



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El Teorema de Uniformización en superficies de
Riemann.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

Amayrani Ramírez Moreno

TUTORA

María de los Ángeles Sandoval Romero

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2022





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Ramírez
Moreno
Amayrani
5573914368
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
314322037
2. Datos del tutor
Dra.
María de los Ángeles
Sandoval
Romero
3. Datos sinodal 1
Dra.
Fuensanta
Aroca
Bisquert
4. Datos sinodal 2
Dra.
Fabiola
Manjarrez
Gutiérrez
5. Datos sinodal 3
Dra.
Raquel del Carmen
Perales
Aguilar
6. Datos sinodal 4
Dra.
Judith
Cordero
Campos
7. Datos del trabajo escrito
Teorema de Uniformización en superficies de Riemann
96p
2022

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Introducción | 3 |
| 1. Preliminares de teoría de funciones holomorfas. | 5 |
| 2. Teorema de Mapeo de Riemann | 17 |
| 3. Superficies | 23 |
| 4. Resultados auxiliares previos al Teorema de Uniformización | 43 |
| 5. Teorema de Uniformización de Riemann. | 83 |
| A. Apéndice | 89 |
| Bibliografía | 91 |

Agradecimientos

Al proyecto PAPIME PE101521 le agradezco la beca recibida, mientras realice mi tesis de licenciatura.

Mi agradecimiento a la asesora de tesis Dra. María de los Ángeles Sandoval Romero, por su instrucción, colaboración, por su dedicación y tiempo a este trabajo. A las sinodales del jurado por aceptar ser coparticipes en la corrección de mi trabajo final.

Gracias a mi familia por el apoyo incondicional en el día a día, por animarme a alcanzar mi objetivo a pesar de las dificultades y culminar una etapa en mi formación académica. Sin su apoyo este trabajo no habría podido ser escrito.

Introducción

El principal objetivo de esta tesis es estudiar la demostración del Teorema de Uniformización de Riemann, un resultado en matemáticas que es importante ya que nos dice que el estudio de las superficies de Riemann se puede reducir a tres casos, el disco unitario, el plano complejo y la esfera de Riemann.

El trabajo se divide en cinco capítulos:

En el primero veremos algunos resultados preliminares de la teoría de funciones holomorfas como son el teorema de Schwarz, el teorema de Hurwitz, el teorema de Arzelá-Ascoli y el teorema de Montel. Estos resultados nos ayudarán para entender el teorema de Mapeo de Riemann. Este resultado fue considerado en 1953 por Ahlfors como uno de los teoremas más importantes del análisis complejo y establece que el disco unitario se puede mapear conformemente a cualquier región simplemente conexa en el plano complejo. Además, abordaremos el teorema de Mapeo de Riemann. Lo que el teorema de Mapeo de Riemann es para las regiones planas el teorema de Uniformización de Riemann es para las superficies de Riemann. Para ello es necesario generalizar la teoría de funciones holomorfas en el plano complejo, esto debido a que la analiticidad es una propiedad local. Por esta razón, en el capítulo tres definimos lo que es una superficie y más en concreto, una superficie de Riemann y algunos ejemplos.

El Teorema de Uniformización es complicado ya que involucra muchos resultados auxiliares los cuales planteamos en el capítulo cuatro, iniciamos introduciendo a las funciones armónicas, aparte de definir las veremos algunas propiedades. Definiremos a las funciones subarmónicas, veremos un ejemplo, además de abordar el

Principio del Máximo para estas funciones. Veremos también un teorema que nos permite juntar funciones locales para así tener una función subarmónica global. Esto nos ayuda a garantizar la continuidad y otras propiedades. Veremos lo que es la familia de Perron, que será el supremo de la familia de funciones subarmónicas, el método de Perron se le debe al matemático Oskar Perron, así como el teorema de Perron que proporciona condiciones suficientes para que el supremo de una familia de funciones subarmónicas sea una función armónica. Esto nos ayudará para que resolvamos el Problema de Dirichlet encontrando la función solución, además de dar criterios para las condiciones de frontera de dicha solución. Veremos a las funciones de Green, estas nos ayudarán a la resolución de ecuaciones diferenciales no homogéneas con condiciones de frontera dadas. Luego verificamos que el plano complejo, la esfera de Riemann y el disco unitario son distintos entre sí, usando el teorema de Liouville y el teorema de Liouville Modificado. Después podremos definir lo que es la curva divergente, esto es muy importante ya que Riemann consideraba una región simplemente conexa como una región delimitada por una curva cerrada simple. Esto nos ayudará para abordar el Problema de Dirichlet, que junto con el Principio del Máximo antes mencionado, implicará que no existen funciones armónicas no constantes en ninguna superficie de Riemann compacta, para así dar paso a las funciones de Green. Después planteamos algunos teoremas, estos serán indispensables, ya que están generalizando lo que hacen las funciones holomorfas en el plano complejo. Terminamos el capítulo planteando el teorema de Riemann sobre singularidades removibles, Principio del Módulo Máximo y teorema de Mapeo Abierto.

En el último capítulo, finalmente ya tenemos todos los elementos para abordar la demostración del Teorema de Uniformización de Riemann, el cual nos garantiza que cualquier superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente al disco unitario ó al plano complejo ó a la esfera de Riemann.

Preliminares de teoría de funciones holomorfas.

Antes de abordar los teoremas principales de esta tesis necesitamos de algunos conceptos preliminares, a saber: el lema de Schwarz, el teorema de Hurwitz, el teorema de Arzelá-Ascoli y el teorema de Montel.

El lema de Schwarz nos servirá ya que es un resultado que caracteriza funciones holomorfas del disco unitario en sí mismo. El teorema de Hurwitz proporciona una herramienta para estudiar el comportamiento de los ceros de una sucesión convergente de funciones holomorfas. Los ceros de las funciones en la sucesión convergen a los ceros de la función límite. En el teorema de Arzelá-Ascoli se muestra un resultado de compacidad en un espacio de funciones en el que la condición principal es la equicontinuidad de la familia de funciones normales y continuas. Es necesario basarnos en el teorema de Arzelá-Ascoli para la demostración del teorema de Montel, donde analizamos de forma local cuando un conjunto es uniformemente acotado basándonos en el concepto de familias normales.

A continuación, de manera más formal presentamos los teoremas antes mencionados con sus respectivas demostraciones.

Teorema 1.1 [*Lema de Schwarz*] Si $f(z)$ es analítica en $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y satisface las condiciones $|f(z)| \leq 1$, $f(0) = 0$, entonces $|f(z)| \leq |z|$ para toda $z \in D$ y $|f'(0)| \leq 1$. Si $|f(z_0)| = |z_0|$ para alguna $z_0 \in D$ tal que $z_0 \neq 0$, entonces $f(z) = cz$ para cualquier $z \in D$ y alguna constante c con $|c| = 1$

Demostración:

Consideramos la función $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ para $z \neq 0$ y $g(0) = f'(0)$. Como la función g es continua en D y analítica en $D \setminus \{0\}$, entonces f es analítica en D . Sea $D_r = \{z : |z| \leq r\}$ para $0 < r < 1$, entonces g es analítica en D_r . Por el Principio del Módulo Máximo (teorema 4.20) para $|z| \leq r$ tenemos:

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r}$$

al despejar tenemos la desigualdad siguiente:

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$$

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{r} \quad \text{en } D_r$$

Pero al mantener z fijo, podemos hacer que $r \rightarrow 1$ obtenemos que $|f(z)| \leq |z|$. Para la segunda parte de la demostración y obtenemos que $|g(0)| \leq 1$, esto es $|f'(0)| \leq 1$. Si $|f(z_0)| = |z_0|$ con $z_0 \neq 0$, entonces $|g(z_0)| = 1$ es un máximo en D_r donde $|z_0| < r < 1$ por lo que la función g es constante y por como definimos a $g(z)$ tenemos que $f(z) = cz$ con $|c| = 1$. \square

Teorema 1.2 [*Teorema de Hurwitz*] Si f_n es una sucesión de funciones holomorfas definidas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ que convergen uniformemente a f en cualquier subconjunto compacto de D tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D$, entonces $f(z)$ es idénticamente cero o nunca es igual a cero en D .

Demostración:

Supongamos que $f(z)$ no es idénticamente cero, en cualquier caso los ceros de $f(z)$ están aislados, es decir, para cualquier punto $z_0 \in D$ existe un número $r > 0$ tal que $f(z)$ es distinto de cero para $0 < |z - z_0| \leq r$, en particular $|f(z)|$ tiene un mínimo positivo en el círculo $|z - z_0| = r$ que denotaremos por C . Por lo que

$\frac{1}{f_n(z)}$ converge uniformemente a $\frac{1}{f(z)}$ en C , ya que por hipótesis sabemos que esto es válido se sigue que $f'_n(z)$ converge uniformemente a $f'(z)$ en C .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Pero tenemos que las integrales de la izquierda son todas cero, porque dan el número de raíces de la ecuación $f_n(z) = 0$ dentro de C . Por lo que la integral de la derecha es cero y en consecuencia, $f(z_0) \neq 0$ por la misma interpretación de la integral. Y como z_0 es arbitrario tenemos que $f(z) \neq 0$ en todo D . \square

Sólo nos falta mostrar el teorema de Arzelá-Ascoli y el teorema de Montel, pero antes necesitamos ver algunas definiciones y lemas, para lo cual \mathcal{F} denotará a una familia de funciones definida en una región Ω del plano complejo y con valores en un espacio métrico G .

Definición 1.1 Las funciones en la familia \mathcal{F} son equicontinuas en $E \subset \Omega$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(z), f(z_0)) < \epsilon$ donde $|z - z_0| < \delta$ y $z_0, z \in E$ simultáneamente para todas las funciones $f \in \mathcal{F}$.

Definición 1.2 Decimos que una familia \mathcal{F} es normal en Ω si toda sucesión $\{f_n\}$ de funciones $f_n \in \mathcal{F}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω .

El teorema de Arzelá-Ascoli es un resultado fundamental en el análisis matemático real y complejo, antes de ver su demostración necesitamos dos lemas auxiliares que presentaremos sin demostración (la demostración se puede consultar en [2, pág. 220]):

Lema 1.1 La familia \mathcal{F} es normal si y sólo si su cerradura $\overline{\mathcal{F}}$ es compacta.

Lema 1.2 La familia \mathcal{F} es totalmente acotada si y sólo si para todo conjunto compacto $E \subset \Omega$ y todo $\epsilon > 0$ es posible encontrar $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ tal que toda $f \in \mathcal{F}$ satisface $d(f, f_j) < \epsilon$ en E para algún f_j .

Ahora sí ya tenemos todos los elementos necesarios para la demostración del siguiente resultado.

Teorema 1.3 [Teorema de Arzelá-Ascoli] Sea \mathcal{F} una familia de funciones continuas con valores en un espacio métrico G . \mathcal{F} es normal en una región Ω contenida en el plano complejo si y sólo si cumple las siguientes dos condiciones:

- (i) \mathcal{F} es equicontinua en cada conjunto compacto $E \subset \Omega$.
- (ii) El conjunto generado por los valores $f(z)$ es un subconjunto compacto de G .

Demostración:

\Rightarrow] Supongamos que \mathcal{F} es normal.

Empezamos mostrando que i) se cumple. Por el lema 1.1 tenemos que $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto por lo que también es totalmente acotado y en consecuencia \mathcal{F} es totalmente acotado. Usando el lema 1.2, tenemos que todo conjunto compacto $E \subset \Omega$ y cualquier $\epsilon > 0$ es posible encontrar $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ tal que toda $f \in \mathcal{F}$ satisface $d(f, f_j) < \epsilon$ en E para algún f_j .

Por otro lado, como cada una de las funciones $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ es uniformemente continua en E podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $d(f_j(z), f_j(z_0)) < \epsilon$ para $z, z_0 \in E, |z - z_0| < \delta$ con $j = 1, 2, \dots, n$.

Para cualquier $f \in \mathcal{F}$ dada y su correspondiente f_j obtenemos:

$$\begin{aligned} d(f(z), f(z_0)) &\leq d(f_j(z), f(z)) + d(f_j(z), f_j(z_0)) + d(f_j(z_0), f(z_0)) \\ &< \epsilon + \epsilon + \epsilon \\ &= 3\epsilon \end{aligned}$$

por lo que tenemos que se cumple la definición 1.1, \mathcal{F} es equicontinua en cada conjunto compacto $E \subset \Omega$.

Otra forma de mostrar que i) se cumple es la siguiente, en esta forma no usamos el lema 1.1 ni el lema 1.2. Si \mathcal{F} no es equicontinua en E , existen un $\epsilon > 0$, una sucesión de puntos $z_n, z'_n \in E$ y funciones $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $|z_n - z'_n| \rightarrow 0$ mientras que $d(f_n(z_n), f_n(z'_n)) \geq \epsilon$ para cualquier n .

Ya que E es compacto podemos tomar una subsucesión de $\{z_n\}$ y $\{z'_n\}$ las cuales convergen a un límite en común $z'' \in E$. Y ya que \mathcal{F} es normal existe una subsucesión de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en E .

Es claro que podemos elegir que las tres subsucesiones tengan el mismo subíndice n_k . El límite de la subsucesión $\{f_{n_k}\}$ es f y es uniformemente continua en E . Por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} d(f_{n_k}(z_{n_k}), f_{n_k}(z'_{n_k})) &< d(f_{n_k}(z_{n_k}), f(z_{n_k})) + d(f(z_{n_k}), f(z'_{n_k})) \\ &\quad + d(f(z'_{n_k}), f_{n_k}(z'_{n_k})) \\ &< 3\epsilon \end{aligned}$$

contradiciendo la suposición de que $d(f_n(z_n), f_n(z'_n)) \geq \epsilon$ para cualquier n .

Para probar ii) tenemos que mostrar que la cerradura del conjunto formado por los valores $f(z)$, $f \in \mathcal{F}$, es compacto. Sea $\{w_n\}$ una sucesión en esta cerradura, para cada w_n podemos determinar $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $d(f_n(z), w_n) < \frac{1}{n}$. Usando la definición 1.2, existe una subsucesión convergente $\{f_{n_k}(z)\}$ y la sucesión $\{w_{n_k}\}$ convergen al mismo valor.

[\Leftarrow Para mostrar la suficiencia de i) y ii) lo haremos mediante el proceso diagonal de Cantor. Primero observemos que existe un conjunto denso numerable $\xi_k \in \Omega$.

De la sucesión $\{f_n\}$ vamos a extraer una subsucesión que converge en todos los puntos ξ_k . Por la condición ii) siempre es posible encontrar una subsucesión que converge en un punto dado. Entonces podemos encontrar una matriz de subíndices:

$$\begin{pmatrix} n_{11} < n_{12} < \dots < n_{1j} < \dots \\ n_{21} < n_{22} < \dots < n_{2j} < \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{k1} < n_{k2} < \dots < n_{kj} < \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

tal que cada fila está contenida en la anterior y $\lim_{j \rightarrow \infty} f_{n_{kj}}(\xi_k)$ existe para toda k .

La sucesión diagonal $\{n_{jj}\}$ es estrictamente creciente y es una subsucesión de cada fila en la matriz de subíndices. Por lo que $\{f_{n_{jj}}\}$ es una subsucesión de $\{f_n\}$ que converge en todos los puntos ξ_k . Por conveniencia reemplazamos la notación n_{jj} por n_j .

Por i) podemos considerar ahora un conjunto compacto $E \subset \Omega$ y asumimos que \mathcal{F} es equicontinua en E . Nosotros demostraremos que $\{f_{n_j}\}$ converge uniformemente en E , dado $\epsilon > 0$ tenemos $\delta > 0$ tal que para $z, z' \in E$ y

$f \in \mathcal{F}$, $|z - z'| < \delta$ tenemos $d(f(z), f(z')) < \frac{\epsilon}{3}$. Ya que E es compacto, lo podemos cubrir con un número finito de $\frac{\delta}{2}$ vecindades.

Seleccionamos un punto ξ_k de cada una de estas vecindades, por lo que existe un i_0 tal que $i, j > i_0$ implica $d(f_{n_i}(\xi_k), f_{n_j}(\xi_k)) < \frac{\epsilon}{3}$ para todo ξ_k .

Para cada $z \in E$, uno de los ξ_k está a una distancia δ de z , es decir, $|\xi_k - z| < \delta$, por esto $d(f_{n_i}(z), f_{n_i}(\xi_k)) < \frac{\epsilon}{3}$ y $d(f_{n_j}(z), f_{n_j}(\xi_k)) < \frac{\epsilon}{3}$. Tenemos para la desigualdad:

$$\begin{aligned} d(f_{n_i}(z), f_{n_j}(z)) &< d(f_{n_i}(z), f_{n_i}(\xi_k)) + d(f_{n_i}(\xi_k), f_{n_j}(\xi_k)) \\ &\quad + d(f_{n_j}(z), f_{n_j}(\xi_k)) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Como todos los valores $f(z)$ pertenecen a un subconjunto compacto y por lo tanto subconjunto completo de S se deduce que $\{f_{n_j}\}$ es uniformemente convergente en E . Por lo que se cumple que \mathcal{F} es normal al usar la definición 1.2. □

Ahora establecemos el teorema de Montel, que se encarga de dar condiciones bajo las cuales una familia de funciones holomorfas es normal.

Teorema 1.4 [*Teorema de Montel*] Sea \mathcal{F} una familia de funciones definidas en un subconjunto $G \subset \mathbb{C}$ abierto. \mathcal{F} es normal si y sólo si \mathcal{F} es localmente acotado.¹

Demostración:

⇒] Supongamos \mathcal{F} es normal pero no está localmente acotada.

Existe un conjunto compacto $K \subset G$ tal que $\sup\{|f(z)| : z \in K, f \in \mathcal{F}\} = \infty$, es decir, existe una sucesión $\{f_n\}$ en \mathcal{F} tal que $\sup\{|f_n(z)| : z \in K\} \geq n$, como \mathcal{F} es normal existe una función f definida en $G \subset \mathbb{C}$ y existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ la cual converge uniformemente a f , cuando $k \rightarrow \infty$ tenemos:

¹Una forma alternativa de definir a una familia de funciones \mathcal{F} que sea localmente acotada es: si existe $r > 0$ tal que $\sup\{|f(z)| : |z - a| < r, f \in \mathcal{F}\} < \infty$. [4, pág. 153]

$$\sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} \rightarrow 0$$

Si $|f(z)| \leq M$ para $z \in K$ tenemos:

$$n_k \leq \sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} + M$$

entonces el lado derecho de la desigualdad converge a M pero esto es una contradicción.

Por lo tanto \mathcal{F} es localmente acotado.

[\Leftarrow Ahora supongamos \mathcal{F} es localmente acotado.

Usaremos el teorema de Arzelá-Ascoli para mostrar que \mathcal{F} es normal, la condición (ii) de dicho teorema se satisface directamente, solo falta mostrar que se cumple la condición (i), fijamos un punto z_0 en G y $\epsilon > 0$, por la hipótesis de que \mathcal{F} es localmente acotado por lo que existe $r > 0$ y $M > 0$ tal que $\overline{B_r}(z_0) \subset G$ y $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in \overline{B_r}(z_0)$ con cada $f \in \mathcal{F}$. Sea $|z - z_0| < r\frac{1}{2}$ y $f \in \mathcal{F}$, al usar la fórmula de Cauchy sobre la curva cerrada $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)(z_0 - z)}{(w - z_0)(w - z)} dw \right| \\ &\leq \frac{4M}{r} |z_0 - z| \end{aligned}$$

Tomando $\delta < \min\left\{\frac{1}{2}r, \frac{r}{4M}\epsilon\right\}$ dado $|z_0 - z| < \delta$ se sigue que $|f(z_0) - f(z)| < \epsilon$ para cada $f \in \mathcal{F}$. Por lo que se cumple la condición (i) del teorema de Arzelá-Ascoli.

Por lo tanto \mathcal{F} es normal. □

El Teorema del Mapeo de Riemann fue establecido por Bernhard Riemann en 1851 en su tesis doctoral y es uno de los resultados más notables de las matemáticas del siglo XIX.

Dicho teorema establece que el disco unitario Δ se puede mapear conformalmente a cualquier región simplemente conexa en el plano complejo, excepto el plano en sí mismo.² Esto implicaría que si tenemos dos regiones cualesquiera simplemente conexas distintas del plano complejo y queremos mapearlas de manera conforme entre sí, podemos usar el disco unitario como un paso intermedio.

En concreto, el teorema de Mapeo de Riemann establece lo siguiente:

²En el caso de que fuera todo el plano se estaría contradiciendo el teorema de Liouville.

Teorema 1.5 [Teorema del Mapeo de Riemann] Sea Ω una región simplemente conexa $\Omega \neq \mathbb{C}$ entonces existe un mapeo conforme $f : \Omega \rightarrow \Delta$ donde Δ es el disco unitario abierto. Más aún, para cualquier $z_0 \in \Omega$ fija podemos encontrar una f tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$. Más aún la función f es única.

Demostración:

Que exista un mapeo conforme es análogo a decir que existe una única función holomorfa $f(z)$ en Ω , normal³ y cumple las siguientes condiciones $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$, tal que $f(z)$ es inyectiva de Ω en Δ .

Primero vamos a demostrar la unicidad, supongamos f_1, f_2 mapeos conformes biyectivos de Ω sobre Δ con $f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0$ con $f'_1(z_0), f'_2(z_0) > 0$. Queremos mostrar que $f_1(z) = f_2(z)$ para toda z en Ω .

Definimos $h \in \Delta$ como $h(w) = f_2(f_1^{-1}(w))$ para cualquier w en Δ , entonces $h : \Delta \rightarrow \Delta$ y $h(0) = f_2(f_1^{-1}(0)) = f_2(z_0) = 0$.

Por el lema de Schwarz (teorema 1.1) $|h(w)| \leq |w|$ para cualquier $w \in \Delta$. El mismo argumento se aplica a $h^{-1} = f_1 \circ f_2^{-1}$ así $|h^{-1}(\gamma)| \leq |\gamma|$ para toda $\gamma \in \Delta$. Con $\gamma = h(w)$ esto da $|w| \leq |h(w)|$, por lo que $|w| = |h(w)|$ para cualquier $w \in \Delta$. Usando el lema de Schwarz nuevamente obtenemos $h(w) = cw$ para c con $|c| = 1$.

Así $cw = f_2(f_1^{-1}(w))$ con $z = f_1^{-1}(w)$ obtenemos $cf_1(z) = f_2(z)$ para toda $z \in \Omega$. En particular $cf'_1(z_0) = f'_2(z_0)$, ya que $f'_1(z_0)$ y $f'_2(z_0)$ son números reales positivos, c también lo es, por consiguiente $c = 1$ y $f_1(z) = f_2(z)$.

Para demostrar la existencia consideremos la familia \mathcal{F} formada por todas las funciones g con las propiedades:

- (i) g holomorfa y univalente en Ω .
- (ii) $|g(z)| \leq 1$ en Ω .
- (iii) $g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) > 0$.

Solo queda demostrar que $f \in \mathcal{F}$ tal que $f'(z_0)$ es un máximo.

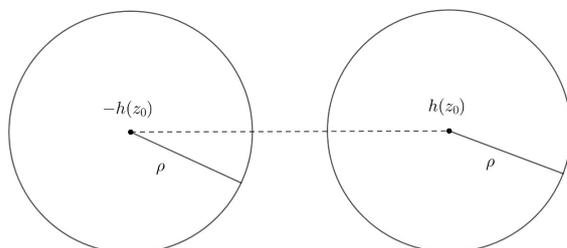
³Esto es una consecuencia directa del teorema de Montel.

Para poderlo hacer tenemos que mostrar las siguientes 3 partes:

- (I) \mathcal{F} es no vacío.
- (II) En un subdominio de Ω f alcanza su derivada máxima que es finita.
- (III) f es biholomorfo de Ω en Δ .

Dem (I) : Existe un punto $a \neq \infty$ que no está en Ω , Ω es simplemente conexa entonces es posible definir una rama holomorfa de un solo valor de $\sqrt{z-a}$ en Ω denotado por $h(z)$.

