



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

(k,l,H)-núcleos en digráficas H-coloreadas

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
GERARDO MIGUEL TECPA GALVÁN

DIRECTORA DE LA TESIS
DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA, FACULTAD DE CIENCIAS UNAM
DRA. MARÍA DEL ROCÍO SÁNCHEZ LÓPEZ, FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO 2022.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Prefacio

En este trabajo de investigación se abordan temas especializados en digráficas, por lo que se recomienda tener algunas nociones en Teoría de Gráficas. Sin embargo, dedicaremos el primer capítulo para presentar algunos conceptos y resultados que utilizaremos en este trabajo con la intención de que éste sea autocontenido.

El segundo capítulo consta del contexto histórico general de los conceptos y resultados referentes a núcleos en digráficas, dentro de los que se incluyen núcleos usuales, (k, l) -núcleos, núcleos monocromáticos, núcleos alternantes y H -núcleos.

El tercer capítulo se centra en la introducción y estudio de un concepto nuevo en digráficas H -coloreadas: las digráficas \mathcal{H} -pancromáticas. Se exhiben algunas familias de digráficas \mathcal{H} -pancromáticas, y se muestra que la propiedad de ser \mathcal{H} -pancromática se preserva bajo algunas operaciones en digráficas. **Los resultados presentados en este capítulo fueron expuestos en el 18th Workshop on Graph Theory Colourings, Independence and Domination 2019, realizado en Piechowice, Polonia, y actualmente se encuentran publicados en el artículo *\mathcal{H} -panchromatic digraphs* en la revista AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics.**

En el cuarto capítulo se introduce un nuevo tipo de núcleo en digráficas H -coloreadas, a los que llamados (k, l, H) -núcleos, los cuales son una generalización de diversos tipos previos de núcleos, como lo son los núcleos usuales, los núcleos por trayectorias monocromáticas, los núcleos por trayectorias alternantes, H -núcleos y (k, l) -núcleos. En este capítulo se presentan algunos resultados preliminares y generales de la existencia de este tipo de núcleo. Sin embargo, debido a la dificultad de encontrar condiciones necesarias para la existencia de ellos, será necesario el introducir algunas estructuras auxiliares, como lo son las particiones en H -clases y la digráfica de H -clases.

En el quinto capítulo se trabaja con una extensión de algunos resultados clásicos de núcleos pero en términos de los (k, l, H) -núcleos, como lo son el teorema de Richardson y el teorema de Kwaśnik. En este capítulo explotaremos las propiedades de la digráfica de H -clases para poder encontrar condiciones suficientes que nos garanticen la existencia de (k, l, H) -núcleos. **Los resultados presentados en este capítulo serán enviados a una revista de investigación bajo el nombre del artículo *Richardson's Theorem for (k, H) -kernels in H -colored digraphs*.**

En el sexto capítulo se desarrollan resultados similares a los del cuarto capítulo, pero con una visión más general. Nuevamente la herramienta principal será la digráfica de H -clases, pero en ocasión se abordará la siguiente idea: si la digráfica de H -clases tiene un (k, l) -núcleo, ¿qué condiciones son suficientes para garantizar la existencia de un (k, l, H) -núcleo en la digráfica original? Este quinto capítulo está enfocado a responder dicho planteamiento. **Los resultados presentados en este capítulo están en revisión en la revista *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* bajo el artículo *On (k, l, H) -kernels and the H -class digraph*.**

En el séptimo capítulo se analiza la existencia de (k, l, H) -núcleos en algunas generalizaciones de torneos, como lo son las digráficas r -casi-transitivas, los torneos locales y los torneos multipartitos. Estas familias de digráficas, ampliamente estudiadas en la literatura, serán útiles para mostrar que existen digráficas bajo las cuales siempre es posible garantizar la existencia de (k, l, H) -núcleos, para ciertos valores de k y l . **Los resultados presentados en este capítulo actualmente se encuentran aceptados para su publicación en la revista *Discussiones Mathematicae Graph Theory* bajo el nombre de *(k, l, H) -kernels in nearly tournaments*.**

El octavo y último capítulo consta de las conclusiones globales del trabajo presentado.

Para todos aquellos que me hicieron crecer.

Agradecimientos

Tengo a tantas personas por agradecer que espero no olvidar a nadie en los siguientes renglones. Sin embargo, si eres alguien que ha estado conmigo de algún modo y en algún momento, un abrazo por ello.

En primer lugar, un agradecimiento muy especial a mis padres por el apoyo desmesurado e incondicional que me han brindado a lo largo de toda mi vida. Son sus pequeños (y no tan pequeños) detalles los que me han ayudado a dar pasos agigantados para lograr aquello que me he propuesto. Por cada uno de esos momentos, el primer agradecimiento definitivamente es para ustedes dos. A mis hermanos, por su compañía y cariño durante toda mi vida, la que fue, la que es y todos los años que nos quedan por estar juntos. A mis sobrinas, abuelos, primos y tíos, por cada momento que me han hecho disfrutar esta vida.

A Hortensia, por haberme ofrecido cuatro de los mejores años de toda mi vida. No sabría encontrar las palabras para describir todo el aprendizaje que tuve contigo, agradezco infinitamente que compartieras un poco de tu grandeza y me permitieras aprender de ella. Existe un antes y un después en mi vida académica marcado por tus enseñanzas. Por todo lo que me ofreciste y todo lo que espero seguir aprendiendo de ti, toda mi gratitud.

A Laura Pastrana y a Rocío Sánchez, por mostrarme este camino de las gráficas y acompañarme tan cercanamente en mi crecimiento académico. Sus consejos, pláticas y experiencias definitivamente han marcado un cambio en mi forma de ver las cosas. En verdad no sé en dónde estaría si no hubiera tenido su apoyo desde hace tantos años. Un agradecimiento enorme por todo lo que me han ofrecido y todo lo que aun nos queda por recorrer.

A todos mis amigos, definitivamente un agradecimiento. Alitzel, Eduardo, Alberto, Marce, Richi, Tita, Claudia, Norma, Erick, Karina, Yareni, Nanche, Jats, Roger, Margarita, Diego, Pres, Ruquísima, Gladys...infinitas gracias por todos y cada uno de los momentos que me ofrecieron. Por las horas de desestrés y carcajadas que me hicieron pasar y todo el acompañamiento a lo largo de tantos buenos años a su lado. Con mucho cariño, este agradecimiento es para ustedes.

A mis alumnitos, los que son, los que serán y los que fueron. Por darle un significado profundo y real a mi vida. Porque por ustedes me permito crecer para ayudarlos a llegar más lejos de lo que yo mismo he llegado.

A Hugo Rincón y a Rocío Sánchez, por haber aceptado formar parte mi comité tutor y acompañarme en estos años de tanto crecimiento.

A mis sinodales, Hortensia Galeana, Ilán Goldfeder, Mucuy Gueveara, Rocío Rojas y Rocío Sánchez. Por todas sus observaciones y consejos para mejorar este trabajo. Gracias.

Al Instituto de Matemáticas de la UNAM y al CONACYT le agradezco por el apoyo económico y de lugar que me ofrecieron para poder realizar este trabajo de investigación.

Por último, dejando un lugar muy especial en mis agradecimientos, a mi Jair. Quiero agradecerte por haber estado a mi lado estos años. Contigo he podido compartir tantas cosas, sentimientos e ideas que no compartiría con nadie más. Por todos los momentos de felicidad que hemos pasado, por los momentos en los que me permitía ser débil y estabas conmigo para abrazarme, y por todas las experiencias que compartimos los dos juntos, el último agradecimiento es sólo para ti. Espero que todo el tiempo que nos queda por delante nos sea tan gratificante y lleno de amor como los tiempos que ya han quedado detrás de nosotros. A ti, patito, mi agradecimiento y todo mi amor.

Índice general

1. Introducción	9
1.1. Notación, conceptos y resultados básicos	9
1.2. Caminos y conexidad	11
1.3. Tipos de digráficas	12
1.4. Operaciones y digráficas asociadas	13
1.5. Coloraciones de flechas en digráficas	14
1.6. Núcleos y conceptos relacionados	18
2. Contexto histórico	23
3. Digráficas \mathcal{H}-pancromáticas	29
3.1. Familias de digráficas \mathcal{H} -pancromáticas	30
3.2. Digráficas \mathcal{H} -pancromáticas y operaciones en digráficas	42
4. (k, l, H)-núcleos en digráficas H-coloreadas	57
4.1. H -longitud en digráficas H -coloreadas	57
4.2. (k, l, H) -núcleos en digráficas H -coloreadas	63
4.3. Particiones en H -clases	68
5. Una extensión del teorema de Richardson para (k, l, H)-núcleos	79
5.1. Resultados preliminares	79
5.2. Resultados principales	93
5.3. Algunas consecuencias	99
5.4. Sobre las condiciones suficientes de los resultados de la sección 4.2	106
6. (k, l, H)-núcleos y la digráfica de H-clases	109
6.1. Resultados preliminares	109
6.2. Resultados principales	119

7. (k, H)-núcleos en generalizaciones de torneos	129
7.1. Resultados preliminares	129
7.2. Existencia de (k, H) -núcleos en generalizaciones de torneos	131
7.2.1. Torneos y digráficas semicompletas	131
7.2.2. Digráficas r -transitivas	133
7.2.3. Digráficas casi-transitivas	134
7.2.4. Digráficas 3-casi-transitivas	136
7.2.5. Digráficas r -casi-transitivas	139
7.2.6. Torneos multipartitos	142
7.2.7. Torneos locales	146
7.3. Una pequeña nota sobre digráficas (k, H) -pancromáticas	148
8. Conclusiones	149
Referencias	153

Capítulo 1

Introducción

Ya que se pretende que este trabajo sea autocontenido, este primer capítulo servirá para introducir todos los conceptos, notación y resultados previos en digráficas que serán utilizados en el trabajo. Si el lector desea ahondar en algunos de los conceptos presentados en esta sección, le recomendamos consultar [4].

1.1. Notación, conceptos y resultados básicos

Una **digráfica** es una pareja ordenada (V, A) donde V es un conjunto finito y no vacío de objetos llamados **vértices** y A es un conjunto de parejas ordenadas de elementos de V llamadas **flechas**. Dada una digráfica D , usaremos la notación $V(D)$ y $A(D)$ para indicar el conjunto de vértices y el conjunto de flechas de D respectivamente. Al número de vértices de una digráfica D le llamaremos **orden** y al número de flechas le llamaremos **tamaño**. Una digráfica de tamaño 0 es llamada **vacía**.

Una de las propiedades características de las digráficas es que se pueden representar en el plano de la siguiente manera: A cada vértice de una digráfica D se le asocia un punto en el plano y una flecha (u, v) se representa mediante un segmento dirigido continuo desde el punto asociado al vértice u hacia el punto asociado al vértice v . Por ejemplo, la digráfica con conjunto de vértices $\{x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, t_2, t_1\}$ y conjunto de flechas $\{(x_1, x_2), (x_1, z_2), (x_1, z_1), (x_2, z_2), (x_2, z_1), (x_2, x_3), (z_2, t_2), (z_2, t_1), (t_1, t_2), (z_1, t_2), (z_1, t_1), (x_3, x_1), (x_3, z_2), (x_3, z_1)\}$ se muestra en la figura 1.1.

Dados dos vértices de una digráfica, x y z , x y z son **adyacentes en D** si hay una flecha de D entre ellos. Si (x, z) es una flecha de D , diremos que x es **in-vecino de z** . Dado un vértice x de una digráfica D , la **vecindad interior de x en D** , denotada por $N_D^-(x)$, o simplemente $N^-(x)$ cuando es claro en qué digráfica se trabaje, es el conjunto $\{z \in V(D) : (z, x) \in A(D)\}$. Al número de in-vecinos de un vértice x se le llama **in-grado de x** y se denota por $\delta_D^-(x)$ o simplemente por $\delta^-(x)$ cuando es claro la digráfica en la que se trabaja.

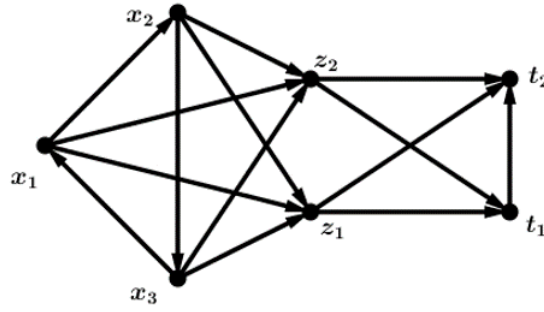


Figura 1.1: Representación de una digráfica

Si (x, z) es una flecha de D , diremos que z es **ex-vecino de x** . Dado un vértice x de una digráfica D , la **vecindad exterior de x en D** , denotada por $N_D^+(x)$ o simplemente $N^+(x)$ cuando es claro en qué digráfica se trabaje, es el conjunto $\{z \in V(D) : (x, z) \in A(D)\}$. Al número de ex-vecinos de un vértice x se le llama **ex-grado de x** y se denota por $\delta_D^+(x)$ o simplemente por $\delta^+(x)$ cuando es claro la digráfica en la que se trabaja. Al conjunto $N_D^-(x) \cup N_D^+(x)$ se le llama **vecindad de x** y se denota por $N_D(x)$.

Un vértice es un **pozo** si su ex-grado es 0, y diremos que es una **fuentes** si su in-grado es 0. Si un vértice es un pozo y una fuente simultáneamente, diremos que es un **vértice aislado**.

Si D es una digráfica y S es un subconjunto de vértices de D , la **vecindad exterior abierta de S en D** , denotada por $N_D^+(S)$, se define como

$$N_D^+(S) = \left(\bigcup_{x \in S} N_D^+(x) \right) \setminus S.$$

Si (x, z) es una flecha de D , diremos que (x, z) es **in-flecha de z** . Al conjunto de in-flechas de z en D se le denota por $A_D^-(z)$, es decir: $A_D^-(z) = \{(u, v) \in A(D) : v = z\}$. Si (x, z) es una flecha de D , diremos que (x, z) es **ex-flecha de x** . Al conjunto de ex-flechas de x en D se le denota por $A_D^+(x)$, es decir: $A_D^+(x) = \{(u, v) \in A(D) : u = x\}$.

Dada una flecha (u, v) en una digráfica, el vértice u es el **vértice inicial** de la flecha y v es el **vértice final** de la flecha. Cuando una flecha e tenga como vértice inicial o vértice final a x , diremos que e es **incidente en x** . Al conjunto de flechas incidentes en un vértice x lo denotamos por $A_D(x)$. Nótese que $A_D(x) = A_D^-(x) \cup A_D^+(x)$.

Dada una digráfica D y dos flechas de D , digamos a y b , diremos que b es una **flecha consecutiva de a** si el vértice final de a es igual al vértice inicial de b . Otra forma de hacer referencia a este mismo hecho es decir que a es una **flecha antecedente de b** .

Dada una digráfica D , y S y T dos subconjuntos ajenos y no vacíos de $V(D)$, una **ST -flecha en D** es cualquier flecha de D que tenga su vértice inicial en S y vértice final en T . Bajo las condiciones anteriores, si $x \in V(D) \setminus S$, una **xS -flecha en D** (respectivamente, una **Sx -flecha en D**) es cualquier flecha $(u, v) \in A(D)$ tal que $u = x$ y $v \in S$ (respectivamente, $u \in S$ y $v = x$). Una flecha (u, v) de D es **simétrica** si $(v, u) \in A(D)$,

en otro caso, diremos que (u, v) es **asimétrica**. Una flecha de la forma (x, x) es un **lazo**. Una digráfica sin lazos será llamada **simple**. En lo que respecta a este trabajo, las digráficas que trabajaremos serán simples a menos que se especifique lo contrario. Un conjunto de vértices en una digráfica D es un conjunto **independiente** si cada par de vértices distintos en el conjunto no son adyacentes en D .

Dadas dos digráficas D y H , decimos que H es **subdigráfica de D** , denotado por $H \leq D$, si se satisface que $V(H) \subseteq V(D)$ y $A(H) \subseteq A(D)$. Bajo las condiciones anteriores, también diremos que D es **superdigráfica de H** . Dadas una digráfica D y H una subdigráfica de D , decimos que H es **una subdigráfica generadora de D** si $V(H) = V(D)$. Dado un subconjunto de vértices no vacío de D , digamos S , la **subdigráfica inducida por S en D** , denotada por $D[S]$, es la digráfica cuyo conjunto de vértices es S y se satisface que $(x, z) \in A(D[S])$ si y sólo si $(x, z) \in A(D)$ y $\{x, z\} \subseteq S$. Si D es una digráfica y S es un subconjunto propio de $V(D)$, la subdigráfica $D - S$ es la digráfica $D[V(D) \setminus S]$. En caso de que $S = \{x\}$, omitiremos la notación conjuntista y escribiremos simplemente $D - x$ en lugar de $D - S$. Dada una digráfica D y un subconjunto no vacío de flechas de D , digamos F , la **subdigráfica flecha-inducida por F en D** , denotada por $D\langle F \rangle$, es la subdigráfica de D tal que $A(D\langle F \rangle) = F$ y cuyo conjunto de vértices es $\{x \in V(D) : x \text{ es extremo de alguna flecha en } F\}$. Nótese que este tipo de subdigráficas no puede tener vértices aislados.

Si D es una digráfica y F es un subconjunto de flechas de D , la subdigráfica $D - F$ es la subdigráfica generadora de D cuyo conjunto de flechas es $A(D) \setminus F$. En caso de que $F = \{(u, v)\}$, omitiremos la notación conjuntista y escribiremos $D - (u, v)$ en lugar de $D - F$.

Dadas dos digráficas D y H , diremos que D es **isomorfa a H** si existe una función $f: V(D) \rightarrow V(H)$ biyectiva que preserva adyacencias; es decir, $(u, v) \in A(D)$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in A(H)$. La función f es nombrada **isomorfismo entre D y H** . Al hecho de que D y H sean digráficas isomorfas lo denotaremos por $D \cong H$.

1.2. Caminos y conexidad

Sea D una digráfica. Un **camino no necesariamente dirigido en D** es una sucesión de vértices de D , digamos (x_0, x_1, \dots, x_n) , tal que para toda i en $\{1, \dots, n-1\}$, x_i y x_{i+1} son adyacentes. Una digráfica es **conexa** si entre cada par de vértices de D hay un camino no necesariamente dirigido que los une, y diremos que D es **2-conexa** si es conexa y para todo x en D , $D - x$ es conexa. Un **bloque** de D es una subdigráfica de D que es 2-conexa y es maximal por contención con dicha propiedad. El concepto de camino no dirigido no será usado posteriormente, sólo fue introducido en este punto para poder definir el concepto de bloque en una digráfica, el cual sí será usado en resultados posteriores.

Sea D una digráfica. Un **camino dirigido en D** es una sucesión finita de vértices de D , digamos (x_0, x_1, \dots, x_n) , tal que para toda i en $\{1, \dots, n-1\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$. Debido a que en este trabajo

utilizaremos principalmente caminos dirigidos, cada que hablemos de una camino, presupondremos que éste es dirigido. Al vértice x_0 se le llama **vértice inicial** y al vértice x_n se le llama **vértice final**. Cuando queremos especificar el vértice inicial y final de un camino, podemos hacer referencia a estos al decir que C es un x_0x_n -camino. Si $i \in \{1, \dots, n-1\}$, diremos que x_i es un **vértice interno de C** . Si x_i es un vértice interno de C , denotamos por v_i^+ a su sucesor en el camino y por v_i^- a su predecesor en el camino. Al número n se le conoce como la **longitud del camino** y se denota por $l(C)$. Si $C = (x_0, \dots, x_n)$ es un camino, denotaremos por $V(C)$ al conjunto $\{x_0, \dots, x_n\}$ y por $A(C)$ al conjunto $\{(x_i, x_{i+1}) \in A(D) : i \in \{0, \dots, n-1\}\}$. Un **subcamino de C** es cualquier subsucesión de C , digamos C' que también sea un camino y tal que $A(C') \subseteq A(C)$. Si $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ es tal que $i \leq j$, entonces el subcamino $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$ lo denotaremos por (x_i, C, x_j) . Si $C' = (z_0, \dots, z_m)$ es un camino tal que $z_0 = x_n$, la **concatenación de C con C'** , denotada por $C \cup C'$, se define como el camino $(x_0, \dots, x_n = z_0, z_1, \dots, z_m)$.

Un camino C es una **trayectoria** si no repite vértices. Un resultado conocido en la teoría de digráficas es que, dada una digráfica D y dos vértices en D , digamos, x y z , la existencia de un xz -camino siempre implica la existencia de una xz -trayectoria [4]. Por otro lado, diremos que C es un **paseo** si no repite flechas. Un camino es **cerrado** si su vértice inicial y final son iguales, en otro caso, diremos que el camino es **abierto**. Un camino cerrado es un **ciclo** si tiene no repite vértices salvo el vértice inicial y el vértice final. A los lazos los consideraremos como ciclos de longitud uno.

Si S es un subconjunto de vértices de D y $x \in V(D) \setminus S$, un xS -camino es cualquier camino cuyo vértice inicial es x y vértice final está en S . De manera análoga, un Sx -camino es cualquier camino cuyo vértice inicial esté en S y vértice final sea x .

Una digráfica D es **unilateralmente conexa** si para cada par de vértices de D , digamos u y v , existe en D un uv -camino o un vu -camino (pero no necesariamente ambos). Una digráfica D es **fuertemente conexa** si para cada par de vértices de D , digamos u y v , existe un uv -camino y un vu -camino, ambos en D .

Dada una digráfica D , una **componente fuertemente conexa de D** es una subdigráfica de D que es fuertemente conexa y es maximal con dicha propiedad. Dada una componente fuertemente conexa de D , digamos H , diremos que H es **terminal** si no existe $(u, v) \in A(D)$ tal que $u \in V(H)$ y $v \notin V(H)$. De manera análoga, diremos que H es una **inicial** si no existe $(u, v) \in A(D)$ tal que $v \in V(H)$ y $u \notin V(H)$. Un resultado conocido es que toda digráfica tiene al menos una componente fuertemente conexa inicial y al menos una componente fuertemente conexa terminal [4].

1.3. Tipos de digráficas

Sea D una digráfica (posiblemente con lazos) con conjunto de vértices $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ y $k \geq 2$, diremos que D es un **k-ciclo** si D es fuertemente conexa y toda flecha de D es un lazo o es de la forma (x_i, x_{i+1}) para

algún $i \in \{0, \dots, k-1\}$, donde los índices se considerados módulo k .

Una digráfica D es **completa** si para todo par de vértices distintos de D hay una flecha simétrica entre ellos. Diremos que D es **semicompleta** si entre cada par de vértices distintos hay al menos una flecha entre ellos, y diremos que D es un **torneo** si entre cada par de vértices distintos existe una única flecha.

Una digráfica D es **transitiva** si $A(D)$ es un conjunto transitivo. El torneo transitivo de orden tres es denotado por \widehat{T}_3 . Una digráfica **casi-transitiva** es una digráfica en la cual, dados tres vértices distintos u, v y w , si (u, v) y (v, w) son flechas de D , entonces (u, w) o (w, u) es una flecha de D . El siguiente es un resultado que usaremos referente a digráficas casi-transitivas.

Lema 1.3.1. [4] *Sea D una digráfica casi-transitiva. Si u y v son vértices distintos de D y existe en D una uv -trayectoria, entonces u y v son adyacentes o existen vértices w y z en D tales que (u, w) , (w, z) , (z, v) , (z, u) y (v, w) son flechas de D .*

Si D es una digráfica (posiblemente con lazos) y $k \geq 2$, diremos que D es **cíclicamente k -partita** si existe una partición de los vértices de D en k conjuntos independientes, digamos $\{V_0, \dots, V_{k-1}\}$, tales que toda flecha de D es un lazo o una $V_i V_{i+1}$ -flecha (los índices son considerados módulo k). Nótese que ninguna digráfica cíclicamente k -partita puede contener a \widehat{T}_3 como subdigráfica.

1.4. Operaciones y digráficas asociadas

Si D es una digráfica, la **digráfica de líneas de D** , denotada por $L(D)$, es la digráfica tal que $V(L(D))$ es el conjunto $A(D)$ y $(a, b) \in A(L(D))$ si y sólo si $a \neq b$ y b es una flecha consecutiva de a . El **complemento de D** , denotada por \overline{D} , es la digráfica tal que $V(\overline{D}) = V(D)$ y $(u, v) \in A(\overline{D})$ si y sólo si $(u, v) \notin A(D)$. En caso de que D admita los lazos, su complemento también los admitirá.

Si D_1 y D_2 son digráficas (no necesariamente ajenas en vértices), denotamos por $D_1 \cup D_2$ la **unión de D_1 y D_2** , la cual es la digráfica cuyo conjunto de vértices es $V(D_1) \cup V(D_2)$ y conjunto de flechas es $A(D_1) \cup A(D_2)$. Si $\{D_i : i \in I\}$ es una familia finita de digráficas, denotamos por $\cup_{i \in I} D_i$ la digráfica cuyo conjunto de vértices es $\cup_{i \in I} V(D_i)$ y conjunto de flechas es $\cup_{i \in I} A(D_i)$. Dada una digráfica G con conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ y una familia de digráficas ajenas en vértices dos a dos, digamos $\mathcal{D} = \{D_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$, la **composición de G con respecto a \mathcal{D}** , denotada por $G[D_1, \dots, D_n]$, o simplemente por $G[\mathcal{D}]$, es la digráfica cuyo conjunto de vértices es $\cup_{i=1}^n V(D_i)$ y conjunto de flechas $(\cup_{i=1}^n A(D_i)) \cup \{(u, v) : u \in V(D_i), v \in V(D_j) \text{ y } (v_i, v_j) \in A(G)\}$. Bajo estas condiciones, la digráfica G es llamada **digráfica base de la composición**. En la figura 1.2 se muestra un ejemplo de esta operación.

En el caso particular en que G sea una trayectoria de orden dos, la digráfica $G[D_1, D_2]$ la denotaremos simplemente por $D_1 + D_2$. Además, si la familia \mathcal{D} consiste de digráficas vacías, entonces diremos que $G[\mathcal{D}]$

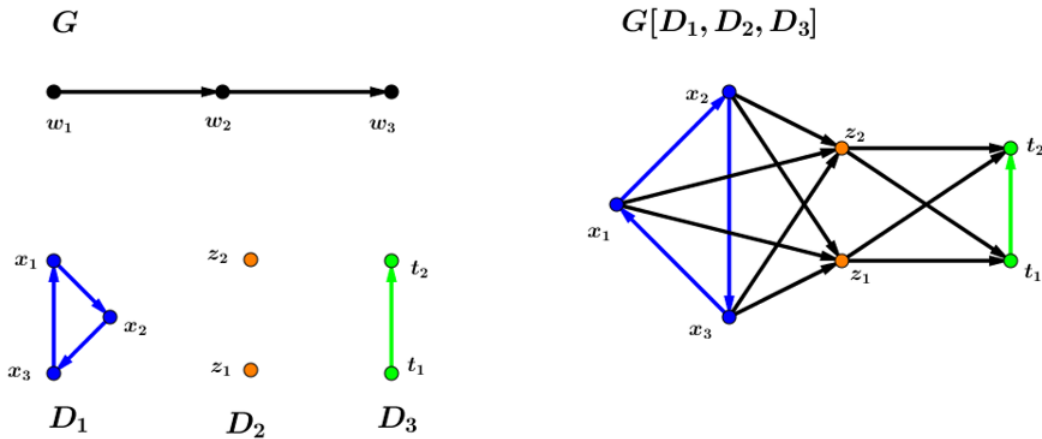


Figura 1.2: Ejemplo de una digráfica D , una familia de tres digráficas D_1, D_2 y D_3 , y su composición

es una **extensión de G** . Es importante notar que todas las digráficas cíclicamente k -partitas son subdigráficas de la extensión de un k -ciclo.

1.5. Coloraciones de flechas en digráficas

Una digráfica D es **m -coloreada** si sus flechas están coloreadas con un conjunto de m colores. Si una digráfica D está m -coloreada y $a \in A(D)$, denotaremos por $\rho(a)$ el color de la flecha a . Si todas las flechas reciben un color distinto, diremos que es una **coloración arcoíris de $A(D)$** . Dada una digráfica m -coloreada, la **digráfica de clases de color de D** , denotada por $\mathcal{C}(D)$, es la digráfica cuyo conjunto de vértices son los colores representados en las flechas de D y $(c_1, c_2) \in A(\mathcal{C}(D))$ si y sólo si existen dos flechas de D , digamos a y b , tales que b es una flecha consecutiva de a , el color de a es c_1 y el color de b es c_2 . La digráfica de clases de color puede contener lazos. En la figura 1.3 se muestra una digráfica 6-coloreada y su digráfica de clases de color.

Dada una digráfica m -coloreada, digamos D , y x un vértice de D , diremos que x es **monocromático** si todas las flechas de $A_D(x)$ tienen el mismo color. De manera análoga, diremos que x es **arcoíris** si todo par de flechas distintas de en $A_D(x)$ tienen colores distintos. Si $C = (x_0, \dots, x_n)$ es un camino en una digráfica m -coloreada, diremos que C es **monocromático** si cualquier par de flechas consecutivas en C tienen el mismo color. Por ejemplo, en la figura 1.3, el camino (v_9, v_6, v_7, v_6) es monocromático. De manera dual, diremos que C es **alternante** si cualquier par de flechas consecutivas en C tienen color distinto, por ejemplo, en la figura 1.3, el camino $(v_9, v_1, v_8, v_6, v_2)$ es un camino alternante. Además, si $k \geq 0$, diremos que C es un **camino con k cambios propios** si existen exactamente k índices en $\{0, \dots, n-1\}$, digamos $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, tales que para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, $\rho(x_{\alpha_i}^-, x_{\alpha_i}) \neq \rho(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}^+)$ (los índices se toman módulo n si el camino es cerrado). Por

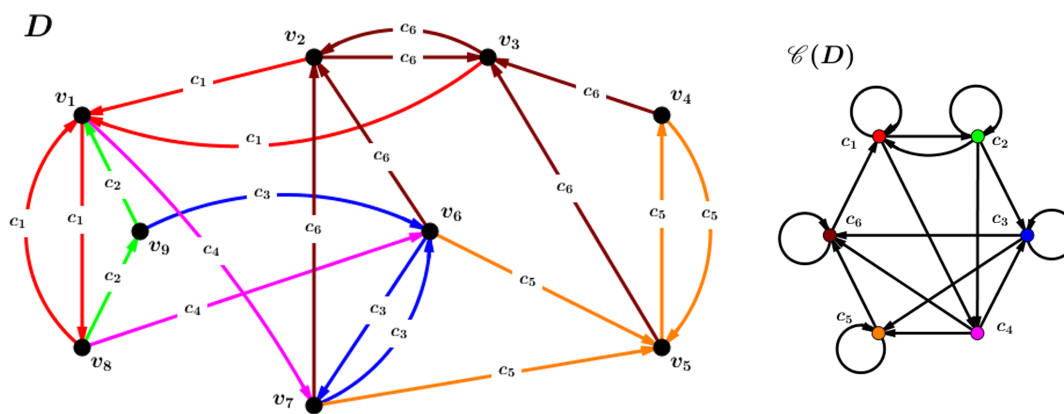


Figura 1.3: Ejemplo de una digráfica m -coloreada y su digráfica de clases de color

ejemplo, nuevamente al considerar la digráfica mostrada en la figura 1.3, el camino $(v_2, v_1, v_8, v_6, v_5, v_4)$ es un camino con 2 cambios propios. Los conceptos de **trayectoria monocromática**, **ciclo monocromático**, **trayectoria alternante**, **ciclo alternante**, **trayectoria con k cambios propios** y **ciclo con k cambios propios** son definidos de manera análoga al concepto de camino monocromático, camino alternante y camino con k cambios propios, respectivamente. Nótese que si un camino tiene 0 cambios propios, entonces es un camino monocromático, mientras que un camino de longitud n que tenga $n - 1$ cambios propios, debe ser un camino alternante.

Dada una digráfica simple y H una digráfica (posiblemente con lazos), una H -coloración de D es una función $\rho: A(D) \rightarrow V(H)$. Bajo estas condiciones, diremos que D es una **digráfica H -coloreada** y que H es el **patrón de color de la coloración ρ** . En la figura 1.4 se muestra el ejemplo de una digráfica H -coloreada.

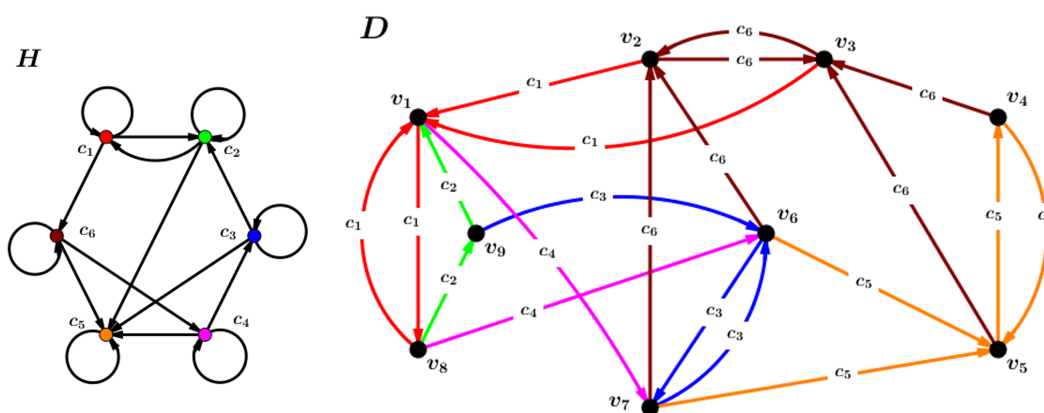


Figura 1.4: Ejemplo de una digráfica H -coloreada

Una ventaja de considerar H -coloraciones en lugar de m -coloraciones es que el patrón de color determinará cuáles cambios de color en flechas consecutivas de D serán permitidos o no. Intuitivamente hablando, dada una

digráfica H -coloreada, digamos D , si (c_1, c_2) es una flecha en el patrón H , entonces el cambio de una flecha con color c_1 seguida por una flecha con color c_2 será un cambio permitido por el patrón H . Si consideramos la digráfica mostrada en la figura 1.4, la flecha (c_4, c_3) forma parte de las flechas del patrón H , por lo que en D , siempre que exista una flecha con color c_4 seguida de una flecha con color c_3 , éste será un cambio permitido por el patrón, por ejemplo, en las flechas (v_1, v_7) y (v_7, v_6) hay un cambio de color permitido por el patrón. Por el contrario, el cambio de color de la flecha (v_9, v_1) y la flecha (v_1, v_7) no es un cambio permitido por el patrón H , pues (c_2, c_4) no es una flecha en el patrón de color.

A pesar de que el patrón de color H no tiene restricciones, existen algunos patrones de color que nos serán importantes considerar. Por ejemplo, si H es un patrón de color tal que todo vértice de H tiene un lazo y estas son las únicas flechas, diremos que H es un **patrón monocromático**. Notemos que los cambios de color permitidos por este tipo de patrones son justamente los monocromáticos (véase figura 1.5). Si H es una digráfica completa, pero sin lazos, diremos que H es un **patrón alternante**, los únicos cambios de color permitidos por este tipo de patrones son los alternantes (véase la figura 1.5). Si H no tiene ni flechas ni lazos, diremos que es un **patrón vacío**. En este tipo de patrones, cualquier par de flechas consecutivas tienen cambio de color no permitido. Por último, un patrón con todas las flechas posibles, incluidos los lazos, será un **patrón completo**. Este tipo de patrón de color permite cualquier cambio de color.

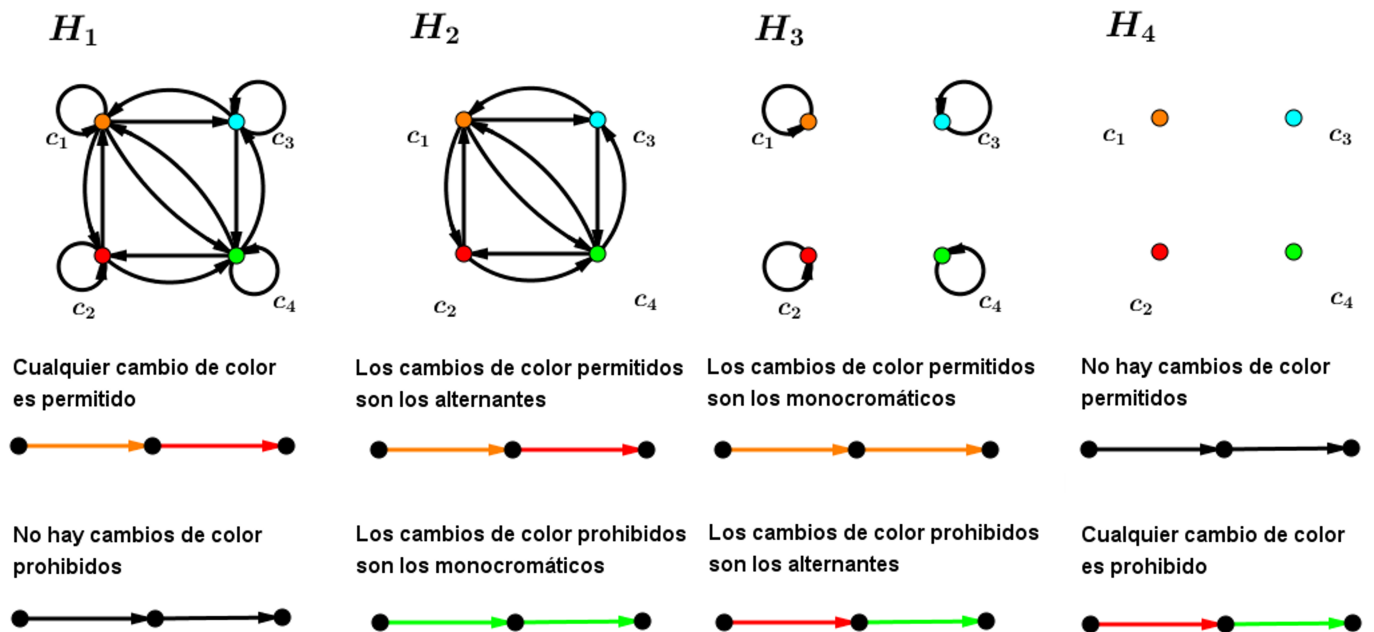


Figura 1.5: Patrones de color particulares

Si D' es una subdigráfica de D , diremos que D' es una **H -subdigráfica de D** si para toda flecha de D' , digamos a , y toda flecha consecutiva de a en D' , digamos b , se satisface que $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$. Un vértice

x en una digráfica H -coloreada es **libre de obstrucciones en D** si para toda $a \in A_D^-(x)$ y toda $b \in A_D^+(x)$, $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$.

Dada una digráfica H -coloreada, digamos D , y un camino $C = (x_0, \dots, x_n)$ en D diremos que C es un **H -camino** si para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $(\rho(x_{i-1}, x_i), \rho(x_i, x_{i+1})) \in A(H)$ (los índices se consideran módulo n en caso de que el camino sea cerrado). Al camino C también se le conoce como un x_0x_n - H -camino. Los conceptos de **H -trayectoria**, **H -paseo** y **H -ciclo** se definen de manera análoga. Por ejemplo, en la digráfica H -coloreada mostrada en la figura 1.4, el camino (v_2, v_1, v_8, v_9) es una H -trayectoria.

Nótese que bajo ciertos patrones de color H , los H -caminos son tipos de caminos ya definidos en digráficas m -coloreadas. Por ejemplo, no es difícil ver con lo previamente dicho sobre el rol del patrón de color H en la H -coloración, que si H es un patrón monocromático, entonces un camino es un H -camino si y sólo si es monocromático. Si H es un patrón alternante, entonces un camino es un H -camino si y sólo si es alternante. Si H es un patrón vacío, entonces un camino es un H -camino si y sólo si es de longitud a lo más 1. Y si H es un patrón completo, cualquier camino es un H -camino.

Por otro lado, es importante mencionar que se sabe que si C es un uv - H -camino en una digráfica H -coloreada, entonces no necesariamente existe una uv - H -trayectoria, por lo que hay que tener cuidado al trabajar estos dos conceptos. Además, también es sabido que la concatenación de H -caminos no necesariamente es un H -camino.

La **H -cerradura** de una digráfica H -coloreada D , denotada por $\mathcal{R}_H(D)$, se define como la digráfica cuyo conjunto de vértices es $V(D)$ y $(w, z) \in A(\mathcal{R}_H(D))$ si y sólo si existe una wz - H -trayectoria en D . En la figura 1.6 se muestra el ejemplo de una digráfica y su H -cerradura.

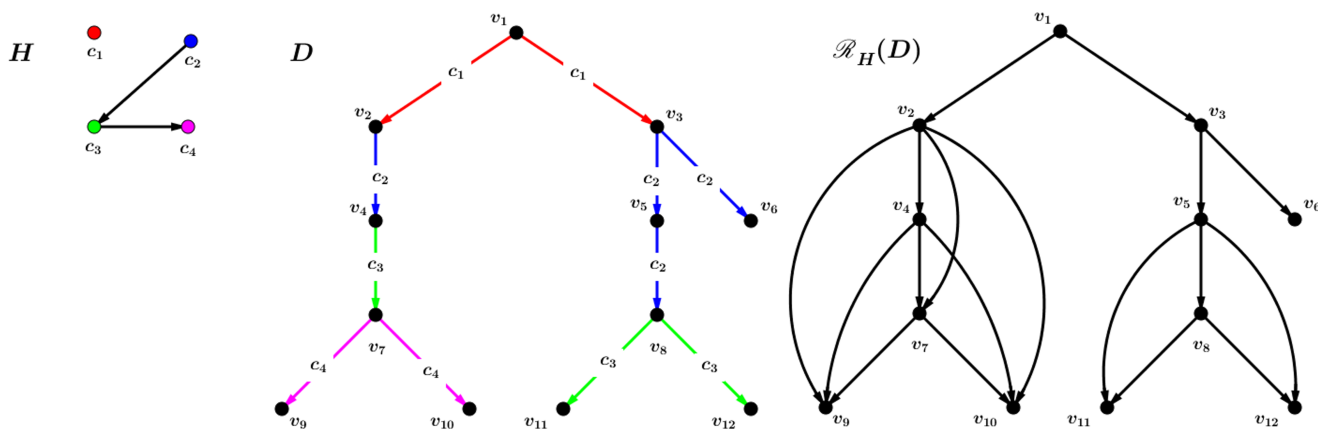


Figura 1.6: Ejemplo de una digráfica H -coloreada y su H -cerradura

Dados una digráfica H -coloreada D , un camino en D , digamos $C = (x_0, \dots, x_n)$, y k en $\{0, \dots, n-1\}$, diremos que C tiene una **obstrucción** en k si $(\rho(x_{k-1}, x_k), \rho(x_k, x_{k+1})) \notin A(H)$, donde los índices serán tomados módulo n si $x_n = x_0$. Las obstrucciones son puntos en un camino para los cuales el cambio de color

de la flecha previa y la consecuente no están permitidos por el patrón H . Notemos que de la definición de obstrucción, en el caso de los caminos cerrados el primer índice puede tener o no una H -obstrucción, mientras que en los caminos abiertos, el primer índice del camino nunca puede tener una obstrucción. Además, por definición se sigue que cualquier camino, sea abierto o cerrado, no tendrá obstrucción en el último índice del camino. Por ejemplo, consideremos la digráfica H -coloreada mostrada en la figura 1.7. En dicha digráfica, el ciclo (x_5, x_3, x_4, x_5) tiene una obstrucción al inicio del ciclo y en el vértice siguiente, por lo que podemos decir que dicho camino tiene una obstrucción en 0 y en 1. Por otro lado, la trayectoria $(x_6, x_7, x_8, x_1, x_2)$ sólo tiene una obstrucción en los vértices x_8 y x_1 , los cuales se encuentran en la posición $i = 2$ e $i = 3$.

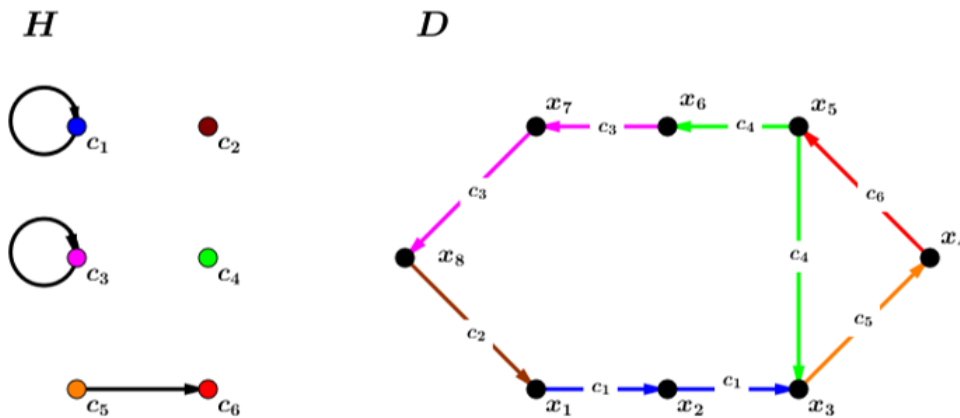


Figura 1.7: Ejemplo de una digráfica H -coloreada

1.6. Núcleos y conceptos relacionados

Dada una digráfica D y $S \subseteq V(D)$, diremos que S es un conjunto absorbente si para todo $x \in V(D) \setminus S$, existe $w \in S$ tal que $(x, w) \in A(D)$. En este sentido podemos decir que w **absorbe** a x . Un **núcleo** en una digráfica D es un conjunto independiente en D y absorbente en D . Debido a que en este trabajo se usaran variantes del concepto de núcleo, a un conjunto absorbente e independiente también le llamaremos **núcleo usual**.

