



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA EN
EXPLORACIÓN Y EXPLOTACIÓN DE RECURSOS NATURALES

REPRESENTACIÓN SÍSMICA Y OPERADORES DE
NITIDEZ

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA

DOUGLAS ALBERTO GÓMEZ REYES

TUTOR

SERGIO CHÁVEZ PÉREZ
INSTITUTO MEXICANO DEL PETRÓLEO

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.
SEPTIEMBRE DE 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado

Dr. Martín Cárdenas Soto Facultad de Ingeniería,
Presidente Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

M.C. David Escobedo Zenil Facultad de Ingeniería,
Secretario Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Dr. Sergio Chávez Pérez Dirección de Tecnología de Producto,
1er. Vocal Instituto Mexicano del Petróleo (IMP)

Dra. Silvia Raquel García Benítez Instituto de Ingeniería,
2da. Vocal Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Dra. Rocío Negrete Cadena Facultad de Ingeniería,
3er. Vocal Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Esta tesis se realizó en la Ciudad de México.

Tutor de tesis
Dr. Sergio Chávez Pérez

Firma

Para Miriam, mis padres y hermanos

Índice

Resumen	IV
Abstract	v
Introducción	VI
1. Representación sísmica basada en inversión	1
1.1. Problema sísmico inverso	1
1.2. Migración de cuadrados mínimos	7
2. Operadores lineales y adjuntos	17
2.1. Hessiano inverso	19
2.2. Operadores de nitidez	22
3. Prueba de concepto: experimento numérico	27
3.1. Operador de demigración de Kirchhoff	28
3.2. Implementación numérica y resultados	29
3.3. Discusión	44
4. Conclusiones	47
Agradecimientos	49
Referencias	50

“Hablar oscuramente lo sabe hacer cualquiera,
con claridad lo hacen muy pocos.”
- *Galileo Galilei*

“El ingeniero no es científico ni artista.
Se apoya en la ciencia y se deja guiar por el arte.”
- *Emilio Rosenblueth*

*“I can live with doubts and uncertainties.
It is much more interesting to live not knowing
than to have answers that might be wrong.”*
- *Richard Feynman*

Resumen

La clave de la exploración de hidrocarburos es la habilidad para representar sísmicamente el subsuelo, por lo que en la última década, la obtención de imágenes sísmicas de geología compleja ha estado fundada en representación sísmica basada en inversión. La solución del problema sísmico inverso requiere de técnicas de regularización y operadores lineales y adjuntos como preconditionadores, denominados operadores de nitidez, para guiar la solución a partir de información previa y acelerar la convergencia en pocas iteraciones sobre un esquema de cuadrados mínimos. El desarrollo de operadores de nitidez ha cobrado en los últimos años un creciente interés, concentrando la comunidad geocientífica grandes esfuerzos en su desarrollo tecnológico para obtener modelos cuasi reales del subsuelo con menores costos computacionales. Motivado por ello, reviso el problema de implementar operadores de nitidez, discuto el problema sísmico inverso y representación sísmica basada en inversión a través de migración de cuadrados mínimos, realizo pruebas numéricas y concluyo con una serie de puntos críticos en la discusión de operadores de nitidez y representación sísmica. Mi propósito es discutir la relevancia, complejidad y limitaciones de representación sísmica basada en inversión, realizar una prueba de concepto en un entorno de reproducibilidad computacional y aportar elementos para la discusión del tema dentro de la comunidad académica e industrial nacional. La contribución de mi esfuerzo es analizar el efecto paramétrico del operador de nitidez en datos sintéticos bidimensionales, advirtiendo que la implementación industrial de una prueba de concepto es un proceso arduo, que demanda recursos humanos, financieros y tecnológicos de Investigación y Desarrollo.

Abstract

The key to exploration is the ability to seismic imaging subsurface, so in the last decade, obtaining seismic images of complex geologies has been supported by seismic imaging based on inversion. The solution of the inverse seismic problem requires regularization techniques and linear and adjoint operators as preconditioners, called deblurring operators, to guide the solution from a priori information and accelerate convergence in a few iterations on a least square approach. The development of deblurring operators nowadays has gained increasing interest. Geoscience community worldwide invests human and technological efforts in its development to obtain quasi-real subsurface models with lower computational costs. Motivated by it, I review the problem of implementing deblurring operators, discuss the inverse seismic problem and seismic imaging based on inversion through least square migration. I carry out numerical tests, and I conclude with a series of critical points in deblurring operators and seismic imaging discussion. My purpose is to discuss the relevance, complexity, and limitations of seismic imaging based on inversion, carry out a proof-of-concept in an environment of computational reproducibility and contribute to the discussion of the subject in the national academic and industrial community. The contribution of my effort is to analyze the parametric effect of deblurring operator in 2D synthetic data, noting that the industrial implementation of proof-of-concept is an arduous undertaking that requires human, financial, and technological Research and Development resources.

Introducción

El principal inconveniente de la migración sísmica convencional es la distorsión de imágenes del subsuelo debido a geometrías de adquisición irregulares y poco densas, limitada apertura fuente a receptor y desenfoque de energía debido a fuertes contrastes de velocidad. Los problemas anteriores generan ruidos denominados artefactos de migración, degradan la nitidez de imagen, desenfocan la energía y, por lo tanto, producen una imagen borrosa.

La migración de cuadrados mínimos es una solución iterativa lineal basada en inversión que aborda la representación del subsuelo como un problema de optimización L_2 del modelo de reflectividad para un campo de velocidad dado, implementada en el dominio de datos e imagen, en cualquier esquema de migración de acuerdo con la complejidad geológica y capacidad de cómputo disponible. Obtener modelos de reflectividad a través de operadores de nitidez es la piedra angular en representación sísmica basada en inversión, obteniendo una mayor resolución espacial y temporal, compensación de iluminación y atenuación por se de artefactos de migración debidos a interferencia y huella de adquisición.

Una de las características más atractivas de la migración de cuadrados mínimos es que los algoritmos son de propósito general, no solo en sismología de exploración, sino en problemas de física general, por lo que la matemática y física de migración de cuadrados mínimos permite incluir información previa a través de restricciones numéricas para obtener mejores imágenes de reflectividad, reduciendo incertidumbre sísmica. Su principal inconveniente es el alto costo computacional, de un orden de magnitud mayor con respecto de la migración convencional. Para contrarrestar el costo, la industria hace uso de operadores de nitidez como preconditionadores, acelerando la convergencia en pocas

iteraciones. Motivado por ello, reviso el problema de implementar operadores de nitidez, discuto el problema sísmico inverso y representación sísmica basada en inversión a través de migración de cuadrados mínimos, realizo pruebas numéricas, y concluyo con una serie de puntos críticos en la discusión de operadores de nitidez y representación sísmica.

A través de un experimento numérico como prueba de concepto, mi contribución es adaptar e implementar operadores lineales y adjuntos para resolver un problema de gran escala bidimensional utilizando paqueterías libres de código abierto, mostrando la factibilidad de realizar cálculos con herramientas de cómputo convencionales y ejemplificar el esfuerzo computacional exhaustivo requerido para obtener imágenes a través de migración sísmica de cuadrados mínimos. Lo novedoso es el uso de cómputo en la nube al ensamblar herramientas a través de una interfaz de programación de aplicaciones en la red (Web API, por sus siglas en inglés).

Los datos y cuaderno de trabajo utilizados están disponibles para cualquier persona interesada en reproducir el experimento, previa solicitud a través del correo electrónico douglas.gomezr@gmail.com.

Capítulo 1

Representación sísmica basada en inversión

La construcción de imágenes del subsuelo con datos sísmicos de reflexión resulta de migrar mallas discretas de trazas sísmicas. El principal inconveniente de la migración convencional es la distorsión de imágenes debido a geometría de adquisición irregular y poco densa, limitada apertura de fuente a receptor, y desenfoque de energía debido a fuertes contrastes de velocidad. Los problemas anteriores generan ruidos denominados artefactos de migración, degradan la nitidez de la imagen sísmica, desenfocan la energía y, por lo tanto, producen una versión borrosa de la estructura del subsuelo.

1.1. Problema sísmico inverso

La representación sísmica tiene por objeto crear modelos de velocidad geológicamente consistentes, y obtener la mejor estimación de reflectividad del subsuelo. Se realiza desproyectando por medio del operador lineal \mathbf{L} , del dominio de datos \mathbf{d} , al dominio de modelos \mathbf{m} , a través de modelado adjunto (migración) o modelado inverso (tomografía e inversión), y proyectando del dominio de modelos al dominio de datos, a través de modelado directo o

demigración (Fig. 1).

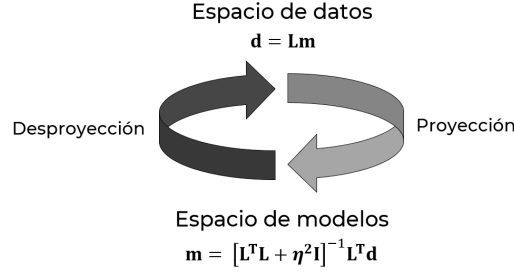


Figura 1. Modelado directo (proyección) e inverso (desproyección de cuadrados mínimos).

El problema sísmico inverso, lineal y discreto, es la transformación del espacio de datos $d \in \mathbb{R}^i$ al espacio de parámetros del modelo de reflectividad $m \in \mathbb{R}^j$ donde $j < i$, expresado matemáticamente como (Schuster, 2017; Meju, 1994; Aster et al., 2019)

$$\sum_j l_{ij} m_j = d_i \quad \text{o} \quad \mathbf{L}\mathbf{m} = \mathbf{d}, \quad (1)$$

donde $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{i \times j}$ es la matriz del operador de modelado directo (asociado con geometría de adquisición, ondícula de fuente y modelo de densidad-velocidad), que actúa sobre el vector \mathbf{m} y estima el vector \mathbf{d} . La inversión tiene por objeto anular el efecto del operador de modelado directo \mathbf{L} , estimando parámetros del modelo m_j , **minimizando la respuesta entre datos observados d_{obs} y respuesta del modelo d_i** , por lo que la Ec. 1, se reescribe como

$$d_{obs} \approx d_i = \mathbf{L}\mathbf{m}, \quad (2)$$

donde d_{obs} son datos discretos adquiridos en campo.

Ejemplificando la Ec. 1 para un modelo de tierra de capas planas, el semiespacio elástico estratificado, ondícula y geometría de adquisición, forman parte del **operador de modelado (\mathbf{L})**; las interfases de contraste de impedancia acústica, los **parámetros del modelo (\mathbf{m})**; y el sismograma sintético de incidencia normal, **respuesta del modelo (\mathbf{d})** [Lines y Treitel, 1984].

En resumen, el operador \mathbf{L} es una abstracción física-matemática que depende del

número de parámetros del modelo estimado a partir de datos, y la respuesta del modelo, son datos sintéticos generados para una iteración particular del operador \mathbf{L} . Dado que el espacio de datos es de dimensión finita, el mapeo de variables del espacio de datos al espacio de modelos es no biyectivo, es decir, existen elementos del espacio de modelos que no tienen influencia en el espacio de datos, por lo que la desproyección no es única, y el modelo estimado \mathbf{m}^{est} depende del algoritmo y regularización implementados.

En general, debido a los grados de libertad del espacio de modelos y ruido intrínseco del espacio de datos, \mathbf{m}^{est} es una versión borrosa del modelo real \mathbf{m}^{real} , siendo necesario cuantificar el error entre modelo estimado y real debido a la no unicidad y propagación de errores en el modelado directo e inverso. La Fig. 2 ilustra la evaluación del problema como

$$\mathbf{d} = \mathbf{m}^{\text{est}} + \text{incertidumbre},$$

donde la estimación de incertidumbre es posible en inversión de matrices por métodos directos (solución exacta) pero no por métodos iterativos (solución aproximada) [Scales y Snieder, 2000; Pearson y Pestana, 2020].

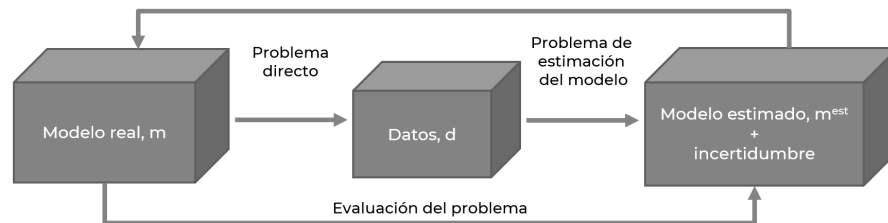


Figura 2. Inversión = estimación + evaluación (modificada de Scales y Snieder, 2000).

Un problema crítico asociado con la degradación de imagen del modelo de tierra inverso es la ausencia de frecuencias bajas en adquisición de datos sísmicos, ya que el modelo de tierra real puede comprenderse como la suma del modelo de velocidad de fondo (números de onda cortos) obtenido por inversión de forma de onda completa (FWI, por sus siglas en inglés), y modelo de reflectividad (números de onda largos) obtenido por migración basada en inversión (Long, 2020a; Adler et al., 2021).

La Fig. 3 ilustra la contribución de energía de números de onda cortos y largos en el modelo de tierra real. Mis resultados, se centran en obtener un modelo de reflectividad más completo a través de migración sísmica, sin abordar el problema de contribución de números de onda cortos.

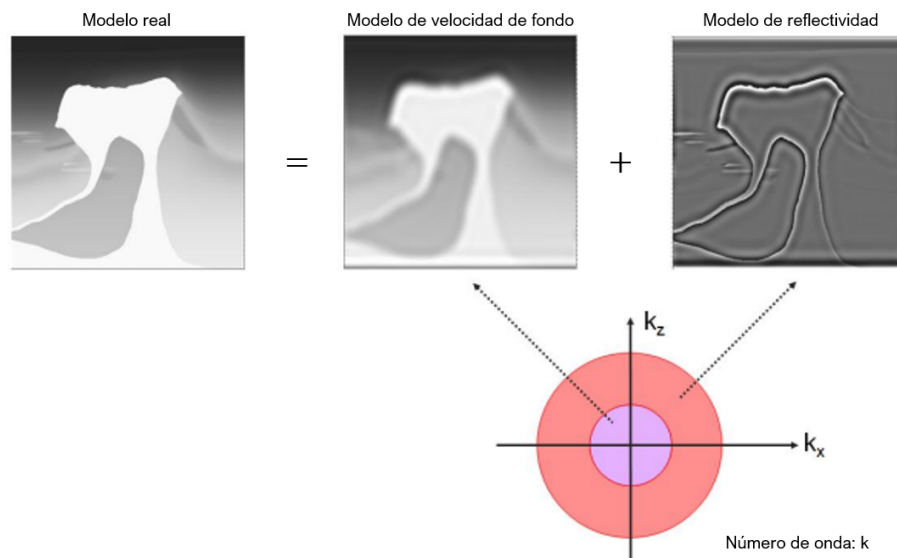


Figura 3. Modelo de tierra real compuesto por la contribución de modelos de velocidad de fondo y reflectividad. El modelo de fondo corresponde a números de onda cortos (círculo morado), y el modelo de reflectividad a números de onda largos (círculo rojo) [modificada de Long, 2020a].

El espacio de datos es un sistema lineal¹ regido por el modelo convolucional dinámico, $\mathbf{d}=\mathbf{L}\mathbf{m}$, donde la respuesta al impulso es una función no lineal de coeficientes de reflexión, por lo que el operador \mathbf{L} se linealiza a partir del modelo de fondo bajo la aproximación de Born, omitiéndose efectos de difracción múltiple (Robinson y Treitel, 2008; Schuster, 2017; Snieder y Trampert, 1999).

En sismología de exploración, en general, el operador \mathbf{L} implica una matriz l_{ij} rectangular y, por lo tanto, una solución sobredeterminada e inconsistente con más de una solución del modelo \mathbf{m} . Para hallar una solución razonable hay que calcular la distancia

¹Dado que el campo de esfuerzo sísmico no deforma las rocas más allá de su límite elástico, la magnitud del campo de ondas es mucho menor que los módulos elásticos, y por lo tanto, la relación esfuerzo y deformación (Ley de Hooke) es cuasi lineal, obedeciendo propiedades de superposición y escalamiento de sistemas lineales.

normal mínima entre datos medidos y modelados (o predichos), acotada por una función de penalización. Si el operador de modelado l_{ij} tiene inversa, el espacio $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{d}$ surge de forma directa a través de fuerza bruta de cómputo. Sin embargo, al ser rectangular, requiere de métodos iterativos para hallar la solución que mejor ajuste al vector de parámetros del modelo $\mathbf{m}^{(k)}$. La solución analítica inversa y normal de la Ec. 1 es (Meju, 1994; Strang, 2014)

$$\mathbf{m} = [\mathbf{L}^T\mathbf{L}]^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{d}, \quad (3)$$

donde $[\mathbf{L}^T\mathbf{L}]^{-1}$ es el operador Hessiano inverso (también llamado espectro [Claerbout y Fomel, 2014]), \mathbf{L}^T es el operador adjunto de \mathbf{L} , conocido como operador adjunto de Hilbert, y $[\mathbf{L}^T\mathbf{L}]^{-1}\mathbf{L}^T$ el pseudo inverso de \mathbf{L} . La solución inversa depende de la respuesta del modelo, es decir, los datos deben aportar toda la información necesaria de los parámetros del modelo \mathbf{m} . Sin embargo, la limitada e irregular iluminación del subsuelo, cambios abruptos en el nivel de ruido, etcétera, conlleva al espacio nulo² no vacío de \mathbf{L} , y como consecuencia, valores característicos de $\mathbf{L}^T\mathbf{L}$ iguales a cero (Schuster, 2017).

