Ahora hacemos dos observaciones simples pero importantes. La primera es que la condición de hiperbolicidad de un polinomio D -hiperbólico se puede considerar como la imagen inversa de un conjunto abierto bajo una función continua, por lo que las componentes conexas del espacio de polinomios D -hiperbólicos son conjuntos abiertos. Se sigue que conexidad por trayectoria y conexidad coinciden en estos espacios. La segunda observación es que si P y Q son polinomios D -hiperbólicos entonces estos inducen curvas en \mathcal{H} por medio de su hessiano; $\gamma_P(\varphi) = Hess(P)$ y $\gamma_Q(\varphi) = Hess(Q)$. Estas curvas a su vez definen curvas planas $\tilde{\gamma}_P$ y $\tilde{\gamma}_Q$ de la manera dada en la definición 1.2, cuyos índices son los índices de P y Q . Si P y Q pertenecen a la misma componente conexa, la primera observación nos dice que existe una curva $\Gamma(t)$ que los conecta. Si aplicamos el mismo procedimiento que aplicamos a P y Q para obtener las curvas planas $\tilde{\gamma}_P$ y $\tilde{\gamma}_Q$ a cada polinomio D -hiperbólico $\Gamma(t)$ obtenemos una curva plana $\tilde{\Gamma}_t(\varphi)$. Se verifica fácilmente que la aplicación $(t, \varphi) \mapsto \tilde{\Gamma}_t(\varphi)$ es una homotopía entre $\tilde{\gamma}_P$ y $\tilde{\gamma}_Q$, por lo que P y Q tienen el mismo índice. Se sigue que el índice es un invariante de las componentes conexas del espacio de polinomios D -hiperbólicos.

1.2. Ceros e Índices de Funciones Hiperbólicas

Recordamos de la definición 1.5 que toda función D -hiperbólica f define una curva $\gamma(\varphi) = Hess(f)$ en \mathcal{H} , donde el parámetro φ es la variable angular del plano. Utilizando los cálculos del teorema 1.2 obtenemos fácilmente el siguiente resultado.

Teorema 1.3. Sean f una función D -hiperbólica, $\gamma(\varphi) = Hess(f)$, $M(\varphi) = D(D-2)F - F''$ y $N(\varphi) = 2(D-1)F'$. Se cumple que

$$ind(\gamma) = 2 + ind(M + iN).$$

Demostración. De los cálculos del teorema 1.2 obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{D-2}}(\partial_{xx}^2 f - \partial_{yy}^2 f) &= D(D-2)c2\varphi F - 2(D-1)s2\varphi F' - c2\varphi F'' \\ &= c2\varphi (D(D-2)F - F'') - s2\varphi (2(D-1)F') \\ &= c2\varphi M - s2\varphi N \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{D-2}}2\partial_{xy}^2 f &= D(D-2)s2\varphi F + 2(D-1)c2\varphi F' - s2\varphi F'' \\ &= s2\varphi (D(D-2)F - F'') + c2\varphi (2(D-1)F') \\ &= s2\varphi M + c2\varphi N. \end{aligned}$$

Obtenemos que

$$\partial_{xx}^2 f - \partial_{yy}^2 f + 2i\partial_{xy}^2 f = r^{D-2}(c2\varphi + is2\varphi)(M + iN).$$

Utilizando la definición del índice de una curva compleja se sigue fácilmente que $ind(\alpha\beta) = ind(\alpha) + ind(\beta)$, por lo cual

$$\begin{aligned} ind(\gamma) &= ind(\partial_{xx}^2 f - \partial_{yy}^2 f + 2i\partial_{xy}^2 f) \\ &= ind(r^{D-2}(c2\varphi + is2\varphi)(M + iN)) \\ &= ind(r^{D-2}(c2\varphi + is2\varphi)) + ind(M + iN) \\ &= 2 + ind(M + iN). \end{aligned}$$

□

Nos es de especial interés calcular índices de funciones hiperbólicas ya que el teorema 1.1 indica que el espacio de funciones hiperbólicas tiene al menos tantas componentes conexas como posibles valores que asume el índice de funciones D -hiperbólicas. El siguiente teorema relaciona el índice de formas cuadráticas con el número de puntos singulares de funciones.

Teorema 1.4. *El índice de la curva $M + iN$ es negativo y se cumple que*

$$ind(M + iN) = -\frac{1}{2} \left| \{ \varphi \in [0, 2\pi) \mid F'(\varphi) = 0 \} \right|.$$

Demostración. Recordando que $N = 2(D-1)F'$ se sigue que $N = 0$ si y sólo si $F' = 0$. Esto quiere decir que los puntos críticos de F son aquellos en los que la curva $M + iN$ intersecta al eje x . Se sigue del teorema 1.2 que en los puntos críticos de F la condición de hiperbolicidad es

$$F(DF + F'') < 0,$$

que implica que F y $DF + F''$ tienen signos opuestos. Si $F > 0$ entonces $DF + F'' < 0$, de donde se sigue que $0 < DF < -F''$, por lo cual $F'' < 0$ y F y F'' tienen signos opuestos. Es fácil verificar que en el otro caso pasa lo mismo y F y F'' tienen signos opuestos en puntos críticos. Recordando que $M = D(D-2)F - F''$, se sigue que M tiene el mismo signo que F y el opuesto a F'' . Notando que $N' = 2(D-1)F''$, tenemos que M y N' tienen signos opuestos en puntos críticos.

Concluimos que en las intersecciones de $M + iN$ con el eje x se cumple que si $M > 0$ entonces $N' < 0$ y si $M < 0$ entonces $N' > 0$, por lo que la curva $M + iN$ interseca al eje x exactamente dos veces cada vez que gira alrededor del origen y se verifica la igualdad del teorema. □

Este teorema es fundamental debido a que nos permite calcular fácilmente el índice de funciones hiperbólicas y en la sección 1.3 lo utilizamos para generar funciones hiperbólicas con distintos índices. Antes de eso, exploramos algunas consecuencias sencillas de este teorema. Recordamos que x_0 es un punto crítico no degenerado de f si $f'(x_0) = 0$, pero $f''(x_0) \neq 0$.

Teorema 1.5. *Sea F una función 2π periódica sin puntos críticos degenerados que cumple*

$$F(\varphi + \pi) = (-1)^D F(\varphi),$$

entonces

$$\frac{1}{2} \left| \{ \varphi \in [0, 2\pi) \mid F'(\varphi) = 0 \} \right| = D \pmod{2}.$$

Notemos que si F tiene un punto crítico degenerado y determina una función D -hiperbólica $f = r^D F(\varphi)$ entonces la condición del teorema 1.2 se convierte en

$$D^2 F^2 < 0,$$

que es imposible. Esto implica que las funciones D -hiperbólicas satisfacen las hipótesis del teorema 1.5.

Demostración. Como F no tiene puntos críticos degenerados, F no es constante y el signo de F' cambia en los puntos críticos de F por lo que los máximos y mínimos de F se alternan. Dado un máximo M_1 la ecuación

$$F'(\varphi + \pi) = (-1)^D F'(\varphi)$$

implica que $M_1 + \pi$ es un punto crítico. Si F tiene n máximos M_i en $[M_1, M_1 + \pi)$ entonces los podemos ordenar de tal forma que

$$M_1 < M_2 < \dots < M_n < M_1 + \pi.$$

Ahora consideramos por separado los casos cuando D es par o impar.

Si D es par entonces $F''(\varphi + \pi) = F''(\varphi)$ por lo que $M_1 + \pi$ es un máximo. Como máximos y mínimos se alternan existen mínimos m_i tales que

$$M_1 < m_1 < M_2 < m_2 < \dots < M_n < m_n < M_1 + \pi.$$

Esto implica que F tiene $2n$ puntos críticos en $[M_1, M_1 + \pi)$ y $4n$ puntos críticos en $[M_1, M_1 + 2\pi)$, por lo que la mitad del número de puntos críticos de F es par.

Si D es impar entonces $F''(\varphi + \pi) = -F''(\varphi)$ y $M_1 + \pi$ es un mínimo. Nuevamente, como máximos y mínimos se alternan existen mínimos m_i tales que

$$M_1 < m_1 < M_2 < m_2 < \dots < M_n < M_1 + \pi.$$

Esto implica que F tiene $2n - 1$ puntos críticos en $[M_1, M_1 + \pi)$ y $2(2n - 1)$ en $[M_1, M_1 + 2\pi)$, por lo que la mitad del número de puntos críticos de F es impar. \square

Los tres teoremas de esta sección nos dan inmediatamente el siguiente resultado:

Corolario 1.6. *Para cualquier polinomio D -hiperbólico $f = r^D F(\varphi)$ se cumple que*

$$\begin{aligned} \text{ind}(M + iN) &= D \pmod{2}, \\ \text{ind}(M + iN) &\leq -2 \quad \text{si } D \text{ es par}, \\ \text{ind}(M + iN) &\leq -1 \quad \text{si } D \text{ es impar}, \\ \text{ind}(f) &= D \pmod{2}, \\ \text{ind}(f) &\leq 0 \quad \text{si } D \text{ es par}, \\ \text{ind}(f) &\leq 1 \quad \text{si } D \text{ es impar}. \end{aligned}$$

Demostración. Los teoremas 1.4 y 1.5 implican que

$$\text{ind}(M + iN) = -\frac{1}{2} |\{\varphi \in [0, 2\pi) \mid F'(\varphi) = 0\}| = D \pmod{2},$$

que es la primera igualdad. El teorema 1.4 implica que $\text{ind}(M + iN)$ es estrictamente negativo y la igualdad anterior nos dice que es par si D es par y es impar si D es impar, lo cual se puede reescribir como $\text{ind}(M + iN) \leq -2$ si D es par y $\text{ind}(M + iN) \leq -1$ si D es impar, que son las desigualdades del enunciado.

Por el teorema 1.3 sabemos que

$$\text{ind}(f) = 2 + \text{ind}(M + iN),$$

que implica que la paridad de $\text{ind}(f)$ es la misma que la de $\text{ind}(M + iN)$, dándonos la segunda igualdad. Al sumar 2 a las primeras dos desigualdades del enunciado y usar la igualdad anterior obtenemos las últimas dos desigualdades. \square

1.3. Ejemplos de Polinomios D -Hiperbólicos

Dado un número natural $D > 1$, el siguiente teorema nos permite construir polinomios D -hiperbólicos con distintos índices. Para simplificar la prueba daremos el resultado en términos de $M + iN$ en vez del índice del polinomio.

Teorema 1.7. Para todo entero $k \geq \sqrt{D}$ hay una función D -hiperbólica tal que

$$\text{ind}(M + iN) = -k.$$

Demostración. Tomamos $F(\varphi) = ck\varphi$. Supongamos que F cumple la condición de hiperbolicidad del teorema 1.2. Como

$$F'(\varphi) = -k sk\varphi,$$

se cumple que F' tiene $2k$ ceros en $[0, 2\pi)$. El teorema 1.4 implica que $\text{ind}(M + iN) = -k$ y $\text{ind}(f) = 2 - k$. Para concluir la prueba del teorema basta probar que estas funciones son hiperbólicas.

Si escribimos

$$h(F) = D^2 F^2 + DFF'' - (D - 1)F'^2,$$

entonces la condición de hiperbolicidad es $h(F) < 0$. Supongamos que $k > \sqrt{D}$. Como $F' = -k sk\varphi$ y $F'' = -k^2 ck\varphi$ entonces

$$\begin{aligned} h(F) &= D^2 c^2 k\varphi - Dk^2 c^2 k\varphi - (D - 1)k^2 s^2 k\varphi \\ &= D^2 c^2 k\varphi + k^2 s^2 k\varphi - Dk^2 \\ &= D^2 c^2 k\varphi + k^2 - k^2 c^2 k\varphi - Dk^2 \\ &= (D^2 - k^2) c^2 k\varphi - (D - 1)k^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Se sigue que el máximo de esta función en $[0, 2\pi)$ es

$$\begin{aligned} \max_{\varphi \in [0, 2\pi)} h(F) &= \max\{0, D^2 - k^2\} - (D - 1)k^2 \\ &= \max\{-(D - 1)k^2, D^2 - k^2 - (D - 1)k^2\} \\ &= \max\{-(D - 1)k^2, D(D - k^2)\}. \end{aligned}$$

Como $-(D - 1)k^2 < 0$ porque $D > 1$ y $D(D - k^2) < 0$ porque $k > \sqrt{D}$, se sigue que $h(F) < 0$.

Si $k = \sqrt{D}$, usamos $F_\epsilon = F + \epsilon g$, donde g es una función que definiremos más adelante para asegurar que $h(F_\epsilon) < 0$. Se cumple que

$$\begin{aligned} h(F + \epsilon g) &= D^2(F + \epsilon g)^2 + D(F + \epsilon g)(F'' + \epsilon g'') - (D - 1)(F' + \epsilon g')^2 \\ &= D^2(F^2 + 2\epsilon Fg + \epsilon^2 g^2) + D(FF'' + \epsilon^2 gg'' + \epsilon(gF'' + g''F)) - (D - 1)(F'^2 + 2\epsilon F'g' + \epsilon^2 g'^2) \\ &= h(F) + \epsilon^2 h(g) + \epsilon(2D^2 Fg - 2(D - 1)F'g' + DgF'' + Dg''F). \end{aligned}$$

A la parte lineal en ϵ la llamamos $h_1(F)$. Cuando $k^2 = D$ la ecuación (1.1) se convierte en

$$h(F) = (D^2 - D)(c^2 \sqrt{D}\varphi - 1) \leq 0,$$

mientras que la forma de h_1 para $F = \cos \sqrt{D}\varphi$ es

$$h_1 = D^2 c \sqrt{D}\varphi g + D c \sqrt{D}\varphi g'' + 2\sqrt{D}(D - 1)s \sqrt{D}\varphi g'.$$

Sean φ_i los ceros de $h(F)$ en $[0, 2\pi)$, los cuales son un número finito porque son aislados. Si g es localmente constante en φ_i y con signo opuesto a $c \sqrt{D}\varphi_i$ entonces las derivadas de g se anulan en φ_i y

$$h_1(\varphi_i) = D^2 c \sqrt{D}\varphi_i g(\varphi_i) < 0,$$

donde la desigualdad es estricta porque F no se anula en los ceros de $h(F)$. Si g es de clase C^2 entonces h_1 está acotada por una constante M_1 . Si I_i son los intervalos abiertos donde g es localmente constante, entonces $[0, 2\pi] \setminus \cup_i I_i$ es compacto, por lo que $h(F)$ alcanza su máximo M_2 en este conjunto. Además todos los ceros de $h(F)$ están en $\cup_i I_i$, por lo que $M_2 < 0$ y $|M_2| = -M_2$. Por construcción de los I_i tenemos que $h(F) + \epsilon h_1 < 0$ en $\cup_i I_i$. Ahora supongamos que $\epsilon < |M_2/M_1|$, se sigue que en el conjunto $[0, 2\pi] \setminus \cup_i I_i$ se satisface la desigualdad

$$h(F) + \epsilon h_1 < h(F) + \left| \frac{M_2}{M_1} \right| h_1 \leq h(F) + |M_2| = h(F) - M_2 \leq 0,$$

por lo que $h(F) + \epsilon h_1 < 0$ en todo $[0, 2\pi)$.

Lo anterior implica que para cada ϵ suficientemente pequeño existe $M_3(\epsilon)$ que decrece linealmente con ϵ y cumple que

$$h(F) + \epsilon h_1 \leq M_3(\epsilon) < 0$$

en todo $[0, 2\pi)$. Como g es de clase C^2 existe M_4 tal que $h(g) \leq M_4$. Con esto obtenemos que

$$h(F + \epsilon g) = h(F) + \epsilon h_1 + \epsilon^2 h(g) < M_3(\epsilon) + M_4 \epsilon^2.$$

Como el primer término decrece linealmente y el segundo de manera cuadrática podemos encontrar ϵ_0 tal que si $\epsilon < \epsilon_0$ entonces $|M_4 \epsilon^2| < |M_3(\epsilon)|$, que a su vez implica que $M_3(\epsilon) + M_4 \epsilon^2 < 0$ y $h(F + \epsilon g) < 0$ en todo $[0, 2\pi)$.

