



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

**FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA COMPLEJA APLICADA A LA
DESCRIPCIÓN DE RESONANCIAS EN FLUIDOS VISCOELÁSTICOS:
MODELO MECÁNICO DE MAXWELL”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO QUÍMICO

PRESENTA:

ELIZABETH JERALDYNE NÚÑEZ HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

CO-ASESORES:

Dr. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

M. en C. LUIS ANTONIO RAMÍREZ TORRES

CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO 2022





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPPIT) de UNAM <<INI15919>> << FUNCION DE TRANSFERENCIA COMPLEJA APLICADA A LA DESCRIPCION DE RESONANCIAS EN FLUIDOS VOSCOELASTICOS: MODELO MECÁNICO DE MAXWELL >>, Agradezco a la DGAPA – UNAM la beca recibida.
- Investigación realizada gracias al apoyo a Proyectos para la innovación y mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM <<PE116519>> <<Fenómenos de transporte avanzados: fluidos no newtonianos viscoelásticos lineales y no lineales>>. Agradezco a la DGAPA – UNAM la beca recibida.
- Investigación realizada gracias al Posgrado de Apoyo a Proyectos para innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM <<PE116519>> <<Material didáctico, aula virtual y blog para apoyo de las asignaturas de matemáticas I y II de la carrera de Ingeniería Química>>
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.

DEDICATORIAS

He sido alentada, apoyada e inspirada por las personas a quienes dedico con todo mi amor esta tesis:

- A mi mamá por enfrentar la vida con fortaleza, por salir adelante y haber superado obstáculos con los que cualquiera hubiera flaqueado, por ser la mejor en su trabajo, tener una disciplina inquebrantable; aun con eso haber dedicado su vida a su casa y su familia, sobre todo, mamá gracias por haberlo inculcado en mí.
- A mi papá, por haber criado a un ser humano humilde y amoroso, por los abrazos largos y por recogerme en la salida y que me dejas pedir lo que yo quiera en la tienda. Papi, muchas gracias por partir la galleta a la mitad y tratar que no me diera cuenta de que era la parte mas grande.
- A Francisco Javier, por compartir la música conmigo, por acompañarme siempre a la escuela, por haberme cuidado y amado, por esos besos en la frente y tomarme la mano en la calle,
- A María Elisa, gracias por enseñarme el valor de la responsabilidad de una vida, por haber hablado al año, por llenar de ternura mis tardes, por los días de series con papitas, por amarme como si yo fuera la hermana menor y darme el apoyo que requiero para ser un adulto.
- A Luke, por tener paciencia para dejarme madurar, por verme, conocerme en todas las formas y aun así no alejarte, por las aguas de frutas de la michoacana, por las carcajadas antes de dormir, por abrazarme después de una pesadilla, por los apodos divertidos, por hacerme sentir todo en este mundo para ti y gracias por hacer todos mis sueños realidad.

- Al Dr. Edtson que ha sido un compañero de viaje maravilloso, porque alguna vez le pedí que me hablara desde su corazón y terminé llorando, porque me ha querido y me ha cuidado todos estos años como si fuera su hija, por no quedarse solo con el título de profesor y ser mi amigo. Gracias doctor por haber confiado en mi y haberme impulsado a la realización de este trabajo

CONTENTS

Capítulo 1. Introducción	14
Introducción.....	14
1.1 Preliminares	15
1.1.1 Permeabilidad.....	15
1.1.5 Medios porosos, ley de Darcy.....	18
1.2 Antecedentes.....	20
1.3 Objetivos e Hipótesis	24
1.3.1 Objetivos.....	25
1.3.2 Hipótesis	26
1.3.3 Distribución del material.....	26
CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO.....	27
2.1 Ecuaciones de continuidad y de transporte	28
2.2 Modelo de Newton.....	28
2.2.1 Modelo no newtoniano (newtoniano generalizado)	29
2.2.2 Modelo viscoelástico de Maxwell (viscoelasticidad lineal)	30
2.3 Ecuaciones de balance de masas y de momento.....	31
2.3.1 Ecuación de continuidad.....	31
2.3.2 Ecuación de movimiento	31
2.3.3 TENSOR de esfuerzos totales	32

2.4 Flujo volumétrico.....	33
2.4.1 Ecuación de momento modificada por un gradiente de presión pulsátil.	33
2.5 Modelo mecánico viscoelástico de Maxwell.	34
Capítulo 3. Sistema físico.....	37
3.1 Sistema físico y modelado matemático	38
3.1.1 Problema de estudio	38
3.2 Condiciones de proceso	39
3.3 Condiciones Biológicas.....	40
3.4 Flujo Inhomogéneo y Cortante.....	40
Capítulo 4. Modelado matemático.....	42
4.1 Modelo matemático	43
4.2 Ecuación de movimiento con mecanismos inerciales.....	44
4.3 Perfil de velocidades.....	46
4.3.1 Ecuación diferencial homogénea	46
4.3.2 Solución particular.....	47
4.3.3 Condiciones de frontera	47
4.3.4 Flujo volumétrico con transformada de Fourier.....	49
4.3.5 Función de transferencia compleja	51
4.3.6 Parámetro Beta	52

4.3.7 Fluido No-Newtoniano: Maxwell.....	53
4.4 Cálculo de la función de transferencia para una corona circular.	53
4.4.1 Flujo volumetrico en una corona circular en el espacio de Fourier	56
Capítulo 5. Simulaciones y Modelado matemático.....	60
5. 1 Resultados.....	61
5.1 Modelo de Newton	61
5.2 Modelo de Maxwell.....	66
5.2.1 Capilar (Oclusión central).....	66
5.2.1 Corona circular (tubos concéntricos).....	68
5.3 Aplicación: Sangre humana con colesterol bajo	71
Capítulo 6. Conclusiones y trabajo futuro.....	73
6.1 CONTRIBUCION AL CONOOCIMIENTO	74
6.2 Trabajo futuro	76
Bibliografía	77

Glosario

- **Deformación:** Cambio de posición de un punto material a otro.
- **Ecuación constitutiva:** Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación)
- **Ecuación de continuidad:** Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
- **Ecuación de movimiento:** Segunda ley newton aplicada aun medio continuo.
- **Esfuerzo en la pared:** Esfuerzo evaluado en la pared.
- **Estado estacionario:** Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
- **Fluido:** Es aquel que al aplicarle un esfuerzo cortante sufre una deformación continua e irreversiblemente.
- **Fluido biológico:** Son las diferentes excreciones y secreciones que provienen del organismo.
- **Fluidos complejos:** Son aquellos que presentan comportamiento reológico en estado estacionario y no estacionario.
- **Flujo cortante:** Flujo que se aplica una fuerza tangencial al sistema que se deforma continua e irreversiblemente.
- **Flujo homogéneo:** Es el flujo en la cual las propiedades del sistema no dependen de la posición.
- **Fluido incompresible:** Fluido que tiene una densidad constante.

- **Fluido newtoniano:** Son aquellos donde la viscosidad muestra una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación.
- **Fluido no-newtoniano:** La viscosidad no muestra una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación.
- **Flujo oscilante:** Es el flujo que se origina cuando un plato oscila a una función periódica.
- **Flujo pulsátil:** Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.
- **Fluido viscoelástico:** Es aquel fluido que tiene una contribución viscosa y otra elástica.
- **Flujo volumétrico:** Volumen por unidad de tiempo.
- **Frecuencia Angular:** Se refiere a la frecuencia del movimiento circular expresada en proporción del cambio de ángulo.
- **Función de Transferencia:** Relaciona la variable de entrada y salida en un estado dinámico.
- **Función estocástica:** Función probabilística que evoluciona en el tiempo.
- **Gradiente:** Operador matemático espacial que físicamente describe los cambios de la propiedad respecto al espacio.
- **Modelo de Jeffreys:** Ecuación geológica viscoelástico lineal que acopla un solvente con un polímero.
- **Modelo de Maxwell:** Ecuación constitutiva que describe el estado viscoelástico de un sistema en el régimen de rapidez de deformación bajas (viscoelasticidad lineal).

- **Módulo elástico:** Está asociado con la energía almacenada en el material, y se mide en pascal.
- **Módulo viscoso:** Está asociada con la energía disipada por el material, y se mide en pascal.
- **Módulo complejo:** Es el módulo del vector obtenido como suma de las contribuciones de los módulos elásticos y viscosos.
- **Rapidez de deformación:** Rapidez con la que se deforma un fluido.
- **Sangre:** Fluido biológico que presenta dos fases y que es viscoelástico.
- **Reología:** Ciencia que estudia el flujo de materia y su deformación.
- **Tensor de Esfuerzo:** Es una matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en el cual se describe el estado de las fuerzas en un elemento de control.
- **Tiempo de relajación:** Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar un estado de equilibrio después de un periodo.
- **Tiempo de retardo:** Es el tiempo en el que tarda el material en llegar al equilibrio debido a la aplicación de un esfuerzo cortante.
- **Velocidad promedio:** Es la velocidad axial promediada a través del área de flujo.
- **Viscoelasticidad lineal:** Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.
- **Viscoelasticidad no lineal:** Es la región a medias y altas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.
- **Viscosidad:** Es una medida de la resistencia a fluir de

Nomenclatura

Vectores y Tensores

σ	Tensor de esfuerzos viscoso [Pa]
D	Tensor rapidez de deformación [1/s]
∇V	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
∇V^T	Tensor gradiente de velocidad transpuesto [1/s]
V	Vector de velocidad [m/s]
g	Vector de aceleración de la gravedad [m/s ²]

Operadores Matemáticos

$\nabla = \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$	Operador Nabla [1/m]
$O_\Phi(i\omega)$	Operador fluidez [1/Pas]
$O_\eta(i\omega)$	Operador viscosidad [1/Pas]
$\partial/\partial x^i$	Derivada parcial de la coordenada x^i [1/m]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]
π	Constante Pi [1]
\mathcal{F}	Formalismo de la Transformada de Fourier [1]
$\partial V_z/\partial r,$	Rapidez de deformación rz [1/s]

Variables Dimensionales

a	Radio del capilar [m]
R_1	Radio menor corona circular [m]
R_2	Radio mayor corona circular [m]
L	Longitud del capilar [m]

V_z	Componente axial del vector de velocidad [m/s]
V_r	Componente radial del vector velocidad [m/s]
V_θ	Componente angular del vector velocidad [m/s]
r	Coordenada radial adimensional [m]
t	Tiempo [s]
Q	Flujo volumétrico viscoelástico [m ³ /s]
Q_N	Flujo volumétrico newtoniano [m ³ /s]
K	Permeabilidad dinámica [m ² /s]
K_N	Permeabilidad Newtoniano [m ² /s]
G_0	Modulo Elástico [Pa]
$T(i\omega)$	Función de transferencia [1/Pas]
$Re[T(i\omega)]$	Parte real de la función de transferencia [1/Pas]
$Im[T(i\omega)]$	Parte imaginaria de la función de transferencia [1/Pas]
∇p	Gradiente de presión [Pa]
∇p_z	Gradiente de presión en la dirección axial [Pa]
$\langle V_z \rangle$	Velocidad promedio [m/s]

Letras Griegas

β	Vector de onda [1/m]
φ_0	Fluidez a baja rapidez de deformación [1/Pa s]
λ_0	Tiempo de relajación de Maxwell [s]
ω	Frecuencia angular [rad/s]
ρ	Densidad [rad/s]

σ_{rz}	Componente rz del esfuerzo cortante [Pa]
σ_w	Esfuerzo en la pared [Pa]
η_0	Viscosidad a bajo corte [Pa s]
η'	Parte real de la Viscosidad compleja [Pa s]
η''	Viscosidad compleja [Pa s]

Variables Adimensionales

σ_{rz}	Esfuerzo cortante adimensional [1]
ω	Frecuencia adimensional [1]
$T(i\omega)$	Función de transferencia [1]
$\beta(i\omega)$	Función beta [1]

Números adimensionales

De	Deborah [1]
R	Razón geométrica [1]

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 PRELIMINARES

El flujo de líquidos complejos como: (i) polímeros, (ii) fluidos biológicos, (iii) suspensiones, (iv) sistemas micelares, etc., es uno de los temas más estudiados en los fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos (Bird et al. 2002). Este sistema ha sido de interés, en ingeniería, física, y ciencias biomédicas. También, ha sido estudiada en bio-reología en la descripción de sangre humana Collepardo-Guevara y Corvera Poiré (2007). El estudio de sangre con hipercolesterolemia ha sido ampliamente investigado debido a sus potenciales aplicaciones en la ciencia de la medicina especialmente, en anticoagulantes (Moreno et al. 2015; Herrera Valencia 2017, 2019). La sangre combinada con altos contenidos de colesterol presenta resultados sorprendentes respecto a su reología (Moreno et al. 2015). Al aumentar el colesterol la sangre pasa de un fluido adelgazante a uno con esfuerzo de cedencia por lo que su viscosidad aumenta considerablemente (Moreno et al. 2015; Herrera Valencia 2017, 2019).

1.1.1 PERMEABILIDAD

Para hablar de los sistemas antes mencionados, se deben de definir ciertos conceptos físicos los cuales serán de utilidad en esta sección. El flujo en sangre, medios porosos, en recuperación terciaria de petróleo, estimulación acústica etc., dependen de la resistencia que presenta el medio para obtener una respuesta dinámica a un estímulo.

