UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

COLEGIO DE FILOSOFÍA

Matemática *A Posteriori*: las demostraciones por computadora

TESIS

que para optar por el grado de

Licenciado en Filosofía

PRESENTA:

Jesús Alberto Rico Sotelo

Directores:	Dr. Carlos Romero	FFyL, UNAM
	Mtro. Hugo Enrique Sánchez López	FFyL, UNAM
Comité:	Dra. Lourdes Valdivia Dounce	FFyL, UNAM
	Dra. María del Carmen Rosario Silva Álvarez	FFyL, UNAM
	Dr. Oscar Salvador Santana Sandoval	ENP, UNAM
	Mtro. Iván Rodríguez Martínez	FFyL, UNAM

Ciudad de México, Enero de 2022

Contenido

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mi familia quien me apoyo en todo momento durante mi licenciatura hasta el día de hoy, sin ellos eta tesis no habría sido posible. De igual modo, quiero agradecer a mis directores de tesis por estar siempre al tanto de este proyecto.

Capítulo 1
Introducción

Desde los griegos, quien dice *matemáticas*, dice *demostración*.

—Nicolas Bourbaki

Me gustaría comenzar esta introducción relatando el problema que motivó esta tesis. Luego, resumiré el trabajo realizado en cada capítulo.

Quizá uno de los grandes textos en la historia de la humanidad sea *Elementos* de Euclides, en donde nos podemos encontrar con muchas proposiciones acerca de las relaciones que existen entre rectas, puntos, circunferencias, etc. Tales proposiciones no vienen como simples creencias sin justificación alguna, sino que cada una de ellas está acompañada de una demostración, esto es, a grandes rasgos, una justificación de por qué la proposición se cumple. Esta justificación está dada por una serie de pasos lógicos que, al leerlos, fácilmente podemos decir que cada paso se sigue de un paso anterior, y que el paso final de la demostración es justo a lo que nos interesaba llegar.

Esta situación en la matemática no cambió durante más de dos mil años. Cualquier texto sobre matemáticas que nosotros leamos viene en una presentación muy similar a los *Elementos* de Euclides, a saber, axiomas y proposiciones sobre las relaciones que hay sobre ciertos objetos, acompañados de algún argumento que justifica dichas relaciones. De este modo, se pretende que cualquier persona pueda comprender el texto con tan solo leerlo.

Esta manera de proceder de la matemática fue lo que hizo a Kant pensar que esta disciplina «…había tomado el camino seguro de la ciencia» [12, p. 17]. Esto es, la matemática, debido a su proceder y sus demostraciones, había alcanzado un alto nivel de rigor, por lo que sus proposiciones no eran mera opinión, sino que podían llamarse conocimiento universal, y toda ciencia que quiera erigirse como conocimiento habría de seguir los pasos de la matemática.

Así, el conocimiento universal de una proposición matemática depende considerablemente, si no es que totalmente, de que se tenga una demostración. Hasta mediados del siglo pasado las demostraciones habían sido todas muy similares, bastaba tener lápiz, papel y los conocimientos necesarios para poder realizar una demostración, o sólo un libro de matemáticas para poder leer alguna de éstas. Los métodos utilizados para demostrar una proposición, de los cuales hablaré en el primer capítulo, también solían ser siempre los mismos desde los griegos. Esto cambió recientemente con la aparición de los ordenadores. En particular, con el problema de los cuatro colores, una proposición bastante fácil de comprender pero la cual necesitó de una computadora para ser «demostrada». Hasta ese entonces, jamás se había hecho uso de una computadora para atacar una proposición matemática, tampoco se había presentado en la historia de las matemáticas una «demostración» con cientos de pasos lógicos que fuera imposible o casi imposible de leer en un tiempo de vida humana. Este suceso en la historia de las matemáticas causó gran controversia, había quienes argumentaban en favor de la demostración por ordenador y quienes la desacreditaban. A lo largo de esta tesis, analizaré y debatiré con ambas posturas.

A continuación mostraré brevemente y a grandes rasgos lo que se realizó en cada capítulo.

En el primer capítulo me propongo esclarecer el concepto de «demostración». Para conseguirlo, hago un muy breve esbozo histórico de la noción de demostración, esto con la finalidad de mostrar que desde Aristóteles la palabra «demostración», en las ciencias formales, se ha intuido como una especie de argumento finito en el que se deduce la conclusión a partir de premisas ya dadas como verdaderas. Posteriormente abordo este concepto de demostración desde dos sentidos; el primero, un sentido lógico; y el segundo, un sentido epistemológico. El sentido lógico es la parte formal del argumento matemático, esto es, la unión del conjunto de premisas, el conjunto de reglas válidas de inferencia, las reglas de formación de una proposición y los respectivos operadores lógicos; en palabras más vagas, nos referimos al sentido lógico como la parte sintáctica de una demostración. Mientras que en el sentido epistemológico partimos del supuesto de que no toda demostración que es aceptada en la comunidad matemática consiste únicamente en una serie de pasos lógicos. Un ejemplo de esto es que dentro del quehacer matemático existen demostraciones que pareciera que se saltan pasos o tienen huecos, algunas otras son simplemente platicadas o se apoyan fuertemente de una intuición geométrica sacada de dibujos con regla y compás. Por lo que, en el sentido epistemológico, buscamos las condiciones suficientes y necesarias para que podamos hablar de una demostración bien realizada. Dentro de estas condiciones hablaré de dos muy importantes:

1. Inspeccionabilidad.

2. Transferibilidad.

A muy grandes rasgos, estas dos propiedades de una demostración nos indican que basta con considerar el contenido de una demostración para poder llegar a conocer la verdad de la proposición que se intenta demostrar. Dicho de otro modo, para conocer la verdad de esa proposición es suficiente considerar los pasos escritos dentro de la demostración, aunque cabe señalar que quien considera estos pasos es algún sujeto ya con cierta formación dentro de la comunidad matemática.

Continuando con el segundo capítulo, para introducir los problemas que suscitan la noción de demostración, primero enuncio el problema de los cuatro colores, e introduzco algunas definiciones relevantes de la teoría de grafos para formalizar dicho problema. Luego, hago mención de que el problema de los cuatro colores fue «demostrado» con la ayuda de un ordenador. Este método de demostración apoyado en una computadora fue en contra de toda una tradición de matemáticos que acostumbraban a ver y hacer las demostraciones a lápiz y papel. A partir de esto analizo y discuto los argumentos dados para defender o rechazar la demostración por ordenador del problema de los cuatro colores.

La motivación que hay detrás para rechazar la demostración del problema de los cuatro colores es que dicha demostración no contiene la propiedad de ser inspeccionable, esto es, que ningún matemático es capaz de leer la demostración en su entereza y concluir su verdad, principalmente porque dicha demostración tiene pasos faltantes que solo una computadora es capaz de leer. De esta idea se desprende la creencia de que la «demostración» del problema de los cuatro colores es más bien un experimento bien realizado, por lo que si aceptamos la demostración, entonces estaríamos frente a una verdad matemática *a posteriori*. Por otro lado, las motivaciones para aceptar la demostración del problema de los cuatro colores son especialmente dos. La primera es argumentar que la noción de *inspeccionabilidad* no captura en su totalidad una condición suficiente para la noción de demostración, esto es, a grandes rasgos, decir que ya hay casos de demostraciones aceptadas por la comunidad matemática que no son totalmente inspeccionables. La segunda es sostener que las demostraciones que utilizan ayuda de una computadora sí son inspeccionables bajo el argumento de que es suficiente tener el código de la demostración, es decir, es suficiente tener el algoritmo que se va a implementar en la computadora, ya que se puede demostrar que dicho algoritmo realiza lo que deseamos que realice.

Una consecuencia importante que se desprende del segundo capítulo es la discusión sobre si las demostraciones que se apoyan en una computadora son verdades matemáticas *a priori* o son verdades matemáticas *a posteriori*, ya que si dichas demostraciones no son más que experimentos bien hechos y no son inspeccionables, entonces nos encontramos frente a una verdad matemática *a posteriori*. Pero, por otro lado, si las demostraciones a computadora resultan ser inspeccionables al igual que otras demostraciones tradicionales, entonces al igual que estas, nos encontramos con verdades matemáticas *a priori*.

Esta consecuencia es la que motiva el tercer capítulo de esta tesis, por lo que el principal objetivo del tercer capítulo será esclarecer si las demostraciones a computadora son verdades matemáticas *a priori* o *a posteriori*. Para esto comencé por analizar brevemente las nociones de *a priori* y *a posteriori* dentro del conocimiento matemático, apoyándome en Kant y Frege, posteriormente identificaré cómo resulta ser una demostración desde la noción de Frege y desde la noción de Kant. Para fines prácticos de esta tesis, a la noción de demostración desde la perspectiva de Frege la nombro «la noción fregeana», y a la noción de demostración desde la perspectiva de Kant la nombro «la noción kantiana». De manera breve, la noción fregeana es aquella en la que cada paso dentro de la demostración se deduce de un paso anterior mediante una definición o mediante una ley lógica, mientras que la noción kantiana es aquella en la que cada pasa dentro de una demostración proviene de una intuición, entendida como un juicio sintético *a priori*, o bien, proviene de un juicio analítico.

Por otro lado, para lograr el objetivo de identificar a las demostraciones como verdades matemáticas *a priori* o *a posteriori*, resultó importante distinguir si las categorías epistémicas se aplican sobre el contenido del juicio o bien si se aplican sobre la justificación que tenemos de un juicio. No intentaremos sostener que tales categorías epistémicas solo se aplican en un sentido, sino que en cuanto hayamos hecho la distinción entre contenido y justificación, mostraré las consecuencias que esto puede tener sobre una demostración a computadora. Nuevamente, por razones prácticas y expositivas, a la idea de que las categorías epistémicas se aplican al *contenido* de un juicio la he identificado con la noción kantiana, mientras que a la idea de que las categorías epistémicas se aplican a la *justificación* del juicio la he identificado con la noción fregeana.

Brevemente explicaré aquí qué consecuencias tienen ambas nociones para la demostración a computadora. En la noción kantiana, si el contenido de un juicio es *a priori*, entonces dicho contenido resulta ser independiente de la experiencia, de modo que es no es relevante cómo se ha llegado a saber tal juicio, por lo tanto, si defendemos esta noción, una demostración por computadora puede ser una verdad matemática *a priori* a pesar de que el método que sea tomado para demostrarla se apoye de procedimientos aparentemente empíricos. Ahora, en la noción fregeana si una proposición matemática es *a priori*, nos referimos a que la justificación mediante la cual se llego a saber dicha proposición es la que resulta ser *a priori*, esto es, que la justificación es independiente de la experiencia o bien que dicha justificación procede únicamente de definiciones y leyes lógicas. Esta noción tiene consecuencias no muy buenas para las demostraciones con ordenador pues no es claro como los pasos realizados por la computadora puedan ser independientes de la experiencia o dependan únicamente de definiciones y de leyes lógicas.

Esta importante consecuencia nos llevó a preguntarnos en qué sentido las demostraciones por ordenador podían llegar a ser independientes de la experiencia, o bien, si las demostraciones por ordenador son simples experimentos. Para resolver esta importante cuestión, lo primero que se hizo fue aclarar el concepto de «experimento», y posteriormente analizar si una computadora como objeto físico es equiparable con instrumentos de laboratorio por parte de los científicos cuando estos realizan experimentos. Esto es importante, ya que se puede pensar que, al igual que un científico debe depositar confianza en sus instrumentos de laboratorio y la teoría científica que hay detrás de ellos, el matemático debe depositar confianza en la física e ingeniería que hay detrás de un ordenador.

Una vez que hayamos aclarado en qué sentido una demostración por ordenador puede introducir experimentos a las matemáticas, cierro el tercer capítulo con el debate entre Tymoczko y Swart. Por un lado, Tymoczko sostiene que el problema de los cuatro colores es una verdad conocida *a posteriori*; y por otro lado, Swart va a sostener que es mejor seguir considerando las matemáticas *a priori* independientemente de cómo se ha llegado a conocer dicho problema.

Pasando al cuarto capítulo, el último de esta tesis, ahí sostendré que las demostraciones realizadas con la ayuda de un ordenador están justificadas dentro de la práctica matemática, esto es, sostendré que hacer una demostración en la que se apoye de una computadora para resolver una parte fundamental de algún problema es tan aceptable como cualquier otra demostración de las que se consideran tradicionales. Para esto primero responderé a dos de los argumentos que desacreditan este tipo de demostraciones, a saber, que las demostraciones por ordenador introducen elementos empíricos a la práctica matemática y que una demostración así no puede ser inspeccionable. Posteriormente, diré que las demostraciones por ordenador pueden considerarse *a priori* siempre que tengamos conocimiento de que el algoritmo que se ejecuta en el ordenador realiza lo que deseamos que realice.

Para el argumento de que las demostraciones introducen elementos empíricos, sostendré que bajo las mismas hipótesis que hay para pensar en que una computadora introduce cierto grado de empiria, se puede concluir que las pruebas tradicionales hechas por matemáticos a lápiz y papel también resultan introducir cierto grado de empiria, y en ese sentido también se pueden pensar como justificaciones *a posteriori*. Dichas hipótesis son, en esencia, que el ordenador es un objeto del mundo físico y por tanto debemos depositar confianza en él.

Ahora bien, no nos gustaría afirmar que las matemáticas tienen contenido *a posteriori*, puesto que cuando decimos saber como verdadera una proposición, no lo decimos sobre la base de nuestros estados mentales, sino que lo decimos sobre la base de que tenemos una justificación bien fundada, la cual no depende de elementos empíricos. De modo que seguiremos considerando a las matemáticas como *a priori*, sin importar quien sea el agente ejecutor de la demostración.

Pasando al segundo argumento, el cual reza que una demostración que se apoya en un ordenador no es inspeccionable, me parece que se pueden explorar dos caminos para argumentar en contra de esta postura; la primera, cuestionar la inspeccionabilidad como criterio de aceptación de una demostración; y la segunda, argumentar que, en efecto, las demostraciones con computadora son inspeccionables.

De manera breve, para cuestionar la inspeccionabilidad como criterios de aceptación diré que si toda demostración es aceptada en tanto que es inspeccionable, entonces el número de demostraciones que se podrían aceptar sería un número que, por muy grande que sea, es finito. Esto puesto que no parece ser que toda proposición matemática demostrada sea tal que se pueda verificar paso a paso desde sus hipótesis hasta su conclusión; esto a menudo pasa con los números primos muy grandes, que son infinitos, pero es imposible inspeccionar en un tiempo finito si un número primo grande en efecto resulta ser un número primo.

Por otro lado, para argumentar que una demostración por ordenador es inspeccionable sostendré que dichas demostraciones son inspeccionables en tanto que sabemos que el algoritmo utilizado en el ordenador es correcto, esto es, que se puede demostrar con los métodos usuales que el algoritmo realiza lo que deseamos que realice. Ahora, como dicho algoritmo fue demostrado con métodos usuales de las matemáticas, podemos afirmar que dicha demostración es *a priori*.

Por último, para hacer más fuerte la postura de que los ordenadores no introducen cierto grado de empiria a las matemáticas, argumentare desde el fiabilismo que los procesadores son un proceso fiable, esto es, que podemos depositar nuestra confianza en los procesos de la computadora sin que esta nos vaya arrojar resultados erróneos. Este proceso es comparable con el que tenemos al hacer uso de las calculadoras.

Capítulo 2

El concepto de *demostración*

En este primer capítulo introduciré la noción de *demostración*. Para esto, primero hablaré brevemente del sentido que se le da al término «demostración» en las ciencias formales y daré un esbozo del nacimiento de la idea de demostración. Luego, caracterizaré a la noción de demostración en dos sentidos. El primero es el sentido puramente lógico y formal de lo que es una demostración. El segundo es el sentido epistemológico, en donde menciono que una demostración tiene las propiedades de ser inspeccionable y de ser transferible, esto es, en muy resumidas palabras, que una demostración bien realizada es aquella que con sólo considerar el contenido de la demostración es suficiente para conocer la verdad de su conclusión. Y por último, para mostrar qué tanto puede abarcar la noción de demostración, menciono los métodos de prueba más usuales.