Para probar la existencia de la función g , consideramos los intervalos I_i como los definimos antes y, quizá haciéndolos más pequeños, podemos suponer que $\bar{I}_i \cap \bar{I}_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Se sigue que existen *bump functions* (funciones infinitamente planas de pegado) ϕ_i que valen 1 en I_i , se anulan antes del intervalo más cercano y son C^∞ . Podemos definir g como

$$g(\varphi) = \sum_{i=1}^n -\text{sgn}(F(\varphi_i)) \phi_i(\varphi),$$

donde n es el número de ceros de $h(F)$. Esta función cumple todas las propiedades que deseamos, salvo periodicidad. Para ver que la función se puede extender periódicamente básicamente hay que elegir los intervalos de tal manera que el último intervalo no interseque al primero trasladado por 2π . Si $\varphi_i \neq 0$ podemos intersecar los I_i con $(0, 2\pi)$ y elegir I_1 el primer intervalo después de cero de tal forma que ϕ_1 se anule antes de 0 y I_n el último intervalo antes de 2π tal que ϕ_n se anule antes de 2π . Con esto podemos construir g como antes y extender periódicamente. Si algún $\varphi_i = 0$, ordenamos estos ceros en orden creciente con $\varphi_1 = 0$. Se sigue que 2π es también un cero, por lo que podemos obtener un intervalo I_{n+1} que cumpla $\bar{I}_{n+1} \cap \bar{I}_n = \emptyset$ y $\bar{I}_{n+1} \cap \bar{I}_2 + 2\pi = \emptyset$. Definiendo $\bar{I}_1 = I_1 \cap (I_{n+1} - 2\pi)$, la función g construida usando \bar{I}_1 y I_i con $i = 2, \dots, n$ se puede extender de manera periódica y cumple todo lo que queremos. \square

Ahora utilizamos este método para construir ejemplos. Para esto notamos que si D y k son enteros, $D - k$ es un número par y $D \geq k$ entonces la función

$$f = r^D \cos k\varphi = (x^2 + y^2)^{\frac{D-k}{2}} \text{Re}(x + iy)^k$$

es un polinomio homogéneo de grado D , que es hiperbólico si $\sqrt{D} < k \leq D$ y cuyo índice es $2 - k$. Si $D - k$ es un número impar obtenemos una función hiperbólica, pero no un polinomio debido a la raíz cuadrada que aparece en $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejemplo 1.1. Si $D = 2$ el único valor de k que cumple $\sqrt{2} < k \leq 2$ es $k = 2$, en este caso la función f es

$$f = F = \cos 2\varphi = x^2 - y^2.$$

El teorema anterior muestra que es un polinomio hiperbólico, como también lo hace un cálculo directo, ya que

$$\det \text{Hess}(f) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

Como $F' = -2\sin 2\varphi$ tiene 4 ceros en $[0, 2\pi)$, tenemos que el $\text{ind}(f) = 0$.

En general, notamos que si D es par entonces f es una función par, por lo cual $F(\varphi + \pi) = F(\varphi)$, siguiéndose que F tiene al menos 4 ceros en $[0, 2\pi)$. Se sigue del teorema 1.4 que $\text{ind}(M + iN) \leq -2$, lo cual prueba que éste es el único valor posible del índice para polinomios 2-hiperbólicos.

Ejemplo 1.2. Si $D = 4$ los valores de k que cumplen $2 < k \leq 4$ son $k = 3$ y $k = 4$, pero sólo el segundo nos da un polinomio. Si $k = 4$ obtenemos que

$$f = F = \cos 4\varphi = \operatorname{Re}(x + iy)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$$

Nuevamente el teorema anterior muestra que es un polinomio hiperbólico y un cálculo directo nos da que,

$$\begin{aligned} \det \operatorname{Hess}(f) &= \begin{vmatrix} 12(x^2 - y^2) & -24xy \\ -24xy & -12(x^2 - y^2) \end{vmatrix} \\ &= -144(x^2 - y^2)^2 - 576xy \\ &= -144x^4 + 144y^4 + 288xy - 576xy \\ &= -144(x^2 + y^2)^2, \end{aligned}$$

lo cual confirma la hiperbolicidad. Por un argumento de contar ceros de F' usando el teorema 1.4, tenemos que $\operatorname{ind}(f) = -2$.

Ejemplo 1.3. Si $D = 6$ las desigualdades $\sqrt{6} < k \leq 6$ permiten que k tome los valores 3, 4, 5 y 6, de los cuales 4 y 6 son polinomios. Se sigue que los ejemplos del teorema pueden tener índice -2 y -4 . Esto implica que el conjunto de polinomios hiperbólicos de grado 6 es desconexo y tiene al menos dos componentes conexas.

Notamos que el teorema (1.7) nos da una cota inferior sobre los posibles valores de los índices, resultando en una cota inferior sobre el número de componentes. En la siguiente tabla se resume esta información:

Grado	k	Valores del índice	Componentes conexas (cota)
$D = 2$	2	0	1
$D = 3$	3	-1	1
$D = 4$	4	-2	1
$D = 5$	3, 5	-1, -3	2
$D = 6$	4, 6	-2, -4	2
$D = 7$	3, 5, 7	-1, -3, -5	3
$D = 8$	4, 6, 8	-2, -4, -6	3

Cuadro 1.1: Resumen de los resultados del teorema 1.7.

La cota inferior en el número de componentes conexas nos permite concluir que el número de componentes conexas es no decreciente y que a partir de $D = 5$ los polinomios hiperbólicos de grado D forman un conjunto desconexo. Esto no nos permite afirmar que para grados anteriores tenemos conjuntos conexas, pero en la sección 1.5 probaremos que esto sucede para $D = 3$.

Finalmente, la discusión anterior nos permite concluir inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 1.8. *El número de componentes conexas del espacio de polinomios D -hiperbólicos es no decreciente respecto a D .*

1.4. La Conjetura de Arnold

Con las definiciones y resultados de las secciones anteriores finalmente podemos enunciar la conjetura de Arnold y entender cómo fue que llegó a formularla.

Conjetura de Arnold en Espacios de Polinomios D -Hiperbólicos

El número de componentes conexas del espacio de polinomios D -hiperbólicos es no decreciente respecto a D y el crecimiento es al menos lineal.

La topología con la cual se consideran las componentes conexas del espacio de polinomios D -hiperbólicos es la de la definición 1.6. La conjetura se encuentra enunciada en la página 1067 del artículo [Arn01]. La idea de Arnold para contar componentes conexas se basa en el hecho de que todos los polinomios D -hiperbólicos en la misma componente conexa tienen el mismo índice, por lo que hay al menos tantas componentes conexas como valores posibles del índice. Para probar el teorema 1.7 Arnold construyó una familia de polinomios D -hiperbólicos de índices distintos, la cual prueba que los espacios de polinomios D -hiperbólicos son desconexos a partir de $D = 5$ y que el número de componentes conexas es creciente con D . La parte esencial de la conjetura es que el número de componentes conexas crece al menos como una función lineal, lo cual no se verifica del teorema 1.7. Con este contexto nos damos cuenta que Arnold está conjeturando que existen familias de polinomios D -hiperbólicos más amplias que la que él encontró. El problema con la familia de Arnold es que no abarca todos los posibles valores del índice para cada grado.

Una vez determinado que los espacios de polinomios D -hiperbólicos dejan de ser conexos resulta natural preguntarse si el número de componentes conexas tiende a infinito conforme D tiende a infinito. Más aún, la expectativa es que el número de componentes conexas crezca de manera exponencial. Resulta importante notar que el teorema 1.7 implica que el número de componentes conexas en efecto diverge, pero no determina la velocidad con la que lo hace. Las técnicas que Arnold desarrolló no fueron suficientes para determinar si el crecimiento era lineal, ni mucho menos exponencial, por lo que la única alternativa fue conjeturar que el crecimiento es al menos lineal. En principio las técnicas de Arnold pueden servir para demostrar la conjetura y la dificultad en el trabajo de Arnold fue que no encontró una familia de polinomios hiperbólicos lo suficientemente amplia. A pesar de esto, también puede suceder que las técnicas de Arnold sean intrínsecamente insuficientes y haya que recurrir a técnicas distintas. Si éste es el caso la alternativa es buscar un invariante más fino que permita identificar más componentes conexas. En este trabajo nos concentraremos en la primera alternativa, explorando la posibilidad de que exista una familia más amplia que la de Arnold de tal manera que los valores de los índices nos permitan identificar componentes conexas adicionales. Los resultados obtenidos en esta dirección los presentamos en el capítulo 3 e indican que la conjetura puede ser cierta.

1.5. Velocidad Angular y Polinomios 3-Hiperbólicos

En esta sección probamos que el espacio de polinomios 3-hiperbólicos es conexo. Para esto primero introducimos el concepto de velocidad angular para obtener más cotas sobre el índice de este tipo de funciones. Con esto probamos que estos polinomios sólo pueden tener índice -1 y finalmente probamos que el espacio es conexo.

Definición 1.7. Dada una curva plana $\vec{x}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi))$ no necesariamente hiperbólica ni cerrada, definimos su velocidad angular $\omega_{\vec{x}}$ como

$$\omega_{\vec{x}} = \frac{d}{d\varphi} \arg \vec{x}.$$

Si $x \neq 0$ se cumple que

$$\arg \vec{x} = \arctan \frac{y}{x},$$

por lo que la velocidad angular está dada por

$$\begin{aligned}
 \omega_{\vec{x}} &= \frac{d}{d\varphi} \arg \vec{x} \\
 &= \frac{d}{d\varphi} \arctan \frac{y}{x} \\
 &= \partial_x \arctan \frac{y}{x} x' + \partial_y \arctan \frac{y}{x} y' \\
 &= \frac{-yx' + xy'}{x^2 + y^2} \\
 &= \frac{[\vec{x}, \vec{x}']}{|\vec{x}|^2},
 \end{aligned}$$

donde $[\cdot, \cdot]$ representa la norma del producto cruz considerando \mathbb{R}^2 encajado en \mathbb{R}^3 como el plano xy . Si $y \neq 0$ usamos que

$$\arg \vec{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y}$$

y una cuenta análoga lleva a la misma expresión para $\omega_{\vec{x}}$, por lo que la expresión es válida en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. La velocidad angular representa que tan rápido gira una curva alrededor del origen. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.9. *Si F es una función 2π periódica que define una función D -hiperbólica y L es la curva*

$$L = DF + iF',$$

entonces $\omega_L < -1$ para toda φ .

Demostración. De la cuenta anterior al enunciado del teorema tenemos que

$$\omega_{\vec{x}} = \frac{[L, L']}{D^2 F^2 + F'^2} = \frac{DF F'' - DF'^2}{D^2 F^2 + F'^2}.$$

La condición de hiperbolicidad del teorema 1.2

$$D^2 F^2 + DF F'' - (D-1)F'^2 = D^2 F^2 + DF F'' - DF'^2 + F'^2 < 0,$$

implica que

$$DF F'' - DF'^2 < -(D^2 F^2 + F'^2)$$

y

$$\omega_{\vec{x}} = \frac{DF F'' - DF'^2}{D^2 F^2 + F'^2} < -1.$$

□

Este teorema tiene una colección importante de corolarios.

Corolario 1.10. *El número de vueltas de L alrededor de 0 en el intervalo $[0, 2\pi]$ es menor o igual que -2 .*

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \text{ind}(L) &= \frac{1}{2\pi} \Delta \arg(L) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\varphi} \arg(L) d\varphi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_L d\varphi \\
 &< \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -1 d\varphi = -1,
 \end{aligned}$$

por lo que $\text{ind}(L) \leq -2$.

□

Corolario 1.11. F y F' tienen al menos 4 ceros en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Demostración. L interseca cada eje al menos 2 veces cada vez que da una vuelta alrededor de 0. Como $\text{ind}(L) \leq -2$ el número de intersecciones a cada eje es al menos 4 y, recordando que $L = DF + iF'$, F y F' tienen al menos 4 ceros. \square

Corolario 1.12. Los índices de funciones D -hiperbólicas satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{ind}(M + iN) &\leq -2, \\ \text{ind}(f) &\leq 0. \end{aligned}$$

Demostración. Del teorema 1.4 y el corolario anterior obtenemos que

$$\text{ind}(M + iN) = -\frac{1}{2}|\{\varphi \in [0, 2\pi) \mid F'(\varphi) = 0\}| \leq -2,$$

mientras que el teorema 1.3 nos da que

$$\text{ind}(f) = 2 + \text{ind}(M + iN) \leq 2 - 2 = 0. \quad \square$$

De aplicar este corolario al caso de polinomios de grado impar obtenemos inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 1.13. Los índices de polinomios D -hiperbólicas con D impar satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{ind}(M + iN) &\leq -3, \\ \text{ind}(f) &\leq -1. \end{aligned}$$

Combinando este último corolario con el siguiente lema podemos concluir que todo polinomio 3-hiperbólico tiene índice -1 .

Lema 1.14. Si P es un polinomio 3-hiperbólico con parte angular f entonces

$$\text{ind}(f) \geq -1.$$

Demostración. Si P es un polinomio 3-hiperbólico entonces P es homogéneo de grado 3, por lo que debe ser de la forma

$$P(x, y) = \sum_{n=0}^3 a_n x^n y^{3-n},$$

por lo que f está dada por

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^3 a_n c^n \varphi s^{3-n}.$$

Para estimar el índice de f estimamos el número de ceros de f' en $[0, 2\pi)$. Una cuenta simple pero tediosa muestra que f' es de la forma

$$f'(\varphi) = \sum_{n=0}^3 b_n c^n \varphi s^{3-n},$$

donde las b_n son otra colección de coeficientes reales relacionados con las a_n . Si consideramos el polinomio en dos variables

$$\tilde{P}(x, y) = \sum_{n=0}^3 b_n x^n y^{3-n}$$

se verifica que $\tilde{P}(c\varphi, s\varphi) = f'(\varphi)$, por lo que para determinar el número de ceros de f' en $[0, 2\pi)$ basta determinar el número de ceros de \tilde{P} en S^1 . Para esto evaluamos a \tilde{P} en las rectas $y = \lambda x$ para obtener que

$$\tilde{P}(x, \lambda x) = x^n \sum_{n=0}^3 b_n \lambda^n,$$

por lo que, eligiendo x de tal forma que $(x, \lambda x) \in S^1$ tenemos que \tilde{P} se anula sólo si el polinomio

$$\sum_{n=0}^3 b_n \lambda^n$$

también se anula. Como este polinomio es de grado 3 se anula a lo más 3 veces y por la discusión anterior f' tiene a los más 3 ceros. Se sigue que

$$|\{\varphi \in [0, 2\pi) \mid f'(\varphi) = 0\}| \leq 3,$$

por lo que el teorema 1.4 implica que la desigualdad del lema. \square

En la demostración del lema evaluamos a un polinomio en dos variables en las rectas $y = \lambda x$ para todos los posibles valores de λ . Esta técnica será relevante más adelante y la llamaremos **proyektivización**. Como mencionamos antes este lema y el corolario anterior implican que todo polinomio 3-hiperbólico tiene índice -1 . Esto no implica que el espacio de polinomios hiperbólicos homogéneos de grado 3 sea conexo, pero ahora probaremos que éste es el caso. Para esto utilizaremos el siguiente lema:

Lema 1.15. *Si f es una función hiperbólica y R_θ es la rotación plana por un ángulo θ , entonces $f \circ R_\theta$ es hiperbólica para cualquier valor de θ .*

Demostración. Sean f y g funciones cualquiera. Si d denota la diferencial se cumple que

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f \circ g) &= d^2(f \circ g) \\ &= d(df \, dg) \\ &= d^2 f \, dg + df \, d^2 g \\ &= (\text{Hess } f) \, dg + df \, (\text{Hess } g). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Si g es una función lineal entonces $dg = g$ y $\text{Hess } g = 0$. Aplicando esto a (1.2) obtenemos que

$$\text{Hess}(f \circ g) = (\text{Hess } f) \, g.$$

Si $g = R_\theta$ y f es una función hiperbólica, entonces

$$\det(\text{Hess}(f \circ R_\theta)) = \det((\text{Hess } f) \, R_\theta) = \det(\text{Hess } f) \det(R_\theta) = \det(\text{Hess } f),$$

por lo que $f \circ R_\theta$ es una función hiperbólica. \square

El lema implica que todas las funciones que se obtienen de rotar las variables de $f(x, y)$ para una función hiperbólica f son también hiperbólicas. Ahora podemos probar la conexidad del espacio de polinomios 3-hiperbólicos.