Para lograr una inversión estable, de solución única, es necesario reforzar los elementos de la diagonal principal del Hessiano por balanceo espectral (Silvia, 1987; Aster et al., 2019), añadiendo restricciones por medio de un factor de amortiguamiento o regularización η , que sesgue la solución y evite valores característicos iguales a cero (singularidades) en la matriz $\mathbf{L}^T\mathbf{L}$, aproximando la solución a un modelo geológico plausible. Por lo anterior, la Ec. 3 puede reescribirse como

$$\mathbf{m} = [\mathbf{L}^T\mathbf{L} + \eta^2\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{d}, \quad (4)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. El amortiguamiento η suprime oscilaciones de alta amplitud en la solución del modelo (si $\eta = 0$, la solución es igual a la Ec. 3). La Ec. 4 consiste de cuadrados mínimos amortiguados (Zhou, 2014).

²El espacio nulo de \mathbf{L} , es una familia de componentes del modelo que no tiene efecto sobre el espacio de datos \mathbf{d} , impidiendo la unicidad de la solución del modelo, al no permitir que \mathbf{d} sea un vector linealmente independiente. En la práctica, el espacio nulo se produce por un inadecuado e incompleto muestreo del espacio del modelo \mathbf{m} (Claerbout y Fomel, 2014; Strang, 1986; Snieder y Trampert, 1999).

Dado que la imagen sísmica es una relación no lineal de datos y modelo, la solución de la Ec. 4 es estimada a través de un esquema iterativo (Schuster, 2017)

$$\mathbf{m}^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)} - \alpha[\mathbf{L}^T\mathbf{L} + \eta^2\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{L}^T\delta\mathbf{d}^{(k)}, \quad (5)$$

donde α es la longitud del paso, $\mathbf{m}^{(k)}$ el k-ésimo modelo iterativo, y $\delta\mathbf{d}^{(k)}$ el k-ésimo residual.

El operador adjunto \mathbf{L}^T despropaga el vector de datos \mathbf{d} , es decir, la información propagada en una dirección (del subsuelo a los datos) es desproyectada (de los datos al subsuelo). Si el operador adjunto no es una aproximación adecuada del operador de modelado inverso, es necesario hacer uso de técnicas de ajuste y optimización (Claerbout y Fomel, 2014; Schuster, 2017).

La propagación de energía sísmica descrita a través de la ecuación de onda implica resolver un gran número de ecuaciones diferenciales parciales en diferencias finitas, haciéndose un proceso computacional muy costoso. El lector interesado en la complejidad y dificultad computacional de crear e implementar un programa de inversión sísmica o migración de cuadrados mínimos, puede consultar a Witte (2020).

En la práctica, los datos sísmicos de superficie \mathbf{d} contienen ruido. El origen del ruido es 1) instrumental y 2) numérico; el primero por lecturas de datos no modelados, y el segundo, por redondeo numérico (Aster et al., 2019). El modelo matemático generalizado es

$$\mathbf{d} = \mathbf{L}\mathbf{m}^{\text{real}} + \varepsilon = \mathbf{d}^{\text{real}} + \varepsilon, \quad (6)$$

donde ε es ruido y \mathbf{d}^{real} satisface la Ec. 1 para \mathbf{m}^{real} , y supone que el modelado directo es exacto. Debido a la propiedad de superposición de los sistemas lineales (Ec. 7)

$$\mathbf{L}(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) = \mathbf{L}(\mathbf{m}_1) + \mathbf{L}(\mathbf{m}_2), \quad (7)$$

el proceso de hallar los parámetros del modelo real es complicado, dado que existen muchos

modelos que ajustan a los datos observados, ya que es posible agregar más funciones \mathbf{m}_{n+1} a la solución y ajustar los datos, como muestra la Ec. 8

$$\mathbf{d} = \mathbf{L}(\mathbf{m}) = \mathbf{L}(\mathbf{m}_1) + \mathbf{L}(\mathbf{m}_2) + \dots + \mathbf{L}(\mathbf{m}_{n+1}). \quad (8)$$

En resumen, la no unicidad es una característica de problemas inversos lineales discretos de rango deficiente (espacio nulo no trivial de \mathbf{L}), e implica una estimación suave o sesgada del modelo calculado con respecto al modelo real. Prever este sesgo es crucial para interpretar el modelo en términos de su correspondencia con la realidad geológica. Aunado a la no unicidad, está el problema de no existir solución, es decir, un modelo que no ajusta los datos debido a que el modelo matemático del sistema físico es una mala aproximación, o bien, por el contenido de ruido. Un tercer problema es la inestabilidad de la solución ya que el proceso de inversión es extremadamente sensible a cambios en las mediciones, donde un pequeño valor de ε en la Ec. 6, conlleva enormes cambios en el modelo estimado, generando un sistema lineal discreto mal condicionado (*ill-posed*, en inglés), donde las entradas son insuficientes para determinar todos los resultados esperados. Ejemplo de un problema mal condicionado es la solución del problema de inversión-migración de velocidad constante, que requiere dos mediciones de datos de superficie: 1) campo de ondas (ψ) y 2) razón de cambio en la dirección vertical ($\partial_z \psi$). Sin embargo, no existe tecnología alguna que permita medir $\partial_z \psi$, por lo que solo es posible plantear una solución limitada usando el campo de ondas ψ (Margrave y Lamoureux, 2019; Zhou, 2014).

1.2. Migración de cuadrados mínimos

Una aproximación del modelo de reflectividad $\mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ surge aproximando el Hessiano inverso a la matriz identidad, $[\mathbf{L}^T \mathbf{L}]^{-1} \sim \mathbf{I}$, obteniendo una imagen de migración sísmica, expresada como

$$\mathbf{m}^{\text{mig}} = \mathbf{L}^T \mathbf{d}^{\text{obs}}. \quad (9)$$

La Ec. 9 representa el operador de migración sísmica convencional, \mathbf{m}^{mig} , como el transpuesto del operador de modelado directo, \mathbf{L}^T , sobre los datos medidos, \mathbf{d}^{obs} , implementado en algoritmo de rayos, haces o extrapolación del campo de ondas. Aunque esta aproximación es útil, no es el modelo inverso, sino una versión borrosa de la imagen real por una deficiente geometría de adquisición, limitada apertura fuente a receptor, desenfoque de energía y artefactos numéricos del operador \mathbf{L}^T .

Para mejorar la migración convencional \mathbf{m}^{mig} , desde inicios de la década de 1990, grupos académicos de investigación comenzaron a desarrollar algoritmos basados en inversión, denominados **migración de cuadrados mínimos** (LSM, por sus siglas en inglés), minimizando la diferencia al cuadrado de datos modelados \mathbf{Lm} y adquiridos \mathbf{d} , a través de (Wang et al., 2021; Schuster, 2017; Kaplan et al., 2010)

$$\phi(\mathbf{m}) = \left\| \mathbf{Lm} - \mathbf{d} \right\|_2^2 + \eta \left\| \mathbf{Dm} \right\|_2^2, \quad (10)$$

donde $\phi(\mathbf{m})$ es la función de costo u objetivo dada por la suma de norma L_2 de la función de penalización \mathbf{Dm} , multiplicada por la constante positiva de amortiguamiento η , y vector residual³ $\mathbf{Lm} - \mathbf{d}$, donde \mathbf{D} es un operador lineal que actúa sobre del modelo, utilizando información a priori (Nemeth et al., 1999).

La ventaja de migración de cuadrados mínimos sobre migración convencional es la aproximación del Hessiano inverso para mitigar artefactos de migración debidos a interferencia (*crosstalk migration artifacts*, en inglés) y compensar problemas de iluminación (Schuster, 2018b). Sin embargo, aunque LSM ofrece grandes ventajas como incremento de resolución espacial mayor al doble y notable reducción de artefactos de migración y submuestreo, la principal limitación es el costo computacional de su implementación, de al menos un orden mayor de magnitud que la migración convencional. Con respecto a la migración de tiempo reverso (RTM, por sus siglas en inglés), el costo computacional de

³Algunos autores (Trad, 2020; Snieder y Trampert, 1999; Meju, 1994; Lines y Treitel, 1984), expresan el residual como el error experimental $\mathbf{d} - \mathbf{Lm}$. Sin embargo, de acuerdo con Claerbout y Fomel (2014), este enfoque conduce a confusiones ya que el error está en la falta o incompletud de parámetros del modelo, y no en los datos. Por lo anterior, uso la expresión de error de modelado, $\mathbf{Lm} - \mathbf{d}$, denominada por Claerbout y Fomel (2014), “convención de signo” y utilizada por Schuster (2017).

migración de cuadrados mínimos de tiempo reverso (LS-RTM, por sus siglas en inglés), está dado por (Schuster, 2017)

$$O(3N) > \mathbf{m}^{\text{mig}}, \quad (11)$$

donde N son las iteraciones de LSM, y O el costo con respecto a RTM. Considerando que LSM estándar requiere de 10 a 30 iteraciones para un resultado aceptable, la migración de cuadrados mínimos demanda un costo de 30 a 90 veces mayor de unidades de procesamiento (Schuster, 2018a, Aoki y Schuster, 2009; Osorio et al., 2021; Bienati y Calcagni, 2020).

La solución del problema sísmico inverso del modelo de reflectividad requiere el cálculo de la matriz Hessiana $\mathbf{L}^T \mathbf{L} \equiv \mathbf{H}$. La diagonal principal, físicamente, contiene información de primer orden: iluminación de la geometría de adquisición y modelo del subsuelo; e información de segundo orden: dispersión (heterogeneidad).

La matriz Hessiana es calculada en el dominio de datos e imagen, es decir, antes y después de migrar. En el dominio de imagen hay que migrar la respuesta al impulso de funciones de dispersión de punto (PSF, por sus siglas en inglés), también conocida como migración de función de Green, modelando difracciones (demigración) y migrando el resultado. La implementación LSM en el dominio de imagen es implementada deconvolucioando los PSF a partir de la migración de datos reales (Long, 2020b; Luo y Chávez-Pérez, 2006). Un segundo enfoque de LSM, es calculada en el dominio de datos en un esquema iterativo de diferencias finitas, calculando la matriz Hessiana a partir de migración en profundidad antes de apilar (PSDM, por sus siglas en inglés) y, posteriormente, utilizando la imagen migrada para modelar sintéticamente los registros, minimizando la diferencia entre datos modelados y observados, actualizando la imagen en cada iteración (Wang et al., 2021).

Las Figs. 4 y 5 muestran esquemáticamente diagramas de migración de cuadrados mínimos en los dominios de datos e imagen. La ecuación de migración de cuadrados mínimos surge minimizando la función objetivo (Ec. 10) con respecto a los componentes

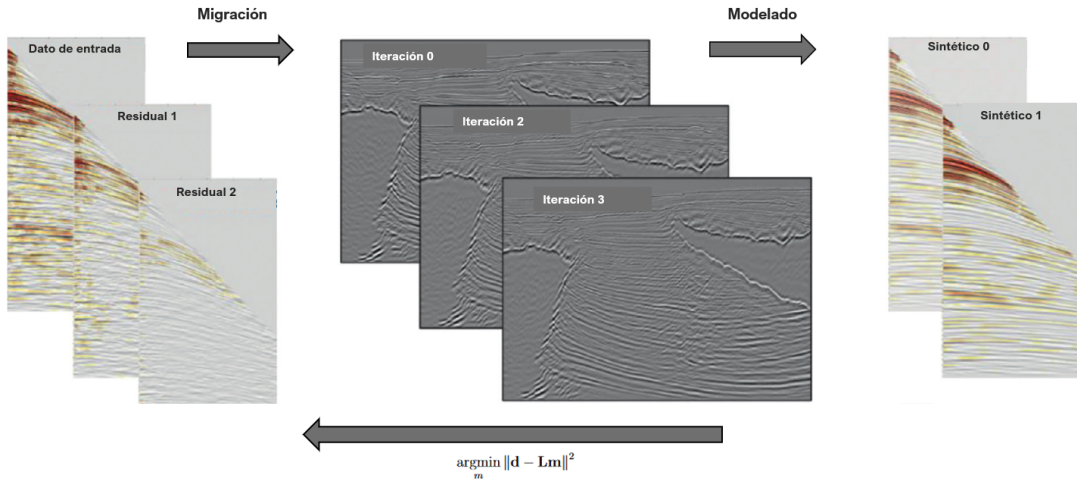


Figura 4. Diagrama de migración de cuadrados mínimos en el dominio de datos. El proceso de demigración (modelado de Born) y migración es iterativo, para un modelo de velocidad constante y, por lo tanto, mismo efecto cinemático hasta que el residuo \mathbf{L}_2 entre trazas es mínimo o satisface un criterio de término. El proceso supone que el modelo de velocidad es el mejor posible, o de lo contrario el residuo crece con la distancia fuente a receptor y el proceso no converge (modificada de Wang et al., 2020).

del vector del modelo \mathbf{m} , expresada matemáticamente como (Schuster, 2017)

$$\mathbf{m}^{\text{LS}} = [\mathbf{L}^T \mathbf{L} + \eta^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D}]^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{d}^{\text{obs}}. \quad (12)$$

Sustituyendo la Ec. 9 en la Ec. 12, el modelo de reflectividad puede expresarse como

$$\mathbf{m}^{\text{LS}} = [\mathbf{L}^T \mathbf{L} + \eta^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D}]^{-1} \mathbf{m}^{\text{mig}}, \quad (13)$$

donde la imagen \mathbf{m}^{LS} es la versión nítida de la imagen \mathbf{m}^{mig} , enfocada por el Hessiano inverso, conocida como deconvolución de migración (MD, por sus siglas en inglés).

En un esquema iterativo de descenso más pronunciado (*steepest descent*, en inglés), el modelo de reflectividad LSM puede expresarse como (Aoki y Schuster, 2009)

$$\mathbf{m}^{k+1} = \mathbf{m}^k - \alpha^k \mathbf{g}^k, \quad (14)$$

donde \mathbf{m}^{k+1} y \mathbf{m}^k , son $k+1$ y k -ésimo modelo de reflectividad LSM; $-\alpha^k \mathbf{g}^k$, el modelo

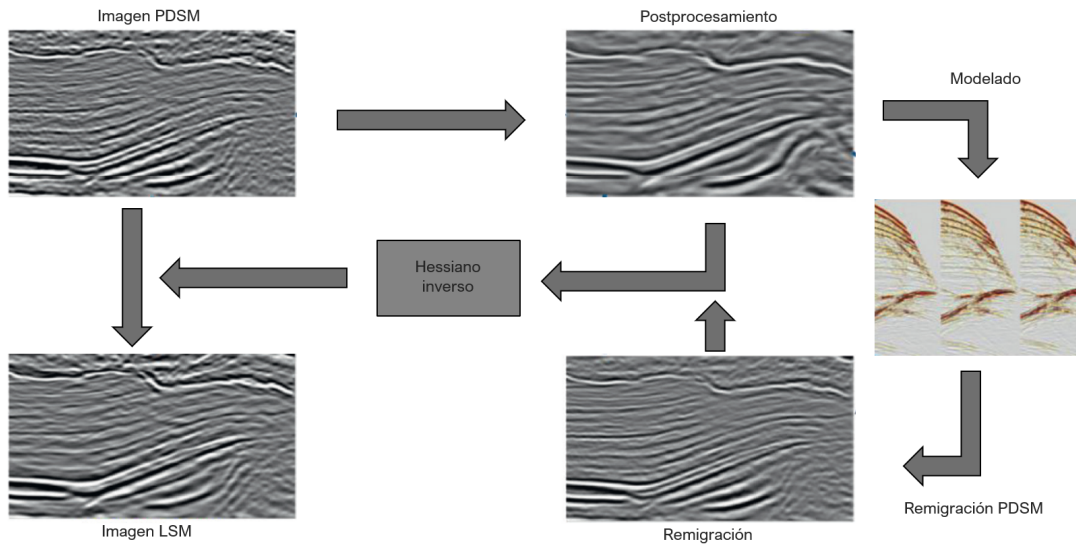


Figura 5. Flujo de migración de cuadrados mínimos en el dominio de imagen. La secuencia consiste del postprocesamiento sísmico (mejoramiento de imagen), modelado de Born (demigración), remigración PSDM, filtro Hessiano inverso (filtro de ajuste inverso entre imagen remigrada y mejorada) e imagen LSM (modificada de Wang et al., 2020).

actualizado del k -ésimo paso iterativo; y α^k , la longitud del paso. Si el modelo de reflectividad y velocidad de fondo del operador de demigración \mathbf{L} es actualizado simultánea e iterativamente, \mathbf{m}^{LS} es el método sísmico recientemente denominado **representación de inversión de forma de onda completa** (*FWI imaging*, en inglés) [Wang et al., 2021].

La Fig. 6 muestra la comparación en el dominio de imagen de migración de ecuación de onda (WEM, por sus siglas en inglés) [centro] y migración de ecuación de onda de cuadrados mínimos (LS-WEM, por sus siglas en inglés) [abajo] del modelo subsalino sintético Sigsbee2A⁴ [arriba]. La migración de cuadrados mínimos balancea el contenido del número de onda k , extendiendo el contenido de frecuencia espacial y, por lo tanto, iluminando de forma uniforme los reflectores, mejorando resolución de eventos estratigráficos y echados pronunciados. La migración de cuadrados mínimos muestra un mejor desempeño en la recuperación de reflectividad verdadera (Lu et al., 2017).

La Fig. 7 muestra la comparación del modelo de sal sintético SEG/EAGE⁵, entre

⁴Para más detalles, consultar <http://www.delphi.tudelft.nl/SMAART/sigsbee2a.htm>

⁵Ver https://wiki.seg.org/wiki/SEG/EAGE_Salt_and_Overthrust_Models

imágenes RTM convencional y LS-RTM. La Fig. 8 muestra la comparación de imágenes PSTM y MD de datos marinos de la sonda de Campeche, incrementando, en la imagen MD, resolución espacial y relación señal a ruido, enfatizando reflectores no resueltos en la imagen PSTM convencional.

Las Figs. 9 y 10 muestran la comparación entre imágenes RTM y LS-RTM de datos reales de un área de sedimentos siliciclásticos del Terciario y tectónica salina, respectivamente. Las imágenes LS-RTM corrigen efectos de distorsión del campo de ondas por una adquisición de datos sísmicos limitada y efectos de propagación, mejorando iluminación y resolución temporal y espacial.