2.1. Esbozo histórico de la noción de demostración

Existen varios sentidos para el uso de la palabra «demostración». En el lenguaje ordinario tiene varios usos, por ejemplo: «El atleta hizo una demostración de su fuerza», «La persona demostró que sí era digno», «Él demostró que sí la amaba», etc. En el ámbito científico se le da otros usos, por ejemplo, «la teoría quedó demostrada con este experimento». Por otro lado, en las ciencias formales tenemos expresiones como «Demuestra que la suma de cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa» o bien, «El teorema quedó demostrado».

En los tres ámbitos mencionados, el lenguaje ordinario, en las ciencias empíricas y en las ciencias formales, se tiene que el sentido de la palabra demostración es distinto. En el lenguaje ordinario se refiere a poner de manifiesto alguna acción, a mostrar un hecho o un suceso frente a un conjunto de individuos que posteriormente juzgarán de bueno o malo, de correcto o incorrecto, etc.. En las ciencias empíricas, el uso de la palabra «demostración», se refiere a la realización de un experimento que pone a prueba un conjunto de hipótesis sobre algún fenómeno, pero realizar un experimento es también mostrar ciertos hechos para determinar si algo es el caso o no, pero no es un mostrar hechos sin más, previo a ese mostrar existe una metodología propia de la ciencia experimental [19, p. 10]. Por último, el caso que nos interesa es la demostración en las ciencias formales.

Pitágoras sabía que su teorema sería una verdad para toda la eternidad, Euclides sabía que los números primos son infinitos y moriría seguro de ello, Gauss estaría seguro de que sus teoremas formarían parte del gran conjunto de conocimientos matemáticos. ¿Qué es lo que les permitía a estas personas no dudar o tener seguridad con respecto a una afirmación? Tener una prueba, una demostración. Pues, como dice John Corcoran:

> La prueba tiene la notable capacidad de proporcionar creencia firme e inquebrantable en aquellos casos en los que de lo contrario nos veríamos condenados a suspender nuestro juicio o a lo sumo a conformarnos con una atenuada certeza moral [...] [4, p. 71].

Podemos decir que la idea de demostración nació en Grecia hace poco más de 2500 años, sin embargo, mucho antes que los griegos, ya los egipcios habían obtenido resultados bastantes interesantes en el campo de la geometría. Pero, debido a que, siguiendo a Vega [19, p. 30], los griegos del siglo VI a.n.e., adoptaron una postura racional que consistía en dar cuenta y razón del mundo que les rodea. Y no sólo eso, también reconocieron la capacidad que tenía un argumento para poder dirigir cualquier discusión. Así fue que nació la noción de demostración. Además, esta actitud racional de los griegos frente al mundo los llevó a razonar sobre la argumentación misma; sobre qué argumentos eran válidos, y cuáles no; o bien, cuáles eran aquellos argumentos que tenían mayor capacidad de convencimiento. Así, Aristóteles escribiría los *Primeros Analiticos*, cuyo objeto de estudio sería la prueba demostrativa, aunque, como menciona John Corcoran:

> Ya antes de Aristóteles, se consideraba obvio que una única prueba incluía varios conceptos (o términos), que además de la conclusión (o proposición a demostrar) había premisas cuya verdad tenía que ser establecida antes de que la prueba pudiese ser realizada [...] [4, p. 74].

Aristóteles concebía la noción de demostración como un proceso de inferir consecuencias a partir de proposiciones ya sabidas como verdaderas, y además, también establecería una diferencia entre deducciones y demostraciones. Pensaba que toda demostración es una deducción, pero que no toda deducción era una demostración. Para Aristóteles existían dos vías por los cuales se llegaba a una determinada conclusión, esto es, dos maneras de llevar a cabo una deducción. La primera es la que conocemos como *deducción directa*, y consistía en partir de las premisas e ir infiriendo hasta formar una cadena de razonamientos que concluye en lo que se quería probar. La segunda vía es lo que conocemos como *deducción indirecta*, esta consistía en suponer la negación de lo que se quiere probar, y comenzar a deducir hasta llegar a un absurdo [4, p. 75].

Esta noción de demostración fue la que perduró durante muchos siglos en el quehacer del matemático. Sin embargo, todos aquellos que hemos visto o realizado demostraciones estaremos de acuerdo en que una demostración no es un proceso tan sencillo como el de sólo ir deduciendo consecuencias a partir de cosas ya sabidas como verdaderas. Incluso hoy en día podemos observar que hay pruebas aceptadas por la comunidad matemática que se apoyan en computadoras. De modo que muchas veces no existe un criterio claro para determinar qué pruebas serán aceptadas por la comunidad matemática. Esto representa un gran problema, pues gran parte del conocimiento científico, desde Galileo hasta nuestros días, se apoya en las matemáticas, pero no estamos justificados en usar herramientas de la matemática sin que dichas herramientas no hayan sido demostradas previamente. Por lo que, en lo que sigue, haré un análisis sobre la noción de demostración.

2.2. Sentido lógico y epistemológico de la noción de demostración

Con lo dicho hasta este momento es relativamente claro que una demostración en lógica o matemática no consiste en sólo mostrar algún hecho; a diferencia de las ciencias empíricas, en las ciencias formales un experimento no es suficiente para determinar la verdad de una proposición.

Piénsese en la siguiente proposición: «El área de un cuadrado nunca es igual a la suma de las áreas de dos cuadrados iguales». Para determinar si dicha proposición es cierta, podríamos ir probando número por número hasta hallar que tales cuadrados sí existen y con esto ver que el enunciado es falso, o bien, hasta terminarnos todos los números sin encontrar tales cuadrados y con esto ver que el enunciado es verdadero. Pero hay un problema evidente si procedemos de esta manera, a saber, que los números son infinitos: podríamos llevarnos el tiempo que ha existido el universo experimentando con cada número y seguir ignorando la verdad de dicha proposición. Por estas razones es que un experimento en ciencias formales no es suficiente para determinar la verdad de algún enunciado.

Para saber si dicho enunciado es cierto, apelamos a una especie de argumento donde la última línea del argumento es justo que lo deseábamos saber. Justo como se muestro a continuación:

Proposición 2.2.1. El área de un cuadrado nunca es igual a la suma de las áreas de dos cuadrados iguales.

Demostración. Sea A un cuadrado de lado a y sea B un cuadrado de lado b. Supongamos que dos veces el área de B es igual al área de A; es decir,

$$a^2 = b^2 + b^2$$

Entonces,

$$\begin{aligned} a^2 &= 2b^2 \\ a^2/b^2 &= 2 \\ (a/b)^2 &= 2 \\ a/b &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Pero la raíz cuadrada de 2 no puede ser expresarse como una fracción. Contradicción. Por lo tanto, $a^2 \neq b^2 + b^2$. Es decir, el área de un cuadrado nunca es igual a la suma del área de dos cuadrados iguales. ∎

Observemos que el tipo de argumento que se dio para saber si dicho enunciado era o no verdadero, es de tipo deductivo: en cada paso se sigue del anterior mediante alguna regla o argumento que ya se haya demostrado válido. Otras características importantes del argumento es que es finito, concluyente, y no circular. De no ser así, tendríamos un gran problema, a saber, que seguiríamos sin poder determinar la verdad del enunciado.

El ejemplo anterior me permite dar un primer acercamiento a la definición de *prueba*. Esto es, una definición de *deducción* [7, p. 65].

Definición 2.2.1. Una *deducción* de B a partir de A es una sucesión finita $P_0, P_1, \ldots, P_n$ de fórmulas tal que $P_n = B$ y para cada $k \leq n$, o bien:

a) P_k está en $A \cup \Phi$ donde Φ es un conjunto de fórmulas llamadas *axiomas lógicos*, o bien

b) P_k se obtiene mediante *modus ponens* a partir de dos fórmulas anteriores de la sucesión; esto es, para algunos i y j menores que k, P_j es $P_i \Rightarrow P_k$.

Lakatos menciona que usualmente los estudiantes en filosofía de las matemáticas piensan a la demostración como una secuencia finita de fórmulas de algún sistema, donde cada fórmula de la secuencia es un axioma del sistema o es una fórmula derivada mediante una regla del sistema de una fórmula precedente [15, p. 62].

Ahora bien, dentro de la práctica matemática no siempre es claro que en las demostraciones se procede únicamente con la pura definición que acabamos de introducir, es decir, en las demostraciones podemos notar muchas veces que introducen elementos del lenguaje natural o bien, elementos de otros sistemas formales consolidados dentro de la matemática, también podemos notar que en algunas demostraciones existen «huecos» donde pareciera que una fórmula no se sigue de la anterior pero que se justifica mediante algún lema que ya ha sido probado. Por otro lado, existen argumentos que son válidos pero que no podemos decir que constituyen una demostración, ejemplo de esto pueden ser algunas tautologías; si nosotros deseamos demostrar que A, y para ello suponemos que A, sabemos que la forma «si A, entonces A» es siempre válida, por lo que cumple con nuestra definición puramente formal de una demostración, pero es más que evidente que proceder de esta manera no nos proporciona ninguna especie de conocimiento. De modo que una demostración nos exige más que sólo proceder conforme a la definición dada.

A continuación daré un ejemplo de una demostración en donde no es claro cómo la prueba cumple con la definición dada.

Proposición 2.2.2. El conjunto de números primos es infinito.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que el conjunto de números primos $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ es finito.

Consideremos ahora a $Q = (P_1)(P_2)\ldots(P_n) + 1$. Notemos que Q no es divisible entre algún elemento del conjunto $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, pues al dividir a Q entre algún elemento de dicho conjunto nos queda como residuo 1.

Por lo tanto, Q es un número primo o bien existe un número primo P_k que divide a Q que no se encuentra en $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$. Esto entra en contradicción con nuestro supuesto de que $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ eran los únicos números primos. Por lo que existe una infinidad de números primos. ■

En la anterior demostración notamos que existe un paso en el que no parece cumplir la definición de deducción que dimos. Esto pasó cuando consideramos al número Q: a este sólo lo introdujimos, pues no parece haber modo de que deduzcamos a Q a partir del supuesto de que los números primos son finitos. Por otro lado, la demostración no parece ser, a simple vista, una sucesión de fórmulas, pues introdujimos oraciones tomadas del lenguaje natural.

Del anterior ejemplo podemos decir que una demostración no es meramente una deducción, esto es algo que muchos filósofos y matemáticos han notado y por lo cual muchos de ellos han intentado dar un criterio para determinar qué demostraciones serán aceptadas por la comunidad matemática. Uno de estos criterios lo da el filósofo Thomas Tymoczko [18, p. 59], quien sostiene que una demostración cumple con las siguientes características:

a) Son *convincentes.*

b) Son *formalizables.*

c) Son *inspeccionables.*

Cabe señalar que cada una de estas tres características de la demostración pertenece a un ámbito distinto: a) *ser convincente* corresponde a un aspecto social de la prueba; b) *ser formalizable* corresponde a un aspecto lógico; y c) *ser inspeccionable* corresponde a un aspecto epistemológico [18, p. 61].

Veamos en qué consiste cada una de estas características:

a) Dentro de la comunidad matemática, quien declara que una proposición es verdadera debe dar cuenta de ello. Esto es claro: si yo no logro convencerte de que cierta proposición es verdadera, entonces no hay razón alguna por la cual dicha proposición se tenga que añadir como conocimiento matemático.

b) Las pruebas son formalizables. Tymoczko dice que «siempre podemos encontrar un lenguaje formal apropiado y una teoría en la cual la prueba informal se pueda incorporar y completar en un formal rigurosa» [18, p. 60].

c) Quizá este aspecto es el que más ruido causa: ¿Qué significa que una prueba sea inspeccionable? Una prueba es inspeccionable en tanto que puede ser revisada y verificada por cualquier persona con cierto dominio en el área de la matemática a la cual pertenezca la prueba. Más aún, Tymoczko menciona que una prueba al ser inspeccionable no necesita nada fuera de la misma prueba para que su conclusión llegue a ser conocida por quien examine la prueba [18, p. 59].

Me parece que vendría bien un ejemplo de alguna demostración en la que sea fácil identificar esta última propiedad de inspeccionabilidad. Para ello demostraremos un resultado sencillo, este es, que la raíz cuadrada de 2 es un número irracional.

Proposición 2.2.3. $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Demostración. Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional, es decir, $\sqrt{2} = \alpha/\beta$ tal que α/β es irreducible y es distinto de cero.

$\Rightarrow\ 2 = (\alpha/\beta)^2$

$\Rightarrow\ 2 = \alpha^2/\beta^2$

$\Rightarrow\ 2\beta^2 = \alpha^2$

Por lo que α^2 es un múltiplo de 2, por lo que α resulta ser múltiplo de 2, es decir, $\alpha = 2k$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$. Sustituimos $\alpha = 2k$ en $2\beta^2$; así, $2\beta^2 = (2k)^2$, y:

$\Rightarrow\ 2\beta^2 = 4k^2$

$\Rightarrow\ \beta^2 = 2k^2$

Por lo que β^2 es un múltiplo de 2, por lo que β resulta ser un múltiplo de 2, es decir, $\beta = 2h$ para alguna $h \in \mathbb{Z}$. Por ello, $\alpha = 2k$ y $\beta = 2h$, esto es una contradicción, pues ya habíamos dicho que (α/β) era irreducible. Por lo que $\sqrt{2}$ es un número irracional. ∎

¿Cómo identificar la noción de inspeccionabilidad en la demostración anterior? Hay que resaltar en primera instancia que esta demostración es la más realizada para demostrar la irracionalidad de $\sqrt{2}$, esto no es un hecho menor, pues nos dice que es la demostración más aceptada y por consiguiente es una demostración que es convincente. Es importante señalar esto pues una prueba bien podría ser no-inspeccionable y aún así el argumento de la prueba nos podría convencer, lo cual sugiere que la característica convincente de las pruebas es un aspecto más subjetivo que objetivo. Por lo que una demostración también puede ser el caso que no estemos convencidos de la verdad de su conclusión y sin embargo dicha demostración sea inspeccionable.

Veamos ahora sí cómo es que la demostración que acabamos de realizar es inspeccionable. Si examinamos la prueba paso por paso, notamos que no hay nada fuera de la prueba misma que nos impida llegar a conocer su validez, es decir, únicamente con lo que estaba escrito dentro de la demostración fue suficiente para llegar a conocer que raíz cuadrada de dos es un número irracional. En muchos casos, hay pruebas en las que encontramos «huecos argumentativos» y podríamos pensar que necesitamos recurrir a algo fuera de ella para conocer su veracidad; en realidad, esto no es un problema, pues muchas de estas demostraciones justifican esos huecos con lemas que fueron probados previamente, o con ejercicios que se dejan al lector; así, en cualquier caso, el matemático puede ir a verificar esos lemas por su cuenta o realizar el lema por sí mismo.

El que algunas demostraciones sean convincentes pero no sean inspeccionables nos hace también cuestionarnos dos cosas: (a) ¿Toda prueba formalizable es inspeccionable? y (b) ¿Toda prueba inspeccionable es formalizable? Es relativamente claro que no toda prueba formalizable es inspeccionable, por ejemplo, las pruebas que son demasiado largas y que no podrían ser leídas en el tiempo de vida de una persona. Por otro lado, Tymoczko dice que algunos intuicionistas niegan que algunas pruebas puedan ser totalmente capturadas por los sistemas formales [18, p. 61]. Esto es, para cada teoría podemos encontrar alguna prueba que sea inspeccionable pero que no sea formalizable en la teoría.