Teorema 1.16. *El espacio de polinomios 3-hiperbólicos es conexo.*

Demostración. Probaremos que este espacio es conexo por trayectoria (ver la definición 1.6 de la topología de este espacio). Los polinomios de este espacio son de grado 3 y son homogéneos de grado 3, es decir, $f(\lambda \vec{x}) = \lambda^3 f(\vec{x})$. Esto último implica que los elementos de este espacio son polinomios de la forma

$$P(x, y) = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 \cong (A, B, C, D).$$

Como se puede rotar el plano de tal forma que $A = 0$, el lema 1.15 implica que todo punto (A, B, C, D) se puede conectar con un punto $(0, B', C', D')$ por medio de una trayectoria dentro del espacio. Por esta razón,

basta probar que todo par de puntos con $A = 0$ se puede conectar por medio de una curva en el espacio. Si $P = (0, B, C, D)$ entonces

$$Hess P = \begin{pmatrix} 2By & 2Bx + 2Cy \\ 2Bx + 2Cy & 6Dy + 2Cx \end{pmatrix}$$

y su determinante es

$$H_P = -4B^2x^2 - 4BCxy + 4(3BD - C^2)y^2,$$

que es la forma cuadrática

$$-4 \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^2 & \frac{1}{2}BC \\ \frac{1}{2}BC & C^2 - 3BD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

por lo que podemos aplicar el criterio de Sylvester¹ para determinar que la condición de hiperbolicidad es que los elementos de la diagonal y el determinante de la matriz sean positivos. Estas desigualdades son

$$\begin{aligned} B^2 &> 0, \\ C^2 &> 3BD, \\ B^2(C^2 - 3BD) - \frac{1}{4}B^2C^2 &> 0. \end{aligned}$$

Como la condición $B^2 > 0$ es lo mismo que $B \neq 0$, la tercera condición se puede escribir como

$$C^2 > 4BD,$$

por lo que tenemos las tres condiciones

$$\begin{aligned} B^2 &\neq 0, \\ C^2 &> 3BD, \\ C^2 &> 4BD. \end{aligned}$$

Si $BD < 0$, la segunda y la tercera condición se satisfacen inmediatamente. Si $BD \geq 0$ entonces $C^2 > 4BD$ implica que $C^2 > 3BD$, porque $4BD \geq 3BD$. Esto prueba que la tercera condición implica la segunda y la condición de hiperbolicidad para los puntos de la forma $(0, B, C, D)$ es

$$B \neq 0 \quad \text{y} \quad C^2 - 4BD > 0.$$

En \mathbb{R}^3 estas condiciones son que (B, C, D) no esté en el plano $B = 0$ y esté fuera del cono $C^2 - 4BD = 0$. Esta región se ilustra en la figura 1.1. Aunque esta región no es conexa en \mathbb{R}^3 sí lo es en \mathbb{R}^4 . Para ver esto tomamos $P = (0, B, C, D)$, R_t la rotación plana por un ángulo t y la curva $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $\gamma(t) = P \circ R_t$, la cual une a los puntos $(0, B, C, D)$ y $(0, -B, -C, -D)$ y, por el lema, es una curva de polinomios en el espacio. Con esta construcción, si $(0, B, C, D)$ y $(0, B', C', D')$ son puntos en nuestro espacio y B y B' tienen signos opuestos entonces podemos conectar a $(0, B, C, D)$ y $(0, -B, -C, -D)$ sin salir del espacio y luego conectar a $(0, -B, -C, -D)$ con $(0, B', C', D')$ en \mathbb{R}^3 . Por las consideraciones al inicio de la demostración, esto prueba el teorema. □

¹Ver el capítulo 7 de [Hor13]

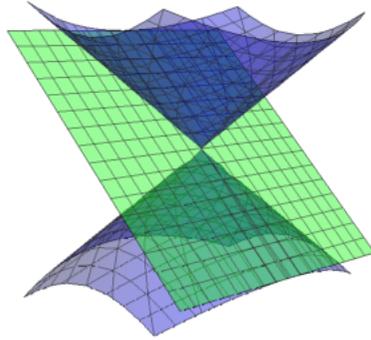


Figura 1.1: Región definida por $B = 0$ ó $C^2 - 4BD = 0$.

El teorema 1.7 implica que el espacio de polinomios hiperbólicos homogéneos de grado 5 es desconexo, por lo que es natural preguntarse dónde falla el argumento de este teorema para grados mayores. El lema 1.15 no depende de que la función f sea un polinomio, por lo que tampoco depende del grado del polinomio. Si el polinomio es de grado mayor a 3 su determinante hessiano no es una forma cuadrática, por lo que no es posible utilizar el criterio de Sylvester para determinar la condición de hiperbolicidad. A partir de este punto el argumento de la demostración no es válido y se necesitan otros métodos para determinar si el espacio es conexo. También podemos ver que el hecho de que el determinante hessiano no sea una forma cuadrática permite que el espacio tenga más de una componente conexas.

Capítulo 2

Polinomios Reales y Trigonométricos

En este capítulo probamos una colección de resultados que nos dan información sobre los ceros de polinomios y polinomios trigonométricos. Principalmente probamos teoremas que dan cotas sobre el número de ceros de una función de este tipo en un intervalo y, mejor aún, que permiten determinar cuántos ceros tienen en un intervalo. También relacionamos los resultados de polinomios de una variable con los resultados de polinomios trigonométricos que tienen sólo términos en \cos , debido a que estos pueden llevarse a polinomios de una variable por medio de polinomios de Chebyshev. Estos resultados son la base para desarrollar las nuevas clases de polinomios del capítulo 3.

2.1. Teorema de Sturm-Hurwitz

El siguiente teorema nos permite acotar inferiormente el número de ceros de un polinomio trigonométrico. Arnold lo utiliza para probar propiedades de las caústicas de funciones periódicas. También enfatiza que las distintas pruebas de este teorema no se conocen a profundidad.

Teorema 2.1 (de Sturm-Hurwitz). *Una función de la forma*

$$f(x) = \sum_{k=n}^m a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

tiene al menos $2n$ ceros en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Consideramos dos pruebas de este teorema. La primera utiliza sólo cálculo elemental y la segunda utiliza el Principio del Argumento de análisis complejo.

Prueba elemental:

Esta prueba está basada en [Kat03]. El Teorema de Rolle indica que entre dos ceros de una función f su derivada f' se anula al menos una vez, lo cual implica que si f tiene n ceros en un intervalo entonces f' tiene al menos $n - 1$ ceros en el mismo intervalo. Para funciones periódicas podemos decir algo más fuerte, ya que si f tiene periodo T y $z_1 < \dots < z_n$ son los ceros de f en el intervalo $[a, a + T)$, entonces $z_1 + T$ es un cero de f en $[a, z_1 + T]$ y f tiene $n + 1$ ceros en este intervalo, por lo que f' tiene al menos n ceros z'_i que cumplen $z'_i \in (z_i, z_{i+1})$ y $z'_n \in (z_n, z_1 + T)$. Se sigue que $z'_n < z_1 + T < z'_1 + T$, por lo que z'_n y $z'_1 + T$ son ceros distintos de f' y esta función tiene al menos n ceros en $[a, a + T)$, ya que si $z'_n \geq a + T$ entonces $z'_n - T$ pertenece al intervalo $[a, a + T)$.

Esto prueba que la derivada de una función periódica tiene al menos tantos ceros como la función original. Por inducción se prueba que si f es periódica y tiene n ceros en un intervalo entonces $f^{(l)}$ tiene al menos n ceros en el mismo intervalo para cualquier $l \in \mathbb{N}$. La función f del enunciado del teorema cumple estas condiciones, por lo que basta probar que f tiene una l -ésima primitiva con al menos $2n$ ceros en $[0, 2\pi)$ para que f tenga al menos el mismo número de ceros.

Escribiremos $f^{(-l)}$ para indicar una función cuya l -ésima derivada es f . Ahora, tomando g como el término principal de f , es decir,

$$g(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

tenemos que

$$g^{(-l)}(x) = \frac{1}{n^l} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

cuando l es múltiplo de 4. En el apéndice A probamos la identidad

$$a \cos x + b \sin x = c \cos(x + \varphi),$$

con

$$c = \operatorname{sgn}(a) \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right),$$

la cual implica que los máximos y mínimos de $g^{(-l)}$ son $\pm \frac{1}{n^l} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y cada uno se alcanza n veces en el intervalo. De la misma forma, se cumple que una l -ésima primitiva de f es

$$f^{(-l)} = \sum_{k=n}^m \frac{1}{k^l} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

si l es múltiplo de 4.

Utilizando las relaciones de ortogonalidad de $\sin kx$ y $\cos kx$ o la definición de coeficientes de Fourier (ver apéndice A) se puede verificar que

$$|a_k|, |b_k| \leq 2M = 2 \sup_{x \in [0, 2\pi)} |f(x)|.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, 2\pi)} |f^{(-l)} - g^{(-l)}| &= \sup_{x \in [0, 2\pi)} \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^l} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \\ &\leq 4M \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^l} \\ &\leq 4M \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^l} \\ &\leq 4M \int_n^{\infty} \frac{du}{u^l} = \frac{4M}{(l-1)n^{l-1}}. \end{aligned}$$

Eligiendo l lo suficientemente grande como para que se cumpla la desigualdad

$$\frac{1}{l-1} < \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{4Mn},$$

se cumple que

$$\frac{4M}{(l-1)n^{l-1}} < \frac{1}{n^l} \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

por lo cual

$$\sup_{x \in [0, 2\pi)} |f^{(-l)} - g^{(-l)}| < \frac{1}{n^l} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sup_{x \in [0, 2\pi)} |g^{(-l)}|.$$

Se sigue que $f^{(-l)}$ es positivo en los máximos de $g^{(-l)}$ y negativo en los mínimos, por lo que el teorema del valor intermedio garantiza que $f^{(-l)}$ tiene al menos $2n$ ceros y por lo tanto f también. \square

Ahora una prueba más corta, pero no elemental,

Prueba con Principio del Argumento:

Esta prueba está basada en [Pol78]. El principio del argumento indica que si f es una función meromorfa en el interior de una curva cerrada γ tal que f no tiene ceros ni polos en γ entonces

$$\text{ind}(f \circ \gamma, 0) = Z(f, \gamma) - P(f, \gamma),$$

donde $Z(f, \gamma)$ es el número de ceros de f en el interior de la curva γ y $P(f, \gamma)$ el número de polos. Consideramos el polinomio

$$f(z) = \sum_{k=n}^m (a_k - ib_k)z^k,$$

y la curva

$$\gamma(\theta) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

La función f tiene un cero de orden n en el origen y ningún polo, por lo que el índice de $f \circ \gamma$ es al menos n y la curva $f \circ \gamma$ corta el eje imaginario al menos $2n$ veces, es decir, $\text{Im } f$ tiene al menos $2n$ ceros. Tras una cuenta simple obtenemos que

$$\text{Im } f(e^{i\theta}) = \sum_{k=n}^m a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta$$

y se sigue el teorema. □

Arnold hace énfasis en que existen varias pruebas de este teorema pero pocas se comprenden a profundidad. Esto se debe a que existe una versión fuerte del teorema que dice que la conclusión sigue siendo válida si se consideran series de Fourier en vez de polinomios trigonométricos, siempre que la serie de Fourier converja uniformemente. En particular esto se aplica si se considera la serie de Fourier de una función de clase C^1 a trozos (ver apéndice A). Las dos pruebas que dimos se pueden usar para probar la versión fuerte del teorema añadiendo la hipótesis de convergencia uniforme.

Una tercera prueba consiste en utilizar que las soluciones de la ecuación de Fourier con condiciones de frontera nula en un rectángulo se pueden escribir como series de Fourier de \sin y \cos y utilizar la ecuación diferencial para estimar el número de ceros de la solución. No daremos detalles de las pruebas para el teorema general porque no las ocuparemos. Para fines prácticos podríamos dar sólo la prueba con principio del argumento, la cual es la más sencilla, pero la prueba elemental es bastante intuitiva y permite entender el resultado con bastante profundidad.

2.2. Teorema de Sturm

Los resultados de las siguientes dos secciones se pueden encontrar en [Ben90]. El Teorema de Sturm proporciona una herramienta para determinar el número de ceros de un polinomio en un intervalo cerrado. Para enunciar y demostrar el Teorema de Sturm necesitaremos varias definiciones y resultados previos.

Definición 2.1. Si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales entonces una sucesión finita de polinomios (f_0, \dots, f_n) es una **sucesión de Sturm** en $[a, b]$ para f si cumple las siguientes condiciones:

1. $f_0 = f$
2. f_n no tiene ningún cero en $[a, b]$
3. Si $0 < i < n$ y α es un cero de f_i entonces $f_{i+1}(\alpha)f_{i-1}(\alpha) < 0$
4. Si α es un cero de f_0 entonces

$$f_0 f_1(\alpha - \epsilon) < 0 \quad \text{y} \quad f_0 f_1(\alpha + \epsilon) > 0$$

para ϵ lo suficientemente pequeño.

Las propiedades de una sucesión de Sturm parecen oscuras y arbitrarias, por lo que la tarea inmediata es explicar la utilidad de cada una de ellas para desmistificarlas. Para comenzar haremos dos observaciones que enunciaremos como lemas. La primera se sigue inmediatamente de la propiedad 3 de una sucesión de Sturm, pero se usa frecuentemente, por lo que vale la pena enunciarla.

Lema 2.2. *Si $S = (f_0, \dots, f_n)$ es un sucesión de Sturm en $[a, b]$ para f entonces elementos adyacentes de la sucesión no comparten ceros.*

Demostración. Supongamos que $f_i(\alpha) = 0$ para alguna $\alpha \in [a, b]$ y $0 < i < n$ entonces la propiedad 3 de la definición 2.1 implica que $f_{i-1}(\alpha)f_{i+1}(\alpha) < 0$, que en particular implica que $f_{i-1}(\alpha) \neq 0$ y $f_{i+1}(\alpha) \neq 0$.

Como f_n no tiene ceros el enunciado se cumple por vacuidad en este caso. Si f_0 tiene un cero en α entonces f_1 no puede ser cero en α , ya que esto implicaría que f_1 comparte un cero con su antecesor, contradiciendo el enunciado para $0 < i < n$. \square

La siguiente observación está relacionada con la cuarta condición de una sucesión de Sturm. Observamos que esta condición quiere decir que $f_0 f_1$ es creciente en una vecindad de α . Con base en esto calculamos la derivada de este producto

$$(f_0 f_1)' = f_0' f_1 + f_0 f_1',$$

que en un cero de f_0 cumple que

$$(f_0 f_1)'(\alpha) = f_0' f_1(\alpha),$$

por lo que si $f_1 = f_0'$ tenemos que

$$(f_0 f_1)'(\alpha) = (f_0'(\alpha))^2 \geq 0,$$

por lo que la cuarta condición de la definición de sucesión de Sturm se cumple. Estas consideraciones prueban el siguiente resultado:

Lema 2.3. *Si $S(x) = (f_0, \dots, f_n)$ es un sucesión de polinomios en $[a, b]$ que cumple $f_1 = f_0'$ entonces S satisface la cuarta condición de la definición 2.1, es decir, si α es un cero de f_0 entonces*

$$f_0 f_1(\alpha - \epsilon) < 0 \quad y \quad f_0 f_1(\alpha + \epsilon) > 0$$

para ϵ lo suficientemente pequeño.

Intuitivamente, una sucesión de Sturm es una sucesión de polinomios tal que las raíces de cada polinomio tienen una estructura más simple que la del anterior, eventualmente terminando en un polinomio sin raíces. Hablando de manera más formal, una sucesión de Sturm de un polinomio f_0 guarda la información de sus raíces. Para explicar la manera precisa en la que esto sucede necesitamos la siguiente definición:

Definición 2.2. Dada una sucesión finita $a = (a_1, \dots, a_n)$ definimos su **variación** $V(a)$ como el número de parejas (a_i, a_{i+k}) en la sucesión que cumplen

1. $a_i a_{i+k} < 0$
2. $a_{i+r} = 0$ si $0 < r < k$.