La migración de cuadrados mínimos es una aplicación directa de inversión de cuadrados mínimos a migración sísmica, concentrando esfuerzos en corregir la distorsión de amplitudes del operador de migración. Su implementación práctica es muy complicada por el alto costo computacional de aplicar operadores de modelado directo y adjuntos (como los de migración) de forma conjunta, para obtener imágenes sísmicas razonables, capaces de predecir datos adquiridos en campo (Witte, 2020). Sin embargo, pese a estas dificultades, las ventajas que ofrece sobre la migración convencional son eliminación del ruido de adquisición causado por muestreo deficiente y apertura limitada de migración, balanceo igualado de amplitudes e incremento de resolución espacial y temporal, mejoras importantes para reducir incertidumbre estructural entre dominios de tiempo y profundidad en interpretación cuantitativa y modelado geológico (Osypov et al., 2013).

En resumen, la migración de cuadrados mínimos es una solución iterativa lineal, basada en inversión, que aborda la representación del subsuelo como un problema de optimización de norma L_2 del modelo de reflectividad para un campo de velocidad constante, implementada en el dominio de datos e imagen, en cualquier esquema de migración de acuerdo con la complejidad geológica y capacidad de cómputo, como trazado de rayos (i.e., Kirchhoff), campo de ondas en una y dos direcciones (i.e., RTM).

Una de las características más atractivas de la migración de cuadrados mínimos es que sus algoritmos son de propósito general, no solo en sismología de exploración, sino

en problemas de física general. Por lo tanto, la matemática y física de migración de cuadrados mínimos permite incluir información previa a través de restricciones numéricas para obtener mejores imágenes de reflectividad del subsuelo. Para contrarrestar el costo computacional de la migración de cuadrados mínimos en el dominio de datos e imagen, la industria hace uso de operadores directos y adjuntos como preconditionadores, denominados **operadores de nitidez**, atacando la convergencia en pocas iteraciones.

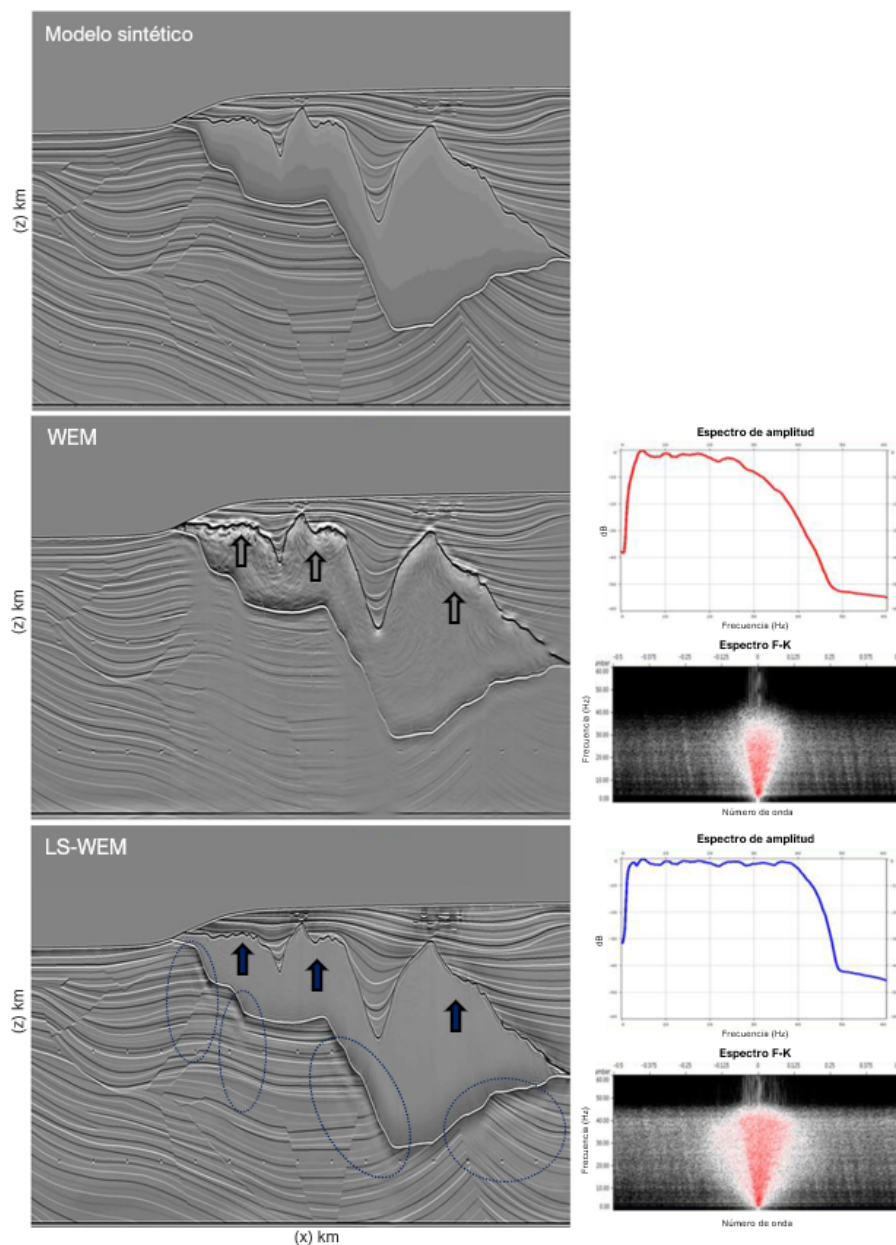


Figura 6. Comparación WEM versus LS-WEM en dos dimensiones del modelo sintético Sigsbee2A. [Arriba] Modelo sintético. [Centro] Imagen WEM: ilumina de forma irregular los eventos sedimentarios por debajo de la sal, existiendo zona oscuras sin información. [Centro-derecha] Espectros de amplitud y $f - k$. [Abajo] Imagen LS-WEM: iluminación de estructuras sedimentarias por debajo de la sal y compensación de artefactos dentro de la sal (círculos y flechas azules). [Abajo-derecha] Espectros de amplitud y $f - k$, con incremento del número de onda y frecuencia circular (modificada de Long, 2020a y 2020b).

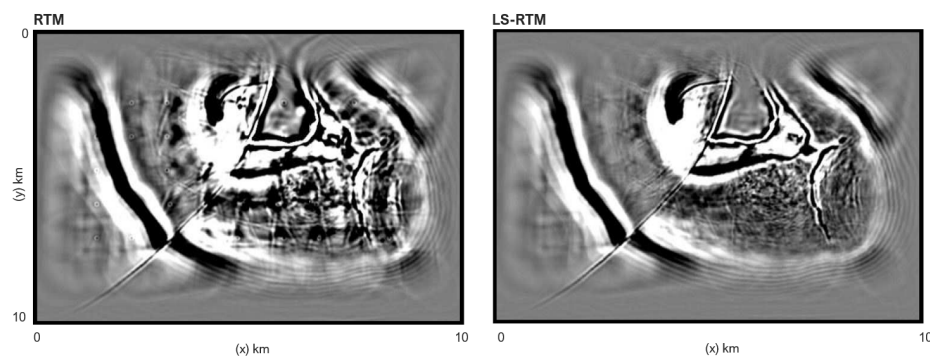


Figura 7. Comparación de sección en profundidad de imagen RTM convencional [izquierda], e imagen LS-RTM [derecha] del modelo de sal sintético SEG/EAGE. El algoritmo en la imagen de la derecha compensa los artefactos de migración generados por iluminación irregular (tomada de Huang et al., 2014).

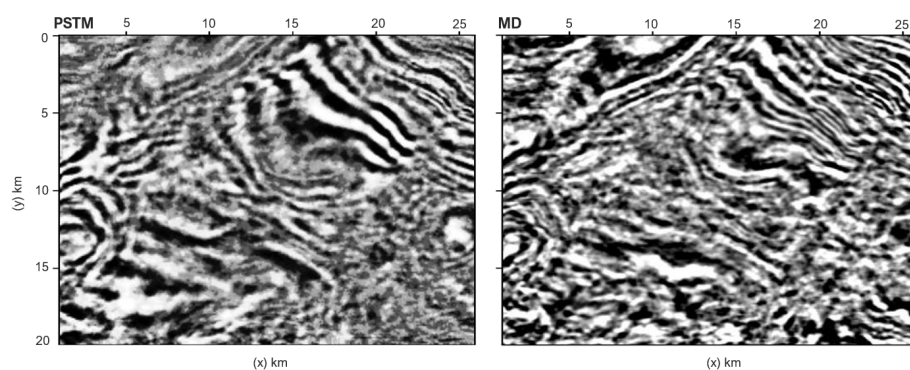


Figura 8. Comparación de sección en tiempo (2400 ms) de migración PSTM [izquierda], y migración MD [derecha] de datos marinos de la sonda de Campeche. La imagen MD incrementa resolución espacial y balancea el espectro de amplitud, enfatizando reflectores no resueltos en la imagen PSTM (tomada de Luo y Chávez-Pérez, 2006).

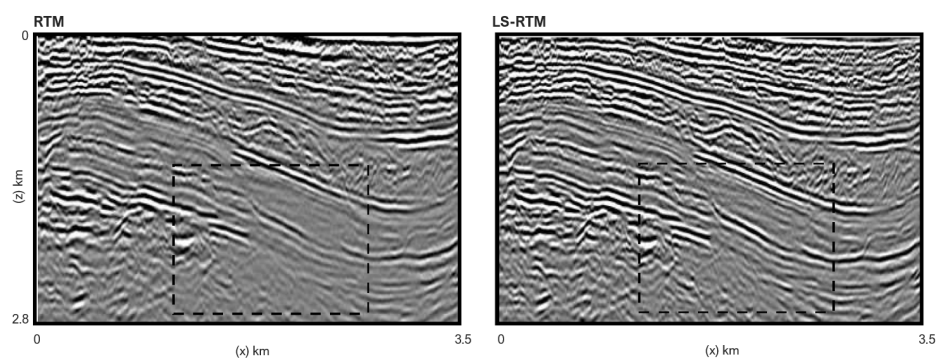


Figura 9. Comparación de sección transversal longitudinal de RTM convencional [izquierda], y LS-RTM [derecha] de datos marinos del Golfo de México estadounidense. La imagen LS-RTM, resuelve los reflectores indicados en el recuadro negro punteado (tomada de Dutta et al., 2014).

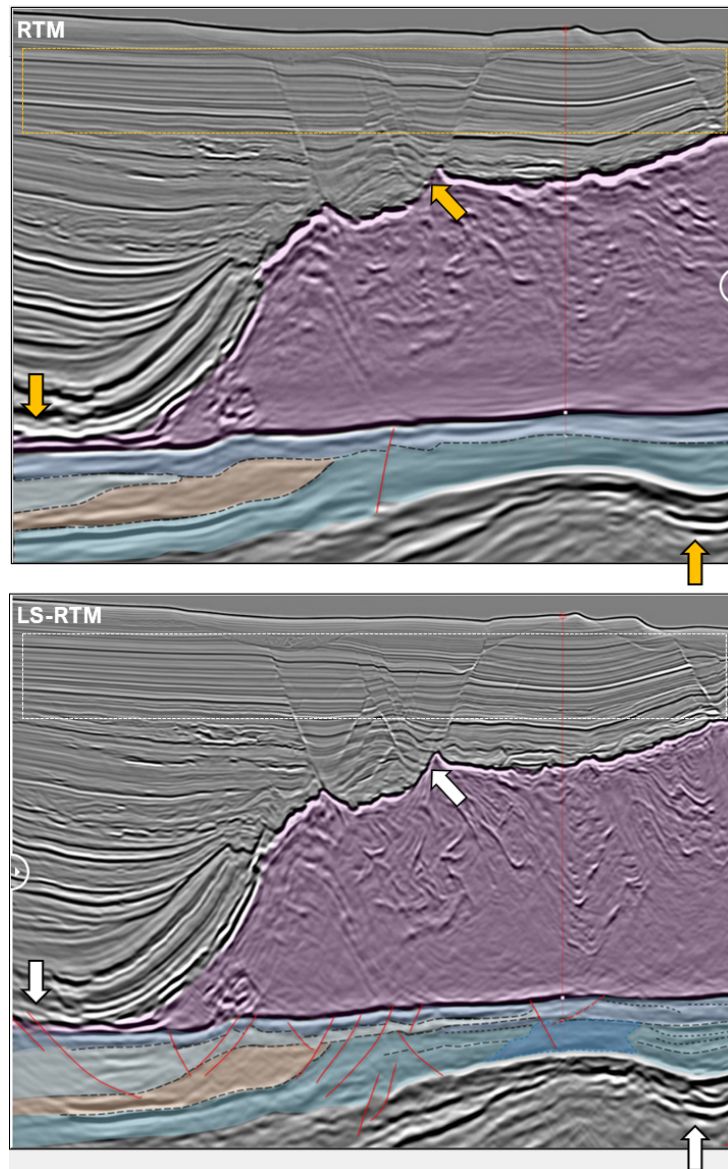


Figura 10. Migración de cuadrados mínimos de la Cuenca de Santos en Brasil. [Arriba] Migración de tiempo reverso (RTM). [Abajo] Migración LS-RTM, reduciendo artefactos de migración y enfatizando la relación señal a ruido por abajo y encima de la sal, mejorando la representación y resolución sísmicas presal y postsal (flechas y recuadro blanco) y, por lo tanto, la interpretación geológica estructural y sedimentaria (tomada de <https://www.pgs.com>).

Capítulo 2

Operadores lineales y adjuntos

El mapeo de vectores del espacio de imagen o modelo \mathbf{m} , al espacio de datos \mathbf{d} , es realizado a través del operador lineal $\mathbf{L} : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}^j$, y se denomina **modelado directo** o **demigración**. El proceso opuesto, conocido como **modelado inverso** o **problema inverso**, es realizado a través del operador adjunto $\mathbf{L}^T : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}^i$, aplicado al espacio de datos. El modelado inverso es el proceso de obtener el modelo estimado \mathbf{m}^{est} removiendo el efecto de \mathbf{L} sobre los datos observados \mathbf{d}^{obs} .

Los operadores lineales directo y adjunto, \mathbf{L} y \mathbf{L}^T , son campos matemáticos algebraicos que cumplen las propiedades (Strang, 2014):

$$\mathbf{L} : \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{m}, \text{ es lineal } \iff d_i, m_j \in \mathbf{d} \text{ y } \alpha, \beta \in \mathbf{L} \quad \therefore \quad (15)$$

$$1. \mathbf{L}(\alpha d_i + \beta m_j) = \alpha \mathbf{L}d_i + \beta \mathbf{L}m_j,$$

$$2. \mathbf{L}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{L}d_i.$$

De acuerdo con Ravasi y Vasconcelos (2020), existen tres alternativas para resolver problemas inversos: a) solución directa con matrices explícitas, b) solución iterativa con matrices explícitas, y c) solución iterativa con operadores lineales.

En problemas matriciales de tamaño limitado, las Ecs. 4 y 5 son resueltas por fuerza bruta a través de métodos directos, empleando a) y b), factorizando los sistemas de ecuaciones o empleando fórmulas inversas pseudo analíticas (Snieder y Trampert, 1999; Ravasi y Vasconcelos, 2020).

En problemas de gran tamaño —como en sismología de exploración—, los sistemas de ecuaciones contienen de 10^6 a 10^9 parámetros de modelo asociados con más de 10^9 a 10^{12} datos, llegando actualmente a peta y exa escala (Witte, 2020; VanDecar y Snieder, 1994; Liner, 2016), siendo los costos operativos, de inversión y almacenamiento de métodos directos, excesivos para cualquier arquitectura de computadora. Por ello, estos problemas son abordados con métodos iterativos de optimización con operadores lineales, también llamados métodos iterativos preconditionados (Pearson y Pestana, 2020; Snieder y Trampert, 1999; Schuster, 2017).

La ventaja de c) es que no requiere acceder a la matriz, sino solo realizar multiplicaciones matriz-vector por bloques individuales en cada iteración, sin tener que invertir toda la matriz. Este enfoque denominado sin matriz (*matrix-free*, en inglés), es implementado a través del uso iterativo de operadores directos y adjuntos (Ravasi y Vasconcelos, 2020; Pearson y Pestana, 2020).

En sismología de exploración, los operadores lineales y adjuntos proyectan información del espacio de modelos al espacio de datos y viceversa, transformado vectores en matrices no densas, es decir, matrices con menos elementos diferentes de cero que elementos igual a cero. Aprovechando esta característica, pueden escribirse códigos para los operadores lineal y adjunto, resultando una aplicación más eficiente de modelado directo (operadores) y procesamiento (adjuntos), que escalan con el tamaño del problema, de decenas a millones de parámetros del modelo (Ravasi y Vasconcelos, 2020).

Desde una perspectiva numérica, los operadores lineales son entidades basadas en clases, rigiéndose por reglas del álgebra de matrices, heredando su sintaxis analítica, pero sin ser matrices explícitas (Ravasi, 2021a; Claerbout y Fomel, 2014).

Considerando la solución de cuadrados mínimos (Ec. 3), \mathbf{L}^T es el operador adjunto de

\mathbf{L} , siendo el adjunto el operador que conmuta (descodifica) a través del producto punto,

$$(\mathbf{d} \cdot \mathbf{L}\mathbf{m}) = (\mathbf{L}^T \mathbf{d} \cdot \mathbf{m}), \quad (16)$$

el espacio de modelos y espacio de datos. Formalmente, la Ec. 16, denominada prueba de producto punto, valida la consistencia del adjunto del operador. Así el operador adjunto tiene una definición única para cada operador, por lo que su elección no es arbitraria (Trad, 2020; Claerbout y Fomel, 2014).