Si $h(z_1) = h(z_2)$ entonces $z_1 = h^2(z_1) + a = h^2(z_2) + a = z_2$. Esta función no toma el mismo valor dos veces, no toma valores opuestos. La imagen de Ω bajo el mapeo h cubre al disco $|w - h(z_0)| < \rho$. Eso quiere decir que no se encuentra en el disco $|w + h(z_0)| < \rho$, es decir, cubre al disco $|h(z) - h(z_0)| < \rho$ y no toma valores en el disco $|h(z) + h(z_0)| < \rho$. Así $|h(z) + h(z_0)| \geq \rho$ para cada $z \in \Omega$, entonces $2|h(z_0)| \geq \rho$.



Ahora se puede verificar que la función $g_0(z)$ pertenece a la familia de funciones \mathcal{F} , la función $g_0(z)$ se obtiene a partir de la función univalente h por medio de una transformación lineal en sí misma. La función $g_0(z)$ está dada por:

$$g_0(z) = \frac{\rho|h'(z_0)|}{4|h(z_0)|^2} \cdot \frac{h(z_0)}{h'(z_0)} \cdot \frac{h(z) - h(z_0)}{h(z) + h(z_0)}$$

El denominador es distinto de cero en Ω , ya que $h(\Omega)$ y $-h(\Omega)$ son disjuntos. Y como h es univalente, se sigue que g_0 es inyectiva. Por lo tanto g_0 es univalente. Además, con:

$$g_0(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad g_0'(z_0) = \frac{\rho}{8} \cdot \frac{|h'(z_0)|}{|h(z_0)|^2} > 0$$

Tendríamos que:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{h(z) - h(z_0)}{h(z) + h(z_0)} \right| &= \left| \frac{h(z) + h(z_0) - 2h(z_0)}{h(z) + h(z_0)} \right| \\
&= \left| 1 - \frac{2h(z_0)}{h(z) + h(z_0)} \right| \\
&= |h(z_0)| \cdot \left| \frac{1}{h(z_0)} - \frac{2}{h(z) + h(z_0)} \right| \\
&\leq \frac{4|h(z_0)|}{\rho}
\end{aligned}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
|g_0(z)| &\leq \frac{\rho}{4} \cdot \frac{|h'(z_0)|}{|h(z_0)|^2} \cdot \frac{h(z_0)}{h'(z_0)} \cdot \frac{4|h(z_0)|}{\rho} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $g_0 \in \mathcal{F}$ y por lo tanto \mathcal{F} es no vacío.

Dem (II) : La derivada $g'(z_0)$ con $g \in \mathcal{F}$ tiene un límite superior mínimo $a = \sup |g'(z_0)|$, que podría ser infinito. Existe una sucesión de funciones $\{g_n\} \in \mathcal{F}$ tal que $g'_n(z_0)$ converge a a . Por el teorema de Montel (teorema 1.4), existe una sub-sucesión $\{g_{n_k}\}$ que converge uniformemente a una función holomorfa f en conjuntos compactos, entonces se cumple que $|f(z)| \leq 1$ en Ω , $f(z_0) = 0$ y $|f'(z_0)| = a$, por lo que a es finito.

Si mostramos que f es univalente se puede seguir que $f \in \mathcal{F}$ y tiene derivada máxima en z_0 , primero f no es constante para $f'(z_0) = a > 0$. Elegimos $z_1 \in \Omega$ y consideramos $g_1(z) = g(z) - g(z_1)$ con $g \in \mathcal{F}$ son todas distintos de cero en la región obtenida, omitiendo z_1 de Ω . Por el teorema de Hurwitz (teorema 1.2) todo límite de funciones es idénticamente cero o nunca es cero, pero $f(z) - f(z_1)$ holomorfa y no es idénticamente cero. Por lo cual $f(z) \neq f(z_1)$ para $z_1 \neq z$ y como z_1 es arbitrario entonces f es univalente.

Por lo tanto $f \in \mathcal{F}$ que tiene derivada máxima finita.

Dem (III) : Hay que demostrar que f toma todos los valores del disco unitario.
 Supongamos $f(z) \neq w_0$ para algún w_0 tal que $|w_0| < 1$.

Sea $\frac{f(z)-w_0}{1-\bar{w}_0 f(z)}$ el mapeo en sí mismo en el disco unitario y el numerador no se anula, se deduce que la imagen de esta función es $\Delta \setminus \{0\}$.

Podemos definir una rama holomorfa de un solo valor : $H(z) = \sqrt{\frac{f(z)-w_0}{1-\bar{w}_0 f(z)}}$
 para la cual H es univalente y $|H| \leq 1$. Necesitamos definir:

$$G(z) = \frac{|H'(z_0)|}{H'(z_0)} \cdot \frac{H(z) - H(z_0)}{1 - \bar{H}(z_0)H(z)}$$

Que tiene una derivada positiva en z_0 . Por lo que G y H son elementos de \mathcal{F} , tenemos $G'(z_0) = \frac{|H'(z_0)|}{1-|H(z_0)|^2}$. Considerando $A = \sup |G'(z_0)|$, se puede seguir que:

$$\begin{aligned} |G'(z_0)| &= \frac{|H'(z_0)|}{2\sqrt{|w_0|}} (1 - |w_0|^2) \cdot \frac{1 - |w_0|}{(1 - |w_0|)^2} \\ &= \frac{A}{2\sqrt{|w_0|}} (1 + |w_0|) . \end{aligned}$$

Donde $|w_0| < 1$ tal que $|G'(z_0)| > A$ pero esto es una contradicción (estamos considerando $A = \sup |G'(z_0)|$), ya que $f \in \mathcal{F}$ con derivada máxima en z_0 .

Por lo que f toma todos los valores en Δ .

Por lo tanto f es biholomorfo de Ω en Δ . □

En el siguiente capítulo retomaremos este teorema pero con la perspectiva del problema de Dirichlet que nos conecta con el teorema de uniformización.

Teorema de Mapeo de Riemann

Como ya sabemos la tesis de Riemann es una obra asombrosamente original en la que examinó las propiedades de las funciones holomorfas de los mapeos conformes y la conexidad de superficies. Desde la publicación de esta prueba se hicieron varias objeciones que, en conjunto, llevan a que esta sea incorrecta. La prueba de Riemann estuvo abierta a la crítica y en las décadas siguientes numerosos matemáticos buscaron una prueba correcta.

En 1860 en particular el principio de Dirichlet y el cálculo de variaciones fueron objeto de crítica, sobre todo por Weierstrass refutando la argumentación de Riemann sobre las funciones minimizadoras, aunque no hubo desarrollo en cuanto a la validez de lo demás, hasta 1899 David Hilbert dio una justificación rigurosa del principio de Dirichlet bajo algunos supuestos sobre la frontera del dominio. Esto marcó el comienzo de un importante programa para poner el cálculo de variaciones sobre una base sólida. Sin embargo, el método de Hilbert requería ciertas propiedades de suavidad de la frontera y de la función límite, por lo tanto, era menos general que la idea del principio original de Dirichlet, aunque esto no bastaría para probar el teorema de uniformización si fue suficiente para demostrar el teorema de mapeo de Riemann.

Esta prueba se basa en la existencia de una sola solución al problema de Dirichlet en cualquier dominio (tiene en cuenta el enfoque de Riemann).

Problema de Dirichlet: Sea A una región acotada abierta en \mathbb{C} y u_0 una función continua dada en $fr(A)$. El problema consiste en encontrar una función de valores reales u en \overline{A} que es continua y armónica en A y tal que $u = u_0$ en $fr(A)$.

Veamos que la función que la solución al problema de Dirichlet es única.

Demostración:

Sean u y \bar{u} soluciones al problema de Dirichlet, por lo que $\phi = u - \bar{u}$ es armónica y $\phi = 0$ en $fr(A)$. Por lo que hay que mostrar que $\phi = 0$.

Por el principio del máximo para funciones armónicas tenemos que si conocemos el máximo de la función en la $fr(A)$, entonces es el máximo de todo A por lo que $\phi(z) \leq 0$ en A y similarmente para el mínimo tenemos $\phi(z) \geq 0$ en A . Por lo que $\phi = 0$. \square

El método para solucionar el problema de Dirichlet, primero toma la región dada A y mediante un mapeo conforme la transformamos a una región más simple B , después solucionamos el problema en B y finalmente mediante el mismo mapeo conforme lo transformamos de nuevo a A .

En el capítulo siguiente veremos otra forma de resolver el problema de Dirichlet mediante el método de Perron, que en esencia es lo mismo pero con la diferencia de que el método de Perron es para superficies de Riemann usando funciones subarmónicas.

La demostración a continuación se basa en el problema de Dirichlet, es decir, en la existencia de la función solución al problema del valor en la frontera para cualquier dominio.

Teorema 2.1 [Teorema del Mapeo de Riemann] Sea D una región simplemente conexa $D \neq \mathbb{C}$ entonces existe un mapeo conforme $f : D \rightarrow \Delta$ donde Δ es el disco unitario abierto. Más aún, para cualquier $z_0 \in D$ fija podemos encontrar una f tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$. De este modo, la f es única¹.

Demostración:

Consideramos el siguiente problema de Dirichlet en un dominio $D \subset \mathbb{C}$, encontrar u función continua y armónica tal que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ en } D.$$

$$u(z) = \log |z - a| \quad z \in \partial D \text{ y } a \in D.$$

¹La unicidad de la función f se sigue de haber probado que la solución al problema de Dirichlet es única.

Como $u(z)$ está acotada en ∂D , entonces por el principio del máximo $u(z)$ está acotada en todo D .

La función u satisface la ecuación de Laplace y por el teorema de regularidad de la ecuación de Laplace (apéndice 6- A) tenemos que u es diferenciable y armónica, por lo tanto analítica en D y el rotacional de este campo vectorial está dado por $(-u_y, u_x)$.

Por otro lado ya que D es simplemente conexo, definimos una función v como la conjugada armónica de la función u tenemos $v = v_x + iv_y$. Ya que v solo se determina hasta una constante aditiva, imponemos la condición $v(a) = 0$.

Por último esto conduce a las ecuaciones de Cauchy - Riemann, por lo que $u + iv$ es holomorfa en D .

Ahora definimos tres funciones:

$$\begin{aligned}p(z) &= u(z) - \log |z - a| \\q(z) &= v(z) - \arg |z - a| \\f(z) &= e^{-p(z)-iq(z)} = (z - a)e^{-u(z)-iv(z)}\end{aligned}$$

Notemos algunas cosas sobre cada función:

- La función p es univaluada y satisface la ecuación de Laplace en $D \setminus \{a\}$.
- La función q es multivaluada en el punto de intersección a , también satisface la ecuación de Laplace en $D \setminus \{a\}$. El valor de la función q va creciendo $2\pi i$ después de una vuelta al rededor del punto a .
- La función f es univaluada ya que la operación de exponenciación cancela la posibilidad de que sea multivaluada (ya que q es multivaluada). Además, f es holomorfa en D .

Debemos de mostrar varias cosas:

Notemos que $p(z) = 0$ si $z \in \partial D$. Por lo que debemos de mostrar que $p(z) \geq 0$ siempre que $z \in D \setminus \{a\}$.

Veamos que cuando $z \rightarrow a$ tenemos que $\log |z - a| \rightarrow -\infty$ y $u(a)$ es una función analítica en particular continua, lo que resulta $p(z) > 0$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $p(z) > 0$ siempre que $0 < |z - a| \leq \epsilon$.

Consideramos la región $G = \{z \in D : |z| > \epsilon\}$, por lo que para un punto

$z \in \partial G$, ya sea $|z - a| = \epsilon$ o z debe estar en ∂D , en cualquier caso obtenemos $p(z) \geq 0$ y el Principio del Máximo (teorema 4.10) implica que $p(z) \geq 0$ para cualquier $z \in G$.

Finalmente tenemos que $p(z) \geq 0$ siempre que $0 < |z - a| < \epsilon$, entonces $p(z) \geq 0$ para cualquier $z \in D \setminus \{a\}$.

Ya que $|f(z)| = e^{-p(z)} \leq 1$ tenemos $|f(z)| \leq 1$ para $z \in D$. Además, $f(a) = 0$ y $f'(a)$ es real y positivo por que $f'(a) = e^{-u(a)-iv(a)} = e^{-u(a)} \in \mathbb{R}^+$.

Lo anterior nos lleva a mostrar que f es biyectiva. Empezamos considerando los conjuntos de nivel de la función p .

Primero consideremos los puntos donde $f' = 0$ por lo que para cualquier $r \in \mathbb{R}^+$ definimos $A(r) = \{z \in D : |f(z)| \geq e^{-r} \text{ y } f'(z) = 0\}$. Veamos que $A(r)$ es finito. Notemos que el conjunto $\{z \in D : |f(z)| \geq e^{-r}\}$ es compacto, por lo que si $A(r)$ fuera infinito, tendría un punto de acumulación pero ya que $f(z) = 0$ siempre que $z \in A(r)$ y f es holomorfo, entonces $f(z) \equiv 0$, pero esto es una contradicción, por lo que $A(r)$ es finito.

Para lo siguiente, elegimos $r > 0$ para que se cumpla que $f'(z) \neq 0$ siempre que $|z| = r$. Denotamos el conjunto de nivel $C(r) = \{z : p(z) = r\}$. Mostremos que $C(r)$ es suave y homeomorfo a un círculo. Ya que $C(r)$ es el conjunto de nivel de funciones continuas en un conjunto compacto, entonces $C(r)$ es compacto. Sea w un punto en $C(r)$, podemos suponer que $f'(w) \neq 0$, por el teorema de función inversa, existe una vecindad E de w en la que la función f es invertible, es decir, f^{-1} existe y es holomorfo. Ya que $z \in C(r)$ si y sólo si $|f(z)| = e^{-r}$, entonces $C(r) \cap E$ es la imagen del arco de un círculo $\{z : |z| = e^{-r}\}$ bajo el mapeo f^{-1} . Además, f es una función holomorfa que también es derivable. Por lo que $C(r) \cap E$ se mapea biyectivamente en un segmento de línea, esto se cumple para cada punto $z \in C(r)$, entonces $C(r)$ es una variedad unidimensional compacta, entonces es homeomorfo al círculo unitario. Por lo que $C(r)$ debe ser solo un círculo o una unión finita de círculos. Veamos que no se cumple la segunda opción.

Supongamos que $C(r)$ es una unión de más de un círculo, por el teorema de Jordan (apéndice 1 - A) algunos de estos círculos dividen al plano complejo en dos componentes, una es el interior y otra el exterior con $C(r)$ límite común. Si hubiera dos círculos que al unirlos forman $C(r)$ uno de estos círculos tendría que estar dentro del otro, por lo que existiría un conjunto abierto Q y su límite serían los círculos. Sin embargo, dado que $p(z)$ es constante en ambos círculos y toma el mismo valor en ambos, el principio del máximo (teorema 4.10) implica que p es constante en la región Q , lo que a su vez implica que f es constante en D , pero esto es imposible por lo que solo queda la primera opción, es decir, $C(r)$ consiste en solo un círculo.

Ahora debemos mostrar que $a \in \text{Int } C(r)$. Dado que el número de vueltas de $C(r)$ sobre el punto a es uno. El periodo de $q(z)$ crecerá 2π después de atravesar $C(r)$ una vez. Ya que f^{-1} es holomorfo, tenemos que $C(r)$ no solo es homeomorfo a un círculo, sin embargo es una curva suave, entonces tiene una tangente y una normal, que se obtiene de las ecuaciones de Cauchy Riemann que en este caso son:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial n} \quad \text{y} \quad \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

Ya que $p(z) = r$ para $z \in C(r)$ y $p(x) \geq r$ para $x \in \text{Int}(C(r))$, por lo que $\frac{\partial p}{\partial t} > 0$ y $\frac{\partial p}{\partial n} > 0$. Entonces $\frac{\partial q}{\partial t} \leq 0$ lo cual es imposible por que de lo contrario todas las derivadas de p y q se anularían, es decir, f' sería cero contradiciendo la hipótesis, entonces q es una función monótona decreciente en $C(r)$ y $\arg\{q\}$ decrece en 2π al atravesar $C(r)$, por todo lo anterior tenemos que la función e^{-iq} es una biyección de $C(r)$ sobre el círculo unitario E . Por lo que f es una biyección de $C(r)$ sobre el círculo de radio e^{-r} .

Finalmente debemos demostrar que f' no puede tener ceros dentro de $C(r)$. Consideramos los puntos z para la cual $f'(z) = 0$ y elegimos r tal que $f'(z) \neq 0$ siempre que $|z| = r$. Recordemos que $C(r)$ es una curva cerrada suave y como $f'(z) = -f(z)(u'(z) + iv'(z))$. Utilizamos el hecho de que el argumento de un producto es la suma de los argumentos de los factores. Consideramos f' y $u' + iv'$ por separado. Por el principio del argumento (apéndice 5 - A) f solo tiene un cero simple en a en el interior de $C(r)$ y $\arg(f)$ crecerá en 2π después de atravesar $C(r)$ una vez. Por otro lado el $\arg\{u' + iv'\}$ se determina utilizando el hecho de que el argumento de la derivada de una función holomorfa es el mismo a lo largo de cualquier dirección elegida para determinarla. Así que elegimos la dirección normal y encontramos el $\arg\{u' + iv'\}$ cambia por -2π después de atravesar $C(r)$ una vez. Por lo tanto $\arg\{f'\}$ permanece igual después de atravesar $C(r)$ una vez, dado que f' es holomorfo dentro de $C(r)$, por el principio del argumento (apéndice 5 - A) f' no puede tener ningún cero dentro de $C(r)$.

Por lo tanto existe un mapeo conforme $f : D \rightarrow \Delta$. □

En este capítulo definiremos las superficies en un espacio topológico, para caracterizarlas con mayor facilidad usaremos los atlas que son un conjunto de cartas de un espacio, donde una carta cubre un entorno del espacio topológico; así podremos definir lo que son las funciones de transición, que son homeomorfismos de un atlas a otro.

Con lo anterior podremos definir a las superficies de Riemann, veremos ejemplos de superficies de Riemann además de como se construyen dada una función multivaluada.

Definición 3.1 Una superficie S es un espacio topológico junto con la familia de funciones $A = \{\phi_\alpha : \alpha \in A'\}$ tal que:

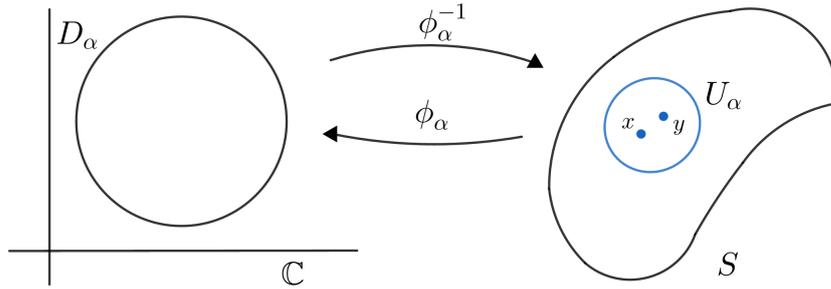
1. S es un espacio topológico conexo Hausdorff.
2. Cada punto de la superficie tiene una vecindad U_α homeomorfa a un subconjunto abierto de \mathbb{C} , que denotaremos por D_α .
3. $\{U_\alpha : \alpha \in A'\}$ es una cubierta abierta de S ,

donde los subconjuntos U_α son llamadas *regiones paramétricas* en S y los homeomorfismos ϕ_α son llamadas *cartas* en S . La razón es que si $x \in S$ entonces x está en algún U_α la cual es homeomorfa a D_α y existe ϕ_α^{-1} que transfiere el sistema de coordenadas de D_α a U_α .

A la familia de cartas $\{\phi_\alpha : \alpha \in A'\}$ se le llama *atlas* en S , también se puede escribir de la forma $\{(\phi_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A'\}$.

Se puede definir una métrica de U_α en términos de la métrica en \mathbb{C} , consideremos $x, y \in U_\alpha$, definimos:

$$d_\alpha(y, x) = |\phi_\alpha(y) - \phi_\alpha(x)|$$



Lema 3.1 *Comprobemos que $d_\alpha(y, x)$ es métrica en U_α .*

Demostración:

- Veamos que $d_\alpha(y, x) \leq d_\alpha(y, z) + d_\alpha(z, x)$

$$\begin{aligned} d_\alpha(y, x) &= |\phi_\alpha(y) - \phi_\alpha(x)| \\ &= |\phi_\alpha(y) - \phi_\alpha(x) + \phi_\alpha(z) - \phi_\alpha(z)| \\ &\leq |\phi_\alpha(y) - \phi_\alpha(z)| + |\phi_\alpha(z) - \phi_\alpha(x)| \\ &\leq d_\alpha(y, z) + d_\alpha(z, x) \end{aligned}$$

- Veamos que $d_\alpha(y, x) = d_\alpha(x, y)$

$$\begin{aligned} d_\alpha(y, x) &= |\phi_\alpha(y) - \phi_\alpha(x)| \\ &= |\phi_\alpha(x) - \phi_\alpha(y)| \\ &= d_\alpha(x, y) \end{aligned}$$

- Finalmente veamos que $d_\alpha(y, x) = 0$ si y sólo si $y = x$.

$$d_\alpha(y, x) = |\phi_\alpha(y) - \phi_\alpha(x)|$$

Sabemos que ϕ_α es biyectiva en particular inyectiva, y como $d_\alpha(y, x) = 0$ entonces $y = x$.

Ahora también podemos definir explícitamente una vecindad de y en términos de la métrica y a ese conjunto le vamos a llamar N_α .

$$\begin{aligned} N_\alpha &= \{y \in U_\alpha : d_\alpha(y, x) < \epsilon\} \\ &= \{y \in U_\alpha : |\phi_\alpha(y) - \phi_\alpha(x)| < \epsilon\} \\ &= \phi_\alpha^{-1}\{z : |z - \phi_\alpha(x)| < \epsilon\} \end{aligned}$$

Así que $\phi_\alpha(y) = z$ mapea al disco N_α abierto en \mathbb{C} . Como U_α es homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{C} se puede mostrar que existen regiones paramétricas Q_1, Q_2, \dots abiertos que incluyen a un punto $x \in \mathbb{C}$ que cumplen con las siguientes tres condiciones:

- $\overline{Q_{n+1}} \subset Q_n$
- $\bigcap_n Q_n = \{x\}$
- Si U es abierto de S que contiene a un punto x entonces $Q_n \subset U$.

¿Pero qué pasa cuando tomamos dos subíndices distintos? Es decir, U_α y U_β regiones paramétricas tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Las funciones que van de U_α a U_β son llamadas *funciones de transición* y se definen en términos de las funciones ϕ_α y ϕ_β . La composición representa la transición del sistema de α -coordenadas al sistema de β -coordenadas:

$$t_{\beta\alpha} := \phi_\beta(\phi_\alpha)^{-1}$$

Y es homeomorfismo de $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ sobre $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ y por lo anterior son subconjuntos abiertos de \mathbb{C} . Tenemos $(t_{\beta\alpha})^{-1} = t_{\alpha\beta}$ y $t_{\gamma\beta} \circ t_{\beta\alpha} = t_{\gamma\alpha}$. Ver Figura 3.1.

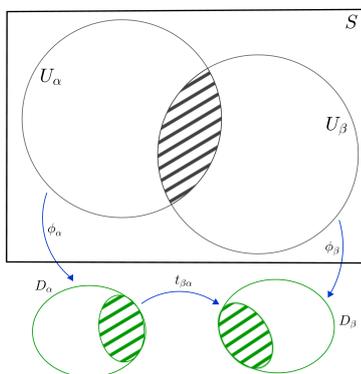


Figura 3.1: Funciones de transición.

A veces es más conveniente definir las superficies en términos de $(\phi_\alpha)^{-1} = \psi_\alpha$ el inverso y ahora tenemos el atlas inverso $\{(\psi_\alpha, D_\alpha) : \alpha \in A'\}$ tal que cumple con los incisos 2 y 3 de la definición de superficie (definición 3.1), excepto con el inciso 1 que S sea de Hausdorff. No es suficiente que S sea localmente homeomorfa a \mathbb{C} es necesaria la hipótesis de que S sea de Hausdorff. Mostraremos la necesidad de esta hipótesis con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1 Sean P_0 y P_1 superficies en \mathbb{R}^3 formadas por los planos $x_3 = 0$ y $x_3 = 1$ respectivamente.