Si $S = (f_0, \dots, f_n)$ nos resultará conveniente evaluar la sucesión en puntos x , por lo que definimos a $S(x)$ como el vector en \mathbb{R}^{n+1} que se obtiene al evaluar cada término de la sucesión en x , es decir, $S(x) = (f_0(x), \dots, f_n(x))$. Con estas definiciones podemos probar el siguiente teorema, el cual nos dice que el número de ceros de un polinomio en un intervalo se puede determinar si se conoce una sucesión de Sturm del polinomio.

Teorema 2.4. Si $S(x) = (f_0(x), \dots, f_n(x))$ es un sucesión de Sturm en $[a, b]$ para f y $\omega(x) = V(S(x))$, entonces el número de ceros distintos de f en $[a, b]$ es igual a $\omega(a) - \omega(b)$.

Demostración. La estrategia de la demostración es usar las propiedades de la definición de sucesión de Sturm para probar que

1. $\omega(x)$ es localmente constante si $f_i(x) \neq 0$ para cada i
2. $\omega(x)$ es localmente constante si $f_i(x) = 0$ para alguna $i \neq 0$
3. $\omega(x)$ disminuye por 1 al cruzar un cero de f ,

de donde concluiremos el resultado.

Sea $\alpha \in [a, b]$. Si $f_i(\alpha) \neq 0$ para cada $i \leq n$ entonces para cada i hay una vecindad de α en la cual f_i no cambia de signo e intersectando todas las vecindades obtenemos una vecindad de α en la que todas las funciones son del mismo signo y por lo tanto $\omega(x)$ es localmente constante en α .

Supongamos que $f_0(\alpha) \neq 0$ pero $f_i(\alpha) = 0$ para alguna $i < n$. La tercera condición de la definición de sucesión de Sturm implica que $f_{i+1}(\alpha)f_{i-1}(\alpha) < 0$. Existe una vecindad agujereada de α de radio ϵ donde la desigualdad se mantiene y ninguna de las tres funciones se anula, por lo que f_{i-1} y f_{i+1} no cambian de signo. Por ejemplo, supongamos que los signos de f_{i-1} y f_{i+1} son respectivamente $-$ y $+$ en esta vecindad. Tenemos las siguientes tablas de signos:

	$f_{i-1}(x)$	$f_i(x)$	$f_{i+1}(x)$		$f_{i-1}(x)$	$f_i(x)$	$f_{i+1}(x)$
$\alpha - \epsilon < x < \alpha$	-	+	+	$\alpha - \epsilon < x < \alpha$	-	-	+
$x = \alpha$	-	0	+	$x = \alpha$	-	0	+
$\alpha < x < \alpha + \epsilon$	-	-	+	$\alpha < x < \alpha + \epsilon$	-	+	+

Los dos casos restantes son cuando f_i no cambia de signo después de α y en cualquier caso resulta que $\omega(x)$ es constante en el intervalo. Si los signos de f_{i-1} y f_{i+1} son $+$ y $-$ sucede lo mismo. En cualquier caso resulta que $\omega(x)$ es localmente constante en los ceros de f_i si $i > 0$.

Si $f_0(\alpha) = 0$ la cuarta propiedad de la definición de sucesión de Sturm implica que el signo de $f_0 f_1$ debe pasar de ser $-$ en $(\alpha - \epsilon, \alpha)$ a ser $+$ en $(\alpha, \alpha + \epsilon)$, por lo que tenemos dos casos:

	$f_0(x)$	$f_1(x)$		$f_0(x)$	$f_1(x)$
$\alpha - \epsilon < x < \alpha$	-	+	$\alpha - \epsilon < x < \alpha$	+	-
$\alpha < x < \alpha + \epsilon$	+	+	$\alpha < x < \alpha + \epsilon$	-	-

En cualquier caso, el valor de $\omega(x)$ disminuye por 1 cuando x cruza un cero de f_0 . De las consideraciones anteriores obtenemos que el valor de $\omega(x)$ es localmente constante y disminuye sólo cuando x cruza un cero de f_0 de donde se sigue el teorema. □

De la demostración del teorema podemos observar la necesidad de cada una de las condiciones en la definición de sucesión de Sturm

1. La tercera condición implica, en primer lugar, que las f_i no tienen ceros en común y, más importante aún, que $\omega(x)$ es localmente constante en los ceros de cada f_i .
2. La cuarta condición se pide para asegurar que el valor de $\omega(x)$ sólo disminuye cuando x cruza un cero de la función f_0 .

3. La primera condición garantiza que los ceros de f sean los que determinan el cambio en el valor de $\omega(x)$.
4. La segunda condición no aparece explícitamente en la prueba pero es necesaria para garantizar que el procedimiento termina en un número finito de pasos, siendo el último una constante distinta de cero.

Probaremos una versión preliminar del teorema de Sturm que es válida sólo para polinomios sin raíces múltiples. Para esto utilizaremos el siguiente lema que es válido tanto para raíces simples como para raíces múltiples:

Lema 2.5. *Sea f el polinomio dado por*

$$f(x) = c \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)^{k_i}$$

Para ciertos naturales $\{k_i\}_{i=1}^n$ y complejos $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, entonces $M(x)$ el máximo común divisor de f entre f' está dado por

$$M(x) = c \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)^{k_i - 1}.$$

Demostración. Si α es una raíz de f entonces podemos escribir a f como

$$f(x) = (x - \alpha)^k h(x),$$

con h un polinomio tal que $h(\alpha) \neq 0$. Se sigue que

$$f'(x) = k(x - \alpha)^{k-1} h(x) + (x - \alpha)^k h'(x) = (x - \alpha)^{k-1} (kh(x) + (x - \alpha)h'(x)).$$

Sea

$$g = \frac{f'}{(x - \alpha)^{k-1}},$$

entonces

$$g(\alpha) = kh(\alpha) + (\alpha - \alpha)h'(\alpha) = kh(\alpha) \neq 0,$$

por lo que α es una raíz de f' con multiplicidad $k - 1$. Como α es raíz de f y f' también es raíz de M y su multiplicidad es el mínimo entre las multiplicidades de f y f' , es decir $k - 1$. Esto prueba que M tiene la forma del enunciado del lema. \square

Procedemos a probar la versión del teorema de Sturm para polinomios con raíces simples.

Teorema 2.6 (de Sturm para raíces simples). *Sea f un polinomio que sólo tiene raíces simples. Denotemos el residuo de la división euclidiana de f_i y f_{i-1} por $\text{rem}(f_{i-1}, f_i)$ y sea $S(x)$ la sucesión finita de polinomios definida por*

$$\begin{aligned} f_0 &= f, \\ f_1 &= f', \\ f_{i+1} &= -\text{rem}(f_{i-1}, f_i), \end{aligned}$$

concluyendo en f_n el máximo común divisor de f y f' .¹ Entonces S es una sucesión de Sturm en $[a, b]$ para f .

Demostración. La primera condición de la definición de sucesión de Sturm se cumple por definición y por el lema 2.2 sabemos que si $f_1 = f'_0$ entonces la cuarta condición se cumple. El algoritmo de la división euclidiana termina con el máximo común divisor polinomial, así que el lema 2.5 muestra que el máximo común divisor polinomial es de la forma

$$M(x) = c \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)^{k_i - 1},$$

¹Ver la sección 3.8 de [Bir97]

donde α_i son las raíces de f y k_i sus multiplicidades. Como f sólo tiene raíces simple se sigue que $k_i = 1$ para cada i y M es una constante. Esto muestra que el algoritmo termina con un polinomio constante por lo que se cumple la segunda condición. Para probar la condición restante primero probaremos que f_0 y f_1 no pueden tener raíces comunes. Para ver esto supongamos que $f_0(a) = 0$ entonces

$$f_0(x) = (x - a)q(x),$$

donde q es un polinomio que no se anula en a . Se sigue que

$$f_1(x) = f_0'(x) = q(x) + (x - a)q'(x),$$

por lo cual $f_1(a) = q(a) \neq 0$. Para concluir que se cumple la tercera propiedad utilizamos que, como $f_{i+1} = -rem(f_{i-1}, f_i)$, se cumple que

$$f_{i-1} = f_i g_i - f_{i+1},$$

donde g_i es algún polinomio. Si α es un cero de f_i entonces

$$f_{i-1}(\alpha) = -f_{i+1}(\alpha),$$

por lo que basta probar que las f_i no pueden compartir ceros. Probaremos por inducción que si $f_{i-1}(\alpha) = 0$ entonces $f_{i-k}(\alpha) = 0$ para cada $k \leq i$. Se cumple que

$$f_{i-2} = f_{i-1}g_{i-1} - f_i,$$

por lo que si $f_{i-1}(\alpha) = 0$ entonces $f_{i-2}(\alpha) = 0$. Supongamos que $f_{i-j}(\alpha) = 0$ para cada $j \leq k$ con $k < i$ fija. Como

$$f_{i-(k+1)} = f_{i-k}g_{i-k} - f_{i-(k-1)}$$

y $f_{i-k}(\alpha) = f_{i-(k-1)}(\alpha) = 0$ se sigue que $f_{i-(k+1)}(\alpha) = 0$. Esto termina la inducción. Como $f_{i-k}(\alpha) = 0$ para cada $k \leq i$, en particular, f_0 y f_1 tienen ceros en común, que es una contradicción. \square

Ejemplo 2.1. Como ejemplo consideremos $f(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$. Tenemos que $f'(x) = 2x - 3$ y se verifica que

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)(2x - 3) - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)f'(x) - \frac{1}{4},$$

por lo que $rem(f, f') = -\frac{1}{4}$ y la sucesión de Sturm que genera el teorema anterior para esta función es

$$\begin{aligned} f_0 &= x^2 - 3x + 2, \\ f_1 &= 2x - 3, \\ f_2 &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Como los ceros de f son 1 y 2 podemos considerar los valores de $\omega(x)$ en $0, \frac{3}{2}$ y 3. Tenemos que

$$\begin{aligned} S(0) &= \left(2, -3, \frac{1}{4}\right), \\ S\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\right), \\ S(3) &= \left(2, 3, \frac{1}{4}\right), \end{aligned}$$

por lo que $\omega(0) = 2$, $\omega(\frac{3}{2}) = 1$ y $\omega(3) = 0$, comprobándose que f tiene dos ceros $[0, 3]$ y que el valor de $\omega(x)$ disminuye por 1 al cruzar cada cero de f . En la figura 2.1 se ilustra este ejemplo.

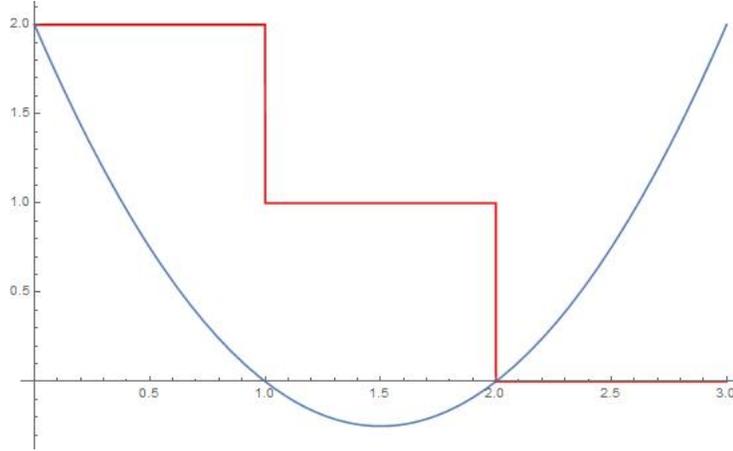


Figura 2.1: Gráficas de $f(x)$ (azul) y $\omega(x)$ (rojo).

Concluimos esta sección con la versión general del teorema de Sturm. Esta versión no nos genera una sucesión de Sturm para un polinomio, pero sí determina el número de ceros de un polinomio en un intervalo, aún si el polinomio tiene raíces múltiples.

Teorema 2.7 (de Sturm). *Sea f un polinomio en $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) \neq 0$. Denotemos el residuo de la división euclidiana de f_i y f_{i-1} por $\text{rem}(f_{i-1}, f_i)$ y sea S la sucesión finita de polinomios definida por*

$$\begin{aligned} f_0 &= f, \\ f_1 &= f', \\ f_{i+1} &= -\text{rem}(f_{i-1}, f_i), \end{aligned}$$

concluyendo en f_n el máximo común divisor de f y f' . Entonces el número de ceros distintos de f en $[a, b]$ está dado por $\omega(a) - \omega(b)$, donde $\omega(x) = V(S(x))$.

Demostración. Primero veamos que como f_n divide a f_0 y f_1 también divide a f_i para cada i . La prueba es por inducción. El caso base se cumple porque f_n divide a f_0 . Si f_n divide a f_i para $i \leq j < n$, se sigue de la definición de f_{i+1} que

$$f_{i-1} = f_i g_i - f_{i+1},$$

por lo que

$$f_{i+1} = f_i g_i - f_{i-1},$$

que es divisible entre f_n porque f_{i-1} y f_i lo son. Se sigue que la sucesión de polinomios definida por

$$\tilde{f}_i = \frac{f_i}{f_n}$$

está bien definida. El lema 2.5 implica que el polinomio \tilde{f}_0 tiene las mismas raíces que f_0 pero todas sus raíces son simples. Como a y b no son raíces de f_0 entonces tampoco son raíces de f_n , por lo que la variación de la sucesión finita

$$\tilde{f}_i(a) = \frac{f_i(a)}{f_n(a)}$$

es la misma que de la sucesión $(f_i(a))$. Esto se debe a que si $f_n(a) > 0$ entonces los términos de ambas sucesiones tienen el mismo signo y por lo tanto la misma variación y si $f_n(a) < 0$ los términos de la sucesión tienen signos opuestos y el número de cambios de signos es el mismo. Un argumento análogo muestra que lo mismo pasa con $\tilde{f}_i(b)$. El teorema se seguirá de la versión para raíces simples si podemos probar que $(\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_n)$ es una sucesión de Sturm para \tilde{f}_0 . Verificamos las cuatro condiciones:

1. Se cumple por definición de la sucesión.
2. $\tilde{f}_n = \frac{f_n}{f_n} = 1$ por lo que no se anula en $[a, b]$.
3. Si $i < s$ tenemos por definición que

$$\tilde{f}_{i-1} = \tilde{f}_i g_i - \tilde{f}_{i+1}.$$

Si $\tilde{f}_i(\alpha) = 0$ entonces $\tilde{f}_{i-1}(\alpha) = -\tilde{f}_{i+1}(\alpha)$, por lo que si ninguno de los polinomios es cero en α se cumple esta condición. Se cumple que

$$\tilde{f}_i = \tilde{f}_{i+1} g_{i+1} - \tilde{f}_{i+2},$$

por lo que si $\tilde{f}_{i+1}(\alpha) = 0$ entonces $\tilde{f}_{i+2}(\alpha) = 0$ y, de manera recursiva, $\tilde{f}_{i+k}(\alpha) = 0$, obteniendo que $\tilde{f}_n(\alpha) = 0$ contradiciendo la primera condición.

4. Sea α un cero de f_0 , entonces

$$f_0 = (x - \alpha)^k h,$$

con h un polinomio tal que $h(\alpha) \neq 0$ y, por la prueba del lema 2.5,

$$f_1 = (x - \alpha)^{k-1} Q,$$

con Q un polinomio tal que $Q(\alpha) \neq 0$. De derivar a f_0 obtenemos que

$$f_1 = (x - \alpha)^k h' + k(x - \alpha)^{k-1} h,$$

por lo cual

$$\tilde{f}_0 = (x - \alpha) \frac{h}{Q} \quad \text{y} \quad \tilde{f}_1 = (x - \alpha) \frac{h'}{Q} + \frac{kh}{Q}.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 \tilde{f}_1 &= (x - \alpha) \frac{h}{Q} \left((x - \alpha) \frac{h'}{Q} + \frac{kh}{Q} \right) \\ &= (x - \alpha)^2 \frac{hh'}{Q^2} + k(x - \alpha) \frac{h^2}{Q^2} \\ &= \frac{x - \alpha}{Q^2} (h^2 + (x - \alpha)hh'). \end{aligned}$$

Si $|x - \alpha| < \epsilon$ el factor hh' está acotado, por lo que haciendo ϵ lo suficientemente pequeño el término constante domina y el signo de $\tilde{f}_0 \tilde{f}_1$ es igual al signo de $(x - \alpha) \frac{h^2}{Q^2}$, por lo que

$$\tilde{f}_0 \tilde{f}_1(\alpha - \epsilon) < 0 \quad \text{y} \quad \tilde{f}_0 \tilde{f}_1(\alpha + \epsilon) > 0$$

para ϵ suficientemente pequeña.