La principal ventaja del operador adjunto es que tolera imperfecciones en los datos y no requiere toda la información sísmica del subsuelo. La ventaja del operador adjunto \mathbf{L}^T con respecto al inverso \mathbf{L}^{-1} , es un requerimiento mucho menor de memoria de acceso aleatorio (RAM, por sus siglas en inglés) y mayor resolución (Claerbout y Fomel, 2014). En general, la matriz del operador de modelado \mathbf{L} es muy grande para ser almacenada en la memoria de un sistema computacional, por lo que no es conveniente formular la matriz \mathbf{L} y calcular su adjunto \mathbf{L}^T explícitamente (Lu, et al., 2018).

2.1. Hessiano inverso

La construcción de imágenes del subsuelo con datos sísmicos de reflexión es posible al migrar mallas discretas de trazas sísmicas a través de la acción conjunta de multiplicación de operadores directo \mathbf{L} y adjunto \mathbf{L}^T , de forma que

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{L}^T \mathbf{L},$$

es una matriz simétrica $N \times N$, donde $\mathbf{\Gamma}$ es el **Hessiano**, y representa la segunda derivada multidimensional de la función de costo (Ec. 10) con respecto a los parámetros del modelo de reflectividad (Trad, 2020; Schuster et al., 2022). El Hessiano produce una versión borrosa

del modelo real de reflectividad, es decir, una imagen migrada

$$\mathbf{m}^{\text{mig}} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{m}^{\text{real}}. \quad (17)$$

El principal inconveniente de la migración convencional es la distorsión de imágenes debido a geometrías de adquisición irregular y poco densa, apertura limitada de fuente a receptor, y desenfoque de energía debido a fuertes contrastes de velocidad. Los problemas anteriores, contenidos en el Hessiano, generan submuestreo y artefactos de migración, degradan la nitidez de imagen sísmica, desenfocan la energía y, por lo tanto, producen una versión borrosa de la estructura del subsuelo.

Matemáticamente, visto el Hessiano como una matriz, los elementos de la diagonal principal representan la intensidad de iluminación de los parámetros del modelo, y los elementos fuera de la diagonal principal, la correlación cruzada entre los diferentes parámetros del modelo por la no ortogonalidad de las funciones base y artefactos de muestreo. La inversión del Hessiano elimina y atenúa el deterioro de la imagen sísmica producido por la distribución irregular de fuentes y receptores, y cobertura no uniforme del subsuelo por la variación de velocidades (Trad, 2020).

En resumen, el Hessiano $\mathbf{\Gamma}$ es la secuencia de modelado directo (demigración) y migración, donde para cada punto imagen, calcula el efecto de interferencia a partir de otros puntos imagen dada una geometría de adquisición y modelo de velocidad del subsuelo.

Una analogía útil para entender el problema y solución a través de la aproximación al Hessiano inverso, la facilita la astrofotografía. Debido a la limitada apertura de las lentes de telescopios, la imagen astronómica formada es una versión borrosa del cuerpo celeste original. Matemáticamente, la imagen borrosa puede expresarse como (Hu et al., 2001)

$$\mathbf{m}(\mathbf{r})' = \int_{\Omega} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) m(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0, \quad (18)$$

donde $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ es el objeto estelar, $\mathbf{m}(\mathbf{r})'$ la imagen borrosa, y $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ la función borrosa o

de desenfoque, llamada función de dispersión de punto (PSF, por sus siglas en inglés).

Dado que es posible conocer las características ópticas del telescopio, la función PSF $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ es conocida y, por lo tanto, es posible calcular su operador de deconvolución o inverso, aplicarlo a $\mathbf{m}(\mathbf{r})'$ y obtener la imagen nítida $\mathbf{m}(\mathbf{r})$, con mucho mayor resolución y menos ruido.

En sismología de exploración, el equivalente al telescopio son los arreglos geométricos de receptores (geófonos e hidrófonos) $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$, y el punto focal de la luz recolectada es el operador de migración que enfoca la energía distribuida en el subsuelo. En esta analogía, la imagen sísmica migrada $\mathbf{m}(\mathbf{r})'$ es la representación borrosa de la reflectividad del subsuelo $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ en forma de artefactos de migración que contribuyen a la grabación de ruido de huella de adquisición (Nemeth et al., 1999), donde la analogía puede expresarse matemáticamente de forma equivalente a la Ec. 18.

Aoki y Schuster (2009) discuten que para corregir de forma parcial los artefactos de migración, los datos deben regularizarse y después migrarse, esto es, compensar la imagen por iluminación y aplicar a la imagen migrada el inverso aproximado del operador Hessiano, implementado en un esquema iterativo LSM.

En el espacio de imagen, los datos migrados e imagen de reflectividad resultante conducen a la generación de datos simulados. Los datos simulados son sustraídos de los datos de campo, y el residual amortiguado o ponderado, migrado para corregir el modelo de reflectividad estimado (Fig. 4 y 5); este proceso representa una iteración. En un esquema LSM típico, una inversión aceptable del Hessiano, requiere más de 20 iteraciones.

Para reducir el número de iteraciones, es posible, a través de operadores de nitidez, realizar una aproximación económica al Hessiano inverso, reduciendo el costo computacional de LSM, que puede llegar a ser hasta 30 veces mayor que una migración RTM convencional (Schuster, 2018a). Un inconveniente de las técnicas iterativas es que al no calcular explícitamente el Hessiano inverso, la capacidad de evaluar la incertidumbre del problema no es posible (Fig. 2) [Snieder y Trampert, 1999].

2.2. Operadores de nitidez

La solución por cuadrados mínimos del sistema de ecuaciones $\mathbf{L}\mathbf{m} = \mathbf{d}$, está dada por la Ec. 3,

$$\mathbf{m} = \mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{d}.$$

En la práctica, la matriz $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ es tan grande que no cabe en la memoria de computadora alguna, por lo que el modelo se estima de manera iterativa como

$$\mathbf{m}^{\text{est}} = \mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{L}^T(\mathbf{L}\mathbf{m}^{(k)} - \mathbf{d}), \quad (19)$$

donde $\mathbf{m}^{(k)}$ denota el k-ésimo modelo iterativo. La Ec. 19 sigue siendo difícil de resolver ya que aún falta calcular el inverso del Hessiano. La ventaja de la Ec. 19, es que reemplaza $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ por un operador \mathbf{C} , reescribiéndose la ecuación como (Schuster et al., 2022; Snieder y Trampert, 1999)

$$\mathbf{m}^{\text{est}} = \mathbf{m}^{(k)} + \alpha\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{m}^{(k)} - \mathbf{m}^{\text{mig}}). \quad (20)$$

El operador \mathbf{C} , conocido como **operador de nitidez** (*deblurring*, en inglés) es una aproximación económica del operador Hessiano inverso (Schuster, 2018a; Snieder y Trampert, 1999)

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{\Gamma}^{-1} = [\mathbf{L}^T\mathbf{L}]^{-1}, \quad (21)$$

y transforma del espacio de modelos al espacio de datos en pocas iteraciones. Esta transformación, conocida como preconditionamiento (Claerbout y Fomel, 2014), permite enfocar mejor los puntos difractores del subsuelo.

Para hallar una buena aproximación del inverso del operador Hessiano, es necesario usar operadores de nitidez como preconditionadores. Aoki y Schuster (2009) plantean un operador de nitidez a partir de un modelo de reflectividad de referencia en malla con una distribución par de puntos difractores \mathbf{m}_{ref} (Fig. 11), donde los datos de referencia \mathbf{d}_{ref} , son generados a partir de la reflectividad de referencia y modelo de velocidad de fondo.

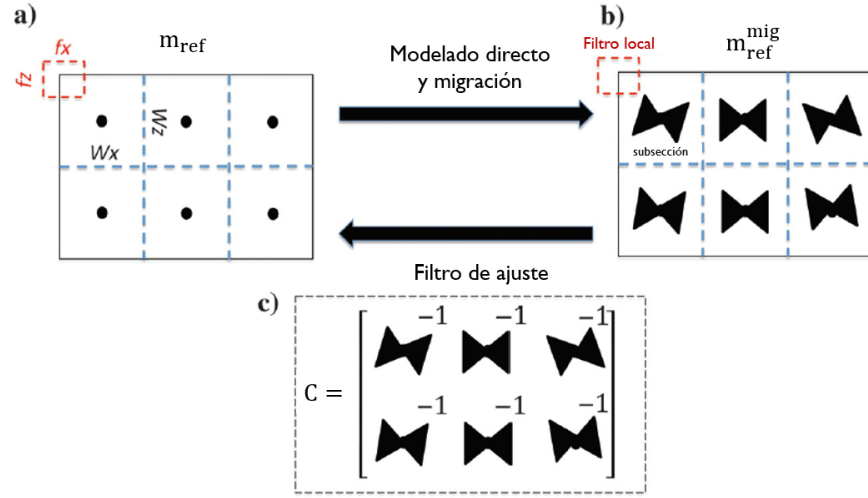


Figura 11. a) Modelo de reflectividad, b) imagen migrada, y c) filtro de nitidez (modificada de Feng et al., 2019).

La migración de datos de referencia \mathbf{d}_{ref} produce una imagen $\mathbf{m}_{\text{ref}}^{\text{mig}}$ ilustrada en la Fig. 11b. Matemáticamente, a partir de las Ecs. 1 y 9, la imagen queda expresada como

$$\mathbf{m}_{\text{ref}}^{\text{mig}} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{m}_{\text{ref}} = \mathbf{L}^T \mathbf{d}_{\text{ref}}, \quad (22)$$

donde \mathbf{L} depende de la velocidad de fondo y configuración geométrica entre fuentes y receptores.

Las imágenes \mathbf{m}_{ref} y $\mathbf{m}_{\text{ref}}^{\text{mig}}$ son divididas en subsecciones con centro en el punto difractor, donde el tamaño de cada subsección, es suficientemente grande para cubrir la parte principal de la mariposa de migración —también llamada reloj de arena (Hu et al., 2001). Por lo tanto, $\mathbf{m}_{\text{ref}}^{\text{mig}}$ representa la migración de Green truncada dentro de cada subsección, que es aproximadamente invariable con respecto a la posición del punto difractor. El filtro de nitidez en cada subsección es estimado ajustando localmente el modelo de punto difractor con la imagen migrada $\mathbf{m}_{\text{ref}}^{\text{mig}}$ como

$$[\mathbf{m}_{\text{ref}}]_i = [\mathbf{m}_{\text{ref}}^{\text{mig}}]_i * \mathbf{C}_i, \quad (23)$$

donde i es la i -ésima subsección, $[]_i$ el modelo en la i -ésima subsección, y $*$ el operador convolución.

La imagen de migración de referencia $[\mathbf{m}_{\text{ref}}^{\text{mig}}]_i$ puede ser formulada como una matriz $M \times N$ de convolución $\mathbf{M}_{\text{ref}}^{\text{mig}}$, donde $M = Wx \times Wz$ y $N = fx \times fz$. Con base en la Fig. 11a, Wx y Wz son longitudes horizontales y verticales de la subsección, y fx y fz , longitudes de filtros en direcciones horizontales y verticales, respectivamente. El modelo de reflectividad $[\mathbf{m}_{\text{ref}}]_i$ y el filtro de nitidez \mathbf{C}_i puede reformularse como un vector $[\mathbf{m}_0]_i$ de dimensiones $M \times 1$ y un vector $[\mathbf{c}]_i$ de dimensiones $N \times 1$.

La Ec. 23 puede reescribirse como

$$[\mathbf{m}_0]_i = [\mathbf{M}_{\text{ref}}^{\text{mig}}]_i * [\mathbf{c}]_i. \quad (24)$$

Multiplicando ambos lados de la Ec. 24 por $[\mathbf{m}_{\text{ref}}^{\text{mig}}]_i^{\text{T}}$, obtenemos las ecuaciones normales

$$[\mathbf{m}_{\text{ref}}^{\text{mig}}]_i^{\text{T}} [\mathbf{m}_0]_i = [\mathbf{m}_{\text{ref}}^{\text{mig}}]_i^{\text{T}} [\mathbf{M}_{\text{ref}}^{\text{mig}}]_i * [\mathbf{c}]_i, \quad (25)$$

donde $[\mathbf{c}]_i$ puede calcularse en cada subsección al resolver las ecuaciones normales a través, por ejemplo, de una descomposición LU (*lower triangular-upper triangular*, en inglés) para formar la matriz del operador de nitidez $\mathbf{C} \approx \mathbf{\Gamma}^{-1}$ como muestra la Fig. 11c.

Recordando que la imagen migrada es el producto del operador adjunto de migración y datos observados

$$\mathbf{m}^{\text{mig}} = \mathbf{L}^{\text{T}} \mathbf{d} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{m},$$

aplicando \mathbf{C} a la imagen migrada, puede estimarse el modelo verdadero de reflectividad, cuasi libre de artefactos de migración, como

$$\mathbf{C} \mathbf{m}^{\text{mig}} \approx \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{m}^{\text{mig}} = \mathbf{m}^{\text{LS}}, \quad (26)$$

donde el operador de nitidez \mathbf{C} es el preconditionador de \mathbf{m}^{LS} , conocida también como deconvolución de migración (MD, por sus siglas en inglés). La explicación anterior es un

acercamiento didáctico a la estimación del inverso del operador Hessiano a través del inverso aproximado de la migración de función de Green.

La Fig. 12 es equivalente a la Fig. 11 para un modelo de puntos difractores diferentes. El operador de nitidez suprime artefactos de migración e incrementa la resolución espacial. La Fig. 12a es el modelo de malla de referencia de puntos difractores aislados con coordenadas (x, t) , y la Fig. 12b es la versión PSTM de referencia. El operador de nitidez es estimado a través de un ajuste local de la imagen de migración de referencia con el modelo de reflectividad verdadero, donde para verificar la efectividad del operador, el filtro u operador MD es aplicado a la imagen de referencia PSTM, para así obtener la imagen nítida de referencia (Fig. 12c).

El operador Γ^{-1} en la Ec. 26 comprime los artefactos de mariposa en la sección migrada (ilustrados en las Figs. 11b y 11c) en aproximadamente un punto imagen, donde el tamaño del punto es aproximadamente proporcional a la longitud de onda dominante (Hu et al., 2001).

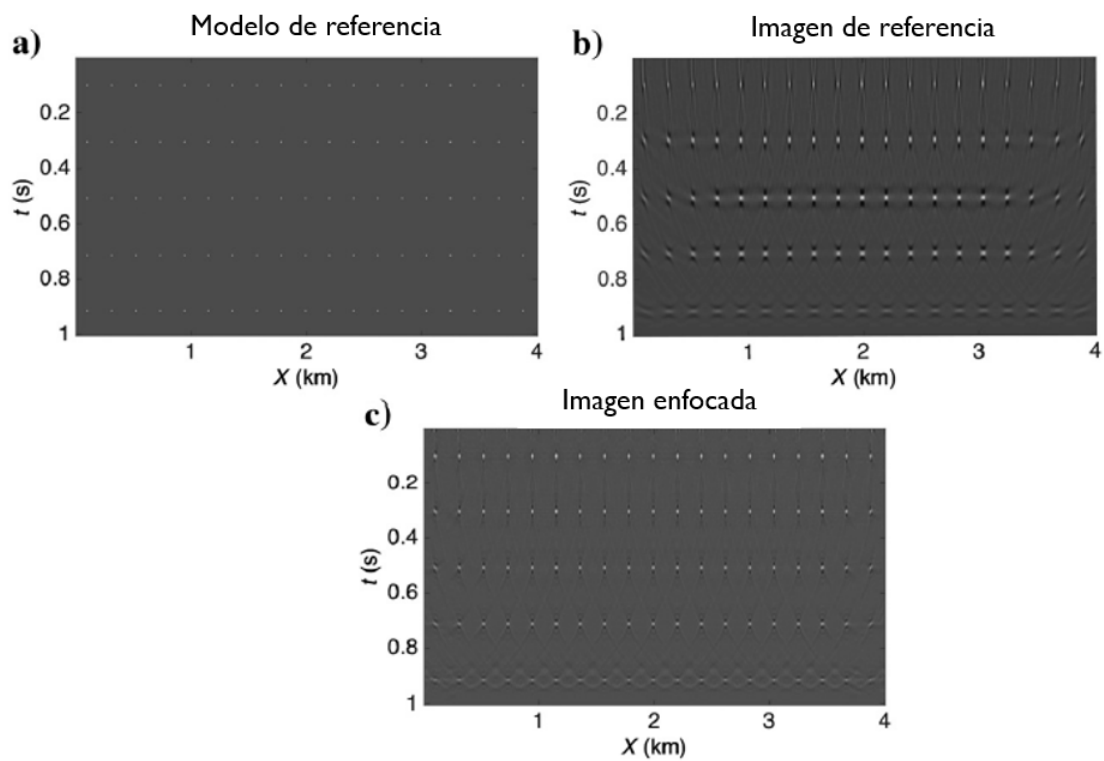


Figura 12. a) Modelo de reflectividad de referencia, b) imagen migrada de referencia, y c) imagen enfocada a través del operador de nitidez LSM de MD (tomada de Feng et al., 2019).

Capítulo 3

Prueba de concepto: experimento numérico

En ingeniería, para ejemplificar hipótesis o implicación fenomenológica o empírica alguna, es requerida una prueba de concepto (Jobin et al., 2020; Devarakota et al., 2022). Siguiendo y promoviendo una filosofía de reproducibilidad computacional, uso de paquetería gratuita de código abierto (*open source*, en inglés) y herramientas computaciones reproducibles no comerciales (Reinecke et al., 2022; Osipov, 2016; Kluyver et al., 2016; González-Verdejo y Chávez-Pérez, 2012), adapto y desarrollo un experimento numérico con datos sintéticos bidimensionales del modelo Marmousi2 (Martin et al., 2006; Versteeg, 1994), modelo geológico plausible y complejo, con gran cantidad de reflectores horizontales e inclinados, secuencias sedimentarias concordantes y discordantes, y fuertes contrastes de velocidad en dirección vertical y horizontal.

