



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Posición delgada para variedades compactas de dimensiones
tres y cuatro.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

ADRIÁN ALBERTO DE FLON GASCA

DIRECTORA

Dra. FABIOLA MANJARREZ GUTIÉRREZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS,

CIUDAD DE MÉXICO 29 de agosto de 2022.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	1
Agradecimientos	2
1. Teoría de Morse	3
1.1. Funciones de Morse	3
1.2. Puntos críticos	11
1.3. Descomposición en asas	16
2. Dimensión 3	20
2.1. 3-variedades	20
2.2. Descomposiciones de Heegaard	27
2.3. Descomposición de Heegaard Generalizada	33
2.4. Posición delgada de una 3-variedad	39
2.5. Nudos y Cirugía en 3-variedades.	46
2.6. Cálculo de Kirby	53
3. Dimensión 4	61
3.1. 4-variedades.	61
3.2. Trisecciones	65
3.3. Trisección Generalizada	72
3.4. Posición delgada de una 4-variedad	75
3.4.1. Formas de adelgazar.	79
3.4.2. Variedades de ancho pequeño.	82
3.4.3. El ancho bajo pegados	90

Introducción

En [23], Scharlemann y Thompson introducen el concepto de posición delgada para 3-variedades como una descomposición generalizada de Heegaard. Pensando una descomposición generalizada de Heegaard como una sucesión de descomposiciones de Heegaard pegadas a través de sus fronteras, una posición delgada es aquella con descomposiciones de Heegaard que en cada nivel son sencillas. En particular, hereda características de irreducibilidad conocidas para las descomposiciones de Heegaard (ver definición 2.3.6).

Recientemente, en el año 2012, Gay y Kirby [7] introducen el concepto de trisección para 4-variedades suaves, cerradas, orientables. En varios sentidos, las trisecciones funcionan como el análogo 4-dimensional de las descomposiciones de Heegaard. Un sumario de las analogías entre trisecciones y descomposiciones de Heegaard se puede encontrar en [6]. Meier, Schirmer y Zupan en [17] desarrollan las ideas de Gay y Kirby. En particular, hacen notar que una trisección se puede ver.

Un resultado de Laudenbach y Poénaru [14] nos dice que, al construir una 4-variedad como una sucesión de asas, existe sólo una forma de pegar las 3- y 4-asas. Esto sugiere que la mayor información sobre la variedad está en las colecciones de 2-asas. Uno de los aspectos más importantes sobre las 2-asas 4-dimensionales es que los mapeos de pegado son equivalentes a enlaces enmarcados. Lo cual nos permite utilizar teoría de nudos para estudiar 4-variedades.

De ahí, tomando a las trisecciones como el análogo 4-dimensional a las descomposiciones de Heegaard, Román Aranda en [4] propone una definición de trisección generalizada. Para luego definir la posición delgada de una 4-variedades como una trisección generalizada, en la cual los enlaces enmarcados asociados a las 2-asas sean sencillos en las 3-variedades de nivel respectivas.

Personalmente, me parece fascinante la construcción de variedades suaves a través de “bloques” tales como las asas, de manera que puedas armar la variedad para forzar que, en cierta medida, tenga las características que uno busca; O desarmarla, para poder estudiar y entender a la variedad a través de sus partes. Las variedades de dimensiones 3 o 4 tienen la particularidad de que pueden ser descritas por diagramas de nudos. Buscar descripciones distinguidas de estas variedades, tales como las posiciones delgadas, es un paso natural.

El objetivo de este trabajo es dar una exposición del concepto de posición delgada para 3- y 4-variedades, dando las bases necesarias para dar las definiciones respectivas, y demostrando algunos resultados básicos.

En el primer capítulo vemos una breve introducción a la teoría de Morse. Vemos primero las definiciones básicas y algunos ejemplos. En la segunda sección, vemos cual es el comportamiento de las variedades suaves cerca de los puntos críticos no degenerados. Esto nos lleva al

concepto de k -asa. En la tercera sección, mostramos que toda variedad suave compacta tiene una descomposición en asas. Vemos algunas descomposiciones particulares y describimos las operaciones que podemos hacer en asas.

En el capítulo dos, estudiamos el caso de descomposiciones en asas de 3-variedades. Para esto, vemos primero algunos resultados generales de 3-variedades. En la sección 2.2, definimos lo que es una descomposición de Heegaard y demostramos que toda 3-variedad cerrada (compacta con frontera vacía) admite una. En la tercera sección, extendemos la definición para 3-variedades compactas. En las últimas dos secciones vemos los resultados sobre nudos y cirugía en 3-variedades que nos servirán al momento de definir y estudiar la posición delgada para 4-variedades.

En el tercer capítulo estudiamos el caso de las variedades suaves compactas de dimensión 4. En particular, tratamos de extender los resultados que obtuvimos para el caso 3-dimensional. Vemos primero algunos resultados generales sobre 4-variedades. En la segunda sección, introducimos el concepto de trisección para 4-variedades cerradas suaves y orientadas, dando los resultados más relevantes. En particular, estudiamos la relación entre la cirugía de 3-variedades y las trisecciones. Terminamos dando la definición de posición delgada para 4-variedades, junto con algunos resultados.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, que siempre han estado para apoyarme. Gracias por dejarme vivir la vida que quiero. A mi hermana, guardiana de mis Debitos.

Quisiera agradecer a los Corots y demás plomos. A Christian Cortés de la Facultad de Filosofía y Letras, tía Paty, Davisillus, Palomita, Shere, Chalo, Brenda, Hernando, Gabe, y a la Milpa refunfuñona. Por mantenerme informado de las curiosidades del mundo. Por mantenerme activo, por permitirme ser parte de sus vidas, y por distraerme en este largo proceso de escribir una tesis.

A mi asesora Fabiola, por tenerme paciencia y ayudarme en este proceso de escribir y entender qué es una tesis. A León y a Oscar, por introducirme a este mundo de la topología diferencial y guiarme durante la maestría. Por darme la confianza para continuar como matemático.

A Marianne, siempre serás parte de mí porque eres parte de mis recuerdos. Que, espero, seguirán formándose por muchos años.

1.1. Funciones de Morse

Consideremos la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 , $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la función altura $f(x, y, z) = z$. Dado $t \in \mathbb{R}$, al conjunto $f^{-1}(t)$ le llamamos *conjunto de nivel*. Los conjuntos de nivel para la restricción f a S^2 se muestran en la figura 1.1.

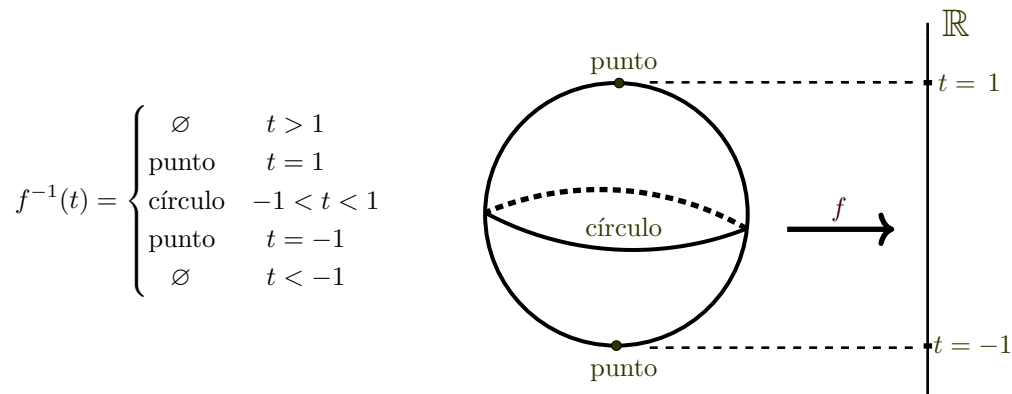


Figura 1.1: Función altura en la esfera.

Al incrementar t , podemos ver como, por intervalos, la topología de los conjuntos de nivel se mantiene constante, cambiando sólo en valores específicos. Podemos ver algo análogo en el toro. Consideremos el toro en \mathbb{R}^3 , acomodado de manera vertical. En este caso, tenemos

cuatro valores donde la topología cambia. En la figura 1.2, los puntos en el toro p_1, p_2, p_3, p_4 son aquellos donde cambia la topología de la superficie. Tomando $c_i = f(p_i)$, tenemos para $t \in (c_i, c_{i+1})$ las preimágenes $f^{-1}(t)$ en la figura 1.2

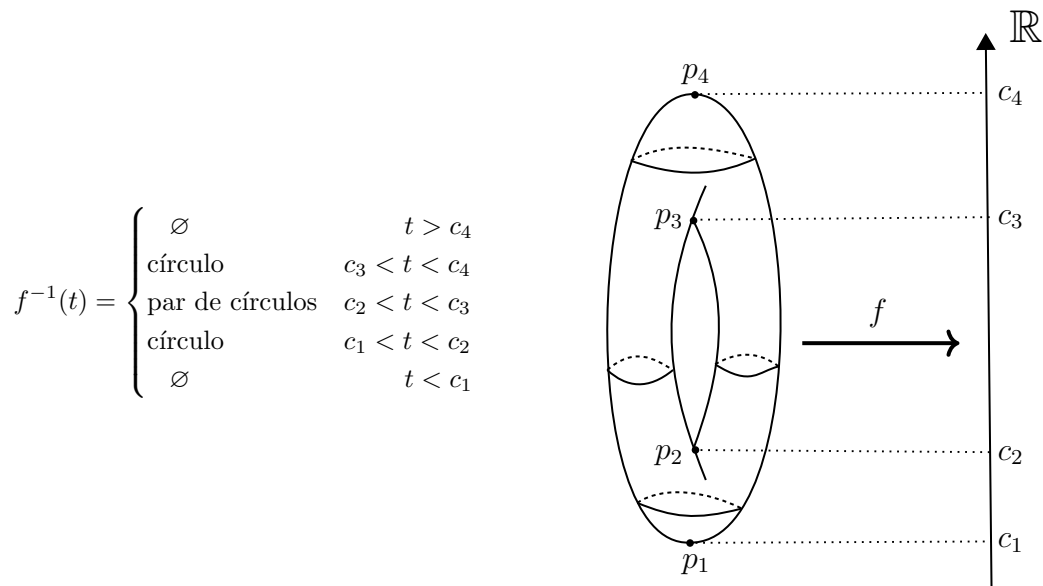


Figura 1.2: Función altura en el toro.

Definición 1.1.1. Sean M una variedad diferencial y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Decimos que $p \in M$ es un *punto crítico* de f si $df_p = 0$. En caso contrario decimos que p es un *punto regular*. Dado $t \in \mathbb{R}$, decimos que este es un *valor regular de f* si todo punto $p \in f^{-1}(t)$ es un punto regular. En caso contrario decimos que t es un *valor crítico de f* .

Observación. Los puntos críticos y puntos regulares pertenecen al dominio de la función, mientras que los valores críticos y valores regulares pertenecen al contradominio. Por vacuidad, un valor que no pertenece a la imagen de la función es un valor regular.

Los valores regulares de f son aquellos donde la función se comporta bien. En particular, tenemos la siguiente proposición, cuya demostración puede revisarse en [8]¹.

Proposición 1.1.2. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Si $t \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f , entonces $f^{-1}(t)$ es una subvariedad regular de codimensión 1.

¹De hecho, Guillemin y Pollack prueban algo un poco más fuerte. A saber, si y es un valor regular de $f : X \rightarrow Y$, entonces $f^{-1}(y)$ es una subvariedad de X de codimensión 1. La prueba se encuentra en la cuarta sección del primero capítulo.

Si t es un valor regular, decimos entonces que $f^{-1}(t)$ es una *superficie o hipersuperficie de nivel*.

La función de la esfera tiene dos puntos críticos. Mientras que la función altura del toro tiene cuatro puntos críticos. Los puntos críticos son los puntos donde cambia la topología de los conjuntos de nivel. La idea es describir la topología de la variedad M utilizando la información de f en estos puntos críticos. Buscamos primero los puntos críticos de la función f , y estudiamos el comportamiento de la función en una vecindad de estos. En general, la segunda derivada de f no está bien definida en toda la variedad M . Sin embargo, sí podemos dar una definición en los puntos críticos.

Definición 1.1.3. Sea $p \in M$ un punto crítico de f . Definimos la *segunda derivada* de f en p como la transformación bilineal

$$d_2f(p) : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R},$$

que en cartas locales tiene matriz asociada

$$(d_2f(p))_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$$

A la matriz de segundas derivadas se le suele llamar la *matriz Hessiana* de f . Al determinante se le llama el *Hessiano* de f .

Definición 1.1.4. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Un punto crítico $p \in M$ es *no degenerado* si la forma bilineal $d_2f(p)$ es no degenerada. Decimos que la función f es una *función de Morse* si todos los puntos críticos de f son no degenerados, y distintos puntos críticos toman distintos valores. Es decir, si $p, q \in M$ son puntos críticos distintos de f , entonces $f(p) \neq f(q)$.

Observación. No todos los autores piden que distintos valores críticos tomen valores distintos como condición al definir funciones de Morse. Se puede demostrar que las funciones de Morse según nuestra definición son las funciones estables de $C^\infty(M)$.

Ejemplos de funciones de Morse son las funciones altura de la esfera y el toro.

Ejemplo 1.1.5 (La esfera S^n). Sea $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$. Consideremos la función

$$f : S^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1}.$$

Afirmamos que los puntos críticos de f son $x_{n+1} = \pm 1$. Denotemos por $p_N = (0, \dots, 0, 1)$, el polo norte de S^n . Sea $U_N = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} > 0\}$ y $\varphi : U_N \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2})$. La expresión de f en estas carta local es

$$f_N(x_1 \dots x_n) = f \circ \varphi^{-1}(x_1 \dots x_n) = \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}.$$

Un punto $p \in U_N$ es punto crítico de f si y sólo si $\varphi(p) \in \varphi(U_N)$ es punto crítico de f_N . Calculamos las derivadas parciales de f_N :

$$\frac{\partial f_N}{\partial x_k}(x) = \frac{-x_k}{\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}}.$$

Por lo tanto $x \in \varphi(U_N)$ es punto crítico de f_N si y sólo si $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Es decir, el origen es el único punto crítico de f_N . Veamos que no es degenerado. Calculando las segundas parciales de f_N , tenemos

$$\frac{\partial^2 f_N}{\partial x_k \partial x_j} = \begin{cases} \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-1/2} - x_k \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-3/2} & \text{si } x_k = x_j \\ x_k x_j \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-3/2} & \text{si } x_k \neq x_j \end{cases}$$

Al evaluar en 0,

$$d_2 f_N(0) = \text{Id}$$

Por lo tanto 0 es un punto crítico no degenerado de f_N . De esto concluimos que p_N es un punto crítico no degenerado de f . Considerando la carta local

$$\varphi_S : U_S \subseteq S^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \varphi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n),$$

donde $U_S = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} < 0\}$. Obtenemos, de manera análoga, que el origen es el único punto crítico de $f_S = f \circ \varphi_S^{-1}$, con matriz Hessiana

$$d_2 f_S = -\text{Id}.$$

Así $p_S = \varphi_S^{-1}(0) = (0, \dots, 0, -1)$ es un punto crítico no degenerado de f . Veamos que estos son todos los puntos críticos. Sea $i \leq n$, consideremos $U_i^\pm = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_i > 0\}$. Tomando $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi_i^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$, donde \hat{x}_i significa que se omite la i -ésima entrada. En estas coordenadas tenemos $f_i(x) = f \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$. Tenemos entonces

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+1}} = 1$$

y por lo tanto f_i no tiene puntos críticos. Como la colección $\{U_i^\pm\}_{i=1}^n$, junto con U_N y U_S cubren la esfera, podemos concluir que los únicos puntos críticos de f son p_N y p_S , los cuales son no degenerados. Por lo tanto, f es una función de Morse para S^n .

Observación. Si M es una variedad compacta, entonces toda función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza su máximo y su mínimo. Si $\partial M = \emptyset$ y f es una función de Morse, entonces f debe tener, por lo menos, dos puntos críticos. Si $\partial M \neq \emptyset$ esto no es necesariamente cierto. Por ejemplo, si $M = N \times I$, donde N es una variedad suave compacta, entonces la función $f : N \times I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(p, t) = t$ no tiene puntos críticos.

Ejemplo 1.1.6. [El toro] Consideremos el toro en \mathbb{R}^3 parametrizado por

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (u, v) \longmapsto (\sen u, (\cos u + 2) \sen v, (\cos u + 2) \cos v).$$

De manera que $T = \varphi(\mathbb{R}^2) = \{(\sen u, \cos u \sen v, \cos u(\cos v + 2)) : u, v \in \mathbb{R}\}$, es el toro acomodado de manera vertical en \mathbb{R}^3 , como en la figura 1.2. La función altura $(x, y, z) \mapsto z$ restringida a T es

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(\sen u, (\cos u + 2) \sen v, (\cos u + 2) \cos v) = (\cos u + 2) \cos v$$

Los puntos críticos de f son aquellos que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -\sen u \cos v = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -(\cos u + 2) \sen v = 0 \tag{1.2}$$

Este sistema tiene 4 soluciones. De ecuación (1.2), como $|\cos u| \leq 1$, $\cos u + 2$ no puede ser igual a cero. Luego, necesariamente $\sen v = 0$, por lo tanto $\cos v \neq 0$. Lo cual implica que $\sen u = 0$. De esto se sigue que $\cos u = \pm 1$, $\cos v = \pm 1$. Sustituyendo en $(\sen u, (\cos u + 2) \sen v, (\cos u + 2) \cos v)$. Hay 4 combinaciones posibles. Podemos ordenar las soluciones según los signos que toman $\cos u$ y $\cos v$ de la siguiente manera:

$(\text{sgn}(\cos u), \text{sgn}(\cos v))$	$(+, +)$	$(+, -)$	$(-, +)$	$(-, -)$
Sustituyendo	$(0, 0, 3)$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, -3)$	$(0, 0, -1)$

donde, por ejemplo, el par $(+, -)$ corresponde a $\cos u = 1$, $\cos v = -1$. Así, f tiene 4 puntos críticos, ordenados por altura (ver figura 1.2), son

$$p_1 = (0, 0, 3), \quad p_2 = (0, 0, 1), \quad p_3 = (0, 0, -1), \quad p_4 = (0, 0, -3).$$

Calculemos ahora la matriz Hessiana de f .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(u, v) = -\cos u \cos v, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}(u, v) = -(\cos u + 2) \cos v,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) = \sen u \sen v = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u, v).$$

La matriz Hessiana de f es

$$d_2f(u, v) = \begin{pmatrix} -\cos u \cos v & \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & -(\cos u + 2) \cos v \end{pmatrix}.$$

Expresamos los puntos críticos p_i en coordenadas locales. Tomando $\tilde{p}_i = \varphi^{-1}(p_i)$, tenemos

$$\tilde{p}_1 = (0, 0), \quad \tilde{p}_2 = (0, \pi), \quad \tilde{p}_3 = (\pi, 0), \quad \tilde{p}_4 = (\pi, \pi).$$

Evaluando en los puntos críticos

$$d_2f(\tilde{p}_1) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad d_2f(\tilde{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$d_2f(\tilde{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad d_2f(\tilde{p}_4) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como las matrices son no degeneradas, los puntos críticos son no degenerados. Por lo tanto, f es una función de Morse para T .

De los ejemplos anteriores, vemos que los puntos críticos son los puntos donde la topología de los conjuntos de nivel cambia. En el sentido de que, si c_1, c_2 son valores críticos consecutivos, entonces para cada $t_1, t_2 \in (c_1, c_2)$, $f^{-1}(t_1)$ y $f^{-1}(t_2)$ son homeomorfos. Otra cosa interesante de notar es que al rededor de los puntos críticos la superficie tiene un comportamiento particular. Si nos fijamos en el ejemplo del toro, en los puntos críticos que no son ni el máximo ni el mínimo, hay una dirección que “baja” y otra que “sube” respecto a la función f . En otras palabras, localmente la superficie se ve como una silla de montar. En este sentido, la información analítica de una función de Morse nos da información topológica de la variedad. Esto es un comportamiento general de las funciones de Morse y una de sus características más importantes.

Lema 1.1.7 (Lema de Morse). *Sean M una variedad suave compacta y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función de Morse. Si $p \in M$ es un punto crítico de f , entonces existe una carta coordenada $\varphi : (U, p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, de manera que*

$$\tilde{f}(x) = f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2$$

Milnor en [21]² da una demostración usando el Lema de Hadamard. Daremos aquí una demostración como una aplicación directa de teorema de la función implícita, la cual se puede encontrar en [1], en inglés³.

²Lema 2.2

³Me parece que la demostración original es de Laudenbach [13], pero el texto está en francés.

Demostración. Al ser un resultado local, pasando a una carta local, podemos suponer que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Con U abierto y $0 \in U$ es el único punto crítico de f , el cual es no degenerado. Al ser $d_2f(0)$ una forma bilineal simétrica, es diagonalizable. Bajo un isomorfismo de espacios vectoriales, podemos suponer $d_2f(0)$ diagonal.

Procedemos a mostrar el resultado por inducción sobre la dimensión n . Para $n = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + e(x)x^2 \\ &= f(0) \pm ax^2(1 + e(x)), \end{aligned}$$

donde a es un número positivo y e es una función C^∞ , la cual se puede expresar como

$$e(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f^{(3)}(t)(x-t)dt.$$

Definimos la función

$$\varphi(x) = x\sqrt{a(1 + e(x))}.$$

Entonces $\varphi'(0) = \sqrt{a} \neq 0$, por lo que φ es un difeomorfismo local en 0. Hacemos el cambio de variable $\tilde{x} = \varphi(x)$. Aplicando el teorema de la función inversa, tenemos que

$$f \circ \varphi^{-1}(\tilde{x}) = f(x) = f(0) \pm ax^2(1 + e(x)) = f(0) \pm y^2.$$

Por lo tanto, bajo un cambio de coordenadas, f tiene la forma buscada. Con esto concluimos el caso $n = 1$.

Supongamos $n > 1$. Escribimos $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, con puntos denotados por (x, y) . Para cada $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, consideremos la función $f_y(x) = f(x, y)$. Desarrollando en serie de Taylor hasta el segundo término

$$f(x, y) = f_y(x) = f_y(0) + f'_y(0)x + f''_y(0)x^2 + e(x)x^2.$$

Como 0 es punto crítico no degenerado de f , $f''_y(0) \neq 0$. Esto ya que estamos suponiendo $d_2f(0)$ diagonal y $f''_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Ahora, si $f'_y(0) = 0$, entonces procedemos como en el caso $n = 1$. Escribimos

$$f(x, y) = f_y(0) \pm a(y)x^2(1 + e(x, y)),$$

donde $a(y) > 0$. Bajo el cambio de variable

$$\varphi(x, y) = (x\sqrt{a(y)(1 + e(x))}, y) = (\tilde{x}, \tilde{y}),$$

de manera análoga al caso $n = 1$, obtenemos $f \circ \varphi^{-1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}^2 \pm f(0, \tilde{y})$.

Veamos que podemos reducirlo al caso $f'_y(0) = 0$. Para esto, busquemos los puntos críticos de la función $f_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Los cuales son soluciones a la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0. \quad (1.3)$$

Al ser $d_2f(0)$ diagonal, sabemos por hipótesis que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0) \neq 0.$$

Por el Teorema de la Función Inversa, en una vecindad de $(0, 0)$, las soluciones de ecuación (1.3) constituyen la gráfica $x = \varphi(y)$. Con φ una función suave definida en una vecindad del origen en \mathbb{R}^{n-1} . De nuevo, al ser $d_2f(0)$ diagonal, la derivada de $\frac{\partial f}{\partial x}$ respecto a la variable y es cero. Por lo tanto $d\varphi_0 = 0$.

Consideremos ahora el cambio de variable

$$\Phi(x, y) = (x + \varphi(x), y).$$

Por lo anterior, $d\Phi_0 = \text{Id}$, la matriz identidad. La función f en estas coordenadas satisface

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(f \circ \Phi)(0, y) = 0, \\ d_2f \circ \Phi(0, 0) = d_2f(0, 0). \end{cases}$$

Tomando la función $\tilde{f} = f \circ \Phi$, lo reducimos al caso $\tilde{f}'_y(0) = 0$. Con esto terminamos la prueba del Lema de Morse. \square

Como consecuencia del lema 1.1.7, los puntos críticos de una función de Morse son aislados. Así, si M es compacta, entonces toda función de Morse para M tiene una cantidad finita de puntos críticos.

Sean $p \in M$ un punto crítico no degenerado de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que una carta coordenada $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una *carta de Morse* si satisface el **Lema de Morse**. Bajo una traslación, f es una forma cuadrática. El número λ no depende de la carta escogida, ya que λ es igual a la signatura de $d_2f(p)$.⁴

Definición 1.1.8. Sea $p \in M$ un punto crítico no degenerado de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Se define el índice de p respecto a f como la signatura de $d_2f(p)$. De manera que si $\varphi : U \rightarrow M$ es una carta de Morse centrada en p , entonces

$$\tilde{f}(x) = f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2,$$

donde λ es el índice de p .

⁴Entendemos por signatura de una matriz simétrica como el número de entradas negativas de su diagonalización. La signatura de una forma bilineal simétrica es la signatura de la matriz asociada.

Una consecuencia interesante del Lema de Morse es el Teorema de Reeb.

Teorema 1.1.9 (Teorema de Reeb). *Sea M una variedad suave compacta. Si existe una función de Morse f con sólo dos puntos críticos, entonces M es homeomorfa a la esfera.*

Se puede probar que existen funciones de Morse en cualquier variedad suave. De hecho, se puede mostrar que las funciones de Morse son densas en el espacio de funciones suaves $C^\infty(M)$.

Proposición 1.1.10. *Sea M una variedad compacta suave de dimensión n . Dada $g : M \rightarrow \mathbb{R}$, existe una función Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ arbitrariamente cercana a g .*

En particular, si $\partial M = \partial_- M \cup \partial_+ M$ es una descomposición de la frontera de M en abiertos⁵ ajenos, existe una función de Morse f tal que $f(M) = [0, 1]$, $\partial_- M = f^{-1}(0)$, y $\partial_+ M = f^{-1}(1)$, de manera que los valores críticos de f están en el intervalo $(0, 1)$.

1.2. Puntos críticos

En esta sección veremos los teoremas que nos interesan sobre el comportamiento de la variedad en una vecindad de los puntos críticos de una función de Morse. Daremos los enunciados sin demostración, los cuales se pueden consultar en [16] o en [1].

Sea M una variedad suave y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Para $a \in \mathbb{R}$, denotamos por $M_a = f^{-1}(-\infty, a]$, y por $M_{[a,b]} = f^{-1}[a, b]$. De manera que M_a tiene frontera topológica $\partial M_a = f^{-1}(a)$. El conjunto M_a no tiene por qué ser una subvariedad de M .

Teorema 1.2.1. *Sea M una variedad suave y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Si no existen valores críticos de f en el intervalo $[a, b]$, entonces $M_a \cong M_b$. De hecho, M_a es un retracto por deformación de M_b .*

Tenemos en particular el siguiente corolario que nos precisa la idea de que la topología de la variedad no cambia en valores regulares.

Corolario 1.2.2. *Bajo las hipótesis del teorema 1.2.1, $M_{[a,b]} \cong M_a \times I$.*

Veamos ahora qué sucede en los valores críticos de una función de Morse.

Consideremos M una variedad compacta suave. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Sean p_0, p_1, \dots, p_k los puntos críticos de f . Denotemos $c_i = f(p_i)$, el valor crítico correspondiente al punto crítico p_i . Sea λ_i el índice del punto crítico p_i . Acomodamos los índices de manera creciente, $c_0 < c_1 < \dots < c_k$ (recordemos que nuestra definición de función de Morse exige

⁵Abiertos en ∂M , donde ∂M tiene la topología relativa.

que los puntos críticos tomen valores críticos distintos). En particular, c_0 es el mínimo y c_k el máximo.

Al ser c_0 el mínimo de f , es claro que, para $t < c_0$, $M_t = \emptyset$. Cuando llegamos a c_0 , espontáneamente, aparece un punto $M_{c_0} = \{p_0\}$. Para ϵ pequeño, $M_{c_0+\epsilon}$ se ve localmente (ver lema 1.1.7) como $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$. En una vecindad de p_0 , la variedad M se ve como un tazón (un tazón n -dimensional). Al tomar t entre c_0 y c_1 , la variedad M_t no cambia.

Al llegar al siguiente valor crítico, al efecto topológico en M al pasar de $M_{c_1-\epsilon}$ a $M_{c_1+\epsilon}$ se le conoce como pegar una λ_1 -asa.

Definición 1.2.3. Una k -asa n -dimensional es una n -bola cerrada parametrizada por

$$D^n = D^k \times D^{n-k}.$$

Cuya frontera es

$$\partial(D^k \times D^{n-k}) = S^{k-1} \times D^{n-k} \cup D^k \times S^{n-k-1}$$

La cual está dividida en la *región de pegado* $S^{k-1} \times D^{n-k}$, y la *región libre* $D^k \times S^{n-k-1}$. En el caso de las 0-asas, la región de pegado es el conjunto vacío, y la región libre es la 0-asa. Para $k > 0$, pegamos una k -asa a una variedad con frontera M vía un encaje de la región de pegado $\varphi : S^{k-1} \times D^{n-k} \rightarrow \partial M$. Pegar una 0-asa h es tomar la unión ajena $M \cup h$.

Si h es una k -asa n -dimensional, se define el *core*(h) = $D^k \times \{0\}$ y el *cocore*(h) = $\{0\} \times D^{n-k}$. A la frontera de $\partial \text{core}(h) = S^{k-1} \times \{0\}$ se le llama *esfera de pegado*. A la frontera $\partial \text{cocore}(h) = \{0\} \times S^{n-k-1}$ se le llama la *esfera cinturón*.

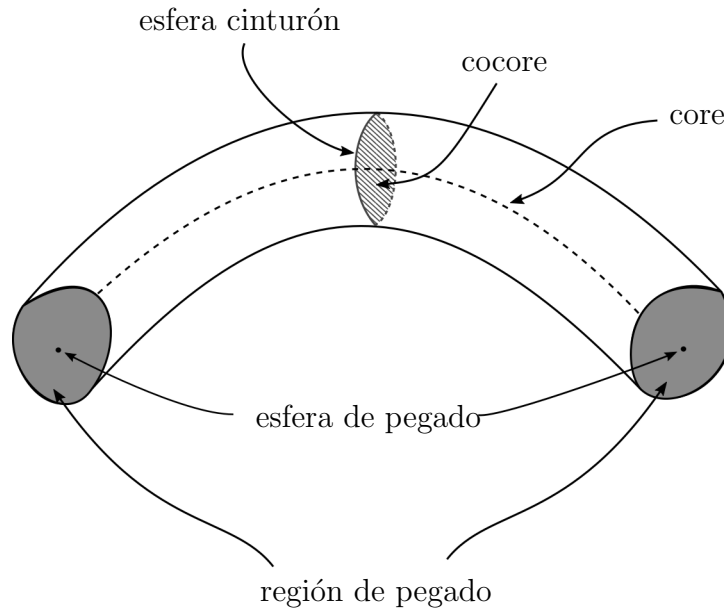


Figura 1.3: 1-asa de dimensión 3

En la figura 1.3 tenemos una 1-asa de dimensión 3. En este caso, tenemos $n = 3$, y $k = 1$. Tomamos $S^0 = \{1, -1\}$. Las esferas de pegado $S^0 \times \{0\}$ son los dos centros de los discos que forman la región de pegado. La esfera cinturón $\{0\} \times S^1$ acota el disco $cocore = \{0\} \times D^2$.

Observación. Formalmente, al pegar una k -asa sobre una variedad M , no obtenemos una variedad suave. Esto ya que el pegado tiene esquinas. Hay distintas maneras de darle la vuelta a este problema. Se puede demostrar que las esquinas siempre se pueden suavizar. Otra forma es dar una parametrización distinta a la n -bola, de manera que el pegado no tenga esquinas. Los detalles se pueden consultar en [12]⁶.

Teorema 1.2.4. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Si $p \in M$ es el único punto crítico de $M_{[a,b]}$, entonces M_b es el resultado de pegar una λ -asa a M_a , donde λ es el índice de p . Es decir*

$$M_b \cong M_a \cup_{\varphi} h,$$

donde h es una λ -asa con mapeo de pegado φ .

La demostración se puede encontrar en [16]⁷ o en [1]⁸.

⁶Sección VI.6: "Attaching handles"

⁷Teorema 3.2

⁸Teorema 2.1.11

Podemos perturbar la función f para mover los puntos críticos. En particular, nos interesa reordenarlos.

Lema 1.2.5. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Sean $p_i, p_{i+1} \in M$ dos puntos críticos de f tales que el índice de p_i es mayor o igual al de p_{i+1} . Supongamos que $f(p_i) < f(p_{i+1})$, y no hay otro valor crítico en el intervalo $[f(p_i), f(p_{i+1})]$. Entonces existe una homotopía f_t tal que $f = f_0$, $f_t = f$ fuera de una vecindad abierta de $M_{[f(p_i), f(p_{i+1})]}$, y f_1 es tal que $f(p_{i+1}) < f(p_i)$.*

Esto nos permite reordenar los puntos críticos de una función de Morse de la siguiente manera.

