



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS EN EL ESPACIO DE
LORENTZ-MINKOWSKI

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ANATOLIO HERNÁNDEZ QUINTERO

TUTOR
DR. ÓSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO
FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., AGOSTO DE 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Óscar Alfredo Palmas Velasco, por sus oportunas ideas y valiosa orientación durante la realización de esta tesis.

Esta tesis se realizó dentro del marco del Programa DGAPA-PAPIIT IN101322 «Geometría de subvariedades VII».

Agradezco al CONACYT por la beca otorgada desde agosto de 2019 hasta julio de 2021.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	VII
------------------------	-----

CAPÍTULO 1

EL ESPACIO DE LORENTZ-MINKOWSKI \mathbb{E}_1^3

§1.1 Propiedades elementales del espacio de Lorentz-Minkowski	1
§1.2 Vectores tipo tiempo y conos de tiempo	5
§1.3 Isometrías de \mathbb{E}_1^3	10

CAPÍTULO 2

TEORÍA LOCAL DE LAS CURVAS PLANAS EN \mathbb{E}_1^2

§2.1 Parametrizaciones	14
§2.2 Posición, velocidad y aceleración	18
§2.3 Curvatura.	22
§2.4 Circunferencia oscultriz, evolutas y evolventes	27
§2.5 Ecuaciones naturales	30

CAPÍTULO 3

TEORÍA LOCAL DE LAS CURVAS ESPACIALES EN \mathbb{E}_1^3

§3.1 Definiciones, ejemplos y parametrizaciones	35
§3.2 Curvatura, torsión y el marco de Serret-Frenet	40
§3.3 Curvas de Frenet	46
§3.4 Plano osculador y esfera oscultriz	49
§3.5 Ecuaciones naturales	54

CAPÍTULO 4

MISCELÁNEA DE VARIOS RESULTADOS DE CURVAS

§4.1 Hélices	60
§4.2 Curvas de Bertrand.	62
§4.3 Propiedades globales de las curvas planas	65
§4.4 Propiedades globales de las curvas espaciales	67
§4.5 Curvas en dimensiones superiores.	69
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	75

INTRODUCCIÓN

En las distintas áreas de investigación que han empleado la geometría surgen de forma natural una variedad ilimitada de curvas, superficies y variedades de dimensiones superiores. Para abordar estas nuevas clases de objetos, en geometría se han aplicado herramientas de varias partes de las matemáticas, y viceversa, cada uno de los distintos campos con una orientación diferente y con un conjunto diferente de resultados muy fructíferos. Por ejemplo, las técnicas del cálculo y del análisis condujeron a la geometría diferencial, los métodos teóricos de conjuntos puros condujeron a la topología y el álgebra moderna contribuyó al campo de la geometría algebraica. La geometría diferencial es el campo cuyo objeto de estudio son las propiedades de curvas, superficies y espacios curvos de dimensiones superiores, por medio de herramientas del cálculo y del álgebra (multi)lineal.

Los tipos de preguntas que uno suele hacer en geometría diferencial se extienden mucho más allá de lo que uno puede hacer en la geometría elemental y, sin embargo, las primeras no subsumen por completo a la última. Las cuestiones de la geometría diferencial a menudo se dividen en dos categorías: (a) las que tienen que ver con propiedades locales o propiedades de una curva o variedad general definidas en la vecindad de un punto, y (b) las propiedades globales, que se refieren a las propiedades de la curva o variedad tomada como un todo. Algunos de los teoremas más interesantes de la geometría diferencial clásica relacionan las propiedades locales con las globales. El teorema fundamental en este sentido es el teorema de Gauss-Bonnet, pues relaciona las propiedades globales de curvas y superficies con la topología de una superficie y conduce a resultados fundamentales en geometría esférica e hiperbólica.

Un precursor en el estudio de la geometría diferencial de curvas en el plano euclidiano fue Huygens¹, aunque en el momento en que emprendió su trabajo sobre este tema no pudo disponer del cálculo. Sin embargo, al investigar algunos problemas relacionados con péndulos y relojes, llegó a la noción de la curvatura de curvas planas

¹*Horologium*, La Haya, 1658 (Oeuvres complètes t. XVII), *Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, París, 1673 (Oeuvres complètes t. XVIII).

en un punto p de la curva y desarrolló la teoría de evolutas y evolventes o involutas (1659). El primero que obtuvo una fórmula adecuada para la curvatura, $\kappa = 1/r$, en términos de las derivadas de la curva γ fue Newton en *Un tratado sobre los métodos de series y fluxiones*, del que un manuscrito data al menos de 1670². El teorema fundamental (de congruencia) de las curvas planas euclidianas establece que, salvo movimientos euclidianos rígidos, dada una función continua $\kappa(s)$, existe una única curva $\gamma(s)$ en \mathbb{E}^2 tal que $\kappa(s)$ es la curvatura de γ en $\gamma(s)$, donde s es la longitud de su arco. Esto significa que, salvo rotaciones y traslaciones, una curva en \mathbb{E}^2 está completamente caracterizada por su curvatura.

El primero en descubrir las dos curvaturas de una curva en \mathbb{E}^3 fue Monge³ en 1775. También obtuvo una expresión analítica para la primera curvatura, pero no para la segunda curvatura o torsión. Esto último lo calculó Lancret⁴ en 1802. Fue Cauchy⁵, en sus *Lecciones sobre las aplicaciones del cálculo infinitesimal a la geometría* de 1826, quien primero hizo un estudio de las curvas espaciales investigando sistemáticamente sus derivadas superiores, con especial atención en el contacto geométrico entre dos curvas y entre una curva y una superficie.

Un gran paso en el estudio de la geometría diferencial de las curvas espaciales en \mathbb{E}^3 vino con las fórmulas de Frenet-Serret. Estas ecuaciones se obtuvieron de forma independiente por Frenet⁶ en 1847 y por Serret⁷ en 1851. Definieron el marco ortonormal $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, conocido actualmente como *marco de Frenet*, a lo largo de una curva espacial $\gamma(s)$, usando como parámetro su longitud de arco s . Aquí \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} son los vectores tangente, normal, y binormal unitarios, respectivamente. Los elementos del marco ortonormal están relacionados entre sí mediante las ecuaciones de Frenet-Serret $\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}$, $\mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$, $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$, donde κ es la curvatura y

²Cf. D. T. Whiteside, *The Mathematical Papers of Isaac Newton. Volume III 1670-1673*, parte I, Cambridge University Press, 1969.

³Sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et des pénombres, *Mémoires de Mathématique et de Physique présentés devant l'Académie Royale des Sciences par divers savants et recueils ultérieurs analogues*, t. IX, 1780, pp. 593-624.

⁴Mémoire sur les courbes à double courbure, *Mémoires présentés à l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, par divers savants*, t. I, 1806, pp. 416-54.

⁵*Leçons sur les applications du calcul infinitesimal à la géométrie*, París, I (1826) y II (1828).

⁶Sur les fonctions qui servent à déterminer l'attraction des sphéroïdes quelconques. *Programme d'une thèse sur quelques propriétés des courbes à double courbure*, tesis, Tolosa, 1847. Cf. también «Sur quelques propriétés des courbes à double courbure», *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, serie 1, t. 17, 1852, pp. 437-47 y «Théorèmes sur les courbes gauches», *Nouvelles Annales de Mathématiques*, serie 1, t. 12, 1853, pp. 365-72.

⁷Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, serie 1, t. 16, 1851, pp. 193-207.

τ es la torsión de la curva $\gamma(s)$. A su vez, las derivadas sucesivas de los vectores del marco de Frenet determinan todas las derivadas de la curva $\gamma(s)$. El teorema fundamental de las curvas espaciales euclidianas establece que, salvo movimientos euclidianos rígidos, si $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ son dos funciones continuas, entonces existe una única curva $\gamma(s)$, parametrizada por la longitud de su arco s , cuyas funciones de curvatura y torsión son $\kappa(s)$ y $\tau(s)$. Este teorema fue demostrado por Aoust⁸ en 1876.

El estudio de la geometría extrínseca de superficies en \mathbb{E}^3 se dio de forma natural para describir superficies por medio de las curvas que resultan al seccionarla con varios planos. Como las superficies no son el tema de esta tesis, nos basta mencionar que los primeros resultados en la dirección indicada se deben a Euler (en los años 1728-32 y 1760-86) y a Monge y sus discípulos⁹. La teoría de superficies alcanzó un gran desarrollo con Gauss y Riemann. Gauss¹⁰ descubrió que, además de la geometría extrínseca de las superficies en \mathbb{E}^3 , donde se identifican dos superficies si y solo si difieren solamente por un movimiento euclidiano en el espacio, existe una noción geométrica básica, su curvatura, que es invariante bajo el grupo de isometrías de superficies. El estudio de la geometría de las superficies en \mathbb{E}^3 con estas isometrías como transformaciones se denomina *geometría intrínseca* de las superficies en \mathbb{E}^3 . La principal contribución de Riemann¹¹ a la geometría diferencial fue la de llevar a cabo el programa establecido en el *Theorema Egregium* de Gauss: desarrollar una geometría diferencial de objetos que no necesariamente tienen que estar situados en un espacio euclidiano tridimensional. Riemann propone considerar un método para asignar longitudes a los vectores tangentes. Una asignación a cada espacio tangente de una norma definida positiva, o más precisamente, del producto interno del que proviene, es lo que ahora llamamos una *métrica riemanniana* en una variedad M . La geometría intrínseca correspondiente se llama geometría riemanniana. Podemos estudiar las variedades riemannianas por sí solas (geometría intrínseca) o como subvariedades en algún espacio euclidiano que las contiene (geometría extrínseca). Si la métrica de una variedad diferenciable es indefinida, obtenemos una variedad se-

⁸*Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace*, París, Gauthier-Villars, 1876.

⁹Cf. D. J. Struik, Outline of a History of Differential Geometry I, *Isis*, Vol. 19, No. 1, 1933 (abril), pp. 92-120, y Outline of a History of Differential Geometry II, *Isis*, Vol. 20, No. 1, 1933 (noviembre), pp. 161-91.

¹⁰Disquisitiones generales circa superficies curvas, *Commentationes soc. reg. sc. Göttingensis*, 6, 1828 (Werke IV, pp. 217-58). Cf. también «Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächchen», 1825 (Werke VIII, p. 408 ss.), una versión preliminar de las *Disquisitiones*.

¹¹Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, *Gött. Abh.*, 13, 1867 (leída en 1854), Werke No. XIII.

mirriemanniana, y la geometría correspondiente es la geometría semirriemanniana. Una variedad semirriemanniana también puede verse como una subvariedad en algún espacio semieuclidiano, por lo que nuevamente podemos trabajar intrínsecamente o extrínsecamente.

El espacio de Minkowski \mathbb{E}_1^n , es decir, la variedad \mathbb{E}^n equipada con un tensor métrico g de índice 1, es una variedad semirriemanniana muy importante. Si $n = 4$, se tiene el ejemplo más simple de un espacio-tiempo relativista¹². La geometría del espacio-tiempo de Minkowski juega un papel importante en el estudio de la relatividad especial y de la relatividad general. Por ejemplo, las partículas materiales se pueden modelar como ciertas curvas tipo tiempo y las partículas tipo luz se pueden modelar como con ciertas curvas tipo luz (cf. O'Neill [O'N83, caps. 6, 12]). Por lo tanto, además de su valor intrínseco, algunas razones para estudiar curvas en el espacio de Minkowski son que se pueden aplicar a la física relativista.

En el primer capítulo de esta tesis introducimos de manera formal el espacio de Minkowski y sus principales características, las propiedades que tienen que ver con los aspectos geométricos y algebraicos de las diferentes clases de vectores y las isometrías, con particular interés en el plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 y en el espacio de Minkowski tridimensional \mathbb{E}_1^3 .

En los capítulos segundo y tercero analizamos las curvas (como subvariedades unidimensionales), desde el punto de vista de la teoría local, en el espacio de Minkowski bidimensional y tridimensional respectivamente. Estudiamos los marcos móviles de Frenet de las curvas planas y espaciales y, en este último caso definimos las curvas de Frenet en contraste con las curvas tipo luz y las curvas con vector normal tipo luz. Las grandes diferencias entre el estudio de las curvas riemannianas euclidianas y las curvas semirriemannianas de Minkowski aparecen inmediatamente desde el segundo capítulo, por ejemplo, el carácter causal de una curva que desempeña un papel importante cuando construimos su marco de Frenet. Especialmente para curvas tipo luz y curvas con vector normal tipo luz, hay una falla en el procedimiento habitual para encontrar las ecuaciones de Frenet, y es más simple usar un marco móvil con algunos vectores tipo luz en la base. Sin embargo, tal marco resulta no ser único, ni ortogonal, ni mucho menos los vectores son de norma igual a uno.

En el cuarto capítulo estudiamos algunas familias especiales de curvas, en parti-

¹²Cf. J. Walrave, *Curves and Surfaces in Minkowski Space*, tesis, K. U. Leuven, 1995. También es recomendable consultar *The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity*, Dover Publications Inc., 1952. Se trata de un conjunto de artículos sobre la teoría de la relatividad especial y general escritos por autores como Lorentz, Einstein, Minkowski y Weyl.

cular las hélices y las curvas de Bertrand. También estudiamos algunas propiedades globales tanto de las curvas en el plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 , como de las curvas en el espacio de Minkowski tridimensional \mathbb{E}_1^3 . Damos los elementos necesarios para extender la teoría de curvas al espacio de Minkowski n -dimensional, \mathbb{E}_1^n , y finalizamos con el teorema fundamental de las curvas de Frenet en dimensiones superiores.

CAPÍTULO 1

EL ESPACIO DE LORENTZ-MINKOWSKI \mathbb{E}_1^3

En este capítulo presentamos las propiedades elementales y los resultados principales del espacio de Lorentz-Minkowski que utilizaremos en los capítulos siguientes. La teoría del espacio de Minkowski está expuesta por S. C. Newman en [New19], en la obra de B. O'Neill [O'N83], y de manera más general (variedades lorentzianas) en el texto de J. K. Beem, *et. al.* [BEE96]. Los resultados principales que nos interesan aquí son los que se ocupan de la métrica de Lorentz, la clasificación de vectores, el producto interno y el producto cruz, así como las caracterizaciones de los subespacios vectoriales tipo tiempo, tipo espacio, y de los vectores tipo luz. La geometría de los espacios vectoriales de Lorentz-Minkowski es considerablemente más complicada que la de los espacios con producto interno positivo definido y, cuando se traducen a términos físicos, las implicaciones pueden resultar sorprendentes para una sensibilidad euclidiana. Al final del capítulo presentamos los resultados principales de las isometrías del espacio de Lorentz-Minkowski.

§1.1 Propiedades elementales del espacio de Lorentz-Minkowski

Sea \mathbb{R}^3 el espacio vectorial real con su estructura de espacio vectorial usual. Vamos a denotar por $B_u = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a la base usual o canónica de \mathbb{R}^3 , donde

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Denotamos por (x, y, z) las coordenadas de un vector de \mathbb{R}^3 con respecto a la base B_u . Además, vamos a considerar la estructura afín de \mathbb{R}^3 . También tenemos que definir una forma bilineal que desempeñe el papel de métrica.

Definición 1.1. El *espacio de Lorentz-Minkowski* es el espacio métrico $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por la forma bilineal

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3, \tag{1.1}$$

para todo par de vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. A esta métrica la llamaremos *métrica de Lorentz-Minkowski*. Diremos que dos vectores no nulos \mathbf{u} y \mathbf{v} son *ortogonales* (o *perpendiculares*) si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

La convención de signos que adoptamos en la ecuación (1.1) no es la única que aparece en la literatura. Por ejemplo, algunos autores consideran $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -u_1v_1 +$

$u_2v_2 + u_3v_3$ y también se puede considerar $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$. La elección de un enfoque sobre otro puede dar lugar a diferencias en el número y la ubicación de los signos negativos en las expresiones, pero no afecta la sustancia de la teoría.

La métrica de Lorentz-Minkowski es una métrica no degenerada, es decir, si para todo \mathbf{w} se tiene $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. En ocasiones también se usa el nombre de «espacio de Minkowski» y «métrica de Lorentz» para referirnos al espacio y la métrica que acabamos de definir. El espacio vectorial \mathbb{R}^3 también es compatible con la métrica euclidiana, que se denota por $\langle \cdot, \cdot \rangle_e : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. En consecuencia, denotaremos el espacio euclidiano tridimensional por $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_e)$ para distinguirlo del espacio de Minkowski $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Vamos a tomar como base canónica de \mathbb{E}_1^3 la base canónica de \mathbb{R}^3 , y esto lo podemos hacer porque la existencia y elección de una base no depende de la presencia de una métrica.

Definición 1.2. Dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$, la *norma* (o *módulo*) de \mathbf{v} se define como la función $\|\cdot\| : \mathbb{E}_1^3 \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|}. \quad (1.2)$$

Diremos que \mathbf{v} es un *vector unitario* si $\|\mathbf{v}\| = 1$, es decir si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \pm 1$.

De la ecuación (1.2) se sigue que $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y solo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ o $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Definición 1.3. La *signatura* de la métrica de Lorentz con la base canónica, se define como la terna

$$(\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle, \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle, \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle) = (+1, +1, -1).$$

Debido a la presencia del término -1 en la tercera coordenada, decimos que la métrica lorentziana es una métrica de *índice 1*.

Para cualquier otra base ortonormal $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$, denotamos $\langle \bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_i \rangle = \epsilon_i$ y así tenemos que $\langle \bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j \rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. La signatura con esta nueva base es $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$. El siguiente par de resultados nos será de mucha utilidad en los capítulos posteriores.

Proposición 1.1. Sea $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$ una base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 con signatura $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$.

a) Si $\mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$ es un vector, entonces

$$\mathbf{v} = \epsilon_1 \langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{e}}_1 \rangle \bar{\mathbf{e}}_1 + \epsilon_2 \langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{e}}_2 \rangle \bar{\mathbf{e}}_2 + \epsilon_3 \langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{e}}_3 \rangle \bar{\mathbf{e}}_3.$$

b) Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son dos vectores, entonces

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \epsilon_1 u_1 v_1 + \epsilon_2 u_2 v_2 + \epsilon_3 u_3 v_3.$$

Tomando prestada la terminología de la teoría de la relatividad, tenemos varios tipos de vectores en el espacio de Minkowski, con respecto a la métrica de Lorentz.

Definición 1.4. Sea \mathbf{v} un vector en el espacio de Minkowski \mathbb{E}_1^3 . Diremos que

- a) \mathbf{v} es *tipo espacio* si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ o bien $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- b) \mathbf{v} es *tipo tiempo* si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$.
- c) \mathbf{v} es *tipo luz* o *nulo* si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

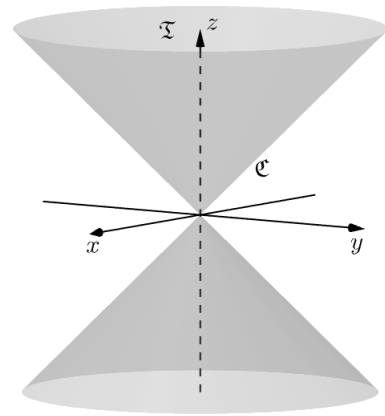
En el contexto de la física relativista, un vector \mathbf{v} se llama *causal* si es tipo espacio o tipo luz. Por lo general, se considera que el vector cero es tipo espacio, pero algunos autores consideran que es tipo luz (v. g. Ye, Ma, y Wang [YMW16], y muchos otros). Es claro que cada vector es o bien tipo espacio, o bien tipo tiempo, o bien tipo luz, y esto da como resultado una correspondiente escisión de \mathbb{E}_1^3 .

El *cono de luz* del espacio de Minkowski \mathbb{E}_1^3 es el conjunto de vectores tipo luz definido como

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3 : \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0\} - \{\mathbf{0}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

Análogamente, el *cono de tiempo* es el conjunto de vectores tipo tiempo definido como

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3 : \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}. \end{aligned}$$



En términos geométricos, \mathfrak{C} es la unión de un par de conos sin sus vértices, \mathfrak{T} es el «interior» de \mathfrak{C} , mientras que el conjunto de vectores tipo espacio es el «exterior» de \mathfrak{C} . Observamos que ambos conjuntos de vectores \mathfrak{C} y \mathfrak{T} tienen dos componentes conexas.

Dado un subespacio vectorial $V \leq \mathbb{E}_1^3$, consideramos la métrica inducida $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

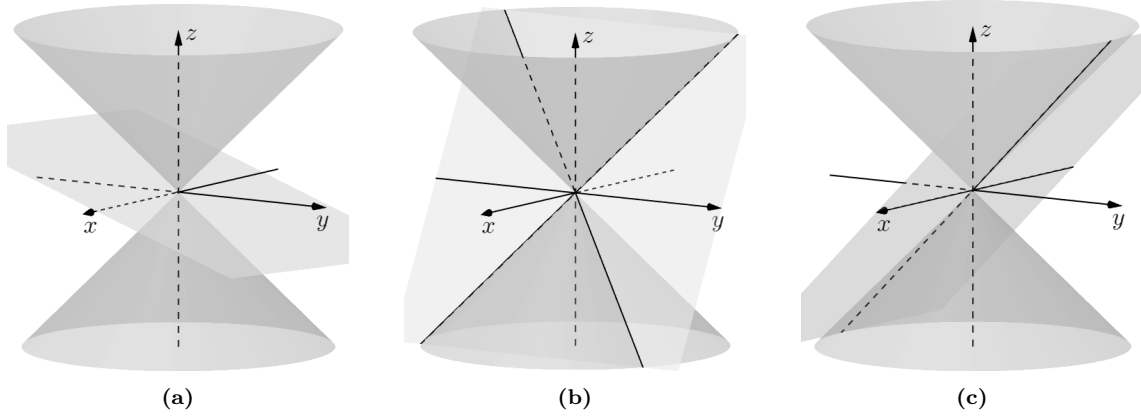
para todo par de vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. La métrica en V puede ser de alguno de los siguientes tres tipos:

- a) Definida positiva, y en tal caso decimos que V es un subespacio *tipo espacio*.
- b) De índice 1, y decimos que V es un subespacio *tipo tiempo*.
- c) Degenerada, y decimos que V es un subespacio *tipo luz* o *nulo*.

Evidentemente, cada subespacio de \mathbb{E}_1^3 es o bien tipo espacio, o bien tipo tiempo o bien tipo luz. Por convención, el subespacio cero $\{\mathbf{0}\}$ se considerará tipo espacio. En (c) vemos que, en contraste con la situación de un producto interno definido positivo, el producto escalar de Lorentz en \mathbb{E}_1^3 puede ser degenerado en V y, por lo tanto, no es un producto escalar en \mathbb{E}_1^3 . La *naturaleza* (o *carácter*) *causal* de un vector o de un subespacio es la propiedad de ser tipo espacio, tipo tiempo o tipo luz.

Cualquier subespacio bidimensional de \mathbb{E}_1^3 se puede representar mediante un plano P que pasa por el origen. Esto da exactamente tres posibilidades. (a) Cuando

P no corta a \mathcal{C} , contiene solo vectores tipo espacio. (b) Cuando P corta a \mathcal{C} en un par de rectas (menos el origen), contiene tanto vectores tipo espacio, como vectores tipo tiempo y vectores tipo luz. (c) Cuando P corta a \mathcal{C} en una sola recta (menos el origen), contiene vectores tipo espacio y vectores tipo luz, pero no contiene vectores tipo tiempo. Observamos que de acuerdo con este análisis, todo subespacio bidimensional de \mathbb{E}_1^3 contiene vectores tipo espacio. Formalizamos esta observación en las siguientes proposiciones (cuyas pruebas se pueden ver en [New19, §4.8]).



Proposición 1.2. Sea $V \leq \mathbb{E}_1^3$ un subespacio vectorial. Entonces se tienen los siguientes enunciados:

- $\dim V + \dim V^\perp = 3$.
- $(V^\perp)^\perp = V$.
- Si V es no degenerado, entonces V^\perp también es un subespacio no degenerado.
- V es tipo tiempo (tipo espacio, tipo luz, resp.) si y solo si V^\perp es tipo espacio (tipo tiempo, tipo luz, resp.).
- Si $\dim V = 2$, entonces V contiene algún vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tipo espacio.
- V es tipo espacio si y solo si consiste solamente de vectores tipo espacio.
- Un vector \mathbf{v} es tipo espacio (tipo tiempo, tipo luz, resp.) si y solo si $\mathbb{R}\mathbf{v}$ es un subespacio tipo espacio (tipo tiempo, tipo luz, resp.) de \mathbb{E}_1^3 .
- Si \mathbf{v} es un vector tipo tiempo o tipo espacio, entonces $\mathbb{E}_1^3 = \mathbb{R}\mathbf{v} \oplus (\mathbb{R}\mathbf{v})^\perp$.

Proposición 1.3. a) Dos vectores tipo luz $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$ son linealmente dependientes si y solo si son ortogonales, es decir, $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

b) Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son dos vectores tipo tiempo o tipo luz tales que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, entonces son vectores tipo luz.

c) Si \mathbf{u} es tipo tiempo y \mathbf{v} es tipo tiempo o tipo luz, entonces $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$.

d) Si V es un subespacio tipo luz, entonces $\dim(V \cap V^\perp) = 1$.

Proposición 1.4. Sea $P \leq \mathbb{E}_1^3$ un subespacio vectorial bidimensional. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- P es un subespacio tipo tiempo.
- P contiene dos vectores tipo luz linealmente independientes.
- P contiene algún vector tipo tiempo.

Proposición 1.5. Sea $V \leq \mathbb{E}_1^3$ un subespacio vectorial. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- a) V es un subespacio tipo luz.
- b) V contiene algún vector tipo luz pero ninguno tipo tiempo.
- c) $V \cap \mathfrak{C} = \mathbb{R}\mathbf{v} - \{\mathbf{0}\}$ para algún vector $\mathbf{v} \in V$ tipo luz.

El siguiente resultado es útil desde el punto de vista euclidiano.

Proposición 1.6. Sea $P \leq \mathbb{E}_1^3$ un espacio vectorial bidimensional y sea \mathbf{n}_e un vector ortogonal a P con respecto a la métrica euclidiana $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$. P es un plano tipo espacio (tipo tiempo, tipo luz, resp.) si y sólo si \mathbf{n}_e es un vector tipo tiempo (tipo espacio, tipo luz, resp.).

Prueba. Si escribimos el espacio vectorial P como

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : ax + by + cz = 0\},$$

entonces \mathbf{n}_e es proporcional al vector (a, b, c) . También podemos escribir P como

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : ax + by - (-c)z = 0\} = (\mathbb{R}(a, b, -c))^\perp.$$

Como la naturaleza causal del vector $(a, b, -c)$ es la misma que la del vector \mathbf{n}_e y por el inciso (d) de la proposición 1.2, tenemos que P es tipo espacio (tipo tiempo, tipo luz, resp.) si y solo si $P^\perp = (\mathbb{R}(a, b, -c))^\perp$ es tipo tiempo (tipo espacio, tipo luz, resp.) si y solo si \mathbf{n}_e es tipo tiempo (tipo espacio, tipo luz, resp.). Q. E. D.

El siguiente resultado justifica por qué cuando se dibuja un vector unitario ortogonal a un plano tipo espacio, el tamaño euclidiano es mayor que 1.

Proposición 1.7. Si $P = (\mathbb{R}\mathbf{v})^\perp$ es un plano tipo espacio, entonces

$$\|\mathbf{v}\|_e \geq \|\mathbf{v}\|.$$

Prueba. Como P es tipo espacio, \mathbf{v} es tipo tiempo, es decir $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$. Entonces, si $\mathbf{v} = (a, b, c)$, tenemos

$$\|\mathbf{v}\|^2 = |a^2 + b^2 - c^2| = c^2 - a^2 - b^2 \leq c^2 + a^2 + b^2 = \|\mathbf{v}\|_e^2. \quad \text{Q. E. D.}$$

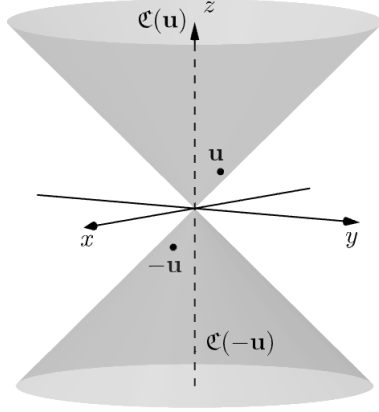
§1.2 Vectores tipo tiempo y conos de tiempo

Si \mathbf{u} es un vector tipo tiempo, el *cono de tiempo* de \mathbf{u} es el conjunto

$$\mathfrak{C}(\mathbf{u}) = \{\mathbf{v} \in \mathfrak{T} : \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0\}.$$

Este conjunto no es vacío, pues $\mathbf{u} \in \mathfrak{C}(\mathbf{u})$. Además, si \mathbf{v} es otro vector tipo tiempo, y por el hecho que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ (Prop. 1.3(c)), se sigue que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$ o $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle > 0$.

Si definimos la relación $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$ cuando $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$. Esta relación es una relación de equivalencia en \mathfrak{T} que escinde el conjunto de vectores tipo tiempo en dos clases disyuntas $\mathfrak{C}(\mathbf{u})$ y $\mathfrak{C}(-\mathbf{u}) = -\mathfrak{C}(\mathbf{u})$, con $\mathfrak{C}(\mathbf{u}) \cap \mathfrak{C}(-\mathbf{u}) = \emptyset$. Denotamos estas clases de equivalencia \mathfrak{T}^+ y \mathfrak{T}^- y las llamamos *cono de tiempo futuro* y *cono de tiempo pasado*, respectivamente. Como $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1) \in \mathfrak{T}$ es un vector tipo tiempo, entonces



$$\mathbf{v} = (x, y, z) \sim (0, 0, 1) = \mathbf{e}_3 \Leftrightarrow z > 0.$$

Del mismo modo, dado que $-\mathbf{e}_3 = (0, 0, -1) \in \mathfrak{T}$, tenemos

$$\mathbf{v} = (x, y, z) \sim (0, 0, -1) \Leftrightarrow z < 0.$$

Por lo tanto, los conos de tiempo son los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^+ &= \{(x, y, z) \in \mathfrak{T} : z > 0\}, \\ \mathfrak{T}^- &= \{(x, y, z) \in \mathfrak{T} : z < 0\}. \end{aligned}$$

En la siguiente proposición resumimos las principales propiedades de los conos de tiempo.

- Proposición 1.8.** a) Dos vectores tipo tiempo \mathbf{u} y \mathbf{v} se encuentran en el mismo cono de tiempo si y solo si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$.
 b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ y $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ tienen el mismo signo si y solo si \mathbf{v} y \mathbf{w} se encuentran en el mismo cono de tiempo.
 c) $\mathbf{u} \in \mathfrak{C}(\mathbf{v})$ si y solo si $\mathfrak{C}(\mathbf{u}) = \mathfrak{C}(\mathbf{v})$.
 d) Los conos de tiempo son conjuntos convexos con forma de cono.