A partir de un operador de demigración basado en rayos (i.e., Kirchhoff), la prueba de concepto discutida en este capítulo consiste en analizar el efecto paramétrico del factor de amortiguamiento sobre el operador de nitidez de Migración de Kirchhoff de Cuadrados Mínimos en una sección de geología compleja, su impacto en los tiempos de convergencia de imagen Kirchhoff LSM e implicación en representación sísmica.

3.1. Operador de demigración de Kirchhoff

La migración sísmica es el proceso de decodificar datos sísmicos en información geológica, transformando el campo de ondas del espacio de datos a modelos para crear una imagen de reflectividad del subsuelo. La migración de cuadrados mínimos es una forma diferente de descifrar la información, partiendo de un operador que produce datos a partir del modelo de reflectividad, por lo que la imagen predice el registro sísmico con un error cuadrático medio mínimo. Para que esta suposición pueda cumplirse, requiere que a) el operador de modelado sea libre de error, b) los elementos no calculados por el operador deben minimizarse por amortiguamiento, y c) los datos predichos por el operador con mínima contribución, tengan una aportación limitada en la solución. Con base en estas premisas, la migración de cuadrados mínimos supera la migración convencional, al remover interferencia entre componentes del modelo a través de la inversión del operador Hessiano, logrando 1) compensar la iluminación, 2) mejorar resolución, y 3) mitigar deficiencias de adquisición (Trad, 2016 y 2020).

Independiente de la cinemática del operador de modelado (i.e., basado en rayos o extrapolación del campo de ondas), el proceso de demigración y migración puede expresarse como un operador lineal de la forma

$$\mathbf{d}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) = \mathbf{w}(t) * \int_V \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, t) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, t) \mathbf{m}(\mathbf{x}, z) d\mathbf{x} dz, \quad (27)$$

donde $\mathbf{m}(\mathbf{x}, z)$ es el modelo de reflectividad, $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, t)$ y $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, t)$ las funciones de Green de las fuentes a reflectores y reflectores a receptores, y $\mathbf{w}(t)$ la ondícula de la fuente.

La solución de las funciones de Green a través de ecuaciones en derivadas parciales es genéricamente denominada Migración de Kirchhoff de Cuadrados Mínimos (Kirchhoff LSM). La solución en diferencias finitas de Ec. 27 puede expresarse de forma matricial como

$$\mathbf{W}\mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{d}, \quad (28)$$

donde $\mathbf{WG} = \mathbf{L}_K$ es el operador de demigración de Kirchhoff.

La migración de Kirchhoff de cuadrados mínimos invierte el operador de demigración \mathbf{L}_K minimizando la energía del error de predicción de la función objetivo (Ec. 29)

$$\phi(\mathbf{m}) = \left\| \mathbf{L}_K \mathbf{m} - \mathbf{d}^{\text{obs}} \right\|_2^2. \quad (29)$$

La solución de la Ec. 29 está dada por

$$\mathbf{m}^{\text{LS}} = \mathbf{C} \mathbf{m}^{\text{mig}}, \quad (30)$$

también conocida como deconvolución de migración, donde $\mathbf{C} = [\mathbf{L}_K^T \mathbf{L}_K]^{-1}$ es el operador de nitidez.

3.2. Implementación numérica y resultados

Utilizando herramientas y paqueterías libres y gratuitas de código abierto, la prueba de concepto es basada en las interfaces de programación de aplicaciones (API, en inglés) y en la red (Web API), JupyterLab⁶ y Colaboratory⁷, ensamblando a través de una secuencia de comandos (*script*, en inglés) las bibliotecas PyLops, NumPy, SciPy, Scikit-fmm y Matplotlib en un marco de trabajo flexible para crear y aplicar operadores lineales directos y adjuntos.

Con base en el cuaderno de trabajo (*notebooks*, en inglés) de Matteo Ravasi (2019), realizo una implementación en JupyterLab, herramienta que proporciona un entorno informático interactivo en un ambiente de página web y permite configurar y diseñar flujos de trabajo en ciencia de datos, computación científica y aprendizaje automático en diferentes lenguajes de programación, a través de un formato de cuadernos de trabajo, integrando prosa, código, datos y resultados en una consola de lenguaje, logrando la publicación de

⁶Ver <https://jupyter.org/>

⁷También llamado Colab, servicio de cuadernos de trabajo de [Jupyter](https://colab.research.google.com/) alojados en la nube. Para detalles, ver <https://colab.research.google.com/>

casi cualquier método computacional que puede ser, en principio, fácilmente leído, replicado y modificado, promoviendo y facilitando reproducibilidad computacional. Una vez implementado el cuaderno de trabajo en JupyterLab, lo reproduzco en Colaboratory utilizando el poder de cómputo en la nube sin costo, superior al poder de cómputo local de mi computadora portátil DELL Inspiron 14 7460.

Los datos sintéticos corresponden a una subsección del modelo Marmousi2 (recuadro rojo en Fig. 13), tomada de la plataforma de desarrollo colaborativo de software, GitHub⁸. El modelo de velocidad de ondas P corresponde a rocas sedimentarias y un cuerpo de sal en forma de cuña. La geometría corresponde a $\mathbf{m}(x, z) = 3,200 \times 2,200$ m, y malla $\Delta(x, z) = 4 \times 4$ m (Fig. 14a). El modelo real \mathbf{m}^{real} de reflectividad considera densidad constante $\rho = 1,000$ kg/m³ y coeficientes de reflectividad de incidencia normal (Fig. 14b). El espectro de potencia \mathbf{m}^{real} registra la contribución de frecuencias del modelo de reflectividad (Fig. 14c), más allá del contenido de frecuencia recuperado en sismología de exploración, entre 10 y 80 Hz (Biondi y Almomin, 2013).

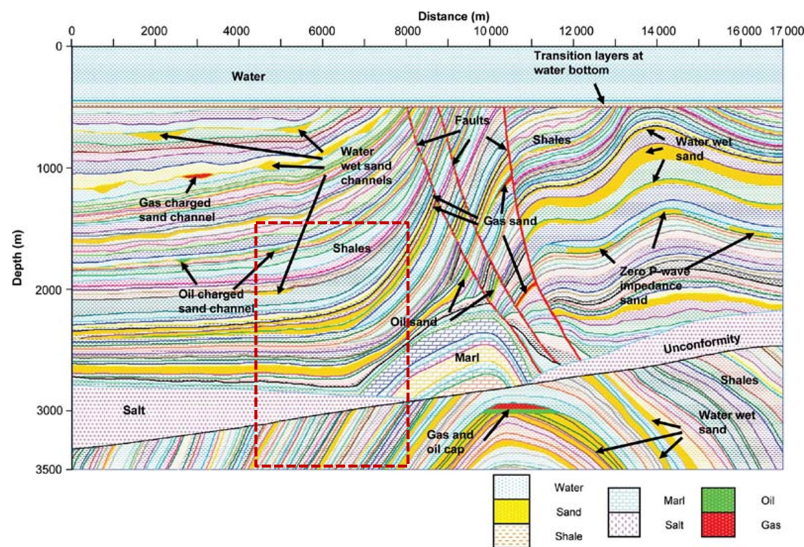


Figura 13. Modelo Marmousi2, elementos estructurales, horizontes y litología. El área de estudio de la prueba de concepto es mostrada en el recuadro rojo punteado (modificada de Martin et al., 2006).

El experimento de escala sísmica consiste de 36 receptores, 12 fuentes impulsivas fase

⁸Ver <https://github.com/mrava87>

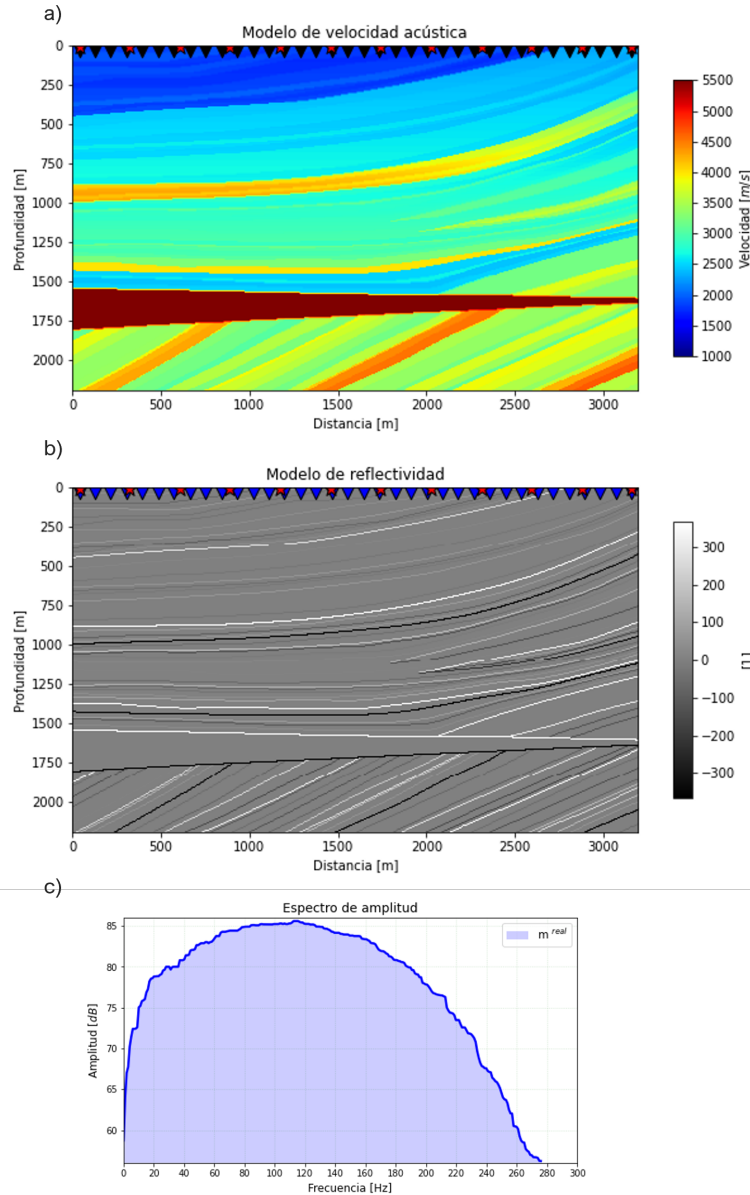


Figura 14. a) Modelo de velocidad de intervalo de ondas P, b) modelo real de reflectividad m^{real} , y c) espectro de amplitud en decibelios. Obsérvese que el contenido de energía va más allá de la escala de exploración sísmica de datos de superficie (10-80 Hz).

cero a 25 Hz, intervalo de muestreo $\Delta t = 4$ ms, 432 trazas sísmicas, 751 muestras por traza, y 4 bytes por muestra, generando un tamaño de sección de 1.296 MB. El experimento es dividido en cuatro procesos principales: 1) construcción del modelo, 2) cálculo de tiempos de viaje, 3) migración de Kirchhoff, y 4) migración de Kirchhoff de cuadrados mínimos.

Con respecto a la geometría de fuentes y receptores, de izquierda a derecha, el primer receptor y fuente están a 40 m, con intervalo entre receptores y fuentes de 20 y 10 m, respectivamente, ubicándose la última fuente y receptor a 3,160 m (Figs. 14a y 14b). Considerando la sensibilidad LSM a errores de velocidad mayores a $\Delta v = 8\%$ (Schuster, 2017), el modelo de velocidad original es suavizado con un error máximo $\Delta v = 7.5\%$ (Fig. 15). Las secciones sísmicas LSM finales están escaladas al tamaño del modelo $\mathbf{m}(x, z) = 3,200 \times 2,200$ m.

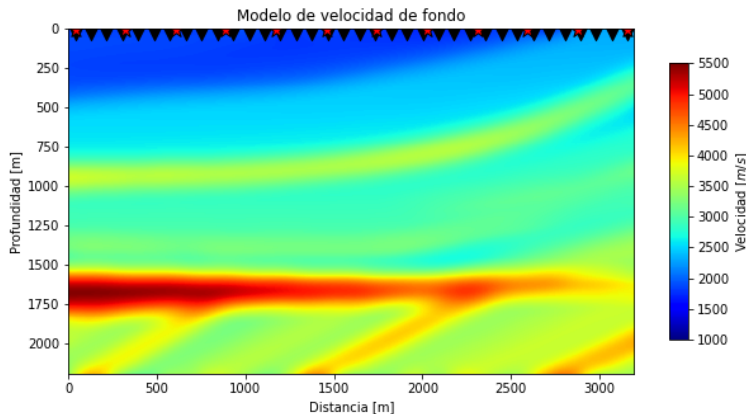


Figura 15. Modelo de velocidad de migración con error $\Delta v = 7.55\%$ con respecto al modelo real de velocidad (Fig. 14a).

La Ec. 30 puede resolverse de forma iterativa a través del algoritmo de cuadrados mínimos poco denso (LSQR, por sus siglas en inglés), similar al método de gradiente conjugado, sin considerar algún tipo de regularización o amortiguamiento (Paige y Saunders, 1982).

Para implementar el proceso iterativo (Ec. 20), hay que calcular el gradiente $\nabla\phi(\mathbf{m})$, operación que corresponde a la migración a través del operador adjunto $\mathbf{L}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{T}}$, y los tiempos

de viaje para las 432 configuraciones posibles entre las 12 fuentes y 36 receptores. Para el experimento, el tamaño del operador de demigración \mathbf{L}_K es de 440,000 elementos [$\mathbf{L}_{550 \times 800}$], y vector de datos \mathbf{d}^{obs} de 324,432 elementos.

Calculando los tiempos de viaje del modelo de velocidad de fondo a través de la ecuación eikonal (cálculo del tiempo de viaje fuente a receptor a través de medios complejos para una trayectoria de rayos), y geometría fuente a receptor descrita previamente, la Fig. 16 muestra la imagen migrada \mathbf{m}^{mig} .

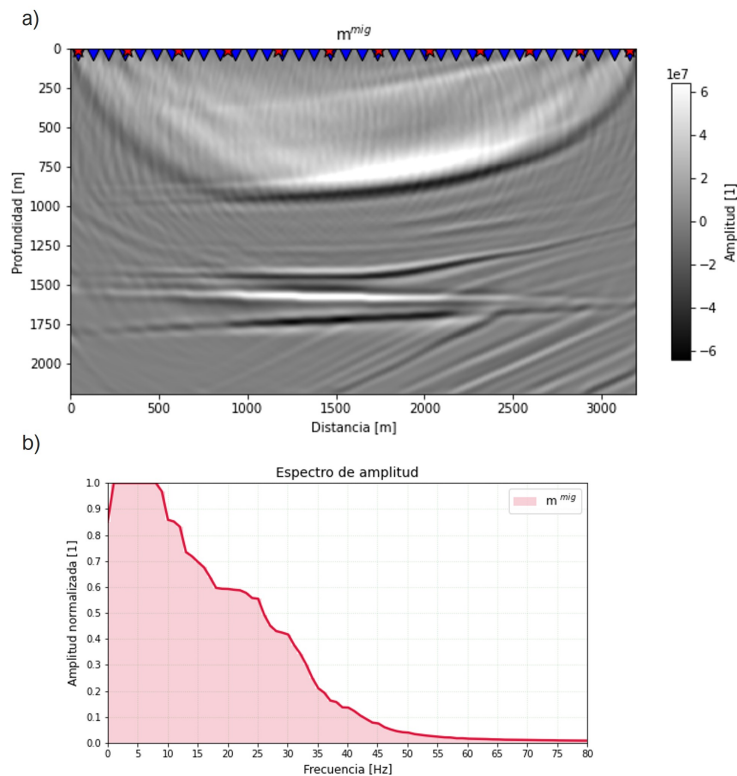


Figura 16. a) Imagen migrada $\mathbf{m}^{\text{mig}} = \mathbf{L}^T \mathbf{d}^{\text{obs}}$. La parte superior de la imagen es seriamente afectada por la trayectoria de ondas reflejadas y refractadas entre fuentes y receptores (huella de adquisición), generando artefactos energéticos de baja frecuencia, degradando la calidad de imagen. b) Espectro de amplitud normalizado. La huella de adquisición concentra toda la energía en la parte de frecuencias bajas.

A través de la herramienta de cómputo en la nube, Colaboratory, y utilizando una Unidad de Procesamiento Gráfico (GPU, por sus siglas en inglés) Nvidia Tesla K80 con memoria RAM de 24 GB, y rendimiento teórico máximo de 2.91 tera operaciones de punto flotante por segundo (FLOPS, por sus siglas en inglés), el tiempo de cómputo para

20 iteraciones de migración de cuadrados mínimos (Ec. 30) es 73.354 s (Tabla 1).

Tiempo de cálculo $\text{LSM}_{\text{iter}=20}$	
1. Construcción de modelo de velocidad	02.426 s
2. Tiempos de viaje (ecuación eikonal)	17.580 s
3. Migración de Kirchhoff	16.841 s
4. Migración de Kirchhoff de cuadrados mínimos	36.507 s

Tabla 1. Tiempo de cómputo de procesamiento y representación sísmica \mathbf{m}^{LS} del modelo 2D Marmousi2, para 20 iteraciones, en 73.354 s, equivalente a 1.222 min.

Para obtener la primera iteración de inversión del operador de demigración (i. e., imagen migrada), es necesario calcular $\mathbf{m}^{\text{mig}} = \mathbf{L}^T \mathbf{d}^{\text{obs}}$ (Ec. 9), por lo que se genera el operador de demigración \mathbf{L} como

$$\mathbf{L} = \mathbf{C}_{\text{Op}} \times \mathbf{S}_{\text{Op}}, \quad (31)$$

donde \mathbf{C}_{Op} es el operador de convolución en una dimensión aplicado a los datos, y \mathbf{S}_{Op} son los valores propagados desde el vector del modelo al vector de datos en función de tiempos de viaje entre fuentes y receptores.