Hasta aquí, tenemos una noción medianamente clara de qué podría ser una demostración según Tymoczko. Otro autor que se pregunta acerca de la naturaleza de las demostraciones es Kenny Easwaran en «Probabilistic Proofs and Transferability». Easwaran menciona que las demostraciones que los matemáticos aceptan suelen ser más informales que el tipo de demostraciones que se estudian en teoría de la prueba [6, p. 342], esto dado que los matemáticos incluso han aceptado pruebas realizadas con la ayuda de una computadora, pero han rechazado pruebas probabilísticas. De modo que no existe un criterio claro para saber qué pruebas son las que se deben aceptar y cuáles no.

Ante esta situación, Easwaran propone un nuevo criterio que llama la propiedad de *transferibilidad* [6, p. 353]. Podemos expresar dicho criterio como sigue: Una prueba es *transferible* si y sólo si la secuencia de proposiciones por sí solas constituyen toda la prueba. Esto nos sugiere dos cosas. La primera es que cualquier persona dentro de la comunidad matemática que esté familiarizado con el área matemática de la cual sea la prueba debería poder convencerse de la verdad de la conclusión con sólo considerar los pasos realizados en la prueba. Y la segunda es que la propiedad de transferibilidad no nos dice nada acerca de los métodos con los que se deberían de demostrar, es decir, podemos aceptar una prueba sin importar cómo fue probada siempre y cuando la prueba sea transferible.

Cabe señalar que esta noción de transferibilidad puede ser *grupal*, esto es, puede existir una prueba demasiado larga en la que se necesite más de un matemático para que cada uno realice un paso de la prueba. De modo que, aunque ninguna persona sea capaz de leer la totalidad de la prueba, la prueba misma continúa siendo transferible pues los matemáticos pueden revisar las partes de la prueba que ellos deseen como si estas partes fueran lemas dentro de un sistema matemático. Esto, de hecho, ha sucedido: el teorema de clasificación de grupos se ha publicado en diferentes revistas y cada parte de la prueba ha sido escrita por diferentes matemáticos debido a que la prueba requiere repasar una variedad de casos [2].

Veamos ahora que la propiedad de transferibilidad de Easwaran y la característica de inspeccionabilidad de Tymoczko son dos nociones que se asemejan mucho. Por un lado, la inspeccionabilidad nos dice que una prueba es *inspeccionable* si y sólo si la prueba puede ser revisada por cualquier persona versada dentro de las matemáticas y que dicha persona no necesita nada fuera de la prueba misma para llegar a conocer la verdad de su conclusión, mientras que una prueba es *transferible* si y sólo si la secuencia de las proposiciones constituyen la totalidad de la prueba. De modo que tanto inspeccionabilidad como transferibilidad apelan a que la verdad de la conclusión de la prueba dependa únicamente de todo aquello que aparezca dentro de dicha prueba, y que cualquier persona con dominio en el área sea capaz de llegar a conocer la verdad de la conclusión sólo considerado los pasos de la prueba.

Por último, me gustaría hacer un análisis sobre las nociones de transferibilidad e inspeccionabilidad, a saber, si dichas nociones son condicionales.[1] Si sí lo son, entonces P es una prueba inspeccionable/transferible si y solamente si: *si* un matemático revisa la prueba, *entonces* adquiere conocimiento de la verdad de su conclusión. Y si no es condicional, entonces P es una prueba inspeccionable/transferible si y solamente si: «los pasos dentro de la prueba constituyen la totalidad de la prueba» [6, p. 353]. La formulación de la definición de que una prueba sea transferible sugiere que esta noción es condicional. Tenemos dos formulaciones de Easwaran:

a) los pasos dentro de la prueba constituyen la totalidad de la prueba; y,

b) la mera consideración de los pasos de la prueba por un matemático es suficiente para que este se conozca la verdad de la conclusión.

[1] Este análisis fue sugerido y realizado por mi asesor de tesis Carlos Romero.

Notemos que si solo nos quedamos con a), entonces podemos pensar que la transferibilidad no es una noción condicional. Sin embargo, vemos que a) no añade nada a la concepción lógica de la prueba, la de la definición 2.2.1. Por otor lado, una prueba es inspeccionable siempre y cuando:

c) puede ser revisada y con ello verificada por cualquier persona con dominio en la matemática; de forma equivalente,

d) al ser inspeccionada, la prueba no necesita nada fuera de la misma prueba para que su conclusión llegue a ser conocida.

Notemos que c) sugiere que la inspeccionabilidad es una noción condicional: si se revisa, eso basta para verificarse. Igualmente con d), vemos que la inspeccionabilidad es una noción condicional: *si* es inspeccionada, *entonces* no se necesita nada fuera de ella misma para que llegar a conocer su conclusión. Es relevante saber si estas dos nociones son condicionales o no, ya que si dichas nociones son condicionales, entonces nos muestran la relación existente entre *pruebas*, *matemáticos*, y *proposiciones.*

Con ello, los conceptos de transferibilidad e inspeccionabilidad van más allá del concepto puramente lógico de prueba, relacionando a las pruebas con la comunidad matemática y dándoles un sentido epistemológico.[2]

[2] Como dice Tymoczko: «Surveyability is an important subjective feature of mathematical proofs which relates the proofs to the mathematicians, the subjects of mathematical investigations» [18, p. 60]. De forma consistente con esto, Easwaran usa esta criterio para contrastar pruebas que no son transferibles: «nothing about the method by which the propositions were generated is essential [. . .] unlike arguments in which one needs to know that certain propositions were generated in a suitably random manner, or were generated by a reliable source» [6, p. 354]. Esto también habla de la relación entre matemáticos, pruebas y proposiciones.

2.3. Métodos de prueba

Ahora, después de haber mencionado qué caracterizaba a las demostraciones en su sentido lógico y epistemológico, pasaré a mencionar cuales son los métodos de demostraciones más utilizados por la comunidad matemática. Esto con el fin de ampliar nuestro panorama de la noción de demostración, lo cual nos servirá más adelante en la discusión que se planteará en la presente tesis.

El primer método de demostración que presentaré es también el método más común para realizar una demostración, este método es llamado *prueba directa*. El método de demostración por prueba directa consiste en que si se tiene una proposición, digamos, que A implica B, entonces para demostrar dicha proposición el matemático debe partir de A e ir infiriendo consecuencias mediante las reglas del sistema en el que se esté trabajando hasta concluir que B; esto es, «suponer que A es verdadero y, de alguna forma, debe usar esta información para lograr la conclusión de que B es verdadero» [16, pp. 24]. El esquema de esta prueba es el siguiente:

$$\begin{array}{cl} A & \text{Hipótesis} \\ A_1 & \text{Deducción 1} \\ A_2 & \text{Deducción 2} \\ \vdots & \\ A_k & \text{Deducción } k \\ \hline B & \text{Conclusión} \end{array}$$

Ahora daré un ejemplo de cómo se ve una prueba directa, puesto que durante la tesis no he presentado ninguna prueba que se pueda decir que es una prueba directa:

Proposición 2.3.1. Sea XYZ un triángulo rectángulo de lados x, y e hipotenusa z tal que su área es igual a $\frac{z^2}{4}$, entonces el triángulo es isósceles.

Demostración. Queremos demostrar que el triángulo XYZ es isósceles, es decir, que tiene dos lados iguales, o lo que es lo mismo, que $x = y$. Sabemos que el área de un triángulo es su base por su altura sobre dos, esto es, $\frac{xy}{2}$. Y, por hipótesis, $\frac{z^2}{4} = \frac{xy}{2}$. Ahora, como el triángulo es rectángulo, sabemos por Pitágoras que $x^2 + y^2 = z^2$. Entonces sustituimos z^2 en $\frac{z^2}{4} = \frac{xy}{2}$, de modo que nos queda $\frac{x^2+y^2}{4} = \frac{xy}{2}$, y haciendo álgebra tenemos que:

$$\frac{x^2+y^2}{4} = \frac{xy}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Por lo tanto, el triángulo resulta ser isósceles. ∎

Notemos que en esta demostración la conclusión fue deducida paso a paso a partir de suponer como verdaderas nuestras hipótesis [16, pp. 26-28].

Pasaré ahora al siguiente método de demostración, este método es llamado *prueba por contrapuesta*. La idea de este método de prueba es que si se quiere demostrar que A implica B, basta con probar que si no se cumple B entonces tampoco se cumple A, esto es así pues «A implica B» y «$\neg B$ implica $\neg A$» son lógicamente equivalentes y esto se puede ver fácilmente comparando sus tablas de verdad:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg B$	$\neg A$
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**

Veamos un ejemplo sencillo de este caso.

Proposición 2.3.2. Sean n y m números enteros impares, entonces mn es un número entero impar.

Demostración. Por contrapuesta, supongamos que mn es un número entero par.

Observación: Notemos que la negación del enunciado «n y m son números enteros impares» es el enunciado «o n es un número entero par, o bien m es un número entero par». De modo que basta probar que alguno de los dos, n o bien m, es un número entero par. Además, como las proposiciones de la forma «$A \vee B$» son lógicamente equivalentes a las proposiciones de la forma «$\neg A \Rightarrow B$», podemos suponer que n es un número entero impar. Ahora, por hipótesis, $mn = 2k$, y $n = 2h + 1$, por lo que $m(2h + 1) = 2k$. Así, tenemos que $2hm + m = 2k$. Y, por tanto, m tiene que ser un número entero par. ■

El siguiente método de demostración es uno que ya se ha presentado en esta tesis, me refiero a la *prueba por contradicción*. La demostración de que raíz cuadrada de 2 era un número irracional y de que los números primos son infinitos se hizo por contradicción. Este método consiste en suponer como falso aquello que se quiere demostrar y mediante una serie de pasos concluir que la negación de lo que se desea probar en unión con las premisas de nuestra proposición resulta inconsistente.

Es común que en matemáticas nos encontremos con proposiciones que utilizan cuantificadores como «Para todo» y «Existe». Las pruebas de este tipo de proposiciones entran en los métodos de prueba ya mencionados pero requieren de algunas especificaciones.

Si se tiene una proposición de la forma «Para todo», basta con tomarnos un elemento, *el que sea*, de nuestro dominio de discurso y mediante una serie de deducciones observar que dicho elemento cumple con lo que se predica de él.

Por otro lado, si se tiene una proposición de la forma «Existe» basta con exhibir que un elemento de nuestro dominio de discurso cumple la propiedad que se le predica a dicho elemento. Muchas veces exhibir el elemento indicado no es tarea fácil y se requiere que este elemento pueda construirse dentro de la teoría. Mostraré un ejemplo sencillo de este caso, pero antes hay que recordar algunas definiciones de la teoría de conjuntos [7, 17-18].

Definición 2.3.1. Sean A y B conjuntos cualesquiera. El *producto cartesiano* de A con B es el conjunto $A \times B := \{(a,b) | a \in A \text{ y } b \in B\}$.

Definición 2.3.2. Una relación F es llamada *función* si $(a,b) \in F$ y $(a,c) \in F$ implican que $b = c$.

Definición 2.3.3. Una función F es llamada *inyectiva* si $a, c \in DomF$ y $a \neq c$ implican $F(a) \neq F(c)$.

Definición 2.3.4. Una función $F : A \to B$ es llamada *sobreyectiva* si para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $F(a) = b$.

Definición 2.3.5. Una función F es *biyectiva* si F es inyectiva y sobreyectiva.

Ahora sí estamos en las condiciones de mostrar cómo se realiza una prueba de la forma «Existe», partiendo del siguiente ejemplo:

Proposición 2.3.3. Existe una correspondencia biyectiva entre $A \times B$ y $B \times A$.

Demostración. Buscamos una función $F : A \times B \to B \times A$ biyectiva.

Definimos una relación F como $F(a,b) = (b,a)$. Veamos primero que F es un función.

Si $((a,b),(b,a)) \in F$ y $((a,b),(c,a)) \in F$, entonces $(b,a) = F(a,b) = (c,a)$, por lo que $(b,a) = (c,a)$, y por tanto, F es función.

Veamos ahora que F es inyectiva, si $F(a,b) = F(c,d)$, entonces $(b,a) = (d,c)$, por lo que $b = d$ y $a = c$, y por lo tanto $(a,b) = (c,d)$.

Veamos ahora que F es sobreyectiva, sea $(b,a) \in B \times A$, entonces por cómo definimos F sabemos que existe $(a,b) \in A \times B$ tal que $F(a,b) = (b,a)$.

Por lo tanto, F es una función biyectiva y es lo que queríamos demostrar. ■

Hemos visto un ejemplo de cómo se demuestra una proposición de la forma «Existe», en la que construimos el objeto a partir de las definiciones que tenemos. Pero en algunas otras ocasiones nos piden demostrar que *Existe un único elemento* de cierto tipo, y para demostrar esto sólo basta exhibir un elemento que cumple con lo que se pide, luego suponer que existe otro elemento con las mismas propiedades, y observar que estas mismas propiedades nos conducen a que son el mismo elemento.

Por último, otro de los métodos de demostración conocido es la *prueba por inducción*. Esta se utiliza cuando se trata de demostrar «propiedades infinitas», que se aplican a infinitos objetos. Por ejemplo, si queremos decir que existe una propiedad que la cumplen todos los números naturales, no podemos probar número por número hasta terminar, pues los números son infinitos. Por ello, basta probar que hay un primer elemento que cumple la propiedad, luego suponer que la propiedad se cumple para una cantidad determinada de elementos, y después, con esa información, probar que la propiedad se cumple para el siguiente elemento del que ya habíamos supuesto como cierta la propiedad.

Veamos un típico ejemplo de este caso:

Proposición 2.3.4. La suma de los primeros n números naturales es $\frac{n(n+1)}{2}$.

Demostración. Veamos que 1 cumple. Es decir, si $n = 1$, entonces:

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Ahora, supongamos que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

Esta ecuación 1 es la *hipótesis inductiva*: la hipótesis es que la propiedad mencionada en 2.3.4 se cumple para un número n. A partir de esto, demostramos que esa propiedad también se cumple para el siguiente número, $n + 1$. Para ello, sustituimos $n+1$ por n en la propiedad, lo que nos da:

$$1+2+3+4+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \tag{2}$$

Tenemos que demostrar la ecuación (2). Para ello, sustituimos los primeros n números en (2). Si analizamos su lado derecho, este nos da:

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \tag{3}$$

Ahora, si desarrollamos (2) nos queda que:

$$\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n^2+3n+3}{2}$$

y si desarrollamos (3) nos queda que:

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2n+2}{2}=\frac{n^2+3n+3}{2}$$

Por lo que $1+2+3+4+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ se cumple, que era lo que había que demostrar. ■

La idea detrás de la inducción es simple. Si sucede que (hipótesis inductiva): *si* la propiedad se cumple para n elementos *entonces* también para el siguiente elemento de n, entonces podemos decir que dicha propiedad se hereda para *todos* los elementos a partir de n. Cuando la propiedad además se cumple para 1, podemos inferir que se cumple para *todos* los números naturales, $n \in \mathbb{N}$.

Con esto termino la parte de métodos de demostración.

2.4. Conclusión

Para finalizar el presente capítulo quiero anunciar lo que será el siguiente capítulo: en él hablaré sobre el famoso teorema de los cuatro colores y la controversia que hay en torno a la validez de su demostración. Para esto, nos adentraremos en la discusión de si la demostración de dicho teorema es válido, analizaremos los argumentos de quienes sostienen que la demostración no debería ser aceptada y de quienes sostienen que sí, entre ellos veremos si la validez del teorema se sostiene ante la postura de Easwaran y Tymoczko de que las pruebas son inspeccionables y transferibles.