Definimos

$$f(x) = \begin{cases} (x_1, x_2, x_3) & \text{si } x_1 = x_2 = 0 \\ (x_1, x_2, 0) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en $P_0 \cup P_1$ y dado $S = f(P_0) \cup f(P_1) = P_0 \cup \{(0, 0, 1)\}$ con la topología del cociente inducida por f .

La restricción f_i de f a P_i con $i = 1, 2$ donde P_i es un homeomorfismo sobre $f_i(P_i)$ y los tomamos como cartas inversas. Cada P_i es conexo entonces los $f(P_i)$ se unen en S conexo. Sin embargo S no es Hausdorff, por ejemplo si tomamos vecindades de $(0, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$ en S respectivamente, estas vecindades necesariamente contienen un subconjunto $\{0 < x_1^2 + x_2^2 < t\}$ de P_0 .

Por otro lado, si dado D un dominio en la superficie S consideramos D como una superficie con el atlas $\{(\phi_\alpha, U_\alpha \cap D) : \alpha \in A'\}$. Si supieramos que D es abierto al tener que $\phi(U_\alpha \cap D)$ entonces $U_\alpha \cap D$ debe ser abierto y $D = \cup_\alpha (U_\alpha \cap D)$.

Por otro lado si consideramos S como extensión de D , ya que D superficie es un subdominio de S , cuando la estructura dada en D coincide con la estructura inducida, entonces D es un subconjunto abierto de S . Si D es compacto, entonces D es también un subconjunto cerrado del espacio de Hausdorff S y como S es conexo, entonces $D = S$.

Y por ello necesitamos que S sea de Hausdorff, ya que si el espacio es de Hausdorff, la definición de que un espacio sea localmente compacto (cada punto del espacio tiene una vecindad compacta) es equivalente con la definición de compacidad local (cada punto tiene una base conformada por vecindades de conjuntos compactos).

Ahora presentaremos lo que son las superficies de Riemann, podemos decir que las superficies de Riemann son el mayor dominio posible que se puede construir preservando la propiedad de que una función sea holomorfa, es decir, la variedad de dimensión compleja uno donde las funciones transición son holomorfas.

Pero para ello es necesario también generalizar la teoría de funciones holomorfas en el plano complejo. Esto es debido a que la analiticidad es una propiedad local y es una restricción innecesaria imponer un dominio global con propiedades pre-existentes, es decir, puesto que hay muchas funciones holomorfas definidas en una región, esta puede extenderse. Es entonces cuando intentamos buscar el mayor dominio posible, pero este problema no siempre tiene solución en el plano complejo. La solución la proporciona la idea de superficie de Riemann construida a partir de su comportamiento local. Riemann, resolvió la dificultad de construir un dominio natural para las funciones multivaluadas, equivalente al de la continuación holomorfa, con la idea de hacer variar la variable z sobre un dominio que contiene al plano complejo.

Si la función en el plano complejo es multivaluada, entonces construimos una superficie que sea extensión del plano complejo de más de una copia ahí la función será univaluada, a esta superficie que construimos es a la que llamamos superficie de Riemann.

Nuestro primer ejemplo de superficie de Riemann lo vamos a construir de la siguiente forma, sea E el plano complejo al cual le quitamos el eje real positivo $E = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ con este corte se forman dos bordes el superior δ^+ y el inferior δ^- , ya que hicimos esto con uno de los planos consideramos ahora una infinidad de hojas que son copias del plano complejo y lo denotamos de la siguiente forma:

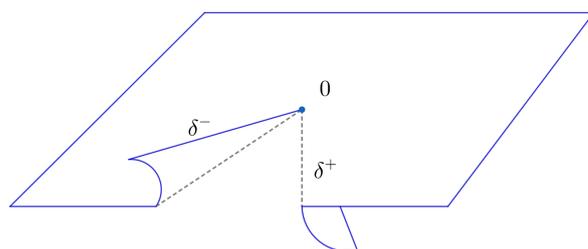


Figura 3.2: Hoja E_0 con los bordes δ_0^- y δ_0^+

Sea E_0 copia del plano complejo con los bordes δ_0^- y δ_0^+ los vamos a distinguir por sus argumentos $0 < \arg(z) < 2\pi$, de la siguiente forma para E_1 copia del plano complejo con los bordes δ_1^- y δ_1^+ con argumentos $2\pi < \arg(z) < 4\pi$, segui-

mos considerando las copias del plano complejo hasta E_k con bordes δ_k^- y δ_k^+ y argumentos $2\pi k < \arg(z) < 2\pi(k + 1)$ para cualquier k número entero.

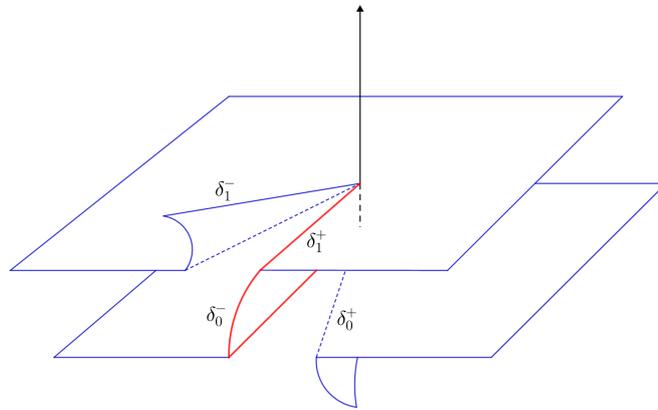


Figura 3.3: Resultado al pegar los bordes δ_0^- con δ_1^+ .

Si pegamos los bordes δ_k^- con δ_{k+1}^+ notemos que los argumentos coinciden, por ejemplo: δ_0^- y δ_1^+ tienen $\arg(2\pi)$, los siguientes son δ_1^- y δ_2^+ tienen $\arg(4\pi)$ así sucesivamente hasta δ_k^- y δ_{k+1}^+ con $\arg(2\pi k)$, entonces no hay discontinuidades en la definición de argumento, esta espiral infinita que se está formando es lo que consideramos nuestra superficie de Riemann, que denotamos por S . Ver Figura 3.4

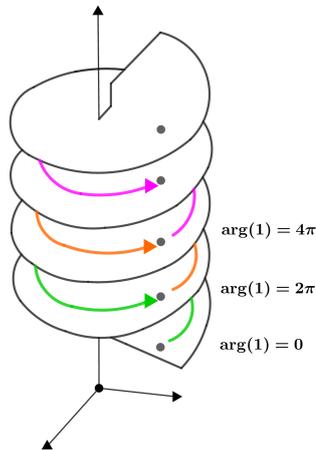


Figura 3.4: Superficie de Riemann S .

Vamos a ver como en este tipo de superficies donde una función que normalmente es multivaluada se vuelve univaluada, hablaremos del $\arg(z)$ para el cual su dominio es todo número complejo distinto de cero.

Podemos tomar cualquier z en el plano complejo y el $\arg(z)$ va a tomar diferentes valores, por ejemplo si z toma el valor de 1 el $\arg(z) = 0$ o el $\arg(z) = 2\pi$ así como puede ser que $\arg(z) = 4\pi$, entonces en general podemos decir que el $\arg(z) = 2\pi k$ para cualquier k número entero, es decir, se tiene una infinidad de posibilidades para un solo número.

Por lo tanto $\arg(z)$ es una función multivaluada con infinitas ramas¹, pero siempre distinguimos una de esas ramas y a esa le llamamos la rama principal que es la que toma los valores del argumento de z en $[-\pi, \pi]$. Notemos que pasa con la circunferencia que empieza en $z = 1$ centrada en 0, el primer valor del $\arg(1)$ que toma es 0 y cuando da una vuelta a la circunferencia y regresa al mismo lugar $z = 1$, ahora toma el valor de 2π si le damos otra vuelta entonces toma el valor de 4π y así sucesivamente. Para más claridad ver la Figura 3.5

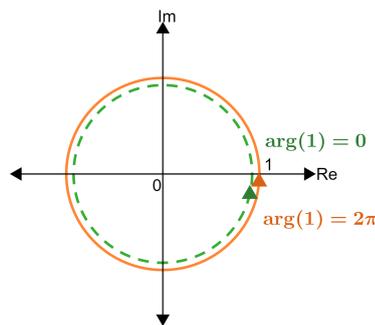


Figura 3.5: Argumento de $z = 1$ en varias ramas.

Ahora debemos de suponer que estos valores que va tomando están en diferente lugar, con la construcción que hicimos nos podremos dar cuenta que movernos en una rama es lo mismo que movernos en los escalones de nuestra espiral infinita, lo que ganamos al hacer esto es que en vez de tener una función multivaluada ahora tenemos una función univaluada en la espiral, es decir, ahora el $\arg(z)$ se vuelve una función univaluada y entonces ya podemos ver la utilidad de la construcción de la superficie de Riemann, S .

El plano complejo para esta superficie de Riemann S , será una proyección bidimensional de la superficie S vista desde el eje z y esto no es lo óptimo. Y por ello lo subimos de dimensión, entonces ya veremos que en vez de darle vueltas al mismo plano complejo, estamos tomando lugares distintos en la espiral.

¹Los puntos de ramificación son los puntos donde se unen las hojas de la función multivaluada y las ramas de la función son los cortes de las hojas.

De esta forma tenemos la siguiente definición para superficies de Riemann.

Definición 3.2 Una superficie de Riemann S es un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable y conexo con una cubierta abierta de conjuntos $U_\alpha \subset S$ con el mapeo $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ tal que cumple con lo siguiente:

1. ϕ_α es un homeomorfismo sobre un subconjunto abierto de \mathbb{C} .
2. Las funciones de transición $t_{\beta\alpha}$ son holomorfas y la derivada compleja es distinta de cero.

Podremos definir conceptos relacionados con una superficie de Riemann solo cuando permanezcan invariantes en aplicaciones previas y posteriores de asignaciones holomorfas univalentes. Una superficie es una superficie de Riemann si se puede definir ángulos en la superficie y si las cartas ϕ_α definidas en la superficie conservan ángulos, es decir, si tomamos el ángulo entre dos curvas γ, γ' en la superficie S y se intersectan en un punto $x \in S$, este ángulo es igual al que se encuentra entre las curvas $\phi(\gamma)$ y $\phi(\gamma')$ de manera que se intersectan en el punto $\phi(x)$.

A continuación demostraremos que superficies como la esfera de Riemann², el plano complejo, el disco unitario, la esfera unitaria y las superficies poliédricas, son superficies de Riemann. Además, construiremos las superficies de Riemann dada una función, no importa si esta es multivaluada.

Para mostrar que el plano complejo es superficie de Riemann, usaremos solo un atlas definido por una carta ya que $U = \mathbb{C}$, podemos usar la carta identidad $\phi(z) = z$, es decir, (\mathbb{C}, z) se genera a sí mismo (cubre toda la superficie de Riemann) como $f(U) = \mathbb{C}$.

Mostraremos que la esfera de Riemann es superficie de Riemann, lo haremos usando la definición de atlas y definiendo cartas que cubran a toda la superficie. Como el $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, tenemos las cartas U_i con $i = 1, 2$, definidos de la siguiente forma:

- $U_1 = \mathbb{C}$
- $U_2 = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$

²La esfera de Riemann se obtiene del plano complejo agregándole el punto al infinito, que se representa como $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Y necesitaremos dos mapeos ϕ_i con $i = 1, 2$, definidos de la forma:

- $\phi_1(z) = z$ el mapeo identidad.
- $\phi_2(z) = 1/z$ la inversa compleja con $\phi_2(\infty) = 0$.

Por lo que cubrimos a la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ con el atlas $\{(\mathbb{C}, z) \text{ y } (\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1/z)\}$, para comprobarlo podemos hacer una composición de los dos mapeos $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ que es holomorfo en $\phi(U_1 \cap U_2) \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ambas funciones de transición son $z \rightarrow \frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que igual es holomorfo.

Para mostrar que el disco unitario es superficie de Riemann, tomamos el disco unitario como $\Delta \subset \mathbb{C}$, cada subconjunto abierto de \mathbb{C} es una superficie de Riemann con un atlas dado por una sola carta que es la identidad en sí mismo.

Veremos a continuación que las superficies poliédricas o poliedros son superficies de Riemann. Aunque esta discusión será informal, sirve para reafirmar conceptos y por eso la incluimos.

Empecemos estableciendo lo que entendemos por poliedro en \mathbb{R}^3 : Es una unión de caras F_i , donde cada cara es un dominio; al dominio hay que entenderlo como una región abierta y conexa, que vive en algún plano, donde la orilla de cada cara consiste en una unión de segmentos que vamos a llamar bordes. Asumimos que un borde no es una abertura en la cara, por lo que hay una única n normal en el borde apuntando hacia la cara. Por ejemplo, analicemos el tetraedro que tiene cuatro caras para la cara F_1 determinamos el vector n_1 que apunta hacia la cara.

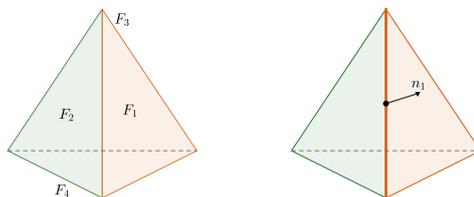


Figura 3.6

Suponemos también que cada cara F_i tiene asociada una N_i en \mathbb{R}^3 normal única. De esta manera cada borde de F_i puede considerarse como un borde dirigido, la dirección dada por el producto vectorial $n \times N_i$.

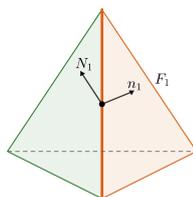


Figura 3.7: Cada F_i se considera un borde dirigido.

Cada borde es un borde en común con exactamente otra cara distinta y asumimos que las dos direcciones en un borde dado son opuestas, esta es la condición de orientabilidad inevitable.

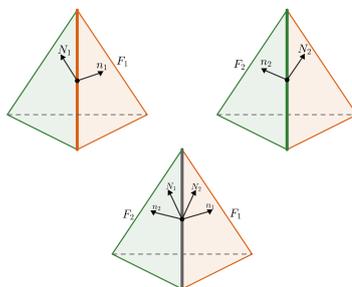


Figura 3.8

Los bordes distintos se encuentran (si es que se unen) en un vértice, que es un punto en común al final de los bordes. Por ejemplo, el tetraedro tiene cuatro vértices, que podemos enumerar dependiendo de las caras que se unen.

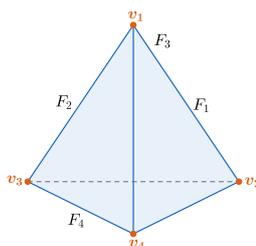


Figura 3.9

Lo que sabemos hasta este punto es que cada cara que tiene un vértice dado v_i tiene dos bordes que finalizan en v_i y las caras que contiene a v_i se pueden enumerar como F_1, F_2, \dots, F_n de manera que F_i se une con F_{i+1} , además estas caras que se unen comparten un borde que finaliza en el vértice v_i .

Consideramos \mathbb{C} como el plano con la tercera coordenada igual a cero, cada cara F_i se puede mapear con una isometría euclídeana en \mathbb{C} de tal manera que la normal N_i se asigna a un vector dirigido verticalmente hacia arriba. Si tenemos los mapeos ϕ y ψ entonces la aplicación $\psi\phi^{-1}$ que es de la forma $z \mapsto az + b$, tomando todos estos mapeos como cartas holomorfas.

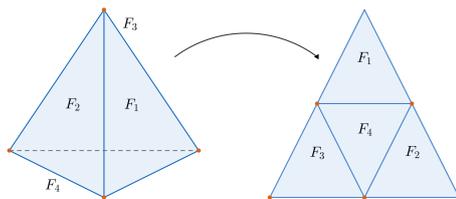


Figura 3.10

En cada punto x en el interior de un borde E , debemos excluir los vértices ya que no podríamos construir una vecindad alrededor de él (como la Figura 3.11 del lado izquierdo), construimos dos semidiscos D_1 y D_2 centrados en x y que tiene un diámetro en común $d \in E$ como en la Figura 3.11 del lado derecho.

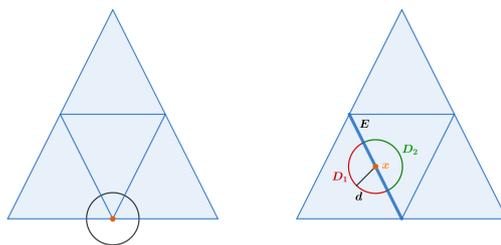


Figura 3.11: La imagen del lado izquierdo es el caso incorrecto para tomar la vecindad y la del lado derecho es la forma como si debemos de tomar la vecindad.

Los semidiscos D_j se encuentran en las dos caras en E y son lo suficientemente pequeñas como para no encontrarse con ningún otro borde. Para obtener una carta en x , mapeamos del semidisco D_1 y D_2 por isometrías a semidiscos D'_1 y D'_2 con un diámetro en común en \mathbb{C} .

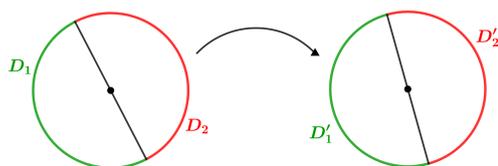


Figura 3.12

El supuesto de orientabilidad significa que $D'_1 \cup D'_2$ es un disco en \mathbb{C} . Si $D''_1 \cup D''_2$ se logra de manera similar al mapeo de transición de $D'_1 \cup D'_2$ sobre $D''_1 \cup D''_2$ que igualmente es de la forma $z \mapsto az + b$. Siempre podemos construir una vecindad lo suficientemente pequeña para que una vecindad en la superficie se vaya a una vecindad en el plano.

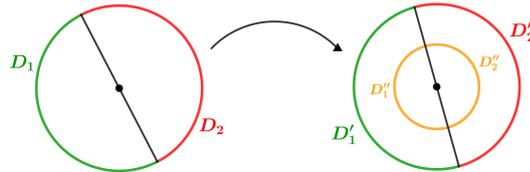


Figura 3.13

Al incluir todos estos mapeos como cartas, hemos construido una superficie poliédrica (con sus vértices eliminados) y, además, la podemos ver como superficie de Riemann.

Ahora extendemos la carta holomorfa para incluir los vértices en la superficie; en cada vértice v_i se unen un número finito de caras F_i , cada una tiene un ángulo θ_i , sea $\alpha = \frac{2\pi}{\sum \alpha_i}$ la suma de los ángulos internos. Construimos una bola B adecuadamente pequeña centrada en v_i , donde cada conjunto $B \cap F_i$ es un sector con ángulo θ_i en v_i . Mapeamos $B \cap F_i$ en el plano complejo como lo hicimos anteriormente, v_i mapea al origen y luego aplicamos el mapeo $z \mapsto z^\alpha$.

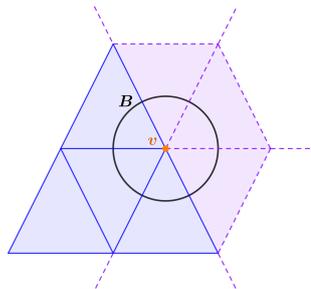


Figura 3.14

Esto produce una parte con un ángulo $\alpha\theta_i$ en el origen. Debido al valor de α estas asignaciones se pueden elegir para proporcionar un homeomorfismo de la vecindad B de v_i en un disco en \mathbb{C} . A cada vértice se le asigna una sola carta de este tipo, por lo que no es necesario considerar a la función de transición en la imagen de un vértice. Todas las funciones de transición (que después vimos como cartas) son composiciones de mapeos de la forma $z \mapsto az + b$ y $z \mapsto z^\alpha$ y estos son holomorfos

por el ejemplo 3.2 que se muestra más adelante.

De esta forma toda superficie poliédrica es una superficie de Riemann.

Ejemplo 3.2 Sea D un disco con diámetro d que corresponde a dos semidiscos D_1 y D_2 . Suponemos que $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es continua y que f es holomorfa en cada D_j . Probaremos que f es holomorfa en D .

Demostración:

Suponemos que f_1, f_2, \dots, f_n sucesión de funciones holomorfas que convergen a f continua en el disco D abierto. Por el teorema de Cauchy (apéndice 4 - A) para $\gamma_i = 1, 2$ y para cada n tenemos:

$$\oint_{\gamma_i} f_n(z) dz = 0$$

a lo largo de cualquier curva cerrada γ en D , entonces se cumple la convergencia uniforme.

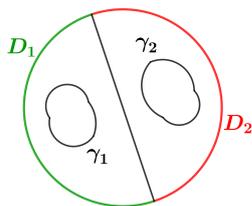


Figura 3.15

Por lo que tenemos que:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{\gamma} f_n(z) dz = 0$$

Y por el teorema de Morera (apéndice 3 - A) la función f debe ser holomorfa en D . □

Ya solo queda mostrar que la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 es una superficie de Riemann.

Definimos la esfera unitaria como $S^2 = \{(x, y, t) : x^2 + y^2 + t^2 = 1\}$ en \mathbb{R}^3 . Para que S sea una superficie de Riemann tomamos U_1 y U_2 que son el complemento de los puntos $\xi_1 = (0, 0, 1)$ y $\xi_2 = (0, 0, -1)$ respectivamente, definimos en U_j las cartas ϕ_j (para $j = 1, 2$) como:

$$\phi_1(x, y, t) = \frac{x + iy}{1 - t} \quad y \quad \phi_2(x, y, t) = \frac{x - iy}{1 + t}$$

donde $\phi_1(x, y, t)\phi_2(x, y, t) = 1$ con $t^2 \neq 1$. Ver Figura 3.16.

Entonces en S tenemos el atlas $\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$ con dos mapeos de transición t_{12} y t_{21} pero que son iguales y son la inversión compleja $z \mapsto \frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, por lo que S , con este atlas, es una superficie de Riemann.

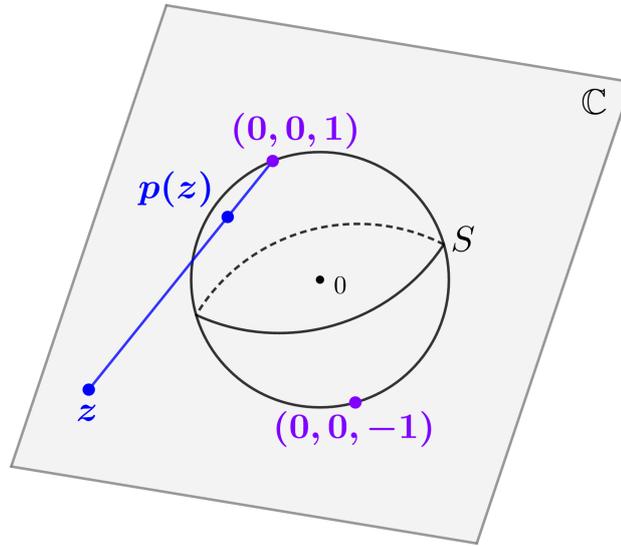


Figura 3.16: Proyección estereográfica.

A continuación veremos ejemplos de la construcción de la superficie de Riemann para funciones multivaluadas.

Empezamos con la función $\log(z)$. Podemos definir la función $\log(z)$ al considerar la inversa de esta función que es la función exponencial, puesto que $z = e^{\log(z)}$ y entonces podemos deducir que $\log(z) = \log|z| + i \arg(z)$.

Nos fijamos en la parte del $\arg(z)$, que como ya vimos, es una función multivaluada, entonces $\log(z)$ es también multivaluada. Y lo que procede es que si el dominio sube de dimensión lograremos que la función sea univaluada.