1.1.2 PERMEABILIDAD INTRÍNSECA: K_i

La permeabilidad intrínseca se define como una medida que presenta el medio, poroso, en donde el fluido ha sido caracterizado por un **fluido newtoniano** y matemáticamente, tiene la siguiente estructura (Del Rio y Castrejon-Pita 2002)

$$\langle V_z \rangle = \frac{K_i}{\mu} (-\nabla_z p) \quad (1.1)$$

En la Ec. (1.1) $\langle V_z \rangle$ es la velocidad promedio, K_i (m^2) es la permeabilidad intrínseca del sistema, μ es la viscosidad newtoniana y $-\nabla_z p$ es el gradiente de presión en la dirección z , y es la fuerza motriz que deforma continua e irreversiblemente. El signo negativo, tiene que ver con una consecuencia de la segunda ley de la termodinámica, que describe que los procesos se llevan de estados de mayor a menor presión. La permeabilidad intrínseca, se define como:

$$K_i = \varepsilon_0 \frac{a^2}{8} \quad (1.2)$$

En la Ec. (1.2), K_i es la permeabilidad intrínseca del sistema que solo depende de la porosidad, de la longitud característica de los cilindros con los que se simula el medio poroso $r = a$. La porosidad, para un número N de poros de radio $r = a$ y longitud $z = L$, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\varepsilon_0 = N \frac{\pi a^2 L}{\pi R^2 L} = N \left(\frac{a}{R} \right)^2 \quad (1.3)$$

La Ec. (1.3) implica que la porosidad está definida entre 0 y 1.

1.1.3 PERMEABILIDAD DINÁMICA: K_D

La permeabilidad dinámica como una medida que presenta la geometría del sistema físico, para que el fluido ya sea un líquido o un gas pueda fluir continua e irreversiblemente en el sistema. La permeabilidad no solo depende las características geométricas sino también las características dinámicas, podemos visualizarlo como una resistencia. La permeabilidad dinámica se puede definir en términos de un cociente de funciones de Bessel, i.e.

$$K_D = \varepsilon_0 \frac{a^2}{8} \frac{I^2}{(a\beta)^2} \left(1 - 2 \frac{J_1(a\beta)/a\beta}{J_0(a\beta)} \right) = K_i f(a\beta) \quad (1.4)$$

En la Ec. (1.4), J_1 y J_0 son las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden cero respectivamente. La Ec. (1.4) se puede interpretar como que la permeabilidad dinámica es un múltiplo de la permeabilidad intrínseca y el factor que amplifica esta se define como:

$$f(a\beta) = \frac{I^2}{(a\beta)^2} \left(1 - 2 \frac{J_1(a\beta)/a\beta}{J_0(a\beta)} \right) \quad (1.5)$$

En la Ec. (1.5) se define el parámetro βa como:

$$a\beta = i^{3/2} \sqrt{\frac{\rho\omega}{\mu}} a^2 \quad (1.6)$$

En la Ec. (1.6) ρ es la densidad del líquido (kg/m^3), ω es la frecuencia angular (rad/s) y μ es la viscosidad newtoniana (resistencia del líquido a fluir) y “a” es la longitud característica del radio $r = a$. Las Ecs. (1.1-1.6) son punto de partida en la descripción de la física del sistema.

1.1.4 PERMEABILIDAD DINÁMICA PARA UN FLUIDO VISCOELÁSTICO: K_D

La permeabilidad dinámica para un fluido viscoelástico se define a partir de la Ec. (1.4), por lo que se tiene lo siguiente:

$$\langle V_z \rangle = \frac{K_i}{\eta_0} (-\nabla_z p) \quad (1.7)$$

Entonces,

$$K_D = K_i \frac{I^2}{(a\beta)^2} \left(\frac{\Phi}{\phi_0} \right) \left(1 - 2 \frac{J_1(a\beta)/a\beta}{J_0(a\beta)} \right) \quad (1.8)$$

Para un fluido viscoelástico de Maxwell.

$$\Phi = \frac{1}{\eta^*} \quad (1.9)$$

En donde la viscosidad compleja, se puede expresar como:

$$\eta^* = \frac{\eta_0}{1 + i(\lambda_0 \omega)} \quad (1.10)$$

La Ec. (1.10) es la viscosidad compleja de Maxwell, que define a un fluido viscoelástico, es decir un fluido que contiene componentes viscosas y elásticas del material de estudio.

1.1.5 MEDIOS POROSOS, LEY DE DARCY

Si hablamos de poros debemos de entender que están en el medio y que dependiendo de su disponibilidad para el flujo es que tanto se le dificulta pasar al fluido de un lado a otro; también es importante mencionar que todos los poros tienen tamaños diferentes ya para facilitar nuestros cálculos podemos hablar de poro promedio. **Los siguientes puntos son importantes**

- ✓ La permeabilidad es una función de respuesta, es decir, es una propiedad física del sistema que nos indica cómo responde el sistema ante cambios de presión con un flujo.
- ✓ En particular, la amplitud de este número complejo nos indica la magnitud de la respuesta, mientras que la parte imaginaria esa ligada con la fase entre el estímulo, en este caso, la presión y la respuesta, el flujo.
- ✓ El parámetro adimensional para medir la permeabilidad estará relacionado con el número de Deborah que nos indica la importancia relativa de los efectos viscosos y los elásticos en el fluido problema.
- ✓ La forma en la que se mide la permeabilidad es con la ley de Darcy, muy usada en el transporte de fluidos en medios porosos y que nos dice que el flujo promedio en un medio poroso es proporcional al gradiente de presiones y que la constante de permeabilidad nos da una medida de qué tan fácilmente un fluido fluye a través del medio.

En este trabajo de investigación a nivel licenciatura y para evitar ambigüedades, de que, si la permeabilidad tiene que ver con la geometría o con la geometría y el fluido, se utilizara el concepto de “función de transferencia”, donde la variable de entrada es el gradiente de presión y la variable de salida será el flujo volumétrico.

1.2 ANTECEDENTES

En esta sección se presentan algunos de los antecedentes del flujo pulsátil descrito en la literatura científica.

El comportamiento de los fluidos newtonianos en tubos elásticos sujetos a gradientes de presión pulsátil para mostrar la relación entre la viscosidad del fluido, la elasticidad de las paredes y el tamaño característico del medio dando una variada fenomenología, encontrando así el impacto que tiene la elasticidad de los tubos en la permeabilidad dinámica de un fluido newtoniano incompresible sujeto a un gradiente de presión pulsátil (Torres Rojas et al. 2017). Se encuentra también que la función de respuesta no es monótona a la frecuencia, por lo que en ciertos rangos de parámetros (tiempos característicos elásticos de tubo, módulo de Young) presentan resonancias. Estos resultados pueden guiar experimentos potenciales ya que se encontraron resonancias en el orden de algunas decenas de kHz (Torres Rojas et al. 2017).

Algunos autores consideraron un modelo simple para dar una explicación mecánica plausible de cuáles son los valores reales en reposo de la frecuencia cardiaca de mamíferos; estudiando cual es la frecuencia óptima para un fluido que circula de manera pulsátil a través de una red de tucos, concluyendo que las frecuencias reales en reposo de los mamíferos ocurren a frecuencias que optimizan el flujo en vasos de radios que correspondientes a arterias grandes que llevan sangre oxigenada rápidamente lejos del corazón hacia la cabeza y las extremidades (Torres Rojas et al. 2017).

Determinaron la frecuencia de un fluido viscoelástico circulante pulsátil a través de una red de tubos mostrando las frecuencias optimas obtenidas con la experimentación de distintos radios y también se establece una relación alométrica entre la frecuencia y el radio (Flores et al. 2010).

La mayoría de estos trabajos se centra en la derivación de una ley de Darcy generalizada en el dominio de las frecuencias para un fluido viscoelástico que fluye en una celda. Este análisis permitió obtener una expresión analítica de la permeabilidad dinámica (inercia-viscosas-elástica) la cual, tiene varios máximos con diferentes ordenes de magnitud mayores que la permeabilidad elástica.

Cuando la fuerza motriz consiste en un gradiente de presión modificado por una señal oscilatoria, los resultados indican que el ancho varío con el tiempo siguiendo la señal de frecuencia y que el ancho de banda es función del tiempo y de la frecuencia impuesta a través de la permeabilidad dinámica (Corvera Poiré y del Río 2004).

La permeabilidad dinámica o de Darcy ha sido, aplicada en la descripción del flujo pulsátil en arterias, o venas y en general en el sistema circulatorio del cuerpo humano. Flores et al. (2010) proponen una nueva teoría dinámica lineal 1-D de flujo sanguíneo en redes de vasos flexibles basado en una extensión de la ley de Darcy generalizada. Lo importante de este trabajo es que los autores deducen expresiones analíticas en el dominio de las frecuencias mediante el formalismo de Fourier. A través de esto, se calculan los perfiles de velocidad, flujo volumétrico sanguíneo, presión pulsátil en la las arterias, aorta superior y bifurcación aortica. La solución propuesta reproduce las características principales de las formas de onda en el pulso y en redes de grandes arterias en condiciones fisiológicas normales, el modelo reduce el tiempo computacional y proporciona un nuevo enfoque para estudiar la onda de pulso arterial (Flores et al. 2016).

Por último, este tipo de desarrollos se han utilizado en la descripción del flujo de líquidos viscoelásticos en micro canales (Collepardo Guevara y Corvera-Poire 2107). Considerando que existe deslizamiento en las paredes, obtiene una expresión analítica para la permeabilidad dinámica que da la respuesta del sistema en gradientes de presión dinámicos. Este tipo de dispositivos, se podrían aplicar en experimentos micro reometria, velocimetría y podría ser punto de partida para calcular coeficientes de deslizamiento en fluidos viscoelásticos lineales modelados con la ecuación de Navier-Stokes respectivamente (Collepardo Guevara y Corvera Poire 2017).

1.3 OBJETIVOS E HIPÓTESIS

1.3.1 OBJETIVOS.

1.3.2 GENERAL

Estudiar la respuesta dinámica del flujo volumétrico y el gradiente de presión mediante la función de transferencia del sistema para dos sistemas de estudio: (i) oclusiones periféricas y (ii) centrales

1.3.3 PARTICULAR

P.1 Obtener expresiones analíticas para la velocidad axial, flujo volumétrico y función de transferencia en función de las propiedades materiales del sistema.

P.2 Caracterizar la transferencia de momento y reología del sistema separando la contribución del plasma, del Rouleux y del hematocrito en el sistema biológico.

P.3. Analizar la función de transferencia en el espacio de Fourier en función de la frecuencia y las propiedades del sistema.

P.4. Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar las ecuaciones y que se obtengan grupos adimensionales que describan los mecanismos físicos que gobiernan al sistema de estudio.

P.5 Utilizar datos reométricos provenientes de la literatura con el fin de obtener las curvas resonantes en función de la concentración de colesterol en la muestra biológica (Sangre humana con hipercolesterolemia).

1.3.2 HIPÓTESIS

El efecto de la incorporación de un gradiente de presión oscilante para un sistema de flujo pulsátil generará un cambio en el flujo volumétrico y este será cuantificado a través de la **función de transferencia**.

1.3.3 DISTRIBUCIÓN DEL MATERIAL

En el capítulo 1 se presenta la introducción del trabajo del flujo pulsátil, antecedentes, hipótesis y objetivos (general y particulares)

En el capítulo 2 se discuten los conocimientos básicos para entender el flujo pulsátil, se comienza con las ecuaciones de continuidad, de transporte Navier Stokes.

En el capítulo 3 se presenta el sistema físico de estudio, las consideraciones matemáticas, físicas y biológicas.

En el capítulo 4 presenta el modelo matemático y los principales resultados de flujo pulsátil con función de transferencia compleja.

En el capítulo 5 se presentan las simulaciones obtenidas mediante el programa Mathematica (Licencia, FESZ-UNAM). Por último, se analiza el caso particular de un fluido biológico (Sangre humana con diferentes niveles de colesterol). El análisis de resultados, conclusiones y trabajo futuro sobre este tema se discuten al final de este capítulo.

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 ECUACIONES DE CONTINUIDAD Y DE TRANSPORTE

En esta sección se presentarán las bases teóricas para entender el trabajo de investigación de esta tesis de licenciatura. La presente sección está basada en los siguientes libros clásicos (Fredrickson AG 1964; Bird et al. 1987, 2002).

2.2 MODELO DE NEWTON

En el fundamento de la ingeniería química se encuentran los fenómenos de transporte, los cuales son caracterizados en tres estudios importantes: (i) momento, (ii) energía y (iii) masa (Currie 1974; Bird et al. 1987, 2002). La transferencia de momento se caracteriza por el estudio y su aplicación en la mecánica de fluidos, la cual analiza dos partes fundamentales como la propia mecánica clásica: la cinemática y dinámica de los fluidos (Currie 1974). Analizar la dinámica de los fluidos implica conocer las fuerzas superficiales que deforman el elemento de control de forma continua e irreversible. Enfatizando en la naturaleza del fluido y en las razones por las cuáles éste se mueve, en la primera clasificación se pueden definir los fluidos *newtonianos* y *no newtonianos* (Currie 1974; Bird et al. 1987, 2002). La definición de fluido newtoniano es aquel en el cual, no importa como la rapidez con la que sea deformado, su función viscosidad permanece constante (Currie 1974; Bird et al. 1987, 2002). La expresión más simple que relaciona el tensor rapidez de deformación \mathbf{D} (Parte simétrica del tensor rapidez de deformación) y el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ es el modelo tensorial de Newton. Matemáticamente se escribe como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \tag{2.1}$$

En la Ec. (2.1) se muestra la relación descrita en el párrafo anterior, donde \mathbf{D} representa la parte simétrica del gradiente de velocidad, describiendo el cómo es que la substancia es deformada. Este es el tensor rapidez de deformación y se representa matemáticamente como un promedio del gradiente de velocidad y la transpuesta de este gradiente de velocidad:

$$2\mathbf{D} = \nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T \quad (2.2)$$

Donde, el desarrollo del gradiente de velocidad, $\nabla\mathbf{V}$, y su transpuesta, $\nabla\mathbf{V}^T$, dependerá del sistema de coordenadas utilizado. Todo fluido que cumpla la Ec. (2.1) se le llamará *fluido newtoniano*.