Esto completa la prueba. □

Como parte de la prueba del Teorema probamos el siguiente corolario:

Corolario 2.8. Sean f un polinomio en $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) \neq 0$ y f_n el máximo común divisor de f y f' . Si (f_0, \dots, f_n) es la sucesión del teorema 2.7 entonces la sucesión $(\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_n)$ definida por

$$\tilde{f}_i = \frac{f_i}{f_n}$$

es una sucesión de Sturm para f en $[a, b]$.

Vale la pena notar que la sucesión del teorema no es una sucesión de Sturm, pero se puede utilizar para determinar el número de ceros distintos de f de todas formas. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2. Consideremos el polinomio

$$f_0(x) = (x-1)^2(x-2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

con derivada

$$f_1(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 3(x-1)\left(x - \frac{5}{3}\right),$$

por lo que $f_2(x) = -\text{rem}(f_0, f_1) = \frac{2}{9}(x-1)$, verificándose que f_2 es un múltiplo escalar de $x-1$ que es el máximo común divisor de f y f' . Notamos que tanto f_0 y f_1 tienen una raíz en $x=1$, por lo que $S(x) = (f_0(x), f_1(x), f_2(x))$ no es una sucesión de Sturm. Sin embargo, tenemos que

$$S(0) = \left(-2, 5, -\frac{2}{9}\right)$$

y

$$S(3) = \left(4, 8, \frac{4}{9}\right),$$

por lo que $\omega(0) = 2$ y $\omega(3) = 0$, de donde concluimos que el número de ceros de f en $[0, 3]$ es $\omega(0) - \omega(3) = 2$. Ahora construimos la sucesión de \tilde{f}_i 's como en el teorema y obtenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{f}_0(x) &= \frac{9}{2}(x^2 - 3x + 2) = \frac{9}{2}(x-1)(x-2), \\ \tilde{f}_1(x) &= \frac{9}{2}(3x-5)\end{aligned}$$

y

$$\tilde{f}_2(x) = 1,$$

la cual sí es una sucesión de Sturm para \tilde{f}_0 . Comparando esta sucesión con la del ejemplo anterior notamos que ambas empiezan con el mismo polinomio, salvo una constante, pero el segundo término de la sucesión es diferente.

2.3. Ceros de Polinomios en Intervalos No Acotados

Notemos que el teorema 2.4 es válido sólo si el intervalo del enunciado es acotado. En esta sección extenderemos el teorema al caso en el que el intervalo no es acotado. Comenzamos con un lema.

Lema 2.9. Sean $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ con $a_n \neq 0$ y $M = \frac{1}{|a_n|} \sum_{i=0}^n |a_i| = 1 + \frac{1}{|a_n|} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$. Si α es un cero de P entonces $|\alpha| < M$.

Demostración. Para la demostración utilizaremos el Teorema de Rouché. Consideremos las funciones

$$g(x) = x^n \quad \text{y} \quad \tilde{P}(x) = \frac{1}{a_n} \sum_{i=0}^n a_i x^i = x^n + \frac{1}{a_n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

y notamos que \tilde{P} tiene los mismos ceros que P ya que es un múltiplo escalar de P . Ahora estimamos la diferencia entre \tilde{P} y g :

$$\begin{aligned}|\tilde{P}(x) - g(x)| &= \left| x^n + \frac{1}{a_n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - x^n \right| \\ &\leq \frac{1}{|a_n|} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| |x^i| \\ &< \frac{1}{|a_n|} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| |x^i| + 1.\end{aligned}$$

Si $|x| = M > 1$ entonces $1 < |x|^{n-1}$ y $|x|^i < |x|^{n-1}$ si $i < n-1$, por lo cual

$$|\tilde{P}(x) - g(x)| < \left(\frac{1}{|a_n|} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| + 1 \right) |x|^{n-1} = M|x|^{n-1} = |x|^n = |g(x)|.$$

La cuenta anterior muestra que se cumplen las hipótesis del teorema de Rouché para \tilde{P} , g y $\partial B_M(0)$, por lo que \tilde{P} y g tienen el mismo número de ceros en $B_M(0)$. Como g tiene un cero de orden n en 0 se sigue que \tilde{P} tiene sus n ceros en $B_M(0)$ y por lo tanto P también. \square

Teorema 2.10. Sean P un polinomio con coeficientes reales, (f_0, \dots, f_n) una sucesión de Sturm para P , $\omega(+\infty)$ la variación de la sucesión de coeficientes principales de $f_i(x)$ y $\omega(-\infty)$ la variación de la sucesión de coeficientes principales de $f_i(-x)$, entonces el número de raíces reales de P es $\omega(-\infty) - \omega(+\infty)$.

Demostración. Aplicando el lema anterior a cada uno de los polinomios f_i obtenemos constantes M_i que acotan los ceros del polinomio respectivo, por lo que la constante $M = \max\{M_i\}$ es tal que todos los ceros de cada f_i están contenidos en $(-M, M)$. Se sigue que ninguno de los polinomios cambia de signo fuera de este intervalo, más aún, el signo de $f_i(\pm M)$ es el mismo que el del coeficiente principal de $f_i(\pm x)$. Concluimos que $\omega(\pm M) = \omega(\pm\infty)$ y de aplicar el teorema (2.4) a la sucesión de Sturm (f_0, \dots, f_n) en el intervalo $[-M, M]$ obtenemos que el número de ceros de P es igual a

$$\omega(-M) - \omega(M) = \omega(-\infty) - \omega(+\infty).$$

\square

2.4. Polinomios de Chebyshev

En esta sección probaremos algunas propiedades elementales de los polinomios de Chebyshev. Principalmente veremos que se pueden utilizar para escribir polinomios trigonométricos en coseno en polinomios de una variable evaluados en coseno. Utilizando esta técnica podemos aplicar los teoremas de las secciones pasadas para determinar el número de ceros de un polinomio trigonométrico. La técnica se basa en la siguiente proposición:

Proposición 2.11. $c_n \varphi$ se puede escribir como un polinomio de grado n en $c\varphi$.

Demostración. Se cumple que

$$\begin{aligned} c_n \varphi &= \operatorname{Re}(e^{in\varphi}) \\ &= \operatorname{Re}((e^{i\varphi})^n) \\ &= \operatorname{Re}(c\varphi + is\varphi)^n \\ &= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c^{n-k} \varphi i^k s^k \varphi. \end{aligned}$$

A la parte real contribuyen sólo los términos con k par, por lo que haciendo $k = 2j$ obtenemos que

$$\begin{aligned} c_n \varphi &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} c^{n-2j} \varphi i^{2j} s^{2j} \varphi \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} c^{n-2j} \varphi (-1)^j (1 - c^2 \varphi)^j, \end{aligned}$$

expresión que es un polinomio de grado n en $c\varphi$, probando la proposición. \square

Esta proposición nos permite hacer la siguiente definición:

Definición 2.3. El n -ésimo **polinomio de Chebyshev** $T_n(x)$ es el polinomio de grado n que satisface la identidad

$$T_n(c\varphi) = cn\varphi.$$

La proposición anterior tiene el siguiente corolario importante:

Corolario 2.12. *Se cumple que*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k.$$

Demostración. En la prueba de la proposición 2.11 obtuvimos que

$$cn\varphi = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} c^{n-2j} \varphi (-1)^j (1 - c^2\varphi)^j.$$

El resultado se sigue de esta ecuación y de la definición de los polinomios de Chebyshev. \square

Ahora obtenemos los primeros polinomios de Chebyshev. Para esto utilizamos las conocidas fórmulas de ángulo múltiple del coseno:

$$\begin{aligned} c2\varphi &= 2c^2\varphi - 1, \\ c3\varphi &= 4c^3\varphi - 3c\varphi, \\ c4\varphi &= 8c^4\varphi - 8c^2\varphi + 1, \end{aligned}$$

por lo cual se cumple que

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1. \end{aligned}$$

Utilizando los polinomios de Chebyshev podemos transformar expresiones de la forma

$$P(\varphi) = \sum_{i=0}^n a_n cn\varphi,$$

en polinomios reales de tal forma que al conocer los ceros de una de las funciones podemos conocer los ceros de la otra. Para esto notamos que

$$P(\varphi) = \sum_{i=0}^n a_n cn\varphi = \sum_{i=0}^n a_n T_n(c\varphi),$$

y al hacer $x = c\varphi$ obtenemos un polinomio definido en $[-1, 1]$ con las propiedades deseadas. Como ejemplo consideremos el polinomio trigonométrico

$$P(\varphi) = c\varphi + 3c3\varphi + 2c4\varphi.$$

Se sigue que

$$P(\varphi) = T_1(c\varphi) + 3T_3(c\varphi) + 2T_4(c\varphi),$$

por lo que haciendo $x = c\varphi$ obtenemos el polinomio real

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x) &= T_1(x) + 3T_3(x) + 2T_4(x) \\ &= x + 3(4x^3 - 3x) + 2(8x^4 - 8x^2 + 1) \\ &= 2 - 8x - 16x^2 + 12x^3 + 16x^4. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Nuevas Clases de Polinomios D -Hiperbólicos

En este capítulo aplicamos las técnicas desarrolladas en el capítulo 2 para obtener polinomios D -hiperbólicos con nuevos valores posibles para el índice. Para esto notamos que los polinomios encontrados por Arnold van perdiendo valores posibles del índice conforme D aumenta. Posteriormente abstraemos la forma de estos polinomios para proponer nuevas clases de polinomios D -hiperbólicos que recuperan estos valores perdidos del índice.

3.1. Objetivo de las Nuevas Clases

En la sección 1.3 obtuvimos que si D y k son enteros, $D - k$ es un número par y $\sqrt{D} < k < D$ entonces la función

$$f = r^D \cos k\varphi = (x^2 + y^2)^{\frac{D-k}{2}} \operatorname{Re}(x + iy)^k$$

es un polinomio D -hiperbólico con índice $2 - k$. Nos referiremos a esta familia de polinomios como los **polinomios de Arnold**. Como D define el grado del polinomio y el índice del polinomio depende únicamente de k , la condición $\sqrt{D} < k < D$ restringe los posibles valores del índice para un grado fijo. Conforme D aumenta la condición inferior $\sqrt{D} < k$ hace que perdamos valores del índice que los polinomios de Arnold alcanzaban en grados más bajos. Para ilustrar esto consideramos los polinomios

$$P^k(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^k \quad \text{y} \quad Q^n(x, y) = (x^2 + y^2)^n,$$

los cuales cumplen que $P^k Q^n$ es un polinomio de Arnold de grado $D = k + 2n$ con índice $2 - k$. Se sigue que si $D = 7$ y $k = 3$ entonces $\sqrt{7} < 3 < 7$, por lo que 3 es un valor admisible de k y hay un polinomio D -hiperbólico con índice -1 . Si subimos de grado a $D = 9$ entonces la desigualdad inferior $\sqrt{9} < 3$ deja de cumplirse y el polinomio de Arnold correspondiente deja de ser hiperbólico, por lo que en grado $D = 9$ perdemos a -1 como valor posible del índice. Esto mismo sucede en grados más altos para otros valores del índice como ilustramos en la siguiente tabla, en la cual sólo consideramos D impar y los polinomios en rojo indican los polinomios de Arnold que dejan de ser hiperbólicos:

Grado (D)	
3	P^3
5	$P^5 \quad P^3Q$
7	$P^7 \quad P^5Q \quad P^3Q^2$
9	$P^9 \quad P^7Q \quad P^5Q^2 \quad P^3Q^3$
11	$P^{11} \quad P^9Q \quad P^7Q^2 \quad P^5Q^3 \quad P^3Q^4$
13	$P^{13} \quad P^{11}Q \quad P^9Q^2 \quad P^7Q^3 \quad P^5Q^4 \quad P^3Q^5$
15	$P^{15} \quad P^{13}Q \quad P^{11}Q^2 \quad P^9Q^3 \quad P^7Q^4 \quad P^5Q^5 \quad P^3Q^6$
17	$P^{17} \quad P^{15}Q \quad P^{13}Q^2 \quad P^{11}Q^3 \quad P^9Q^4 \quad P^7Q^5 \quad P^5Q^6 \quad P^3Q^7$
19	$P^{19} \quad P^{17}Q \quad P^{15}Q^2 \quad P^{13}Q^3 \quad P^{11}Q^4 \quad P^9Q^5 \quad P^7Q^6 \quad P^5Q^7 \quad P^3Q^8$
21	$P^{21} \quad P^{19}Q \quad P^{17}Q^2 \quad P^{15}Q^3 \quad P^{13}Q^4 \quad P^{11}Q^5 \quad P^9Q^6 \quad P^7Q^7 \quad P^5Q^8 \quad P^3Q^9$

Esta tabla la resumimos en la siguiente, la cual indica los valores perdidos del índice en cada grado.

Grado (D)	Índices perdidos
3, 5, 7	---
9, 11, 13	-1
15, 17, 19	-1, -3
21	-1, -3, -5

Lo que buscamos ahora son polinomios D -hiperbólicos que recuperen estos valores del índice para poder identificar nuevas componentes conexas en el espacio de polinomios correspondiente. Para esto observamos que los polinomios de Arnold se pueden escribir como P^kQ^n donde P^k define el índice y Q^n “empuja” este valor del índice a un espacio de polinomios de grado mayor. Basados en esta observación buscamos obtener nuevas clases de polinomios definidas por un factor que defina el índice y un factor que eleve el grado sin perder la hiperbolicidad y de esta manera recuperar los valores perdidos del índice en los polinomios de Arnold. Con este fin consideramos la familia de polinomios

$$R^{2n}(x, y) = x^{2n} + y^{2n}$$

para reemplazar a la familia Q^n con el propósito de elevar el grado de los polinomios. No estamos dando por hecho que el índice sea el mismo cuando multiplicamos por otro polinomio ya que esto no es en general cierto. En cada caso probaremos de manera independiente que el índice no cambia.

Como el primer valor del índice que se pierde es -1 , que se corresponde con $k = 3$, resulta natural considerar a P^3 como el polinomio que define el índice y utilizar a R^{2n} para elevar el grado. Este valor del índice se pierde en el grado $D = 9$, por lo que nos interesa que P^3R^6 sea hiperbólico. En este caso tenemos que

$$P^3R^6(x, y) = (x^3 - 3xy^2)(x^6 + y^6)$$

y se verifica que su hessiano es

$$h(x, y) = -144(3x^{14} + 7x^{12}y^2 - 15x^{10}y^4 + 100x^8y^6 - 133x^6y^8 + x^4y^{10} + x^2y^{12} + 4y^{14})$$

que cumple que $h(1, 1) = 4680 > 0$, por lo que $P^3 R^6$ no es hiperbólico.

Este ejemplo ilustra que también es necesario reemplazar los polinomios P^k por otra familia de polinomios \tilde{P}^k . Esta familia no la construiremos en general, sino que trataremos únicamente los casos $k = 3$ y $k = 5$, para los cuales obtendremos los polinomios \tilde{P}^3 y \tilde{P}^5 perturbando los coeficientes de P^3 y P^5 de manera adecuada.