Al ser una función multivaluada, las distintas ramificaciones de $\log(z)$ no pueden unirse, ya que dos ramas pueden llegar al mismo valor en el dominio y tener imágenes distintas, por ejemplo: en el plano complejo consideremos dos trayectorias γ_1 y γ_2 como en la Figura 3.17, si recorremos γ_1 y nos aproximamos a -1

tendríamos $\log(-1) = \pi i$ y si en cambio continuamos por γ_2 para llegar a -1 obtenemos $\log(-1) = -\pi i$ entonces γ_1 y γ_2 terminan en el mismo lugar, pero sus logaritmos tienen valores distintos.

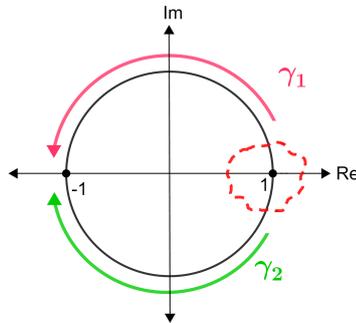


Figura 3.17: Función $\log(z)$ en $z = 1$.

Este problema se podrá resolver al definir la rama de valor principal de $\log(z)$ para poder definirla lo que hacemos es restringimos a $\arg(z)$ a su valor principal que como ya habíamos dicho está dado de $[-\pi, \pi]$. Esto produce la rama principal de logaritmo, denotado por $Log(z)$, la parte del $\arg(z)$ la estamos haciendo univaluada pero no es el dominio óptimo de $\log(z)$, al igual que en la Figura 3.4.

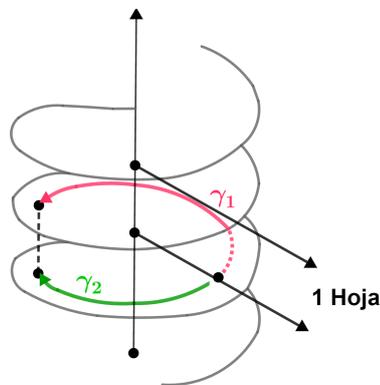


Figura 3.18: Espiral de la función $\log(z)$.

Hay que observar que $\log(z)$ tiene un punto de ramificación (singularidad) en el eje real negativo, pues cuando $\log(z)$ está cerca del origen $|\log(z)| \rightarrow \infty$, pero no importa cuantas veces circule al rededor del origen, $\log(z)$ nunca regresa al mismo lugar, si no que continua variando. Entonces es natural pensar que el dominio más adecuado es una espiral como en la Figura 3.4.

Ya construimos nuestra espiral infinita S que es una superficie de Riemann, ahora hay que probar que $\log(z)$ es univaluada en S y que cada variación de 2π en el argumento corresponde a diferentes niveles en S .

La trayectoria que se forma $\Gamma(t) = e^{it}$ con $t \in (0, 2\pi k]$ y $k \in \mathbb{N}$ es holomorfa al plano complejo, podemos considerar que para cualquier $z \in S$ tenemos $\log(z) = w$ tal que $w \in S$ es único, entonces z sigue la trayectoria hasta llegar a w .

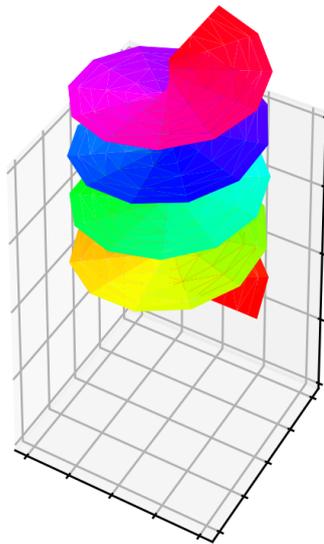


Figura 3.19: Dominio de $\log(z)$.

Por otro lado, ahora mostraremos usando cartas y la definición de atlas que S es superficie de Riemann para la función logarítmica.

Construimos S usando las copias del plano complejo en z pero por los valores de $\log(z)$, pero con la diferencia que denotaremos el punto z como (z, w) en las copias del plano complejo.

Consideramos un subconjunto del espacio métrico $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ como $S = \{(z, w) : z = \exp(w)\}$ que hereda la topología de Hausdorff.

Ahora definimos el mapeo $\phi : S \rightarrow \mathbb{C}$ este mapeo ignora el parámetro adjunto a z , $(z, w) \mapsto z$, se puede considerar como una proyección vertical en alguna copia del plano complejo. En general un punto en S se denota como $(\exp w, w)$.

Sea D_w un disco abierto en \mathbb{C} centrado en $z_1 = \exp w$ (no contiene al cero), entonces definimos la integral que esta sobre cualquier camino en D_w

$$L_w(z) = w + \int_{z_1}^z \frac{d\xi}{\xi}$$

Esta es una función holomorfa y univaluada en D_w el cual toma el valor w en z_1 . Ahora tenemos el punto (z, L_w) en R definimos $U_w = \{(z, L_w(z)) : z \in D_w\} \subset S$, esto quiere decir que $(\exp w, w)$ junto con todos los puntos vecinos en R . Sea ϕ_w la restricción de ϕ a U_w , con el atlas $\{(\phi_w, U_w)\}$ hacen a S una superficie de Riemann.

Seguimos con la función $\sqrt[n]{z}$ que vamos a definir la raíz n -ésima de z de la siguiente forma

$$\sqrt[n]{z} = e^{\log z \frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log(z)} = e^{\frac{1}{n}(\log |z| + i \arg(z))} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(\arg z + 2\pi k)}{n}} = r^{1/n} e^{i\theta/n}$$

Luego debemos analizar como se comporta la función para el caso $n = 2, \sqrt{z}$, es decir, la raíz cuadrada. De la discusión previa al tener la raíz cuadrada de z , quiere decir que la función rodea dos veces al origen en el mismo lugar, entonces \sqrt{z} es una función multivaluada en el plano complejo.

Como la función rodea dos veces al origen pero en lugares distintos, es conveniente subir de dimensión nuestro dominio, para obtener una función univaluada.

Sea $\gamma(t)$ el círculo unitario recorrido en forma dextrógira, tal que t va de 0 a 4π $\gamma(t) = e^{it}$ y $f(\gamma(t)) = r^{1/2} e^{i\theta/2}$.

Lo que queremos ver es que si las dos hojas que se forman al dar dos vueltas son una copia holomorfa al plano complejo, entonces tal y como lo hicimos para el $\arg(z)$ y el $\log(z)$ podremos unir las y formarán otra superficie de Riemann, que denotaremos por S .

Si evaluamos en $t = 0$ tenemos $\gamma(0) = 1$ y $f(\gamma(0)) = f(1)$ por como definimos a $f(\gamma(t))$ tenemos $f(1) = e^{i\pi k} = 1$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, al hacer este recorrido $\gamma(t)$ va tomando los valores $\{i, -i, -1\}$ y $f(t)$ toma valores en el círculo imagen.

Al evaluar en $t = 2\pi$, $\gamma(2\pi) = 1$ pero $f(\gamma(2\pi)) = f(1) = e^{-i\pi k} = -1$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, al hacer esto $\gamma(t)$ regresa a 1 pero $f(t)$ llega a tomar el valor de -1 , esto quiere decir que cuando t toma estos dos valores se forma una hoja que es una copia holomorfa al plano complejo.

Pero nos falta evaluar $t = 4\pi$ tenemos $\gamma(4\pi) = 1$ y $f(\gamma(4\pi)) = f(1)$ en este caso tendríamos que $f(1) = e^{i\pi k} = 1$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, $f(\gamma(t))$ está regresando a

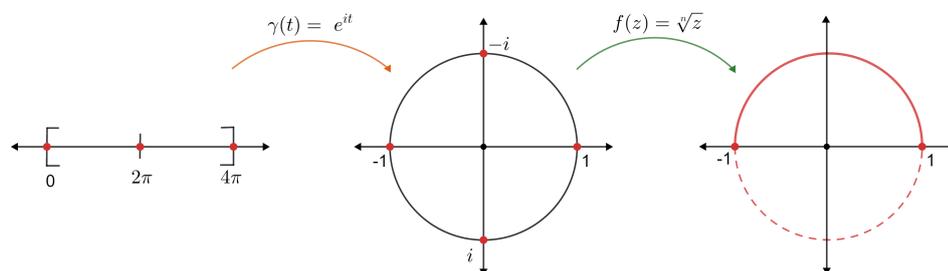


Figura 3.20: Funciones $\gamma(t)$ y $f(z) = \sqrt{z}$

1, $\gamma(t)$ está dando una segunda vuelta tomando nuevamente los valores $\{i, -i, -1\}$ mientras que $f(t)$ toma valores en las otras raíces en el semi-plano inferior, por lo que se forma otra hoja que es copia holomorfa al plano complejo. Ver Figura 3.21

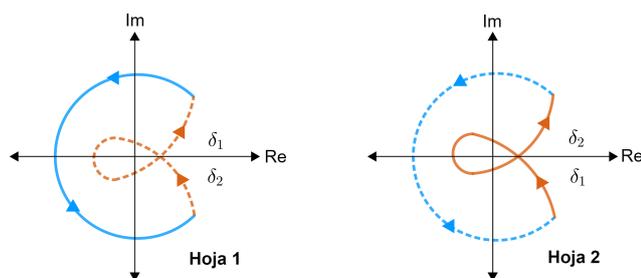


Figura 3.21: Hojas de la función \sqrt{z} .

Después de dar las dos vueltas aseguramos que la transición entre ellas es holomorfa, entonces obtenemos dos copias del plano complejo, que al unir las formamos la superficie S de Riemann. Que mostramos en la Figura 3.22.

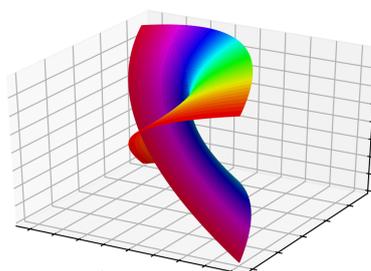


Figura 3.22: Dominio de \sqrt{z}

Veamos que la superficie que construimos para la función \sqrt{z} es superficie de Riemann: Sean $\alpha = [z, g_n]$ con $n = 1, 2$ donde $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que g_n es la función asociada a \sqrt{z} definida como:

$$g_n(z) = \exp\frac{1}{2}(\log(z) + 2(n-1)\pi i) \text{ con } n = 1, 2$$

La superficie S la podemos reescribir como $S = \{[z, n] : z \in \mathbb{C}, n = 1, 2\}$, donde $[z, n]$ son los elementos en la superficie S con puntos en \mathbb{R}^3 y n denota la hoja a la que nos referimos; como lo hicimos para la función logarítmica, sea U_α disco en S con radio $|z|$, la carta es $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ con $[z, n] \mapsto z$, por lo tanto el atlas que define a S es (U_α, ϕ_α) , con este atlas S es superficie de Riemann.

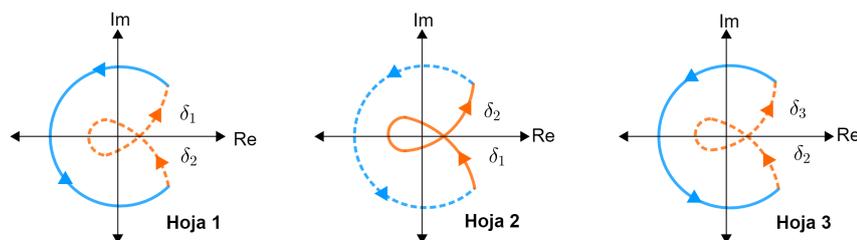
Finalmente analicemos como se comporta la función $\sqrt[n]{z}$ para el caso $n = 3$, $\sqrt[3]{z}$. De lo aprendido en los casos anteriores y como tenemos la raíz cúbica de z , podemos decir que la imagen rodea tres veces al origen en el mismo lugar, es decir, $\sqrt[3]{z}$ es una función multivaluada en el plano complejo.

Supongamos que la función si rodea tres veces al origen pero en distintos lugares, esto quiere decir que es conveniente subir de dimensión nuestro dominio para obtener una función univaluada.

Sea $\gamma(t)$ el círculo unitario recorrido tres veces en forma dextrógira, t va de 0 a 6π $\gamma(t) = e^{it}$ y $f(\gamma(t)) = r^{1/3} e^{i\theta/3}$.

Para la primera y segunda vuelta ya conocemos el recorrido que sigue $\gamma(t)$ y $f(z)$ ya que es el mismo que para $\sqrt[2]{z}$, entonces solo nos queda analizar las funciones en la tercera vuelta alrededor del círculo unitario, es decir, ya tenemos dos hojas que son una copia holomorfa al plano complejo, pero hay que ver lo que pasa en la tercera vuelta, si esta es o no una copia holomorfa del plano complejo.

Si evaluamos $t = 6\pi$ tenemos $\gamma(6\pi) = 1$ y $f(\gamma(6\pi)) = f(1) = 1$, como en la Figura 3.20. $\gamma(t)$ toma los valores $\{i, -i, -1\}$ mientras que $f(t)$ toma valores en las otras raíces del semi-plano superior, entonces se forma una hoja que es una copia holomorfa al plano complejo.



Como esta tercer vuelta si es una copia holomorfa al plano complejo, podemos unirla con las otras dos hojas que ya teníamos, entonces se forma la superficie S de Riemann.

Podemos visualizar al dominio $\sqrt[3]{z}$ como una superficie en el espacio tal y como se ilustra en la Figura 3.23.

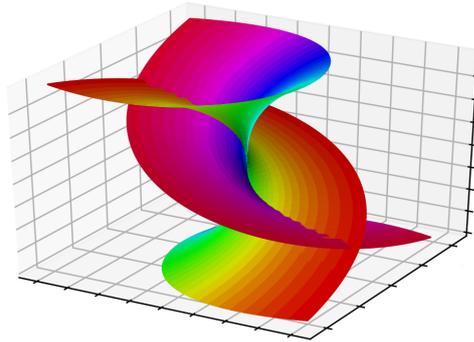


Figura 3.23: Dominio $\sqrt[3]{z}$

Veamos que la superficie que construimos para la función $\sqrt[3]{z}$ es superficie de Riemann. Será de forma análoga que para la raíz cuadrada.

Sean $\alpha = [z, g_n]$ con $n = 1, 2, 3$ donde $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que g_n es la función asociada a $\sqrt[3]{z}$ definida como:

$$g_n(z) = \exp\frac{1}{2}(\log(z) + 2(n-1)\pi i) \text{ con } n = 1, 2, 3$$

La superficie S la podemos reescribir como $S = \{[z, n] : z \in \mathbb{C}, n = 1, 2, 3\}$, sea U_α disco en S con radio $|z|$ la carta es $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ con $[z, n] \mapsto z$, por lo tanto el atlas que define a S es $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$. Y S es superficie de Riemann.

Resultados auxiliares previos al Teorema de Uniformización

En este capítulo veremos varios resultados que necesitaremos para la demostración de teorema de Uniformización.

Empezaremos con las funciones armónicas en superficies de Riemann: las funciones armónicas de una variable real forman una subclase de la clase de funciones convexas. Aparte de definir a las funciones armónicas, veremos algunas propiedades.

Definición 4.1 [Funciones armónicas] Sea S una superficie de Riemann con el atlas $\{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}$ con $\alpha \in A$. Entonces una función con valores reales $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica en S si y sólo si para cada α , la composición $u \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U) \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica en $\phi(U_\alpha)$.

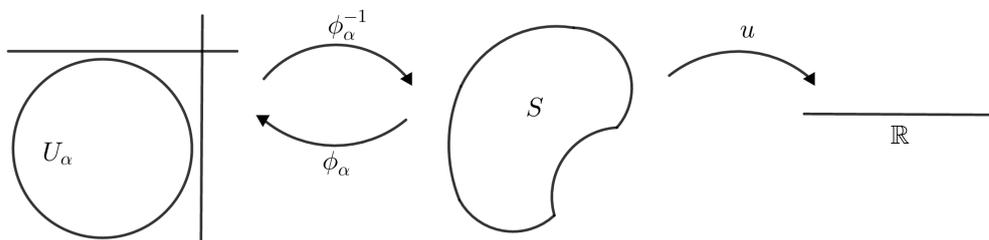


Figura 4.1: Función armónica definida en una superficie S .

Sabemos que la parte real e imaginaria de una función holomorfa son armónicas en un disco abierto. Lo contrario también es cierto, cada función armónica a valores

reales es la parte real o imaginaria de alguna función holomorfa. El comportamiento global de las funciones armónicas no es tan simple de analizar, porque en una región arbitraria no todas las funciones armónicas son la parte real de alguna función holomorfa.

Lo que nos interesa mostrar es que una función armónica definida en una superficie de Riemann cualquiera es la parte real de una función holomorfa de la misma superficie, pero para mostrar este hecho necesitamos un resultado previo.

Corolario 4.1 *Sea S una superficie de Riemann simplemente conexa. Suponemos que existe una colección de dominios $\{D_\alpha : \alpha \in A\}$ en la superficie S con las propiedades:*

1. $\bigcup D_\alpha = S$
2. *Para cada α existe una familia F_α de funciones holomorfas $f : D_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ tales que si $f \in F_\alpha$ y $z \in D_\alpha \cap D_\beta$, entonces existe $g : D_\beta \rightarrow \mathbb{R}$ en F_β con $f = g$ en una vecindad de z .*

Entonces, para cada α podemos seleccionar una función h_α en F_α tal que $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $h(z) := h_\alpha(z)$ si $z \in D_\alpha$ es una función holomorfa de valor único en S .

Ya tenemos los elementos para demostrar el hecho que previamente nombramos.

Teorema 4.1 *Sea u armónica en S superficie de Riemann simplemente conexa, entonces u es la parte real de una función f holomorfa en S .*

Demostración:

Haremos la demostración de la siguiente forma, primero empezaremos demostrándolo para una versión local, es decir, en el plano, después uniremos las versiones locales para que sean válidas en toda la superficie S .

Empezamos con la versión local: Sea u función armónica en un disco abierto D en el plano con centro en z_0 . Luego, definimos la función $g := \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ y esta satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann por lo que es holomorfa en D , definimos la función f como la integral indefinida de un solo valor sobre cualquier camino de z_0 a z en D .

$$f(z) = \int_{z_0}^z g(w) dw = U + iv$$

Satisface $f(z_0) = 0$ y $f' = g$ en D . Entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = f' = \frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y}$$

Por lo que $u - U$ es constante, con $u(z_0)$ en D , deducimos que la función $u(z)$ es la parte real de $f(z) + u(z_0)$.

Para la siguiente parte de la demostración usaremos el corolario 4.1. Sea $\{D_\alpha : \alpha \in A\}$ una cubierta abierta de S de discos paramétricos. La familia F_α esta formada por funciones f que son holomorfas en S con $u = \text{Re}[f]$, la existencia de estas funciones está garantizada por la primera parte de esta demostración y la diferencia de dos funciones cualesquiera de la familia F_α es una constante imaginaria, solo quedaría verificar la hipótesis del teorema 4.1 para poder usarlo con libertad. Supongamos que $z \in D_\alpha \cap D_\beta$ y la función $f \in F_\alpha$, tomamos cualquier función $g \in D_\beta$ al agregar una constante imaginaria podemos asumir que $g(z) = f(z)$, la diferencia $f - g$ tiene una parte real cero en el conjunto abierto $D_\alpha \cap D_\beta$ y es constante, como z se encuentra en $D_\alpha \cap D_\beta$ tenemos $f = g$ cerca de z . Mostramos que cumple con la hipótesis del corolario 4.1, es aplicable y produce a la función holomorfa deseada h en la superficie S con $u = \text{Re}[h]$. \square

El siguiente ejemplo muestra este fenómeno pero sobre un disco perforado, en el sentido de que cualquier función armónica de valor real en un disco perforado es la parte real de alguna función holomorfa en el disco perforado más una constante real multiplicada por la función que en este caso será la función $\log |z|$.

Ejemplo 4.1 *Consideramos la función $\log |z|$ definida en un disco perforado abierto centrado en el origen, esta función es armónica, pero no es la parte real de ninguna otra función holomorfa definida en el mismo disco perforado.*

En las regiones simplemente conexas, cada función armónica de valor real es la parte real de alguna otra función holomorfa en la región dada más algunos términos logarítmicos.

Se dice que una función v es la conjugada armónica de una función armónica u si $u + iv$ es holomorfa. Una conjugada armónica de la función u armónica siempre existe localmente y globalmente en cualquier superficie simplemente conexa.

Con ayuda de lo anterior mostremos el siguiente ejemplo (que esencialmente es continuación del ejemplo visto anteriormente).

Ejemplo 4.2 Consideremos la función $u(z) = \log |z|$ que es armónica en \mathbb{C}^* y cualquier conjugada armónica local es una elección continua de un solo valor de $\arg(z)$, Para probar que no existe una conjugada armónica de la función u en \mathbb{C}^* . Supongamos que v es la conjugada armónica y $h(z) = v(z) + v(\bar{z})$, h es continua y con valor de $\arg(z)\bar{z}$ esto mapea a la superficie \mathbb{C}^* en $2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, h es constante en \mathbb{C}^* con $h(1) = h(-1)$ se sigue que $v(1) = v(-1)$ lo cual es falso pues $v(z) = \arg(z)$.

Con el siguiente teorema demostraremos que este ejemplo es esencialmente único.

Teorema 4.2 Sea u una función armónica en el disco perforado $A = \{z : 0 < |z| < r\}$, entonces existen número real c y una función f holomorfa en A con $u(z) = c \log |z| + \operatorname{Re}[f(z)]$. Además, si u es acotada en A entonces $c = 0$ y u se extiende a una función armónica a lo largo del disco $\{z : |z| < r\}$.

Demostración:

La función $u(z) - k \log |z|$ es armónica en la región A para cualquier constante k entonces la función

$$g(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(z) - k \log |z|)$$

es holomorfa en A porque

$$g(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{k}{z}.$$

Y debido a que el término entre paréntesis ya vimos anteriormente que es holomorfo en A , podemos elegir k de modo que la expansión de Laurent de g en A no tendrá un término que involucre $\frac{1}{z}$. Entonces la integral de g sobre cualquier curva cerrada en A es cero y por lo tanto g tiene una integral indefinida de un único valor f , exactamente como lo hicimos en la demostración del teorema anterior. Así obtenemos $u(z) - k \log |z| = \operatorname{Re}[f(z)] + cte$. Con esto ya demostramos la primera parte del teorema. Además, absorbiendo la constante en f , podemos suponer que

$u(z) = c \log |z| + \operatorname{Re}[f(z)]$ se cumple.

Para $u(z) = c \log |z| + \operatorname{Re}[f(z)]$ podemos ver el valor medio de u sobre el círculo $t = |z|$ es

$$c \log t + \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{t=|z|} \frac{f(z)}{z} dz$$

Y por el teorema de Cauchy (apéndice 4 - A) la integral es independiente de t .

Si ahora asumimos que la función u es acotada en A , entonces también lo es este valor medio y si $t \rightarrow 0$ obtenemos $c = 0$. Deducimos que $u = \operatorname{Re}[f]$ y $|\operatorname{Re}[f]| \leq m$ en A . Si f tiene un polo en el origen, entonces $\{\infty\} \cup f(A)$ es un conjunto abierto en la esfera y entonces $\operatorname{Re}[f]$ no es acotada en A , si f tiene una singularidad esencial en el origen, por lo que concluimos que f debe estar acotada en una vecindad del origen.

Por lo tanto f extiende a la función holomorfa en $\{z : |z| < r\}$ y tenemos $u = \operatorname{Re}[f]$. \square

Para mayor facilidad introduciremos la siguiente notación. Cuando tengamos una función de valor real u definida en un subdominio D de la superficie de Riemann S , decimos que la función ϕ en ∂D domina a u en ∂D , lo escribimos como $u \ll \phi$ en ∂D .

Corolario 4.2 *Sea D un subdominio de la superficie de Riemann S y suponemos que D tiene una cerradura compacta en S . Si u es armónica en D y si $u < m$ en ∂D para alguna constante m , entonces $u \leq m$ en D ó $u = m$ a lo largo de D .*

Demostración:

Tomamos la sucesión $\{z_n\}$ en D con $u(z_n) \rightarrow \sup\{u(z) : z \in D\}$ cuando $n \rightarrow \infty$, como la sucesión z_n se encuentra en la cerradura del compacto \overline{D} , la subsucesión converge a algún $w \in \overline{D}$. Así tenemos dos casos:

- Si $w \in D$, entonces la función u alcanza su máximo en w por lo que u es constante en D .
- Si $w \in \partial D$, entonces en la subsucesión tenemos $\sup_{z \in D} u(z) = \lim u(z_n) \leq m$, por lo que u es constante.