2.2.1 MODELO NO NEWTONIANO (NEWTONIANO GENERALIZADO)

Para un fluido no newtoniano, la Ec. (2.1) no puede describir de una manera adecuada a los fluidos no newtonianos (Bird et al. 1987, 2002). De hecho, al momento de realizar una gráfica entre el tensor de esfuerzos respecto al gradiente de velocidad, para todos los fluidos newtonianos se obtendrá una recta con pendiente igual al valor de su viscosidad (Bird et al. 1987, 2002). Para los fluidos no newtonianos no ocurre eso, y la diferencia de la geometría para un fluido de esta naturaleza con un newtoniano dependerá en gran medida del esfuerzo aplicado al fluido y su respectiva deformación (Bird et al. 1987, 2002). Las expresiones matemáticas para modelar un fluido no newtoniano también dependerán, por supuesto, del tipo de fluido estudiado, pues los parámetros y variables que se relacionan son diferentes entre fluidos. Independientemente del modelo para el fluido no newtoniano, la expresión de la viscosidad, μ , es remplazado por la función viscosidad, η (Bird et al. 1987, 2002).

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\mathbf{II}_D)\mathbf{D} \quad (2.3)$$

En la Ec. (4) el doble producto punto, se conoce como una contracción de tipo tensorial del tensor rapidez de deformación. El resultado de esta es un escalar que son conocidos como invariantes debido a que no cambian su valor ante un transformación o rotación. Las leyes físicas de la mecánica clásica están basadas en estos invariantes debido a que no deben de depender del sistema de coordenadas y por lo tanto ser generales, i.e. invariantes (Fredrickson AG 1964; Bird et al. 1987, 2002).

2.2.2 MODELO VISCOELÁSTICO DE MAXWELL (VISCOELASTICIDAD LINEAL)

Una extensión de la Ec. (3) es el modelo viscoelástico de Maxwell el cual, combina la naturaleza viscosa y elástica del material que se analiza.

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad (2.5)$$

En la Ec. (2.5) λ_0 es un tiempo de relación viscoelástico de maxwell y η_0 es la viscosidad cortante a bajas deformaciones. La Ec. (2.5) solamente es válida para deformaciones pequeñas, es decir en el régimen de viscoelasticidad lineal. Los límites de la Ec. (2.5) son el líquido newtoniano y el sólido elástico de Hooke. Estas clasificaciones permiten estudiar la naturaleza reológica del material a través del flujo y la deformación del material.

2.3 ECUACIONES DE BALANCE DE MASAS Y DE MOMENTO

2.3.1 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

La ecuación continuidad describe la conservación de la materia en un elemento de control, es decir describe los cambios de la densidad en función de los cambios espaciales del flux de momento. La expresión matemática en términos del operador de Stokes toma la forma (Bird et al. 1987, 2002)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (2.6)$$

La cual puede ser reescrita en términos del operador del operador de Stokes:

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.7)$$

Si suponemos que el fluido es incompresible, es decir la densidad no depende del tiempo y del espacio, por lo que, se simplifica de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.8)$$

La Ec. (2.8), es la forma simplificada de la ecuación de continuidad para un fluido incompresible y matemáticamente describe un campo solenoidal.

2.3.2 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

La ecuación de movimiento es básicamente la segunda ley de Newton extendida a un sistema fuera del equilibrio (Bird et al. 1987, 2002) y viene expresada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}] = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} \quad (2.9)$$

Los primeros dos términos de la Ec. (2.9) se relacionan con la aceleración del sistema instantánea y convectiva respectivamente. Del lado derecho de la Ec. (2.9), están las fuerzas que inducen esta aceleración asociados a la divergencia del tensor de esfuerzo total (fuerzas superficiales) y fuerzas de bulto (gravitacionales, eléctricas, magnéticas, etc). Esta ecuación diferencial parcial no lineal describe las fuerzas que hacen que el elemento de control sea deformado de forma continua e irreversible (Bird et al. 1987, 2002).

2.3.3 TENSOR DE ESFUERZOS TOTALES

La Ec. (2.9) puede escribirse de una manera equivalente al desarrollar cada término. Por ejemplo, del miembro derecho, el tensor de esfuerzos total, \mathbf{T} , es la suma de una contribución hidrostática y del tensor esfuerzos que puede ser de naturaleza viscosa o viscoelástica respectivamente.

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} \quad (2.10)$$

En donde \mathbf{I} representa la matriz identidad que da el carácter tensorial al elemento escalar de la presión p . La forma matemática de la matriz \mathbf{I} es como sigue:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Al sustituir las Ecs. (2.10) y (2.11) en la Ec. (2.9) y desarrollando las propiedades de los operadores diferenciales (divergencias) se obtiene:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2.12)$$

Si suponemos que los mecanismos inerciales y gravitacionales son despreciables, la ecuación de balance del momento se simplifica de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla p \quad (2.13)$$

La Ec. (2.13) es punto de partida en el cálculo del flujo volumétrico y del presente análisis del flujo volumétrico y del flujo pulsátil.

2.4 FLUJO VOLUMÉTRICO

El flujo volumétrico (volumen por unidad de tiempo), se puede calcular mediante la integral de volumen del producto interior entre el vector de velocidad y el vector de superficie. La expresión general para el flujo volumétrico es:

$$Q = \int_V \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2.14)$$

La Ec. (2.14) es básica en el cálculo del flujo pulsátil, punto central de este trabajo.

2.4.1 ECUACIÓN DE MOMENTO MODIFICADA POR UN GRADIENTE DE PRESIÓN PULSÁTIL.

Las Ecs. (2.1-2.14) descritas en la primera sección de este capítulo nos permiten obtener bajo geometrías simples el flujo de Poiseuille, i.e., el flujo volumétrico a gradiente de presión pulsátil. Para esto, se modifica el tensor de esfuerzos total, y se introduce una fluctuación en el gradiente de presión pulsátil. El tensor de esfuerzos modificado por la perturbación toma la forma:

$$\mathbf{T} = -p(t)\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} \quad (2.15)$$

En la Ec. (2.15), $p(t)$ es la presión del sistema que depende del tiempo. Básicamente, describe las desviaciones del gradiente de presión constante y un trata de describir en forma matemática el concepto de ruido. Este tipo de estudios son muy importantes en aplicaciones médicas, pues actualmente, los estudios de sangre con bajo, medio y alto colesterol, cirrosis hepática, hipoglucemia, entre otras, desde un punto vista teórico y geométricos (Herrera-Valencia et al. 2019, 2017, 2016; Herrera et al. 2009, 2010). Al sustituir el tensor total de esfuerzos, y despreciando los mecanismos inerciales y gravitacionales en la ecuación de movimiento, se tiene lo siguiente:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla p(t) \quad (2.16)$$

2.5 MODELO MECÁNICO VISCOELÁSTICO DE MAXWELL.

El modelo por excelencia viscoelástico lineal, es la ecuación constitutiva reológica de Maxwell, en este modelo se puede suponer que:

- a) La deformación total del fluido es la suma de las contribuciones viscosas y elásticas del material
- b) Los esfuerzos viscosos y elásticos el material son iguales en magnitud es decir que el esfuerzo= esfuerzos viscosos + esfuerzos elásticos.

Definiendo la deformación total como:

$$\gamma = \gamma_v + \gamma_e \quad (2.17)$$

La rapidez de deformación viscosa se puede aproximar mediante el modelo de Newton:

$$\boldsymbol{\sigma}_v = \eta_0 \dot{\gamma}_v \quad (2.18)$$

Y para el sólido elástico, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_e = G_0 \gamma_e \quad (2.19)$$

En la ecuación de Hooke, G_0 es el módulo elástico de corte. Derivando la expresión la deformación total, se tiene lo siguiente:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_v + \dot{\gamma}_e \quad (2.20)$$

Del modelo Newtoniano, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\sigma_v}{\eta_0} = \dot{\gamma}_v \quad (2.21)$$

Sustituyendo en la deformación total, se tiene lo siguiente:

$$\dot{\gamma} = \frac{\sigma_v}{\eta_0} + \frac{1}{G_0} \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} \quad (2.22)$$

Simplificando, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\eta_0 \dot{\gamma} = \sigma_v + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial \sigma_e}{\partial t} \quad (2.23)$$

Como los esfuerzos viscoso y elástico son iguales, se tiene la siguiente expresión matemática:

$$\sigma_v = \sigma_e = \sigma \quad (2.24)$$

Finalmente obtenemos:

$$\sigma + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial \sigma_e}{\partial t} = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (2.25)$$

Definiendo el tiempo de relajación de Maxwell de la siguiente forma:

$$\lambda_0 = \frac{\eta_0}{G_0} \quad (2.26)$$

Y la derivada temporal de la deformación, se puede definir en términos del tensor rapidez de deformación, que es la parte simétrica del tensor espacial gradiente de velocidad

$$\dot{\gamma} = 2\mathbf{D} \quad (2.27)$$

El tensor simétrico \mathbf{D} , se puede expresar como:

$$2\mathbf{D} = \nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T \quad (2.28)$$

En la Ec. (2.28) T significa la matriz transpuesta del tensor espacial gradiente de velocidad.

Finalmente, el modelo de Maxwell puede ser expresado en forma tensorial de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad (2.29)$$

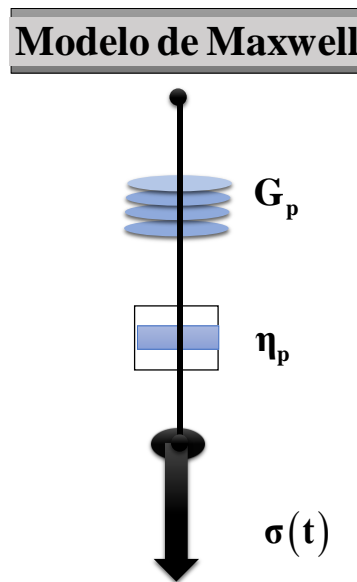


Figura 1. Arreglo del modelo mecánico de Maxwell

CAPÍTULO 3. SISTEMA FÍSICO

3.1 SISTEMA FÍSICO Y MODELADO MATEMÁTICO

3.1.1 PROBLEMA DE ESTUDIO

3.1.1.1 GEOMETRÍAS

En esta sección se describirá las principales restricciones del sistema de estudio, desde un punto geométrico, físico, biológico y matemático. El modelo de estudio es representado por la Fig. (1) y Fig. (2):

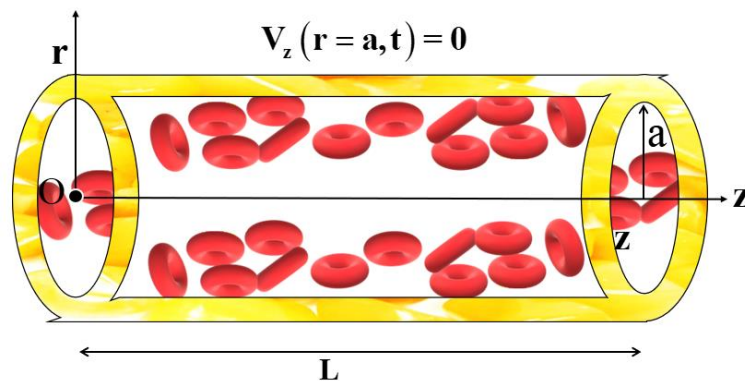


Figura 2. Geometría de un capilar

Figura 2. Ilustra un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ en donde el fluido se mueve debido a un gradiente de presión pulsátil. Naturaleza reológica del fluido

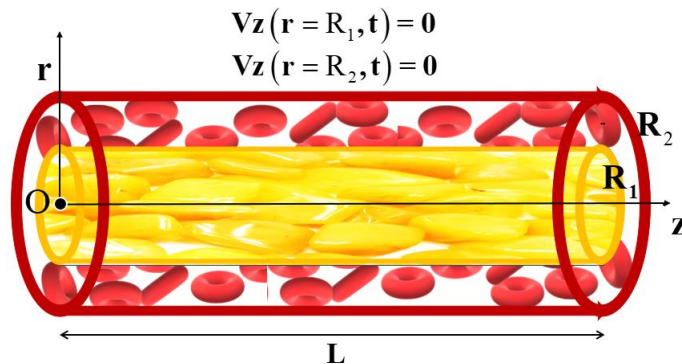


Figura 3. Geometría de corona circular

Figura 3. Ilustra un capilar de radios $r = R_1$ y $r = R_2$ en los que la velocidad es cero por adherencia y fluyendo en la dirección axial $z=L$

El fluido es incompresible, i.e. su densidad permanece constante en el tiempo y en la posición. Además, consideraremos que este es viscoelástico, es decir que tiene componentes viscosas asociadas a la disipación y elásticas de recuperación o almacenamiento de la energía (Herrera-Valencia et al. 2016, 2017, 2019). El fluido biológico que se estudia es sangre humana con hipercolesterolemia, i.e., que existe un exceso de colesterol debido a un trastorno alimenticio (condiciones actuales, sobrepeso, sedentarismo etc). En este estudio, se supone que la sangre se obtuvo de pacientes hombres y mujeres y que se siguieron los protocolos establecidos para la extracción de esta (Moreno et al. 2015; Herrera-Valencia et al. 2016, 2017, 2019).