Teorema 1.2.6. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Existe una homotopía de mapeos $f_t : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = f_0$, los puntos críticos de f_1 están ordenados por índice. Es decir, si p, q son puntos críticos de f de índices i, j respectivamente, entonces $i < j$ implica $f(p) < f(q)$. Y f_t es función de Morse para cada $t \in [0, 1]$ excepto en una cantidad finita de puntos. Los valores de t donde f_t no es de Morse corresponden a tiempos donde f_t tiene dos puntos críticos distintos que toman el mismo valor.*

Decimos que una función de Morse es *indexada* si sus puntos críticos están ordenados por índice.

Tomando como modelo la función $f_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_t(x) = x^3 + tx$. Para $t > 0$, f_t no tiene puntos críticos. Para $t = 0$, el 0 es un punto crítico degenerado. Para $t < 0$, tenemos dos puntos críticos de índices 0 y 1. De manera que, al pasar de f_{-1} a f_1 estamos cancelando un par de puntos críticos. El siguiente lema debido a Morse extiende la idea anterior a funciones de Morse arbitrarias.

Lema 1.2.7. *(Lema de cancelación) Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Sean p_i, p_{i+1} puntos críticos de f . Supongamos lo siguiente*

- a) *El índice de p_{i+1} es uno más que el de p_i .*
- b) *Sean h_i, h_{i+1} las asas asociadas a p_i y p_{i+1} . La esfera cinturón de h_i y la esfera de pegado asociada de h_{i+1} se intersecan transversalmente en un solo punto.*

Existe una homotopía f_t tal que $f = f_0$, f_1 no tiene puntos críticos en una vecindad abierta de $M_{[c_i, c_{i+1}]}$, y coincide con f fuera de esta vecindad.

La idea de la prueba es mostrar que existe una carta coordenada V tal que $p_i, p_{i+1} \in V$ y f en estas coordenadas es la función

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_i^3 - x_{i+1} + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

De aquí, tomando la homotopía

$$f_t(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_i^3 - tx_{i+1} + x_{i+1}^2 + \dots x_n^2,$$

con $t \in [-1, 1]$, cancelamos los puntos críticos. La parte más complicada de la demostración es encontrar la carta V . Los detalles de la prueba se pueden encontrar en [20].

Decimos que dos puntos críticos de índices respectivos α y β forman un par (α, β) -cancelable si satisfacen las hipótesis del lema 1.2.7 (En particular, debe darse que $\beta = \alpha + 1$). Notemos que el proceso en la dirección contraria también es válido. Podemos perturbar una función f para generar un par (α, β) -cancelable.

Teorema 1.2.8 (Desigualdad de Morse). *Sea M una variedad suave, y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Denotamos por c_λ el número de puntos críticos de índice λ , por b_λ el λ -ésimo número de Betti de M . Para cada $0 \leq k \leq n$, se tiene las siguientes desigualdades*

$$c_\lambda \geq b_\lambda \quad y \quad \sum_{\lambda=0}^k (-1)^\lambda c_\lambda \geq \sum_{\lambda=0}^k (-1)^\lambda b_\lambda.$$

Si $k = n$, entonces se da la igualdad. En particular, la suma alternada nos da la característica de Euler:

$$\sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda c_\lambda = \chi(M) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda b_\lambda.$$

Esta desigualdad nos da una cota inferior para el número de puntos críticos que debe tener una función de Morse. Si se da el caso que $b_\lambda \neq 0$, entonces toda función de Morse debe tener por lo menos b_λ puntos críticos.

Consideremos M una n -variedad cerrada (compacta y sin frontera) suave de dimensión impar. Tomemos $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función de Morse cuyos puntos críticos toman valores distintos. Sea c_i el número de puntos críticos de f con índice i . Por el teorema 1.2.8, sabemos que la característica de Euler de M satisface la igualdad $\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i$. Al ser n impar, tenemos que $n = 2m + 1$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Consideremos la función $-f : M \rightarrow \mathbb{R}$, la cual también es de Morse. Si $p \in M$ es punto crítico de f con índice i , entonces p es punto crítico de $-f$ con índice $n - i$. Denotemos por b_j el número de puntos críticos de f con índice j . De lo anterior, tenemos la igualdad $b_j = c_{2m+1-j}$.

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{2m+1} (-1)^i b_i = \sum_{i=1}^{2m+1} (-1)^i c_{2m+1-i} = \sum_{j=1}^{2m+1} (-1)^{2m+1-j} c_j = - \sum_{j=1}^{2m+1} (-1)^j c_j = -\chi(M).$$

Por lo tanto $\chi(M) = 0$. Acabamos de demostrar la siguiente proposición

Proposición 1.2.9. *Toda variedad suave cerrada de dimensión impar tiene característica de Euler cero.*

1.3. Descomposición en asas

Una de las consecuencias más interesantes de lema 1.1.7 es que podemos descomponer una variedad compacta M en asas. Si la variedad M tiene frontera no vacía, podemos apoyarnos en una parte de la frontera para construir la variedad.

Sean M una variedad suave compacta y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse con puntos críticos $p_1, p_2, \dots, p_k \in M$ y valores críticos $c_1 < c_2 < \dots < c_k$, tomados de manera que $f(p_i) = c_i$. Sean $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$a_0 < c_1 < a_1 < c_2 < \dots < a_{k-1} < c_k < a_k.$$

Para cada índice $0 \leq i \leq k$, a_i es un valor regular de f , y en el intervalo $[a_i, a_{i+1}]$ el único valor crítico de f es c_i . Dada una descomposición de la frontera en abiertos ajenos $\partial M = \partial_- M \cup \partial_+ M$, por la proposición 1.1.10, podemos suponer $f(\partial_- M) < a_0$, y $f(\partial_+ M) > a_k$. Por el corolario 1.2.2, $M_{a_0} \cong \partial_- M \times I$. Por teorema 1.2.4, M_{a_1} es el resultado de pegar una λ_1 -asa a $\partial_- M \times I$ en $\partial_- M \times \{1\}$, donde λ_1 es el índice de p_1 . En general, la variedad $M_{a_{i+1}}$ es el resultado de pegar una λ_{i+1} -asa a la variedad M_{a_i} .

Definición 1.3.1. . Sea M una variedad suave. Dada una descomposición de la frontera de M en abiertos (respecto a ∂M) ajenos $\partial M = \partial_- M \cup \partial_+ M$, una *descomposición en asas para M relativa a $\partial_- M$* es una sucesión de asas

$$\mathcal{H} = h_0 \cup h_1 \cup \dots \cup h_N,$$

donde la asa h_i se pega en la variedad determinada por

$$(\partial_- M \times I) \cup_{\varphi_1} h_1 \cup_{\varphi_2} h_2 \cup_{\varphi_3} \dots \cup_{\varphi_{i-1}} h_{i-1},$$

donde φ_j es el mapeo de pegado del asa h_j .

Teorema 1.3.2. Sean M una variedad suave compacta. Toda función de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ induce una descomposición en asas para M .

La proposición 1.1.10 junto con el teorema anterior implican el siguiente corolario.

Corolario 1.3.3. Sea M una variedad suave. Dada una descomposición de la frontera de $\partial M = \partial_- M \cup \partial_+ M$, existe una descomposición en asas de M relativa a $\partial_- M$.

De manera recíproca, toda descomposición en asas de una variedad suave M nos da una función de Morse. La idea es primero definir en cada k -asa la función

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Pegamos las funciones adecuadamente usando una partición de la unidad.

Teorema 1.3.4. *Toda descomposición en asas induce una función de Morse.*

Por lo general, al hablar de descomposiciones en asas, omitiremos el mapeo de pegado y escribiremos simplemente $M \cup h$. Entendiendo que la unión es a través de una identificación del mapeo de pegado del asa h .

En figura 1.4, tenemos las asas de dimensión 3. La parte sombreada es la región de pegado respectiva. La 0-asa pensamos que simplemente aparece. La 1-asa tiene región de pegado dos discos. La 2-asa tiene región de pegado un cilindro. La 3-asa tiene región de pegado la esfera S^2 .

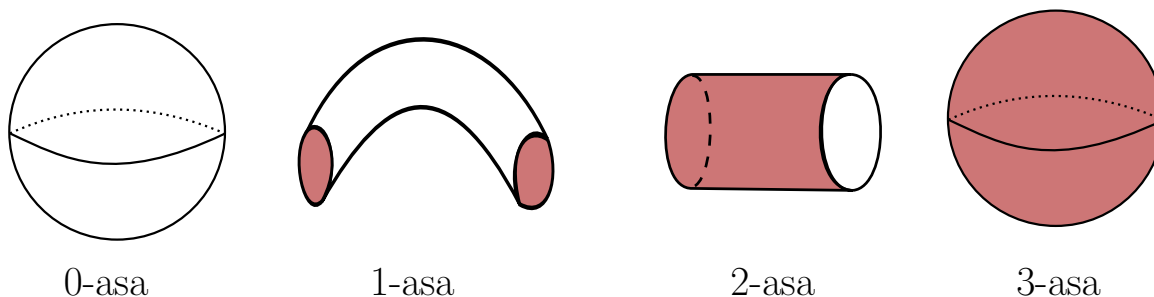


Figura 1.4: Asas de dimensión 3

Los resultados sobre funciones de Morse nos permiten realizar operaciones o movimientos en la descomposición de asas. Resumimos los resultados en el siguiente teorema. La demostración se puede consultar en [16].

Sean M, N dos variedades suaves. Una *isotopía* entre M y N es una homotopía

$$F : M \times I \longrightarrow N, \quad F(x, t) = F_t(x),$$

tal que el mapeo asociado

$$\hat{F} : M \times I \longrightarrow N \times I, \quad \hat{F}(x, t) = (F_t(x), t).$$

es un difeomorfismo. Decimos que M y N son *isotópicas* si existe una isotopía entre ellas. Se puede probar que la relación de isotopía entre variedades es una relación de equivalencia. En general, consideramos sólo variedades módulo esta relación de isotopía.

Teorema 1.3.5. *Sea M una variedad suave compacta. Sucede lo siguiente*

- Si M' se obtiene pegando una λ -asa a M , entonces la estructura diferenciable de M' no cambia bajo isotopías en ∂M del mapeo de pegado de h .
- Si una μ -asa se pega sobre una λ -asa, y $\mu \leq \lambda$, entonces, bajo una isotopía de la frontera, los mapeos de pegado respectivos pueden hacerse ajenos. (Esto corresponde al lema 1.2.5.)
- Existe una descomposición en asas

$$\mathcal{H} = h_0 \cup h_1 \cup \cdots \cup h_N,$$

donde los índices están ordenados de manera creciente: $\text{indice}(h_i) \leq \text{indice}(h_{i+1})$.

- Si una $(\lambda + 1)$ -asa se pega en una λ -asa de manera tal que la esfera de pegado de la $(\lambda + 1)$ -asa interseca la esfera cinturón de la λ -asa transversalmente en un solo punto, entonces estas asas se pueden cancelar (ver lema 1.2.7).

En lugar de construir la variedad M pegando una asa a la vez, podemos construirla por bloques, pegando colecciones de asas en cada paso. Para esto, necesitamos que, en cada paso, los mapeos de pegado sean ajenos. Por el teorema 1.3.5, una condición suficiente es que cada colección de asas sea del mismo índice. Esto nos permite describir una descomposición en asas para M relativa a $\partial_- M$ como

$$\mathcal{H} = A_1^{\lambda_1} \cup A_2^{\lambda_2} \cup \cdots \cup A_N^{\lambda_N},$$

donde $A_i^{\lambda_i}$ es una colección de λ_i -asas que se pegan en la variedad construida

$$(\partial_- M \times I) \cup A_1^{\lambda_1} \cup A_2^{\lambda_2} \cup \cdots \cup A_{i-1}^{\lambda_{i-1}}.$$

En particular, siempre existe una descomposición en asas ordenada por índice:

$$\mathcal{H} = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n,$$

donde A_i es una colección, posiblemente vacía, de i -asas.

Definición 1.3.6. Sea M una variedad suave y N una subvariedad sin frontera. Una *vecindad tubular abierta* de N en M es una pareja (f, ξ) , donde $\xi = (p, E, M)$ es un haz vectorial sobre N y $f : E \rightarrow M$ es un encaje tal que

- 1) $f|_N = \text{Id}_N$, donde N está identificado con la sección cero de E .
- 2) $f(E)$ es una vecindad abierta de N en M .

Una *vecindad tubular cerrada* de N en M es la restricción $g : D(E) \rightarrow M$ de una vecindad tubular $g = f|_{D(E)}$, donde $D(E) = \{x \in E : |x| \leq 1\}$, es el subhaz de discos de ξ de radio 1 para una métrica en ξ .

De manera menos formal, llamamos también vecindad tubular abierta al abierto $f(E)$, y vecindad tubular cerrada al cerrado $f(D(E))$.

En particular, $\varphi(S^{k-1} \times D^{n-k})$ es la cerradura de una vecindad tubular cerrada de la $(k-1)$ -esfera $\varphi(S^{k-1} \times \{0\})$ en M . A la imagen de una vecindad tubular cerrada $f(D(E))$ para una subvariedad M la llamaremos vecindad tubular y la denotaremos $\eta(N)$.

La frontera de una variedad no puede tener una vecindad tubular. En este caso, se define una especie de vecindad “medio-tubular”. Dada M una variedad suave. Se define un *collar para ∂M* , como un encaje

$$f : \partial M \times [0, 1) \rightarrow M,$$

tal que $f|_{\partial M} = \text{Id}_{\partial M}$.

Se tiene el siguiente teorema de existencia y unicidad para vecindades tubulares.

Teorema 1.3.7. *Sea M una variedad suave y N una subvariedad de M con $\partial N = \partial M = \emptyset$. Existe una vecindad tubular para N en M . Dadas dos vecindades tubulares para N en M , estas son isotópicas.*

La demostración se puede consultar en [10]⁹.

Sea M una variedad suave con frontera $\partial M \neq \emptyset$. Sea M' la variedad resultante de pegar una k -asa $h = D^k \times D^{n-k}$ en M bajo el mapeo de pegado $\varphi : S^{k-1} \times D^k \rightarrow \partial M$. La variedad M' tiene frontera

$$\partial M' = (\overline{\partial M - \varphi(S^{k-1} \times D^{n-k})}) \cup_{\varphi} D^k \times S^{n-k-1},$$

donde $\varphi|$ es la función φ restringida a $S^{k-1} \times S^k$, que es la frontera tanto de la región de pegado como de la región libre.

⁹Teorema 5.1

2.1. 3-variedades

En esta sección veremos primero algunas definiciones generales de variedades que no suelen incluirse en un primer curso de topología diferencial, nociones que son de particular interés al estudiar variedades de dimensión 3. Es importante notar que, en el caso 3 dimensional, las estructuras topológicas, lineal a pedazos (PL), y diferenciable son equivalentes. Es decir, dada una variedad topológica de dimensión 3, esta tiene una única triangulación (módulo isomorfismo) y una única estructura diferencial (módulo difeomorfismo). Por esto, no nos preocuparemos mucho por especificar cuándo hablamos de una variedad suave y cuándo de una topológica. Esto cambia en dimensiones mayores.

Definición 2.1.1. Sea M una n -variedad suave.

- Una variedad inmersa en M es la imagen de una inmersión $f : N \rightarrow M$, donde N es una variedad suave. (En particular, N no tiene por qué tener la topología inducida como subconjunto de M).
- Una variedad encajada en M es una variedad inmersa que, además, tiene la topología inducida como subconjunto de M . Es decir, es una variedad inmersa donde la inclusión es un encaje topológico.
- Una variedad propiamente encajada en M es una variedad encajada tal que la inclusión

es una función propia. En particular, si S está propiamente encajada en M , entonces $\partial S \subseteq \partial M$.

Definición 2.1.2. Sean M y N dos variedades conexas de dimensión n . Sean B_M y B_N dos bolas abiertas encajadas en M y N , respectivamente, con $S_M = \partial B_M \subseteq M$, y $S_N = \partial B_N \subseteq N$. Tomamos un homeomorfismo $f : \text{collar}(S_M) \rightarrow \text{collar}(S_N)$. Definimos la *suma conexas* de M y N , $M \# N$ como el resultado de pegar M con N bajo la función f .

$$M \# N = (M - B_M) \cup_f (N - B_N).$$

Se puede probar que la suma conexas está bien definida. Módulo homeomorfismo es conmutativa, asociativa y la esfera S^n actúa como elemento neutro.

Definición 2.1.3. Sean M y N dos variedades de dimensión n con frontera no vacía. Sean B_M y B_N dos bolas abiertas encajadas en ∂M y ∂N . Tomamos un difeomorfismo $f : B_M \rightarrow B_N$. Definimos la *suma conexas por la frontera* de M y N como resultado de pegar M con N bajo la función f .

$$M \natural N = M \cup_f N.$$

En el caso de suma por la frontera existe una ambigüedad cuando la frontera de M o de N es disconexa. Pegar usando distintas componentes de la frontera puede resultar en distintas variedades.

Definición 2.1.4. Una variedad M de dimensión n -dimensional es *irreducible* si toda $(n-1)$ -esfera encajada $S^{n-1} \subseteq M$ es frontera de una n -bola contenida en M . En caso contrario, decimos que M es reducible.

Si M es reducible, entonces existe una esfera encajada $S^{n-1} \subseteq M$ que no acota una n -bola. Una esfera de este tipo se llama *esencial* o *reductora*.

Ejemplo 2.1.5. Por el Teorema de Jordan-Schönflies, \mathbb{R}^3 y S^3 son irreducibles.

Definición 2.1.6. Decimos que una n -variedad M es *prima* si no es la n -esfera S^n , y toda descomposición en una suma conexas $M = M_1 \# M_2$ implica $M_i \cong S^n$ para alguna $i = 1, 2$.

Observación. Toda variedad irreducible es prima. Si M se descompone en una suma conexas no trivial, entonces la esfera por donde se pegan las variedades agujeradas $M_i - B^n$ es una esfera que reduce a M . Sin embargo, no toda variedad prima es irreducible. En el caso 3-dimensional, existen, módulo difeomorfismo, exactamente dos variedades primas que no son irreducibles: $S^1 \times S^2$ y $S^1 \tilde{\times} S^2$, dónde $S^1 \tilde{\times} S^2$ es el resultado de identificar en $[0, 1] \times S^2$ a $\{0\} \times S^2$ con $\{1\} \times S^2$ bajo el mapeo antipodal.

Para 3-variedades compactas y orientables se tiene el siguiente teorema de descomposición en primos, el cual afirma que la descomposición existe y es única. Esto justifica el nombre de variedad prima.

En lo que resta de la sección, sólo consideraremos variedades de dimensión 3.

Teorema 2.1.7. *Sea M una 3-variedad compacta orientable y conexa, posiblemente con frontera no vacía. Si M no es la 3-esfera S^3 , entonces M es difeomorfa a una suma conexa*

$$M = P_1 \# P_2 \# \cdots \# P_k$$

de variedades primas. Los sumandos P_i están determinados de manera única, salvo por el orden y por difeomorfismo.

Kneser demuestra la existencia de la descomposición. Milnor demuestra la unicidad en [19]. Su demostración es para el caso $\partial M = \emptyset$. Sin embargo, la demostración para el caso con frontera no vacía es esencialmente la misma. Haciendo uso de la conjetura de Poincaré, da también una demostración de la existencia de una descomposición.

En el mismo artículo, Milnor hace notar que la unicidad de la descomposición no se puede extender al caso no orientable. Da el siguiente ejemplo,

$$(S^1 \tilde{\times} S^2) \# (S^1 \tilde{\times} S^2) \cong (S^1 \tilde{\times} S^2) \# (S^1 \times S^2),$$

pero $(S^1 \tilde{\times} S^2) \not\cong (S^1 \times S^2)$.

Damos aquí la demostración de Milnor [19], donde hace uso de la conjetura de Poincaré.

Prueba: Existencia de una descomposición. Sea M una 3-variedad compacta y conexa. Supongamos que M no es prima, entonces existen M_1 y M_2 , distintas de S^3 , tales que $M = M_1 \# M_2$. Si ambas son primas, terminamos. Si alguna M_i no es prima, podemos descomponerla en una suma conexa no trivial. Falta mostrar que este proceso termina en un número finito de pasos. Aquí Kneser da un argumento ingenioso. Probada ya la conjetura de Poincaré, podemos hacer lo siguiente. Sea $\rho(M)$ el mínimo número de generadores del grupo fundamental de M . Podemos definir ρ por la compacidad de M . Por un teorema de Gruško- Neumann, $\rho(M_1 \# M_2) = \rho(M_1) + \rho(M_2)$. Por lo tanto, si $M = M_1 \# M_2 \# \cdots \# M_k$ con $k > \rho(M)$, entonces alguna M_i debe satisfacer $\rho(M_i) = 0$. Por la conjetura de Poincaré, esto implica que M_i es homeomorfa (y por lo tanto también difeomorfa) a S^3 . \square

Observación. Notemos que en esta demostración no usamos la orientabilidad de M , por lo que es también válida para variedades no orientables. En otras palabras, toda 3-variedad compacta y conexa, orientable o no, tiene una descomposición en variedades primas. Si M es no orientable, entonces la descomposición no es necesariamente única.

Definición 2.1.8. Sea S una superficie compacta propiamente encajada en una 3-variedad M . Un *disco de compresión* D para S es un disco encajado en M tal que $S \cap D = \partial D$.

Los discos de compresión se definen para hacer la siguiente operación en superficies.

Definición 2.1.9. Sea D un disco de compresión para una superficie compacta S propiamente encajada en M . Sea $\overline{\eta(D)}$ una vecindad tubular de D en M . Tomando $\eta(D)$ suficientemente pequeña, tenemos que $A = \eta(D) \cap S$ es difeomorfa a un anillo, el cual es una vecindad tubular de ∂D en S . Notemos también que $\partial\overline{\eta(D)} = D_1 \cup D_2 \cup A$ es la unión de dos discos ajenos, los cuales tienen sus fronteras contenidas en S . Decimos que la superficie $S' = (S - A) \cup (D_1 \cup D_2)$ es el resultado de hacer compresión sobre D .

Ejemplo 2.1.10. Sea $M = S^3$, el cual pensamos como \mathbb{R}^3 con un punto al infinito, $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{*\}$. Sea T el toro vertical como en ejemplo 1.1.6. Recordando la ecuación de T

$$\varphi(u, v) = (\text{sen } u, (\cos u + 2) \text{sen } v, (\cos u + 2) \cos v),$$

de manera que $T = \varphi(\mathbb{R}^2)$. Módulo isotopía, hay tres disco de compresión para T en M .

Sean $S_1 = \varphi(\{(u, \pi/2) : u \in [0, 2\pi]\})$ y $S_2 = \varphi(\{(\pi/2, v) : v \in [0, 2\pi]\})$ figura 2.1. Las curvas S_1 y S_2 acotan, cada una, un disco en M . Sean D_1 y D_2 estos discos, de manera que $D_i \cap T = \partial D_i = S_i$. El resultado de hacer compresión tanto sobre D_1 como sobre D_2 es la esfera S^2 . Sea S_3 una curva simple cerrada en T que acote un disco \tilde{D} en T . Perturbando un

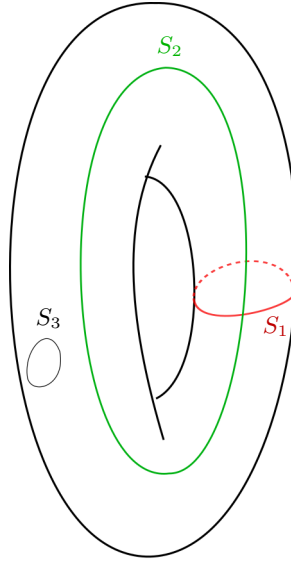


Figura 2.1: Las curvas S_1 , S_2 , y S_3 en el toro vertical.

poco al disco \tilde{D} , obtenemos un disco de compresión D_3 para T tal que $T \cap D_3 = S_3 = \partial D_3$. Al hacer compresión sobre D_3 , el resultado es la unión ajena del toro T y una 2-esfera.

Como muestra el ejemplo anterior, existen dos tipos de discos de compresión: Los que simplifican la variedad, y los que separan una componente homeomorfa a una 2-esfera. Los del segundo tipo no nos interesan, ya que siempre existen y no nos dicen nada sobre la relación de S con la variedad ambiente M .

Definición 2.1.11. Sea S una superficie propiamente encajada en una variedad M . Un disco de ∂ -compresión es un disco encajado $D \subseteq M$ tal que $S \cap \partial D = \alpha$ es un arco en ∂D . El resto está contenido en la frontera de M , $\partial D - \alpha \subseteq \partial M$.

Hacer compresión sobre un disco de ∂ -compresión es análogo a la definición 2.1.9.

Ejemplo 2.1.12. Sean $M = S^1 \times D^2$ el toro sólido, y $X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\} \subseteq D^2$, un diámetro del disco D^2 . Consideremos la superficie $S = S^1 \times X \subseteq M$, un anillo contenido en M , cuya frontera consiste de dos círculos ajenos contenidos en ∂M . En este caso, existe, esencialmente (módulo isotopía), dos discos de ∂ -compresión.

Sea $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Consideremos el disco $D = \{1\} \times B$. Formalmente este disco no es de ∂ -compresión. No está encajado en M , ya que tiene esquinas. Bajo una pequeña isotopía, obtenemos un disco encajado, pero ya no tendrá una parametrización cómoda. Así que, por comodidad, ignoraremos estos problemas. Parametrizando nuevamente $S^1 = [0, 1]/\simeq$, tenemos

$$A = (3/4, 1/4) \times X, \quad D_1 = \{3/4\} \times B, \quad D_2 = \{1/4\} \times B.$$

Así $S' = D_1 \cup ([1/4, 3/4] \times X) \cup D_2$, un disco con frontera contenida en ∂M .

Definición 2.1.13. Sea S una superficie contenida en una 3-variedad M .

Decimos que S es *compresible* si existe un disco de compresión $D \subseteq M$ para S , tal que ∂D no acota un disco en S . Un disco de compresión que satisface esto se dice que es *no trivial*. Si S no es la esfera y no es compresible, decimos entonces que es *incompresible*. El caso de la esfera es especial, ya que por el Teorema de Jordan-Schönflies, todo disco de compresión para S^2 es trivial. Algunos autores dicen que una 2-esfera encajada en M es incompresible si es una esfera esencial.

Decimos S es *∂ -incompresible* si para cualquier disco de ∂ -compresión, existe otro disco $D' \subseteq S$ con $\alpha \subseteq \partial D'$ y $\partial D' - \alpha \subseteq \partial S \subseteq \partial M$.

Una superficie que es incompresible y ∂ -incompresible decimos que es *esencial*.

De nuevo, el caso para un disco encajado $D \subseteq M$ es especial, ya que este es trivialmente ∂ -incompresible. En este caso, se dice que un disco es esencial si es un disco de compresión no trivial para ∂M .

Definición 2.1.14. Sea S una superficie compacta. Si es S conexa, definimos la complejidad de S como el entero positivo

$$c(S) = \begin{cases} 0 & S \cong S^2 \\ 1 - \chi(S) = 2g - 1. & S \not\cong S^2. \end{cases}$$

Si S es desconexa, definimos su complejidad como

$$c(S) = \sum_{S' \subseteq S} c(S') \quad \text{donde } S' \text{ son las componentes conexas de } S.$$

Hacer compresión en una superficie reduce su complejidad. Sea S' el resultado de hacer compresión en la superficie S , entonces $c(S') < c(S)$. Si el disco es trivial, entonces el hacer compresión sobre D separa una esfera de S , de manera que

$$S' \cong S \sqcup S^2,$$

en cuyo caso la complejidad de la variedad no cambia.

Los discos de compresión nos permiten recortar la superficie en sus partes esenciales dentro de M . De cierta manera, la complejidad de la variedad se ve reflejada en sus superficies esenciales.

Ejemplo 2.1.15. 1) Para $M = S^3$, M no tiene superficies esenciales.

2) Sean M_1 y M_2 dos 3-variedades cerradas no homeomorfas a la 3-esfera. La suma conexa $M_1 \# M_2$ tiene como esfera esencial a la esfera de pegado.

3) La superficie del ejemplo ejemplo 2.1.12 es incompresible pero no ∂ -incompresible, por lo que no es esencial.

4) La superficie $S^1 \times S^1 \times \{0\} \subseteq S^1 \times S^1 \times S^1$ es esencial.

Definición 2.1.16. Una variedad de Haken es una 3-variedad M compacta, orientable, irreducible que contiene una superficie orientable incompresible.

Sea M una 3-variedad compacta, orientable. La frontera ∂M es una superficie cerrada orientable. En este caso, pegar una 2-asa 3-dimensional en M tiene el efecto en la frontera de hacer compresión sobre un disco esencial. Si $\varphi : S^1 \times D^1 \rightarrow \partial M$,

Vemos en la figura 2.2 una 3-variedad M con frontera una superficie cerrada de género 3, cuya complejidad es $c(\partial M) = 5$. En el primer caso, pegar la 2-asa reduce el género de la frontera. En este caso, la complejidad de la frontera es $c(\partial M_1) = 3$. En el segundo caso, la 2-asa desconecta a la frontera. La complejidad resultante es $c(\partial M_2) = 1 + 3 = 4$.

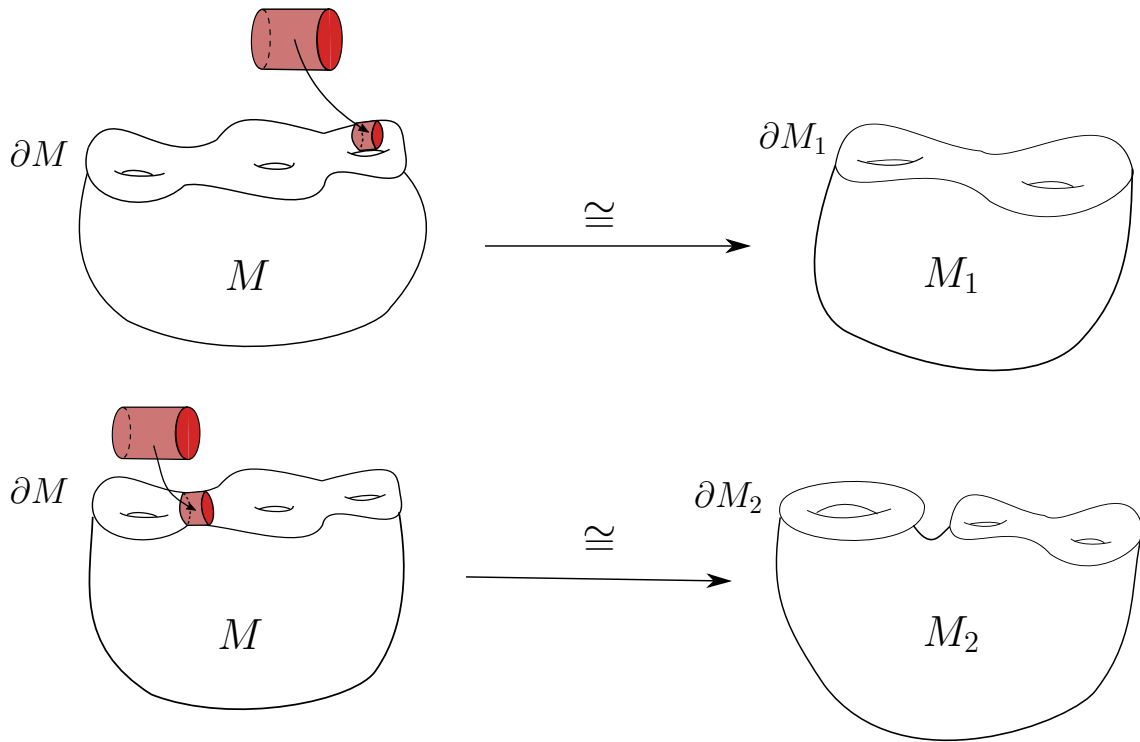


Figura 2.2: Efecto en la frontera de pegar 2-asas en una 3-variedad M .

En cambio, pegar 1-asas tiene el efecto de aumentar la complejidad de la frontera. En la figura 2.3, la 3-variedad M_1 tiene frontera una superficie cerrada orientable de género 2. Al pegar una 1-asa, la variedad resultante M'_1 tiene frontera una superficie cerrada de género 3. Las complejidades correspondientes son $c(\partial M_1) = 3$ y $c(\partial M'_1) = 5$. El segundo caso es la variedad M_2 con frontera la unión ajena de un toro y una superficie cerrada de género 2. El efecto de pegar la 1-asa es el de conectar la frontera. La complejidad pasa de ser $c(\partial M_2) = 4$ a $c(\partial M'_2) = 5$.