Los datos observados \mathbf{d}^{obs} se obtienen como

$$\mathbf{d}^{\text{obs}} = \mathbf{L} \times \mathbf{r}_0, \quad (32)$$

donde \mathbf{r}_0 es el modelo de reflectividad de incidencia normal. Sustituyendo las Ecs. 31 y 32 en la Ec. 9, y calculando el transpuesto del operador de demigración \mathbf{L} , es obtenida la imagen migrada (Fig. 16).

Para calcular la imagen \mathbf{m}^{LS} a través de la Ec. 30, el operador de nitidez es calculado como

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}_{\text{Demop}}^T \times \mathbf{L}_{\text{Demop}}, \quad (33)$$

donde $\mathbf{L}_{\text{Demop}}$ calcula tiempos de viaje a través del operador de demigración de Kirchhoff. La Ec. 33 representa un sistema de ecuaciones lineales sobredeterminado y poco denso, por lo que es resuelto de forma iterativa por el algoritmo LSQR a través de la Ec. 20.

La imagen $\mathbf{m}^{\text{LS}}_{\text{iter}=20}$ (Fig. 17a), destaca de manera notable reducción de huella de adquisición, balanceo del espectro y mejora de resolución vertical y lateral de eventos (Fig. 17b). La Fig. 18 muestra el efecto espectral de modelos sísmicos migrados a través de operadores adjunto y de nitidez para 20 iteraciones.

La convergencia del método LSQR y gradiente conjugado es seriamente afectada por huella de adquisición y artefactos de números de onda cortos del gradiente de la función objetivo (Sobrinho et al., 2019). Para estabilizar y acelerar la convergencia LSM, debe invertirse el operador de demigración en un esquema de cuadrados mínimos amortiguados (Ec. 34)

$$\phi(\mathbf{m}) = \left\| \mathbf{L}_K \mathbf{m} - \mathbf{d}^{\text{obs}} \right\|_2^2 + \eta \left\| \mathbf{m} \right\|_2^2. \quad (34)$$

La solución de Ec. 34 está dada por

$$\mathbf{m}^{\text{LS}_\eta} = \mathbf{C}_\eta \mathbf{m}^{\text{mig}}, \quad (35)$$

donde $\mathbf{C}_\eta = [\mathbf{L}_K^T \mathbf{L}_K - \eta \mathbf{I}]^{-1}$, \mathbf{I} la matriz identidad y η el factor de amortiguamiento o regularización.

La función de costo (Ec. 34) consiste de dos partes. El primer término del segundo miembro mide el residual entre datos modelados y observados, y el segundo término contiene la norma del modelo, esto es, el modelo estimado multiplicado por un factor de amortiguamiento o regularización, η , cumpliendo dos objetivos, 1) acelerar y forzar una solución única —no necesariamente la mejor— cuando existe un número infinito de soluciones, y 2) ingresar información a priori sobre el carácter de la solución. Desde una perspectiva bayesiana, η se diseña considerando el ruido de los datos y energía espectral del modelo (Kaplan et al., 2010).

El parámetro de amortiguamiento es un escalar positivo aproximadamente igual al 1% del valor del componente diagonal máximo del operador de demigración (Schuster, 2017), aunque algunos manuales de procesamiento sugieren un valor entre 1 y 4%. Bajo un enfoque experimental heurístico, considerando que el valor máximo es aproximadamente

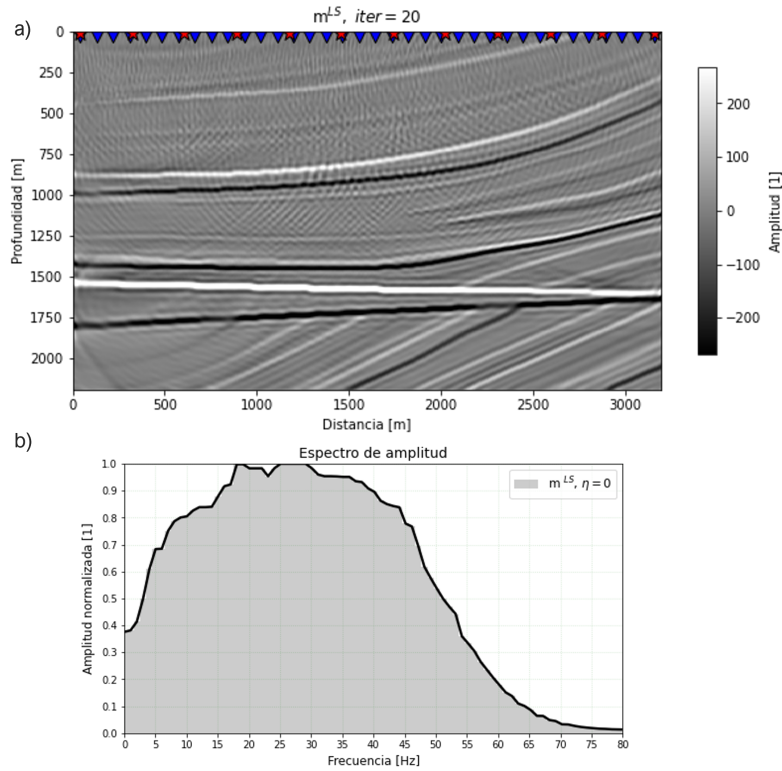


Figura 17. a) Imagen migrada por cuadrados mínimos para 20 iteraciones $m^{LS}_{iter=20}$. En la parte superior de la imagen es casi eliminada la energía de ondas refractadas, compensándose la iluminación y resolviéndose reflectores asociados con la discordancia angular debajo de la cuña de sal, persistiendo dispersión numérica. Aún persisten artefactos de migración debidos a interferencia por arriba de los 1,250 m. b) Espectro de amplitud normalizado, muestra el desempeño de LSM en el balanceo de amplitudes e incremento de resolución vertical.

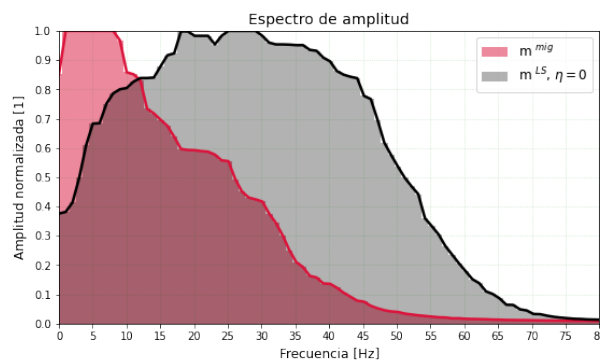


Figura 18. Contenido espectral de m^{mig} y m^{LS} para 20 iteraciones. En la imagen LSM (Fig. 17a), el contenido de potencia es balanceado al atenuarse de forma drástica los artefactos de huella de adquisición, mejorando la representación sísmica del modelo geológico.

135, se realiza un análisis paramétrico de constantes η del operador de nitidez \mathbf{C}_η , para conocer el efecto numérico y desempeño de curva de convergencia en pocas iteraciones, estabilidad de solución y error de imagen \mathbf{m}^{LS} , comparando resultados con un modelo sin amortiguar $\mathbf{m}^{\text{LS}}_{\eta=0}$ y real \mathbf{m}^{real} .

Para evaluar la convergencia del experimento, normalizo el residual de la función de costo. La Tabla 2, muestra resultados representativos del análisis de tiempo de cómputo para diferentes valores de amortiguamiento η . En verde, resalta el parámetro $\eta = 150$, que otorga un mejor desempeño de tasa de convergencia de solución con respecto a $\eta = 0$. Después de 20 iteraciones, el error residual reduce un 12.01 % y el tiempo 9.28 % (Fig. 19).

Parámetro de amortiguamiento y tiempo de cómputo	
Parámetro η	Tiempo
0	36.187 s
50	33.682 s
100	33.647 s
150	32.828 s
180	33.102 s
200	33.695 s

Tabla 2. Tiempo de cómputo de procesamiento y representación sísmica \mathbf{m}^{LS} del modelo 2D Marmousi2, para 20 iteraciones, con diferentes valores de amortiguamiento del operador de nitidez \mathbf{C}_η .

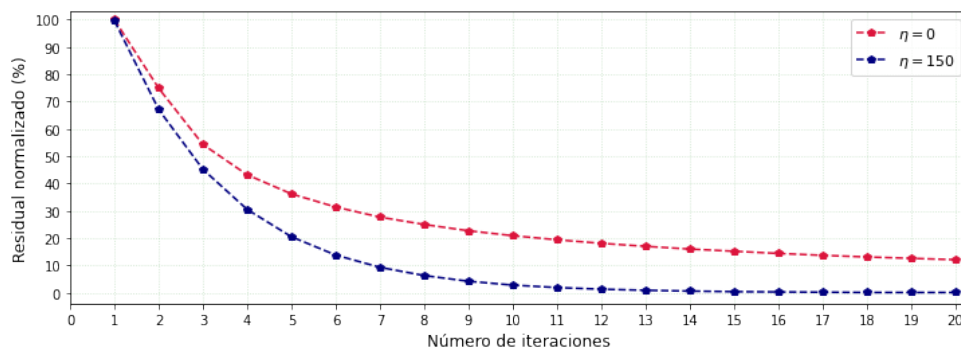


Figura 19. Curva de convergencia de migración de Kirchhoff de cuadrados mínimos con operadores de nitidez sin y con amortiguamiento, $\eta = 0$ y $\eta = 150$. La imagen migrada con $\eta = 150$ acelera la tasa de convergencia a 10 iteraciones, reduciendo el error residual 18.06 % y 53.52 % el tiempo de cómputo.

Los resultados de migraciones para $\mathbf{C}_{\eta(0,150)}$ para 20 iteraciones pueden verse en las Figs. 20a y 20b, y espectros de amplitud en la Fig. 20c. Analizando la respuesta espectral

del experimento (Fig. 20c), el contenido de alta frecuencia de $\mathbf{m}^{\text{LS}}_{\eta=0}$, en color negro, por encima de $\mathbf{m}^{\text{LS}}_{\eta=150}$, en color azul, puede asociarse con artefactos de migración de alta energía por interferencia de huella de adquisición (flechas amarillas). El operador de nitidez $\mathbf{C}_{\eta=150}$ atenúa de manera más eficiente la interferencia de ondas refractadas, así como múltiples dentro del cuerpo de sal (flechas blancas), obteniéndose una imagen mejor enfocada con respecto a $\mathbf{C}_{\eta=0}$.

La ventaja del operador de nitidez amortiguado puede apreciarse comparando las Figs. 21a y 21b, con respecto del modelo real (Fig. 21c). Para una comparación entre iguales, ambas imágenes están normalizadas en un intervalo de amplitudes $[-1, 1]$ y cambia la paleta de colores a azul $[-1]$, rojo $[+1]$. La Fig. 21b muestra un mejor enfoque de energía dentro del cuerpo de sal, atenuación de múltiples de frecuencias bajas (flechas blancas), y reducción de huella de adquisición (flechas amarillas).

De las curvas de convergencia (Fig. 19), sabemos que para $\eta = 150$, el operador de nitidez acelera la tasa de convergencia a 10 iteraciones. Las Figs. 22a y 22b, muestran la comparación entre $\mathbf{m}^{\text{LS}}_{\eta=0}$ para 20 iteraciones y $\mathbf{m}^{\text{LS}}_{\eta=150}$ para 10 iteraciones, respectivamente. La imagen sísmica $\eta = 0$ para 20 iteraciones (Fig. 22a), es obtenida en un tiempo de procesamiento y migración de 73.03 s. La imagen sísmica $\eta = 150$ para 10 iteraciones (Fig. 22b), es obtenida en un tiempo de procesamiento y migración de 53.67 s (Fig. 22b). Lo anterior implica reducción de tiempo de cómputo global de 36.07 %. El error relativo de ambas imágenes sísmicas, con respecto al modelo de reflectividad real \mathbf{m}^{real} , es mostrado en la Fig. 22c. El modelo $\mathbf{m}^{\text{LS}}_{\eta=0}$ con 20 iteraciones, distribuye el error relativo en $\mathbf{P}_{50} = 6.23\%$ y $\mathbf{P}_{75} = 10.55\%$, y el modelo $\mathbf{m}^{\text{LS}}_{\eta=150}$ con 10 iteraciones, distribuye el error relativo en $\mathbf{P}_{50} = 4.17\%$ y $\mathbf{P}_{75} = 9.10\%$.

Observando el resultado del modelo de reflectividad estimado en una traza sísmica con respecto al modelo de reflectividad real (Fig. 23), existe buena aproximación del operador de nitidez para $\eta = 150$ sobre la solución sin amortiguamiento.

Desde un punto de vista de interpretación geológica estructural, ambas imágenes de migración de cuadrados mínimos representan de forma razonable el modelo de reflectividad

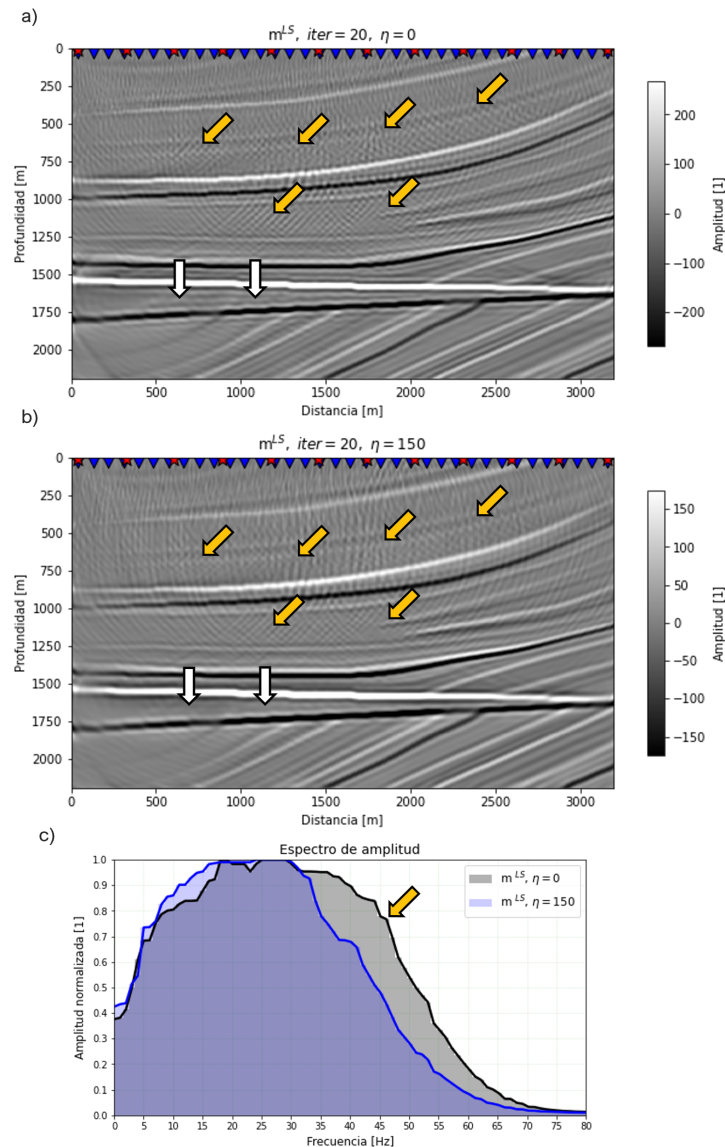


Figura 20. Migración de cuadrados mínimos para 20 iteraciones. a) $\mathbf{m}^{LS}_{\eta=0}$, b) $\mathbf{m}^{LS}_{\eta=150}$, y c) espectros de amplitud. El operador de nitidez para $\eta = 150$ produce una imagen mejor enfocada con respecto al operador de nitidez sin amortiguamiento. En c), la energía de alta frecuencia indicada por la flecha amarilla, puede asociarse con artefactos numéricos por interferencia de energía sísmica.

real. Sin embargo, existe una diferencia de tiempo de cómputo de 36.07% entre ambas, esto es, la imagen $\mathbf{m}^{LS}_{\eta=150}$ para 10 iteraciones, es obtenida en aproximadamente dos terceras partes de tiempo que $\mathbf{m}^{LS}_{\eta=0}$ para 20 iteraciones.