3.2 CONDICIONES DE PROCESO

Las condiciones de proceso son formuladas a continuación: Proceso isotérmico, i.e. la temperatura en el sistema es constante por lo que no hay variación de las propiedades materiales en él. Biológicamente, se supone que el cuerpo humano tiene una temperatura constante de aproximadamente $T = 37^{\circ}\text{C}$. Mecanismos inerciales no son tomados en cuenta, es decir, la aceleración instantánea no es cero, por lo que los cambios de la velocidad son importantes en el análisis del problema. El flujo pulsátil es modelado introduciendo una función transitoria para el gradiente de presión, i.e., $\nabla p(t)$. Los mecanismos gravitacionales son despreciables debido a la geometría del sistema. El líquido, se mueve por un gradiente de presión pulsátil.

3.3 CONDICIONES BIOLÓGICAS

El hematocrito que es básicamente el plasma compuesto por sales y minerales permanece constante (Moreno et al. 2015). No existen otras patologías en la sangre de tal manera que intervenga en el desarrollo matemático de la misma, el intercambio de minerales, proteínas, etc., se desprecia del presente análisis (Moreno et al. 2015)

3.4 FLUJO INHOMOGÉNEO Y CORTANTE

En el flujo homogéneo las variables dinámicas del sistema no dependen de la posición por lo que los gradientes de estas son cero, i.e. $\nabla \mathbf{X} = 0$, $\mathbf{X} = \{\sigma, \mathbf{D}\}$. Por otra parte, en el flujo cortante el vector velocidad solo tiene una componente, i.e. las demás son cero por lo que las demás componentes son cero. En particular, en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) el vector velocidad toma la forma (Herrera-Valencia et al. 2016, 2017, 2019).

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z(r,t)) \quad (3.1)$$

En este caso, los tensores gradiente de velocidad, transpuesta del tensor gradiente de velocidad y de esfuerzo se escriben en la siguiente forma matricial (Herrera-Valencia et al. 2016, 2017, 2019):

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{\partial V_z}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \nabla \mathbf{V}^T = \frac{\partial V_z}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Los tensores rapidez de deformación y de esfuerzo toman la forma (Herrera-Valencia et al. 2016, 2017, 2019):

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \{\nabla\mathbf{V}\}^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

El tensor de esfuerzos para un flujo cortante de un líquido viscoelástico se puede escribir de la siguiente manera (Herrera-Valencia et al. 2016, 2017, 2019)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Es importante resaltar que la matriz del tensor de esfuerzos, definida en la Ec. (3.4) físicamente no da información de las fuerzas cortantes o extensionales que actúan sobre el volumen de control.

CAPÍTULO 4. MODELADO MATEMÁTICO

4.1 MODELO MATEMÁTICO

Cálculo de la permeabilidad dinámica de un fluido viscoelástico lineal mediante la transformada de Fourier.

- Líquido no-newtoniano viscoelástico
- Líquido incompresible: La densidad no depende de la posición ni del tiempo.
- Proceso en estado no estacionario: La velocidad y la presión dependen del tiempo, i.e. $V_z(r,t)$.
- El fluido se deforma continua e irreversiblemente, debido a un gradiente de presión pulsátil en la dirección axial.
- Los mecanismos gravitacionales se desprecian con respecto al gradiente de presión pulsátil y los mecanismos viscoelásticos lineales.
- Existe simetría angular $\theta \in [0, 2\pi]$
- El capilar ($a \ll L$) se encuentra en la posición vertical, por lo que los mecanismos gravitacionales son despreciables con respecto a los cambios espaciales de la presión y del esfuerzo cortante.

Suponiendo que, el fluido es incompresible, e isotérmico, simetría cilíndrica y flujo unidireccional,

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \tag{4.1}$$

4.2 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO CON MECANISMOS INERCIALES

La componente z de la ecuación de movimiento tomando en cuenta los mecanismos inerciales, toma la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (4.2)$$

El primer término del miembro izquierdo de la Ec. (4.2) representa la inercia del fluido o la aceleración instantánea en el sistema. El esfuerzo cortante σ_{rz} puede ser expresado en términos del producto de la función viscosidad y la rapidez de deformación:

$$\sigma_{rz} = O_\eta (D_t) \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (4.3)$$

En donde $O_\eta(D_t)$ es un operador viscosidad que generaliza a cualquier fluido Newtoniano o viscoelástico lineal. Es decir, este fluido, se aplica a materiales isotrópicos. En la siguiente tabla (Tabla 1) se presentan algunos de los modelos reológicos lineales más comunes empleados para describir fluidos viscoelásticos.

Tabla 1. Operador viscosidad para diferentes ecuaciones reológicas		
	$O_\eta(D_t)$	$O_\eta(i\omega)$
Newton	η_0	η_0
Maxwell	$\eta_0/1+\lambda_0 D_t$	$\eta_0/1+\lambda_0(i\omega)$
Jeffreys	$\eta_0(1+\lambda_J D_t)/1+\lambda_0 D_t$	$\eta_0(1+\lambda_J(i\omega))/1+\lambda_0(i\omega)$
Burgers	$\eta_0(1+\lambda_J D_t)/1+\lambda_0 D_t+\beta D^2 t$	$\eta_0(1+\lambda_J(i\omega)) / 1+\lambda_0(i\omega)+\beta(i\omega)^2$

Al combinar las Ecs. (4.2) y (4.3), se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r O_\eta (D_t) \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (4.4)$$

Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + O_\eta (D_t) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (4.5)$$

La Ec. (4.5) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\rho}{O_\eta (D_t)} \frac{\partial}{\partial t} \right\} V_z = \frac{1}{O_\eta (D_t)} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.6)$$

La Ec. (4.6) es diferencial lineal y describe las variaciones de la velocidad por efectos del espacio y tiempo. Aplicando el formalismo de Fourier, en las derivadas temporales de la Ec. (4.6)

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \rightarrow (i\omega)^k \quad (4.7)$$

Y para las funciones: (i) Velocidad axial $V_z = V_z (r, t)$, $p = p(t)$, $Q = Q(t)$. Además, el operador viscosidad en el espacio de Fourier, toma la forma:

$$O_\eta \left(D_t = \frac{\partial}{\partial t} \right) \rightarrow O_\eta (i\omega) \quad (4.8)$$

Por lo que al aplicar la ecuación diferencial lineal toma la forma

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \beta^2 (\omega) \right\} V_z (r, \omega) = O_\Phi (i\omega) \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (4.9)$$

Y el parámetro Beta, tiene la forma:

$$\beta^2 (\omega) = \frac{\rho}{O_\eta (i\omega)} i^3 \omega = \rho O_\Phi (i\omega) i^3 \omega \quad (4.10)$$

En la Ec. (4.10) se ha definido la fluidez compleja O_Φ como el inverso del operador viscosidad O_η

$$O_{\phi}(i\omega) = \frac{1}{O_{\eta}(i\omega)} \quad (4.11)$$

Las Ecs. (4.9-4.11) representan, el punto de partida para el cálculo de la velocidad axial V_z y el flujo volumétrico Q respectivamente.

4.3 PERFIL DE VELOCIDADES

Para resolver la Ec. (4.9), se propone que la solución general se puede descomponer en términos de una solución homogénea y particular.

$$V_z(r,\omega) = V_{z_H}(r,\omega) + V_{z_p}(r,\omega) \quad (4.12)$$

4.3.1 ECUACIÓN DIFERENCIAL HOMOGÉNEA

Solución de la ecuación diferencial homogénea, por lo que, se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \beta^2(\omega) \right\} V_z(r,\omega) = 0 \quad (4.13)$$

Desarrollando la velocidad en el espacio de Fourier, se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \beta^2(\omega) \right\} V_z(r,\omega) = 0 \quad (4.14)$$

Multiplicando por r^2 se tiene la ecuación diferencial del modelo de Bessel:

$$\left\{ r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + \beta^2(\omega) r^2 \right\} V_z(r,\omega) = 0 \quad (4.15)$$

La Ec. (4.15) es paramétrica de Bessel y para resolverla se propone el siguiente cambio de variable $z = \beta r$

$$\left\{ z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z \frac{\partial}{\partial z} + z^2 \right\} V_z(r, \omega) = 0 \quad (4.16)$$

La solución de la ecuación diferencial Ec. (4.16) está dada por la expresión:

$$V_z(z, \omega) = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) \quad (4.17)$$

En la Ec. (4.17) $\{J_0(z), Y_0(z)\}$ son las funciones de Bessel de orden cero de primera y segunda especie respectivamente.

4.3.2 SOLUCIÓN PARTICULAR

La solución particular para el problema de la Ec. (4.17) se puede expresar como:

$$V_{z_p}(r, \omega) = A; A \in \mathbb{R} \quad (4.18)$$

Al sustituir la Ec. (4.18) en la Ec. (4.16)

$$\beta^2(\omega) A = O_\phi(i\omega) \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (4.19)$$

Por lo que, la constante A se despeja y se tiene lo siguiente:

$$A = \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.20)$$

La solución general del perfil de velocidades de la Ec. (4.9) en términos de la coordenada radial r, se puede expresar como:

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.21)$$

4.3.3 CONDICIONES DE FRONTERA

La solución general (Ec. 4.21) contiene dos constantes de integración C_1 y C_2 , las cuales deben de determinarse a partir de las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{C.F.1: } r = 0; \quad |V_z(0, \omega)| \leq M \quad (4.22)$$

$$\text{C.F.2: } r = R; \quad V_z(a, \omega) = 0 \quad (4.23)$$

La primera de estas condiciones obedece a que la solución particular debe de permanecer acotada, i.e. que para ningún valor que tome la coordenada radial debe ser infinita. La segunda condición de frontera, se relaciona con la condición de no deslizamiento en la frontera (pared del tubo capilar). Al sustituir la primera C.F.1 en la ecuación diferencial, se tiene lo siguiente:

$$V_{z_{\max}} = V_z(r = 0, \omega) = C_1 J_0(\beta \cdot 0) + C_2 Y_0(\beta \cdot 0) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.24)$$

Simplificando la expresión se obtiene la siguiente expresión algebraica:

$$V_{z_{\max}} = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-\infty) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.25)$$

Simplificando la ecuación anterior, se tiene lo siguiente:

$$V_{z_{\max}} = C_2 \cdot (-\infty) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \cong C_2 \cdot (-\infty) \quad (4.26)$$

La última igualdad, demuestra que la velocidad en el centro del capilar, es infinita lo que carece de sentido físico. Para evitar esta inconsistencia física, la constante C_2 debe ser cero, i.e. $C_2 = 0$. Por lo que la solución general tiene la siguiente estructura:

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(\beta r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.27)$$

La segunda condición de frontera al sustituirla nos da la siguiente información física:

$$V_z(a, \omega) = C_1 J_0(\beta a) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.28)$$

De análisis de la primera condición de frontera se deduce que la constante C_2 es cero por lo que al despejar C_1 se tiene lo siguiente:

$$C_1(\omega) = -\frac{1}{J_0(\beta a)} \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.29)$$

Finalmente, la velocidad axial $V_z(r, \omega)$ tiene la siguiente forma:

$$V_z(r, \omega) = C_1(\omega) J_0(\beta r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.30)$$

Esta expresión nos permite obtener el perfil de velocidades en función de los parámetros materiales del líquido, la fuerza motriz que deforma continua e irreversiblemente el fluido asociado al gradiente de presión en la dirección axial. Nótese que, el perfil de velocidades está determinado por un cociente de funciones de Bessel, lo que podría inducir efectos resonantes en el sistema.

4.3.4 FLUJO VOLUMÉTRICO CON TRANSFORMADA DE FOURIER

La expresión para calcular el flujo volumétrico en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$, se puede expresar como la doble integral del producto interno del vector de velocidad y la diferencial de superficie. El vector velocidad solo tiene componente axial z y el vector unitario que describe la sección de área transversal es el vector unitario en la dirección z ,

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r, t) r dr d\theta = 2\pi \int_0^a V_z(r, t) r dr \quad (4.31)$$

Al tomar la transformada de Fourier del flujo volumétrico, se tiene lo siguientes:

$$Q(\omega) = F\{Q(t)\} = F\left\{2\pi \int_0^a V_Z(r,t) r dr\right\} \quad (4.32)$$

Por otra parte, suponiendo que la función es continua, el operador de Fourier se puede introducir en la doble integral por lo que se tiene lo siguiente:

$$F\left\{2\pi \int_0^a V_Z(r,t) r dr\right\} = 2\pi \int_0^a F\{V_Z(r,t)\} r dr = 2\pi \int_0^a V_Z(r,\omega) r dr \quad (4.33)$$

El flujo volumétrico transformado en el espacio de Fourier toma la forma:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^a V_Z(r,\omega) r dr \quad (4.34)$$

Al sustituir el perfil de velocidades en el flujo volumétrico, se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^a V_Z(r,\omega) r dr = 2\pi \int_0^a \left(C_1(\omega) J_0(\beta r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \right) r dr \quad (4.35)$$

Haciendo el cambio de variable,

$$Q(\omega) = 2\pi C_1(\omega) \int_0^a (J_0(\beta r)) r dr + 2\pi \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^a r dr \quad (4.36)$$

Definiendo las siguientes cantidades adimensionales: $u = r/a$; $\beta = \beta a$ como una longitud característica adimensional, la Ec. (4.36) se puede expresar como:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\beta^2} C_1(\omega) \int_0^\beta z J_0(z) dz + 2\pi a^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^1 u du \quad (4.37)$$

En donde $z = \beta r$. Para integrar las funciones de Bessel, se utiliza la siguiente propiedad matemática:

$$\frac{d}{dz}[zJ_1(z)] = zJ_0(z) \quad (4.38)$$

Al sustituir la Ec. (4.38), en la integral de la expresión del flujo volumétrico (Ec. 4.37), se tiene lo siguiente por lo que,