Observación 1.1. La existencia de conos de tiempo se debe a que el conjunto \mathfrak{T} de vectores tipo tiempo tiene dos componentes conexas. Para los vectores tipo luz se tiene una situación similar, ya que el cono de luz \mathfrak{C} también tiene dos componentes conexas, a saber:

$$\mathfrak{C}^+ = \{(x, y, z) \in \mathfrak{C} : z > 0\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{C}^- = \{(x, y, z) \in \mathfrak{C} : z < 0\}.$$

Dados dos vectores linealmente independientes $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{C}$, se tiene que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$, según la proposición 1.3 (a). En este caso $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$ si y solo si ambos vectores están en la misma clase del cono de luz \mathfrak{C} . A los vectores de la clase \mathfrak{C}^+ los llamamos *vectores dirigidos hacia el futuro* y a los vectores de la clase \mathfrak{C}^- los llamamos *vectores dirigidos hacia el pasado*.

Definición 1.5. Una base $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ de \mathbb{E}_1^3 (salvo el orden) se llama *base nula* (o *marco nulo*) si $\bar{\mathbf{e}}_1$ es un vector unitario tipo espacio y $\bar{\mathbf{e}}_2$ y $\bar{\mathbf{e}}_3$ son dos vectores tipo luz en $(\mathbb{R}\bar{\mathbf{e}}_1)^\perp$ y tales que $\langle \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3 \rangle = -1$. En particular, $\bar{\mathbf{e}}_2$ y $\bar{\mathbf{e}}_3$ están en la misma componente de \mathfrak{C} .

Una diferencia importante que encontramos entre el espacio euclidiano \mathbb{E}^3 y el espacio de Minkowski \mathbb{E}_1^3 se refiere a la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Recordemos que si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}^3$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz afirma que $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_e| \leq \|\mathbf{u}\|_e \|\mathbf{v}\|_e$ y la igualdad se cumple si y solo si \mathbf{u} y \mathbf{v} son proporcionales (es decir, linealmente dependientes). Para los vectores tipo tiempo en el espacio de Minkowski existe una *desigualdad de Cauchy-Schwarz inversa*. Además, si los vectores están en el mismo cono de tiempo, entonces también tenemos una *desigualdad del triángulo inversa*. (cf. [New19, pp. 91, 96]).

Proposición 1.9. a) Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{T}$ dos vectores tipo tiempo. Entonces

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \geq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|,$$

y la igualdad se da si y solo si \mathbf{u} y \mathbf{v} son proporcionales.

b) Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{T}$ dos vectores tipo tiempo en el mismo cono de tiempo \mathfrak{T}^+ o \mathfrak{T}^- , es decir $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$. Entonces

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|,$$

y la igualdad se da si y solo si \mathbf{u} y \mathbf{v} son proporcionales.

Proposición 1.10. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$ son dos vectores tipo tiempo en el mismo cono de tiempo, entonces existe un único número $\phi \geq 0$ tal que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cosh \phi. \quad (1.3)$$

Al número ϕ lo llamamos *ángulo hiperbólico* entre \mathbf{u} y \mathbf{v} .

Prueba. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos la desigualdad

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \geq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2, \quad (1.4)$$

que a su vez reescribimos como

$$\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2} \geq 1. \quad (1.5)$$

Si \mathbf{u} y \mathbf{v} se encuentran en el mismo cono de tiempo, entonces $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0$ y la ecuación (1.5) implica que

$$-\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \geq 1.$$

Como la función coseno hiperbólico $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ es inyectiva, existe un único número $\phi \in [0, \infty)$ tal que

$$\cosh \phi = -\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|},$$

y de aquí se sigue el resultado.

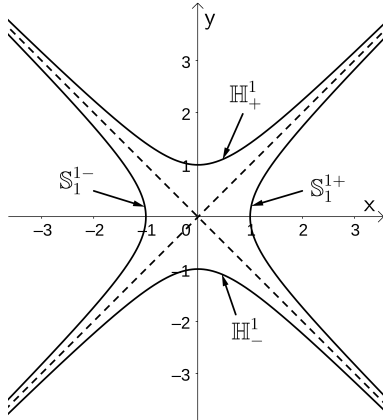
Q. E. D.

Una vez que hemos definido el ángulo entre dos vectores que se encuentran en el mismo cono de tiempo, nos preguntamos cómo podemos definir el ángulo entre dos vectores cualesquiera $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$. Supongamos que \mathbf{u} y \mathbf{v} son linealmente independientes y que \mathbf{u} y \mathbf{v} no son tipo luz. El ángulo entre estos dos vectores se define en función del plano P determinado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} . La métrica inducida en P puede ser (a) riemanniana, (b) lorentziana o (c) degenerada.

Caso 1. Si el plano P es riemanniano, entonces la definición del ángulo entre ambos vectores (tipo espacio) es la habitual, como en el espacio euclidiano.

Caso 2. Si el plano P es lorentziano, entonces es isométrico al plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 y una isometría no cambiaría la definición de ángulo que dimos arriba, donde de-

finimos el ángulo entre dos vectores tipo tiempo en el mismo cono de tiempo y basta considerar los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} unitarios. El conjunto \mathbb{U}_1^2 de vectores unitarios de \mathbb{E}_1^2 tiene cuatro componentes disyuntas, a saber:



$$\begin{aligned} \mathbb{H}_+^1 &= \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = -1, y > 0\}, \\ \mathbb{H}_-^1 &= \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = -1, y < 0\}, \\ \mathbb{S}_+^{1+} &= \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = 1, x > 0\}, \\ \mathbb{S}_-^{1-} &= \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = 1, x < 0\}. \end{aligned}$$

Notemos que los vectores en $\mathbb{H}_+^1 \sqcup \mathbb{H}_-^1$ son tipo tiempo y los vectores en $\mathbb{S}_+^{1+} \sqcup \mathbb{S}_-^{1-}$ son tipo espacio.

Observación 1.2. Al cambiar (x, y) por (y, x) , el plano \mathbb{E}_1^2 cambia a \mathbb{R}^2 equipado con la métrica $dy^2 - dx^2$. Entonces, un vector tipo espacio (tipo tiempo) de \mathbb{E}_1^2 se convierte en un vector tipo tiempo (tipo espacio) del nuevo espacio métrico. Consideremos dos vectores unitarios tipo espacio $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{U}_1^2$ y, además, supongamos que se encuentran en la misma componente de \mathbb{U}_1^2 , es decir, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}_+^{1+}$ o $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}_-^{1-}$. Entonces, se puede demostrar que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq 1$.

Definición 1.6. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^2$ dos vectores tipo espacio tales que $\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$ y $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ están en la misma componente de \mathbb{U}_1^2 . Entonces, definimos el ángulo $\phi = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ entre \mathbf{u} y \mathbf{v} como el único número $\phi \in [0, \infty)$ tal que

$$\cosh \phi = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}. \quad (1.6)$$

Caso 3. Tenemos el tercer caso si el plano P , generado por ambos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , es tipo luz. Necesariamente \mathbf{u} y \mathbf{v} no son tipo tiempo, por la proposición 1.5 (b), y en este caso no definimos el ángulo entre dos vectores (tipo espacio).

Para ofrecer una definición de *orientación tipo tiempo*, primero vamos a recordar la noción de orientación en el espacio vectorial \mathbb{R}^3 . En el conjunto de todas las bases ordenadas de \mathbb{R}^3 , consideramos la relación de equivalencia \sim_o dada por $B \sim_o B'$

cuando la matriz de cambio de base tiene determinante positivo. Existen exactamente dos clases de equivalencia, llamadas *orientaciones* de \mathbb{R}^3 . Para una base fija B y cualquier otra base B' , diremos que B' está *orientada positivamente* si $B' \sim_o B$. En el caso contrario, decimos que B' está *orientada negativamente*. La elección del par ordenado $(\mathbb{R}^3, [B])$ nos dice que \mathbb{R}^3 está orientado por B .

En el espacio de Minkowski \mathbb{E}_1^3 , dado que el espacio base es \mathbb{R}^3 y dado que tomamos como base canónica la base canónica de \mathbb{R}^3 , la noción de orientación es la misma que la de \mathbb{R}^3 porque esta noción no depende de la presencia de una métrica. La orientación tipo tiempo que vamos a introducir a continuación sí es un concepto métrico porque usaremos la métrica lorentziana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y, por lo tanto, no hay relación *a priori* con la noción que definimos arriba sin métrica.

En \mathbb{E}_1^3 consideramos el conjunto \mathcal{B} de todas las bases ordenadas, de manera que si $B = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\} \in \mathcal{B}$, entonces $\bar{\mathbf{e}}_3$ es un vector tipo tiempo. Si $B = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ y $B' = \{\bar{\mathbf{e}}'_1, \bar{\mathbf{e}}'_2, \bar{\mathbf{e}}'_3\}$ son dos bases, definimos la relación de equivalencia $B \sim B'$ cuando $\bar{\mathbf{e}}_3$ y $\bar{\mathbf{e}}'_3$ están en el mismo cono de tiempo, es decir,

$$B \sim B' \quad \text{si} \quad \langle \bar{\mathbf{e}}_3, \bar{\mathbf{e}}'_3 \rangle < 0.$$

La relación de equivalencia \sim determina dos clases de equivalencia, que se denominan *orientaciones tipo tiempo*. Cada clase de equivalencia $[B]$ determina un único cono de tiempo definido por el vector $\bar{\mathbf{e}}_3$ de B . A la inversa, dado un cono de tiempo, existe una única orientación tipo tiempo tal que cualquier base B que pertenezca a esta orientación tiene el último vector $\bar{\mathbf{e}}_3$ en dicho cono de tiempo. Por lo tanto, si fijamos el cono de tiempo \mathfrak{T}^+ , estamos asociando una orientación tipo tiempo. En consecuencia, decimos que una base ortonormal $B = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ está *dirigida hacia el futuro* si $\bar{\mathbf{e}}_3$ está dirigido hacia el futuro, o de manera equivalente, si $\bar{\mathbf{e}}_3 \in \mathfrak{T}^+$.

Definición 1.7. Decimos que \mathbb{E}_1^3 tiene una *orientación tipo tiempo* si fijamos una orientación tipo tiempo, es decir, para alguna base B consideramos un par ordenado $(\mathbb{E}_1^3, [B])$.

Terminamos esta sección con la definición del producto vectorial para el espacio de Minkowski.

Definición 1.8. Sean dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3$. El *producto vectorial de Lorentz* de \mathbf{u} y \mathbf{v} es el único vector, denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, que satisface

$$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \tag{1.7}$$

donde $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ es el determinante de la matriz que se obtiene colocando por columnas las coordenadas de los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} , con respecto a la base canónica.

La bilinealidad de la métrica de Lorentz asegura la existencia y unicidad del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Si tomamos el vector \mathbf{w} en la ecuación (1.7) como cada uno de los vectores \mathbf{e}_i de la base canónica B_u , obtenemos la expresión en coordenadas de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

con respecto a la base B_u como

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Si denotamos por $\mathbf{u} \times_e \mathbf{v}$ el producto vectorial euclidiano, entonces $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es la reflexión de $\mathbf{u} \times_e \mathbf{v}$ con respecto al plano con ecuación $z = 0$. De aquí se sigue que

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.$$

En general, si $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$ es una base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 con signatura $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$, entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \epsilon_1 \bar{\mathbf{e}}_1 & \epsilon_2 \bar{\mathbf{e}}_2 & \epsilon_3 \bar{\mathbf{e}}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

y de aquí se sigue que

$$\bar{\mathbf{e}}_1 \times \bar{\mathbf{e}}_2 = \epsilon_3 \bar{\mathbf{e}}_3, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 \times \bar{\mathbf{e}}_3 = \epsilon_1 \bar{\mathbf{e}}_1, \quad \bar{\mathbf{e}}_3 \times \bar{\mathbf{e}}_1 = \epsilon_2 \bar{\mathbf{e}}_2.$$

Las propiedades del producto vectorial de Lorentz son análogas a las propiedades del producto vectorial euclidiano, salvo un cambio de signo en algunas ocasiones. A modo de ejemplo podemos dar el siguiente par de resultados:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle = - \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \end{vmatrix},$$

y

$$\langle \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 \rangle = - \begin{vmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2 \rangle \end{vmatrix}.$$

Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son dos vectores no degenerados, entonces $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\}$ es una base de \mathbb{E}_1^3 . Sin embargo, y en contraste con el espacio euclidiano, la naturaleza causal de \mathbf{u} y \mathbf{v} determina si la base está o no orientada positivamente. De manera precisa, si \mathbf{u} y \mathbf{v} son dos vectores tipo espacio, entonces $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es tipo tiempo y B está orientada negativamente porque $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle < 0$. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} tienen diferente naturaleza causal, entonces B está orientada positivamente.

§1.3 Isometrías de \mathbb{E}_1^3

Un mapeo $A : \mathbb{E}_1^3 \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ es una isometría vectorial o lineal si

$$\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle, \quad \text{es decir,} \quad \|A\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|.$$

Consideramos el conjunto de todas las isometrías vectoriales de \mathbb{E}_1^3 , $O_1(3)$. La expresión matricial de una isometría vectorial A con respecto a una base ortonormal satisface la ecuación $A^tGA = G$, donde

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

En otras palabras, expresamos el conjunto $O_1(3)$ como el conjunto de matrices

$$O_1(3) = \{A \in Gl(3, \mathbb{R}) : A^tGA = G\}.$$

Las principales propiedades de las isometrías son las siguientes.

Proposición 1.11. Sea $A \in O_1(3)$ una isometría. Entonces

- a) A mapea vectores tipo espacio (tipo tiempo, tipo luz, resp.) a vectores tipo espacio (tipo tiempo, tipo luz, resp.).
- b) Si \mathbf{u} , \mathbf{v} son dos vectores, entonces

$$A\mathbf{u} \times A\mathbf{v} = \det A(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

- c) $\det A = \pm 1$ y $O_1(3)$ tiene al menos dos componentes conexas.

Denotamos por $SO_1(3)$ al conjunto de isometrías con determinante $+1$, y lo denominamos *grupo especial de Lorentz*, el cual se relaciona con la noción de orientación de \mathbb{E}^3 . De manera precisa, dada una orientación $B \in \mathcal{B}$, se tiene que la base $B' \in \mathcal{B}$ está orientada positivamente si la matriz A de cambio de base pertenece al conjunto $SO_1(3)$.

Definición 1.9. Decimos que A *conserva la orientación tipo tiempo* si A transforma una base B dirigida hacia el futuro en otra base B' dirigida hacia el futuro. Y definimos el *grupo ortócrono* como

$$O_1^+(3) = \{A \in O_1(3) : A \text{ conserva la orientación tipo tiempo}\}.$$

El conjunto $O_1^+(3)$ es un grupo con dos componentes, uno de ellos es $O_1^+(3) \cap SO_1(3)$. Esto prueba que $O_1(3)$ tiene exactamente cuatro componentes, en contraste con el grupo de isometrías $O(3)$ del espacio euclidiano \mathbb{E}^3 , que tiene exactamente dos componentes conexas, siendo una de ellas el grupo ortogonal especial $SO(3)$.

El *grupo ortócrono especial de Lorentz* es el conjunto $O_1^{++}(3) = O_1^+(3) \cap SO_1(3)$. Este conjunto es un grupo con la matriz identidad $I \in O_1^{++}(3)$. Desde un punto de vista topológico, $O_1^{++}(3)$ no es un conjunto compacto, en contraste con $SO(3) \subset O(3)$, que sí es compacto.

Proposición 1.12. Las cuatro componentes conexas de $O_1(3)$ son $O_1^{++}(3)$,

$$O_1^{+-}(3) = \{A \in SO_1(3) : a_{33} < 0\}, \quad O_1^{-+}(3) = \{A \in O_1^+(3) : \det A = -1\}, \quad \text{y}$$

$$O_1^{--}(3) = \{A \in O_1(3) : \det A = -1, a_{33} < 0\}.$$

Si denotamos por T_1 y T_2 las isometrías de \mathbb{E}_1^3 definidas por

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

entonces las tres últimas componentes que aparecen en la proposición 1.12 corresponden a $T_2 \cdot T_1 \cdot O_1^{++}(3)$, $T_1 \cdot O_1^{++}(3)$ y $T_2 \cdot O_1^{++}(3)$, respectivamente.

Para aclarar por qué aparecen cuatro componentes conexas de $O_1(3)$, vamos a calcular las isometrías en el caso bidimensional \mathbb{E}_1^2 . Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una isometría en el plano de Minkowski. Entonces, $A \in O_1(2)$ si y solo si $G = A^t G A$, donde $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Esto nos lleva a las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ b^2 - d^2 = -1 \\ ab - cd = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Si comparamos con las isometrías $O(2)$ del plano euclidiano \mathbb{E}^2 , la diferencia radica en los signos negativos. Las tres ecuaciones correspondientes equivalen a $a^2 + b^2 = 1$ (un círculo) y $ab + cd = 0$, con $c = \pm b$, $d = \pm a$, y la solución del sistema es $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$. Sin embargo, para las ecuaciones (1.8) tenemos $a^2 - b^2 = 1$ (una hipérbola con dos ramas o componentes) y $ab - cd = 0$, con $c = \pm b$, $d = \pm a \neq 0$. Combinando todos los casos obtenemos las siguientes cuatro componentes:

- a) Existe t tal que $a = \cosh(t)$ y $c = \sinh(t)$. De $b^2 - d^2 = -1$, aparecen dos casos nuevamente:
 - i) Existe s tal que $b = \sinh(s)$ y $d = \cosh(s)$. Usando la tercera ecuación del sistema, concluimos que $s = t$.
 - ii) Existe s tal que $b = \sinh(s)$ y $d = -\cosh(s)$, y ahora tenemos $s = -t$.
- b) Existe t tal que $a = -\cosh(t)$ y $c = \sinh(t)$. La ecuación $b^2 - d^2 = -1$ da dos posibilidades:
 - i) Existe s tal que $b = \sinh(s)$ y $d = \cosh(s)$. La tercera ecuación del sistema nos permite concluir que $s = -t$.
 - ii) Existe s tal que $b = \sinh(s)$ y $d = -\cosh(s)$, y aquí tenemos $s = t$.

Resumiendo, obtenemos los siguientes cuatro tipos de isometrías, en el mismo orden en que las obtuvimos:

$$\begin{bmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{bmatrix} \in O_1^{++}(2), \quad \begin{bmatrix} \cosh(t) & -\sinh(t) \\ \sinh(t) & -\cosh(t) \end{bmatrix} \in O_1^{--}(2),$$

$$\begin{bmatrix} -\cosh(t) & -\sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{bmatrix} \in O_1^{-+}(2), \quad \begin{bmatrix} -\cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & -\cosh(t) \end{bmatrix} \in O_1^{+-}(2).$$

Terminamos el estudio de las isometrías con la familia de isometrías que dejan fija puntualmente una recta ℓ . Este tipo de isometrías se denominan *rotaciones espacio-temporales* o *transformaciones de Lorentz impropias* (*boosts*) de la recta ℓ [O’N83, p. 236] y son la contraparte de los grupos de rotaciones de \mathbb{E}^3 . Dependiendo de la naturaleza causal de ℓ , existen tres tipos de tales isometrías:

Caso 1. La recta ℓ es tipo tiempo. Supongamos que $\ell = \mathbb{R}\mathbf{e}_3$. Dado que la restricción de la isometría a ℓ^\perp es una isometría en un plano tipo espacio, es definida positiva (como en el caso euclidiano) y es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Caso 2. La recta ℓ es tipo espacio. Supongamos $\ell = \mathbb{R}\mathbf{e}_1$. Entonces ℓ^\perp es un plano de Lorentz y la restricción de la isometría a ℓ^\perp pertenece a $O_1^{++}(2)$. Entonces la isometría es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \operatorname{senh} \theta \\ 0 & \operatorname{senh} \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Caso 3. La recta ℓ es tipo luz, digamos $\ell = \mathbb{R}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. Resolviendo las ecuaciones $A^tGA = G$ y $A(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ para A , encontramos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & -a \\ -a & 1 - \frac{a^2}{2} & \frac{a^2}{2} \\ a & -\frac{a^2}{2} & 1 + \frac{a^2}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Terminamos este capítulo mencionando que los conceptos y resultados básicos de límite, continuidad y diferenciabilidad (cf. [Car00, Apo04]) se extienden de manera muy natural al espacio de Minkowski. Las técnicas estándar del álgebra lineal se pueden consultar en cualquier libro que trate del tema, como el clásico texto de K. Hoffman y R. Kunze [HK74] y en el ya citado texto de S. C. Newman [New19].

CAPÍTULO 2

TEORÍA LOCAL DE LAS CURVAS PLANAS EN \mathbb{E}_1^2

En este capítulo estudiamos las propiedades locales de las curvas planas en el plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 , donde por *propiedad local* se entenderá toda propiedad que se define en una vecindad de un punto de la curva. En aras de la comparación con el cálculo, la derivada $f'(a)$ de una función f en un punto a es una propiedad local de la función, ya que para definir $f'(a)$ solo se necesita conocer $f(x)$ para $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, donde ϵ es cualquier número real positivo. Por el contrario, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ de una función en un intervalo $I = [a, b]$ es una *propiedad global*, ya que se necesita conocer la función f en todo el intervalo $[a, b]$ establecido para calcular la integral.

A diferencia con el caso euclidiano, tenemos dos opciones. La primera opción es considerar el caso bidimensional del espacio de Minkowski, $\mathbb{E}_1^2 = (\mathbb{R}^2, dx^2 - dy^2)$. La segunda opción es considerar una curva de \mathbb{E}_1^3 contenida en un plano afín. En el segundo caso hay tres posibilidades dependiendo de si el plano es (a) tipo espacio, (b) tipo tiempo o (c) tipo luz. (a) Si el plano es tipo espacio, la teoría se corresponde a la de curvas en una superficie de Riemann. En este caso, el plano es isométrico al plano euclidiano \mathbb{E}^2 y, por tanto, se trata de la teoría usual de curvas planas en \mathbb{E}^2 . (b) Si el plano es tipo tiempo, entonces es isométrico a \mathbb{E}_1^2 , y estamos en la primera opción. (c) El caso en el que el plano es tipo luz es nuevo y no está cubierto por la teoría en el plano euclidiano \mathbb{E}^2 ni en el plano lorentziano \mathbb{E}_1^2 . Vamos a considerar aquí la primera opción.

§2.1 Parametrizaciones

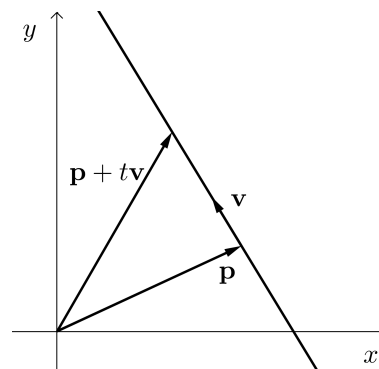
Partiendo de una comprensión física del movimiento en el plano, podemos pensar en las curvas planas especificando las coordenadas x e y como funciones de una variable t (*parámetro*), que dan la posición de un punto que viaja a lo largo de la curva. Por tanto, necesitamos dos funciones $x(t), y(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^2$. Cuando usamos la notación vectorial para ubicar un punto en la curva, a menudo escribimos $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ para este par de funciones coordenadas, y llamamos a $\gamma(t)$ una *función vectorial* en el plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 .

Ejemplo 2.1 (Recta). Dados dos puntos distintos $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2)$ en

el plano de Minkowski, el vector

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

se llama *vector de dirección* de la recta porque todos los vectores a lo largo de esta recta son múltiplos de \mathbf{v} . Cualquier otro vector de dirección de la recta es un múltiplo de \mathbf{v} distinto de cero. Entonces, cada punto de la recta se puede describir con un vector de posición $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$ para algún $t \in \mathbb{R}$. En coordenadas, dado un punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ y un vector de dirección $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ en el plano de Minkowski, una recta que pasa por \mathbf{p} en la dirección de \mathbf{v} es la imagen de la siguiente función vectorial:



$$\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} = (x_0 + v_1t, y_0 + v_2t), \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2.2 (Círculos de Lorentz). Dado un escalar $r > 0$, podemos considerar el lugar geométrico de los puntos \mathbf{p} en el plano de Minkowski que equidistan del origen por una distancia fija igual a r :

$$\|\mathbf{p}\| = r \quad \text{o bien} \quad \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \pm r^2.$$

Si $\mathbf{p} = (x, y)$, los puntos del lugar geométrico satisfacen la ecuación

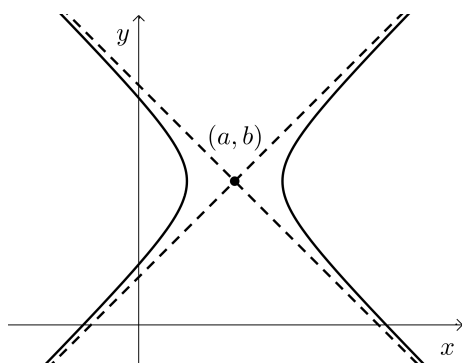
$$x^2 - y^2 = \pm r^2.$$

Observamos que la curva $x^2 - y^2 = r^2$ tiene dos ramas, y es una hipérbola euclidiana horizontal que se parametriza como

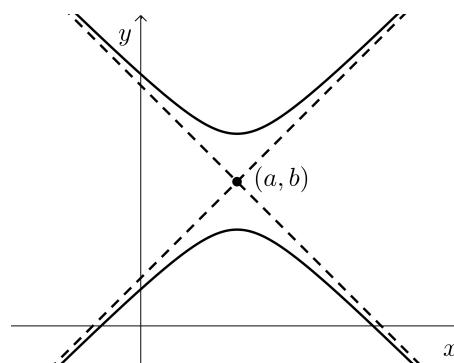
$$\gamma_1(t) = (r \cosh t, r \sinh t), \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

De manera similar, la curva $x^2 - y^2 = -r^2$ tiene dos ramas y es una hipérbola euclidiana vertical que se parametriza como

$$\gamma_2(t) = (r \sinh t, r \cosh t), \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$



(a) $\beta_1(t) = (a + r \cosh t, b + r \sinh t)$



(b) $\beta_2(t) = (a + r \sinh t, b + r \cosh t)$

Por analogía con el caso euclidiano, a cada rama de estas hipérbolas le llamamos *círculo de Lorentz* con centro O y radio r .

Para obtener una función vectorial que describa un círculo de Lorentz centrado en el punto (a, b) , simplemente debemos trasladar cada hipérbola por el vector (a, b) . De esta manera obtenemos las curvas

$$\begin{aligned}\beta_1(t) &= (a + r \cosh t, b + r \sinh t), \\ \beta_2(t) &= (a + r \sinh t, b + r \cosh t), \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3 (Gráficas de funciones). Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ una función parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tal que $\gamma'(t)$ es tipo tiempo o tipo luz, y sea $t_0 \in I$. Sabemos que $x'^2(t) - y'^2(t) \leq 0$ y en consecuencia $y'(t_0) \neq 0$. El teorema de la función inversa nos asegura que existen $\delta, \epsilon > 0$ tales que $y : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow (y(t_0) - \epsilon, y(t_0) + \epsilon)$ es un difeomorfismo. Denotamos $J = (y(t_0) - \epsilon, y(t_0) + \epsilon)$ y $\phi(s) = y^{-1}(s)$. Entonces la curva $\beta = \gamma \circ \phi$ satisface

$$\beta(s) = \gamma(\phi(s)) = (x(\phi(s)), y(\phi(s))) = (f(s), s),$$

donde $f = x \circ \phi$ es una función lisa o suave $f : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Por lo tanto, la gráfica $G_f = \{(t, f(t)) \in \mathbb{E}_1^2 : t \in [a, b]\}$ de una función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en un intervalo $[a, b]$ se puede ver como una curva parametrizada por las funciones coordenadas $\gamma(t) = (t, f(t))$, con $t \in [a, b]$.

El concepto de continuidad nos proporciona el marco matemático para lo que generalmente se considera una curva en la intuición física y de aquí se motiva la siguiente definición.

Definición 2.1. Una *curva parametrizada* o *curva paramétrica* en el plano de Minkowski es una función continua $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^2$. Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, a las funciones $x(t), y(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ las llamamos *funciones coordenadas* o *funciones paramétricas*. Una curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ se llama *regular* si es de clase C^1 (es decir, continuamente diferenciable) y $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in I$.

Es importante notar la distinción en esta definición entre una curva parametrizada y su lugar geométrico. Por ejemplo, en el ejemplo 2.1 mostramos que la parametrización $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ describe una recta ℓ que pasa por el punto \mathbf{p} con vector de dirección \mathbf{v} . Sin embargo, la línea ℓ es el lugar geométrico de $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ y no la función vectorial γ en sí misma. La función vectorial es la curva parametrizada.

El conjunto de puntos $\mathcal{C} = \{\gamma(t) \in \mathbb{E}_1^2 : t \in I\}$ como un subconjunto de \mathbb{E}_1^2 no depende únicamente de las funciones coordenadas $x(t)$ e $y(t)$. De hecho, es importante hacer una distinción cuidadosa entre la noción de curva parametrizada como se definió en la definición 2.1, la imagen de la curva parametrizada como un subconjunto de \mathbb{E}_1^2 (también llamado el *lugar geométrico de la curva*) y la noción de curva como una variedad unidimensional. A los efectos de la intuición, se puede equiparar el término «curva» con el lugar geométrico o, de forma equivalente, con la *imagen* de una curva parametrizada.

Definición 2.2. Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ es una curva parametrizada y $f : J \rightarrow I$ una función continua y sobreyectiva, podemos obtener una nueva curva $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ definida como $\tilde{\gamma} = \gamma \circ f$. A esta nueva curva la llamamos *reparametrización* de γ .

Notemos que la imagen de la nueva curva $\tilde{\gamma}$ vuelve a ser el conjunto \mathcal{C} definido por la curva inicial γ . Pero si f no es sobreyectiva en I , entonces la imagen de $\tilde{\gamma}$ puede ser un subconjunto propio de \mathcal{C} y en este caso, generalmente, no llamamos a $\tilde{\gamma}$ una reparametrización ya que no describe el mismo lugar geométrico que γ .

Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ una curva parametrizada regular. Si $t \in I$, el espacio tangente $T_t I$ se identifica con \mathbb{R} y el mapeo diferencial $(d\gamma)_t : T_t I \cong \mathbb{R} \rightarrow T_{\gamma(t)} \mathbb{E}_1^2 \cong \mathbb{R}^2$ viene dado por

$$(d\gamma)_t(s) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \gamma(t + su) = s \cdot \gamma'(t).$$

Por lo tanto, el mapeo lineal $(d\gamma)_t$ es una homotecia de \mathbb{R} a \mathbb{E}_1^2 dada por $t \mapsto s \cdot \gamma'(t)$. Identificamos la diferencial $(d\gamma)_t$ con la derivada $\gamma'(t)$, es decir, si $\frac{\partial}{\partial t}$ es el vector tangente unitario en $T_t I$, entonces

$$d\gamma_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \gamma'(t).$$

En el intervalo I consideramos la métrica inducida de \mathbb{E}_1^2 por el mapeo γ que convierte a

$$\gamma : (I, \gamma^* \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow \mathbb{E}_1^2 \cong (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

en una inmersión isométrica. El *pullback* de la métrica $\gamma^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ es entonces

$$\gamma^* \langle \cdot, \cdot \rangle_t(m, n) = \langle d\gamma_t(m), d\gamma_t(n) \rangle = mn \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle,$$

con $m, n \in \mathbb{R}$. O bien, si tomamos la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \right\}$ en $T_t I$:

$$\gamma^* \langle \cdot, \cdot \rangle_t \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle.$$

Para clasificar la variedad $(I, \gamma^* \langle \cdot, \cdot \rangle)$, dado que I es una variedad unidimensional, necesitamos conocer el signo de $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$. Tenemos los siguientes tres casos:

- a) Si $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle > 0$, entonces $(I, \gamma^* \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es una variedad riemanniana.
- b) Si $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle < 0$, entonces $(I, \gamma^* \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es una variedad lorentziana, es decir, la métrica inducida es no degenerada de índice 1.
- c) Si $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0$, entonces $(I, \gamma^* \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es una variedad degenerada.

Esta clasificación nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.3. Una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ es *tipo espacio* (*tipo tiempo*, *tipo luz*, resp.) en t si $\gamma'(t)$ es un vector tipo espacio (*tipo tiempo*, *tipo luz*, resp.). La curva γ es *tipo espacio* (*tipo tiempo*, *tipo luz*, resp.) en I si es tipo espacio (*tipo tiempo*, *tipo luz*, resp.) para todo $t \in I$.

- Ejemplo 2.4.** a) La línea recta $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ tiene la misma naturaleza causal que su vector de dirección \mathbf{v} , pues $\gamma'(t) = \mathbf{v}$.
- b) El círculo de Lorentz $\gamma(t) = (r \sinh t, r \cosh t)$ es una curva tipo espacio, pues $\gamma'(t) = (r \cosh t, r \sinh t)$ es tipo espacio.
- c) El círculo de Lorentz $\gamma(t) = (r \cosh t, r \sinh t)$ es una curva tipo tiempo, pues $\gamma'(t) = (r \sinh t, r \cosh t)$ es tipo tiempo.

En particular, una curva tipo tiempo o tipo luz necesariamente es regular porque en ambos casos $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ por definición de vectores tipo tiempo y tipo luz. Notemos también que una curva en \mathbb{E}_1^2 puede no ser de uno de los tipos anteriores para todo $t \in I$. Por ejemplo, consideramos la parábola euclidiana $\gamma(t) = (t, t^2)$. Como $\gamma'(t) = (1, 2t) \neq \mathbf{0}$, entonces γ es una curva regular. Como $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 1 - 4t^2$, entonces la curva es tipo espacio en el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; es tipo tiempo en $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$; y es tipo luz en los puntos $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. Además, $\|\gamma'(\pm\frac{1}{2})\| = 0$, pero γ es regular en $t = \pm\frac{1}{2}$, pues $\gamma'(\pm\frac{1}{2}) = (1, \pm 1) \neq \mathbf{0}$.

Sin embargo, la condición de ser tipo espacio (tipo tiempo) es una propiedad abierta, es decir, si γ es tipo espacio (tipo tiempo) en $t_0 \in I$, existe un intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ alrededor de t_0 donde γ es tipo espacio (tipo tiempo): si en $t_0 \in I$ tenemos $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \neq 0$, la continuidad asegura la existencia de un intervalo alrededor de t_0 donde $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$ tiene el mismo signo que en $t = t_0$. Finalmente, si $\gamma(t)$ es una curva y $\tilde{\gamma} = \gamma \circ f$ es una reparametrización, entonces la naturaleza causal de $\tilde{\gamma}$ es la misma que la de γ , pues

$$\tilde{\gamma}'(t) = f'(t) \cdot \gamma'(f(t)) \implies \langle \tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}'(t) \rangle = f'^2(t) \langle \gamma'(f(t)), \gamma'(f(t)) \rangle,$$

y de aquí es claro que la naturaleza causal de $\gamma(t)$ y $\tilde{\gamma}(t)$ es la misma.

§2.2 Posición, velocidad y aceleración

En aplicaciones de física se interpreta la función vectorial $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ como la función que proporciona la posición a lo largo de una curva en el tiempo t con referencia a algún marco fijo, donde por *marco* (generalmente ortonormal) entendemos una base anclada a un origen fijo. El punto $O(0, 0)$ junto con la base usual o canónica $B_u = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, donde $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ es un vector tipo espacio y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ es un vector tipo tiempo que forman el marco de referencia ortonormal estándar del plano de Minkowski. Llamamos a esta función vectorial $\gamma(t)$ la *función de posición*. Cuando se usa el marco de referencia estándar también se acostumbra escribir

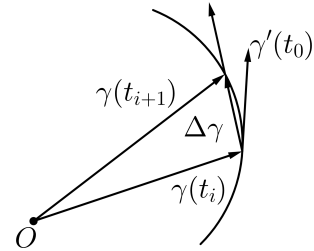
$$\gamma(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2.$$

Si tanto $x(t)$ como $y(t)$ son funciones diferenciables en su dominio, la función vectorial derivada $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ se llama *función de velocidad*. Matemáticamente, esta es solo otra función vectorial y describe otra curva cuando se coloca en

el marco de referencia estándar. Sin embargo, debido a que señala la dirección del movimiento a lo largo de la curva, a menudo se dibuja el vector de velocidad correspondiente a $t = t_0$ anclado en el punto $\gamma(t_0)$ de la curva. Siguiendo el lenguaje de la física, llamamos a la segunda derivada de la función vectorial $\gamma''(t) = (x''(t), y''(t))$ la *función de aceleración* relacionada con $\gamma(t)$.

Sea \mathcal{C} el lugar geométrico de una curva $\gamma(t)$ con $t \in [a, b]$. Entonces podemos aproximar la longitud del arco $l(\mathcal{C})$ con la suma de Riemann

$$l(\mathcal{C}) \approx \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \approx \sum_{i=1}^n \|\gamma'(t_i)\| \Delta t.$$



Si, como en todos los libros de cálculo (v. g. [Apo69, Din14]), tomamos el límite de esta suma de Riemann y usamos el teorema del valor medio, obtenemos la siguiente fórmula para la *longitud del arco* de \mathcal{C} :

$$\ell = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{|x'(t)^2 - y'(t)^2|} dt. \quad (2.1)$$

Con base en esta ecuación, definimos la función de *longitud del arco* $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ relacionada con la curva $\gamma(t)$ como la longitud del arco a lo largo de \mathcal{C} en el intervalo $[a, t]$. Por lo tanto,

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du = \int_a^t \sqrt{|x'(u)^2 - y'(u)^2|} du. \quad (2.2)$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{|x'(t)^2 - y'(t)^2|},$$

que, siguiendo aún el vocabulario de la trayectoria de una partícula en movimiento, llamamos a esta función la *rapidez* de la curva $\gamma(t)$. En particular, *la longitud del arco de una curva tipo luz es cero*, y por ende también la rapidez es cero. En el contexto de la física relativista, la longitud del arco de una curva tipo tiempo representa el intervalo de tiempo que le toma a una partícula material para ir entre dos eventos a y b ; si $s = 1$, a este tiempo se le llama *tiempo propio* de la partícula.

La función de rapidez nos permite entender que una curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ no solo contiene la información que describe el lugar geométrico de la curva, sino que también contiene información sobre la rapidez de desplazamiento $s(t)$ a lo largo del lugar geométrico, aunque con la sola observación del lugar geométrico es imposible discernir la función de rapidez. La rapidez de una función vectorial $\gamma(t)$ en un punto no es una cantidad geométrica, es decir es una cantidad que puede cambiar bajo cualquier reparametrización, lo que no cambia es el lugar geométrico \mathcal{C} de la curva.

En efecto, consideramos una reparametrización $\tilde{\gamma} = \gamma \circ f$ de la curva parametrizada γ , donde $f : J \rightarrow I$ es una función sobreyectiva diferenciable, y sea $t_0 = f(u_0)$, con f diferenciable en u_0 . Entonces $\gamma(f(u_0)) = \gamma(t_0)$ y

$$\tilde{s}'(u_0) = \left\| \frac{d}{du} \gamma(f(u_0)) \right\| = \|f'(u_0) \cdot \gamma'(f(u_0))\|$$

$$= |f'(u_0)| \|\gamma'(f(u_0))\| = |f'(u_0)| s'(t_0).$$

Salvo un cambio de signo, la *dirección* de $\gamma'(t)$ (i. e. el vector unitario asociado a $\gamma'(t)$ cuando $\|\gamma'(t)\| \neq 0$) no cambia con una reparametrización. Más precisamente, si $\tilde{\gamma} = \gamma \circ f$, en cualquier valor del parámetro t donde $f(t) \neq 0$ y $\|\gamma'(f(t))\| \neq 0$, tenemos

$$\frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|} \frac{\gamma'(f(t))}{\|\gamma'(f(t))\|} = \pm \frac{\gamma'(f(t))}{\|\gamma'(f(t))\|}. \quad (2.3)$$

Definición 2.4. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ una curva parametrizada y sea $f : J \rightarrow I$ una función real, sobreyectiva, con derivada continua. Llamamos a $\tilde{\gamma} = \gamma \circ f$ una *reparametrización regular* de γ si para todo $t \in J$, $f'(t)$ está bien definida y nunca es 0. Además, decimos que una reparametrización regular está *orientada positivamente* (*negativamente*) si $f'(t) > 0$ ($f'(t) < 0$) para todo $t \in J$.

Debido al teorema del valor medio, si $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$, entonces $f : J \rightarrow I$ es una función inyectiva. Así, dado que f es por definición sobreyectiva, las reparametrizaciones regulares involucran una función biyectiva $f : J \rightarrow I$.

La ecuación (2.3) muestra que el vector unitario $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ es invariante bajo una reparametrización regular orientada positivamente y solo cambia de signo bajo una reparametrización orientada negativamente. En consecuencia, este vector unitario es un objeto geométrico importante asociado a una curva en un punto. A una propiedad de una curva \mathcal{C} o una propiedad de un punto P en una curva \mathcal{C} se le suele llamar *propiedad geométrica* si esta no depende de la parametrización del lugar geométrico cerca del punto. En particular, una propiedad geométrica no depende de la rapidez de desplazamiento a lo largo de la curva a través del punto.

Dado que en \mathbb{E}_1^2 hay solo dos direcciones linealmente independientes de vectores tipo luz, para una curva tipo luz $\gamma(t)$ el vector tangente $\gamma'(t)$ es proporcional a una de estas dos direcciones, y esto implica que la curva γ es una línea recta. Por esta razón, en lo que sigue vamos a descartar las curvas planas tipo luz por ser poco interesantes y vamos a suponer que $\gamma(t)$ es una curva tipo espacio o tipo tiempo.

Definición 2.5. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ una curva paramétrica plana. Un punto $t_0 \in I$ se llama *punto crítico* de $\gamma(t)$ si $\gamma(t)$ no es diferenciable en t_0 o si $\gamma'(t_0) = \mathbf{0}$. Si t_0 es un punto crítico, entonces $\gamma(t_0)$ se llama *valor crítico*. Un punto $t = t_0$ que no es crítico se llama *punto regular*. Si t es un punto regular de $\gamma(t)$ y si $\gamma(t)$ es tipo espacio o tipo tiempo, definimos el *vector tangente unitario* $\mathbf{t}(t)$ como

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

En cualquier punto de una curva (tipo espacio o tipo tiempo) donde el vector tangente unitario $\mathbf{t}(t)$ está definido (es decir, en cualquier punto regular de la curva), la función de velocidad se puede escribir como

$$\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\| \mathbf{t}(t) = s'(t) \mathbf{t}(t). \quad (2.4)$$

La ecuación (2.4) expresa la función velocidad como el producto de su magnitud (rapidez) y dirección (vector tangente unitario). En la mayoría de textos de geometría diferencial de curvas los autores simplifican sus fórmulas *reparametrizando por la longitud del arco*. Desde la perspectiva de las coordenadas, esto significa elegir un «origen» O en la curva \mathcal{C} que está en algún $t = t_0$ fijo y usar la longitud de arco a lo largo de \mathcal{C} entre O y cualquier otro punto P como parámetro para ubicar P en \mathcal{C} , y por lo tanto se tiene que $s' = \|\gamma'(s)\| = 1$.

Proposición 2.1 (Reparametrización por la longitud de arco). Si $\gamma(t)$ es una curva parametrizada, regular, tipo espacio o tipo tiempo, entonces hay una reparametrización regular de γ por la longitud de su arco. Además, si γ es de clase C^k , entonces la reparametrización por la longitud de su arco también es de clase C^k .

Prueba. Sea $s = f(t)$ la función de longitud del arco con $s = 0$ correspondiente a algún punto de la curva. Dado que γ es regular en su dominio, entonces $f'(t) := \|\gamma'(t)\| > 0$ para todo t . Dado que $f(t)$ es estrictamente creciente, tiene una función inversa $t = g(s)$. Por el teorema de la función inversa, dado que $f'(t) \neq 0$, se sigue que $g(s)$ es derivable y

$$g'(s) = \frac{1}{f'(g(s))} = \frac{1}{f'(t)}. \quad (2.5)$$

Notemos que la función compuesta $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(g(s))$ satisface que

$$\tilde{\gamma}'(s) = g'(s) \cdot \gamma'(g(s)) = \frac{1}{f'(t)} \gamma'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

De aquí se sigue que $\tilde{s}' = \|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$ y en consecuencia la reparametrización por longitud de arco es $\tilde{\gamma} = \gamma \circ g$.

Si γ es de clase C^k , entonces $s'(t) = f'(t) = \|\gamma'(t)\|$ es de clase C^{k-1} . Por tanto, $s(t)$ por sí misma es de clase C^k . El teorema de la función inversa establece que la función inversa $g(s)$ también es de clase C^k . En consecuencia, la reparametrización por la longitud del arco $\tilde{\gamma} = \gamma \circ g$ es de clase C^k por ser composición de funciones de clase C^k .
Q. E. D.

El hábito de reparametrizar una curva por la longitud del arco tiene ventajas e inconvenientes. Primero, a lo largo de una curva parametrizada por la longitud del arco, la función de rapidez s' es idénticamente 1 y el vector de velocidad es exactamente el vector tangente: $\gamma'(s) = \mathbf{t}(s)$.

Esta formulación a menudo simplifica las pruebas y los cálculos difíciles. Sin embargo, en la práctica, dada una curva parametrizada $\gamma(t)$, a menudo es muy difícil encontrar $s(t)$ como se define en la ecuación (2.2). Además, para reparametrizar por la longitud de arco, sería necesario encontrar la función inversa $t(s)$, que representa el parámetro original t en función de s . Incluso si es posible encontrar $s(t)$, su función inversa generalmente no se puede escribir en términos de funciones elementales. Entonces, la reparametrización por la longitud del arco es $\gamma(s) = \gamma(t(s))$. Incluso

utilizando sistemas computacionales, reparametrizar por la longitud del arco sigue siendo un problema insoluble.

La noción de «regular» refleja en muchos sentidos las propiedades geométricas de las funciones de una variable continuamente diferenciables. En particular, si una curva parametrizada $\gamma(t)$ es regular en t_0 , entonces localmente la curva parece lineal. Con el formalismo vectorial resulta fácil expresar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto en cualquier número de dimensiones. Si $\gamma(t)$ es una curva tipo espacio o tipo tiempo y t_0 no es un punto crítico de la curva, entonces la ecuación de la recta tangente $\ell_{t_0}(t)$ en t_0 es

$$\ell_{t_0}(u) = \gamma(t_0) + u\mathbf{t}(t_0), \quad \text{con } u \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Solo se puede definir una única recta tangente a $\gamma(t)$ en $t = t_0$ si $\mathbf{t}(t_0^-) = \mathbf{t}(t_0^+)$. Por otro lado, si $t_0 \in I$ es un punto crítico de la curva $\gamma(t)$, la curva puede tener o no una recta tangente en $t = t_0$. Si existen los siguientes límites laterales, podemos definir dos vectores tangentes unitarios en $\gamma(t_0)$:

$$\mathbf{t}(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \mathbf{t}(t) \quad \text{y} \quad \mathbf{t}(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \mathbf{t}(t).$$

En consecuencia, el ángulo que forma la curva consigo misma en el pico t_0 es

$$\phi_0 = \pm \cosh^{-1} \langle \mathbf{t}(t_0^+), \mathbf{t}(t_0^-) \rangle,$$

siempre que $\mathbf{t}(t_0^+)$ y $\mathbf{t}(t_0^-)$ sean ambos tipo tiempo o tipo espacio en la misma componente de \mathbb{U}_1^2 (pues de otro modo el ángulo no está definido). Para ser más precisos, el ángulo de $\mathbf{t}(t_0^-)$ a $\mathbf{t}(t_0^+)$ es el ángulo exterior de la curva en el pico $t = t_0$.

Si t_0 es un punto crítico, aún puede suceder que $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{t}(t)$ exista, es decir, cuando $\mathbf{t}(t_0^-) = \mathbf{t}(t_0^+)$, lo que también significa que $\phi_0 = 0$. Luego, cometiendo un abuso del lenguaje, aún podemos hablar del vector tangente unitario en ese punto de la curva. Cuando existe este límite, aunque t_0 sea un punto crítico, se pueden usar las ecuaciones (2.6) como ecuaciones paramétricas de la recta tangente en t_0 , reemplazando $\mathbf{t}(t_0)$ por $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{t}(t)$.

§2.3 Curvatura

Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ una parametrización dos veces diferenciable de una curva \mathcal{C} tipo espacio o tipo tiempo. Como vimos en la ecuación (2.4), la descomposición del vector velocidad $\gamma'(t) = s'(t)\mathbf{t}(t)$ en magnitud y dirección separa el invariante geométrico (el vector tangente unitario $\mathbf{t}(t)$) del aspecto dinámico (la rapidez $s'(t)$) de la parametrización. Tomando una derivada más, obtenemos la descomposición

$$\gamma''(t) = s''(t)\mathbf{t}(t) + s'(t)\mathbf{t}'(t). \quad (2.7)$$

La primera componente de la ecuación (2.7) describe una aceleración tangencial, mientras que la segunda componente describe una razón de cambio de la dirección

de la tangente, en esencia, cómo la curva se «curva». Dado que para una curva tipo espacio o tipo tiempo \mathbf{t} es un vector unitario, tenemos $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \pm 1$. Por lo tanto,

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}' \rangle = 0 \implies \langle \mathbf{t}, \mathbf{t}' \rangle = 0 \implies \mathbf{t}' \perp \mathbf{t}. \quad (2.8)$$

Así como hay dos vectores tangentes unitarios en un punto regular de la curva, también hay dos vectores unitarios normales. Dada una parametrización particular, no hay una forma preferida de definir «el» vector normal unitario, por lo que debemos tomar una decisión.

Definición 2.6. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ una curva regular, parametrizada, tipo espacio o tipo tiempo y $\mathbf{t} = (t_1(t), t_2(t))$ el vector tangente unitario en un valor regular $\gamma(t)$. Definimos el *vector normal unitario* \mathbf{n} como

$$\mathbf{n}(t) = (t_2(t), t_1(t)).$$

Dado que $\mathbf{t}' \perp \mathbf{t}$, la función vectorial \mathbf{t}' es un múltiplo de \mathbf{n} para todo $t \in I$, y por esta razón \mathbf{t} y \mathbf{n} han de tener una naturaleza causal distinta. Aquí aparece una nueva diferencia con la configuración euclidiana. En \mathbb{E}^2 , se elige el vector normal unitario $\mathbf{n}_e(t)$ de modo que $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}_e(t)\}$ sea una base orientada positivamente. En \mathbb{E}_1^2 elegimos $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$ de manera que sea una base orientada de manera positiva, pero el *orden* de los vectores $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ se elige bajo la condición de que el primer vector sea tipo espacio y el segundo tipo tiempo. En otras palabras, tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1. Si la curva es tipo espacio, entonces definimos el vector normal $\mathbf{n}(t)$ tal que $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$ esté orientada positivamente.

Caso 2. Si la curva es tipo tiempo, entonces definimos el vector normal $\mathbf{n}(t)$ tal que $\{\mathbf{n}(t), \mathbf{t}(t)\}$ esté orientada positivamente.

Sea $\epsilon_t = \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{t}(t) \rangle = \pm 1$, dependiendo de si la curva es tipo espacio o tipo tiempo, respectivamente. Entonces $\epsilon_n = \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{n}(t) \rangle = -\epsilon_t$. Esto nos conduce a la definición de curvatura.

Definición 2.7. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ una curva paramétrica, regular, dos veces diferenciable, tipo espacio o tipo tiempo. La función de *curvatura* $\kappa(t)$ es la única función real definida intrínsecamente por la ecuación

$$\mathbf{t}'(t) = s'(t)\kappa(t)\mathbf{n}(t). \quad (2.9)$$

Podemos obtener una fórmula explícita de la curvatura de la siguiente manera. Si multiplicamos la ecuación (2.9) por $s'(t)$ y sustituimos la ecuación (2.7), entonces obtenemos (sin escribir la dependencia del parámetro)

$$\gamma'' = s''\mathbf{t} + s'^2\kappa\mathbf{n}. \quad (2.10)$$

Al ver el plano de Minkowski como el plano xy en el espacio tridimensional, tenemos $\mathbf{t} \times \mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$. Por lo tanto,

$$\gamma' \times \gamma'' = s'\mathbf{t} \times (s''\mathbf{t} + s'^2\kappa\mathbf{n})$$

$$\begin{aligned} &= s' s'' \mathbf{t} \times \mathbf{t} + s'^3 \kappa \mathbf{t} \times \mathbf{n} \\ &= -s'^3 \kappa \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Y de aquí se sigue que

$$\langle \gamma' \times \gamma'', \mathbf{e}_3 \rangle = -s'^3 \kappa \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle = s'^3 \kappa.$$

Pero $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$, lo que nos lleva a concluir que

$$\kappa(t) = \frac{\langle \gamma'(t) \times \gamma''(t), \mathbf{e}_3 \rangle}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{|x'(t)^2 - y'(t)^2|^{3/2}}. \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) nos da una expresión explícita para la curvatura $\kappa(t)$ en términos de las derivadas $\gamma'(t)$ y $\gamma''(t)$ de la curva $\gamma(t)$. Si queremos una expresión en términos del vector tangente unitario \mathbf{t} y el vector normal unitario \mathbf{n} , podemos proceder de la siguiente manera:

$$\langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle = \langle s'(t)\kappa(t)\mathbf{n}(t), \mathbf{n}(t) \rangle = \epsilon_n s'(t)\kappa(t).$$

Entonces tenemos

$$\kappa(t) = \epsilon_n \frac{\langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle}{s'(t)}. \quad (2.12)$$

Cabe preguntarse por qué en la definición de $\kappa(t)$ incluimos el factor $s'(t)$. No es difícil confirmar que incluir el factor $s'(t)$ hace que $\kappa(t)$ sea independiente de cualquier reparametrización regular (excepto quizá un cambio de signo). De manera precisa, si $\tilde{\gamma} = \gamma \circ f$ es una reparametrización de γ con $t_0 = f(u_0)$ y $\tilde{\gamma}(u_0) = \gamma(t_0)$, entonces

$$\tilde{\kappa}(u_0) = \left(\frac{f'(u_0)}{|f'(u_0)|} \right)^3 \kappa(t_0) = \pm \kappa(t_0).$$

En este punto se debe tener en cuenta que si una curva $\gamma(s)$ está parametrizada por la longitud de arco, $s' = \|\gamma'(t)\| = 1$, y entonces de las ecuaciones (2.4), (2.7) y (2.10), la velocidad y la aceleración tienen las siguientes expresiones simples:

$$\gamma'(t) = \mathbf{t}(t) \quad \text{y} \quad \gamma''(t) = \mathbf{t}' = \kappa(t) \mathbf{n}(t), \quad (2.13)$$

y la curvatura (2.11) tiene la expresión

$$\kappa(t) = \langle \gamma'(t) \times \gamma''(t), \mathbf{e}_3 \rangle = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t), \quad (2.14)$$

o bien

$$\kappa(t) = \epsilon_n \langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle. \quad (2.15)$$

Ejemplo 2.5. El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = -r^2\}$ tiene dos componentes, a saber,

$$A^+ = \{(x, y) \in A : y > 0\} \quad \text{y} \quad A^- = \{(x, y) \in A : y < 0\},$$

que se parametrizan como círculos de Lorentz tipo espacio. Para A^+ consideramos la parametrización $\gamma(s) = \left(r \sinh \frac{s}{r}, r \cosh \frac{s}{r} \right)$. De aquí se sigue que

$$\mathbf{t}(s) = \left(\cosh \frac{s}{r}, \sinh \frac{s}{r} \right), \quad \mathbf{n}(s) = \left(\sinh \frac{s}{r}, \cosh \frac{s}{r} \right), \quad \mathbf{t}'(s) = \frac{1}{r} \left(\sinh \frac{s}{r}, \cosh \frac{s}{r} \right),$$

y por lo tanto, $\kappa(s) = \frac{1}{r}$.

Para A^- consideramos la parametrización $\beta(s) = \left(r \sinh \frac{s}{r}, -r \cosh \frac{s}{r} \right)$, de donde se obtiene

$$\mathbf{t}(s) = \left(\cosh \frac{s}{r}, -\sinh \frac{s}{r} \right), \quad \mathbf{n}(s) = \left(-\sinh \frac{s}{r}, \cosh \frac{s}{r} \right), \quad \mathbf{t}'(s) = \frac{1}{r} \left(\sinh \frac{s}{r}, -\cosh \frac{s}{r} \right),$$

y por lo tanto $\kappa(s) = -\frac{1}{r}$.

El estudio de las trayectorias en física da nombres particulares a las componentes de la primera y segunda derivada de una función vectorial en la base $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$. Ya vimos que la función $s'(t)$ en la ecuación (2.4) se llama rapidez. En la ecuación (2.10), la función $s''(t)$ se llama *aceleración tangencial*, mientras que la cantidad $s'^2(t)\kappa(t)$ se llama *aceleración centrípeta*. El ejemplo 2.5 liga la función de curvatura con el recíproco de un radio, por lo que si $\kappa(t) \neq 0$, entonces definimos el *radio de curvatura* de $\gamma(t)$ en t como la función

$$R(t) = \frac{1}{|\kappa(t)|}.$$

El radio de curvatura es 0 (y por lo tanto la curvatura no está definida) en puntos críticos de la curva o para curvas degeneradas como pueden ser los puntos.

Proposición 2.2. Una curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ tiene curvatura $\kappa(t) = 0$ para todo $t \in I$ si y solo si el lugar geométrico de γ es un segmento de recta.

Prueba. Si el lugar geométrico de γ es un segmento de recta, entonces (quizá después de una reparametrización regular) podemos escribir $\gamma(t) = \mathbf{a} + \phi(t)\mathbf{b}$, donde $\phi(t)$ es una función real, diferenciable, con $\phi'(t) \neq 0$. Entonces

$$\gamma'(t) = \phi'(t)\mathbf{b} \quad \text{y} \quad \gamma''(t) = \phi''(t)\mathbf{b}.$$

Luego, por la ecuación (2.11), obtenemos

$$\kappa(t) = \frac{\phi'(t)\phi''(t) \langle \mathbf{b} \times \mathbf{b}, \mathbf{e}_3 \rangle}{(|\phi'(t)| \|\mathbf{b}\|)^3} = 0.$$

A la inversa, si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una curva tal que $\kappa(t) = 0$, entonces por (2.11)

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 0.$$

Necesitamos encontrar soluciones a esta ecuación diferencial o determinar cómo se relacionan las soluciones. Dado que $\gamma(t)$ es regular, $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Sea I_1 un intervalo donde $y'(t) \neq 0$. Entonces en I_1 , tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{y'} \right) = -\frac{x'y'' - x''y'}{y'^2} = 0 \quad \implies \quad \frac{x'}{y'} = C,$$

donde C es una constante. Por tanto, $x' = Cy'$ para todo t . Integrando con respecto a t se sigue $x = Cy + D$. De manera similar, en un intervalo I_2 donde $x'(t) \neq 0$, deducimos que $y = Ax + B$ para algunas constantes A y B . Dado que I puede cubrirse con intervalos donde $x'(t) \neq 0$ o $y'(t) \neq 0$, deducimos que el lugar geométrico de γ es una recta quebrada. Sin embargo, dado que γ es regular, no tiene picos y, por lo tanto, su lugar geométrico es un solo segmento de recta. Q. E. D.

No es difícil ver que si una curva $\gamma : [-a, a] \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ se reparametriza por $\gamma(-t)$, entonces la función de curvatura modificada sería $-\kappa(t)$. Así, el signo de la curvatura depende de lo que podríamos llamar la «orientación» de la curva, una noción en última instancia arbitraria en este caso. Excluyendo este tecnicismo, la curvatura tiene una interpretación física que uno puede observar en curvas particulares. Si una curva es casi una línea recta, entonces la curvatura es cercana a 0, pero si una curva regular se dobla grandemente a lo largo de una determinada sección, entonces la curvatura es grande (en valor absoluto). De particular interés son los puntos donde la curvatura alcanza un extremo local.

Definición 2.8. Sea \mathcal{C} una curva regular parametrizada por $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ con función de curvatura $\kappa(t)$. Un *vértice* de la curva \mathcal{C} es un punto $P = \gamma(t_0)$, donde la función de curvatura $\kappa(t)$ alcanza un extremo.

Por el criterio de la primera derivada, los extremos de $\kappa(t)$ ocurren en $t = t_0$, si $\kappa'(t)$ cambia de signo en t_0 . Obviamente, esto debe ocurrir donde $\kappa'(t_0) = 0$, pero el recíproco no es cierto.