En ambos casos, se sigue la conclusión. \square

Ahora veremos las funciones subarmónicas en superficies de Riemann. Suponemos que la función u es convexa, la función h es armónica y tenemos la siguiente definición:

Definición 4.2 *La función u es subarmónica en la superficie de Riemann S si*

1. $u : S \rightarrow [-\infty, \infty)$ es continua.
2. Si h es armónica y satisface $u \leq h$ a través del dominio plano D en S , entonces también se cumple $u < h$ en D o $u = h$ en D .

Ejemplo 4.3 *Veamos que la función $\log |z|$ es subarmónica en \mathbb{C} . Sea $u(z) = \log |z|$ y h armónico que satisfacen $u \leq h$ en el dominio D . Entonces, la función $h - u$ es no negativa y armónica en $D \setminus \{0\}$ además es continua, así tenemos que $h = u$ a través de $D \setminus \{0\}$ o $h > u$ a través de $D \setminus \{0\}$, solo queda ver los casos:*

- Si $0 \in D$, entonces se cumple (2), así tenemos la conclusión deseada.
- Si $0 \in D$, entonces $u < h$ cerca de 0, se sigue que $u < h$ en $D \setminus \{0\}$ y en D .

Por lo que $u(z) = \log |z|$ es subarmónica en \mathbb{C} .

El siguiente resultado se obtiene al tomar a la función h constante e igual al $\sup u$. Obtenemos el Principio del Máximo para funciones subarmónicas.

Teorema 4.3 [Principio del Máximo para funciones subarmónicas] *Sea u una función armónica en el dominio D en \mathbb{C} .*

- (a) *Si u alcanza un máximo global en D , entonces u es constante.*
- (b) *Si D es acotada y $\lim_{z \rightarrow \xi} \sup u(z) \leq 0$ para todo $\xi \in \partial D$, entonces $u \leq 0$ en D .*

Demostración:

- Suponemos que u alcanza su valor máximo M en D , definimos los conjuntos $A := \{z \in D : u(z) < M\}$ y $K := \{z \in D : u(z) = M\}$. A es un

conjunto abierto ya que u es semicontinuo superiormente, el conjunto K es abierto igualmente debido a la propiedad del valor medio para funciones subarmónicas, cualquier círculo suficientemente pequeño al rededor de $z \in K$ debe estar en K , porque si no es así entonces existe un círculo que se intersecta con A y como A es abierta, la intersección contendrá un segmento de longitud finita, por lo tanto, el valor medio de la integral será menor que $2\pi M$ por la propiedad del valor medio local.

Por supuesto, A y K son partición de D , donde D es conexo, uno de los dos conjuntos debe ser vacío. El conjunto K no es vacío, por lo que $A = \emptyset$ y queda demostrado el inciso (a).

- Extendamos a la función u hasta el límite de D por $u(\xi) = \limsup_{z \rightarrow \xi} u(z)$ para $\xi \in \partial D$, entonces la función u es semicontinua superiormente en \overline{D} , dado que el dominio \overline{D} es compacto por lo que u alcanza su máximo en \overline{D} . Si el punto máximo está en D , entonces $u = 0$ en \overline{D} por el inciso (a). Si el punto máximo está en la frontera de D , entonces $u \leq 0$ en \overline{D} .

□

El siguiente resultado nos permite extender funciones subarmónicas locales para obtener una función subarmónica global.

Teorema 4.4 *Sea $\{D_\alpha : \alpha \in A\}$ una cubierta abierta de S superficie de Riemann y supongamos que u_α es subarmónica en D_α . Si $v(z) = \sup\{u_\alpha(z) : \alpha \in A\}$ se alcanza en cada z tal que $z \in D_\alpha$ es continua, entonces la función v es subarmónica en S .*

Demostración:

Tomamos cualquier dominio plano D y cualquier función armónica h que satisfaga $v \leq h$ en D . Así definimos $A := \{z : v(z) < h(z)\}$ y $B := \{z : v(z) = h(z)\}$. Como v y h son funciones continuas, A es un subconjunto abierto de D . Si $w \in B$, entonces existe algún β que $u_\beta(z) \leq v(z) \leq h(z)$ donde z está cerca de w , tomando en cuenta cuando $z = w$, entonces $u_\beta = h$ y $u_\beta = v = h$ cerca de w .

Finalmente esto prueba que B es abierto y como D es conexo tenemos que $D = A$ o $D = B$. □

A continuación definiremos una nueva función que en realidad es la función u solo con algunas modificaciones respecto al dominio D . La definimos de la siguiente forma.

Definición 4.3 A la siguiente función se le llama modificación de Poisson de u en D :

$$u_D(z) := \begin{cases} u^*(z) & \text{si } z \in D \\ u(z) & \text{si } z \notin D \end{cases}$$

Probaremos que la función antes definida es subarmónica y está relacionada con la función original u y u^* (función subarmónica en el interior de D).

Teorema 4.5 u_D es subarmónica y satisface $u_D \geq u$ en S .

Demostración:

Por el Principio del Máximo para funciones subarmónicas (teorema 4.3) tenemos $u^* \geq u$ en D , entonces $u_D \geq u$ y por la proposición antes demostrada si lo aplicamos a u en S y u^* en el interior de D muestra que u_D es una función subarmónica en S . \square

Ya vimos a las funciones armónicas y como se relacionan con las funciones subarmónicas además de ver su relación con las funciones holomorfas. Pero si unimos de alguna forma a las funciones subarmónicas para formar una familia de ellas ¿Se seguirán cumpliendo las mismas propiedades o cómo se comportará esta nueva familia?

A continuación hablaremos de como se construye a la Familia de Perron, las propiedades que cumple, además del Método de Perron que después nos ayudará a resolver el Problema de Dirichlet, aunque en capítulos anteriores lo hicimos para una región cualquiera A , veremos como se adapta a las superficies de Riemann. El matemático alemán Oskar Perron hizo numerosas contribuciones a las ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales parciales, incluyendo el Método de Perron también conocido como el método de funciones subarmónicas y la familia de Perron como su nombre lo dice.

Antes de empezar a construir a la familia de Perron necesitamos introducir lo que son los armónicos mayorante, esto nos ayudará a comparar funciones armónicas con otras y así después poder determinar si se encuentran o no en la familia de una superficie delimitada.

En este momento consideramos F como la familia de funciones donde cada una de las funciones es subarmónica en una superficie de Riemann S . Un *armónico mayorante* en S es el que satisface $f \leq h$ para cada $f \in F$. A su vez también tenemos el armónico mínimo mayorante que es un armónico mayorante h de F y que satisface $h \leq g$ para cada armónico mayorante g de F .

Sea F una sucesión de funciones armónicas positivas $0 < u_1 \leq u_2 \leq \dots$. Si $u_i = u_j$ es un punto de S de modo que $u_i = u_j$, entonces podemos superar $0 < u_1 < u_2 < \dots$. Por la desigualdad de Harnack (apéndice 2 - A), la sucesión $u_n(w)$ converge uniformemente a $+\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ en cada subconjunto compacto de S . En dado caso que esto no sea así tenemos $0 < u_n(z) - u_k(z) \leq m[u_n(z) - u_k(z)]$ en K siempre que $n > k$, pero en el capítulo anterior vimos que $u_n - u_k$ es una función armónica positiva. Si tuvieramos una sucesión de u_1, u_2, \dots creciente de funciones armónicas en S , $u(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z)$, entonces u_n converge uniformemente a u en un subconjunto compacto de S y $u \equiv +\infty$ en S o $u < +\infty$ y es armónico en S .

Ahora lo que queremos es hacer lo mismo pero con familias arbitrarias, solo que en las familias más generales, la propiedad de ser monótonas se reemplaza por ser dirigidas. Para eso debemos de definir cuando un conjunto este dirigido.

Definición 4.4 *Sea F una familia de funciones reales definidas en un conjunto X . Decimos que F se dirige (hacia arriba) si para todo f y g en F existe una función $h \in F$ con $h \geq \max\{f, g\}$.*

Con esta definición el papel del límite de una sucesión creciente debe ahora ser asumido por el supremo de una familia dirigida, así tendremos el siguiente resultado, que es muy parecido a lo dicho anteriormente solo que ahora trabajaremos con el supremo de la familia de funciones:

Proposición 4.1 *Sea F una familia de funciones cada una dirigida a una función armónica en S y sea $s(z) = \sup\{u(z) : u \in F\}$. Entonces $s = +\infty$ en S o $s < +\infty$ y es armónica en S .*

Demostración:

Para cada punto z^* en S , podemos encontrar una sucesión de funciones en F tal que $u_n(z^*) \rightarrow s(z^*)$. Como F es dirigida, podemos encontrar otras funciones v_1, v_2, \dots en F tal que $v_1 = u_1$ con $v_{n+1} \geq \max\{v_n, u_n\}$ entonces $v_1 \leq v_2 \leq \dots$ y

$v_n(z^*) \rightarrow s(z^*)$ (la sucesión (v_n) es maximal de z^*).

Si $s(z^*) = +\infty$ entonces $v_n \rightarrow +\infty$ en S y $s = +\infty$ en S . Por otro lado $s < +\infty$ en S asumimos que esto es así. Solo queda ver que es armónica en S . Ahora sea z_1 maximal en (f_n) y sea z_2 maximal en (g_n) , podemos encontrar una sucesión de funciones h_1, h_2, \dots en F que cumple con $h_1 \geq \max\{f, g\}$ y $h_{n+1} \geq \max\{f_{n+1}, g_{n+1}, h_n\}$, entonces z_1 y z_2 es maximal de (h_n) , se sigue que $f_n \rightarrow f$, $g_n \rightarrow g$ y $h_n \rightarrow h$ que cumplen con $f \leq h$, $f(z_1) = h(z_1)$ y $g \leq h$, $g(z_2) = h(z_2)$, entonces como las tres funciones f, g y h son armónicas se sigue que $f = h = g$ en S .

Por lo que z_2 es maximal de la sucesión (f_n) , pero recordemos que los puntos son arbitrarios, es decir, z_2 es arbitrario así que (f_n) es maximal en cualquier punto de S , por lo que $s = f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ y esto es armónico. \square

Finalmente para construir a la familia de Perron solo falta cambiar a las funciones subarmónicas en vez de las funciones armónicas.

Definición 4.5 Sea F una familia de funciones tal que cada función en F es subarmónica en S . Decimos que F es una familia de Perron si:

1. Si $f, g \in F$ entonces $\max\{f, g\}$ está en F .
2. Para cada función $f \in F$ y cada disco paramétrico D , tenemos la modificación de Poisson como lo habíamos definido en la Definición 4.3 f_D de f en D también está en F .

Con esta definición restringimos nuestra atención al disco paramétrico D , podemos reemplazar cada función f por su modificación de Poisson más grande f_D , por lo que si consideramos el supremo de f , podemos considerar que existe el supremo sobre la familia F_D de funciones armónicas f_D .

Así que dado f_D y g_D en F_D tenemos $h_D \geq \max\{f_D, g_D\}$ donde $h = \max\{f, g\}$ está en F , entonces $h_D \in F_D$ y es dirigido. Por el teorema antes demostrado se sigue que $s(z) = \sup_{u \in F} u(z)$ es $+\infty$ en D o es $< +\infty$. Por la conexidad de la superficie una de las anteriores opciones se mantiene en todo S , así se establece el siguiente resultado, que le llamaremos el teorema de Perron:

Teorema 4.6 [Teorema de Perron] *El supremo de la familia de Perron en S es $+\infty$ en todo S o es finito y armónico en todo S .*

Demostración:

Si cada familia F_α es una familia de Perron en S , entonces también lo es $F = \bigcap_\alpha F_\alpha$, sea F^* la colección de todas las familias de Perron que contienen a F donde F^* es una familia de funciones subarmónicas en S .

Se sigue que F es la familia de Perron más pequeña que contiene a F^* y el supremo que es s es el armónico mayorante de F^* o es $+\infty$ en todo S . Sea h el armónico mayorante de F^* , la familia de funciones F_h subarmónicas v con $v \leq h$, esta familia de Perron es la que contiene a F^* , entonces $F \subset F_h$, esto produce que

$$s(z) = \sup\{v(z) : v \in F\} \leq \sup\{v(z) : v \in F_h\} = h(z)$$

porque $h \in F_h$. Por lo que en realidad s es el menor armónico mayorante de F^* . \square

El teorema de Perron nos ayuda a identificar el armónico mínimo mayorante de una familia de Perron al identificar su supremo. Además, este teorema será de vital ayuda para encontrar la solución al problema de Dirichlet, aunque en el capítulo anterior vimos el método para una región arbitraria acotada, lo que ahora haremos será adaptar el problema de Dirichlet para un dominio con cerradura compacta en S una superficie de Riemann y f una función continua de valor real en ∂D ¿ Existirá una función h que sea armónica en D con $h = f$ en ∂D ? A continuación mostraremos la existencia de dicha función.

Sea $F = \{u : u \text{ es subarmónica en } D, u \ll f \text{ en } \partial D\}$ y definimos $h_f(z) := \sup_{u \in F} u(z)$. Como \overline{D} es compacto, entonces f es acotado, decimos $|f| \leq M$, así que la constante $-M$ está en F y por el Principio del Máximo $u \leq M$ para todo $u \in F$. Por lo que $-M \leq h_f \leq M$ en D , de este modo es claro que F es una familia de Perron, entonces la función h_f es armónica en D . Podemos observar que si h es solución del problema de Dirichlet, entonces $h \in F$, además, de que $h \leq h_f$.

Por otro lado, si $u \in F$ entonces $u \ll h$ en ∂D , porque recordemos que estamos usando el hecho de que $h = f$, entonces $u - h \ll 0$ en D y donde $u \leq h$ en D . Así $h_f \leq h$, por lo que $h = h_f$. Esto muestra que si la solución existe sería h_f . Ahora como h_f existe y es armónica en D es natural preguntarnos ¿ cuáles son los valores de frontera de h_f ? Tenemos la solución al problema, para cada ξ en ∂D con $z \in D$ tenemos $\lim_{z \rightarrow \xi} h_f(z) = f(\xi)$.

Aparentemente podemos ver que el problema ya está resuelto, pero veamos un ejemplo donde existe h_f y podemos asignarle valores que aparentemente solucionan el problema de Dirichlet.

Ejemplo 4.4 Sea $D = \{z : 0 < |z| < 1\}$ con $f(z) = |z|$ en ∂D , entonces $0 \leq h_f \leq 1$ y h_f es armónica en D .

La función $u(z) = 1 + \epsilon \log |z|$ con $\epsilon > 0$ pertenece a F cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Obtenemos $h_f = 1$ en D , entonces h_f debe cumplir con el valor de frontera en $|z| = 1$ pero no en el punto aislado $z = 0$.

Esto muestra que el problema original no siempre tiene solución. Lo que haremos será obtener condiciones de frontera tanto holomorfas como geométricas para que $\lim_{z \rightarrow \xi} h_f(z) = f(\xi)$ sea válido en un punto particular ξ .

Empezaremos con el criterio holomorfo, que es mostrar la existencia de una función subarmónica en D , donde se señala a ξ como un punto límite especial, esta función se usa para construir y comparar funciones en F . De esta manera se usa para obtener información sobre los valores de frontera de h_f .

Definición 4.6 Sea ξ un punto límite en el dominio D . Entonces w es barrera de ξ si:

- 1) w es subarmónica en D .
- 2) $w(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \xi$ en D .
- 3) Para cada vecindad N de ξ tenemos $\sup_{z \in D \setminus N} w(z) < 0$

Teorema 4.7 Sea D un dominio con cerradura compacta contenido en S superficie de Riemann. Suponemos que $f : \partial D \rightarrow S$ es acotada y continua en el punto $\xi \in \partial D$. Si la barrera existe en ξ , entonces $h_f \rightarrow f(\xi)$ cuando $z \rightarrow \xi$ y $z \in D$.

Demostración:

Sean α y β tal que $\alpha < f(\xi) < \beta$, entonces existe una vecindad N de ξ con $\alpha < f(\xi) < \beta$ en $\partial D \cap \overline{N}$ y existe un $m > 0$ con $w(z) \leq -m < 0$ en $D \setminus \overline{N}$ donde w es barrera de ξ .

Como f es acotado en ∂D , lo escribimos como $|f| \leq M$ donde tomamos $M > \beta$. Mostremos que $v_1(z) \leq h_f(z) \leq v_2(z)$ donde a cada una de estas funciones las podemos definir como:

$$v_1(z) = \alpha + \left(\frac{\alpha + M}{m} \right) \max\{-m, w(z)\}$$

y

$$v_2(z) = \beta - \left(\frac{M - \beta}{m} \right) w(z).$$

Tomando z en D cuando tiende a ξ tenemos:

$$\alpha \leq \liminf_{z \rightarrow \xi} h_f(z) \leq \lim_{z \rightarrow \xi} h_f(z) \leq \beta.$$

Como α y β acotan a $f(\xi)$ podemos dejar que ambos tiendan a dicha función para obtener que $h_f(\xi) \rightarrow f(\xi)$. Por otro lado, observamos que v_1 es una función subarmónica en el dominio D , es más al considerar $w < 0$ en $D \cap \overline{N}$ y $w \leq -m$ en $D \setminus \overline{N}$ tenemos:

$$v_1(z) = \begin{cases} = -M & \text{en } D \setminus \overline{N} \\ \leq \alpha & \text{en } D \cap \overline{N}. \end{cases}$$

Por lo que $v_1 \ll f$ en ∂D , donde $v_1 \in F$ y por como definimos a F , entonces $v_1 \leq h_f$.

Queda mostrar que $h_f \leq v_2$, para eso tomamos cualquier función u en F y definimos:

$$u_1(z) = u(z) + \left(\frac{M - \beta}{m} \right) w(z)$$

usando las mismas estimaciones para w que usamos en la función v_1 tenemos:

$$v_1(z) = \begin{cases} \leq \beta & \text{en } D \setminus \overline{N} \\ \leq u(z) & \text{en } D \cap \overline{N} \end{cases}$$

Entonces $u_1 \ll \beta$ en ∂D , donde se cumple que $u_1 \leq \beta$ en D .

Al tomar el supremo de u en F obtenemos $h_f + \frac{M-\beta}{m} w(z) \leq \beta$ para el cual $h_f \leq v_2$. Por lo que ya mostramos que $v_1(z) \leq h_f(z) \leq v_2(z)$. \square

Ahora veamos el criterio geométrico para la existencia de una barrea en un punto $\xi \in \partial D$, para eso veremos el siguiente resultado.

Teorema 4.8 Sea D un dominio en S superficie de Riemann, suponemos $\xi \in \partial D$. Si existe un gráfico en el atlas (ϕ, U) de S con $\xi \in U$ cumple con $\phi(\xi) = 0$, $\phi(U) = \Delta$ tal que la curva $\phi^{-1}(t)$ y $-1 < t \leq 0$ se encuentra fuera de D , entonces D tiene una barrera en ξ .

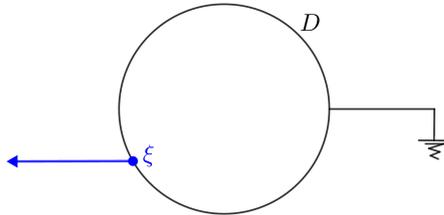
Demostración:

Observemos que $\phi(U \cap D)$ está contenido en $\Delta' = \Delta \setminus (-1, 0]$. Podemos definir una función holomorfa $q \in \Delta'$ como $q(z) = z^{\frac{1}{4}}$ donde $|\arg(z^{\frac{1}{4}})| < \frac{\pi}{4}$. Entonces la función $h(z) = \operatorname{Re}[-q(z)]$ es armónica y negativa en Δ' y $h(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow 0$.

Por el teorema 4.4 aplicado a las dos funciones en D y $z \rightarrow r(\phi z)$ en $U \cap D$ proporciona una barrera en ξ . \square

Ya mostramos la existencia de la función solución del problema de Dirichlet, además de dar criterios para las condiciones de frontera de dicha solución.

Nos falta ver lo que son las funciones de Green para eso consideramos el dominio plano D , existe una carga puntual en ξ en D . La función es armónica en D excepto por una singularidad logarítmica en ξ y desaparece en ∂D . Una carga puntual tiene un valor $\log(z)$ que es continuo en todas partes excepto en ella misma, como ya vimos anteriormente.



Supongamos que existe una biyección conforme f de D sobre Δ con $f(\xi) = 0$, debido a que $|f(z)| \rightarrow 1$ cuando $|z| \rightarrow \partial D$ tenemos que $g(z, \xi) = -\log |f(z)|$. Tenemos que invertir estas ideas para poder establecer la existencia de f , primero derivando la existencia de $g(z, \xi)$, suponiendo que D es un dominio el cual cada punto de ∂D tiene una barrera. Para ξ podemos encontrar una solución del problema de Dirichlet u con valores en la frontera dados por $\phi(z) = \log |z - \xi|$ con $z \in \partial D$ y se define $g^*(z, \xi) = u(z) - \log |z - \xi|$ aunque tenemos un problema, ya que la construcción de esta función depende de ∂D y las superficies de Riemann generalmente no tienen una frontera, así que debemos de usar otro enfoque.

Sea ξ cualquier punto en la superficie de Riemann S , denotamos como $F(z)$ a la familia de funciones de v que cumple con las propiedades:

-
1. La función v es subarmónica en $S \setminus \{\xi\}$.
 2. $v = 0$ cuando está cerca del punto límite ideal, es decir, cuando está fuera de un conjunto compacto.
 3. Para cualquier gráfico ϕ en ξ tenemos $v(z) + \log |\phi(z) - \phi(\xi)|$ está acotado por arriba cerca de ξ .

Aunque el punto 3. es independiente del gráfico ϕ y se puede expresar como $v(z) + \log |z - \xi| \leq M$. Por el teorema 4.6, $F(z)$ es una familia de Perron de las funciones en $S \setminus \{\xi\}$, así $g(z) = \sup_{v \in F(\xi)} v(z)$ es idénticamente $+\infty$ en $S \setminus \{\xi\}$ o es armónica en $S \setminus \{\xi\}$.

Por todo lo anterior finalmente tenemos una definición para la función de Green.

Definición 4.7 Si g es armónico escribimos $g(z, \xi)$ para $g(z)$ y la llamamos función de Green en S con singularidad en ξ .

Ahora debemos de identificar a $g(z, \xi)$ con $g^*(z, \xi)$ como la habíamos definido anteriormente, asumamos que existe $g(z, \xi)$. Queremos mostrar que estas dos funciones son iguales, empezaremos con dado $\epsilon > 0$ existe un subconjunto compacto K de D tal que $g^* < \epsilon$ en $D \setminus K$, entonces $\max\{0, g^*(z, \xi) - \epsilon\} \in F(\xi)$ se sigue que $g^*(z, \xi) - \epsilon \leq g(z, \xi)$, cuando hacemos que $\epsilon \rightarrow 0$ tenemos $g^* \leq g$.

Para la otra desigualdad tomamos $v \in F(\xi)$ y $\epsilon > 0$, entonces $u(z) = v(z) - (1 + \epsilon)g^*(z, \xi)$ es subarmónica en $D \setminus \{\xi\}$. Tenemos que $u(z) \rightarrow -\infty$ cuando $z \rightarrow \xi$ y $u < 0$ en ∂D . Por el Principio del Máximo (teorema 4.10) obtenemos $u \leq 0$ en $D \setminus \{\xi\}$. Dejando $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos $v \leq g^*$ y donde $g \leq g^*$.

Por último debemos de ver que $g(z, \xi)$ cumple con las tres propiedades antes descritas ya que esto no es trivial. Lo haremos con el siguiente teorema.