La Fig. 24 muestra la reducción de tiempo de cómputo en cada iteración, solo del

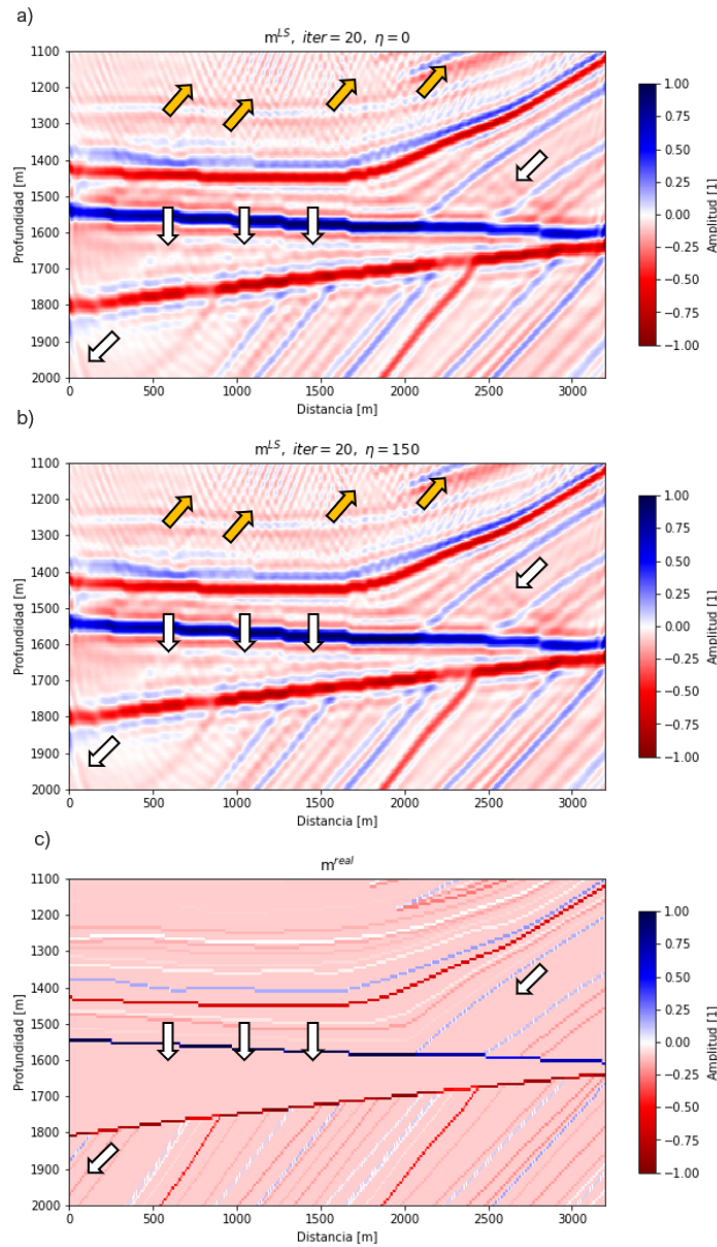


Figura 21. a) $\mathbf{m}^{\text{LS}}_{\eta=0}$, y b) $\mathbf{m}^{\text{LS}}_{\eta=150}$ para 20 iteraciones. c) Modelo de reflectividad real \mathbf{m}^{real} . La representación sísmica con operador de nitidez amortiguado, enfoca mejor la energía difractada y dispersada por cambios abruptos de velocidad (flechas blancas), así compensa, de manera eficiente, artefactos numéricos por interferencia (flechas amarillas).

proceso de inversión (no considera los tiempos de los procesos 1 a 3, indicados en la Tabla 1) al usar operadores de nitidez con amortiguamiento y sin amortiguar. Los resultados experimentales del análisis paramétrico del factor de amortiguamiento $\eta = 0$ sobre el ope-

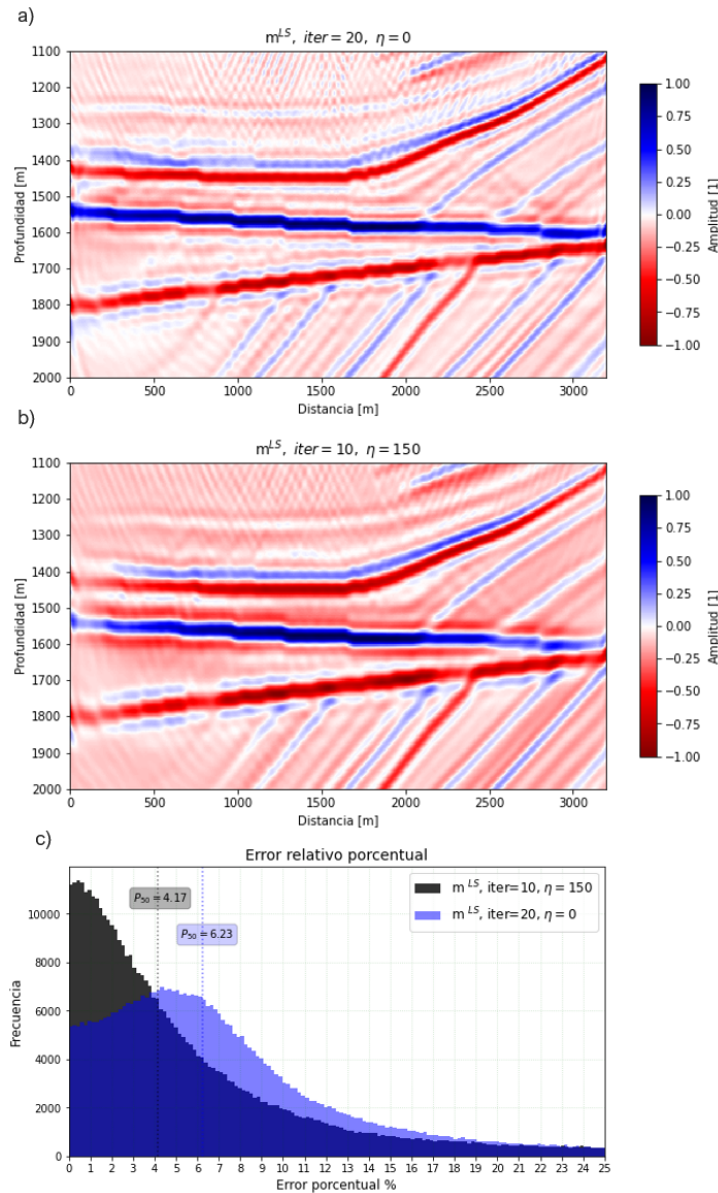


Figura 22. a) $m^{LS}_{\eta = 0}$ para 20 iteraciones, b) $m^{LS}_{\eta = 150}$ para 10 iteraciones, y c) error relativo porcentual con respecto a la imagen m^{real} . La migración de cuadrados mínimos, con operador de nitidez amortiguado por $\eta = 150$, ofrece una imagen con un error sísmico (incertidumbre) menor, por una tercera parte del costo de cómputo que la migración sin factor de amortiguamiento.

rador de nitidez en una sección de geología compleja, a partir del operador de demigración de Kirchhoff, están en la Tabla 3. Los parámetros de amortiguamiento son $\eta = 0$ y $\eta = 150$ para 20 iteraciones.

Una idea a futuro para atenuar artefactos numéricos de interferencia de ondas re-

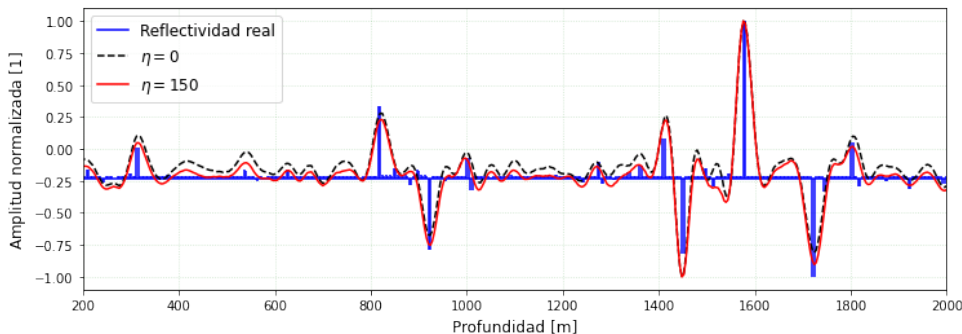


Figura 23. Resultado $\mathbf{m}^{\text{LS}}_{\eta=0}$ y $\mathbf{m}^{\text{LS}}_{\eta=150}$ para 10 iteraciones sobre una traza sísmica. Las líneas verticales en azul, son el modelo de reflectividad real, la línea negra punteada, modelo obtenido para $\eta = 0$, y la línea roja, modelo obtenido para $\eta = 150$. El operador de nitidez, para $\eta = 150$, da una mejor aproximación al modelo real con respecto a $\eta = 0$.

fractadas entre fuentes y receptores, es el diseño y adaptación de preconditionadores de filtrado de números de ondas cortos en el operador de demigración, así como la implementación numérica con operadores \mathbf{C} y \mathbf{L} de extrapolación del campo de ondas (Xu y Sacchi, 2017; Zhang et al., 2014; Schuster, 2017).

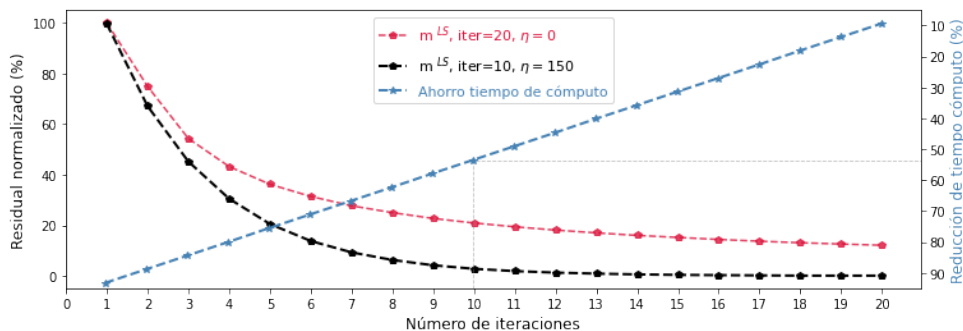


Figura 24. Curva de convergencia de migración de cuadrados mínimos para $\eta = 0$ (línea roja) y $\eta = 150$ (línea negra). La línea azul, describe el porcentaje de reducción de tiempo de cómputo, a cada iteración, para los parámetros de amortiguamiento η .

Bajo una suposición lineal y simple, considerando el uso de recursos de cómputo equivalentes —memoria y rapidez de procesamiento— a los empleados en este experimento, la sección completa del modelo Marmousi2 es compuesta de aproximadamente 7 subsecciones como la usada, por lo que el tiempo de migración de cuadrados mínimos sin operador de nitidez amortiguado sería de 4.22 min, y amortiguado, 1.96 min, esto es, una reducción de tiempo de 46 %, equivalente a 2.26 min.

Residuo y tiempo de cómputo de curva de convergencia					
Iteración	$\Delta\phi(\mathbf{m})_{\eta=0}$	$\Delta\phi(\mathbf{m})_{\eta=150}$	$t \phi(\mathbf{m})_{\eta=0}$	$t \phi(\mathbf{m})_{\eta=150}$	$\Delta\%t$ cómputo
1	100 %	99.64 %	3.132s	2.415s	93.33 %
2	74.93 %	67.12 %	4.872s	4.015s	88.90 %
3	54.33 %	45.22 %	6.612s	5.616s	84.48 %
4	43.25 %	30.46 %	8.351s	7.217s	80.06 %
5	36.23 %	20.52 %	10.091s	8.818s	75.63 %
6	31.35 %	13.83 %	11.831s	10.418s	71.21 %
7	27.75 %	9.31 %	13.571s	12.019s	66.79 %
8	24.96 %	6.27 %	15.310s	13.620s	62.36 %
9	22.73 %	4.23 %	17.050s	15.220s	57.94 %
10	20.91 %	2.85 %	18.790s	16.821s	53.52 %
11	19.39 %	1.92 %	20.529s	18.422s	49.09 %
12	18.10 %	1.29 %	22.269s	20.022s	44.67 %
13	16.98 %	0.87 %	24.009s	21.623s	40.25 %
14	16.01 %	0.59 %	25.748s	23.224s	35.82 %
15	15.16 %	0.40 %	27.488s	24.825s	31.40 %
16	14.40 %	0.27 %	29.228s	26.425s	26.98 %
17	13.73 %	0.18 %	30.968s	28.026s	22.55 %
18	13.12 %	0.12 %	32.707s	29.627s	18.13 %
19	12.57 %	0.08 %	34.707s	31.227s	13.70 %
20	12.07 %	0.05 %	36.187s	32.828s	9.28 %

Tabla 3. Resultados del análisis paramétrico del experimento de migración de cuadrados mínimos \mathbf{m}^{LS} del modelo 2D Marmousi2, para 20 iteraciones y constantes de amortiguamiento $\eta = 0$ y $\eta = 150$ del operador de nitidez \mathbf{C} . Columna 1: número de iteraciones; Columna 2: residuo normalizado para $\eta = 0$; Columna 3: residuo normalizado para $\eta = 150$; columna 4: tiempo de cómputo para $\eta = 0$; Columna 5: tiempo de cómputo para $\eta = 150$; Columna 6: reducción de tiempo con respecto a $\eta = 0$ para 20 iteraciones. El color verde resalta la reducción de tiempo de cómputo de $\eta = 150$ para 10 iteraciones, con respecto a $\eta = 0$ para 20 iteraciones.

En un siguiente escenario, suponiendo un estudio 3D de 256 km² (tamaño estándar en adquisiciones costa dentro) y tamaño de celda (*bin*, en inglés) de 25 × 25 m, el número aproximado de trazas sísmicas sería 1,238,630,400 y 930,211,430,400 muestras, por lo que el tiempo de migración de cuadrados mínimos, sin operador de nitidez amortiguado sería de 5.7 meses, y amortiguado, 2.6 meses, esto es, una reducción de 92 días. Sin embargo, este ejercicio mental sería imposible de resolver haciendo uso de una memoria RAM de 24 GB, ya que los datos tendrían un tamaño de 3.721 TB, y no habría espacio disponible en memoria, poniendo de manifiesto la necesidad de recursos computacionales de mayor rendimiento pero acceso limitado, como los provistos por centros de cómputo dedicados o

procesamiento de alto rendimiento en la nube. Como referencia, el costo actual promedio de una estación de trabajo con capacidad de memoria de 3 de TB, disco duro de estado sólido de 64 de TB, procesador Intel Xeon Platinum 8280@2.7GHz, 28 núcleos, y capacidad máxima de 3.26 TFLOPS, es aproximadamente \$81,450 USD⁹.

Para apreciar la dimensión del problema computacional, considerando que el tamaño típico de un estudio de migración en profundidad antes de apilar (PSDM) de 10,000 km², mide 85.47 TB y demanda 2.3×10^{19} FLOPS (Liner, 2016), a la fecha, existen no más de 70 supercomputadoras¹⁰ en el mundo con la capacidad de memoria RAM requerida para un problema de esta escala. Utilizando la capacidad teórica de procesamiento de la estación de trabajo arriba descrita, el tiempo de cómputo sería 3.69 años, pero solo sería 2.09 s para la actual supercomputadora más rápida del mundo, Frontier¹¹, con capacidad de procesamiento real de 1.102 exa FLOPS.

El corolario no es que la representación sísmica del subsuelo sea un problema computacional imposible, sino sensibilizar sobre la dificultad de cómputo y dilucidar líneas de investigación pendientes de abordar por la academia mexicana frente a un problema de clase mundial, máxime cuando la tendencia de longitud de datos y complejidad de algoritmos crece y demanda recursos humanos calificados capaces de afrontar el problema.

3.3. Discusión

El principal inconveniente para el uso industrial regular de migración de cuadrados mínimos es su costo computacional, de más de un orden de magnitud con respecto a la migración estándar, así como su complejidad en el diseño de flujos de regularización con parámetros óptimos de amortiguamiento, anisotropía, etc.

Dos soluciones para contrarrestar el costo computacional sin pérdida considerable de calidad de imagen sísmica son 1) uso de operadores de nitidez como preconditionadores,

⁹Ver <https://zworkstations.com/products/hp-z8-workstation/>

¹⁰Ver <https://www.top500.org/lists/top500/2022/06/>

¹¹Ver <https://www.top500.org/system/180047/>

y 2) desarrollo tecnológico vertiginoso de microprocesadores más rápidos, eficientes, pequeños, potentes y económicos, con velocidades de cálculo de peta FLOPS y aumentando. La primera solución es competencia de la ingeniería geofísica, y la segunda, de la ingeniería electrónica.

La Fig. 25 muestra la tendencia de incremento de operaciones de punto flotante por segundo con chips (dispositivo semiconductor que contiene múltiples circuitos integrados) 2D y 3D, y precio de imagen sísmica. Para 2025, el precio estimado de migración LSM acústica será cuasi equivalente a una migración RTM actual. Como referencia, en 2018, una migración RTM con corrección de isotropía transversal inclinada (TTI, por sus siglas en inglés) a 30 Hz, costaba 31 millones de pesos y requería 6 meses de trabajo.

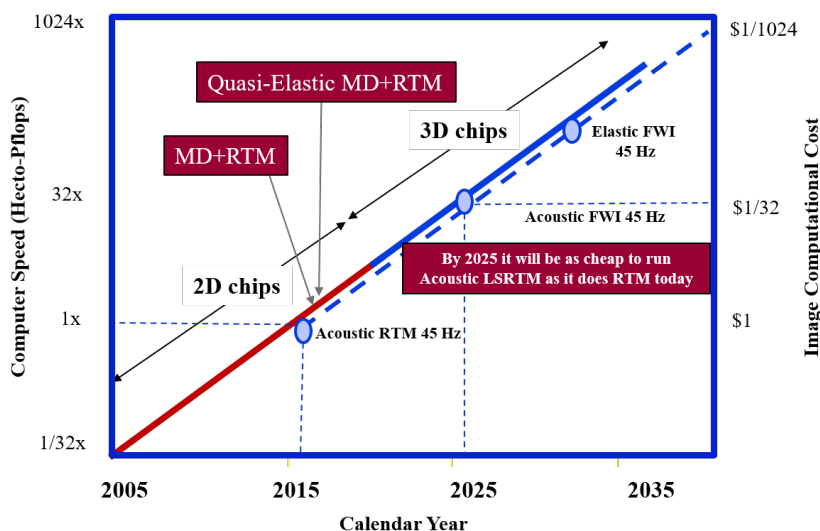


Figura 25. Estado actual y futuro de la representación sísmica en la siguiente década, impulsada por el avance tecnológico de microprocesadores más pequeños, potentes, eficientes y económicos, con arquitectura tridimensional (modificado de Schuster, 2018b).

En años recientes, grupos académicos de investigación [e.g. Grupo de Representación Profunda¹² (DIG, por sus siglas en inglés); Grupo de Representación y Análisis de Señales¹³ (SAIG, por sus siglas en inglés); Centro de Fenómenos de Ondas¹⁴ (CWP, por sus siglas en inglés)], trabajan en migración de cuadrados mínimos con redes neuronales (NNLSM,

¹²Ver <https://dig.kaust.edu.sa/>

¹³Ver <https://saig.physics.ualberta.ca/>

¹⁴Ver <https://cwp.mines.edu/>

por sus siglas en inglés), explotando similitudes matemáticas y reformulando el problema sísmico inverso como un problema de redes neuronales multicapa, imitando la proyección del algoritmo de gradiente descendente y aproximación del efecto inverso del Hessiano. La migración NNLSM ofrece una reducción de costo computacional, atenuación y eliminación de ruido. Sin embargo, su principal desventaja es la obtención aproximada del modelo de reflectividad real (Schuster et al., 2022; Torres y Sacchi, 2021 y 2022; Ravasi, 2021b).