Notemos que la función de curvatura surgió al calcular γ'' como la derivada de la expresión $\gamma' = s'\mathbf{t}$, que implicaba encontrar una expresión para $\mathbf{t}'(t)$. Tomando la tercera derivada de $\gamma(t)$ y usando la descomposición de la ecuación (2.10), obtenemos

$$\gamma''' = s'''\mathbf{t} + (3s''s'\kappa + s'^2\kappa')\mathbf{n} + s'^2\kappa\mathbf{n}'.$$

En consecuencia, necesitamos una expresión para la derivada $\mathbf{n}'(t)$. Por definición, para una curva tipo espacio (tiempo) y para todo t , el conjunto $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ ($\{\mathbf{n}, \mathbf{t}\}$) forma una base ortonormal orientada positivamente y de la proposición 1.1, se tiene

$$\mathbf{n}' = \epsilon_t \langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle \mathbf{t} + \epsilon_n \langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}.$$

Sin embargo, dado que $\mathbf{n}(t)$ es un vector unitario, se tiene la identidad $\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = 0$ para todo t . Además, dado que $\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle = 0$ para todo t , concluimos que

$$\langle \mathbf{n}', \mathbf{t} \rangle = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{t}' \rangle = -s'\kappa \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = -\epsilon_n s'\kappa.$$

En consecuencia,

$$\mathbf{n}'(t) = s'(t)\kappa(t)\mathbf{t}(t). \tag{2.16}$$

De esta discusión uno puede notar que dado que los vectores $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$ forman una base ortonormal para todo t , cada derivada superior de $\gamma(t)$, si existe, puede

expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$. Las componentes de $\gamma^{(n)}(t)$ en términos de $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ involucran sumas de productos de derivadas de $s(t)$ y $\kappa(t)$. Además, si γ está parametrizada por la longitud de arco, entonces los coeficientes de $\gamma^{(n)}(s)$ solo involucran sumas de potencias de derivadas de $\kappa(s)$.

Terminamos esta sección con las siguientes definiciones. Vimos que para todo t , los vectores $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$ forman una base ortonormal de \mathbb{E}_1^2 , pero el orden de los vectores $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ se eligió bajo la condición de que el primer vector sea tipo espacio y el segundo tipo tiempo. A esta base o marco le llamamos el *diedro* (o *marco*) de Frenet de la curva $\gamma(t)$ en t . Si derivamos cada una de las funciones vectoriales del diedro de Frenet y escribimos las derivadas en coordenadas en la misma base de Frenet, obtenemos las *ecuaciones* (o *fórmulas*) de Frenet:

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(t) = s'(t)\kappa(t) \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{n}'(t) = s'(t)\kappa(t) \mathbf{t}(t) \end{cases} \quad (2.17)$$

Si asumimos, como se hace en álgebra lineal, que $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ son vectores columna y escribimos la matriz que tiene estos vectores como columnas como $\begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} \end{bmatrix}$, entonces podemos reescribir las ecuaciones de Frenet (2.17) en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' & \mathbf{n}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s'\kappa \\ s'\kappa & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

§2.4 Circunferencia oscultriz, evolutas y evolventes

En la geometría diferencial clásica se introduce la noción de *orden de contacto* para medir el grado de intersección entre dos curvas o superficies en un punto de intersección particular (cf. [Str88, p. 23] para esta definición clásica). Aquí vamos a proporcionar una definición alternativa pero equivalente que es más relevante para nuestro enfoque de describir siempre curvas por medio de una parametrización.

Definición 2.9. Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas en una vecindad de x_0 tienen *contacto de orden k* si las derivadas $f^{(i)}(x_0)$ y $g^{(i)}(x_0)$ existen y $f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0)$, para $i = 0, 1, \dots, k$. Decimos que f y g tienen *contacto de orden estricto k* en x_0 si tienen contacto de orden k pero no tienen contacto de orden $k + 1$.

Notemos que la función $f(x) = x^n$ tiene contacto de orden estricto $n - 1$ con el eje x en $(0, 0)$, ya que $f^{(i)}(0) = 0$ para $i = 0, 1, \dots, n - 1$ pero $f^{(n)}(0) = n! \neq 0$. Al intentar generalizar esta noción al orden de contacto entre dos curvas parametrizadas en el plano de Minkowski, nos encontramos inmediatamente con dos obstáculos. Primero, en general el parámetro de una curva parametrizada no tiene conexión, geométrica o de otro tipo, con el parámetro de la segunda curva. En la definición de orden de contacto para funciones reales, el parámetro x en un intervalo abierto de \mathbb{R} se usa para ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$. En segundo lugar, las curvas parametrizadas generalmente no se describen como funciones con respecto a algún marco de

referencia común. En consecuencia, debemos elegir un parámetro en ambas curvas que simultáneamente tenga un significado geométrico. El enfoque clásico es utilizar como referencia una de las curvas parametrizada por la longitud de arco.

Definición 2.10. Supongamos que $\mathcal{C}_1 : \gamma(t)$ y $\mathcal{C}_2 : \beta(u)$ son dos curvas parametrizadas que se cortan en un punto P , que corresponde a donde $t = t_0$ y $u = u_0$. Reparametrizamos \mathcal{C}_1 por la longitud de arco y sea s_0 tal que $P = \gamma(s_0)$. Sea $u(s)$ la función tal que la proyección de $\gamma(s)$ sobre \mathcal{C}_2 esté ubicada en $\beta(u(s))$. Entonces decimos que \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 tienen *contacto de orden n* en P si son de clase C^n sobre un intervalo abierto alrededor de P y

$$\gamma^{(i)}(s_0) = \left. \frac{d^i}{ds^i} \right|_{s_0} \beta(u(s)),$$

para todo $0 \leq i \leq n$. Además, \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 tienen *contacto de orden estricto n* si no tienen también contacto de orden $n + 1$.

La imagen intuitiva del orden de contacto indica que dos curvas que se cortan con contacto de orden 1 tienen la misma recta tangente en el punto de intersección. En particular, una curva y su recta tangente tienen orden de contacto 1. Por el contrario, un punto de intersección entre dos curvas con contacto de orden estricto 0 se dice que es una intersección *transversal*. Tengamos en cuenta que dado que el concepto de orden de contacto se refiere a órdenes de diferenciación, si dos curvas no son ambas de clase C^n cerca de un punto P , no tiene sentido discutir el contacto de orden n . A primera vista, la definición de orden de contacto parece asimétrica. Sin embargo, se puede demostrar que usar β como curva de referencia y la longitud de arco de \mathcal{C}_2 como parámetro de referencia es equivalente a la definición 2.10. De hecho, para un entero n dado, no negativo, en el conjunto de curvas parametrizadas en el plano se tiene que la relación de contacto de orden n es una relación de equivalencia. En contraste, la relación de contacto de orden estricto n es reflexiva y simétrica pero no necesariamente transitiva (cf. [BL16, dC17, Kü15]).

Definición 2.11. Sea \mathcal{C} una curva parametrizada por $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$, y sea t_0 un valor regular de la curva. La *circunferencia osculatriz* de \mathcal{C} en el punto t_0 es un círculo de Lorentz que tiene contacto de orden 2 con \mathcal{C} en el punto $\gamma(t_0)$.

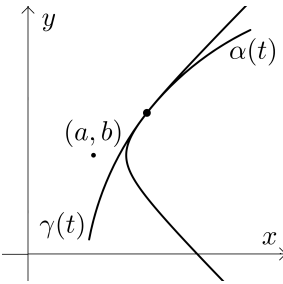
Proposición 2.3. Sea \mathcal{C} una curva tipo espacio (tipo tiempo) parametrizada por $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$, y sea t_0 un valor regular de la curva. Supongamos que $\gamma(t)$ es dos veces diferenciable en t_0 y que $\kappa(t_0) \neq 0$. Entonces, existe una única circunferencia osculatriz tipo espacio (tipo tiempo) de \mathcal{C} en $\gamma(t_0)$ y está dada por la siguiente función vectorial:

$$\alpha(t) = \gamma(t_0) + \frac{\epsilon_n}{\kappa(t_0)} \mathbf{n}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} (\sinh t \cdot \mathbf{t}(t_0) + \cosh t \cdot \mathbf{n}(t_0)).$$

El centro de la circunferencia osculatriz en $t = t_0$, es el punto

$$(a, b) = \gamma(t_0) - \frac{1}{\kappa(t_0)} \mathbf{n}(t_0),$$

y se llama *centro de curvatura*.



La prueba de esta proposición es análoga a la prueba en el caso euclidiano (cf. [BL16, dC17, Kü15]). A la luz de la proposición 2.3 y del ejemplo 2.5, la función de curvatura $\kappa(t)$ (en valor absoluto) de una curva plana γ tiene una bonita interpretación física, a saber, como el recíproco del radio de la circunferencia osculatriz. Un orden de contacto más alto indica una mejor aproximación geométrica y, por lo tanto, dado que hay una única circunferencia osculatriz, es, en un sentido geométrico, la circunferencia de Lorentz que mejor se aproxima a una curva en un punto. Además, no necesariamente existe una circunferencia osculatriz con un orden de contacto mayor que 2. Por lo tanto, la curvatura (en valor absoluto) es el inverso del radio de la circunferencia de Lorentz que se aproxima mejor a una curva en un punto. La *evoluta* de una curva \mathcal{C} es el lugar geométrico de los centros de curvatura, y de la discusión anterior se sigue el siguiente resultado.

Proposición 2.4. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ una curva plana, paramétrica, regular, de clase C^2 , tipo espacio o tipo tiempo. Sea I' un subintervalo de I en el cual $\kappa(t) \neq 0$. Entonces, en el intervalo I' , la evoluta de γ tiene la siguiente parametrización:

$$\xi(t) = \gamma(t) + \frac{\epsilon_n}{\kappa(t)} \mathbf{n}(t). \tag{2.19}$$

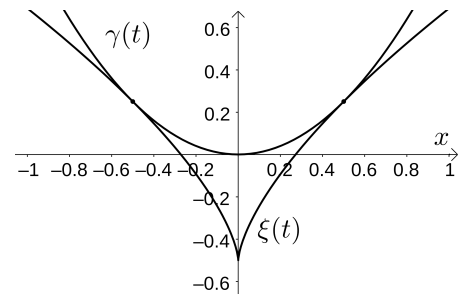
Por ejemplo, para la parábola euclidiana $\gamma(t) = (t, t^2)$, con $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\gamma'(t) = (1, 2t), \quad \gamma''(t) = (0, 2), \quad \mathbf{n}(t) = \frac{1}{|1 - 4t^2|^{1/2}} (2t, 1), \quad \kappa(t) = \frac{2}{|1 - 4t^2|^{3/2}}.$$

Entonces, la evoluta es la curva

$$\xi(t) = \left(4t^3, -\frac{1}{2} + 3t^2 \right).$$

Una curva estrechamente relacionada con la evoluta de $\gamma(t)$ es la *evolvente* o *involuta*. Llamamos evolvente de γ a cualquier curva parametrizada ι tal que para todo $t \in I$, $\iota(t)$ corta de manera perpendicular a la recta tangente de γ en t .



Para todo $t \in I$, el punto de la evolvente $\iota(t)$ está en la recta tangente de γ en t , por lo que es natural escribir la ecuación paramétrica de la evolvente como

$$\iota(t) = \gamma(t) + \lambda(t) \mathbf{t}(t).$$

Como queremos calcular la derivada $\iota'(t)$, que involucra la derivada $\mathbf{t}'(t)$, debemos asumir que la curva $\gamma(t)$ es de clase C^2 . La definición de la evolvente requiere que el vector $\iota'(t)$ esté en una dirección perpendicular a $\mathbf{t}(t)$, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{t}, \iota' \rangle = \langle \mathbf{t}, \gamma' + \lambda' \mathbf{t} + \lambda \mathbf{t}' \rangle = \langle \mathbf{t}, s' \mathbf{t} + \lambda' \mathbf{t} + \lambda s' \kappa \mathbf{n} \rangle \\ &\Rightarrow s' + \lambda' = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(t) = c - s(t), \end{aligned}$$

donde c es una constante de integración. Por lo tanto, la ecuación de la evolvente es

$$\iota(t) = \gamma(t) + (c - s(t))\mathbf{t}(t).$$

Es claro que una curva es la evoluta de cualquiera de sus evolventes, y recíprocamente, una curva es una evolvente de su evoluta (donde $\kappa'(t) \neq 0$). A. Saloom estudia algunas propiedades elementales de las evolutas en [Sal12, cap. 3].

§2.5 Ecuaciones naturales

Hemos visto que para una curva parametrizada tipo espacio o tipo tiempo $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$, la función de curvatura está dada por la ecuación (2.11):

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{|x'(t)^2 - y'(t)^2|^{3/2}}.$$

Dado que cualquier isometría o movimiento rígido en el plano no modifica las distancias, tal transformación no debería distorsionar una curva. Por tanto, como es de esperarse, la curvatura se conserva bajo movimientos rígidos, como demostramos más abajo.

Teorema 2.1. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ una curva plana, regular, tipo espacio (tipo tiempo). Supongamos que existe un vector unitario tipo espacio (tipo tiempo) $\mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^2$ tal que $\mathbf{t}(t)$ y \mathbf{v} se encuentran en la misma componente de \mathbb{U}_1^2 (vectores unitarios) para todo t . Si $\theta = \angle(\mathbf{t}(t), \mathbf{v})$ es el ángulo entre el vector tangente de γ y \mathbf{v} , entonces

$$\kappa(t) = \pm \frac{\theta'(t)}{s'(t)}.$$

Prueba. De las ecuaciones (1.3) y (1.6) sabemos que

$$\pm \cosh \theta(t) = \frac{\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{t}(t)\| \|\mathbf{v}\|} = \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{v} \rangle.$$

Derivamos:

$$\begin{aligned} \pm \theta'(t) \sinh \theta(t) &= \langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{v} \rangle + \cancel{\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{v}' \rangle} \\ &= s'(t) \kappa(t) \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{v} \rangle. \end{aligned} \tag{2.20}$$

De la proposición 1.1 tenemos que $\mathbf{v} = \epsilon_t \langle \mathbf{v}, \mathbf{t}(t) \rangle \mathbf{t} + \epsilon_n \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}(t) \rangle \mathbf{n}(t)$, y de aquí

$$\begin{aligned} \pm 1 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{t}(t) \rangle^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle - 2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{t} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle^2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\ &= \epsilon_t \langle \mathbf{v}, \mathbf{t} \rangle^2 + \epsilon_n \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle^2 \\ &= \epsilon_t (\cosh^2(\theta(t)) - \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle^2). \end{aligned}$$

Entonces, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n}(t) \rangle = \pm \sqrt{\cosh^2(\theta(t)) - 1} = \pm \sinh(\theta(t))$ y de la ecuación (2.20) se sigue directamente que $\theta'(s) = \pm s(t)' \kappa(t)$. Q. E. D.

Teorema 2.2. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ una curva plana, regular, de clase C^2 , tipo espacio (tipo tiempo). Sea $M : \mathbb{E}_1^2 \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ un movimiento rígido del plano de Minkowski dado por $M\mathbf{v} = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$, donde A es un movimiento rígido positivo y \mathbf{b} es cualquier vector en \mathbb{E}_1^2 . Entonces la función vectorial $\tilde{\gamma} = M \circ \gamma$ es una curva regular, parametrizada, de clase C^2 , tipo espacio (tipo tiempo) y la función de curvatura $\tilde{\kappa}$ de $\tilde{\gamma}$ es igual a la función de curvatura κ de γ .

Prueba. Si $M\mathbf{v} = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$ es un movimiento rígido de \mathbb{E}_1^2 con $A \in SO_1(2)$, es claro que si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ es una curva plana, regular, parametrizada, de clase C^2 , tipo espacio o tipo tiempo, la curva $\tilde{\gamma} = A\gamma + \mathbf{b}$ también lo es. Por otro lado, dado que la curvatura tiene signo, solo se conserva mediante movimientos rígidos positivos. De manera precisa, si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ es una curva tipo espacio o tipo tiempo, entonces la relación entre los diedros de Frenet de γ y $\tilde{\gamma} = A\gamma + \mathbf{b}$ es

$$\tilde{\mathbf{t}}(t) = A\mathbf{t}(t) \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{n}}(t) = A\mathbf{n}(t).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}'(t) &= A\mathbf{t}'(t) = s'(t)\kappa(t)A\mathbf{n}(t) \\ &= s'(t)\kappa(t)\tilde{\mathbf{n}}(t), \end{aligned}$$

y esto prueba que $\tilde{\kappa}(t) = \kappa(t)$. Q. E. D.

Hemos probado que la función de curvatura es invariante bajo cualquier isometría positiva. Además, también vimos que la función de curvatura es invariante bajo cualquier reparametrización regular, excepto por un signo que depende de «la dirección de desplazamiento» a lo largo de la curva. En consecuencia, $|\kappa|$ es un invariante geométrico que solo depende de la forma de la curva en un punto particular y no de cómo la curva está parametrizada o dónde se encuentra situada. Es natural preguntarse si se cumple una relación recíproca, es decir, si la función de curvatura es suficiente para determinar una curva parametrizada salvo una isometría positiva del plano. Como se planteó, esta pregunta no está bien definida ya que una curva puede tener diferentes parametrizaciones. Sin embargo, podemos probar lo siguiente.

Teorema 2.3 (Teorema fundamental de las curvas planas). Dada una función integrable $\kappa(s)$, existe una curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$, de clase C^2 , parametrizada por

la longitud de arco, con función de curvatura $\kappa(s)$. Además, la curva está determinada de forma única salvo un movimiento rígido en el plano.

Prueba. Primero veamos la existencia de γ . El caso $\kappa(t) = 0$ está considerado en la proposición 2.2. Entonces, supongamos que $\kappa(t) \neq 0$. Si una curva regular $\gamma(s)$ (que no es un segmento de recta) está parametrizada por la longitud de arco, entonces la fórmula de la curvatura es

$$\kappa(s) = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s).$$

La demostración de este teorema consiste en exhibir una parametrización que satisfaga esta ecuación diferencial. Para una curva regular, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$, tipo espacio, de clase C^2 , parametrizada por la longitud de arco, tenemos $\gamma'(s) = \mathbf{t}(s)$, y entonces podemos ver a $\mathbf{t}(s)$ como una función vectorial de clase $C^1(\mathbb{U}_1^2)$ como $\mathbf{t} : I \rightarrow \mathbb{S}_1^{1+} \sqcup \mathbb{S}_1^{1-}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{t}(s) = (\cosh \theta(s), \sinh \theta(s)), \quad (2.21)$$

para alguna función continua $\theta(s)$. Sin embargo, la ecuación $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ y la ecuación (2.21) muestran que

$$\kappa(s)\mathbf{n}(s) = \theta'(s)(\sinh \theta(s), \cosh \theta(s)) = \theta'(s)\mathbf{n}(s).$$

En consecuencia, deducimos que $\kappa(s) = \theta'(s)$.

Las observaciones anteriores conducen al siguiente resultado. Supongamos que se nos da la función de curvatura $\kappa(s)$. Realizando dos integraciones, vemos que la única curva $\gamma(s)$ con función de curvatura $\kappa(s)$ debe ser

$$\gamma(s) = \left(\int \cosh \theta(s) ds + e, \int \sinh \theta(s) ds + f \right), \quad (2.22)$$

donde

$$\theta(s) = \int \kappa(s) ds + \theta_0, \quad (2.23)$$

y donde θ_0 , e y f son constantes de integración. Tengamos en cuenta que el teorema requiere que $\kappa(s)$ sea continua por segmentos para ser integrable.

Para una curva regular tipo tiempo $\gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ tenemos la función vectorial $\mathbf{t} : I \rightarrow \mathbb{H}_+^1 \sqcup \mathbb{H}_-^1$ dada por $\mathbf{t}(s) = (\sinh(\theta(s)), \cosh(\theta(s)))$. Y de la misma manera obtenemos una curva de clase C^2 , parametrizada por la longitud de arco:

$$\gamma_2(s) = \left(\int \sinh \theta(s) ds + e_2, \int \cosh \theta(s) ds + f_2 \right), \quad (2.24)$$

Para la unicidad, salvo movimientos rígidos, las fórmulas trigonométricas hiperbólicas de adición de ángulos muestran que el producto de dos movimientos rígidos es otro movimiento rígido. Así, una constante $\theta_0 \neq 0$ transforma γ por un movimiento rígido $A \in SO_1(2)$ y las constantes $e, f \neq 0$ corresponden a una traslación a lo largo del vector $\mathbf{b} = (e, f)$. Entonces, $\gamma(s)$ se transforma en $\tilde{\gamma}(s) = A\gamma(s) + \mathbf{b}$ y el teorema 2.2 nos asegura que $\tilde{\kappa}(s) = \kappa(s)$. Q. E. D.

Debido a la naturaleza geométrica de la función de curvatura $\kappa(s)$ (con respecto a la longitud de arco) y debido a que existe una curva plana única (salvo un movimiento rígido) para una función de curvatura dada, llamamos a $\kappa(s)$ la *ecuación natural* de su curva correspondiente. El teorema fundamental de las curvas planas es sorprendente porque, *a priori*, esperamos que una curva requiera dos funciones (coordenadas) para definirla. Sin embargo, solo se requiere una función, $\kappa(s)$, para definir de manera unívoca la forma de una curva.

Si asumimos que estamos trabajando con curvas planas $\gamma(s)$ que son *analíticas reales*, podemos ver por qué se cumple el teorema 2.3 usando series de Taylor. En efecto, sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ una curva analítica real parametrizada por la longitud de arco y supongamos sin pérdida de generalidad que $0 \in I$. Podemos expandir la serie de Taylor de $\gamma(s)$ alrededor de 0 para obtener

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0) + \frac{s^2}{2!}\gamma''(0) + \frac{s^3}{3!}\gamma'''(0) + \dots$$

Sin embargo, dado que la curva está parametrizada por la longitud de arco, entonces $\gamma'(s) = \mathbf{t}(s)$, $\gamma''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, $\gamma'''(s) = \kappa^2(s)\mathbf{t}(s) + \kappa'(s)\mathbf{n}(s)$, y así sucesivamente. Entonces, los primeros términos se ven de esta manera:

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \left(s + \frac{1}{6}\kappa^2(0)s^3 + \dots\right)\mathbf{t}(0) + \left(\frac{1}{2}\kappa(0)s^2 + \frac{1}{6}\kappa'(0)s^3 + \dots\right)\mathbf{n}(0). \quad (2.25)$$

Por lo tanto, dado que el vector normal $\mathbf{n}(s)$ es solo una rotación de $\mathbf{t}(s)$ por $\frac{\pi}{2}$, dada una función $\kappa(s)$, una vez que se eligen para las condiciones iniciales el punto $\gamma(0)$ y la dirección $\mathbf{t}(0)$, la serie de Taylor está determinada de forma única en un nuevo intervalo abierto J que contiene a $s = 0$, y que es la intersección de los intervalos de convergencia de las dos series de Taylor en las componentes $\mathbf{t}(0)$ y $\mathbf{n}(0)$. Elegir un $\mathbf{t}(0)$ diferente equivale a una rotación de la curva en el plano, y elegir un $\gamma(0)$ diferente equivale a una traslación. Por lo tanto, vemos nuevamente que hacer diferentes elecciones para las condiciones iniciales corresponde a un movimiento rígido de la curva en el plano de Minkowski. A la representación (2.25) se le llama *forma canónica local* de $\gamma(s)$ y describe el comportamiento de cualquier curva regular, parametrizada por la longitud de arco, en la vecindad de un punto $\gamma(s_0)$: nos dice que si $\kappa(s_0) \neq 0$, la imagen de $\gamma(s)$ se encuentra en un solo lado de la recta tangente de $\gamma(s)$ en $s = s_0$.

Incluso para expresiones simples de la curvatura $\kappa(s)$, a menudo es difícil usar el enfoque de la demostración del teorema 2.3 para resolver explícitamente para $\gamma(s)$. Sin embargo, usando un *software* para resolver ecuaciones diferenciales, es posible producir una imagen de curvas que poseen una función de curvatura dada $\kappa(s)$. Se puede crear una solución numérica utilizando la solución (2.22) o (2.24) junto con la ecuación (2.23). De manera equivalente, podemos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(s) = \cosh \theta(s) \\ y'(s) = \sinh \theta(s) \\ \theta'(s) = \kappa(s) \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x'(s) = \sinh \theta(s) \\ y'(s) = \cosh \theta(s) \\ \theta'(s) = \kappa(s) \end{cases}$$

y solo graficar la solución para la pareja $(x(s), y(s))$. De nuevo, cada elección de condiciones iniciales determina una posición y orientación distinta de la curva en el plano de Minkowski.

Terminamos la sección y el capítulo describiendo las curvas en el plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 con curvatura constante. Supongamos que la curvatura κ es una constante $a \neq 0$. Entonces, de la ecuación (2.23) obtenemos

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa(s) ds = \int_{s_0}^s a ds = as + b, \quad \text{con } b \in \mathbb{R}.$$

De las ecuaciones (2.22) y (2.24) se sigue que solo las siguientes curvas tienen una curvatura constante $\kappa = a$:

a) La curva tipo espacio

$$\gamma(s) = \frac{1}{a}(\sinh(as + b), \cosh(as + b)).$$

b) La curva tipo tiempo

$$\beta(s) = \frac{1}{a}(\cosh(as + b), \sinh(as + b)).$$

Por lo tanto, las únicas curvas con curvatura constante distinta de cero son los círculos de Lorentz que definimos en el ejemplo 2.2. Esta caracterización como curvas de curvatura constante justifican el nombre de «círculo» de Lorentz.

CAPÍTULO 3

TEORÍA LOCAL DE LAS CURVAS ESPACIALES EN \mathbb{E}_1^3

La teoría local de las curvas espaciales es similar a la teoría de las curvas planas, pero surgen diferencias debido a la variedad más rica de configuraciones disponibles para las curvas en el espacio de Minkowski \mathbb{E}_1^3 . En el estudio de las curvas planas introdujimos la función de curvatura, una función de fundamental importancia que mide cuánto se desvía una curva de ser una línea recta. En el estudio de las curvas espaciales introduciremos nuevamente una función de curvatura que mide cuánto se desvía una curva espacial de ser rectilínea, y también presentaremos una función de torsión que mide cuánto se tuerce la curva para dejar de ser plana. Para ciertas curvas no es posible definir una función de curvatura y una función de torsión, pero en cambio aparece una función nueva que llamamos pseudotorsión.

En ciertas fuentes es común llamar a las curvas tipo tiempo «curvas temporales» y llamar a las curvas tipo espacio «curvas espaciales». Aquí no vamos a seguir esa nomenclatura para evitar confusiones innecesarias. A toda curva en el espacio de Minkowski \mathbb{E}_1^3 le vamos a decir «curva espacial», del mismo modo que a toda curva en el plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 le decimos «curva plana».

§3.1 Definiciones, ejemplos y parametrizaciones

Al igual que en el estudio de las curvas planas, se debe tener cierto cuidado al definir qué se entiende por curva espacial. Si I es un intervalo de \mathbb{R} , llamar curva espacial a cualquier función $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ (o la imagen de la misma), permitiría segmentos inconexos o incluso un conjunto de puntos dispersos. Por una curva normalmente se piensa en un lugar geométrico de puntos y, al igual que con las curvas planas, la propiedad deseada es la continuidad como se define en los textos de cálculo.

Definición 3.1. Sea I un intervalo de \mathbb{R} . Una *curva espacial parametrizada* en \mathbb{E}_1^3 es una función continua $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$. Si para todo $t \in I$ tenemos

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)),$$

entonces las funciones $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$ se denominan *funciones coordenadas* o *ecuaciones paramétricas* de la curva. La curva parametrizada $\gamma(t)$ es *regular* si es de clase C^1 y $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in I$.

Ejemplo 3.1 (Rectas). En el espacio de Minkowski \mathbb{E}_1^3 , una recta está definida de forma única por un punto \mathbf{p} en la recta y un vector de dirección \mathbf{v} distinto de cero. Las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}.$$

Ejemplo 3.2 (Curvas planas). Una curva plana $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$ parametrizada como $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ se puede considerar como una curva espacial parametrizada si hacemos

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), 0).$$

De manera más general, recordemos que si \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores linealmente independientes de \mathbb{E}_1^3 y si \mathbf{p} es cualquier punto en \mathbb{E}_1^3 , entonces el plano generado por $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ que pasa por \mathbf{p} puede describirse mediante la expresión $\mathbf{p} + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$, donde $u, v \in \mathbb{R}$. Notemos que un vector normal a este plano es $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. En consecuencia, una curva en este plano vendrá dada por una parametrización de la forma

$$\gamma(t) = \mathbf{p} + u(t)\mathbf{a} + v(t)\mathbf{b},$$

donde $u(t)$ y $v(t)$ son funciones continuas $I \rightarrow \mathbb{R}$ en un intervalo de \mathbb{R} .

Para diseñar correctamente parametrizaciones de curvas específicas en planos en \mathbb{E}_1^3 , puede ser necesaria una elección cuidadosa de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , por ejemplo, una curva espacial de la forma

$$\gamma(t) = \mathbf{p} + r(\cosh t)\mathbf{a} + r(\sinh t)\mathbf{b}$$

será en general una rama de una hipérbola euclidiana (un círculo de Lorentz) en el plano afín generado por \mathbf{a} y \mathbf{b} que pasa por \mathbf{p} .

Ejemplo 3.3 (Círculos). Las rotaciones espacio-temporales nos permiten definir un círculo en \mathbb{E}_1^3 . En el espacio euclidiano \mathbb{E}^3 , hay diferentes formas de definir un círculo. Una primera idea es que el círculo es una curva que está contenida en un plano y la curva es cerrada. Entonces, tenemos las siguientes posibilidades: (a) el conjunto de puntos equidistantes a un punto dado; (b) una curva con curvatura constante; y (c) la órbita de un punto bajo un grupo de rotaciones de \mathbb{E}^3 .

En el espacio de Minkowski \mathbb{E}_1^3 , seguimos la tercera aproximación usando rotaciones espacio-temporales en lugar de rotaciones (espaciales). Sea ℓ una recta fija de \mathbb{E}_1^3 y sea $G_\ell = \{\phi_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ el grupo de rotaciones espacio-temporales que fijan la recta ℓ de forma puntual. Así, un círculo es la órbita $\{\phi_\theta(p_0) : \phi_\theta \in G_\ell\}$ de un punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \notin \ell$. Después de una isometría distinguimos tres casos en función de la naturaleza causal de la recta ℓ , como vimos al final de la sección 1.3.

Caso 1. La recta ℓ es tipo tiempo. Consideremos $\ell = \mathbb{R}\mathbf{e}_3$. Entonces, el conjunto $\{\phi_\theta(p_0) : \theta \in \mathbb{R}\}$ es el círculo euclidiano que se encuentra en el plano con ecuación $z = z_0$ y tiene radio $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, según la matriz (1.9).