Dada una digráfica D y $S \subseteq V(D)$, diremos que S es **independiente por trayectorias** si entre cada par de vértices distintos de S , no existen trayectorias en D que los unan y diremos que S es un **conjunto absorbente por trayectorias en D** si para todo $x \in V(D) \setminus S$, existe una xS -trayectoria en D . Un **núcleo por trayectorias** es un conjunto de vértices de D que satisface simultáneamente con ser independiente por trayectorias y absorbente por trayectorias. El siguiente resultado será de utilidad en lo consecuente.

Lema 1.6.1. *Sea D una digráfica y D' una subdigráfica de D sin vértices aislados. Si N es un núcleo por trayectorias de D' , entonces todo vértice en N tiene al menos un in-vecino en D' .*

Demostración. Procederemos por contradicción al suponer que existe un vértice en N , digamos x , el cual no tiene in-vecinos en D' . Dado que D' no tiene vértices aislados, entonces x tiene al menos un ex-vecino en D' , digamos z . Claramente, $z \notin N$. Así, por ser N absorbente por trayectorias en D' existe $w \in N$ y un zw -camino en D' , digamos T . por la elección de x , no es posible que $w = x$, pues x no tiene in-vecinos en D' . Así, $(x, z) \cup T$ es un xw -camino en D' lo cual contradice la independencia por trayectorias de N en D' . Con lo anterior, podemos concluir que todo vértice en N tiene un in-vecino en D' . \square

Dada una digráfica m -coloreada, digamos D , y S un conjunto de vértices de D , diremos que S es **independiente por trayectorias monocromáticas** (respectivamente, **independiente por trayectorias alternantes**) si entre cada par de vértices distintos de S no hay trayectorias monocromáticas que los unan (respectivamente, trayectorias alternantes) y diremos que S es **absorbente por trayectorias monocromáticas** (respectivamente, **absorbente por trayectorias alternantes**) si para todo $x \in V(D) \setminus S$ existe una xS -trayectoria monocromática (respectivamente, una xS -trayectoria alternante). Un conjunto que sea simultáneamente independiente por trayectorias monocromáticas y absorbente por trayectorias monocromáticas es llamado un **núcleo por trayectorias monocromáticas**. Un conjunto que sea simultáneamente independiente por trayectorias alternantes y absorbente por trayectorias alternantes es llamado un **núcleo por trayectorias alternantes**.

Dados $k \geq 1$, D una digráfica m -coloreada y $S \subseteq V(D)$, diremos que S es **independiente por trayectorias de k cambios propios** si entre cada par de vértices distintos de S no hay trayectorias con menos de k cambios propios que los unan. Diremos que S es **absorbente por trayectorias de k cambios propios** si para todo $x \in V(D) \setminus S$, existe una xS -trayectoria con a lo más k cambios propios. Si $k \geq 2$, un **núcleo de k cambios propios** es un conjunto de vértices que es simultáneamente independiente por trayectorias con $k - 1$ cambios propios y absorbente por trayectorias con $k - 2$ cambios propios.

Dados una digráfica H -coloreada, digamos D , y $S \subseteq V(D)$, diremos que S es un conjunto **absorbente por H -trayectorias** si para todo $x \in V(D) \setminus S$ existe $w \in S$ y una xw - H -trayectoria en D . En este sentido, diremos que w **H -absorbe a x** . Diremos que S es **independiente por H -trayectorias** si entre cada par de vértices distintos de S no existen H -trayectorias que los unan. Un **núcleo por H -trayectorias** o, simplemente, **H -núcleo**, es un conjunto que es simultáneamente independiente por H -trayectorias e independiente por H -trayectorias. Es importante señalar el siguiente lema.

Lema 1.6.2. *Sean D una digráfica H -coloreada y S un H -núcleo de D . Los siguientes enunciados se satisfacen:*

- a) *Si H es un patrón completo, entonces S es un núcleo por trayectorias.*
- b) *Si H es un patrón alternante, entonces S es un núcleo por trayectorias alternantes.*

- c) Si H es un patrón monocromático, entonces S es un núcleo por trayectorias monocromáticas.
- d) Si H es un patrón vacío, entonces S es un núcleo usual.

Demostración. a) En este inciso, basta con ver que como S es absorbente por H -trayectorias, en particular es absorbente por trayectorias. Además, como H es un patrón completo, entonces cualquier camino es un H -camino, por lo que, al saber que S es independiente por H -trayectorias, no es posible que existan caminos entre cada par de vértices distintos de S . Así, S es un núcleo por trayectorias.

b) Recordemos que si H es un patrón alternante, todos los H -caminos deben ser trayectorias alternantes y viceversa, todos los caminos alternantes deben ser H -caminos. Así, bajo el patrón alternante H , la absorbencia por H -trayectoria es equivalente a la absorbencia por trayectorias alternantes y la independencia por H -trayectorias es equivalente a la independencia por trayectorias alternantes. Con ello, un H -núcleo es un núcleo por trayectorias alternantes.

c) Este inciso es análogo al inciso anterior, pero al tener en cuenta que bajo un patrón monocromático H , un camino es un H -camino si y sólo si es monocromático.

d) Este inciso es análogo al inciso (b), pero al tener en cuenta que bajo un patrón vacío H , un camino es un H -camino si y sólo si tiene longitud a lo más 1.

□

El siguiente resultado nos habla sobre la existencia de un H -núcleo cuando cualquier cambio de color en la digráfica no está permitido por el patrón H .

Lema 1.6.3. Sean D una digráfica H -coloreada. Si D es una \overline{H} -digráfica, entonces: D tiene H -núcleo si y sólo si D tiene núcleo.

Demostración. Primero nótese que por ser D una \overline{H} -digráfica, entonces para cualquier flecha a y cualquier flecha consecutiva de a , digamos b , se cumple que $(\rho(a), \rho(b)) \notin A(H)$, por lo que, si C es un H -camino, entonces éste debe ser de longitud a lo más uno. Así, bajo estas condiciones, un camino en C es un H -camino si y sólo si tiene longitud a lo más 1. Con ello, el concepto de independiente por H -trayectoria es equivalente al de independencia usual, y el concepto de H -absorbencia es equivalente al de absorbencia usual, por lo que si D tiene un H -núcleo, entonces éste debe ser un núcleo usual. Y si D tiene un núcleo usual, éste debe ser un H -núcleo, lo que muestra lo deseado.

□

Por último, tenemos este resultado que nos muestra la relación que hay entre un H -núcleo en una digráfica H -coloreada y un núcleo usual en la H -cerradura de la digráfica.

Lema 1.6.4. [27] Sean D una digráfica H -coloreada y $S \subseteq V(D)$. S es un núcleo de $\mathcal{R}_H(D)$ si y sólo si S es un H -núcleo de D . En particular, D tiene H -núcleo si y sólo si $\mathcal{R}_H(D)$ tiene núcleo.

Capítulo 2

Contexto histórico

En el año de 1994, von Neumann y Morgenstern [49] introducen la idea de **núcleo** en digráficas como un conjunto de vértices S tal que todo vértice de la digráfica que no está en S tiene al menos un ex-vecino en S y cualquier vértice en S no tiene ex-vecinos en S . Es importante mencionar que la idea propuesta por von Neumann y Morgenstern fue nombrada por los autores como **solución**, el cual es un conjunto independiente y todo vértice fuera del conjunto tiene un in-vecino en el conjunto. Su concepto y el de núcleo pueden considerarse duales. Este concepto fue propuesto como una solución a juegos cooperativos y debido a su amplio espectro de aplicaciones y resultados teóricos, diversos autores han trabajado con núcleos en digráficas, por mencionar algunos: [12], [15], [16] y [18]. Sin embargo, es sabido que no todas las digráficas tienen núcleo, por ejemplo, cualquier ciclo de longitud impar carece de núcleo. Y no solo eso, en [10] se demostró que el problema de determinar si una digráfica arbitraria tiene núcleo es un problema NP-completo, lo cual hace que el encontrar condiciones suficientes que garanticen la existencia de núcleos en digráficas sea una tarea no sólo interesante, sino necesaria. Con ello en mente, han surgido diversos resultados remarcables que nos garantizan la existencia de núcleos en digráficas. Por ejemplo, un primer resultado sobre la existencia de núcleos es el siguiente:

Teorema 2.0.1. [49] *Toda digráfica acíclica tiene un núcleo.*

Esta primera aproximación a la existencia de núcleos pone de manifiesto que ciertas condiciones sobre los ciclos de una digráfica pueden ser suficientes para la existencia de núcleos. De hecho, un segundo resultado muy conocido en la teoría fue propuesto por Richardson en [46].

Teorema 2.0.2 (Richardson). *Toda digráfica sin ciclos de longitud impar tiene al menos un núcleo.*

Nótese que el teorema 2.0.1 prohíbe la existencia de ciclos en una digráfica, mientras que el teorema de Richardson es más laxo y sólo prohíbe la existencia de ciclos de longitud impar. En la misma línea de investigación, Duchet [17] mostró que no es necesario prohibir la existencia de los ciclos en una digráfica para que garanticemos la existencia de un núcleo, basta con pedir condiciones sencillas sobre los ciclos:

Teorema 2.0.3 (Duchet). [17] *Si todo ciclo de una digráfica tiene al menos una flecha simétrica, entonces la digráfica tiene núcleo.*

Como paréntesis, no todas las condiciones para existencia de núcleos están relacionadas con condiciones de ciclos, por ejemplo, tenemos el siguiente resultado que es bien conocido en esta teoría.

Teorema 2.0.4. [38] *Toda digráfica transitiva tiene núcleo*

Paralelamente a la búsqueda de condiciones suficientes para garantizar la existencia de núcleos en digráficas, conceptos relacionados con la idea de núcleo fueron apareciendo en la literatura. Muchos de ellos surgen de una idea intuitiva sobre los núcleos: el definir un tipo de absorbencia al usar cierto tipo de caminos, aunado a un tipo de independencia al prohibir ciertos caminos. Por ejemplo, un primer concepto que podemos mencionar es el de **núcleo por trayectorias**, el cual fue introducido por Berge en [9] (véase el corolario 2 en la página 311 de dicha cita) como un conjunto de vértices de una digráfica D , digamos S , que cumple con que no existan caminos abiertos en D tal que ambos extremos estén en S y que para todo vértice x de D que no está en S , exista una xS -trayectoria. Curiosamente, a pesar de que los núcleos son estructuras que no siempre existen en algunas digráficas y que en general es difícil determinar si existen o no, es bien sabido que todas las digráficas tienen núcleo por trayectorias [9].

Otro concepto relacionado con núcleos fue el presentado por Kwaśnik y Borowiecki en [40]. Los autores introducen un nuevo tipo de absorbencia y un nuevo tipo de independencia al utilizar longitudes de caminos. Dado un conjunto de vértices en una digráfica D , digamos S , y $l \geq 1$, diremos que S es **l -absorbente** si para todo vértice x de D que no está en S , existe una xS -trayectoria de longitud a lo más l . Si $k \geq 2$, diremos que S es **k -independiente** si cualquier trayectoria abierta de D que tenga ambos extremos en S , tiene longitud al menos k . Con esta noción de absorbencia e independencia, un **(k, l) -núcleo** es un conjunto de vértices que es simultáneamente k -independiente y l -absorbente. Cuando $l = k - 1$, diremos que el conjunto es un **k -núcleo**.

Una primera y pertinente observación es verificar que los núcleos usuales son 2-núcleos, por lo que los (k, l) -núcleos son una generalización de los núcleos usuales. Además, este nuevo concepto ha sido estudiado por diversos autores, como puede verse en [37], [22], [39], [50] y [51]. Uno de los resultados más conocidos en este tipo de núcleos es el propuesto por Kwaśnik en [39].

Teorema 2.0.5 (Kwaśnik). *Sean $k \geq 2$ y D una digráfica fuertemente conexa. Si todo ciclo en D tiene longitud congruente con 0 módulo k , entonces D tiene al menos un k -núcleo.*

Este resultado es una generalización del teorema de Richardson en digráficas fuertemente conexas, pues dicho teorema es un caso particular del teorema de Kwaśnik cuando $k = 2$. Como nota, es sabido que el teorema de Kwaśnik no es válido para digráficas que no sean fuertemente conexas [47]. Por otro lado, otro resultado que debemos mencionar debido a la importancia que tendrá en resultados posteriores, es el siguiente:

Teorema 2.0.6. [22] Si D es una digráfica simétrica, entonces para todo $k \geq 2$ y todo $l \geq k - 1$, D tiene un (k, l) -núcleo. En particular, para todo $k \geq 2$, D tiene k -núcleo.

Por otro lado, el tipo de absorbencia e independencia propuestos por Kwaśnik y Borowiecki pueden encontrarse en otros conceptos que también han sido muy estudiados, como pueden ser los k -reyes o los $(2, 2)$ -núcleos, también conocidos como **casi-núcleos**. Estos últimos tienen algunas aplicaciones interesantes en comportamientos de dominación en sociedades de animales (por ejemplo, véase [43]) y también es sabido que toda digráfica tiene casi-núcleo [11].

Los conceptos de núcleos dieron un salto importante al considerar digráficas m -coloreadas. Recordemos que una digráfica es m -coloreada si las flechas de D están coloreadas con m colores. Gracias a este concepto, será posible definir múltiples tipos de caminos en términos de los colores usados en sus flechas. Por ejemplo, los caminos monocromáticos, alternantes y con k cambios propios.

Este tipo de caminos pueden ser usados para definir nuevos tipos de núcleos, como vimos en el capítulo pasado. Por ejemplo un **núcleo por trayectorias monocromáticas** (o simplemente, un **núcleo monocromático**) es un conjunto de vértices que es simultáneamente independiente por trayectorias monocromáticas y absorbente por trayectorias monocromáticas.

Este concepto fue presentado inicialmente por Sands, Sauer y Woodrow en [48], y sólo hemos de mencionar que, aunque algunos resultados de ellos están centrados en digráficas infinitas, como consecuencia de su trabajo es sabido que toda digráfica 2-coloreada y finita tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Por otro lado, el concepto de núcleo es un caso particular del de núcleo por trayectorias monocromáticas, pues en una digráfica m -coloreada en la que todas sus flechas tengan colores distintos, un núcleo por trayectorias monocromáticas es un núcleo en el sentido usual. Esto pone de manifiesto que el saber si existe un núcleo por trayectorias monocromáticas en una digráfica m -coloreada arbitraria es un problema difícil de determinar.

Sin embargo, es sabido que existen familias de digráficas en las cuales siempre es posible encontrar un núcleo por trayectorias monocromáticas independientemente de la coloración que se considere. A dichas digráficas se les conoce como digráficas **pancromáticas** y fueron introducidas por Galeana-Sánchez y Strausz en [30] y también estudiadas posteriormente por Galeana-Sánchez y Toledo en [33].

A pesar de lo anterior, determinar la existencia de núcleos monocromáticos es un problema difícil de abordar, por lo que es normal que surjan algunos métodos y estructuras auxiliares que faciliten el garantizar su existencia. Ejemplo de ello es la **digráfica de clases de color**. Esta digráfica asociada fue definida por Galeana-Sánchez en [19] y ha sido un gran auxiliar para garantizar la existencia de núcleos monocromáticos, así como para comprender el comportamiento global de una coloración en una digráfica m -coloreada. Diversas condiciones sobre la digráfica de clases de color han permitido garantizar no solo la existencia de núcleos monocromáticos, también de otros tipos de núcleos, como veremos más adelante.

Es importante mencionar que la digráfica de clases de color puede ser más pequeña, en lo que se refiere a orden y tamaño, con respecto a la digráfica m -coloreada, y por consiguiente, más sencilla de trabajar en un sentido práctico. Por ejemplo, el comportamiento de la coloración de una digráfica 5-coloreada cuyo orden y tamaño sean considerables, puede ser simplificado en su digráfica de clases de color, que constará de 5 vértices.

El tema principal de este trabajo está relacionado con ciertos tipos de coloraciones en digráficas. Dada una digráfica simple D ; es decir, sin lazos ni flechas paralelas, y una segunda digráfica H , la cual puede tener lazos, pero no flechas paralelas, una **H -coloración de D** es una función que colorea las flechas de D al usar los vértices de H . Bajo las condiciones anteriores, diremos que D es una digráfica **H -coloreada** y que H es el **patrón de color de la H -coloración**. Un camino en D , digamos W , es un H -camino si los colores consecutivos encontrados en W forman un camino dirigido en H . Este tipo de caminos fue introducido por Linek y Sands en [41] y diversos autores han trabajado en este tipo de caminos, por ejemplo [1], [2], [27] y [45], sólo por mencionar algunos.

En primera instancia, este tipo de caminos en digráficas H -coloreadas plantea un punto importante: los cambios de color permitidos por el patrón H . Es decir, si en el patrón de color H está la flecha (azul, rojo), entonces el cambio de color de una flecha con color azul seguida de una flecha con color rojo en D podría llamarse un cambio de color permitido por el patrón, como vimos en el capítulo pasado. Por el contrario, si (azul, rojo) no es una flecha de H , a pesar de que sí pueden existir flechas con color azul seguidas de flechas con color rojo en D , estos cambios de color están prohibidos por el patrón H (véase la figura 2.1).

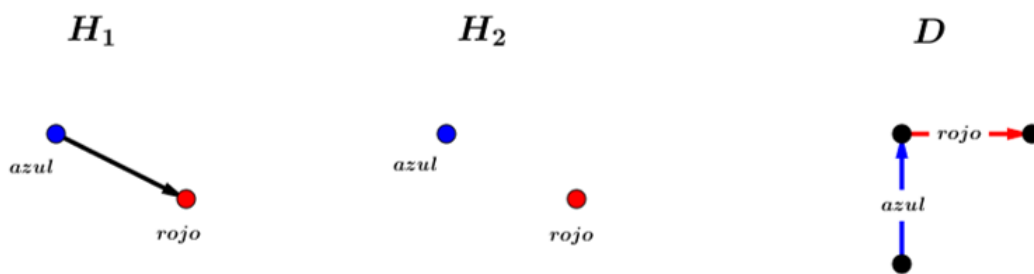


Figura 2.1: El cambio de color azul-rojo es permitido en D bajo el patrón H_1 , pero no es permitido bajo el patrón H_2

Así, la digráfica H indica cuáles cambios de color son permitidos y cuáles no. Un H -camino es un camino en D en el que todos los cambios de color de flechas consecutivas del camino son permitidos por el patrón H . Esto puede dar pie a muchos patrones interesantes tanto en el aspecto teórico como en el aspecto práctico, por ejemplo, véase [26]. Más aun, algunos de los caminos antes mencionados resultan ser casos particulares de los H -caminos, como vimos al usar patrones monocromáticos, alternantes, completos y vacíos.

Esto último muestra la amplia gama de posibilidades que ofrecen los H -caminos en digráficas. Sin embargo, nosotros nos enfocaremos a las condiciones de núcleos mediante estos conceptos. Recordemos que dada una digráfica H -coloreada, digamos D , y $S \subseteq V(D)$, diremos que S es **independiente por H -caminos** (respectivamente, **independiente por H -trayectorias**) si entre cualquier par de vértices distintos de S no existen H -caminos (respectivamente H -trayectorias) que los unan en D . Por otro lado, diremos que S es un **conjunto absorbente por H -caminos** (respectivamente, **absorbente por H -trayectorias**) si para cualquier vértice x que no está en S , existe un H -camino en D (respectivamente una H -trayectoria en D) cuyo vértice inicial sea x y vértice final esté en S . Y como hemos visto previamente, dado un concepto de absorbencia y un tipo de independencia, podemos definir un nuevo tipo de núcleo. En este caso, dada una digráfica H -coloreada y S un conjunto de vértices de la digráfica, diremos que S es un **núcleo por H -caminos** (respectivamente, **núcleo por H -trayectorias**) si S es simultáneamente independiente por H -caminos y absorbente por H -caminos (respectivamente, independiente por H -trayectorias y absorbente por H -trayectorias). Un primer resultado que es importante mencionar es que el concepto de núcleo por H -caminos y núcleo por H -trayectorias no son equivalentes, en [8] se muestra una familia infinita de digráficas con núcleo por H -caminos y sin núcleo por H -trayectorias. Y también se muestra una familia infinita de digráficas con núcleo por H -trayectorias, pero sin núcleo por H -caminos.

Las ideas de estos últimos tipos de núcleos fueron presentadas por Arpin y Linek en [2], principalmente en H -caminos, y posteriormente por Delgado-Escalante y Galeana-Sánchez en [13] en términos de H -trayectorias. Debido a que los H -núcleos son un caso más general que otros tipos de núcleo (lema 1.6.2), los H -núcleos y los núcleos por H -caminos plantean un reto interesante: si bien ya es difícil encontrar condiciones para garantizar la existencia de los núcleos usuales, monocromáticos y alternantes, ¿qué condiciones pueden garantizar la existencia de los H -núcleos? Pues bien, el hecho es que sí existen diversos trabajos referentes a dar respuesta a dicha pregunta, por ejemplo: [27], [29] y [32].

A pesar de la dificultad que representa el encontrar núcleos por H -caminos o núcleos por H -trayectorias, existen ciertos patrones de color bastante amigables en términos de existencia de núcleos por H -caminos. Por ejemplo, en [2] los autores dieron una clasificación de ciertos patrones de color como sigue: la familia \mathcal{B}_3 consiste de todos aquellos patrones de color tales que cualquier multidigráfica H -coloreada con algún patrón en la familia tiene un conjunto independiente por H -caminos y absorbente por H -caminos; es decir, contenga un núcleo por H -caminos. La familia \mathcal{B}_2 consiste de todos aquellos patrones de color bajo los cuales, cualquier multidigráfica H -coloreada con algún patrón de la familia tiene un conjunto independiente en el sentido usual, pero absorbente por H -caminos. Y la familia \mathcal{B}_1 que consiste de todos los patrones de color tales que cualquier torneo H -coloreado tiene un conjunto unitario que sea absorbente por H -caminos.

Uno puede ser escéptico sobre la existencia de tales patrones, pero si retomamos un poco el trabajo pre-

sentado por Sands, Sauer y Woodrow en [48], no es muy difícil ver que existen patrones en la familia \mathcal{B}_3 . De hecho, cualquier patrón monocromático de orden dos debe pertenecer a la familia \mathcal{B}_3 , pues toda digráfica finita cuyas flechas estén coloreadas con 2 colores necesariamente tiene núcleo monocromático (véase [48]), el cual debe ser un núcleo por H -camino bajo el patrón antes mencionado.

Además, se demostró en [2] que $\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$, con todas las contenciones estrictas. Nótese que por el hecho de que \mathcal{B}_3 es no vacía, ninguna de estas tres familias puede ser vacía. Y más aún, existe una caracterización de los patrones en \mathcal{B}_2 , la cual puede ser consultada en [2]. Otro trabajo relacionado, pero en el que se pretende encontrar una caracterización de los miembros de la familia \mathcal{B}_3 , puede ser encontrado en [31]. La familia \mathcal{B}_1 permanece sin caracterizar. Al seguir la misma línea de investigación de las familias antes mencionadas, en [13] Delgado-Escalante y Galeana-Sánchez definen la familia $\widehat{\mathcal{B}}_3$ como todos los patrones bajo los cuales cualquier digráfica H -coloreada bajo algún patrón en la familia tiene un conjunto que es independiente por H -trayectorias y absorbente por H -trayectorias; es decir, un H -núcleo. Los miembros de esta familia permanece sin clasificar.

Al seguir la idea de las digráficas pancromáticas definidas previamente, y debido a la naturaleza de los patrones en \mathcal{B}_3 , podemos nombrar a los patrones de dicha familia como **patrones pancromáticos por H -camino** y a los patrones en $\widehat{\mathcal{B}}_3$ como **patrones pancromáticos por H -trayectorias**. Dichos patrones satisfacen que sin importar la digráfica H -coloreada, ni la H -coloración, ésta tiene núcleo por H -camino o núcleo por H -trayectorias, respectivamente. Por lo que es muy natural el preguntarse si existen digráficas para las cuales, sin importar el patrón de color H ni la H -coloración que se les dé, estas tengan núcleo por H -camino o por H -trayectorias. Esta pregunta es uno de los objetivos de este trabajo.

Por último, como ya se mencionó anteriormente, determinar condiciones necesarias para encontrar H -núcleos y núcleos por H -camino ha sido de interés para diversos autores, y una de las motivaciones es que este tipo de núcleos generaliza otras versiones de núcleos interesantes. Sin embargo, no es una generalización global de todos los núcleos preexistentes, por ejemplo, los k -núcleos, los núcleos arcoíris [3] o los núcleos k -coloreados [42] no son casos particulares de los H -núcleos. Con vista en ello, nosotros propondremos un nuevo concepto de núcleo que nos permitirá generalizar dos clases de núcleos interesantes y de manera simultánea: los H -núcleos y los (k, l) -núcleos. Algunas proposiciones previas sobre existencia de núcleos serán consecuencia de los resultados presentados en este trabajo.

Capítulo 3

Digráficas \mathcal{H} -pancromáticas

En este capítulo estudiaremos algunas familias de digráficas las cuales, sin importar el patrón de colores H , ni la H -coloración que se les dé, estas siempre tienen H -núcleo. Esta idea surge a partir de los patrones pancromáticos estudiados en [2] y [31] y las digráficas pancromáticas estudiadas en [30] y [33].

Una digráfica D es \mathcal{H} -pancromática (respectivamente, \mathcal{H} -pancromática por caminos) si para todo patrón de color H y toda H -coloración de D , existe un H -núcleo en D (respectivamente, un núcleo por H -caminos en D). La idea inicial del trabajo de este capítulo era aproximar una caracterización de estas familias de digráficas. Algunas ideas previas a la nuestra, pero referentes a una posible caracterización de algunos patrones de color pancromáticos, pueden encontrarse en [2] y [31]. Sin embargo, las digráficas \mathcal{H} -pancromáticas y \mathcal{H} -pancromáticas por caminos resultaron ser una familia de digráficas más amplia de lo que se tenía previsto originalmente, por lo que no fue posible realizar dicha caracterización. Más aun, dado que las digráficas pancromáticas tampoco están caracterizadas, la dificultad de encontrar una caracterización de las digráficas \mathcal{H} -pancromáticas es aún mayor, pues no hay una antecedente de trabajo sobre el cual partir.

A pesar de lo anterior, en este capítulo se muestran diversos resultados referentes a digráficas \mathcal{H} -pancromáticas y \mathcal{H} -pancromáticas por caminos. Mostraremos algunas familias de digráficas que son \mathcal{H} -pancromáticas, lo que pone en evidencia que este tipo de digráficas efectivamente existen, y también veremos algunas operaciones en digráficas que nos permitan preservar la \mathcal{H} -pancromaticidad de los operandos, permitiéndonos exhibir aún más digráficas \mathcal{H} -pancromáticas.

Los resultados presentados en este capítulo se encuentran publicados y pueden ser consultados en [32]. Además, fueron presentado en el *18th Workshop on Graph Theory Colourings, Independence and Domination*, realizado en Piechowice, Polonia, en 2019.

3.1. Familias de digráficas \mathcal{H} -pancromáticas

Antes de comenzar a explorar los resultados de este capítulo, es conveniente mencionar que en algunas demostraciones trabajaremos con una digráfica D y un patrón H , pero posiblemente tengamos más de una H -coloración de D a lo largo de las demostraciones. Ello implica, en primera instancia, que un camino en una digráfica sea un H -camino bajo una H -coloración, pero no bajo otra H -coloración distinta, por ejemplo, en la figura 3.1 se da el ejemplo de una digráfica D , un patrón de color H y dos H -coloraciones diferentes de D , a las que llamamos ρ y ρ' . Bajo la coloración ρ , el camino (x_1, x_2, x_3, x_4) es un H -camino, pero no es así bajo la coloración ρ' .

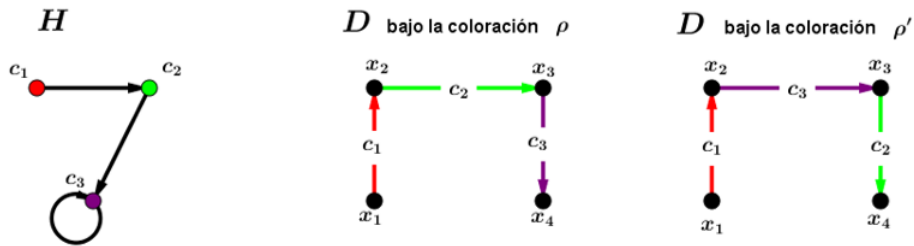


Figura 3.1: Ejemplo de una digráfica bajo dos H -coloraciones diferentes

Por ello conviene refinar nuestra notación de H -caminos por el de (H, ρ) -camino cuando es necesario especificar que un camino es un H -camino bajo la coloración ρ . Al razonar de esta manera, un conjunto de vértices puede ser independiente por H -trayectorias dependiendo de la coloración que tenga la digráfica, por lo que también extenderemos esta notación a otras definiciones previamente establecidas. En particular, la notación para (H, ρ) -trayectoria, conjunto (H, ρ) -independiente, conjunto (H, ρ) -absorbente y (H, ρ) -núcleo se definen de manera análoga. En medida de lo posible, preferiremos la notación simple que omite la coloración ρ , aunque en algunas demostraciones esto no será posible.

Ahora procederemos a analizar los resultados de este capítulo. El primero, y más natural, es verificar que las digráficas \mathcal{H} -pancromáticas son una generalización de las digráficas pancromáticas introducidas en [30].

Teorema 3.1.1. *Toda digráfica \mathcal{H} -pancromática es pancromática. En particular, toda digráfica \mathcal{H} -pancromática tiene núcleo.*

Demostración. Consideremos una m -coloración de D arbitraria, digamos $\rho: A(D) \rightarrow \{1, \dots, m\}$. Si H es el patrón monocromático cuyo conjunto de vértices es $\{1, \dots, m\}$, entonces ρ es una H -coloración de D . Dado que D es \mathcal{H} pancromática, entonces D tiene H -núcleo, el cual es un núcleo por trayectorias monocromáticas en D . Con lo anterior, D es una digráfica pancromática.

Por otro lado, para ver que que D tiene núcleo, basta con colorear a $A(D)$ de tal manera que todas las flechas tengan asignado distinto color. Dado que D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, pues ya

mostramos que D es pancromática, en particular dicho núcleo por trayectorias monocromáticas debe ser un núcleo de D . \square

Este resultado, aunque sencillo, muestra que caracterizar a las digráficas \mathcal{H} -pancromáticas puede ser más difícil de lo que se tenía pensado originalmente, pues actualmente no existe una caracterización para las digráficas pancromáticas. Ahora iniciaremos a exhibir familias de digráficas que sean \mathcal{H} -pancromáticas. La primera familia es la de los ciclos pares. Pero para ello mostraremos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.2. *Un ciclo C que sea H -coloreado tiene H -núcleo si y sólo si no es un \overline{H} -ciclo de longitud impar.*

Demostración. Primero mostraremos la parte suficiente del enunciado; es decir, si C es un ciclo H -coloreado y tiene H -núcleo, entonces C no es un \overline{H} -ciclo de longitud impar. Procederemos por contradicción al suponer que C es un \overline{H} -ciclo de longitud impar. Como C tiene un H -núcleo por hipótesis, digamos S , entonces el lema 1.6.3 garantizaría que S es un núcleo en C , lo cual no es posible pues los ciclos de longitud impar no tienen núcleo. Así, C es un ciclo H -coloreado y tiene H -núcleo, entonces C no es un \overline{H} -ciclo de longitud impar.

Ahora sólo resta por demostrar la parte necesaria del enunciado; es decir, si C no es un \overline{H} -ciclo de longitud impar, entonces C tiene al menos un H -núcleo.

Supongamos que $C = (x_1, \dots, x_n, x_1)$. Notemos que si C es un H -ciclo, entonces el conjunto unitario de cualquier vértice de C es un H -núcleo, por lo que supondremos para el resto de la demostración que C no es un H -ciclo. Si C es un \overline{H} -ciclo, entonces por hipótesis C debe tener longitud par, y podemos concluir que C tiene núcleo (teorema 2.0.2), en cuyo caso, por el lema 1.6.3, C debe tener un H -núcleo, por lo que también podemos suponer para el resto de la demostración que C no es un \overline{H} -ciclo. Ahora consideremos los siguientes posibles casos sobre C .

Caso 1. C tiene una \overline{H} -trayectoria generadora.

Para este caso, supongamos sin pérdida de generalidad que $T = (x_1, C, x_n)$ es una \overline{H} -trayectoria de C . Notemos que todos los vértices internos de T deben tener una obstrucción en C , por lo que los únicos vértices de C que no tienen obstrucciones en C pueden ser x_1 o x_n . Por otro lado, como habíamos supuesto que C no es un \overline{H} -ciclo, entonces $(\rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_n, x_{n+1})) \in A(H)$ o $(\rho(x_n, x_1), \rho(x_1, x_2)) \in A(H)$. Ahora consideremos los siguientes subcasos:

Subcaso 1.1. n es par.

Si ambas flechas $(\rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_n, x_1))$ y $(\rho(x_n, x_1), \rho(x_1, x_2))$ están en H , entonces no es difícil ver que el conjunto $S = \{x_k : k \in \{1, \dots, n-1\} \text{ con } k \text{ par}\}$ es un H -núcleo de D (véase la figura 3.2), pues para un vértice en S , su sucesor en C tiene una obstrucción, y para cualquier

vértice en $V(C) \setminus S$, distinto de x_{n-1} y x_n , su sucesor está en S . Para x_{n-1} y x_n , el vértice $x_2 \in S$ los H -absorbe.

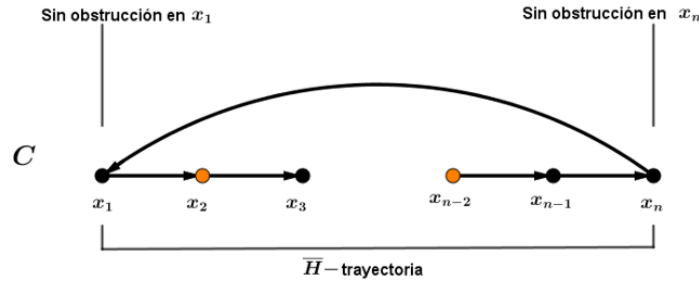


Figura 3.2: Fragmento de la demostración en el subcaso 1.1

Si $(\rho(x_n, x_1), \rho(x_1, x_2)) \in A(H)$ y $(\rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_n, x_1)) \notin A(H)$, entonces el conjunto S definido como $\{x_k : k \in \{1, \dots, n\} \text{ con } k \text{ impar}\}$ es un H -núcleo de D (véase la figura 3.3), pues para un vértice en S , su sucesor en C tiene una obstrucción y para cualquier vértice en $V(C) \setminus S$, su sucesor está en S .

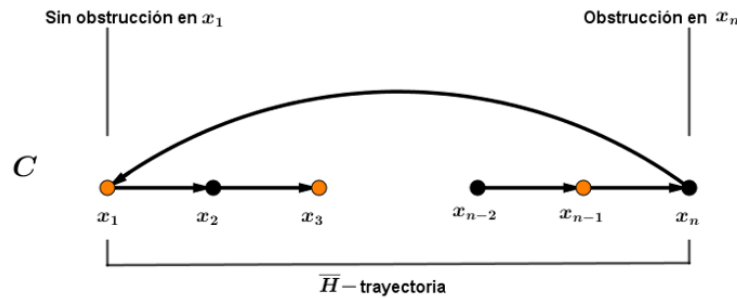


Figura 3.3: Fragmento de la demostración en el subcaso 1.1

Si $(\rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_n, x_1)) \in A(H)$ y $(\rho(x_n, x_1), \rho(x_1, x_2)) \notin A(H)$, entonces el conjunto S definido como $\{x_k : k \in \{1, \dots, n\} \text{ con } k \text{ par}\}$ es un H -núcleo de D (véase la figura 3.4), pues para cualquier vértice en S , su sucesor en C tiene una obstrucción, y cualquier vértice en $V(C) \setminus S$ es H -absorbido por su sucesor en C .

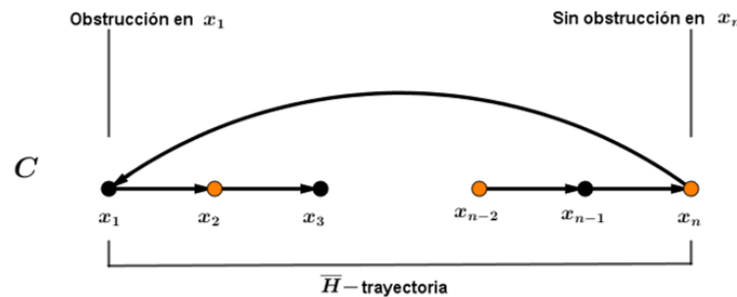


Figura 3.4: Fragmento de la demostración en el subcaso 1.1

Subcaso 1.2. n es impar.

Si ambas flechas $(\rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_n, x_1))$ y $(\rho(x_n, x_1), \rho(x_1, x_2))$ están en H , entonces el conjunto S definido como $\{x_k : k \in \{1, \dots, n-1\} \text{ con } k \text{ impar}\}$ es un H -núcleo de D (véase la figura 3.5), pues para un vértice en S , su sucesor en C tiene una obstrucción, y para cualquier vértice en $V(C) \setminus S$, distinto de x_{n-1} , su sucesor está en S . Para x_{n-1} , el vértice $x_1 \in S$ lo H -absorbe.

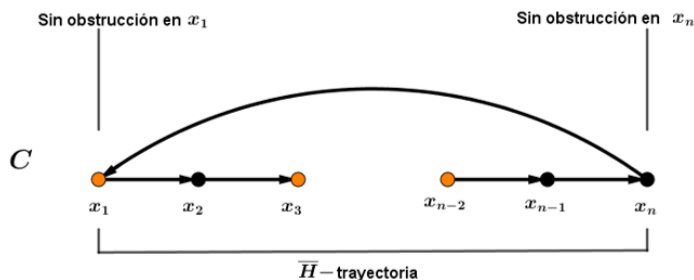


Figura 3.5: Fragmento de la demostración en el subcaso 1.2

Si $(\rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_n, x_1)) \in A(H)$ y $(\rho(x_n, x_1), \rho(x_1, x_2)) \notin A(H)$, entonces el conjunto S definido como $\{x_k : k \in \{1, \dots, n-1\} \text{ con } k \text{ impar}\}$ es un H -núcleo de D (véase la figura 3.6), pues un argumento como el del párrafo previo lo verifica.

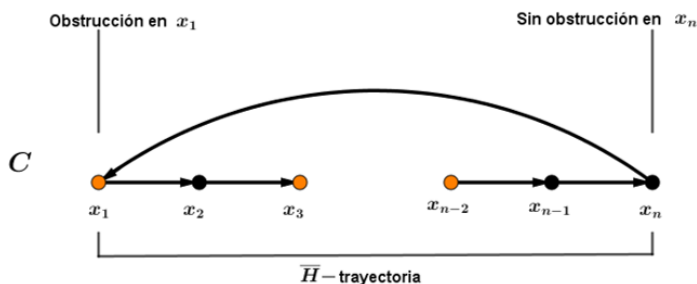


Figura 3.6: Fragmento de la demostración en el subcaso 1.2

Si $(\rho(x_n, x_1), \rho(x_1, x_2)) \in A(H)$ y $(\rho(x_{n-1}, x_n), \rho(x_n, x_1)) \notin A(H)$, entonces el conjunto S definido como $\{x_k : k \in \{1, \dots, n\} \text{ con } k \text{ par}\}$ es un H -núcleo de D (véase la figura 3.7).

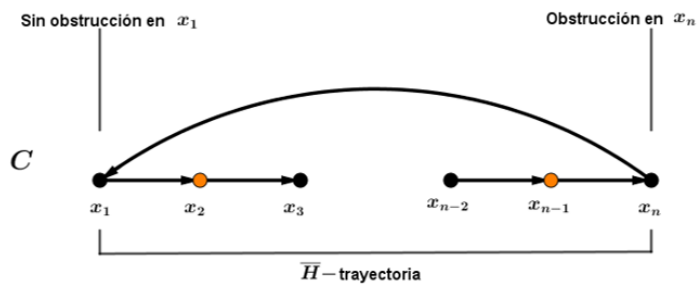


Figura 3.7: Fragmento de la demostración en el subcaso 1.2

De los subcasos anteriores, podemos concluir que si C contiene una \overline{H} -trayectoria generadora, entonces C tiene un H -núcleo. Ahora procederemos con el siguiente caso.

Caso 2. C no contiene \overline{H} -trayectorias generadoras.

Para este caso, consideremos la familia de \overline{H} -trayectorias maximales en C , la que denotaremos por \mathcal{T} . Primero, para argumentar que \mathcal{T} es no vacía, basta con ver que como supusimos que C no es un H -ciclo, entonces debe tener al menos una obstrucción en un vértice, digamos x_i . Así, (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) debe ser una \overline{H} -trayectoria, la cual es subtrayectoria de alguna \overline{H} -trayectoria maximal, con lo que la familia \mathcal{T} debe ser no vacía. Por otro lado, podemos ordenar a los miembros de la familia en \mathcal{T} como $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$, donde para toda $i \in \{1, \dots, k\}$, T_i es una $x_{\alpha_i}x_{\beta_i}$ -trayectoria en C y para toda $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $\beta_i \leq \alpha_{i+1}$ (véase la figura 3.8).

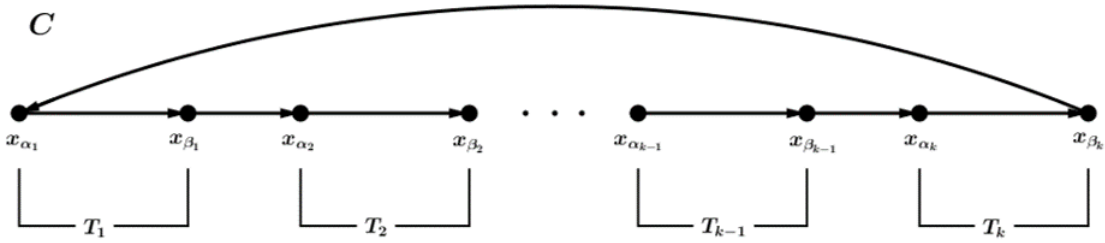


Figura 3.8: Ordenamiento de la familia \mathcal{T}

Nótese que todos los vértices internos de las trayectorias T_i tienen obstrucciones en C , pues dichas trayectorias son \overline{H} -trayectorias. Más aun, a continuación veremos que dichos vértices son los únicos que tienen obstrucciones en C . Para ello consideremos la siguiente afirmación.

Afirmación 1. Para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$ y todo $j \in \{\beta_i, \dots, \alpha_{i+1}\}$, $(\rho(x_{j-1}, x_j), \rho(x_j, x_{j+1}))$ es una flecha de H .

Procederemos por contradicción al suponer que existen $i \in \{1, \dots, k-1\}$ y $j \in \{\beta_i, \dots, \alpha_{i+1}\}$, tales que $(\rho(x_{j-1}, x_j), \rho(x_j, x_{j+1})) \notin A(H)$. Notemos que si $j = \beta_i$; es decir, x_{β_i} tiene una obstrucción en C , entonces $T' = T_i \cup (x_{\beta_i}, x_{\beta_i}^+)$ es una \overline{H} -trayectoria en D que contiene propiamente a T_i , lo cual no es posible pues ésta última es maximal con la propiedad de ser una \overline{H} -trayectoria. De manera análoga, si $j = \alpha_{i+1}$ obtenemos una contradicción similar al usar la trayectoria T_{i+1} . Con lo anterior, $\beta_i < j < \alpha_{i+1}$. Sin embargo, como se supuso que hay una obstrucción en x_j en C , entonces (x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) es una \overline{H} -trayectoria, la cual debe estar en una \overline{H} -trayectoria maximal de C . Sin embargo, por el ordenamiento de \mathcal{T} , no es posible que exista una \overline{H} -trayectoria entre T_i y T_{i+1} . Por lo anterior, para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$ y todo $j \in \{\beta_i, \dots, \alpha_{i+1}\}$, $(\rho(x_{j-1}, x_j), \rho(x_j, x_{j+1})) \in A(H)$, lo que concluye la demostración de esta afirmación.