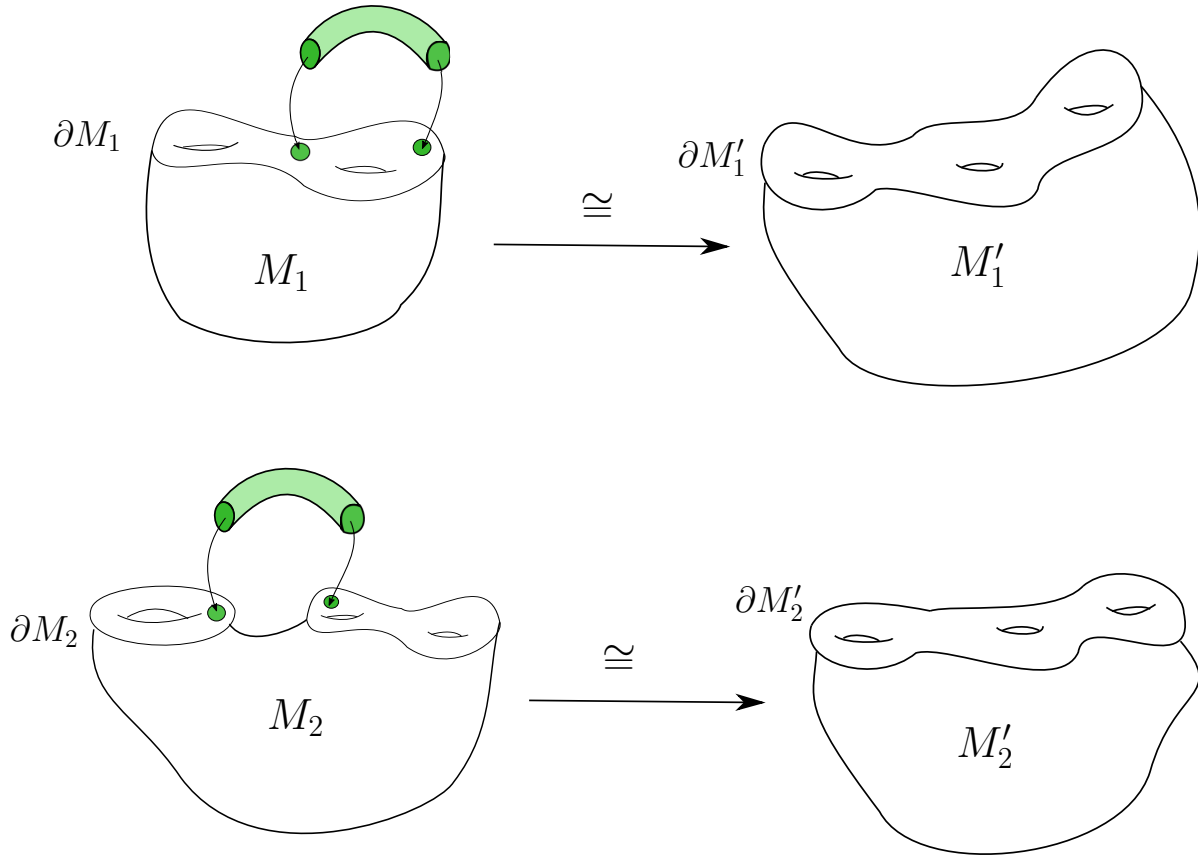


Figura 2.3: Efecto en la frontera de pegar 1-asa en una 3-variedad M .

Pegar una 1-asa aumenta la complejidad de la frontera. Pegar una 2-asa la disminuye.

2.2. Descomposiciones de Heegaard

Sea M una 3-variedad cerrada. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función de Morse con sólo un punto crítico de índice 0 y sólo uno de índice 3. Por la proposición 1.2.9, tenemos

$$0 = \chi(M) = -1 + c_1 - c_2 + 1 = c_1 - c_2,$$

donde c_i denota el número de puntos críticos de índice i . Por lo tanto $c_1 = c_2$. Denotemos por c este valor.

Consideremos una descomposición de M en asas:

$$M = h^0 \cup_{\varphi_1} (h_1^1 \sqcup h_2^1 \sqcup \dots \sqcup h_c^1) \cup_{\varphi_2} (h_1^2 \sqcup h_2^2 \sqcup \dots \sqcup h_c^2) \cup_{\varphi_3} h^3,$$

donde h^λ denota una λ -asa $D^\lambda \times D^{3-\lambda}$. Usamos h_i^λ para denotar la i -ésima λ -asa. Por lo anterior, hay tantas 1-asas como 2-asas. Sea

$$H = h^0 \cup_{\varphi_1} (h_1^1 \sqcup \cdots \sqcup h_c^1)$$

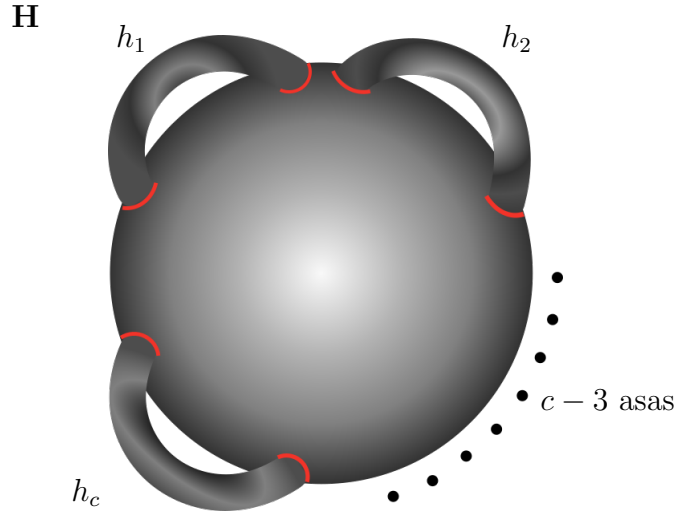


Figura 2.4: Cubo con c asas

Como M es orientable, H es una 3-variedad orientada cuya frontera es una superficie cerrada de genero c . Nos fijamos ahora en la descomposición en asas asociada a $-f$. De manera análoga obtenemos

$$H' = (h_1^2 \sqcup h_2^2 \sqcup \cdots \sqcup h_c^2) \cup_{\psi} h^3,$$

Como ya vimos, las i -asas de $-f$ son las $m - i$ asas de f . En este caso, tomando $m = 3$, las 0-asas y 1-asas de $-f$ corresponden a las 3-asas y 2-asas de f . Como hay tantas 1-asas como 2-asas, H' tiene el mismo género que H . Luego, H y H' son difeomorfas.

Así, M es el resultado de pegar H con H' a lo largo de sus fronteras, que son superficies orientables de género c , bajo un difeomorfismo $\varphi : \partial H \rightarrow \partial H'$, donde φ está dada por la descomposición en asas de M .

Definición 2.2.1. Una *descomposición de Heegaard* de M es una descomposición de M en dos cubos con asas $M = H \cup_{\varphi} H'$, donde $\varphi : \partial H \rightarrow \partial H'$ es un difeomorfismo que invierte la orientación. La superficie $\partial H \cong \partial H'$ se llama *superficie de Heegaard* de la descomposición. Sea $\Sigma \cong \partial H \cong \partial H'$, denotaremos de manera indistinta a la descomposición de Heegaard de M por

$$M = H \cup_{\varphi} H' = H \cup_{\Sigma} H'.$$

Se define el género de Heegaard de M como el género mínimo que alcanza una superficie de Heegaard para M ,

$$g(M) = \min\{g(S) : M = H \cup_S H' \text{ es descomposición de Heegaard para } M\}$$

De lo anterior, podemos concluir el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Toda 3-variedad cerrada admite una descomposición de Heegaard.*

Cada 1-asa $h_i^1 = D^1 \times D^2$ tiene una copia del círculo, al cual denotamos por m_i . Si nos fijamos en $D^1 \times \partial D^2 = D^1 \times S^1 \subseteq h_i^1$, el círculo m_i es un generador del grupo de homología $H_1(D^1 \times S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Por lo tanto, es único salvo homología. A estos círculos, vistos dentro de H , se les llama meridianos (ver figura 2.5).

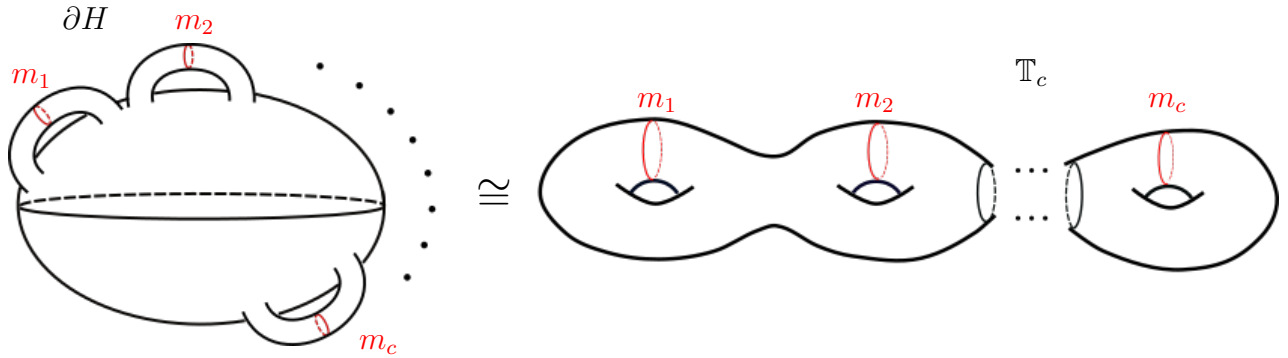


Figura 2.5: Superficie de Heegaard con meridianos.

De manera análoga tenemos definidos c meridianos m'_1, \dots, m'_c en H' . Sea $M = H \cup_\varphi H'$ una descomposición de Heegaard para M . Entonces M es el resultado de pegar los cubos con asas H y H' a través de un difeomorfismo $\varphi : \partial H' \rightarrow \partial H$, el cual invierte la orientación. Dada $\Sigma \cong \partial H \cong \partial H'$ abstracta, podemos construir M pegando H y H' en Σ a través de sus fronteras. Un difeomorfismo que preserva orientación $f : \partial H \rightarrow \Sigma$ está determinado por las imágenes de los meridianos $m_i \subseteq \partial H$. Esto ya que $\partial H - \cup m_i \cong S^2$. Todos los difeomorfismos de S^2 que preservan orientación son isotópicos a la identidad (ver [26]). Por lo que existe una única forma, módulo isotopía, de extender la función $f|_{\cup m_i}$ a ∂H . De manera análoga, un difeomorfismo $h : \partial H' \rightarrow \Sigma$ que invierte la orientación queda determinado por las imágenes de los meridianos m'_i , por lo que basta indicar las imágenes que toman los meridianos m_i y m'_i en Σ para determinar la descomposición $H \cup_\Sigma H'$.

Definición 2.2.3. Un diagrama de Heegaard es una terna ordenada $(\Sigma; \alpha, \beta)$, donde Σ es una superficie cerrada, y α y β son colecciones completas de curvas esenciales para Σ .

Observación. Un diagrama de Heegaard determina una 3-variedad cerrada. Distintos diagramas de Heegaard pueden determinar la misma variedad. Por ejemplo, si $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es un difeomorfismo cualquiera, entonces (Σ, α, β) y $(\Sigma, f(\alpha), f(\beta))$ determinan la misma variedad. En particular, bajo un difeomorfismo, podemos suponer que las curvas α son meridianos de Σ . Por esto, algunos autores llaman diagrama de Heegaard a una pareja ordenada (Σ, β) , dando por hecho que las curvas α de nuestra definición son meridianos de Σ .

Definición 2.2.4. Un diagrama de Heegaard $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$ es (g, k) -estándar si las curvas α y β pueden indexarse de manera que

- $\alpha_i = \beta_i$ para $i \leq k$.
- $|\alpha_i \cap \beta_j| = \delta_{ij}$ para $i > k$, o $j > k$.

Decimos que un diagrama de Heegaard es *estándar* si es (g, k) -estándar para algunos $0 \leq k \leq g$.

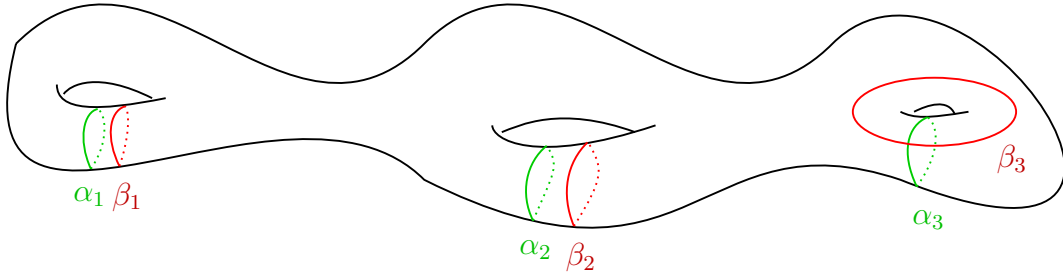


Figura 2.6: Un diagrama de Heegaard $(3,2)$ -estándar.

Un diagrama de Heegaard (g, k) -estándar define una descomposición de Heegaard de género g para $\#^k(S^1 \times S^2)$ para cada $0 \leq k \leq g$. Tomamos $\#^0(S^1 \times S^2) = S^3$. El diagrama en figura 2.6 es un diagrama $(3,2)$ -estándar para $\#^2(S^1 \times S^2)$. Waldhausen [28] demuestra el siguiente teorema de unicidad.

Teorema 2.2.5. Sea $Y = \#^k(S^1 \times S^2)$. Para cada $g \geq k \geq 0$ módulo isotopía¹, existe una única descomposición de Heegaard para Y de género g .

¹De acuerdo a Schleimer [25] la demostración original de Waldhausen sólo demuestra unicidad salvo difeomorfismo. La demostración para unicidad salvo isotopía (parece que) fue demostrada por Carvalho y Oertel en [2]

De manera que un diagrama de Heegaard (g, k) -estándar es el único diagrama de género g para $\#^k(S^1 \times S^2)$.

Consideremos ahora M una 3-variedad orientable conexa con frontera no vacía, entonces ∂M es una superficie cerrada orientable. Existe una función de Morse $f : M \rightarrow [0, 1]$ tal que sus puntos críticos de índice 0 y 1 toman valores menores a $1/2$, y sus puntos críticos de índice 2 y 3 toman valores mayores a $1/2$. En particular, $1/2$ es un valor regular de f . Tenemos entonces que $C_1 = f^{-1}[0, 1/2]$ y $C_2 = f^{-1}[1/2, 1]$ son 3-variedades compactas con frontera. Bajo una perturbación que no afecta los puntos críticos de f , podemos suponer que $f(\partial M) = \{0, 1\}$. Denotamos por $\partial_+ M = \partial M \cap f^{-1}\{1\}$, y por $\partial_- M = \partial M \cap f^{-1}\{0\}$. De esta manera, $\partial C_1 = \partial_- M \cup f^{-1}\{1/2\}$, y $\partial C_2 = \partial_+ M \cup f^{-1}\{1/2\}$. La 3-variedad C_1 está construida a partir de pegar algunas 0-asas y 1-asas a $\partial_- M \times I$. Mientras que C_2 se construye de manera dual, a partir de adherir 3-asas y 2- asas a $\partial_+ M \times i$

Lo anterior motiva la siguiente definición, que generaliza el concepto de cubo con asas.

Definición 2.2.6. Sea S una superficie cerrada distinta a la esfera. Un cuerpo de compresión es el resultado de hacer una de las siguientes dos construcciones:

- i) Pegar 0 y 1-asas a $S \times [0, 1]$ en $S \times \{1\}$.
- ii) Pegar 3 y 2-asas a $S \times [0, 1]$ en $S \times \{0\}$. Tapar todas las esferas frontera resultantes con 3-asas.

Notemos que la segunda construcción es dual a la primera.

Si C es un cuerpo de compresión, entonces ∂C se divide de manera natural en dos abiertos ajenos, $\partial C = \partial_- C \cup \partial_+ C$, donde $\partial_- C = S \times \{0\}$ y $\partial_+ C = \partial C - \partial_- C$ para la construcción i). Para la construcción ii), separamos la frontera como $\partial_+ C = S \times \{1\}$ y $\partial_- C = \partial C - \partial_+ C$. Cada abierto puede contener varias componentes de ∂C .

Decimos que el cuerpo de compresión C es trivial si es un producto $C = S \times [0, 1]$.

En $S \times [0, 1]$ diremos que $S \times \{1\}$ es el exterior, y $S \times \{0\}$ el interior. La idea de la primera construcción es que estamos armando el cuerpo de compresión hacia afuera, pegando las 1-asas en el exterior de $S \times [0, 1]$. Mientras que la segunda construcción es hacia adentro, pegando las 2-asas en el interior de $S \times [0, 1]$. En ambos casos, un cuerpo de compresión es un cobordismo de $\partial_- C$ a $\partial_+ C$.

Observación. Se puede probar que todo cuerpo de compresión es irreducible.

Observación. Por convención un cubo con asas es un cuerpo de compresión C con $\partial_- C = \emptyset$.

Definición 2.2.7. Sea C un cuerpo de compresión como en i). Un *sistema completo de discos* para C es una unión ajena de discos esenciales $D \subseteq C$ tal que $\partial D \subseteq \partial_+ C$, de manera que C cortada por los discos D es homeomorfo a

$$\begin{cases} \partial_- C \times I, & \text{si } \partial_- C \neq \emptyset \\ B^3 & \text{si } \partial_- C = \emptyset. \end{cases}$$

Podemos generalizar la definición de descomposición de Heegaard utilizando cuerpos de compresión y no sólo cubos con asas.

Definición 2.2.8. Sea M una 3-variedad compacta. Separamos su frontera en abiertos relativos a ∂M ajenos $\partial M = \partial_+ M \cup \partial_- M$. Una *descomposición de Heegaard de M relativa a $\partial_- M$* es una descomposición de M en dos cuerpos de compresión C_1 y C_2 como sigue

$$M = C_1 \cup_{\Sigma} C_2, \quad \text{con} \quad \partial_- M = \partial_- C_1, \quad \partial_+ M = \partial_- C_2,$$

Decimos que $\Sigma \cong \partial_+ C_1 \cong \partial_+ C_2$ es una superficie de Heegaard para esta descomposición.

La idea en la definición anterior es que C_1 se construye pegando 1-asas, mientras que C_2 se construye pegando 2-asas.

Teorema 2.2.9. *Sea M una 3-variedad compacta. Dada una descomposición de la frontera de M , $\partial M = \partial_- M \cup \partial_+ M$, con $\partial_- M$ y $\partial_+ M$ abiertos de ∂M , existe una descomposición de Heegaard de M relativa a $\partial_- M$.*

Una clase importante de 3-variedades son los espacios lente. Estos son aquellas variedades con género de Heegaard 1.

Definición 2.2.10. (Espacios Lente) Sean V_1, V_2 dos copias del toro solido $S^1 \times D^2$. Sea $h : \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$. Formamos la 3-variedad

$$M = V_1 \cup_h V_2$$

El homeomorfismo h está determinado por la imagen del meridiano $m_2 \subseteq V_2$. Tomando la curva $\ell = S^1 \times \{1\}$, podemos describir $\alpha = h(m_2) \subseteq V_1$ por el número de vueltas que da α respecto a ℓ , y el número de vueltas que da respecto al meridiano $m_1 = \{1\} \times S^1 \subseteq V_1$ (esto lo veremos de manera más precisa en apartado 2.5, en definición 2.5.8). Si α da p vueltas respecto a ℓ y q vueltas respecto a m_1 , a la variedad resultante se le conoce como *espacio lente de tipo (p, q)* y denotado por $L(p, q)$.

Algunos ejemplos de espacios lente:

$$L(1, q) \cong S^3, \quad L(0, 1) \cong S^1 \times S^2, \quad L(2, 1) \cong \mathbb{RP}^3.$$

Como casos especiales tenemos cuando $p = 0$ y cuando $p = 1$. Algunos autores no consideran ni a S^3 ni a $S^1 \times S^2$ como espacios lente.

Las 3-variedades con género de Heegaard 1 son los espacios lente $L(p, q)$ que no son la 3-esfera.

No todos los espacios lente son distintos. Por ejemplo, $L(p, q + kp) \cong L(p, q)$, por lo que se adopta la convención $0 < q < p$. Algunas de las características de estos espacios se pueden ver en la sección 3.B del libro de Rolfsen [22].

2.3. Descomposición de Heegaard Generalizada

Sean M y N dos variedades compactas y conexas. Dadas descomposiciones de Heegaard

$$M = H_M \cup_{S_M} H'_M \quad N = H_N \cup_{S_N} H'_N,$$

estas inducen una descomposición de Heegaard para la suma conexa

$$M \# N = (H_M \natural H_N) \cup_{S_M \# S_N} (H_M \natural H_N).$$

El género de Heegaard es aditivo. Para demostrarlo haremos uso del Lema de Haken. Damos aquí una versión más fuerte, enunciada por Casson y Gordon en [3].

Lema 2.3.1 (Lema de Haken). *Sea M una 3-variedad cerrada, conexa y orientable con descomposición de Heegaard $H \cup_F H'$, con superficie de Heegaard F . Sea $S \subseteq M$ una unión ajena de 2-esferas y discos esenciales, con $\partial S \subseteq \partial M$. Entonces existe una unión ajena de 2-esferas y discos esenciales $S^* \subseteq M$ que satisfacen lo siguiente:*

- 1) S^* se obtiene de S mediante isotopías del ambiente.
- 2) Cada componente de S^* interseca F en un único círculo.
- 3) Existe un sistema completo de discos D, D' para H, H' , respectivamente, tales que $D \cap S = D' \cap S^* = \emptyset$.

Observación. En el enunciado original de Casson y Gordon S^* no tiene porque ser igual a S . Dicho esto, en 2020, Scharlemann [24] probó que S^* se puede obtener vía isotopías de S . En 2021, Schultens y Hensel [9] dieron una prueba, original y más corta, del mismo resultado usando complejos de esferas.

En particular, si M es reducible, entonces existe una esfera esencial que interseca la superficie de Heegaard en un círculo, lo cual nos permite separar la descomposición de Heegaard en dos sumandos.

El lema original de Haken considera sólo esferas esenciales. Esta generalización toma en cuenta discos esenciales, los cuales existen cuando $\partial M \neq \emptyset$.

Corolario 2.3.2. *Sea M una 3-variedad compacta con descomposición en variedades primas*

$$M = P_1 \# P_2 \# \cdots \# P_n.$$

Entonces

$$g(M) = \sum_{i=1}^n g(P_i).$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre el número de componentes en la descomposición en variedades primas. Si M es prima, el resultado es inmediato. Supongamos ahora que si N se descompone en $k < n$ sumandos primos, entonces su género de Heegaard es la suma de los géneros de sus componentes primas.

Sea M una 3-variedad. Supongamos que M tiene descomposición prima con n sumandos. Digamos

$$M = P_1 \# P_2 \# \cdots \# P_n.$$

Sea $M = H_M \cup_{\Sigma} H'_M$ una descomposición de Heegaard para M con $g(\Sigma) = g(M)$. Al ser M reducible, existe una esfera esencial $S \subseteq M$ la cual induce descomposiciones de Heegaard en cada sumando. Es decir $M = M_1 \#_S M_2$, donde M_i tiene descomposición $H_i \cup_{\Sigma_i} H'_i$ tal que

$$H_M = H_1 \natural H_2, \quad H'_M = H'_1 \natural H'_2, \quad \Sigma = \Sigma_1 \# \Sigma_2.$$

En particular $g(M) = g(M_1) + g(M_2)$. Reordenando los índices de ser necesario, podemos suponer que cada sumando M_i se descompone

$$M_1 = P_1 \# P_2 \# \cdots \# P_k, \quad M_2 = P_{k+1} \# \cdots \# P_n,$$

donde $1 < k < n$. Aplicando la hipótesis de inducción, tenemos

$$g(M) = g(M_1) + g(M_2) = \sum_{i=1}^k g(P_i) + \sum_{i=k+1}^n g(P_i) = \sum_{i=1}^n g(P_i),$$

que es lo que buscábamos demostrar. □

Como corolario inmediato, tenemos:

Corolario 2.3.3. *El género de Heegaard es aditivo.*

Corolario 2.3.4. *El género de Heegaard es aditivo bajo suma conexa por la frontera.*

Demostración. Sea $M = M_1 \natural M_2$. Sin pérdida de generalidad, supongamos M conexa. Supongamos primero que M es irreducible. Sea D un disco en M que realiza la descomposición $M = M_1 \natural M_2$. Si ∂D es inesencial en ∂M , entonces alguno de M_1 o M_2 es una 3-bola. Supongamos $M_2 \cong B^3$, entonces $M \cong M_1$ y $g(M) = g(M_1) = g(M_1) + g(M_2)$. Supongamos entonces que ∂D es esencial en M . Consideremos la descomposición de $\partial M = \partial_- M \cup \partial_+ M$ con $\partial_- M = \emptyset$ y $\partial_+ M = \partial M$. Sea $M = H \cup H'$ una descomposición de Heegaard para esta descomposición de la frontera, de manera que $\partial_+ M \subseteq \partial H'$. En particular $\partial_- H = \emptyset$, y $\partial_+ H' = \partial_+ M = \partial M$. Por el **Lema de Haken**, bajo una isotopía, podemos suponer que el disco D interseca a F en un círculo esencial. Como $\partial D \subseteq \partial M = \partial_+ H'$, este disco desconecta a F , por lo que D interseca a H en un disco. Este disco separa a H en dos cubos con asas, digamos $H - D = H_1 \cup H_2$. Por lo mismo, $D \cap H'$ separa a H' en dos cuerpos de compresión, digamos $H' - D = H'_1 \cup H'_2$. Entonces $M_i = H_i \cup_{F_i} H'_i$ es una descomposición de Heegaard de género $g(F_i)$, de manera que $g(F_1) + g(F_2) = g(F) \geq g(M)$. Lo que muestra la desigualdad faltante $g(M_1) + g(M_2) \leq g(M)$.

Supongamos ahora que M no es irreducible. Sea $M = M_1 \natural M_2$. Descomponemos cada M_i en sumandos primos

$$M_1 = P_1^1 \# P_2^1 \# \cdots \# P_k^1, \quad M_2 = P_1^2 \# P_2^2 \# \cdots \# P_l^2.$$

Reordenando los índices de ser necesario, podemos suponer que la suma por la frontera ocurre en las fronteras de P_1^1 y P_1^2 . De manera que la suma es de la forma

$$M = M_1 \natural M_2 = (P_1^1 \natural P_1^2) \# \left(\#_{i=2}^k P_i^1 \right) \# \left(\#_{i=2}^l P_i^2 \right).$$

Al ser P_1^1 y P_1^2 variedades primas con frontera no vacía, son irreducibles. Luego, la suma por la frontera $P_1^1 \natural P_1^2$ es también irreducible, por lo que $g(P_1^1) + g(P_1^2) = g(P_1^1 \natural P_1^2)$. Por la aditividad de la suma conexa, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} g(M) &= g \left((P_1^1 \natural P_1^2) \# \left(\#_{i=2}^k P_i^1 \right) \# \left(\#_{i=2}^l P_i^2 \right) \right) \\ &= g(P_1^1 \natural P_1^2) + \sum_{i=2}^k g(P_i^1) + \sum_{i=2}^l g(P_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^k g(P_i^1) + \sum_{i=1}^l g(P_i^2) \\ &= g(M_1) + g(M_2). \end{aligned}$$

Con lo que terminamos la prueba. □

Definición 2.3.5. Decimos que una descomposición de Heegaard para $M = H \cup_F H'$ es *reducible* si existen discos esenciales $(D, \partial D) \subseteq (H, F)$, $(D', \partial D') \subseteq (H', F)$ tales que $\partial D = \partial D'$. En caso contrario decimos que la descomposición es *irreducible*.

En particular, si M tiene una descomposición reducible, entonces M es reducible. Esto ya que $D \cup D'$ forma una esfera esencial en M . El regreso nos lo da el **Lema de Haken**. Por lo tanto M es reducible si y sólo si M tiene una descomposición de Heegaard reducible. En cuyo caso todas las descomposiciones de Heegaard de M serán reducibles.

Definición 2.3.6. Decimos que una descomposición de Heegaard $M = H \cup_\Sigma H'$ es *fuertemente irreducible* si ni H ni H' son triviales, y no existen discos esenciales $(D, \partial D) \subseteq (H, \Sigma)$, $(D', \partial D') \subseteq (H', \Sigma)$, tales que $\partial D \cap \partial D' \neq \emptyset$. Si la descomposición no es fuertemente irreducible, entonces decimos que es *débilmente reducible*.

Teorema 2.3.7. *Sea M una 3-variedad compacta orientable. Si M tiene una descomposición de Heegaard fuertemente irreducible, entonces M es irreducible y ∂M es incompresible.*

Demostración. Sea $M = H \cup_\Sigma H'$ una descomposición de Heegaard. Si M es reducible, entonces, por el lema 2.3.1, existe una esfera esencial S que interseca la superficie de Heegaard en un círculo. Tomando $D = H \cap S$ y $D' = H' \cap S$, tenemos que D y D' son discos esenciales de H y H' respectivamente tales que $\partial D = \partial D'$. En particular, $\partial D \cap \partial D' \neq \emptyset$, por lo que la descomposición es débilmente reducible. Por contrapositiva, si la descomposición es fuertemente irreducible, entonces M es irreducible.

La demostración de que fuertemente irreducible implica ∂M incompresible la haremos también por contrapositiva. Supongamos que ni H ni H' son triviales. Sea $D \subseteq M$ un disco de compresión no trivial para ∂M . Supongamos sin pérdida de generalidad que $D \subseteq \partial_+ M \subseteq \partial H'$. Por el **Lema de Haken** podemos suponer que el disco D interseca a la superficie de Heegaard Σ en un círculo, por lo que $D' = D \cap H$ es un disco esencial para Σ en H . Nuevamente, por el lema 2.3.1, existe un sistema completo de discos para H' ajeno a D . Sea \tilde{D} una componente conexa del sistema de discos. Entonces D' y \tilde{D} son discos esenciales para Σ en H y H' , respectivamente, con fronteras ajenas. Por lo tanto la descomposición de Heegaard $H \cup_F H'$ es débilmente reducible. \square

Sea M una 3-variedad compacta, orientable. Dada una descomposición de la frontera $\partial M = \partial_- M \cup \partial_+ M$, consideremos una descomposición de M en asas relativa a $\partial_- M$

$$\mathcal{H} = b_0 \cup N_1 \cup T_1 \cup \cdots \cup N_k \cup T_k \cup b_3,$$

donde b_0 es la colección de 0-asas junto con $\partial_- M \times I$, N_i y T_i son colecciones de 1-y 2-asas, respectivamente, y b_3 es la colección de 3-asas junto con $\partial_+ M \times I$. Sean

$$S_i = \partial(b_0 \cup N_1 \cup T_1 \cup \cdots \cup T_{i-1} \cup N_i) - \partial_- M$$

$$F_i = \partial(b_0 \cup N_1 \cup T_1 \cup \cdots \cup N_i \cup T_i) - \partial_- M$$

Las superficies cerradas S_i son las fronteras positivas de la variedad resultado de pegar las primeras i colecciones de 1-asas N_i , y las primeras $i - 1$ colecciones de 2-asas T_i . Las superficies F_i son las fronteras positivas de la variedad cuando pegamos las primeras i -colecciones de 1-asas N_i y de 2-asas T_i . Sea C_i el cuerpo de compresión resultado de pegar la i -ésima colección de 1-asas N_i en $F_{i-1} \times I$, y C'_i el cuerpo de compresión resultado de pegar la i -ésima colección de 2-asas T_i en $S_i \times I$. Entonces, estos cuerpos de compresión inducen una descomposición de Heegaard $W_i = C_i \cup_{S_i} C'_i$, con superficie de Heegaard S_i (ver figura 2.7).

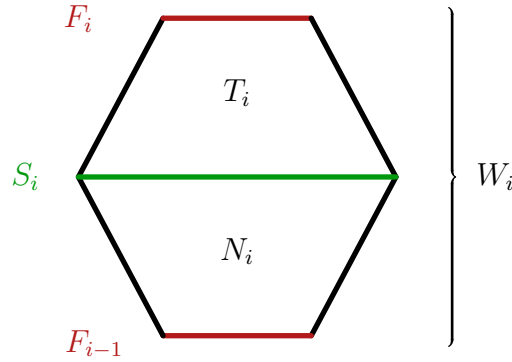


Figura 2.7: Representación esquemática de W_i .

Para cada $1 \leq i \leq k$, tenemos la descomposición de Heegaard

$$W_i = C_i \cup_{S_i} C'_i, \quad \text{con } \partial_- W_i = F_{i-1}, \partial_+ W_i = F_i.$$

Definición 2.3.8. Sea M una 3-variedad compacta. Una *descomposición de Heegaard generalizada* (DHG) para M es una descomposición en cuerpos de compresión C_i, C'_i , donde C_i fue construida pegando 1-asas, C'_i fue construida pegando 2-asa (ver definición 2.2.6). De manera que

$$M = C_1 \cup_{S_1} C'_1 \cup_{F_1} \cdots \cup_{F_{N-1}} C \cup_{S_N} C',$$

donde $S_i = \partial_+ C_i = \partial_+ C'_i$, y $F_i = \partial_- C_{i+1} = \partial_- C'_i$ son superficies cerradas.

Las superficies S_i se llaman *superficies gruesas*, mientras que las superficies F_i se llaman *superficies delgadas*. El nombre viene del hecho de que, al pegar 1-asas a $\partial_- C_i$, la complejidad crece, por lo que la superficie $\partial_+ C_i$ es más compleja (o es más gruesa) que la superficie $\partial_+ C_i$.