3.2. Clase $\tilde{P}^3 R^{2n}$

Las cuentas de esta sección se hicieron en Mathematica y se encuentran en el apéndice B. La verificación de que $\tilde{P}^3 R^6$ es hiperbólico se encuentra en B.2 y la verificación de que su índice es -1 se encuentra en B.4. La perturbación de P^k que consideraremos para $k = 3$ es

$$\tilde{P}^3(x, y) = x^3 - xy^2.$$

En coordenadas polares este polinomio se puede escribir como

$$\begin{aligned} \tilde{P}^3(r, \varphi) &= r^3 c\varphi(c^2\varphi - s^2\varphi) \\ &= r^3(2c^3\varphi - c\varphi). \end{aligned}$$

Se sigue que en coordenadas polares el polinomio $\tilde{P}^3 R^{2n}$ tiene la forma

$$\tilde{P}^3 R^{2n}(r, \varphi) = r^{2n+3}(2c^3\varphi - c\varphi)(c^{2n}\varphi + s^{2n}\varphi),$$

por lo que su parte angular es

$$f_n(\varphi) = (2c^3\varphi - c\varphi)(c^{2n}\varphi + s^{2n}\varphi).$$

Queremos ver que esta función satisface el criterio de hiperbolicidad del teorema 1.2. En este caso tenemos que $D = 2n + 3$ y debemos calcular $h_{2n} = D^2 f_n^2 + D f_n f_n'' - (D - 1) f_n'^2$. Tras una simplificación utilizando polinomios de Chebyshev obtenemos que

$$\begin{aligned} h_{2n}(\varphi) &= (1 - c^2\varphi)^{\frac{1}{2}(4n-2)}(2(2n-1)(1 - c^2\varphi)(2c^2\varphi + 1) - 6n) - 2(2n + 2c^2\varphi + 1)c^{4n}\varphi \\ &\quad + (1 - c^2\varphi)^{\frac{1}{2}(2n-2)}((n(4n(n+1) - 1) + 1)(8c^4\varphi - 8c^2\varphi + 1) \\ &\quad + (n-1)(2n+1)(2n+3) + 2(2c^2\varphi - 1))c^{2n}\varphi. \end{aligned}$$

De esta expresión lo importante es notar que sólo hay potencias pares de $c\varphi$, por lo que podemos hacer la sustitución $x = c^2\varphi$ y obtener un polinomio definido en $[0, 1]$. Si llamamos $p_n(x)$ a este polinomio obtenemos que

$$\begin{aligned} p_n(x) &= -2x^{2n}(2n + 2x + 1) + x^n((n(4n(n+1) - 1) + 1)(8x^2 - 8x + 1) \\ &\quad + (n-1)(2n+1)(2n+3) + 2(2x-1))(1-x)^{n-1} \\ &\quad + (2(2n-1)(1-x)(2x+1) - 6n)(1-x)^{2n-1}. \end{aligned}$$

Si consideramos $n = 3$ obtenemos el polinomio p_3 que se corresponde con $\tilde{P}^3 R^6$ y obtenemos que

$$p_3(x) = 1152x^7 - 3528x^6 + 3924x^5 - 2004x^4 + 546x^3 - 150x^2 + 50x - 8.$$

Se verifica directamente que ni 0 ni 1 son ceros de p_3 , por lo que podemos utilizar el teorema 2.7 para obtener que la sucesión $S_3(x)$ de 7 polinomios, la cual no escribo explícitamente debido a su tamaño. Como sólo nos interesan los signos de los elementos de sucesiones finitas, de ahora en adelante pondremos sólo 1 y -1 para denotar el signo de la entrada correspondiente. Esta sucesión cumple que

$$S_3(0) = (-1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1)$$

y

$$S_3(1) = (-1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1),$$

por lo que $\omega_3(1) = \omega_3(0) = 4$ y $p_3(x)$ no tiene ningún cero en $[0, 1]$. Como $p_3(0) = -8 < 0$ y p_3 no tiene ceros en el intervalo concluimos que p_3 es estrictamente negativo y por lo tanto h_6 también lo es, de donde concluimos que $\tilde{P}^3 R^6$ es un polinomio de 9-hiperbólico.

Haciendo un programa análogo al que se muestra en el apéndice B.2 se puede verificar que lo mismo pasa hasta, al menos, $n = 11$.

Para verificar que $\tilde{P}^3 R^6$ tiene índice -1 calculamos la derivada de su parte angular y obtenemos que

$$f'_n(\varphi) = s(t)((1 - 6c^2\varphi)(s^{2n}\varphi + c^{2n}\varphi) + 2nc^2\varphi(c^2\varphi s^{2n-2}\varphi - c^{2n}\varphi)),$$

en la cual podemos sustituir $s^2\varphi$ por $1 - c^2\varphi$ y $c^2\varphi$ por $2c^2\varphi - 1$ para obtener que

$$f'_n(\varphi) = s\varphi(1 - 6c^2\varphi)(c^{2n}\varphi + (1 - c^2\varphi)^n) + 2n(2c^2\varphi - 1)(c^2\varphi(1 - c^2\varphi)^{n-1} - c^{2n}\varphi).$$

Notamos que $f'_n(\varphi) = s\varphi e_0(c^2\varphi)$ donde e_0 es el polinomio

$$e_0(x) = (1 - 6x)(x^n + (1 - x)^n) + 2n(2x - 1)(x(1 - x)^{n-1} - x^n).$$

Cuando $n = 3$ obtenemos que

$$e_0(x) = -42x^3 + 45x^2 - 15x + 1$$

y aplicando el teorema 2.7 a este polinomio obtenemos la sucesión de polinomios $S(x) = (e_0(x), e_1(x), e_2(x), e_3(x))$ con

$$e_1(x) = -126x^2 + 90x - 15$$

$$e_2(x) = \frac{11}{14} - \frac{5}{7}x$$

$$e_3(x) = \frac{3423}{50}.$$

Se sigue que

$$S(0) = (1, -1, 1, 1)$$

y

$$S(1) = (-1, -1, 1, 1).$$

Se observa que $\omega(0) - \omega(1) = 1$ por lo que e_0 tiene un cero en $[0, 1]$. Se verifica inmediatamente que ni 0 ni 1 son raíces de e_0 , por lo que si x_0 es el cero de e_0 en $[0, 1]$ la ecuación $c^2\varphi = x_0$ tiene cuatro soluciones en $[0, 2\pi)$. Esto implica que $f'_3(\varphi) = s\varphi e_0(c^2\varphi)$ se anula al menos cuatro veces en $[0, 2\pi)$. Como 1 no es raíz de e_0 entonces $e_0(c^2\varphi) \neq 0$ en $\varphi = 0, \pi$, por lo que los ceros de $s\varphi$ son distintos de los cuatro ceros de $e_0(c^2\varphi)$ y f'_3 se anula exactamente 6 veces en $[0, 2\pi)$. Aplicando el teorema 1.4 concluimos que el índice de $\tilde{P}^3 R^6$ es -1 .

3.3. Clase $\tilde{P}^5 R^{2n}$

Las cuentas de esta sección se hicieron en Mathematica y se encuentran en el apéndice B. La verificación de que $\tilde{P}^5 R^{10}$ es hiperbólico se encuentra en B.3 y la verificación de que su índice es -3 se encuentra en B.4. La perturbación de P^k que consideraremos para $k = 5$ es

$$\tilde{P}^5(x, y) = x^5 - 15x^3y^2 + 15xy^4.$$

Se sigue que

$$\tilde{P}^5 R^{2n}(x, y) = (x^5 - 15x^3y^2 + 15xy^4)(x^{2n} + y^{2n}).$$

Para probar la hiperbolicidad de estos polinomios calculamos el hessiano directamente para obtener que

$$\begin{aligned} Hess_n(x, y) = & \frac{4}{y^2} (-(-15(2n^2 + 5n + 3)y^2x^{2n+2} + (2n^2 + 9n + 10)x^{2n+4} + 15n(2n + 1)y^4x^{2n} + 10x^4y^{2n} - 45x^2y^{2n+2}) \\ & (15(2n^2 + 3n + 1)x^2y^{2n+2} - 15(2n^2 + 7n + 6)y^{2n+4} - 90y^4x^{2n} + 15y^2x^{2n+2} - n(2n - 1)x^4y^{2n}) \\ & - 25(6(2n + 1)y^4x^{2n} - 3(2n + 3)y^2x^{2n+2} + nx^4y^{2n} - 9(n + 1)x^2y^{2n+2} + 3(n + 2)y^{2n+4})^2) \end{aligned}$$

Ahora consideramos las rectas $y = ax$ para todos los valores posibles de a y evaluamos a $Hess_n$ en estas rectas. De esta manera obtenemos polinomios en una variable y queremos probar que estos polinomios son negativos para cualquier valor de a . Lo que obtenemos es

$$\begin{aligned} Hess_n(x, ax) = & -4(((15a^4n(2n + 1) - 15a^2(2n^2 + 5n + 3) + 2n^2 + 9n + 10) - 5(9a^2 - 2)a^{2n}) \\ & (-15a^2((2n^2 + 7n + 6)a^{2n} + 6) + 15((2n^2 + 3n + 1)a^{2n} + 1) - n(2n - 1)a^{2n-2}) \\ & - 25(3a^3((n + 2)a^{2n} + (4n + 2)) - 3a(3(n + 1)a^{2n} + (2n + 3)) + na^{2n-1})^2)x^{4n+6}. \end{aligned}$$

Notamos que en esta expresión el primer y segundo renglón consisten de un sólo sumando donde el primer renglón es un factor y el segundo es otro, mientras que el tercer renglón es un segundo sumando. Con esto en mente, de examinar con cuidado esta expresión vemos que

$$Hess_n(x, ax) = g_n(a)x^{4n+6},$$

donde g_n es un polinomio de grado $4n + 6$. Como la potencia de x que multiplica a g_n es par este factor es positivo, por lo que basta ver que g_n es negativo en \mathbb{R} para que $\tilde{P}^5 R^{2n}$ sea hiperbólico.

Los polinomios de Arnold pierden a -3 como valor del índice en grado $D = 15$, por lo que nos interesa considerar $\tilde{P}^5 R^{10}$, que se corresponde con $n = 5$. Obtenemos que

$$\begin{aligned} g_5(a) = & -100(63a^{26} + 27a^{24} + 114a^{22} - 9a^{20} + a^{18} - 6039a^{16} + 12564a^{14} \\ & - 6963a^{12} + 840a^{10} - 27a^8 + 198a^6 - 63a^4 + 63a^2 + 9). \end{aligned}$$

Como el polinomio está definido en un intervalo no acotado utilizaremos el teorema 2.10 y el corolario 2.8. En este caso obtenemos una sucesión $S_5(x)$ consistente de 27 polinomios, el último de los cuales es constante, por lo que la sucesión misma es una sucesión de Sturm para g_5 y obtenemos que

$$S_5(\infty) = (-1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1)$$

y

$$S_5(-\infty) = (-1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1),$$

por lo que $\omega(\infty) = \omega(-\infty) = 13$ y g_5 no tiene ningún cero real. Como $g_5(0) = -900$ se sigue que g_5 es estrictamente negativo y $\tilde{P}^5 R^{10}$ es hiperbólico.

Para verificar que el índice de $\tilde{P}^5 R^{10}$ tiene índice -3 partimos de su parte angular

$$f_n(\varphi) = c\varphi(15c^8\varphi - 60c^6\varphi + 106c^4\varphi - 75c^2(t) + 15)(s^{2n}(t) + c^{2n}\varphi)$$

y obtenemos que

$$\begin{aligned} f'_n(\varphi) = & -2s\varphi(60c^6\varphi - 180c^4\varphi + 212c^2(t) - 75)c^2\varphi(c^{2n}\varphi + (1 - c^2\varphi)^n) \\ & - (15c^8\varphi - 60c^6\varphi + 106c^4\varphi - 75c^2\varphi + 15)(c^{2n}\varphi + (1 - c^2\varphi)^n) \\ & + 2n(15c^8\varphi - 60c^6\varphi + 106c^4\varphi - 75c^2\varphi + 15)(c^2\varphi(1 - c^2\varphi)^{n-1} - c^{2n}\varphi). \end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior se cumple que $f'_n(\varphi) = s\varphi h_0(c^2\varphi)$ donde $h_0(x)$ es el polinomio dado por

$$\begin{aligned} h_0(x) = & -5(27x^4 - 84x^3 + 106x^2 - 45x + 3)(x^n + (1 - x)^n) \\ & - 2n(15x^4 - 60x^3 + 106x^2 - 75x + 15)(x^n + (-1)^n x(1 - x)^{n-1}). \end{aligned}$$

Cuando $n = 5$ obtenemos que

$$h_0(x) = -5(255x^8 - 1350x^7 + 3328x^6 - 4642x^5 + 3960x^4 - 2086x^3 + 631x^2 - 90x + 3).$$

Aplicando el teorema 2.7 obtenemos una sucesión $S(x)$ de 7 polinomios de tal manera que

$$S(0) = (-1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1)$$

y

$$S(1) = (-1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1),$$

por lo que h_0 tiene 2 ceros en $[0, 1]$. Un argumento análogo al del caso anterior nos permite concluir que f'_5 se anula 10 veces $[0, 2\pi)$ y por el teorema 1.4 $\tilde{P}^5 R^{10}$ tiene índice -3 .

3.4. Discusión de las Nuevas Clases

De los ejemplos que dimos de las clases $\tilde{P}^3 R^{2n}$ y $\tilde{P}^5 R^{2n}$ no podemos concluir que el método expuesto funcione, pero los resultados obtenidos son prometedores en esta dirección. La intuición de “empujar” índices a espacios de polinomios de grado mayor parece ser correcta, pero es necesario determinar las condiciones necesarias para garantizar por un lado que el polinomio obtenido sigue siendo hiperbólico y por otro lado que el índice no se altera al llevar al polinomio a un espacio de grado mayor. Una vez que se determinen estas condiciones será posible definir de manera general a las familias \tilde{P}^k . Hasta ahora definimos estas familias perturbando la familia P^k , es decir, hicimos

$$\tilde{P}^k = P^k + O^k.$$

La elección las perturbaciones O^k fue por prueba y error. Al notar que cada P^k contiene un término de la forma x^k , permitimos que O^k contuviera los mismos términos que P^k , excepto x^k , pero con coeficientes distintos.

Una vez que obtengamos resultados que nos permitan elegir adecuadamente la familia \tilde{P}^k podemos aplicar los métodos expuestos en este trabajo para determinar la hiperbolicidad de los polinomios y demostrar que tienen el índice adecuado. Para trabajar con $\tilde{P}^3 R^{2n}$ y $\tilde{P}^5 R^{2n}$ utilizamos dos métodos distintos. En el caso de $\tilde{P}^3 R^{2n}$ utilizamos polinomios de Chebyshev para reducir el problema a encontrar los ceros de un polinomio en un intervalo acotado. La ventaja de este método es que el teorema 2.7 se puede aplicar directamente. Desafortunadamente este método no se puede aplicar a cualquier polinomio $P = r^D F$, ya que se necesita que la función $h(F)$ dependa sólo de coseno. Este no es el caso, por ejemplo, en la familia $\tilde{P}^5 R^{2n}$, donde no se puede aplicar este método. El método utilizado para estudiar la familia $\tilde{P}^5 R^{2n}$ consistió en “proyectivizar” el hessiano del polinomio estudiando su comportamiento en las rectas $y = ax$ para todos los valores posibles de a . Este método tiene la virtud de poder aplicarse a cualquier polinomio, pero tiene la desventaja de que el polinomio que se estudia está definido en un intervalo no acotado. Esto nos impide aplicar el teorema 2.7 y en su lugar necesitamos aplicar el corolario 2.8 y el teorema 2.10, lo cual complica significativamente el procedimiento. Concluimos que, de ser aplicable, el método de polinomios de Chebyshev es preferible, pero falta determinar si es posible elegir a la familia \tilde{P}^k de tal manera que este método sea útil. En caso de que esto no sea posible podemos utilizar el método de la proyectivización cuya aplicabilidad no depende de la forma de los polinomios.

Apéndice A

Series de Fourier e Identidades Trigonométricas

Las pruebas de los resultados de este apéndice se pueden encontrar en [Fol92] o [Car00]. Una **serie de Fourier** es una serie de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

El problema básico de series de Fourier es saber cuando una función periódica f se puede escribir como una serie de Fourier.

Tenemos las siguientes integrales, conocidas como las relaciones de ortogonalidad de *sin* y *cos*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \pi \delta_{mn}.$$

De estas relaciones se sigue que si f se puede escribir como una serie de Fourier entonces los coeficientes de la serie son

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Definimos

$$S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

con los coeficientes antes definidos, converja a f o no.

Denotaremos por \mathcal{T}_n a los polinomios trigonométricos de grado n . Se cumple que

$$\mathcal{T}_n = \text{Span}(\{1, \cos x, \dots, \cos nx, \sin x, \dots, \sin nx\}).$$

Teorema A.1. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\inf_{T \in \mathcal{T}_n} \|f - T\|_2 = \|f - S_n(f)\|_2$.
2. $\|S_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2$ (Desigualdad de Bessel).
3. $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_2^2$.

Teorema A.2. Si $f \in L^2([0, 2\pi), \lambda)$ con λ la medida de Lebesgue entonces $S_n(f)$ converge a f en $L^2([0, 2\pi), \lambda)$.