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\beta^2} C_1(\omega) \int_0^\beta \frac{d}{dz}[zJ_1(z)] dz + 2\pi a^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^1 u du \quad (4.39)$$

La Ec. (4.39), se puede simplificar a lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi R^2}{\beta^2} C_1(\omega) \int_0^\beta d[zJ_1(z)] + \pi R^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^1 du^2 \quad (4.40)$$

Finalmente, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = \pi a^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) + 2\pi a^2 C_1(\omega) \frac{J_1(\beta)}{\beta} \quad (4.41)$$

En donde la constante $C_1(\omega)$, dada por la Ec. (4.29) se sustituye en la Ec. (4.41), y se obtiene:

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^3}{4} \frac{8i^2 O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} a \right) \quad (4.42)$$

4.3.5 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA COMPLEJA

La Ec. (4.42) puede ser descrito en términos de la función de transferencia $T(\omega)$,

$$Q(\omega) = \frac{\pi a^3}{4} T(\omega) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} a \right) \quad (4.43)$$

En donde la función de transferencia $T(\omega)$, tiene la siguiente expresión analítica:

$$T(\omega) = 8i^2 \frac{\Phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(1 - 2 \frac{J_1(\beta(\omega))/\beta(\omega)}{J_0(\beta(\omega))} \right) \quad (4.44)$$

La función de transferencia $T(\omega)$,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} T(\omega) = 8i^2 \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left\{ 1 - 2 \frac{J_1(\beta(\omega))/\beta(\omega)}{J_0(\beta(\omega))} \right\} = 8i^2 \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(i^2 \frac{\beta^2}{88i^2} \right) = O_\Phi(i\omega) \quad (4.45)$$

4.3.6 PARÁMETRO BETA

4.3.7 FLUIDO NEWTONIANO

El parámetro adimensional β tiene la forma adimensional:

$$\beta(\omega) = a\sqrt{\beta(\omega)} \quad (4.46)$$

El parametro beta en forma adimensional tiene la siguiente forma:

$$\beta(\omega) = a\beta(\omega) = i^{3/2} \sqrt{\left(\frac{\rho a^2 \varphi c}{tc} \right)} O_\Phi(i\omega) \omega \quad (4.47)$$

En donde el operador fluidez fue escalado con la siguientes variables adimensionales:

$$O_\Phi(i\omega) = \frac{O_\Phi(i\omega)}{\varphi c}; \quad \omega = tc\omega \quad (4.48)$$

En donde la fluidez característica φc y la frecuencia característica ωc para un fluido newtoniano están dadas por las siguientes expresiones: (i) $\varphi c = 1/\mu$ y (ii) $tc = a^2/\mu = a^2/(\mu/\rho) = a^2/\nu$, en donde ν es el coeficiente de transferencia de momento. Por lo que el parámetro beta, para un fluido newtoniano este coeficiente se simplifica de la siguiente manera:

$$\beta(\omega) = i^{3/2} \sqrt{\omega} \quad (4.49)$$

4.3.7 FLUIDO NO-NEWTONIANO: MAXWELL

Para un fluido no-newtoniano viscoelástico lineal, la fluidez característica $\varphi_c = 1/\eta_0$ y el tiempo característico del sistema t_c es el tiempo unimodal de Maxwell, i.e. $t_c = \lambda_0$.

Por lo que el parámetro β tiene la forma:

$$\beta(\omega) = i^{3/2} \sqrt{De O_\phi} (i\omega) \omega \quad (4.50)$$

En la Eq. (4.50) De es el número de Deborah, el cual puede ser descrito como un cociente de tiempos característicos asociados a la inercial y viscoelasticidad del material.

$$De = \frac{\rho a^2 \varphi_c}{t_c} \quad (4.51)$$

4.4 CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PARA UNA CORONA CIRCULAR.

Para resolver el problema se asumen las siguientes condiciones de proceso en el sistema:

- Estado estacionario:
- Fluido incompresible
- Proceso isotérmico
- Flujo unidireccional
- Mecanismos gravitacionales despreciables
- El fluido es deformado por un gradiente de presión en la dirección axial.
- Simetría cilíndrica

Bajo las anteriores aseveraciones, obtenemos lo siguiente:

- El vector de velocidad es solo función de a la coordenada radial r
- El gradiente de presión es constante en la dirección z

- Existe un balance entre las fuerzas viscosas y el gradiente de presión.
- Por lo tanto, las siguientes ecuaciones se cumplen como en el caso de un a capilar inextensible, por lo que se tiene:

$$V_z(r,\omega) = C_1 J_0(r\alpha) + C_2 Y_0(r\alpha) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.52)$$

La Ec. (4.52) contiene dos constantes de integración $\{C_1, C_2\}$, por lo que estas deben ser calculadas mediante dos condiciones de frontera.

C.F.1.: La velocidad axial en la frontera del tubo es cero, i.e., $V_z(r = R_2) = 0$.

C.F.2.: La velocidad axial en el centro del tubo es máxima, i.e., $V_z(r = R_1) = 0$.

Aplicando las condiciones de frontera, en la Ec. (4.52) se tiene lo siguiente:

$$V_z(R_2,\omega) = C_1 J_0(R_2\alpha) + C_2 Y_0(R_2\alpha) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.53)$$

Y para la segunda constante de integración, se tiene lo siguiente:

$$V_z(R_1,\omega) = C_1 J_0(R_1\alpha) + C_2 Y_0(R_1\alpha) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.54)$$

$$C_1 J_0(R_2\alpha) + C_2 Y_0(R_2\alpha) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.55)$$

Y para la segunda constante de integración, se tiene lo siguiente:

$$C_1 J_0(R_1\alpha) + C_2 Y_0(R_1\alpha) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.56)$$

Las Ecs. (4.55) y (4.56) pueden ser rescritas de la siguiente forma:

$$C_1 J_0(\beta) + C_2 Y_0(\beta) + R_2^2 \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.57)$$

Y para la segunda constante de integración, se tiene lo siguiente:

$$C_1 J_0(R\beta) + C_2 Y_0(R\beta) + R_2^2 \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.58)$$

En donde $R = R_1/R_2$. Al resolver el sistema de ecuaciones algebraicas, podemos obtener las constantes C_1 y C_2 . Al restar las Ecs. (4.57) y (4.58), se obtiene la constante C_1 en terminos C_2

$$C_1 = -C_2 \frac{Y_0(\beta) - Y_0(R\beta)}{J_0(\beta) - J_0(R\beta)} \quad (4.59)$$

Al despejar C_2 de la Ec. (4.58)

$$C_2 = -C_1 \frac{J_0(R\beta)}{Y_0(R\beta)} - \frac{1}{Y_0(R\beta)} \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \quad (4.60)$$

Al combinar las Ecs. (4.59) y (4.60)

$$C_2 = C_4 \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \quad (4.61)$$

En donde C_4 , esta definida como

$$C_4 = \frac{J_0(R\beta) - J_0(\beta)}{J_0(\beta) Y_0(R\beta) - Y_0(\beta) J_0(R\beta)} \quad (4.62)$$

De la Ecs. (4.59) y (4.60), se tiene:

$$C_1 = C_3 \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \quad (4.63)$$

Entonces C_3 , se define como:

$$C_3 = \frac{Y_0(\beta) - Y_0(R\beta)}{J_0(\beta)Y_0(R\beta) - Y_0(\beta)J_0(R\beta)} \quad (4.64)$$

Por lo que el perfil de velocidades puede ser reescalado de la siguiente manera.

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(r\beta) + C_2 Y_0(r\beta) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \quad (4.65)$$

4.4.1 FLUJO VOLUMETRICO EN UNA CORONA CIRCULAR EN EL ESPACIO DE FOURIER

El flujo volumétrico transformado en el espacio de Fourier toma la forma:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} V_z(r, \omega) r dr \quad (4.66)$$

Al sustituir el perfil de velocidades en el flujo volumétrico, se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left(C_1 J_0(r\beta) + C_2 Y_0(r\beta) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \right) r dr \quad (4.67)$$

Escalando la Ec. (4.67) con la longitud característica radial R_2 , se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = 2\pi R_2^2 \int_R^1 \left(C_1 J_0(r\beta) + C_2 Y_0(r\beta) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \right) r dr \quad (4.68)$$

Aplicando linealidad a la Ec. (4.68), se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = 2\pi C_1 R_2^2 \int_R^1 J_0(r\beta) r dr + 2\pi C_2 R_2^2 \int_R^1 Y_0(r\beta) r dr + 2\pi R_2^2 \int_R^1 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 r dr \quad (4.69)$$

Escalando de nueva cuenta, la Ec. (4.69) toma la forma:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi C_1}{\beta^2} \int_{R\beta}^\beta J_0(r\beta) \beta r d\beta + \frac{2\pi C_2}{\beta^2} \int_{R\beta}^\beta Y_0(r\beta) \beta r d\beta + 2\pi \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \int_R^1 r dr \quad (4.70)$$

Finalmente, el flujo volumétrico puede ser descrito como:

$$Q(\omega) = \frac{\pi O_\phi(i\omega) R_2^2}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \left\{ 1 - R^2 + \frac{2}{\beta} C_3 [J_0(\beta) - J_0 R(R\beta)] + \frac{2}{\beta} C_4 [Y_0(\beta) - R Y_0(R\beta)] \right\} \quad (4.71)$$

La Ec. (4.71) se puede escribir de la siguiente manera:

$$Q(\omega) = \frac{1}{4} R_2^3 \phi_0 T(i\omega) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} R_2 \right) \quad (4.72)$$

En donde se definió la función de transferencia compleja como $T(i\omega)$

$$T(i\omega) = \frac{T(i\omega)}{\phi_0} = i^2 \frac{8 O_\phi(i\omega)}{\phi_0 \beta^2} \left\{ 1 - R^2 + \frac{2\pi}{\beta} C_3 [J_0(\beta) - J_0 R(R\beta)] + \frac{2\pi}{\beta} C_4 [Y_0(\beta) - R Y_0(R\beta)] \right\} \quad (4.73a)$$

En la función de transferencia (4.73), se escalo el parametro Beta con R_2 , por lo que se tiene lo siguiente:

$$\beta(\omega) = i^{3/2} \sqrt{\left(\frac{\rho R_2^2 \phi_0}{\lambda_0} \right) O_\phi(i\omega)} \omega = i^{3/2} De \sqrt{\omega \cdot O_\phi(i\omega)} \quad (4.73b)$$

Y el Debra se puede expresar como:

$$De = \frac{\rho R_2^2 \phi_0}{\lambda_0} \quad (4.73c)$$

Si suponemos que, el gradiente de presión se puede expresar en terminos de una función exponencial compleja, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} = \frac{\partial p_0}{\partial z} \delta(\omega - \omega_0) \quad (4.74)$$

Al sustituir la Ec. (4.74) en la Ec. (4.72), se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{1}{4} R_2^3 \phi_0 T(i\omega) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} R_2 \right) = \frac{1}{4} R_2^3 \phi_0 T(i\omega) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} \delta(\omega - \omega_0) R_2 \right) \quad (4.75)$$

Reordenando la Ec. (4.75), tenemos la siguiente expresion:

$$Q(\omega) = Q_N T(i\omega) \delta(\omega - \omega_0) \quad (4.76)$$

En donde el flujo volumétrico, tiene la siguiente expresión analítica:

$$Q_N = \frac{1}{4} R_2^3 \phi_0 \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} R_2 \right) \quad (4.77)$$

Fisicamente, la Ec. (4.77) puede interpretarse como que el flujo volumétrico de un fluido viscoelástico, se puede expresar como el producto de una amplitud asociada al fluido newtoniano, la función de transferencia, y finalmente la función delta de Dirac.

Al antitransformar la Ec. (4.76) al espacio del tiempo, se tiene la siguiente expresion en terminos de la variable temporal t, es decir:

$$Q(\omega_0, t) = Q_N T(i\omega_0) \text{Exp}(i\omega_0 t) \quad (4.78)$$

Finalmente la Ec. (4.78) representa la mayor contribución de este trabajo de licenciatura y se resume que el flujo volumetrico de un fluido no-newtoniano (viscoelastico lineal) se define como el producto entre las siguientes cantidades físicas:

- a) El flujo volumétrico de Newton
- b) La función de transferencia compleja que depende de las funciones especiales de Bessel de primera y segunda especie, de la relacion geometrica R y de la información reológica a través del parámetro β .
- c) El parámetro β se puede interpretar como un vector de longitud de onda y depende de la información fisica a través de los números adimensionales: (i) Womersley y

(ii) Deborah, y del operador fluidez que nos permite generalizar esta expresión para cualquier fluido viscoelástico lineal o fraccionario.

d) La Ec. (4.78) se puede utilizar en otros contextos de la física, como por ejemplo las células ciliadas externas del oído, que solo los amplificadores del oído humano. En general la variable A , que depende de la frecuencia ω_0 , el tiempo t , la amplitud A_m , función de transferencia compleja y la función exponencial $\text{Exp}(i\omega_0 t)$

$$A(\omega_0, t) = A_m \cdot T(i\omega_0) \cdot \text{Exp}(i\omega_0 t) \quad (4.79)$$

CAPÍTULO 5. SIMULACIONES Y MODELADO MATEMÁTICO

5. 1 RESULTADOS

5.1 MODELO DE NEWTON

5.1.1. CAPILAR

En esta sección, se analiza el aumento en la fluidez a través de datos reométricos de sangre con hipercolesterolemia (alto contenido en colesterol). Los datos y protocolos experimentales fueron realizados bajo estrictos criterios de higiene y seguridad los cuales fueron descritos a detalle por Moreno et al. (2015) y empleados en esquemas perturbativos y analíticos (Herrera-Valencia et al. 2017, 2019). A partir de pruebas experimentales reométricas en estado estacionario y no estacionario, se obtienen los siguientes valores numéricos para el módulo de corte G_0 . Los datos obtenidos fueron de pacientes que presentaban trastornos alimenticios con el contenido de colesterol en la sangre.