Teorema 4.9 Sea $g(z, \xi)$ función de Green para S , entonces:

1. g es positivo, finito y armónico en $S \setminus \{\xi\}$.
2. $\inf g(z, \xi) = 0$, es decir, $g(z, \xi) = 0$ cuando $\xi \in \partial S$.
3. $g(z, \xi) = -\log |z - \xi| + o(1)$ cerca de ξ .

Demostración:

-
1. Tomamos Q discos paramétricos acotados en un atlas (ϕ, U) en ξ tenemos $\phi(\xi) = 0$ y $z(Q) = \Delta$, así $z \mapsto \log\left(\frac{1}{2}|z|\right)$ con la función armónica v por consiguiente $v(z) = \log\left(\frac{1}{2}|\phi(z)|\right)$ en $Q \setminus \{\xi\}$, por el teorema 4.4 en v en $S \setminus \{\xi\}$ obtenemos la función v^* en $F(\xi)$, cerca de ξ tenemos:

$$\log\left(\frac{1}{2}|\phi(z)|\right) = v^*(z) \leq g(z, \xi)$$

Entonces $g(z, \xi) \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow \xi$, por lo que la función g no es constante y g es positivo en $S \setminus \{\xi\}$.

2. Para mostrar que $\inf g(z, \xi) = 0$, tomamos cualquier ϵ en el intervalo $(0, 1)$ y cualquier w en $F(\xi)$, cerca de ξ tenemos:

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon)w(z) &\leq g(z, \xi) - \inf g(z, \xi) \\ (1 - \epsilon)w(z) - g(z, \xi) &\leq (1 - \epsilon) [M - \log |\phi(z)|] + \log |\phi(z)| + o(1) \\ &= \epsilon \log |\phi(z)| + o(1) \end{aligned}$$

Esta desigualdad tiende a $-\infty$ cuando $z \rightarrow \xi$, por lo que $(1 - \epsilon)w(z) \leq g(z, \xi) - \inf g(z, \xi)$ en $S \setminus \{\xi\}$, si $\epsilon \rightarrow 0$ y tomamos el supremo sobre w , como $g(z, \xi) > 0$, entonces $\inf g(z, \xi) \leq 0$ por lo que $\inf g(z, \xi) = 0$.

3. Ahora tomamos cualquier función u en $F(\xi)$, con $\epsilon > 0$ en $F(\xi)$ tenemos:

$$u(z) - (1 + \epsilon)v(z) \leq (M - \log |\phi(z)|) + (1 + \epsilon) \log(z|\phi(z)|)$$

cuando $z \rightarrow \xi$ la desigualdad tiende a $-\infty$, asumimos que \bar{Q} está en U y por el Principio del Máximo en $Q \setminus \{\xi\}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} u(z) - (1 + \epsilon)v(z) &\leq \sup_{\partial Q} [u(z) - (1 + \epsilon)v(z)] \\ &= [\sup_{\partial Q} u(z)] + (1 + \epsilon) \log(z) \end{aligned}$$

Cuando $\epsilon \rightarrow 0$ reemplazamos u por g y tomamos el supremo sobre u entonces:

$$g(z, \xi) \leq -\log |\phi(z)| + \sup_{\partial Q} g(z, \xi)$$

con $\log\left(\frac{1}{2}|\phi(z)|\right) = v^*(z) \leq g(z, \xi)$ tenemos $g(z, \xi) = -\log |z - \xi| + o(1)$ cerca de ξ .

□

Ahora enunciamos el Principio del Máximo clásico.

Teorema 4.10 [*Principio del Máximo Clásico*] Una función no constante u es armónica dentro de una región acotada G y continua en su cerradura, alcanza sus valores máximo y mínimo solo en el límite de la región. Así u tiene máximo (o mínimo) en $z_0 \in G$, es decir, si $u(z) \leq u(z_0)$ (o $u(z) \geq u(z_0)$) para z en una vecindad $B(z_0, \epsilon)$ de z_0 , entonces $u = \text{cte}$ en $B(z_0, \epsilon)$.

Demostración:

Tenemos un disco alrededor de z_0 , donde $u = \text{Re} f$ para alguna f holomorfa. Entonces $e^{f(z)}$ es holomorfo y $|e^{f(z)}| = e^{u(z)}$. Así, puesto que e^x es estrictamente creciente en x , para todo real x , los máximos de u son los mismo que aquellos de $|e^f|$. Pero conocemos que e^f es constante en una vecindad de z_0 , por lo tanto e^u y por ende u es constante. \square

Luego presentamos el Principio del Máximo Relativo que en este caso es una definición.

Definición 4.8 [*Principio del Máximo Relativo*] Sea S una superficie de Riemann y K un subconjunto compacto de S , decimos que S satisface el Principio del Máximo Relativo K si cada función armónica acotada $f : S \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ tiene la propiedad que $\sup_{\xi \in S \setminus K} f(\xi) = \overline{\lim}_{\xi \rightarrow \partial K} f(\xi)$. [1, pág. 585]

Seguimos con el teorema de Liouville:

Teorema 4.11 [*Teorema de Liouville*] Si $f(z)$ es una función holomorfa en el plano complejo (ie. entera) y acotada entonces $f(z)$ es constante. [8]

Demostración:

Dado que $|f(z)| \leq M$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$, al utilizar la estimación de Cauchy para derivadas, que se deduce de la fórmula integral de Cauchy, tenemos que en el disco centrado en z_0 de cualquier radio $r > 0$ obtenemos:

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}.$$

Cuando hacemos $r \rightarrow \infty$ obtenemos $f'(z_0) = 0$ esto se cumple para todo $z_0 \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, $f(z)$ es constante, en todo \mathbb{C} \square

Ahora veremos una generalización del teorema de Liouville.

Teorema 4.12 [*Teorema de Liouville Generalizado*] *Cualquier función holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, con X compacto es constante.*

Demostración:

Ya que f es holomorfa, $|f|$ es continua en X compacto, por lo que $|f|$ alcanza su valor máximo en algún punto de X . Además, como X es acotado f se puede extender continuamente a \overline{X} entonces $|f|$ alcanza su máximo sobre \overline{X} ($\overline{X} = X \cup \partial X$), por lo que el máximo de $|f|$ no se alcanza en la frontera de X , entonces por el Principio del Módulo Máximo (teorema 4.20) f debe ser constante. \square

Ahora damos la definición de curva divergente.

Definición 4.9 [*Curva divergente*] *Una curva divergente en S es un conjunto de pedazos de curvas holomorfas $\phi : [0, \infty] \rightarrow S$ tales que para cualquier conjunto $K \subset S$ compacto se tiene que $\phi^{-1}(K)$ también es compacta. [1, pág. 586]*

Teorema 4.13 *Sea S una superficie de Riemann, si existe una función armónica acotada $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ la cual no es constante, entonces para todo compacto $K \subset S$ con $\text{Int}(K) \neq \emptyset$, el Principio del Máximo Relativo a K no es válido y S tiene una función de Green con singularidad en cualquier punto $\xi_0 \in S$. [1, pág. 585]*

Demostración:

Si demostramos la invalidez del Principio del Máximo Relativo (definición 4.8) en K implicará la existencia de la función de Green con singularidad en un punto arbitrario $\xi_0 \in \text{Int}(K)$.

Supongamos que el Principio del Máximo Relativo es válido y también suponemos que existe una función h que es armónica no constante en S . Entonces h tiene un máximo en K . El máximo que tiene h es un máximo global, pero esto contradice el Principio del Máximo Relativo.

Por lo tanto el Principio del Máximo Relativo es invalido en K y S tiene una función de Green con singularidad en cualquier punto. \square

Teorema 4.14 Sea S_1 y S superficies de Riemann y $S \subset S_1$. Si ∂S es una unión cerrada finita de pedazos de curvas holomorfas, entonces: [1, pág. 586]

- (i) S tiene una función de Green con singularidad en ξ_0 $g(\xi, \xi_0)$.
- (ii) $\lim_{\xi \rightarrow \partial S} g(\xi, \xi_0) = 0$.

Demostración:

Para (i) usamos el teorema 4.13, se sigue que S tiene una función de Green.

Probamos (ii): Sea C un pequeño círculo alrededor de ξ_0 . Pero si tenemos S y S_1 superficies de Riemann y $S \subset S_1$, además ∂S es una unión finita de arcos cerrados holomorfos, entonces para toda función continua acotada $f : \partial S \rightarrow \mathbb{R}$ existe $h : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que cumple tres condiciones:

1. $|h| \geq \sup |f|$.
2. $h|_S$ es armónica.
3. $h|\partial S = f$.

Así podemos resolver el Problema de Dirichlet a fuera de C con los siguientes datos $f|_C = g$ y $f|\partial S = 0$. Llamamos a la función que es la solución, h .

Por el Principio del Máximo para funciones subarmónicas (teorema 4.3), h es límite superior para todas las funciones s que se encuentran en la familia de Perron F definida $g(\xi, \xi_0)$.

Se sigue que $\lim_{\xi \rightarrow \partial S} g(\xi, \xi_0) \leq 0$. Donde la función subarmónica $s(\xi) = 0$ se encuentra en F , así que $\lim_{\xi \rightarrow \partial S} g(\xi, \xi_0) \geq 0$. □

Teorema 4.15 Para todo $t \geq 0$, S_t es simplemente conexo y para cualquier $\xi_0 \in S$, entonces S_t admite función de Green con singularidad en ξ_0 , aún más $\lim_{\xi \rightarrow \partial S} g(\xi, \xi_0) = 0$. [1, pág. 587,589]

Demostración:

Sea $S_t \subset S$ y ∂S_t es una colección finita de pedazos de curvas holomorfas, además usando el teorema 4.14 tenemos que S_t tiene una función de Green para todo $t \geq 0$.

Fijamos un t_0 y afirmamos que S_{t_0} es simplemente conexa para todo t_0 .
 Sea α una curva cerrada en S_{t_0} que inicia en ξ_0 , definimos:

$$A(\alpha) := \{t \in [t_0, \infty] : \alpha \text{ es nulo-homotópico en } S_t\}$$

donde α es nulo-homotópico en S y la homotopía tiene lugar en un subconjunto compacto de S donde $A(\alpha) \neq 0$ y es abierto.

Para ver que $A(\alpha)$ es cerrado, observamos que si $t_1 \in A(\alpha)$ entonces también lo es para todo $t > t_1$. Definimos $t_2 := \inf\{t : t \in A(\alpha)\}$ y elegimos un disco pequeño D sobre $\phi(t_2)$.

Existe una homotopía F_1 de α al mapeo constante ξ_0 en $S_{t_2+\epsilon}$. Además, elegimos una función homeomorfa h de D de modo que se cumple $h|_{\partial D} = Id$, es decir, h se mueve de $\phi(t_2 + \epsilon)$ a $\phi(t_2 - \epsilon)$. h se puede extenderse por la identidad a un homeomorfismo de S_0 , entonces $h \circ F_1(I^2) \subset S_{t_2}$ donde $t_2 \in A(\alpha)$ y $A(\alpha)$ cerrado. Como $[t_0, \infty]$ y por como definimos $A(\alpha)$, resulta que $t_2 = t_0$ y α es nulo-homotópico en S_{t_0} .

Por lo tanto $\lim_{\xi \rightarrow \partial S} g(\xi, \xi_0) = 0$. □

Para la demostración del teorema 4.14 necesitaremos de varios resultados auxiliares, primero veremos el teorema de distorsión de Koebe.

Para la demostración de este resultado primero necesitaremos la ayuda de resultados auxiliares. Primero vamos a definir la función de Koebe.

Definición 4.10 [*Función de Koebe*] *La función de Koebe es una función del disco unitario a \mathbb{C} como $K : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ se expresa como:*

$$K(z) := \frac{z}{(1-z)^2} \quad z \in \Delta$$

Luego de definir una función de Koebe necesitaremos de un lema.

Lema 4.1 *Para toda función $f \in G$ y considerando cualquier $z \in \Delta$ con $|z| = r < 1$ se cumple que:*

$$\left| \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) - \left(\frac{2r^2}{1-r^2} \right) \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

Demostración:

Sea $z_0 \in \Delta$ y consideramos el siguiente automorfismo del disco unitario, Δ :

$$\phi_{z_0}(w) := \frac{w + z_0}{1 - w\bar{z}_0}$$

Ya que $\phi_{z_0}(w)$ es univalente, la composición $(f \circ \phi_{z_0})$ es univalente, esta composición primero manda z_0 al origen y después el origen lo manda a $f(z_0)$.

Para que pertenezca a la clase G primero calculamos los dos primeros coeficientes de la serie de Taylor de la composición $(f \circ \phi_{z_0})$ alrededor de 0, el primero es $(f \circ \phi_{z_0})(0) = f(z_0)$, para el segundo término primero notemos:

$$(f \circ \phi_{z_0})'(w) = f'(\phi_{z_0}(w))\phi'_{z_0}(w),$$

Luego calculamos:

$$\begin{aligned} \phi'_{z_0}(w) &= \frac{\frac{d}{dw}[w + z_0](1 - w\bar{z}_0) - \frac{d}{dw}[1 - w\bar{z}_0](w + z_0)}{(1 + w\bar{z}_0)^2} \\ &= \frac{(1 - w\bar{z}_0) \left[\frac{d}{dw}(w) + \frac{d}{dw}(z_0) \right] - (w + z_0) \left[\bar{z}_0 \frac{d}{dw}(-w) + \frac{d}{dw}(1) \right]}{(1 + w\bar{z}_0)^2} \\ &= \frac{(1 - w\bar{z}_0) - (-w\bar{z}_0 - |z_0|^2)}{(1 - w\bar{z}_0)^2} \\ &= \frac{1 + |z_0|^2}{(1 - w\bar{z}_0)^2}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$(f \circ \phi_{z_0})'(w) = f'(\phi_{z_0}(w)) \frac{1 + |z_0|^2}{(1 - w\bar{z}_0)^2}$$

al evaluar en cero tenemos $(f \circ \phi_{z_0})'(0) = f'(z_0)(1 + |z_0|^2)$. La serie de Taylor se ve de la siguiente forma:

$$(f \circ \phi_{z_0})(w) = f(z_0) + f'(z_0)(1 + |z_0|^2)w + \dots$$

Con esto ya podemos determinar una función que ahora sí pertenece a S porque es una transformación de la función de Koebe:

$$h(w) = \frac{f(\phi_{z_0}(w)) - f(z_0)}{f'(z_0)(1 + |z_0|^2)}.$$

Al evaluar en cero podemos ver que el primer término es cero. Ahora debemos de calcular el siguiente término de la serie de Taylor de h alrededor del origen, calculando la primera derivada y haciendo un cambio de variable $M = f'(z_0)(1 + |z_0|^2)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} h'(w) &= \frac{M \frac{d}{dw} f(\phi(w)) - \frac{d}{dw} f(z_0) - \frac{d}{dw} M[f(\phi(w)) - f(z_0)]}{M^2} \\ &= \frac{M[f'(\phi(w))\phi'(w)] - [f(\phi(w)) - f(z_0)](0)}{M^2} \\ &= \frac{f'(\phi(w))\phi'(w)}{M}. \end{aligned}$$

Evaluamos en cero y tenemos:

$$h'(0) = \frac{f'(z_0)[1 + |z_0|^2]}{f'(z_0)[1 + |z_0|^2]} = 1.$$

Y ahora para calcular la segunda derivada, primero calculemos $\phi''(w)$.

$$\begin{aligned} \phi''_{z_0}(w) &= \frac{\partial}{\partial w} (1 - w\bar{z}_0)^{-2} \\ &= -2(1 - w\bar{z}_0)(-\bar{z}_0) \\ &= -2\bar{z}_0 - 2w\bar{z}_0\bar{z}_0 \end{aligned}$$

Luego calculamos:

$$\begin{aligned} h''(w) &= \frac{M[\frac{d}{dw} f'(\phi(w))\phi'(w)] - \frac{d}{dw} M[f'(\phi(w))\phi'(w)]}{M^2} \\ &= \frac{M[f''(\phi(w))\phi'(w) + f'(\phi(w))\phi''(w)] - (0)[f'(\phi(w))\phi'(w)]}{M^2} \\ &= \frac{f''(\phi(w))\phi'(w) + f'(\phi_{z_0}(w))\phi''(w)}{M} \\ &= \frac{f''(\phi_{z_0}(w))\phi'_{z_0}(w) + f'(\phi_{z_0}(w))\phi''_{z_0}(w)}{f'(z_0)(1 + |z_0|^2)} \end{aligned}$$

Evaluamos en cero:

$$\begin{aligned} h''(0) &= \frac{f''(\phi_{z_0}(0))\phi'_{z_0}(0) + f'(\phi_{z_0}(0))\phi''_{z_0}(0)}{f'(z_0)(1 + |z_0|^2)} \\ &= \frac{f''(z_0)(1 + |z_0|^2) - f'(z_0)2\bar{z}_0}{f'(z_0)(1 + |z_0|^2)} \\ &= (1 + |z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - 2\bar{z}_0. \end{aligned}$$

Por lo que ya podemos escribir la serie de Taylor de la función h :

$$h(w) = z[1] + \frac{1}{2} \left[(1 - |z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - 2\bar{z}_0 \right] z^2 + \dots$$

Ya que $h \in S$ por el teorema de Bieberbach¹, tenemos:

$$\left| \frac{1}{2} \left[(1 - |z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - 2\bar{z}_0 \right] \right| \leq 2,$$

reemplazamos z_0 por z y multiplicamos por 2 y tenemos:

$$\left| (2)\frac{1}{2} \left[(1 - |z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z} \right] \right| \leq 2(2).$$

Ahora multiplicamos por $\frac{|z|}{(1-|z_0|^2)}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{|z|}{(1 - |z_0|^2)} \left| (1 - |z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - 2\bar{z}_0 \right| &\leq 4 \\ \left| \frac{zf''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2z\bar{z}_0}{(1 - |z_0|^2)} \right| &\leq \frac{4|z|}{(1 - |z_0|^2)}. \end{aligned}$$

¹El Teorema de Bieberbach plantea que al considerar una función en Δ holomorfa y univalente con la serie de Taylor $f(z) = z \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ entonces tenemos que $|a_n| \leq n$ para $n \geq 2$.

Por lo tanto:

$$\left| \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) - \left(\frac{2r^2}{1-r^2} \right) \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}. \quad \square$$

Ahora sí podemos hacer la demostración para el teorema de distorsión de Koebe.

Proposición 4.2 [Teorema de distorsión de Koebe] Sea f cualquier función en S con $z = r < 1$:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

Si consideramos $z \in \Delta$ con $z \neq 0$ la igualdad se cumple si y sólo si f es una rotación adecuada de la función de Koebe.

Demostración:

Con la desigualdad del lema anterior 4.1 hacemos un cambio de variable con $z = re^{i\theta}$ y tenemos:

$$\begin{aligned} \left| r e^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| &\leq \frac{4r}{1-r^2} \\ \left| e^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} - \frac{2r}{1-r^2} \right| &\leq \frac{4}{1-r^2}. \end{aligned}$$

El lado izquierdo de la desigualdad anterior cumple que:

$$\begin{aligned} \left| e^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} - \frac{2r}{1-r^2} \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial r} \log(f'(re^{i\theta})) e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial r} \log(1-r^2) \right| \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial r} \log [(1-r^2)f'(re^{i\theta})] \right|, \end{aligned}$$

Esto, ya que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \log [(1-r^2)f'(re^{i\theta})] &= \frac{-2rf'(re^{i\theta})}{(1-r^2)f'(re^{i\theta})} + \frac{(1-r^2)f''(re^{i\theta})(e^{i\theta})}{(1-r^2)f'(re^{i\theta})} \\ &= \frac{-2rf'(re^{i\theta})}{(1-r^2)f'(re^{i\theta})} + \frac{(1-r^2)f''(re^{i\theta})(e^{i\theta})}{(1-r^2)f'(re^{i\theta})} \\ &= \frac{-2r}{(1-r^2)} + \frac{f''(re^{i\theta})e^{i\theta}}{f'(re^{i\theta})}. \end{aligned}$$

Como $f'(0) = 1$ podemos integrar de 0 a r y tenemos:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial r} \log [(1 - r^2)f'(re^{i\theta})] \right| &= \left| \int_0^r \frac{\partial}{\partial \rho} \log [(1 - \rho^2)f'(\rho e^{i\theta})] d\rho \right| \\
&\leq \int_0^r \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \log [(1 - \rho^2)f'(\rho e^{i\theta})] \right| d\rho \\
&= \int_0^r \left| e^{i\theta} \frac{f''(\rho e^{i\theta})}{f'(\rho e^{i\theta})} - \frac{2\rho}{(1 - \rho^2)} \right| d\rho \\
&\leq \int_0^r \frac{4}{1 - \rho^2} d\rho \\
&= 2 \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right).
\end{aligned}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial r} \log [(1 - r^2)f'(re^{i\theta})] \right| &= 2 \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \leq \frac{4}{1-r^2} \\
&= 2 \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) (1 - r^2).
\end{aligned}$$

Por lo anterior y haciendo los cambios de variable correspondientes $|z| = r$ tenemos:

$$\begin{aligned}
-2 \log \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right) (1 - |z|^2) &\leq \frac{\partial}{\partial |z|} \log [(1 - |z|^2)|f'(z)|] \leq 2 \log \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right) (1 - |z|^2) \\
\left(\frac{1-|z|}{1+|z|} \right)^2 &\leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^2
\end{aligned}$$

Multiplicamos por uno:

$$\begin{aligned}
\frac{(1 - |z|)^2}{(1 + |z|)^2} &\leq \frac{(1 + |z|)}{(1 + |z|)} \frac{(1 - |z|)}{(1 - |z|)} |f'(z)| \leq \frac{(1 + |z|)^2}{(1 - |z|)^2} \\
\frac{(1 - |z|)^2}{(1 + |z|)^2} \frac{1}{(1 + |z|)(1 - |z|)} &\leq |f'(z)| \leq \frac{(1 + |z|)^2}{(1 - |z|)^2} \frac{1}{(1 + |z|)(1 - |z|)},
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{(1 - |z|)}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{(1 + |z|)}{(1 - |z|)^3} \quad \square$$

Ya tenemos todos los elementos necesarios para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.16 [1, pág. 587] Sea L un conjunto formado por funciones holomorfas e inyectivas, $f : \Delta(r) \rightarrow \mathbb{C}$ donde $\Delta(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, que cumplen que:

i. $f(0) = 0$

ii. $f'(0) = 1$

entonces L es normal (ie. compacto con respecto a la topología relativa a convergencia uniforme en subconjuntos compactos).

Demostración:

El conjunto

$$\cup C : S_r \rightarrow S_1 : \Delta(1) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(z) \rightarrow F(z) = f^{-1}f(rz)$$

es un mapeo continuo, con inversa continua. Por lo que es un homeomorfismo y preservará la topología de S_r . De ahí lo que hay que demostrar es que S_1 es (secuencialmente) compacto con la topología de convergencia uniforme en subconjuntos compactos, ie. S_1 es normal.

El Teorema de Montel (teorema 1.4) nos dice que esto será posible si se demuestra que S_1 es cerrado y acotado. El Teorema de Hurwitz (teorema 1.2) establece que el límite de una sucesión de funciones inyectivas y holomorfas es inyectiva y holomorfa también o es una constante. La condición ii) de las hipótesis de esta proposición nos dice que en un punto de todas las funciones en la sucesión la derivada es distinta de cero, por lo que, por continuidad el límite también tendrá derivada distinta de cero y por lo tanto, no será constante. De modo que el límite de la sucesión es holomorfo e inyectivo y por lo tanto S_1 es cerrado.

Para ver que L es acotado, tomamos nuevamente una sucesión de funciones $\{f_n\}$ en L tal que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de L a

la función f , recordemos que el teorema de distorsión de Koebe (proposición 4.2) nos proporciona valores por los que la función f está acotada (el teorema muestra la existencia de cotas inferiores y cotas superiores). Y como f es una función holomorfa e inyectiva en L . Entonces (f_n) está acotada en L . Por lo que L es acotada. \square

Proposición 4.3 *Dos superficies compactas trianguladas (con o sin frontera) son topológicamente equivalentes (homeomorfas) si y sólo si tienen el mismo tipo de orientabilidad, número de contornos y característica de Euler.*

A continuación presentaremos un teorema para el cual tenemos dos demostraciones.