Gracias a la afirmación 1, podemos garantizar que los únicos vértices que tienen obstrucciones en C son los vértices internos de las trayectorias en la familia \mathcal{T} . Así, podemos dividir a la digráfica C en varias subtrayectorias: por un lado, están las trayectorias en la familia \mathcal{T} , en las cuales, cualquier vértice interno de una trayectoria en la familia, siempre genera obstrucción. Y por otro lado, están las trayectorias $P_i = (x_{\beta_i}, C, x_{\alpha_{i+1}})$, las cuales son H -trayectorias, de acuerdo con la afirmación 1. Además, notemos que C puede verse como la sucesión de trayectorias T_1 , seguida de P_1 , seguida de T_2 , seguida de P_2 , etc. (véase la figura 3.9).

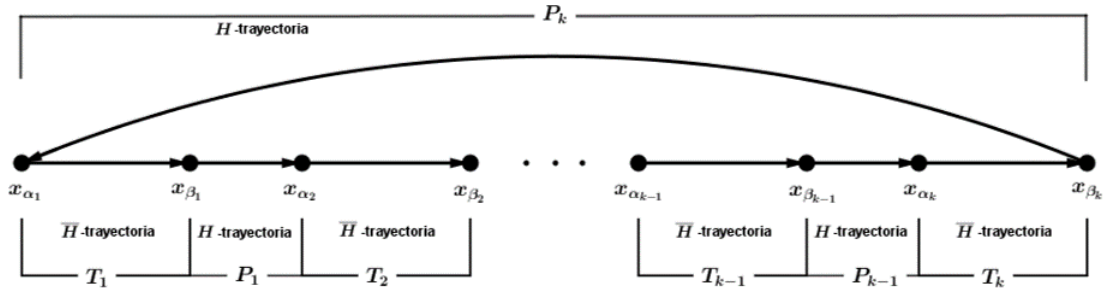


Figura 3.9: Ordenamiento de la familia \mathcal{T}

Con esto en mente, para toda $i \in \{1, \dots, k\}$, definimos t_i como el natural más grande tal que $\beta_i - 2t_i \geq \alpha_i$ y sea $S_i = \{x_{\beta_i-2}, x_{\beta_i-4}, \dots, x_{\beta_i-2t_i}\}$. Observemos que el conjunto S_i son algunos de los vértices internos de T_i , de hecho, los toma de manera intercalada (véase la figura 3.10).

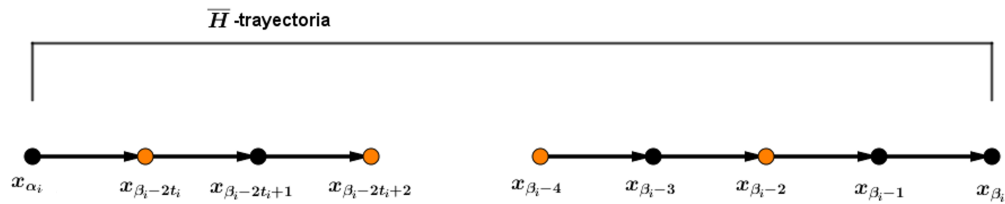


Figura 3.10: Fragmento de la demostración. Los vértices de T_i resaltados en naranja están en S_i

Con base en todo lo anterior, ya estamos listos para mostrar a nuestra propuesta de H -núcleo en C , al que llamaremos S , y está definido como: $S = \cup_{i=1}^k S_i$.

Ahora mostraremos que S es un H -núcleo de C . Primero, para ver que S es un conjunto absorbente por H -trayectorias, consideremos $x_m \in V(C) \setminus S$. Si x_m no es vértice de ninguna trayectoria de \mathcal{T} , entonces por el ordenamiento de la familia \mathcal{T} , debe existir $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que x_m es un vértice entre x_{β_j} y $x_{\alpha_{j+1}}$. Gracias a la afirmación 1, no es difícil ver que $(x_m, C, x_{\alpha_{j+1}}^+)$ es una H -trayectoria. Sin embargo, $x_{\alpha_{j+1}} \in S_{j+1}$ o $x_{\alpha_{j+1}}^+ \in S_{j+1}$ (dependiendo de la paridad de la longitud de T_{j+1}), por lo que existe una $x_m S$ - H -trayectoria en D .

Por otro lado, si x_m está en algún miembro de \mathcal{T} , digamos T_i , entonces podemos considerar los siguientes casos: si $m \leq \beta_i - 2$, entonces su sucesor en T_i ; es decir, x_{m+1} , debe estar en S_i y, en particular, en S . Por ello, (x_m, x_{m+1}) es una $x_m S$ - H -trayectoria. Si $m \in \{\beta_i - 1, \beta_i\}$, entonces se sigue de la afirmación 1 que $(x_m, C, x_{\alpha_{i+1}}^+)$ es una H -trayectoria. Sin embargo, $x_{\alpha_{i+1}} \in S_{i+1}$ o $x_{\alpha_{i+1}}^+ \in S_{i+1}$ (dependiendo de la paridad de la longitud de T_{j+1}), por lo que existe una $x_m S$ - H -trayectoria en D (figura 3.11), lo que concluye que S es un conjunto absorbente por H -trayectorias.

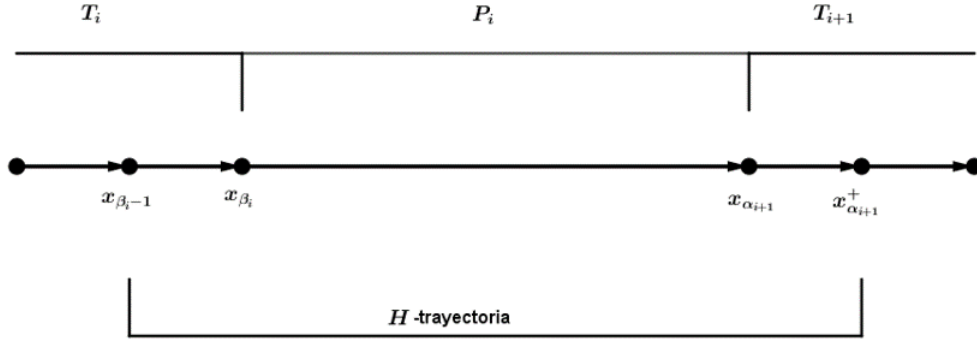


Figura 3.11: Fragmento de la demostración. El vértice x_m es H -absorbido por $x_{\alpha_{i+1}}$ y por $x_{\alpha_{i+1}}^+$

Por último, para mostrar que S es un conjunto independiente por H -trayectorias, basta con ver que para cualquier vértice en S , su sucesor tiene una obstrucción en C , por lo que no es posible que existan H -trayectorias entre vértices distintos de S , lo que concluye que S es independiente por H -trayectorias, y así S es un H -núcleo de C .

De los casos anteriores podemos concluir que si C no es un \overline{H} -ciclo de longitud impar, entonces tiene un H -núcleo. □

Como consecuencia del enunciado anterior, tenemos nuestra primera familia de digráficas \mathcal{H} -pancromáticas.

Corolario 3.1.3. *Todo ciclo de longitud par es \mathcal{H} -pancromático.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la condición necesaria del teorema 3.1.2 □

Y con ello, también tenemos algunos resultados que se deducen de éste último corolario.

Corolario 3.1.4. [33] *Todo ciclo de longitud par es pancromático.*

Demostración. Dado que todo ciclo par es \mathcal{H} -pancromático y toda digráfica \mathcal{H} -pancromática es pancromática, este corolario es inmediato. □

Corolario 3.1.5. [33] *Todo ciclo de longitud par y m -coloreado tiene núcleo monocromático.*

Demostración. Por el corolario anterior, todos los ciclos de longitud par y m -coloreados tienen núcleo monocromático. \square

Corolario 3.1.6. [33] *Si C es un ciclo de longitud impar m -coloreado y no es propiamente coloreado, entonces C tiene núcleo monocromático.*

Demostración. Consideremos un patrón monocromático H cuyo conjunto de vértices son los colores representados en C . por la elección del patrón y la coloración dada, C no es un \overline{H} -ciclo, por lo que por el teorema 3.1.2, C tiene H -núcleo, el cual debe ser un núcleo por trayectorias monocromáticas. \square

Ahora procederemos a mostrar otras familias de digráficas que son \mathcal{H} -pancromáticas, las cuales serán enunciadas en un solo teorema. Antes de ello, es importante hacer la siguiente observación:

Observación 3.1.7. *Sea D una digráfica arbitraria. Si existe $S \subseteq V(D)$ tal que (i) S es independiente por trayectorias y (ii) S es absorbente, entonces D es una digráfica \mathcal{H} -pancromática.*

La observación anterior es fácilmente verificable pues, dada una digráfica con las condiciones descritas en la observación previa, el conjunto S es un H -núcleo, independientemente del patrón H y de la H -coloración en D . Debido a que los conjuntos descritos en la observación 3.1.7 serán de importancia en el siguiente resultado y en la siguiente sección, diremos que un conjunto de vértices es un **conjunto \mathcal{H} -pancromático** si es independiente por trayectorias y absorbente. Si una digráfica tiene al menos uno de dichos conjuntos, diremos que es una digráfica **\mathcal{H} -pancromática débil**. La observación 3.1.7 establece que toda digráfica \mathcal{H} -pancromática débil es \mathcal{H} -pancromática. Por ejemplo, en la figura 3.12 se muestra una digráfica con un conjunto \mathcal{H} -pancromático, a saber, $S = \{x_1, x_2\}$. Dado cualquier patrón de color H y cualquier H -coloración que se le de a dicha digráfica, el conjunto S debe ser independiente por H -trayectorias, pues es independiente por trayectorias, y absorbente por H -trayectorias, pues es absorbente.

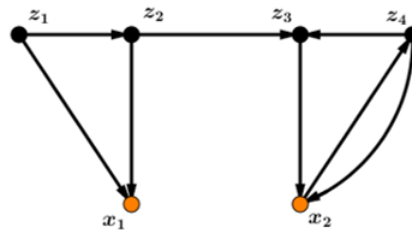


Figura 3.12: Ejemplo de una digráfica con un conjunto \mathcal{H} -pancromático $\{x_1, x_2\}$

Por otro lado, la condición de ser \mathcal{H} -pancromática no es equivalente a la existencia de estos conjuntos \mathcal{H} -pancromáticos. Consideremos, por ejemplo, un ciclo de longitud 8. Por el corolario 3.1.3 dicha digráfica es \mathcal{H} -pancromática, sin embargo, cualquier conjunto absorbente (en el sentido usual) en dicho ciclo debe tener al

menos dos vértices, y dado que el ciclo es fuertemente conexo, ello implicaría que cualquier conjunto absorbente del ciclo de longitud 8 no es independiente por trayectorias, lo que concluye que dicho ciclo no tiene conjuntos \mathcal{H} -pancromáticos.

Gracias a los conjuntos \mathcal{H} -pancromáticos nos será más sencillo mostrar que algunas familias de digráficas son \mathcal{H} -pancromáticas, como se verá en el siguiente teorema. Cabe señalar que algunos puntos de este teorema son una generalización de algunos resultados presentados en [33].

Teorema 3.1.8. *Una digráfica D es \mathcal{H} -pancromática en cualquiera de los siguientes casos:*

- a) D tiene un vértice absorbente.
- b) D es un torneo y tiene núcleo.
- c) D es transitiva.
- d) D es casi-transitiva y tiene núcleo.
- e) D es acíclica.
- f) D es asimétrica y todo bloque de D es transitivo.

Demostración. Para el inciso (a), si x es un vértice absorbente en D , entonces el conjunto unitario de x es \mathcal{H} -pancromático, por lo que, de acuerdo con la observación 3.1.7, D es \mathcal{H} -pancromática. El inciso (b) se sigue inmediatamente del inciso (a), pues todo torneo con núcleo tiene un vértice absorbente.

Para el inciso (c), primero necesitamos recordar que toda digráfica transitiva tiene núcleo (teorema 2.0.4). Ahora, si S es un núcleo de D , entonces por definición de núcleo, S es un conjunto absorbente de D . Más aun, debido a que D es una digráfica transitiva y S es un conjunto independiente en D , entonces S debe ser un conjunto independiente por trayectorias en D ; es decir, S es un conjunto \mathcal{H} -pancromático. Nuevamente, por la observación 3.1.7 se seguiría que D es una digráfica \mathcal{H} -pancromática.

Ahora procedamos a demostrar el inciso (d). Para ello consideremos un núcleo de D , digamos S . Al igual que en las demostraciones previas de este teorema, veremos que S es un conjunto \mathcal{H} -pancromático. Dado que S es un núcleo, en particular es absorbente. Para verificar que S es independiente por trayectorias, supongamos lo contrario; es decir, existe una uv -trayectoria en D , donde $\{u, v\} \subseteq S$. Dado que u y v no son adyacentes, pues S es independiente, se sigue del lema 1.3.1 que existen vértices w y z en D tales que (u, w) , (w, z) , (z, v) , (z, u) y (v, w) son flechas de D . Claramente, $w \notin S$, por lo que al usar que S es absorbente, existe $x \in S$ tal que $(w, x) \in A(D)$.

De lo anterior, (v, w, x) es un camino en D de longitud dos. Sin embargo, dicho camino no puede ser una trayectoria, pues en caso contrario, por ser D es casi-transitiva, los vértices v y x deberían ser adyacentes,

lo cual contradice que S es un conjunto independiente. Así (v, w, x) es un camino, pero no una trayectoria, por lo que $v = x$; es decir, (w, v) también es una flecha en D . Sin embargo, esto implicaría que (u, w, v) sea una trayectoria de D , lo que concluye que u y v son adyacentes, lo cual contradice la independencia de S . Con lo anterior S es un conjunto independiente por trayectorias y, de acuerdo con la observación 3.1.7, D es \mathcal{H} -pancromática.

Para demostrar el inciso (e), consideremos una digráfica acíclica, digamos D , un patrón de color arbitrario H y consideremos una H -coloración arbitraria de D . Mostraremos que $\mathcal{R}_H(D)$ tiene núcleo al probar que dicha digráfica es acíclica. Procederemos por contradicción al suponer que $\mathcal{R}_H(D)$ tiene un ciclo, digamos $(x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$. Por definición de la H -cerradura de D , se puede garantizar que para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria en D , digamos T_i (los subíndices se toman módulo n). En tal caso, notemos que $\cup_{i=0}^{n-1} T_i$ es un camino cerrado en D , el cual debe contener un ciclo. Esto último no es posible pues D es acíclica. Así concluimos que $\mathcal{R}_H(D)$ es acíclica, por lo que debe tener núcleo y, de acuerdo con el lema 1.6.4, D tiene H -núcleo. Por lo anterior, D es \mathcal{H} -pancromática.

Por último, para probar el inciso (f), basta con ver que si D es asimétrica y todo bloque de D es transitivo, entonces D tiene que ser acíclica, pues en caso contrario, si D tuviera un ciclo, digamos C , entonces éste está contenido en un bloque de D , y por ser dicho bloque transitivo, C tendría al menos una flecha simétrica, lo cual no es posible por hipótesis sobre D . Así, D debe ser acíclica y por el inciso (e) de este mismo teorema, D es \mathcal{H} -pancromática. \square

Como se mencionó anteriormente, algunos puntos del teorema anterior son una generalización de algunos resultados previos.

Corolario 3.1.9. *Una digráfica D es pancromática en cualquiera de los siguientes casos:*

- a) [30] D es una torneo y tiene núcleo.
- b) [30] D es casi-transitiva y tiene núcleo.
- c) [30] D es acíclica.
- d) [33] D es asimétrica y todo bloque de D es transitivo.

Demostración. Estos puntos se siguen inmediatamente del teorema 3.1.8 y del hecho de que toda digráfica \mathcal{H} -pancromática es pancromática. \square

Corolario 3.1.10. *Si D es una digráfica acíclica y m -coloreada, entonces tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Demostración. Sea H un patrón monocromático cuyo conjunto de vértices son los colores representados en las flechas de D . Como D es \mathcal{H} -pancromática por ser acíclica, entonces D tiene H -núcleo, el cual es un núcleo por trayectorias monocromáticas. \square

Corolario 3.1.11. *Si D es una digráfica acíclica y m -coloreada, entonces tiene núcleo por trayectorias alternantes.*

Demostración. Una demostración análoga al corolario previo, pero al usar un patrón alternante, muestra este corolario. \square

Corolario 3.1.12. [33] *Si D es una digráfica m -coloreada, acíclica y todo bloque de D es transitivo, entonces D tiene núcleo monocromático.*

Demostración. Primero notemos que D es una digráfica \mathcal{H} -pancromática. Por otro lado, sea H un patrón monocromático cuyo conjunto de vértices son los colores representados en las flechas de D . Como D es una digráfica \mathcal{H} -pancromática, entonces D tiene H -núcleo, el cual es un núcleo por trayectorias monocromáticas. \square

Corolario 3.1.13. [33] *Si D es una digráfica m -coloreada, acíclica y todo bloque de D es transitivo, entonces D tiene núcleo alternante.*

Demostración. Una demostración análoga al corolario previo, pero al usar un patrón alternante, muestra este corolario. \square

El método empleado por Arpin y Linek [2] para caracterizar a los patrones de la familia \mathcal{B}_2 fue mediante subdigráficas prohibidas. Sin embargo, una caracterización similar para las digráficas \mathcal{H} -pancromáticas no es posible, como justificaremos a continuación. Notemos que si D es una digráfica arbitraria, la digráfica obtenida a partir de D al agregar un nuevo vértice, digamos x , y hacer todos los vértices de D adyacentes hacia x es una digráfica \mathcal{H} -pancromática (inciso (a) del teorema 3.1.8), por lo que:

Observación 3.1.14. *Si D es una digráfica arbitraria, entonces existe una digráfica \mathcal{H} -pancromática que contiene a D como subdigráfica inducida.*

Con ello, caracterizar a las digráficas \mathcal{H} -pancromáticas mediante subdigráficas prohibidas no es posible. Sin embargo, sí podemos obtener algunos resultados referentes a algunos tipos de subdigráficas de digráficas \mathcal{H} -pancromáticas.

Proposición 3.1.15. *Sea D una digráfica \mathcal{H} -pancromática. Si D' es una subdigráfica inducida de D tal que no existen flechas de $V(D')$ hacia $V(D) \setminus V(D')$, entonces D' es \mathcal{H} -pancromática.*

Demostración. Antes de iniciar la demostración, notemos que si T es una trayectoria en D cuyo vértice inicial está en D' , entonces T debe ser una trayectoria completamente contenida en D' , pues no existen flechas de $V(D')$ hacia $V(D) \setminus V(D')$.

Ahora, para demostrar que D' es una digráfica \mathcal{H} -pancromática, consideremos un patrón de color arbitrario, digamos H' , y una H' -coloración de D' , digamos ρ' . Definimos al patrón de color H obtenido a partir de H' al agregar un vértice nuevo, digamos c , y no existen flechas entre c y los vértices de H' . Además, definimos la H -coloración ρ sobre D de la siguiente forma:

$$\rho(e) = \begin{cases} \rho'(e) & \text{si } e \in A(D') \text{ o} \\ c & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La coloración anterior está representada en la figura 3.13. La coloración ρ conserva los colores que tenían las flechas en D' bajo la coloración ρ' , mientras que al resto de las flechas de D se les asigna el nuevo color c que fue agregado al patrón H .

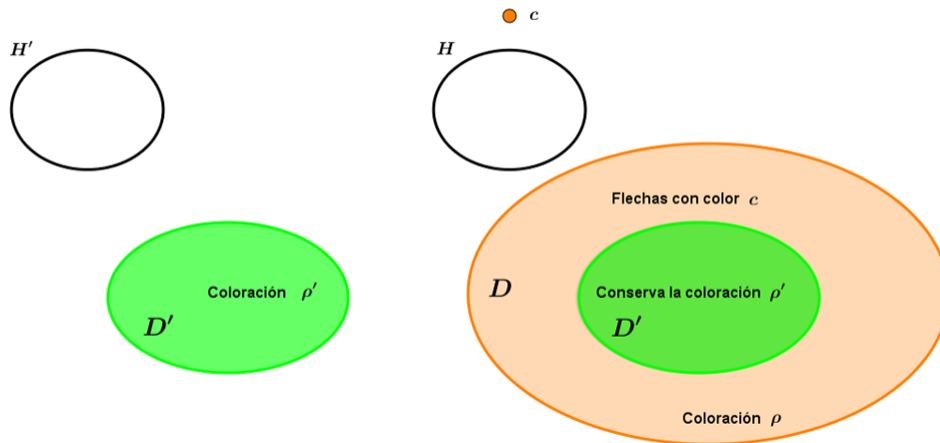


Figura 3.13: Representación de las coloraciones ρ y ρ'

Es importante notar que cualquier (H, ρ) -trayectoria en D que además esté contenida en D' , debe ser una (H', ρ') -trayectoria en D' , pues la H -coloración ρ se comporta igual que la H' coloración ρ' en D' . El recíproco también es verdadero: cualquier (H', ρ') -trayectoria contenida en D' debe ser una (H, ρ) -trayectoria de D por el mismo argumento.

Por otro lado, dado que D es una digráfica (H, ρ) -coloreada y es \mathcal{H} -pancromática, entonces D tiene un (H, ρ) -núcleo, digamos S . Mostraremos que $S' = S \cap V(D')$ es un (H', ρ') -núcleo de D' . Para ver que S' es (H', ρ') -independiente en D' , procederemos por contradicción; es decir, supondremos que existen $\{u, v\} \subseteq S'$ y una uv - (H', ρ') -trayectoria en D' , digamos T . Debido a la construcción de H , se sigue que T es también una uv - (H, ρ) -trayectoria en D , lo cual contradice el hecho que S es (H, ρ) -independiente, por lo que S' es (H', ρ') -independiente en D' .

Ahora, para ver que S' es (H', ρ') -absorbente en D' , consideremos $x \in V(D') \setminus S'$. Claramente, x está en $V(D) \setminus S$, por lo que existe $w \in S$ y una xw - (H, ρ) -trayectoria en D , digamos T . Dado que el vértice inicial de T está en D' , entonces T está completamente contenida en D' , como se justificó al inicio de la demostración. Se sigue de ello y de la definición de ρ , que T es una xw - (H', ρ') -trayectoria en D' . Con lo anterior, S' es un (H', ρ') -núcleo de D' , lo que concluye que D' es \mathcal{H} -pancromática. \square

Con base en el resultado previo, tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 3.1.16. *Toda componente fuertemente conexa terminal de una digráfica \mathcal{H} -pancromática es una digráfica \mathcal{H} -pancromática.*

Demostración. Notemos que toda componente fuertemente conexa terminal de D , digamos D' , es una subdigráfica inducida de D y satisface que no existen flechas de $V(D')$ hacia $V(D) \setminus V(D')$, por lo que D' debe ser \mathcal{H} -pancromática. \square

Corolario 3.1.17. *Sea D una digráfica \mathcal{H} -pancromática con al menos una componente fuertemente conexa no inicial. Si D_1, \dots, D_n son las componentes fuertemente conexas iniciales de D , entonces $D \setminus \bigcup_{i=1}^n V(D_i)$ es una digráfica \mathcal{H} -pancromática.*

Demostración. Notemos que la digráfica $D' = D \setminus \bigcup_{i=1}^n V(D_i)$ es una subdigráfica inducida de D , y como para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, D_i es una componente fuertemente conexa inicial de D , entonces no existen flechas de $V(D')$ hacia $V(D) \setminus V(D')$, por lo que D' debe ser \mathcal{H} -pancromática. \square

3.2. Digráficas \mathcal{H} -pancromáticas y operaciones en digráficas

En esta última sección de este capítulo revisaremos algunas operaciones bajo las cuales se pueda preservar la propiedad de ser \mathcal{H} -pancromática. Algunos de estos resultados son extensiones a las condiciones propuestas en [33]. Nuestra primera propuesta es la unión simple de digráficas. Aunque es una operación sencilla, la unión de dos digráficas \mathcal{H} -pancromáticas no necesariamente es \mathcal{H} -pancromática. Tomemos por ejemplo la digráfica $D = (\{u, v, w\}, \{(u, v), (v, w)\})$ y la digráfica $D' = (\{w, u\}, \{(w, u)\})$, las cuales son ambas \mathcal{H} -pancromáticas por ser acíclicas. Sin embargo, $D \cup D'$ no es \mathcal{H} -pancromática, pues $D \cup D'$ es un ciclo de longitud tres, el cual no tiene núcleo. Con vista en lo anterior, proponemos algunas propiedades que deben cumplir dos digráficas \mathcal{H} -pancromáticas para que su unión sea también \mathcal{H} -pancromática.

Teorema 3.2.1. *Sean D_1 y D_2 dos digráficas \mathcal{H} -pancromáticas. Si todo vértice en $V(D_1) \cap V(D_2)$ tiene ex-grado cero en $D_1 \cup D_2$, entonces $D_1 \cup D_2$ es \mathcal{H} -pancromática.*

Demostración. Antes de iniciar la prueba, denotamos por D la digráfica $D_1 \cup D_2$. Además, mostraremos la siguiente afirmación.

Afirmación. Si $T = (x_1, \dots, x_n)$ es una trayectoria en D , entonces $A(T) \subseteq A(D_1)$ o $A(T) \subseteq A(D_2)$.

Procederemos por contradicción al suponer que $A(T) \not\subseteq A(D_1)$ y $A(T) \not\subseteq A(D_2)$. Con lo anterior, consideremos $(x_i, x_{i+1}) \in A(T)$ tal que $(x_i, x_{i+1}) \notin A(D_2)$ y también consideremos $(x_j, x_{j+1}) \in A(T)$ tal que $(x_j, x_{j+1}) \notin A(D_1)$. Claramente, $(x_i, x_{i+1}) \in A(D_1)$ y $(x_j, x_{j+1}) \in A(D_2)$. Debido a la elección de dichas flechas, $i \neq j$ y, en particular, $i < j$ o $j < i$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $i < j$. Si $k = \max\{l \in \{i+1, \dots, j\} : (x_{l-1}, x_l) \in V(D_1)\}$, entonces $(x_k, x_{k+1}) \in A(D_2)$, en cuyo caso, x_k es un vértice en $V(D_1) \cap V(D_2)$ con ex-grado al menos uno en $D_1 \cup D_2$, lo cual no es posible por hipótesis. Con lo anterior, la afirmación queda demostrada.

Ahora, para demostrar que D es \mathcal{H} -pancromática, consideremos un patrón de color arbitrario, digamos H , y una H -coloración de D . Claramente, dicha H -coloración induce una H -coloración en D_1 y una H -coloración en D_2 . Se sigue del hecho de que D_1 y D_2 son ambas digráficas \mathcal{H} -pancromáticas, estas deben tener H -núcleo. Supongamos que S_1 es el H -núcleo de D_1 y S_2 es el H -núcleo de D_2 . Ahora mostraremos que $S = S_1 \cup S_2$ es un H -núcleo de D .

Para ver que S es un conjunto absorbente por H -trayectorias en D , basta considerar $x \in V(D) \setminus S$. Si $x \in V(D_1)$, se sigue que existe una xS_1 - H -trayectoria en D_1 , la cual debe ser una xS - H -trayectoria en D . Del mismo modo, si $x \in V(D_2)$, debe existir una xS - H -trayectoria en D . En cualquier caso, S es absorbente por H -trayectorias en D .

Ahora sólo resta por demostrar que S es un conjunto independiente por H -trayectorias en D . Procederemos por contradicción al suponer que existen $\{u, v\} \subseteq S$ y una uv - H -trayectoria en D , digamos T . Por la afirmación demostrada al inicio de esta demostración, T debe ser una trayectoria en D_1 o debe ser una trayectoria en D_2 .

Supongamos que T es una trayectoria en D_1 . Ahora veremos que ambos extremos de T están en S_1 , lo cual contradice que S_1 es independiente por H -trayectorias en D_1 . Debido a que u tiene ex-grado al menos 1, entonces u no puede estar simultáneamente en D_1 y D_2 , sin embargo, como todas las flechas de T están en D_1 por suposición, entonces concluimos que u no puede estar en D_2 y, en particular, $u \notin S_2$, pero al pertenecer u al conjunto S , concluimos que $u \in S_1$.

Ahora sólo resta por demostrar que v también está en S_1 . Si por el contrario, $v \notin S_1$, entonces $v \in S_2$, sin embargo, ya que T es una uv -trayectoria en D_1 , podemos concluir que $v \in V(D_1) \cap V(D_2)$, así que v debe tener ex-grado 0 en D , como lo establecen las hipótesis. De ello, v es un vértice de ex-grado 0 en D_1 , pero que no está en S_1 , por lo que v no puede ser H -absorbido por S_1 en D_1 , lo cual es contradictorio pues S_1 es absorbente por H -trayectorias. Así, $v \in S_1$. De lo anterior se tiene que $\{u, v\} \subseteq S_1$ y T es una uv - H -trayectoria en D_1 , lo cual no es posible pues S_1 es un conjunto independiente por H -trayectorias en D . Una contradicción análoga surge de suponer que T es una trayectoria en D_2 . Así, podemos concluir que S es un conjunto independiente por H -trayectorias en D . Por lo anterior, S es un H -núcleo de D , en particular, D es \mathcal{H} -pancromática. \square

Gracias al teorema anterior y un simple proceso inductivo, tenemos el siguiente corolario con respecto a unión finita de gráficas \mathcal{H} -pancromáticas.

Corolario 3.2.2. Sean $\{D_1, \dots, D_n\}$ una familia de digráficas \mathcal{H} -pancromáticas y $D = \cup_{i=1}^n D_i$. Si para todo $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$ se cumple que para todo $x \in V(D_i) \cap V(D_j)$, $\delta_D^+(x) = 0$, entonces D es \mathcal{H} -pancromática.

De manera similar al teorema 3.2.1, tenemos el siguiente resultado en la unión simple de dos digráficas \mathcal{H} -pancromáticas pero ahora con respecto a los in-grados de los vértices en la intersección de las digráficas.

Teorema 3.2.3. Sean D_1 y D_2 dos digráficas \mathcal{H} -pancromáticas. Si todo vértice en $V(D_1) \cap V(D_2)$ tiene in-grado cero en $D_1 \cup D_2$, entonces $D_1 \cup D_2$ es \mathcal{H} -pancromática.

Demostración. Antes de iniciar la prueba, denotamos por D la digráfica $D_1 \cup D_2$. Además, mostraremos la siguiente afirmación.

Afirmación. Si $T = (x_1, \dots, x_n)$ es una trayectoria en D , entonces $A(T) \subseteq A(D_1)$ o $A(T) \subseteq A(D_2)$.

Procederemos por contradicción. Supondremos que $A(T) \not\subseteq A(D_1)$ y $A(T) \not\subseteq A(D_2)$. Con lo anterior, consideremos $(x_i, x_{i+1}) \in A(T)$ tal que $(x_i, x_{i+1}) \notin A(D_2)$ y también $(x_j, x_{j+1}) \in A(T)$ tal que $(x_j, x_{j+1}) \notin A(D_1)$. Claramente, $(x_i, x_{i+1}) \in A(D_1)$ y $(x_j, x_{j+1}) \in A(D_2)$. Debido a la elección de dichas flechas, $i \neq j$ y, en particular, $i < j$ o $j < i$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $i < j$. Si $k = \max\{l \in \{i+1, \dots, j\} : (x_{l-1}, x_l) \in V(D_1)\}$, entonces $(x_k, x_{k+1}) \in A(D_2)$, en cuyo caso, x_k es un vértice en $V(D_1) \cap V(D_2)$ con in-grado al menos 1 en D , lo cual no es posible por hipótesis.

Con lo anterior, la afirmación queda demostrada.

Ahora, para demostrar que D es \mathcal{H} -pancromática, consideremos un patrón de color arbitrario, digamos H , y una H -coloración de D . Claramente, dicha H -coloración induce una H -coloración en D_1 y una H -coloración en D_2 . Se sigue del hecho de que D_1 y D_2 son ambas digráficas \mathcal{H} -pancromáticas, estas deben tener H -núcleo. Supongamos que S_1 es el H -núcleo de D_1 y S_2 es el H -núcleo de D_2 . Ahora mostraremos que $S = [(S_1 \cup S_2) \setminus (V(D_1) \cap V(D_2))] \cup (S_1 \cap S_2)$ es un H -núcleo de D . Dicho conjunto S se encuentra resaltado con gris en la figura 3.14.

Para ver que S es un conjunto absorbente por H -trayectorias en D , basta con considerar $x \in V(D) \setminus S$. Primero analizaremos el caso en que $x \in V(D_1)$. Ya que $x \notin S$, se sigue de la definición de dicho conjunto que $x \notin S_1 \cap S_2$ y, además, $x \notin S_1 \cup S_2$ o $x \in V(D_1) \cap V(D_2)$. Así, consideremos los siguientes casos:

Caso 1. $x \notin S_1 \cup S_2$.

En este caso, en particular, $x \notin S_1$. Así, como por suposición x es un vértice en D_1 , se seguiría del hecho de que S_1 es un conjunto absorbente por H -camino en D_1 que existe una xS_1 - H -trayectoria en D_1 ,

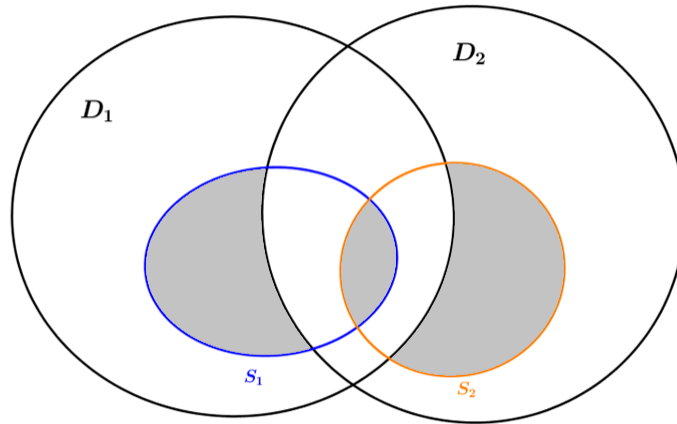


Figura 3.14: Propuesta de H -núcleo en $D_1 \cup D_2$, resaltado en gris

digamos $T = (x_0, \dots, x_n)$. Ya que x_n tiene in-grado al menos uno, entonces $x_n \notin V(D_1) \cap V(D_2)$ y así $x_n \in (S_1 \cup S_2) \setminus (V(D_1) \cap V(D_2))$, en particular, $x_n \in S$. Por ello, T es una xS - H -trayectoria en D .

Caso 2. $x \in V(D_1) \cap V(D_2)$.

Para este caso, consideremos dos subcasos con respecto a x y S_2 : si $x \notin S_2$, entonces por ser x un vértice en D_2 y ser S_2 un conjunto absorbente por H -trayectorias en D_2 , existe una xS_2 - H -trayectoria en D_2 , digamos $T' = (z_0, \dots, z_n)$. Ya que z_n tiene in-grado al menos uno, entonces $z_n \notin V(D_1) \cap V(D_2)$ y así $z_n \in (S_1 \cup S_2) \setminus (V(D_1) \cap V(D_2))$, en particular, $z_n \in S$. Por ello, T es una xS - H -trayectoria en D .

Por otro lado, si $x \in S_2$, entonces $x \notin S_1$, pues sabemos desde el inicio de los casos que $x \notin S_1 \cap S_2$; es decir, nuevamente tenemos la situación en la que $x \notin S_1 \cup S_2$. Así, un argumento análogo al mostrado en el caso 1 justifica la existencia de una xS - H -trayectoria en D .

Con lo anterior, si $x \in V(D_1)$, existe una xS - H -trayectoria en D . De manera análoga, si $x \in V(D_2)$, debe existir una xS - H -trayectoria en D . En cualquier caso, S es un conjunto absorbente por H -trayectorias en D .

Ahora sólo resta por demostrar que S es un conjunto independiente por H -trayectorias en D . Procederemos por contradicción al suponer que existen $\{u, v\} \subseteq S$ y una uv - H -trayectoria en D , digamos T . Por la afirmación probada al inicio de esta demostración, T debe ser una trayectoria en D_1 o debe ser una trayectoria en D_2 .

Supongamos que T es una trayectoria en D_1 . Ahora veremos que ambos extremos de T están en S_1 , lo cual contradice que S_1 es un conjunto independiente por H -trayectorias en D_1 . Primero notemos que, de la definición de S , se tiene que $S \subseteq S_1 \cup S_2$, y como v está en S , entonces v está en $S_1 \cup S_2$. Por otro lado, debido a que v tiene in-grado al menos 1, entonces v no puede estar simultáneamente en D_1 y D_2 . Sin embargo, como T es una uv -trayectoria en D_1 , v sí está en D_1 , por lo que v no puede estar en D_2 y, en particular, $v \notin S_2$. De lo anterior, $v \in S_1$.

Ahora sólo resta por mostrar que u también está en S_1 . Como $u \in S$, entonces por definición de S tenemos que $u \in S_1 \cap S_2$ o $u \in (S_1 \cup S_2) \setminus (V(D_1) \cap V(D_2))$. Si $u \in S_1 \cap S_2$, en particular $u \in S_1$ y habremos terminado, por lo que resta por ver qué sucede cuando $u \in (S_1 \cup S_2) \setminus (V(D_1) \cap V(D_2))$. Para este caso, notemos que $u \in S_1 \cup S_2$, pero $u \notin V(D_1) \cap V(D_2)$. Además, como T es una uv -trayectoria en D_1 , entonces $u \in V(D_1)$, por lo que $u \notin V(D_2)$, en particular, $u \notin S_2$, lo que concluye que $u \in S_1$.

En cualquier situación, concluimos que $\{u, v\} \subseteq S_1$ y que T es una uv - H -trayectoria en D_1 , lo cual no es posible pues S_1 es un conjunto independiente por H -trayectorias en D . Una contradicción análoga surge de suponer que T es una trayectoria en D_2 . Así, podemos concluir que S es un conjunto independiente por H -trayectorias en D , por lo que D tiene H -núcleo y, con ello, D es \mathcal{H} -pancromática. \square

Gracias al teorema anterior y con un simple proceso inductivo, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.4. Sean $\{D_1, \dots, D_n\}$ una familia de digráficas \mathcal{H} -pancromáticas y $D = \cup_{i=1}^n D_i$. Si para todo $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$ se cumple que para todo $x \in V(D_i) \cap V(D_j)$, $\delta_D^-(x) = 0$, entonces D es \mathcal{H} -pancromática.

Ahora analizaremos la composición de digráficas. Es importante mencionar que la composición de digráficas \mathcal{H} -pancromáticas no necesariamente es \mathcal{H} -pancromática. Tomemos por ejemplo las siguientes digráficas: para la base de la composición, una trayectoria $G = (v_1, v_2, v_3)$. D_1 la digráfica con conjunto de vértices $\{x_1, \dots, x_4\}$ y flechas $\{(x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_7), (x_3, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_1)\}$. D_2 una digráfica completa de orden dos con conjunto de vértices $\{z_1, z_2\}$ y la digráfica D_3 será trivial, con vértice w_1 . Ahora, sea $D = G[D_1, D_2, D_3]$. Un patrón H de orden 9, en la que la única flecha es un lazo en el vértice 9 y consideremos la H -coloración de D exhibida en la figura 3.15.

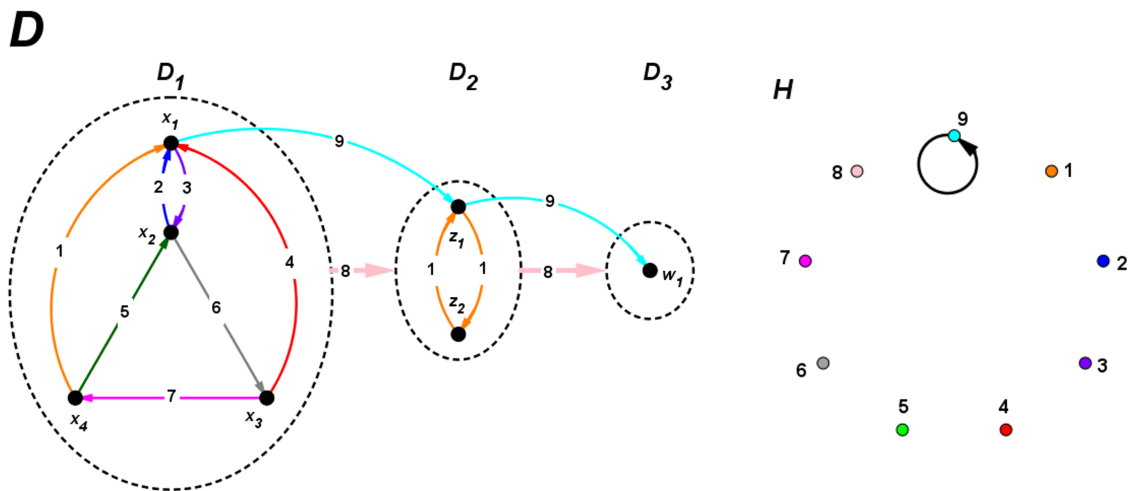


Figura 3.15: La composición de digráficas \mathcal{H} -pancromáticas no necesariamente es \mathcal{H} -pancromática

Para ver que D no es \mathcal{H} -pancromática, bastará ver que no tiene H -núcleo bajo esta coloración. Procederemos por contradicción al suponer que D tiene un H -núcleo, al que llamaremos N . Notemos que necesariamente $w_1 \in N$, pues este vértice no puede ser absorbido mediante trayectorias y, en particular, mediante H -trayectorias. Con esto, $V(D_2) \cap N = \emptyset$, pues todos los vértices de D_2 son adyacentes hacia w_1 en D . Así, N sólo debe constar del vértice w_1 y posiblemente algunos vértices en D_1 . Sin embargo, por ser D_1 semicompleta, a lo más un vértice de D_1 pertenece a N . Ahora consideremos dos posibles casos sobre el vértice x_3 .

Caso 1. $x_3 \notin N$.

En este caso, x_3 debería ser H -absorbido por algún vértice en N , pero no existen $x_3 w_1$ - H -trayectorias en D , por lo que algún vértice de $V(D_1)$, que además H -absorba a x_3 , tiene que estar en N . No es posible que dicho vértice sea x_1 , pues existe una $x_1 w_1$ - H -trayectoria en D y N es independiente por H -trayectorias. Tampoco es posible que x_2 sea dicho vértice, pues x_2 no H -absorbe a x_3 . Así, el único vértice de N en D_1 debe ser x_4 . Con ello, N no H -absorbe a x_2 , lo cual no es posible.

Caso 2. $x_3 \in N$.

En este caso, el único vértice de N que está en $V(D_1)$ debe ser x_3 . Así, al considerar que $N \cap V(D_2) = \emptyset$, se tiene que $N = \{x_3, w_1\}$, pero dicho conjunto no H -absorbe al vértice x_4 .

Con lo anterior, la digráfica D no es \mathcal{H} -pancromática, pues para esta coloración y patrón particular, no tiene H -núcleo. Nótese además que G es \mathcal{H} -pancromática (por sea acíclica) y que D_1 , D_2 y D_3 son \mathcal{H} -pancromáticas (por tener cada una un vértice absorbente), lo que demuestra que, en general, la composición de digráficas \mathcal{H} -pancromáticas no necesariamente es \mathcal{H} -pancromática. Así, es importante considerar algunas condiciones extras sobre las digráficas involucradas en la composición que nos garanticen que lo obtenido sea una digráfica \mathcal{H} -pancromática.

Teorema 3.2.5. Sean G una digráfica \mathcal{H} -pancromática débil sin flechas simétricas, N un conjunto \mathcal{H} -pancromático de D y $\mathcal{D} = \{D_v : v \in V(G)\}$ una familia de digráficas ajenas dos a dos. Si para todo $v \in N$, D_v es \mathcal{H} -pancromática, entonces $G[\mathcal{D}]$ es \mathcal{H} -pancromática.

Demostración. Para ver que $D = G[\mathcal{D}]$ es una digráfica \mathcal{H} -pancromática, consideremos un patrón de color arbitrario, digamos H , y una H -coloración de D . Dado que para todo $v \in N$, D_v es una subdigráfica de D , entonces la H -coloración de D induce una H -coloración en D_v , y como por hipótesis dichas digráficas son \mathcal{H} -pancromáticas, se seguiría que D_v tiene H -núcleo, digamos S_v . Ahora mostraremos que $S = \cup_{v \in N} S_v$ es un H -núcleo de D .

Primero mostraremos que S es un conjunto absorbente por H -trayectorias en D . Para ello, consideremos $x \in V(D) \setminus S$. De acuerdo con la definición de composición, $x \in V(D_v)$ para algún $v \in V(G)$.

Si $v \in N$, entonces en particular tenemos que $x \in V(D_v) \setminus S_v$. Dado que S_v es un conjunto absorbente por H -trayectorias en D_v , entonces existe una xS_v - H -trayectoria en D_v , digamos T . No es difícil ver que T es una xS - H -trayectoria en D .

Por otro lado, si $v \notin N$, dado que N es un conjunto absorbente en G , existe $u \in N$ tal que $(v, u) \in A(G)$. Notemos que, por definición de D , todos los vértices de D_v son adyacentes hacia todos los vértices de D_u en D . En particular, si $z \in S_u$, se sigue que $(x, z) \in A(D)$, por lo que (x, z) es una xS - H -trayectoria en D . En cualquier caso, podemos concluir que S es absorbente por H -trayectorias en D .