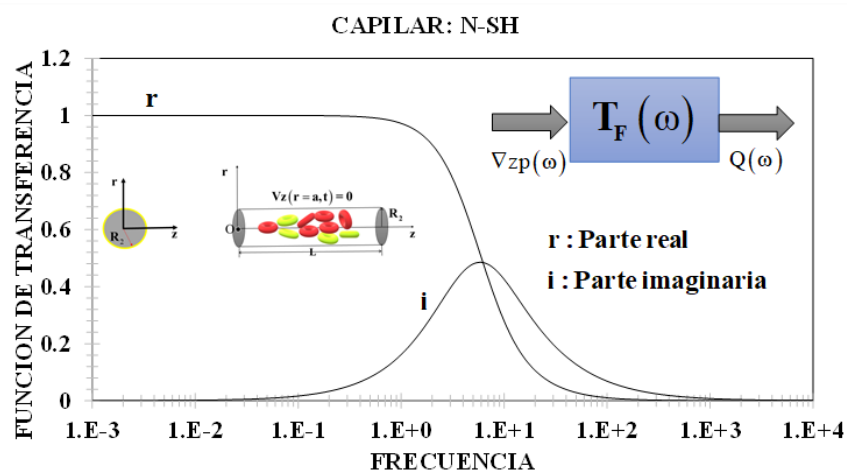


Figura 4. Capilar fluido newtoniano

Figura 4. Ilustra la función de transferencia real y compleja en función de la frecuencia en el caso del fluido newtoniano. La geometría que se analiza corresponde a una oclusión periférica (Fluido Newtoniano).

Matemáticamente, la parte real de la función de transferencia compleja (RFTC) se muestra en la Fig. (1) (Roja). En la ventana de observación de frecuencias bajas (0.01, 1), la RFTC, RM es constante e independiente de la frecuencia. A una frecuencia crítica ($\omega < 1$), la respuesta real dinámica del sistema se comporta de una forma monótona decreciente, en donde geoméricamente la derivada es negativa. A otra frecuencia crítica (altas frecuencias) la respuesta es asintótica y tiende a cero conforme la frecuencia aumenta.

La parte imaginaria de la función de transferencia compleja (IFTC) se observa de color negro en la Fig. (1). A frecuencias bajas (0.01, 0.1) observamos un comportamiento independiente de la frecuencia como en el caso real de la FTC. A una frecuencia crítica, el dispositivo muestra monótona creciente en donde la derivada de la IFTC con respecto a la frecuencia es positiva. A un valor de la frecuencia, se observa un máximo global en donde la pendiente es cero. Nótese que, para valores mayores al punto crítico, la curva es simétrica, i.e., se observa una clásica curva resonante asociada a el efecto de la parte imaginaria de la FTC (Bird et al. 1977).

Físicamente, se observa en la parte real un comportamiento de relajación asociado a que el sistema llega de estado de menor a mayor frecuencia por efecto del gradiente de presión pulsátil. Mientras que, la parte imaginaria está asociada a la disipación.

Biológicamente, la anchura y el máximo están asociados a proceso biológicos, en este punto se necesita más información.

5.1.2 CORONA CIRCULAR

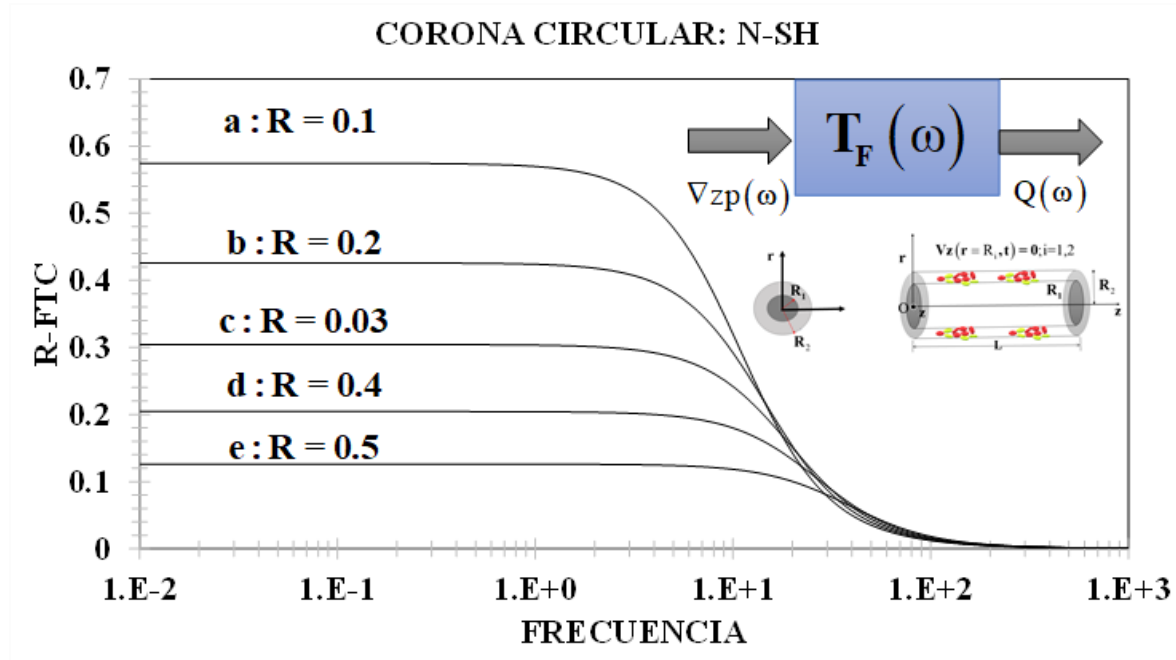


Figura 5. Corona circular fluido N, R variable, parte Re.

Figura 5. Ilustra la función de transferencia real y compleja en función de la frecuencia en el caso del fluido newtoniano. La geometría que se analiza corresponde a una oclusión periférica (Fluido Newtoniano).

En la Fig. (5) se ilustra la parte RFTC vs frecuencia en función del radio adimensional, $0 < R = R_1/R_2 < 1$. En este caso, este sistema simula una oclusión central en la cual existe un objeto suspendido en el seno del fluido Newtoniano, el cual reduce la geometría y se puede aproximar como dos cilindros concéntricos (corona circular). En la Fig. (5) cada simulación representa una obstrucción en el sistema. El color azul claro menos obstruido y la azul oscuro más obstruido.

De la misma manera que en la Fig. (4), matemáticamente se observa una zona constante o meseta independiente de la frecuencia (0.01, 10). Posteriormente, existe un valor crítico de la frecuencia para el cual la respuesta es monótonico decreciente (pendiente negativa

o la derivada de la RFTC es negativa), en el intervalo (10, 100) hasta un segundo valor crítico en la frecuencia. Finalmente, el valor tiende asintóticamente a cero. Nótese, que: (i) las curvas son similares y (i) que el efecto geométrico a través de R es el de desfase las curvas a menores valores de la meseta que se observa a valores bajos en la frecuencia.

Físicamente, existe una respuesta con la frecuencia en la venta de observación de frecuencias moderadas.

Biológicamente, en esta simulación no se observan las clásicas curvas resonantes que se presentan en otro sistema y solo se tiene una respuesta dinámica en las frecuencias moderadas. Se analizará la parte imaginaria para ver la resonancia, el máximo y la anchura del sistema.

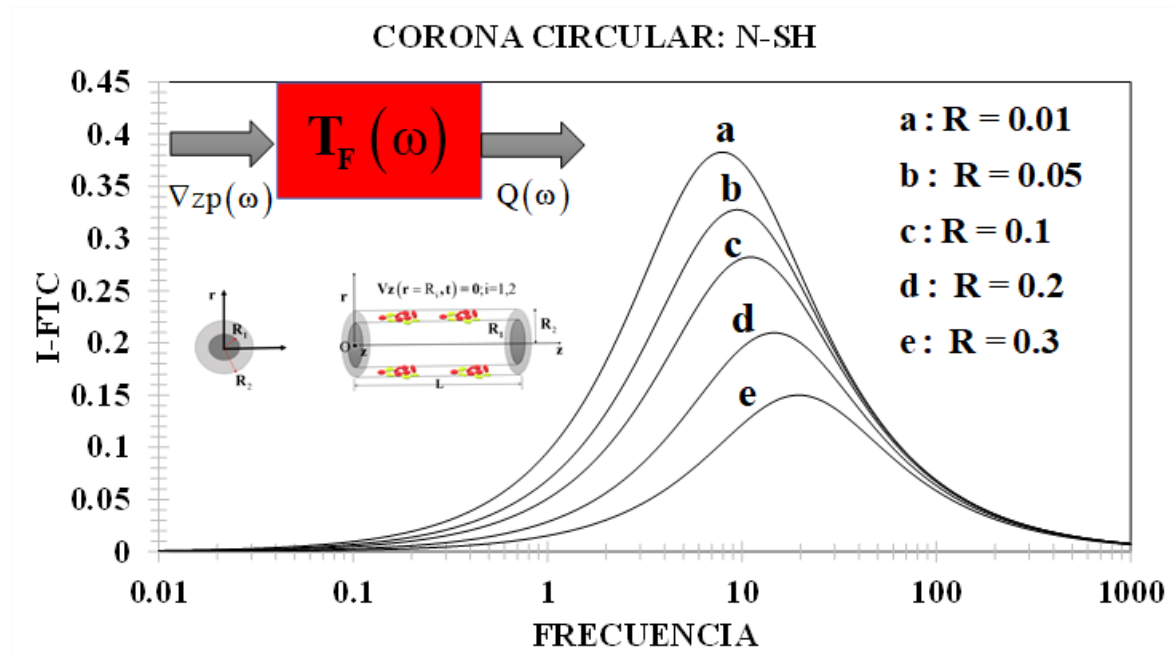


Figura 6. Corona circular fluido N , R variable, parte Im

Figura 6. Ilustra la función de transferencia real y compleja en función de la frecuencia en el caso del fluido newtoniano. La geometría que se analiza corresponde a una oclusión periférica (Fluido Newtoniano).

En la Fig. (6) se ilustra la parte IFTC vs frecuencia en función del radio adimensional, $0 < R = R_1/R_2 < 1$. En este caso, este sistema simula una oclusión central en la cual existe un objeto suspendido en el seno del fluido Newtoniano, el cual reduce la geometría y se puede aproximar como dos cilindros concéntricos (corona circular). En la Fig. (6) cada simulación representa una obstrucción en el sistema. El color azul claro menos obstruido y la azul oscuro más obstruido.

De la misma manera que en la Fig. (1) de la parte IFTC, a frecuencias bajas (0.01, 0.1) observamos un comportamiento independiente de la frecuencia como en el caso real de la FTC. A una frecuencia crítica, el dispositivo muestra comportamiento monótono creciente en donde la derivada de la IFTC con respecto a la frecuencia es positiva. A un valor de la frecuencia, se observa un máximo global en donde la pendiente es cero. Nótese que, para valores mayores al punto crítico, la curva es simétrica, i.e., se observa una clásica curva resonante asociada a el efecto de la parte imaginaria de la FTC (Bird et al. 1977). Curva con menos obstrucción negra tiene la máxima respuesta resonante, curva azul con mayor obstrucción la frecuencia está en función de la geometría, hay un desfase.

Físicamente la parte imaginaria está asociada a la disipación.

Biológicamente, la anchura y el máximo están asociados a proceso biológicos, en este punto se necesita más información.