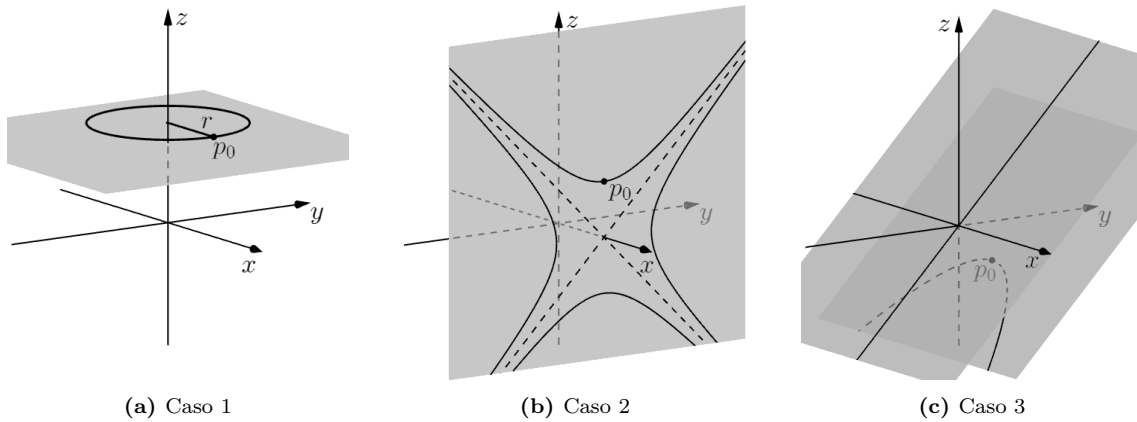
Caso 2. La recta ℓ es tipo espacio. Tomamos $\ell = \mathbb{R}\mathbf{e}_1$. Aquí suponemos $y_0^2 - z_0^2 \neq 0$, pues en otro caso tenemos una línea recta. La órbita de p_0 es una rama de la

hipérbola $y^2 - z^2 = y_0^2 - z_0^2$ en el plano $x = x_0$ (cf. matriz (1.10)). Dependiendo de si $y_0^2 - z_0^2 > 0$ o $y_0^2 - z_0^2 < 0$, tendremos hasta cuatro círculos distintos.

Caso 3. La recta ℓ es tipo luz. Supongamos que $\ell = \mathbb{R}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ y consideremos el plano $\ell^\perp = \text{gen}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$. La órbita de un punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \notin \ell^\perp$ es una curva en el plano $y - z = y_0 - z_0$. Según la matriz (1.11), si $x = x_0 + a(y_0 - z_0)$ e $y = y_0 - x_0 a - \frac{(y_0 - z_0)a^2}{2}$, entonces la órbita de p_0 satisface la ecuación

$$y = \frac{-x^2 + 2y_0(y_0 - z_0) + x_0^2}{2(y_0 - z_0)},$$

es decir que el conjunto $\{\phi_\theta(p_0) : \theta \in \mathbb{R}\}$ es una parábola euclidiana.



En general, si el eje ℓ no es alguno de los anteriores tres, entonces las órbitas son elipses afines, hipérbolas o parábolas (euclidianas), según el caso.

Ejemplo 3.4 (Gráficas de funciones). Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que $\gamma'(t)$ es tipo tiempo o tipo luz, y sea $t_0 \in I$. Sabemos que $x'^2(t) + y'^2(t) - z'^2(t) \leq 0$ y en consecuencia $z'(t_0) \neq 0$. El teorema de la función inversa asegura que existen $\delta, \epsilon > 0$ tales que $z : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow (z(t_0) - \epsilon, z(t_0) + \epsilon)$ es un difeomorfismo. Denotamos $J = (z(t_0) - \epsilon, z(t_0) + \epsilon)$ y $\phi(s) = z^{-1}(s)$. Entonces la curva $\beta = \gamma \circ \phi$ satisface

$$\beta(s) = \gamma(\phi(s)) = (x(\phi(s)), y(\phi(s)), s) = (f(s), g(s), s),$$

donde $f(s) = (x \circ \phi)(s)$ y $g(s) = (y \circ \phi)(s)$ son dos funciones lisas en $J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Por lo tanto, la gráfica $G_h = \{(t, f(t), g(t)) \in \mathbb{E}_1^3 : t \in [a, b]\}$ de una función continua $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h(t) = (f(t), g(t))$ en un intervalo $[a, b]$ se puede ver como una curva parametrizada por las funciones coordenadas $\gamma(t) = (t, f(t), g(t))$.

Como en \mathbb{E}_1^2 , para cualquier curva $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, tomando prestado el lenguaje de las trayectorias en mecánica, a menudo llamamos a $\gamma(t)$ la *función de posición*, a $\gamma'(t)$ la *función de velocidad* y a $\gamma''(t)$ la *función de aceleración*. Además, definimos la *función de rapidez* asociada a $\gamma(t)$ como la función $s' : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{|x'^2(t) + y'^2(t) - z'^2(t)|}.$$

También es una cuestión sencilla definir ecuaciones de la recta tangente a una curva parametrizada $\gamma(t)$ en $t = t_0$ siempre que $\gamma'(t_0) \neq \mathbf{0}$:

$$\ell(u) = \gamma(t_0) + u\gamma'(t_0), \quad \text{con } u \in \mathbb{R}.$$

Usando el mismo vocabulario que en el capítulo 2, llamamos *reparametrización* de una curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ a cualquier otra función continua $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ definida por

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ f,$$

para alguna función sobreyectiva $f : J \rightarrow I$. Entonces, la imagen $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathbb{E}_1^3$ de $\tilde{\gamma}$ es la misma que la imagen $\mathcal{C} \subset \mathbb{E}_1^3$ de γ . Cuando f no es sobreyectiva, la imagen de $\tilde{\gamma}$ podría ser un subconjunto propio de \mathcal{C} , y no llamamos a $\tilde{\gamma}$ una reparametrización. Además, decimos que la reparametrización $\tilde{\gamma}$ de γ

- a) es *regular* si f es continuamente diferenciable y $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in J$.
- b) está *orientada positivamente* si es regular y $f'(t) > 0$ para todo $t \in J$.
- c) está *orientada negativamente* si es regular y $f'(t) < 0$ para todo $t \in J$.

Definición 3.2. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva espacial. Decimos que $\gamma(t)$ es *tipo espacio* (*tipo tiempo*, *tipo luz*, resp.) en t si $\gamma'(t)$ es un vector tipo espacio (tipo tiempo, tipo luz, resp.). También diremos que la curva γ es *tipo espacio* (*tipo tiempo*, *tipo luz*, resp.) en I si es tipo espacio (tipo tiempo, tipo luz, resp.) para todo $t \in I$.

También aquí, como en el caso plano, tenemos que una curva tipo tiempo o tipo luz es regular porque $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$. Una curva en \mathbb{E}_1^3 puede no ser de uno de los tipos anteriores para todo $t \in I$. Por ejemplo, la curva

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3, \quad \gamma(t) = \left(\cosh(t), \frac{t^2}{2}, \sinh(t) \right)$$

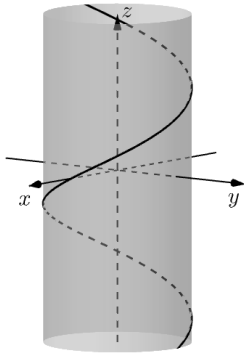
es regular, pues $\gamma'(t) = (\sinh(t), t, \cosh(t)) \neq \mathbf{0}$. Además, como $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = t^2 - 1$, entonces la curva es tipo espacio en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; es tipo tiempo en el intervalo $(-1, 1)$; y es tipo luz en los puntos $\{-1, 1\}$. Notemos además que $\|\gamma'(\pm 1)\| = 0$, pero γ es regular en $t = \pm 1$. Además, la condición de ser tipo espacio o tipo tiempo es una propiedad abierta, como en el caso plano.

Ejemplo 3.5. a) La línea recta $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ tiene la misma naturaleza causal que el vector \mathbf{v} .

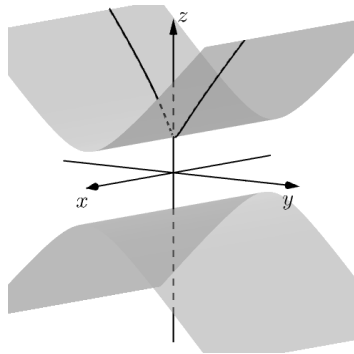
b) Consideremos la hélice circular $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ut)$, de radio $r > 0$ y paso $2\pi u$, con $u \neq 0$. Esta hélice está contenida en el cilindro $x^2 + y^2 = r^2$. Si $r^2 > u^2$, γ es una curva tipo espacio; si $r^2 = u^2$, γ es una curva tipo luz; y si $r^2 < u^2$, γ es una curva tipo tiempo.

c) La curva $\gamma(t) = (ut, r \sinh t, r \cosh t)$ con $u \neq 0$ y $r > 0$ está contenida en el cilindro hiperbólico $y^2 - z^2 = -r^2$. Esta curva es tipo espacio.

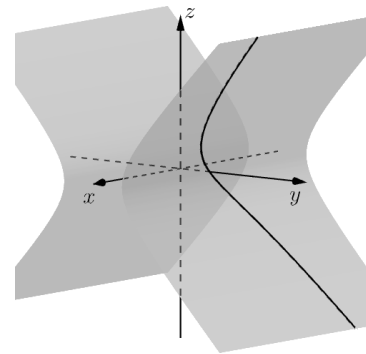
- d) La curva $\gamma(t) = (ut, r \cosh t, r \sinh t)$ con $u \neq 0, r > 0$ está contenida en el cilindro hiperbólico $y^2 - z^2 = r^2$. Si $u^2 > r^2$, entonces la curva es tipo espacio; si $u^2 = r^2$, la curva es tipo luz; si $u^2 < r^2$, la curva es tipo tiempo.



(a) Hélice $(r \cos t, r \sin t, ut)$



(b) Curva $(ut, r \sinh t, r \cosh t)$



(c) Curva $(ut, r \cosh t, r \sinh t)$

En algunas pruebas que encontraremos más adelante, a menudo es útil suponer que una curva $\gamma(t)$ tipo espacio o tipo tiempo está parametrizada por la longitud de arco, es decir $s' = \|\gamma'(s)\| = 1$ para todo s .

Proposición 3.1 (Reparametrización por la longitud de arco). Si $\gamma(t)$ es una curva parametrizada, regular, tipo espacio o tipo tiempo, entonces hay una reparametrización regular de γ por la longitud de su arco. Además, si γ es de clase C^k , entonces la reparametrización por la longitud de su arco también es de clase C^k .

La prueba de esta proposición es análoga a la de la proposición 2.1 del caso plano y no merece la pena repetirla. Para una curva tipo luz no tiene sentido reparametrizar por la longitud de su arco porque $s'(t) = \|\gamma'(t)\| = 0$ para todo t . Sin embargo, una derivación nos da:

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Como $\gamma'(t)$ es un vector tipo luz para todo t , entonces la proposición 1.2 (d) implica que $(\mathbb{R} \gamma'(t))^\perp$ es un plano tipo luz (que contiene solamente vectores tipo luz y vectores tipo espacio). Entonces distinguimos los siguientes dos casos:

Caso 1. Si $\gamma''(t)$ es tipo luz, entonces $\gamma''(t) = a \gamma'(t)$ según la proposición 1.3 (a). Si la misma constante a funciona para todo t , dos integraciones nos conducen a

$$\gamma(t) = \mathbf{u} + e^{at} \mathbf{v}, \quad \text{con } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Esto significa que $\gamma(t)$ es una parametrización de una línea recta (tipo luz).

Caso 2. Si $\gamma''(t)$ es tipo espacio, podemos parametrizar $\gamma(t)$ de modo que $\|\gamma''(s)\| = 1$, como probamos en el siguiente resultado.

Proposición 3.2 (Parametrización por la pseudolongitud del arco). Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva tipo luz, de clase C^2 , que no sea una línea recta. Entonces

existe una reparametrización $\tilde{\gamma}$ de $\gamma(t)$ tal que $\|\tilde{\gamma}''(s)\| = 1$, y en tal caso decimos que γ está *parametrizada por la pseudolongitud de su arco*.

Prueba. Consideremos la curva $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(f(s))$. Derivando dos veces obtenemos:

$$\tilde{\gamma}'(s) = f'(s) \cdot \gamma'(f(s)) \quad \text{y} \quad \tilde{\gamma}''(s) = f''(s) \cdot \gamma'(f(s)) + f'^2(s) \cdot \gamma''(f(s)).$$

De aquí se sigue que

$$\langle \tilde{\gamma}''(s), \tilde{\gamma}''(s) \rangle = f'(s)^4 \|\gamma''(f(s))\|^2.$$

Entonces, basta tomar

$$f'(s) = \frac{1}{\sqrt{\|\gamma''(f(s))\|}}$$

para concluir que $\|\tilde{\gamma}''(s)\| = 1$.

Q. E. D.

Como en el caso plano, si $\gamma(t)$ es una curva regular y $\tilde{\gamma} = \gamma \circ f$ es una reparametrización de $\gamma(t)$, la naturaleza causal de $\gamma(t)$ y $\tilde{\gamma}(t)$ es la misma.

§3.2 Curvatura, torsión y el marco de Serret-Frenet

Sea I un intervalo de \mathbb{R} y sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva espacial diferenciable. Siguiendo la teoría de las curvas planas, podemos hablar del *vector tangente unitario* $\mathbf{t}(t)$ definido como un múltiplo escalar de $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$. La definición de *punto crítico* y de *punto regular* que dimos en la definición 2.5 se generaliza naturalmente a curvas espaciales parametrizadas $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$. En la práctica, si $\gamma'(t_0) = \mathbf{0}$ pero $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t en algún intervalo J alrededor de t_0 , es posible que exista el límite $\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma'(t)$, y en tales casos es común pensar a $\mathbf{t}(t)$ como completado o extendido por continuidad al llamarle $\mathbf{t}(t_0)$ al límite anterior, salvo un múltiplo escalar. En cualquier punto t de la curva donde $\mathbf{t}'(t) \neq \mathbf{0}$, definiremos el *vector normal unitario* $\mathbf{n}(t)$ de la curva $\gamma(t)$ en t como un múltiplo de $\mathbf{t}'(t)$.

De nuevo, a veces se puede extender $\mathbf{n}(t)$ por continuidad incluso en los puntos $t = t_0$, donde $\mathbf{t}'(t_0) = \mathbf{0}$. En tales casos, es común suponer que $\mathbf{n}(t)$ se extiende por continuidad siempre que sea posible. No obstante, el requisito de que $\mathbf{t}(t)$ sea diferenciable equivale a que $\gamma(t)$ sea dos veces diferenciable. Para una curva espacial definida en cualquier intervalo J , donde existen $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ (extendidos por continuidad si es necesario), completamos el conjunto $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ a un marco para el espacio de Minkowski al añadir el *vector binormal* $\mathbf{b}(t)$ usando el producto vectorial de Lorentz o bien completando un marco nulo.

Definición 3.3. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva espacial, continua, de clase C^2 (es decir, tiene una segunda derivada continua). A cada punto $\gamma(t)$ de la curva le asociamos el *marco de Frenet* definido como la terna de vectores $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$.

Las funciones que miden la rapidez con que cambian $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{b}(t)$ se denominan funciones de *curvatura* y (*pseudo*) *torsión* de la curva, respectivamente. Del mismo modo que en el caso de las curvas planas, el marco de Frenet $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ proporciona una base geoméricamente natural para estudiar las propiedades locales de las curvas espaciales. El marco de Frenet $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ es una base de \mathbb{E}_1^3 que también se llama *triedro de Frenet* de $\gamma(t)$.

Antes de escribir las ecuaciones de Frenet para las curvas en el espacio de Minkowski, conviene recordar cómo se escriben estas ecuaciones para curvas en el espacio euclidiano \mathbb{E}^3 . Para esto primero recordemos que la rapidez es $s'(t) = \|\gamma'(t)\|_e$ y, por definición del vector tangente unitario tenemos

$$\gamma'(t) = s'(t) \cdot \mathbf{t}(t).$$

Si $\gamma(t)$ es dos veces diferenciable en t , $\mathbf{t}'(t)$ existe. Y si $\mathbf{n}(t)$ está definido en t , entonces $\mathbf{t}'(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ son paralelos por definición. Esto nos permite definir la *curvatura* $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ de una curva espacial euclidiana γ , parametrizada, de clase C^2 , como

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|_e}{s'(t)}.$$

En cualquier punto donde $\mathbf{n}(t)$ está definido, tenemos

$$\mathbf{t}'(t) = s'(t)\kappa(t)\mathbf{n}(t).$$

Para determinar cómo se comportan los otros vectores unitarios del marco de Frenet bajo derivación, lo que se suele hacer es derivar el producto cruz $\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times_e \mathbf{n}(t)$ una vez:

$$\mathbf{b}'(t) = \cancel{\mathbf{t}'(t) \times_e \mathbf{n}(t)} + \mathbf{t}(t) \times_e \mathbf{n}'(t) = \mathbf{t}(t) \times_e \mathbf{n}'(t),$$

donde la última igualdad se tiene porque $\mathbf{t}'(t)$ es paralelo a $\mathbf{n}(t)$. Sin embargo, al igual que $\mathbf{t}'(t) \perp \mathbf{t}(t)$, tenemos lo mismo para $\mathbf{n}'(t) \perp \mathbf{n}(t)$. De modo que si $\mathbf{t}'(t) = \mathbf{0}$ o si $\mathbf{t}'(t)$ es proporcional a $\mathbf{t}(t)$ para todo t , entonces la curva es una línea recta.

Como en el espacio euclidiano estamos en tres dimensiones, podemos escribir $\mathbf{n}'(t) = f(t) \cdot \mathbf{t}(t) + g(t) \cdot \mathbf{b}(t)$ para algunas funciones continuas $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. En consecuencia, se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(t) &= f(t) \cancel{\mathbf{t}(t) \times_e \mathbf{t}(t)} + g(t) \mathbf{t}(t) \times_e \mathbf{b}(t) \\ &= -g(t) \cdot \mathbf{n}(t). \end{aligned}$$

Por tanto, la derivada del vector unitario binormal es paralela al vector normal. Esto nos conduce a la definición de la *función de torsión* $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ de una curva espacial euclidiana γ como la única función tal que

$$\mathbf{b}'(t) = -s'(t)\tau(t)\mathbf{n}(t),$$

siempre que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ sea una curva espacial, regular, de clase C^2 , para la cual el marco de Frenet está definido en todas partes.

Para determinar $\mathbf{n}'(t)$, sabiendo que tiene la forma $f(t)\mathbf{t}(t) + g(t)\mathbf{b}(t)$, se aprovecha el hecho de que $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ es un marco ortonormal para todo t , pues tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \rangle_e = 0 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t) \rangle_e = 0.$$

Tomando derivadas con respecto a t , tenemos

$$\langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle_e + \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{n}'(t) \rangle_e = 0 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle_e + \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{b}'(t) \rangle_e = 0,$$

es decir,

$$\langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{t}(t) \rangle_e = -\langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle_e \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle_e = -\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{b}'(t) \rangle_e.$$

Por tanto, concluimos que

$$f(t) = -\langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle_e = -s'(t)\kappa(t) \quad \text{y} \quad g(t) = -\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{b}'(t) \rangle_e = s'(t)\tau(t), \quad (3.1)$$

es decir,

$$\mathbf{n}'(t) = -s'(t)\kappa(t)\mathbf{t}(t) + s'(t)\tau(t)\mathbf{b}(t). \quad (3.2)$$

Notemos que las ecuaciones (3.1) nos permiten escribir la curvatura y la torsión como

$$\kappa(t) = \frac{\langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle_e}{s'(t)} = -\frac{\langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{t}(t) \rangle_e}{s'(t)} \quad \text{y} \quad \tau(t) = -\frac{\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{b}'(t) \rangle_e}{s'(t)} = \frac{\langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle_e}{s'(t)}.$$

Podemos resumir las definiciones de curvatura y torsión y la ecuación (3.2) en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' & \mathbf{n}' & \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -s'\kappa & 0 \\ s'\kappa & 0 & -s'\tau \\ 0 & s'\tau & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

En el espacio euclidiano, el marco de Frenet es una base ortonormal orientada positivamente, con $\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times_e \mathbf{n}(t)$, pero en el espacio de Minkowski aparecen algunos problemas, como los siguientes:

- a) Si la curva $\gamma(t)$ es tipo luz, $\mathbf{t}(t)$ es un vector tipo luz y, por lo tanto, $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ no es una base ortonormal. En esta situación, usaremos el concepto de *marco nulo*.
- b) Si suponemos que $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 , el vector binormal $\mathbf{b}(t)$ siempre se definirá como $\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t)$. Pero sucede que la base $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ no necesariamente está orientada positivamente, como por ejemplo cuando $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$ son ambos vectores tipo espacio (véase el caso 2.1 más abajo).
- c) Sería deseable que cuando $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ sea una base ortonormal, esta base esté dirigida hacia el futuro, es decir, que el tercer vector de la base ordenada esté dirigido hacia el futuro. Sin embargo, esto no se puede asegurar *a priori*. Incluso en el caso de que $\gamma(t)$ sea una curva tipo tiempo, ya que $\mathbf{t}(t)$ podría no estar dirigido hacia el futuro, es decir $\mathbf{t}(t) \notin \mathfrak{T}^+$.

Por estas razones, tenemos que distinguir por lo menos tres casos de curvas en el espacio de Minkowski, dependiendo de la naturaleza causal de $\mathbf{t}(t)$.

Caso 1. Curvas tipo tiempo

Como $\mathbf{t}(t) \neq \mathbf{0}$ es un vector tipo tiempo, de la proposición 1.2 (d) se sigue que $\mathbf{t}'(t) \perp \mathbf{t}(t)$ es un vector tipo espacio, y en consecuencia, es linealmente independiente de $\mathbf{t}(t)$. Definimos la *curvatura* de $\gamma(t)$ como

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{s'(t)}.$$

El vector normal $\mathbf{n}(t)$ se define por

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{t}'(t)}{s'(t)\kappa(t)},$$

de donde se sigue $\mathbf{t}'(t) = s'(t)\kappa(t)\mathbf{n}(t)$, y podemos reescribir la curvatura como

$$\kappa(t) = \epsilon_n \frac{\langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle}{s'(t)} = \frac{\langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle}{s'(t)}.$$

Definimos el vector binormal $\mathbf{b}(t)$ como

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t),$$

de modo que $\mathbf{b}(t)$ es unitario y tipo espacio. La base $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ está orientada positivamente porque

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)) &= \langle \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t) \rangle \\ &= \langle \mathbf{b}(t), \mathbf{b}(t) \rangle \\ &= 1 > 0. \end{aligned}$$

Definimos la torsión $\tau(t)$ de $\gamma(t)$ como

$$\tau(t) = \frac{\langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle}{s'(t)}.$$

Derivando cada una de las funciones vectoriales del triedro de Frenet como en el caso euclidiano, y escribiendo en coordenadas de la misma base de Frenet, obtenemos que las ecuaciones de Frenet son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' & \mathbf{n}' & \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s'\kappa & 0 \\ s'\kappa & 0 & -s'\tau \\ 0 & s'\tau & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Caso 2. Curvas tipo espacio

Dado que $\mathbf{t}'(t)$ y $\mathbf{t}(t)$ son ortogonales entre sí y $\mathbf{t}(t) \neq \mathbf{0}$ es tipo espacio, entonces $\mathbf{t}'(t)$ está en un plano tipo tiempo ortogonal a $\mathbf{t}(t)$, según la proposición 1.2 (g), (d). De manera que $\mathbf{t}'(t)$ puede ser o tipo espacio, o tipo tiempo o tipo luz y, por tanto, tenemos que analizar los tres casos por separado.

Caso 2.1. El vector $\mathbf{t}'(t)$ es tipo espacio para todo t . En este caso definimos la curvatura, el vector normal y el vector binormal como

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{s'(t)}, \quad \mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{t}'(t)}{s'(t)\kappa(t)} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t),$$

respectivamente. Aquí $\mathbf{b}(t)$ es un vector unitario tipo tiempo y la base $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ está orientada negativamente porque

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)) &= \langle \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t) \rangle \\ &= \langle \mathbf{b}(t), \mathbf{b}(t) \rangle \\ &= -1 < 0. \end{aligned}$$

La torsión de $\gamma(t)$ se define como

$$\tau(t) = -\frac{\langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle}{s'(t)},$$

y las ecuaciones de Frenet son

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' & \mathbf{n}' & \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -s'\kappa & 0 \\ s'\kappa & 0 & s'\tau \\ 0 & s'\tau & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Caso 2.2. Si el vector $\mathbf{t}'(t)$ es tipo tiempo para todo t , definimos la curvatura como

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{s'(t)} = \frac{1}{s'(t)} \sqrt{|\langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{t}'(t) \rangle|}.$$

También definimos el vector normal y el vector binormal como

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{t}'(t)}{s'(t)\kappa(t)} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t),$$

respectivamente. Aquí $\mathbf{b}(t)$ es un vector tipo espacio y la base $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ está orientada positivamente, como en el caso de las curvas tipo tiempo.

La torsión se define como

$$\tau(t) = \frac{\langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle}{s'(t)},$$

y entonces las ecuaciones de Frenet son

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' & \mathbf{n}' & \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s'\kappa & 0 \\ s'\kappa & 0 & s'\tau \\ 0 & s'\tau & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Caso 2.3. Si el vector $\mathbf{t}'(t)$ es tipo luz para todo t , no hay una definición de la curvatura de $\gamma(t)$ que tenga sentido, pues $\|\mathbf{t}'(t)\| = 0$. Pero definimos el vector normal como

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{t}'(t)}{s'(t)},$$

que es linealmente independiente de $\mathbf{t}(t)$. Definimos el vector binormal $\mathbf{b}(t)$ como el único vector tipo luz perpendicular a $\mathbf{t}(t)$ tal que

$$\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t) \rangle = -1.$$

Los vectores $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ no forman una base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 ya que $\mathbf{n}(t)$ y $\mathbf{b}(t)$ son tipo luz. Además, $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ es un marco nulo y *a priori* no sabemos si está orientado positivamente o no. Definimos la *función de pseudotorsión* de $\gamma(t)$ como

$$\tau(t) = -\frac{\langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle}{s'(t)}.$$

Las ecuaciones de Frenet son entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' & \mathbf{n}' & \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & s' \\ s' & s'\tau & 0 \\ 0 & 0 & -s'\tau \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Puede ocurrir que la naturaleza causal de $\mathbf{t}'(t)$ varíe en I , pero en los tres subcasos anteriores asumimos que la naturaleza causal de $\gamma''(t)$ es la misma en todo intervalo I .

Caso 3. Curvas tipo luz

En este caso tampoco podemos definir la curvatura de la curva y dado que $\mathbf{t}(t)$ es tipo luz, se tiene que $s' = \|\gamma'(t)\| = 0$. Si $s'(t) = \|\gamma''(t)\|$ es la pseudolongitud de su arco, definimos el vector normal como

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{t}'(t)}{s'(t)},$$

que es un vector unitario tipo espacio. El vector binormal $\mathbf{b}(t)$ se define como el único vector tipo luz que es ortogonal a $\mathbf{n}(t)$ y es tal que

$$\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t) \rangle = -1,$$

y por tanto, $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ también es un marco nulo de \mathbb{E}_1^3 . La pseudotorsión de $\gamma(t)$ se define como

$$\tau(t) = -\frac{\langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle}{s'(t)}.$$

Las ecuaciones de Frenet son

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' & \mathbf{n}' & \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s'\tau & 0 \\ s' & 0 & s'\tau \\ 0 & s' & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Debido a que hay diferentes posibilidades para elegir el marco de Frenet de las curvas tipo luz, hay varios conceptos donde no todos los autores coinciden, y esto hay que tenerlo en cuenta, como R. López lo señala en [Ló14, p. 59].

§3.3 Curvas de Frenet

Las curvas tipo tiempo y las curvas tipo espacio con vector normal tipo espacio o tipo tiempo se denominan *curvas de Frenet*. En este caso, las ecuaciones de Frenet se escriben de forma unificada. Si $\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{t}(t) \rangle = \epsilon_t$ y $\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{n}(t) \rangle = \epsilon_n$, donde $\epsilon_t, \epsilon_n \in \{1, -1\}$, entonces las ecuaciones de Frenet de las curvas de Frenet quedan como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' & \mathbf{n}' & \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon_t \epsilon_n s' \kappa & 0 \\ s' \kappa & 0 & \epsilon_t s' \tau \\ 0 & s' \tau & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Hay que señalar que para estas curvas, cuando $\mathbf{t}(t)$ está definido, es un vector de norma constante para todo $t \in I$, y si $\mathbf{t}(t)$ mismo es diferenciable, se tiene

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{t}(t) \rangle = 2 \langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{t}(t) \rangle = 0,$$

i. e. la derivada del vector tangente es perpendicular a $\mathbf{t}(t)$, como en el caso plano.

La curvatura $\kappa(t)$ se define implícitamente como la función tal que $\mathbf{t}'(t)$ es proporcional a $\mathbf{n}(t)$. De manera similar, la torsión $\tau(t)$ se define implícitamente como la función tal que $\mathbf{b}'(t)$ es proporcional a $\mathbf{n}(t)$ o bien como la tercera coordenada de $\mathbf{n}'(t)$ con respecto a la base de Frenet, y en consecuencia

$$\kappa(t) = \epsilon_n \frac{\langle \mathbf{t}'(t), \mathbf{n}(t) \rangle}{s'(t)} \quad \text{y} \quad \tau(t) = -\epsilon_t \epsilon_n \frac{\langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle}{s'(t)}. \quad (3.10)$$

Para curvas tipo espacio con vector normal tipo luz y curvas tipo luz con (pseudo) longitud de arco s , tenemos $\epsilon_t, \epsilon_n \in \{0, 1\}$ y $\epsilon_t \neq \epsilon_n$. Entonces, las ecuaciones de Frenet se escriben de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' & \mathbf{n}' & \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_n s' \tau & \epsilon_t s' \\ s' & \epsilon_t s' \tau & \epsilon_n s' \tau \\ 0 & \epsilon_n s' & -\epsilon_t s' \tau \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Para estas curvas la pseudotorsión se define como

$$\tau(t) = -\frac{\langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle}{s'(t)}. \quad (3.12)$$

Como se han escrito, las definiciones de curvatura y torsión de una curva espacial de Frenet no se prestan particularmente para cálculos directos cuando se da una curva específica. De manera que para obtener fórmulas para $\kappa(t)$ y $\tau(t)$ en términos

de $\gamma(t)$, vamos a analizar las derivadas de una curva de Frenet $\gamma(t)$ con respecto al marco de Frenet. Para que nuestras fórmulas tengan sentido, asumimos en el resto de esta sección que la curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ es regular y de clase C^3 .