Capítulo 3
El teorema de los cuatro colores

3.1. Conceptos básicos de teoría de grafos

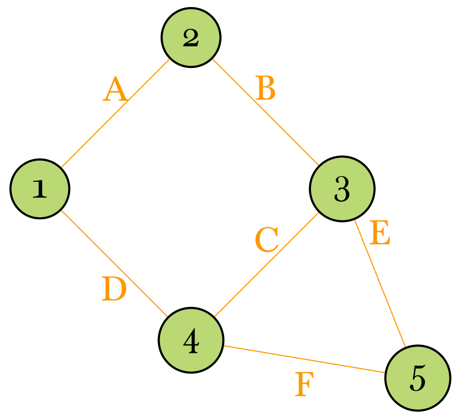
En teoría de grafos, el teorema de los cuatro colores afirma que son suficientes cuatro colores para colorear cualquier mapa de tal manera que regiones adyacentes tengan colores distintos. Esta afirmación fue propuesta en 1852 por Francis Guthrie. De Morgan, quien había sido profesor de Guthrie, escribió a Hamilton lo siguiente:

> Un estudiante mío me pidió hoy que le diera una explicación a un hecho que no sabía que lo fuera, y que todavía no lo sé. Afirmaba que si dividimos una figura arbitrariamente y la coloreamos de manera que regiones vecinas lleven colores distintos, entonces cuatro colores son necesarios, pero no más [8].

Ahora, ilustremos esta situación y formalicémosla [20].

Definición 3.1.1. Sean V y E conjuntos, V no vacío y E posiblemente vacío. A los elementos de V los llamamos *vértices* (*puntos*, *nodos*) y a los elementos de E los llamamos *aristas*. Sea F una función que va de las aristas a los vértices. Decimos que $G = (V, E, F)$ es una *gráfica*. $V(G)$ denota a los vértices de G y $E(G)$ a las aristas de G.

Ejemplo 3.1.1. En esta gráfica, los números son los vértices y las letras representan las aristas:



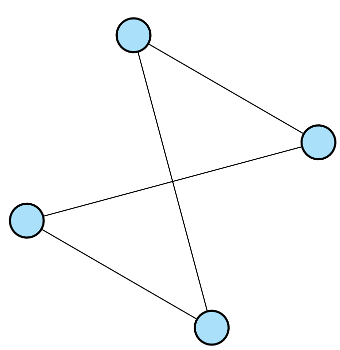
Definición 3.1.2. Una *coloración* de una gráfica G es una función $c : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$, con $k \in \mathbb{N}$.

Definición 3.1.3. Una *buena coloración* de una gráfica G es una coloración c tal que si existen dos vértices u y v unidos por una arista, entonces $c(u) \neq c(v)$.

Definición 3.1.4. El *número cromático* de G es $X(G) := \text{mín}\{k$: existe una buena coloración de G que usa k colores$\}$.

Definición 3.1.5. Una gráfica es *plana* si se puede dibujar en un plano sin que dos de sus aristas se crucen.

Ejemplo 3.1.2. El siguiente ejemplo es de una gráfica no plana:



En vista de las anteriores definiciones ya podemos enunciar el teorema de los cuatro colores de manera más formal.

Teorema 3.1.1 (Teorema de los cuatro colores). Si G es una gráfica plana, entonces $X(G) \leq 4$.

Durante muchos años los intentos por resolver el problema no dieron frutos, fue hasta 1976 que los matemáticos Appel y Haken lograron resolverlo con la ayuda de un ordenador.

3.2. Discusión filosófica del teorema de los cuatro colores

Appel y Haken ofrecieron ante la comunidad matemática una prueba, la cual incluía el uso de ordenadores, esto suponía ir en contra de toda una tradición de matemáticos de más de 2500 años, pues durante todo ese tiempo sólo se había acostumbrado a demostrar con los métodos más usuales: prueba directa, contradicción, contrapuesta, inducción, etc. O, como se suele decir: sólo se realizaban pruebas *a lápiz y papel*. La comunidad matemática se había quedado sorprendida ante tal prueba. Cuentan que cuando Wiles presentó la última línea de la demostración del último teorema de Fermat, el auditorio entero regocijó de la emoción, mientras que el día que Appel y Haken presentaron su última línea, toda la audiencia se quedó en silencio y nadie aplaudió [3]. ¿A qué se debía esto? Sin duda, a que la prueba utilizaba un ordenador.

La prueba realizada con ayuda de un ordenador abrió todo un debate entre los matemáticos y filósofos, ya que sería la primera vez en la historia en que una computadora juega el rol del lápiz y el papel en una demostración. Muchos matemáticos aceptaron la prueba y otros tantos la rechazaron. Cabe destacar que las razones por los cuales se argumenta a favor o en contra de la validez de dicha prueba poco tienen que ver con argumentos matemáticos, pues son más argumentos de índole filosófica, por lo que no nos adentraremos en cómo se realizó la demostración del teorema de los cuatro colores, pues, más en general, lo que aquí nos interesa es la validez de las demostraciones hechas con ayuda de ordenadores.

A continuación, daré a conocer las razones que se dieron para justificar la validez de la prueba, así mismo daré a conocer las razones que se dieron para sostener que la prueba no era válida. Posteriormente, discutiré con ambas posturas.

3.3. Las críticas de Tymoczko

Thomas Tymoczko, siguiendo su propia línea de argumentación se pregunta si la prueba del teorema de los cuatro colores es *convincente*, *formalizable*, e *inspeccionable* [18, pp. 70–73].

Menciona que la prueba de dicho teorema es convincente, ya que en realidad muchos matemáticos han aceptado la prueba, pero otros, aquellos matemáticos que se formaron antes del desarrollo de los ordenadores, continúan insatisfechos con la prueba realizada por Appel y Haken. Es claro que, del hecho de que la prueba sea o no sea convincente no se sigue que la prueba es válida, pues el que sea convincente es una característica más subjetiva que objetiva de la prueba: una persona continuamente se convence fácilmente de argumentos que resultan inválidos.

Ahora bien, ¿la prueba de dicho teorema es inspeccionable? Según Tymoczko, la prueba no puede ser inspeccionable. Pues, en palabras de este autor:

> Los matemáticos no pueden resolver los pasos faltantes por sí mismos, ni trabajando durante toda su vida lo conseguirían, y estos pasos tampoco se encuentran registrados en algún lugar. Lo único que quedó registrado es la evidencia de que alguna vez una computadora resolvió los pasos faltantes (*ibid.*, p. 71).

Si consideráramos que los pasos realizados en un ordenador son un método de prueba, entonces trivialmente se cumple que dicho teorema es inspeccionable. Pero esto supone un gran problema, a saber, que este nuevo método de prueba es equiparable con preguntarle a alguna especie de oráculo si los pasos intermedios de una prueba —que no puede ser realizada en tiempo de vida humana— están bien justificados dentro de un sistema matemático. Esta especie de oráculo, Tymoczko lo ejemplificó con un marciano llamado «Simón» (*Ibid.*, p. 72).

Simón no solamente era una eminencia de las matemáticas, sino que sus matemáticas también eran más avanzadas que las matemáticas de la Tierra. De este modo, cuando alguna prueba realizada por un terrícola requiriera de mucho tiempo de elaboración, es decir, una prueba que considerara cientos de casos o más, y por economía de tiempo la prueba no pudiera ser llevada a cabo en su totalidad, entonces el matemático de la tierra acudía a Simón a preguntarle sobre el resultado de los pasos faltantes.

¿Cuál es el problema de recurrir a Simón? Pues que muchos de los nuevos teoremas en las matemáticas estarán justificados bajo el lema de «Simón dice», o «Fue verificado por Simón», o alguna frase similar, por lo que algunos podrían aprovecharse de esta situación y justificar enunciados y proposiciones bajo estas frases aún sin siquiera haber acudido a Simón. Esto bien podría solucionarse acudiendo directamente a Simón y preguntarle sobre la afirmación de la cual se hace uso de dichas frases. Pero el problema no termina ahí, ya que los matemáticos terrícolas necesitan depositar extrema confianza en que Simón es un ser moralmente correcto que jamás tendría intenciones de engañarnos, o que incluso él, a pesar de ser un genio y tener matemáticas más avanzadas no se pudiera equivocar. De cualquier modo, optar por preguntarle a Simón parece ser que no es buena idea; de hecho, Tymoczko menciona que no hay mucha diferencia entre las frases «Fue verificado por Simón» y «La prueba hizo uso de un ordenador» (*ibid.*, p. 72). Se podría concluir entonces que la prueba del problema de los cuatro colores, según Tymoczko, no es inspeccionable, porque los pasos realizados con la ayuda de un ordenador son inaccesibles para el entendimiento humano.

Por último, ¿La prueba del teorema de los cuatro colores es formalizable? Siguiendo con Tymoczko (*ibid.*, p. 72), muchos matemáticos están de acuerdo en que existe la prueba formal de dicho teorema, pero la creencia de que existe esta prueba formal descansa en que hemos aceptado previamente el uso de ordenadores para realizar la prueba, esto es, pensamos que existe una prueba formal porque ya hemos aceptado como válido el uso de la computadora. Esto no descarta que pueda existir en un futuro una prueba formal de dicho teorema, simplemente nos dice que de momento no hay tal prueba formal. En resumen, para Tymoczko la prueba del teorema de los cuatro colores puede ser convincente para aquellos matemáticos que se formaron junto con el desarrollo de los ordenadores y no ser convincente para quienes se formaron antes del desarrollo de los ordenadores. Además, esta prueba no es inspeccionable, y de momento no podemos decir que exista una prueba formal a menos que supongamos que es válido el uso de ordenadores para realizar pruebas.

Por otro lado, Tymoczko argumenta que la prueba del teorema de los cuatro colores es más un experimento bien realizado que una prueba genuina (*ibid.*, p. 74) y en ese sentido, aceptar la prueba del teorema de los cuatro colores implicaría que hemos llegado a conocer una verdad matemática *a posteriori.* Esto por diversas razones. La primera, que su verdad depende de la confianza depositada en el programa y en la computadora. La segunda, la confianza en el ordenador depende de la ingeniería y la física detrás de ese ordenador, por lo que, para este autor, apelar a los ordenadores es comparable con la tarea que hace el físico al usar los instrumentos de laboratorio, como el telescopio, pues el físico deposita su confianza en la óptica que hay detrás del telescopio, pero sabemos que estos instrumentos de laboratorio tienen un rango de error y pueden fallar. Por último, para intentar probar dicho teorema se construyó un código cuya finalidad es probar en todos los casos posibles la afirmación de que todo mapa plano es 4-coloreable, y al ser introducido a la computadora esta nos arroja información sobre si se cumple o no tal afirmación. Por todo esto, lo único que nos dice esta prueba es que *una máquina programada con cierto código arroja ciertos resultados afirmativos*. Esto, según Tymoczko, es más un experimento que una prueba genuina. En el siguiente capítulo analizaré con más cuidado el concepto de *experimento*.

3.4. La propuesta de Easwaran

Dejaré de lado por un momento a Tymoczko y pasaré a exponer la postura de Easwaran con respecto a la pruebas realizadas con la ayuda de computadoras.

Recordemos que, como se definió en el primer capítulo, una prueba es *transferible* si y sólo si la secuencia de proposiciones constituyen toda la prueba, esto nos sugiere que es irrelevante el método usado para realizar una prueba siempre y cuando esta cumpla con ser transferible. Dado que esta es una noción muy similar a la noción de inspeccionabilidad, uno estaría inclinado a pensar que el teorema en cuestión no es transferible, pero Easwaran opina diferente:

> Pienso que las pruebas por computadora en principio también son transferibles, aunque esta situación es poco clara. Si el autor de la prueba proporciona el código, entonces el lector competente debería ser capaz de convencerse de la conclusión al igual que el autor [6, p. 356].

Así, según Easwaran [6, p. 356], las pruebas por ordenador son un caso límite de transferibilidad, en el que si, por ejemplo, la prueba resulta ser excesivamente larga, es decir, que contenga cientos de casos o más a probar, entonces fácilmente el lector de la prueba puede recurrir al código que le proporcionó el autor y verificar por sí mismo los segmentos de la prueba que no son publicados.

Una objeción que se le puede hacer a la postura de que una prueba por ordenador es transferible es que no es claro cómo el lector de la prueba pueda verificar la totalidad de la prueba por sí mismo, esto es, a pesar de que el lector tenga el código, si la prueba es muy larga, sólo se puede verificar un pequeño número de segmentos, pero tal vez no sea suficiente el tiempo de vida humana para lograr verificar todos los segmentos que constituyen la totalidad de la prueba. Ahora, podríamos pensar que se le asigna a un grupo de personas el código de la prueba, de tal manera que cada uno se encargue de verificar un cierto segmento de la prueba para que al reunirse pudiesen confirmar la veracidad de la prueba. Evidentemente, esto nos ahorraría una gran cantidad de tiempo, pero nos enfrentamos a un nuevo problema, a saber, que cualquier persona de dicho grupo necesitaría depositar confianza en que alguno de sus compañeros hizo bien su trabajo y no se equivocó al verificar la prueba, incluso habría que depositar confianza en que algún compañero no tenga intenciones de mentirnos.

3.5. La respuesta de Swart a Tymoczko

Ahora, para continuar con la discusión, revisaré la respuesta de E. R. Swart a Tymoczko.

Swart sostiene durante todo su ensayo que la ayuda de los ordenadores para realizar pruebas está justificado, y a lo largo de sus críticas a Tymoczko [17], sostendrá que es mejor seguir considerando a las proposiciones matemáticas como verdades *a priori* sin importar cual sea el método usado para llegar a la conclusión de la proposición.

Para justificar la ayuda de los ordenadores, Swart argumenta que la implementación de los algoritmos en los ordenadores resulta ser eficaz [17, p. 7]. Esto quiere decir que los algoritmos logran hacer lo que pretenden, y nos lo muestra con un ejemplo. Antes de mostrar el ejemplo es necesario que dé tres definiciones más de la teoría de gráficas [20, p. 43].

Definición 3.5.1. Un *bosque* es una gráfica que no contiene ciclos.

Definición 3.5.2. Un *árbol* es un bosque conexo, es decir, todos sus vértices están conectados por alguna arista o alguna trayectoria de aristas.

Definición 3.5.3. Una gráfica tiene *peso* si a cada arista de la gráfica le asignamos un valor, es decir, algún número entero. (El peso de una gráfica G viene dado por una función $p : E(G) \to \mathbb{Z}$.)

El ejemplo de Swart no es otro más que el algoritmo usado para encontrar un árbol de peso máximo dada cualquier gráfica conexa [17, p. 6], dicho algoritmo dice lo siguiente:

Paso 1 Elija una arista de peso máximo tal que:

a) Aún no ha sido elegida.

b) No genera un ciclo con las aristas que ya fueron escogidas.

Paso 2 Si el número de aristas elegidas es $n - 1$, deténgase, de lo contrario, vuelva al paso 1.

Swart llama a este algoritmo «el algoritmo ingenioso» [17, p. 7], pues menciona que es bastante sencillo demostrar que dicho algoritmo logra realizar lo que se propone, y no sólo eso, sino que este algoritmo es bastante fácil de implementar a mano para gráficas pequeñas. El problema surge cuando se tienen gráficas tan grandes que resulta imposible, en términos de tiempo, implementar este algoritmo a mano, por lo que es más fácil poner a trabajar a una computadora para que ejecute el algoritmo y nos ahorre tiempo. De modo que, para Swart [17, p. 3], existen cuatro categorías para las pruebas que requieren una verificación por casos, estas son:

1. Las pruebas que pueden realizarse en nuestras cabezas.
2. Las pruebas que no podrían realizarse sin la ayuda de lápiz y papel.
3. Las pruebas que casos pueden realizarse con un esfuerzo inmenso y se requiere de cientos de horas para completar la prueba.
4. Las pruebas que son imposibles de completar con el simple cálculo manual y para su realización se requiere la ayuda de un ordenador.

Un ejemplo de la categoría 3) es la primalidad de números demasiado grandes que bien podrían verificarse a mano pero hacerlo requiere demasiado tiempo, por lo que se opta por la ayuda de un ordenador. Y un ejemplo evidente de la categoría 4) es el teorema de los cuatro colores.