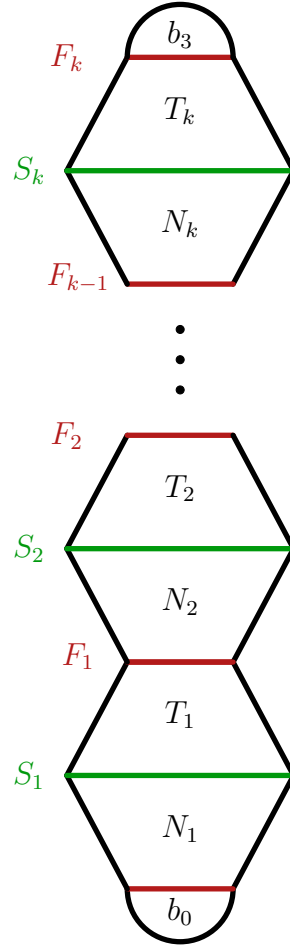


Figura 2.8: Representación esquemática de una DHG.

Dadas dos 3-variedades compactas M y N , con DHG respectivas

$$\mathcal{H}_M = b_0^M \cup N_1^M \cup T_1^M \cup \dots \cup T_k^M \cup b_3^M \quad \mathcal{H}_N = b_0^N \cup N_1^N \cup T_1^N \cup \dots \cup T_l^N \cup b_3^N.$$

Estas inducen una descomposición para la suma conexa $M \# N$. Removemos una 3-asa de b_M de \mathcal{H}_M , y una 1-asa b_N de \mathcal{H}_N , y pegamos las variedades a lo largo de la frontera de estas asas $\partial b_M \cong S^2 \cong \partial b_N$. En este primer paso obtenemos una descomposición de la forma

$$b_0^M \cup N_1^M \cup T_1^M \cup \dots \cup T_k^M \cup \tilde{b}_3^M \cup \tilde{b}_0^N \cup N_1^N \cup T_1^N \cup \dots \cup T_l^N \cup b_3^N,$$

donde $\tilde{b}_3^M = b_3^M - b_M$, resultado de quitar la 3-asa b_M , y $\tilde{b}_0^N = b_0^N - b_N$. Para obtener una DHG, simplemente recorreremos las 3-asa b_3^M al final de la descomposición, y las 0-asa b_0^N al inicio. Por los resultados de Teoría de Morse (ver lema 1.2.5), sabemos que podemos hacer esto sin modificar las otras asas. De esta manera obtenemos la siguiente descomposición para la suma

conexa

$$\mathcal{H}_{M\#N} = b_0^{M\#N} \cup N_1^M \cup T_1^M \cup \dots \cup T_k \cup N_1^N \cup T_1^N \cup \dots \cup T_l^N \cup b_3^{M\#N},$$

donde $b_0^{M\#N} = b_0^M \cup (b_0^N - b_N)$ y $b_3^{M\#N} = b_3^N \cup (b_3^M - b_M)$.

2.4. Posición delgada de una 3-variedad

Consideremos M una variedad suave compacta y orientable. M. Scharlemann y A. Thompson introducen en [23] la noción de posición delgada para 3-variedades. Basándose en la definición que da D. Gabai para posición delgada en nudos, definen una posición delgada para 3-variedades como una descomposición de Heegaard que tenga cada superficie gruesa S_i lo más simple posible.

Definición 2.4.1. Sea M una 3-variedad compacta. Dada una descomposición de la frontera de M , $\partial M = \partial_- M \cup \partial_+ M$, Sea

$$\mathcal{H} = b_0 \cup N_1 \cup T_1 \cup \dots \cup N_k \cup T_k \cup b_3$$

una descomposición en asas de M relativa a $\partial_- M$. Consideremos las complejidades de las superficies gruesas $c(S_1), c(S_2), \dots, c(S_k)$, Cada $c(S_i)$ es un número natural. Definimos el ancho de la descomposición en asas \mathcal{H} como la tupla de las complejidades $c(S_i)$ ordenada de manera descendente. Por ejemplo, si las complejidades son 1, 3, 2, 3, el ancho de esta descomposición es (3, 3, 2, 1). Denotamos por $w(\mathcal{H})$ al ancho de la descomposición \mathcal{H} .

Una descomposición \mathcal{H} de M es más ancha mientras más niveles complejos tenga. Esto nos da un orden en el conjunto de descomposiciones de una variedad M . De manera más concreta, dada M una variedad compacta, sea $P_M = \{w(\mathcal{H}) : \mathcal{H} \text{ es DHG de } M\}$. Ordenamos P_M con el orden lexicográfico. Dados $\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}} \in P$. Entonces $\mathcal{H} = (a_1, \dots, a_k)$ y $\tilde{\mathcal{H}} = (b_1, \dots, b_l)$, para algunos $a_i, b_i \in \mathbb{N}$. Decimos que $\mathcal{H} < \tilde{\mathcal{H}}$ si $l > k$ y $a_i = b_i$ para cada $1 \leq i \leq k$, o si existe un natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} < b_{n_0}$ y, si $m < n$, entonces $a_m = b_m$. Por ejemplo $(3, 3, 2, 1) > (3, 2, 2, 2, 1, 1)$, y $(3, 3, 2, 1) > (3, 3, 2)$.

Lema 2.4.2. *El conjunto P_M está bien ordenado. En particular, M siempre tiene una descomposición \mathcal{H} con ancho mínimo.*

Demostración. Sea P el conjunto de sucesiones decrecientes de números naturales que son eventualmente cero. Podemos definir el mismo orden sobre P . Dado $p \in P_M$, p es una sucesión finita de elementos, digamos

$$p = (p_1, \dots, p_n) \quad \text{con } p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n,$$

podemos extender p a un elemento $\tilde{p} \in P$ agregándole una cola de ceros

$$\tilde{p} = (p_1, \dots, p_n, 0, 0, \dots).$$

De manera que la aplicación $p \mapsto \tilde{p}$ es un encaje de órdenes, por lo que basta mostrar que P , bajo este orden, está bien ordenado.

Sea $A \subseteq P$ un conjunto distinto del vacío. Definimos recursivamente

$$A_0 = A, \quad B_1 = \{a_1 : a \in A_0\} \subseteq \mathbb{N}, \quad \alpha_1 = \text{mín } B_1$$

Notemos que $A_1 = \{a \in A_0 : a_1 = \alpha_1\} \neq \emptyset$. Supongamos que para $j \leq n$ existen B_j , α_j y A_j , tales que $A_j \subseteq A_{j-1} \subseteq A$, y B_j , son conjuntos no vacíos, $\alpha_j = \text{mín } B_j$. De manera que existe un elemento $a \in A_n$ tal que $a_j = \alpha_j$, para cada $j \leq n$. Definimos

$$A_{n+1} = \{a \in A_n : a_n = \alpha_n\}, \quad B_{n+1} = \{a_{n+1} : a \in A_{n+1}\} \subseteq \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+1} = \text{mín } B_{n+1}$$

La sucesión $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in P$. Sea $a \in A$. Supongamos $a \neq \alpha$. Sea N el primer natural tal que $a_N \neq \alpha_N$. Entonces, para $j < N$, $a_j = \alpha_j$. En particular, $a \in A_N$ y $a_N \in B_N$. Como $\alpha_N = \text{mín } B_N$, tenemos que $\alpha_N < a_N$. Por lo tanto $\alpha < a$. Luego, α es el mínimo de A , por lo que P está bien ordenado, y por lo tanto también lo está P_M . \square

Definición 2.4.3. Una *descomposición o posición delgada* es una descomposición que alcanza el ancho mínimo. Definimos el ancho de una 3-variedad M compacta como el ancho de una descomposición delgada. Al ancho de M lo denotamos por $w(M)$.

Notemos que si Σ es una superficie de Heegaard para M , entonces $w(M) \leq \{c(S)\}$, donde $c(S)$ es la complejidad de S . Luego, el género de Heegaard de M es una cota superior para el ancho de M . En particular, $w(M)$ tiene longitud 1 si y sólo si $w(M) = (c(\Sigma))$, donde Σ es una superficie de Heegaard de género mínimo, por lo que M tiene ancho (0) si y sólo si tiene una descomposición de Heegaard de género 0. Por lo tanto, la única 3-variedad de ancho (0) es S^3 . El siguiente caso a considerar es cuando M tiene género de Heegaard 1. Equivalentemente, cuando la superficie de Heegaard de género mínimo tiene complejidad 1. En este caso, sabemos que M es difeomorfa a un espacio lente $L(p, q)$ o al producto $S^1 \times S^2$.

Lema 2.4.4. *Sea M una 3-variedad compacta. Entonces $w(M) \leq (1)$ si y sólo si M es difeomorfa a S^3 , a un espacio lente $L(p, q)$, o a $S^1 \times S^2$.*

Ejemplo 2.4.5. Consideremos dos espacios lente $M_i = L(p_i, q_i)$, con $i = 1, 2$. Sabemos que los espacios lente tienen descomposición de Heegaard de género 1

$$M_i = H_i \cup_{T_i} H'_i.$$

Tomando la descomposición de Heegaard para la suma conexas

$$M_1 \# M_2 = (H_1 \# H_2) \cup_{T_1 \# T_2} (H'_1 \# H'_2).$$

Esta descomposición tiene ancho (3). Tenemos también la descomposición resultado de colocar primero la descomposición de M_1 , seguida de la de M_2 (ver descripción 2.3). Esta descomposición tiene ancho (1, 1). Por el lema 2.4.4, podemos concluir que el ancho de M es $w(M) = (1, 1)$.

Veamos ahora algunas características de las descomposiciones delgadas. En lo que sigue, sea M una 3-variedad compacta y conexa, con una descomposición de su frontera $\partial M = \partial_- M \cup \partial_+ M$, y descomposición en asas relativa a $\partial_- M$

$$\mathcal{H} = b_0 \cup N_1 \cup T_1 \cup \cdots \cup N_k \cup T_k \cup b_3.$$

Lema 2.4.6. a) *Si alguna superficie delgada F_i tiene como componente conexa una esfera inessential, entonces la descomposición no es delgada.*

b) *En una descomposición delgada, cada componente conexa de las superficie delgada F_{i-1} o persiste en la siguiente superficie F_i sin alterarse, o tiene asas de ambos T_i y N_i .*

Demostración. a) Sea $S \subseteq F_i$ una esfera componente conexa de F_i . Supongamos que S es inessential. Entonces S es la frontera de una 3 bola $B \subseteq M$. Esta 3 bola está compuesta por 1 y 2-asas. Sean h_1^1, \dots, h_k^1 las 1-asas y h_1^2, \dots, h_k^2 las 2-asas que componen a B . Como esta es una descomposición en asas de B , debe haber tantas 1-asas como 2-asas. Modificamos la descomposición \mathcal{H} , quitando las 1 y 2-asas que componen a B , y reemplazándolas por B . Sea entonces

$$\begin{aligned} \tilde{N}_j &= N_j - h_1^1 \cup \cdots \cup h_k^1, & \tilde{T}_j &= T_j - h_1^2 \cup \cdots \cup h_k^2, \\ \left\{ \begin{array}{l} \tilde{b}_0 = b_0 \cup B, \quad \tilde{b}_3 = b_3 \\ \tilde{b}_3 = b_3 \cup B, \quad \tilde{b}_0 = b_0 \end{array} \right. & \text{si } B \text{ está contenida en niveles inferiores a } F_i \\ & \text{si } B \text{ está contenida en niveles superiores a } F_i. \end{aligned}$$

Notemos que si ninguna de las asas que componen B está contenida en N_j , entonces $\tilde{N}_j = N_j$. Lo anterior disminuye el género de las superficies gruesas en donde alguna asa h_j^l aparezca, por lo que la nueva descomposición

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{b}_0 \cup \tilde{N}_1 \cup \tilde{T}_1 \cup \cdots \cup \tilde{N}_k \cup \tilde{T}_k \cup \tilde{b}_3,$$

es más delgada que la original. En particular, \mathcal{H} no es delgada.

b) Supongamos que existe una componente conexa $f \subseteq F_{i-1}$ a la cual no se le adhieren 1-asas de N_i , pero sí 2-asas de T_i . Es decir, C_i tiene una componente $f \times I$.

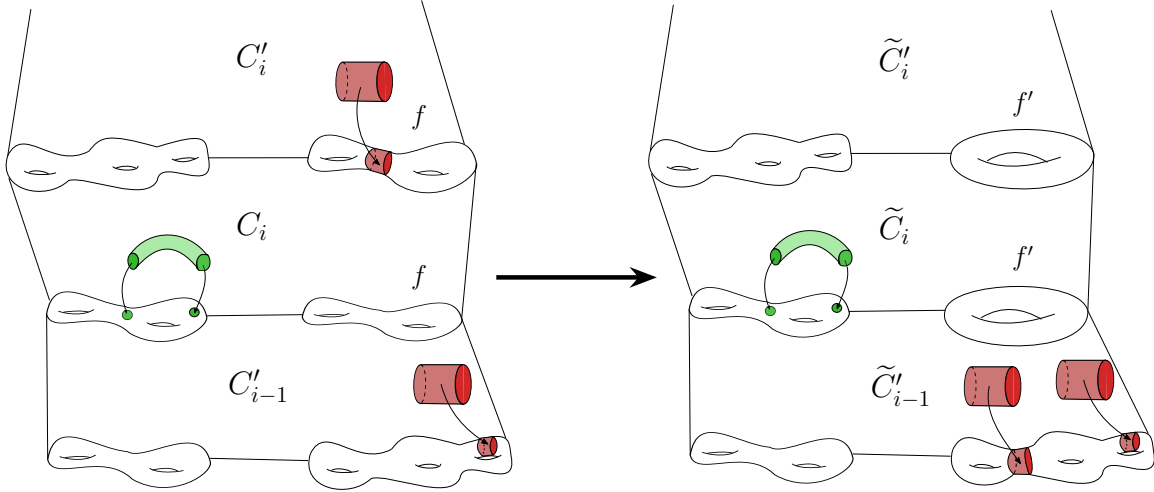


Figura 2.9: Movemos las 2-asas que se pegan sobre f a un nivel anterior.

Sea $h \subseteq T_i$ una 2-asa que se pega sobre $f \times \{1\}$. El mapeo de pegado está determinado por una curva esencial $\alpha \subseteq f \times \{1\}$. Tenemos una copia de α en $f \times \{0\} \subseteq F_{i-1}$. Sea $f' \subseteq S_i$ la componente de S_i tal que f es el resultado de pegar 2- asas de T_{i-1} en f' . Como el efecto en f' de pegar 2-asas es el de hacer compresión, existe una copia de α en f' , digamos α' . Podemos pegar h en α' . De esta manera recorremos la 2-asa h de la colección T_i a la colección T_{i-1} (ver figura 2.9). Recorriendo todas las 2-asas de T_i que se pegan en la componente f , obtenemos una nueva descomposición $\tilde{\mathcal{H}}$ con j -ésimo nivel

$$\tilde{N}_j = N_j, \quad \tilde{T}_j = \begin{cases} T_j & \text{si } j \neq i, j \neq i-1 \\ T_i - \{2\text{-asas que se adhieren a } f\} \\ T_{i-1} \cup \{2\text{-asas que se adhieren a } f\}. \end{cases}$$

Las únicas superficies de la descomposición que cambian son F_{i-1} y S_i . En particular, como las 2-asas disminuyen el ancho, y como la única superficie gruesa que cambia es la i -ésima. Tenemos

$$c(\tilde{S}_j) = c(S_j) \quad \forall j \neq i, \quad c(\tilde{S}_i) < c(S_i).$$

Por lo tanto $w(\tilde{\mathcal{H}}) < w(\mathcal{H})$.

De manera similar, si $f \subseteq F_{i-1}$ es tal que se le adhieren 1-asas pero no 2-asas, entonces por un argumento dual, podemos encontrar una descomposición en asas más delgada. Con esto

podemos concluir que $f \subseteq F_{i-1}$ o se mantiene intacta hasta F_i , o se le adhieren tanto 1-asas como 2-asas. \square

Lema 2.4.7. a) Si algún $W_i = C_i \cup_{S_i} C'_i$ es débilmente reducible, entonces la descomposición no es delgada.

b) En una descomposición delgada, las 1-asas de N_i y las 2-asas de T_i se pegan en la misma componente conexa de F_{i-1} .

Demostración. a) Supongamos que existe un índice i tal que W_i es débilmente reducible. Entonces existen discos $D_N \subseteq C_i$, $D_T \subseteq C'_i$ tales que $\emptyset = \partial D_N \cap \partial D_T \subseteq S_i$. Para reducir el ancho, hacemos compresión en D_N y en D_T sobre S_i . Al hacer compresión, estamos removiendo una vecindad tubular $\eta(D_N)$ de N_i , y una vecindad tubular $\eta(D_T)$ de T_i . Considerando $\eta(D_N)$ y $\eta(D_T)$ respectivamente como una 1-asa y una 2-asa, obtenemos los nuevos cuerpos de compresión

$$C_i^1 = C_i - \eta(D_N), \quad C_i^{1'} = (S_i \times I) \cup \eta(D_T), \quad C_i^2 = (\partial_+ C_i^{1'} \times I) \cup \eta(D_N), \quad C_i^{2'} = I C_i - \eta(D_T).$$

Sustituimos el i -ésimo nivel $C_i \cup_{S_i} C'_i$ por dos niveles $C_i^1 \cup C_i^{1'}$ y $C_i^2 \cup C_i^{2'}$ (ver figura 2.10).

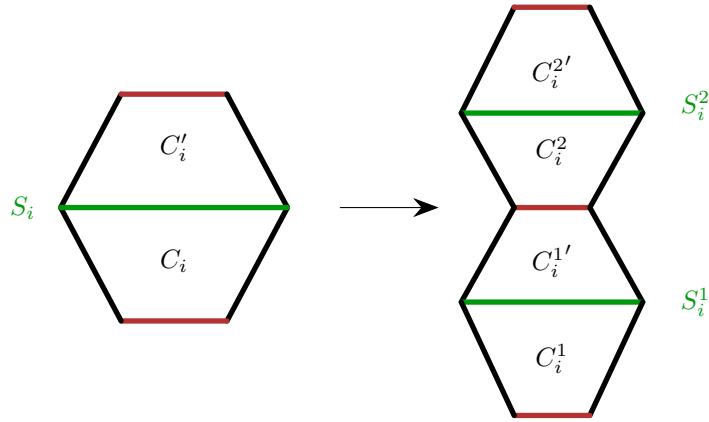


Figura 2.10: Sustituimos el i -ésimo nivel por dos niveles con superficies más delgadas.

La superficie S_i^1 es el resultado de hacer compresión sobre D_T en S_i . La superficie S_i^2 es el resultado de hacer compresión sobre D_N en S_i . Por lo que las complejidades de las nuevas superficies gruesas satisfacen las desigualdades

$$c(S_{i_0}) > c(S_{i_0}^1), \quad c(S_{i_0}) > c(S_{i_0}^2).$$

Por lo tanto, el ancho de la descomposición resultado de sustituir $C_i \cup C'_i$ por $C_i^1 \cup C_i^{1'} \cup C_i^2 \cup C_i^{2'}$ es menor.

b) Si las hubiera una 1-asa de N_i y una 2-asa de T_i que se pegaran en componentes conexas distintas, entonces W_i sería débilmente reducible. Por la parte a), esto no sucede en una descomposición delgada. \square

Por los dos lemas anteriores, pueden ocurrir dos casos. Existe exactamente una componente conexa de F_i en la cual actúan las 1-astas de N_i y las 2-astas de T_i , o una 1-asa de N_i conecta dos componentes de F_i , y luego se pegan 2-astas. A estas componentes se les llama las *componentes activas* de F_i . De manera que F_i tiene una o dos componentes activas, según sea el caso.

Observación. Por el teorema 2.3.7, si $F_i \cup F_{i+1}$ es compresible en W_i , entonces W_i es débilmente reducible, por lo que en una descomposición delgada cada F_i es incompresible en W_i y en W_{i+1} . El siguiente lema nos dice que cada F_i debe ser también incompresible en toda M .

Definición 2.4.8. Sea S una superficie y $\alpha \subseteq S$ una colección de curvas simples cerradas en S . Decimos que una componente $\alpha_0 \subseteq \alpha$ es una *curva de más adentro* de α si α_0 acota un disco el cual no contiene curvas de la colección.

En un disco D toda colección finita de curvas simples cerradas $\alpha \subseteq D$ tiene siempre al menos una curva de más adentro. Esta puede no ser única.

Lema 2.4.9. *En una descomposición delgada, cada F_i es incompresible en M .*

Demostración. Sea $D \subseteq M$ un disco de compresión no trivial para F_{i_0} en M . Sea $F = \bigcup F_j$. Podemos suponer que D interseca transversalmente a F , de manera que $\text{int}(D) \cap F$ consiste de una cantidad finita de curvas simples cerradas. Tomamos una curva de más adentro en D para esta colección, la cual acota un disco en D que no contiene ningún otro círculo de la intersección $\text{int}(D) \cap F$. Sea D' este disco. Entonces D' interseca una única superficie delgada F_{i_1} , por lo que $D' \subseteq W_{i_1}$ o $D' \subseteq W_{i_1+1}$. En cualquier caso, como F_{i_1} es incompresible tanto en W_{i_1} como en W_{i_1+1} , existe un disco $D'' \subseteq F_{i_1}$ tal que $\partial D' = \partial D''$. Sea $D_1 = (D - D') \cup D''$, el disco resultado de intercambiar D' por D'' en D . El disco D_1 sigue siendo un disco de compresión no trivial para F_{i_0} , pero $\text{int}(D_1) \cap F$ tiene menos componentes que $\text{int}(D) \cap F$. Repitiendo este proceso, obtenemos un disco de compresión no trivial para F_{i_0} , digamos \tilde{D} , el cual satisface $\text{int}(\tilde{D}) \cap F = \emptyset$. En particular, \tilde{D} está contenido en W_{i_0} o está contenido en W_{i_0+1} . El primer caso implica W_i débilmente reducible, el segundo caso implica W_{i+1} débilmente reducible. En cualquier caso, tenemos que la descomposición no es delgada. \square

Definición 2.4.10. Una superficie propiamente encajada $S \subseteq M$ separante, con M orientable, es *fuertemente compresible* si existe un par de discos compresores para S que se encuentren en

lados opuestos de S con intersección vacía. Si no es fuertemente compresible, decimos que es *débilmente incompresible*.

Observación. Sea S una superficie encajada en W que induce una descomposición de Heegaard $W = C \cup_S C'$. Entonces S es débilmente incompresible si y sólo si W es fuertemente irreducible.

En particular, en una descomposición delgada, cada superficie gruesa S_i es débilmente incompresible en W_i . El siguiente lema nos dice que, de hecho, cada S_i es débilmente incompresible en toda M .

Lema 2.4.11. *En una descomposición delgada, toda superficie S_i es débilmente incompresible en M .*

Demostración. Sabemos que $F = \bigcup F_j$ es incompresible. Sean $S = \bigcup S_j$, y $D \subseteq M$ un disco de compresión para S_i . Si $D \cap F \neq \emptyset$, entonces, tomando el disco de más adentro, tendríamos un disco de compresión no trivial para algún F_j , contradiciendo lema 2.4.9. Por lo tanto, todo disco de compresión para S_i está contenido en W_i . Así, si S_i es fuertemente compresible en M , también lo es en W_i , y por lo tanto W_i es débilmente reducible. Por lema 2.4.7, terminamos. \square

Lema 2.4.12. *Supongamos que M es irreducible y no es un espacio lente. Si alguna superficie gruesa S_i tiene como componente conexa un toro, entonces la descomposición no es delgada.*

En particular 3 no aparece en $w(M)$.

Demostración. Supongamos que la descomposición es delgada. Si la componente $C \subseteq S_i$ es un toro. Como M no es un espacio lente, no puede darse el caso que M tenga sólo un nivel. Es decir, $W_1 \neq M$. Supongamos que C es la componente activa de S_i . Sea $W \subseteq W_i$ la componente conexa de W_i que contiene a C . Entonces ∂W es una colección no vacía de esferas. Esto ya que las 1-asas aumentan el género, mientras que las 2-asas disminuyen el género, lo que fuerza a ∂W a contener sólo esferas. Como la descomposición es delgada, por lema 2.4.6, las esferas de ∂W son esenciales, contradiciendo la hipótesis de que M es irreducible. Por lo tanto, no puede existir una componente C difeomorfa al toro. \square

Teorema 2.4.13. *Sean M una 3-variedad compacta orientable y*

$$\mathcal{H} = b_0 \cup N_1 \cup T_1 \cup \cdots \cup T_N \cup b_3$$

una descomposición de Heegaard generalizada para M . Si \mathcal{H} es una descomposición delgada, entonces \mathcal{H} satisface lo siguiente

- 1) *Las superficies gruesas son débilmente incompresibles.*
- 2) *Las superficies delgadas son incompresibles.*

Los resultados anteriores motivan la siguiente definición.

Definición 2.4.14. Si \mathcal{H} es una descomposición generalizada de Heegaard para M , decimos que esta es una *descomposición generalizada fuertemente irreducible* si las superficies gruesas son débilmente incompresibles y las superficies delgadas son incompresibles.

En particular, toda descomposición delgada es fuertemente irreducible.

Corolario 2.4.15. *Sea g el género de Heegaard de la 3-variedad compacta e irreducible M . Si M no contiene superficies incompresibles de género menor a g . Entonces una descomposición de Heegaard que alcance el género mínimo es delgada. Por lo tanto $w(M) = (2g - 1)$.*

Demostración. Por definición, si el ancho de $w(M)$ tiene longitud 1, es decir, si consta de un solo elemento, entonces la descomposición de Heegaard que alcanza el género mínimo es delgada. Sea \mathcal{H} una DHG tal que $w(\mathcal{H})$ contenga, al menos, dos elementos. Entonces F_1 tiene una componente que es incompresible, digamos f . Como el género de f es mayor o igual a g y las superficies gruesas S_1 y S_2 son más complejas que F_1 , las complejidades respectivas son mayores

$$C(S_1) \geq 2g - 1, \quad C(S_2) \geq 2g - 1.$$

Por lo tanto el ancho de esta descomposición es mayor a $(2g - 1)$. Por lo tanto el ancho $(2g - 1)$ es mínimo. \square

En particular, las variedades irreducibles no-Haken (ver definición 2.1.16) satisfacen las hipótesis del corolario anterior.

2.5. Nudos y Cirugía en 3-variedades.

En esta sección veremos una manera de modificar 3-variedades compactas conocida como cirugía de Dehn. Para esto, necesitamos antes estudiar un poco sobre nudos. Veremos también algunos resultados sobre nudos y cubos con asas 3-dimensionales que nos serán de utilidad para estudiar 4-variedades. Para finalizar, enunciaremos el Teorema de **Lickorish-Wallace**, el cual afirma que toda 3-variedad cerrada orientable se puede construir realizando cirugía.

El efecto en la frontera de pegar 2-asas 3-dimensionales es el de hacer compresión. De manera análoga, veremos más adelante que el efecto en la frontera de pegar 2-asas 4-dimensionales es el de hacer cirugía de Dehn. En este sentido, hacer cirugía sobre un nudo en una 3-variedad es el análogo a hacer compresión sobre una superficie.

Definición 2.5.1. Sea M una 3-variedad. Un *enlace* es un encaje $L : \sqcup_{i=1}^n S^1 \rightarrow M$. Si $n = 1$, decimos que es un *nudo*. Identificaremos al enlace L con su imagen en M .

Nos interesan los enlaces módulo isotopía del espacio. Decimos que dos enlaces L, L' son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $h(L) = L'$. En el caso de enlaces con más de una componente, asignamos un orden fijo a los enlaces. Pedimos al homeomorfismo h que respete este orden.

Llamamos *nudo trivial* o *no nudo* a cualquier nudo equivalente a $S^1 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Definición 2.5.2. Sea M una 3-variedad cerrada con $L \subseteq M$ un enlace. Definimos el *número de túneles* de L en M , $t_M(L)$, como el mínimo número de arcos encajados

$$t = \bigcup_i t_i \subseteq M, \quad \text{con } t \cap L = \partial t,$$

tal que $\overline{M - \eta(t \cup L)}$ es un cubo con asas. A la colección de arcos t se le llama *sistema de túneles* para L .

En el caso $L = \emptyset$, definimos $t_M(\emptyset) = g(M) - 1$.

Notemos que si t es un sistema de túneles para L , entonces $t \cup L$ inducen una descomposición de Heegaard para M . La cual está dada por

$$M = \eta(t \cup L) \cup \overline{M - \eta(t \cup L)}.$$

Con superficie de Heegaard $\partial\eta(t \cup L)$. En esta descomposición L está contenido en el alma del cubo con asas $\eta(t \cup L)$.

Observación. Un cuerpo de compresión C se retrae por deformación a su frontera interna unión una colección de arcos encajados, con frontera la frontera interior $\partial_- C$.

Definición 2.5.3. Sea $L \subseteq M$ un enlace contenido en una 3-variedad cerrada. Se define $g_L(M)$ como el género mínimo de una descomposición de Heegaard para M tal que L esté contenido en el alma de alguno de los cubos con asas.

En particular, si $L = \emptyset$, entonces $g_L(M) = g(M)$ es el género de Heegaard de M . Tenemos la siguiente relación entre el número de túneles de L y de $g_L(M)$

Proposición 2.5.4. *Sea L un enlace contenido en la 3-variedad cerrada M . Entonces*

$$t_M(L) = g_L(M) - 1.$$

En particular

$$t_M(\emptyset) = g(M) - 1.$$

Lema 2.5.5. Sean L_1, L_2 enlaces en 3-variedades cerradas M_1, M_2 , respectivamente. Sean

$$\widetilde{M} = M_1 \# M_2, \quad \widetilde{L} = L_1 \cup L_2.$$

Entonces

$$t_{\widetilde{M}}(\widetilde{L}) = t_{M_1}(L_1) + t_{M_2}(L_2) + 1. \quad (2.1)$$

En particular, si $L_1 \neq \emptyset$ y $L_2 = \emptyset$, entonces

$$t_{\widetilde{M}}(\widetilde{L}) = t_{M_1}(L_1) + g(M_2) = t_{M_1}(L_1) + t_{M_2}(\emptyset) + 1.$$

Demostración. Supongamos que $L_1 \neq \emptyset \neq L_2$. Veamos primero que el lado derecho de ecuación (2.1) es mayor o igual al lado izquierdo. Si t_i es un sistema de túneles para L_i , entonces existe un arco t' que va de L_1 a L_2 , entonces $t_1 \cup t_2 \cup t'$ es un sistema de túneles para $L_1 \cup L_2$.

Mostremos ahora la otra desigualdad. Sea $t \subseteq \widetilde{M}$ un sistema de túneles para \widetilde{L} que alcanza el mínimo. Es decir, t tiene $t_{\widetilde{M}}(\widetilde{L})$ componentes. Sean

$$H = \eta(\widetilde{L} \cup t), \quad H' = \widetilde{M} - \text{int}(H), \quad \Sigma = H \cap H'.$$

La descomposición de Heegaard de \widetilde{M} inducida por \widetilde{L} . Por definición, la superficie Σ tiene género $t_{\widetilde{M}}(\widetilde{L}) + 1 > 0$.

Consideremos la variedad con frontera

$$\widetilde{M} - \text{int}(\eta(\widetilde{L})) = \left(H - \text{int}(\eta(\widetilde{L})) \right) \cup_{\Sigma} H'.$$

Con H' un cubo con asas y $H - \text{int}(\eta(\widetilde{L}))$ un cuerpo de compresión cuya frontera es la colección ajena de toros $\partial\eta(\widetilde{L})$. Como $\widetilde{M} = M_1 \# M_2$, \widetilde{M} contiene una esfera esencial S . Por el **Lema de Haken**, bajo una isotopía de S , podemos suponer que $S \cap \Sigma$ es una curva simple cerrada, y que S separa a \widetilde{M} en $\text{punc}(M_1)$ y $\text{punc}(M_2)$, Con $L_i \subseteq \text{punc}(M_i)$, donde $\text{punc}(M_i)$ es la variedad agujerada $M_i - D^2$. Tenemos entonces que S separa la descomposición de Heegaard en descomposiciones respectivas

$$M_1 = H_1 \cup_{\Sigma_1} H'_1, \quad M_2 = H_2 \cup_{\Sigma_2} H'_2.$$

De manera que $H_i - \text{int}(\eta(L_i))$ es un cuerpo de compresión. Luego, cada H_i es una vecindad tubular para L_i unión cierto número de arcos, digamos que son n_i arcos. Entonces $n_i \geq t_{M_i}(L_i)$. Por otro lado, como $n_i + 1 = g(\Sigma_i)$, y $\Sigma = \Sigma_1 \# \Sigma_2$, entonces

$$t_{\widetilde{M}}(\widetilde{L}) + 1 = g(\Sigma) = g(\Sigma_1) + g(\Sigma_2) = n_1 + n_2 + 2 \geq t_{M_1}(L_1) + t_{M_2}(L_2) + 2.$$

Por lo tanto $t_{\widetilde{M}}(\widetilde{L}) \geq t_{M_1}(L_1) + t_{M_2}(L_2) + 1$, que era la desigualdad faltante. \square

Notemos que la vecindad tubular de un nudo K es difeomorfa al toro sólido.

Definición 2.5.6. Sea M una 3-variedad. Dados

- 1) Un enlace $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k \subseteq \text{int}(M)$.
- 2) Vecindades tubulares cerradas ajenas a pares $V_i = \eta(L_i)$.
- 3) Curvas simples cerradas $J_i \subseteq \partial V_i$.