Ahora sólo resta por demostrar que S es independiente por H -trayectorias en D . Esto lo demostraremos por contradicción; es decir, supondremos que existe $\{x, z\} \subseteq S$, tal que existe una xz - H -trayectoria en D , digamos T . Por definición de S podemos suponer que $x \in S_u$ y $z \in S_v$ para algún u y v en N . Dado que T es un xz -camino en D , entonces existe un uv -camino en G . Sin embargo, por ser N independiente por trayectorias en G , se concluiría que $u = v$.

Por otro lado, no es posible que T esté completamente contenida en D_u , pues en caso contrario S_u no sería independiente por H -trayectorias en D_u . Así, si w es el primer vértice de T que no está en D_u , entonces $w \in V(D_r)$ para algún $r \neq v$, por lo que, por definición de composición, se tiene que $(v, r) \in A(G)$. Claramente, $w \notin N$, pues N es independiente por trayectorias en G , lo que indicaría que w debe ser absorbido por N . Nuevamente, por ser N independiente por trayectorias, el único vértice que puede absorber a w debe ser u , lo que concluye que (u, w) es una flecha simétrica en G , lo cual no es posible por hipótesis sobre G . Con lo anterior, S es un conjunto independiente por H -trayectorias.

Así, podemos concluir que S es un H -núcleo de D y con ello, D es \mathcal{H} -pancromática. \square

Aunque las condiciones del teorema 3.2.5 serán las condiciones más generales que daremos para garantizar que la composición de digráficas sea \mathcal{H} -pancromática, los siguientes casos particulares pueden ser más ilustrativos con respecto a los resultados referentes a \mathcal{H} -pancromaticidad y composición, siendo el que más usaremos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.6. *La composición de digráficas \mathcal{H} -pancromáticas sobre una digráfica \mathcal{H} -pancromática débil y asimétrica es \mathcal{H} -pancromática.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del teorema 3.2.5. \square

Gracias a este corolario y a que conocemos algunas digráficas \mathcal{H} -pancromáticas débiles, podemos pedir algunas condiciones sobre la digráfica base de la composición; es decir, sobre G . Con ello en mente, probaremos los siguientes corolarios. Cabe señalar que resultados análogos a los corolarios 3.2.8 y 3.2.9, pero para digráficas pancromáticas, pueden ser encontrados en [33].

Corolario 3.2.7. *Si D_1 y D_2 son digráficas ajenas dos a dos y ambas son \mathcal{H} -pancromáticas, entonces $D_1 + D_2$ es \mathcal{H} -pancromática.*

Demostración. Dado que $D_1 + D_2$ es el caso particular de una composición $G[D_1, D_2]$, donde G es una trayectoria de longitud 1, la cual es \mathcal{H} -pancromática débil y asimétrica, este corolario se sigue directamente del corolario 3.2.6. \square

Corolario 3.2.8. *Sean G una digráfica casi-transitiva y asimétrica, $\mathcal{D} = \{D_v : v \in V(G)\}$ una familia de digráficas ajenas en vértices dos a dos y N un núcleo de G . Si todas las digráficas en la familia \mathcal{D} son \mathcal{H} -pancromáticas, entonces $G[\mathcal{D}]$ es \mathcal{H} -pancromática.*

Demostración. Recordemos que en la demostración del inciso (d) del teorema 3.1.8 mostramos que cualquier digráfica casi-transitiva con núcleo es una digráfica \mathcal{H} -pancromática débil, por lo que G y \mathcal{D} satisfacen todas las condiciones del teorema 3.2.5, lo que concluye que $G[\mathcal{D}]$ es \mathcal{H} -pancromática. \square

Corolario 3.2.9. *Sean G una digráfica transitiva y asimétrica, y $\mathcal{D} = \{D_v : v \in V(G)\}$ una familia de digráficas ajenas en vértices dos a dos. Si todas las digráficas en la familia \mathcal{D} son \mathcal{H} -pancromáticas, entonces $G[\mathcal{D}]$ es \mathcal{H} -pancromática.*

Demostración. Al igual que en el corolario anterior, en la demostración del inciso (c) del teorema 3.1.8 mostramos las digráficas transitivas son \mathcal{H} -pancromáticas débiles, por lo que G y \mathcal{D} satisfacen todas las condiciones del corolario 3.2.6, lo que concluye que $G[\mathcal{D}]$ es \mathcal{H} -pancromática. \square

Corolario 3.2.10. *Si G es un torneo transitivo y $\mathcal{D} = \{D_v : v \in V(G)\}$ una familia de digráficas ajenas en vértices dos a dos tal que todas las digráficas en la familia \mathcal{D} son \mathcal{H} -pancromáticas, entonces $G[\mathcal{D}]$ es \mathcal{H} -pancromática.*

Demostración. Dado que G debe tener núcleo por ser una digráfica transitiva, y dicho núcleo debe constar de un único vértice por ser G un torneo, entonces G es una digráfica \mathcal{H} -pancromática débil. Además, G debe ser asimétrica por ser un torneo. Así, G y \mathcal{D} satisfacen todas las condiciones del corolario 3.2.6, lo que concluye que $G[\mathcal{D}]$ es \mathcal{H} -pancromática. \square

Los corolarios anteriores simplifican las hipótesis de la digráfica base en una composición al involucrar familias de digráficas que ya sabemos son \mathcal{H} -pancromáticas débiles. Con ello en mente, también podemos simplificar las condiciones de las digráficas en la familia \mathcal{D} al usar familias de digráficas \mathcal{H} -pancromáticas. Sin embargo, esta idea sólo la consideraremos con un tipo muy particular de familias \mathcal{H} -pancromáticas: las digráficas vacías. Así, la composición que hemos trabajado puede verse como una extensión de la digráfica base, obteniendo resultados como los siguientes:

Corolario 3.2.11. *Si D es la extensión de una digráfica asimétrica y \mathcal{H} -pancromática débil, entonces D es \mathcal{H} -pancromática.*

Demostración. Como D es la composición de una digráfica \mathcal{H} -pancromática débil y asimétrica sobre una familia de digráficas vacías, las cuales deben ser \mathcal{H} -pancromáticas, entonces por el corolario 3.2.6 se sigue que D es \mathcal{H} -pancromático débil. \square

Corolario 3.2.12. *Si D es la extensión de una digráfica casi-transitiva, asimétrica y con núcleo, entonces D es \mathcal{H} -pancromática.*

Demostración. Como D es la composición de una digráfica casi-transitiva, asimétrica y con núcleo sobre una familia de digráficas vacías, las cuales deben ser \mathcal{H} -pancromáticas, entonces por el corolario 3.2.8 se sigue que D es \mathcal{H} -pancromático débil. \square

Corolario 3.2.13. *Si D es la extensión de una digráfica transitiva y asimétrica, entonces D es \mathcal{H} -pancromática.*

Demostración. Como D es la composición de una digráfica transitiva y asimétrica sobre una familia de digráficas vacías, las cuales deben ser \mathcal{H} -pancromáticas, entonces por el corolario 3.2.9 se sigue que D es \mathcal{H} -pancromático débil. \square

Corolario 3.2.14. *Si D es la extensión de un torneo transitivo, entonces D es \mathcal{H} -pancromático.*

Demostración. Como D es la composición de un torneo transitivo sobre una familia de digráficas vacías, las cuales deben ser \mathcal{H} -pancromáticas, entonces por el corolario 3.2.10 se sigue que D es \mathcal{H} -pancromático débil. \square

Explotando un poco más el teorema 3.2.5, podemos encontrar resultados referentes a digráficas pancromáticas, pues estas son un caso particular de las digráficas \mathcal{H} -pancromáticas. Con ello en mente, los siguientes son consecuencia de los corolarios 3.2.12, 3.2.13 y 3.2.14, respectivamente.

Corolario 3.2.15. *Si D es la extensión de una digráfica casi-transitiva, asimétrica y con núcleo, entonces D es pancromática.*

Corolario 3.2.16. *Si D es la extensión de una digráfica transitiva y asimétrica, entonces D es pancromática.*

Corolario 3.2.17. *Si D es la extensión de un torneo transitivo, entonces D es pancromática.*

Y todavía explotando un poco más los resultados, podemos usar que las clases de los tres corolarios anteriores son \mathcal{H} -pancromáticas para obtener resultados más particulares al usar patrones de color convenientes: patrones vacíos para la obtención de núcleos usuales, patrones monocromáticos para la obtención de núcleos por trayectorias monocromáticas y patrones alternantes para la obtención de núcleos por trayectorias alternantes. Dichos resultados se enuncian a continuación.

Corolario 3.2.18. *Si D es la extensión de una digráfica casi-transitiva, asimétrica, con núcleo y es m -coloreada, entonces:*

- a) D tiene núcleo.
- b) D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.
- c) D tiene núcleo por trayectorias alternantes.

Demostración. Por el corolario 3.2.12 se tiene que D es una digráfica \mathcal{H} -pancromática. Así, es posible demostrar (a) al usar un patrón de color vacío, para (b) basta con usar un patrón de color monocromático y para (c) un patrón de color alternante. □

Corolario 3.2.19. *Si D es la extensión de una digráfica transitiva y asimétrica y es m -coloreada, entonces:*

- a) D tiene núcleo.
- b) D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.
- c) D tiene núcleo por trayectorias alternantes.

Demostración. Por el corolario 3.2.13 se tiene que D es una digráfica \mathcal{H} -pancromática. Así, es posible demostrar (a) al usar un patrón de color vacío, para (b) basta con usar un patrón de color monocromático y para (c) un patrón de color alternante. □

Corolario 3.2.20. *Si D es la extensión de un torneo transitivo y es m -coloreada, entonces:*

- a) D tiene núcleo.
- b) D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.
- c) D tiene núcleo por trayectorias alternantes.

Demostración. Por el corolario 3.2.14 se tiene que D es una digráfica \mathcal{H} -pancromática. Así, es posible demostrar (a) al usar un patrón de color vacío, para (b) basta con usar un patrón de color monocromático y para (c) un patrón de color alternante. □

Después de esta oleada de corolarios, queremos retomar una pregunta muy natural. Ya sabemos que del corolario 3.2.6 que la composición de digráficas \mathcal{H} -pancromáticas sobre una digráfica \mathcal{H} -pancromática débil es \mathcal{H} -pancromática. Con ello, es natural el preguntarse lo siguiente: si la extensión de una digráfica resulta ser \mathcal{H} -pancromática, ¿entonces la base de dicha composición es \mathcal{H} -pancromática? El siguiente lema será de utilidad para resolver dicha pregunta.

Lema 3.2.21. Sea D un digráfica \mathcal{H} -pancromática por caminos. Si u y v son vértices en D que satisfacen que $N^+(u) = N^+(v)$ y $N^-(u) = N^-(v)$, entonces $D - u$ es una digráfica \mathcal{H} -pancromática por caminos.

Demostración. Para ver que $D' = D - u$ es \mathcal{H} -pancromática, consideremos un patrón de color arbitrario, digamos H , y ρ' una H -coloración de D' . Denotamos por ρ la H -coloración en D definida como sigue:

$$\rho(e) = \begin{cases} \rho'(e) & \text{si } e \in A(D'), \\ \rho'(x, v) & \text{si } e = (x, u) \text{ para algún } x \in N^-(u) \text{ o} \\ \rho'(v, x) & \text{si } e = (u, x) \text{ para algún } x \in N^+(u). \end{cases}$$

Es importante notar que gracias a que $N^+(u) = N^+(v)$ y $N^-(u) = N^-(v)$, la coloración ρ efectivamente colorea todas las flechas de D .

Haremos una pequeña pausa en la demostración para analizar el comportamiento de ρ' y ρ . La coloración ρ' es una H -coloración de D' ; es decir, ρ' colorea todas las flechas de D , con excepción de las in-flechas y ex-flechas de u . Con esto en mente, la coloración ρ' puede extenderse de manera conveniente a todas las flechas de D mediante la coloración ρ , la cual colorea las in-flechas y ex-flechas de u con base en los colores que tenían las in-flechas y ex-flechas de v de la siguiente manera: si x es un in-vecino de v (y también debe ser un in-vecino de u por hipótesis), entonces el color que tendrá (x, u) bajo ρ será el color que ya tenía asignado (x, v) bajo ρ' . Y del mismo modo, si $w \in N^+(v)$, entonces el color que tendrá (u, w) bajo ρ será el mismo que ya tenía asignado (v, w) bajo ρ' . Un ejemplo concreto sobre cómo asigna colores la función ρ en D se muestran en la figura 3.16.

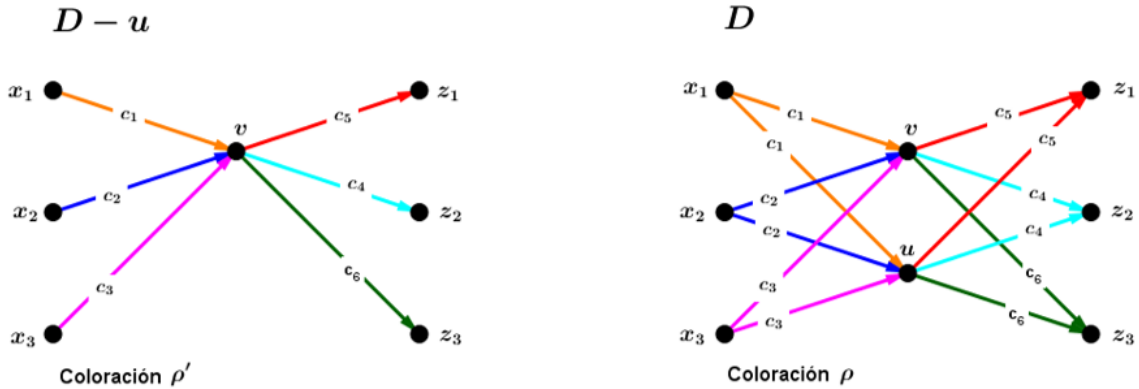


Figura 3.16: Ejemplo de la coloración ρ' en $D - u$ y ρ en D

Con esto en mente, es sencillo verificar los siguientes puntos:

1. Si $x \in N^-(v)$ y $e \in A^-(x)$, entonces: $(\rho(e), \rho(x, u)) \in A(H)$ si y sólo si $(\rho'(e), \rho'(x, v)) \in A(H)$.
2. Si $w \in N^+(v)$ y $a \in A^+(w)$, entonces: $(\rho(u, w), \rho(a)) \in A(H)$ si y sólo si $(\rho'(v, w), \rho'(a)) \in A(H)$.

3. Si $x \in N^-(v)$ y $w \in N^+(v)$, entonces $(\rho(x, u), \rho(u, w)) \in A(H)$ si y sólo si $(\rho'(x, v), \rho'(v, w)) \in A(H)$.

Con base en lo anterior, podemos seguir la demostración con un poco de más claridad sobre el comportamiento de ρ' y ρ . Nótese que dado que D' es una subdigráfica de D y de acuerdo a la coloración ρ , todo (H, ρ') -camino en D es un (H, ρ) -camino en D . Sin embargo, aunque el recíproco no necesariamente es verdadero debido a que no todo camino de D es un camino de D' , es sencillo notar que todo (H, ρ) -camino en D que no contiene al vértice u es un (H, ρ') -camino en D' . Primero tenemos la siguiente afirmación.

Afirmación. Sean $\{x, z\} \subseteq V(D) \setminus \{u, v\}$. Si existe un xz - (H, ρ) -camino en D , entonces necesariamente existe un xz - (H, ρ) -camino en D que no contiene al vértice u . En particular, dicho camino debe ser un xz - (H, ρ') -camino en D' .

Para realizar la demostración de esta afirmación procederemos por contradicción; es decir, supondremos que todo xz - (H, ρ) -camino en D necesariamente pasa por el vértice u . Ahora bien, de todos los posibles xz - (H, ρ) -caminos en D , consideremos el que recorre la menor cantidad posible de veces al vértice u , digamos $T = (x_0, \dots, x_n)$. Por suposición, el camino T debe recorrer el vértice u , por lo que existe $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $x_i = u$. Notemos que de acuerdo con los puntos (1), (2) y (3), el camino $T' = (x_0, \dots, x_{i-1}, v, x_{i+1}, \dots, x_n)$ es un xz - (H, ρ) -camino, y además, recorre menos veces el vértice u que el camino T , lo cual no es posible por la elección de T . Con lo anterior, existe un xz - (H, ρ) -camino en D que no contiene el vértice u . Notemos que, en particular, dicho camino debe ser un xz - (H, ρ') -camino en D' .

Ahora continuemos con la demostración del lema en cuestión. Ya que D es una digráfica (H, ρ) -coloreada y es \mathcal{H} -pancromática por caminos, entonces D tiene un núcleo por (H, ρ) -caminos, al que llamaremos S . Con base en dicho conjunto, exhibiremos un (H, ρ') -núcleo de D' . Para ello, consideremos los siguientes casos.

Caso 1. $u \notin S$.

En este caso probaremos que S es un (H, ρ') -núcleo en D' . Primero, para mostrar que S es un conjunto (H, ρ') -absorbente, consideremos $x \in V(D') \setminus S$. Es sencillo notar que $x \in V(D) \setminus S$, por lo que existe un xz - (H, ρ) -camino en D , al que llamaremos T , tal que $z \in S$. Si T no recorre u , entonces T es un xz - (H, ρ') -camino en D' y si T recorre el vértice u , entonces por la afirmación mostrada previamente, se sigue que existe un xz - (H, ρ') -camino en D' . En cualquier caso, se puede concluir que S es (H, ρ') -absorbente en D' .

Ahora, para mostrar que S es un conjunto independiente por (H, ρ') -caminos en D' , procederemos por contradicción al suponer que existe un xz - (H, ρ') -camino en D' , digamos T , tal que $\{x, z\} \subseteq S$. Es sencillo notar que T es un xz - (H, ρ) -camino en D , lo cual no es posible pues S es un conjunto independiente por

(H, ρ) -caminos en D . Con lo anterior, se muestra que en este caso, S es un núcleo por (H, ρ') -caminos en D' .

Caso 2. $u \in S$.

Para este caso, mostraremos que $S' = (S \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ es un núcleo por (H, ρ') -caminos en D' . Primero mostraremos que S' es absorbente por (H, ρ') -caminos. Sea $x \in V(D') \setminus S'$. Por definición de S' y D' , se tiene que $x \in V(D) \setminus S$, con lo cual existe un xz - (H, ρ) -camino en D , digamos $T = (x_0, \dots, x_n)$, tal que $z \in S$. Si $z \neq u$, entonces por la afirmación mostrada previamente llegamos a que existe un xz - (H, ρ) -camino en D que no contiene el vértice u , por lo que dicho camino debe ser un xz - (H, ρ') -camino en D' . Si $z = u$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que u no es un vértice interno de T (en otro caso, si i es el primer índice para el cual $x_i = u$, podemos considerar al camino (x, T, x_i)), en tal caso, $T' = (x_0, \dots, x_{n-1})$ no contiene al vértice u , por lo que T' es un (H, ρ') -camino en D' . De acuerdo con el punto (3) enunciado previamente, pero aplicado al vértice x_{n-1} , el camino $T' \cup (x_{n-1}, v)$ es un xv - (H, ρ') -camino en D' . Así, podemos concluir que S' es un conjunto absorbente por (H, ρ') -caminos en D' .

Ahora veremos que S' es un conjunto independiente por (H, ρ') -caminos. Procederemos por contradicción al suponer que existe un xz - (H, ρ') -camino en D' , digamos $T = (x_0, \dots, x_n)$, tal que $\{x, z\} \subseteq S'$. Notemos que no es posible que $\{x, z\} \subseteq S$, pues en caso contrario, T sería un (H, ρ) -camino en D con ambos extremos en S , lo cual contradice la independencia por (H, ρ) -caminos de S . Así, $x = v$ o $z = v$. Si $x = v$, se sigue del punto (1) aplicado al vértice x_1 , que el camino (u, x_1, \dots, x_n) es un uz - (H, ρ) -camino en D con ambos extremos en S , lo cual contradice que S sea independiente por (H, ρ) -caminos. De manera similar, si $v = z$, entonces por el punto (2) aplicado al vértice x_{n-1} se tiene que (x_0, \dots, x_{n-1}, u) es un xu - (H, ρ) -camino en D con ambos extremos en S , lo cual contradice nuevamente que S sea independiente por (H, ρ) -caminos. Así, no existe un xz - (H, ρ') -camino en D' , digamos $T = (x_0, \dots, x_n)$, tal que $\{x, z\} \subseteq S'$; es decir, S' es un conjunto independiente por (H, ρ') -caminos. Con lo anterior, se muestra que en este caso, S es un núcleo por (H, ρ') -caminos en D' .

Los casos anteriores muestran que D' tiene un (H, ρ') -núcleo por caminos, independientemente del patrón de color H y la H -coloración ρ' . Por ello, D' es una digráfica \mathcal{H} -pancromática por caminos. \square

Una nota importante del lema anterior es que, en general, si tenemos una digráfica \mathcal{H} -pancromática, ya sea por caminos o por trayectorias, el remover algún vértice arbitrario de la digráfica no garantiza que lo obtenido nuevamente sea \mathcal{H} -pancromática. Pensemos, por ejemplo, en un ciclo de longitud 5 al cual se le agrega un nuevo vértice x que sea absorbente. La digráfica obtenida debe ser \mathcal{H} -pancromática, pero al remover el vértice x , lo que se obtiene no es \mathcal{H} -pancromática. Ello pone de manifiesto que las condiciones sobre las vecindades en

el resultado previo no pueden ser omitidas. Por otro lado, gracias al lema anterior podemos mostrar de manera sencilla que si la extensión de una digráfica es \mathcal{H} -pancromática por caminos, entonces la digráfica base debe ser \mathcal{H} -pancromática por caminos.

Teorema 3.2.22. *Si D es la extensión de una digráfica D' y D es \mathcal{H} -pancromática por caminos, entonces D' es \mathcal{H} -pancromática por caminos.*

Demostración. Consideremos una digráfica D' arbitraria. La demostración la haremos por inducción con base en el orden de la extensión de D' ; es decir, si D' tiene una extensión de orden $n \geq |V(D')|$ que es \mathcal{H} -pancromática por caminos, entonces D' es \mathcal{H} -pancromática por caminos.

Base de inducción. Si D es una extensión de D' tal que $|V(D)| = |V(D')|$ y D es \mathcal{H} -pancromática por caminos, entonces D es \mathcal{H} -pancromática por caminos.

En este caso, por ser D una extensión de D' y $|V(D)| = |V(D')|$, se tiene que D y D' son isomorfas, por lo que D' debe ser \mathcal{H} -pancromática.

Hipótesis de Inducción. Si D' tiene una extensión \mathcal{H} -pancromática por caminos de orden k , entonces D' es \mathcal{H} -pancromática por caminos.

Paso Inductivo. Si D es una extensión de D' de orden $k + 1$ y es \mathcal{H} -pancromática por caminos, entonces D' es \mathcal{H} -pancromática por caminos.

Para el paso inductivo, supongamos que $\mathcal{D} = \{D_v : v \in V(D')\}$ es la familia de digráficas vacías, ajenas dos a dos en vértices, tal que $D'[\mathcal{D}] = D$. Podemos suponer, en virtud de la base inductiva, que $|V(D)| > |V(D')|$.

Gracias a esta última suposición, alguna de las digráficas en \mathcal{D} es no trivial, digamos que dicha digráfica es D_t , con $t \in V(D')$, y consideremos dos vértices distintos en D_t , a los que llamaremos u y v . Debido a lo anterior, es sencillo ver que $N_D^-(u) = N_D^-(v)$ y que $N_D^+(u) = N_D^+(v)$. Ya que D es \mathcal{H} -pancromática por caminos, tenemos por el lema 3.2.21 que $D - u$ es una digráfica \mathcal{H} -pancromática por caminos. Sin embargo, la digráfica $D - u$ es una extensión de D' de orden k , por lo que, de acuerdo con la hipótesis de inducción, D' debe ser \mathcal{H} -pancromática por caminos.

□

Con esos resultados ponemos fin al estudio realizado sobre digráficas \mathcal{H} -pancromáticas y \mathcal{H} -pancromáticas por caminos. Los resultados aquí mostrados actualmente se encuentran publicados en [32].

Capítulo 4

(k, l, H) -núcleos en digráficas H -coloreadas

En este capítulo introduciremos un nuevo tipo de núcleo, a los que llamamos (k, l, H) -núcleos, los cuales representan una generalización de diversos núcleos previamente definidos en la literatura y que han sido ampliamente estudiados, como lo son los núcleos monocromáticos, núcleos alternantes, k -núcleos, (k, l) -núcleos y H -núcleos. Para introducir el concepto de (k, l, H) -núcleo, debemos realizar un pequeño análisis de un par de trabajos previos, los cuales pueden ser consultados en [27] y [1], donde se introduce y trabaja un concepto novedoso en términos de longitud y H -coloraciones.

4.1. H -longitud en digráficas H -coloreadas

Recordemos momentáneamente que, dada una digráfica H -coloreada D , un camino en la digráfica D , digamos $C = (x_0, \dots, x_n)$ y un índice k en $\{0, \dots, n-1\}$, diremos que C tiene una **obstrucción** en k si $(\rho(x_{k-1}, x_k), \rho(x_k, x_{k+1})) \notin A(H)$, donde los índices serán tomados módulo n si $x_n = x_0$. Es decir, las obstrucciones en caminos son puntos en el camino bajo los cuales el cambio de color de la flecha antecedente y la flecha consecuente no son permitidos por el patrón de color. En este capítulo dichas obstrucciones recibirán más protagonismo, por lo que denotaremos por $O_H(C)$ al conjunto $\{k \in \{0, \dots, n-1\} : C \text{ tiene una obstrucción en } k\}$; es decir, el conjunto $O_H(C)$ son todos los índices del camino C en los que hay una obstrucción. Cuando se requiera, supondremos que los índices en $O_H(C)$ están ordenados de manera creciente. Es importante resaltar la siguiente observación, la cual se deduce directamente de la definición de obstrucción.

Observación 4.1.1. Sean D una digráfica H -coloreada y C un camino en D , C es un H -camino si y sólo si $O_H(C) = \emptyset$.

También necesitamos hacer notar que las obstrucciones en un camino no son los vértices en sí, sino un

conjunto de índices. Esto tiene una razón práctica. Por ejemplo, prestemos atención a la digráfica de la figura 4.1 mostrada a continuación. En dicha figura, el camino $(u, v, w, x, v, z, t, v, s)$ recorre tres veces el vértice v , de hecho el vértice v está en los índices 1, 4 y 7 del camino (tenga en cuenta que el primer índice del camino es 0). Sin embargo, en el índice 1 y 7 no hay obstrucción pues hay cambios permitidos de color, mientras que en el índice 4 sí la hay. Es por ello que es importante tener en cuenta que las obstrucciones del camino no las determinan los vértices, más bien la posición que ocupan los vértices en el camino.

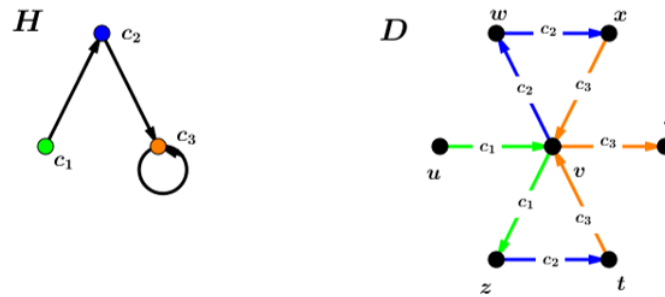


Figura 4.1: Ejemplo de un vértice cuya posición en el camino determina si tiene obstrucción

Por otro lado, notemos que si $C = (x_0, \dots, x_n)$ es un camino arbitrario en una digráfica H -coloreada y $O_H = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, donde $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k$, entonces para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ se tiene que los subcaminos $(x_{\alpha_i}, C, x_{\alpha_{i+1}})$ son H -caminos, así como el subcamino (x_{α_k}, C, x_n) y, en caso que que C no tenga obstrucción en el primer índice, el camino (x_0, C, x_{α_1}) es un H -camino. Con lo anterior, cada que tengamos un camino arbitrario en una digráfica H -coloreada, éste resulta dividido en subcaminos que sí son H -caminos, delimitados en sus extremos por los índices donde hay obstrucciones. Por ejemplo, en la figura 4.2 se muestra un patrón de color concreto, una trayectoria con obstrucciones en $i = 2, 5, 6, 8$ (tenga en cuenta que el vértice x_1 ocupa el lugar del índice 0), y como estos puntos dividen la trayectoria en varios subcaminos que sí son H -caminos.

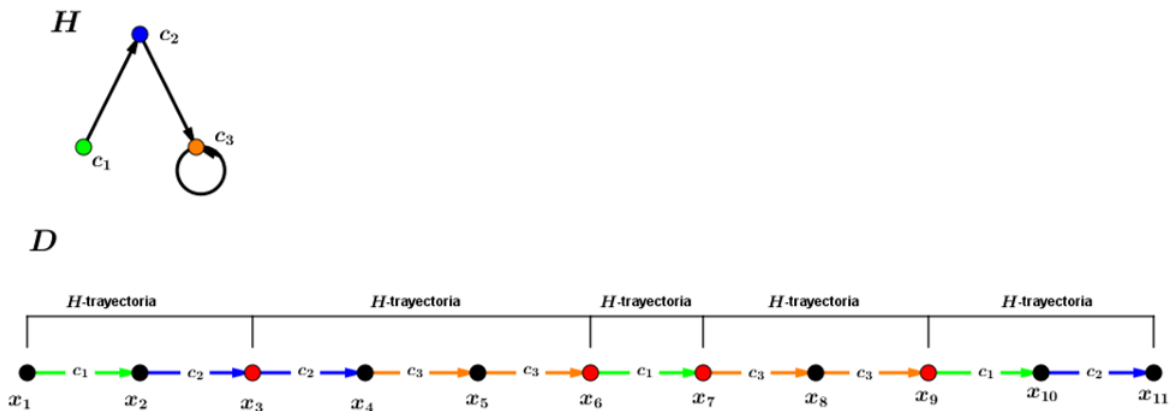


Figura 4.2: Ejemplo de una trayectoria con obstrucciones en $i = 2, 5, 7, 8$

Así, esta idea sobre en cuántos H -subcaminos puede descomponerse un camino al considerar las obstruc-

ciones puede ser utilizada para definir un tipo de longitud en términos de H -coloraciones. Sean D una digráfica H -coloreada y $C = (x_0, \dots, x_n)$ un camino en D . La **H -longitud** de C , denotada por $l_H(C)$, se define como $|O_H(C)|$ cuando C es cerrado y como $|O_H(C)| + 1$ cuando C es abierto. Intuitivamente, esta H -longitud nos dice en cuántos H -subcaminos puede partirse el camino C . Por ejemplo, la trayectoria en la figura 4.2 mostrada previamente tiene 4 obstrucciones, lo que la divide en 5 H -subcaminos, por lo que su H -longitud es 5. Otro ejemplo se muestra en la figura 4.3, donde el ciclo $(u, v, w, x, z, r, s, t, u)$ tiene tres obstrucciones, las cuales lo descomponen en tres H -subcaminos; es decir, su H -longitud es tres.

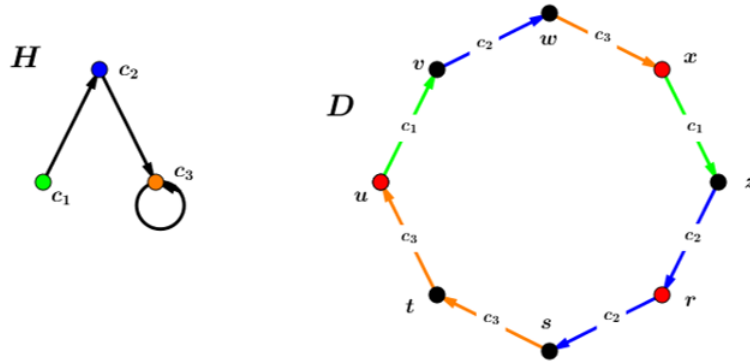


Figura 4.3: Ejemplo de un ciclo de H -longitud tres

En los capítulos consecuentes emplearemos de manera continua la H -longitud en caminos, así que revisaremos algunas propiedades básicas de esta longitud que serán de utilidad posteriormente, sin mencionar que empezarán a esclarecer un poco el comportamiento de la H -longitud.

Lema 4.1.2. *Sea D una digráfica H -coloreada, $\{u, v\} \subseteq V(D)$ y C un uv -camino en D . Los siguientes enunciados se satisfacen:*

- $l_H(C) \leq l(C)$.
- Si H es un patrón vacío, entonces $l_H(C) = l(C)$.
- Si C' es un vw - H -camino en D tal que u, v y w son distintos, entonces $l_H(C) \leq l_H(C \cup C') \leq l_H(C) + 1$.
- Si C es un ciclo, digamos $C = (w_0, \dots, w_n)$ e $\{i, j\} \subseteq \{0, \dots, n-1\}$ con $i < j$, entonces se cumple que $|O_H(w_i, w_{i+1}, \dots, w_j)| \leq |O_H(C)|$.

Demostración. a) Para este inciso, basta con ver que $|O_H(C)|$ es a lo más la cantidad total de índices del camino menos uno, pues recordemos que por definición, nunca hay obstrucción en la última posición del camino. Así, independientemente de si el camino C es abierto o cerrado, se tiene que $l_H(C) \leq l(C)$.

- b) Para este inciso, notemos que si $C = (x_0, \dots, x_n)$, entonces $O_H(C) = \{1, \dots, n-1\}$ si C es abierto y $O_H(C) = \{0, \dots, n-1\}$ si C es cerrado, pues H es un patrón vacío y cualquier cambio de color no

es permitido. Por lo anterior, si C es abierto, tenemos por definición que $l_H(C) = |O_H(C)| + 1$, lo que concluye que $l_H(C) = l(C)$. Si C es cerrado, tenemos por definición que $l_H(C) = |O_H(C)|$, lo que concluye nuevamente que $l_H(C) = l(C)$.

- c) Para este inciso, supongamos que $C = (x_0, \dots, x_n)$ y que $C \cup C' = (x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$. Primero mostraremos que $l_H(C) \leq l_H(C \cup C')$. Notemos que por simple definición del conjunto de obstrucciones, se tiene que $O_H(C) \subseteq O_H(C \cup C')$, lo que concluye que $l_H(C) \leq l_H(C \cup C')$. Por otro lado, para mostrar que $l_H(C \cup C') \leq l_H(C) + 1$, basta con ver que $O_H(C \cup C') \subseteq O_H(C) \cup \{n\}$. Si $i \in O_H(C \cup C')$, entonces por ser C' un H -camino, ninguno de sus vértices internos puede tener obstrucción, por lo que $i \notin \{n+1, n+2, \dots, m\}$, así, i debe ser una obstrucción de C o $i = n$, lo que demuestra que $i \in O_H(C) \cup \{n\}$. Con lo anterior, $l_H(C \cup C') \leq l_H(C) + 1$.
- d) Para este último inciso, denotamos por C' al camino (w_i, \dots, w_{i+1}) . Basta con ver que si $k \in O_H(C')$; es decir, en la k -ésima posición del camino C' hay una obstrucción, entonces en la $(k+i)$ -ésima posición del camino C también debe haber una obstrucción, con lo cual $k+i \in O_H(C)$. De lo anterior $|O_H(C')| \leq |O_H(C)|$.

□

Es importante recalcar que dada una digráfica H -coloreada D , un uv -camino en D , digamos C , y T un uv -subcamino de C , entonces no necesariamente se satisface que $l_H(T) \leq l_H(C)$. Por ejemplo, en la figura 4.4, se muestra una digráfica D coloreada con dos patrones distintos, H_1 y H_2 . Prestemos atención al camino $C = (u, v, w, v, z)$ y a su subcamino $T = (u, v, z)$. Bajo el patrón H_1 , se tiene que $l_H(C) = 1$, pero $l_H(T) = 2$; es decir, $l_H(C) < l_H(T)$. Por otro lado, bajo el patrón H_2 , se tiene que $l_H(C) = 4$ y $l_H(T) = 1$; es decir, $l_H(T) < l_H(C)$.

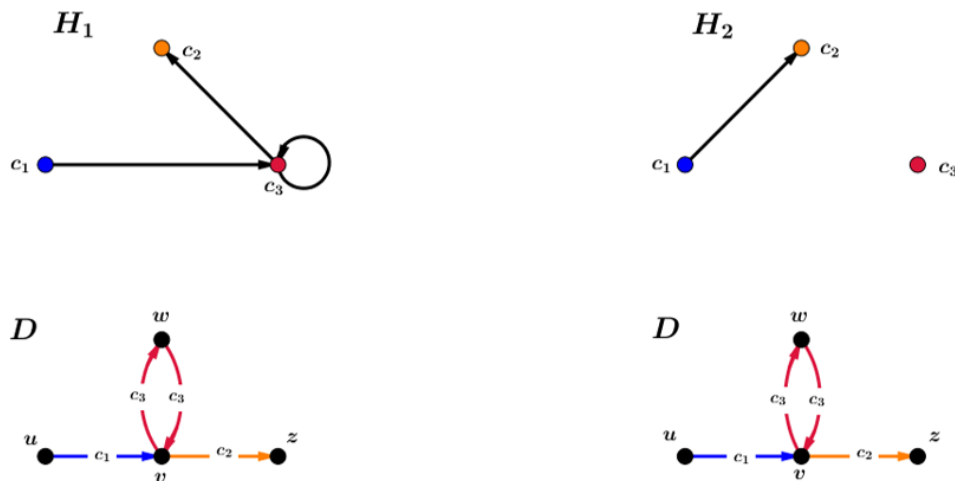


Figura 4.4: Ejemplos de la relación entre la H -longitud de un camino y la H -longitud de sus subcaminos

Así, no es posible establecer un lema que relacione la *H*-longitud de un camino con la *H*-longitud de subcaminos arbitrarios. Más aun, al usar nuevamente la figura 4.4, el lector podrá percatarse que el camino C es un *uz*-camino en D y que T es una *uz*-trayectoria en D , por lo que debemos tener en cuenta que, en general, la existencia de un *uz*-camino de *H*-longitud k no garantiza la existencia de una *uz*-trayectorias de *H*-longitud a lo más k , ni al menos k , ni tampoco igual a k .

A pesar de lo anterior, esta *H*-longitud puede resultar bastante interesante, sobre todo en términos de algunos patrones de color conocidos. De hecho, los caminos de cierta *H*-longitud bajo algunos patrones particulares, resultan ser caminos que ya hemos definido previamente. Algunos de ellos se enuncian en el siguiente lema:

Lema 4.1.3. *Sean D una digráfica H -coloreada y C un camino en D . Los siguientes enunciados se satisfacen:*

- a) *Si C es abierto, entonces C es un H -camino si y sólo si $l_H(C) = 1$.*
- b) *Si C es abierto y H es un patrón monocromático, entonces C es monocromático si y sólo si $l_H(C) = 1$.*
- c) *Si C es abierto y H es un patrón alternante, entonces C es alternante si y sólo si $l_H(C) = 1$.*
- d) *Si C es abierto y H es monocromático, entonces C tiene k cambios propios si y sólo si $l_H(C) = k + 1$.*
- e) *Si C es cerrado, entonces C es un H -camino si y sólo si $l_H(C) = 0$.*
- f) *Si C es cerrado y H es un patrón monocromático, entonces C es monocromático si y sólo si $l_H(C) = 0$.*
- g) *Si C es cerrado y H es un patrón alternante, entonces C es alternante si y sólo si $l_H(C) = 0$.*
- h) *Si C es cerrado y H es monocromático, entonces C tiene k cambios propios si y sólo si $l_H(C) = k$.*

Demostración. a) Para este inciso primero notamos que, por ser C abierto, entonces por definición de *H*-longitud, $l_H(C) = |O_H(C)| + 1$. Por otro lado, es sencillo verificar que C es un *H*-camino si y sólo si no tiene obstrucciones; es decir, C es un *H*-camino si y sólo si $O_H(C) = \emptyset$. Con esto último y lo escrito al inicio de este inciso, se sigue que C es un *H*-camino si y sólo si $l_H(C) = 1$.

- b) Supongamos que C es abierto y H es un patrón monocromático. Notemos que por el inciso (a) de este lema, C es un *H*-camino si y sólo si $l_H(C) = 1$. Pero al ser H un patrón monocromático, podemos concluir que C es monocromático si y sólo si $l_H(C) = 1$.
- c) Este inciso es análogo al anterior, pero al tener en cuenta que al ser H un patrón alternante, los únicos *H*-caminos de D son los caminos alternantes.
- d) Primero notemos que, por ser H un patrón monocromático, los cambios de color propios son justamente los únicos cambios de color no permitidos por el patrón H . En tal caso, si C tiene k cambios propios,

entonces C tiene k obstrucciones, por lo que por definición de H -longitud, y al tener en cuenta que C es abierto, podemos concluir que $l_H(C) = k + 1$. De manera análoga, si C tiene H -longitud $k + 1$, entonces C tiene k obstrucciones, por lo que debe tener exactamente k cambios propios.

- e) Para este inciso primero notamos que, por ser C cerrado, entonces por simple definición de H -longitud, $l_H(C) = |O_H(C)|$. Dado que C es un H -camino si y sólo si no tiene obstrucciones; es decir, C es un H -camino si y sólo si $O_H(C) = \emptyset$, podemos concluir que C es un H -camino si y sólo si $l_H(C) = 0$.
- f) Supongamos que C es cerrado y H es un patrón monocromático. Notemos que por el inciso (e) de este lema, C es un H -camino si y sólo si $l_H(C) = 0$. Pero al ser H un patrón monocromático, podemos concluir que C es monocromático si y sólo si $l_H(C) = 0$.
- g) Este inciso es análogo al anterior, pero al tener en cuenta que al ser H un patrón alternante, un los únicos H -caminos de D son los caminos alternantes.
- h) Al igual que en el inciso (d), notemos que, por ser H un patrón monocromático, los cambios de color propio son los únicos cambios de color no permitidos por el patrón H . Así, si C tiene k cambios propios, entonces C tiene k obstrucciones, por lo que por definición de H -longitud en caminos cerrados, $l_H(C) = k$. De manera análoga, si C tiene H -longitud k , entonces C tiene k obstrucciones, por lo que debe tener exactamente k cambios propios.

□

El lema anterior es para caminos abiertos en general y caminos cerrados en general, sin embargo, como casos particulares tenemos los siguientes lemas que se deducen del anterior. Uno de ellos hace referencia a trayectorias y otro para ciclos.

Lema 4.1.4. Sean D una digráfica H -coloreada y T una trayectoria en D . Los siguientes enunciados se satisfacen:

- a) T es una H -trayectoria si y sólo si $l_H(C) = 1$.
- b) Si H es un patrón monocromático, entonces T es monocromática si y sólo si $l_H(T) = 1$.
- c) Si H es un patrón alternante, entonces T es alternante si y sólo si $l_H(T) = 1$.
- d) Si H es un patrón monocromático, entonces T tiene k cambios propios si y sólo si $l_H(C) = k + 1$.

Lema 4.1.5. Sean D una digráfica H -coloreada y C un ciclo en D . Los siguientes enunciados se satisfacen:

- a) C es un H -ciclo si y sólo si $l_H(C) = 0$.

- b) Si H es un patrón monocromático, entonces C es monocromático si y sólo si $l_H(C) = 0$.
- c) Si H es un patrón alternante, entonces C es alternante si y sólo si $l_H(C) = 0$.
- d) Si H es un patrón monocromático, entonces C tiene k cambios propios si y sólo si $l_H(C) = k$.

Por último, queremos señalar que el uso de las obstrucciones en digráficas H -coloreadas fue introducido por Galeana-Sánchez y Sánchez-López en [27], lo que demuestra que es posible garantizar la existencia de H -núcleos al pedir condiciones sobre el número de H -obstrucciones de los paseos cerrados, a saber:

Teorema 4.1.6. [27] *Sea D una digráfica H -coloreada. Si todo paseo cerrado de D tiene una cantidad par de obstrucciones, entonces D tiene H -núcleo.*

Posteriormente, Andenmatten mostró en [1] que bajo la suposición $P \neq NP$, encontrar uv -trayectorias de H -longitud mínima tanto en gráficas como en digráficas H -coloreadas no puede resolverse en tiempo polinomial. Sin embargo, es sabido que bajo algunos patrones de color específico encontrar este tipo de caminos se resuelve en tiempo polinomial (véase [1]).

4.2. (k, l, H) -núcleos en digráficas H -coloreadas

Gracias a la noción de H -longitud en digráficas H -coloreadas, podemos establecer un nuevo tipo de núcleo. Para ello, introduciremos un nuevo tipo de absorbencia e independencia, pero usando la H -longitud. Sean D una digráfica H -coloreada, $S \subseteq V(D)$, k y l enteros tales que $k \geq 2$ y $l \geq 1$.