Así, para Swart, el uso de ordenadores está justificado en las demostraciones, pues los algoritmos son tales que se puede demostrar que logran lo que se desea, y no sólo eso, sino que los algoritmos utilizados pueden ser implementados a mano por los matemáticos, pero dado que la capacidad del cálculo manual es ineficiente, se opta por el uso de un ordenador. Por ello, la ayuda de las computadoras no introduce experimentos en las matemáticas.

Para concluir con la crítica de Swart a Tymoczko, veamos por qué para Swart es más conveniente seguir considerando todas las verdades matemáticas como *a priori* y no como algunas *a priori* y otras *a posteriori*, esto sin importar cómo se lleguen a ellas [17, p. 1]. Esto es, Swart no comparte la idea de Tymoczko, quien considera que si aceptamos la prueba del problema de los cuatro colores, entonces esta es una nueva verdad matemática la cual ha sido conocida a posteriori: para Swart, el teorema de los cuatro colores ha sido conocido *a priori*.

Según Swart [17, p. 4], «*a priori*» puede significar lo siguiente:

a) Una verdad que posee validez universal y necesaria; es decir, una verdad que es verdadera en todos los mundos posibles.

b) Una verdad cuya validez puede establecerse independientemente de la experiencia sensorial.

Ahora bien, si tomamos (a) como la definición de «*a priori*», y decimos que las verdades de las matemáticas son *a priori*, entonces podemos conceder que estas verdades matemáticas «son verdaderas antes e independientemente del descubrimiento de una prueba real por parte de un ser humano real» [17, p. 5]. Por ello, esto no nos dice nada acerca de cómo conocer dichas verdades matemáticas, es decir, la naturaleza de las verdades matemáticas no cambia si se ha llegado a ellas mediante pruebas tradicionales o mediantes pruebas con ayuda de ordenadores. Por otro lado, si las pruebas con la ayuda de un ordenador están justificadas y admitimos que este método de prueba nos lleva a conocer verdades matemáticas *a posteriori*, entonces tenemos el siguiente problema. Existen algunos números tan grandes que para calcular su primalidad se necesita la ayuda de ordenadores, y hay otros números suficientemente pequeños que para calcular su primalidad basta con lápiz y papel, por lo que tendríamos que admitir que existen números primos que son *a priori* mientras que otros números primos son *a posteriori*.

Para profundizar en esta discusión, voy a analizar los conceptos de *a priori* y *a posteriori* en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Lo *a priori*, lo *a posteriori* y la demostración

4.1. Introducción

Finalicé el capítulo anterior mencionando la respuesta de Swart a Tymoczko, en particular, mencioné la discusión sobre si el teorema de los cuatro colores es conocido *a priori* o *a posteriori*. Para poder continuar con dicha discusión, en este capítulo analizaré las nociones de *a priori* y *a posteriori* en la naturaleza del conocimiento matemático, y para ello me apoyaré en dos autores: Kant y Frege. Voy a utilizar a estos dos autores pues ambos son considerados clásicos en la literatura sobre el tema de los juicios *a priori* y *a posteriori*, en particular, ambos tienen una filosofía de las matemáticas que consta de la aplicación de dichas categorías epistémicas. Luego, analizaré cómo sería una prueba bien hecha desde las distintas nociones que se tienen acerca del conocimiento matemático. Y, por último, discutiré si las pruebas con la ayuda de computadoras nos llevan a un conocimiento *a priori* o *a posteriori* de las proposiciones matemáticas.

4.2. El conocimiento matemático según Kant

Kant define el conocimiento *a priori* como aquel conocimiento que es independiente de toda experiencia, mientras que el conocimiento *a posteriori* es empírico, es decir, el que sólo es posible mediante la experiencia [12, p. 41]. El conocimiento *a priori* se caracteriza, según Kant, por poseer universalidad y necesidad. Por otro lado, el conocimiento *a posteriori* se caracteriza por no traer siempre consigo universalidad ni necesidad. Otros conceptos que Kant definió son los de *juicios analíticos* y *juicios sintéticos*. Los primeros son aquellos juicios en donde el predicado pertenece al sujeto, esto es, el predicado ya está implícito en el sujeto; los segundos son aquellos en los que el predicado no se encuentra contenido en el sujeto [12, p. 45].

Ahora bien, ¿cuál es, según Kant, la naturaleza del conocimiento matemático? De acuerdo con este autor, los juicios de las matemáticas son todos sintéticos *a priori* [11, p. 47]. Esto debido a que los juicios de la matemática son necesarios y universales, por lo que son juicios *a priori*. Además, son sintéticos, pues estos juicios no pueden derivarse de los conceptos ya dados, sino que tenemos que remitirnos hasta la intuición para conocer la verdad del juicio. Esto puede entenderse mejor con el siguiente ejemplo: piénsese en el axioma de la geometría euclidiana que dice: «la línea más corta que pasa entre dos puntos es la línea recta». Según Kant, este axioma es sintético, pues el concepto de línea recta, por sí mismo, no nos dice nada con respecto a la magnitud o la distancia, por lo que el concepto de «la más corta» es un concepto añadido; en este caso, es un añadido de la intuición del espacio [11, p. 48]. Otro ejemplo que ayudará mejor a entender esta situación es el famoso argumento de la suma de $5 + 7 = 12$. Este nos dice que el número 12 no puede ser deducido de la suma de 5 y 7, ya que el concepto de suma de tales números sólo contiene la unión de dos números en un solo, pero no nos dice qué número específico es. Para saber qué número resulta de la unión de 5 y 7 debemos acudir a la intuición que tenemos de cada número y descomponerlo en puntos; así, al contar los 5 puntos junto con los 7 puntos obtenemos 12 puntos. En resumen, Kant considera que las proposiciones de las matemáticas son todos juicios sintéticos *a priori* porque contienen universalidad y necesidad. Además, sus conceptos se construyen mediante la intuición y no a través de la descomposición de otros conceptos.

4.3. El conocimiento matemático según Frege

Pasando con Frege, este filósofo considera que las categorías de *a priori* y *a posteriori*, y sintético y analítico, refieren a la *justificación* que hay para creer un juicio y no al *contenido* del juicio mismo, es decir: «se juzga el fundamento último sobre el que descansa la justificación para tenerla por verdadera» [9, p. 383]. Frege define «analítico» y «sintético» de la siguiente manera: si al intentar justificar una verdad sólo se apela a definiciones y leyes de la lógica, entonces podemos decir que esta es una verdad analítica; si, por el contrario, para justificar una verdad se necesita apelar a otras áreas del conocimiento y no a verdades lógicas, entonces se trata de un juicio sintético [9, p. 383]. Con respecto a las categorías de *a priori* y *a posteriori*, Frege las define como sigue: una verdad que se produce *a posteriori* es aquella que sólo puede darse apelando a los hechos; mientras que una verdad *a priori* es aquella que se produce sólo apelando a las leyes generales [9, p. 383].

Ahora bien, en cuanto a la naturaleza de las proposiciones matemáticas, Frege opina diferente a Kant, pues piensa que estas son juicios analíticos *a priori* [9, p. 469]. Esto porque ellas pueden ser probadas con pasos puramente lógicos, y por tanto, ya están contenidas en las definiciones. Por ejemplo, se puede probar que 2+2=4 como sigue [9, p. 386].

Definición 4.3.1. 2 es 1 y 1.

Definición 4.3.2. 3 es 2 y 1.

Definición 4.3.3. 4 es 3 y 1.

Demostración. Por lo que,

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1)$$

Suponiendo que la suma es asociativa tenemos que:

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$$

Luego,

$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1$$

Y, por la definición 4.3.3:

$$3 + 1 = 4.$$

■

Este argumento sólo nos muestra que los juicios de la aritmética pueden ser analíticos *a priori*, pero no nos dice mucho sobre por qué tales juicios no pueden ser sintéticos *a priori*. Frege argumenta que no podemos verificar mediante la intuición la suma de números altamente grandes, pues, por ejemplo, en la suma 135,664 + 37,863 = 173,527, no es posible tener la intuición de 135,664 y 37,863 puntos, para concluir en nuestra intuición que la unión de dichos números resulta en 173,527 puntos [9, p. 385]. Por lo que habría fórmulas de números muy grandes, tales que, para saber su verdad, se requeriría una prueba; mientras que las fórmulas de números pequeños serían evidentes con sólo recurrir a la intuición. Pero esto es un gran problema pues tendríamos que hacer una distinción fundamental entre números pequeños y números grandes, y no tenemos un criterio objetivo para ello. En resumen, estos juicios no son *a posteriori* sino *a priori* porque no se requiere apelar a hechos empíricos para justificarlos; como para ello basta con apelar a definiciones y verdades de la lógica, también son analíticos.

Por otro lado, cabe señalar que Frege consideraba que los juicios analíticos *a priori* corresponden a la aritmética, ya que en la geometría las cosas parecen ser diferentes, pues:

> Un punto geométrico considerado en sí no se distingue de ningún otro; lo mismo vale para líneas y planos. Sólo los distinguimos cuando varios puntos, o líneas, o planos son aprehendidos en una sola intuición. Por tanto, en la geometría resulta explicable que las proposiciones generales hayan de derivarse de la intuición [9, p. 398].

Sin embargo, hoy en día sabemos, gracias al trabajo de Hilbert, *Fundamentos de la Geometría*, que también las proposiciones de la geometría pueden ser probadas por leyes lógicas y definiciones [10, p. 83].

4.4. Las pruebas desde las perspectivas kantiana y fregeana

Pasaré ahora a hacer un análisis de cómo sería una prueba desde la perspectiva de Kant y Frege.

Comenzaré con Kant. Tomando en cuenta que, para él, los juicios de las matemáticas son todos juicios sintéticos *a priori*, entonces podemos pensar que cada paso dentro de una prueba debería ser una proposición que sea necesaria, y que además, o bien es un juicio analítico o bien es un juicio sintético. El caso que nos interesa evidentemente es cuando un paso de la prueba es un juicio sintético, ya que los juicios analíticos sólo serían definiciones. Así, un juicio sintético dentro de una prueba, al ser también *a priori*, debe estar fundado en la intuición, por lo que algunos pasos dentro de las prueba estarán bien justificados por ser evidentes para la intuición, estos pasos pueden verse como lemas que carecen de una prueba.

Para Frege las cosas cambian significativamente, al menos en las pruebas aritméticas y en lógica, pues cada paso en la prueba debe contener enunciados analíticos *a priori*, esto es, cada paso dentro de la prueba debe justificarse mediante definiciones o mediante leyes lógicas. Notemos que esta manera de justificar las pruebas no nos dice sobre si los pasos han de deducirse siempre de un paso previo, pero podemos pensar que, para probar una afirmación, está permitido tomar enunciados ya probados que pertenezcan a un determinado sistema matemático en donde nos encontremos trabajando.

En conclusión, Kant aceptaría que una prueba tenga pasos en donde la justificación última de estos es que sean evidentes para la intuición, y Frege sólo aceptaría aquellas pruebas en las que sea claro cómo cada paso fue deducido por medio de una definición o por una ley lógica.

Por otro lado, es importante aclarar si la categoría de los juicios analíticos *a priori* y la de los sintéticos *a priori* se aplican a las cosas de las cuales hablan las matemáticas, esto es, a los contenidos, o bien, se aplican a la justificación que tenemos para emitir un juicio matemático. Dicho de otro modo, nos preguntamos: ¿Las categorías analítico *a priori* y sintético *a priori* las aplicamos al contenido del juicio o a la base sobre la cual conocemos la verdad de un juicio? Frege es claro en esto y, como cité al comienzo de este capítulo, cree que tales categorías se aplican únicamente a la justificación que tenemos para emitir el juicio. Kant no es muy claro en esto. Lo cierto es que de momento no resolveremos esta cuestión aquí, sólo veremos qué consecuencias tiene para la prueba aceptar una u otra noción sobre el marco de aplicación de dichas categorías epistémicas, es decir, veremos qué implicaciones hay para la prueba si aceptamos que las categorías epistémicas se aplican sobre el contenido de los juicios, o bien, qué implicaciones hay para la prueba si aceptamos que las categorías epistémicas se aplican sobre la justificación que tenemos para emitir nuestros juicios matemáticos.

Antes de continuar, me gustaría llamar «*kantiana*» a la concepción de que las categorías epistémicas han de aplicarse al contenido de los juicios, y «*fregeana*» a la concepción de que las categorías epistémicas han de aplicarse a la justificación de que tenemos para emitir juicios. Al nombrar así a estas dos concepciones no estoy suponiendo que necesariamente correspondan a una imagen fiel a estos dos autores: no quiero afirmar categóricamente que estos autores hayan sostenido estas posturas respectivamente, pues esto requeriría de una exégesis más detallada de la que me permite el enfoque de esta tesis. Más bien, es una manera útil de distinguir ambas concepciones, que conlleva cierta similaridad con una lectura inicial y razonada de ambos autores.

Ahora revisemos la concepción kantiana. Si el contenido de los juicios matemáticos es *a priori*, entonces decimos que el contenido de dichos juicios es independiente de la experiencia, por lo que esto no nos dice nada sobre cómo llegar a conocer dichos juicios; si procedemos mediante un análisis o síntesis de los conceptos involucrados en dichos juicios, resulta un tanto irrelevante, pues no afecta en nada a la naturaleza del contenido de los juicios. Así, una verdad matemática seguirá siendo *a priori* a pesar de que hayamos llegado a ella por vías puramente empíricas. Esto resulta en un buen argumento para quienes defienden la ayuda de los ordenadores en las pruebas, pues usar o no el ordenador no cambia en nada la naturaleza *a priori* de los juicios matemáticos.

Por otro lado, si pensamos que las categorías epistémicas se aplican a la justificación que tenemos para emitir nuestros juicios matemáticos, esto es, la concepción fregeana, entonces decimos que es esta justificación la que es *a priori*. Así, si por *a priori* entendemos aquello que es independiente de la experiencia, entonces nuestras justificaciones para emitir tales juicios deben ser todos independientes de la experiencia. Esto resulta ser importante para la cuestión de las pruebas, pues una prueba, como mencioné en el primer capítulo, brinda una justificación, por lo que en este sentido se pide que las pruebas procedan mediante métodos que no dependan de nuestra experiencia. ¿Qué métodos son estos? Siguiendo a Kant, diríamos que estos juicios son sintéticos, por lo que deben proceder de nuestra intuición pura; siguiendo a Frege, estos juicios deben ser analíticos, por lo que las pruebas deben proceder mediante definiciones y leyes lógicas.

Nos preguntamos ahora: ¿Qué consecuencias tiene para las pruebas por ordenador las diferentes nociones que acabamos de mencionar de estas categorías epistémicas?

1. Si consideramos la concepción kantiana, es decir, si consideramos que el contenido de los juicios matemáticos es *a priori*, entonces podemos decir que tales juicios son independientes de la experiencia, por lo que si procedemos en una demostración con la ayuda de un ordenador o si procedemos con los métodos de prueba tradicionales, no cambiamos en nada la naturaleza *a priori* del contenido de los juicios matemáticos.

2. Si consideramos la concepción fregeana, es decir, si consideramos que la justificación de nuestros juicios matemáticos son *a priori*, y por *a priori* entendemos aquellos enunciados que son independientes de nuestra experiencia, entonces según nuestros análisis hechos hasta ahora, tenemos dos maneras de proceder en una demostración, ambas con sus consecuencias particulares para una prueba por ordenador. Estas son:

   a) De manera que los enunciados dentro de la prueba sean sintéticos. En tal caso, estos pasos han de justificarse en que son evidentes para la intuición. ¿Son los pasos realizados por el ordenador evidentes para la intuición? Parece ser que no, pues los ordenadores deben repasar miles de casos que un ser humano en un tiempo de vida no podría, por lo que existen casos que una persona no puede intuir simplemente porque no tendría tiempo para hacerlo.

   b) De manera que los enunciados dentro de la prueba sean analíticos. En este caso, los pasos dentro de las pruebas han de estar ya contenidos de algún modo en las premisas o los lemas que ya han sido probados; también, dichos pasos han de deducirse mediante definiciones y leyes lógicas. ¿Son analíticos los pasos realizados por el ordenador? Me

> parece que es fácil responder afirmativamente a esta cuestión, pues sabemos que los programas de los ordenadores funcionan siguiendo reglas lógicas.