Primero, para encontrar la curvatura de una curva de Frenet, tomamos las siguientes derivadas:

$$\gamma'(t) = s'(t)\mathbf{t}(t), \quad (3.13)$$

$$\gamma''(t) = s''(t)\mathbf{t}(t) + s'^2(t)\kappa(t)\mathbf{n}(t). \quad (3.14)$$

Tomando el producto cruz de estos dos vectores, obtenemos

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = s'^3(t)\kappa(t)\mathbf{b}(t). \quad (3.15)$$

Sin embargo, por definición de la curvatura para una curva espacial, $\kappa(t)$ es una función no negativa. Además, $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$, por lo que obtenemos

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}. \quad (3.16)$$

En segundo lugar, para obtener la función de torsión directamente de $\gamma(t)$, necesitaremos tomar la tercera derivada:

$$\begin{aligned} \gamma'''(t) &= s'''(t)\mathbf{t} + s''(t)s'(t)\kappa(t)\mathbf{n} + 2s'(t)s''(t)\kappa(t)\mathbf{n}(t) \\ &\quad + s'^2(t)\kappa'(t)\mathbf{n}(t) + s'^3(t)\kappa(t)(-\epsilon_t\epsilon_n\kappa(t)\mathbf{t}(t) + \tau(t)\mathbf{b}(t)), \end{aligned}$$

que, sin escribir la dependencia de t explícitamente, queda como

$$\gamma''' = (s''' - \epsilon_t\epsilon_n s'^3 \kappa^2)\mathbf{t} + (3s''s'\kappa + s'^2\kappa')\mathbf{n} + s'^3\kappa\tau\mathbf{b}. \quad (3.17)$$

Tomando el producto escalar de $\gamma'(t) \times \gamma''(t)$ con $\gamma'''(t)$, eliminamos todos los términos de $\gamma'''(t)$ asociados a $\mathbf{t}(t)$ y $\mathbf{n}(t)$. Se obtiene

$$\langle \gamma'(t) \times \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle = -\epsilon_t\epsilon_n s'^6(t)\kappa^2(t)\tau(t),$$

ya que $\langle \mathbf{b}(t), \mathbf{b}(t) \rangle = -\epsilon_t\epsilon_n$. De aquí y de la ecuación (3.16) se deduce una fórmula para $\tau(t)$ solo en términos de la curva $\gamma(t)$:

$$\tau(t) = -\epsilon_t\epsilon_n \frac{\langle \gamma'(t) \times \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}. \quad (3.18)$$

Cuando una curva de Frenet $\gamma(t)$ está parametrizada por la longitud de arco, en todas las fórmulas anteriores se tiene que $s' = 1$ y $s'' = 0$ como funciones. La ecuación (3.14) nos da $\gamma''(t) = \kappa(t)\mathbf{n}(t)$. Por tanto, la función de curvatura es

$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|,$$

y, en cualquier punto donde $\kappa(s) \neq 0$, la función de torsión es

$$\tau(s) = -\epsilon_t\epsilon_n \frac{\langle \gamma'(s) \times \gamma''(s), \gamma'''(s) \rangle}{\|\gamma''(s)\|^2}.$$

La siguiente proposición se sigue de un cálculo directo sencillo que omitimos.

Proposición 3.3. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva de Frenet parametrizada y sea $\tilde{\gamma} = \gamma \circ f$ una reparametrización regular de γ . Entonces

- a) La función de curvatura κ no cambia bajo una reparametrización regular, es decir, que $\tilde{\kappa}(u) = \kappa(f(u))$.
- b) La función de torsión τ no cambia bajo una reparametrización de orientación positiva y se convierte en $-\tau$ bajo una reparametrización de orientación negativa.

Como en el espacio euclidiano, para las curvas de Frenet la curvatura es una función que mide cómo de lejos está una curva de ser recta y la torsión mide cómo de lejos está una curva de ser plana.

Proposición 3.4. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva de Frenet regular, parametrizada por la longitud de su arco.

- a) Si $\gamma(t)$ es de clase C^2 , entonces $\gamma(t)$ es un segmento de recta si y solo si la curvatura $\kappa(t)$ es idénticamente 0.
- b) Si $\gamma(t)$ es de clase C^3 , entonces $\gamma(t)$ yace en un plano afín si y solo si la torsión se anula.

Los dos resultados anteriores se demuestran igual que en el caso euclidiano (cf. [BL16,dC17,Kü15]) y las podemos omitir. Sin embargo, hay más curvas a considerar.

Proposición 3.5. a) Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva tipo espacio con vector normal tipo luz o una curva tipo luz. Si la pseudotorsión τ es cero, la curva yace en un plano.
b) Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ es una curva plana tipo luz, entonces es una línea recta.

Prueba. Para demostrar la parte (a) supongamos primero que $\gamma(t)$ es una curva tipo espacio con vector normal tipo luz. Si la pseudotorsión se anula,

$$\tau = -\frac{\langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle}{s'(t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}'(t) = 0,$$

porque $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ por ser tipo luz. En consecuencia, $\mathbf{n}(t) = \mathbf{v}$ es un vector constante para todo t . Sea $t_0 \in I$ y consideremos la siguiente función:

$$f(t) = \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), \mathbf{v} \rangle.$$

Tenemos que $f(t_0) = 0$ y la derivada es

$$f'(t) = \langle \gamma'(t), \mathbf{v} \rangle = s'(t) \langle \mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Entonces, $f(t)$ es una función constante, y de hecho

$$f(t) = \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Esto prueba que la curva $\gamma(t)$ yace en el plano perpendicular al vector normal $\mathbf{n}(t) = \mathbf{v}$ que pasa por $\gamma(t_0)$.

Si la curva $\gamma(t)$ es tipo luz, la demostración es análoga al caso anterior.

Para demostrar la parte (b), supongamos que $\gamma(t)$ es una curva tipo luz contenida en un plano P . Como la curva es tipo luz, el plano P es tipo tiempo o tipo luz. Si el plano P es tipo tiempo, hay solo dos direcciones tipo luz. Entonces $\mathbf{t}(t) = \gamma'(t)$ es proporcional a alguna de estas direcciones. Si el plano P es tipo luz, hay solo una dirección tipo luz, y $\mathbf{t}(t) = \gamma'(t)$ es proporcional a esta dirección. En cualquier caso, $\gamma(t)$ es una línea recta. Q. E. D.

El recíproco de la proposición 3.5 (a) es falso para las curvas tipo espacio con vector normal tipo luz. Es decir, hay curvas planas tipo espacio con vector normal tipo luz y pseudotorsión distinta de cero.

Por ejemplo, la curva $\gamma(s) = \left(s, \frac{s^3}{3}, \frac{s^3}{3}\right)$, con $s > 0$, que está contenida en el plano $y - z = 0$. Aquí tenemos

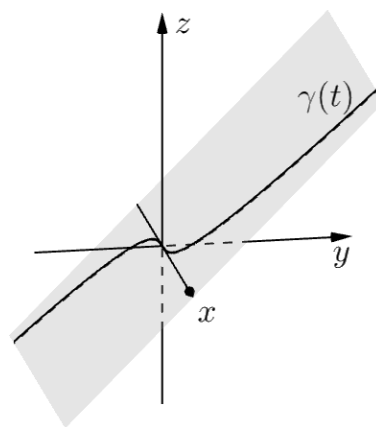
$$\mathbf{t}(s) = (1, s^2, s^2) \quad \text{y} \quad \mathbf{n}(s) = \mathbf{t}'(s) = (0, 2s, 2s),$$

de donde se sigue que

$$\mathbf{n}'(s) = (0, 2, 2) \quad \text{y} \quad \mathbf{b}(s) = \left(\frac{s}{2}, \frac{s^4 - 1}{4s}, \frac{s^4 + 1}{4s}\right).$$

Entonces, la pseudotorsión es

$$\tau(s) = -\langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \frac{1}{s} \neq 0.$$



De manera similar al caso de las curvas planas, definimos la *evoluta* de una curva espacial $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ de Frenet como la curva

$$\xi(t) = \gamma(t) + \frac{\epsilon_n}{\kappa(t)} \mathbf{n}(t),$$

y definimos la *evolvente* o *involuta* de γ como cualquier curva parametrizada de la forma

$$\iota(t) = \gamma(t) + \epsilon_t(c - s(t))\mathbf{t}(t).$$

§3.4 Plano osculador y esfera osculatriz

En esta sección vamos a considerar solamente curvas espaciales de Frenet en el espacio de Minkowski. Al igual que con las curvas planas, si $\gamma(t)$ es una curva espacial de Frenet, regular, de clase C^2 , se puede hablar del círculo osculador de $\gamma(t)$ en un punto $t = t_0$. Recordemos que el círculo osculador de una curva en un punto es un círculo de Lorentz con contacto de orden 2 en ese punto (cf. ejemplo 3.3). Siguiendo la proposición 2.3, encontramos que en cualquier punto $t = t_0$, donde $\kappa(t_0) \neq 0$, el círculo osculador existe y una fórmula paramétrica para él es

$$\alpha(t) = \gamma(t_0) + \frac{\epsilon_n}{\kappa(t_0)} \mathbf{n}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} (\sinh t \cdot \mathbf{t}(t_0) + \cosh t \cdot \mathbf{n}(t_0)). \quad (3.19)$$

Incluso sin referencia a los círculos osculadores, dada cualquier curva paramétrica de Frenet $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, la aproximación de Taylor de segundo orden de γ en $t = t_0$ es una curva plana con contacto de orden 2. Si $\mathbf{t}'(t_0) \neq 0$, esta aproximación \mathbf{f} de segundo orden es

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\gamma''(t_0) \\ &= \gamma(t_0) + \left(s'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}s''(t_0)(t - t_0)^2\right) \mathbf{t}(t_0) + \frac{1}{2}s'^2(t_0)\kappa(t_0)(t - t_0)^2\mathbf{n}(t_0). \end{aligned}$$

La función vectorial \mathbf{f} es una curva plana que se encuentra en el plano que pasa por el punto $\gamma(t_0)$ y tiene a $\mathbf{t}(t_0)$ y $\mathbf{n}(t_0)$ como vectores de dirección. (Si $\kappa(t_0) = 0$, entonces $\mathbf{n}(t_0)$ estrictamente no está definido y es posible que ni siquiera esté definido extendiendo por continuidad. En este caso, la aproximación de segundo orden \mathbf{f} de γ en t_0 se encuentra en una recta.) Esto nos conduce a la siguiente definición.

Definición 3.4. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva de Frenet parametrizada y sea $t_0 \in I$. Supongamos que γ es de clase C^2 en un intervalo abierto que contiene a t_0 y $\kappa(t_0) \neq 0$. El *plano osculador* de γ en $t = t_0$ es el plano que pasa por $\gamma(t_0)$ generado por $\mathbf{t}(t_0)$ y $\mathbf{n}(t_0)$, es decir, el plano osculador es el conjunto de puntos $\mathbf{u} \in \mathbb{E}_1^3$ tales que

$$\langle \mathbf{b}(t_0), \mathbf{u} - \gamma(t_0) \rangle = 0.$$

Notemos que de la ecuación (3.15) se tiene que $\mathbf{b}(t_0)$ es paralelo a $\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)$, por lo que el plano osculador también tiene la ecuación

$$\langle \gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0), \mathbf{u} - \gamma(t_0) \rangle = 0.$$

En la sección 2.4 introducimos la noción de orden de contacto entre dos curvas, pero también podemos hablar del orden de contacto entre una curva \mathcal{C} y una superficie Σ definiendo esta última noción como el orden de contacto entre \mathcal{C} y \mathcal{C}' , donde \mathcal{C}' es la proyección ortogonal de \mathcal{C} sobre Σ .

Proposición 3.6. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva de Frenet, parametrizada, regular, de clase C^2 . El plano osculador de γ en $t = t_0$ es el único plano en \mathbb{E}_1^3 de orden de contacto 2 o mayor. Además, si suponemos que γ es de clase C^3 , el plano osculador tiene orden de contacto 3 o mayor si y solo si $\tau(t_0) = 0$ o $\kappa(t_0) = 0$.

Prueba. Sea $a = \gamma(t_0)$ y reparametrizamos $\gamma(t)$ por la longitud de arco de modo que $s = 0$ corresponde al punto $a = \gamma(t_0)$. La distancia ortogonal $f(s)$ desde $\gamma(s)$ hasta el plano osculador \mathcal{P} está dada por

$$f(s) = | \langle \mathbf{b}(0), \gamma(s) - \gamma(0) \rangle |.$$

La aproximación de Taylor de $\gamma(s)$ hasta orden 3, entorno a $s = 0$, se puede obtener de las ecuaciones (3.13), (3.14) y (3.17) como

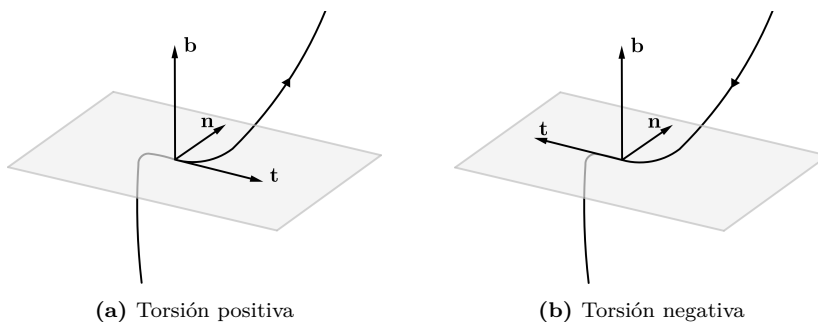
$$\gamma(s) = \gamma(0) + \left(1 - \frac{\epsilon_t \epsilon_n s^3}{6} \kappa^2(0)\right) \mathbf{t}(s) + \left(\frac{s^2}{2} \kappa(0) + \frac{s^3}{6} \kappa'(0)\right) \mathbf{n}(s) + \left(\frac{s^3}{6} \kappa(0) \tau(0)\right) \mathbf{b}(s).$$

Usando el hecho de que $\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle = 0$ y $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -\epsilon_t \epsilon_n$, tenemos

$$f(s) = \left| -\frac{1}{6} \epsilon_t \epsilon_n s^3 \kappa(0) \tau(0) + O(s^4) \right| \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s^3} = \frac{|\kappa(0) \tau(0)|}{6}.$$

En consecuencia, el plano osculador \mathcal{P} tiene orden de contacto mayor o igual que 2 y tiene orden de contacto mayor o igual que 3 si y solo si $\kappa(0) \tau(0) = 0$. Q. E. D.

Podemos interpretar el signo de la función de torsión $\tau(t)$ de una curva parametrizada de Frenet en términos de la posición de la curva con respecto a su plano osculador. De hecho, $\tau(t_0) > 0$ en $\gamma(t_0)$ cuando la curva sube a través del plano osculador (donde el vector binormal \mathbf{b} define la dirección ascendente) y $\tau(t_0) < 0$ cuando la curva desciende a través del plano osculador.

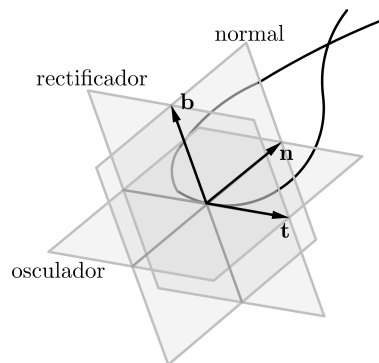


El plano osculador junto con otros dos planos forman lo que se llama el *triedro móvil*, que consta de los tres planos coordenados del marco de Frenet. El plano que pasa por $\gamma(t_0)$ generado por el vector normal $\mathbf{n}(t_0)$ y el vector binormal $\mathbf{b}(t_0)$ se llama *plano normal* y es el conjunto de puntos $\mathbf{u} \in \mathbb{E}_1^3$ que satisfacen

$$\langle \mathbf{t}(t_0), \mathbf{u} - \gamma(t_0) \rangle = 0.$$

El plano generado por el vector tangente $\mathbf{t}(t_0)$ y el binormal $\mathbf{b}(t_0)$ se llama *plano rectificador* y es el conjunto de puntos $\mathbf{u} \in \mathbb{E}^3$ que satisfacen

$$\langle \mathbf{n}(t_0), \mathbf{u} - \gamma(t_0) \rangle = 0.$$



De manera análoga al caso plano, para un escalar dado $r > 0$, podemos considerar el lugar geométrico de los puntos \mathbf{p} en el espacio de Minkowski que equidistan de un punto \mathbf{c} por una distancia fija igual a r :

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| = r \quad \text{o bien} \quad \langle \mathbf{p} - \mathbf{c}, \mathbf{p} - \mathbf{c} \rangle = \pm r^2.$$

Denotamos los conjuntos

$$\mathbb{H}^2(r, \mathbf{c}) = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{E}_1^3 : \langle \mathbf{p} - \mathbf{c}, \mathbf{p} - \mathbf{c} \rangle = -r^2 \right\},$$

y

$$\mathbb{S}^2(r, \mathbf{c}) = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{E}_1^3 : \langle \mathbf{p} - \mathbf{c}, \mathbf{p} - \mathbf{c} \rangle = r^2 \},$$

que representan un hiperboloide euclidiano de dos hojas y de una hoja respectivamente, de radio r y centrados en \mathbf{c} .

Si $\mathbf{p} = (x, y, z)$ y \mathbf{c} es el origen, el hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = -r^2$ se parametriza como

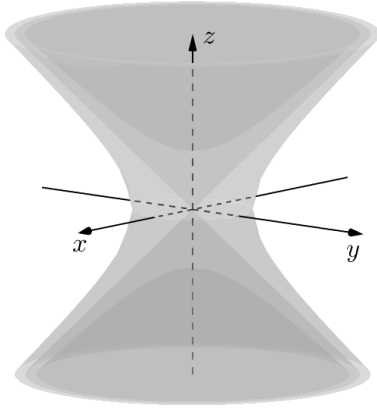
$$\mathbb{H}_0^2 = (r \cos t \sinh s, r \sin t \sinh s, r \cosh s),$$

donde $0 \leq t \leq 2\pi$ y $s \in \mathbb{R}$. A esta superficie la llamamos *plano hiperbólico* de radio $r > 0$ centrado en el origen. Cada una de las hojas del plano hiperbólico es una superficie tipo espacio (cf. [Ló14, p. 73-74]), de modo que al elegir un centro y un radio y una hoja adecuados tenemos una buena candidata para desempeñar el papel de «esfera» oscultriz para curvas tipo espacio.

El hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = r^2$ se parametriza como

$$\mathbb{S}_1^2 = (r \cos t \cosh s, r \sin t \cosh s, r \sinh s),$$

donde $0 \leq t \leq 2\pi$ y $s \in \mathbb{R}$. A esta superficie la llamamos *pseudoesfera* de radio $r > 0$ centrada en el origen. Si $r = 1$, la superficie se llama *plano de Sitter*. Esta superficie es tipo tiempo (cf. [Ló14, p. 73-74]), y en consecuencia, es una buena candidata para desempeñar el papel de «esfera» oscultriz de curvas tipo tiempo, después de elegir un centro y un radio adecuados.



Vamos a aplicar la teoría del orden de contacto de la sección 2.4 para encontrar la «esfera» oscultriz de una curva $\gamma(t)$: una pseudoesfera o un plano hiperbólico que tiene orden de contacto 3 o superior con una curva $\gamma(t)$ en t . Supongamos que la «esfera» tiene centro \mathbf{c} y radio r . Consideramos una curva de Frenet \mathcal{C} parametrizada por su longitud de arco por $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$. La distancia euclidiana $f(s)$ entre el punto $\gamma(s)$ en la curva y la «esfera» es

$$f(s) = | \|\gamma(s) - \mathbf{c}\| - r |.$$

Dado que las derivadas de la función $G(t) = \sqrt{g(t)}$ son iguales a 0 si y solo si $g'(t) = 0$, entonces las derivadas de $f(s)$ son iguales a 0 si y solo si las derivadas de

$$h(s) = \langle \gamma(s) - \mathbf{c}, \gamma(s) - \mathbf{c} \rangle$$

son iguales a 0. De aquí se siguen los siguientes resultados.

Proposición 3.7. Sea \mathcal{C} una curva de Frenet, parametrizada por la longitud de su arco por $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, regular, de clase C^3 . Sea $s_0 \in I$ un punto en la curva donde $\kappa(s_0) \neq 0$ y definimos $R(s) = 1/\kappa(s)$.

a) Si $\tau(s_0) \neq 0$, entonces en s_0 la curva admite una única «esfera» osculatriz con centro \mathbf{c} y radio r , donde

$$\mathbf{c} = \gamma(s_0) + \epsilon_t \epsilon_n R(s_0) \mathbf{n}(s_0) + \epsilon_n \frac{R'(s_0)}{\tau(s_0)} \mathbf{b}(s_0) \quad \text{y} \quad r = \sqrt{\left| R(s_0)^2 - \epsilon_t \left(\frac{R'(s_0)}{\tau(s_0)} \right)^2 \right|}.$$

b) Si $\tau(s_0) = 0$ y $\kappa'(s_0) = 0$, entonces en s_0 la curva admite como «esfera» osculatriz cualquier «esfera» con centro \mathbf{c} y radio r , donde

$$\mathbf{c} = \gamma(s_0) + \epsilon \delta R(s_0) \mathbf{n}(s_0) + \delta c_b \mathbf{b}(s_0) \quad \text{y} \quad r = \sqrt{|R(s_0)^2 - \epsilon c_b^2|}, \quad \text{con} \quad c_b \in \mathbb{R}.$$

Prueba. Para probar la parte (a), hay que observar que como la «esfera» osculatriz tiene orden de contacto 3 o superior con la curva \mathcal{C} , necesitamos que por lo menos las primeras tres derivadas de la distancia euclidiana $f(s)$ se anulen, es decir, las primeras tres derivadas de $h(s)$ se deben anular. Con esta condición, las primeras tres derivadas de $h(s)$ nos llevan a

$$\begin{aligned} h'(s) = 0 &\iff \langle \gamma(s) - \mathbf{c}, \mathbf{t}(s) \rangle = 0, \\ h''(s) = 0 &\iff \langle \gamma(s) - \mathbf{c}, \kappa(s) \mathbf{n}(s) \rangle + \epsilon_t = 0, \\ h'''(s) = 0 &\iff \langle \gamma(s) - \mathbf{c}, \kappa'(s) \mathbf{n}(s) - \epsilon_t \epsilon_n \kappa(s)^2 \mathbf{t}(s) + \kappa(s) \tau(s) \mathbf{b}(s) \rangle = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, en cualquier punto $\gamma(s_0)$ de la curva donde $\kappa(s_0) \neq 0$ y $\tau(s_0) \neq 0$, las primeras tres derivadas pueden ser iguales a 0 si tenemos

$$\langle \gamma - \mathbf{c}, \mathbf{t} \rangle = 0, \quad \langle \gamma - \mathbf{c}, \mathbf{n} \rangle = -\frac{\epsilon}{\kappa}, \quad \langle \gamma - \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\epsilon_t \kappa'}{\kappa^2 \tau}. \quad (3.20)$$

Las ecuaciones (3.20) dan una descomposición del centro \mathbf{c} de la «esfera» osculatriz de la curva de Frenet $\gamma(s)$ en el punto $s = s_0$. Si aislamos \mathbf{c} , encontramos

$$\mathbf{c} = \gamma(s_0) + \epsilon_t \epsilon_n R(s_0) \mathbf{n}(s_0) + \epsilon_n \frac{R'(s_0)}{\tau(s_0)} \mathbf{b}(s_0),$$

donde $R(s) = 1/\kappa(s)$. De aquí se sigue que el radio de la esfera osculatriz $r = \|\gamma(s) - \mathbf{c}\|$ es

$$r = \sqrt{\left| R(s_0)^2 - \epsilon_t \left(\frac{R'(s_0)}{\tau(s_0)} \right)^2 \right|}.$$

Para probar la parte (b), supongamos que $\tau(s_0) = 0$. Entonces $h'''(s)$ aún puede ser 0 siempre que $\kappa'(s_0) = 0$ al mismo tiempo:

$$\begin{aligned} h'''(s) = 0 &\iff \langle \gamma(s) - \mathbf{c}, \kappa'(s) \mathbf{n}(s) - \epsilon_t \epsilon_n \kappa(s)^2 \mathbf{t}(s) + \kappa(s) \tau(s) \mathbf{b}(s) \rangle = 0 \\ &\iff \kappa'(s) \langle \gamma(s) - \mathbf{c}, \mathbf{n}(s) \rangle = 0 \\ &\iff \kappa'(s) = 0. \end{aligned}$$

En este caso, la curva admite una familia uniparamétrica de «esferas» osculatrices en $\gamma(s_0)$, donde la componente \mathbf{b} del centro \mathbf{c} puede ser cualquier cosa porque el término $\kappa(s)\tau(s)\langle\gamma - \mathbf{c}, \mathbf{b}\rangle$ siempre se anula. Por tanto, el centro y el radio de la esfera osculatriz son

$$\mathbf{c} = \gamma(s_0) + \epsilon_t \epsilon_n R(s_0) \mathbf{n}(s_0) + \epsilon_n c_b \mathbf{b}(s_0) \quad \text{y} \quad r = \sqrt{|R(s_0)^2 - \epsilon_t c_b^2|},$$

donde c_b es un escalar real arbitrario.

Q. E. D.

Observamos que cada punto $\gamma(s)$ de la curva se proyecta a la «esfera» osculatriz desde \mathbf{c} si el vector $\gamma(s) - \mathbf{c}$ se normaliza y se reescala por el radio r . Por tanto, la proyección ortogonal de $\gamma(s)$ en la «esfera» osculatriz tiene por ecuación

$$\beta(s) = \frac{\gamma(s) - \mathbf{c}}{\|\gamma(s) - \mathbf{c}\|} r.$$

Mas aún, si $\tau(s)$ y $R'(s)$ nunca se anulan, la curva \mathcal{C} yace en una «esfera» si y solo si

$$\left| R(s)^2 - \epsilon_t \left(\frac{R'(s)}{\tau(s)} \right)^2 \right| = \text{const.}$$

Si \mathcal{C} es una curva de Frenet, regular, con una parametrización $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ de clase C^3 , entonces la *hélice osculatriz* de \mathcal{C} en un punto $P = \gamma(t_0)$ se define como la única hélice circular que pasa por P y tiene curvatura $\kappa(t_0)$ y torsión $\tau(t_0)$. La hélice osculatriz tiene contacto de orden 3 con \mathcal{C} en el punto P .

§3.5 Ecuaciones naturales

En la sección 2.5 mostramos que la función de curvatura (en términos de la longitud del arco) determina de manera unívoca una curva regular, salvo su ubicación y orientación en \mathbb{E}_1^2 . Para las curvas espaciales de Frenet, se debe introducir la función de torsión para medir cuánto se desvía la curva de ser plana, y la ecuación (3.17) muestra cómo aparece la función de torsión como una componente de γ''' en el marco de Frenet. Ya que sabemos cómo cambian $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ y $\mathbf{b}(t)$ con respecto a t , podemos expresar todas las derivadas superiores $\gamma^{(n)}(t)$ de $\gamma(t)$ en el marco de Frenet en términos de $s(t)$, $\kappa(t)$, $\tau(t)$ y sus derivadas. Esto nos lleva a suponer que una curva está determinada, hasta cierto punto, únicamente por sus funciones de curvatura y (pseudo) torsión.

Teorema 3.1. Para una curva de Frenet, la curvatura es invariante bajo un movimiento rígido y la torsión es invariante, salvo un signo, dependiendo de si el movimiento es positivo o negativo. En caso de que la curva sea tipo espacio con vector normal tipo luz o que sea tipo luz, entonces la pseudotorsión es invariante bajo movimientos rígidos.

Prueba. Sea $M\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{u}$ un movimiento rígido con $A \in O_1(3)$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{E}_1^3$. Consideremos la curva

$$\tilde{\gamma}(t) = M \circ \gamma(t) = A\gamma(t) + \mathbf{u}.$$

Supongamos primero que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ es una curva de Frenet. Entonces $\tilde{\gamma}(t) = A\gamma(t) + \mathbf{u}$ también es una curva de Frenet y la relación entre los marcos de Frenet de $\gamma(t)$ y $\tilde{\gamma}(t)$ es

$$\tilde{\mathbf{t}}(t) = A\mathbf{t}(t), \quad \tilde{\mathbf{n}}(t) = A\mathbf{n}(t), \quad \tilde{\mathbf{b}}(t) = \pm A\mathbf{b}(t),$$

dependiendo del signo de $\det A$, según la proposición 1.11. De aquí se sigue directamente que $\tilde{\kappa}(t) = \kappa(t)$ y $\tilde{\tau}(t) = \pm\tau(t)$.

Supongamos ahora que $\gamma(t)$ es una curva tipo espacio con vector normal tipo luz. Entonces tenemos $\tilde{\mathbf{t}}(t) = A\mathbf{t}(t)$ y el vector $\tilde{\mathbf{t}}'(t) = A\mathbf{t}'(t)$ es tipo luz. Luego,

$$\tilde{\mathbf{n}}(t) = \frac{\tilde{\mathbf{t}}'(t)}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|} = \frac{A\mathbf{t}'(t)}{\|A\gamma'(t)\|} = \frac{A\mathbf{t}'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = A\mathbf{n}(t).$$

Como $\mathbf{b}(t)$ es tipo luz y $\mathbf{b}(t) \perp \mathbf{t}(t)$, entonces $A\mathbf{b}(t)$ es tipo luz y $A\mathbf{b}(t) \perp \tilde{\mathbf{t}}(t)$. Tenemos

$$\langle A\mathbf{b}(t), \tilde{\mathbf{n}}(t) \rangle = \langle A\mathbf{b}(t), A\mathbf{n}(t) \rangle = \langle \mathbf{b}(t), \mathbf{n}(t) \rangle = -1.$$

Por lo tanto, $\tilde{\mathbf{b}}(t) = A\mathbf{b}(t)$ y de aquí se sigue que

$$\tilde{\tau}(t) = -\frac{\langle \tilde{\mathbf{n}}'(t), \tilde{\mathbf{b}}(t) \rangle}{\|\tilde{\gamma}'(t)\|} = -\frac{\langle A\mathbf{n}'(t), A\mathbf{b}(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|} = -\frac{\langle \mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t) \rangle}{s'(t)} = \tau(t).$$

Supongamos ahora que $\gamma(t)$ es tipo luz. Entonces $\tilde{\gamma}(t)$ también es tipo luz. Y de nuevo tenemos que

$$\tilde{\mathbf{t}}(t) = A\mathbf{t}(t), \quad \tilde{\mathbf{n}}(t) = A\mathbf{n}(t), \quad \tilde{\mathbf{b}}(t) = A\mathbf{b}(t),$$

lo cual implica que $\tilde{\tau}(t) = \tau(t)$.