- a) Diremos que S es **(l, H) -absorbente por trayectorias** (respectivamente, **(l, H) -absorbente por caminos**) si para todo $x \in V(D) \setminus S$ existe una xS -trayectoria de H -longitud a lo más l (respectivamente, existe un xS -camino de H -longitud a lo más l).
- b) Diremos que S es **(k, H) -independiente por trayectorias** (respectivamente, **(k, H) -independiente por caminos**) si para todo $\{u, v\} \subseteq S$ con $u \neq v$, toda uv -trayectoria en D tiene H -longitud al menos k (respectivamente, todo uv -camino en D tiene H -longitud al menos k).

Ahora, dadas las definiciones anteriores, diremos que S es un **(k, l, H) -núcleo por trayectorias** si S es (k, H) -independiente por trayectorias y (l, H) -absorbente por trayectorias. Respectivamente, diremos que S es un **(k, l, H) -núcleo por caminos** si S es (k, H) -independiente por caminos y (l, H) -absorbente por caminos.

En el caso particular en que $l = k - 1$, un (k, l, H) -núcleo por trayectorias será llamado simplemente **(k, H) -núcleo por trayectorias** y de manera análoga, un (k, l, H) -núcleo por caminos será llamado simplemente **(k, H) -núcleo por caminos**.

Ahora veamos un ejemplo concreto de este tipo de núcleos. En la figura 4.5 se muestra una digráfica D que está H -coloreada. Notemos que el conjunto $S = \{u, t\}$, resaltado en gris, es $(3, H)$ -independiente por trayectorias, pues la única trayectoria entre u y t es (u, v, z, t) , la cual tiene H -longitud tres. Además, es un conjunto $(2, H)$ -absorbente por trayectorias: (w, v, u) es una wS -trayectoria de H -longitud dos, (v, u) es una vS -trayectoria de H -longitud 1, (x, z, t) es una xS -trayectoria de H -longitud 1 y (z, t) es una zS -trayectoria de H -longitud 1. Así, el conjunto S es un $(3, 2, H)$ -núcleo por trayectorias, o simplemente, un $(3, H)$ -núcleo por trayectorias.

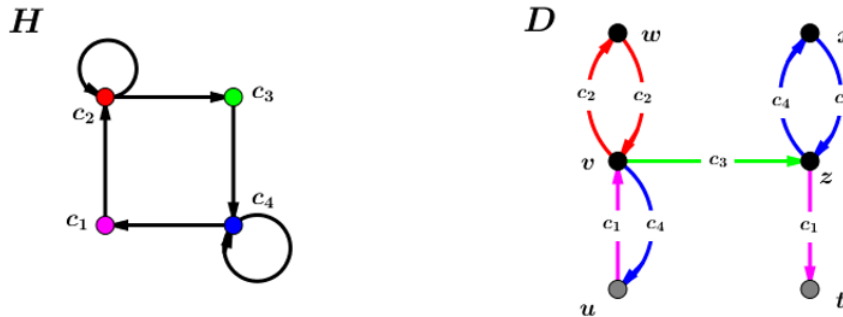


Figura 4.5: El conjunto $\{u, t\}$ es un $(3, 2, H)$ -núcleo en D

Para ver el ejemplo de un (k, l, H) -núcleo por caminos concreto, veamos la figura 4.6. En ella, el conjunto $S = \{t, r\}$ es un conjunto $(3, H)$ -independiente por caminos, pues el único tr -camino en D es (t, x, s, r) , el cual tiene H -longitud tres. Para ver que es un conjunto $(2, H)$ -absorbente por caminos, basta con ver que (u, v, w, v, z, t) es un uS -camino de H -longitud 2, (v, z, t) es un vS -camino de H -longitud 2, (w, v, z, t) es un wS -camino de H -longitud 2 y (z, t) es un camino de H -longitud 1. Por otro lado, el camino (x, s, r) es un xS -camino de H -longitud dos y el camino (s, t) es un sS -camino de H -longitud dos. Así, S es un $(3, 2, H)$ -núcleo por caminos en D ; es decir, un $(3, H)$ -núcleo por caminos.

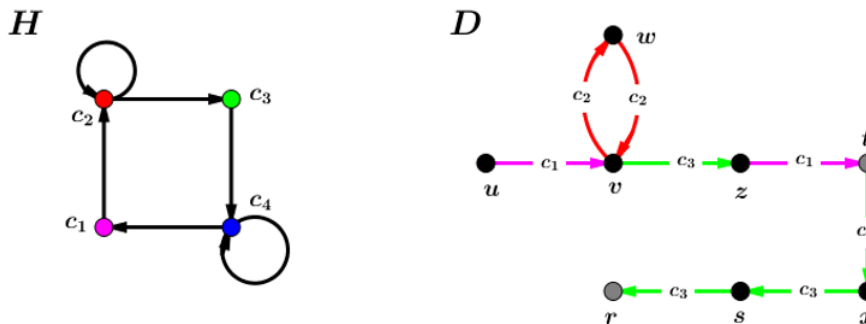


Figura 4.6: El conjunto $\{u, t\}$ es un $(3, 2, H)$ -núcleo en D

Una vez revisados ejemplos muy concretos de estos dos conceptos de núcleos, es prudente mencionar que el concepto de (k, l, H) -núcleo por caminos y (k, l, H) -núcleo por trayectorias no son equivalentes. Por ejemplo,

nuevamente al usar la figura 4.5, el conjunto $\{u, t\}$ es un $(3, H)$ -núcleo por trayectorias, pero ahora veremos que no es un $(3, H)$ -núcleo por caminos, pues el camino (u, v, w, v, z, x, z, t) es un ut -camino de H -longitud 1; es decir, dicho conjunto no es $(3, H)$ -independiente por caminos. De manera similar, el conjunto $S = \{t, r\}$ en la figura 4.6 es un $(3, H)$ -núcleo por caminos, pero no es un $(3, H)$ -núcleo por trayectorias, pues para el vértice u , las únicas uS -trayectorias en D son (u, v, z, t) y (u, v, z, t, x, s, r) , las cuales tienen H -longitud tres y seis, respectivamente; es decir, $\{t, r\}$ no es un conjunto $(2, H)$ -absorbente por trayectorias.

De hecho, en [8] los autores muestran una familia infinita de digráficas H -coloreadas con $(2, H)$ -núcleo por caminos pero sin $(2, H)$ -núcleo por trayectorias, y también mostraron una familia infinita de digráficas H coloreadas con $(2, H)$ -núcleo por trayectorias pero sin $(2, H)$ -núcleo por caminos.

Sin embargo, sí podremos mostrar que existe una relación entre los conjuntos (k, H) -independientes por caminos y los (k, H) -independientes por trayectorias, así como una relación entre los conjuntos (l, H) -absorbentes por caminos y los (l, H) -absorbentes por trayectorias, como queda de manifiesto en el siguiente lema.

Lema 4.2.1. *Sean D una digráfica H -coloreada, $S \subseteq V(D)$, $k \geq 2$ y $l \geq 1$. Los siguientes enunciados se satisfacen:*

- a) *Si S es (k, H) -independiente por caminos, entonces S es (k, H) -independiente por trayectorias.*
- b) *Si S es (l, H) -absorbente por trayectorias, entonces S es (l, H) -absorbente por caminos.*

Demostración. Para demostrar (a), consideremos $\{u, v\} \subseteq S$ tal que $u \neq v$ y supongamos que hay una uv -trayectoria en D , digamos T . Dado que S es (k, H) -independiente por caminos, entonces se tiene que $l_H(T) \geq k$, lo que demuestra que S es (k, H) -independiente por trayectorias.

Para demostrar (b), consideremos $x \in V(D) \setminus S$. Como S es (l, H) -absorbente por trayectorias, entonces existe una xS -trayectoria de H -longitud a lo más l , en particular se sigue que dicha trayectoria es un xS -camino de H -longitud a lo más l , por lo que S es (l, H) -absorbente por caminos. \square

Claramente, los recíprocos del lema anterior no necesariamente son verdaderos, como de hecho ya mostramos con los ejemplos de las figuras 4.5 y 4.6. Un punto que puede ser interesante, pero que no abordaremos en este trabajo, es determinar si existen patrones de color para los cuales el concepto de (k, H) -independencia por caminos y (k, H) -independencia por trayectorias son equivalentes. O si existen patrones de color para los cuales es equivalente el concepto de conjuntos (l, H) -absorbente por caminos y (l, H) -absorbente por trayectorias en general. En un paréntesis momentáneo, se sabe, por ejemplo, que bajo un patrón monocromático la independencia por H -caminos y H trayectorias, y la absorbencia por H -caminos y H -trayectorias son equivalentes, respectivamente.

Ahora mostraremos que los núcleos definidos al inicio de este capítulo son generalizaciones de diversos núcleos que ya se encuentran en la teoría.

Teorema 4.2.2. Sean D una digráfica H -coloreada, $k \geq 2$, $l \geq 1$ y $S \subseteq V(D)$ un (k, l, H) -núcleo por trayectorias. Los siguientes enunciados se satisfacen:

- a) Si $k = 2$ y $l = 1$, entonces S es un H -núcleo.
- b) Si $k = 2$, $l = 1$ y H es un patrón monocromático, entonces S es un núcleo monocromático.
- c) Si $k = 2$, $l = 1$ y H es un patrón alternante, entonces S es un núcleo alternante.
- d) Si $k = 2$, $l = 1$ y H es un patrón vacío, S es un núcleo usual.
- e) Si $l = k - 1$ y H es un patrón monocromático, entonces S es un núcleo de k cambios propios.
- f) Si H es un patrón vacío, entonces S es un (k, l) -núcleo.
- g) Si $l = k - 1$ y H es un patrón vacío, entonces S es un k -núcleo.

Demostración. Para mostrar (a), notemos que por definición de (k, l, H) -núcleo por trayectorias, entre todo par de vértices distintos de S , cualquier trayectoria tiene H -longitud al menos 2, por lo que no puede haber H -trayectorias entre vértices distintos de S ; es decir, S es independiente por H -trayectorias. Por otro lado, si $x \in V(D) \setminus S$, entonces por definición de (k, l, H) -núcleo por trayectorias, existe una xS -trayectoria de H -longitud a lo más 1, por lo que dicha trayectoria debe ser una H -trayectoria; es decir, S es un conjunto absorbente por H -trayectorias. De lo anterior, S es un H -núcleo.

Gracias al inciso anterior, será sencillo mostrar (b), (c) y (d). Con respecto al inciso (b), se tiene que como $k = 2$ y $l = 1$, S debe ser un H -núcleo. Sin embargo, como H es un patrón monocromático, entonces S es un núcleo por trayectorias monocromáticas. De manera análoga, para el inciso (c), pero al considerar que H es un patrón alternante, se concluye que S es un núcleo por trayectorias alternantes. Nuevamente, de manera análoga a (b), pero al considerar que H es un patrón vacío, se concluye que S es un núcleo usual.

Para el inciso (e) usaremos el lema 4.1.4 (d), el cual establece que bajo un patrón monocromático, una trayectoria tiene H -longitud k si y sólo si tiene $k - 1$ cambios propios. Así, como S es (k, H) -independiente por trayectorias, entonces S es independiente por trayectorias con $k - 1$ cambios propios. Y como S también es $(k - 1, H)$ -absorbente por trayectorias, entonces es absorbente por trayectorias con $k - 2$ cambios propios, por lo que S es un núcleo de k cambios propios.

Sólo resta por mostrar que (f) y (g) son verdaderas. Para el inciso (f), como S es (k, H) -independiente por trayectorias, entonces toda trayectoria entre vértices distintos de S tiene H -longitud al menos k . Sin embargo, por ser H un patrón vacío, la H -longitud y la longitud usual coinciden (inciso (b) del lema 4.1.2), por lo que entre cada par de vértices distintos de S , toda trayectoria entre ellos tiene longitud al menos k ; es decir, S es un conjunto k -independiente. Por otro lado, como S es un conjunto (l, H) -absorbente por trayectorias, entonces

para todo $x \in V(D) \setminus S$ existe una xS -trayectoria de H -longitud a lo más l . Nuevamente al usar que H es un patrón vacío, entonces dicha trayectoria tiene longitud a lo más l , por lo que S es l -absorbente. Así podemos concluir que S es un (k, l) -núcleo. Ya que hemos demostrado que (f) se satisface, (g) se deduce inmediatamente de (f) pues es el caso particular cuando $l = k - 1$. \square

Como se ha mencionado anteriormente, el problema de determinar si una digráfica tiene un núcleo usual es un problema NP-completo [10], y dado que los núcleos son un caso muy particular de los (k, l, H) -núcleos, podemos aseverar que determinar la existencia de dichos conjuntos en digráficas H -coloreadas es un problema interesante, pero difícil de abordar. En lo que resta del trabajo, propondremos algunas condiciones que garanticen la existencia de (k, l, H) -núcleos en digráficas H -coloreadas. Aunque los capítulos 5, 6 y 7 se dedican a dicha labor, concluiremos esta sección al mostrar algunos resultados sencillos que garantizan la existencia de (k, l, H) -núcleos.

Lema 4.2.3. *Si D es una H -digráfica, entonces para toda $k \geq 2$ y $l \geq 1$, cualquier núcleo por trayectorias de D es un (k, l, H) -núcleo por trayectorias y un (k, l, H) -núcleo por caminos.*

Demostración. Para este lema, basta con ver que si N es un núcleo por trayectorias de D , entonces el hecho de ser independiente por trayectorias implica que para toda $k \geq 2$, N es un conjunto (k, H) -independiente tanto por caminos como por trayectorias. Por otro lado, como N es absorbente por trayectorias y D es una H -digráfica, entonces N es absorbente por H -trayectorias, lo que implica que para todo $l \geq 1$, N es (l, H) -absorbente por trayectorias y por caminos, lo que demuestra el lema. \square

Corolario 4.2.4. *Sean D una digráfica H -coloreada. Si $\mathcal{C}(D) \leq H$, entonces para toda $k \geq 2$ y $l \geq 1$, D tiene al menos un (k, l, H) -núcleo por trayectorias y un (k, l, H) -núcleo por caminos.*

Demostración. Para este corolario, bastará ver que D es una H -digráfica y al aplicar el lema 4.2.3, habremos terminado.

Sean a una flecha arbitraria en D y b una flecha consecutiva de a en D . Por definición de la digráfica de clases de color, $(\rho(a), \rho(b)) \in A(\mathcal{C}(D))$ y por hipótesis sobre dicha digráfica, podemos concluir que $(\rho(a), \rho(b))$ es una flecha en H . Así, D es una H -digráfica y por el lema 4.2.3, para toda $k \geq 2$ y toda $l \geq 1$, D tiene (k, l, H) -núcleo por trayectorias y (k, l, H) -núcleo por caminos. \square

En esta sección se introdujo el concepto de (k, l, H) -núcleo en digráficas H -coloreadas. Para encontrar condiciones suficientes que garanticen la existencia de dicho tipo de núcleos será necesario el introducir otros conceptos, los cuales abordaremos en la siguiente sección de este capítulo.

4.3. Particiones en H -clases

La primera estrategia que usaremos para buscar condiciones suficientes que garanticen la existencia de (k, l, H) -núcleos en digráficas H -coloreadas está relacionada con la digráfica de clases de color definida en [19]. Recordemos momentáneamente dicha definición. Dada una digráfica m -coloreada, digamos D , en la cual no necesariamente hay un patrón de color involucrado explícitamente, su **digráfica de clases de color**, denotada por $\mathcal{C}(D)$, es la digráfica cuyo conjunto de vértices son los colores representados en las flechas de D y una flecha (c_1, c_2) está en $\mathcal{C}(D)$ si y sólo si existe una flecha en D de color c_1 , digamos a , y una flecha consecutiva de a con color c_2 . Por ejemplo, en la figura 4.7 se muestra una digráfica m -coloreada y su digráfica de clases de color.

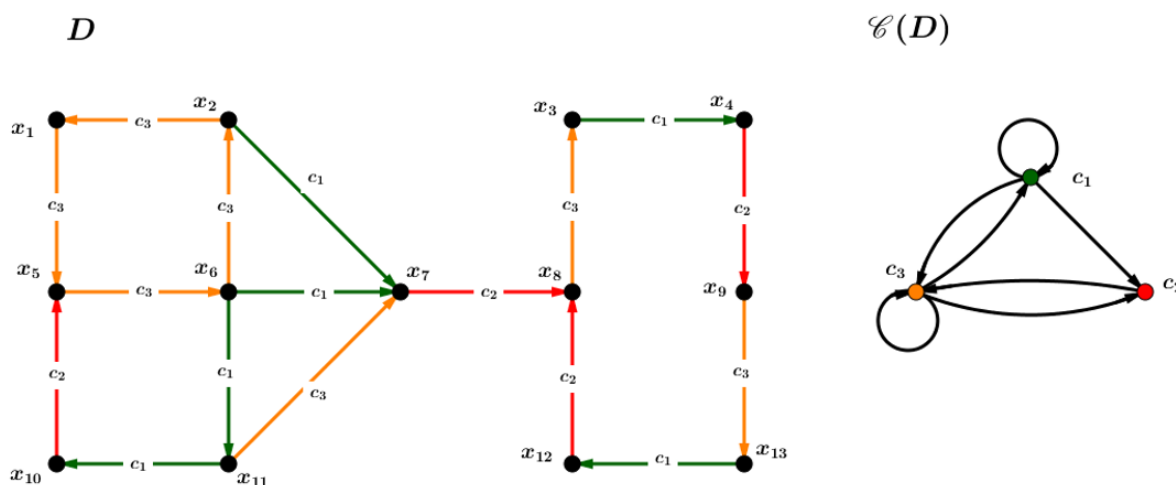


Figura 4.7: Ejemplo de una digráfica m -coloreada y su digráfica de clases de color

Recordemos que dicha digráfica fue definida para encontrar condiciones que garanticen la existencia de núcleos monocromáticos [19], sin embargo, ha servido también para dar condiciones suficientes respecto a la existencia de otros tipos de núcleo (por ejemplo, véase [24], [28] y [29]). Por otro lado, un motivo por el cual dicha digráfica puede ser un gran auxiliar es debido a su posible simplicidad: mientras que una digráfica m -coloreada puede tener una cantidad considerable de vértices y flechas, su digráfica de clases de color puede ser bastante pequeña tanto en orden como en tamaño. En el ejemplo mostrado previamente en la figura 4.7, la digráfica D tiene orden 13 y tamaño 17, pero su digráfica de clases de color sólo tiene orden 3 y 7 flechas, dos de las cuales son lazos. Así, puede ser considerablemente más sencillo verificar condiciones sobre la digráfica de clases de color que sobre la digráfica m -coloreada. Debido a ello, nuestro primer acercamiento al problema que nos compete será mediante el uso de esta digráfica asociada, o mejor dicho, una generalización de la digráfica de clases de color. Para poder asentar dicha generalización, primero necesitamos analizar un poco más a fondo el comportamiento de la digráfica de clases de color y tener presente que, en nuestro caso, hay un patrón de

color involucrado en la coloración.

Lo primero que notaremos es que los colores de las flechas en una digráfica m -coloreada inducen una partición muy natural con respecto a los colores que se usan, a saber, dos flechas pertenecen a la misma clase de dicha partición si y sólo si tienen el mismo color. A dichas clases les llamaremos **clases monocromáticas**. Es trivial ver que si a es una flecha de D y b es una flecha consecutiva de a , entonces a y b tienen el mismo color si y sólo si pertenecen a la misma clase monocromática. Esta propiedad, aunque simple, será el punto de partida de la generalización que propondremos, pues si consideramos que la digráfica de clases de color estaba pensada originalmente para trabajar con los casos monocromáticos, podemos dejar un poco de lado la formalidad para pensar intuitivamente: las clases arriba descritas son tales que dada una flecha a y una flecha b consecutiva de a , sus cambios de color son *buenos cambios* (con respecto a la condición de ser monocromáticos) si y sólo si pertenecen a la misma clase. Pero, ¿qué significa un *buen cambio de color* en digráficas H -coloreadas, que es el caso que nos compete? Pues podemos decir que son buenos cambios si son permitidos bajo el patrón H . Así, la propiedad a y b tienen el mismo color si y sólo si pertenecen a la misma clase monocromática, puede ser reinterpretada en términos de H -coloraciones como sigue: dada una flecha a en D y b una flecha consecutiva de a , entonces $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$ y sólo si pertenecen a la misma clase. Y esa será la idea intuitiva que trabajaremos, pero procederemos a formalizarla

Sean D una digráfica H -coloreada y $F \subseteq A(D)$ no vacío. Diremos que F es una **H -clase** de D si para toda flecha de D , digamos a , y toda flecha consecutiva de a , digamos b , tales que $\{a, b\} \cap F \neq \emptyset$ se satisface que: $\{a, b\} \subseteq F$ si y sólo si $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$. Esto nos dice que, dadas dos flechas consecutivas de D , si al menos una está en la clase, entonces ambas van a estar en la clase si y sólo si el cambio de color entre ellas es permitido por el patrón de color. Un ejemplo de una H -clase se muestra en la figura 4.8. En ella, el conjunto $F = \{(v, w), (w, x), (x, v)\}$ es una H -clase: tomemos, por ejemplo, la flecha (v, w) en F . Las flechas consecutivas de (v, w) son (w, z) y (w, x) , de las cuales $(\rho(v, w), \rho(w, x)) \in A(H)$ y $(\rho(v, w), \rho(w, z)) \notin A(H)$, por lo que $(w, x) \in F$ y $(w, z) \notin F$. Además, las flechas antecedentes de (v, w) son (u, v) y (x, v) , de las cuales $(\rho(u, v), \rho(v, w)) \notin A(H)$ y $(\rho(x, v), \rho(v, w)) \in A(H)$, por lo que $(u, v) \notin F$ y $(x, v) \in F$. Un comportamiento similar se tiene en las otras flechas de F , por lo que F es efectivamente una H -clase de D .

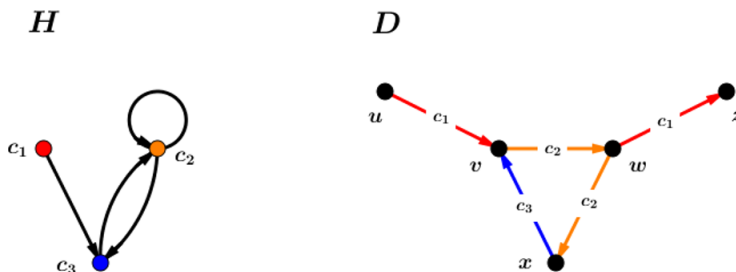


Figura 4.8: Ejemplo de una H -clase

Así pues, nuestro concepto de H -clase en digráficas H -coloreadas establece que dada una flecha en la clase, digamos a , cualquier flecha antecedente de a y cualquier flecha consecuente de a que tenga un cambio de color permitido por el patrón H con respecto al color de a , necesariamente debe estar también en la clase. Y recíprocamente, cualquier flecha antecedente de a y cualquier flecha consecuente de a que no tenga un cambio de color permitido por el patrón H con respecto al color de a , no puede estar en la clase. Nótese que, en el caso de que el patrón H sea monocromático y F sea una H -clase de D , entonces dos flechas consecutivas están en F si y sólo si tienen el mismo color.

Pero la generalización no termina ahí, pues recordemos que en el caso de las clases monocromáticas, estas inducen una partición de las flechas de D en dichas clases. Con esto en mente, propondremos nuestra siguiente definición. Dada una digráfica H -coloreada, digamos D , y \mathcal{F} una partición de $A(D)$, diremos que \mathcal{F} es una **partición en H -clases de D** si todas las clases de \mathcal{F} son H -clases de D . Equivalentemente, para toda flecha de D , digamos a , y toda flecha consecutiva de a , digamos b , se satisface que: $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$ si y sólo si existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\{a, b\} \subseteq F$.

Usaremos la figura 4.9 para ejemplificar una partición en H -clases. Si $F_1 = \{(v, w), (w, x), (x, v)\}$, $F_2 = \{(w, z), (z, u)\}$ y $F_3 = \{(u, v)\}$, entonces la familia $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$ es una partición en H -clases de D .

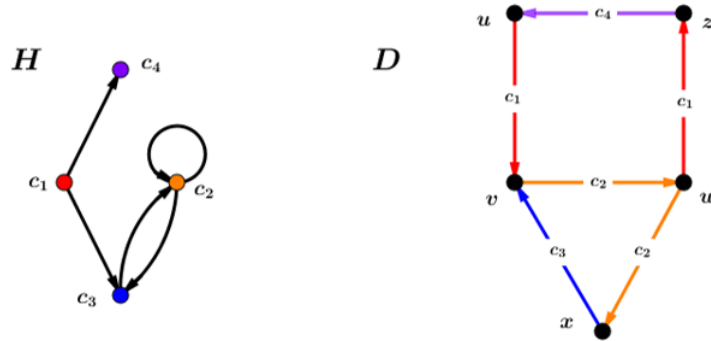


Figura 4.9: Ejemplo de una partición en H -clases

Para probar que \mathcal{F} es una partición en H -clases, mostraremos que dos flechas consecutivas, digamos a seguida de b , están en la misma clase si y sólo si $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$. Para la flecha $(u, v) \in F_3$, su única flecha consecutiva es (v, w) , pero están en clases distintas pues $(c_1, c_2) \notin A(H)$. Para la flecha $(w, z) \in F_2$, su única flecha consecutiva es (z, u) , la cual está en la clase F_2 pues $(c_1, c_4) \in A(H)$. Para la flecha $(z, u) \in F_2$, su única flecha consecutiva es (u, v) , la cual no está en F_2 pues $(c_4, c_1) \notin A(H)$. Ahora, con respecto a las flechas en F_1 . Las flechas consecutivas de (v, w) son (w, z) y (w, x) , de las cuales $(c_2, c_2) \in A(H)$ y $(c_2, c_1) \notin A(H)$, por lo que $(w, x) \in F_1$ y $(w, z) \notin F_1$. Con respecto a la flecha (w, x) , su única flecha consecutiva es (x, v) , y como $(c_2, c_3) \in A(H)$, entonces $(x, v) \in F_1$. Por último, para la flecha (x, v) , su única flecha consecutiva es (v, w) , y como $(c_3, c_2) \in A(H)$, entonces $(v, w) \in F_1$. Lo anterior muestra que, efectivamente, \mathcal{F} es una

partición en H -clases de $A(D)$.

Es importante puntualizar que, en general, una digráfica H -coloreada no necesariamente tiene una partición en H -clases. Por ejemplo, la digráfica mostrada en la figura 4.10 no tiene partición en H -clases. Para ello, supongamos que D tiene una de dichas particiones. La flecha (z, x) debe estar en alguna clase, digamos F . Ya que $(c_1, c_2) \in A(H)$, $(c_3, c_2) \in A(H)$, (u, z) tiene color c_1 y (w, z) tiene color c_3 , entonces tanto (u, z) como (w, z) deben estar en la misma clase que (z, x) ; es decir, en F . Ahora bien, como $(u, z) \in F$ y $(c_1, c_1) \in A(H)$, entonces también $(z, v) \in F$. Sin embargo, como $(w, z) \in F$, pero $(c_3, c_1) \notin A(H)$, entonces debería pasar que $(z, v) \notin F$, lo cual no es posible. Así, D es el ejemplo de una digráfica H -coloreada sin partición en H -clases.

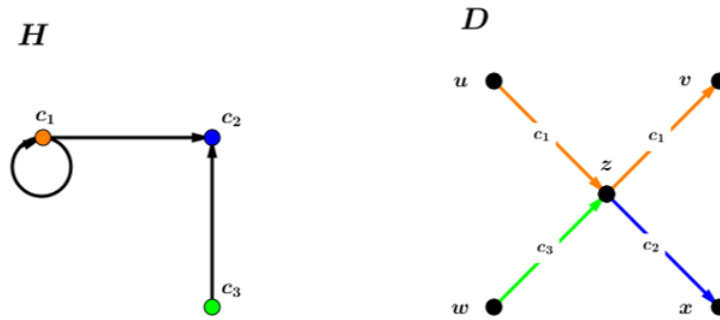


Figura 4.10: Ejemplo de una digráfica H -coloreada sin partición en H -clases

Con lo anterior, uno puede hacerse algunas preguntas con respecto a la existencia de las particiones en H -clases. Por ejemplo, ¿qué condiciones nos garantizarían que una digráfica H -coloreada tenga una de dichas particiones? En particular:

1. ¿Es suficiente pedir condiciones a la coloración para que garanticemos la existencia de una partición en H -clases?
2. ¿Basta pedir condiciones al patrón H ?
3. ¿Existirán patrones de color tales que, sin importar cuál sea la coloración que demos a la digráfica, siempre tiene al menos una partición en H -clases?

Aunque nuestro trabajo central no está enfocado a resolver tales preguntas, sí queremos aportar algunas cosas con respecto a ellas. Por ejemplo, para la pregunta (1), al final del siguiente capítulo mostraremos que al establecer ciertas condiciones a la H -coloración, entonces la digráfica tendrá una partición en H -clases. Para la pregunta (3), en el caso de los patrones monocromáticos, la partición inducida por las clases monocromáticas siempre es una partición en H -clases, por lo que efectivamente existen patrones de color bajo los cuales, sin importar la digráfica D y la H -coloración que se le dé, ésta siempre tiene una partición en H -clases. Con respecto a la pregunta (2), tenemos una condición que consideramos interesante, no sólo por lo sencilla que puede ser la verificación de sus hipótesis, sino por las implicaciones que podremos darle posteriormente.

Lema 4.3.1. Sean D una digráfica H -coloreada, $\mathcal{C}(D)$ su digráfica de clases de color y \mathcal{F} una partición de $V(\mathcal{C}(D))$. Para todo $W \in \mathcal{F}$, denotamos por F_W al conjunto $\{a \in A(D) : \rho(a) \in W\}$. Si se satisface que:

a) Para todo $W \in \mathcal{F}$, $\mathcal{C}(D)[W] \leq H$.

b) Para toda $\{W_1, W_2\} \subseteq \mathcal{F}$ con $W_1 \neq W_2$, toda $W_1 W_2$ -flecha en $\mathcal{C}(D)$ no es una flecha en H .

Entonces la familia $\mathcal{F}' = \{F_W : W \in \mathcal{F}\}$ es una partición en H -clases de $A(D)$. En particular, D tiene una partición en H -clases.

Demostración. Primero veremos que \mathcal{F}' es una partición de $A(D)$. Para mostrar que todo $F_W \in \mathcal{F}'$, F_W es no vacío, basta con ver que por ser \mathcal{F} una partición de $V(\mathcal{C}(D))$ entonces W es no vacío, si $c \in W$, entonces al menos una flecha de D , digamos a , debe tener color c . Con ello, $a \in F_W$ y, en particular, $F_W \neq \emptyset$.

Por otro lado, para ver que \mathcal{F}' es una familia de conjuntos ajenos dos a dos, procedamos por contradicción; es decir, supongamos que $F_W \cap F_{W'} \neq \emptyset$ para algún $\{W, W'\} \subseteq \mathcal{F}$ y $W \neq W'$. De esta suposición podemos considerar una flecha a en $F_W \cap F_{W'}$ y por definición de estos conjuntos, el color de a está simultáneamente en W y W' , lo cual no es posible pues \mathcal{F} es una partición de $V(\mathcal{C}(D))$.

Por último, resta por verificar que $\cup \mathcal{F}' = A(D)$. Ya que todo elemento de \mathcal{F} es un subconjunto de flechas de D , entonces $\cup \mathcal{F}' \subseteq A(D)$. Para comprobar la otra contención, si e es una arista de D , entonces e debe tener algún color bajo la m -coloración, digamos c . Ya que \mathcal{F} es una partición de $V(\mathcal{C}(D))$, c debe estar en alguna clase de dicha partición, digamos W . Se sigue de lo anterior que $a \in F_W$ y así a está en $\cup \mathcal{F}'$.

Lo anterior muestra que \mathcal{F}' es una partición de $A(D)$, sólo resta por demostrar que efectivamente es una partición en H -clases. Para esto último tomemos dos flechas a y b tales que b es consecutiva de a . Ahora mostraremos que $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$ si y sólo si existe $F_W \in \mathcal{F}'$ tal que $\{a, b\} \subseteq F_W$.

Primero mostraremos la condición suficiente; es decir, si $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$, entonces existe $F_W \in \mathcal{F}'$ tal que $\{a, b\} \subseteq F_W$. Primero, como ya mostramos que \mathcal{F}' es una partición de $A(D)$, podemos suponer que $a \in F_W$ para algún $W \in \mathcal{F}$. Con esto último, $\rho(a) \in W$. Ya que por definición de $\mathcal{C}(D)$ se tiene que $(\rho(a), \rho(b)) \in A(\mathcal{C}(D))$ y por suposición, $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$, entonces podemos concluir de nuestra hipótesis (b) que $\rho(b) \in W$, por lo que $b \in F_W$. Así, existe $F_W \in \mathcal{F}'$ tal que $\{a, b\} \subseteq F_W$.

Ahora mostraremos la parte suficiente; es decir, si existe $F_W \in \mathcal{F}'$ tal que $\{a, b\} \subseteq F_W$, entonces $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$. Como $\{a, b\} \subseteq F_W$, entonces por definición de F_W se tiene que $\{\rho(a), \rho(b)\} \subseteq W$, y por definición de $\mathcal{C}(D)$, se tiene que $(\rho(a), \rho(b)) \in A(\mathcal{C}(D))$. Por lo anterior, $(\rho(a), \rho(b))$ es una flecha de $\mathcal{C}(D)[W]$. Sin embargo, por nuestra hipótesis (a), podemos concluir que $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$, como era deseado. \square

Una vez que hemos visto la idea formal del lema 4.3.1, pasemos con un ejemplo concreto. En la figura 4.11 se muestra una digráfica D , la cual está H -coloreada, junto con su digráfica de clases de color $\mathcal{C}(D)$. En la

digráfica de clases de color consideremos los conjuntos $W_1 = \{c_1, c_2, c_6\}$, $W_2 = \{c_3, c_4\}$ y $W_3 = \{c_5\}$. Es sencillo ver que $\mathcal{F} = \{W_1, W_2, W_3\}$ es una partición de $V(\mathcal{C}(D))$. Por otro lado, las digráficas inducidas en $\mathcal{C}(D)$ por cada uno de dichos conjuntos (cuyas flechas fueron resaltadas con flechas negras en la imagen) todas son subdigráficas de H , y las $W_i W_j$ -flechas en $\mathcal{C}(D)$ con $i \neq j$ (las cuales fueron resaltadas con flechas grises) ninguna está en H . Con ello, es posible dar una partición en H -clases de $A(D)$: si F_1 es el conjunto de flechas en D con color en W_1 , F_2 es el conjunto de flechas de D con color en W_2 y F_3 es el conjunto de flechas de D con color en W_3 , entonces por el lema 4.11, $\{F_1, F_2, F_3\}$ es una partición en H -clases de $A(D)$.

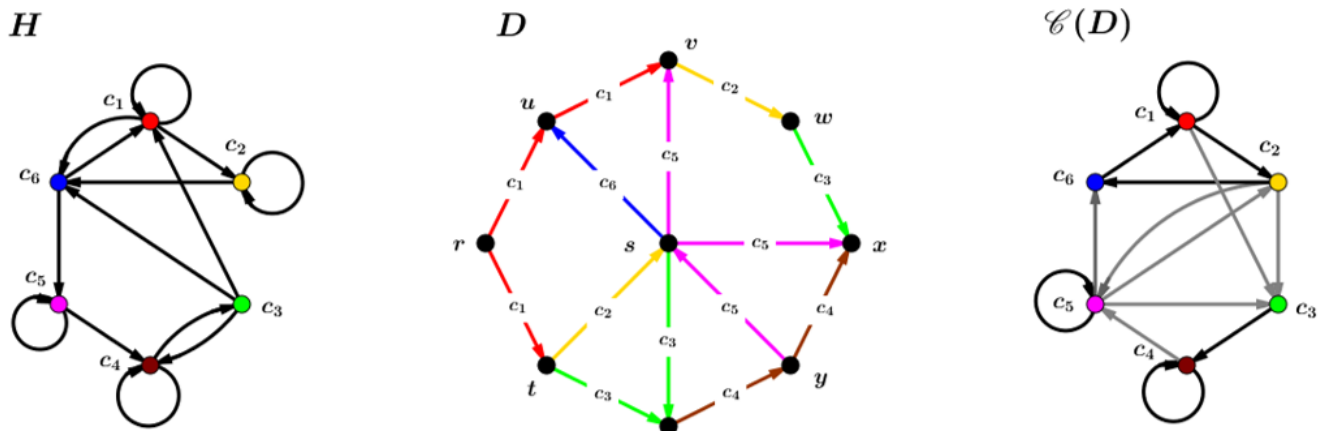


Figura 4.11: Ejemplo de una partición en H -clases usando la digráfica de clases de color

Ya que tenemos una idea de cómo funcionan las H -clases en una digráfica H -coloreada, procederemos a definir una generalización de la digráfica de clases de color como sigue. Sean D una digráfica H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$. La **digráfica de H -clases relativa a \mathcal{F}** , denotada por $C_{\mathcal{F}}(D)$, es la digráfica cuyo conjunto de vértices es \mathcal{F} y $(F, F') \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$ si y sólo si existe $a \in F$ y existe $b \in F'$ tales que b es una flecha consecutiva de a . La digráfica de H -clases puede contener lazos.

Un ejemplo del concepto anterior se mostrará en la figura 4.12. Primero notemos que el patrón H puede verse como la unión de tres gráficas completas: la que está formada por los vértices c_1, c_2, c_6 , la formada por los vértices c_3 y c_4 , y la formada por el vértice c_5 . Ese comportamiento nos facilitará encontrar una partición en H -clases de $A(D)$ mediante el lema 4.3.1. Para tal fin, definimos $W_1 = \{c_1, c_2, c_6\}$, $W_2 = \{c_3, c_4\}$ y $W_3 = \{c_5\}$. Además, consideremos el conjunto F_1 que consta de todas aquellas flechas de D con color en W_1 , F_2 es el conjunto de las flechas en D con color en W_2 , y F_3 consta de todas las flechas con color en W_3 . Ahora, denotamos por \mathcal{F} la familia $\{F_1, F_2, F_3\}$. Para ver que dicha familia es una partición en H -clases, basta con observar que para toda $i \in \{1, 2, 3\}$, $H[W_i]$ es completa, por lo que sin importar cómo sea $\mathcal{C}(D)$, podemos asegurar que para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{C}(D)[W_i] \leq H$.

Por otro lado, como en H no existen $W_i W_j$ -flechas cuando $i \neq j$, entonces nuevamente sin importar el comportamiento de $\mathcal{C}(D)$, cualquier $W_i W_j$ -flecha en $\mathcal{C}(D)$, con $i \neq j$, no puede ser una flecha de H . Por el

lema 4.3.1, podemos asegurar que la familia $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$ es una partición en H -clases de $A(D)$. Con base en ello, podemos mostrar la digráfica de clases relativa de D con respecto a \mathcal{F} . Los vértices de dicha digráfica serán F_1, F_2 y F_3 . Ahora empezaremos a ver cómo se comportan las flechas en $C_{\mathcal{F}}(D)$.

Primero procedamos con la clase F_1 . Notemos que (z, y) es una flecha en la clase F_1 , y dicha flecha tiene una flecha consecutiva en la clase F_3 , a saber, (y, r) . Por ello, (F_1, F_3) debe ser una flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$. De manera similar, (w, z) es un flecha en la clase F_1 y tiene una flecha consecutiva en la clase F_2 , a saber, (z, t) , por lo que (F_1, F_2) también es una flecha de $C_{\mathcal{F}}(D)$. Por último, cualquier flecha en F_1 tiene una flecha consecutiva en F_1 , por lo que además (F_1, F_1) es un lazo en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Con ello determinamos todos los ex-vecinos en de la clase F_1 en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Ahora, con respecto a la clase F_2 , ésta consta sólo de dos flechas: (y, s) y (z, t) , de las cuales sólo (y, s) tiene una flecha consecutiva (s, r) , la cual está en la clase F_3 . Por ello, (F_2, F_3) es una flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Por último, con respecto a la clase F_3 , ninguna flecha en dicha clase tiene flechas consecutivas, por lo que F_3 no tiene ex-vecinos en $C_{\mathcal{F}}(D)$. La digráfica $C_{\mathcal{F}}(D)$ también se muestra en la figura 4.12.

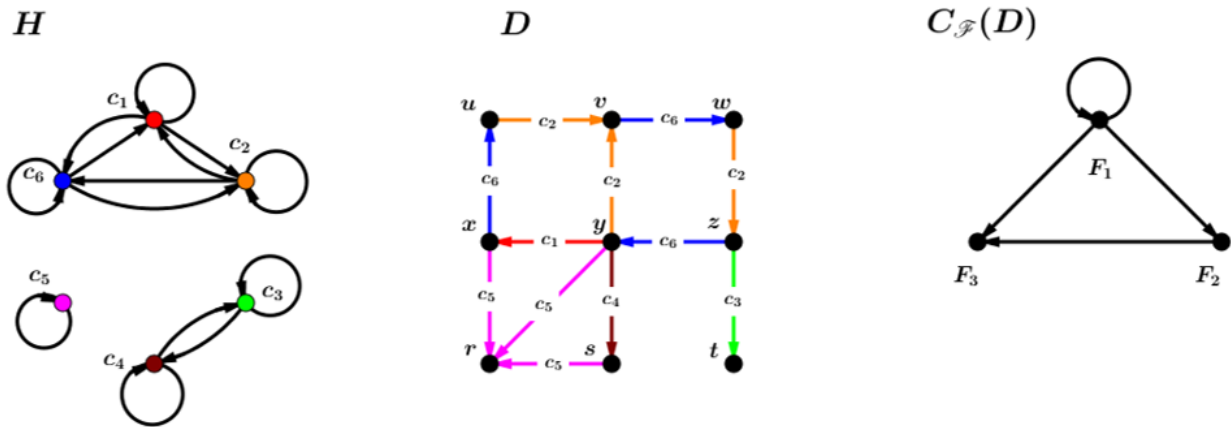


Figura 4.12: Ejemplo de una digráfica y una digráfica de H -clases

Algo importante de mencionar es que una digráfica puede tener asociadas varias digráficas de H -clases, pues dada una digráfica H -coloreada, ésta no necesariamente tiene una única partición en H -clases. Por otro lado, y como ya hemos venido mencionando hasta este punto, la digráfica de H -clases es una digráfica que engloba la digráfica de clases de color: cuando tenemos un patrón monocromático H y una digráfica H -coloreada, una partición muy natural de $A(D)$ es en clases monocromáticas, las cuales, bajo el patrón H , deben ser H -clases. En tal caso, por las definiciones de digráfica de clases de color y la digráfica de H -clases, estas dos deben ser isomorfas. Con ello, la digráfica de H -clases es una generalización de la digráfica de clases de color, pero que utiliza H -coloraciones.

Para continuar, necesitamos establecer un par de definiciones. Dada una digráfica H -coloreada, \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$ y $x \in V(D)$, denotamos por $N_{\mathcal{F}}^-(x)$ al conjunto de todas aquellas clases en \mathcal{F} que intersecan a $A^-(x)$; es decir, $N_{\mathcal{F}}^-(x)$ es el conjunto $\{F \in \mathcal{F} : A^-(x) \cap F \neq \emptyset\}$. De manera

análoga, denotamos por $N_{\mathcal{F}}^+(x)$ al conjunto de todas aquellas clases en \mathcal{F} que intersecan a $A^+(x)$; es decir, $N_{\mathcal{F}}^+(x) = \{F \in \mathcal{F} : A^+(x) \cap F \neq \emptyset\}$. Por último, $N_{\mathcal{F}}(x)$ denotará la unión de $N_{\mathcal{F}}^-(x)$ y de $N_{\mathcal{F}}^+(x)$. Por ejemplo, consideremos nuevamente la digráfica H -coloreada en la figura 4.12, $W_1 = \{c_1, c_2, c_6\}$, $W_2 = \{c_3, c_4\}$ y $W_3 = \{c_5\}$. Además, para toda $i \in \{1, 2, 3\}$, consideremos el conjunto $F_i = \{e \in A(D) : \rho(e) \in W_i\}$. Previamente ya habíamos mostrado que $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$ es una partición en H -clases. Si prestamos atención en el vértice z , las ex-flechas de z , las cuales son (z, y) y (z, t) , están en F_1 y F_2 respectivamente, por lo que $N_{\mathcal{F}}^+(z) = \{F_1, F_2\}$. O al tomar, por ejemplo, el vértice r , éste tiene tres in-flechas, a saber (x, r) , (y, r) y (s, r) , pero las tres están en la clase F_3 , por lo que $N_{\mathcal{F}}^-(r) = \{F_3\}$.

Ahora procederemos a mostrar diversas propiedades generales de la digráfica de H -clases, muchas de las cuales serán utilizadas en los siguientes dos capítulos, pues será la digráfica de H -clases la que será usada para encontrar condiciones suficientes que garanticen la existencia de (k, l, H) -núcleos en digráficas H -coloreadas.