Teorema 4.17 *Si S es una superficie de Riemann sin curvas divergentes, entonces para todo $\xi \in S$, $\hat{S} = S \setminus \{\xi\}$ es simplemente conexo.*

Demostración:

- Primera demostración:

Por hipótesis sabemos que S es homeomorfa a \mathbb{C} o a $\hat{\mathbb{C}}$. Invocando la clasificación de superficies topológicas simplemente conexas (proposición 4.3) podemos concluir que S es homeomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$. Como $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\xi\}$ si quitamos el punto tenemos que $S \setminus \{\xi\}$ es homeomorfa a \mathbb{C} .

Por otro lado supongamos que S fuera homeomorfa a \mathbb{C} ; en \mathbb{C} existe al menos una función continua de $\phi : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{C}$, que esta define una curva divergente. Por lo que en S también existen curvas divergentes. Y eso contradice la hipótesis de S .

Por lo que S es homeomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$ y por lo tanto $S \setminus \{\xi\}$ es homeomorfa a \mathbb{C} que es simplemente conexo. \square

- Segunda demostración:

Sea f una función holomorfa definida en una vecindad de 0 en el plano complejo con $f(0) \neq 0$ entonces, por el teorema de Taylor:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum a_n z^n \\ &= a_0 + a_k z^k + o(|z|^k) \end{aligned}$$

donde $o(|z|^k)$ significa que una función que cumple que:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{o(|z|^k)}{|z|^k} = 0$$

k es el orden de $f(z) - a_0$ en 0. Podemos notar que:

$$\begin{aligned} \arg(f(z) - a_0) &= \arg(a_0 + a_k + a_k z^k + o(|z|^k)) \\ &= \arg(a_0) + \arg(a_k z^k) + \arg(o(|z|^k)) \end{aligned}$$

por la definición del argumento de un producto tenemos:

$$\begin{aligned} \arg(a_k z^k) &= \arg(a_k) + \arg(z^k) \\ &= \arg(a_k) + k \arg(z) \end{aligned}$$

De modo que :

$$\arg(f(z) - a_0) = \arg(a_k) + k \arg(z) + o(|z|^k)$$

Y así $\{z : \arg(f(z) - a_0) = 0\} = \{z : \arg(z) = \frac{1}{k} \arg(a_k)\}$.

De modo que $\{z : \arg(f(z) - a_0) = 0\}$ consiste en k arcos (suaves) cuyas tangentes están simétricamente separados de la función $\arg(z)$. Como la función es holomorfa los puntos tal que $f'(z) = 0$ son puntos discretos. Y si $u(z)$ es una función armónica en una vecindad simplemente conexa de cero, entonces ahí podemos encontrar una función armónica conjugada.

La función $f(z) = e^{u+iv}$ define una función holomorfa. Cero es llamado punto crítico de u si $u'(0) = 0$. Y por las razones previamente expuestas podemos ver que el conjunto $\{z : v(z) = v(0)\}$ consiste en k arcos (suaves). Todo esto es válido en un punto distinto del origen más aún es válido si se trata de una superficie de Riemann y no de el plano complejo.

Sea S una superficie de Riemann sin curvas divergentes. Sea $\xi_1 \in S$ y sea \overline{N} una vecindad cerrada de ξ_1 con frontera suave. Definimos $S_1 = S \setminus \overline{N}$, $\mathring{S} = S \setminus \{\xi_1\}$ notemos que ambas superficies son homeomorfas.

Por lo que ahora demostraremos que S_1 es simplemente conexa.

Por el teorema 4.13 tenemos que S_1 tiene una función de Green $g(\xi, \xi_0)$ positiva para cualquier $\xi_1 \in S_1$. Definamos h_0 una función armónica conjugada de $g(\xi, \xi_0) + \log |z|$ y definamos:

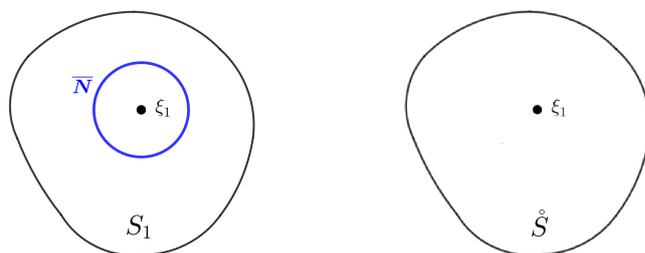


Figura 4.2: \mathring{S} y S_1 son homeomorfas.

$$f_0(\xi) := z(\xi)e^{-(g+\log|z|+ih_0)}$$

Como en la demostración del teorema 4.14 la función $f_0(\xi)$ se puede continuar analíticamente en S_1 pero como no sabemos a priori que S_1 es simplemente conexa, la continuación analítica puede no definir una función en S_1 , $g(\xi, \xi_0)$ es una función de Green con singularidad ξ_0 en S_1 y f_0 es una extensión holomorfa en la misma superficie pero no olvidemos que tenemos la función f que es holomorfa en una vecindad de 0 lo podemos hacer para cualquier punto, en este caso ξ_0 .

Cerca de ξ_0 , $f(z(\xi)) = a_1z + o(|z|)$ de modo que en una vecindad de ξ la función f es inyectiva y por lo tanto la función de Green no tiene puntos críticos. Ahora, de forma global.

- Si g tiene puntos críticos, definimos M como el supremo de las distancias con la función de Green g de dos puntos donde un extremo es un punto crítico y el otro una singularidad.

$$M := \sup\{g(\xi, \xi_0) : \xi \neq \xi_0 \text{ y } \xi \text{ es un punto crítico de } g\}$$

- Si g no tiene puntos críticos, entonces consideramos $M = 0$. Definimos;

$$D := \{\xi \in S_1 : g(\xi, \xi_0) > M\} \cup \{\xi_0\}$$

Para cualquier $\xi \in S_1$ se cumple la propiedad de que la función de Green sea positiva, entonces $D = S_1$. Solo queda ver que si probamos que D es simplemente conexo, entonces \mathring{S} también es simplemente conexo. Para eso finalmente consideremos que $B \subset \mathbb{C}$ es el disco de radio e^{-M} alrededor del 0. Por lo que la extensión holomorfa de f_0 en D . Veamos que f define una homeomorfismo entre D y el disco B , es

decir, $f : D \rightarrow B$. Y como $D = S_1$, entonces existirá un homeomorfismo entre \mathring{S} y B .

Sea $T(\theta)$ una curva en D que empieza en ξ_0 a lo largo de la cual f_0 es continua con argumento constante. Ya que $T(\theta)$ contiene puntos que no son críticos por pertenecer a D . Como S no tiene curvas divergentes por hipótesis, $T(\theta)$ solo es un arco simple que empieza en ξ_0 y que llega a $\partial D = \{g(\xi, \xi_0) = M\}$.

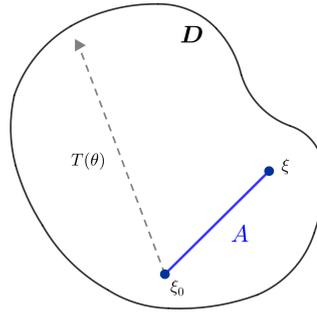


Figura 4.3

Sea $\xi \in D \setminus \{\xi_0\}$ y θ_0 es el argumento de alguna continuación holomorfa f_1 de f_0 para ξ , entonces:

$$|f_1(\xi)| = \exp[-g(\xi, \xi_0)]$$

Sea A un arco único a través de ξ con $\arg f_1 = \theta_0$. Extendemos A para que sea una curva a lo largo de la cual f_1 continúa teniendo argumento constante en D . Ya que g es monótona en A y D contiene puntos no críticos, entonces A es un arco simple y holomorfo. Por lo que será divergente o contendrá un arco $T(\theta_1)$ que va desde ξ a ξ_0 . La posibilidad de que sea divergente queda descartada por nuestra suposición inicial de que la superficie S no tiene curvas divergentes, solo queda ver el otro caso.

Sea $A = T(\theta_1)$, podemos escribir $\theta(\xi) = \theta_1$. Así cada punto $\xi \in D \setminus \{\xi_0\}$ está parametrizado en coordenadas polares por $(e^{-g}, \theta(\xi))$ con origen en ξ_0 y la parametrización es precisamente la continuación holomorfa de f_0 , es decir, la función f la cual es continua e inyectiva.

Además, f es un homeomorfismo de D a B . Por lo que D es simplemente conexo (ya que no contiene curvas divergentes).

Recordemos que S_1 es homeomorfa a \mathring{S} . Por lo que podemos seguir este hecho para la superficie \mathring{S} es simplemente conexa.

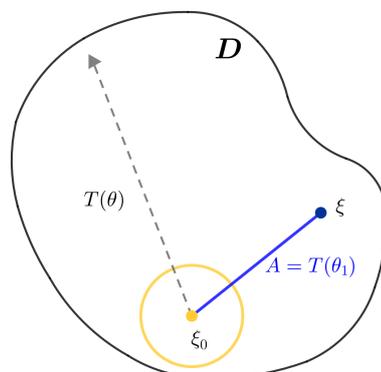


Figura 4.4

Por otro lado si $M > 0$. Primero mostremos que existe un punto crítico $\xi_2 \in \partial D$.

Empezamos suponiendo que existe ξ_2 un punto crítico tal que $g(\xi_2, \xi_0) = M$, entonces arbitrariamente cerca de $\xi_2 \in \partial D$ existen puntos en D . De lo contrario existe ξ_n una sucesión de puntos críticos para los cuales $g(\xi_n, \xi_0)$ converge a M (ya que recordemos por como está construida M la función g tiene puntos críticos). A través de cada ξ_n existe un arco A_n a lo largo del cual g crece y para cualquier continuación de f_0 tiene argumento constante. Ya que por hipótesis S no tiene curvas divergentes, A_n conecta ξ_n a ξ_0 .

Para algún θ_n argumento tenemos que su arco $T(\theta_n)$ es igual a la intersección de las curvas con el espacio, es decir, $A_n \cap D = T(\theta_n)$ a su vez como la sucesión θ_n converge a θ tenemos que $T(\theta)$ debe tener un punto final ξ_θ , por la estructura de las curvas tenemos que el argumento de f es constante cerca de ξ_θ , podemos ver que ξ_θ es un límite del conjunto de puntos críticos. Esto quiere decir que todos los puntos aparte de ser distintos entre sí están separados pero esto contradice que la función g converge a M (dado que los puntos críticos de g son discretos en S_1 , esto es imposible).

Por lo tanto el punto crítico ξ_2 pertenece a ∂D .

Ahora cerca del punto crítico ξ_2 vamos a probar que existe un anillo cerrado A tal que $\bar{A} \subset S$ con pedazos de curvas holomorfas, por lo que $S \setminus A$ es conexo, $A = \text{Int} \bar{A}$. Para hacerlo vamos a considerar la estructura local cerca del punto crítico, existen al menos dos curvas $T(\theta_1)$ y $T(\theta_2)$ las cuales tienen origen en ξ_2 .

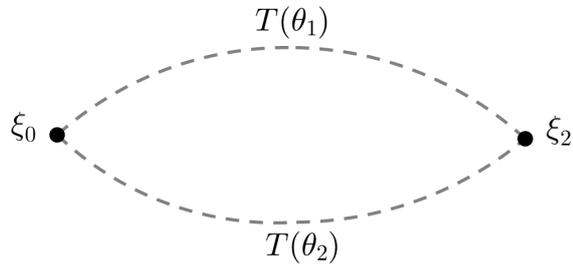


Figura 4.5

Elegimos dos discos cerrados \overline{B}_0 y \overline{B}_2 con centro en ξ_0 y ξ_2 respectivamente. Los cuales se definen como:

$$\overline{B}_0 = \{ \xi : g(\xi, \xi_0) \geq \frac{1}{\epsilon} \}$$

$$\overline{B}_2 = \{ \xi : |g(\xi, \xi_0) - g(\xi_2, \xi_0)| \leq \epsilon \}$$

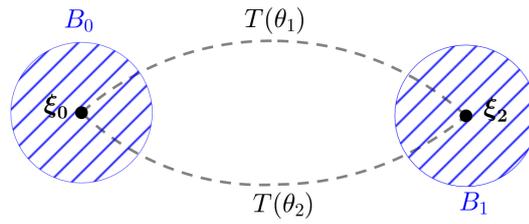


Figura 4.6

Para ϵ suficientemente pequeño tenemos \overline{B}_i son disjuntos y contiene puntos no críticos. Y para θ suficientemente cerca de θ_i donde $T(\theta)$ es una curva de B_0 a B_2 .

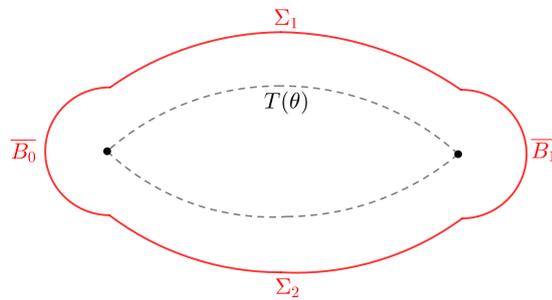


Figura 4.7

Sea $H_i = \bigcup \{T(\theta) : |\theta - \theta_i| < \delta\}$ para $i = 1, 2$ que son curvas desde B_0 a B_2 . Construimos la siguiente gráfica $\bar{A} = H_1 \cup H_2 \cup B_0 \cup B_2$, como en la Figura 4.8 Para casi todas (un número finito) de θ_i tenemos $T(\theta_i) \cap B_2 = \emptyset$ para algún ϵ suficientemente pequeño.

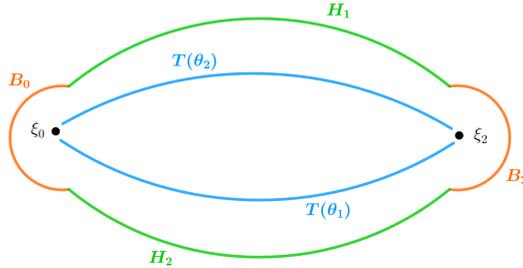


Figura 4.8: Gráfica de \bar{A}

Sea $\eta \in S \setminus A$ donde $A = \text{Int}(\bar{A})$, cualquier continuación holomorfa f_η de f_0 en una vecindad de η que puede extenderse a lo largo de una curva con módulo decreciente y argumento constante de ∂S_1 .

Por lo que, si $g(\eta, \xi_0) \leq M$ la curva no se encontrará con A y η . Y ∂S_1 se encuentran en la misma componente de la trayectoria $S \setminus A$. Si $\eta \in D \setminus A$, entonces η se encuentra en un sector complementario de $H_1 \cup H_2$ en D . Elegimos $T(\theta)$ en el mismo sector para que la continuación siga a lo largo de $T(\theta)$ con módulo decreciente, argumento constante y que no llegue a B_2 , podemos seguir la trayectoria para llegar a ∂B .

Por lo tanto ξ , $T(\theta)$ y ∂B se encuentran en la misma componente de $S \setminus A$ la cual es una trayectoria conexa.

Ya que mostramos la existencia de este anillo contenido en la superficie, mostremos si esta sigue siendo simplemente conexa o no lo es, para $S \setminus \bar{A}$ es conexo por trayectorias.

Sea \bar{A} la gráfica que tiene dos componentes acotadas F_1 y F_2 , además existe una curva cerrada simple $\alpha \in S$ tal que $\alpha \cap \text{Int}(A)$ es un arco simple que va de una componente a otra.

Si resolvemos el problema de Dirichlet para \bar{A} con las curvas delimitadas por las componentes acotadas (condiciones de frontera) $\phi_1|_{F_1} = 1$ y $\phi_1|_{F_2} = 0$. Y análogo para $S \setminus \text{Int}(A)$ se puede resolver con las cur-

vas delimitadas por las componentes acotadas (condiciones de frontera) $\phi_2|_{F_1} = 1$ y $\phi_2|_{F_2} = 2$.

Se puede establecer la función ϕ la cual es continua y está definida en S como una circunferencia. Donde el índice de $\phi \circ \alpha$ curva cerrada es 1 sobre $z = 0$. Si α es homotópica a una aplicación constante, decimos que α es nulo-homotópico en S , entonces $\phi \circ \alpha$ es nulo-homotópico en $\partial\Delta$. Pero esto es imposible, por tanto S no es simplemente conexo.

Esto se puede concluir del hecho que construimos un anillo cerrado en S con pedazos de curvas holomorfas acotadas.

El único caso que es posible es cuando consideramos $M = 0$, es decir, cuando la función g no contiene puntos críticos. Así podemos construir una superficie para la cual no se puede construir un anillo de pedazos de curvas holomorfas. Solo se podrá considerar en la superficie arcos simples.

Por lo tanto S sin curvas divergentes, entonces concluimos que la superficie construida $\mathring{S} = S \setminus \{\xi_1\}$ es simplemente conexa para todo $\xi_1 \in S$. \square

Ahora veremos el teorema de monodromía, este nos ayudará a dar condiciones a las funciones para cuando extendamos el plano, es decir, proporciona condiciones suficientes para no tener una función mal definida asignandoles valores diferentes sobre la misma curva, esto se logra al elegir una función holomorfa "más grande" que esté bien definida en la región que necesitamos y, además, sea univaluada, muy parecido a lo que hicimos en el capítulo 2.

Proposición 4.4 [Teorema de Monodromía] Sea G una región simplemente conexa y sea $z_0 \in G$. Sea f una función holomorfa en una vecindad de z_0 . Supongamos que f puede ser continua de manera holomorfa a lo largo de cualquier arco que une a z_0 con cualquier otro punto $z \in G$. Entonces, esta continuación define una continuación holomorfa (univaluada) de $f \in G$. [8, pág. 374]

Demostración:

Necesitamos demostrar que cualesquiera puntos z_1 y z_0 en G y γ una curva de z_0 a z_1 a través de G , siempre producirá el mismo valor en z_1 sin importar la curva que se haya usado. Con este fin tomamos dos curvas distintas, sean γ_0 y γ_1 dos curvas de z_0 a z_1 en G . Puesto que G es simplemente conexa, estas curvas son homotópicas con extremos fijos en G . Esto quiere decir que existe una función continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ del cuadro unitario en G , tal que $H(0, t) = \gamma_0(t)$, $H(1, t) = \gamma_1(t)$, $H(s, 0) = z_0$ y $H(s, 1) = z_1$ para toda s, t entre 0 y 1.

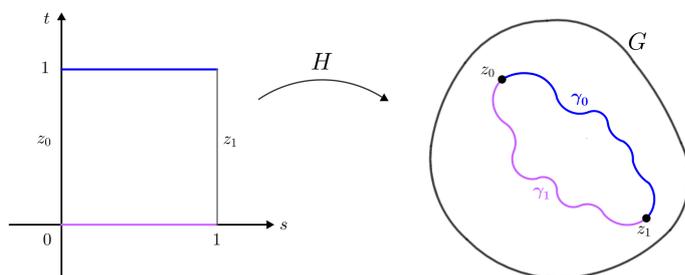


Figura 4.9: Gráficas que describe la función H .

Las funciones $\gamma_s(t) = H(s, t)$ son una familia de curvas de z_0 a z_1 en G , que se deforman continuamente de γ_0 a γ_1 . Existe una continuación holomorfa f_s de f , desde z_0 hasta z_1 , a lo largo de cada curva γ_s . Ahora vamos a probar que $f_s(z_1)$ no puede cambiar conforme s es trasladada continuamente desde 0 hasta 1 y, por lo tanto, que $f_0(z_1) = f_1(z_1)$.

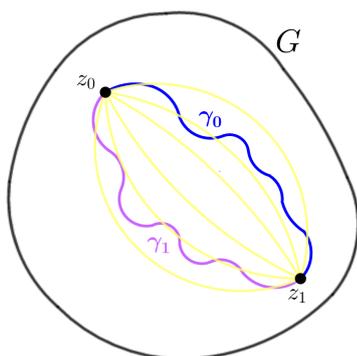


Figura 4.10

La imagen del cuadrado unitario es un subconjunto cerrado y acotado de G y está a una distancia $\rho > 0$ del complemento de G , así el radio de convergencia siempre es al menos ρ , conforme avanzamos de manera holomorfa a f a lo largo de cualquiera de las curvas γ_s . La continuación a lo largo de cualquier γ_s debe ser completada hasta z_1 , con un número finito de pasos, usando discos A_s de radio al menos ρ . Para cada s , este procedimiento produce una continuación holomorfa de f como una función f_s holomorfa sobre A_s al rededor de γ_s . Podemos seleccionar un número finito de puntos $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_N = 1$, haciendo que los A_s estén lo suficientemente cerca para que γ_{s_k} esté contenido en el tubo pertenece $A_{s_{k-1}}$ y en $A_{s_{k+1}}$, esto se hace usando la continuidad uniforme de H .

Cada una de las funciones f_{s_k} son holomorfas en la región $A_{s_k} \cap A_{s_{k-1}}$ y coinciden con el disco abierto $D_\rho(z_0) \subset A_{s_k} \cap A_{s_{k-1}}$ y por lo tanto coinciden en toda la

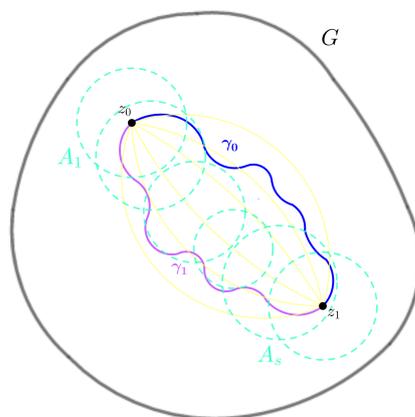


Figura 4.11

región, en particular $f_{s_k}(z_1) = f_{s_{k+1}}(z_1)$, así que $f_0(z_1) = f_{s_1}(z_1) = f_{s_2}(z_1) = \dots = f_{s_N}(z_1) = f_{s_1}(z_1)$. La extensión de f a lo largo de γ_0 hasta z_1 , coincide a lo largo de γ_1 en el punto z_1 . \square

Ya tenemos lo necesario para revisar la demostración del siguiente teorema.

Teorema 4.18 *Si S es una superficie de Riemann simplemente conexa la cual admite una función de Green entonces existe un mapeo conforme $f : S \rightarrow \Delta$. [1, pág. 586]*

Demostración:

Por el teorema de Monodromía (proposición 4.4) tenemos que si dada una región G y un punto q , en ella existe una función $f(p, q)$ holomorfa que depende de p y satisface:

$$\log |f(p, q)| = -g(p, q)$$

Claramente $f(p, q)$ se determina hasta un factor constante de módulo uno. De la igualdad anterior vemos que f tiene un cero simple en q , es decir, $f(q) = 0$ y es de módulo menor que uno en G .

Si supieramos que (para q fijo) $g \rightarrow 0$, como p tendía al límite ideal de G (es decir, para algún $r > 0$, existe un subconjunto compacto K de G tal que $\sup_{p \in G \setminus K} g < r$).

Sería fácil concluir que $f(p, q)$ define directamente un mapeo conforme de G sobre Δ . De hecho $|f| \rightarrow 1$ como p tendía al límite ideal de G y por lo tanto, cada punto de Δ se cubriría el origen exactamente una vez. Veámoslo de otra forma.

Sea q_1 y q_2 puntos distintos entre sí que pertenecen a G , consideramos el mapeo asociado a las funciones $f(p, q_1)$ y $f(p, q_2)$, tenemos:

$$\varphi(p) = \frac{f(p, q_1) - f(q_2, q_1)}{1 + \overline{f(q_2, q_1)}f(p, q_1)}$$

es holomorfo y de módulo menor que la unidad en G y desaparece en q_2 . Se sigue por el principio del máximo para n suficientemente grande con $p \in G_n$ tenemos:

$$\log |\varphi(p)| \leq -g_n(p, q_2)$$

Y por lo tanto para $p \in G$

$$\log |\varphi(p)| \leq -g(p, q_2) = \log |f(p, q_2)|$$

Con las dos desigualdades anteriores y considerando $p = q_1$ tenemos que $|f(q_2, q_1)| \leq |f(q_1, q_2)|$ y por simetría tenemos $|f(q_2, q_1)| = |f(q_1, q_2)|$. Ya que $|\varphi(q_1)| = |f(q_1, q_2)|$, se sigue por el principio del máximo (teorema 4.10) que $\varphi(p)$ es igual a una constante.