Q. E. D.

En el espacio euclidiano, el teorema de existencia y unicidad afirma que dadas dos funciones $\kappa > 0$ y τ , existe una única curva, salvo un movimiento rígido, con curvatura κ y torsión τ . En el espacio de Minkowski, el resultado de la existencia es el mismo pero la unicidad no se tiene debido al carácter causal de la curva. Por ejemplo, las curvas

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) \quad \text{y} \quad \beta(t) = (0, \cosh(s), \sinh(s))$$

tienen $\kappa = 1$ y $\tau = 0$. Sin embargo, no hay un movimiento rígido que lleve $\gamma(t)$ a $\beta(t)$ porque $\gamma(t)$ es tipo espacio y $\beta(t)$ es tipo tiempo. Incluso si ambas curvas tuvieran la misma naturaleza causal, debemos tener en consideración la naturaleza causal de los otros dos vectores del triedro de Frenet. Por ejemplo, la curva

$$\alpha(t) = (0, \sinh(s), \cosh(t))$$

también tiene $\kappa = 1$ y $\tau = 0$, pero no hay un movimiento rígido de $\gamma(t)$ a $\alpha(t)$. Observemos que $\gamma(t)$ y $\alpha(t)$ son tipo espacio pero $\mathbf{n}_\gamma(t)$ es tipo espacio y $\mathbf{n}_\alpha(t)$ es tipo tiempo. Cuando no existe un movimiento rígido que lleve una curva en otra, conservando la naturaleza causal de los triedros de Frenet, consideramos que las curvas son diferentes. Entonces, en el espacio de Minkowski las condiciones iniciales impondrán la naturaleza causal de la curva y, en consecuencia, el análisis se tiene que hacer para los diferentes casos. Primero consideramos las curvas de Frenet.

Teorema 3.2. Dadas las funciones $\kappa(s) \geq 0$ y $\tau(s)$ continuamente diferenciables en algún intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$ que contiene a 0, existen un intervalo abierto I que contiene a 0 y tres curvas regulares distintas $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, parametrizadas por la longitud de arco, con función de curvatura $\kappa(s)$ y función de torsión $\tau(s)$.

Prueba. Sea $s_0 \in J$ y sea $B = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ una base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 . Las diferentes curvas se obtienen según la naturaleza causal de los vectores de la base.

Caso 1. Supongamos que $\bar{\mathbf{e}}_1$ es un vector tipo tiempo y que la base B está orientada positivamente. Entonces, tenemos que resolver el sistema (3.4) de 9 ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) = \kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $\mathbf{t}(0) = \bar{\mathbf{e}}_1$, $\mathbf{n}(0) = \bar{\mathbf{e}}_2$ y $\mathbf{b}(0) = \bar{\mathbf{e}}_3$.

Con las condiciones establecidas para $\kappa(s)$ y $\tau(s)$, y de acuerdo con el teorema de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden (cf. [Arn92, §31.8]), existe una única solución para el sistema anterior definida para s en una vecindad I de 0. Sea $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ la solución del sistema y para $s_0 = 0$ definimos la curva

$$\gamma_1(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(u) du. \quad (3.21)$$

Hay que mostrar que $\gamma_1(s)$ es una curva tipo tiempo con función de curvatura $\kappa(s)$ y función de torsión $\tau(s)$. Primero veamos que la solución $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal con la misma naturaleza causal que la base $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$, respectivamente. Para esto, consideremos el siguiente sistema de 6 ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 2\kappa(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 2\kappa(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle + 2\tau(s) \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -2\kappa(s) \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \kappa(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \kappa(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle + \tau(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \kappa(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle - \tau(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \kappa(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle + \tau(s) \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle - \tau(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \end{cases}$$

con condiciones iniciales en $s_0 = 0$ dadas por $(-1, 1, 1, 0, 0, 0)$, respectivamente. Por otra parte, notemos que las funciones constantes

$$f_1 = -1, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = 1, \quad f_4 = 0, \quad f_5 = 0, \quad f_6 = 0,$$

satisfacen trivialmente las mismas ecuaciones diferenciales ordinarias del sistema. Así, la unicidad de las soluciones nos lleva a concluir que

$$\begin{aligned} -\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle &= \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 1, \\ \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle &= \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{E}_1^3 , con $\mathbf{t}(s)$ tipo tiempo. Derivando la ecuación (3.21) obtenemos $\gamma_1'(s) = \mathbf{t}(s)$, es decir, $\gamma_1(s)$ es una curva tipo tiempo parametrizada por su longitud de arco. Si continuamos derivando para obtener el vector normal y el vector binormal y sus derivadas, encontramos precisamente que la curvatura de $\gamma_1(s)$ es $\kappa(s)$ y la torsión es $\tau(s)$.

Podemos decir un poco más sobre la curva tipo tiempo $\gamma_1(s)$. Si el vector $\bar{\mathbf{e}}_1$ está dirigido hacia el futuro, entonces $\gamma_1(s)$ también está dirigida hacia el futuro. Pues dado que $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ son vectores unitarios, se tiene

$$\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{e}_3 \rangle \geq 1 \quad \text{o} \quad \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{e}_3 \rangle \leq -1$$

para todo $s \in I$. Pero como la base B está orientada positivamente,

$$\langle \mathbf{t}(0), \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \bar{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_3 \rangle \leq -1,$$

y lo mismo pasa para todo $s \in I$, por conexidad.

Caso 2. Supongamos que $\bar{\mathbf{e}}_3$ es un vector tipo tiempo y que la base $B = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ está orientada negativamente. Entonces tenemos que resolver las ecuaciones (3.5) con condiciones iniciales $\mathbf{t}(s_0) = \bar{\mathbf{e}}_1$, $\mathbf{n}(s_0) = \bar{\mathbf{e}}_2$ y $\mathbf{b}(s_0) = \bar{\mathbf{e}}_3$. De manera análoga al caso 1, obtenemos una curva tipo espacio, con vector normal tipo espacio,

$$\gamma_2(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(u) du, \tag{3.22}$$

y con función de curvatura $\kappa(s)$ y función de torsión $\tau(s)$.

Caso 3. Supongamos que $\bar{\mathbf{e}}_2$ es un vector tipo tiempo y que la base $B = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ está orientada positivamente. Entonces tenemos que resolver las ecuaciones (3.6) con condiciones iniciales $\mathbf{t}(s_0) = \bar{\mathbf{e}}_1$, $\mathbf{n}(s_0) = \bar{\mathbf{e}}_2$ y $\mathbf{b}(s_0) = \bar{\mathbf{e}}_3$. Del mismo modo que en los casos anteriores, obtenemos una curva tipo espacio, con vector normal tipo tiempo,

$$\gamma_3(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(u) du, \tag{3.23}$$

y con función de curvatura $\kappa(s)$ y función de torsión $\tau(s)$.

Q. E. D.

Ahora analizamos los dos casos restantes. Demostramos la existencia de una curva tipo espacio con vector normal tipo luz o una curva tipo luz. Sea $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y busquemos curvas con la naturaleza causal mencionada y con pseudotorsión τ . La situación es similar a las curvas de Frenet y la solución también depende de las condiciones iniciales.

Teorema 3.3. Dada una función $\tau(s) : I \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable en algún intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$ que contiene a 0, existen un intervalo abierto I que contiene a 0 y una curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ tipo luz o tipo espacio con vector normal tipo luz, parametrizada por la pseudolongitud de su arco y con función de pseudotorsión $\tau(s)$.

Prueba. Sea $s_0 \in J$ y sea $B = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ una base nula de \mathbb{E}_1^3 . Las diferentes curvas se obtienen según la naturaleza causal de los vectores de la base.

Caso 1. Supongamos que $\bar{\mathbf{e}}_1$ es un vector tipo espacio. Entonces, tenemos que resolver el sistema (3.7) de 9 ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $\mathbf{t}(0) = \bar{\mathbf{e}}_1$, $\mathbf{n}(0) = \bar{\mathbf{e}}_2$ y $\mathbf{b}(0) = \bar{\mathbf{e}}_3$. Con las condiciones establecidas para $\kappa(s)$ y $\tau(s)$, y de acuerdo con el teorema de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, existe una única solución para el sistema anterior definida para s en una vecindad I de 0. Sea $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ la solución del sistema y para $s_0 = 0$ definimos la curva

$$\gamma_1(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(u) du. \quad (3.24)$$

Vamos a mostrar que γ_1 es una curva tipo espacio con vector normal tipo luz y con función de pseudotorsión $\tau(s)$. Primero veamos que la solución $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base nula con la misma naturaleza causal que la base nula $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$, respectivamente. Para esto, consideremos el siguiente sistema de 6 ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 2 \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 2\tau \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 2 \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle - 2\tau(s) \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \tau \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle - \tau(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \end{cases}$$

con condiciones iniciales en $s_0 = 0$ dadas por $(1, 0, 0, 0, 0, -1)$, respectivamente.

Como las funciones

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 0, \quad f_5 = 0, \quad f_6 = -1,$$

satisfacen trivialmente las mismas ecuaciones diferenciales ordinarias del sistema, la unicidad de las soluciones nos lleva a concluir que

$$\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = - \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 1,$$

$$\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0.$$

Por tanto, $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base nula con $\mathbf{t}(s)$ tipo espacio. Derivando la ecuación (3.24) obtenemos $\gamma_1'(s) = \mathbf{t}(s)$: $\gamma_1(s)$ es una curva tipo espacio, parametrizada por la pseudolongitud de su arco, con vector normal tipo luz y pseudotorsión $\tau(s)$.

Caso 2. Supongamos que $\bar{\mathbf{e}}_2$ es un vector tipo espacio. Entonces tenemos que resolver las ecuaciones (3.8) con condiciones iniciales $\mathbf{t}(s_0) = \bar{\mathbf{e}}_1$, $\mathbf{n}(s_0) = \bar{\mathbf{e}}_2$ y $\mathbf{b}(s_0) = \bar{\mathbf{e}}_3$. De manera análoga al caso 1, obtenemos una curva tipo luz,

$$\gamma_2(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(u) du, \quad (3.25)$$

parametrizada por la pseudolongitud de su arco, con pseudotorsión $\tau(s)$. Q. E. D.

Una vez que hemos establecido la existencia, la unicidad no se mantiene como hemos señalado anteriormente, pero se mantiene si el carácter causal del marco de Frenet concuerda para ambas curvas. Es decir, si $\gamma, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ son dos curvas parametrizadas por la (pseudo) longitud del arco, las curvas tienen marcos de Frenet de la misma naturaleza causal si $(\mathbf{t}_\gamma, \mathbf{n}_\gamma, \mathbf{b}_\gamma)$ y $(\mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_\beta, \mathbf{b}_\beta)$ tienen la misma naturaleza causal, respectivamente.

Teorema 3.4 (Teorema fundamental de las curvas espaciales). Sean $\gamma, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ dos curvas regulares, que tienen marcos de Frenet de la misma naturaleza causal, con función de curvatura $\kappa(s)$ y función de (pseudo) torsión $\tau(s)$, según el caso. Entonces existe un movimiento rígido M de \mathbb{E}_1^3 que mapea una curva en otra, es decir $\beta = M \circ \gamma$.

Prueba. Sea $s_0 \in I$ y consideremos una isometría $A \in O_1(3)$ tal que

$$A\mathbf{t}_\gamma(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \quad A\mathbf{n}_\gamma(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0), \quad A\mathbf{b}_\gamma(s_0) = \mathbf{b}_\beta(s_0). \quad (3.26)$$

Si $\mathbf{u} = \beta(s_0) - A\gamma$, consideramos el movimiento rígido $M\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{u}$. El teorema 3.1 nos dice que la curva $\tilde{\gamma} = M \circ \gamma$ satisface las mismas ecuaciones diferenciales (3.26) del marco de Frenet de β . Como las condiciones iniciales son las mismas para ambas curvas, entonces la unicidad de la solución nos dice que $\beta = \tilde{\gamma}$. Por lo tanto, concluimos que $\beta = M \circ \gamma$. Q. E. D.

El par de funciones $\kappa(s)$ y $\tau(s)$, donde $\kappa(s)$ es una función no negativa, se denominan *ecuaciones naturales* de una curva porque definen la curva de forma única salvo un movimiento rígido en el espacio de Minkowski.

Al igual que en la sección 2.5, la demostración del teorema 3.4 proporciona un algoritmo computacional para reconstruir una curva espacial a partir de sus funciones de curvatura $\kappa(s)$ y (pseudo) torsión $\tau(s)$, según el caso.

CAPÍTULO 4

MISCELÁNEA DE VARIOS RESULTADOS DE CURVAS

En este capítulo incluimos varios resultados diversos que no tienen un lugar natural en los capítulos anteriores, pero que son interesantes por sí mismos. Se trata de resultados que tienen que ver con las hélices, con las curvas de Bertrand, y con las propiedades globales tanto de las curvas planas como de las curvas espaciales. Por último, establecemos el teorema fundamental de las curvas en el espacio de Minkowski n -dimensional.

§4.1 Hélices

En el espacio euclidiano \mathbb{E}^3 , una hélice es una curva cuyas rectas tangentes forman un ángulo constante con una dirección fija. Esta dirección se llama *eje* de la hélice. Un resultado clásico debido a Lancret muestra que una curva es una hélice si y solo si la razón τ/κ es una función constante. Un ejemplo trivial de esto son las curvas planas, es decir, todas las curvas planas son hélices. Una hélice con curvatura κ y torsión τ constantes se llama *hélice circular*, y es una curva que se enrolla entorno a un cilindro circular.

Queremos extender esta noción de hélice para curvas $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ en el espacio de Lorentz-Minkowski. El problema aparece cuando hablamos del ángulo entre dos vectores, porque el ángulo no necesariamente está definido para todo par de vectores de una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$. Este es el caso si, por ejemplo, la curva es tipo luz. En otros casos también pueden ocurrir problemas cuando el eje es tipo tiempo (tipo espacio) y la curva es tipo espacio (tipo tiempo). Incluso en el caso cuando el eje y la curva son tipo tiempo, las direcciones del eje y el vector tangente pueden no estar en el mismo cono de tiempo. Por estas razones, siguiendo a R. López [Ló14], ampliamos la noción de hélice en el espacio de Lorentz-Minkowski como sigue.

Definición 4.1. Una curva parametrizada, regular, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, es una *hélice general* si existe un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{E}_1^3 - \{\mathbf{0}\}$ tal que la función $\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{v} \rangle$ es constante. Cualquier recta paralela a esta dirección \mathbf{v} se llama *eje* de la hélice.

Definición 4.2. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva parametrizada, regular, y sea $\mathbf{t}(t)$ su vector tangente en cada punto t . Si el vector tangente $\mathbf{t}(t)$ es unitario y lo colocamos en el origen, este describe una curva $\mathbf{t} : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ que llamamos *indicatriz tangente* de γ .

Si la indicatriz tangente de una hélice general γ es $\mathbf{t}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ y un eje de la hélice es $\mathbf{v} = (a, b, -c)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces tenemos

$$\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{v} \rangle = ax'(t) + by'(t) + cz'(t) = \text{const.},$$

es decir, la indicatriz tangente yace en un plano bidimensional. Si la hélice es tipo espacio o tipo tiempo, es decir, si el vector tangente unitario $\mathbf{t}(t)$ es tipo espacio o tipo tiempo para todo t , entonces la indicatriz tangente yace en la pseudoesfera (hiperboloide de una hoja) o en el espacio hiperbólico (hiperboloide de dos hojas) de radio uno, respectivamente. En otras palabras, la indicatriz tangente de una hélice no nula yace en una sección plana de un hiperboloide unitario de una hoja o de dos hojas, dependiendo de su naturaleza causal. Esto caracteriza las hélices generales en el espacio de Minkowski.

Definición 4.3. Una hélice general es *no degenerada* si su eje es no nulo (tipo espacio o tipo tiempo). Y es *degenerada* si su eje es tipo luz o nulo.

Es claro que una línea recta y una curva plana son hélices con respecto a cualquier vector ortogonal al plano que la contiene. En lo que sigue descartamos ambas situaciones por ser casos poco interesantes. Nuestro primer resultado es un teorema tipo Lancret para curvas de Frenet.

Teorema 4.1 (Lancret). Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva de Frenet. Entonces γ es una hélice si y solo si el cociente τ/κ es una función constante.

La prueba de este resultado es análoga a la del caso euclidiano (cf. [BL16, dC17, Kü15]), de manera que podemos omitirla y vamos a analizar lo que sucede en los demás casos, para curvas que no son de Frenet.

Teorema 4.2. a) Toda curva tipo espacio con vector normal tipo luz es una hélice. b) Una curva tipo luz es una hélice si y solo si su pseudotorsión es constante.

Prueba. La prueba sigue los pasos de la prueba euclidiana. Para probar la parte (a), sea γ una curva tipo espacio con vector normal \mathbf{n} tipo luz. Buscamos un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y una constante a tales que $\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{v} \rangle = a$. Al derivar $\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{v} \rangle$ obtenemos $\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{v} \rangle = 0$. Dado que $\mathbf{n}(t)$ es tipo luz y $\mathbf{t}(t)$ es tipo espacio, existe una función $b(t)$ tal que $\mathbf{v} = a\mathbf{t}(t) + b(t)\mathbf{n}(t)$. Derivando de nuevo y usando las ecuaciones de Frenet (3.7), tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= a\mathbf{t}'(t) + b'(t)\mathbf{n}(t) + b(t)\mathbf{n}'(t) \\ \Rightarrow \mathbf{0} &= (as' + b'(t) + b(t)s'\tau(t))\mathbf{n} \\ \Rightarrow as' + b'(t) + b(t)s'\tau(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

La ecuación (4.1) nos dice que cualquier curva tipo espacio con vector normal tipo luz es una hélice, porque siempre existe el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{t}(t) + b(t)\mathbf{n}(t)$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $b(t)$ satisfacen la ecuación diferencial ordinaria (4.1). Hay que subrayar que las

ecuaciones de Frenet implican que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ es un vector fijo porque $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$. Por tanto, γ es una hélice.

Para probar la parte (b), sea γ una curva tipo luz y supongamos que es una hélice. Entonces existen un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y una constante a tales que $\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{v} \rangle = a$. Al derivar $\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{v} \rangle$, obtenemos $\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{v} \rangle = 0$. Como $\mathbf{t}(t)$ es tipo luz, existe una función $b(t)$ tal que $\mathbf{v} = b(t)\mathbf{t}(t) - a\mathbf{b}(t)$. Derivando de nuevo, y usando las ecuaciones de Frenet (3.8), se sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= b'(t)\mathbf{t}(t) + b(t)\mathbf{t}'(t) - a\mathbf{b}'(t) \\ &\Rightarrow \mathbf{0} = b'(t)\mathbf{t}(t) + b(t)s'\mathbf{n}(t) - as'\tau(t)\mathbf{n}(t) \\ &\Rightarrow b'(t)\mathbf{t}(t) + s'(b(t) - a\tau(t))\mathbf{n}(t) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Si comparamos las componentes en \mathbf{t} y en \mathbf{n} de la ecuación (4.2), se sigue que $b'(t) = 0$ y $b(t) - a\tau(t) = 0$, es decir, $b(t)$ es una función constante y la pseudotorsión $\tau = b/a$, $a \neq 0$, también es una función constante. El caso $a = 0$ no puede ocurrir, porque si $a = 0$, tendríamos $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Para ver que cualquier curva tipo luz con pseudotorsión τ constante es una hélice, tomamos cualquier constante $a \neq 0$ y consideramos la constante $b = a\tau$. Entonces, para el vector $\mathbf{v} = b\mathbf{t} - a\mathbf{b}$, que no depende de t , tenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{t}(t), b\mathbf{t}(t) - a\mathbf{b}(t) \rangle \\ &= b\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{t}(t) \rangle + a\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t) \rangle \\ &= -a, \end{aligned}$$

es decir, \mathbf{v} es un eje de la curva y la curva es una hélice.

Q. E. D.

Un corolario inmediato de los dos teoremas anteriores es que para una hélice no degenerada tenemos $\kappa = c\tau$, mientras que para una hélice degenerada tenemos $\kappa = \pm\tau$. Probablemente, las curvas más estudiadas en el espacio de Minkowski son las hélices, cf. [SABAA20, BDFI11, Fer04, FGL01].

§4.2 Curvas de Bertrand

Así como la evoluta de una curva involucra su curvatura, a una curva dada se le puede asociar cierta curva descrita en términos de su curvatura y su torsión conectadas mediante una ecuación afín no lineal. En el caso euclidiano, estas curvas se llaman *curvas de Bertrand*, se definen como curvas con la misma recta normal. Su principal característica es que la distancia entre dos puntos correspondientes a lo largo de la recta normal común es constante, y el ángulo formado por las tangentes correspondientes es constante. Queremos adaptar esta noción para las curvas en el espacio de Minkowski, pero tal como nos pasaba con las hélices, tenemos problemas cuando hablamos del ángulo entre dos vectores. Es por eso que vamos a evitar hablar de ángulos. También vamos a evitar las curvas tipo espacio con vector normal tipo luz y las curvas tipo luz porque no tienen curvatura definida.

Definición 4.4. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva de Frenet, regular, parametrizada, con $\kappa(t) \neq 0$ y $\tau(t) \neq 0$ para $t \in I$. La curva $\gamma(t)$ se llama *curva de Bertrand* si existe otra curva $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ tal que las rectas normales de $\gamma(t)$ y $\beta(t)$ son iguales en todo $t \in I$. La curva $\beta(t)$ se llama *compañera de Bertrand de $\gamma(t)$* .

Las principales propiedades de las curvas de Bertrand son las siguientes.

Proposición 4.1. a) Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ es una curva de Bertrand y β es su compañera de Bertrand, entonces podemos escribir

$$\beta(t) = \gamma(t) + r\mathbf{n}(t), \quad \text{para alguna constante } r.$$

b) γ es una curva de Bertrand si y solo si existe una combinación lineal

$$a\kappa(t) + b\tau(t) = 1, \quad \text{para todo } t \in I,$$

donde a y b son constantes distintas de cero, $\kappa(t)$ es la curvatura y $\tau(t) = \text{const.}$ es la torsión de γ .

c) Una curva γ tiene más de una compañera de Bertrand si y solo si γ es una hélice circular. Si este es el caso, hay una infinidad de compañeras de Bertrand de γ .

Prueba. La parte (a) se sigue directamente de la definición 4.4, pues si $\gamma(t)$ es una curva de Bertrand y $\beta(t)$ su compañera, las rectas normales de $\gamma(t)$ y $\beta(t)$ son iguales. Entonces, $\beta(t)$ es un punto en la recta normal de $\gamma(t)$ para todo t :

$$\beta(t) = \gamma(t) + r(t)\mathbf{n}(t).$$

Para demostrar que $r(t)$ es una función constante, derivamos una vez:

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= \gamma'(t) + r'(t)\mathbf{n}(t) + r(t)\mathbf{n}'(t) \\ &= s'(t)(1 - \epsilon_t \epsilon_n r(t)\kappa(t)) \mathbf{t}(t) + r'(t)\mathbf{n}(t) + s'(t)r(t)\tau(t)\mathbf{b}(t). \end{aligned}$$

Como $\beta'(t)$ es tangente a $\beta(t)$ y las rectas normales de $\gamma(t)$ y $\beta(t)$ son iguales, sin escribir la dependencia de t , se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \beta', \mathbf{n} \rangle = s'(1 - \epsilon_t \epsilon_n r\kappa) \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle + r' \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + s'r\tau \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \\ &\Rightarrow r'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad r(t) = \text{const.} \end{aligned}$$

Para la parte (b), supongamos primero que $\gamma(t)$ es una curva de Bertrand con función de curvatura $\kappa(t) \neq 0$ y función de torsión $\tau \neq 0$ constante. Entonces, según la parte (a), la compañera de Bertrand de γ se puede escribir como

$$\beta(t) = \gamma(t) + r\mathbf{n}(t),$$

para alguna constante $r \in \mathbb{R}$, y su derivada es

$$\beta'(t) = s'(t)(1 - \epsilon_t \epsilon_n r\kappa(t)) \mathbf{t}(t) + (s'(t)r\tau(t))\mathbf{b}(t).$$

De nuevo, dado que $\beta'(t)$ es tangente a $\beta(t)$ y como las rectas normales de $\gamma(t)$ y $\beta(t)$ son iguales, para la derivada del producto de los vectores tangentes tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{t}(t), \beta'(t) \rangle &= \langle \cancel{\mathbf{t}'(t)}, \beta'(t) \rangle + \langle \mathbf{t}, \cancel{\beta''(t)} \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle \mathbf{t}(t), \beta'(t) \rangle &= \text{const.} \\ \Rightarrow s'(t)(1 - \epsilon_t \epsilon_n r \kappa(t)) \epsilon_t &= \text{const.} \\ \Rightarrow \frac{1 - \epsilon_t \epsilon_n r \kappa(t)}{\tau(t)} &= b, \end{aligned}$$

para alguna constante b . De aquí se sigue directamente que

$$a\kappa(t) + b\tau(t) = 1,$$

donde $a = \epsilon_t \epsilon_n r$ es una constantes distinta de cero.

Para probar la necesidad, suponemos válida la ecuación $a\kappa(t) + b\tau(t) = 1$ y hay que demostrar que

$$\beta(t) = \gamma(t) + r\mathbf{n}(t),$$

es una compañera de Bertrand de γ , donde $r = \epsilon_t \epsilon_n a$ es una constante. Podemos reescribir la derivada de $\beta(t)$ en términos de las constantes r y $\tau b = 1 - \epsilon_t \epsilon_n r \kappa(t)$:

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= s'(t)(1 - \epsilon_t \epsilon_n r \kappa(t)) \mathbf{t}(t) + (s'(t)r\tau(t)) \mathbf{b}(t) \\ &= s'(t)\tau(\mathbf{b}\mathbf{t}(t) + r\mathbf{b}(t)). \end{aligned}$$

El vector tangente unitario de $\beta(t)$ es

$$\mathbf{t}_\beta(t) = \frac{\beta'(t)}{\|\beta'(t)\|} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{t}(t) + r\mathbf{b}(t)}{\sqrt{|b^2 - \delta r^2|}}.$$

La derivada del vector $\mathbf{t}_\beta(t)$ es

$$\mathbf{t}'_\beta(t) = \frac{\mathbf{b}\mathbf{t}'(t) + r\mathbf{b}'(t)}{\sqrt{|b^2 - \epsilon_n r^2|}} = \frac{s'(t)(b\kappa(t) + \epsilon_t r \tau(t))}{\sqrt{|b^2 - \epsilon_n r^2|}} \mathbf{n}(t),$$

y así, $\mathbf{n}_\beta(t)$ también es un múltiplo escalar de $\mathbf{n}(t)$. Por lo tanto, las rectas normales de $\gamma(t)$ y $\beta(t)$ coinciden en cada punto t .

Para demostrar la parte (c) de la proposición, primero suponemos que $\gamma(t)$ tiene más de una compañera de Bertrand, digamos $\beta(t)$ y $\alpha(t)$, para las cuales se tiene

$$a\kappa(t) + b\tau(t) = 1 \quad \text{y} \quad c\kappa(t) + d\tau(t) = 1,$$

respectivamente, según la parte (a). Resolviendo estas ecuaciones para $\kappa(t)$ y $\tau(t)$ encontramos que ambas funciones son constantes y, en consecuencia, $\gamma(t)$ es una hélice circular. Sabemos que el sistema tiene solución porque si su determinante se anula, las curvas $\beta(t)$ y $\alpha(t)$ son iguales.

Recíprocamente, si $\gamma(t)$ es una hélice circular, entonces $\kappa(t)$ y $\tau(t)$ son constantes. Basta tomar cualquier combinación lineal $a\kappa(t) + b\tau(t) = 1$, con constantes $a, b \neq 0$, para probar que $\gamma(t)$ es una curva de Bertrand, según la parte (b). De hecho, toda combinación lineal de este tipo nos da una curva de Bertrand distinta y, por lo tanto, $\gamma(t)$ tiene una infinidad de curvas de Bertrand. Q. E. D.

§4.3 Propiedades globales de las curvas planas

La mayoría de las propiedades de las curvas que hemos estudiado hasta ahora se denominan propiedades locales. Por definición, una propiedad local de una curva (o superficie) es una propiedad que está relacionada con un punto de la curva en función de la información contenida solo en una vecindad de ese punto. Por el contrario, las propiedades globales se refieren a los atributos de la curva en su conjunto. La longitud del arco y la pseudolongitud del arco de una curva son las únicas nociones que hemos introducido que se podrían considerar propiedades globales.

Hablando intuitivamente, las propiedades locales de una curva en un punto implican derivadas de las ecuaciones paramétricas en una vecindad de ese punto, mientras que las propiedades globales se ocupan de integrales a lo largo de la curva y de las propiedades topológicas y geométricas de la ubicación y de la situación de la curva en el espacio. En otras palabras, las propiedades globales de las curvas son propiedades que involucran a la curva como un todo, en contraste con las propiedades locales que se definen en la vecindad de un punto de la curva. Algunas pruebas de algunas propiedades globales se basan en teoremas de topología, por lo que se pueden consultar algunas referencias clásicas como M. A. Armstrong [Arm97] y R. Engelking [Eng89].

Definición 4.5. Una curva parametrizada \mathcal{C} es *cerrada* si existe una parametrización $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ de \mathcal{C} tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva cerrada es de *clase* C^k si, además, todas las derivadas (laterales) de γ en a y en b son iguales y de orden $i = 0, 1, \dots, k$. En otras palabras, si como derivadas laterales tenemos

$$\gamma'(a) = \gamma'(b), \quad \gamma''(a) = \gamma''(b), \quad \dots, \quad \gamma^{(k)}(a) = \gamma^{(k)}(b).$$

La noción de derivada lateral izquierda y derecha de funciones reales se extiende naturalmente a las curvas parametrizadas. Las condiciones sobre las derivadas de γ en la definición anterior parecen incómodas, pero con ellas queremos establecer el hecho de que la función vectorial γ se comporta de manera idéntica en a y en b . Un enfoque más topológico implica el uso de un círculo \mathbb{S}^1 en lugar de un intervalo como dominio para el mapeo γ . Definimos un *círculo topológico* \mathbb{S}^1 como el conjunto $[0, 1]$ con los puntos 0 y 1 identificados. La topología de \mathbb{S}^1 es la topología de identificación, que en este caso significa que una vecindad abierta U de p contiene, para algún $\epsilon > 0$, los subconjuntos

$$\begin{cases} (p - \epsilon, p + \epsilon) \text{ con } \epsilon < \min\{p, 1 - p\}, & \text{si } p \neq 0, \\ [0, \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1], & \text{si } p = 0 (= 1). \end{cases}$$

Entonces, decimos que una curva \mathcal{C} es *cerrada* si existe una función continua y sobreyectiva $\phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{C}$. Utilizando este lenguaje, decimos que una curva cerrada \mathcal{C} es *simple* si existe una biyección $\phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{C}$ que es continua y tal que ϕ^{-1} también es continua. En términos de parametrizaciones tenemos lo siguiente.