5.2 MODELO DE MAXWELL

5.2.1 CAPILAR (OCLUSIÓN CENTRAL)

En las Figs. (5) y (6) se presentan las simulaciones real e imaginaria de la función de transferencia real e imaginaria a diferentes valores del número de Deborah el cual, es una manifestación de los mecanismos viscoelásticos en el sistema. Se observa que el sistema despliega varios picos resonantes, y el mayor esta relacionado con el tiempo característicos de Maxwell. Las resonancias secundarias pueden estar asociadas al cociente de funciones de Bessel. Cuando el número de Deborah es pequeño, el sistema corresponde a un fluido débilmente elástico el cual se comportaría como Newtoniano. Cuando el sistema incrementa la elasticidad, este presenta curvas resonantes y una claramente dominante asociada a los mecanismos inerciales y viscoelásticos. Estas resonancias son un efecto del almacenamiento de energía asociado a la elasticidad del sistema. En esta grafica se supone que cualesquiera otras interacciones elásticas son despreciables. En la Fig. (5) se observa la parte imaginaria de la función de transferencia compleja. Los mismos valores para la simulación de la Fig. (4) fueron ocupados en la Fig. (5). Es claro que el sistema presenta graficas resonantes y anti-resonantes y que la transición entre una y otra se debe principalmente a una discontinuidad en el sistema. Estas curvas son conocidas como dientes de sierra las cuales se presentan en sistemas en donde existe disipación entre los elementos que los constituyen, ejemplo de esto serían los circuitos eléctricos. Como en la Fig. (4) se observa varias curvas secundarias asociadas a los mecanismos elásticos. La diferencia entre un fluido Newtoniano y uno de Maxwell es la energía de almacenamiento. Los sistemas Newtonianos solo disipan la energía

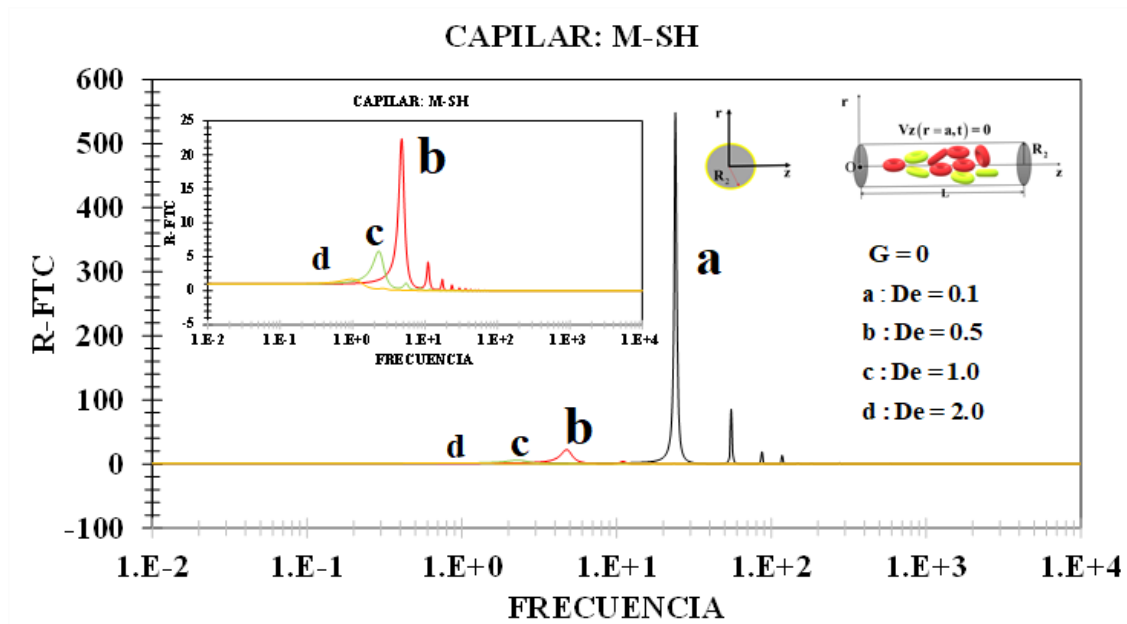


Figura 7. Capilar fluido de Maxwell, $G=0$, De variable parte Re

Figura 7. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia en el caso del fluido de Maxwell. La geometría que se analiza correspondería a una oclusión periférica.

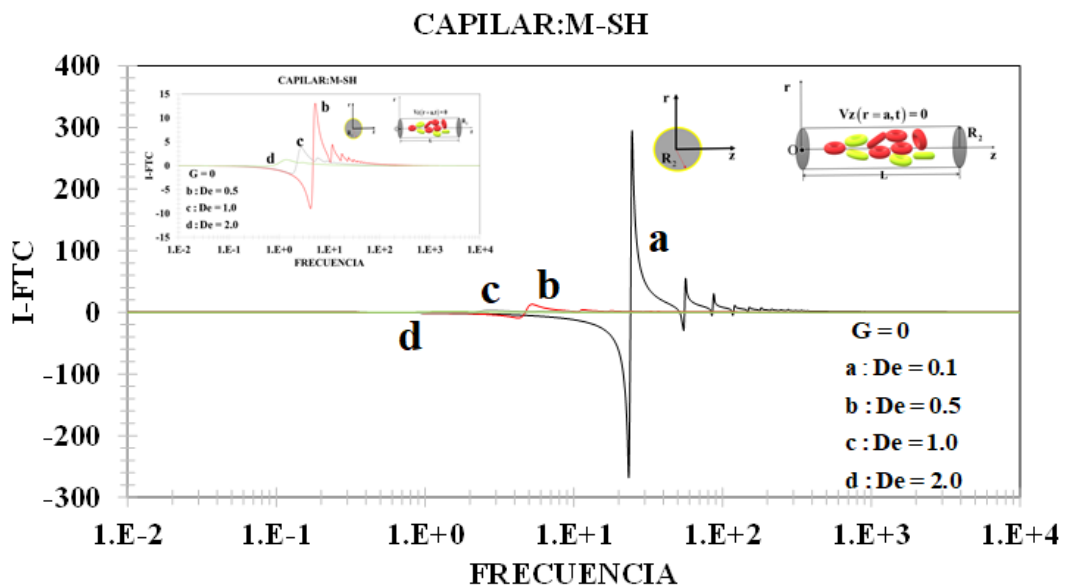


Figura 8. Capilar fluido de Maxwell, $G=0$, De variable parte Im

Figura 5. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia en el caso del fluido de Maxwell. La geometría que se analiza correspondería a una oclusión periférica.

5.2.1 CORONA CIRCULAR (TUBOS CONCÉNTRICOS)

En las Figs. (7) y (8) se ilustra la parte real e imaginaria de la función de transferencia compleja en una corona circular, que se puede expresar como dos cilindros concéntricos de radio $r = R_1$ y $r = R_2$ y longitud $z = L$.

Es claro que el comportamiento lineal entre la variable el gradiente de presión y el flujo volumétrico despliegan las mismas curvas resonantes que el capilar tanto en la parte real e imaginaria.

La única diferencia notable es el efecto del radio reducido. Esta variable tiene los siguientes puntos notables:

El menor valor de $R = 0.1$ presenta la mayor y menor resonancia y anti resonancia en el sistema.

Estas curvas resonantes y anti resonantes matemáticamente están asociadas a una discontinuidad de salto del sistema.

Cuando el factor reducido R se incrementa las curvas se desfasan hacia valores mayores en la frecuencia.

Este sistema sencillo puede estar relacionado biológicamente con una oclusión central en donde existe un obstáculo en una vena la cual, se presenta por materia o tejido muerto.

En la Fig. (8) se observa la parte imaginaria de la función de transferencia compleja en función del parámetro reducido R . Es claro que, al disminuir el área de sección transversal, la respuesta resonante disminuye.

Biológicamente: la oclusión central disminuye considerablemente la respuesta en el sistema y energéticamente el sistema necesita una mayor frecuencia en el régimen de viscoelasticidad lineal

En el régimen de viscoelasticidad no lineal el flujo pulsátil induce una mayor respuesta por lo que, se necesita un mayor gradiente de presión para obtener un aumento en el flujo volumétrico.

El efecto del número de Deborah es modificar los efectos viscoelásticos del material. Cuando el Deborah tiende a cero, se recupera el fluido Newtoniano.

A valores del número de Deborah diferentes de cero, el sistema presenta varias curvas resonantes asociadas a los mecanismos viscoelásticos del material.

Es claro que, en las simulaciones presentadas, los mecanismos inerciales, viscoelásticos del material juegan un papel muy importante en la reología del sistema, y determina las propiedades de:

- El máximo en la resonancia
- La anchura del de las curvas resonantes
- La frecuencia resonante que esta determinada por los tiempos característicos en el sistema, por ejemplo, el tiempo característico de Maxwell.

Este tipo de dispositivo se utiliza en la detección de los tiempos característicos del material debido a que, cuando la frecuencia coincide con la frecuencia natural del sistema, el sistema presenta la máxima respuesta

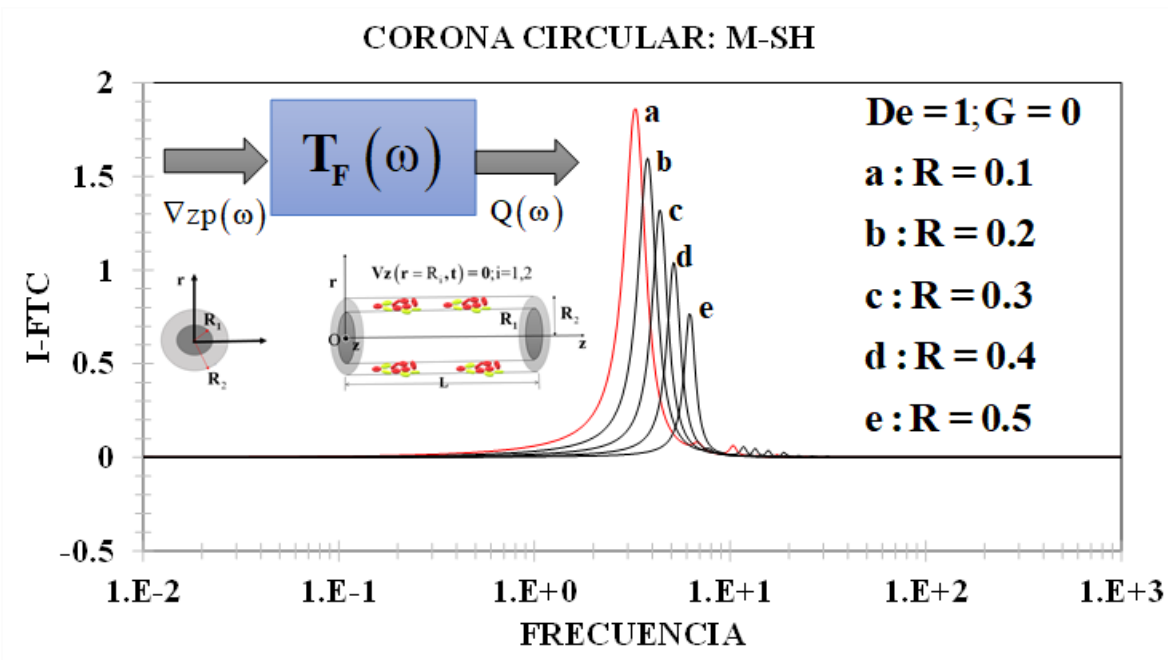


Figura 9. Corona circular fluido de Maxwell, $De=1$, $G=0$, R variable

Figura 9. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia en el caso del fluido de Maxwell. La geometría que se analiza correspondería a una oclusión central (Fluido de Maxwell).

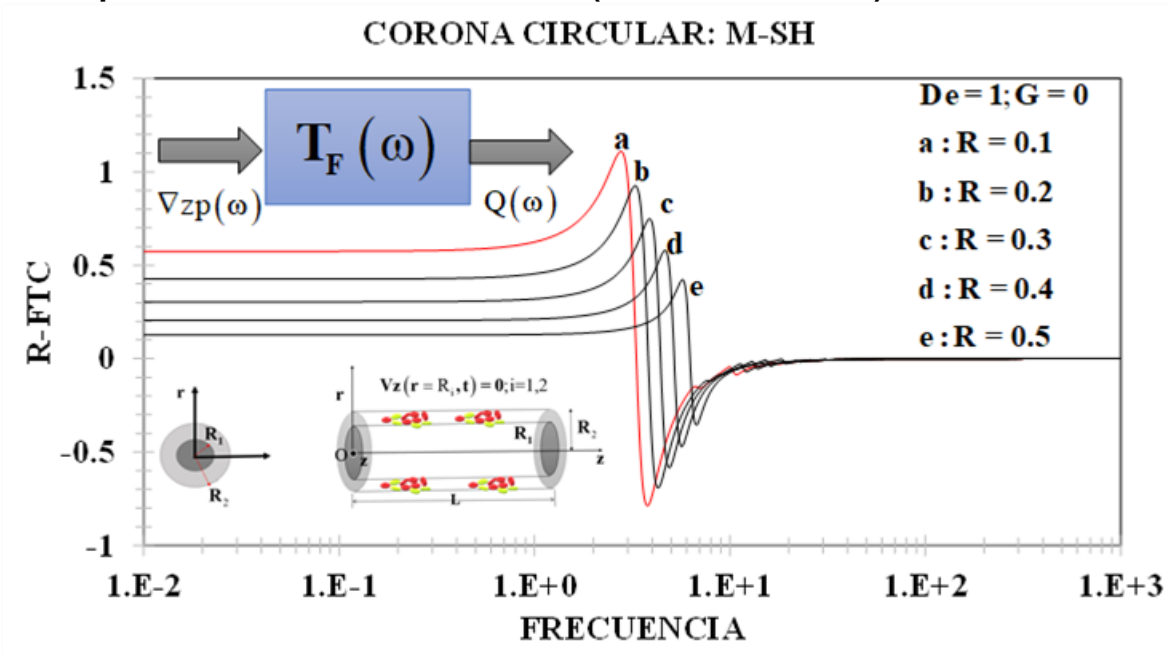


Figura 10. Corona circular fluido de Maxwell, $De=1$, $G=0$, R variable.

Figura 10. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia en el caso del fluido de Maxwell. La geometría que se analiza correspondería a una oclusión central (Fluido de Maxwell).

5.3 APLICACIÓN: SANGRE HUMANA CON COLESTEROL BAJO

En esta sección se presenta una aplicación a sangre humana con contenido de colesterol bajo. Los datos de sangre fueron obtenidos de pacientes con contenido de colesterol bajo medio y alto. Los datos que ajustaron al modelo de Maxwell multimodal, son los pacientes de colesterol bajo, es decir aquellos con no presentaron hipercolesterolemia. Es claro de las Figs. (9) y (10) que la respuesta que tiene la parte real y la parte imaginaria tiene el mismo comportamiento que lo descrito en esta teoría. La parte real, induce un máximo que es descrito íntegramente por el tiempo dominante de Maxwell, es decir el tiempo de cruce en un diagrama de flujo oscilatorio a baja amplitud entre (G' y G'' vs ω). La frecuencia de cruce $G'(\omega) = G''(\omega)$ se da en la frecuencia resonante, i.e. $\omega = 1/\lambda_0$. Cuando se tiene un espectro de tiempos característicos, se considera el tiempo de cruce, es decir el tiempo reométrico, el tiempo experimental o el tiempo medible. Los otros tiempos de ajuste, determinan la ventana del flujo oscilatorio es decir la ventana en donde se disipan las resonancias en la parte real imaginaria.