Construimos la variedad

$$M[L] = \overline{(M - \eta(L))} \cup_h \left(\bigcup_{i=1}^k V_i \right)$$

donde h es la unión de los homeomorfismos $h_i : \partial V_i \rightarrow \partial V_i$ que manda el meridiano en la curva J_i , $h_i(\mu_i) = J_i$.

Dado un enlace L el homeomorfismo h está determinado por la colección de curvas $J = \cup J_i$, y un homeomorfismo h determina una colección de curvas J en $\partial\eta(L)$. Llamaremos *marco* de L a una colección de curvas J o al homeomorfismo asociado h .

La 3-variedad construida de esta forma se dice que es el resultado de realizar *cirugía de Dehn* en M a lo largo del enlace L con instrucciones de cirugía J , donde $J = \cup J_i$.

De particular importancia son los enlaces en \mathbb{R}^3 y S^3 . Tomando $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{*\}$, el espacio con un punto al infinito, todo enlace en \mathbb{R}^3 lo podemos pensar en S^3 . Sea $L \subseteq S^3$ un enlace. En este caso podemos expresar las instrucciones de la cirugía asignando un número racional, o infinito, $r_i \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, a cada componente L_i del enlace L . Para esto, necesitamos de algunas definiciones.

Definición 2.5.7. Sean K_1, K_2 nudos orientados en S^3 . Dado un diagrama de $K_1 \cup K_2$, a cada punto donde K_1 pase por arriba de K_2 , contamos como en la figura 2.11

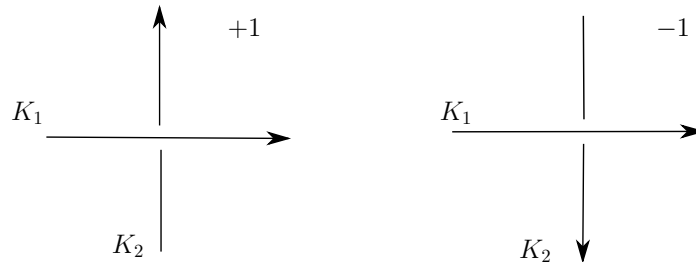


Figura 2.11: Contar intersecciones entre los nudos K_1 y K_2 .

La suma sobre todos los cruces donde K_1 pasa por arriba de K_2 es el *número de enlace* de K_1 con K_2 , denotado por $lk(K_1, K_2)$.

Se puede demostrar que el número de enlace no depende del diagrama. Además, satisface las siguientes igualdades

$$lk(K_1, K_2) = lk(K_2, K_1), \quad lk(-K_1, K_2) = -lk(K_1, K_2).$$

donde $-K_1$ es el resultado de invertir la orientación de K_1 .

Consideremos el toro sólido $S^1 \times D^2$, al cual denominaremos como *toro sólido estándar*. Este es un cubo con una 1-asa, con meridiano $m = \{1\} \times S^1$. El meridiano se caracteriza por la única curva que bordea un disco de compresión no trivial en el toro sólido. Una *longitud* es una curva en $S^1 \times S^1$ que interseca en un solo punto al meridiano m . Un meridiano junto con una longitud nos dan un marco de referencia para describir cualquier curva en $S^1 \times S^1$. Existen muchas longitudes, las cuales se pueden diferenciar por el número de enlace que tienen respecto al alma del toro sólido $K = S^1 \times \{0\}$. De manera que, si consideramos orientación, hay tantas longitudes como enteros. Sin contar orientación, hay tantas longitudes como números naturales.

La curva $\ell = S^1 \times \{1\}$, interseca al meridiano m en sólo un punto, y su número de enlace con respecto a K es 0. A ℓ se le llama la *longitud preferente*. Sea $\alpha \subseteq S^1 \times S^1$ es una curva simple cerrada. Módulo homotopía, la curva α está determinada por cuantas vueltas orientadas da al primer factor, y cuantas vueltas orientadas da en el segundo factor. El meridiano m y la longitud ℓ nos dan un marco de referencia para describir la curva α . Escribimos $\alpha = pm + q\ell$ para denotar a la curva en el toro que da p vueltas en la longitud y q vueltas en el meridiano.

Esta descripción la podemos extender a cualquier toro sólido encajado en S^3 .

Definición 2.5.8. Sea K un nudo en S^3 . La vecindad tubular de K es un toro sólido encajado en S^3 . Sea μ un meridiano de $\eta(K)$. Definimos la *longitud preferente de $\eta(K)$* como la curva $\lambda \subseteq \partial\eta(K)$ que satisface lo siguiente

- λ interseca μ en un solo punto.
- $lk(\lambda, K) = 0$.

De manera análoga al caso del toro sólido estándar, una curva $\alpha \subseteq \partial\eta(K)$ la podemos escribir como $\alpha = p\mu + q\lambda$, donde p es el número de vueltas que da α respecto a μ y q el número de vueltas que da respecto a λ . En particular, $p = |\alpha \cap \mu|$ y $q = |\alpha \cap \lambda|$. A la pareja μ, λ se le llama el *marco preferente* para K .

Dados M una 3-variedad y L un enlace en M el *exterior de L* es $E(L, M) = \overline{M - L} \cong \overline{M - \eta(L)}$. Cuando $M = S^3$, escribiremos simplemente $E(L)$.

Observación. En términos de homología. Sea $X = E(\eta(K), S^3)$. Se puede demostrar que $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Un meridiano μ de $\eta(K)$ es un generador de $H_1(X, \mathbb{Z})$ que es trivial en $H_1(\eta(K), \mathbb{Z})$. La longitud preferente λ es un generador de $H_1(\eta(K), \mathbb{Z})$ que es trivial en $H_1(X, \mathbb{Z})$. El conjunto $\{\mu, \lambda\}$ genera a $H_1(\partial\eta(K), \mathbb{Z})$.

El marco preferente no siempre es el que a uno se le puede ocurrir a primera vista. En la figura 2.12, orientamos K y λ de manera que se recorren en paralelo. En este caso $lk(\lambda, K) = 4$. Por lo que λ no es la longitud preferente. A dicha λ se le conoce como el marco inducido por el pizarrón ("blackboard framing" en inglés). Uno puede aplicar movidas de Reidemeister tipo 1 para alterar el número de enlace del marco de pizarrón.

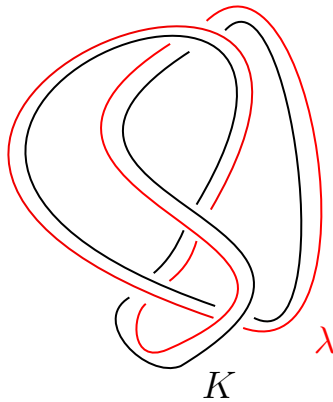


Figura 2.12: El nudo K con longitud λ tales que $lk(\lambda, K) = 4$.

Sea K es un nudo en S^3 con instrucción de cirugía J . Sean μ, λ el marco preferente para K . Escribimos $J = p\lambda + q\mu$, donde p es el número de vueltas que da J respecto a λ y q es el número de vueltas que da respecto a μ . Existe una ambigüedad de signo \pm , ya que podemos escribir la instrucción de cirugía como $J = -p\lambda - q\mu$. Esta ambigüedad desaparece si tomamos la fracción $r = p/q$. Al racional r se le llama el *coeficiente de cirugía*. Si $q = 0$, entonces $p = \pm 1$ y escribimos $r = \infty$.

La orientación del nudo K es irrelevante para la definición de r . Ya que, si cambiamos su orientación, tanto p como q cambian de signo. Sin embargo, la orientación de S^3 sí cambia el signo de r . Así, supondremos S^3 siempre orientado. Tomaremos la orientación usual de \mathbb{R}^3 , llamada de la mano derecha.

Dado un diagrama de un nudo K junto a un nudo paralelo J , tenemos una forma de sumar o restar vueltas a este. Utilizando la regla de la mano derecha, podemos hacer el siguiente movimiento figura 2.13 en una sección del nudo para modificar el coeficiente de cirugía.

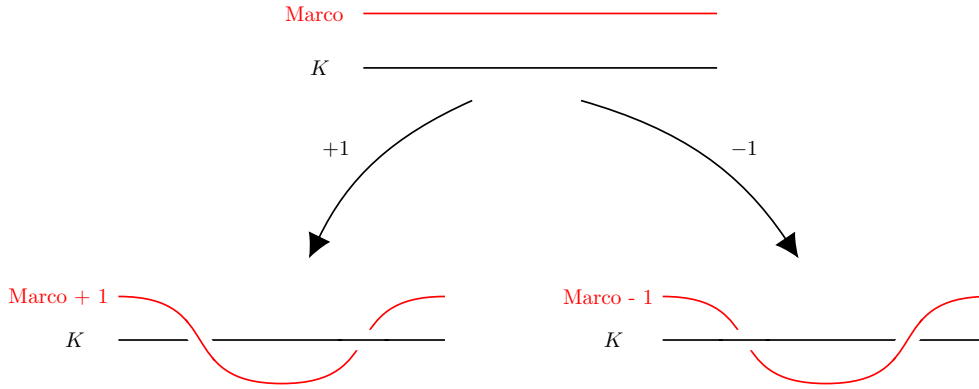


Figura 2.13: Suma y resta de vueltas

Por ejemplo, podemos modificar el siguiente marco de la figura 2.12 dando cuatro vueltas en la dirección -1 al marco obtenemos la longitud preferente ℓ en la figura 2.14.

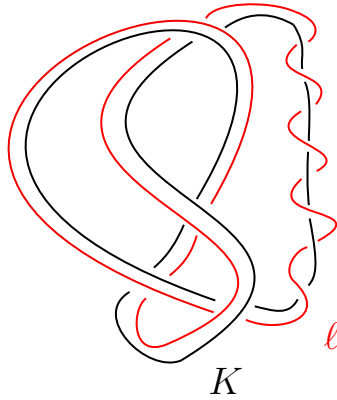


Figura 2.14: La longitud preferente del nudo ocho.

Notemos que si $K \subseteq S^3$ es el nudo trivial, entonces $E(K) \cong S^1 \times D^2$. En cuyo caso, el meridiano de $\eta(K)$ es la longitud de $E(K)$, y la longitud de $\eta(K)$ es el meridiano de $E(K)$. Esto se puede apreciar mejor en un dibujo. En la figura 2.15 tenemos el meridiano m y la longitud ℓ de $\eta(K)$. Considerando $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, el eje z es el núcleo de $E(K)$. Al ser este paralelo a la meridiano m , es claro que m es una longitud de $E(K)$.

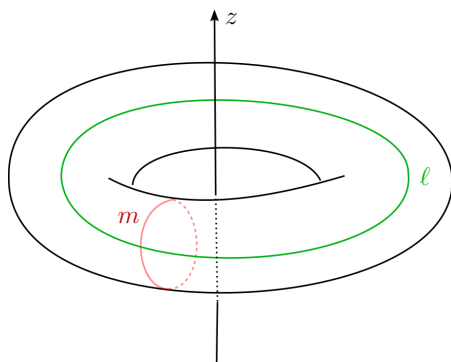


Figura 2.15: Toro sólido en S^3 con meridiano m y longitud ℓ .

Ejemplo 2.5.9. Un espacio lente $L(p, q)$ es el resultado de pegar dos toros sólidos en su frontera bajo un homeomorfismo $f : T \rightarrow T$, donde T es la superficie del toro sólido, que mande el meridiano μ a una curva $\alpha = p\mu + q\lambda$, donde μ, λ es el marco preferente para el toro sólido $S^1 \times D^2$.

Sea $K \subseteq S^3$ el nudo trivial. Sea $J \subseteq \partial\eta(K)$ una curva tal que $J = pm + q\ell$, donde m es el meridiano y ℓ la longitud preferente de $\eta(K)$. El resultado de hacer cirugía de Dehn en S^3 a lo largo de K con instrucción de cirugía J es el espacio lente $L(p, q)$.

De manera que el espacio lente $L(p, q)$ queda descrito por el nudo trivial con coeficiente de cirugía p/q .

Terminamos enunciando el Teorema de Lickorish-Wallace.

Teorema 2.5.10 (Lickorish-Wallace). *Toda 3-variedad cerrada, orientable, conexa se obtiene como resultado de hacer cirugía de Dehn en S^3 a lo largo de un enlace L . De hecho, siempre se puede encontrar una presentación de la cirugía de manera que todos los coeficientes sean ± 1 , y todos las componentes del enlace L sean triviales.*

Wallace demuestra el teorema en 1960. Lickorish da una demostración independiente en 1962. La prueba de Lickorish se encuentra en [15]. Una versión simplificada se puede encontrar en la sección 3.I del libro de Rolfsen [22].

2.6. Cálculo de Kirby

Por el Teorema de **Lickorish-Wallace**, toda 3-variedad orientada se describe como un enlace enmarcado en S^3 . Sin embargo, distintos enlaces pueden generar la misma tres variedad. Por ejemplo, el espacio lente $L(p, q)$ tiene las siguientes dos representaciones.

Ejemplo 2.6.1 (Espacios Lente). Del ejemplo 2.5.9, tenemos que el espacio lente $L(p, q)$ se describe por el nudo trivial con coeficiente de cirugía p/q .

El siguiente diagrama de un enlace con N componentes corresponde al espacio lente $L(p, q)$, donde $[n_1, n_2, \dots, n_N]$ es la fracción continua de p/q .

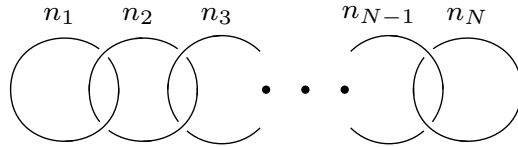


Figura 2.16: Diagrama de un Espacio Lente

Surge entonces la pregunta ¿Cuándo dos enlaces generan la misma 3 variedad? Para responder esto es que Kirby define dos operaciones o movimientos entre enlaces enmarcados. Kirby demuestra en [11] que si dos enlaces producen la misma 3-variedad entonces, se puede pasar de uno a otro utilizando estos movimientos.

Los movimientos definidos por Kirby se conocen como el Cálculo de Kirby. Estos están definidos para cuando los coeficientes de cirugía son números enteros. En este caso la cirugía se conoce como *cirugía entera*. Sea $K \subseteq S^3$ un nudo con instrucción de cirugía J . Si μ, λ es el marco preferente de $\eta(K)$. Por convención, en cirugía entera el coeficiente de J respecto al meridiano μ es siempre 1. Si el coeficiente de cirugía $z \in \mathbb{Z}$, entonces $J = z\mu + \lambda$. Así, J sólo da vueltas en la dirección μ . En la figura 2.12 el coeficiente de cirugía correspondiente es 4. Por lo tanto es cirugía entera. En otras palabras, en una cirugía entera, la instrucción de cirugía J consta de una longitud y varios meridianos.

El Teorema de **Lickorish-Wallace** implica en particular que toda 3-variedad cerrada orientada se obtiene de hacer cirugía entera. En la sección 9.H del libro de Rolfsen [22] se puede encontrar un método para pasar de un nudo con coeficiente de cirugía racional a uno equivalente con coeficiente entero. Equivalente en el sentido de que hacer cirugía en ellos produce la misma 3-variedad.

Veamos ahora las operaciones que definen al cálculo de Kirby.

Dados K_0, K_1 nudos en S^3 , sea $b : I \times I \rightarrow S^3$ un encaje tal que

$$b(I \times I) \cap K_0 = b(\{0\} \times I), \quad b(I \times I) \cap K_1 = b(\{1\} \times I).$$

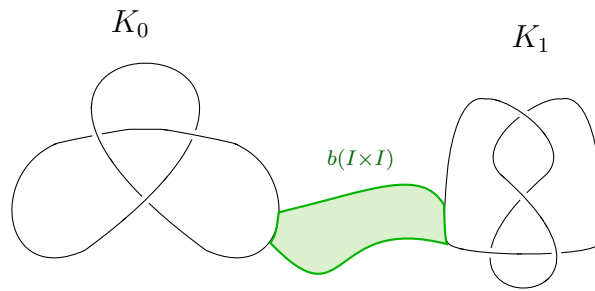


Figura 2.17: Nudos con banda.

Definimos la suma conexa de los nudos K_1 y K_2 sobre la banda b por

$$K_0 \#_b K_1 = (K_0 \cup K_1 \cup b(I \times \partial I)) - b(\partial I \times I).$$

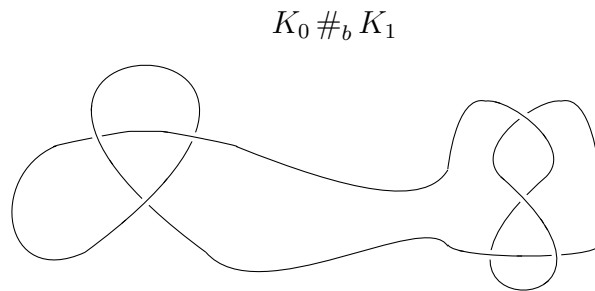


Figura 2.18: La suma de los nudos K_0 y K_1 bajo la banda b .

Ahora sí, definimos las siguientes operaciones sobre L

\mathcal{O}_1 : Agregar o remover un nudo trivial de L con marco ± 1 , el cual está separado de L por una esfera S^2 .

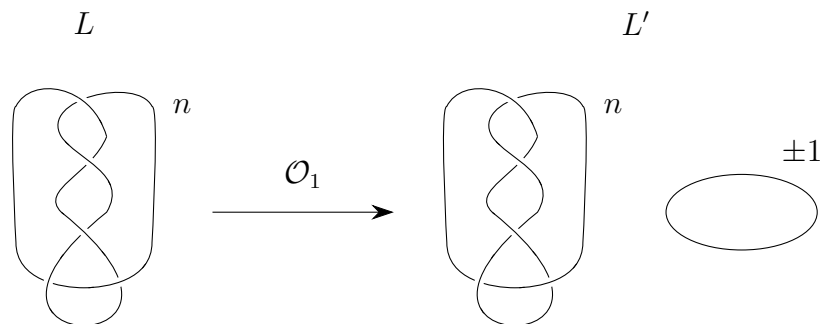


Figura 2.19: L' es el resultado de aplicar \mathcal{O}_1 a L .

\mathcal{O}_2 : Sean $K_i, K_j \subseteq L$. Sea $J_i \subseteq \eta(K_i)$ la instrucción de cirugía correspondiente a K_i . Sumamos K_i con K_j de la siguiente manera. Tomamos $b : I \times I \rightarrow M$ de manera que evite al resto de L . Reemplazamos K_j por $K'_j = J_i \#_b K_j$.

Veamos que marco corresponde a K'_j . Orientando cada componente K_i de L , determinamos una base para $H_1(M; \mathbb{Z})$, donde M es la 3-variedad resultado de hacer cirugía a lo largo de L . Denotemos por \bar{K}_i la clase de K_i , entonces $\Gamma = \{\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_n\}$ es una base.

Consideremos la matriz

$$A_L = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ z_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

donde $a_{ij} = lk(K_i, K_j) = a_{ji}$. La matriz A_L es simétrica. La operación \mathcal{O}_2 en $H_1(M; \mathbb{Z})$ corresponde a sustituir \bar{K}_i por \bar{K}'_j en Γ . La expresión de \bar{K}'_j en la base Γ es $\bar{K}'_j = \bar{K}_i \pm \bar{K}_j$. El signo depende de si b coincide o no con las orientaciones de K_i y K_j . Si coincide entonces es suma, y es resta en el caso contrario. Haciendo el cambio respectivo en la matriz A_L , el coeficiente que corresponde a K'_j es

$$z'_j = z_i + z_j \pm 2a_{ij}$$

La operación \mathcal{O}_2 consiste de reemplazar en L el nudo K_j por el nudo K'_j con coeficiente z'_j .

Decimos que dos enlaces, L_1 y L_2 son ∂ -equivalentes, si podemos pasar de uno a otro usando las operaciones \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 . Si L_1 es ∂ -equivalente a L_2 escribimos $L_1 \sim_{\partial} L_2$. Kirby demuestra en [11] que estas operaciones caracterizan a las 3-variedades cerradas orientadas².

Teorema 2.6.2 (Kirby-Craggs). *Sean L_1 y L_2 enlaces enmarcados en S^3 , con marcos enteros. Sean M_1 y M_2 el resultado de hacer cirugía a lo largo de L_1 y L_2 , respectivamente. Entonces $L_1 \sim_{\partial} L_2$ si y sólo si M_1 es difeomorfa a M_2 bajo un difeomorfismo que preserva la orientación.*

Al tratar de probar que dos enlaces son ∂ -equivalentes, podemos usar movimientos adicionales, que son consecuencia de aplicar \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 . Presentamos a continuación algunos movimientos útiles.

Lema 2.6.3. *Sea L un enlace enmarcado en S^3 . Si L' es el resultado de aplicar alguno de las siguientes operaciones a L , entonces $L \sim_{\partial} L'$.*

²Tengo entendido que Robert Craggs, de manera independiente, da una prueba alternativa, pero no he podido encontrar la referencia.

\mathcal{O}_3 : Podemos realizar los siguientes movimientos:



Figura 2.20: Enlaces ∂ -equivalentes.

Movida-K: Sea $K \subseteq L$ un nudo trivial con marco ± 1 . Siempre podemos separar K del resto del enlace L con el efecto de dar un giro completo de ∓ 1 a todos los arcos que pasan por K . Si cada arco pasa una sola vez por él, se cambian sus marcos por ∓ 1 . Por lo general, los marcos cambiarán según la suma de enlaces.

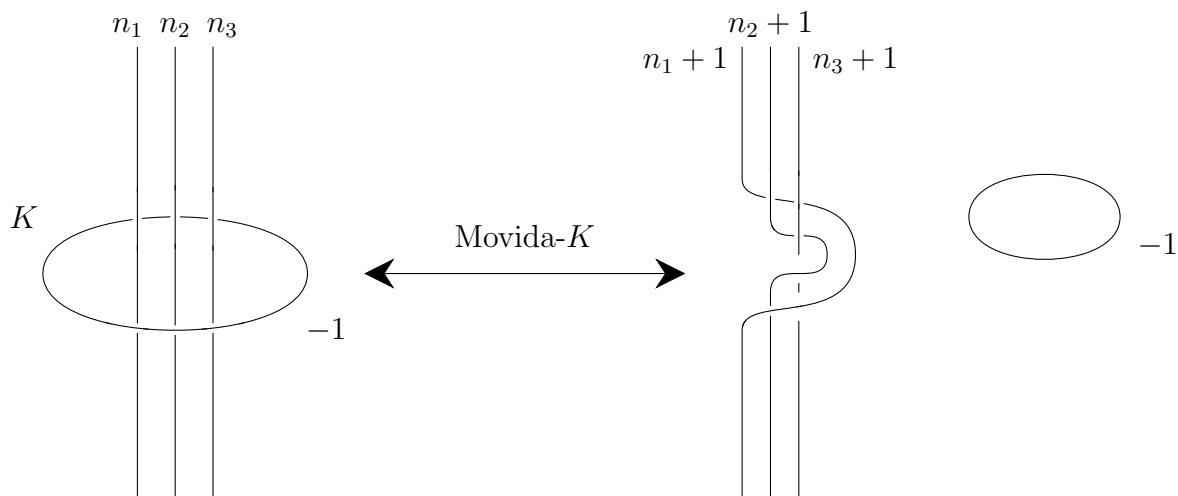


Figura 2.21: Un ejemplo de movida- K . Suponiendo que cada nudo pasa una sola vez por el nudo K , los marcos n_i cambian por un -1 .

De hecho, Fenn y Rouke [5] muestran que la movida- K y \mathcal{O}_1 son equivalentes a las operaciones \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 .

Idea de la prueba. El movimiento- K es el resultado de sumar cada nudo que pasa por el nudo K trivial. En \mathcal{O}_3 , al sumar con una banda adecuada el nudo izquierdo al nudo derecho con marco 0, obtenemos el mismo enlace pero el marco de la izquierda cambia por un -2 . \square

Ejemplo 2.6.4 (Variedad E_8). Los siguientes enlaces son ∂ -equivalentes.

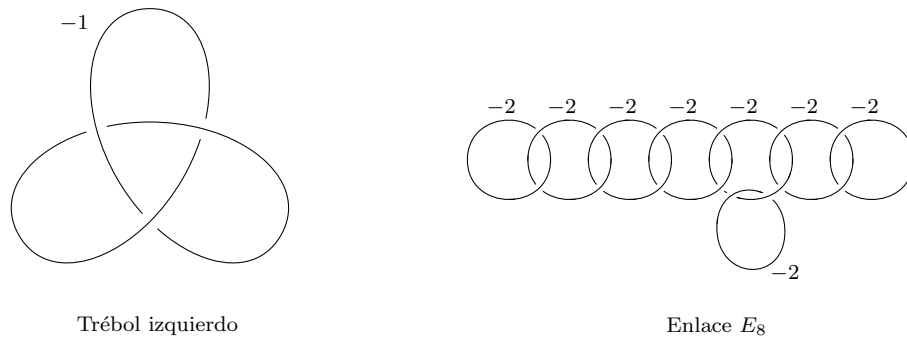


Figura 2.22: Enlaces equivalentes.

Para mostrar esto empezamos con el nudo E_8 , aplicando tres veces \mathcal{O}_1 , agregamos tres nudos triviales con marco $+1$ como en figura 2.23.

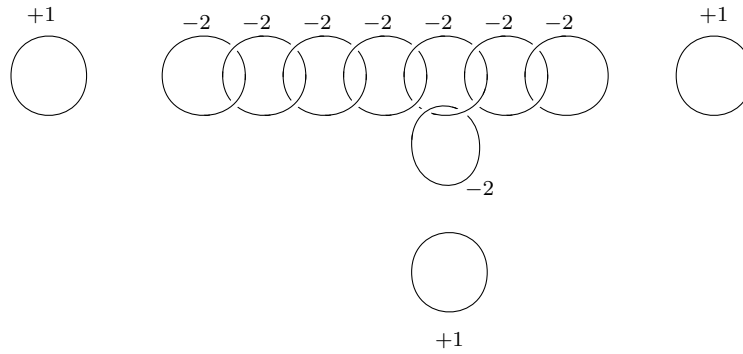


Figura 2.23

Sumamos las componentes de las esquinas con estos nuevos círculos. Obtenemos el enlace de la figura 2.24.

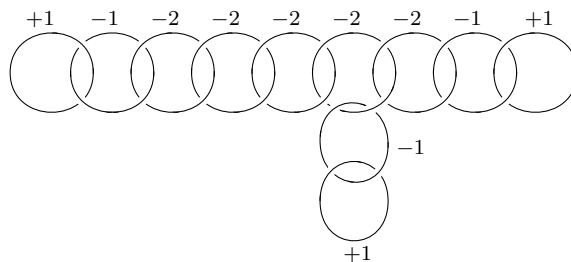


Figura 2.24

Aplicando ahora en cada extremo del enlace la movida-K en los nudos con marco -1 . Luego, aplicando la operación \mathcal{O}_1 nos deshacemos de cada nudo trivial sobrante. Obtenemos el enlace de la figura 2.25.

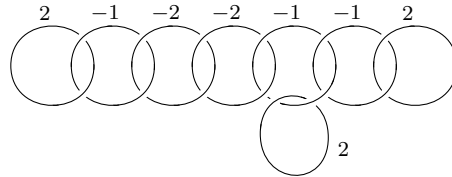


Figura 2.25

Repetimos el proceso, aplicando movida-K para separar los nudos de los extremos y luego nos deshacemos de los nudos triviales sobrantes utilizando \mathcal{O}_1 hasta obtener el enlace de la figura 2.26.

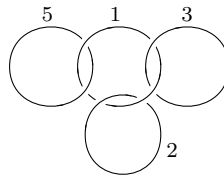


Figura 2.26

Aplicamos la movida-K respecto al círculo de en medio con marco 1 y removemos el círculo sobrante. Podemos realizar ahora movidas-K en sucesión como en la figura 2.27, el nudo de la derecha con marco -1 es equivalente al nudo trébol izquierdo.

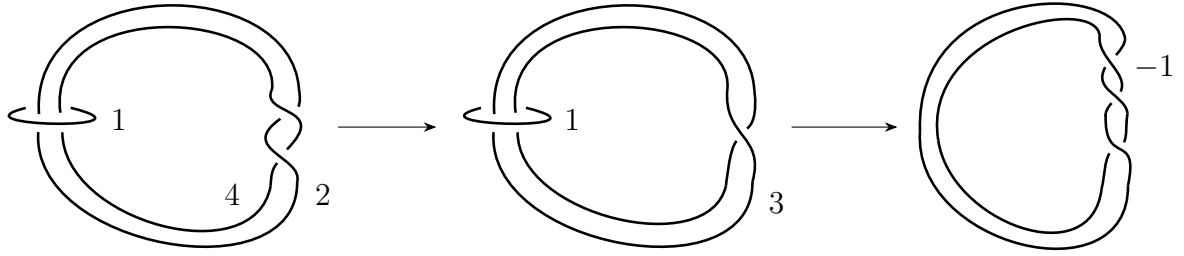


Figura 2.27

La 3-variedad resultado de hacer cirugía en el enlace $E8$ es una variedad de Seifert conocida como la Esfera Homológica de Poincaré. Tiene el mismo tipo de homología que la esfera S^3 , pero no es homeomorfa a esta (ver 9.D de [22]).

3.1. 4-variedades.

La idea ahora es tratar de traer al mundo de las 4-variedades conceptos análogos a los que ya estudiamos para 3-variedades. En particular, buscamos extender la definición de posición delgada. En el caso de las 3-variedades, primero definimos lo que es una descomposición de Heegaard. Descompusimos la 3-variedad en una sucesión de descomposiciones de Heegaard, esto es, en una descomposición de Heegaard generalizada. Para luego describir una descomposición en particular, la descomposición delgada. La cual vimos tiene características interesantes. Buscamos extender estos conceptos al caso de 4-variedades. El análogo a la descomposición de Heegaard en dimensión 4 son las trisecciones, que fueron introducidas por Kirby y Gay en [7]. En [6], David Gay da un sumario de las analogías que hay entre estos dos conceptos. En [4], Román Aranda propone una definición de trisección generalizada para luego definir el concepto de posición delgada para 4-variedades compactas.

En este capítulo seguiremos un camino análogo al caso 3-dimensional para dar la definición de posición delgada en 4-variedades.

Aunque hay varias analogías entre dimensión 3 y 4, también hay cosas que los hacen diferentes. Por ejemplo, el Teorema de existencia y unicidad de descomposición para 3-variedades teorema 2.1.7, no se extiende al caso 4 dimensional. Hirzebruch demuestra que (ver ejemplo 3.1.4)

$$\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2} \# \overline{\mathbb{C}P^2} \cong (S^2 \times S^2) \# \overline{\mathbb{C}P^2},$$

pero $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ ni siquiera tiene el mismo tipo de homotopía que $(S^2 \times S^2)$.

En el caso 3-dimensional, vimos que el efecto en la frontera de pegar 2-asas era el de hacer compresión en la superficie frontera. Mientras que el efecto de pegar 1-asas era el de hacer la operación inversa. Veamos qué sucede con el caso 4-dimensional.

Sea X es una 4-variedad suave, compacta, conexa, y orientada, con frontera $M = \partial X$. De manera que M es una 3-variedad cerrada orientada. Si h^k es una k -asa 4-dimensional con mapeo de pegado

$$\varphi : S^{k-1} \times D^{4-k} \longrightarrow M.$$

Entonces el efecto en M al pegar la k -asa h es

$$M' = \overline{M - \varphi(S^{k-1} \times D^{4-k})} \cup_{\varphi|} D^k \times S^{3-k}, \quad (3.1)$$

donde $\varphi|$ es la restricción de φ a $S^{k-1} \times S^{3-k}$. Consideremos una descomposición en asas de X indexada

$$\mathcal{H} = b_0 \cup C \cup D \cup E \cup b_4,$$

donde b_0, C, D, E, b_4 son, respectivamente, colecciones de 0-, 1-, 2-, 3-, y 4-asas. Podemos escoger la descomposición de manera que b_0 consiste de una sola 0-asa. En particular, las 1-asas de C se pegan sobre la esfera $S^3 = \partial b_0$, y las 2-asas se pegan sobre $\#^k(S^1 \times S^2)$, donde $k \geq 0$ es el número de 1-asas en C .

Sea $h^1 \in C$. Esta tiene mapeo de pegado

$$\varphi : S^0 \times D^3 \longrightarrow S^3,$$

cuya imagen son dos bolas ajenas en S^3 . Sustituyendo $k = 1$ en ecuación (3.1), tenemos

$$S^3[h] = \overline{S^3 - \varphi(S^0 \times D^3)} \cup_{\varphi|} D^1 \times S^2.$$

Si orientamos S^3 , existe un único mapeo de pegado módulo isotopía. Así, podemos describir las 1-asas como dos esferas en S^3 .