Teorema A.3. Sea f una función periódica, continua, diferenciable a trozos y con derivada acotada, entonces $S_n(f) \rightarrow f$ uniformemente.

Probaremos la siguiente proposición que se utiliza en la prueba del teorema 2.1

Proposición A.4. Se cumple que

$$a \cos x + b \sin x = c \cos(x + \varphi)$$

con

$$c = \operatorname{sgn}(a)\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right),$$

Demostración. Sea φ como en el enunciado de la proposición. Utilizando la identidad del coseno de una suma obtenemos que

$$\cos(x + \varphi) = \cos x \cos \varphi - \sin x \sin \varphi. \quad (\text{A.1})$$

Utilizando la definición de φ y las identidades

$$\sin \arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{y} \quad \cos \arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

obtenemos que

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a \operatorname{sgn}(a)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

y

$$\sin \varphi = -\frac{b a \operatorname{sgn}(a)}{a \sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{b \operatorname{sgn}(a)}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Sustituyendo en A.1 obtenemos que

$$\cos(x + \varphi) = \frac{a \operatorname{sgn}(a)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b \operatorname{sgn}(a)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{\operatorname{sgn}(a)}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a \cos x + b \sin x).$$

De despejar se sigue el resultado. □

Apéndice B

Cálculos con Mathematica

B.1. Criterio de Hiperbolicidad

```
In[1]:= f[r, t] = r^D F[t]
Out[1]= r^D F[t]

In[2]:= dxdf = Cos[t] D[f[r, t], r] - (1/r) Sin[t] D[f[r, t], t];
dydf = Sin[t] D[f[r, t], r] + (1/r) Cos[t] D[f[r, t], t];

In[4]:= dxdf = Cos[t] D[dxdf, r] - (1/r) Sin[t] D[dxdf, t] // Simplify
Out[4]= r^{-2+D} \left( \frac{1}{2} D (D + (-2 + D) Cos[2 t]) F[t] - (-1 + D) Sin[2 t] F'[t] + Sin[t]^2 F''[t] \right)

In[5]:= dydf = Sin[t] D[dydf, r] + (1/r) Cos[t] D[dydf, t] // Simplify
Out[5]= r^{-2+D} \left( -\frac{1}{2} D (-D + (-2 + D) Cos[2 t]) F[t] + Cos[t] (2 (-1 + D) Sin[t] F'[t] + Cos[t] F''[t]) \right)

In[6]:= dxyf = Sin[t] D[dxdf, r] + (1/r) Cos[t] D[dxdf, t] // Simplify
Out[6]= \frac{1}{2} r^{-2+D} ((-2 + D) D F[t] Sin[2 t] + 2 (-1 + D) Cos[2 t] F'[t] - Sin[2 t] F''[t])

In[7]:= ((dxdf) (dydf) - (dxyf)^2) // Simplify
Out[7]= (-1 + D) r^{-4+2D} (D^2 F[t]^2 - (-1 + D) F'[t]^2 + D F[t] F''[t])
```

B.2. Clase $\tilde{P}^3 R^{2n}$

Partimos de la parte angular de P3R2n

$$\text{In[8]:= } F[t] = (-\text{Cos}[t] + 2 \text{Cos}[t]^3) (\text{Cos}[t]^{2+n} + \text{Sin}[t]^{2+n})$$

$$\text{Out[8]:= } (-\text{Cos}[t] + 2 \text{Cos}[t]^3) (\text{Cos}[t]^{2n} + \text{Sin}[t]^{2n})$$

Calculamos las derivadas de F

$$\text{In[9]:= } F1[t] = D[F[t], t] // \text{Simplify}$$

$$\text{Out[9]:= } \text{Sin}[t] \left((1 - 6 \text{Cos}[t]^2) (\text{Cos}[t]^{2n} + \text{Sin}[t]^{2n}) + 2n \text{Cos}[2t] (-\text{Cos}[t]^{2n} + \text{Cos}[t]^2 \text{Sin}[t]^{-2+2n}) \right)$$

$$\text{In[10]:= } F2[t] = D[F1[t], t] // \text{Simplify}$$

$$\text{Out[10]:= } -6 \text{Cos}[t]^{3+2n} + \text{Cos}[t]^{1+2n} (7 + 10n - 6(1+2n) \text{Cos}[2t]) + \\ 2n \text{Cos}[t]^{-1+2n} (-1+2n \text{Cos}[2t]) \text{Sin}[t]^2 - \text{Cos}[t] (-7-2n + (6+4n) \text{Cos}[2t]) \text{Sin}[t]^{2n} + \\ 2 \text{Cos}[t]^3 \text{Sin}[t]^{-2+2n} (-5n+2n(2+n) \text{Cos}[2t] - 3 \text{Sin}[t]^2)$$

Calculamos la función $h(F) = D^2 F^2 + DFF'' - (D-1)(F')^2$. En este caso $D=2n+3$.

$$\text{In[11]:= } h[t] = (2n+3)^2 F[t]^2 + (2n+3) F[t] \times F2[t] - (2n+2) F1[t]^2 // \text{FullSimplify}$$

$$\text{Out[11]:= } -2 \text{Cos}[t]^{4n} (2+2n + \text{Cos}[2t]) + \\ \text{Cos}[t]^{2n} \left((-1+n) (1+2n) (3+2n) + 2 \text{Cos}[2t] + (1+n) (-1+4n(1+n)) \right) \text{Cos}[4t] \text{Sin}[t]^{-2+2n} + \\ \text{Sin}[t]^{-2+4n} (-6n+2(-1+2n)(2+\text{Cos}[2t]) \text{Sin}[t]^2)$$

Reemplazamos las potencias pares de Sin por $1-\text{Cos}^2$

$$\text{In[12]:= } h2[t] = (h[t] /. \text{Sin}[t] \rightarrow \text{Sqrt}[1 - \text{Cos}[t]^2])$$

$$\text{Out[12]:= } -2 \text{Cos}[t]^{4n} (2+2n + \text{Cos}[2t]) + \\ (1 - \text{Cos}[t]^2)^{\frac{1}{2}(-2+4n)} (-6n+2(-1+2n)(1 - \text{Cos}[t]^2)(2 + \text{Cos}[2t])) + \text{Cos}[t]^{2n} \\ (1 - \text{Cos}[t]^2)^{\frac{1}{2}(-2+2n)} \left((-1+n) (1+2n) (3+2n) + 2 \text{Cos}[2t] + (1+n) (-1+4n(1+n)) \right) \text{Cos}[4t]$$

Utilizamos polinomios de Chebyshev para sólo aparezcan potencias de Cos en esta expresión

$$\text{In[13]:= } h3[t] = h2[t] /. \{\text{Cos}[2t] \rightarrow \text{ChebyshevT}[2, \text{Cos}[t]], \text{Cos}[4t] \rightarrow \text{ChebyshevT}[4, \text{Cos}[t]]\}$$

$$\text{Out[13]:= } -2 \text{Cos}[t]^{4n} (1+2n + 2 \text{Cos}[t]^2) + \\ (1 - \text{Cos}[t]^2)^{\frac{1}{2}(-2+4n)} (-6n+2(-1+2n)(1 - \text{Cos}[t]^2)(1 + 2 \text{Cos}[t]^2)) + \\ \text{Cos}[t]^{2n} (1 - \text{Cos}[t]^2)^{\frac{1}{2}(-2+2n)} \left((-1+n) (1+2n) (3+2n) + \right. \\ \left. 2(-1+2 \text{Cos}[t]^2) + (1+n) (-1+4n(1+n)) \right) (1 - 8 \text{Cos}[t]^2 + 8 \text{Cos}[t]^4)$$

Sustituimos $x=\text{Cos}^2$ en la expresión anterior para obtener el polinomio con el que trabajaremos

$$\text{In[14]:= } P[x] = (-2 (\text{Cos}[t]^2)^{2n} (1+2n + 2 \text{Cos}[t]^2) + \\ (1 - \text{Cos}[t]^2)^{2n-1} (-6n+2(-1+2n)(1 - \text{Cos}[t]^2)(1 + 2 \text{Cos}[t]^2)) + \\ (\text{Cos}[t]^2)^n (1 - \text{Cos}[t]^2)^{n-1} \left((-1+n) (1+2n) (3+2n) + 2(-1+2 \text{Cos}[t]^2) + \right. \\ \left. (1+n) (-1+4n(1+n)) \right) (1 - 8 \text{Cos}[t]^2 + 8 \text{Cos}[t]^4)) /. \text{Cos}[t]^2 \rightarrow x$$

$$\text{Out[14]:= } -2 x^{2n} (1+2n + 2x) + (1-x)^{-1+2n} (-6n+2(-1+2n)(1-x)(1+2x)) + \\ (1-x)^{-1+n} x^n \left((-1+n) (1+2n) (3+2n) + 2(-1+2x) + (1+n) (-1+4n(1+n)) \right) (1 - 8x + 8x^2)$$

Hacemos $n=3$ para trabajar con P3R6

In[15]:= **P3[x] = Expand[P[x] /. n -> 3]**

Out[15]= $-8 + 50x - 150x^2 + 546x^3 - 2004x^4 + 3924x^5 - 3528x^6 + 1152x^7$

Obtenemos la sucesión del teorema de Sturm para este polinomio

In[16]:= **e0[x] = P3[x]**

e1[x] = D[e0[x], x]

e2[x] = -PolynomialRemainder[e0[x], e1[x], x]

e3[x] = -PolynomialRemainder[e1[x], e2[x], x]

e4[x] = -PolynomialRemainder[e2[x], e3[x], x]

e5[x] = -PolynomialRemainder[e3[x], e4[x], x]

e6[x] = -PolynomialRemainder[e4[x], e5[x], x]

e7[x] = -PolynomialRemainder[e5[x], e6[x], x]

Out[16]= $-8 + 50x - 150x^2 + 546x^3 - 2004x^4 + 3924x^5 - 3528x^6 + 1152x^7$

Out[17]= $50 - 300x + 1638x^2 - 8016x^3 + 19620x^4 - 21168x^5 + 8064x^6$

Out[18]= $\frac{39}{8} - \frac{675x}{28} + \frac{267x^2}{56} + 189x^3 - \frac{10287x^4}{28} + \frac{1413x^5}{7}$

Out[19]= $-\frac{5096492}{24649} + \frac{31303032x}{24649} - \frac{67892580x^2}{24649} + \frac{52475376x^3}{24649} - \frac{6299928x^4}{24649}$

Out[20]= $\frac{24302765750984}{22968225003} - \frac{48550921346680x}{7656075001} + \frac{100697654169687x^2}{7656075001} - \frac{68586688404382x^3}{7656075001}$

Out[21]= $-\frac{17454513648439236821220}{47711203560791394145369} + \frac{76855455462728638020600x}{47711203560791394145369} - \frac{59015561007176134946478x^2}{47711203560791394145369}$

Out[22]= $-\frac{10722224783390283309624928249172278}{17333923338199600606556121611961} + \frac{30448236906762944697865294437472600x}{17333923338199600606556121611961}$

Out[23]= $-\frac{116657518596976091965469861006025359531253921}{2428924082655711159609825426595802985918005000}$

Evaluamos en 0 y 1 preservando sólo los signos

In[29]:= **Sturm3[x] = {Sign[e0[x]], Sign[e1[x]], Sign[e2[x]],**

Sign[e3[x]], Sign[e4[x]], Sign[e5[x]], Sign[e6[x]], Sign[e7[x]]};

Sturm3[x] /. x -> 0

Sturm3[x] /. x -> 1

Out[30]= $\{-1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1\}$

Out[31]= $\{-1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1\}$

B.3. Clase $\tilde{P}^5 R^{2n}$

Partimos de P5R2n

$$\text{In[*]}:= \text{P5}[x, y] = x^5 - 15 x^3 y^2 + 15 x y^4$$

$$\text{Out[*]}:= x^5 - 15 x^3 y^2 + 15 x y^4$$

$$\text{In[*]}:= \text{P5R2n}[x, y] = \text{P5}[x, y] (x^{2n} + y^{2n})$$

$$\text{Out[*]}:= (x^5 - 15 x^3 y^2 + 15 x y^4) (x^{2n} + y^{2n})$$

Calculamos las parciales de P5R2n y su hessiano

$$\text{In[*]}:= \text{dxP} = \text{D}[\text{P5R2n}[x, y], x];$$

$$\text{dyP} = \text{D}[\text{P5R2n}[x, y], y];$$

$$\text{dxxP} = \text{D}[\text{dxP}, x];$$

$$\text{dyyP} = \text{D}[\text{dyP}, y];$$

$$\text{dxyP} = \text{D}[\text{dxP}, y];$$

$$\text{In[*]}:= \text{hess}[x, y] = ((\text{dxxP})(\text{dyyP}) - (\text{dxyP})^2) // \text{Simplify}$$

$$\text{Out[*]}:= \frac{1}{y^2} 4 \left(-25 (-3 (3 + 2n) x^{2+2n} y^2 + 6 (1 + 2n) x^{2n} y^4 + n x^4 y^{2n} - 9 (1 + n) x^2 y^{2+2n} + 3 (2 + n) y^{4+2n})^2 - \right. \\ \left. \left((10 + 9n + 2n^2) x^{4+2n} - 15 (3 + 5n + 2n^2) x^{2+2n} y^2 + 15n (1 + 2n) x^{2n} y^4 + 10x^4 y^{2n} - 45x^2 y^{2+2n} \right) \right. \\ \left. \left(15x^{2+2n} y^2 - 90x^{2n} y^4 - n(-1 + 2n) x^4 y^{2n} + \right. \right. \\ \left. \left. 15(1 + 3n + 2n^2) x^2 y^{2+2n} - 15(6 + 7n + 2n^2) y^{4+2n} \right) \right)$$

Evaluamos al hessiano en las rectas $y=ax$

$$\text{In[*]}:= \text{h}[x] = \text{hess}[x, y] /. y \rightarrow a * x // \text{Simplify}$$

$$\text{Out[*]}:= \frac{1}{a^2} \\ 4x^6 \left(-25 (n (ax)^{2n} - 3a^2 ((3 + 2n) x^{2n} + 3(1 + n) (ax)^{2n}) + 3a^4 ((2 + 4n) x^{2n} + (2 + n) (ax)^{2n}))^2 - \right. \\ \left((10 + 9n + 2n^2 + 15a^4 n (1 + 2n) - 15a^2 (3 + 5n + 2n^2)) x^{2n} - 5(-2 + 9a^2) (ax)^{2n} \right) \\ \left. \left(-n(-1 + 2n) (ax)^{2n} + 15a^2 (x^{2n} + (1 + 3n + 2n^2) (ax)^{2n}) - \right. \right. \\ \left. \left. 15a^4 (6x^{2n} + (6 + 7n + 2n^2) (ax)^{2n}) \right) \right)$$

Hacemos $n=5$ para trabajar con P5R10

$$\text{h10}[x] = \text{h}[x] /. n \rightarrow 5 // \text{Simplify}$$

$$\text{Out[*]}:= -700 (9 + 63 a^2 - 63 a^4 + 198 a^6 - 27 a^8 + 840 a^{10} - \\ 6963 a^{12} + 12564 a^{14} - 6039 a^{16} + a^{18} - 9 a^{20} + 114 a^{22} + 27 a^{24} + 63 a^{26}) x^{26}$$

Consideramos el polinomio en a que multiplica a x^{26}

$$\text{In[*]}:= \text{g10}[a] = \text{h10}[x] / (7 x^{26})$$

$$\text{Out[*]}:= -100 (9 + 63 a^2 - 63 a^4 + 198 a^6 - 27 a^8 + 840 a^{10} - \\ 6963 a^{12} + 12564 a^{14} - 6039 a^{16} + a^{18} - 9 a^{20} + 114 a^{22} + 27 a^{24} + 63 a^{26})$$