La cuestión que, me parece, es más importante aquí, es la siguiente: ¿Son las pruebas por ordenador una vía *a priori*? O dicho de otro modo, ¿Las pruebas por ordenador realmente son un método que es independiente de la experiencia? En el segundo capítulo mencioné que Tymoczko considera que introducir ordenadores en las pruebas es equivalente a realizar experimentos, esto porque depositamos nuestra confianza en que los ordenadores van a funcionar correctamente, pues debemos confiar en la ingeniería que hay detrás de una computadora. Esto es comparable con el trabajo del físico, quien deposita confianza en el telescopio y en la teoría de la óptica para poder hacer sus observaciones.

Antes de continuar, me gustaría aclarar que por «*experimento*» entiendo un procedimiento realizado con la finalidad de validar o invalidar una afirmación, dicho procedimiento puede llevarse a cabo más de una vez, en cada caso con la misma finalidad de confirmar la afirmación. De modo más simple, podemos decir que un experimento es un procedimiento empírico, mediante el cual se pone a prueba un modelo científico. Además, cabe señalar que los experimentos, al menos en las ciencias naturales hoy en día, involucran instrumentos físicos, los cuales han sido desarrollados como aplicaciones de teorías científicas.

Esta idea de que introducir ordenadores a las pruebas es comparable con el uso de instrumentos de laboratorio por parte de los científicos me parece debatible, por la siguiente razón: el código de la prueba puede reproducirse en distintas computadoras y arrojar exactamente los mismos resultados, mientras que los experimentos realizados por los científicos siempre traen consigo un rango de error cada que se reproduce nuevamente el experimento. Así, podemos pensar que las pruebas por ordenador no introducen experimentos en el mismo sentido en que lo hace la ciencia, pero a su vez, este método de prueba, no es del todo independiente de la experiencia, pues hay que poner nuestra confianza en la ingeniería detrás del ordenador.

3. Por último, nos queda considerar cuando *a priori* se aplica a la justificación que tenemos para emitir juicios, esto nuevamente es la concepción fregeana, pero además, consideramos que *a priori* significa, en el sentido de Frege, aquel conocimiento que se produce sólo apelando a leyes generales. En este caso no hay mucho por decir, ya que lo *a priori* se identifica con lo analítico, de modo que si pensamos que las matemáticas son *a priori*, entonces decimos que sus enunciados han de deducirse mediante definiciones y leyes lógicas. Por lo que, como mencioné anteriormente, podemos conceder que los pasos realizados por un ordenador en una prueba son analíticos, ya que los programas en los ordenadores funcionan bajo leyes lógicas.

Por el momento es suficiente con el análisis de las categorías epistémicas aplicadas a la noción de prueba. Regresaré ahora a la discusión que dejé pendiente en el segundo capítulo, a saber, la discusión entre Swart y Tymoczko.

4.5. La discusión entre Swart y Tymoczko

Recordemos que Tymoczko piensa que el teorema de los cuatro colores, de estar justificada su prueba, es una verdad matemática conocida *a posteriori*; mientras que Swart considera que es mejor seguir pensando que las proposiciones de la matemática son verdades *a priori* sin importar cómo estas lleguen a ser conocidas.

A partir de aquí argumentaré que la crítica de Swart a Tymoczko no se sostiene ya que ambos parten desde diferentes posturas. Esto es, mostraré que

Swart considera que las categorías epistémicas se aplican al contenido de los juicios matemáticos, y que Tymoczko considera que dichas categorías se aplican a la justificación que tenemos para emitir nuestros juicios matemáticos. Dicho de manera más simple, Swart argumente desde la postura kantiana, mientras que Tymoczko argumenta desde la postura fregeana.

Tymoczko considera que si aceptamos la prueba del teorema de los cuatro colores, entonces tenemos que aceptar que dicho teorema es una verdad matemática que ha sido conocida *a posteriori* [18]. Esto nos sugiere que dicho teorema es una verdad matemática a la cual se ha accedido de manera *a posteriori*, esto es, que el método por el cual fue probado es un método *a posteriori*, por lo que Tymoczko está considerando que la justificación para emitir el juicio de que todo mapa plano es 4-coloreable es la que resulta *a posteriori*.

Por su parte, Swart considera que «*a priori*» puede significar:

1. Una verdad que posee validez universal y necesaria; es decir, una verdad que es verdadera en todos los mundos posibles.
2. Una verdad cuya validez puede establecerse independientemente de la experiencia sensorial.

De hecho, Swart menciona que podemos poner la definición 1) en línea con la definición 2) para que ambas sean equivalentes [17, p. 5], para esto cambiamos 2) por:

3. Una verdad cuya validez puede establecerse en principio sin recurrir a la experiencia sensorial del mundo físico.

Teniendo en cuenta 1), como ya mencioné en el capítulo anterior, podemos pensar que las verdades matemáticas son verdades antes e independientemente del descubrimiento de una prueba por parte de un ser humano; por lo tanto, resulta evidente que Swart aplica la categoría *a priori* al contenido de los juicios matemáticos. Sin embargo, parece ser que en 3) se está considerando que la categoría *a priori* se aplica a la justificación de los juicios, pues habla de cómo se puede establecer la validez de una verdad, que en este caso es sin apelar a la experiencia sensorial.

Así, Tymoczko y Swart tienen diferentes puntos de vista con respecto a la aplicación de las categorías epistémicas en los juicios matemáticos; pues el primero, está considerando que la justificación del teorema de los cuatro colores es *a posteriori*; mientras que el segundo, está considerando que el contenido de dicho teorema es un contenido *a priori*.

El problema que parece haber de fondo con la postura de Swart es que se están ligando a las nociones modales con las categorías epistémicas; es decir, Swart parece estar confundiendo la necesidad del contenido de las matemáticas con la aprioridad con la cual se suele proceder en matemáticas.

Un ejemplo sencillo de cómo pueden estar separadas estas dos nociones es el siguiente: piense en una verdad matemática, por ejemplo, el famoso teorema de Pitágoras que dice que para cualquier triángulo rectángulo de lados a, b e hipotenusa c, se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$. Es bien sabido que dicho teorema se conocía mucho antes de que los griegos dieran una demostración formal de este hecho. El conocimiento de este teorema por parte de los egipcios dependía en gran medida de sus observaciones y su manejo realizado sobre figuras geométricas. Podemos pensar que los griegos llegaron al conocimiento de esta verdad matemática por una vía *a priori*, mientras que los egipcios llegaron al conocimiento de esta verdad por una vía *a posteriori*. Aquí no estoy diciendo que toda verdad matemática puede ser conocida tanto *a priori* como *a posteriori*, de ser así ya habríamos acabado con el problema del teorema de los cuatro colores y declararíamos que su prueba está justificada, sea como sea. De hecho, el conocimiento de una verdad matemática por ambas vías sólo sucede con casos muy sencillos en los que nuestra experiencia puede tener acceso.

Ahora, si no se me concede el anterior ejemplo como un caso en el que las nociones modales están separadas de las categorías epistémicas, sugiero este otro ejemplo: la proposición expresada por la oración «5+4=9 o bien el número de planetas es 9» sabemos que es verdadera pues ambos disyuntos son verdaderos, más aún, 5+4=9 es una verdad necesaria. Y dicha proposición puede ser conocida *a priori* si una persona deduce analiticamente que 5+4 es igual a 9, y después infiere que «5+4=9 o bien el número de planetas es 9». Pero también puede ser conocida *a posteriori* por una persona que, estudiando el sistema solar mediante un telescopio, haya descubierto que el número de planetas es 9 y posteriormente declare que «5+4=9 o bien el número de planetas es 9».

El último ejemplo que quiero presentar para sostener la postura de que la noción modal de necesidad no se encuentra ligada a los juicios *a priori* es uno ya presentado por Kripke [14, pp. 55–59]. Recordemos primero que un metro mide la longitud de A en un tiempo fijo t_0, donde A es la barra estándar que se encuentra en París. Entonces, nos preguntamos: ¿Es una verdad necesaria la expresión «La barra A tiene un metro de largo en el tiempo t_0»? Podríamos pensar que sí, pues es una proposición que se conoce *a priori* ya que un metro, por definición, es la longitud que tiene la barra A en el tiempo t_0. Pero esto no es así pues, aunque la expresión «un metro» tiene como finalidad designar rígidamente una determinada longitud en todos los mundos posibles, la expresión «la longitud de A en t_0» no designa nada rígidamente, esto es, la longitud de A en t_0 pudo haber sido otra de la que de hecho es (si hubiéramos calentado la barra, por ejemplo, esta se hubiera expandido). Por lo tanto, la expresión «La barra A tiene un metro de largo en el tiempo t_0» es un juicio que se conoce *a priori* pero que carece de necesidad, es decir, es un juicio contingente *a priori.*

Por supuesto, cada uno de estos ejemplos puede ser controversial, pero parecen suficientemente razonables como para sugerirnos que no debemos simplemente suponer que todo juicio *a priori* es necesario.

4.6. Conclusión

Hasta aquí, he expuesto las posturas fregeana y kantiana con respectos a los juicios matemáticos; analicé cómo sería una prueba bien hecha para ambas posturas; además, analicé las consecuencias para una prueba por ordenador dependiendo de si aplicamos las categorías epistémicas al contenido de los juicios o a la justificación de los juicios; y, por último, retomé el debate entre Tymoczko y Swart, donde sostengo que Tymoczko considera que la justificación de los juicios matemáticos son *a priori*, mientras que Swart considera que el contenido de tales juicios son los que deberían ser *a priori*. En este debate, concluyo diciendo que las categorías epistémicas no guardan relación con las nociones modales, por lo que la crítica de Swart a Tymoczko está infundada.

Capítulo 5
La justificación del uso de computadoras en las demostraciones

5.1. Introducción

En el presente capítulo voy a sostener que las pruebas por ordenador están justificadas dentro de la práctica matemática, es decir, voy a sostener que el uso de los ordenadores en la práctica demostrativa es válido. Para esto, primero responderé a dos de los argumentos que desacreditan las pruebas por ordenador, a saber, estos argumentos son: i) las pruebas por ordenador introducen elementos empíricos a la matemática; ii) las pruebas por ordenador no son inspeccionables. Luego, sostendré que las pruebas por ordenador son *a priori* siempre que tengamos conocimiento de que el algoritmo de la prueba es correcto, esto es, que el algoritmo realiza lo que se le pide.

5.2. Las pruebas por ordenador y el *a priori*

Uno de los argumentos más comunes para la no aceptabilidad de las pruebas por ordenador, como ya mencioné en el segundo y tercer capítulo, es que las pruebas por ordenador no son *a priori*, es decir, son *a posteriori* y en este sentido introducen elementos empíricos, a diferencia de las pruebas tradicionales que son completamente *a priori*.

Argumentaré que, bajo las mismas hipótesis de quienes dicen que las pruebas por ordenador son *a posteriori*, se puede concluir que las pruebas tradicionales hechas por matemáticos también introducen elementos empíricos a la matemática y, en este sentido, tales pruebas resultarían ser *a posteriori*.

Se ha mencionado que las pruebas por ordenador introducen elementos empíricos principalmente porque la prueba se ejecuta en una computadora, haciendo énfasis en que esta es un objeto del mundo físico y por tanto debemos confiar en que la ingeniería de la computadora no tiene alguna falla que nos arroje resultados erróneos. Incluso se puede decir, en favor de ellos, que a pesar de que distintas computadoras nos arrojen los mismos resultados cada que se ejecute la prueba, en cada ocasión que se ejecute todos los ordenadores nos pueden arrojar el mismo resultado erróneo, algo que parece muy poco probable pero que puede ser totalmente factible.

Bien, comienzo con mi argumento: se ha dicho que la computadora es un objeto del mundo físico y es esta la que ejecuta la prueba, pero esto tiene su análogo con las pruebas tradicionales, pues son los humanos quienes realizan las pruebas, los cuales puede pensarse que también son objetos del mundo físico, de modo que un error en la computadora podría ser equivalente a un error por un humano en la prueba [13, p. 94]. De hecho, podemos preguntarnos ¿qué tan *a priori* es una prueba tradicional? [1, p. 187] Existen muchas pruebas tradicionales que suelen ser largas y que incluso se requiere de semanas para poder llegar a probar un teorema, por lo que estas pruebas están respaldadas en gran medida por la memoria y otros estados mentales, en este sentido los matemáticos también introducen contenido empírico a las pruebas.

En resumen, el argumento es muy sencillo, a saber, que así como los ordenadores pueden cometer errores por ser objetos del mundo físico, también los matemáticos pueden, y de hecho suelen, cometer errores. Por otro lado, el argumento de que una prueba se puede ejecutar en distintas computadoras y cada una de ellas nos arroja el mismo resultado, pero un resultado erróneo, bien puede generalizarse, ya que introduce una especie de genio maligno a los ordenadores que también puede ser pensado dentro de los matemáticos humanos.[1] Para ser más concisos: pensemos en el algoritmo de la división, dicho algoritmo se puede demostrar desde la teoría de números, por lo que pensamos que el algoritmo es correcto, pero al igual que los ordenadores, los seres humanos son capaces de ejecutar el algoritmo y nada nos dice que los humanos no podrían equivocarse a la hora de ejecutar el algoritmo. De modo que el problema de este argumento es que, si se generaliza dicha situación, podemos quedarnos sin conocimiento matemático. Por lo dicho hasta aquí, podemos concluir que así como los ordenadores introducen elementos empíricos a la matemática, también lo hacen los matemáticos.

Ahora bien, no nos gustaría afirmar que las matemáticas tienen contenido empírico como el mencionado anteriormente, puesto que la mayoría de la tradición filosófica ha caracterizado a la matemática por tener contenido *a priori*.[2] Además, cuando nos preguntan sobre qué bases estamos justificados para creer algún teorema o proposición, no diremos que los creemos sobre la base de nuestros estados mentales, sino que estamos justificados en creerlo porque tenemos una prueba, la cual no depende de elementos empíricos [1, p. 188]. Por lo que aquí infiero que podemos considerar a la matemática como *a priori* sin importar si el agente ejecutor de la prueba, ya sea un humano o una computadora, pueda introducir elementos empíricos. Aquí todavía no estoy diciendo que las pruebas por ordenador son *a priori*; más adelante argumentaré que sí hay buenas razones para considerar a las pruebas por ordenador como *a priori*. Mucho menos digo que, como tales pruebas son *a priori*, entonces deben de ser aceptadas como una prueba dentro de la práctica matemática: de hecho,

[1]Esta observación me la sugirió mi asesor de tesis, Carlos Romero.

[2]Estoy pensado en autores como Leibniz, Kant, Frege, o Hilbert.

existen muchos juicios que son *a priori* y no son considerados como pruebas. Por ejemplo, el ya mencionado caso en el capítulo anterior de la barra de metal que mide un metro.

5.3. La inspeccionabilidad como criterio de aceptabilidad de pruebas

Un criterio de aceptabilidad de pruebas dado por Tymoczko es el de la *inspeccionabilidad*. Recordemos que una prueba es inspeccionable si y sólo si una persona con cierto dominio relevante de la matemática es capaz por sí mismo de conocer la verdad de la conclusión de la prueba con tan solo considerar todos los pasos de la prueba misma. Por lo que podemos pensar intuitivamente que una prueba es aceptable sólo si esta es inspeccionable. Esto me lleva a responder el segundo argumento sobre la aceptabilidad de las pruebas por ordenador, este es, que las pruebas por ordenador no son inspeccionables y por tanto no deben de ser aceptadas. Me parece que hay dos vías para defender a las pruebas por ordenador de este argumento; la primera, cuestionar la inspeccionabilidad como criterio de aceptabilidad de las pruebas; y la segunda, argumentar que las pruebas por ordenador son inspeccionables. Exploraré ambas vías.