Por lo tanto, $\varphi(p)$ se anula solo en q_2 y de hecho se simplifica, así concluimos que:

$$f(q_2, q_1) = f(p, q_1)$$

implica que $p = q_2$ y ya que q_2 es un punto arbitrario de G distinto de q_1 , entonces $f(p, q_1)$ es univalente en p . De esto se deduce que G es conformemente equivalente a una región plana acotada simplemente conexa S y por lo tanto, existe una correspondencia conforme al interior de Δ .

Así la existencia de la función de Green para S con singularidad en un punto interior dado, también se puede ver como la función de Green que produce un mapeo conforme de todo S sobre Δ . □

Teorema 4.19 [*Teorema de Riemann sobre singularidades removibles*] Sea V una variedad holomorfa en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ supongamos que $f : U \setminus V \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfo y localmente acotada en U . Entonces existe una única extensión holomorfa de f a todo U .

En particular si f es continua en U y holomorfa en $U \setminus V$, entonces f es holomorfa en U .

Demostración:

Por hipótesis tenemos que $\psi(x) = \phi(f(x))$ son holomorfas en $U \setminus V$ y localmente acotada en U . Donde existe una única función que se extiende holomorficamente

en U . Ya que V no es denso en ninguna parte, no existe otra extensión continua además de f . Y $X \subset \mathbb{C}^n$ es cerrado.

Por lo que el conjunto de ψ mapea U en X y por lo anterior podemos extender f únicamente a través de U (ya que ϕ es inyectiva), entonces $\psi(x) = \phi(f(x))$ sigue siendo holomorfa.

Por lo que f es ahora holomorfa en U . □

Teorema 4.20 [*Principio del Módulo Máximo*] Sea A un conjunto conexo, abier-to y acotado. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en A y continua en \bar{A} . Sea M el máximo de $|f(z)|$ en ∂A , es decir, M es la menor de las cotas superiores o supremo de $|f(z)|$ con z variando en ∂A , $M = \sup\{|f(z)| : z \in \partial A\}$, entonces:

i. $|f(z)| \leq M$ para $z \in A$.

ii. Si $|f(z)| = M$ para alguna $z \in A$, entonces f es constante en A .

[8, pág. 164]

Demostración:

Primero mostraremos que $M = M'$, donde $M' = \sup\{|f(z)| : z \in \bar{A}\}$ y $M = \sup\{|f(z)| : z \in \partial A\}$, de modo que tenemos dos casos:

1. Primero supongamos que no existe $a \in A$ tal que $|f(a)| = M'$, por lo que debe existir una $a \in \partial A$ tal que $|f(a)| = M'$, puesto que sabemos que debe haber alguna $a \in \bar{A} = A \cup \partial A$ tal que $|f(a)| = M'$.

Por lo tanto $|f(a)| = M' = M$.

2. Ahora supongamos que existe $a \in A$ tal que $|f(a)| = M'$, podemos definir el conjunto $B = \{z \in A : f(z) = f(a)\}$ que es abierto, ya que cada $z \in B$ tiene una vecindad en la cual f es el valor constante $f(z) = f(a)$. Por otro lado B es la imagen inversa del conjunto cerrado $\{|f(a)|\}$ bajo la transformación continua f restringida a A , en consecuencia B es un conjunto cerrado en A . Así B es tanto abierto como cerrado en A y distinto del vacío, además por ser conexa tenemos que $B = A$, por lo que f es el valor constante $f(a)$ en A y en consecuencia por la continuidad de f en \bar{A} , también el valor de f es igual al valor constante $f(a) \in \bar{A}$.

Por lo tanto $M = M'$.

Ya que $M = M'$ se sigue que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in A$, así ya demostramos (i).

Por otro lado si $|f(z)| = M = M'$ para alguna $z \in A$, al ser f constante, por lo que (ii) queda demostrado. \square

El siguiente teorema que veremos será el teorema de Mapeo Abierto.

Teorema 4.21 [Teorema del Mapeo Abierto] Sea G una región y suponemos que f es una función holomorfa no constante en G , entonces para algún conjunto abierto U en G se tiene que $f(U)$ es abierto.

Demostración:

Tenemos f función constante que es holomorfa en un punto a , tendríamos que la imagen de un disco con centro en a contiene un disco con centro en $f(a)$, así que sin pérdida de generalidad $f(a) = 0$.

Sea D una circunferencia con centro en a tal que $f(z) \neq 0$ para $z \in D$, escogemos $\epsilon = \min_{z \in D} \frac{|f(z)|}{2}$. Así que $w \in D_\epsilon(0)$ con $z \in D$, mientras que $|\alpha - w| = |-w| < \epsilon$, tenemos:

$$\begin{aligned} |f(z) - w| &\geq |f(z)| - |w| \\ &\geq 2\epsilon - \epsilon \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Por lo que $|f(z) - w|$ alcanza su mínimo dentro de D . Por el teorema del Módulo Mínimo existe un punto z_0 dentro de D tal que $|f(z_0) - w| = 0$, es decir, que $f(z_0) = w$. \square

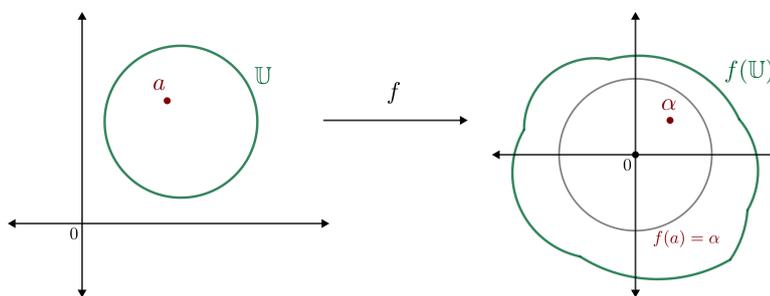


Figura 4.12: Región G donde $U \subset G$

Teorema de Uniformización de Riemann.

El teorema de Uniformización es una generalización del teorema de Mapeo de Riemann, que garantiza que cualquier superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a Δ , \mathbb{C} o $\hat{\mathbb{C}}$.

La demostración de este teorema se basará en la construcción de una función armónica de valor real en una superficie de Riemann arbitraria simplemente conexa con singularidad en un punto, esta función tendrá la forma de una función de Green, para generar esta función plantearemos el Problema de Dirichlet y lo resolveremos usando el método de Perron.

El construir la función de Green nos llevará a considerar dos casos, donde la función de Green va a ser armónica en la superficie de Riemann excepto en la singularidad y el otro caso es que la función sea idénticamente infinita. Esto nos llevará a poder concluir que cualquier superficie de Riemann es conformemente equivalente al disco unitario, al plano complejo o a la esfera de Riemann.

Teorema 5.1 (Teorema de uniformización) *Si S es una superficie de Riemann simplemente conexa entonces S es conformemente equivalente a \mathbb{C} , $\hat{\mathbb{C}}$ o Δ .*

Demostración:

Primero empezaremos mostrando que \mathbb{C} , $\hat{\mathbb{C}}$ y Δ son diferentes entre sí.

- No existe un mapeo holomorfo entre $\hat{\mathbb{C}}$ y \mathbb{C} .
Supongamos que tenemos $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ es un mapeo holomorfo. Podemos

construir una sucesión (z_n) en $\hat{\mathbb{C}}$ para $n \geq 1$ con $|f(z_n)| \geq n$, como $\hat{\mathbb{C}}$ es un conjunto compacto la sucesión tiene una subsucesión (z_{n_k}) que converge a un punto $z \in \hat{\mathbb{C}}$, por lo que $f(z) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} (f(z_{n_k})) = \infty$, pero esto no puede pasar por el teorema de Liouville Generalizado (teorema 4.12) ya que f debería ser constante. Por lo que no existe un mapeo holomorfo entre $\hat{\mathbb{C}}$ y \mathbb{C} . Por lo tanto $\mathbb{C} \neq \hat{\mathbb{C}}$. □

- No existe una biyección holomorfa entre \mathbb{C} y Δ , menos hay una biyección continua ya que topologicamente un conjunto es acotado y el otro no.

Caso Δ es acotado en \mathbb{C} .

Sabemos que cualquier disco en el plano complejo es un conjunto acotado. En particular existe un $\epsilon > 0$ tal que $|z| \leq \epsilon \quad \forall z \in \Delta$, por lo que $\Delta \subset \mathbb{C}$ es acotado.

Caso \mathbb{C} no es acotado en \mathbb{C} .

Supongamos que \mathbb{C} es compacto, es decir, cerrado y acotado. En dado caso cualquier cubierta abierta de \mathbb{C} debería tener una subcubierta finita.

Consideramos la cubierta abierta de \mathbb{C} que está compuesta por todos los discos abiertos $|z| < M$ con centro en 0, pero esto es una contradicción ya que es claro que no tiene subcubiertas finitas. Además, que \mathbb{C} es abierto y cerrado. Por lo que \mathbb{C} no es compacto en particular \mathbb{C} no es acotado en \mathbb{C} .

Por lo que $\Delta \neq \mathbb{C}$. □

- No se puede definir un mapeo holomorfo, se podría definir un mapeo holomorfo entre el disco y el semiplano superior, el problema es que faltaría otro mapeo para generar un disco para la parte de abajo. Es decir, necesitaríamos dos discos para "llenar" la esfera, un disco con la frontera y otro sin la frontera. Como en la Figura 3.16.

Por lo que $\Delta \neq \hat{\mathbb{C}}$. □

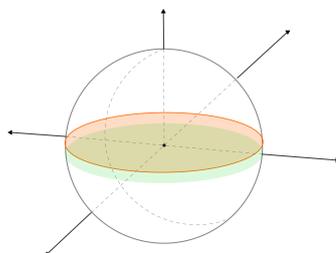
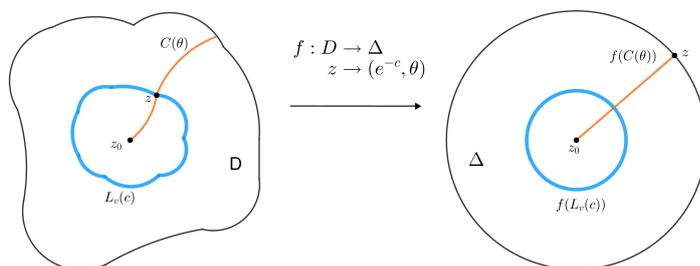


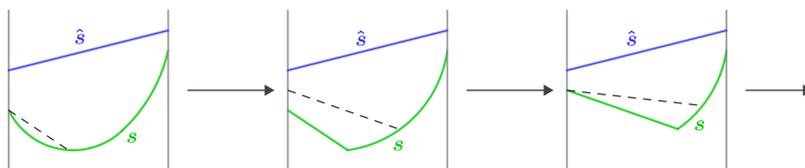
Figura 5.1: Proyección.

Ahora que ya mostramos que \mathbb{C} , $\hat{\mathbb{C}}$ y Δ son diferentes entre sí, podemos empezar con la demostración general.

Después de plantear el Teorema de Mapeo, Riemann se cuestionó si esta idea se podía generalizar a otros dominios. El Teorema de Mapeo de Riemann plantea que para una región $D \neq \mathbb{C}$ simplemente conexa entonces existe un mapeo conforme entre D y Δ . Lo que ahora buscamos es que para cualquier dominio de más de un punto pueda existir un mapeo conforme.



Sea $s : S \rightarrow \mathbb{R}$ función subarmónica en la familia de Perron \mathcal{F} y \overline{B} un disco cerrado en S , donde definimos una función armónica \hat{s} tal que $\hat{s}|_{\partial B} = s|_{\partial B}$. Al extender \hat{s} a S tenemos que $\hat{s} = s$ en $S \setminus B$. A \hat{s} le llamamos armónico local mayorante de s en B . La idea consiste en que localmente, la función s reemplaza por una función de la familia de Perron además de quitar el supremo de s hasta obtener \hat{s} , por lo que tenemos $\hat{s}(\xi) = \sup_{s \in \mathcal{F}} s(\xi)$.



Aún más $\hat{s}(\xi) = \sup_{s \in \mathcal{F}} s(\xi)$ es el mínimo armónico mayorante positivo que pertenece a la familia \mathcal{F} de Perron que se encuentra cerca del punto $\xi_0 \in S$. Como consecuencia del teorema de Perron (teorema 4.6) tenemos que $\hat{s}(\xi) = \sup_{s \in \mathcal{F}} s(\xi)$ es armónica en $S \setminus \{\xi_0\}$ o $\hat{s} \equiv +\infty$.

CASO 1: Para el primer caso tenemos que $\hat{s}(\xi)$ es una función armónica en $S \setminus \{\xi_0\}$. Tenemos que $\hat{s} = g(\xi, \xi_0)$ función de Green con singularidad en ξ_0 y por el teorema 4.18 entonces se puede definir un mapeo holomorfo de S a Δ .

Por lo tanto $S \simeq \Delta$. □

CASO 2: Ahora tenemos que $\hat{s}(\xi)$ es idénticamente infinito, es decir, S no admite una función de Green con singularidad en ξ_0 .

No es trivial producir funciones armónicas acotadas no constantes en superficies de Riemann. Esto nos lleva a plantear el Problema de Dirichlet. Sea $S \subset S_1$ superficies de Riemann y por simplicidad asumimos que ∂S es una colección finita de curvas suaves a trozos, donde $f : \partial S \rightarrow \mathbb{R}$ continua, el problema de Dirichlet es encontrar una función continua $h : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que satisface i. $h|_S$ es armónica y ii. $h|_{\partial S} = f$.

Para comprobar i. supongamos f está acotada, aún más podemos suponer que ∂S es compacto, sea $s : \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$ función subarmónicas en S que satisface $s|_{\partial S} \leq f$ y $s \leq \sup f$. Si $m = \inf f$ entonces la función constante $m \in \mathcal{F}$, además el Principio del Máximo Relativo (teorema 4.8), aplicado a funciones subarmónicas implica que para toda $\xi \in S$ y todas las $s \in \mathcal{F}$ tal que $s(\xi) \leq \sup f$. Se sigue que $h(\delta) = \sup s(\delta) < \infty$ es armónica en S .

La condición ii. esta dada por el teorema 4.14 se cumple que h se extiende a ∂S y $h|_{\partial S} = f$.

Ya vimos que h existe y cumple con las condiciones i. y ii., pero por el teorema 4.14, tenemos que ver como es este mapeo cuando la superficie de Riemann S admite o no curvas divergentes.

Caso A: Si S es una superficie de Riemann simplemente conexa con curvas divergentes y no admite una función de Green, entonces S es conformemente equivalente a \mathbb{C} .

Demostración:

S es una superficie de Riemann que no es compacta, además admite una curva divergente, por definición, S está formada por pedazos de curvas holomorfas $arc\phi : [0, \infty) \rightarrow S$ tal que no existe un subconjunto compacto de S . Entonces definimos un conjunto $S_t = S \setminus \phi([t, \infty))$ simplemente conexo por el teorema 4.17.

Del teorema 4.15 podemos suponer que S_t admite funciones de Green con singularidad en ξ_0 . Y usando el teorema 4.16 concluimos que S_t es compacto en la topología de convergencia uniforme en subconjuntos compactos.

Donde S_t es una superficie de Riemann simplemente conexa con función de Green, como lo hicimos en el CASO 1 tenemos que existe una

función holomorfa $f_i : S_i \rightarrow \Delta$. Ahora lo que haremos será construir un mapeo de Δ a \mathbb{C} , para así después construir un mapeo conforme de S a \mathbb{C} .

Podemos asumir que $f_i(\xi_0) = 0$ para algunos $\xi_0 \in S$, ahora escogemos una sucesión $(i_j) := k$ creciente, denotamos S_k y f_k . Fijamos la coordenada local $z = f_0(\xi)$ cerca de ξ_0 , entonces podemos calcular $c_k = f'_k(z(\xi))$ con $\xi = \xi_0$ y definimos $F_k(\xi) = c_{k-1}f_k(\xi)$ existe una biyección holomorfa $F_k : S_k \rightarrow \Delta_k$ con $\Delta_k = \Delta(c_{k-1})$.

De manera recursiva construiremos un mapeo de Δ_k a \mathbb{C} si definimos una subsucesión N_k de \mathbb{Z}^+ , de la siguiente forma:

- a) $N_k = \mathbb{Z}^+$
- b) Si N_k es definido por $j \in N_k$ tal que $j \geq i$, F_j está definido y es inyectivo en S_k , se sigue que $F'_j(z(\xi_0)) = 1$, entonces tenemos el mapeo holomorfo $F_j \circ F_k^{-1} : \Delta_k \rightarrow \mathbb{C}$ que es inyectivo que cumple que $(F_j \circ F_k^{-1})(0) = 0$ y $(F_j \circ F_k^{-1})'(0) = 1$.

Por el teorema 4.16 podemos encontrar una subsucesión $N_{k+1} \subset N_k$ con $j \in N_{k+1}$ tal que $F_j \circ F_k^{-1}$ converge al mapeo holomorfo inyectivo $H_k : \Delta_k \rightarrow \mathbb{C}$ que cumple con $H_k(0) = 0$ y $H'_k(0) = 1$. Hemos definido N_{k+1} .

Escogemos n_j para que sea la entrada j -ésima en la sucesión N_j . Para $l > i$ en S_k , entonces $H_l \circ F_l$ es una función inyectiva holomorfa y

$$\begin{aligned} H_l \circ F_l &= (\lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j} \circ F_{l-1}) \circ F_l \\ &= (\lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j} \circ F_k^{-1}) \circ F_k \circ F_{l-1} \circ F_l \\ &= (\lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j} \circ F_{l-1}) \circ F_i \\ &= H_k \circ F_k \end{aligned}$$

Así $H_k \circ F_k$ es una restricción de S_k es definido globalmente holomorficamente con el mapeo $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ donde f es inyectivo ya que $f|_{S_k}$ es inyectivo para todo i .

$f(S)$ es simplemente conexo suponemos $f(S) \neq \mathbb{C}$ entonces por el teorema del Mapeo de Riemann (teorema 1.5) $f(S)$ es conformemente equivalente a Δ y existe un mapeo conforme $h : S \rightarrow \Delta$. Entonces la parte $Re(h)$ es una función acotada, no constante y armónica en S .

Por el teorema 4.13, S debe tener una función de Green con singularidad $\xi_0 \in S$, esto es una contradicción, por lo que $f(S) = \mathbb{C}$

Por lo tanto $S \simeq \mathbb{C}$.

Caso B: S es compacto, además S no admite una curva divergente y recordemos que tampoco una función de Green entonces S es conformemente equivalente a $\hat{\mathbb{C}}$.

Demostración:

Con ayuda de el teorema 4.17 definimos a $\mathring{S} = S \setminus \{\xi_0\}$ superficie simplemente conexa y admite una curva divergente, la imagen de ϕ en S puede ser aproximada por una curva divergente de lo contrario, $S \simeq \mathring{S}$ y $\mathring{S} \simeq \mathbb{C}$. Veamos que la primer afirmación no es valida.

Como \mathring{S} tiene curvas divergentes, como en el Caso A tenemos que $\mathring{S} \simeq \Delta$ o $\mathring{S} \simeq \mathbb{C}$.

Supongamos que tenemos $f : \mathring{S} \rightarrow \Delta$ mapeo conforme equivalente entonces f es acotado en \mathring{S} en particular es acotado cerca de ξ_0 . Por el teorema de Riemann sobre singularidades removibles (teorema 4.19) f se extiende al mapeo conforme de S en $\bar{\Delta}$.

Por el Principio del Módulo Máximo (teorema 4.20) $|f(\xi_0)| < 1$ donde $f(\mathring{S}) = \Delta$, existe algún $\xi_1 \in \mathring{S}$ tal que $f(\xi_0) = f(\xi_1)$.

Así que por el teorema de Mapeo Abierto (teorema 4.21), existen puntos ξ'_0, ξ'_1 cerca de ξ_0 y ξ_1 donde al aplicar la función tenemos $f(\xi'_0) = f(\xi'_1)$. Pero esto contradice la restricción de que $f|_{\mathring{S}}$ es inyectivo, es decir, se contradice que f es un mapeo conformemente equivalente.

Por consiguiente $\mathring{S} \simeq \mathbb{C}$ y $S \simeq \hat{\mathbb{C}}$.

Por lo tanto, queda demostrado: $S \simeq \hat{\mathbb{C}}$, $S \simeq \mathbb{C}$ o $S \simeq \Delta$.

□

1. [Teorema de la curva de Jordan] Si Γ es un contorno simple, entonces $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ tiene dos componentes, una llamada interior de Γ denotada por $Int(\Gamma)$ y la otra exterior de Γ denotada por $Ext(\Gamma)$ cada uno de los cuales tiene a Γ como su límite. Por lo tanto, si Γ es un contorno de Jordan (curva cerrada simple) entonces $Int(\Gamma)$ y $Ext(\Gamma) \cup \{\infty\}$ son regiones simplemente conexas. [7, pág. 17]
2. [Desigualdad de Harnack] Sea K un subconjunto compacto de la superficie de Riemann S , entonces existe un $m > 0$ tal que para cualquier función $u \in S$ armónica positiva y cualquier $z, w \in K$ tenemos: [3, pág. 129]

$$\left(\frac{1}{m} u(w) \leq u(z) \leq m u(w) \right).$$

3. [Teorema de Morera] Sea f una función continua en un conjunto abierto conexo D y si $\int_{\gamma} f = 0$ para cualquier curva cerrada γ en D , entonces f es holomorfa en D .
4. [Teorema de Cauchy] Sea f una función holomorfa en un conjunto abierto conexo D y $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de curvas cerradas en D , entonces

$$\int_{\gamma_1} f + \dots + \int_{\gamma_n} f = 0.$$

5. [Principio del Argumento] Si $f(z)$ es una función meromórfica dentro y sobre alguna curva cerrada simple Γ , la función f no tiene ceros ni polos en Γ , en otras palabras es el número de vueltas alrededor del punto $w = 0$

hechas por el punto $w = f(z)$ cuando z atraviesa Γ una vez en la dirección contraria a las manecillas del reloj igual a $N - P$, entonces

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(N - P)$$

donde N y P denota el número de ceros y polos de $f(z)$ dentro de Γ , contando cada cero y polo tantas veces como indique su multiplicidad y orden. [7, pág. 27]

6. [Teorema de regularidad de la ecuación de Laplace] Sea D un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable y satisface la ecuación de Laplace, entonces f tiene derivadas de todos los órdenes y es analítica.

Bibliografía

- [1] Abikoff, W., 1981: The Uniformization Theorem. *The American Mathematical Monthly*, **88(8)**, 574-592, <https://doi.org/10.2307/2320507>.
- [2] Ahlfors, L., 1979: *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill Education, 331 pp.
- [3] Beardon, A.F., 1984: *A Primer on Riemann Surfaces*. Cambridge University Press, 188 pp.
- [4] Conway, J.B., 1978: *Functions of One Complex Variable I*. Springer, 322 pp.
- [5] Farkas, H. M., Kra, I, 1992: *Riemann Surfaces..* Springer, 366 pp.
- [6] Heins, M., 1949: The Conformal Mapping of Simply-Connected Riemann Surfaces. *Annals of Mathematics*, **50(3)**, 686-690. <https://doi.org/10.2307/1969555>.
- [7] Kythe, P. K., 2019: *Handbook of conformal mappings and applications*. Chapman and Hall/CRC, 942 pp.

BIBLIOGRAFÍA

- [8] Marsden, J. E., Hoffman, M. J, 1999: *Basic Complex Analysis*.. W.H. Freeman, 516 pp.
- [9] Needham, A. P. M. T., Needham, O. M. T., 1997: *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press, 592 pp.