Lema 4.3.2. *Sean D una digráfica H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$. Los siguientes enunciados se satisfacen:*

- a) *Para todo $F \in \mathcal{F}$, $D\langle F \rangle$ es una H -subdigráfica de D .*
- b) *Si $x \in V(D)$ tiene al menos un in-vecino y un ex-vecino en D , entonces $N_{\mathcal{F}}^-(x) \neq \emptyset$ y $N_{\mathcal{F}}^+(x) \neq \emptyset$.*
- c) *Si $x \in V(D)$ tiene al menos un in-vecino y un ex-vecino, entonces para toda $F \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$ y toda $F' \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$, se satisface que $(F, F') \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$.*
- d) *Si x no es fuente ni pozo en D , entonces: x es libre de obstrucciones en D si y sólo si existe una única $F \in \mathcal{F}$ tal que $x \in V(D\langle F \rangle)$.*
- e) *Si C es un camino en D , entonces: $O_H(C) = \emptyset$ si y sólo si existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A(C) \subseteq F$.*
- f) *Si $(F, F') \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$, entonces $V(D\langle F \rangle) \cap V(D\langle F' \rangle) \neq \emptyset$.*

Demostración. a) Para este inciso, consideremos una flecha a en $D\langle F \rangle$ y una flecha consecutiva de a en $D\langle F \rangle$, digamos b . Como a y b están en F y ésta es una H -clase, entonces $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$, lo que demuestra que $D\langle F \rangle$ es una H -subdigráfica.

b) Por hipótesis sobre x , este vértice debe tener al menos una in-flecha, a la que llamaremos a , y una ex-flecha, a la que llamaremos b . Ya que \mathcal{F} es una partición de $A(D)$, entonces $a \in F$ y $b \in F'$ para algún F y F' en \mathcal{F} . En particular, $F \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$ y $F' \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$, lo que demuestra este inciso.

c) Como $F \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$ y $F' \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$, entonces por definición existe una in-flecha de x , digamos a , tal que $a \in F$ y existe una ex-flecha de x , digamos b , tal que $b \in F'$. Como b es una flecha consecutiva de a , entonces por la definición de digráfica de H -clases podemos concluir que $(F, F') \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$.

d) Primero mostraremos que la parte suficiente del enunciado; es decir, si x es libre de obstrucciones, entonces existe una única $F \in \mathcal{F}$ tal que $x \in V(D\langle F \rangle)$. Para ello, como x no es una fuente ni un pozo en D , entonces x tiene al menos una in-flecha, digamos a , y al menos una ex-flecha, digamos b , ambas en D . Por ser \mathcal{F} una partición de $A(D)$, entonces tanto a como b deben estar cada una en una clase de \mathcal{F} . Sin embargo, como x es libre de obstrucciones, entonces $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$, por lo que a y b deben estar en la misma clase, digamos F . Ahora veremos que F es la clase requerida, y para ello basta con ver que todas las in-flechas y ex-flechas de x en D están en F . Si a' es una in-flecha de x , entonces por ser x libre de obstrucciones, $(\rho(a'), \rho(b)) \in A(H)$. Se sigue que a' y b están en la misma clase de \mathcal{F} , la cual es F . Si b' es una ex-flecha de x , nuevamente tenemos que $(\rho(a), \rho(b')) \in A(H)$, por lo que a y b' están en la misma clase; es decir, en F . Como todas las in-flechas y ex-flechas de x están en F , entonces F es la única clase de \mathcal{F} tal que $x \in V(D\langle F \rangle)$, lo que muestra lo deseado.

Ahora demostraremos la parte necesaria; es decir, si existe una única $F \in \mathcal{F}$ tal que $x \in V(D\langle F \rangle)$, entonces x es libre de obstrucciones en D . Para ello, tomemos una in-flecha arbitraria de x en D , digamos a , y una ex-flecha arbitraria de x en D , digamos b . Por hipótesis, tanto a como b deben estar en la clase F , por lo que, de acuerdo con la definición de H -clase, $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$. Así, x es libre de obstrucciones en D .

e) Supongamos que $C = (x_0, \dots, x_n)$. Primero mostraremos la parte necesaria del enunciado; es decir, si existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A(C) \subseteq F$, entonces $O_H(C) = \emptyset$. Para esto, basta con ver que para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, (x_{i-1}, x_i) y (x_i, x_{i+1}) están ambas en F (los índices se consideran módulo n cuando C es cerrado), y por ser F una H -clase, entonces $(\rho(x_{i-1}, x_i), \rho(x_i, x_{i+1})) \in A(H)$, en tal caso podemos concluir que para toda $i \in \{0, \dots, n-1\}$, C no tiene obstrucción en i , por lo que $O_H(C) = \emptyset$.

Ahora demostraremos la parte suficiente; es decir, si $O_H(C) = \emptyset$, entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A(C) \subseteq F$. En este caso, procederemos por contradicción; es decir, supondremos que no existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A(C) \subseteq F$. Dado que \mathcal{F} es una partición de $A(D)$, se sigue que $(x_0, x_1) \in F$ para algún $F \in \mathcal{F}$, sin embargo, por nuestra suposición, no es posible que todas las flechas de C estén en F , por lo que podemos definir $k = \min\{i \in \{1, \dots, n\} : (x_{i-1}, x_i) \notin F\}$. Nótese que $k \geq 2$, pues $(x_0, x_1) \in F$. Así, $(x_{k-2}, x_{k-1}) \in F$ y $(x_{k-1}, x_k) \notin F$, se sigue de la definición de partición en H -clases que $(\rho(x_{k-2}, x_{k-1}), \rho(x_{k-1}, x_k)) \notin A(H)$; es decir, C tiene una obstrucción en $k-1$, por lo que $O_H(C) \neq \emptyset$, lo cual contradice nuestras hipótesis sobre C . Así, si $O_H(C) = \emptyset$, entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A(C) \subseteq F$.

f) Dado que (F, F') es una flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$, entonces existe una flecha a en F y una flecha consecutiva de a en F' , digamos b . Si x es el vértice final de a , entonces $x \in V(D\langle F \rangle)$ y $x \in V(D\langle F' \rangle)$, lo que

demuestra este inciso. □

El siguiente lema nos muestra un comportamiento interesante con respecto a los conjuntos independientes en la digráfica de H -clases.

Lema 4.3.3. *Sean D una digráfica H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$. Si S es un conjunto independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, entonces $\cup S$ es una H -clase de D . En particular, $D\langle\cup S\rangle$ es una H -subdigráfica de D .*

Demostración. Sea $S' = \cup S$ y $\{a, b\} \subseteq A(D)$ tal que $\{a, b\} \cap S' \neq \emptyset$ y b es una flecha consecutiva de a .

Primero mostraremos que si $\{a, b\} \subseteq S'$, entonces $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$. Para ello, como a y b están en S' , entonces existen F y F' en S tales que $a \in F$ y $b \in F'$. Por definición de $C_{\mathcal{F}}(D)$, se tiene que (F, F') es una flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Sin embargo, por ser S un conjunto independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, se sigue que $F = F'$; es decir, $\{a, b\} \subseteq F$. Ya que F es una H -clase de D , entonces $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$, como era deseado.

Ahora mostraremos que si $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$, entonces $\{a, b\} \subseteq S'$. Ya que por suposición $\{a, b\} \cap S' \neq \emptyset$, entonces por definición de S' , existe $F \in S$ tal que $\{a, b\} \cap F \neq \emptyset$. Por ser F una H -clase de D , se sigue del hecho de que $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$ que $\{a, b\} \subseteq F$ y con ello, $\{a, b\} \subseteq S'$. Con lo anterior, podemos concluir que S' es una H -clase de D . □

Una consecuencia interesante, y derivada del resultado previo, es la siguiente: ya habíamos mencionado anteriormente que una digráfica H -coloreada podía tener varias particiones en H -clases, pero de acuerdo con el lema anterior, cada que la digráfica de H -clases tenga algún conjunto independiente, entonces es posible unir dicho conjunto en una sola H -clase. Con esto en mente, podemos proponer el siguiente corolario.

Corolario 4.3.4. *Si D es una digráfica H -coloreada y tiene una partición en H -clases, entonces existe una partición en H -clases de $A(D)$, digamos \mathcal{F} , tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es semicompleta.*

Demostración. Consideremos una partición en H -clases de $A(D)$ que tenga la menor cantidad posible de clases, digamos \mathcal{F} . Afirmamos que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es semicompleta. Procederemos por contradicción, si $C_{\mathcal{F}}(D)$ no es semicompleta, entonces dicha digráfica debe tener un conjunto independiente, digamos S , con al menos dos vértices. En tal caso, al aplicar el lema 4.3.3, podemos concluir que $(\mathcal{F} \setminus S) \cup \{\cup S\}$ es una partición en H -clases de $A(D)$ con menos clases que \mathcal{F} , lo cual no es posible. Por lo anterior, $C_{\mathcal{F}}(D)$ es semicompleta. □

Los últimos resultados que veremos en esta sección son referentes a la conexidad de la digráfica de H -clases. Este primer lema indica que si D es una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada con al menos una partición en H -clases, entonces su digráfica de H -clases hereda la propiedad de ser fuertemente conexa.

Lema 4.3.5. *Sea D una digráfica H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$. Si D es fuertemente conexa, entonces $C_{\mathcal{F}}(D)$ es fuertemente conexa.*

Demostración. Sean F y G dos vértices de $C_{\mathcal{F}}(D)$. Como F y G son conjuntos no vacíos de flechas en D , podemos tomar $(u, v) \in F$ y $(x, z) \in G$. Dado que D es fuertemente conexa, entonces existe un uz -camino en D , digamos $C = (x_0, \dots, x_n)$, tal que su flecha inicial es (u, v) y su flecha final es (x, z) . Como toda flecha de C debe estar en alguna clase de \mathcal{F} , podemos suponer que para toda $i \in \{0, \dots, n-1\}$, la flecha (x_i, x_{i+1}) está en la clase F_i . Nótese que $F_0 = F$ y que $F_{n-1} = G$. Además, como para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in F_i$, entonces se sigue de la definición de $C_{\mathcal{F}}(D)$ que para toda $i \in \{0, \dots, n-2\}$, (F_i, F_{i+1}) es un flecha en la digráfica de H -clases. De lo anterior, (F_0, \dots, F_{n-1}) es un camino en $C_{\mathcal{F}}(D)$; es decir, existe un FG -camino en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Con lo anterior, podemos concluir que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es fuertemente conexa. \square

Corolario 4.3.6. *Sean D una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada, y \mathcal{F} una partición en H -clases no trivial de $A(D)$. Si S es un conjunto independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, entonces todos los vértices de S tienen al menos un ex-vecino en $V(C_{\mathcal{F}}(D)) \setminus S$.*

Demostración. Primero notemos que como \mathcal{F} es no trivial, entonces $C_{\mathcal{F}}(D)$ es no trivial. Por otro lado, como D es fuertemente conexa, entonces podemos concluir que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es fuertemente conexa no trivial. Se sigue de manera inmediata que todos los vértices de S tienen al menos un ex-vecino en $V(C_{\mathcal{F}}(D)) \setminus S$. \square

Lema 4.3.7. *Sean D una digráfica H -coloreada, \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$, $S \subseteq \mathcal{F}$ tal que para toda $F \in S$, $D\langle F \rangle$ es unilateralmente conexa. Supongamos, además, que N es un núcleo por trayectorias en $D\langle \cup S \rangle$ y $\{x, z\} \subseteq N$ con $x \neq z$. Si $x \in V(D\langle F \rangle)$ y $z \in V(D\langle G \rangle)$ con $\{F, G\} \subseteq S$, entonces $F \neq G$.*

Demostración. Procederemos por contradicción al suponer que $F = G$. Ya que $D\langle F \rangle$ es unilateral, existe un camino entre x y z en la digráfica $D\langle F \rangle$, al que llamaremos C . Como $F \in S$, entonces C debe ser un camino en $D\langle \cup S \rangle$, lo cual no es posible pues $\{x, z\} \subseteq N$ y N es un núcleo por trayectorias en $D\langle \cup S \rangle$. Por lo anterior, $F \neq G$. \square

Con los conceptos y resultados vistos previamente podremos desarrollar los siguientes capítulos, los cuales se centran en la existencia de (k, l, H) -núcleos en digráficas H -coloreadas.

Capítulo 5

Una extensión del teorema de Richardson para (k, l, H) -núcleos

Un primer acercamiento para buscar condiciones suficientes que garanticen la existencia de (k, l, H) -núcleos en digráficas H -coloreadas es mediante condiciones sobre los ciclos. Durante la introducción de este trabajo se mencionó algunos teoremas con los que es posible garantizar la existencia de núcleos usuales al pedir condiciones sobre los ciclos de la digráfica y, con esto en mente, nosotros abordaremos un método similar con respecto a los (k, l, H) -núcleos, pero desde la perspectiva de la digráfica de H -clases. En general, los resultados principales de este capítulo tendrán como hipótesis principal cierto comportamiento cíclico en la digráfica de H -clases, como lo es pedir que dicha digráfica sea cíclicamente k -partita. Como consecuencia de los teoremas aquí propuestos, tendremos generalizaciones de algunos teoremas existentes en la literatura.

5.1. Resultados preliminares

En esta primera sección demostraremos algunos resultados previos que serán de utilidad para demostrar los teoremas principales de este capítulo específico. La hipótesis principal que manejaremos será que la digráfica de H -clases sea una digráfica cíclicamente k -partita, para cierto valor de k . Con dicha hipótesis, obtendremos bastantes propiedades estructurales de la digráfica base, como se mostrará en los siguientes resultados. Sin embargo, el pedir que la digráfica de H -clases sea una digráfica cíclicamente k -partita hace que muchos resultados sean difíciles de enunciar, comprender y demostrar debido a la notación requerida para ello. Con intención de simplificar las cosas, los lemas que se presentan en esta sección tendrán como hipótesis que la digráfica de H -clases sea un k -ciclo en lugar de una digráfica cíclicamente k -partita. Esto último mejora considerablemente la notación usada y simplifica las pruebas.

El lema [5.1.1](#), el cual será demostrado a continuación, establece que, dada una partición en H -clases cuya

digráfica de H -clases es cíclicamente k -partita, dicha partición puede modificarse para obtener una estructura más sencilla de trabajar.

Lema 5.1.1. *Sean D una digráfica H -coloreada, fuertemente conexa y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$. Si $C_{\mathcal{F}}(D)$ es una digráfica cíclicamente k -partita, entonces existe una partición en H -clases de $A(D)$, digamos \mathcal{F}' , tal que $C_{\mathcal{F}'}(D)$ es un k -ciclo.*

Demostración. Dado que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es cíclicamente k -partita, supongamos que $\{C_i: i \in \{0, \dots, k-1\}\}$ es la partición de $V(C_{\mathcal{F}}(D))$ en conjuntos independientes dada por la definición. Para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$, definimos $P_i = \cup C_i$. Es sencillo verificar que la familia \mathcal{F}' definida como $\{P_i: i \in \{0, \dots, k-1\}\}$ es una partición de $A(D)$. Además, ya que para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$, C_i es un conjunto independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, entonces P_i es una H -clase de D , como lo establece el lema 4.3.3; es decir, \mathcal{F}' es una partición en H -clases de $A(D)$. Nótese que por ser D fuertemente conexa, entonces $C_{\mathcal{F}'}(D)$ es fuertemente conexa, como lo enuncia el lema 4.3.5. Por último, debido a que toda flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$ es una $C_i C_{i+1}$ -flecha o un lazo, entonces toda flecha en $C_{\mathcal{F}'}(D)$ es una $P_i P_{i+1}$ -flecha o un lazo. Por ello, $C_{\mathcal{F}'}(D)$ es un k -ciclo, lo que concluye la demostración de este lema. \square

Sin perder de vista el lema anterior, ahora podremos simplificar nuestras hipótesis al utilizar k -ciclos en lugar de digráficas cíclicamente k -partitas.

Lema 5.1.2. *Sean D una digráfica H -coloreada fuertemente conexa no trivial y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$ tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo, digamos $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_0)$. Los siguientes enunciados se satisfacen:*

- a) *Si $a \in P_r$, $b \in P_s$ y b es consecutiva de a , entonces $s \in \{r, r+1\}$ (los índices se consideran módulo k). Más aun, $s = r+1$ si y sólo si $(\rho(a), \rho(b)) \notin A(H)$.*
- b) *Para todo $x \in V(D)$ se satisface al menos una de las siguientes condiciones: (i) $N_{\mathcal{F}}^-(x) \cap N_{\mathcal{F}}^+(x) = \emptyset$ o (ii) $N_{\mathcal{F}}^-(x) \subseteq N_{\mathcal{F}}^+(x)$ o (iii) $N_{\mathcal{F}}^+(x) \subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$.*
- c) *Para todo $x \in V(D)$ se satisface que: existe $r \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que $A(x) \subseteq P_r$ si y sólo si $N_{\mathcal{F}}^-(x) = N_{\mathcal{F}}^+(x)$ y $|N_{\mathcal{F}}^-(x)| = 1$.*
- d) *Si $x \in V(D)$ y no existe $r \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que $A(x) \subseteq P_r$, entonces existe $s \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que $A(x) \subseteq P_s \cup P_{s+1}$, $P_s \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$ y $P_{s+1} \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$. En particular, $|N_{\mathcal{F}}^-(x) \cup N_{\mathcal{F}}^+(x)| = 2$.*

Demostración. a) Para este inciso, primero notemos que como b es una flecha consecutiva de a , $a \in P_r$ y $b \in P_s$, entonces debido a la definición de digráfica de H -clases, se tiene que $(P_r, P_s) \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$. Ya que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo, entonces $s \in \{r, r+1\}$.

Por otro lado, para mostrar que $s = r + 1$ si y sólo si $(\rho(a), \rho(b)) \notin A(H)$, se tiene lo siguiente. Si $(\rho(a), \rho(b)) \notin A(H)$, entonces no es posible que a y b estén en la misma H -clase, por lo que $P_r \neq P_s$ y así $s = r + 1$. De manera análoga, si $s = r + 1$, entonces a y b no están en la misma H -clase, se sigue de ello que $(\rho(a), \rho(b)) \notin A(H)$.

- b) Este inciso será demostrado por contradicción; es decir, supondremos que existe un vértice $x \in V(D)$ tal que se cumple que (i) $N_{\mathcal{F}}^-(x) \cap N_{\mathcal{F}}^+(x) \neq \emptyset$, (ii) $N_{\mathcal{F}}^-(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^+(x)$ y (iii) $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Por el punto (i), consideremos $P_l \in N_{\mathcal{F}}^-(x) \cap N_{\mathcal{F}}^+(x)$, por el punto (ii) podemos considerar $P_j \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$ tal que $P_j \notin N_{\mathcal{F}}^+(x)$ y por el punto (iii) consideremos $P_i \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$ tal que $P_i \notin N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Por la elección de P_i , P_j y P_l , estas tres clases son distintas. Más aun, gracias al inciso (c) del lema 4.3.2, podemos concluir que $C_{\mathcal{F}}(D)[P_i, P_j, P_l]$ contiene un torneo transitivo de orden tres, lo cual no es posible pues $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo. Con lo anterior, se satisface que $N_{\mathcal{F}}^-(x) \cap N_{\mathcal{F}}^+(x) = \emptyset$ o $N_{\mathcal{F}}^-(x) \subseteq N_{\mathcal{F}}^+(x)$ o $N_{\mathcal{F}}^+(x) \subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$.
- c) Primero mostraremos la parte necesaria de este inciso; es decir, si $N_{\mathcal{F}}^-(x) = N_{\mathcal{F}}^+(x)$ y $|N_{\mathcal{F}}^-(x)| = 1$, entonces existe $r \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que $A(x) \subseteq P_r$. Para ello, basta notar que si P_r es la única clase en \mathcal{F} tal que $P_r \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$, entonces todas las in-flechas de x pertenecen a la clase P_r . Ya que $N_{\mathcal{F}}^-(x) = N_{\mathcal{F}}^+(x)$, se sigue que P_r es la única clase tal que $P_r \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$, por lo que todas las ex-flechas de x deben pertenecer también a P_r . Así, $A(x) \subseteq P_r$.

Ahora, para mostrar la parte suficiente del enunciado, basta con ver que $A(x) \subseteq P_r$ implica que todas las in-flechas y ex-flechas de x están en la clase P_r , por lo que $N_{\mathcal{F}}^-(x) = \{P_r\}$ y $N_{\mathcal{F}}^+(x) = \{P_r\}$, lo que muestra en particular que $N_{\mathcal{F}}^-(x) = N_{\mathcal{F}}^+(x)$ y que $|N_{\mathcal{F}}^-(x)| = 1$, como era deseado.

- d) En lo que respecta a este inciso, primero mostraremos la siguiente afirmación.

Afirmación. Existen P_i y P_j en \mathcal{F} tales que $P_i \neq P_j$, $P_i \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$ y $P_j \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$.

Notemos que gracias al inciso previo, $N_{\mathcal{F}}^-(x) \neq N_{\mathcal{F}}^+(x)$ o $|N_{\mathcal{F}}^-(x)| \neq 1$. Además, dado que D es fuertemente conexa, tanto $N_{\mathcal{F}}^-(x)$ como $N_{\mathcal{F}}^+(x)$ son conjuntos no vacíos.

Si $|N_{\mathcal{F}}^-(x)| \neq 1$, entonces $|N_{\mathcal{F}}^-(x)| \geq 2$, por lo que, si tomamos una clase arbitraria en $N_{\mathcal{F}}^-(x)$, digamos P_j , entonces es posible escoger $P_i \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$ de tal forma que $P_i \neq P_j$. Por otro lado, si consideramos que $N_{\mathcal{F}}^-(x) \neq N_{\mathcal{F}}^+(x)$, entonces uno de estos conjuntos no está contenido en el otro. Al suponer que $N_{\mathcal{F}}^-(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^+(x)$, es posible tomar $P_i \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$ de tal forma que $P_i \notin N_{\mathcal{F}}^+(x)$. Dado $P_j \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$ arbitrario, se satisface que $P_i \neq P_j$. Un razonamiento análogo verifica el caso cuando $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$. En cualquiera de las situaciones anteriores, existen P_i y P_j en \mathcal{F} tal que $P_i \neq P_j$, $P_i \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$ y $P_j \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$, como se deseaba.

Sean P_i y P_j las clases cuya existencia está garantizada por la afirmación previa. Primero nótese que, por la elección de P_i y P_j , se tiene que (P_i, P_j) es una flecha de $C_{\mathcal{F}}(D)$. Como dicha digráfica es un k -ciclo, entonces $j \in \{i, i+1\}$. Pero ya que $P_i \neq P_j$, entonces $j = i+1$. En este punto, tengamos en consideración que $P_i \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$ y que $P_{i+1} \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$.

Ahora veremos que $A(x) \subseteq P_i \cup P_{i+1}$, lo que muestra que $N_{\mathcal{F}}^-(x) \subseteq \{P_i, P_{i+1}\}$ y que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \subseteq \{P_i, P_{i+1}\}$. Para demostrar que $N_{\mathcal{F}}^-(x) \subseteq \{P_i, P_{i+1}\}$, tomemos $P_k \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Se sigue que $(P_k, P_{i+1}) \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$ y como $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo, entonces $P_k \in \{P_i, P_{i+1}\}$, por lo que $N_{\mathcal{F}}^-(x) \subseteq \{P_i, P_{i+1}\}$. De manera análoga, si $P_k \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$, entonces $(P_i, P_k) \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$, lo que concluye que $P_k \in \{P_i, P_{i+1}\}$ y así podemos decir que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \subseteq \{P_i, P_{i+1}\}$. De lo anterior se seguiría que, si $a \in A(x)$, entonces las únicas posibles clases en las que está a son P_i o P_{i+1} ; es decir, $a \in P_i \cup P_{i+1}$, por lo que $A(x) \subseteq P_i \cup P_{i+1}$. Además, por la elección inicial de P_i y P_{i+1} , $P_i \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$ y $P_{i+1} \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$, como era deseado.

Por último, para demostrar que $|N_{\mathcal{F}}^-(x) \cup N_{\mathcal{F}}^+(x)| = 2$, tenemos que por lo previamente visto, todas las flechas en $A(x)$ están en P_i o P_{i+1} , por lo que $N_{\mathcal{F}}^-(x) \cup N_{\mathcal{F}}^+(x) \subseteq \{P_i, P_{i+1}\}$, pero más aun, como $P_i \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$ y $P_{i+1} \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$, entonces $\{P_i, P_{i+1}\} \subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x) \cup N_{\mathcal{F}}^+(x)$, con lo cual $N_{\mathcal{F}}^-(x) \cup N_{\mathcal{F}}^+(x) = \{P_i, P_{i+1}\}$, en particular, $|N_{\mathcal{F}}^-(x) \cup N_{\mathcal{F}}^+(x)| = 2$.

□

Todos los incisos del lema anterior serán muy importantes, pero hay que recalcar la importancia particular de tres de ellos: los incisos (a), (c) y (d). Vamos a poner un poco de énfasis en estos. Supongamos que tenemos una digráfica D que es fuertemente conexa, H -coloreada y \mathcal{F} es una partición en H -clases de $A(D)$ tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo (P_0, \dots, P_{k-1}) . El inciso (a) indica que, si tenemos una flecha de D en una clase P_i , digamos e , y una flecha consecutiva de e , digamos b , que no está en la clase P_i , entonces b tiene que estar en la clase P_{i+1} . Esto hace que sea más sencillo saber cómo están organizadas las flechas de la digráfica D .

Por otro lado, es muy natural poder clasificar a los vértices de D en dos tipos: (i) aquellos vértices x para los cuales todas sus flechas incidentes están en una única clase de \mathcal{F} y (ii) aquellos vértices x que no cumplen lo anterior; es decir, sus flechas incidentes están en varias clases de \mathcal{F} . En el caso del punto (i), el inciso (c) del lema 5.1.2 establece que dichos vértices x sólo pueden tener una clase P en $N_{\mathcal{F}}^-(x)$ y una clase P' en $N_{\mathcal{F}}^+(x)$ y, además, dichas clases son iguales. Sin embargo, para el caso (ii), las flechas en $A(x)$ no están en una única clase, pero tampoco pueden estar en muchas clases diferentes: de hecho, por el inciso (d) del lema previo, las flechas en $A(x)$ sólo pueden estar en dos clases de \mathcal{F} y, además, en dos clases consecutivas con respecto a $C_{\mathcal{F}}(D)$, digamos P_i y P_{i+1} . Por si eso no fuera poco, x debe tener al menos una in-flecha en P_i y al menos una ex-flecha en P_{i+1} . Con ello, todos los vértices de D tienen un comportamiento intuitivo, pero útil: dado un vértice arbitrario de D pasa una de dos: o todas sus flechas incidentes están en una única clase, o están en dos clases consecutivas de $C_{\mathcal{F}}(D)$. Dicha idea será de mucha ayuda a lo largo de las siguientes demostraciones. De

hecho, el siguiente lema establece que, bajo algunas condiciones extras, los vértices del segundo tipo tienen un comportamiento aún mejor.

Lema 5.1.3. *Sean D una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada, y \mathcal{F} una partición en H -clases de D de tal forma que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo, digamos $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_0)$. Consideremos $x \in V(D)$ tal que existe $s \in \{0, \dots, k-1\}$ que satisface que $A(x) \subseteq P_s \cup P_{s+1}$, $P_s \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$ y $P_{s+1} \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$ (los índices se consideran módulo k). Los siguientes enunciados se satisfacen:*

- a) Si $N_{\mathcal{F}}^-(x) \cap N_{\mathcal{F}}^+(x) = \emptyset$, entonces $A^-(x) \subseteq P_s$ y $A^+(x) \subseteq P_{s+1}$.
- b) Si $k \geq 3$ o $N_{\mathcal{F}}^-(x) \neq N_{\mathcal{F}}^+(x)$, entonces $A^-(x) \subseteq P_s$ o $A^+(x) \subseteq P_{s+1}$.
- c) Si $k \geq 3$ o $N_{\mathcal{F}}^-(x) \neq N_{\mathcal{F}}^+(x)$, y además, $N_{\mathcal{F}}^-(x) \subseteq N_{\mathcal{F}}^+(x)$, entonces $A^-(x) \subseteq P_s$.

Demostración. a) Para este inciso, primero recordemos que por el lema 5.1.2 (d) y por nuestras hipótesis sobre x , $|N_{\mathcal{F}}^-(x) \cup N_{\mathcal{F}}^+(x)| = 2$. Además, ya que $P_s \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$, $P_{s+1} \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$ y $N_{\mathcal{F}}^-(x) \cap N_{\mathcal{F}}^+(x) = \emptyset$, entonces $N_{\mathcal{F}}^-(x) = \{P_s\}$ y $N_{\mathcal{F}}^+(x) = \{P_{s+1}\}$. Así, cualquier in-flecha de x sólo puede estar en la clase P_s , por lo que $A^-(x) \subseteq P_s$. De manera análoga, cualquier ex-flecha de x sólo puede estar en la clase P_{s+1} , con lo cual, $A^+(x) \subseteq P_{s+1}$.

- b) Para este inciso, primero veremos el caso en que $k \geq 3$. Procederemos por contradicción al suponer que $A^-(x) \not\subseteq P_s$ y que $A^+(x) \not\subseteq P_{s+1}$. Ya que $A(x) \subseteq P_s \cup P_{s+1}$, entonces x debe tener al menos una in-flecha en P_{s+1} y una ex-flecha en P_s , y con ello (P_{s+1}, P_s) es una flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$, lo cual no es posible por ser ésta un k -ciclo con $k \geq 3$. Así, podemos concluir que $A^-(x) \subseteq P_s$ o $A^+(x) \subseteq P_{s+1}$.

Ahora veremos el caso en que $N_{\mathcal{F}}^-(x) \neq N_{\mathcal{F}}^+(x)$. Nuevamente, por el lema 5.1.2 (d) y la hipótesis sobre x , podemos decir que $|N_{\mathcal{F}}^-(x) \cup N_{\mathcal{F}}^+(x)| = 2$. Por otro lado, gracias al lema 5.1.2 (b) y el caso en el que estamos, se tiene que $N_{\mathcal{F}}^-(x) \cap N_{\mathcal{F}}^+(x) \neq \emptyset$ o $N_{\mathcal{F}}^-(x) \subset N_{\mathcal{F}}^+(x)$ o $N_{\mathcal{F}}^+(x) \subset N_{\mathcal{F}}^-(x)$, siendo estas últimas contenciones propias. Así, por simple conteo, se sigue que $N_{\mathcal{F}}^-(x)$ consta de un único elemento o $N_{\mathcal{F}}^+(x)$ consta de un único elemento; es decir, $N_{\mathcal{F}}^-(x) = \{P_s\}$ o $N_{\mathcal{F}}^+(x) = \{P_{s+1}\}$. Por lo anterior, cualquier in-flecha de x está en P_s o cualquier ex-flecha de x está en P_{s+1} , y con ello $A^-(x) \subseteq P_s$ o $A^+(x) \subseteq P_{s+1}$.

- c) Para demostrar este inciso procederemos por contradicción; es decir, supondremos que $A^-(x) \not\subseteq P_s$. De acuerdo con el inciso previo, $A^-(x) \subseteq P_s$ o $A^+(x) \subseteq P_{s+1}$, por lo que $A^+(x) \subseteq P_{s+1}$; es decir, cualquier ex-flecha de x está en P_{s+1} , por lo cual $N_{\mathcal{F}}^+(x) = \{P_{s+1}\}$. Sin embargo, por hipótesis se tiene que $N_{\mathcal{F}}^-(x) \subseteq N_{\mathcal{F}}^+(x)$ en cuyo caso, también se tiene que $N_{\mathcal{F}}^-(x) \subseteq \{P_{s+1}\}$. Esto implica que cualquier in-flecha de x y cualquier ex-flecha de x están en P_{s+1} , por lo que $A(x) \subseteq P_{s+1}$, lo cual contradice la elección de x . Por lo anterior, $A^-(x) \subseteq P_s$.

□

A partir de este punto y lo que resta del capítulo, cada que se tenga una digráfica H -coloreada, digamos D , y una partición en H -clases \mathcal{F} tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_0)$, para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$ denotaremos por D_i la digráfica $D\langle P_i \rangle$. Esto es principalmente con la intención de simplificar la notación usada a lo largo de los resultados.

Lema 5.1.4. *Sean D una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$ tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo, digamos $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_0)$. Para toda $i \in \{0, \dots, k-1\}$ existe un núcleo por trayectorias en $D\langle P_i \rangle$, digamos N , tal que $N \subseteq V(D\langle P_{i+1} \rangle)$ (los índices se consideran módulo k).*

Demostración. Para simplificar notación, consideraremos el caso $i = 0$ y el caso general puede ser demostrado de manera análoga.

Sea N un núcleo por trayectorias de D_0 cuya intersección con $V(D_1)$ tenga la mayor cantidad posible de vértices, es decir: para todo núcleo por trayectorias de D_0 , digamos N' , se satisface que:

$$|N' \cap V(D_1)| \leq |N \cap V(D_1)| \quad (5.1)$$

Ahora mostraremos que N es en núcleo por trayectorias deseado; es decir, $N \subseteq V(D_1)$. Procederemos por contradicción al suponer que existe x_0 en N tal que $x_0 \notin V(D_1)$. Para tener una mejor idea de la estructura de esta demostración, dividiremos el resto de la prueba en varias afirmaciones.

Afirmación 1. $A_D^+(x_0) \subseteq A(D_0)$.

Sea $a \in A_D^+(x_0)$ arbitraria. Debido a que \mathcal{F} es una partición en H -clases, se sigue que $a \in P_j$ para algún $j \in \{0, \dots, k-1\}$. Notemos que $P_j \in N_{\mathcal{F}}^+(x_0)$. Por otro lado, gracias al lema 1.6.1, x_0 debe tener al menos una in-flecha en D_0 , digamos b . Esta in-flecha de x_0 pertenece a la clase P_0 , se sigue de ello que (P_0, P_j) es una flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$ y, gracias a que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo, entonces $j \in \{0, 1\}$. Por otro lado, como x_0 no pertenece a D_1 , entonces no es posible que a sea una flecha en P_1 , por lo que $j = 0$ y así $a \in P_0$, lo cual implica que $a \in A(D_0)$, lo que concluye esta afirmación.

Afirmación 2. Existe una x_0z -trayectoria en D_0 , para algún $z \in V(D_0) \cap V(D_1)$.

Por el inciso (f) del lema 4.3.2, sabemos que $V(D_0) \cap V(D_1)$ es no vacío, y ya que D es fuertemente conexa, podemos considerar una x_0w -trayectoria arbitraria en D tal que $w \in V(D_0) \cap V(D_1)$, digamos $T' = (x_0, \dots, x_t)$. De acuerdo con la afirmación 1 de esta demostración, la flecha (x_0, x_1) es una flecha de D_0 , y con ello podemos definir a m como $\max\{i \in \{1, \dots, t\} : (x_0, T', x_i) \text{ es una trayectoria en } D_0\}$. Si $m = t$, entonces w y T' son el vértice y la trayectoria deseada, por lo que podemos suponer que $m < t$. Así, se seguiría que $(x_{m-1}, x_m) \in A(D_0)$ y $(x_m, x_{m+1}) \in A(D_j)$ para algún $j \in \{0, \dots, k-1\}$, pero con

$j \neq 0$. Ya que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo, entonces $(x_m, x_{m+1}) \in A(D_1)$ y, con ello, $x_m \in V(D_0) \cap V(D_1)$. Así, por definición de m , tenemos que x_m y (x_0, T', x_m) son el vértice y la trayectoria deseados, lo que concluye la demostración de esta afirmación.

Gracias a la afirmación 2, consideremos una x_0z -trayectoria contenida en D_0 , a la que llamaremos T , tal que $z \in V(D_0) \cap V(D_1)$. Ya que N es un conjunto independiente por trayectorias en D_0 , se tiene que $z \notin N$ y, al usar la propiedad de N de ser un conjunto absorbente por trayectorias en D_0 , debe existir $v \in N$ y una zv -trayectoria en D_0 , digamos T' . Notemos que si $x_0 \neq v$, entonces $T \cup T'$ es un camino en D_0 entre dos vértices distintos de N , lo cual contradice la independencia por trayectorias de N , así, $x_0 = v$.

Afirmación 3. El conjunto N' , definido como $(N \setminus \{x_0\}) \cup \{z\}$, es un núcleo por trayectorias en D_0 (dicho conjunto de encuentra representado en la figura 5.1).

Primero mostraremos que N' es un conjunto absorbente por trayectorias en D_0 . Para ello, consideremos $w \in V(D_0) \setminus N'$. Si $w = x_0$, entonces T es una x_0N' trayectoria en D_0 . Por otro lado, si $w \neq x_0$, entonces $w \in V(D_0) \setminus N$ y así por ser N un conjunto absorbente por trayectorias en D_0 , existe una wu -trayectoria en D_0 con $u \in N$, digamos C . Si $u \neq x_0$, entonces C es una wN' -trayectoria en D_0 . Y si $w = x_0$, entonces $C \cup T$ es un wN' -camino en D_0 , al cual se le puede sustraer una wN' -trayectoria. En cualquier caso, se puede concluir que N' es un conjunto absorbente por trayectorias en D_0 .

Ahora procederemos a demostrar que N' es un conjunto independiente por trayectorias en D_0 . Para ello, supongamos por contradicción que existen dos vértices distintos en N' , digamos r y s , y una rs -trayectoria en D_0 , digamos C . Ya que N es un conjunto independiente por trayectorias, no es posible que r y s estén ambos en $N \setminus \{x_0\}$, por lo que uno de dichos vértices es igual a z y el otro está en $N \setminus \{x_0\}$. Si $r = z$, entonces $T \cup C$ es un x_0s -camino en D_0 , lo cual no es posible pues x_0 y s son vértices distintos en N y este conjunto es independiente por trayectorias en D_0 . Si $s = z$, entonces $C \cup T'$ es un rx_0 -camino en D_0 , lo que genera una contradicción similar. Con lo anterior, se puede concluir que N' es un núcleo por trayectorias en D_0 .

De acuerdo con la afirmación 3, y por la elección de N , se debería cumplir que $|N' \cap V(D_1)| \leq |N \cap V(D_1)|$, sin embargo, por la construcción de N' y la elección de x_0 y z , se tiene que $|N' \cap V(D_1)| = |N \cap V(D_1)| + 1$, lo cual es contradictorio. De los argumentos previos, podemos deducir que $N \subseteq V(D_1)$. \square

Pondremos un paréntesis en el enunciado anterior, pues será muy importante en lo consecuente. El lema antes demostrado propone que si tenemos una digráfica H -coloreadas y una partición en H -clases cuya digráfica de H -clases es un k -ciclo, digamos $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_0)$, entonces para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$, siempre es posible encontrar un núcleo por trayectorias de $D\langle P_i \rangle$ que además esté contenido en los vértices de $D\langle P_{i+1} \rangle$. Por

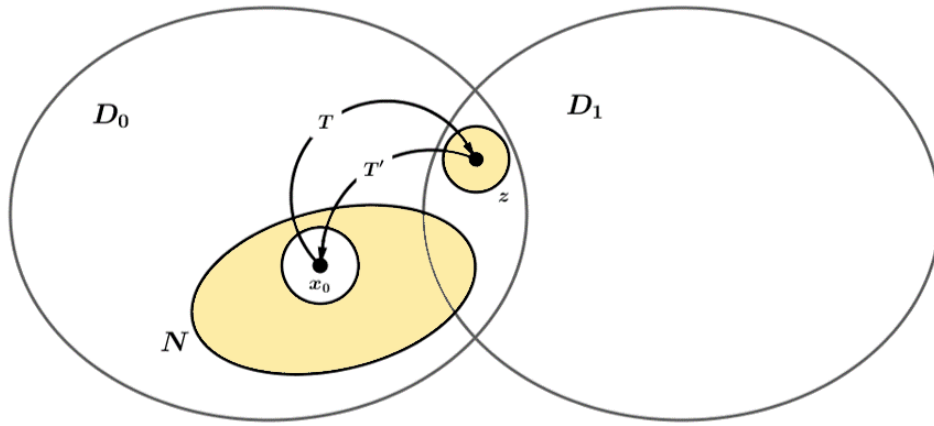


Figura 5.1: El núcleo N' exhibido en la afirmación 3, resaltado en color

un lado, es sabido que encontrar núcleos por trayectorias en digráficas en general es bastante sencillo (véase [9]), sin embargo ¿qué tan sencillo es encontrar un núcleo por trayectorias de $D\langle P_i \rangle$, digamos N , tal que $N \subseteq V(D\langle P_{i+1} \rangle)$? La respuesta la encontraremos en la demostración del lema previo.

El objetivo es encontrar un núcleo por trayectorias de $D\langle P_i \rangle$ que interseca a $V(D\langle P_{i+1} \rangle)$ lo más posible. Pero gracias a la demostración del lema 5.1.4, basta iniciar con un núcleo por trayectorias en $D\langle P_i \rangle$ arbitrario, digamos N . Si dicho núcleo por trayectorias está contenido en $V(D\langle P_{i+1} \rangle)$, habremos terminado. Si no, podemos tomar un vértice en N que no esté en $V(D\langle P_{i+1} \rangle)$, al que llamaremos x . Por ser D fuertemente conexa, debe existir una xw -trayectoria en D , donde w está simultáneamente en $V(D\langle P_i \rangle)$ y $V(D\langle P_{i+1} \rangle)$. Al intercambiar el vértice x por el vértice w , obtenemos un nuevo núcleo por trayectorias de $D\langle P_i \rangle$ pero que tiene más vértices en $D\langle P_{i+1} \rangle$ que N . Así, al realizar este procedimiento una cantidad finita de veces (a lo más $|N|$ veces), obtenemos el núcleo por trayectorias deseado. Por lo anterior, encontrar el núcleo por trayectoria descrito en el lema 5.1.4 es bastante sencillo. Ello será muy importante en lo consecuente.

Por otro lado, el siguiente lema formaliza una idea intuitiva, pero importante. Si tenemos que D es una digráfica H -coloreada y \mathcal{F} es una partición en H -clases de $A(D)$ tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo, digamos $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_0)$, entonces siempre que tengamos un camino C en la digráfica D cuya flecha inicial esté en P_l y flecha final esté en P_q (con $l \neq q$), entonces las flechas del camino C debe intersecar a cada una de las clases entre P_l y P_q . Esa idea queda formalizada en el lema siguiente.

Lema 5.1.5. Sean D una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$ tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo, digamos $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_0)$. Si T es un camino en D cuya flecha inicial está en P_t y flecha final está en P_q para algún $\{t, q\} \subseteq \{0, \dots, k-1\}$ y $t \neq q$, entonces para todo $l \in \{t, t+1, \dots, q\}$ (los índices se toman módulo k), $A(T) \cap P_l \neq \emptyset$. En particular, si $q < t$, entonces $A(T) \cap P_0 \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $T = (x_0, \dots, x_n)$ y, para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$, sea $\alpha_i \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que $(x_i, x_{i+1}) \in P_{\alpha_i}$. De acuerdo con la definición de $C_{\mathcal{F}}(D)$, podemos deducir que $T' = (P_{\alpha_0}, \dots, P_{\alpha_{n-1}})$ es

un camino en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Sin embargo, debido a nuestra hipótesis sobre T , se sigue que T' es un $P_t P_q$ -camino en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Así, por ser $C_{\mathcal{F}}(D)$ un k -ciclo, entonces T' debe recorrer a todos los vértices de $C_{\mathcal{F}}(D)$ entre P_t y P_q ; es decir, para todo $i \in \{t, t+1, \dots, q\}$, $P_i = P_{\alpha_j}$ para algún $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Por lo anterior, para todo $i \in \{t, t+1, \dots, q\}$, $A(T) \cap P_i \neq \emptyset$. \square

Con lo que hemos demostrado hasta ahora, procederemos a probar el siguiente lema. Debido a la notación que se usará a lo largo de la demostración, necesitamos recordar que si C es un camino en una digráfica D y w es un vértice en en la i -ésima posición del camino C , entonces w^- denota el vértice de C en la $(i-1)$ -ésima posición de C y w^+ denota el vértice en la $(i+1)$ -ésima posición de C .

Lema 5.1.6. *Sean $k \geq 2$, D una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases de D tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo, digamos $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_0)$. Si $i \in \{0, \dots, k-1\}$ y N es un núcleo por trayectorias en D_i tal que $N \subseteq V(D_{i+1})$ (los índices se consideran módulo k), entonces las siguientes afirmaciones se satisfacen:*

- a) *Si $z_0 \in V(D) \setminus N$ y $A_D(z_0) \not\subseteq P_{i+1}$, entonces existe una $z_0 N$ -trayectoria en D de H -longitud a lo más $k-1$.*
- b) *Si $x \in N$, $A_D^-(x) \subseteq P_i$ y T es un Nx -camino abierto en D , entonces T tiene H -longitud al menos k .*

Demostración. Para simplificar notación, mostraremos que este lema se satisface para $i = 0$ y una prueba análoga mostrará el caso general.