Comenzaré por cuestionar la inspeccionabilidad como criterio de aceptabilidad de las pruebas. Parece que la inspeccionabilidad es un buen criterio para la aceptabilidad de pruebas ya que los juicios *a priori* podrían tener relación con la inspeccionabilidad. De esta manera, podemos creer que un juicio matemático es *a priori* si y sólo si este es inspeccionable. Analizaré ambas implicaciones de este bicondicional.

¿Es verdad que si un juicio es inspeccionable entonces este es *a priori*? Si un juicio matemático, en este caso una prueba, es inspeccionable, entonces por definición quiere decir que con solo considerar los pasos dentro de la prueba un matemático es capaz de conocer la verdad de su conclusión; así, la verificación es sobre una prueba que incluye los pasos necesarios para conocer su conclusión, por lo que la verificación corre sobre una serie de pasos lógicos en donde la prueba es lógicamente válida, y si la prueba es lógicamente válida, entonces esta solo incluye leyes generales, axiomas, definiciones, y reglas lógicas, por lo que no tiene dependencia empírica, por tanto, la prueba es *a priori.*

Veamos qué ocurre con la otra implicación: ¿si un juicio es *a priori* entonces es inspeccionable? Esta implicación es falsa: creo que un contraejemplo a esta implicación son los números primos muy grandes; un matemático humano es incapaz de inspeccionar por sí mismo si número muy grande es primo.

También pienso que un contraejemplo a esta implicación son las demostraciones excesivamente largas, pues incluso si se publicara toda una prueba de estas que llamamos excesivamente largas, esta no sería capaz de ser inspeccionada, pues nadie particular tendría el tiempo suficiente en su vida para concluir con la prueba.

Aquí alguien me podría argumentar que ya estoy suponiendo que existen pruebas que no son inspeccionables. A esto podemos responder cuestionando si en verdad toda prueba que ha sido aceptada es también inspeccionable. Arkoudas y Bringsjord sostienen que:

> Si el concepto de prueba se limitara solo a las pruebas que realmente pudieran inspeccionarse, las matemáticas dejarían de existir tal como las conocemos por la sencilla razón de que solo hay un número finito de tales pruebas, no más, digamos, que el número de átomos en el universo, llámese n. Pero si sólo hay n teoremas en matemáticas, no importa cuán grande sea n, el campo degenera en una lista

> finita de oraciones [...] Que haya infinitas pruebas es algo tan fundamental y profundamente entretejido en el tejido de las matemáticas que rechazarlo sería rechazar a las matemáticas. [...] En realidad, sólo se pueden examinar algunas pruebas, así como sólo se pueden escribir y manipular algunos números naturales [...] [1, p. 186–187]

En efecto, si una prueba es aceptada en tanto que esta prueba es inspeccionable, entonces el número de pruebas se limitaría a las pruebas que están al alcance de la verificación humana. En realidad, la matemática misma se reduciría a todo juicio matemático que esté al alcance de la verificación humana, excluyendo así a gran cantidad del conocimiento matemático actual, por ejemplo, los números primos muy grandes.

5.4. La inspeccionabilidad de las pruebas por ordenador

Había mencionado que se puede defender a las pruebas por ordenador desde dos vías, a saber; la primera, cuestionado la inspeccionabilidad como criterio de aceptabilidad; y la segunda, argumentado que la prueba por ordenador es inspeccionable. Pasaré a explorar la segunda vía, en la cual respondo a los argumentos según los cuales las pruebas por ordenador no son inspeccionables.

Supongamos, por principio de cuentas, que la inspeccionabilidad es un buen criterio para la aceptabilidad de pruebas. El argumento por el cual se dice que las pruebas por ordenador no son inspeccionables es muy sencillo y es el siguiente: una prueba por ordenador no es inspeccionable porque la prueba no se puede verificar paso a paso desde que se introduce al ordenador hasta que este lanza los resultados. Ante este argumento, sostengo que las pruebas por ordenador sí son inspeccionables y por tanto son *a priori*.

¿En qué sentido las pruebas por ordenador son inspeccionables? *Una prueba por ordenador es inspeccionable en tanto que se ha demostrado que el algoritmo que se* *implementa en el ordenador realiza lo que debe de realizar*. Por ejemplo, en la teoría de grafos, se puede demostrar que el algoritmo para encontrar un árbol de peso maximal logra encontrar al árbol de peso máximo en cualquier árbol dado. Las pruebas de que estos algoritmos realizan lo que queremos es mediante métodos tradicionales, de modo que podemos pensar que las pruebas de estos algoritmos generan un conocimiento *a priori* [1, p. 193]. De hecho, podemos afirmar que las pruebas de estos algoritmos son inspeccionables en un sentido *fuerte* de inspeccionabilidad, pues estas pruebas no son más que pruebas tradicionales. Por «sentido fuerte de inspeccionabilidad» quiero decir simplemente aquellas proposiciones que se han probado con los métodos clásicos que revisé en el capítulo 2, sección 2.3: prueba directa, contrapuesta, contradicción, e inducción.

Así, si A es un algoritmo y P una proposición, y si alguien nos preguntara por qué afirmamos que el resultado P, el cual ha sido probado en un ordenador, es verdadero, nosotros diríamos lo siguiente: Afirmamos que P porque A da como salida P, y sabemos *a priori* que A es correcto [1, p. 195].

Ahora bien, se nos podría decir que sólo sabemos *a priori* que un algoritmo puede ejecutar la prueba, pero que no somos capaces de verificar la prueba en su entereza, es decir, que no podemos analizar paso por paso la prueba incluso si tenemos el algoritmo de la prueba. Pero esto tiene un análogo muy particular con las pruebas tradicionales, a saber, cuando un matemático está realizando una prueba, esta la hace en físico, esto es, la realiza sobre algún trozo de papel, en el que además se salta pasos y no justifica todo; de hecho difícilmente en una prueba tradicional todos los pasos estarán justificados, pues en la mayoría de los casos se da por hecho que quien está leyendo la prueba ya tiene un cierto nivel de conocimiento matemático que le permite entender las suposiciones de dicha prueba. A esta instancia física de la prueba, Arkoudas y Bringsjord le llaman «*token*», y la prueba *token* es la que nos permite creer que existe una prueba abstracta e ideal del teorema que se está probando [1, p. 189]. De modo que, cuando un matemático inspecciona una prueba, la inspección se hace sobre una prueba *token* y no sobre la prueba ideal. Por tanto, la inspección que se realiza sobre las pruebas tradicionales tampoco es una inspección en la que se pueda verificar la prueba en su entereza, pues sólo se inspecciona la instancia física de la prueba, la cual no contiene todos los pasos que sí tendría la prueba ideal.

El que exista una prueba ideal y una instancia física de esta en el caso de las pruebas tradicionales, nos lleva a pensar que, en el caso de las pruebas por ordenador, también existe una prueba ideal. Esto es, las pruebas por ordenador juegan el papel de las pruebas en físico, es decir, la instancia física de una prueba ideal. Entonces, tanto en las pruebas tradicionales como en las pruebas por ordenador, la inspección que se realiza siempre es sobre la instancia física. Por lo que no podemos exigir que las pruebas sean inspeccionadas en su entereza para que estas puedan ser aceptadas. De hecho, podemos ir aún más lejos y afirmar que cuando decimos que sabemos *a priori* un resultado matemático, no lo decimos sobre la base de la prueba *token*, sino sobre la base de la existencia de una prueba ideal.

Si estas últimas afirmaciones son correctas, entonces, cuando sostenemos que las pruebas por ordenador son *a priori*, lo hacemos sobre la idea de que el algoritmo instanciado en una computadora no es más que una prueba en físico que nos permite estar justificados en la creencia de una prueba ideal y abstracta que contiene todos los detalles posibles. Por tanto, la inspección que se lleva a cabo en las pruebas por ordenador, es una inspección sobre el algoritmo de prueba, el cual es una instancia física de la prueba, y no la prueba ideal, la cual es *a priori*, así como en las pruebas tradicionales también la inspección se realiza sobre la instancia física de esta y nunca sobre la prueba *a priori* ideal.

Una buena pregunta que surge es: ¿por qué estamos justificados en creer que una prueba *token* nos lleva a la creencia de que existe una prueba ideal? A esta pregunta simplemente responderé que cuando un matemático realiza una prueba, este lo hace de tal forma que la prueba resulte ser lógicamente válida: cada paso de la prueba se deduce lógicamente (por alguna regla de inferencia) de alguna definición o de un lema previamente ya probado.

Ahora bien, dado que la inspeccionabilidad se realiza sobre las pruebas *token*, me gustaría proponer que existen diferentes *grados de inspeccionabilidad*. Esto es así porque, en principio, parece claro que existen pruebas que son más difíciles de verificar que otras, y esto sucede precisamente porque las pruebas que se inspeccionan son las pruebas *token*. Por ejemplo, es claro que es más fácil de verificar la prueba sobre la infinidad de números primos que verificar el último teorema de Fermat. Cabe destacar también que si nos preguntamos cuál de las dos pruebas es más fácil de aceptar dentro del gran conjunto del conocimiento matemático, nosotros pensamos que la prueba sobre la infinidad de números primos, esto se debe a que la prueba sobre la infinidad de números primos es más fácil de inspeccionar que el último teorema de Fermat. Por lo tanto, si pensamos que la inspeccionabilidad es un buen criterio para la aceptabilidad de pruebas, entonces podemos afirmar que una prueba es más aceptable en tanto que tenga un mayor grado de inspeccionabilidad. Esto implica que, como vimos con el caso del último teorema de Fermat o en el caso del teorema de clasificación de grupos, hay pruebas que son especialmente complicadas de inspeccionar, es decir, tienen un bajo grado de inspeccionabilidad, pero no por ello no se les acepta dentro del conocimiento matemático.

5.5. La fiabilidad de los procesos computacionales

Otra de las tantas objeciones que se le han hecho a las pruebas por ordenador es la siguiente: no podemos estar seguros de que el algoritmo implementado para la prueba dé la salida correcta.

Esta objeción nace de la desconfianza que se deposita en el ejecutor del algoritmo, en este caso, en la desconfianza del ordenador. Como ya mencioné, las razones que se dan para pensar que el ejecutor de la prueba puede introducir errores nos llevan a pensar que también los matemáticos humanos, quienes también son ejecutores de las pruebas, pueden introducir errores similares. A pesar de que tanto los matemáticos como las computadoras pueden introducir dichos errores, la desconfianza en que un ordenador nos dé una salida incorrecta persiste.

Quizá esta desconfianza en la salida del ordenador persista debido a la perspectiva de la primera persona, esto es, porque parece ser que somos incapaces de observar todos los procesos computacionales involucrados en una prueba.

Para aumentar nuestra confianza en las salidas que los ordenadores nos arrojan, pienso argumentar que los procesos computacionales sí son altamente fiables.

Comenzaré por definir qué es un proceso fiable: un proceso que, en una mayoría ponderada de casos, brinda el resultado correcto (el que buscamos al implementarlo). A partir de ello, podemos utilizar a la teoría fiabilista de la justificación (que en esencia nos dice: ***Si una persona cree que P porque P resultó de Q y Q es un proceso fiable, entonces esta persona está justificada en creer que P***) para fundamentar la aceptabilidad de los procesos computacionales para el conocimiento matemático [5, p. 653].

Para ejemplificar esta situación, imaginemos el siguiente hecho de la vida cotidiana: Pensemos en un vendedor de frutas quien tiene mucha clientela y debe usar una calculadora para poder hacer las cuentas rápido y así atender a todos. Esta persona, a pesar de saber hacer cuentas elementales por sí mismo, prefiere usar su calculadora, pues además de que es más rápida que él para hacer las cuentas, siempre que la utiliza esta le ha devuelto un resultado correcto. Pensemos que esta persona, desde que compró su calculadora, hizo con ella operaciones básicas que él mismo podía verificar como correctas, de modo que la siguiente vez que esta persona realizaba una operación y verificaba que el resultado de dicha operación era correcto, aumentaba su confianza en la calculadora. Así, llegó un momento en que esta persona tuvo tan alto grado de confianza en la calculadora que ya no verificaba si el resultado era correcto, pues sabía que cada vez que verificaba el resultado, su calculadora le arrojaba el resultado correcto.

Notemos que en el ejemplo anterior, la confianza depositada en la calculadora no depende de que la persona sepa cómo esta funciona, sino que su confianza está basada en que la calculadora siempre arrojó resultados correctos. Existen muchos ejemplos de procesos fiables en nuestra vida cotidiana. En la mayoría de los casos no sabemos cómo funcionan dichos procesos; sin embargo, podemos confiar en ellos simplemente porque sus resultados siempre han sido los esperados (en las condiciones normales).

Así como en el caso de la calculadora, podemos pensar que los procesos de los ordenadores más sofisticados son fiables, pues los resultados obtenidos mediante los ordenadores son los que esperamos. Dicho esto, un proceso fiable en una prueba por ordenador puede ser definido como sigue: Si una persona cree que P porque P resultó de implementar el algoritmo de prueba en Q y Q es un proceso fiable, entonces esta persona está justificada en creer que P, donde P es una proposición matemática y Q es un proceso computacional [5, p. 654].

Veamos ahora qué hace que la implementación de ordenadores sea un proceso fiable. Siguiendo a Durán y Formanek [5, p. 656], existen diferentes fuentes para atribuir confiabilidad a los procesos computacionales:

a) Verificación y validación de métodos.

b) Análisis de robustez para simulaciones por computadora.

Hay que señalar que Durán y Formanek están pensando en procesos computacionales de las simulaciones por computadora, por lo que los incisos anteriores están pensados para esa situación particular. Aquí haré una reformulación de los mismos para el caso de las pruebas por ordenador.

No es difícil de averiguar a qué podemos referirnos con a) cuando hablamos de pruebas por ordenador. Nos referimos a lo que ya he mencionado anteriormente, a saber, a la verificación del algoritmo de implementación, esto es, a que podemos demostrar que el algoritmo de implementación hace lo que se le pide mediante métodos tradicionales de prueba. Por otro lado, Durán y Formanek [5, p. 660] definen al *análisis de robustez* como la capacidad de analizar si un grupo de modelos predicen un resultado común, esto para las pruebas por ordenador no es más que la capacidad de implementar el algoritmo en distintos ordenadores y observar que todos arrojan el mismo resultado. En la medida en que a) y b) se han implementado para un proceso computacional particular, podemos confiar en los resultados de ese proceso. Y estos ya se han realizado para el caso del teorema de los cuatro colores [1].

Con esto concluyo que sí podemos basarnos en la confiabilidad de los procesos computacionales para justificar nuestra aceptación de la prueba del problema de los cuatro colores.

5.6. Conclusión

Hasta aquí, podemos destacar cuatro cosas que he concluido en esta discusión:

La primera Que se puede demostrar la eficacia del algoritmo implementado en el ordenador mediante pruebas tradicionales, por lo que este resulta ser inspeccionable y *a priori*;

La segunda Que las pruebas realizadas por matemáticos y ordenadores son pruebas *token* que nos llevan a la creencia justificada de la existencia de una ideal, es esta prueba ideal a la que nos referimos cuando decimos que una prueba es *a priori*;

La tercera Que existen diferentes grados de inspeccionabilidad, y una prueba puede tener un bajo grado de inspeccionabilidad, sin que por ello no se le acepte dentro del conocimiento matemático.

La cuarta Que los procesos computacionales en la demostración del teorema de los cuatro colores son confiables, por lo que es razonable aceptar los resultados que arrojan.

Con todo lo anterior, las pruebas por ordenador no quedan mal paradas frente a las pruebas tradicionales, es decir, hay buenas razones para aceptar dichas pruebas dentro de la práctica matemática. Esto es así porque podríamos pensar que las pruebas por ordenador no tienen un grado muy alto de inspeccionabilidad comparado con las pruebas tradicionales, pero como mencioné, esto no es motivo para rechazar las pruebas, pues incluso en las pruebas tradicionales se han aceptado pruebas que difícilmente se pueden verificar. Además, estas pruebas por ordenador suelen ser *a priori*, y en tanto que sus algoritmos se hayan demostrado con pruebas tradicionales, estos son inspeccionables. Finalmente, los procesos involucrados son confiables.