Definición 4.6. Una curva \mathcal{C} es *simple* si existe una parametrización $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ de \mathcal{C} tal que γ es una función inyectiva. Una curva cerrada \mathcal{C} es *simple* si existe una parametrización $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ de \mathcal{C} tal que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ solo cuando $t_1 = a$ y $t_2 = b$, con $t_1 < t_2$.

Según estas definiciones, una curva cerrada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ es una curva parametrizada por funciones coordenadas periódicas. Si la curva es regular, existe un valor mínimo $T > 0$ tal que $\gamma(t + T) = \gamma(t)$. En particular, la traza de γ es un conjunto compacto. Si una curva no es simple, intuitivamente pensamos que la curva se corta a sí misma. Diremos que una curva \mathcal{C} tiene una *autointersección* en un punto $P \in \mathcal{C}$ si para toda parametrización $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ de \mathcal{C} existen $t_1 \neq t_2$, que no son puntos extremos de I , tales que

$$\gamma(t_1) = P = \gamma(t_2).$$

Vamos a ver que la naturaleza causal de una curva en \mathbb{E}_1^3 impone restricciones a las curvas cerradas, y en particular a las curvas planas.

Teorema 4.3. No hay curvas cerradas en \mathbb{E}_1^3 que sean tipo tiempo o tipo luz.

Prueba. Supongamos que la curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ es cerrada y está parametrizada por funciones coordenadas periódicas como

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Debido a que la función coordenada $z = z(t)$ es periódica, existe $t = t_0$ donde $z(t)$ alcanza un máximo, es decir que $z'(t_0) = 0$. Entonces

$$\langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = x'^2(t_0) + y'^2(t_0) \geq 0. \quad (4.3)$$

Esto es una contradicción si γ es tipo tiempo. Pero si γ es tipo luz, entonces la ecuación (4.3) implica que $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, y por lo tanto $\gamma'(t_0) = 0$. En particular, $\gamma(t)$ no sería regular en $t = t_0$: esto contradice el hecho de que las curvas tipo luz siempre son regulares. Así, probamos que $\gamma(t)$ no puede ser ni tipo tiempo ni tipo luz. Q. E. D.

Dado que solo puede pasar que una curva cerrada γ sea tipo espacio, llegamos a la conclusión de que *no existe una teoría de curvas cerradas tipo tiempo o tipo luz*. Además, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.4. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva regular, cerrada, contenida en un plano bidimensional P . Si γ es tipo espacio, entonces P es un plano bidimensional tipo espacio.

Prueba. Supongamos que P no es un plano tipo espacio. Entonces P es un plano tipo tiempo o tipo luz.

Caso 1. Supongamos que el plano P es tipo tiempo. Después de aplicar un movimiento rígido de \mathbb{E}_1^3 , podemos suponer que P es el plano con ecuación $x = 0$. Entonces la curva está parametrizada como

$$\gamma(t) = (0, y(t), z(t)).$$

Dado que la función coordenada $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es periódica, alcanza un máximo en algún punto $t = t_0$. En consecuencia, $y'(t_0) = 0$ y

$$\gamma'(t_0) = (0, 0, z'(t_0)).$$

Como γ es regular, $z'(t_0) \neq 0$, y esto implica que $\gamma(t)$ es una curva tipo tiempo en $t = t_0$, porque $\langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = -z'^2(t_0) < 0$. Esto contradice la propiedad de γ de ser tipo espacio. Por tanto, P no puede ser tipo tiempo.

Caso 2. Supongamos que el plano P es tipo luz. Después de aplicar un movimiento rígido de \mathbb{E}_1^3 , podemos suponer que P es el plano con ecuación $y - z = 0$. Entonces la curva está parametrizada como

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), y(t)).$$

De nuevo, dado que la función coordenada $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es periódica, alcanza un máximo en algún punto $t = t_0$, es decir, $x'(t_0) = 0$ y

$$\gamma'(t_0) = (0, y'(t_0), y'(t_0)).$$

Nuevamente, $y'(t_0) \neq 0$ por la regularidad de γ , pero esto implica que $\gamma(t_0)$ es tipo luz en $t = t_0$, porque $\langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = y'^2(t_0) - y'^2(t_0) = 0$. Esto contradice la propiedad de γ de ser tipo espacio. Por tanto, P no puede ser tipo luz.

De la discusión anterior, llegamos a la conclusión de que P es necesariamente un plano tipo espacio. Q. E. D.

Por lo tanto, y después de aplicar una isometría, una curva plana, cerrada, tipo espacio es una curva cerrada en un plano euclidiano, \mathbb{E}^2 . Esto significa que *la teoría de curvas planas, cerradas (tipo espacio) en el espacio de Minkowski es la misma que la teoría de curvas cerradas en el plano euclidiano*. Hay varios resultados globales clásicos muy importantes, por ejemplo el teorema de Jordan, el teorema de Green, el teorema del índice (de rotación), el teorema de las tangentes rotantes, la desigualdad isoperimétrica, y el teorema de los cuatro vértices (cf. [AT12, BL16, Apo69]).

§4.4 Propiedades globales de las curvas espaciales

Como antes, las propiedades globales de las curvas son propiedades que involucran a la curva como un todo, en contraste con las propiedades que se definen en la vecindad de un punto de la curva. Las curvas en el espacio exhiben nuevos tipos de propiedades globales, como la propiedad de anudación caracterizada por el teorema de Fary-Milnor.

Del mismo modo que definimos la indicatriz tangente (cf. definición 4.2) de una curva espacial $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$, podemos definir la *indicatriz normal* $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ y la *indicatriz binormal* $\mathbf{b} : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ como las curvas espaciales generadas por los vectores normal y binormal, respectivamente. Dependiendo de la forma de γ , las indicatrices pueden cambiar de velocidad, detenerse y retroceder, etc. No obstante, podemos utilizar la teoría de curvas que hemos desarrollado para estudiarlas.

Dado que los vectores del marco de Frenet de las curvas de Frenet son de longitud 1, las indicatrices de las curvas de Frenet son curvas que yacen en la pseudoesfera unitaria o espacio de Sitter (si son tipo espacio), o yacen en una hoja del espacio hiperbólico unitario (si son tipo tiempo). Si alguna de las indicatrices es tipo luz, yace en el cono de luz. Para las curvas planas tenemos que las indicatrices yacen en los círculos de Lorentz o en el cono de luz. En contraste con las curvas planas, hay más posibilidades para curvas en un hiperboloide unitario (de una o de dos hojas) que para curvas en un círculo de Lorentz.

Definición 4.7. La *curvatura total* de una curva \mathcal{C} , regular, cerrada, parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, se define como

$$\int_{\mathcal{C}} \kappa ds = \int_a^b \kappa(t) s'(t) dt.$$

Esta integral es un número real no negativo ya que $\kappa(t), s'(t) \geq 0$.

Para curvas de Frenet tenemos $\mathbf{t}' = s' \kappa \mathbf{n}$, entonces la rapidez $\|\mathbf{t}'\|$ de la indicatriz tangente es igual a $s'(t) \kappa(t)$. Por lo tanto, la curvatura total de una curva de Frenet γ , es igual a la longitud de la indicatriz tangente. Además, es claro que la indicatriz tangente tiene un punto crítico en cada punto donde $\kappa(t) = 0$. Para las curvas que no son de Frenet, tenemos simplemente $\mathbf{t}'(t) = s' \mathbf{n}$, donde s' es la (pseudo) longitud de arco. Esto es así porque no es posible definir la curvatura, y en consecuencia, no hay curvatura total definida.

Los teoremas globales más interesantes, como en el caso euclidiano, tienen que ver con curvas cerradas. Sin embargo, en el espacio de Minkowski las únicas curvas cerradas son las curvas tipo espacio. De manera que cabe esperar que las propiedades globales más interesantes de curvas espaciales tendrían que ver con las curvas tipo espacio, como versiones del teorema de Fenchel (que da un límite superior para la curvatura total) o del teorema de Fary-Milnor (que da una relación entre una curva anudada y la curvatura de una curva espacial).

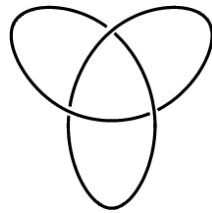
Para extender estos bonitos resultados al espacio de Minkowski, es crucial encontrar las condiciones adecuadas que deben satisfacer las curvas cerradas. Por ejemplo, N. Ye, *et. al.* [YMW16], consideran solo las curvas $\gamma(t)$ cuyo vector tangente $\mathbf{t}(t)$ y vector de curvatura $\kappa \mathbf{n}$ generan un plano bidimensional tipo espacio en cada punto de $\gamma(t)$. Estas curvas no solo son curvas tipo espacio, sino que también tienen planos osculadores tipo espacio en cada punto. En particular, no se permiten puntos de inflexión donde la curvatura sea nula, y entonces podemos suponer que la curvatura es siempre positiva. Bajo estas condiciones se prueban los siguientes resultados.

Teorema 4.5 (Fenchel). Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva cerrada, de índice 1, tipo espacio, con $\kappa > 0$ y tal que $P = \text{gen}\{\mathbf{t}, \kappa\mathbf{n}\}$ es un plano bidimensional tipo espacio en cada punto de $\gamma(t)$. Entonces, la curvatura total satisface

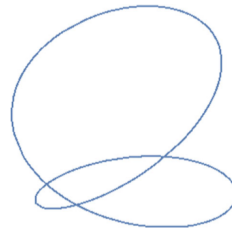
$$\int_{\gamma} \kappa ds \leq 2\pi.$$

La igualdad se da si y solo si γ es una curva plana convexa.

A diferencia de lo que ocurre en el espacio euclidiano, en el espacio de Minkowski existe una noción bien definida de *índice* para curvas cerradas tipo espacio. El índice I es el número de vueltas que la indicatriz tangente da alrededor de la pseudoesfera de Sitter y tiene un valor entero. En el caso especial de $I = 1$, la curva cerrada gira alrededor de un eje tipo tiempo exactamente una vuelta. N. Ye, *et. al.* [YMW16] observan que la curvatura total de curvas cerradas con índice $I \geq 2$ puede ser arbitrariamente grande, como en la concha de almeja. Cuando la curva es aún más complicada, no solo porque su índice es $I > 1$, pero su situación en el espacio es más complicada (por ejemplo el nudo de trébol y otros nudos no triviales), tenemos la siguiente extensión del teorema de Fary-Milnor.



(a) Nudo de trébol



(b) Concha de almeja

Teorema 4.6 (Fary-Milnor). Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ una curva tipo espacio, de índice $I = 2$, con $\kappa > 0$ y tal que $P = \text{gen}\{\mathbf{t}, \kappa\mathbf{n}\}$ es un plano bidimensional tipo espacio en cada punto de $\gamma(t)$. Entonces, si $\gamma(t)$ no es un nudo trivial, la curvatura total satisface

$$\int_{\gamma} \kappa ds \leq 4\pi.$$

Observamos que la diferencia principal entre estos resultados y sus análogos euclidianos es que el sentido de la desigualdad está invertido.

§4.5 Curvas en dimensiones superiores

Hasta este punto, hemos estudiado las curvas en el plano de Minkowski \mathbb{E}_1^2 y en el espacio de Minkowski \mathbb{E}_1^3 con énfasis en las nociones de velocidad, aceleración, rapidez, curvatura y (pseudo) torsión y presentamos los marcos (ortonormales) naturales (de Frenet) ligados a una curva en cada punto, a saber, el marco (\mathbf{t}, \mathbf{n}) para una curva regular plana, y el marco $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ para una curva regular espacial de clase

C^2 . En esta sección generalizamos una serie de definiciones y teoremas sobre curvas y superficies para el espacio de Minkowski n -dimensional, \mathbb{E}_1^n .

Muchas de las propiedades y definiciones locales tienen generalizaciones inmediatas muy naturales a curvas $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ en el espacio de Minkowski n -dimensional \mathbb{E}_1^n parametrizadas por

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),$$

como los conceptos de *velocidad*, $\gamma'(t)$, *rapidez*, $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$, (*pseudo*) *longitud de arco*, $s(t)$, *aceleración*, $\gamma''(t)$, *parametrización regular*, etc.

En cualquier punto regular $t = t_0$, el *vector tangente unitario* se define como

$$\mathbf{t}(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}, \quad \text{si } \|\gamma'(t_0)\| \neq 0,$$

Está claro que el vector tangente unitario no está definido para un valor $t = t_0$ si γ no es diferenciable en t_0 o si $\|\gamma'(t_0)\| = 0$. Cuando $\|\gamma'(t_0)\| = 0$ (para las curvas tipo luz), simplemente hacemos $\mathbf{t}(t_0) = \gamma'(t_0)$.

Para generalizar nuestra teoría de curvas en el espacio \mathbb{E}_1^3 , a curvas en \mathbb{E}_1^n , tenemos que generalizar el producto cruz para $n - 1$ vectores. Esto se puede lograr haciendo uso de determinantes (cf. [New19, §8.4]):

$$\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1} = \begin{vmatrix} \epsilon_1 \mathbf{e}_1 & \cdots & \epsilon_n \mathbf{e}_n \\ v_1^1 & \cdots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \cdots & v_{n-1}^n \end{vmatrix},$$

donde $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ es la signatura de una base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ de \mathbb{E}_1^n .

Como cualquier función vectorial de norma constante $\mathbf{F} : I \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ satisface $\langle \mathbf{F}(t), \mathbf{F}(t) \rangle = \text{const.}$, después de derivar esta expresión, para todo $t \in I$ tenemos

$$2 \langle \mathbf{F}'(t), \mathbf{F}(t) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}'(t) \perp \mathbf{F}(t). \quad (4.4)$$

Por tanto, si existe la derivada, $\mathbf{t}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{t}(t)$, aunque $\mathbf{t}'(t)$ no es necesariamente de longitud unitaria.

Supongamos que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ es una curva parametrizada, regular, de clase C^2 tal que $\|\gamma^i(t)\| \neq 0$ para todo $t \in I$, con $1 \leq i \leq n$. Definimos implícitamente la *primera curvatura* $\kappa_1(t)$ de $\gamma(t)$ como la única función no negativa tal que

$$\mathbf{t}'(t) = s'(t)\kappa_1(t)\mathbf{n}_1(t),$$

donde $\mathbf{n}_1(t)$ es una función vectorial de norma constante. Esta definición implícita podría no producir un vector bien definido en $\mathbf{n}_1(t_0)$ si $\kappa_1(t_0) = 0$, es decir, si $\mathbf{t}'(t_0) = \mathbf{0}$. Este problema puede remediarse si $\mathbf{t}'(t) \neq \mathbf{0}$ para $0 < |t - t_0| < \delta$, para algún δ positivo. En este caso, $\mathbf{n}_1(t)$ es una función vectorial continua y bien definida en la «esfera unitaria», para $0 < |t - t_0| < \delta$. Entonces, se puede asignar un valor a

$\mathbf{n}_1(t_0)$ extendiendo $\mathbf{n}_1(t)$ por continuidad. Por otro lado, si $\kappa_1(t) = 0$ en un intervalo de t , entonces para los puntos en este intervalo la función vectorial $\mathbf{n}_1(t)$ no está definida. Al igual que con las curvas en \mathbb{E}_1^3 , asumiendo que existen las derivadas, tenemos

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= s'(t)\mathbf{t}(t), \\ \gamma''(t) &= s''(t)\mathbf{t}(t) + s'^2(t)\kappa_1(t)\mathbf{n}_1(t).\end{aligned}$$

La función vectorial $\mathbf{n}_1(t)$ se denomina *primera función normal (principal)* o simplemente *primera normal*. Como consideramos derivadas superiores de $\gamma(t)$ con respecto a este tipo de descomposición, necesitamos dar sentido a la derivada de $\mathbf{n}_1(t)$ y a las derivadas de funciones vectoriales subsiguientes que surgen de manera similar.

Consideremos dos funciones vectoriales $\mathbf{F}(t)$ y $\mathbf{G}(t)$ de norma constante con el mismo intervalo I como dominio. Si estas funciones son perpendiculares entre sí en todas partes, es decir $\langle \mathbf{F}(t), \mathbf{G}(t) \rangle = 0$, entonces para todo $t \in I$, tenemos

$$\langle \mathbf{F}'(t), \mathbf{G}(t) \rangle = -\langle \mathbf{F}(t), \mathbf{G}'(t) \rangle. \quad (4.5)$$

Ahora, consideremos la función vectorial $\mathbf{n}'_1(t)$. De la ecuación (4.4) tenemos $\langle \mathbf{n}'_1(t), \mathbf{n}_1(t) \rangle = 0$ y de la ecuación (4.5) se sigue

$$\langle \mathbf{n}'_1(t), \mathbf{t}(t) \rangle = -\epsilon_1 s'(t)\kappa_1(t),$$

donde $\epsilon_1 = \langle \mathbf{n}_1(t), \mathbf{n}_1(t) \rangle$. Si $n > 3$, definimos implícitamente la *segunda curvatura* κ_2 de $\gamma(t)$ como la única función no negativa $\kappa_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\mathbf{n}'_1(t) = -\epsilon_t \epsilon_1 s'(t)\kappa_1(t)\mathbf{t}(t) + s'(t)\kappa_2(t)\mathbf{n}_2(t),$$

para alguna función vectorial unitaria $\mathbf{n}_2(t)$ que es perpendicular tanto a \mathbf{t} como a \mathbf{n}_1 . Siempre que $\kappa_2(t)$ no sea cero, $\mathbf{n}_2(t)$ está bien definida y se denomina *segunda función normal (principal)* o simplemente *segunda normal*.

Al repetir este proceso, definimos recursivamente la *i-ésima función de curvatura*, κ_i , y la *i-ésima normal* asociada, \mathbf{n}_i , para $1 \leq i \leq n-1$, como

$$\mathbf{n}'_i(t) = -\epsilon_{i-1}\epsilon_i s'(t)\kappa_i(t)\mathbf{n}_{i-1}(t) + s'(t)\kappa_i(t)\mathbf{n}_{i+1}(t),$$

donde $\epsilon_i := \langle \mathbf{n}_i(t), \mathbf{n}_i(t) \rangle$ para $1 < i \leq n-1$ y

$$\langle \mathbf{n}'_i(t), \mathbf{t}(t) \rangle = 0, \quad \dots, \quad \langle \mathbf{n}'_i(t), \mathbf{n}_{i-1}(t) \rangle = -\epsilon_i s'(t)\kappa_i, \quad \dots, \quad \langle \mathbf{n}'_i(t), \mathbf{n}_n(t) \rangle = 0.$$

Sin embargo, se hace una excepción para la curvatura κ_{n-1} y la normal \mathbf{n}_{n-1} . Al definir $\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n-1}$ como acabamos de indicar, establecemos un conjunto ortonormal de vectores unitarios. Por construcción, la n -tupla de vectores organizados en una matriz como

$$A(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{t}(t) & \mathbf{n}_1(t) & \cdots & \mathbf{n}_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

define una matriz ortogonal. Las matrices ortogonales pueden tener un determinante que sea 1 o -1 . Dados los vectores $\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n-2}$, junto con la condición de que $A(t)$ sea ortogonal, nos quedan exactamente dos posibilidades para \mathbf{n}_{n-1} . Para facilitar los cálculos, es deseable que $A(t)$ sea una matriz ortogonal positiva, es decir, que satisfaga $\det A(t) = 1$. Por lo tanto, con el requisito de que $\det A(t) = 1$, el $(n-1)$ -ésimo vector normal \mathbf{n}_{n-1} se determina unívocamente a partir de los $n-1$ vectores $\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n-2}$. Sin embargo, debido a que usamos $\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n-2}$ para determinar \mathbf{n}_{n-1} , no podemos definir la función de curvatura $(n-1)$ -ésima, $\kappa_{n-1}(t)$, como una función no negativa.

A la n -tupla de funciones vectoriales $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}_1(t), \dots, \mathbf{n}_{n-1}(t))$ como se construyó arriba la llamamos *marco de Frenet de $\gamma(t)$* . Al igual que con las ecuaciones (2.18) y (3.9), podemos resumir las derivadas de los vectores del marco de Frenet mediante la ecuación matricial

$$A'(t) = A(t) \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon_t \epsilon_1 s' \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ s' \kappa_1 & 0 & -\epsilon_1 \epsilon_2 s' \kappa_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\epsilon_{n-2} \epsilon_{n-1} s' \kappa_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s' \kappa_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

donde $A(t)$ es la matriz ortogonal positiva definida en la ecuación (4.6). A las curvas que satisfacen la ecuación (4.7) las llamamos *curvas de Frenet*.

La ecuación (3.16) que nos da una fórmula para la curvatura de una curva espacial se basó en tomar el producto cruz de los vectores $\gamma'(t)$ y $\gamma''(t)$. Podemos proceder de la misma manera en \mathbb{E}_1^n , para $n > 3$, pero en ocasiones es más eficiente usar otra fórmula para $\kappa_1(t)$. Como tenemos

$$\gamma' = s' \mathbf{t} \quad \text{y} \quad \gamma'' = s'' \mathbf{t} + s'^2 \kappa_1 \mathbf{n}_1,$$

y dado que la fórmula (3.16) contiene el factor $\|\gamma' \times \gamma''\|$, nos inspira a considerar el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \|\gamma' \times \gamma''\| &= \left| \begin{array}{cc} \langle \gamma', \gamma' \rangle & \langle \gamma', \gamma'' \rangle \\ \langle \gamma'', \gamma' \rangle & \langle \gamma'', \gamma'' \rangle \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \epsilon_t s'^2 & \epsilon_t s' s'' \\ \epsilon_t s' s'' & \epsilon_t s''^2 + \epsilon_1 s'^4 \kappa_1^2 \end{array} \right| \\ &= s'^2 s''^2 + \epsilon_t \epsilon_1 s'^6 \kappa_1^2 - s'^2 s''^2 \\ &= \epsilon_t \epsilon_1 s'^6 \kappa_1^2. \end{aligned}$$

Esto nos conduce a la siguiente fórmula para la primera curvatura:

$$\kappa_1(t) = \frac{1}{\|\gamma'\|^3} \sqrt{\left| \begin{array}{cc} \langle \gamma', \gamma' \rangle & \langle \gamma', \gamma'' \rangle \\ \langle \gamma'', \gamma' \rangle & \langle \gamma'', \gamma'' \rangle \end{array} \right|} = \frac{1}{\|\gamma'\|^3} \sqrt{|\det(B^T(t)B(t))|},$$

donde $B(t)$ es la matriz $\begin{bmatrix} \gamma'(t) & \gamma''(t) \end{bmatrix}$ de $n \times 2$. Para probar la fórmula más general, debemos usar la *fórmula de Cauchy-Binet* que se puede ver en S. C. Newman [New19, §2.4]. Definimos $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$. Si M es una matriz de $n \times m$ y $S \subseteq [n]$ y

$S' \subseteq [m]$, usamos la notación $M_{S,S'}$ para representar la submatriz que consta de las entradas a_{ij} con renglones i tomados del conjunto S y columnas j tomadas del conjunto S' . De esta manera, si A es una matriz de $m \times n$ y B una matriz de $n \times m$, con $m \leq n$, entonces

$$\det(AB) = \sum_{S \subseteq [n], |S|=m} \det(A_{[m],S}) \det(B_{S,[m]}). \quad (4.8)$$

Con la fórmula de Cauchy-Binet (4.8) podemos calcular de manera inductiva fórmulas para las funciones de curvatura de una curva de Frenet $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^n$, parametrizada, regular, de clase C^n . Para cualquier entero m con $1 \leq m \leq n$, definimos la matriz $B_m(t) = (\gamma'(t) \ \gamma''(t) \ \cdots \ \gamma^{(m)}(t))$ con columnas dadas por las derivadas de la curva. Entonces si $1 \leq m \leq n - 2$, tenemos

$$s^{(m+1)(m+2)/2}(t) \kappa_1^m(t) \kappa_2^{m-1}(t) \cdots \kappa_m(t) = \sqrt{\det(B_{m+1}^T(t) B_{m+1}(t))} \quad (4.9)$$

y para la $(n - 1)$ -ésima función de curvatura $\kappa_{n-1}(t)$, tenemos

$$s^{n(n+1)/2}(t) \kappa_1^{n-1}(t) \kappa_2^{n-2}(t) \cdots \kappa_{n-1}(t) = \det(B_n(t)). \quad (4.10)$$

Las ecuaciones (4.9)-(4.10) nos dan fórmulas recursivas para las curvaturas superiores y, en consecuencia, es un ejercicio sencillo, aunque a veces tedioso, calcular las funciones de curvatura de una curva parametrizada en \mathbb{E}_1^n . También hay que notar que estas ecuaciones generalizan directamente la fórmula (2.11) de la curvatura de una curva plana, la fórmula (3.16) de la curvatura de una curva espacial y la fórmula (3.18) de la torsión de una curva espacial. Con estas ecuaciones también se puede mostrar que las funciones de curvatura son invariantes bajo una reparametrización de orientación positiva, pero bajo una reparametrización de orientación negativa las curvaturas $\kappa_1(t), \kappa_2(t), \dots, \kappa_{n-2}(t)$ permanecen invariantes y κ_{n-1} cambia de signo según la regla dada por $\tilde{\kappa}_{n-1}(t) = (-1)^n \kappa_{n-1}(t)$.

Siguiendo la teoría local de curvas planas y curvas espaciales como se desarrolló anteriormente, para las curvas en \mathbb{E}_1^n podemos considerar k -planos osculadores y k -«esferas» osculatrices, donde k es cualquier número entero con $1 \leq k \leq n - 1$. Definimos el k -plano osculador de una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ parametrizada, regular, de clase C^n , como el k -plano que pasa por el punto $\gamma(t_0)$ y está generado por los vectores $\mathbf{t}(t_0), \mathbf{n}_1(t_0), \dots, \mathbf{n}_{k-1}(t_0)$. Notemos que la recta osculatriz a una curva en un punto es simplemente la recta tangente. Llamamos k -esfera en \mathbb{E}_1^n a cualquier «esfera» k -dimensional en un plano $(k + 1)$ -dimensional en \mathbb{E}_1^n . Tengamos en cuenta que en esta indexación, un círculo de Lorentz es una 1-esfera (en un 2-plano), la pseudoesfera o espacio de Sitter y el espacio hiperbólico son una 2-esfera (en un 3-plano), y así sucesivamente. Una curva en \mathbb{E}_1^n yace en un plano k -dimensional (i. e. un subespacio de \mathbb{E}_1^n de la forma $\mathbf{p} + V$, donde V es un subespacio k -dimensional) si y solo si $\kappa_k(s) = \cdots = \kappa_{n-1}(s) = 0$.

El teorema fundamental de las curvas espaciales de Frenet se extiende naturalmente al caso de n dimensiones. La prueba de esta generalización no implica ninguna nueva estrategia, por lo que podemos omitirla.

Teorema 4.7 (Teorema fundamental de las curvas de Frenet). Sean $\gamma, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}_1^n$ dos curvas regulares, que tienen marcos de Frenet de la misma naturaleza causal, con funciones de curvatura $\kappa_1(s), \dots, \kappa_{n-1}(s)$. Entonces existe un movimiento rígido M de \mathbb{E}_1^n que mapea una curva en otra, es decir $\beta = M \circ \gamma$.

Por la misma razón que en el caso de las curvas espaciales, llamamos a la $(n-1)$ -tupla de funciones de curvatura $(\kappa_1(s), \kappa_2(s), \dots, \kappa_{n-1}(s))$ las *ecuaciones naturales* de la curva en \mathbb{E}_1^n .

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Apo69] Tom. M. Apostol. *Calculus Volume II: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra with Applications to Differential Equations and Probability*. John Wiley & Sons, second edition, June 1969.
- [Apo04] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Pearson Education Asia and China Machine Press, second edition, 2004.
- [Arm97] Mark Anthony Armstrong. *Basic Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, May 1997.
- [Arn92] Vladimir Igorevich Arnol'd. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1992.
- [AT12] Marco Abate and Francesca Tovena. *Curves and Surfaces*. UNITEXT. Springer Milan, 2012.
- [BDFI11] M. Barros Díaz and A. Ferrández Izquierdo. Conversando sobre hélices y recordando a Floro. *Universidad de Granada*, 2011.
- [BEE96] John K. Beem, Paul E. Ehrlich, and Kevin L. Easley. *Global Lorentzian Geometry*, volume 202 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 2nd ed. edition, 1996.
- [BL16] Thomas Banchoff and Stephen Lovett. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. CRC Press, Boca Raton, second edition, 2016.
- [Car00] Neal L. Carothers. *Real Analysis*. Cambridge University Press, New York, first edition, 2000.
- [CL20] Ivo Terek Couto and Alexandre Lymberopoulos. *Introduction to Lorentz Geometry: Curves and Surfaces*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2020.
- [dC17] Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Dover Publications Inc., Mineola, New York, second edition, January 2017.
- [Din14] Seán Dineen. *Multivariate Calculus and Geometry*. Springer London, third edition, September 2014.

- [Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [Fer04] Ángel Ferrández. Null Generalized Helices and the Betchov-da Rios equation in Lorentz-Minkowski Spaces. *Publicaciones de la RSME*, 6:49–54, 2004.
- [FGL01] Ángel Ferrandez, Ángel Gimenez, and Pascual Lucas. Null Helices in Lorentzian Space Forms. *International Journal of Modern Physics A*, 16(30):4845–4863, 2001.
- [HK74] Kenneth Hoffman and Ray Kunze. *Linear Algebra*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, second edition, 1974.
- [Kü15] Wolfgang Kühnel. *Differential Geometry: Curves, Surfaces, Manifolds*, volume 77 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, third edition, 2015. Translated by Bruce Hunt.
- [LEMW52] H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl. *The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity*. Dover Publications Inc., 1952. Translated by W. Perret and G. B. Jefferey.
- [Ló14] Rafael López. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. *International Electronic Journal of Geometry*, 7(1):44–107, 2014.
- [New19] Stephen C. Newman. *Semi-Riemannian Geometry: The Mathematical Language of General Relativity*. Wiley, Hoboken, New Jersey, 2019.
- [O’N83] Barrett O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity*. Number 103 in Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York, 1983.
- [SABAA20] M. Khalifa Saad, R. A. Abdel-Baky, F. Alharbi, and A. Aloufi. Characterizations of some Special Curves in Lorentz-Minkowski Space. *Mathematics and Statistics*, 8(3):299–305, may 2020.
- [Sal12] Amani Saloom. *Curves in the Minkowski Plane and Lorentzian Surfaces*. Ph. D. Thesis, Durham University, <http://etheses.dur.ac.uk/4451/>, April 2012.
- [Str88] Dirk J. Struik. *Lectures on Classical Differential Geometry*. Dover Publications Inc., New York, second edition, 1988.
- [YMW16] Nan Ye, Xiang Ma, and Donghao Wang. The Fenchel-Type Inequality in the 3-Dimensional Lorentz Space and a Crofton Formula. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 50(3):249–259, 2016.