- a) Sea $z_0 \in V(D) \setminus N$ tal que $A_D(z_0) \not\subseteq P_1$. Si $z_0 \in V(D_0)$, se sigue del hecho de que N es absorbente por trayectorias en D_0 que exista una $z_0 N$ -trayectoria en D_0 . Ya que esta última digráfica es una H -subdigráfica de D , entonces dicha trayectoria tiene H -longitud 1, cumpliéndose lo deseado. Así, para el resto de la demostración, supondremos que z_0 no es vértice de D_0 .

Afirmación 1. Existe $l \in \{2, \dots, k-1\}$ y una $z_0 V(D_0)$ -trayectoria en D cuya flecha inicial está en la clase P_l .

Para realizar la prueba de esta afirmación, primero mostraremos que existe $l \in \{2, \dots, k-1\}$ tal que $A_D^+(z_0) \cap P_l \neq \emptyset$. Gracias a los incisos (c) y (d) del lema 5.1.2, existe $l \in \{0, \dots, k-1\}$ tale que se cumple alguna de las siguientes dos posibilidades: (i) $A_D(z_0) \subseteq P_l$ o (ii) $A_D(z_0) \subseteq P_{l-1} \cup P_l$, $A_D^-(z_0) \cap P_{l-1} \neq \emptyset$ y $A_D^+(z_0) \cap P_l \neq \emptyset$. Si $l = 0$, entonces se deduce de (i) y (ii) que $z_0 \in V(D_0)$, lo cual no es posible por nuestra suposición sobre z_0 . Si $l = 1$, entonces de (i) se deduce que $A_D(z_0) \subseteq P_1$, lo cual no es posible por hipótesis, y de (ii) se deduciría que $z_0 \in V(D_0)$, pues $A_D^-(z_0) \cap P_0 \neq \emptyset$, lo cual nuevamente no es posible por nuestra suposición sobre z_0 . Con lo anterior, $l \geq 2$.

Ahora, por lo acabado de demostrar, consideremos una ex-flecha de z_0 en P_l , digamos (z_0, z_1) y sea $T' = (z_0, \dots, z_t)$ una $z_1V(D_0)$ -trayectoria de longitud mínima en D . Notemos que dicha trayectoria existe pues D es fuertemente conexa. Además, también es importante recalcar que, debido a que T' es de longitud mínima, ninguna de las flechas de T' está en P_0 .

Si $(z_0, z_1) \cup T'$ es una trayectoria, entonces ésta es la trayectoria deseada en la afirmación. Por otro lado, si llegase a pasar que $(z_0, z_1) \cup T'$ no es una trayectoria, entonces el vértice z_0 debe ser vértice de T' ; es decir, existe $r \in \{0, \dots, t\}$ tal que $z_0 = z_r$. Como $z_t \in V(D_0)$, pero $z_0 \notin V(D_0)$, entonces $r < t$. Ya que \mathcal{F} es una partición de $A(D)$, supongamos que $(z_0, z_{r+1}) \in P_m$ para algún $m \in \{0, \dots, k-1\}$ (véase la figura 5.2).

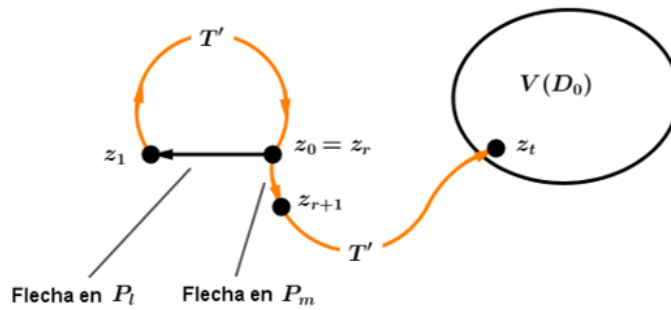


Figura 5.2: Fragmento de la demostración de la afirmación 1

Una vez más, como $z_0 \notin V(D_0)$, pero $(z_0, z_{r+1}) \in P_m$, en particular se tiene que $m \neq 0$. Además, si $m = 1$, entonces $(z_0, z_1) \cup (z_1, T', z_{r+1})$ es un camino en D cuya flecha inicial está en P_l y flecha final está en P_1 . Se sigue del lema 5.1.5 que $(z_0, z_1) \cup (z_1, T', z_{r+1})$ tiene una flecha en D_0 , en particular, dicha flecha debe ser una flecha de T' , lo cual contradice la minimalidad de T' . Por lo anterior, $m \geq 2$ y (z_r, T', z_t) es la trayectoria deseada.

De acuerdo con la afirmación 1, podemos considerar una $z_0V(D_0)$ -trayectoria, digamos $T = (z_0, \dots, z_n)$, tal que $(z_0, z_1) \in P_l$ para algún $l \in \{2, \dots, k-1\}$, y que además sea de longitud mínima con dicha propiedad. Notemos que, debido a esta última suposición, $A(T) \cap P_0 = \emptyset$ y, además, $(z_{n-1}, z_n) \in P_{k-1}$. Gracias al lema 5.1.5 se tiene que debido a que la primera flecha de T está en P_l y la última flecha de T está en P_{k-1} , entonces las flechas de esta trayectoria deben intersectar a todas las clases entre P_l y P_{k-1} ; es decir, para todo $r \in \{l, l+1, \dots, k-1\}$, $A(T) \cap P_r \neq \emptyset$ y con ello podemos definir, para todo $r \in \{l, l+1, \dots, k-1\}$, al vértice z_{α_r} como el último vértice de T tal que $(z_{\alpha_r}^-, z_{\alpha_r}) \in P_r$. Antes de continuar, notemos que, de acuerdo con las definiciones antes dadas, $z_n = z_{\alpha_{k-1}}$ y para todo $r \in \{l, l+1, \dots, k-2\}$, $(z_{\alpha_r}^-, z_{\alpha_r}) \in P_r$ y $(z_{\alpha_r}, z_{\alpha_r}^+) \in P_{r+1}$. Ahora, denotaremos por T_l la trayectoria (z_0, T, z_{α_l}) y para cada $i \in \{l+1, \dots, k-1\}$, denotamos por T_i la trayectoria $(z_{\alpha_{i-1}}, T, z_{\alpha_i})$. En la

figura 5.3 se muestra una imagen de la trayectoria T y los vértices y trayectorias antes descritos.

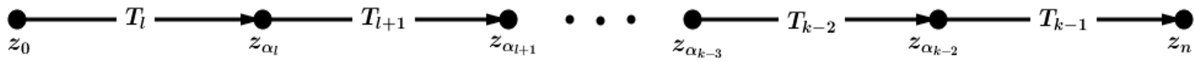


Figura 5.3: Descomposición de T en las subtrayectorias T_i

Ahora mostraremos algunas afirmaciones que serán de utilidad para la conclusión de esta demostración. Todas ellas están encaminadas a poder realizar un conteo más sencillo de las obstrucciones de la trayectoria T y, por consiguiente, poder calcular su H -longitud.

Afirmación 2. Para toda $i \in \{l, l + 1, \dots, k - 1\}$, T_i es una H -trayectoria.

Para realizar la demostración de este enunciado, bastará ver que, para todo $i \in \{l, l + 1, \dots, k - 1\}$, todas las flechas de T_i están en P_i . Con ello, y al saber que D_i es una H -subdígrafa, podremos concluir que T_i es una H -trayectoria. Es importante recordar que tanto la flecha $(z_{\alpha_{i-1}}, z_{\alpha_{i-1}}^+)$ como $(z_{\alpha_i}^-, z_{\alpha_i})$ están en P_i . Sea (z_j, z_{j+1}) una flecha en T_i y $s \in \{0, \dots, k - 1\}$ tal que $(z_j, z_{j+1}) \in P_s$. Véase la figura 5.4.

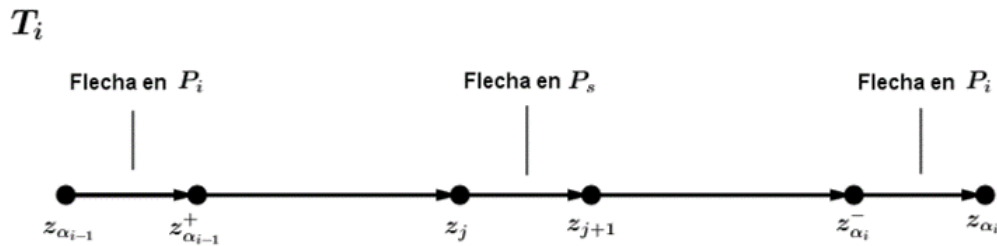


Figura 5.4: Fragmento de la demostración de la afirmación 2

Si $s < i$, entonces $(z_{\alpha_{i-1}}, T_i, z_{j+1})$ es una trayectoria en D cuya flecha inicial está en P_i y flecha final está en P_s , pero con $s < i$. De acuerdo con el lema 5.1.5, dicha trayectoria debe tener una flecha en D_0 , por lo que T debe tener una flecha en D_0 , lo cual contradice la elección de T . De manera análoga, si $i < s$, entonces (z_j, T_i, z_{α_i}) es una trayectoria en D cuya flecha inicial está en P_s y flecha final está en P_i , pero como $i < s$, se seguiría nuevamente del lema 5.1.5 que T tiene una flecha en D_0 , lo cual contradice nuevamente la elección de T . Con lo anterior, $i = s$, lo que demuestra que toda flecha de T_i está en P_i . Esto concluye la demostración de esta afirmación.

Afirmación 3. $O_H(T) = \{\alpha_r : r \in \{l, l + 1, \dots, k - 2\}\}$.

Esta afirmación la mostraremos por doble contención. Primero, para demostrar que el conjunto $\{\alpha_r : r \in \{l, l + 1, \dots, k - 2\}\}$ es subconjunto de $O_H(T)$, consideremos un objeto arbitrario α_r en $\{\alpha_i : i \in \{l, l + 1, \dots, k - 2\}\}$. Debido a la elección de z_{α_r} , se tiene que $(z_{\alpha_r}^-, z_{\alpha_r}) \in P_r$ y

$(z_{\alpha_r}, z_{\alpha_r}^+) \in P_{r+1}$, pero al ser \mathcal{F} una partición en H -clases, entonces concluimos que T tiene una obstrucción en α_r y así $\alpha_r \in O_H(C)$. Por lo tanto, $\{\alpha_r : r \in \{l, l+1, \dots, k-2\}\} \subseteq O_H(T)$.

Ahora, para mostrar la otra contención, consideremos $s \in O_H(T)$. Debido a la afirmación 2, para toda $i \in \{l, l+1, \dots, k-1\}$, T_i es una H -trayectoria, por lo que no es posible que x_s sea un vértice interno de T_i . Así, existe $r \in \{l, l+1, \dots, k-1\}$ tal que $s = \alpha_r$. Además, ya que $z_{\alpha_{k-1}}$ es el vértice terminal de T , entonces no puede ser que $r = \alpha_{k-1}$, por lo que $s \in \{\alpha_r : r \in \{l, \dots, k-2\}\}$. Con lo anterior, se muestra que la afirmación 3 se satisface.

Notemos que, de acuerdo con la afirmación 3, $l_H(T) \leq k-l$ y como $2 \leq l$, entonces $l_H(T) \leq k-2$. Con lo anterior, si el vértice final de T está en N , es decir $z_n \in N$, entonces T es una z_0N -trayectoria en D tal que $l_H(T) \leq k-1$, como era deseado.

Si $z_n \notin N$ entonces, por ser N un núcleo por trayectorias en D_0 , existe una z_nN -trayectoria contenida en D_0 , digamos \bar{T} . Notemos que por ser D_0 una H -subdigráfica de D , entonces \bar{T} es una H -trayectoria de D . Gracias al inciso (c) del lema 4.1.2, la H -longitud de $T \cup \bar{T}$ es a lo más $l_H(T) + 1$, pero como $l_H(T) \leq k-2$, se tiene que $l_H(T \cup \bar{T}) \leq k-1$. Si logramos probar que $T \cup \bar{T}$ es una trayectoria, nuestra demostración habrá finalizado, pues ésta sería una z_0N -trayectoria en D de H -longitud a lo más $k-1$. Supongamos que $T \cup \bar{T} = (z_n, z_{n+1}, \dots, z_m)$.

Afirmación 4. $T \cup \bar{T}$ es una trayectoria.

Procederemos por contradicción al suponer que $T \cup \bar{T}$ no es una trayectoria; es decir, existe $\{i, j\} \subseteq \{0, \dots, m\}$ tal que $z_i = z_j$ e $i < j$. Ya que tanto T como \bar{T} son trayectorias, no es posible que x_i y x_j estén ambos en T o ambos en \bar{T} , por lo que $i \in \{0, \dots, n-1\}$ y $j \in \{n+1, \dots, m\}$. En tal caso, $(z_i, z_{i+1}) \in P_r$ para algún $r \in \{l, l+1, \dots, k-1\}$ y $(z_{j-1}, z_j) \in P_0$. Pero como $z_i = z_j$, entonces (P_0, P_r) es una flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Sin embargo, como $l \geq 2$, entonces se tiene que en particular, $r \notin \{0, 1\}$, lo cual no es posible pues $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo. Con lo anterior, $T \cup \bar{T}$ es una trayectoria.

De acuerdo con la afirmación 4 y lo previamente mostrado, $T \cup \bar{T}$ es una z_0N -trayectoria en D cuya H -longitud es a lo más $k-1$, lo que concluye la demostración de este primer inciso.

- b) Supongamos que T es un Nx -camino abierto en D , donde $T = (x_0, \dots, x_n)$. Ya que x_0 es un vértice de N , entonces x_0 es un vértice en D_0 y D_1 , por lo que $A(x) \subseteq P_0 \cup P_1$, y $N_{\mathcal{F}}^-(x_0) \cap P_0 \neq \emptyset$, como lo establece el lema 5.1.2 (d). Con ello, y al considerar que T no puede tener todas sus flechas en D_0 pues N es un conjunto independiente por trayectorias en D_0 , al menos una de las flechas de T no pertenece

a la clase P_0 , pero tiene una flecha antecedente que sí pertenece a la clase P_0 , lo que concluye que T debe tener al menos una flecha en la clase P_1 , digamos (x_r, x_{r+1}) .

Por otro lado, ya que por hipótesis $A_D^-(x) \subseteq P_0$, en particular se tiene que $(x_{n-1}, x_n) \in P_0$. Con ello, (x_r, T, x_n) es una trayectoria en D cuya flecha inicial está en P_1 y flecha final está en P_0 . Se sigue del lema 5.1.5 que $A(T)$ interseca a todas las clases de la partición \mathcal{F} . Así, para toda $s \in \{0, \dots, k-1\}$, definimos $\alpha_s = \text{máx}\{j \in \{0, \dots, n-1\} : (x_{j-1}, x_j) \in P_s\}$. Notemos que para toda $s \in \{1, \dots, k-1\}$, $(x_{\alpha_s}^-, x_{\alpha_s}) \in P_s$ y $(x_{\alpha_s}, x_{\alpha_s}^+) \notin P_s$, por lo que T tiene una obstrucción en α_s ; es decir, T tiene al menos $k-1$ obstrucciones. Por ser T un camino abierto, entonces $k \leq l_H(T)$, lo que concluye la demostración de este inciso.

□

Si prestamos atención al lema previo, podremos notar que sus incisos establecen ciertas condiciones para que algunos núcleos por trayectorias en una digráfica H -coloreada sean $(k-1, H)$ -absorbentes por trayectorias y (k, H) -independientes por caminos. Dicho lema será la herramienta que usaremos en la siguiente sección para demostrar los resultados principales de este capítulo.

Por último, el siguiente lema será de utilidad para relacionar las H -longitudes de los caminos en una digráfica H -coloreada, digamos D , y su digráfica de líneas $L(D)$. Dada una digráfica H -coloreada, digamos D , necesitaremos introducir una 2-coloración en $L(D)$ como sigue: sea $\rho^*: A(L(D)) \rightarrow \{\text{azul, rojo}\}$ dada por $\rho^*(a, b) = \text{rojo}$ si y sólo si $(\rho(a), \rho(b)) \notin A(H)$. Si $C = (a_0, \dots, a_r)$ es un camino en $L(D)$, denotamos por $R(C)$ al conjunto $\{i \in \{0, \dots, r-1\} : \rho^*(a_i, a_{i+1}) = \text{rojo}\}$. Dichos conceptos fueron descritos en [27]. En la figura 5.5 se muestra el ejemplo de una digráfica D que está H -coloreada y su digráfica de líneas $L(D)$ con la 2-coloración ρ^* descrita previamente.

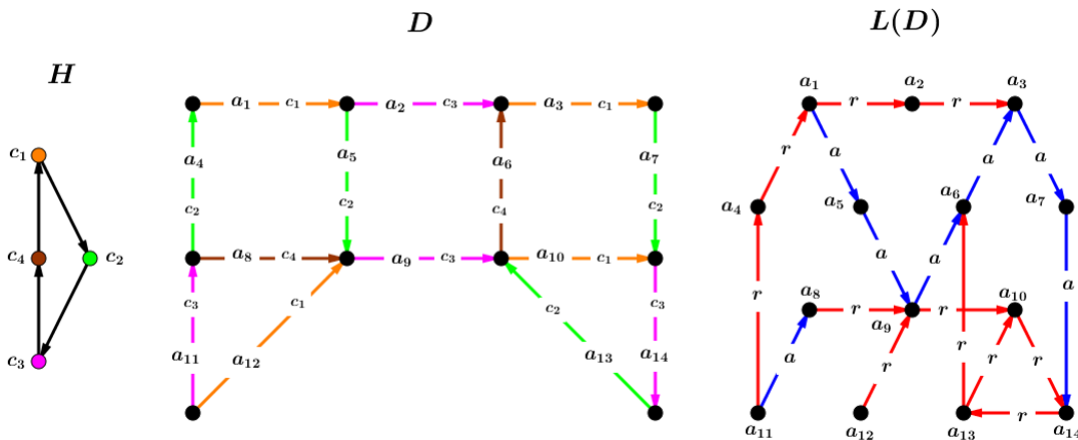


Figura 5.5: Ejemplo de una digráfica H -coloreada y su digráfica de líneas bajo ρ^*

Una posible utilidad de esta coloración es que podemos determinar de manera rápida en dónde hay obstrucciones en la digráfica D . Por ejemplo, al usar la figura anterior, si nos fijamos en la flecha (a_1, a_2) en la digráfica de líneas, ésta tiene color rojo, por lo que en la digráfica D , el cambio de color de la flecha a_1 hacia a_2 no es permitido por el patrón H ; es decir, $(\rho(a_1), \rho(a_2)) \notin A(H)$. Se sigue que cualquier camino en D que use dichas flechas de manera consecutiva, tendrá una obstrucción en ese punto del camino. Por otro lado, si prestamos atención en (a_1, a_5) , dicha flecha es azul, por lo que en D , el cambio de color de la flecha a_1 hacia a_5 es un cambio permitido por el patrón; es decir, $(\rho(a_1), \rho(a_5)) \in A(H)$.

Con esto en mente, podemos usar de manera más sencilla los H -caminos en D . Por ejemplo, si prestamos atención al camino (a_1, a_5, a_9, a_6) en $L(D)$, éste contiene únicamente flechas azules, por lo que el camino en D que tiene esa secuencia de flechas, debe ser un H -camino. Pero si prestamos atención en el camino (a_{11}, a_8, a_9, a_6) , éste tiene sólo una flecha roja, por lo que intuitivamente el camino en D que use esa secuencia de flechas debe tener una obstrucción.

Así, explotaremos esta dualidad entre la H -coloración en D y la 2-coloración ρ^* en $L(D)$ para enunciar el siguiente resultado, el cual establece una relación entre el número de flechas rojas de los caminos en $L(D)$ y la H -longitud de los paseos cerrados en D .

Lema 5.1.7. *Si $k \geq 2$ y D es una digráfica H -coloreada tal que todo paseo cerrado de D tiene H -longitud congruente con 0 módulo k , entonces todo camino cerrado de $L(D)$, digamos C , satisface que $|R(C)|$ es congruente con 0 módulo k .*

Demostración. Para realizar esta demostración, primero mostraremos la siguiente afirmación:

Afirmación 1. Si C es un ciclo en $L(D)$, entonces $|R(C)|$ es congruente con 0 módulo k .

Supongamos que $C = (a_0, \dots, a_t, a_0)$ y que para todo $i \in \{0, \dots, t\}$, $a_i = (x_i, x_{i+1})$, donde además $\{x_i, x_{i+1}\} \subseteq V(D)$ y los índices se toman módulo $t + 1$.

Ahora, al considerar $C' = (x_0, \dots, x_t, x_0)$, éste es un camino cerrado en D . Más aun, C' debe ser un paseo, pues C es un ciclo en $L(D)$. Además, notemos que si $i \in O_H(C')$, entonces por definición de dicho conjunto, $(\rho(a_{i-1}), \rho(a_i)) \notin A(H)$; es decir, $\rho^*(a_{i-1}, a_i) = \text{rojo}$, por lo que $i - 1 \in R(C)$. De manera análoga, si $l \in R(C)$, entonces $\rho^*(a_l, a_{l+1}) = \text{rojo}$, por lo que $(\rho(a_l), \rho(a_{l+1})) \notin A(H)$ y con ello, $l + 1 \in O_H(C')$. Por lo anterior, es sencillo verificar que la función $\varphi: R(C) \rightarrow O_H(C')$ dada por $\varphi(m) = m + 1$ es una función biyectiva, lo que concluye que $|O_H(C')| = |R(C)|$, sin embargo, como C' es un paseo cerrado en D , se tiene que $l_H(C')$ es congruente con 0 módulo k , lo que concluye que $|R(C)|$ es congruente con 0 módulo k , lo que demuestra esta afirmación.

Con base en la afirmación previa, será más sencillo mostrar el caso general; es decir, que cualquier camino cerrado en $L(D)$, digamos C , satisface que $|R(C)|$ es congruente con 0 módulo k . Esta demostración la realizaremos

por inducción sobre la longitud del camino.

Base de inducción. Si C es un camino cerrado en $L(D)$ y tiene longitud dos, entonces $|R(C)|$ es congruente con 0 módulo k .

Para la base inductiva, basta con ver que C debe ser un ciclo de longitud 2 y por la afirmación 1, éste debe satisfacer que $|R(C)|$ es congruente con 0 módulo k .

Hipótesis de inducción. Si C' es un camino cerrado en $L(D)$ y tiene longitud menor a t en $L(D)$, entonces $|R(C')|$ es congruente con 0 módulo k .

Paso inductivo. Si C es un camino cerrado en $L(D)$ y tiene longitud t , entonces $|R(C)|$ es congruente con 0 módulo k .

Supongamos que $C = (a_0, \dots, a_{t-1}, a_t)$. Si C es un ciclo, entonces por la afirmación 1 concluimos que $|R(C)|$ es congruente con 0 módulo k , por lo que basta con verificar el caso en que C no sea un ciclo. Para ello, supongamos que $a_i = a_j$ para algún $i < j$. Con lo anterior, definimos los caminos $C' = (a_0, \dots, a_i, a_{j+1}, \dots, a_t)$ y $C'' = (a_i, \dots, a_j)$ son ambos caminos cerrados en $L(D)$ de longitud menor a t , por lo que, por hipótesis de inducción, $|R(C')|$ y $|R(C'')|$ son ambos congruentes con 0 módulo k . Además, por construcción de los caminos C' y C'' , se sigue que $|R(C')| + |R(C'')| = |R(C)|$, lo que concluye que $|R(C)|$ es congruente con 0 módulo k .

Por principio de inducción matemática, para todo camino cerrado en $L(D)$, digamos C , se satisface que $|R(C)|$ es congruente con 0 módulo k . \square

El anterior es el último resultado básico de esta sección. Ahora procederemos a demostrar los resultados principales del capítulo.

5.2. Resultados principales

Ahora retomamos la idea del lema 5.1.6, el cual nos brindaba condiciones suficientes para que un núcleo por trayectorias en ciertas digráficas H -coloreadas fueran (k, H) -independientes por caminos y $(k - 1, H)$ -absorbentes por trayectorias, tenemos lo siguiente.

Teorema 5.2.1. Sean D una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$ tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es una digráfica cíclicamente k -partita ($k \geq 3$) con partición $\{C_i : i \in \{0, \dots, k - 1\}\}$. Si existe $t \in \{0, \dots, k - 1\}$ tal que ningún vértice en C_t tiene un lazo en $C_{\mathcal{F}}(D)$, entonces D tiene un conjunto $(k - 1, H)$ -absorbente por trayectorias y (k, H) -independiente por caminos.

Demostración. Mostraremos que este teorema es válido cuando $t = 1$; es decir, supondremos que ningún vértice en C_1 tiene un lazo en $C_{\mathcal{F}}(D)$, y una prueba análoga mostrará el caso general.

Consideremos la partición en H -clases de D descrita en el lema 5.1.1, la cual denotaremos por \mathcal{F}' . Recordemos que dicha familia tiene las siguientes propiedades: para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $P_i = \cup C_i$, $\mathcal{F}' = \{P_i : i \in \{0, \dots, k-1\}\}$ y $C_{\mathcal{F}'}(D)$ es un k -ciclo, digamos $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_0)$. Por otro lado, para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$, denotamos por D_i la digráfica $D\langle P_i \rangle$.

Primero mostraremos que todos los caminos de D_1 deben ser de longitud a lo más 1. Si suponemos lo contrario y (x, z, w) es un camino en D_1 , entonces por definición de dicha digráfica, las flechas del camino deben estar en la clase P_1 , sin embargo, por definición de dicha clase, se tendría que $(x, z) \in F$ y $(z, w) \in F'$ para dos clases F y F' en \mathcal{F} tales que ambas están en C_1 . Así, por definición de $C_{\mathcal{F}}(D)$, (F, F') debe ser una flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$, pero ya que $\{F, F'\} \subseteq C_1$ y éste es un conjunto independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, entonces $F = F'$, por lo que (F, F') es un lazo en $C_{\mathcal{F}}(D)$, lo cual contradice nuestra suposición sobre C_1 . Con lo anterior, todo camino en C_1 tiene longitud a lo más 1.

Por otro lado, por el lema 5.1.4 podemos considerar un núcleo por trayectorias de D_0 , digamos N , tal que $N \subseteq V(D_1)$. Las siguientes afirmaciones serán de utilidad

Afirmación 1. Para todo $x \in V(D) \setminus N$, $A_D(x) \not\subseteq P_1$.

Procederemos por contradicción al suponer que existe $x \in V(D) \setminus N$ tal que $A_D(x) \subseteq P_1$. Ya que D es fuertemente conexa, x debe tener un in-vecino en D y un ex-vecino en D , digamos u y w , respectivamente. Así, (u, x, w) es un camino en D y por nuestra suposición sobre x , dicho camino es también un camino en D_1 , lo cual no es posible pues todo camino en D_1 tiene longitud a lo más 2. Con lo anterior, $A_D(x) \not\subseteq P_1$.

Afirmación 2. Para todo $x \in N$, $A_D^-(x) \subseteq P_0$.

Sea $x \in N$ arbitrario. Dado que $N \subseteq V(D_1)$, entonces podemos concluir que $x \in V(D_0) \cap V(D_1)$, por lo que x tiene flechas incidentes tanto en $A(D_1)$ como en $A(D_0)$. por los incisos (c) y (d) del lema 5.1.2 y la definición de las digráficas D_i , podemos afirmar que $A_D(x) \subseteq P_0 \cup P_1$. Ya que todos los caminos en D_1 son de longitud a lo más 1, entonces no es posible que x tenga in-flechas y ex-flechas simultáneamente en D_1 , por lo que $A_D^-(x) \cap P_1 = \emptyset$ o $A_D^+(x) \cap P_1 = \emptyset$. Sin embargo, por el inciso (d) del lema 5.1.2, se tiene que $A_D^+(x) \cap P_1 \neq \emptyset$, por lo que $A_D^-(x) \cap P_1 = \emptyset$, pero como $A_D(x) \subseteq P_0 \cup P_1$, concluimos que $A_D^-(x) \subseteq P_0$.

Gracias a la afirmación 1 y al inciso (a) del lema 5.1.6, N es un conjunto $(k-1, H)$ -absorbente por trayectorias. Y por la afirmación 2 y al inciso (b) del lema 5.1.6, N es un conjunto (k, H) -independiente por caminos, lo que muestra lo deseado. \square

Corolario 5.2.2. Sean D una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada, y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$ tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es una digráfica cíclicamente k -partita ($k \geq 3$) con partición $\{C_i: i \in \{0, \dots, k-1\}\}$. Si existe $t \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que ningún vértice en C_t tiene un lazo en $C_{\mathcal{F}}(D)$, entonces D tiene un (k, H) -núcleo por caminos y un (k, H) -núcleo por trayectorias.

Demostración. El conjunto descrito en el teorema 5.2.1 es simultáneamente un (k, H) -núcleo por caminos y un (k, H) -núcleo por trayectorias. \square

Teorema 5.2.3. Sean D una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$ tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es una digráfica cíclicamente k -partita ($k \geq 2$) con partición $\{C_i: i \in \{0, \dots, k-1\}\}$. Si existe $t \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que todo vértice x en $D \setminus \cup C_t$ satisface que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$, entonces D tiene un conjunto $(k-1, H)$ -absorbente por trayectorias y (k, H) -independiente por caminos.

Demostración. Mostraremos que este teorema es válido cuando $t = 1$; es decir, supondremos que para todo vértice x en $D \setminus \cup C_1$ se satisface que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Una prueba análoga mostrará el caso general.

Consideremos la partición en H -clases de D descrita en el lema 5.1.1, la cual denotaremos por \mathcal{F}' . Recordemos que dicha familia tiene las siguientes propiedades: para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $P_i = \cup C_i$, $\mathcal{F}' = \{P_i: i \in \{0, \dots, k-1\}\}$ y $C_{\mathcal{F}'}(D)$ es un k -ciclo, digamos $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_0)$. Por otro lado, para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$, denotamos por D_i la digráfica $D \setminus P_i$.

Notemos que para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $D_i = D \setminus P_i$, por lo que por nuestra suposición inicial, para todo $x \in V(D_1)$, $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Gracias al lema 5.1.4, podemos considerar un núcleo por trayectorias en D_0 , digamos N , tal que $N \subseteq V(D_1)$. Las siguientes afirmaciones serán de utilidad.

Afirmación 1. Para todo $x \in V(D) \setminus N$, $A_D(x) \not\subseteq P_1$.

Procederemos por contradicción al suponer que existe $x \in N$ tal que $A_D(x) \subseteq P_1$; es decir, $A(x) \subseteq \cup C_1$. Así, todas las clases en $N_{\mathcal{F}}(x)$ deben pertenecer a C_1 . Ello nos servirá para ver que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$, lo cual contradice nuestras hipótesis. Considérese $F' \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$ arbitrario y $F \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Por lo antes dicho, tanto F como F' están en C_1 , y por definición de $C_{\mathcal{F}}(D)$, $(F, F') \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$. Sin embargo, como C_1 es un conjunto independiente en dicha digráfica, entonces podemos concluir que $F' = F$ y, en particular, $F' \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Así, $N_{\mathcal{F}}^+(x) \subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$, lo cual no es posible por hipótesis, lo que demuestra que $A_D(x) \not\subseteq P_1$.

Afirmación 2. Para todo $x \in N$, $A_D^-(x) \subseteq P_0$.

Procederemos por contradicción al suponer que existe $x \in N$ tal que $A_D^-(x) \not\subseteq P_0$. Ya que $x \in N$, entonces podemos utilizar el lema 1.6.1 y garantizar que x tiene una in-fecha en P_0 , a la que llamaremos a_0 . Por nuestra suposición en x , no es posible que todas sus in-flechas estén en la clase P_0 , por lo que

debe existir una in-flecha de x , digamos a_1 que esté en una clase distinta de P_0 . Sin embargo, como x está en N , en particular, en $V(D_0) \cap V(D_1)$, entonces las únicas clases en las que pueden estar las flechas incidentes en x son las clases P_0 y P_1 , como lo establecen los incisos (c) y (d) del lema 5.1.2. Así, a_1 debe estar en la clase P_1 .

Al utilizar la definición de las clases P_0 y P_1 , podemos deducir que existe $F_0 \in C_0$ tal que $a_0 \in F_0$ y existe $F_1 \in C_1$ tal que $a_1 \in F_1$. Recordemos que tanto F_0 como F_1 son clases de la partición \mathcal{F} . Más aun, por simple definición de $N_{\mathcal{F}}^-(x)$, se seguiría que $\{F_0, F_1\} \subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Por hipótesis, $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$, por lo que podemos tomar $F_2 \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$ tal que $F_2 \notin N_{\mathcal{F}}^-(x)$, en particular, $F_0 \neq F_2$ y $F_1 \neq F_2$, por lo que (F_0, F_2) y (F_1, F_2) son flechas en $C_{\mathcal{F}}(D)$ que no son lazos. Debido a que $F_0 \in C_0$ y que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es cíclicamente k -partita, tenemos que $F_2 \in C_1$, llegando a que (F_1, F_2) es una flecha con ambos extremos en C_1 y no es un lazo, lo cual contradice que C_1 sea un conjunto independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$. De lo anterior, para todo $x \in N$, $A_D^-(x) \subseteq P_0$.

Gracias a la afirmación 1 y al inciso (a) del lema 5.1.6, N es un conjunto $(k-1, H)$ -absorbente por trayectorias. Y por la afirmación 2 y al inciso (a) del lema 5.1.6, N es un conjunto (k, H) -independiente por caminos, lo que muestra lo deseado. \square

Corolario 5.2.4. *Sean D una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada, y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$ tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es una digráfica cíclicamente k -partita ($k \geq 2$) con partición $\{C_i : i \in \{0, \dots, k-1\}\}$. Si existe $t \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que todo vértice x en $D \setminus \cup C_t$ satisface que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$, entonces D tiene un (k, H) -núcleo por caminos y un (k, H) -núcleo por trayectorias*

Demostración. El conjunto descrito en el teorema 5.2.3 es simultáneamente un (k, H) -núcleo por caminos y un (k, H) -núcleo por trayectorias. \square

Quisiéramos hacer un paréntesis antes de continuar con el siguiente resultado. Notemos que el corolario recién enunciado nos da condiciones para la existencia de un (k, H) -núcleo por trayectorias, pero ¿qué tan difícil es encontrar dicho (k, H) -núcleo? La respuesta está en la demostración del teorema 5.2.3. Supongamos que D es una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada y \mathcal{F} es una partición en H -clases de $A(D)$ tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es una digráfica cíclicamente k -partita ($k \geq 2$) con partición $\{C_i : i \in \{0, \dots, k-1\}\}$, que además satisfaga las condiciones del teorema 5.2.3. Por un lado, gracias al lema 5.1.1, podemos encontrar de manera inmediata una partición en H -clases de $A(D)$ cuya digráfica de H -clases es un k -ciclo, digamos (P_0, \dots, P_{k-1}) . Pero en la demostración del teorema 5.2.3 se demostró que para cualquier $i \in \{0, \dots, k-1\}$, cualquier núcleo por trayectorias en $D \setminus \langle P_i \rangle$ que además esté contenido en los vértices de $D \setminus \langle P_{i+1} \rangle$, debe ser un (k, H) -núcleo por trayectorias y por caminos. Sin embargo, ya habíamos mencionado con anterioridad que encontrar estos núcleos

por trayectorias en las intersecciones de las clases era bastante sencillo, por lo que, si una digráfica satisface todas las condiciones del teorema 5.2.3, encontrar un (k, H) -núcleo por trayectorias es bastante inmediato.

Teorema 5.2.5. *Si $k \geq 2$ y D es una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada tal que todo paseo cerrado tiene H -longitud congruente con 0 módulo k , entonces D es una H -digráfica o D tiene una partición en H -clases, digamos \mathcal{F} , tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo.*

Demostración. En caso de que D sea una H -digráfica, no hay más qué demostrar, por lo que supondremos que D no es una H -digráfica; es decir, existe $\{b_1, b_2\} \subseteq A(D)$ tal que b_2 es consecutiva de b_1 y $(\rho(b_1), \rho(b_2)) \notin A(H)$. Guardaremos momentáneamente estas flechas, pues las usaremos más adelante. Además, al retomar la idea del lema 5.1.7, denotamos por ρ^* la 2-coloración de $L(D)$ dada por $\rho^*: A(L(D)) \rightarrow \{\text{azul}, \text{rojo}\}$, donde $\rho^*(a, b) = \text{rojo}$ si y sólo si $(\rho(a), \rho(b)) \notin A(H)$. Si $C = (a_0, \dots, a_r)$ es un camino en $L(D)$, denotamos por $R(C)$ al conjunto $\{i \in \{0, \dots, r-1\} : \rho^*(a_i, a_{i+1}) = \text{rojo}\}$.

Para mostrar que $A(D)$ tiene una partición en H -clases, tomemos a_0 fija en $A(D)$ y para cada valor $l \in \{0, \dots, k-1\}$, denotamos por F_l al conjunto de vértices b en $L(D)$ tal que existe un a_0b -camino en $L(D)$, digamos C , tal que $|R(C)|$ es congruente con l módulo k . Mostraremos que la familia \mathcal{F} , definida como $\{F_i : i \in \{0, \dots, k-1\}\}$ es una partición en H -clases de $A(D)$ tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo. Para ello, procederemos a demostrar las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. $\cup_{i=0}^{k-1} F_i = A(D)$.

Para esta afirmación, primero notemos que para toda $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $F_i \subseteq A(D)$, por lo que $\cup_{i=0}^{k-1} F_i \subseteq A(D)$. Ahora sólo resta por demostrar la otra contención. Si $b \in A(D)$, entonces por ser D fuertemente conexa, debe existir un a_0b -camino en $L(D)$, digamos C . Claramente, $|R(C)|$ debe ser congruente con t módulo k para algún $t \in \{0, \dots, k-1\}$, por lo que $b \in F_t$ y así $b \in \cup_{i=0}^{k-1} F_i$, lo que concluye que $A(D) \subseteq \cup_{i=0}^{k-1} F_i$, lo que demuestra la igualdad deseada.

Afirmación 2. Para todo $\{i, j\} \subseteq \{0, \dots, k-1\}$, con $i \neq j$, se cumple que $F_i \cap F_j = \emptyset$.

Procederemos por contradicción al suponer que $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, y consideremos $b \in F_i \cap F_j$. Se sigue de la definición de F_i y F_j que existe un a_0b -camino en D , digamos C_1 , y existe un a_0b -camino, digamos C_2 , que cumplen que $|R(C_1)| \equiv i \pmod{k}$ y $|R(C_2)| \equiv j \pmod{k}$. A estas últimas congruencias las nombraremos momentáneamente (\star) .

Por otro lado, como D es fuertemente conexa, podemos considerar un ba_0 -camino en $L(D)$, al que llamaremos C_3 . Ya que $C_1 \cup C_3$ y $C_2 \cup C_3$ son dos caminos cerrados en $L(D)$, se sigue del lema 5.1.7 que tanto $|R(C_1) \cup R(C_3)|$ como $|R(C_2) \cup R(C_3)|$ son ambos congruentes con 0 módulo k , es decir: $|R(C_1)| + |R(C_3)| \equiv 0 \pmod{k}$ y $|R(C_2)| + |R(C_3)| \equiv 0 \pmod{k}$. Así, al usar simple álgebra de congruencias,

tenemos que $|R(C_1)| - |R(C_2)| \equiv 0 \pmod{k}$, y por las congruencias (\star) podemos concluir que $i - j \equiv 0 \pmod{k}$. Por último, como i y j son valores entre $\{0, \dots, k-1\}$, se deduce que $i = j$, lo cual contradice la suposición sobre i y j . De lo anterior, $F_i \cap F_j = \emptyset$.

Afirmación 3. Para toda $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $F_i \neq \emptyset$.

Primero recordemos que por no ser D una H -digráfica, existe $\{b_1, b_2\} \subseteq A(D)$ tal que b_2 es consecutivo de b_1 y $(\rho(b_1), \rho(b_2)) \notin A(H)$. Dichas flechas serán de utilidad a continuación. Consideremos un a_0b_1 -camino en $L(D)$, digamos C_1 , y un b_2a_0 -camino, digamos C_2 . Notemos que $C = C_1 \cup (b_1, b_2) \cup C_2$ es un camino cerrado en $L(D)$, por lo que $|R(C)|$ debe ser congruente con 0 módulo k , como lo establece el lema 5.1.7. Sin embargo, como la flecha (b_1, b_2) tiene color rojo bajo ρ^* , entonces $|R(C)|$ debe ser un múltiplo no nulo de k , por lo que C debe tener al menos k flechas con color rojo bajo ρ^* . Con esto en mente, no es difícil ver que para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$ existe $x_i \in V(C)$ tal que (x_0, C, x_i) tiene exactamente i flechas rojas, por lo que $x_i \in F_i$ y en particular se sigue que para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $F_i \neq \emptyset$, lo que demuestra la afirmación.

Afirmación 4. Para todo $\{i, j\} \subseteq \{0, \dots, k-1\}$, si $a \in F_i$, $b \in F_j$ y b es una flecha consecutiva de a , entonces $j \in \{i, i+1\}$ (los índices se consideran módulo k). Más aun, $i = j$ si y sólo si $\rho^*(a, b) = \text{azul}$.

Dado que $a \in F_i$, podemos considerar un a_0a -camino en $L(D)$, digamos C , tal que $|R(C)|$ es congruente con i módulo k , y sea $C' = C \cup (a, b)$. Ahora consideremos dos posibles casos sobre $\rho^*(a, b)$.

Si $\rho^*(a, b) = \text{rojo}$, entonces C' es un a_0b -camino en $L(D)$ tal que $|R(C')| = |R(C)| + 1$, por lo que $|R(C')|$ es congruente con $i+1$ módulo k , se sigue de ello que $b \in F_{i+1}$. Por la afirmación 2 de esta demostración, $i+1 = j$. Nótese que, en este caso, $i \neq j$ si $\rho^*(a, b) = \text{rojo}$.

Si $\rho^*(a, b) = \text{azul}$, entonces $|R(C')| = |R(C)|$, por lo que $|R(C')|$ es congruente con i módulo k , y así $b \in F_i$. Gracias a la afirmación 2 de esta demostración, podemos concluir que $i = j$. Nuevamente, nótese que en este caso, $i = j$ si $\rho^*(a, b) = \text{azul}$, lo que concluye la demostración de esta afirmación.

Gracias a las afirmaciones anteriores, será más sencillo concluir el teorema. Primero, por las afirmaciones 1, 2 y 3, deducimos que la familia \mathcal{F} es una partición de $A(D)$. Ahora veremos que \mathcal{F} es una partición en H -clases. Para ello, consideremos $\{a, b\} \subseteq A(D)$ tal que b es una flecha consecutiva de a .

Si $\{a, b\} \subseteq F_i$ para algún $i \in \{0, \dots, k-1\}$, se sigue de la afirmación 4 que $\rho^*(a, b) = \text{azul}$, por lo que $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$. De manera similar, si $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$, entonces $\rho^*(a, b) = \text{azul}$ y, nuevamente por la afirmación 4, $\{a, b\} \subseteq F_i$ para algún $i \in \{0, \dots, k-1\}$, lo que demuestra que, efectivamente, \mathcal{F} es una partición en H -clases de $A(D)$.

Por último, resta por mostrar que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo. Para ello, primero notemos que por el lema 4.3.5, $C_{\mathcal{F}}(D)$ es fuertemente conexa. Por otro lado, si $(F_i, F_j) \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$, entonces por definición existe $a \in F_i$ y

$b \in F_j$ tal que b es una flecha consecutiva de a . Por la afirmación 4, se tiene que $j \in \{i, i + 1\}$; es decir, toda flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$ es una $F_i F_{i+1}$ -flecha o un lazo, lo que concluye que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo. \square

5.3. Algunas consecuencias

Los teoremas antes presentados tiene consecuencias interesantes con relación al patrón de color usado en la coloración. Para mostrar algunos de ellos, el siguiente lema será de utilidad:

Lema 5.3.1. [24] *Sea D una digráfica fuertemente conexa y $k \geq 2$. Si todo ciclo dirigido de D tiene longitud congruente con 0 módulo k , entonces D y su digráfica de líneas son digráficas cíclicamente k -partitas.*

Con el lema anterior y los resultados de la sección previa, se tienen los siguientes resultados para digráficas fuertemente conexas:

Teorema 5.3.2 (Kwaśnik). *Si $k \geq 2$ y D es una digráfica fuertemente conexa tal que todo ciclo dirigido tiene longitud congruente con 0 módulo k , entonces D tiene un k -núcleo.*

Demostración. Sea H un patrón vacío de orden $|A(D)|$ y ρ una H -coloración de D de tal forma que cualquier par de flechas distintas en D tiene asignado color distinto. Para cada $e \in A(D)$, denotamos por F_e al conjunto $\{e\}$ y sea $\mathcal{F} = \{F_e : e \in A(D)\}$. No es difícil ver que, gracias a la H -coloración de D , la familia \mathcal{F} es una partición en H -clases de $A(D)$. A continuación veremos que bajo esta coloración y esta partición en H -clases, la digráfica D satisface todas las condiciones del corolario 5.2.4.