Tomamos $M = \#^k(S^1 \times D^2)$. Sea $h^2 \in D$ una 2-asa. Esta tiene mapeo de pegado

$$\varphi : S^1 \times D^2 \longrightarrow M.$$

Sustituyendo en la ecuación (3.1), el efecto en la frontera de pegar h^2 es

$$M[h^2] = \overline{M - \varphi(S^1 \times D^2)} \cup_{\varphi|} D^2 \times S^1.$$

Lo interesante en este caso es que estamos removiendo un toro sólido para después pegar otro toro sólido a través de la frontera. En otras palabras, estamos realizando cirugía de Dehn

respecto al nudo $\varphi(S^1 \times \{0\})$ con marco φ , o, equivalentemente, con instrucción de cirugía $J = \varphi(\{1\} \times S^1)$. Si la descomposición \mathcal{H} no tiene 1-asas, entonces $M = S^3$. En este caso, como ya vimos en apartado 2.5, el marco puede ser descrito por un número racional. Notemos que el meridiano del toro $D^2 \times S^1$ es $\mu = S^1 \times \{1\}$, que es la longitud preferente del toro $S^1 \times D^2$. Esto implica que φ identifica al meridiano μ con una longitud de $\varphi(S^1 \times D^2)$. Así, la cirugía tiene necesariamente coeficiente entero. De esta manera un enlace enmarcado en S^3 determina una 4-variedad compacta, cuya frontera es la 3-variedad resultado de realizar cirugía de Dehn en S^3 según el enlace enmarcado. En particular, tenemos el siguiente corolario consecuencia del Teorema de [Lickorish-Wallace](#)

Corolario 3.1.1. *Toda 3-variedad cerrada orientable es frontera de una 4-variedad suave.*

Un cubo con asas 4-dimensional es el resultado de pegar algunas 1-asas a la 4-bola B^4 . Es decir, es una 4-variedad difeomorfa a $\natural^k(S^1 \times D^3)$. Al número de sumandos $k \geq 0$ es el *género* del cubo con asas. Estaremos trabajando de manera simultánea con asas de dimensión 3 y de dimensión 4. Para evitar confusiones, cuando nos refiramos a un cubo con asas de dimensión 4 escribiremos 4-cubo con asas. Escribiremos 3-cubo con asas para referirnos a los de dimensión 3.

Las colecciones de 3- y 4-asas, E y b_0 , determinan un cubo con asas 4-dimensional cuya frontera es homeomorfa a $\#^{k'}(S^1 \times S^2)$. Si la 4-variedad X es cerrada, entonces la variedad resultado de pegar las 0-, 1-, y 2-asas, digamos $X_1 = b_0 \cup C \cup D$, tiene frontera $\partial X_1 = \#^{k'}(S^1 \times S^2)$. Por un resultado de Laudenbach y Poénaru,[14], existe una única forma de pegar las 3- y 4-asas para obtener una 4- variedad cerrada.

Lema 3.1.2 (Laudenbach-Poénaru). *Dada una 4-variedad suave compacta \tilde{X} con frontera $\partial \tilde{X} \cong \#^k(S^1 \times S^2)$, existe una única forma de pegar 3- y 4-asas a \tilde{X} para obtener una 4-variedad cerrada.*

Observación. Laudenbach y Poénaru dan la demostración para el caso orientado. En [18], dan un resultado análogo el caso no orientable.

Así, para obtener una 4-variedad cerrada, sólo es necesario describir las 1- y 2-asas en S^3 . En particular, si no hay 1-asas, podemos describir una 4-variedad por un enlace con coeficiente de cirugía entero.

En la figura 3.1 vemos algunos ejemplos de 4-variedades descritas por enlaces enmarcados.

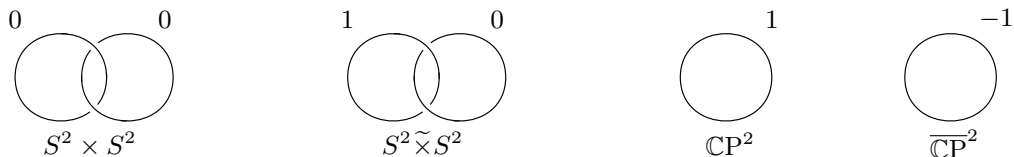


Figura 3.1: Diagramas de algunas 4-variedades.

Observación. La demostración que da Kirby en [11] para el teorema 2.6.2 se basa en esta descripción de los enlaces enmarcados en S^3 . En particular, las operaciones de Kirby tienen interpretaciones geométricas sencillas desde el punto de vista de 4-variedades. La \mathcal{O}_1 corresponde a hacer suma conexa con $\mathbb{C}P^2$ o $\overline{\mathbb{C}P}^2$, dependiendo si el coeficiente es $+1$ o -1 , respectivamente. La operación \mathcal{O}_2 corresponde a deslizar la 2-asa correspondiente al nudo K_j sobre la 2-asa que corresponde al nudo K_i .

Por la observación anterior, si uno al pasar de un enlace a otro usando cálculo de Kirby mantiene un seguimiento de las veces que se uso la operación \mathcal{O}_1 , entonces se puede probar que dos 4-variedades son difeomorfas. No sólo sus fronteras. Por ejemplo, al pasar del enlace E_8 al trébol izquierdo en ejemplo 2.6.4, removimos en total 7 nudos triviales con marco -1 . Así, si X_1 y X_2 son las 4-variedades resultado de pegar 2-asas acorde al enlace E_8 y al nudo trébol respectivamente, entonces $X_1 \# (\#^7 \overline{\mathbb{C}P}^2) \cong X_2$, bajo un difeomorfismo que preserva la orientación.

Ejemplo 3.1.3 (Linear plumbing sobre esferas). La 4-variedad con frontera resultado de pegar 2-asas según el diagrama en figura 3.2 se conoce como un *linear plumbing* sobre la esfera S^2 .

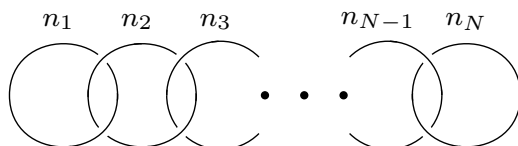


Figura 3.2: Diagrama de un linear plumbing sobre la esfera

Como ya vimos (ejemplo 2.6.1), esta variedad tiene frontera $\partial X = L(p, q)$, donde la n -ada $[n_1, n_2, \dots, n_N]$ es la fracción continua de p/q . En particular, las variedades en figura 3.1 son linear plumbings sobre la esfera.

Ejemplo 3.1.4. Las variedades $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2} \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ y $(S^2 \times S^2) \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ son difeomorfas. La figura 3.3 muestra cómo pasar del diagrama que representa a $(S^2 \times S^2) \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ al diagrama que representa a $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2} \# \overline{\mathbb{C}P^2}$. El primer paso es anexar el círculo con marco -1 utilizando una movida-K. El segundo paso es hacer una movida-K con el círculo de en medio con marco -1 . Finalmente, separamos los círculos enlazados utilizando nuevamente la movida-K.

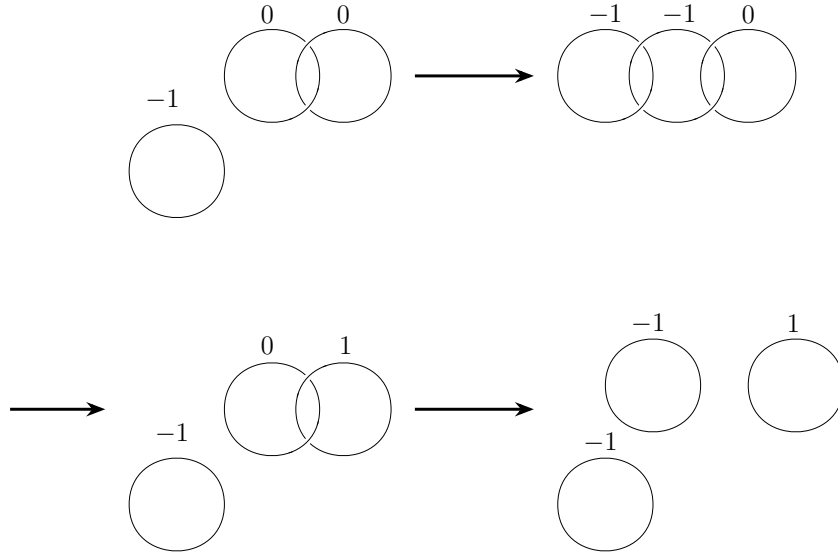


Figura 3.3

Como cada paso es una movida-K, la cual es consecuencia solamente de la operación \mathcal{O}_2 , las 4-variedades correspondientes son difeomorfas.

3.2. Trisecciones

Kirby y Gay definen el concepto de trisección para 4-variedades en [7]. Una trisección es, en varios sentidos, el equivalente 4-dimensional a la descomposición de Heegaard para variedades de dimensión 3. En [6], D. Gay describe las similitudes entre las descomposiciones de Heegaard y las trisecciones. Meier, Schrier y Zupan dan una definición de trisección en [17] que permite un poco más de flexibilidad. Es entonces el concepto de trisección el que nos permitirá dar un equivalente 4-dimensional para la descomposición delgada de 3-variedades. Con esto en mente, en esta sección definiremos lo que es una trisección y daremos los resultados más relevantes.

Veremos primero el caso sencillo, cuando X es una 4-variedad suave cerrada, orientable y conexa. En la siguiente sección, veremos qué sucede en el caso con frontera no vacía. Para

después dar una definición de trisección generalizada como una sucesión de trisecciones. Con esto, R. Aranda en [4], da una definición para la posición delgada en dimensión 4.

Definición 3.2.1. Sea X una 4-variedad suave, cerrada, orientable y conexa. Una (g, k_1, k_2, k_3) -trisección de X es una descomposición de X en tres 4-cubos con asas

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3,$$

donde X_i tiene género k_i , y son tales que las intersecciones a pares son 3-cubos con asas *conexos*

$$H_{ij} = X_i \cap X_j,$$

y la triple intersección es una superficie cerrada conexa de género g .

$$\Sigma_g = X_1 \cap X_2 \cap X_3.$$

Si $k_1 = k_2 = k_3 = k$, decimos que la trisección es *balanceada*¹, en este caso escribimos simplemente (g, k) -trisección. En caso contrario, decimos que la trisección es *desbalanceada*. A la cuarteta $(\Sigma_g; H_{1,2}, H_{2,3}, H_{3,1})$ se le llama el *nervio* de la trisección.

El género de la trisección es el género de la superficie g . El género de la X es el mínimo genero que alcanza una trisección de X .

Observación. Si M es una 3-variedad suave y compacta, una descomposición de Heegaard es inducida por una función de Morse $f : M \rightarrow [0, 1]$, indexada, tal que sus puntos críticos de índice 0 y 1 toman valores menores a $1/2$, y los de índice 2 y 3 toman valores mayores a $1/2$. De manera que $M = f^{-1}[0, 1/2] \cup f^{-1}[1/2, 1]$ es una descomposición de Heegaard para M . Por Teoría de Morse, sabemos que siempre podemos encontrar una función f que satisfaga lo anterior, de manera que siempre existen descomposiciones de Heegaard para M . Un resultado análogo ocurre para el caso 4-dimensional. Kirby y Gay usan 2-funciones de Morse. Esto es, funciones genéricas de la 4-variedad X en el disco unitario D^2 . De manera que separar el disco unitario D^2 en tres partes D_1, D_2, D_3 como en la figura 3.4 induce una trisección de la variedad donde $X_i = f^{-1}(D_i)$.

¹La definición original de Kirby y Gay sólo contempla trisecciones balanceadas.

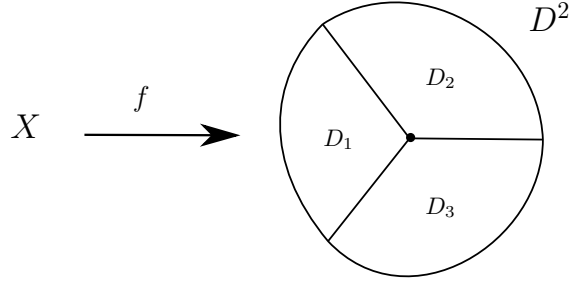


Figura 3.4: Una función en el disco induce una trisección en X

Por definición, cada $X_i = \natural^{k_i}(S^1 \times D^3)$. Como la superficie Σ_g separa cada ∂X_i en los 3-cubos de asas H_{ji} y H_{ik} , esta induce una descomposición de Heegaard

$$\natural^{k_i}(S^1 \times S^2) = \partial X_i = H_{ji} \cup_{\Sigma_g} H_{ik}.$$

La 4-variedad X está determinada por el nervio $H_\alpha \cup H_\beta \cup H_\gamma$. Dado el nervio, podemos reconstruir la variedad. Como el nervio está determinado por la superficie Σ con las curvas de pegado respectivas de cada 3-cubo con asas, basta indicar las curvas sobre la superficie para determinar a X . Para ver esto, tomamos Σ superficie cerrada de género g . Sean $\alpha, \beta, \gamma \subseteq \Sigma$ tres colecciones de curvas tomadas de manera que sean diagramas de Heegaard estándar (ver definición 2.2.4) por pares. Dados $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$ tres 3-cubos con asas, obtenemos las descomposiciones de Heegaard

$$\natural^{k_1}(S^1 \times S^2) \cong H_\alpha \cup_\Sigma H_\beta, \quad \natural^{k_2}(S^1 \times S^2) \cong H_\alpha \cup_\Sigma H_\gamma, \quad \natural^{k_3}(S^1 \times S^2) \cong H_\beta \cup_\Sigma H_\gamma,$$

donde H_η se pega según la colección de curvas η , esto para cada $\eta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Tomamos $Y = \natural^{k_1}(S^1 \times S^2)$. Consideremos la 4-variedad suave $Y \times I$, cuya frontera son dos copias de Y . Por **Laudenbach-Poénaru**, existe una única forma de pegar 3- y 4-asas 4-dimensionales a $Y \times I$ para tapan la frontera $Y \times \{1\}$. De esta manera obtenemos un 4-cubo con asas \tilde{X}_1 cuya frontera es

$$\partial \tilde{X}_1 = Y \times \{0\} \cong H_\alpha \cup_\Sigma H_\beta.$$

Pegamos \tilde{X}_1 lo largo de su frontera en el nervio $H_\alpha \cup H_\beta \cup H_\gamma$. De manera análoga, obtenemos 4-cubos con asas \tilde{X}_2 y \tilde{X}_3 tales que $\partial \tilde{X}_2 \cong H_\beta \cup_\Sigma H_\gamma$ y $\partial \tilde{X}_3 \cong H_\alpha \cup_\Sigma H_\gamma$, los cuales pegamos a lo largo de sus fronteras sobre el nervio. En otras palabras, lo que hacemos es engrosar el nervio $H_\alpha \cup H_\beta \cup H_\gamma$ como en la figura 3.5. Existe una única forma de tapan la frontera del nervio engrosado con tres colecciones de 3- y 4-asas. Estas colecciones determinan tres 4-cubos

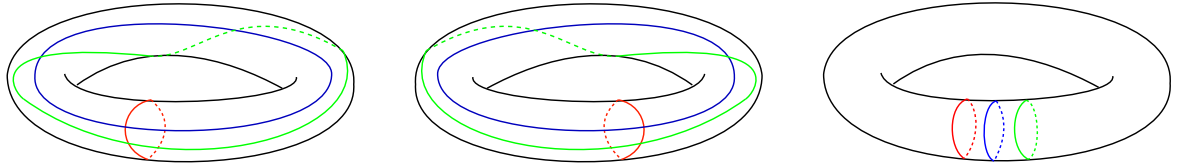


Figura 3.6: Trisecciones balanceadas de género 1. De izquierda a derecha, son $\mathbb{C}P^2$, $\overline{\mathbb{C}P^2}$, $S^1 \times S^3$, respectivamente.

con asas $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$. Al pegarlas sobre el nervio engrosado, estas determinan una trisección para la variedad $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ con nervio $H_\alpha \cup H_\beta \cup H_\gamma$.

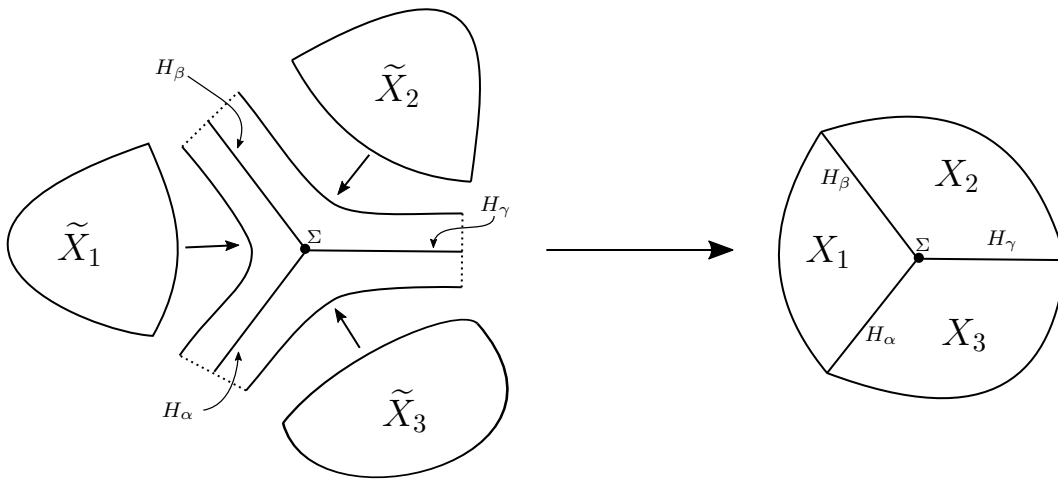


Figura 3.5

Definición 3.2.2. Sea X una 4-variedad suave, con trisección \mathcal{T} , y con nervio $H_\alpha \cup H_\beta \cup H_\gamma$. Un *diagrama de la trisección* es un cuarteto $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$, donde α, β, γ son colecciones de curvas en Σ que definen $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$, respectivamente.

En la figura 3.6 vemos los diagramas de las trisecciones balanceadas de género uno.

Definición 3.2.3. Decimos que una trisección \mathcal{T} con nervio $H_\alpha \cup H_\beta \cup H_\gamma$ es *reducible* si existe una curva $\delta \subseteq \Sigma$ tal que δ acota discos D_α, D_β , y D_γ en H_α, H_β , y H_γ , respectivamente.

Si X tiene una trisección reducible, entonces X es reducible, pues la unión de los discos $D_\alpha \cup D_\beta \cup D_\gamma$ es una 3-esfera reductora para X . Es natural preguntarse si la otra implicación es válida ¿Si la 4-variedad X es reducible, entonces sus trisecciones son reducibles? Esta pregunta sigue abierta, en [17] Meier, Schirmer y Zupan la plantean como una conjetura. Hacen notar que, de ser cierta, el número de sumandos que pueden ocurrir en una descomposición en suma conexa de variedades primas para X está acotado superiormente por el género mínimo de una trisección para X . El análogo 3-dimensional es el **Lema de Haken**.

Definición 3.2.4. Sea $L \subseteq \#^n(S^1 \times S^2)$ un enlace enmarcado con c componentes tal que, al realizar cirugía sobre L , obtenemos $\#^m(S^1 \times S^2)$. Sea (Σ, H_1, H_2) una descomposición de Heegaard de género g para $E(L, \#^n(S^1 \times S^2))$ de manera que H_1 es un cubo con asas. Decimos entonces que la pareja $\mathcal{L} = (L, \Sigma)$ es un $(g; n, c, m)$ -diagrama de Heegaard-Kirby.

Un $(g; n, c, m)$ -diagrama de Heegaard-Kirby determina una descomposición en asas para una 4-variedad cerrada X . La descomposición está formada por una 0-asa, n 1-asas, c 2-asas, m 3-asas y una 4-asa. Esta descomposición la podemos construir de la siguiente forma. Sean X_1 y X_2 4-cubos con asas

$$X_1 = \natural^n(S^1 \times D^3) \quad X_3 = \natural^m(S^1 \times D^3).$$

De manera que

$$\partial X_1 = \#^n(S^1 \times S^2) \quad \partial X_3 = \#^m(S^1 \times S^2).$$

Sea ahora $X(L)$ el resultado de pegar 2-asas en

$$\left(\#^n(S^1 \times S^2) \right) \times \{1\} \subseteq \left(\#^n(S^1 \times S^2) \right) \times I,$$

donde el pegado se hace siguiendo las instrucciones del enlace enmarcado $L \times \{1\}$. Entonces $\partial X(L) = \#^n(S^1 \times S^2) \sqcup \#^m(S^1 \times S^2)$. Existe una única manera de pegar X_1 y X_3 en las respectivas fronteras de $X(L)$. En la figura 3.7 vemos de manera esquemática como se construye la variedad X . Tenemos así determinada una 4-variedad suave cerrada $X = X_1 \cup_{\partial X_1} X(L) \cup_{\partial X_3} X_3$. Como X_1 está compuesto de una 0-asa y n 1-asas, $X(L)$ está compuesto de c 2-asas, y X_3 está compuesto de m 3-asas y una 4-asa, obtenemos también la descomposición en asas de X . En particular, por la **Desigualdad de Morse**, tenemos que $\chi(X) = n - c + m + 2$.

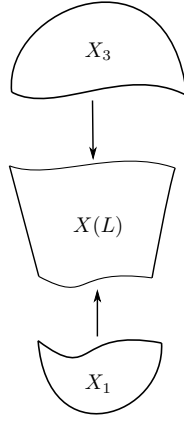


Figura 3.7: Construcción esquemática de X .

En la construcción anterior sólo se utilizó al enlace enmarcado L . La superficie Σ determina una trisección de X .

Proposición 3.2.5. *Un $(g; n, c, m)$ -diagrama de Heegaard-Kirby \mathcal{L} para la 4-variedad X determina una $(g; n, g - c, m)$ -trisección $\mathcal{T}(\mathcal{L})$ de X , la cual es única salvo difeomorfismo.*

Demostración. Sea $\mathcal{L} = (L, \Sigma)$ un $(g; n, c, m)$ -diagrama de Heegaard-Kirby para la variedad X . Sea $Y' = \#^m(S^1 \times S^2)$, el resultado de hacer cirugía sobre $Y = \#^n(S^1 \times S^2)$. Denotamos por X_1 la unión de las 0 y 1 asas, por X_3 la unión de las 3 y 4 asas. De manera que X_1 y X_2 son 4-cubos con asas de género n y m , respectivamente, $\partial X_1 = Y$, y $\partial X_3 = Y'$.

Sea ahora $Y = H_\alpha \cup_\Sigma H_\beta$ la descomposición de Heegaard para Y inducida por Σ . Por hipótesis, tenemos que $L \subseteq H_\beta$, y que Σ induce también una descomposición de Heegaard $E(L, Y) = H_\alpha \cup_\Sigma E(L, H_\beta)$. El resultado de hacer cirugía en H_β a lo largo de L es un nuevo 3-cubo con asas, digamos H_γ . Consideremos $H_\beta \times I \cong \natural^g(S^1 \times D^3)$. Sea X_2 la 4-variedad resultado de pegar 2-asas en $H_\beta \times I$ a lo largo de $L \times \{1\}$. Como el enlace L está contenido en el alma de H_β , las c 2-asas que pegamos a lo largo de $L \times \{1\}$ son duales a c 1-asas que conforman $H_\beta \times I$. Por lo tanto

$$X_2 \cong \natural^{g-c}(S^1 \times D^3), \quad \partial X_2 \cong \#^{g-c}(S^1 \times S^2) = H_\alpha \cup_\Sigma H_\gamma.$$

Luego, X_1, X_2 y X_3 son 4-cubos con asas de género $n, g - c$, y m , respectivamente. Por construcción, $X_1 \cap X_2 = H_\beta$, $X_2 \cap X_3 = H_\gamma$, y $X_1 \cap X_3 = H_\alpha$. Con H_α, H_β , y H_γ 3-cubos con asas de género g , y con triple intersección $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \Sigma$. Por lo tanto $\mathcal{T}(\mathcal{L}) = (\Sigma; X_1, X_2, X_3)$ es una $(g; n, g - c, m)$ -trisección de X . \square

Como consecuencia de la proposición anterior podemos mostrar la existencia de trisecciones para 4-variedades cerradas conexas. La idea es construir un diagrama de Heegaard-Kirby utilizando una descomposición en asas.

Teorema 3.2.6. *Sea X una 4-variedad suave, cerrada, conexa y orientable. Existe una trisección balanceada para X .*

Idea de la demostración: Sea X una 4-variedad cerrada y conexa. Tomamos una descomposición en asas indexada $\mathcal{H} = b_0 \cup C \cup D \cup E \cup b_4$ para X . Sea L el enlace enmarcado inducido por las 2-asas D , entonces $L \subseteq \#^{|C|}(S^1 \times S^2)$. Al realizar cirugía sobre L , obtenemos $\#^{|E|}(S^1 \times S^2)$. Así, tomando ahora una descomposición de Heegaard para $E(L, \#^{|C|}(S^1 \times S^2)) = H_1 \cup_{\Sigma} H_2$, obtenemos un diagrama de Heegaard-Kirby (L, Σ) para X .

Observación. La demostración original de la existencia de trisecciones puede verse en [7].

Dado un diagrama de Heegaard-Kirby $\mathcal{L} = (L, \Sigma)$, tenemos asociada una trisección $\mathcal{T}(L) = (\Sigma; X_1, X_2, X_3)$, y una descomposición en asas

$$\mathcal{H} = b_0 \cup C \cup D \cup E \cup b_4,$$

donde b_0, C, D, E, b_4 consisten, de manera respectiva, de 0-, 1-, 2-, 3-, y 4-asas. La descomposición en asas es tal que $X_1 = b_0 \cup C$, $X_3 = E \cup b_4$, y $X_2 = (H \times I) \cup D$, donde H es un cubo con asas de dimensión 3.

Distintos diagramas de Heegaard pueden determinar la misma 3-variedad. Análogamente, distintos diagramas de Heegaard-Kirby pueden determinar la misma 4-variedad. Veamos ahora cómo podemos obtener un diagrama de Heegaard-Kirby de una trisección.

Definición 3.2.7. Sea $Y = H \cup_{\Sigma} H'$ una descomposición de Heegaard de género g . Decimos que un disco D propiamente encajado en H es *primitivo en H respecto a H'* si existe un disco propiamente encajado en H' de manera que $|D \cap D'| = 1$. Si $Y \cong \#^k(S^1 \times S^2)$, una *colección completa de discos primitivos* para H es cualquier colección de discos ajenos D_1, D_2, \dots, D_{g-k} , no isotópicos, que son primitivos en H para H' .

Por el teorema 2.2.5, toda descomposición de Heegaard $\#^k(S^1 \times S^2) = H \cup_{\Sigma} H'$ admite una colección completa de discos primitivos.

Proposición 3.2.8. *Sean $\mathcal{T} = (\Sigma; X_1, X_2, X_3)$ una $(g; k_1, k_2, k_3)$ -trisección de X , y \mathcal{D} una colección completa de discos en H_{γ} primitivos respecto a H_{β} . Entonces $\mathcal{T}(\mathcal{L}(\mathcal{D})) = \mathcal{T}$, donde $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ es la trisección inducida por el diagrama de Heegaard-Kirby $\mathcal{L}(\mathcal{D})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{T} = (\Sigma; X_1, X_2, X_3)$ una $(g; k_1, k_2, k_3)$ -trisección de X , con nervio $H_{\alpha} \cup H_{\beta} \cup H_{\gamma}$. Sea $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{g-k_2}$ un enlace enmarcado en H_{γ} . Escogemos L de manera que sea frontera de una colección completa de discos primitivos en H_{γ} respecto a H_{β} . Empujamos L dentro de H_{β} . Entonces $H_{\alpha} \cup_{\Sigma} E(L, H_{\beta})$ es una descomposición de Heegaard para $E(L, \partial X_1)$. Como L es primitivo respecto a H_{β} , $E(L, H_{\beta})$ es un cuerpo de compresión. Cada componente

L_i de L , ya dentro de H_β , interseca sólo un disco esencial $D' \subseteq H_\beta$. Obtenemos así un diagrama de Heegaard-Kirby $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = (L, \Sigma)$ para X , donde \mathcal{D} es la colección de discos primitivos en H_γ tal que $\partial D = L$. \square

Tenemos así que, dada la superficie Σ , existe un diagrama de Heegaard-Kirby por cada posible elección de colección de discos primitivos \mathcal{D} .

3.3. Trisección Generalizada

Hasta ahora sólo hemos considerado trisecciones de variedades suaves cerradas. Con la idea en mente de traer al mundo de las 4-variedades el análogo a una descomposición generalizada de Heegaard. Esta la podemos pensar de dos formas. Como una sucesión de descomposiciones de Heegaard $W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k$, o como una sucesión de bordismos. Román Aranda en [4], propone una definición para la trisección generalizada. De manera análoga a los cuerpos de compresión, este es un bordismo entre dos 3-variedades cerradas. En particular, nos permite pegar dos trisecciones a lo largo de su frontera. Así, llegamos a la definición de trisección generalizada como una sucesión de trisecciones cuya unión es la 4-variedad X . A continuación exponemos las ideas de Román.

Observación. Es importante notar que esta definición de trisección con frontera o de trisección generalizada no es estándar. Por ejemplo, David Gay en [6] propone que una trisección para X con frontera es una función f genérica (lo que Gay y Kirby llaman 2-función de Morse) al disco D^2 de manera que $f^{-1}(\partial D^2) = \partial X$.

Si F es una superficie cerrada y $\eta \subseteq F$ una colección de curvas simples cerradas, denotamos por $F|_\eta$ a la superficie resultado de hacer compresión en F a lo largo de η . Una orientación de F y de η nos determina un marco para η en $F \times I$. Si v es un el campo vectorial unitario para η , tomamos w el campo normal a η de manera que (v, w) está orientado de manera positiva. Para cada η_i componente de η , tomamos J_i la curva definida por empujar η_i en la dirección w_i , donde w_i es la restricción de w a η_i .

Sean Σ una superficie cerrada de género $g \geq 1$ con $\alpha, \beta, \gamma \subseteq \Sigma$ tres colecciones de g curvas, ajenas a pares, no separantes, de manera que determinan el pegado de tres 3-cubos con asas H_α , H_β , y H_γ . Supongamos que $H_\alpha \cup_\Sigma H_\gamma$ es una descomposición de Heegaard para $\#^k(S^1 \times S^2)$. Construimos una 4-variedad $W(\Sigma; \alpha, \beta, \gamma)$ como sigue: Pegamos 2-asas en $\Sigma \times D^2$ a lo largo de las curvas $\alpha \times \{e^{4\pi i/3}\}$, $\beta \times \{1\}$, $\gamma \times \{e^{2\pi i/3}\}$ con marcos inducidos por Σ . Obtenemos una 4-variedad, denotada por $W_1(\Sigma; \alpha, \beta, \gamma)$ cuya frontera conexa tiene tres 2-esferas: $\Sigma|_\alpha$, $\Sigma|_\beta$ y $\Sigma|_\gamma$. Pegamos una 3-asa a lo largo de cada una de estas 2-esferas. Con esto, desconectamos la frontera de $W_1(\Sigma; \alpha, \beta, \gamma)$ y obtenemos una nueva 4-variedad, denotada por $W_2(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$,

cuya frontera está compuesta por la unión ajena

$$\partial W_2(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma) \cong (H_\alpha \cup_\Sigma H_\beta) \sqcup (H_\beta \cup_\Sigma H_\gamma) \sqcup (H_\alpha \cup_\Sigma H_\gamma).$$

Como $(H_\alpha \cup_\Sigma H_\gamma) \cong \#^k(S^1 \times S^2)$, podemos tapar esta componente con 3- y 4-asas. Obtenemos así la 4-variedad $W(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ con frontera la unión ajena

$$\partial W(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma) \cong (H_\alpha \cup_\Sigma H_\beta) \sqcup (H_\beta \cup_\Sigma H_\gamma).$$

Si se da el caso que

$$(H_\alpha \cup_\Sigma H_\beta) \cong \#^{k_1}(S^1 \times S^2) \quad y \quad (H_\beta \cup_\Sigma H_\gamma) \cong \#^{k_2}(S^1 \times S^2),$$

entonces podemos tapar cada componente de la frontera con 3- y 4-asas para obtener una variedad cerrada X . Esta fue la construcción que hicimos para recuperar la 4-variedad desde su nervio.

Definición 3.3.1. Sea X una 4-variedad compacta. Un cuarteto $(\Sigma; H_\alpha, H_\beta, H_\gamma)$ tal que $H_\alpha \cup_\Sigma H_\gamma$ es una descomposición de Heegaard para $\#^k(S^1 \times S^2)$ con $k \geq 0$ es un *nervio para X* si $X \cong W(\Sigma; \alpha, \beta, \gamma)$ para colecciones de curvas $\alpha, \beta, \gamma \subseteq \Sigma$ que determinan H_α, H_β , y a H_γ , respectivamente.

Fijándonos en la construcción dada en la proposición 3.2.5, tenemos la trisección

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3,$$

donde X_1 y X_3 consisten de las 0-asas y 1-asas, y de las 3-asas y 4-asas, respectivamente. Lo interesante sucede con las 2-asas, X_2 es el proceso de hacer cirugía sobre la 3-variedad $\partial X_2 = \#^n(S^1 \times S^2)$.

Consideremos una 3-variedad cerrada Y . Sea $L \subseteq Y$ un enlace enmarcado. Denotamos por $X(Y, L)$ la 4 variedad resultado de pegar 2-asas 4-dimensionales a lo largo de $L \times \{1\} \subset Y \times \{1\}$. Denotamos por $Y[L]$ la 3-variedad resultado de hacer cirugía sobre el enlace L . Es decir

$$Y[L] = \overline{Y - \eta(L)} \cup_\varphi (\cup(S^1 \times D^2))$$

donde φ es el mapeo de pegado inducido por el marco de L . La 4-variedad $X(Y, L)$ es suave, cerrada, y tiene frontera $\partial X(Y, L) = Y \cup Y[L]$.