Obtenemos la sucesión del teorema de Sturm para este polinomio.

```

In[ ]:= f0[a] = g10[a];
f1[a] = D[f0[a], a];
f2[a] = -PolynomialRemainder[f0[a], f1[a], a];
f3[a] = -PolynomialRemainder[f1[a], f2[a], a];
f4[a] = -PolynomialRemainder[f2[a], f3[a], a];
f5[a] = -PolynomialRemainder[f3[a], f4[a], a];
f6[a] = -PolynomialRemainder[f4[a], f5[a], a];
f7[a] = -PolynomialRemainder[f5[a], f6[a], a];
f8[a] = -PolynomialRemainder[f6[a], f7[a], a];
f9[a] = -PolynomialRemainder[f7[a], f8[a], a];
f10[a] = -PolynomialRemainder[f8[a], f9[a], a];
f11[a] = -PolynomialRemainder[f9[a], f10[a], a];
f12[a] = -PolynomialRemainder[f10[a], f11[a], a];
f13[a] = -PolynomialRemainder[f11[a], f12[a], a];
f14[a] = -PolynomialRemainder[f12[a], f13[a], a];
f15[a] = -PolynomialRemainder[f13[a], f14[a], a];
f16[a] = -PolynomialRemainder[f14[a], f15[a], a];
f17[a] = -PolynomialRemainder[f15[a], f16[a], a];
f18[a] = -PolynomialRemainder[f16[a], f17[a], a];
f19[a] = -PolynomialRemainder[f17[a], f18[a], a];
f20[a] = -PolynomialRemainder[f18[a], f19[a], a];
f21[a] = -PolynomialRemainder[f19[a], f20[a], a];
f22[a] = -PolynomialRemainder[f20[a], f21[a], a];
f23[a] = -PolynomialRemainder[f21[a], f22[a], a];
f24[a] = -PolynomialRemainder[f22[a], f23[a], a];
f25[a] = -PolynomialRemainder[f23[a], f24[a], a];
f26[a] = -PolynomialRemainder[f24[a], f25[a], a]

```

Out[]:= 900

Definimos un comando que obtiene el grado de un polinomio

```

AlgebraicDegree[eqn_, vars_List] := Max[Total[
  GroebnerBasis`DistributedTermsList[eqn /. Equal -> Subtract, vars][[1, All, 1]], {2}]]
AlgebraicDegree[eqn_] := AlgebraicDegree[eqn, Variables[eqn]]

```

Obtenemos las sucesiones de coeficientes principales de $S(x)$ y $S(-x)$ preservando sólo los signos

```

In[ ]:= winfty = {Sign[Coefficient[f0[a], a, AlgebraicDegree[f0[a]]]],
  Sign[Coefficient[f1[a], a, AlgebraicDegree[f1[a]]]],
  Sign[Coefficient[f2[a], a, AlgebraicDegree[f2[a]]]],
  Sign[Coefficient[f3[a], a, AlgebraicDegree[f3[a]]]],
  Sign[Coefficient[f4[a], a, AlgebraicDegree[f4[a]]]],
  Sign[Coefficient[f5[a], a, AlgebraicDegree[f5[a]]]],
  Sign[Coefficient[f6[a], a, AlgebraicDegree[f6[a]]]],
  Sign[Coefficient[f7[a], a, AlgebraicDegree[f7[a]]]],
  Sign[Coefficient[f8[a], a, AlgebraicDegree[f8[a]]]],
  Sign[Coefficient[f9[a], a, AlgebraicDegree[f9[a]]]],
  Sign[Coefficient[f10[a], a, AlgebraicDegree[f10[a]]]],
  Sign[Coefficient[f11[a], a, AlgebraicDegree[f11[a]]]],
  Sign[Coefficient[f12[a], a, AlgebraicDegree[f12[a]]]],
  Sign[Coefficient[f13[a], a, AlgebraicDegree[f13[a]]]],
  Sign[Coefficient[f14[a], a, AlgebraicDegree[f14[a]]]],
  Sign[Coefficient[f15[a], a, AlgebraicDegree[f15[a]]]],
  Sign[Coefficient[f16[a], a, AlgebraicDegree[f16[a]]]],
  Sign[Coefficient[f17[a], a, AlgebraicDegree[f17[a]]]],
  Sign[Coefficient[f18[a], a, AlgebraicDegree[f18[a]]]],
  Sign[Coefficient[f19[a], a, AlgebraicDegree[f19[a]]]],
  Sign[Coefficient[f20[a], a, AlgebraicDegree[f20[a]]]],
  Sign[Coefficient[f21[a], a, AlgebraicDegree[f21[a]]]],
  Sign[Coefficient[f22[a], a, AlgebraicDegree[f22[a]]]],
  Sign[Coefficient[f23[a], a, AlgebraicDegree[f23[a]]]],
  Sign[Coefficient[f24[a], a, AlgebraicDegree[f24[a]]]],
  Sign[Coefficient[f25[a], a, AlgebraicDegree[f25[a]]]],
  Sign[Coefficient[f26[a], a, AlgebraicDegree[f26[a]]]]}

Out[ ]:= {-1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1,
  -1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1}

```

```

In[ ]:= wminsinfty = {Sign[Coefficient[f0[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f0[a]]]],
  Sign[Coefficient[f1[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f1[a]]]],
  Sign[Coefficient[f2[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f2[a]]]],
  Sign[Coefficient[f3[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f3[a]]]],
  Sign[Coefficient[f4[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f4[a]]]],
  Sign[Coefficient[f5[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f5[a]]]],
  Sign[Coefficient[f6[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f6[a]]]],
  Sign[Coefficient[f7[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f7[a]]]],
  Sign[Coefficient[f8[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f8[a]]]],
  Sign[Coefficient[f9[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f9[a]]]],
  Sign[Coefficient[f10[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f10[a]]]],
  Sign[Coefficient[f11[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f11[a]]]],
  Sign[Coefficient[f12[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f12[a]]]],
  Sign[Coefficient[f13[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f13[a]]]],
  Sign[Coefficient[f14[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f14[a]]]],
  Sign[Coefficient[f15[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f15[a]]]],
  Sign[Coefficient[f16[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f16[a]]]],
  Sign[Coefficient[f17[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f17[a]]]],
  Sign[Coefficient[f18[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f18[a]]]],
  Sign[Coefficient[f19[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f19[a]]]],
  Sign[Coefficient[f20[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f20[a]]]],
  Sign[Coefficient[f21[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f21[a]]]],
  Sign[Coefficient[f22[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f22[a]]]],
  Sign[Coefficient[f23[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f23[a]]]],
  Sign[Coefficient[f24[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f24[a]]]],
  Sign[Coefficient[f25[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f25[a]]]],
  Sign[Coefficient[f26[a] /. a -> -a, a, AlgebraicDegree[f26[a]]]]}

Out[ ]:= {-1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1}

```

B.4. Índices de $\tilde{P}^3 R^{2n}$ y $\tilde{P}^5 R^{2n}$

P3R2n

F3 es la derivada de la parte angular de P3R2n

$$\begin{aligned} \text{In[*]}:= & \mathbf{F3[t]} = \\ & \mathbf{Sin[t]} \left((1 - 6 \mathbf{Cos[t]}^2) (\mathbf{Cos[t]}^{2n} + \mathbf{Sin[t]}^{2n}) + 2n \mathbf{Cos[2t]} (-\mathbf{Cos[t]}^{2n} + \mathbf{Cos[t]}^2 \mathbf{Sin[t]}^{-2+2n}) \right) \\ \text{Out[*]}:= & \mathbf{Sin[t]} \left((1 - 6 \mathbf{Cos[t]}^2) (\mathbf{Cos[t]}^{2n} + \mathbf{Sin[t]}^{2n}) + 2n \mathbf{Cos[2t]} (-\mathbf{Cos[t]}^{2n} + \mathbf{Cos[t]}^2 \mathbf{Sin[t]}^{-2+2n}) \right) \end{aligned}$$

Dividimos entre Sin y reemplazamos Sin^2 por 1 - Cos^2

$$\begin{aligned} \text{In[*]}:= & \mathbf{f3[t]} = (\mathbf{F3[t]} / \mathbf{Sin[t]}) /. \{\mathbf{Sin[t]} \rightarrow \mathbf{Sqrt[1 - Cos[t]^2]}, \mathbf{Cos[2t]} \rightarrow 2 \mathbf{Cos[t]^2 - 1}\} \\ \text{Out[*]}:= & (1 - 6 \mathbf{Cos[t]}^2) (\mathbf{Cos[t]}^{2n} + (1 - \mathbf{Cos[t]}^2)^n) + \\ & 2n (-1 + 2 \mathbf{Cos[t]}^2) \left(-\mathbf{Cos[t]}^{2n} + \mathbf{Cos[t]}^2 (1 - \mathbf{Cos[t]}^2)^{\frac{1}{2}(-2+2n)} \right) \end{aligned}$$

Hacemos x=Cos^2

$$\begin{aligned} \text{In[*]}:= & \mathbf{P3[x]} = \mathbf{f3[t]} /. \{\mathbf{Cos[t]^2} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{Cos[t]^{2n}} \rightarrow \mathbf{x^n}\} // \mathbf{Simplify} \\ \text{Out[*]}:= & 2n (-1 + 2x) \left((1-x)^{-1+n} x - x^n \right) + (1-6x) \left((1-x)^n + x^n \right) \end{aligned}$$

Obtenemos la sucesión del teorema de Sturm para n=3

$$\begin{aligned} \text{In[*]}:= & \mathbf{e0[x]} = \mathbf{P3[x]} /. \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{3} // \mathbf{Simplify} \\ & \mathbf{e1[x]} = \mathbf{D[e0[x], x]} \\ & \mathbf{e2[x]} = -\mathbf{PolynomialRemainder[e0[x], e1[x], x]} \\ & \mathbf{e3[x]} = -\mathbf{PolynomialRemainder[e1[x], e2[x], x]} \\ \text{Out[*]}:= & 1 - 15x + 45x^2 - 42x^3 \\ \text{Out[*]}:= & -15 + 90x - 126x^2 \\ \text{Out[*]}:= & \frac{11}{14} - \frac{5x}{7} \\ \text{Out[*]}:= & \frac{3423}{50} \end{aligned}$$

Evaluamos la sucesión en 0 y 1

$$\begin{aligned} \text{In[*]}:= & \mathbf{Sturm3[x]} = \{\mathbf{Sign[e0[x]], Sign[e1[x]], Sign[e2[x]], Sign[e3[x]]\}; \\ & \mathbf{Sturm3[x]} /. \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0} \\ & \mathbf{Sturm3[x]} /. \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{1} \\ \text{Out[*]}:= & \{1, -1, 1, 1\} \\ \text{Out[*]}:= & \{-1, -1, 1, 1\} \end{aligned}$$

P5R2n

F5 es la parte angular de P5R2n

```
In[ ]:= F5[t] = (Cos[t]^5 - 15 Cos[t]^3 (1 - Cos[t]^2) + 15 Cos[t] (1 - Cos[t]^2)^4)
          (Cos[t]^(2n) + Sin[t]^(2n)) // Simplify
Out[ ]:= Cos[t] (15 - 75 Cos[t]^2 + 106 Cos[t]^4 - 60 Cos[t]^6 + 15 Cos[t]^8) (Cos[t]^(2n) + Sin[t]^(2n))
```

Obtenemos la derivada de la parte angular

```
In[ ]:= F5p[t] = D[F5[t], t] // Simplify
Out[ ]:= Sin[t] (-2 Cos[t]^2 (-75 + 212 Cos[t]^2 - 180 Cos[t]^4 + 60 Cos[t]^6) (Cos[t]^(2n) + Sin[t]^(2n)) -
              (15 - 75 Cos[t]^2 + 106 Cos[t]^4 - 60 Cos[t]^6 + 15 Cos[t]^8) (Cos[t]^(2n) + Sin[t]^(2n)) +
              2 n (15 - 75 Cos[t]^2 + 106 Cos[t]^4 - 60 Cos[t]^6 + 15 Cos[t]^8) (-Cos[t]^(2n) + Cos[t]^2 Sin[t]^(-2+2n)))
```

Reemplazamos Sin^2 por 1-Cos^2

```
In[ ]:= f5[t] = (F5p[t] / Sin[t]) /. {Sin[t] -> Sqrt[1 - Cos[t]^2]}
Out[ ]:= -2 Cos[t]^2 (-75 + 212 Cos[t]^2 - 180 Cos[t]^4 + 60 Cos[t]^6) (Cos[t]^(2n) + (1 - Cos[t]^2)^n) -
          (15 - 75 Cos[t]^2 + 106 Cos[t]^4 - 60 Cos[t]^6 + 15 Cos[t]^8) (Cos[t]^(2n) + (1 - Cos[t]^2)^n) +
          2 n (15 - 75 Cos[t]^2 + 106 Cos[t]^4 - 60 Cos[t]^6 + 15 Cos[t]^8)
          (-Cos[t]^(2n) + Cos[t]^2 (1 - Cos[t]^2)^(1/2 (-2+2n)))
```

Hacemos x=Cos^2

```
In[ ]:= P5[x] = f5[t] /. {Cos[t]^2 -> x, Cos[t]^4 -> x^2,
                        Cos[t]^6 -> x^3, Cos[t]^8 -> x^4, Cos[t]^(2n) -> x^n} // Simplify
Out[ ]:= -5 (3 - 45 x + 106 x^2 - 84 x^3 + 27 x^4) ((1 - x)^n + x^n) -
          2 n (15 - 75 x + 106 x^2 - 60 x^3 + 15 x^4) ((1 - x)^n x - x^n + x^(1+n))
          - 1 + x
```

Obtenemos la sucesión del teorema de Sturm para n=5

```
h0[x] = P5[x] /. n -> 5 // Simplify
h1[x] = D[h0[x], x];
h2[x] = -PolynomialRemainder[h0[x], h1[x], x];
h3[x] = -PolynomialRemainder[h1[x], h2[x], x];
h4[x] = -PolynomialRemainder[h2[x], h3[x], x];
h5[x] = -PolynomialRemainder[h3[x], h4[x], x];
h6[x] = -PolynomialRemainder[h4[x], h5[x], x];
h7[x] = -PolynomialRemainder[h5[x], h6[x], x];
h8[x] = -PolynomialRemainder[h6[x], h7[x], x]
Out[ ]:= -5 (3 - 90 x + 631 x^2 - 2086 x^3 + 3960 x^4 - 4642 x^5 + 3328 x^6 - 1350 x^7 + 255 x^8)
Out[ ]:= 288 972 323 980 807 187 395 914 900 683 353 054 388 877 818 083 190 008 212 558 084 814 869 251 102 496 \
          719 283 108 519 950 834 500 /
          13 916 964 883 104 579 392 141 548 494 124 744 363 771 171 236 273 215 116 533 294 331 057 631 038 545 \
          750 610 786 460 126 150 240 217
```

Evaluamos la sucesión en 0 y 1

```
In[*]:= Sturm5[x] = {Sign[h0[x]], Sign[h1[x]], Sign[h2[x]], Sign[h3[x]],  
                    Sign[h4[x]], Sign[h5[x]], Sign[h6[x]], Sign[h7[x]], Sign[h8[x]]};  
Sturm5[x] /. x -> 0  
Sturm5[x] /. x -> 1  
Out[*]= {-1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1}  
Out[*]= {-1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1}
```


Bibliografía

- [Arn96] V. I. Arnold. Topological problems of the theory of wave propagation. *Russian Mathematics Survey*, pages 1 – 44, 1996.
- [Arn01] V. I. Arnold. Astroidal geometry of hypocycloids and the hessian topology of hyperbolic polynomials. *Russian Mathematics Survey*, pages 1020 – 1083, 2001.
- [AVGZ85] V. I. Arnold, A. N. Varchenko, and S. M. Gusein-Zade. *Singularities of Differentiable Maps, Volume 1*. Birkhauser, 1985.
- [Ben90] R. Benedetti. *Real algebraic and Semi-algebraic sets*. Hermann Editeurs des sciences et des arts, 1990.
- [Bir97] G. Birkhoff. *Survey of Modern Algebra*. CRC Press, 1997.
- [Car00] N. L. Carothers. *Real Analysis*. Cambridge University Press, 2000.
- [Fol92] Gerald B. Folland. *Fourier Analysis and its Applications*. Wadsworth & Brooks, 1992.
- [Hor13] Roger A. Horn. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 2013.
- [Kat03] Guy Katriel. From Rolle’s theorem to the Sturm-Hurwitz theorem. *arXiv:math/0308159v2 [math.CA]*, 2003.
- [Mas02] J. C. Mason. *Chebyshev Polynomials*. Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [Mun00] James M. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [Pol78] George Polya. *Problems and Theorems in Analysis I*. Springer, 1978.