Conclusiones

En esta última sección daré las conclusiones a las que se llegó en cada uno de los problemas a los que se enfrentó la presente tesis, asimismo, teniendo en cuenta que muchos de estos problemas pueden no estar cerrados, motivaré nuevos debates.

Antes de empezar, recordemos que el objetivo general de esta tesis es responder a la cuestión de si una demostración por ordenador tiene los elementos suficientes para lograr ser aceptada por la comunidad matemática. En el primer capítulo nos encontramos que dos propiedades importantes que caracterizan a las demostraciones para que sean aceptadas por la comunidad matemática son la inspeccionabilidad y la transferibilidad, dichas nociones son muy similares y cada una apela a que una prueba es aceptada en tanto que un matemático pueda concluir la verdad de la prueba con solo considerar los pasos dentro de ella.

A lo largo de la tesis, estas nociones nos arrojaron mucha luz sobre nuestro objetivo principal, pero a su vez resultaron ser nociones muy problemáticas. El primer problema no menor que arrojaron dichas nociones fue si transferibilidad e inspeccionabilidad eran nociones condicionales, esto es, que una prueba resultaba transferible/inspeccionable de manera condicionada a si un matemático adquiere conocimiento de la verdad de lo demostrado solamente con considerar los pasos, o bien, que una prueba resultaba transferible/inspeccionable de forma no condicional si un matemático puede llegar a adquirir conocimiento de la verdad de lo demostrado.

Notemos que esta sutil distinción es relevante para el caso de las pruebas por ordenador, pues si una prueba es aceptada porque es transferible e inspeccionable y dichas nociones son condicionales, entonces si la prueba por ordenador es excesivamente larga, parece ser que la prueba no tiene por qué ser aceptada, ya que la verdad de su conclusión nunca podría llegar a ser conocida por ningún matemático. En cambio, si dichas nociones no son condicionales, cabe la posibilidad hipotética de que en una prueba por ordenador excesivamente larga nos planteemos si la prueba puede o no llegar a ser conocida, es decir, podemos pensar que en una prueba excesivamente larga exista un ser humano con una cantidad de tiempo ilimitada en la sea capaz de revisar la prueba en su totalidad; si pensamos que esto es posible, entonces podemos concluir que la prueba debe ser aceptada por la comunidad matemática. En principio, tal como se formula la transferibilidad y la inspeccionabilidad en el primer capítulo, nos sugiere que son nociones condicionales, y las ventajas de pensarlas así es que pensamos el conocimiento matemático para humanos normales que no tienen acceso a capacidades ilimitadas de tiempo; sin embargo, esto puede ser debatible pues hoy en día vemos que hay teoremas los cuales, por ser excesivamente largos, se revisan por una comunidad de matemáticos y no sólo por una única persona. Como ya vimos en la tesis, es el caso del teorema de clasificación de grupos del álgebra. Esto nos lleva a pensar que las pruebas largas por ordenador pueden ser transferibles e inspeccionables pues el conocimiento de una misma prueba puede ser comunitario y alcanzado a lo largo de los años. Más adelante mencionaré más conclusiones sobre estas dos nociones.

En cuanto a las pruebas por ordenador, en esta tesis, específicamente en el segundo capítulo, se mostró que hay dos razones principales por las que la comunidad matemática suele rechazar este tipo de pruebas. La primera está nuevamente relacionada con la noción de inspeccionabilidad, pues se dice que una prueba por ordenador no es inspeccionable ya que ningún matemático puede verificar los pasos realizados en el ordenador. Y la segunda, que las pruebas por ordenador son un experimento bien realizado que una prueba genuina, lo que convertiría a este tipo de pruebas en conocimiento matemático *a posteriori*, esto se debía a que debemos de depositar confianza en el programa y en la ingeniería física detrás del ordenador.

Ambas razones nos dieron mucho de qué hablar durante la tesis, pasaré a mencionar lo que se llegó a concluir a partir de estas dos razones.

Comenzaré con la segunda, a saber, que las pruebas por ordenador introducen verdades matemáticas *a posteriori*. Autores como Swart consideraban que era mejor seguir pensando en las verdades matemáticas como *a priori* sin importar el método con el que habían sido probadas, una de sus principales razones era que una verdad *a priori* era aquello que posee validez universal y necesaria, esto es, una verdad que es verdadera en todos los mundos posibles. Mientras que Tymoczko pensaba a las verdades *a priori* como verdades que pueden establecerse independientemente de la experiencia. Esto nos llevó a distinguir entre dos maneras diferentes de pensar a las categorías epistémicas, cada una con diferentes consecuencias para las pruebas por ordenador.

Llamé a la primer forma de pensar a las categorías epistémicas «la noción kantiana», que consiste en pensar que «*a priori*» se dice del *contenido* de los juicios matemáticos. Bajo esta noción, decimos que el contenido de los juicios matemáticos es independiente de la experiencia, por lo que esta naturaleza del contenido de los juicios no cambia si procedemos por ordenador o por métodos tradicionales de prueba. A la segunda manera de pensar a las categorías epistémicas la llame «la noción fregeana», la cual consiste en pensar que *a priori* se dice de la *justificación* que tenemos para emitir juicios. Bajo esta noción, podemos hablar de que una prueba es *a priori* si no depende de la experiencia, este fue el caso que más nos interesó, pues es aquí donde nos preguntamos si una prueba por ordenador puede ser independiente de la experiencia y no ser un simple experimento, como lo entiende Tymoczko. Lo que concluimos fue que las pruebas por ordenador no son un experimento en el sentido en el que se entiende experimento en las ciencias empíricas ya que, justo como lo mencioné en el tercer capítulo, el código de la prueba puede reproducirse en distintas computadoras y arrojar exactamente los mismos resultados. Mientras que los experimentos realizados por los científicos siempre traen consigo un rango de error cada vez que se reproduce el experimento; sin embargo, no pudimos afirmar con certeza que una prueba por ordenador esté separada en su totalidad de la experiencia, pues aún queda depositada cierta confianza en el instrumento físico que es el ordenador.

Sin embargo, esta problemática, sobre la confianza depositada en el ordenador como instrumento físico, fue resuelta al final del cuarto capítulo, en donde introdujimos la postura del fiabilismo. Concluimos que ejecutar el código de la prueba en un ordenador es un proceso altamente fiable. Esto es, si una persona cree que P, donde P es una proposición matemática, y P resultó de Q y Q es un proceso fiable —en este caso, un proceso computacional—, entonces esta persona está justificada en creer que P. Concluimos también, bajo esta postura, que los procesos computacionales son procesos fiables porque se pueden verificar sus métodos, esto es, se pueden probar que los algoritmos realizan lo que queremos que realicen, y porque si implementamos el código en distintos ordenadores, todos nos arrojan los mismos resultados.

Otro resultado importante que pudimos concluir en cuanto a la naturaleza epistémica de una prueba por ordenador es que los argumentos dados para decir que tales pruebas hacen de la matemática un conocimiento con elementos empíricos se pueden utilizar para decir que las pruebas tradicionales hechas a mano también introducen elementos empíricos. Esto es porque se piensa que debemos confiar en la ingeniería de los ordenadores, al ser objetos del mundo físico, pero sucede que las pruebas hechas a mano son ejecutadas por personas que, al igual que los ordenadores, resultan ser objetos físicos. De hecho, para una persona normal, seguir una prueba que resulta muy larga requiere de gran capacidad de memoria y concentración que depende del estado físico y emocional de dicha persona, mientras que un ordenador no depende de cierto cansancio físico, por lo que en este caso los humanos traen consigo un mayor grado de error que los ordenadores. De esto evidentemente no se sigue que las pruebas por ordenador no introducen elementos empíricos, simplemente concluimos que las razones para creer que las pruebas por ordenador introducen un conocimiento *a posteriori* en las matemáticas, también son buenas razones para creer que las pruebas tradicionales tienen contenido *a posteriori*.

Regresando al tema de las nociones de inspeccionabilidad, en el cuarto capítulo, se defendió a las pruebas por ordenador de la objeción de que estas no eran inspeccionables y que por tanto no tenían por qué ser aceptadas en la comunidad matemática. Mientras hacíamos esta defensa llegamos a distintas conclusiones. La primera es que había dos maneras de defender a las pruebas por ordenador:

a) Cuestionando la inspeccionabilidad como criterio de aceptabilidad de las pruebas.

b) Argumentando que las pruebas por ordenador eran inspeccionables.

Mediante la vía a) llegamos a que si un juicio matemático es inspeccionable, entonces este resulta ser *a priori*, pero no inversamente, pues si un juicio es inspeccionable, entonces, tal como se dijo en el cuarto capítulo, sólo con considerar los pasos dentro de la prueba un matemático es capaz de conocer la verdad de su conclusión, por lo que la verificación corre sobre una serie de pasos lógicos en donde la prueba es lógicamente válida, y si la prueba es lógicamente válida, entonces esta sólo incluye axiomas, definiciones, y reglas lógicas, por lo que no tiene dependencia empírica; por tanto, la prueba es *a priori*. Inversamente, es claro que no todo juicio *a priori* es inspeccionable, el ejemplo de esto son pruebas sobre números primos grandes que son incapaces de ser inspeccionadas.

Otra conclusión que se desprendió a partir de este último ejemplo, es que el concepto de prueba matemática no puede sólo limitarse a las pruebas que pueden inspeccionarse, puesto que si así fuera, entonces existiría un número finito de pruebas, esto es, habrìa un número finito de teoremas, y pensar que existe un número finito de teoremas resulta ser algo muy contradictorio en el campo de las matemáticas.

Ahora, mediante la vía de b) llegamos a la conclusión de que una prueba por ordenador puede ser inspeccionable en tanto que se puede demostrar que el algoritmo es correcto, esto es, que el algoritmo que se implementa en la computadora realiza lo que queremos que realice. El método para demostrar que estos algoritmos son correctos en el sentido que se acaba de mencionar, es mediante métodos de prueba tradicionales.

Llegamos a concluir también que si se demuestra por métodos de prueba tradicionales que estos algoritmos son correctos, y por tanto son inspeccionables, entonces la prueba de estos algoritmos resultaban en un conocimiento *a priori*. De modo que si alguien nos preguntara por qué afirmamos un resultado P, diríamos que estamos justificados en afirmar P pues tenemos un algoritmo A, del cual sabemos *a priori* que es correcto, y A da como salida P al ser introducido en un ordenador.

Otro resultado importante resulta de la crítica de que incluso si sabemos que nuestro algoritmo de prueba A es correcto *a priori*, no podemos verificar paso a paso la salida P. Pero esta crítica tiene su análogo con las pruebas tradicionales, ya que ningún matemático puede verificar en su entereza una prueba puesto que no siempre las pruebas contienen todos los detalles posibles.

De aquí se desprende la idea de las pruebas *token*, como las llama Arkoudas, que son instancias físicas de una prueba ideal que sí contiene todos los pasos y detalles. Este tipo de pruebas son las que abundan dentro de la comunidad matemática, pues es claro que no toda prueba contiene todos los detalles; así, cuando un matemático inspecciona una prueba, la inspección se hace sobre una prueba *token* y no sobre la prueba ideal, por lo que no siempre se puede hacer una inspección exhaustiva de la prueba.

Ahora, el que tengamos una prueba *token* de las pruebas tradicionales nos hace pensar que las pruebas por ordenador también son pruebas *token*. Esto es, las pruebas por ordenador juegan el papel de las pruebas en físico, es decir, la instancia física de una prueba ideal. Por lo que llegamos a la conclusión de que no podemos exigir que las pruebas sean inspeccionadas en su entereza para que estas puedan ser aceptadas. Incluso llegamos más lejos y pudimos decir que, cuando decimos que sabemos *a priori* un resultado matemático, no lo decimos sobre la base de la prueba *token*, sino sobre la base de la existencia de una prueba ideal.

Otra conclusión no menor que sacamos y que quizá en un futuro necesita revisión y más investigación, es que el hecho que nos justifica a creer en la existencia de una prueba ideal sobre la base de una prueba *token* es que dicha prueba *token* se hace de tal forma que resulte ser lógicamente válida. De aquí también se desprendió la idea de que existen diferentes grados de inspeccionabilidad, pues habrá pruebas como algunas de las tradicionales que suelen ser pequeñas las cuales son más fáciles de verificar; mientras que hay otras que incluso a pesar de ser pruebas tradicionales son largas y pueden llevarse días antes de poder verificarse completamente.

Bibliografía

[1] Arkoudas, Konstantine y Bringsjord, Selmer. «Computers, Justification, and Mathematical Knowledge». *Minds and Machines*, 17(2):185–202, 2007.

[2] Aschbacher, Michael. «The Status of the Classification of the Finite Simple Groups». *Notices of the American Mathematical Society*, 38(7):736–740, 2004.

[3] Calude, Andrea S. «The Journey of the Four Colour Theorem Through Time». *The New Zealand Mathematics Magazine*, 38(3):27–35, 2001.

[4] Corcoran, John. «El Nacimiento de la Lógica. La Concepción de la Prueba En Términos de Verdad y Consecuencia». *Agora*, 11(2):67, 1992.

[5] Durán, Juan y Formanek, Nico. «Grounds for Trust: Essential Epistemic Opacity and Computational Reliabilism». *Minds and Machines*, 28(4):645–666, 2018.

[6] Easwaran, Kenny. «Probabilistic Proofs and Transferability». *Philosophia Mathematica*, 17(3):341–362, 2009.

[7] Enderton, Herbert. *Una Introducción Matemática a la Lógica*. UNAM, 1972. Traducción de José Alfredo Amor. [*A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, 1972.].

[8] Fernández Gallardo, Pablo. «El Teorema de los Cuatro Colores: Appel y Haken (1976)». *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (43-44): 346–3490, 2000.

[9] Frege, Gottlob. «Los Fundamentos de la Aritmética». In *Escritos Sobre Lógica, Semántica y Filosofía de las Matemáticas*. UNAM, 2016.

[10] Giovannini, Eduardo. *La Concepción Axiomática de la Geometría de David Hilbert (1891-1905)*. Tesis de doctorado, Universidad de Buenos Aires, 2013. URL http://repositorio.filo.uba.ar/handle/filodigital/4627.

[11] Kant, Immanuel. *Prolegómenos*. Sarpe, 1783/1984.

[12] Kant, Immanuel. *Crítica de la Razón Pura*. Gredos, 1787/2017. Traducción de Pedro Ribas; introducción de José Luis Villacañas.

[13] Krakowski, Israel. «The Four Color Problem Reconsidered». *Philosophical Studies*, 38(1):91–96, 1980.

[14] Kripke, Saul. *El Nombrar y la Necesidad*. UNAM, 2005. Traducción de Margarita Valdés. [*Naming and Necessity*. Harvard University Press, 1980].

[15] Lakatos, Imre. «What Does a Mathematical Proof Prove?» In *Mathematics, Science and Epistemology*, pages 61–69. Cambridge University Press, 1978.

[16] Solow, Daniel. *Cómo Entender y Hacer Demostraciones en Matemáticas*. Limusa, 1993.

[17] Swart, Edward R. «The Philosophical Implications of the Four-Color Problem». *The American Mathematical Monthly*, 87(9):697–707, 1980.

[18] Tymoczko, Thomas. «The Four-Color Problem and its Philosophical Significance». *Journal of Philosophy*, 76(2):57–83, 1979.

[19] Vega, Luis. *La Trama de la Demostración: Los griegos y la razón tejedora de pruebas*. Alianza, 1990.

[20] Wilson, Robert J. *Introduction to Graph Theory, 4th. ed.* Prentice Hall, 1996.