Resolver problemas de representación sísmica basada en inversión, equivale a resolver problemas de optimización, donde los algoritmos son condicionados con información a priori para acelerar y/o forzar la estimación del modelo, a partir de principios físicos, donde los parámetros de la función de costo son ajustados con base en la experiencia del geofísico, antes que el algoritmo pueda aplicarse a todo el conjunto de datos, adaptando el procesamiento y representación sísmica a la naturaleza de los datos.

Este enfoque, basado en física, es muy difícil de establecer con técnicas de aprendizaje automático (ML, por sus siglas en inglés), ya que las operaciones de redes neuronales convolucionales (CNN, por sus siglas en inglés) son difíciles de interpretar en términos físicos, y el entrenamiento debe ejecutarse hasta que converja una solución antes de evaluar el modelo entrenado. Sin embargo, recientemente, Schuster et al. (2022) haciendo uso de aprendizaje automático informado con física (*physics-informed machine learning*, en inglés), han establecido una interpretación física en términos de operadores directos y adjuntos, abriendo nuevas oportunidades en representación sísmica basada en inversión con operadores de nitidez basados en CNN.

Capítulo 4

Conclusiones

- En el diseño del operador de nitidez, la selección del parámetro de amortiguamiento es un proceso experimental heurístico, poco discutido y entendido en la práctica y literatura geocientífica. A través de prueba y error de diferentes constantes, pueden obtenerse buenos resultados para un conjunto de datos sísmicos, pero no necesariamente válidos para cualquier otro conjunto de datos. En escala industrial, el tiempo disponible para pruebas de parámetros libres es restringido a la duración proyecto, por lo que es necesario idear mecanismos para acelerar la selección de constantes.
- La migración de cuadrados mínimos es un proceso computacionalmente costoso, por lo que manipular el contenido de energía, reforzando la diagonal principal del operador de nitidez, a través del parámetro de amortiguamiento, ha permitido para este experimento, estabilizar y acelerar la proyección del espacio de datos al espacio de modelos en menos iteraciones. En general, el reto geofísico es obtener un modelo de reflectividad aceptable, con menor costo de cómputo e incertidumbre sísmica.
- Si el modelo de velocidad es adecuado, la migración de cuadrados mínimos ofrece rendimientos superiores a la migración en profundidad antes de apilar y de tiempo reverso, mitigando efectos de submuestreo, iluminación y artefactos numéricos por interferencia, obteniendo modelos de reflectividad de mayor resolución vertical y

lateral para geologías complejas.

- Los operadores L y nitidez C tienen una enorme gama de aplicaciones en procesamiento y transformación de datos sísmicos, en la conversión de trazas acústicas a trazas elásticas, y de datos viscoacústicos a acústicos, en migración en tiempo y en profundidad, y regularización de datos sísmicos en representación sísmica basada en inversión.
- El procesamiento y representación sísmica es un problema de clase mundial por el tamaño y complejidad de algoritmos, que requiere de una formidable capacidad de cómputo y profesionales altamente especializados.
- Por la complejidad del problema sísmico inverso, el constante progreso de métodos aun más desafiantes (i. e., inteligencia artificial) e interés comercial estratégico de sofisticadas soluciones (algoritmos) en representación sísmica, es crucial fomentar la reproducibilidad computacional y uso de paquetería de código abierto para acceder y compartir experimentos numéricos, y comprender los fundamentos, suposiciones, limitaciones e implicaciones físicas y matemáticas.

Agradecimientos

A Sergio Chávez Pérez por su irrestricta generosidad cultural y pulcritud intelectual. Por su inextinguible humanismo e incansable labor científica. Por el privilegio de colaborar e interactuar académica y profesionalmente.

A Jorge Alfonso Mendoza Amuchástegui, Director de Servicios en Exploración y Producción del Instituto Mexicano del Petróleo, por su generoso y solidario apoyo para concretar este trabajo; a Julio César González Lara, Gerente de Soluciones en Exploración, por la confianza y facilidades otorgadas; y a José Manuel Espinosa Ortega, Líder de Geofísica, por su apoyo y retroalimentación.

A Mario Alfonso Centeno Miranda (Activo de Exploración Marina Norte, PEMEX), Alejandro Cabrales Vargas (Gerencia de Estudios Geofísicos, PEMEX), y Diego Alpírez Vela (Posgrado IMP), por la revisión, comentarios y observaciones.

A mis sinodales Silvia Raquel García Benítez, Rocío Negrete Cadena, Martín Cárdenas Soto y David Escobedo Zenil, por su apoyo durante mis estudios y trabajo de revisión.

A mis colegas y amigos Mayra Cuellar Urbano, Edgar Arce Celaya, Ovelia Iveth Pérez Barrios, Vicente López González, Alberto García Avendaño, Samantha Esperanza Azuara Hernández, Alejandro Sánchez Mora, Oguer David Acevedo Aguirre, Mario Alberto Hernández Puente y José Margarito Galicia Gleason, por su apoyo desinteresado a lo largo de mis estudios.

A Miriam López Solís, mi nube y compañera de viaje, por su solidaridad y apoyo sin condiciones, aliento y ternura sin intermisión.

Referencias

Adler, A., M. Araya-Polo y T. Poggio, 2021, Deep learning for seismic inverse problems: toward the acceleration of geophysical analysis workflows: *IEEE Signal Processing Magazine*, **38**, 89-119: <https://doi.org/10.1109/MSP.2020.3037429>

Aoki, N., y G.T. Schuster, 2009, Fast least-squares migration with a deblurring filter: *Geophysics*, **74**, WCA93-WCA93: <https://doi.org/10.1190/1.3155162>

Aster, R.C., B. Borchers y C. H. Thurber, 2019, *Parameter Estimation and Inverse Problems*: Elsevier Academic Press, Waltham, MA: <https://doi.org/10.1016/C2009-0-61134-X>

Bienati, N., y D. Calcagni, 2020, Leveraging High Performance Computing to enhance subsurface uncertainty management: Eni's experience: *First Break*, **38**, 57-60: <https://doi.org/10.3997/1365-2397.fb2020050>

Biondi, B., y A. Almomin, 2013, Tomographic full-waveform inversion (TFWI) by combining FWI and wave-equation migration velocity analysis: *The Leading Edge*, **32**, 1074-1080: <https://doi.org/10.1190/tle32091074.1>

Claerbout, J.F., y S. Fomel, 2014, *Geophysical Image Estimation by Example*: <http://sepwww.stanford.edu/sep/prof/gee/book-sep.pdf>

Devarakota, P., A. Gala, Z. Li, E. Alkan, Y. Cai, J. Kimbro, D. Knott, J. Moore y G. Madiba, 2022, Deep learning in salt interpretation from R&D to deployment: Challenges and lessons learned: *Second International Meeting for Applied Geoscience & Energy*: 2989-2993: <https://doi.org/10.1190/image2022-3751725.1>

Dutta, G., Y. Huang, W. Dai, X. Wang y G. T. Schuster, 2014, Making the most out of the least (squares migration): *SEG IMAGE*, 4405-4410: <https://doi.org/10.1190/segam2014-1242.1>

Feng, S., O. Yilmaz, Y. Chen y G. T. Schuster, 2019, Zero-offset sections with a deblurring filter in the time domain: *Geophysics*, **84**, S239-S249: <https://doi.org/10.1190/geo2018-0239.1>

González-Verdejo O., y S. Chávez-Pérez, 2012, Reproducibilidad en representación sísmica: *Ingeniería Investigación y Tecnología*, **XIII**, 185-197: <https://doi.org/10.22201/fi.25940732e>.

2012.13n2.018

Huang, Y., G. Dutta, W. Dai, X. Wang, G.T. Schuster y J. Yu, 2014, Making the most out of the least-squares migration: *The Leading Edge*, **33**, 954-960: <https://doi.org/10.1190/tle33090954.1>

Hu, J., G.T. Schuster y P. A. Valasek, 2001, Poststack migration deconvolution: *Geophysics*, **66**, 939–952: <https://doi.org/10.1190/1.1444984>

Jobin, C., S. Hooge y P.L. Masson, 2020, What does the proof-of-concept (POC) really prove? A historical perspective and a cross-domain analytical study: *XIXème conférence de l'Association Internationale de Management Stratégique (AIMS)*: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02570321v2/document>

Kaplan, S.T., P.S. Routh y M. D. Sacchi, 2010, Derivation of forward and adjoint operators for least-squares shot-profile split-step migration: *Geophysics*, **75**, S225-S235: <https://doi.org/10.1190/1.3506146>

Kluyver, T., B. Ragan-Kelley, F. Pérez, B. Granger, M. Bussonnier, J. Frederic, K. Kelley, J. Hamrick, J. Grout, S. Corlay, P. Ivanov, D. Avila, S. Abdalla, C. Willing, y Jupyter Development Team, 2016, *Jupyter Notebooks—a publishing format for reproducible computational workflows*, en: Loizides, F. y B. Schmidt (Eds.), *Positioning and Power in Academic Publishing: Players, Agents and Agendas*, 87-90: <http://microblogging.infodocs.eu/wp-content/uploads/2016/06/9781614996491.pdf>

Liner, C.L, 2016, *Elements of 3D Seismology, Third Edition*: Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, OK: <https://doi.org/10.1190/1.9781560803386.fm>

Lines, L.R., y S. Treitel, 1984, Tutorial: A review of least-squares inversion and its application to geophysical problems: *Geophysical Prospecting*, **32**, 159-186: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1984.tb00726.x>

Long, A., 2020a, Back-propagation into the future—Least-Square Migration (LSM), Full Waveform Inversion (FWI) and Neural Network Training: imaging and characterization by inversion: *Industry Insights*, PGS Technical Library: <https://www.pgs.com/media-and-events/news/industry-insights--back-propagating-into-the-future/>

Long, A., 2020b, Least-squares migration: status and opportunities: *Industry Insights*, PGS Technical Library: https://www.pgs.com/globalassets/technical-library/tech-lib-pdfs/industry_insights2019_07_least-squares_migration.pdf

Lu, S., X. Li, A. Valenciano, N. Chemingui y C. Cheng, 2017, Least-square wave-equation migration for broadband imaging: *79th EAGE Conference and Exhibition*: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.201700803>

- Lu, S., F. Liu, N. Chemingui, A. Valenciano y A. Long, 2018, Least-squares full-wavefield migration: *The Leading Edge*, **37**, 46-51: <https://doi.org/10.1190/tle37010046.1>
- Luo, G., y S. Chávez-Pérez, 2006, Migration deconvolution applied to marine seismic data from Campeche Bay, Gulf of Mexico: *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 2599-2603: <https://doi.org/10.1190/1.2370060>
- Margrave, G.F., y M.P. Lamoureaux, 2019, *Numerical Methods of Exploration Seismology*: Cambridge University Press, New York, NY: <https://doi.org/10.1017/9781316756041>
- Martin, G.S., R. Wiley y K.J. Marfurt, 2006, Marmousi2: An elastic upgrade for Marmousi: *The Leading Edge*, **25**, 156-166: <https://doi.org/10.1190/1.2172306>
- Meju, M.A., 1994, *Geophysical Data Analysis: Understanding Inverse Problem Theory and Practice*: Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, OK: <http://dx.doi.org/10.1190/1.9781560802570>
- Nemeth, T., C. Wu y G.T. Schuster, 1999, Least-squares migration of incomplete reflection data: *Geophysics*, **64**, 208-221: <https://doi.org/10.1190/1.1444517>
- Osipov, D., 2016, The Rise of Data Science Notebooks, Datanami.com: <https://www.datanami.com/2016/05/04/rise-data-science-notebooks/>
- Osorio, L.N., B. Pereira-Dias, A. Bulcao y L. Landau, 2021, Migration deconvolution using domain decomposition: *Geophysics*, **86**, S247-S256: <https://doi.org/10.1190/geo2020-0352.1>
- Osyrov, K., N. Ivanova, Y. Yang, A. Fournier, D. Nichols, R. Bachrach, C. Evren y D. Nikolenko, 2013, Uncertainty as a rosetta stone uniting geoscience knowledge and E&P business value: *International Petroleum Technology Conference*, IPTC 16817: <https://doi.org/10.3997/2214-4609-pdb.350.iptc16817>
- Paige, C.C., y M.A. Saunders, 1982, LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares: *ACM Transactions on Mathematical Software*, **8**, 43-71: <https://doi.org/10.1145/355984.355989>
- Pearson, J.W., y J. Pestana, 2020, Preconditioners for Krylov subspace methods: An overview: *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **43**, e202000015: <https://doi.org/10.1002/gamm.202000015>
- Ravasi, M., 2019, Pylops—Least squares migration: *GitHub*: https://github.com/PyLops/pylops_notebooks/blob/master/developement/LeastSquaresMigration.ipynb
- Ravasi, M., e I. Vasconcelos, 2020, PyLops—A linear-operator Python library for scalable algebra and optimization: *Software X*, **11**: <https://doi.org/10.1016/j.softx.2019.100361>
- Ravasi, M., 2021a, Leveraging GPUs for matrix-free optimization with PyLops: *Fifth EA-GE Workshop on High Performance Computing for Upstream*, 1-5: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.2021612003>

Ravasi, M., 2021b, Seismic wavefield processing with deep preconditioners: *First International Meeting for Applied Geoscience & Energy Expanded Abstracts*, 2859-2863: <https://doi.org/10.1190/segam2021-3580609.1>

Reinecke, R., T. Trautmann, T. Wagoner y K. Schüler, 2022, The critical need to foster computational reproducibility: *Environmental Research Letters*, **17**: <https://doi.org/10.1088/1748-9326/ac5cf8>

Robinson, E.A., y S. Treitel, 2008, *Digital Imaging and Deconvolution: The ABCs of Seismic Exploration and Processing*: Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, OK: <https://doi.org/10.1190/1.9781560801610>

Scales, J.A., y R. Snieder, 2000, The anatomy of inverse problems: *Geophysics*, **65**, 1708-1710: <https://library.seg.org/doi/10.1190/geo2000-0001.1>

Schuster, G.T., 2017, *Seismic Inversion*: Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, OK: <https://doi.org/10.1190/1.9781560803423>

Schuster, G.T., 2018a, Data deblurring operators: *CSIM Annual Report*, 79-81.

Schuster, G.T., 2018b, Twenty five years of Least Squares Migration: current developments and its future: *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 5443-5443: <https://doi.org/10.1190/segam2018-w3-03.1>

Schuster, G.T., Y. Chen, Y. Shi, S. Fen, Z. Liu, Z. Feng, Y. Yang y T. Gautam, 2022, *Machine Learning Methods in Geoscience*: Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, OK, en prensa.

Silvia, M.T., 1987, *Deconvolution*, en: Elliott, D. (Ed), *Handbook of Digital Signal Processing Engineering Applications*, 741-788, Academic Press, San Diego, CA: <https://doi.org/10.1016/C2009-0-21739-9>

Snieder, R., y J. Trampert, 1999, *Inverse Problems in Geophysics*, en A. Wirgin: *Wavefield Inversion*, 119-190, Springer Verlag, New York: https://inside.mines.edu/~rsnieder/snieder_trampert_00.pdf

Sobrinho, J.J. S., B.S. Silvia y J.C. Costa, 2019, The effect of preconditioning on the LSRTM: *Sixteenth International Congress of the Brazilian Geophysical Societys*: https://sbgf.org.br/mysbgf/eventos/expanded_abstracts/16th_CISBGf/\The%20effect%20of%20preconditioning%20on%20the%20LSRTM.pdf

Strang, G., 1986, *An Introduction to Applied Mathematics*: Wellesly–Cambridge Press, Wellesley, MA.

Strang, G., 2014, *Differential Equations and Linear Algebra*: Wellesly–Cambridge Press, Wellesley, MA.

- Trad, D., 2020, Assumptions and goals for least squares migration: *Geophysical Prospecting*, **68**, 802-814: <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12879>
- Trad, D., 2016, Nuts and bolts of least squares Kirchhoff migration: *CREWES Research Report*, **28**, 1-28: <https://www.crewes.org/Documents/ResearchReports/2016/CRR201675.pdf>
- Torres, K., y M.D. Sacchi, 2021, Deep learning based least-squares-reverse time migration: *First International Meeting for Applied Geoscience & Energy Expanded Abstracts*, 2709–2713: <https://doi.org/10.1190/segam2021-3581036.1>
- Torres, K., y M.D. Sacchi, 2022, Least-squares reverse time migration via deep learning-based updating operators: *Geophysics* (Art. Aceptado): <https://doi.org/10.1190/geo2021-0491.1>
- VanDecar, J.C., y R. Snieder, 1994, Obtaining smooth solutions to large, linear, inverse problems: *Geophysics*, **59**, 818-829: <https://doi.org/10.1190/1.1443640>
- Versteeg, R., 1994, The Marmousi experience: Velocity model determination on a synthetic complex data: *The Leading Edge*, **13**, 927-936: <https://doi.org/10.1190/1.1437051>
- Wang, B., Y. He, J. Mao, F. Liu, F. Hao, Y. Huang, M. Perz y S. Michell, 2021, Inversion-based imaging: from LSRTM to FWI imaging: *First Break*, **39**, 85-93: <https://doi.org/10.3997/1365-2397.fb2021096>
- Witte, P.A., 2020, *Software and Algorithms for Large-Scale Seismic Inverse Problems*: Thesis, Georgia Institute of Technology: <https://slim.gatech.edu/Publications/Public/Thesis/2020/witte2020THsal/witte2020THsal.pdf>
- Zhou, H., 2014, *Practical Seismic Data Analysis*: Cambridge Press, New York, NY: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139027090>
- Xu, L., y M.D. Sacchi, 2017, Preconditioned acoustic least-squares two-way wave-equation migration with exact adjoint operator: *Geophysics*, **83**, S1–S13: <https://doi.org/10.1190/geo2017-0167.1>
- Zhang, Y., L. Duan, y Y. Xie, 2014, A stable and practical implementation of least-squares reverse time migration: *Geophysics*, **80**, V23–V31: <https://doi.org/10.1190/geo2013-0461.1>