A la variedad $X(Y, L)$ se le llama la *traza de la cirugía*.

Podemos extender el resultado de la proposición 3.2.5 al caso con frontera no vacía.

Lema 3.3.2. *Sea $L \subseteq Y$ un enlace enmarcado con Y una 3-variedad cerrada. Existen 3-cubos con asas $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$ tales que $W(\Sigma; H_\alpha, H_\beta, H_\gamma) \cong X(Y, L)$. En particular, $(\Sigma, H_\alpha, H_\beta, H_\gamma)$ es un nervio para $X(Y, L)$, y*

$$Y \cong H_\alpha \cup_\Sigma H_\beta \quad y \quad Y[L] \cong H_\beta \cup_\Sigma H_\gamma.$$

La demostración es análoga a la de proposición 3.2.5

De igual manera, podemos extender el resultado de la proposición 3.2.8

Lema 3.3.3. *Sea Σ superficie cerrada de género g y $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$ 3-cubos con asas con frontera común Σ tales que $H_\alpha \cup_\Sigma H_\gamma$ es una descomposición de Heegaard para $\#^k(S^1 \times S^2)$. Para $Y = H_\alpha \cup_\Sigma H_\gamma$, existe un enlace enmarcado $L \subseteq Y$ tal que $X(Y, L) \cong W(\Sigma, H_\alpha, H_\beta, H_\gamma)$. En particular, $Y[L] \cong H_\beta \cup H_\gamma$.*

Sea $W = X(Y, L)$. Denotemos por $\partial_- W = Y$, y $\partial_+ W = Y[L]$. Es el análogo a los cuerpos de compresión en dimensión 3.

Observación. La definición de traza se puede generalizar a cualquier dimensión. En general si M es una variedad cerrada suave de dimensión $n - 1$, consideremos una k -asa n -dimensional $h^k = D^k \times D^{n-k}$. Sea $W = (M \times I) \cup h^k$, el resultado de pegar la k -asa a lo largo de $M \times \{1\}$. Entonces $\partial W = M \cup M'$, donde M' es el resultado de hacer cirugía sobre en M , W es la traza de la cirugía.

Como consecuencia del Teorema de Lickorish-Wallace, dadas dos 3-variedades cerradas Y, Y' , existe una 4-variedad W compacta suave tal que $\partial W = Y \cup Y'$. Esto ya que podemos encontrar un enlace L tal que $Y' = Y[L]$. En particular, $X(Y, L)$ se puede construir de manera dual, tomando un enlace enmarcado $L' \subseteq Y' = Y[L]$ de manera que $Y'[L'] = Y$. Entonces, como variedades, tendremos $X(Y, L) = X(Y', L')$, pero tendrán las fronteras intercambiadas, es decir

$$\partial_- X(Y, L) = Y = \partial_+ X(Y', L'), \quad \partial_+ X(Y, L) = Y' = \partial_- X(Y', L').$$

De manera análoga, en dimensión 3, tenemos las dos construcciones duales de los cuerpos de compresión, de “adentro hacia afuera” y de “afuera hacia adentro”.

En el caso 3-dimensional, para definir una descomposición de Heegaard generalizada de una 3-variedad compacta M , tomamos una descomposición en asas alternante

$$b_0 \cup N_1 \cup T_1 \cup \cdots \cup N_k \cup T_k \cup b_3,$$

donde los N_i y los T_i son, respectivamente, colecciones de 1-asas y 2-asas. Para el caso 4-dimensional, sea X una 4-variedad suave, compacta y conexa con frontera ∂X . Sea $\partial X =$

$\partial_- X \cup \partial_+ X$ una descomposición de la frontera. Consideremos la descomposición en asas de X relativa a $\partial_- X$

$$\mathcal{H} = b_0 \cup C_1 \cup D_1 \cup E_1 \cup \cdots \cup C_k \cup D_k \cup E_k \cup b_4,$$

donde b_0 , C_i , D_i , y E_i , b_4 son colecciones de 0-, 1-, 2-, 3-, y 4-asas, respectivamente. La 4-variedad X se construye por pasos. Empezamos con

$$(\partial_- X \times I) \cup b_0.$$

Añadimos las 1-asas C_1 a lo largo de

$$(\partial_- X \times \{1\}) \cup \partial b_0.$$

Después las 2-asas de D_1 en

$$((\partial_- X \times \{1\}) \cup \partial b_0) \cup C_1.$$

Luego las 3-asas de E_1 , y así sucesivamente. Sea X_i la 4-variedad resultado de detenernos después de adherir la i -ésima colección de 1-asas C_i ,

$$X_i = ((\partial_- X \times I) \cup b_0) \cup C_1 \cup D_1 \cup E_1 \cup \cdots \cup C_i.$$

La variedad X_i es una 4-variedad suave, compacta, con frontera no vacía. Denotamos por $Y_i = \partial X_i - \partial_- X$. De manera que $Y_0 = (\partial_- X \times \{1\}) \cup \partial b_0$. Como ya vimos en la sección **Cálculo de Kirby**, el efecto de pegar 2-asas en X_i es el de hacer cirugía sobre un enlace enmarcado en la frontera respectiva Y_i . Así, cada colección de 2-asas D_i nos determina la 4-variedad $X(Y_i, L_i)$.

Definición 3.3.4. Sea X una 4-variedad suave y compacta. Dada una descomposición de la frontera $\partial X = \partial_- X \cup \partial_+ X$. Entendemos por una trisección generalizada la colección de nervios $\{X(Y_i, L_i)\}$ junto con la información que describe las 1- y 3-asas que se pegan a lo largo de las fronteras.

$$X = b_0 \cup C_1 \cup X(Y_1, L_1) \cup E_1 \cup \cdots \cup X(Y_N, L_N) \cup E_N \cup b_4.$$

Equivalentemente

$$X = b_0 \cup C_1 \cup W_1 \cup E_1 \cup \cdots \cup W_N \cup E_N \cup b_4,$$

donde $W_i = W(\Sigma; H_\alpha^i, H_\beta^i, H_\gamma^i) \cong X(Y_i, L_i)$ para algunos 3-cubos con asas $H_\alpha^i, H_\beta^i, H_\gamma^i$ acorde al Lema **3.3.2**.

3.4. Posición delgada de una 4-variedad

La idea de Román Aranda en [4] para definir el ancho de esta trisección generalizada es aprovechar los invariantes de enlaces para definir la complejidad del i -ésimo nivel.

A la 4-variedad obtenida de pegar una k -asa h a la 4-variedad X la denotaremos por $X[h]$. Si $Y \subseteq \partial X$ es una subvariedad cerrada, posiblemente no conexas, escribiremos por $Y[h]$ el resultado en Y de pegar el asa h a X . Es decir

$$Y[h] = \overline{Y - \varphi((S^{k-1} \times D^{3-k}) \cup_{\varphi_1} (D^k \times S^{3-k}))}.$$

De igual manera, para colecciones de asas A que se pegan de manera simultánea escribimos $X[A]$ y $Y[A]$. Para colecciones de asas que se pegan de manera sucesiva escribimos $X[A, B]$ y $Y[A, B]$.

Si L es un enlace enmarcado en una 3-variedad Y , denotamos por $Y[L]$ a la 3-variedad resultado de hacer cirugía sobre L . Si h es una 2-asa 4-dimensional, esta induce un nudo enmarcado k en Y , el cual satisface $Y[L] = Y[h]$.

Sea X una 4-variedad suave compacta y conexa. Dada una descomposición en asas

$$\mathcal{H} = b_0 \cup C_1 \cup D_1 \cup E_1 \cup \dots \cup E_N \cup b_4$$

donde b_0, C_i, D_i, E_i, b_4 son colecciones de 0-, 1-, 2-, 3-, y 4-asas, respectivamente. Sea X_i la 4-variedad resultado de detenernos después de adherir la i -ésima colección de 1-asas C_i ,

$$X_i = ((\partial_- X \times I) \cup b_0) [C_1, D_1, \dots, C_i].$$

Denotamos por $Y_i = \partial X_i - \partial_- X$. En otras palabras

$$Y_i = ((\partial_- X \times \{1\}) \cup \partial b_0) [C_1, D_1, E_1, \dots, C_i]$$

De manera que $Y_0 = (\partial_- X \times \{1\}) \cup \partial b_0$ y $Y_{i+1} = Y_i[D_i, E_i, C_i]$. Escribimos L_i para denotar al enlace enmarcado en Y_i inducido por D_i .

Definición 3.4.1. Sea Y una 3-variedad suave, cerrada y conexa. Sea $L \subseteq Y$ un enlace enmarcado. Definimos la complejidad de L en ∂Y como

$$C(L, Y) = \begin{cases} 2t_Y(L) + 1 & \text{si } L \neq \emptyset \\ \text{máx}\{2g(Y) - 1, 0\} & \text{si } L = \emptyset, \end{cases}$$

donde $g(Y)$ es el género de Heegaard de Y .

Extendemos la definición al caso no conexo definiendo la complejidad de Y como

$$C(L, Y) = \sum_{Y' \subseteq Y} C(L', Y').$$

La suma es en las componentes conexas de Y , y $L' = L \cap Y'$, son las componentes de L que están contenidas en Y' .

Notemos que $C(\emptyset, Y) = 0$ si y sólo si Y es la unión ajena de 3-esferas.

De manera análoga a la definición de ancho para 3-variedades (definición 2.4.3). Definimos el ancho de una descomposición en asas como:

Definición 3.4.2. Sea X una 4-variedad suave, compacta, conexa. Dada una descomposición en asas de X del tipo

$$\mathcal{H} = b_0 \cup C_1 \cup D_1 \cup E_1 \cup \dots \cup C_N \cup D_N \cup E_N \cup b_4$$

definimos la complejidad de Y_i como el natural

$$c_i = C(L_i, Y_i) = \sum_{Y' \subseteq Y} C(L', Y').$$

Definimos el ancho de la descomposición \mathcal{H} como la tupla ordenada de manera no creciente de las complejidades de c_i . Por ejemplo, si las complejidades de la descomposición \mathcal{H} son 3, 1, 2, 1, 0, entonces $w(\mathcal{H}) = (3, 2, 1, 1, 0)$. Abusando de la notación, pensaremos el ancho tanto como una tupla (a_1, a_2, \dots, a_n) , como un conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Pensarlo como una tupla ordenada facilita la definición, mientras que manejarla como un conjunto facilita algunas operaciones y comparaciones entre anchos.

El orden es el mismo que en el caso 3-dimensional (definición 2.4.1). Este orden extiende el orden de la contención. Es decir, si $w(\mathcal{H}_1) \subseteq w(\mathcal{H}_2)$, entonces $w(\mathcal{H}_1) \leq w(\mathcal{H}_2)$.

El ancho de X se define como el mínimo de los anchos sobre todas sus descomposiciones

$$w(X) = \min\{w(\mathcal{H}) : \mathcal{H} \text{ es descomposición en asas de } X\}.$$

Una *posición delgada para X* es una descomposición en asas \mathcal{H} que alcanza el mínimo

$$w(\mathcal{H}) = w(X).$$

Por el lema 2.4.2, sabemos que siempre existe una posición delgada para X .

Ejemplo 3.4.3 ($S^1 \times S^3$). Para mostrar que $w(S^1 \times S^3) = \{1\}$, daremos una descomposición en asas \mathcal{H} tal que $w(\mathcal{H}) = \{1\}$. Como la variedad $S^1 \times S^3$ no es homeomorfa a S^4 , esta debe ser una posición delgada.

Sean $f_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas como en el ejemplo 1.1.5. Definimos la función

$$F : S^1 \times S^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad F(p, q) = (f_1(p) + 2)(f_2(q) + 2).$$

Ésta es una función de Morse con 4 puntos críticos. Sean

$$p_N^1 = (0, 1), \quad p_S^1 = (0, -1), \quad p_N^3 = (0, 0, 0, 1), \quad p_S^4 = (0, 0, 0, -1).$$

Los puntos p_N^1 y p_S^1 son puntos críticos de f_1 , y p_N^3 y p_S^3 son lo de f_2 . Recordemos que

$$\text{indice}(p_S^1) = 1, \quad \text{indice}(p_N^1) = 0, \quad \text{indice}(p_S^3) = 3, \quad \text{indice}(p_N^3) = 0.$$

Los puntos críticos de F son

$$p_1 = (p_S^1, p_S^3), \quad p_2 = (p_S^1, p_N^3), \quad p_3 = (p_N^1, p_S^3), \quad p_4 = (p_N^1, p_N^3).$$

El índice de p_1 es la suma de los índices de p_S^1 y p_S^3 . Es decir,

$$\text{indice}(p_1) = \text{indice}(p_S^1) + \text{indice}(p_S^3) = 4.$$

De la misma manera los puntos críticos p_2, p_3, p_4 tienen índices

$$\text{indice}(p_2) = 1, \quad \text{indice}(p_3) = 3, \quad \text{indice}(p_4) = 0.$$

Así, F induce una descomposición en asas \mathcal{H} de $S^1 \times S^3$ sin 2-asas y una 1-asa, por lo que $Y_1 = S^1 \times S^2$ y la única complejidad es

$$C(\emptyset, S^1 \times S^2) = 2g(S^1 \times S^2) - 1 = 1.$$

Así, el ancho de esta descomposición es $w(\mathcal{H}) = \{1\}$, con lo cual probamos que $S^1 \times S^3$ tiene ancho 1.

Ejemplo 3.4.4 ($\mathbb{C}P^2$). Del diagrama de Kirby para $\mathbb{C}P^2$ en figura 3.1, tenemos que $\mathbb{C}P^2$ tiene una descomposición en asas con una sola 2-asa, la cual se pega sobre S^3 . En este caso, K es el nudo trivial en S^3 , el cual tiene número de túnel 0. Por lo tanto $c_1 = C(K, S^3) = 1$ y $w(\mathbb{C}P^2) = \{1\}$. De manera análoga llegamos a que $w(\overline{\mathbb{C}P^2}) = \{1\}$.

Dada \mathcal{H} una descomposición en asas relativa a $\partial_- X$, denotamos por \mathcal{H}^{op} la descomposición de asas dual. De manera más específica, si

$$\mathcal{H} = b_0 \cup C_1 \cup D_1 \cup E_1 \cup \dots \cup C_N \cup D_N \cup E_n \cup b_4,$$

donde b_0, C_i, D_i, E_i , y b_4 son, respectivamente, colecciones de 0-, 1-, 2-, 3-, y 4-asas. Definimos la descomposición en asas para X relativa a $\partial_+ X$ como

$$\mathcal{H}^{op} = b_0^{op} \cup C_1^{op} \cup D_1^{op} \cup E_1^{op} \cup \dots \cup C_N^{op} \cup D_N^{op} \cup E_N^{op} \cup b_4^{op},$$

donde $b_0^{op} = b_4$, $C_i^{op} = E_{N+1-i}$, $D_i^{op} = D_{N+1-i}$, y $E_i^{op} = C_{N+1-i}$. Denotamos por Y_i^{op} las 3-variedades frontera respectivas, y por $L_i^{op} \subseteq Y_i^{op}$ el enlace correspondiente a la descomposición \mathcal{H}^{op} . Tenemos que $X(Y_i, L_i) = X(Y_{N+1-i}^{op}, L_{N+1-i}^{op})$. Como las complejidades $c_i = C(L_i, Y_i)$ dependen de las trisecciones $X(Y_i, L_i)$, esto implica que los anchos de \mathcal{H} y de \mathcal{H}^{op} son iguales.

Lema 3.4.5. *Sea \mathcal{H} una descomposición en asas para la 4-variedad suave compacta X relativa a $\partial_- X$. Entonces $w(\mathcal{H}) = w(\mathcal{H}^{op})$.*

3.4.1. Formas de adelgazar.

Sea X una 4-variedad suave y compacta con una descomposición de la frontera en dos subvariedades abiertas $\partial X = \partial_- X \cup \partial_+ X$. Tomamos una descomposición de asas relativa a $\partial_- X$,

$$\mathcal{H} = b_4 \cup C_1 \cup D_1 \cup E_1 \cup \cdots \cup E_N \cup b_4.$$

donde b_0 , C_i , E_i , y b_4 son colecciones (posiblemente vacías) de 0-asa, 1-asas, 2-asas, 3-asas y 4-asas. Denotamos por

$$X_i = ((\partial_- X \times I) \cup b_0)[C_1, D_1, E_1, \dots, C_i], \quad Y_i = ((\partial_- X \times \{1\}) \cup \partial b_0)[C_1, D_1, E_1, \dots, C_i].$$

Es decir, X_i es la variedad resultado de pegar las primeras i 1-, 2-, y 3-asas. Mientras que $Y_i = \partial X_i$.

Proposición 3.4.6. *Supongamos que \mathcal{H} es una en posición delgada para X . Entonces sucede lo siguiente*

- 1) *Supongamos que, para alguna $1 \leq i \leq N$, alguna componente de las 3-variedades $Y_i, Y_i[D_i]$ o $Y_i[D_i, E_i]$ es difeomorfa a una 3-esfera, digamos S . Entonces las componentes de $\overline{X - S}$ difeomorfas a B^4 están en $b_0 \cup b_4$.*
- 2) *Si para alguna $1 \leq i \leq N$ $D_i = E_i = \emptyset$, entonces $i = N$.*
- 3) *Si para alguna $1 \leq i \leq N$ $C_i = D_i = \emptyset$, entonces $i = 1$.*

Demostración. 1) Veamos el caso $S = Y_i[D_i, E_i] \cong S^3$ (en particular, este es el caso conexo). Sean $M_i = X_i[D_i, E_i]$. De manera que $\partial M_i = S$. Hay dos casos.

Caso 1) Si $M_i \cong B^4$, consideramos la descomposición en asas

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{b}_0 \cup C_{i+1} \cup D_{i+1} \cup E_{i+1} \cup \cdots \cup C_N \cup b_4,$$

donde $\tilde{b}_0 = M_i$. Tenemos entonces la contención $w(\tilde{\mathcal{H}}) \subseteq w(\mathcal{H})$. Como \mathcal{H} es delgada, debe darse la igualdad. Por lo tanto, $i = 0$ y $M_i = b_0$.

Caso 2) Si $\overline{X - M_i} \cong B^4$. Tomando $\tilde{b}_4 = \overline{X - M_i}$, de manera análoga al caso anterior, tomando una nueva descomposición en asas $\tilde{\mathcal{H}}$ con $\tilde{b}_4 = \overline{X - M_i}$. De manera que $w(\tilde{\mathcal{H}}) \subseteq w(\mathcal{H})$. Al ser \mathcal{H} delgada, debe darse la igualdad y por lo tanto $i = N$. Por lo tanto, la componente difeomorfa a B^4 debe pertenecer a $b_0 \cup b_4$.

El caso disconexo se sigue de que la complejidad es aditiva respecto a las componentes conexas. Los casos para $S \subseteq Y_i$ y $S \subseteq Y_i[D_i]$ son análogos.

2) Supongamos $D_i = E_i = \emptyset$ para alguna $i < N$. Consideremos la nueva descomposición resultado de juntar las colecciones C_i y C_{i+1} . Podemos juntar estas colecciones ya que no

hay otras asas intermedias. Esta descomposición, digamos $\tilde{\mathcal{H}}$, tiene ancho $w(\tilde{\mathcal{H}}) = \{c_j : j \neq i, 1 \leq j \leq N\} = w(\mathcal{H}) - \{c_i\}$. En particular, $w(\tilde{\mathcal{H}})$ está contenido propiamente en $w(\mathcal{H})$. Una contradicción a la minimalidad de $w(\mathcal{H})$.

3) La demostración es análoga a la del inciso 2).

□

Proposición 3.4.7. *Supongamos que existe una componente conexa $Y_i^* \subseteq Y_i$ tal que el enlace $L_i^* = L_i \cap Y_i^*$ se separa en Y_i^* . Escribiendo*

$$Y_i^* = A \#_S B, \quad L_i^A = L_i^* \cap A, \quad L_i^B = L_i^* \cap B,$$

y $D_i^B \subseteq D_i$ las 2-asas respectivas al enlace enmarcado L_i^B . Consideremos una nueva descomposición en asas para $X, \tilde{\mathcal{H}}$, obtenida de \mathcal{H} al separar las 2-asas D_i . Añadiendo primero $D_i - D_i^B$, y luego D_i^B ,

$$\tilde{\mathcal{H}} = b_0 \cup C_1 \cup D_1 \cdots \cup C_i \cup (D_i - D_i^B) \cup D_i^B \cup E_i \cup \cdots \cup E_n \cup b_n.$$

Entonces sucede alguno de los siguientes casos

- 1) Si $t_B(L_i^B) + 1 > g(B)$ y $t_A(L_i^A) + 1 > g(A[L_i^A])$, entonces $w(\tilde{\mathcal{H}}) < w(\mathcal{H})$.
- 2) Si $t_B(L_i^B) + 1 = g(B)$ o $t_A(L_i^A) + 1 = g(A[L_i^A])$, entonces $w(\tilde{\mathcal{H}}) > w(\mathcal{H})$.

Demostración. El i -ésimo nivel de \mathcal{H} es reemplazado por dos niveles en $\tilde{\mathcal{H}}$

$$Y^A = Y_i, \quad Y^B = Y^A[D_i - D_i^B].$$

De manera que la complejidad $c_i = C(L_i, Y_i)$ es reemplazada en $\tilde{\mathcal{H}}$ por las complejidades $c^A = C(L_i^A, Y^A)$ y $c^B = C(L_i^B, Y^B)$. El ancho de $\tilde{\mathcal{H}}$ es entonces

$$w(\tilde{\mathcal{H}}) = (w(\mathcal{H}) - \{c_i\}) \cup \{c^A, c^B\}.$$

Mostraremos que se dan las siguientes igualdades

$$c^A = c_i + 2(g(B) - t_B(L_i^B) - 1), \quad c^B = c_i + 2(g(A[L_i^A]) - t_A(L_i^A) - 1).$$

Como $t_B(L_i^B) + 1 \geq g(B)$ y $t_A(L_i^A) + 1 \geq g(A[L_i^A])$. Para el caso 1) tendremos $c^A < c_i$ y $c^B < c_i$, y por lo tanto $w(\tilde{\mathcal{H}}) < w(\mathcal{H})$. Para el caso 2) tendremos $c^A = c_i$ o $c^B = c_i$, y por lo tanto $w(\tilde{\mathcal{H}}) = w(\mathcal{H}) \cup \{c^*\} > w(\mathcal{H})$, donde c^* es c^A o c^B , según sea el caso.

Recordemos primero que

$$c(L_i^*, Y_i^*) = 2t_{Y_i^*}(L_i^*) + 1 = 2(t_A(L_i^A) + t_B(L_i^B) + 1) + 1 = 2t_A(L_i^A) + 2t_B(L_i^B) + 3. \quad (3.2)$$

Calculamos primero c^A

$$\begin{aligned}
c^A &= \sum_{Y' \subseteq Y_i - Y_i^*} C(L', Y') + C(L_i^*, Y_i^*) \\
&= \sum_{Y' \subseteq Y_i - Y_i^*} C(L', Y') + 2t_{Y_i^*}(L_i^A) + 1 \\
&= \sum_{Y' \subseteq Y_i - Y_i^*} C(L', Y') + 2t_{A \# B}(L_i^A) + 1 \\
&= \sum_{Y' \subseteq Y_i - Y_i^*} C(L', Y') + 2t_A(L_i^A) + 2g(B) + 1 \\
&= \sum_{Y' \subseteq Y_i - Y_i^*} C(L', Y') + C(Y_i^*, L_i^*) - 2t_B(L_i^B) - 3 + 2g(B) + 1 \\
&= c_i + 2(g(B) - (t_B(L_i^B) - 1)).
\end{aligned}$$

Para calcular c^B , notemos que $Y^B = (Y_i - Y_i^*) \cup Y_i^*[L_i^A]$.

$$\begin{aligned}
c^B &= \sum_{Y' \subseteq Y_i - Y_i^*} C(L', Y') + C(L_i^B, Y_i^*[L_i^A]) \\
&= \sum_{Y' \subseteq Y_i - Y_i^*} C(L', Y') + 2t_{Y_i^*[L_i^A]}(L_i^B) + 1 \\
&= \sum_{Y' \subseteq Y_i - Y_i^*} C(L', Y') + 2t_B(L_i^B) + 2g(A[L_i^A]) + 1 \\
&= \sum_{Y' \subseteq Y_i - Y_i^*} C(L', Y') + C(Y_i^*, L_i^*) - 2t_A(L_i^A) - 3 + 2g(A[L_i^A]) + 1 \\
&= c_i + 2(g(A[L_i^A]) - (t_A(L_i^A) - 1)).
\end{aligned}$$

Con lo que terminamos la demostración. □

Podemos deslizar 2-asas D_j sobre 1-asas y 2-asas de C_i y D_i con $i < j$ sin afectar el ancho.

Lema 3.4.8. *Sean $1 \leq i < j \leq N$ dos índices fijos. Consideremos componentes $A \subseteq D_j$ y $B \subseteq C_i \cup D_i$. Sea $\tilde{\mathcal{H}}$ la descomposición resultado de deslizar A sobre B , entonces $w(\tilde{\mathcal{H}}) = w(\mathcal{H})$.*

Demostración. Deslizar A sobre B corresponde a una isotopía de L^A en Y_i , donde L^A es el enlace correspondiente a 2-asa A . Dado que el número de túneles es un invariante de enlaces en 3-variedades, el deslizamiento de A no afecta las complejidades c_i y por lo tanto el ancho se conserva. □

Proposición 3.4.9. *Si la descomposición \mathcal{H} es delgada, entonces no contiene un $(1, 2)$ -par cancelable (α^1, β^2) , con $\alpha^1 \subseteq C_i$, $\beta^2 \subseteq D_i$, y tales que $(D_i - \beta^2) \cap \alpha^1 = \emptyset$.*

De manera similar, $D_i \cup E_i$ no tienen $(2, 3)$ -pares cancelables de (β^2, γ^3) , con γ^3 ajeno a $D_i - \beta^2$.

Demostración. Lo demostraremos por contrapositiva. Supongamos que existe el $(1, 2)$ -par cancelable (α^1, β^2) . Para cancelar este par, deslizamos las demás 2-asas de \mathcal{H} sobre β^2 . Por hipótesis, estas 2-asas sólo pueden pertenecer a D_k con $k > i$. Por el lema 3.4.8, estos deslizamientos no afectan el ancho. Obtenemos una nueva descomposición de X , $\tilde{\mathcal{H}}$, la cual es idéntica \mathcal{H} excepto en el i -ésimo nivel, donde tenemos ahora

$$\tilde{C}_i = C_i - \{\alpha^1\}, \quad \tilde{D}_i = D_i - \{\beta^2\}.$$

Consideremos $Y \subseteq Y_i$ la componente que contiene al nudo $\beta^2 \cap Y_i$, y \tilde{Y} el correspondiente a la descomposición $\tilde{\mathcal{H}}$. Las complejidades de \mathcal{H} y $\tilde{\mathcal{H}}$, digamos $\{c_i\}$ y $\{\tilde{c}_i\}$, sólo se diferencian en el i -ésimo elemento. Es decir $c_j = \tilde{c}_j$ para $j \neq i$. Sean \tilde{L} el enlace inducido por la colección 2-asas $(D_i - \beta_i)$ en \tilde{Y} y L_i el enlace inducido por D_i en Y . Para mostrar que $\tilde{c}_i < c_i$, mostraremos que $g_{\tilde{L}}(\tilde{Y}) < g_{L_i}(Y)$

Sea S una superficie de Heegaard que realiza $g_{L_i}(Y)$. Como \tilde{L} está contenido en el corazón de alguno de los 3-cubos con asas de esta descomposición, S es también una superficie de Heegaard para $Y - (\eta(\tilde{L}))$. Dado que $Y = \tilde{Y} \# (S^1 \times S^2)$ y el enlace \tilde{L} es ajeno a α^1 , tenemos la siguiente igualdad

$$Y - (\eta(\tilde{L})) = (\tilde{Y} - (\tilde{L})) \# (S^1 \times S^2).$$

Por el **Lema de Haken**, la superficie S se separa en una suma conexa $S = S_1 \# S_2$, donde S_1 y S_2 son superficies de Heegaard para $\tilde{Y} - (\tilde{D}_i \cap \tilde{Y})$ y $S^1 \times S^1$, respectivamente. En particular, $g(S_2) \geq 1$, y por lo tanto $g(S_1) < g(S)$. Así, como S_1 es superficie de Heegaard para \tilde{Y} con \tilde{L} contenido en el corazón de alguno de los cubos con asas que conforman la descomposición, entonces

$$g_{\tilde{L}}(\tilde{Y}) \leq g(S_1) < g(S) = g_{L_i}(Y).$$

Lo cual implica que $\tilde{c}_i < c_i$, con lo que terminamos.

El resultado para el $(2, 3)$ -par cancelable (β^2, γ^3) es consecuencia de aplicar el caso anterior a la descomposición en asas dual \mathcal{H}^{op} . \square

3.4.2. Variedades de ancho pequeño.

Es inmediato que S^4 tiene ancho $\{0\}$. Por otro lado, si la 4-variedad X tiene ancho $\{0\}$, con X cerrada, entonces existe una función de Morse $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con sólo dos puntos críticos. Por el **Teorema de Reeb** X es homeomorfa a S^4 .

El siguiente caso a considerar es el de ancho $\{1\}$. Ya vimos que las variedades $S^1 \times S^3$, $\mathbb{C}P^2$, $\overline{\mathbb{C}P}^2$ tienen ancho $\{1\}$. De hecho, estas son todas las 4-variedades de ancho $\{1\}$.

Proposición 3.4.10. *Sea X una 4-variedad suave, cerrada y conexa. Si $w(X) = \{1\}$, entonces X es difeomorfa a $S^1 \times S^3$, $\mathbb{C}P^2$, o a $\overline{\mathbb{C}P^2}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{H} = b_0 \cup C_1 \cup D_1 \cup E_1 \cup b_4$ la descomposición de X que alcanza ancho mínimo. Al ser X conexa, podemos suponer que b_0 consiste de una única 0-asa. De lo contrario, existe una 1-asa en C_1 que se cancela con una 0-asa de b_0 . Esto ya que las únicas asas que pueden conectar distintas componentes son las 1-asas. Cancelar este par $(0, 1)$ -cancelable no modifica a la variedad Y_1 , por lo que no afecta al ancho.

Como un primer caso, supongamos $D_1 = \emptyset$. Así, como

$$1 = C(\emptyset, Y_1) = \max\{2g(Y_1) - 1, 0\},$$

debe darse que $g(Y_1) = 1$. Al ser $Y_1 \cong \#^{|C_1|}(S^1 \times S^2)$, tenemos que $|C_1| = 1$. Por dualidad, tenemos también que $|E_1| = 1$. Así, X tiene una descomposición con una 0-asa, una 1-asa, una 3-asa, y una 4-asa, lo cual implica que $X \cong S^1 \times S^3$.

Supongamos ahora que $D_1 \neq \emptyset$. Sea L_1 el enlace enmarcado correspondiente a D_1 . Entonces

$$1 = C(L_1, Y_1) = 2t_{Y_1}(L_1) + 1 = 2g_{L_1}(Y_1) - 1,$$

por lo que $t_{Y_1}(L_1) = 0$ y $g(Y_1) \leq g_{L_1}(Y_1) = 1$. En particular, $|C_1| \leq 1$. Tenemos dos subcasos.

i) Si $|C_1| = 0$, entonces $Y_1 \cong S^3$ y L_1 es el nudo trivial con marco n . Al ser $Y_1[L_1] \cong \#^k(S^1 \times S^2)$, $n = 0$ o $n = \pm 1$. Si $n = 0$, entonces $X \cong S^4$. Si $n = 1$, entonces $X \cong \mathbb{C}P^2$. Si $n = -1$, entonces $X \cong \overline{\mathbb{C}P^2}$. Como X tiene ancho $\{1\}$, no puede ser la 4-esfera. Por lo tanto, X es difeomorfa a $\mathbb{C}P^2$ o a $\overline{\mathbb{C}P^2}$.

ii) Si $D \neq \emptyset$ y $|C_1| = 1$, entonces, como $t_{Y_1}(L_1) = 0$, la vecindad tubular $\eta_{Y_1}(L_1)$ induce una descomposición de Heegaard en $Y_1 \cong S^1 \times S^2$. Por la unicidad de la descomposición (Teorema 2.2.5), el enlace L_1 debe intersectar a C_1 en un solo punto. Esto quiere decir que $C_1 \cup D_1$ forman un $(1, 2)$ -par cancelable. En cuyo caso $X \cong S^4$, contradiciendo el hecho de que X tiene ancho $\{1\}$. Así, este caso no puede suceder.

Sólo hay dos casos. Si $D_1 = \emptyset$, entonces $X \cong S^1 \times S^3$. Si $D_1 \neq \emptyset$, entonces $|C_1| = 1$ y $X \cong \mathbb{C}P^2$ o $X \cong \overline{\mathbb{C}P^2}$. \square

El siguiente caso a estudiar es cuando el ancho de la variedad es una colección de 1's. Veremos primero un subcaso sencillo. Cuando las 3-variedades de nivel $Y_i[D_i, E_i]$ son conexas. Después generalizamos el resultado para 3-variedades de nivel arbitrarias.