En esta sección discutimos las bondades del modelo desarrollado en este trabajo por lo que se demostró que, puede ser utilizado para detectar las frecuencias naturales de sistemas biológicos.

Este sistema puede ser utilizado para extrapolarlos a otros tipos de fluidos cambiando la ecuación constitutiva a través del operador fluidez, descrito por la Tabla 1.

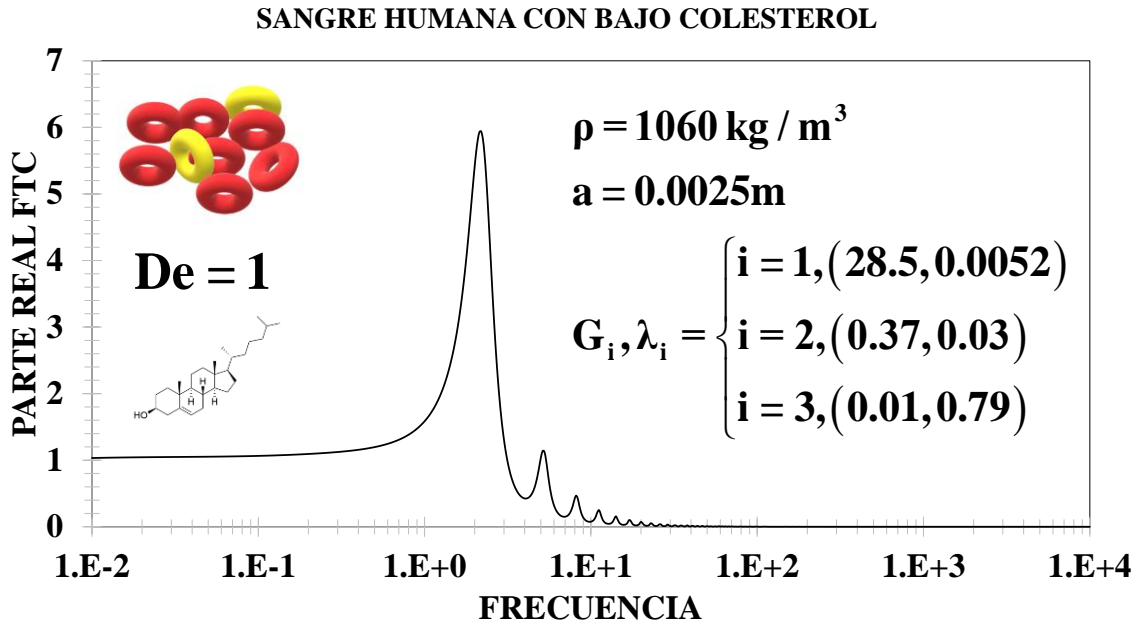


Figura 11. Fluido de Maxwell bajo colesterol parte real

Figura 11. Ilustra la parte real de la unción de transferencia compleja para el modelo multimodal de Maxwell para sangre humana con bajo colesterol.

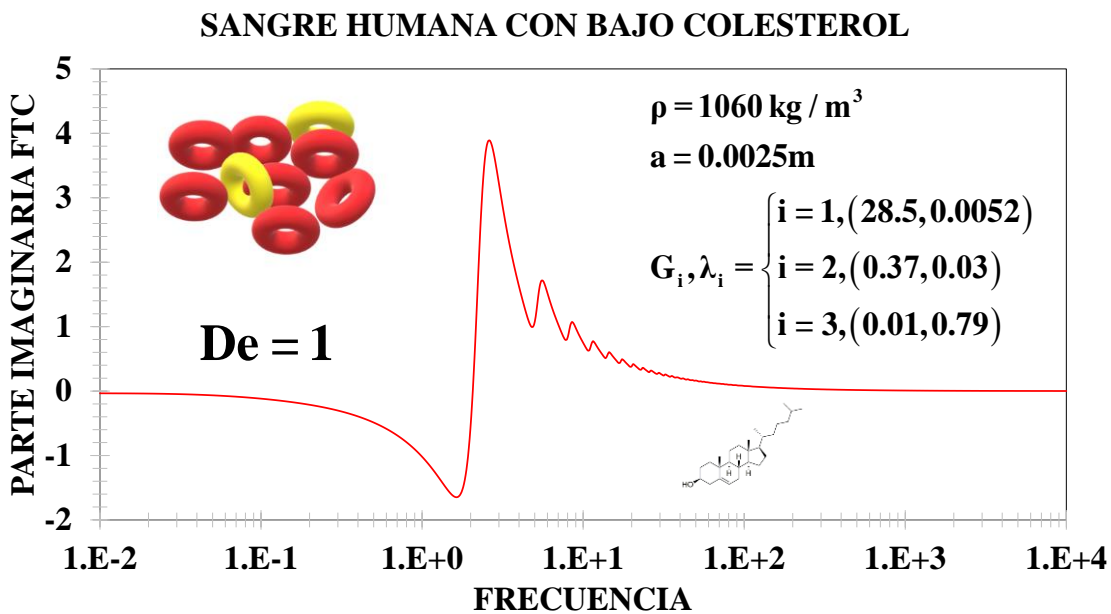


Figura 12. Fluido de Maxwell bajo colesterol parte imaginaria

Figura 12. Ilustra la parte imaginaria de la unción de transferencia compleja para el modelo multimodal de Maxwell para sangre humana con bajo colesterol.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

6.1 CONTRIBUCION AL CONOCIMIENTO

En el caso newtoniano se observa que la parte real describe una función de relajación en donde hay dos mesetas y una zona de transición tipo ley de potencia. En el caso imaginario, se observa una curva resonante la cual se observa en los sistemas de estudio de la mecánica clásica en donde se tiene un sistema físico que está vibrando (oscilador armónico simple). Este tipo de campanas resonantes son punto de partida para el estudio de sistemas que se someten a campo eléctricos y magnéticos, por ejemplo: (i) la resonancia magnética nuclear, (ii) los movimientos geofísicos asociados a los temblores en donde las capas tectónicas se mueven y al contacto existen fuerzas de fricción las cuales liberan energía y con los gases combinados que salen del subsuelo hay una reacción y se producen luces de color azul (tribología).

Por otra parte, cuando se toma la elasticidad del fluido por efecto de la interacción de la estructura se tiene un comportamiento completamente diferente. Un ejemplo de esto sería la sangre humana con colesterol tomando en cuenta la parte elástica del hematocrito. Las simulaciones de la parte real de la Función de Transferencia Compleja demuestran, que al incluir la parte elástica se obtienen varias curvas resonantes y que el máximo y la anchura de éstas son función de la elasticidad del hematocrito. Otro hecho importante es que, al incluir la elasticidad del hematocrito, la máxima energía resonante se desplaza a mayores frecuencias.

La parte imaginaria de la Función de Transferencia Compleja muestra un comportamiento anti resonante y resonante por lo que, existe una zona de transición de menos a mayor energía por efecto de la frecuencia. Es importante destacar que el

mínimo y el máximo anti resonante está determinado por un acoplamiento con la parte elástica y los mecanismos inerciales.

En el caso de un fluido viscoelástico la dinámica cambia significativamente. Se observa que existe una resonancia dominante seguida de varias resonancias secundarias. El primer hecho importante es que el máximo y la anchura de la curva resonante dominante depende de los mecanismos inerciales y viscoelásticos a través del número de Deborah el cual, es un cociente de tiempos característicos asociados a la inercia y la viscoelasticidad del material. En la parte imaginaria, se observa el clásico comportamiento tipo diente de sierra, es decir, se observan funciones oscilantes y discontinuas para ciertos valores de la frecuencia. Desde un punto de vista biológico, las subresonancias pueden estar relacionadas a procesos biológicos asociados a la amplificación de la información acústica (células ciliadas del oído interno humano) o al bombeo dinámico de sangre con hipercolesterolemia.

En el caso de un fluido de Maxwell con elasticidad del hematocrito, se observa que la parte real de la Función de Transferencia Compleja aumenta las resonancias del sistema por efecto de los mecanismos elásticos del material. Desde un punto de vista físico, al incluir un valor de elasticidad del hematocrito las curvas resonantes disminuyen el máximo y su anchura. Lo que significaría que la elasticidad del hematocrito en un fluido viscoelástico juega un papel negativo en el aumento del flujo debido, a que el sistema entre mayor sea la relación entre el gradiente de presión pulsátil y el flujo volumétrico, tendría una implicación física significativa. Mientras que, una mínima relación tendría un efecto negativo en el aumento de flujo.

Por otra parte, la parte imaginaria de la función de transferencia muestra un comportamiento similar que en el caso del modelo de Maxwell. Sin embargo, es claro, que las curvas tipo diente de sierra y las discontinuidades aumentan. En conclusión, el efecto elástico asociado al hematocrito tiene una importancia relevante en este trabajo debido a que nos da información acerca de la resonancia en el sistema, que es un parámetro clave para estos sistemas dinámicos. La combinación de la viscosidad con la viscoelasticidad del fluido y de los cúmulos de partículas a través de los mecanismos elásticos modifican drásticamente la descripción de los fenómenos de transporte y de la reología lineal del sistema. Finalmente, la contribución de este trabajo es presentar una metodología general e incluir la parte elástica del hematocrito que se observa a bajas rapidezces de deformación.

6.2 TRABAJO FUTURO

En este trabajo se analizó el flujo pulsátil en el régimen de viscoelasticidad lineal, es decir, fluidos que poseen las dos propiedades, viscosas (disipativas) y elásticas (almacenamiento de energía). Una continuación natural del mismo sería extenderlo al régimen no lineal de rapidezces de deformación. Otro hecho importante es analizar la Función de Transferencia asociado a la interacción entre el sólido (pared del capilar) y el fluido a través de la Función de Transferencia asociada al esfuerzo. Otra continuación natura de este trabajo sería acoplar la transferencia de movimiento con ecuaciones de masa. Finalmente, la parte experimental es un pilar para contrastar estos resultados teóricos y los de laboratorio. Por último, este trabajo representa un esfuerzo constante y permanente en la búsqueda de conocimiento basado en fenómenos de transporte y

reología como herramientas fundamentales en la descripción de nuevos sistemas y materiales.

BIBLIOGRAFÍA

- Bird, R.B., Armstrong, R.C., Hassager, O. (1987) Dynamics of polymeric liquids, vol. 1. New York: John Wiley & Sons.
- Bird, R.B., Stewart E., Lighfoot, E.N. (2002) Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.
- Cuevas, S., Del Rio, J.A. (2001) Dynamical permeability of electrically conducting fluids under magnetic fields in annular ducts. Phys. Rev. E. 64, 016313/1-7.
- Currie, I.G. (1974) Fundamental Mechanics of Fluids, McGraw-Hill Press.
- Collepardo-Guevara, R., Corvera-Poiré, E. (2007) Controlling viscoelastic flow tuning frequency during occlusions, Physical Review E, 76, 02630.
- Castro, M., Bravo-Gutierrez, M.E., Hernandez-Machado, A., Corvera-Poiré, E. (2008) Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannels. Physical Review Letters, 101, 224501.
- Del Rio J.A., Castrejón-Pita J.R. (2002) Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos. Rev. Mex. Fis. 49 (1) 74-85.
- Del Rio J.A., De Haro, M.L., Castrejón-Pita J.R. (1998) Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. Phys. Rev. E. 58 (5) 6323.
- Flores, J., Alastruey, J., Corvera-Poiré, E. (2016) A novel analytical approach to pulsatile blood flow in the arterial network, Annals of Biomedical Engineering, 44, 3047-3068.
- Herrera-Valencia E.E., Rey, A.D. (2014) Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. Phil. Trans. R. Soc. A. 372: 20130369/1-28.
- Herrera-Valencia, E.E., Calderas, F., Medina-Torres, L., Pérez-Camacho, M., Moreno L., Manero, O. (2017) On the pulsating flow behaviour of a biological fluid: human blood. Rheologica Acta, 56(4), 387-407.

- Herrera-Valencia, E.E., Calderas, F., Sanchez-Villavicencio, M.L., Perez-Camacho, M., Medina-Torres, L. (2016) Simultaneous pulsatile flow and oscillating wall of non-Newtonian liquid. *Korea-Aust. Rheol. J.*, 28, 281.
- Herrera-Valencia, E.E., Sánchez-Villavicencio, M.L., Medina-Torres, L., Nuñez-Ramirez, D.M., Hernandez-Abad, V.J., Calderas, F., Manero, O. (2019) New Simple analytical method for flow enhancement predictions of pulsatile flow of a structured fluid. *Phys. Fluids* 31, 063104, 1-17.
- Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E., Manero, O., Mena, B. (2009) Effect of random longitudinal vibrations pipe on the Poiseuille flow of a complex liquid. *Rheol. Acta* 48 779-800.
- Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E., Manero, O. (2010) Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 165 174-183.
- Middleman, S. *Fundamentals of polymer Processing*, McGraw-Hill.
- Moreno, L., Calderas, F., Sánchez-Olivares, G., Medina-Torres, L., Sánchez-Solís, A., Manero, O. (2013) La sangre humana desde el punto de vista de la reología. *Materiales Avanzados*. 20, 33-37.
- Moreno, L., Calderas, F., Sánchez-Olivares, G., Medina-Torres, L., Sánchez-Solís, A., Manero, O. (2015) Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behaviour of the human blood. *Korea-Australia Rheol J.* (27), 1, 1-10.
- Torres Rojas, A.M., Pagonabarraga, I., Corvera-Poire, E. (2017) Resonances of Newtonian fluids in elastomeric microtubes, *Phys. Fluids* 29, 122003.