Proposición 3.4.11. *Sea X una 4 variedad suave, cerrada, y conexa, con ancho $w(X) = \{1, 1, \dots, 1\}$. Supongamos que las 3-variedades $Y_i[D_i, E_i]$ son conexas para cada $1 \leq i \leq N$. En este caso X es de la forma*

$$X \cong \left(\#^{k_1}(S^1 \times S^3) \right) \# \left(\#^{k_2}(S^1 \times B^3) \right) \# LP,$$

donde LP es una suma conexas de linear plumbings de discos fibrados sobre la esfera.

Demostración. Por definición, tenemos que $1 = C(L_i, Y_i) \geq g(Y_i)$. Luego, cada Y_i es un espacio lente

$$Y_i \cong L(p, q), \quad Y_i \cong S^3, \quad \text{o} \quad Y_i \cong S^1 \times S^2.$$

Tomando en cuenta la descomposición en asas dual \mathcal{H}^{op} , como $Y_{i-1} = Y_i^{op}[D_i^{op}, E_i^{op}]$, tenemos que lo mismo que cumple para $Y_i[D_i] = Y_i^{op}$. C

Consideremos ahora una 3-asa $h^3 = D^3 \times D^1$, con mapeo de pegado $\varphi : S^2 \times D^1 \rightarrow Y_i[D_i]$. El efecto de pegar h en sobre $Y_i[D_i]$ es el siguiente

$$Y_i[D_i, h] = \overline{Y_i[D_i] - \varphi(S^2 \times D^1)} \cup D^3 \times S^0.$$

Al pegar una 3-asa, efectivamente, estamos removiendo una 2-esfera (en realidad, una vecindad tubular de esta) y tapando el resultado con 3-bolas. Si $Y_i[D_i]$ es irreducible, este proceso desconecta a la 3-variedad $Y_i[D_i]$. En particular, si $Y_i[D_i] \cong S^3$ o $Y_i[D_i] \cong L(p, q)$, entonces $Y_i[D_i, h]$ es disconexa. Por hipótesis, $Y_i[D_i, E_i]$ es conexas. Por lo tanto, si $E_i \neq \emptyset$, entonces $Y_i[D_i] \cong S^1 \times S^2$. Pero $S^1 \times S^2$ admite, a lo más, una 2-esfera no separante, por lo que $|E_i| \leq 1$, y $|E_i| = 1$ si y sólo si $Y_i[D_i] \cong S^1 \times S^2$, en cuyo caso $E_i \cap Y_i[D_i] \cong \{\text{pt}\} \times S^2$ y por lo tanto $Y_i[D_i, E_i] \cong S^3$.

Si $|E_i| = 1$ y $i < N$, podemos descomponer X en una suma conexas. Tomando

$$\mathcal{H}_R = b_0 \cup C_1 \cup D_1 \cup E_1 \cup \dots \cup D_i \cup E_i \cup B^4 \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_S = B^4 \cup C_{i+1} \cup D_{i+1} \cup E_{i+1} \cup b_4.$$

Sean R y S las variedades con descomposiciones respectivas \mathcal{H}_R y \mathcal{H}_S . Entonces $X = R \# S$, y R y S tienen anchos $w(R) = w(\mathcal{H}_R) = \{1, 1, \dots, 1\}$, $w(S) = w(\mathcal{H}_S) = \{1, 1, \dots, 1\}$, de manera que $w(X) = w(R) \cup w(S)$. Esto ya que si alguno de los anchos fuese estrictamente menor, digamos $w(R) < w(\mathcal{H}_R)$, entonces sustituyendo la descomposición en asas de R que alcanza el ancho mínimo en la descomposición \mathcal{H} de $X = R \# S$, obtenemos una descomposición en asas con ancho menor a \mathcal{H} , una contradicción. Luego, \mathcal{H}_R y \mathcal{H}_S son descomposiciones de asas respectivas para R y S que alcanzan el ancho mínimo. En particular, tanto R como S satisfacen las hipótesis de la proposición. Podemos entonces suponer que $E_i = \emptyset$ para $i < N$. De manera dual, fijándonos en la descomposición \mathcal{H}^{op} , podemos suponer que $C_i = \emptyset$.

El caso $N = 1$ fue resuelto en proposición 3.4.10. Supongamos entonces que $N > 1$. Por la proposición 3.4.6, si $N > 1$, entonces $D_1 \neq \emptyset$. Ahora, si $C_1 \neq \emptyset \neq D_1$, entonces $1 = C(L_1, Y_1) = 2t_{Y_1}(L_1) + 1$. Por lo tanto $t_{Y_1}(L_1) = 0$ y C_1 consiste de una sola 1-asa. Esto implica que C_1 interseca transversalmente a D_1 en un punto. Es decir, $C_1 \cup D_1$ forman un $(1, 2)$ -par cancelable. Como D_1 consta de una sola 2-asa, esto contradice la proposición 3.4.9.

Podemos suponer entonces que $C_i = \emptyset$ para cada $1 \leq i \leq N$. De manera dual, fijandonos en \mathcal{H}^{op} , podemos suponer $E_i = \emptyset$ para cada $1 \leq i \leq N$.

Tenemos entonces que $t_{Y_i} = 0$, y

$$Y_i \cong \begin{cases} L(p, q) & \text{si } 1 \leq i \leq N. \\ S^3 & \text{si } i = 1, N. \end{cases}$$

Por lo tanto, L_1 es un no nudo en S^3 con marco $n_1 \in \mathbb{Z}$, lo cual implica que $Y_2 \cong L(n_1, 1)$. Como $Y_2 \not\cong S^3$, el marco $n_1 \neq \pm 1$.

Consideremos ahora la descomposición de Heegaard $Y_2 = V_1 \cup W_1$, donde $V_1 = \overline{S^3 - \eta(L_1)}$. De manera que $W_1 \subseteq Y_2$ es un toro sólido. Si empujamos al nudo L_1 según el marco n_1 en V_1 , este acota un meridiano en W_1 . Como $C(L_1, Y_1) = 1$, L_2 tiene número de túnel 0. Así, L_2 es isotópico en Y_2 al alma de V_1 o de W_1 .

Nos gustaría que L_2 fuese el alma de V_1 . Veamos que podemos isotopar L_2 dentro de V_1 . Supongamos que L_2 el alma de W_1 . Sea m meridiano de ∂W_1 y μ meridiano de ∂V_1 , con λ la longitud preferente. Tomamos una función $f : \partial W_1 \rightarrow \partial V_1$ difeomorfismo que invierte la orientación de manera que la función inducida en homología satisface

$$f_* : H_1(\partial W_1, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\partial V_1, \mathbb{Z}) \quad f_*(m) = \mu + n_1 \lambda.$$

Escogemos una longitud $\ell \subseteq \partial W_1$ de manera que f_* tiene matriz asociada

$$f_* = \begin{pmatrix} n_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $Y_2 = V_1 \cup_f W_1$. Como $\ell \subseteq \partial W_1$ es paralelo al alma de W_1 , y $f_*(\ell) = \lambda$. Podemos entonces isotopar L_2 en Y_2 a ℓ sin cruzar μ . Así, podemos suponer L_2 alma de V_1 .

Por lo tanto, bajo una isotopía en X_2 , el enlace $L_1 \cup L_2 \subseteq Y_1 \cong S^3$ es un enlace de Hopf con marco (n_1, n_2) .

Para $i = 3$, tenemos nuevamente que $\partial\eta(L_3) \subseteq Y_3 = S^3[L_1 \cup L_2] = L(p, q)$ es una superficie de Heegaard para Y_3 . Como $\overline{S^3 - \eta(L_1 \cup L_2)} \cong T \times i$ es un producto. Podemos descomponer

$$Y_3 = V_2 \cup \overline{S^3 - \eta(L_1 \cup L_2)} \cup W_2.$$

Con V_2, W_2 toros sólidos. Nuevamente, el push-off de L_1 respecto al marco n_1 acota un disco meridiano en V_2 , y el push-off de L_2 respecto al marco n_2 acota un disco meridiano en W_2 .

Tenemos los ingredientes para proceder de manera inductiva. Obtenemos el enlace $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_N$ con marco (n_1, n_2, \dots, n_N) como se ve en la figura 3.8

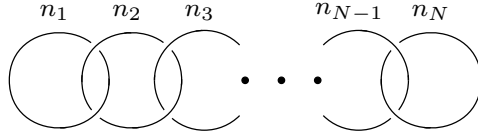


Figura 3.8: Diagrama del enlace L

El cual representa un linear plumbing de discos fibrados sobre la esfera. Con lo que terminamos la prueba. \square

Teorema 3.4.12. *Sea X una 4-variedad conexa compacta con ancho $w(X) = \{1, 1, \dots, 1\}$. Entonces X es difeomorfa a una suma conexa*

$$X \cong \left(\#^{k_1}(S^1 \times S^3) \right) \# \left(\#^{k_2}(S^1 \times B^3) \right) \# LP,$$

donde LP es suma conexa de linear plumbings haces de discos sobre la esfera y con $k_1, k_2 \geq 0$.

Demostración. Sea

$$\mathcal{H} = b_0 \cup C_1 \cup D_1 \cup E_1 \cup \dots \cup E_N \cup b_4$$

una posición delgada para X de ancho $\{1, 1, \dots, 1\}$. Veamos primero cómo deben ser las asas y las 3-variedades de nivel Y_i .

Las 3-variedades de nivel $Y_i, Y_i[D_i]$, y $Y_i[D_i, E_i]$ pueden no ser conexas. Por definición,

$$1 = c_i = \sum_{Y' \subseteq Y_i} C(L', Y'),$$

donde la suma es sobre las componentes conexas de Y_i . Cada $C(L', Y') \geq 0$. En particular, tenemos también que $g(Y') \leq 1$ y $g(Y'[D_i]) \leq 1$ para cada componente $Y' \subseteq Y_i$. Sea Y_i^* la única componente de Y_i tal que $C(L_i^*, Y_i^*) = 1$.

Supongamos que $Y_i^* = (\#^j X'_j) \#(S^1 \times S^2)$, donde $X'_j \subseteq Y_{i-1}[D_i, E_i]$ son algunas componentes conexas. Notemos que cada $X_j = S^3$. Supongamos que $D_i \neq \emptyset$, entonces $0 = t_{Y_i^*}(L_i^*) = t_{S^1 \times S^2}(L_i^*)$. Así, L_i^* es un nudo y existe una 1-asa $h^1 \subseteq C_i$ tal que $C \cup D_i$ es un $(1, 2)$ -par cancelable. Por la proposición 3.4.9, esto contradice la minimalidad del ancho. Luego, si $D_i \neq \emptyset$, entonces las 1-asas de C_i actúan sólo en distintas componentes conexas de $Y_i[D_i, E_i]$. Es decir, L_i no interseca las regiones de pegado de las 1-asas de C_i .

Por un argumento dual, tomando \mathcal{H}^{op} , si $D_i \neq \emptyset$, entonces las esferas de pegado de cada 3-asa en E_i es separante en $Y_i[D_i]$. En particular, como $g(Y'[D_i]) \leq 1$ para cada componente $Y' \subseteq Y$, la esfera de pegado de E' debe acotar una 3-bola en $Y_i[D_i]$. Podemos isotopar las esferas

de pegado en $Y_i[D_i]$, esto es, deslizar las 3-asas de E_i sobre asas anteriores, de manera que $E_i \cap Y_i$ es disjunto de los lazos L_j para cada $j \leq i$ vistos como subconjuntos de $(\partial_- X \times \{1\}) \cup \partial b_0$.

Daremos la prueba del teorema por inducción sobre el número de 2-asas de \mathcal{H} . Si \mathcal{H} no tiene 2-asas, entonces X se descompone en una suma conexa de $S^1 \times S^3$. Esto ya que, por el ejemplo 3.4.3 y la proposición 3.4.10 $S^1 \times S^3$ es la única 4-variedad que tiene descomposición en asas con sólo una 0-asa, una 1-asa, cero 2-asas, una 3-asa y una 4-asa.

Supongamos que tiene por lo menos una 2-asa. Sea $1 \leq i_0 \leq N$ el mínimo índice tal que $D_{i_0} \neq \emptyset$. Por lo anterior, esto implica que $Y_{i_0}^* = S^3$. Luego, $L_{i_0}^*$ es un nudo trivial en S^3 el cual puede ser isotopado para yacer dentro de la 3-bola G acotada por una 2-esfera $F \subseteq Y_{i_0}^*$ disjunta de las regiones de pegado de asas previas en ∂b_0 . Supongamos que $D_{i_0+1} \neq \emptyset$, entonces $Y_{i_0+1} = \#^j X'_j$ para algunas componentes $X'_j \subseteq Y_{i_0}[D_{i_0}, E_{i_0}]$. Por el argumento de párrafo anterior, bajo una isotopía, podemos escoger F y G de manera que no intersequen las esferas de pegado de E_{i_0} . Podemos pensar F y G encajadas en $Y_{i_0}[D_{i_0}, E_{i_0}]$ y también en Y_{i_0+1} . Esto lo hacemos utilizando el flujo asociado a una función de Morse inducida por \mathcal{H} . Si $L_{i_0+1} \subseteq Y_{i_0+1}^*$ está contenida en la misma componente que $F \cup G \subseteq Y_{i_0+1}$, entonces, bajo una isotopía en $Y_{i_0}[D_{i_0}, E_{i_0}]$, podemos suponer que $L_{i_0+1}^* \subseteq G$. Para esto, recordemos que $Y_{i_0+1}^* = \# X'_j$ donde todas excepto por a lo más una X'_j son homeomorfas a S^3 . La componente que no es S^3 debe contener a $F \cup G$. Estas isotopías corresponden a deslizar las asas de D_{i_0+1} sobre asas anteriores. Por el lema 3.4.8, esto no afecta al ancho. Nuevamente, podemos suponer que tanto F como G son disjuntos a las regiones de pegado de E_{i_0} .

Podemos continuar con el proceso de isotopar L_{i_0+l} de manera que quede contenido en G hasta que $D_{i_0+k} = \emptyset$, o hasta que L_{i_0+k} esté contenida en una componente distinta de Y_{i_0+k} que $F \cup G$. Es cualquier caso, esto implica que la componente Y_{i_0+k} que contiene a $F \cup G$ debe ser S^3 . Si nos fijamos en la región de pegado de las asas en $(\partial_- X \times \{1\}) \cup \partial b_0$, la esfera $F \subseteq (\partial_- X \times \{1\}) \cup \partial b_0$ separa al enlace

$$\bigcup_{0 \leq l \leq k-1} L_{i_0+l}$$

del resto del diagrama de Kirby para X . Por lo tanto, F separa a X como una suma conexa $X = R \# S$, donde R tiene descomposición en asas dada por

$$b_0 \cup \left(\bigcup_{0 \leq l \leq k-1} D_{i_0+l} \right).$$

Notemos que $w(R) \leq w(X)$ y $w(S) \leq w(X)$. En particular, tanto $w(R)$ como $w(S)$ es una colección de 1's, R satisface las condiciones de la proposición 3.4.11, y la descomposición en asas de S inducida por \mathcal{H} al quitarle las 2-asas que constituyen a R son menos que las de \mathcal{H} . Esto concluye el paso inductivo. \square

Ejemplo 3.4.13. Consideremos la 4-variedad con frontera resultado de pegar 2-asas según el diagrama de la figura 3.9.

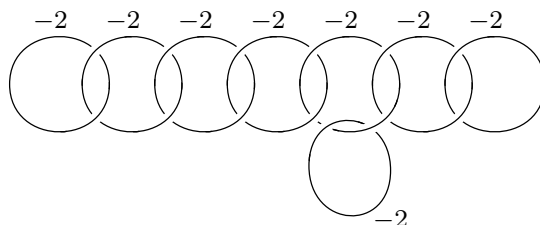


Figura 3.9: Diagrama de E_8

Consideremos la descomposición en asas $\mathcal{H}_1 = b_0 \cup D$, donde pegamos las ocho 2-asas de manera simultánea. En este caso, tenemos $Y_1 = S^3$ y el enlace tiene número de túneles 7 (basta unir círculos adyacentes con un arco). Así $w(\mathcal{H}_1) = \{15\}$. Podemos también construir esta variedad un paso a la vez. Es decir, Sea $\mathcal{H}_2 = b_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_8$ la descomposición en asas donde cada D_i consiste de una sola 2-asa. La asa D_i , con $i \leq 7$, corresponde al i -ésimo nudo de izquierda a derecha. Mientras que D_8 es la 2-asa que “cuelga” de D_5 .

Tenemos que $Y_1 = S^3$ y $Y_2 = L(2, 1)$. En general, para $2 \leq i \leq 8$, Y_i es el espacio lente $L(p_i, q_i)$, donde p_i, q_i son primos relativos tales que $[-2, -2, \dots, -2]$ (-2 se repite $(i-1)$ veces) es la fracción continua de p_i/q_i . Como el coeficiente de cirugía es un entero, el enlace L_i es paralelo a la instrucción de cirugía $J_i \subseteq \eta(L_i)$ y es isotópico al alma de uno de los toros sólidos que forman la descomposición de Heegaard para $L(p_i, q_i)$. Así, $t(L_i, Y_i) = 0$ y por lo tanto $c_i = 1$ para cada $1 \leq i \leq 7$.

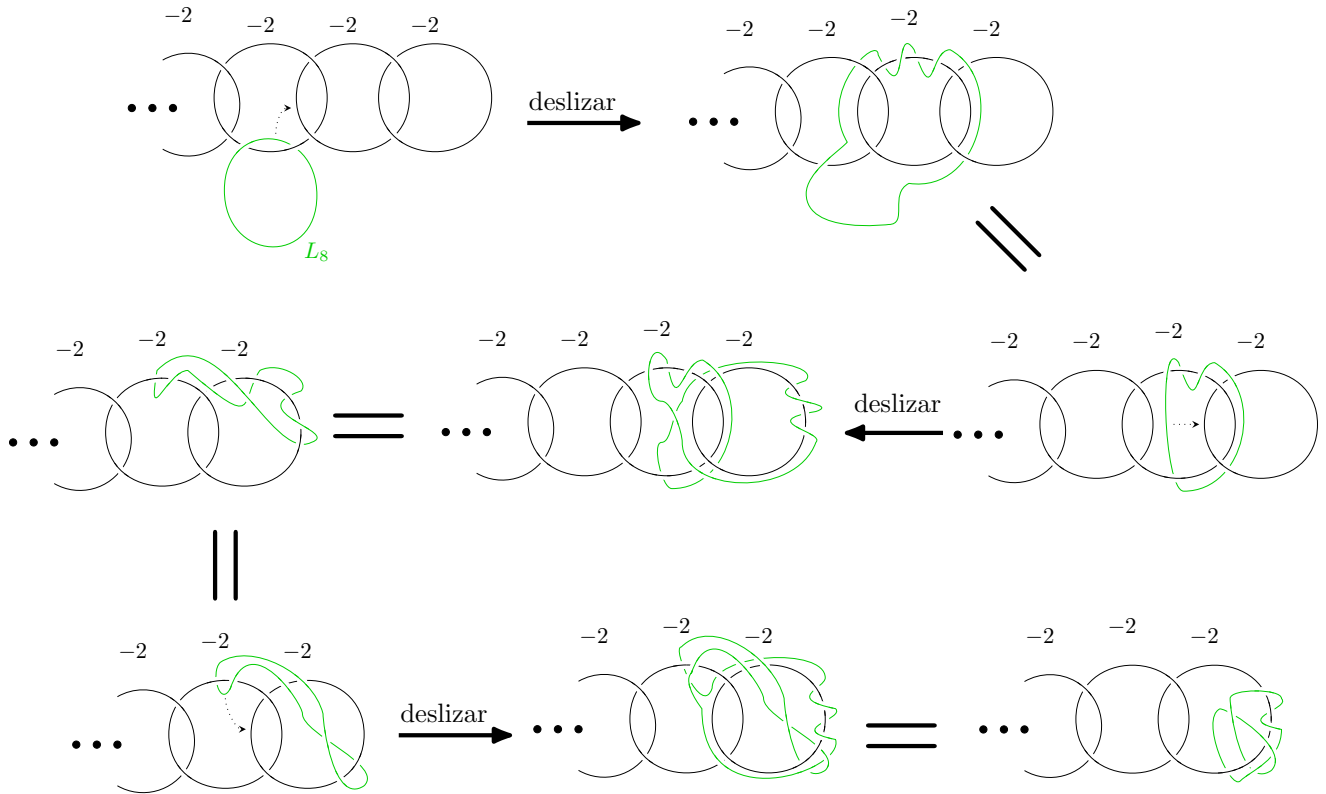


Figura 3.10: Sucesión de isotopías de L_8 en Y_8 . Deslizar el nudo significa que pasamos por la 2-asa correspondiente.

Para calcular $c_8 = 2t(L_8, Y_8) + 1$ necesitamos encontrar un sistema de túneles para L_8 en Y_8 . Para esto, en la figura 3.10 dibujamos L_8 en una descripción de cirugía de Dehn para Y_8 . Deslizamos L_8 en el diagrama hasta que este sólo se enlace con L_7 . Deslizar L_8 sobre los otros nudos enmarcados L_i con $i \leq 7$ corresponde a una isotopía de L_8 en Y_8 , por lo que no afecta al número de túneles para L_8 .

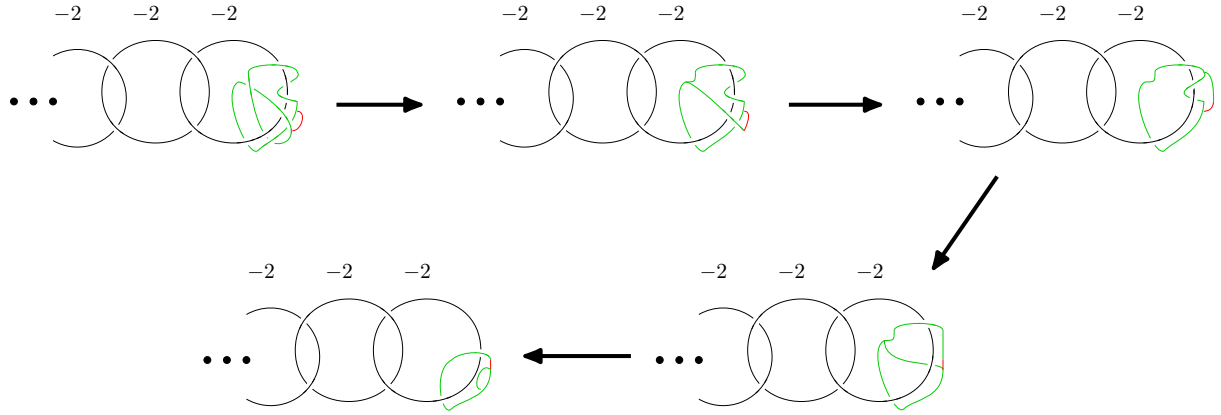


Figura 3.11: Isotopias de $L_8 \cup t$ en Y_8 .

En la figura 3.11 se muestra que $t(L_8, Y_8) \leq 1$. Para esto, deslizamos arcos del 1-complejo $L_8 \cup t$. El túnel t aparece en rojo. Deslizar de esta forma corresponde a isotopías de la superficie $\partial\eta(L_8 \cup t)$ en Y_8 , lo cual corresponde a una superficie de Heegaard de género dos para $Y_8 = L(p_8, q_8)$. Luego, $c_8 \leq 3$ y por lo tanto

$$w(\mathcal{H}_2) \leq \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3\}.$$

Esta debe ser una igualdad. De lo contrario, $c_8 = 1$ y entonces $w(E_8) \leq w(\mathcal{H}_2) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$. La proposición 3.4.11 implica que E_8 es difeomorfo a una suma conexas por la frontera de linear plumbings sobre la esfera. Una contradicción. Por lo tanto $c_8 = 3$.

3.4.3. El ancho bajo pegados

Proposición 3.4.14. Sean M y N 4-variedades suaves con frontera no vacía. Sea $f : \partial M \rightarrow \partial N$ un difeomorfismo. Entonces

$$w(M \cup_f N) \leq w(M) \cup w(N).$$

Demostración. Sean \mathcal{H}_M y \mathcal{H}_N posiciones delgadas para M y N , respectivamente. Colocando la descomposición \mathcal{H}_M seguida de \mathcal{H}_N , obtenemos una descomposición en asas para la unión $M \cup N$, digamos $\mathcal{H}_{M \cup N}$. Por definición de $\mathcal{H}_{M \cup N}$, y por el lema lema 2.4.2, tenemos que

$$w(M \cup N) \leq w(\mathcal{H}_{M \cup N}) = w(\mathcal{H}_M) \cup w(\mathcal{H}_N) = w(M) \cup w(N).$$

□

En particular, la suma conexa es el resultado de pegar dos variedades agujeradas a través de sus fronteras, por lo que tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.4.15. *Sean M y N 4-variedades suaves compactas. Entonces*

$$w(M \# N) \leq w(M) \cup w(N).$$

En el teorema 3.4.12 podemos ver que la igualdad se da para la suma conexa de variedades de ancho $\{1\}$

$$w\left(\left(\binom{k_1}{\#}(S^1 \times S^3)\right) \# \left(\binom{k_2}{\#}(S^1 \times B^3)\right) \# LP\right) = \bigcup^{k_1} w(S^1 \times S^3) \cup \bigcup^{k_2} (S^1 \times B^3) \cup w(LP).$$

Veamos ahora un ejemplo donde se da la desigualdad estricta.

Ejemplo 3.4.16. Consideremos el diagrama para la variedad E_8 . Sea N la 4-variedad con frontera resultado de pegar una 2-asa a lo largo del nudo trébol izquierdo con marco -1 . La variedad N tiene descomposición en asas $\mathcal{H}_N = b_0 \cup D$, donde b_0 y D constan, respectivamente, de una 0-asa y una 1-asa. Tenemos entonces que

$$w(N) = \{3\} \quad y \quad w(E_8) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3\}.$$

Un difeomorfismo $f : \partial N \rightarrow \partial E_8$ está determinado por la imagen del círculo punteado como se muestra en la figura 3.12. El círculo punteado en el nudo trébol es el meridiano del mismo. Mandamos el marco 0, es decir, el marco preferente, al círculo punteado con marco -1 en el nudo E_8 . Podemos pensar que estamos despegando la 2-asa de N y pegándola en E_8 . El resto de la frontera ∂N es una 2-esfera menos la vecindad tubular del nudo trébol. Así, el difeomorfismo se extiende de manera única.

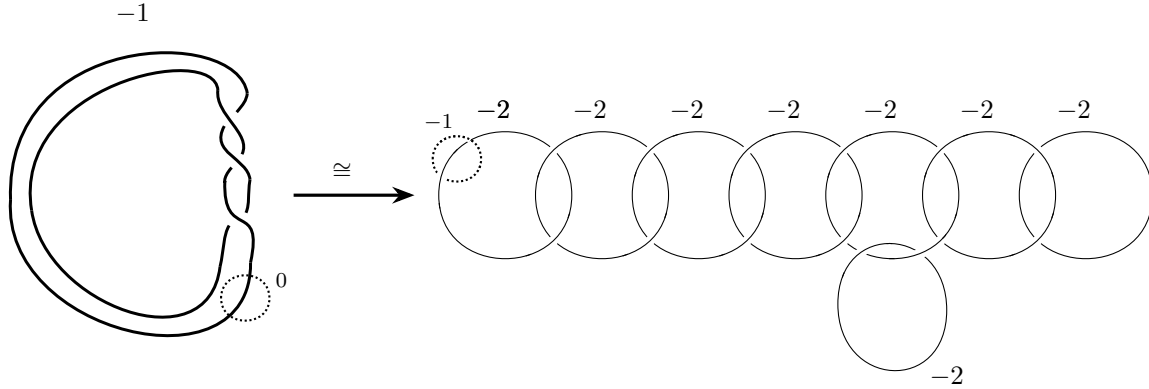


Figura 3.12: El difeomorfismo $f : \partial N \rightarrow \partial E_8$ queda determinado por la imagen del círculo punteado.

La proposición anterior nos da como cota

$$w(N \cup_f E_8) \leq \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3\}.$$

Sin embargo, $N \cup_f E_8$ es difeomorfa a $\mathbb{C}P^2 \# 8\overline{\mathbb{C}P^2}$, la cual tiene ancho

$$w(\mathbb{C}P^2 \# 8\overline{\mathbb{C}P^2}) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} < \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3\}.$$

El ejemplo anterior muestra que se puede dar la desigualdad estricta. Dadas dos 4-variedades M y N con fronteras difeomorfas, queda entonces la pregunta: ¿Existe un difeomorfismo $f : \partial M \rightarrow \partial N$ tal que $w(M \cup_f N) = w(M) \cup w(N)$? En caso de que la respuesta sea negativa, ¿Cuáles son las obstrucciones en $\partial M = \partial N$? Como caso particular tenemos la suma conexa; ¿Es cierto que $w(M \# N) = w(M) \cup w(N)$?

Por otro lado, falta ver si se puede extender la definición de posición delgada, tanto en dimensión 3 como en dimensión 4, para variedades compactas no orientables. Lo que se vio en apartado 2.2 es fácilmente generalizable al caso no orientable. Para el caso 4-dimensional, [27] Speer y Tillman definen trisecciones para 4-variedades compactas no orientables. En [18], Miller y Naylor demuestran teoremas análogos a los vistos en apartado 3.2, y estudian el caso con frontera. En particular, dan una definición de cuerpo de compresión para 4-variedades. Lo anterior indica que se puede extender la definición de posición delgada para 3- y 4-variedades para incluir el caso no orientable.

Bibliografía

- [1] M. Audin y M. Damian. *Morse Theory and Floer Homology*. Springer, 2014.
- [2] L. N. Carvalho y U. Oertel. “A classification of automorphisms of compact 3-manifolds”. En: *arXiv preprint* arXiv:0510610, (2005).
- [3] A. J. Casson y C. M. Gordon. “Reducing Heegaard Splittings”. En: *Topology and its Applications* 27 (1987), págs. 275-283.
- [4] J. R. A. Cuevas. “Thin position through the lens of trisections of 4-manifolds”. En: *arXiv preprint* arXiv:1805.08857v3 (2019).
- [5] R. Fenn y C. Rourke. “On Kirby Calculus of links”. En: *Topology* 18 (1979), págs. 1-15.
- [6] D. Gay. “From Heegaard splittings to trisections; porting 3-dimensional ideas to dimension 4”. En: *arXiv preprint* arXiv:1902.01797 (2019).
- [7] D. Gay y R. Kirby. “Trisecting 4-manifolds”. En: *Geometry and Topology* 20 (2016), págs. 3097-3132.
- [8] V. Guillemin y A. Pollack. *Differential Topology*. Vol. 370. AMS Chelsea Publishing, 1974.
- [9] S. Hensel y J. Schultens. “Strong Haken via Sphere Complexes”. En: *arxiv preprint* <https://arxiv.org/abs/2003.08523> (2020).
- [10] M. W. Hirsch. *Differential Topology*. Vol. 33. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.
- [11] R. Kirby. “A Calculus for framed links in S^3 ”. En: *Inventiones Mathematicae* 45 (1978), págs. 35-56.

- [12] A. A. Kosinski. *Differential Manifolds*. Dover Publications, 2007.
- [13] F. Laudenbach. *Topologie différentielle*. Cours ‘a l’Ecole Polytechnique, 1992.
- [14] F. Laudenbach y V. Poénaru. “A note on 4-dimensional handlebodies.” En: *Bull. Soc. math. France* 100 (1972), págs. 337-344.
- [15] W. B. R. Lickorish. “A Representation of Orientable 3-manifolds”. En: *Annals of Mathematics* 76 (1962), págs. 531-540.
- [16] Y. Matsumoto. *An Introduction to Morse Theory*. Vol. 208. International Translations of Mathematical Monographs. Amer Mathematical Society, 2001.
- [17] J. Meier, T. Schirmer y A. Zupan. “Classification of trisections and the generalized property R conjecture.” En: *Proc. Amer. Math. Soc* 144 (2016), págs. 4983-4997.
- [18] M. Miller y P. Naylor. “Trisections of non-orientable 4-manifolds”. En: *arXiv preprint arXiv:2010.07433* (2020).
- [19] J. Milnor. “A unique decomposition theorem for 3-manifolds”. En: *Amer. J. Math* 84 (1962), págs. 1-7.
- [20] J. Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton University Press, 1965.
- [21] J. Milnor. *Morse Theory*. Vol. 208. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 2001.
- [22] D. Rolfsen. *Knots and links*. Vol. 346.H. AMS Chelsea Publishing, 2003.
- [23] M. Scharleman y A. Thompson. “Thin position for 3-manifolds”. En: *Contemporary Mathematics* 104 (1994), págs. 231-238.
- [24] M. Scharlemann. “A Strong Haken’s Theorem”. En: *arxiv preprint* <https://arxiv.org/abs/2102.09831> (2021).
- [25] S. Schleimer. “Waldhausen’s theorem”. En: *Geom. Topol. Monogr.* 12 (2007), págs. 299-317.
- [26] S. Smale. “Diffeomorphisms of the 2-sphere”. En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 10 (1959), págs. 621-626.
- [27] J. Speer y S. Tillman. “Determining the trisection genus of orientable and non-orientable PL 4-manifolds through triangulations”. En: *Experimental Mathematics* (2020), págs. 1-11.
- [28] F. Waldenhausen. “Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre”. En: *Topology* 7 (1968), págs. 195-263.