Primero, para mostrar que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es cíclicamente k -partita, podemos hacer notar de la simple definición de $C_{\mathcal{F}}(D)$ y $L(D)$ que la función $g: V(C_{\mathcal{F}}(D)) \rightarrow V(L(D))$ dada por $g(F_a) = a$ es una función biyectiva que preserva adyacencias, pues $(F_a, F_b) \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$ si y sólo si $(a, b) \in L(D)$. Con ello, $C_{\mathcal{F}}(D)$ es isomorfa a $L(D)$. Sin embargo, gracias al lema juancho1, $L(D)$ es cíclicamente k -partita, lo que concluye que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es cíclicamente k -partita.

Por último, veremos que todo vértice x en $V(D)$ satisface que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Esto es sencillo de ver pues si $F_a \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$, entonces a es una ex-flecha de D , la cual no puede ser una in-flecha de D y así $F_a \neq F_b$ para toda $F_b \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$, lo que demuestra que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Con lo anterior, y por el corolario 5.2.4, se sigue que D tiene un (k, H) -núcleo, digamos S . Sin embargo, ya que H es un patrón vacío, entonces S debe ser un k -núcleo. \square

Otra consecuencia interesante de los resultados de la sección previa es el caso particular para $k = 2$, el cual es una generalización del teorema de Richardson para digráficas fuertemente conexas.

Teorema 5.3.3 (Richardson). *Si D es una digráfica fuertemente conexa y no tiene ciclos de longitud impar, entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Procederemos de manera análoga al resultado previo. Sea H un patrón vacío de orden $|A(D)|$ y ρ una H -coloración de D de tal forma que cualquier par de flechas distintas tiene asignado color distinto. Para cada $e \in A(D)$, denotamos por F_e al conjunto $\{e\}$ y sea $\mathcal{F} = \{F_e : e \in A(D)\}$. No es difícil ver que, gracias a la H -coloración de D , la familia \mathcal{F} es una partición en H -clases de $A(D)$. Al igual que en la demostración previa, $C_{\mathcal{F}}(D)$ es cíclicamente 2-partita y todo vértice x en D satisface que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Por el corolario 5.2.4, se sigue que D tiene un $(2, H)$ -núcleo, el cual es un núcleo, pues H es un patrón vacío. \square

Otro resultado que se puede deducir de los teoremas de la sección previa, es un resultado tipo Richardson para digráficas H -coloreadas.

Teorema 5.3.4. *Sean $k \geq 3$ y D una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada tal que todo paseo cerrado de D tiene H -longitud congruente con 0 módulo k . Si para todo $x \in V(D)$ existe $a \in A^-(x)$ y $\{b, c\} \subseteq A^+(x)$ tales que $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$ y $(\rho(a), \rho(c)) \notin A(H)$, entonces D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias.*

Demostración. Para esta demostración, veremos que D satisface las condiciones del corolario 5.2.4. Primero notemos que por el teorema 5.2.5, D es una H -digráfica o $A(D)$ tiene una partición en H -clases cuya digráfica de H -clases es un k -ciclo. Si D es una H -digráfica, no hay nada más que demostrar, pues el lema 4.2.3 establece que D debe tener un (k, H) -núcleo por trayectorias. Así, supondremos que $A(D)$ tiene una partición en H -clases, digamos $\mathcal{F} = \{P_i : i \in \{0, \dots, k-1\}\}$, tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_0)$

Ahora, procederemos a demostrar que todo vértice x en $V(D)$ satisface que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Para ello, si $x \in V(D)$, entonces por hipótesis existe $a \in A^-(x)$ y $\{b, c\} \subseteq A^+(x)$ tales que $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$ y $(\rho(a), \rho(c)) \notin A(H)$. Dado que \mathcal{F} es una partición de $A(D)$, entonces $a \in P_i$ para algún $i \in \{0, \dots, k-1\}$ y $c \in P_j$ para algún $j \in \{0, \dots, k-1\}$. Por otro lado, como $(\rho(a), \rho(b)) \in A(H)$, entonces tanto b como a están en la misma clase; es decir, $b \in P_i$, en particular, $P_i \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$. Además, como c es una flecha consecutiva de a , entonces $j \in \{i, i+1\}$. Pero como $(\rho(a), \rho(c)) \notin A(H)$, entonces $j = i+1$.

Con lo anterior, $P_{i+1} \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$, pero no es posible que $P_{i+1} \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$, pues en caso contrario, ya que $P_i \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$, concluiríamos que $(P_{i+1}, P_i) \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$, lo cual no es posible pues $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo con $k \geq 3$. Por lo previamente dicho podemos afirmar que todo vértice x en D satisface que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Gracias al corolario 5.2.4, D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias. \square

Es importante señalar que en [27] se mostró el siguiente resultado

Teorema 5.3.5. *Si H es una digráfica H -coloreada tal que todo paseo cerrado tiene H -longitud par, entonces D tiene H -núcleo.*

El teorema 5.3.4 puede considerarse una extensión del resultado antes mencionado. Como dato importante, en la siguiente sección mostraremos que no es posible eliminar la condición sobre la coloración de las in-flechas

y ex-flechas de los vértices en el teorema 5.3.4. Por ahora continuaremos exhibiendo algunas consecuencias de los teoremas de la sección previa. Por ejemplo, tenemos el siguiente resultado al usar la digráfica de clases de color.

Teorema 5.3.6. *Sean $k \geq 3$, D una digráfica fuertemente conexa, H -coloreada y supongamos que $V(\mathcal{C}(D))$ tiene una partición $\{W_i : i \in \{0, \dots, k-1\}\}$ que satisface que:*

a) *Si existe una $W_i W_j$ -flecha en $\mathcal{C}(D)$ con $i \neq j$, entonces $j = i + 1$ y dicha flecha no está en H (los índices se consideran módulo k).*

b) *Para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $\mathcal{C}(D)[W_i] \leq H$.*

Si todo vértice de D tiene una in-flecha y una ex-flecha con color en una clase W_i y una ex-flecha con color en una clase W_j con $i \neq j$, entonces D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias.

Demostración. Para empezar definiremos, para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $P_i = \{a \in A(D) : \rho(a) \in W_i\}$ y sea \mathcal{F} la familia de las clases P_i con $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Gracias a las hipótesis (a) y (b) y al lema 4.3.1, \mathcal{F} es una partición en H -clases. Ahora veremos que, de hecho, $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo. Primero es conveniente notar que como D es fuertemente conexa, entonces $C_{\mathcal{F}}(D)$ es fuertemente conexa (lema 4.3.5). Por otro lado, si (P_i, P_j) es una flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$ e $i \neq j$, esto querría decir, por definición de la digráfica de H -clases, que existe una flecha a en D y una flecha consecutiva de a , digamos b , tales que $a \in P_i$ y $b \in P_j$. Con ello, y por definición de P_i y P_j , podemos garantizar que $(\rho(a), \rho(b))$ es una $W_i W_j$ -flecha en $\mathcal{C}(D)$ con $i \neq j$. Por la hipótesis (a), podemos concluir que $j = i + 1$. Así, toda flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un lazo o una $P_i P_{i+1}$ -flecha, por lo que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo.

Ahora, procederemos a demostrar que todo vértice x en $V(D)$ satisface que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Para ello tomemos un vértice x arbitrario en D . Por hipótesis, x tiene una in-flecha, digamos a_1 , y una ex-flecha, digamos a_2 cuyos colores están en una misma clase W_i . En consecuencia, tanto a_1 como a_2 están en la clase P_i y de esto podemos deducir que $P_i \in N_{\mathcal{F}}^-(x) \cap N_{\mathcal{F}}^+(x)$. Por otro lado, por hipótesis también existe una ex-flecha de x , digamos a_3 , tal que el color de a_3 está en una clase distinta de W_i , a la que llamaremos W_j . Así, a_3 está en P_j , en particular, $P_j \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$.

Lo siguiente que demostraremos es que $P_j \notin N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Procederemos por contradicción al suponer que $P_j \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Esto último nos lleva a deducir que $P_j \in N_{\mathcal{F}}^-(x) \cap N_{\mathcal{F}}^+(x)$. Sin embargo, como anteriormente habíamos visto que $P_i \in N_{\mathcal{F}}^-(x) \cap N_{\mathcal{F}}^+(x)$, podemos concluir que (P_i, P_j) es simétrica en $C_{\mathcal{F}}(D)$, lo cual no es posible pues dicha digráfica es un k -ciclo con $k \geq 3$. Así, $P_j \notin N_{\mathcal{F}}^-(x)$, en particular, $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$, como era deseado.

Por lo previamente dicho podemos concluir que todo vértice x en D satisface que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$ y, gracias al corolario 5.2.4, D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias. \square

Antes de continuar, queremos hacer un pequeño ejemplo con el resultado previamente visto. Para eso consideremos la digráfica D fuertemente conexa y H -coloreada mostrada en la figura 5.6. En la misma imagen se puede observar también su digráfica de clases de color. Primero veamos que $V(\mathcal{C}(D))$ tiene una partición que satisfacen las condiciones del teorema previo. Notemos que los conjuntos $W_1 = \{c_1, c_2\}$, $W_2 = \{c_3, c_4, c_5\}$ y $W_3 = \{c_6\}$ forman una partición de $V(\mathcal{C}(D))$. Nótese que para toda $i \in \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{C}(D)[W_i]$ son subdigráficas de H (dichas subdigráficas son resaltadas con flechas negras en $\mathcal{C}(D)$). Por otro lado, si prestamos atención a las $W_i W_j$ -flechas en $\mathcal{C}(D)$ con $i \neq j$ (dichas flechas están resaltadas en color gris en $\mathcal{C}(D)$), entonces $i = j + 1$ y ninguna de ellas está en H . El lector puede corroborar ambas condiciones a continuación. Ahora sólo hace falta ver que todo vértice de D tiene una in-flecha y una ex-flecha con color en una misma clase W_i y una ex-flecha con color en una clase distinta W_j .

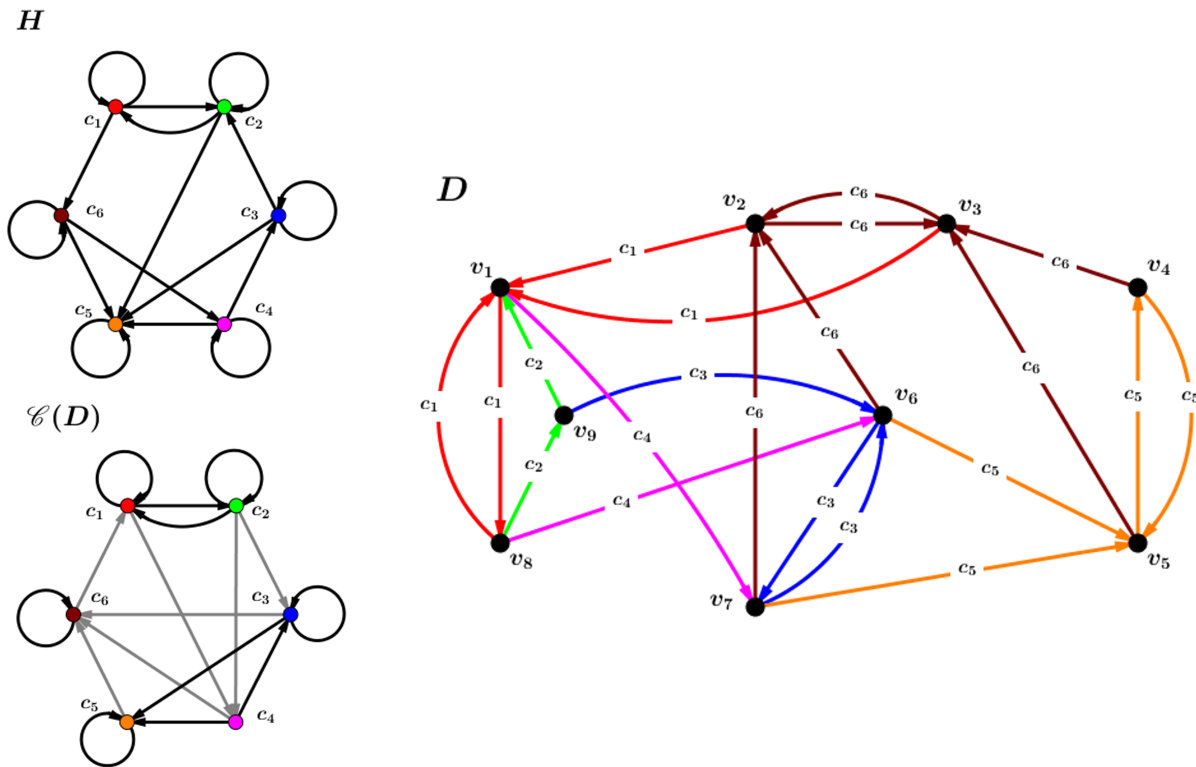


Figura 5.6: Ejemplo de una digráfica y su digráfica de clases de color que satisfacen las condiciones del teorema 5.3.6

Para verificar que todo vértice de D tiene una in-flecha y una ex-flecha con color en una misma clase, nótese que para todo vértice x de D , existe un color c_i tal que x tienen una in-flecha y una ex-flecha con color c_i . A dicha propiedad la llamaremos momentáneamente (\star) . Por ejemplo, para los vértices v_1 y v_8 , estos tienen una in-flecha y una ex-flecha de color c_1 . En el caso de los vértices v_2 y v_3 , estos tienen una in-flecha y una ex-flecha de color c_6 . Para v_4 y v_5 , el color es c_5 . Para v_6 y v_7 , el color es c_3 y para v_9 , el color es c_2 . Obsérvese

que para cada vértice de D , el color que satisface (\star) es único.

Por último, hay que corroborar que todo vértice tiene una ex-flecha cuyo color pertenece a una clase distinta del color que satisface (\star) . Para los vértices v_1 y v_8 , el color que buscamos es c_4 . En el caso de los vértices v_2 y v_3 , el color deseado es c_1 . Para v_4, v_5, v_6 y v_7 , el color es c_6 y para v_9 , el color es c_3 . Con todo ello, por el teorema 5.3.6, la digráfica D tiene un $(3, H)$ -núcleo. Ahora bien, es muy natural el preguntarse ¿qué tan difícil es encontrar dicho $(3, H)$ -núcleo? Para dar respuesta a esa pregunta hay que tener en cuenta el corolario 5.2.4. Primero tengamos en consideración que la existencia del $(3, H)$ -núcleo del ejemplo aquí analizado está garantizado por el teorema 5.3.6, el cual es consecuencia del corolario 5.2.4, sin embargo, en dicho corolario realizamos un análisis sobre lo sencillo que era encontrar un (k, H) -núcleo por trayectorias bajo las condiciones del corolario 5.2.4. En este caso particular, podemos considerar un núcleo por trayectorias en la digráfica inducida por las flechas cuyo color está en W_2 , pero que además esté contenido en los vértices de la digráfica inducida por las flechas con color en W_3 (figura 5.7). En este caso, $\{v_4\}$ es dicho núcleo por trayectorias, el cual debe ser un $(3, H)$ -núcleo por trayectorias en D .

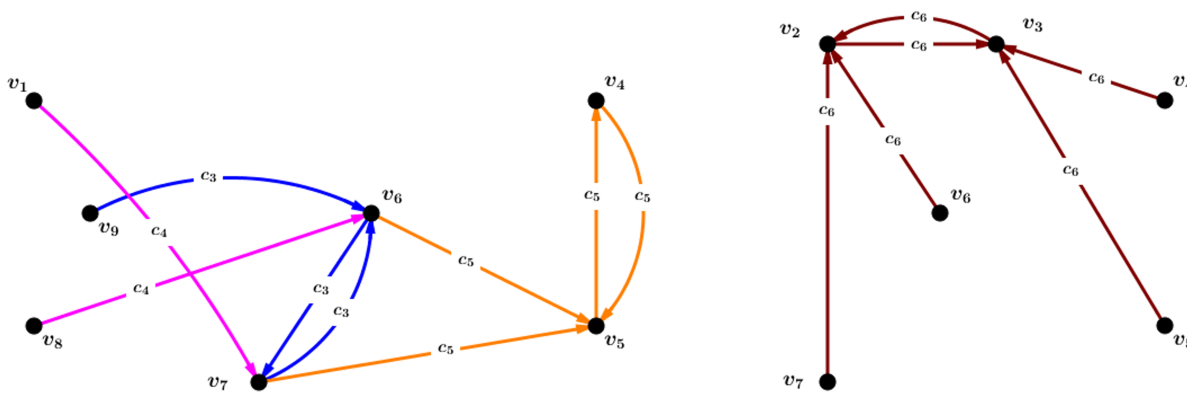


Figura 5.7: Digráfica inducida por el conjunto de flechas con color en W_2 (izquierda) y digráfica inducida por el conjunto de flechas con color en W_3 (derecha)

Con lo anterior, podemos notar que aunque es difícil en general determinar la existencia de (k, H) -núcleos por trayectorias y por caminos, las hipótesis planteadas en el teorema 5.3.6 son fácilmente verificables y, además, encontrar el (k, H) -núcleo también es bastante sencillo.

Para finalizar los resultados de esta sección, usaremos el corolario 5.2.4 para el caso monocromático.

Teorema 5.3.7. Sean $k \geq 3$ y D una digráfica fuertemente conexa y m -coloreada tal que $\mathcal{C}(D)$ es cíclicamente k -partita. Si todo vértice de D tiene una ex-flecha con un color no representado en sus in-flechas, entonces D tiene un núcleo de k -cambios propios.

Demostración. Consideremos un patrón monocromático, digamos H , cuyo conjunto de vértices son los colores representados en las flechas de D . Además, como $\mathcal{C}(D)$ es una digráfica cíclicamente k -partita, consideremos

su partición en conjuntos independientes dada por la definición $\{C_i: i \in \{0, \dots, k-1\}\}$. Ahora veremos que dicha partición satisface las condiciones del lema 4.3.1 para poder encontrar una partición en H -clases de $A(D)$.

Ya que cada uno de los conjuntos C_i es un conjunto independiente en $\mathcal{C}(D)$ y todos los vértices de H tienen un lazo, entonces podemos afirmar que para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $\mathcal{C}(D)[C_i] \leq H$. Además, como las únicas flechas de H son los lazos, entonces toda $C_i C_j$ -flecha en $\mathcal{C}(D)$ con $i \neq j$, no puede ser una flecha en H . Por lo anterior, y de acuerdo con el lema 4.3.1, los conjuntos $P_i = \{a \in A(D): \rho(a) \in C_i\}$, con $i \in \{0, \dots, k-1\}$, forman una partición en H -clases de $A(D)$, a la que llamaremos \mathcal{F} .

Ahora que tenemos esta partición, usaremos el corolario 5.2.4 para encontrar un (k, H) -núcleo por trayectorias en D , por lo que hay que verificar que \mathcal{F} satisface las hipótesis de dicho enunciado. Primero, para ver que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es cíclicamente k -partita, mostraremos que dicha digráfica es un k -ciclo. Sea (P_i, P_j) una flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Por definición de esta digráfica, existen flechas a en P_i y b en P_j tales que b es una flecha consecutiva de a . Por definición de la digráfica de clases de color, $(\rho(a), \rho(b)) \in A(\mathcal{C}(D))$. Además, por la definición de las clases en \mathcal{F} , se tiene que $\rho(a) \in C_i$ y $\rho(b) \in C_j$. Se sigue de ello que $(\rho(a), \rho(b))$ sea una $C_i C_j$ -flecha en $\mathcal{C}(D)$, y por hipótesis sobre dicha digráfica, podemos concluir que $j \in \{i, i+1\}$. De lo anterior, toda flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un lazo o una $P_i P_{i+1}$ -flecha. Además, por ser D fuertemente conexa, podemos concluir que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo.

Ahora mostraremos que para todo $x \in V(D)$, $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Sea x un vértice arbitrario de D . Por hipótesis, existe un color en las ex-flechas de x , digamos c , que no está en las in-flechas de x . Además supongamos que la ex-flecha de x con color c es la flecha a . Es sencillo ver que c está en alguna clase de la partición de $\mathcal{C}(D)$, digamos C_i . Por ello, $a \in P_i$, en particular, $P_i \in N_{\mathcal{F}}^+(x)$. Sólo resta por demostrar que $P_i \notin N_{\mathcal{F}}^-(x)$. Procederemos por contradicción al suponer que $P_i \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$; es decir, existe una in-flecha de x , digamos b , que está en la clase P_i , equivalentemente, el color de b , digamos c' debe pertenecer a la clase C_i . Ya que por suposición, ninguna in-flecha de x tiene color c , entonces $c \neq c'$. Sin embargo, al ser a una flecha consecutiva de b , entonces (c', c) es una flecha en $\mathcal{C}(D)$ con ambos extremos en C_i , lo cual no es posible pues éste es un conjunto independiente. Por lo anterior, $P_i \notin N_{\mathcal{F}}^-(x)$, lo que demuestra que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$.

De lo anterior, y por el corolario 5.2.4, D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias. Sin embargo, como H es un patrón monocromático, entonces dicho (k, H) -núcleo debe ser un núcleo de k -cambios propios. \square

Ahora veremos un ejemplo de este último resultado. Prestemos atención a la digráfica m -coloreada mostrada en la figura 5.8 y a su digráfica de clases de color. Es sencillo ver que D es una digráfica fuertemente conexa y además podemos notar que $\mathcal{C}(D)$ es una digráfica cíclicamente 4-partita: las clases $C_0 = \{c_1, c_2\}$, $C_1 = \{c_3, c_4, c_5\}$, $C_2 = \{c_6\}$ y $C_3 = \{c_7\}$ forman una partición de los vértices de la digráfica de clases de color de tal forma que toda flecha en dicha digráfica es un lazo o una $C_i C_{i+1}$ -flecha. Ahora bien, también es cierto que todos los vértices de D tienen una ex-flecha cuyo color no está representado en sus in-flechas: para los vértices

v_3 y v_8 dicho color es c_1 . En el caso del vértice v_5 , tenemos el color c_3 . Para los vértices v_2 y v_7 , el color c_4 . En el caso del vértice v_1 , el color c_5 . Para los vértices v_4, v_6, v_9 y v_{10} , tenemos el color c_6 y para los vértices c_{11}, c_{12} y c_{13} , el color c_7 . Así, la digráfica mostrada en la figura 5.8 debe tener un núcleo de 4-cambios propios en D .

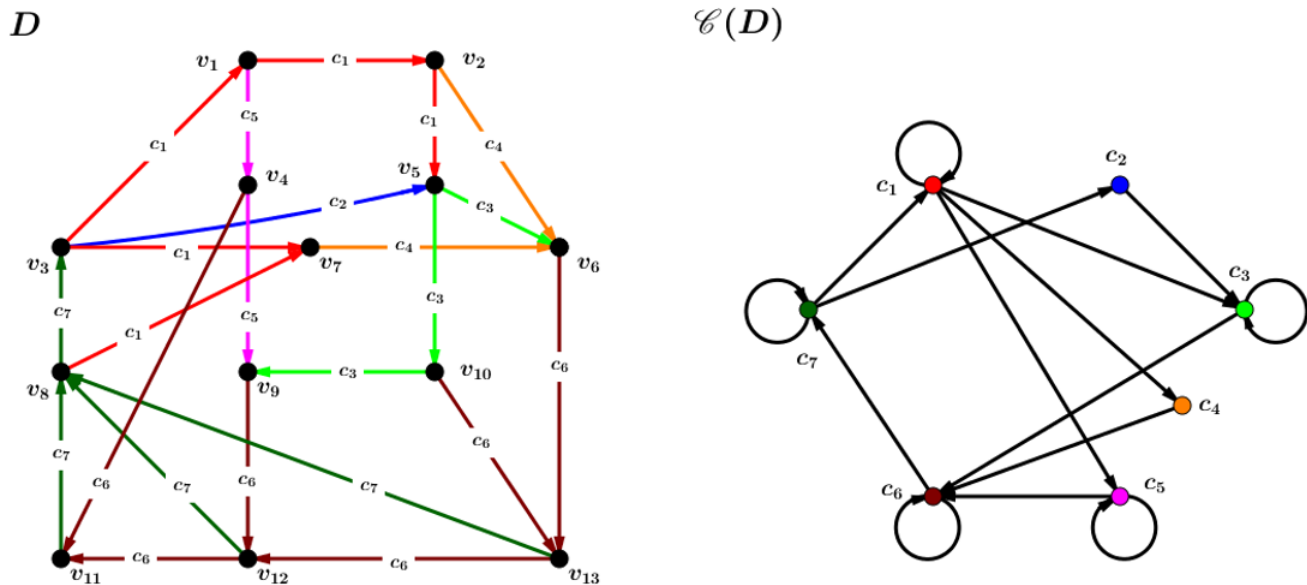


Figura 5.8: Digráfica m -coloreada cuya digráfica de clases de color es cíclicamente 4-partita

Pero, ¿qué tan difícil en encontrar este conjunto? Al igual que en los análisis previos, es bastante sencillo: para este caso, basta con tomar una clase de la partición de $V(\mathcal{C}(D))$, por ejemplo, la clase C_0 . Basta con encontrar un núcleo por trayectorias en la digráfica inducida por las flechas con color en C_0 , pero que además esté contenido en la digráfica inducida por las flechas con color en C_1 (véase la figura 5.9). Como ya habíamos mencionado con anterioridad, encontrar dichos núcleos por trayectorias no es muy complicado. En nuestro caso, estamos hablando del conjunto $\{v_5, v_7\}$. Dicho conjunto debe ser un núcleo de 4-cambios propios.

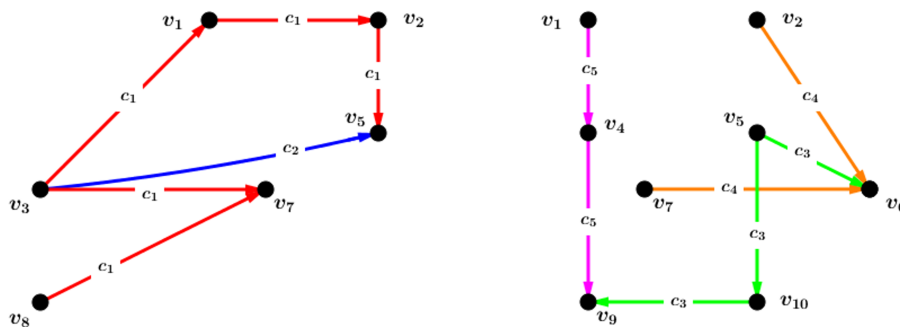


Figura 5.9: Digráfica inducida por las flechas con color en C_0 (izquierda) y digráfica inducida por las flechas con color en C_1 (derecha)

5.4. Sobre las condiciones suficientes de los resultados de la sección 4.2

Para finalizar este capítulo, mostraremos a lo largo de esta sección que algunas de las condiciones de los resultados de la sección 5.2 no pueden ser omitidas, principalmente en los teoremas 5.2.1 y 5.2.3.

Primero necesitamos notar que dichos teoremas tienen algunas hipótesis en común, a saber: (i) D es fuertemente conexa, (ii) D es H -coloreada, (iii) D tiene una partición en H -clases, digamos \mathcal{F} y (iv) $C_{\mathcal{F}}(D)$ es cíclicamente k -partita. Lo único en lo que varían es en que el teorema 5.2.1 además se pide que (v) exista una clase de la partición de $C_{\mathcal{F}}(D)$ que no tiene lazos y para el teorema 5.2.3 se pide que (vi) exista una clase C_t en $C_{\mathcal{F}}(D)$ tal que cualquier vértice x en D con al menos una flecha incidente en alguna clase de C_t satisfaga que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$.

Ahora exploraremos lo justo de estas condiciones. Debido a que la idea de este capítulo es tener como hipótesis una digráfica H -coloreada que tenga una partición de H -clases cuya digráfica en H -clases se comporte de manera cíclica, no consideremos omitir las condiciones (ii), (iii) y (iv). Con respecto a la condición (i), vimos que es posible deducir el teorema de Kwaśnik del teorema 5.2.3, y es sabido que el teorema de Kwaśnik no es verdadero cuando se omite la hipótesis de conexidad fuerte [47], por lo que consideramos que no es posible omitir dicha hipótesis en el teorema 5.2.3. Es importante mencionar que el teorema de Kwaśnik para $k \geq 3$ también puede deducirse del teorema 5.2.1 al realizar exactamente el mismo procedimiento que en la demostración del teorema 5.3.2, por lo que tampoco omitiremos la hipótesis de conexidad fuerte en el teorema 5.2.1.

Así pues sólo quedan por explorar lo justo de dos hipótesis: En el caso del teorema 5.2.1, la hipótesis que dice: existe $t \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que ningún vértice en C_t tiene un lazo en $C_{\mathcal{F}}(D)$. A dicha hipótesis le llamaremos (\star) . En el caso del teorema 5.2.3 la hipótesis que nos falta analizar es: existe $t \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que todo vértice x en $D \setminus C_t$ satisface que $N_{\mathcal{F}}^+(x) \not\subseteq N_{\mathcal{F}}^-(x)$. A dicha hipótesis la nombraremos $(\star\star)$. Para ello mostraremos que la digráfica m -coloreada mostrada en la figura 5.10 no tiene núcleo de 6 cambios propios.

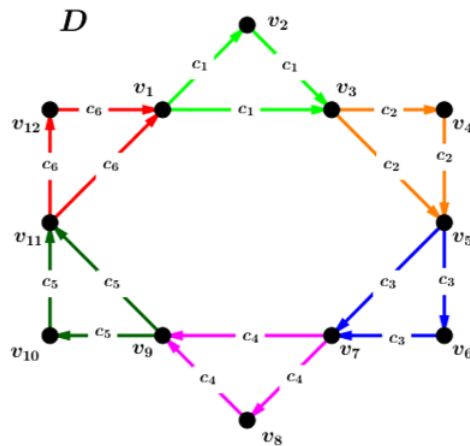


Figura 5.10: Ejemplo de una digráfica 6-coloreada sin núcleo de 6 cambios propios

Lema 5.4.1. *La digráfica m -coloreada mostrada en la figura 5.10 no tiene núcleo de 6 cambios propios. En particular, D no tiene un conjunto de vértices que sea simultáneamente independiente por caminos con 5 cambios propios y absorbente por trayectorias con 4 cambios propios.*

Demostración. Antes de iniciar la demostración, nótese que dicha digráfica puede verse como la unión de seis torneos transitivos de orden tres que además son monocromáticos. Además, los vértices v_1, v_3, v_5, v_7, v_9 y v_{11} son los únicos vértices en los que hay una in-flecha y una ex-flecha con distinto color, por lo que, de haber un cambio de color, sólo puede ser en dichos vértices. Al conjunto que contiene estos vértices lo llamaremos S .

Ahora veremos que D no tiene un núcleo de 6 cambios propios. Procederemos por contradicción al suponer que D tiene un núcleo de 6 cambios propios, digamos N . Consideraremos dos casos sobre N : si contiene un vértice de S y el caso en el que no. Para el primer caso, supongamos sin pérdida de generalidad que $v_1 \in N$. Ahora mostraremos que N consta únicamente del vértice v_1 . Claramente, v_2 y v_3 no pueden estar en N , pues éste debe ser un conjunto independiente. Por otro lado, notemos que si v_i es cualquier otro vértice distinto de v_1, v_2 y v_3 , entonces la $v_i v_1$ -trayectoria de longitud mínima tiene que pasar necesariamente por v_5, v_7, v_9 y v_{11} . Se sigue que dicha trayectoria tenga 4 cambios propios y por ser N un conjunto independiente por trayectorias con 5 cambios propios, el conjunto N debe constar únicamente del vértice v_1 . Sin embargo, como v_2 no está en N , éste debería ser absorbido por v_1 mediante una trayectoria con a lo más 4 cambios propios, pero todo $v_2 v_1$ -camino necesariamente pasa por v_3, v_5, v_7, v_9 y v_{11} , lo que concluye que todo $v_2 v_1$ -camino tiene al menos 5-cambios propios, lo cual contradice que N es un núcleo de 6-cambios propios.

Ahora veremos el caso en el que N no tiene vértices de S . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que v_2 está en N . Nuevamente demostraremos que N sólo consta de un vértice, a saber, v_2 . Como para todo $i \in \{3, 4, \dots, 8\}$, la $v_2 v_i$ -trayectoria de longitud mínima pasa por a lo más v_3, v_5 y v_7 , entonces dicha trayectoria tiene a lo mucho 3 cambios propios. Debido a que N es un conjunto independiente por trayectorias con 5 cambios propios, para toda $i \in \{3, 4, \dots, 8\}$, $v_i \notin N$. Con un razonamiento análogo, pero al usar una $v_i v_2$ -trayectoria de longitud mínima, podemos concluir que para todo $i \in \{9, 10, \dots, 12, 1\}$, $v_i \notin N$. Así, N sólo consta de v_2 . Sin embargo, cualquier $v_3 v_2$ -trayectoria contiene a los vértices v_5, v_7, v_9, v_{11} y v_1 , por lo que cualquier $v_3 v_2$ -trayectoria tiene al menos 5 cambios propios, lo cual contradice el hecho de que N es un conjunto absorbente por trayectorias de 4 cambios propios. Con lo anterior, la digráfica D no tiene núcleo de 6 cambios propios. En particular, como todo conjunto independiente por caminos con 5 cambios propios y absorbente por trayectorias con 4 cambios propios es un núcleo de 6 cambios propios, entonces por lo previamente demostrado D no puede contener un conjunto independiente por caminos con 5 cambios propios y absorbente por trayectorias con 4 cambios propios □

Con base en el lema anterior será más sencillo nuestro trabajo de esta sección. Primero consideremos un patrón monocromático H con conjunto de vértices c_1, \dots, c_6 . Para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$, sea P_i la clase

monocromática del color c_i y denotamos por \mathcal{F} a la familia $\{P_i: i \in \{1, \dots, 6\}\}$. Es sencillo ver que \mathcal{F} es una partición en H -clases bajo el patrón monocromático H . La digráfica de H -clases relativa a \mathcal{F} se muestra en la figura 5.11.

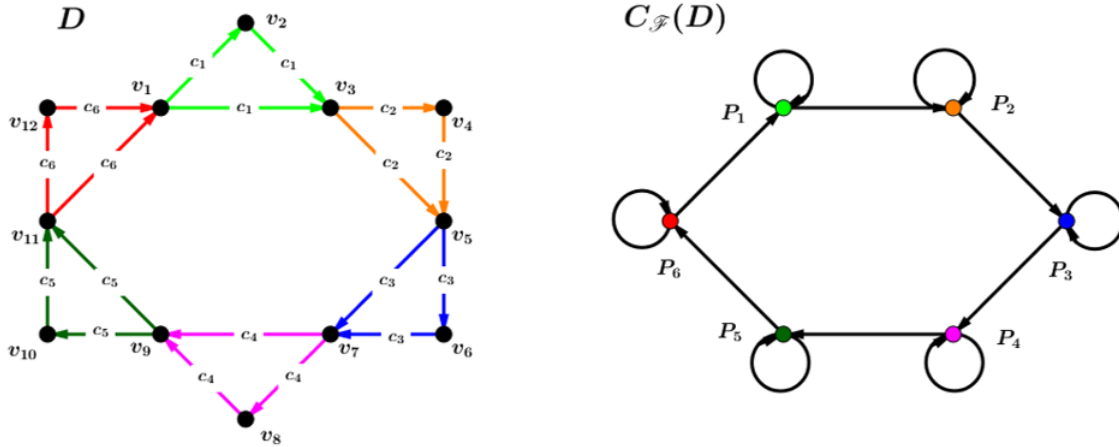


Figura 5.11: Ejemplo de una digráfica 6-coloreada sin núcleo de 6-cambios propios y una digráfica de H -clases

Nótese que la digráfica D es una digráfica H -coloreada, fuertemente conexa y además tiene una partición en H -clases tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es 6-partita, pues de hecho es un 6-ciclo. Sin embargo, para todo $i \in \{1, \dots, 6\}$, P_i tiene un lazo en $C_{\mathcal{F}}(D)$, por lo que no satisface la hipótesis (\star) . Además, D no puede tener un conjunto de vértices que sea simultáneamente $(6, H)$ -independiente por caminos y $(5, H)$ -absorbente por trayectorias, pues un conjunto con esas condiciones, bajo el patrón H , debe ser un conjunto independiente por caminos con 5 cambios propios y absorbente por trayectorias con 4 cambios propios, lo cual mostramos que no es posible (lema 5.4.1). Así, en el teorema 5.2.1, no es posible omitir la hipótesis (\star) .

De manera análoga para el teorema 5.2.3, notemos que para todo $i \in \{1, \dots, 6\}$, existe un vértice en $D\langle P_i \rangle$, a saber, x_{2i} , que cumple que $N_{\mathcal{F}}^-(x_{2i}) = N_{\mathcal{F}}^+(x_{2i})$, por lo que nuevamente D no satisface la hipótesis $(\star\star)$. Además, ya vimos previamente que D no puede tener un conjunto de vértices que sea simultáneamente $(6, H)$ -independiente por caminos y $(5, H)$ -absorbente por trayectorias. Así, en el teorema 5.2.3, no es posible omitir la hipótesis $(\star\star)$.

Un razonamiento análogo mostraría que no es posible omitir (\star) del corolario 5.2.2, ni omitir la hipótesis $(\star\star)$ en el corolario 5.2.4. Eso concluye nuestro análisis con respecto a los resultados principales de este capítulo.

Capítulo 6

(k, l, H) -núcleos y la digráfica de H -clases

Como vimos en el capítulo previo, la digráfica de H -clases es una herramienta interesante la cual, bajo ciertas condiciones, garantiza la existencia de (k, H) -núcleos en digráficas H -coloreadas. Al analizar los resultados del capítulo anterior, principalmente los de la sección 5.2, podemos notar que en los teoremas 5.2.1 y 5.2.3, la digráfica de clases tiene, de hecho, un k -núcleo: en los resultados mencionados, la digráfica de H -clases es fuertemente conexa y cíclicamente k -partita, por lo que debe tener un k -núcleo, de acuerdo con el teorema de Kwaśnik. Sin embargo, en ningún punto de las demostraciones de tales resultados se utilizó dicha propiedad. Con base en ello, es natural el pensar si la existencia de un k -núcleo en la digráfica de H -clases garantiza de alguna manera la existencia de un (k, H) -núcleo en la digráfica H -coloreada. O más aun, si la existencia de un (k, l) -núcleo en la digráfica de H -clases puede ser condición suficiente para que la digráfica base tenga un (k, l, H) -núcleo. Este capítulo tiene como objetivo dar respuesta a dichas preguntas.

6.1. Resultados preliminares

En esta primera sección, y siguiendo la misma estructura del capítulo anterior, se presentarán algunos resultados previos antes de abordar los teoremas principales del capítulo. Algunos de los resultados aquí mostrados son una generalización de los presentados en capítulos anteriores. Antes de iniciar, necesitamos un concepto nuevo que será de importancia en lo consecuente. De acuerdo con el lema 4.3.5, dada una digráfica H -coloreada, digamos D , y una partición de H -clases de D , digamos \mathcal{F} , siempre que D sea fuertemente conexa, la digráfica de H -clases heredará la propiedad de ser fuertemente conexa. La idea de la demostración en dicho enunciado es sencillo: si consideramos dos vértices en $C_{\mathcal{F}}(D)$, digamos F y F' , podemos tomar una flecha arbitraria a en F y una flecha arbitraria b en F' . Si C es un camino en D cuya flecha inicial es a y flecha final es b , entonces la secuencia de las clases a la que pertenecen las flechas del camino C forman un FF' -camino en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Sin embargo, uno podría preguntarse lo siguiente: Si hay un FF' -camino en $C_{\mathcal{F}}(D)$, digamos (F_0, \dots, F_n) ,

entonces para todo vértice en $D\langle F \rangle$, digamos x , y todo vértice en $D\langle F' \rangle$, digamos z , ¿existirá un xz -camino en D que recorra las clases F_0, F_1, \dots, F_n y, además, en ese orden? La respuesta es no. Tomemos, por ejemplo, la digráfica H -coloreada mostrada en la figura 6.1. Para $i \in \{1, \dots, 4\}$, definimos la clase P_i como las flechas de D con color c_i y la clase P_5 como las flechas con color c_5 o c_6 . La familia $\mathcal{F} = \{P_i : i \in \{1, \dots, 5\}\}$ es una partición en H -clases de $A(D)$ y su digráfica de H -clases se muestra en la misma figura.

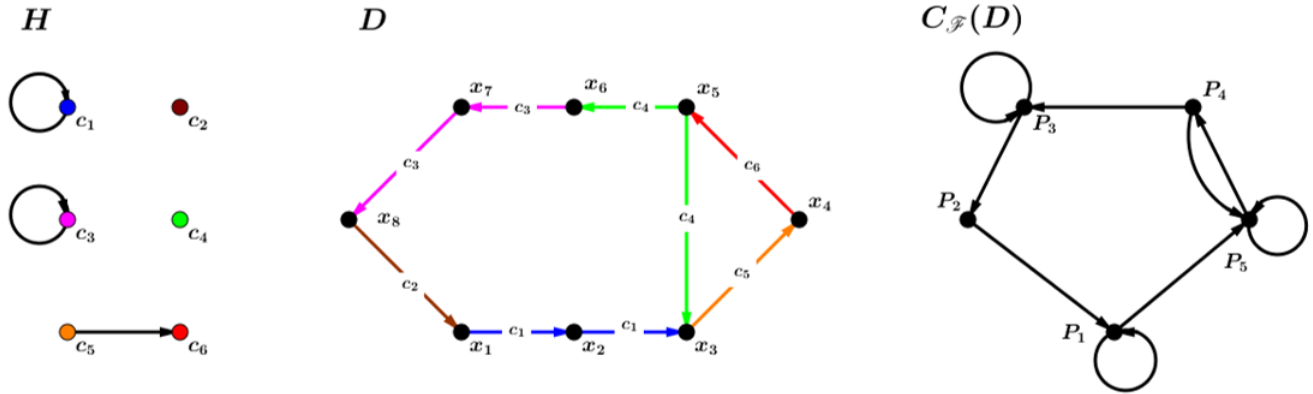


Figura 6.1: Ejemplo de una H - partición que no preserva caminos

Notemos que en $C_{\mathcal{F}}(D)$ existe una P_4P_2 -trayectoria, a saber, (P_4, P_3, P_2) . Sin embargo, si consideramos el vértice x_3 , el cual está en $D\langle P_4 \rangle$ y el vértice x_8 , el cual está en $D\langle P_2 \rangle$, no existen x_3x_8 -caminos en D que recorran sólo las clases P_4, P_3 y P_2 , pues las ex-flechas de x_3 están todas en la clase P_5 . En cierto sentido, podemos decir intuitivamente que no podemos heredar los caminos existentes en la digráfica de H -clases hacia caminos en la digráfica D . Con base en lo anterior, propondremos la siguiente definición.

Dada una digráfica H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases de D , diremos que \mathcal{F} **preserva caminos** si para toda $(F, G) \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$ y todo vértice x en $V(D\langle F \rangle)$, se cumple que existe un xz -camino en $D\langle F \rangle$ para algún $z \in V(D\langle G \rangle) \cap V(D\langle F \rangle)$.

Primero veremos de manera intuitiva la idea de que una partición en H -clases preserve caminos, pues dicho concepto será usado ampliamente a lo largo de este capítulo. Dada una digráfica H -coloreada, una partición de $A(D)$ en H -clases que preserve caminos y un camino en la digráfica de H -clases, digamos (F_0, F_1, \dots, F_n) (véase la figura 6.2) podemos considerar un vértice arbitrario en $D\langle F_0 \rangle$, digamos x_0 . Ya que (F_0, F_1) es una flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$, se seguiría del hecho de que \mathcal{F} preserve caminos que debe existir un vértice en $V(D\langle F_0 \rangle) \cap V(D\langle F_1 \rangle)$, digamos x_1 , y un x_0x_1 -camino en $D\langle F_0 \rangle$, digamos T_0 . Dicho camino debe ser un H -camino en D , pues todas sus flechas están en una única clase de \mathcal{F} . De manera análoga, como $x_1 \in V(D\langle F_1 \rangle)$, se sigue del hecho que (F_1, F_2) es una flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$ y de que \mathcal{F} preserve caminos, que existe un vértice en $V(D\langle F_1 \rangle) \cap V(D\langle F_2 \rangle)$, digamos x_2 , y un x_1x_2 -camino en $D\langle F_1 \rangle$, digamos T_1 . Nótese que dicho camino debe ser un H -camino en D , pues todas sus flechas están en una única clase de \mathcal{F} . Nuevamente, pero ahora al

considerar el vértice x_2 , existe un vértice $x_3 \in V(D\langle F_1 \rangle) \cap V(D\langle F_2 \rangle)$ y un x_2x_3 -camino en $D\langle F_2 \rangle$, digamos T_2 . Dicho camino también es un H -camino.

Nótese que la concatenación $T_0 \cup T_1 \cup T_2$ es un camino en D que recorre en orden las clases F_0, F_1, F_2 , por lo que intuitivamente hablando, siempre que tengamos un camino en la digráfica de H -clases, digamos C , nos va a ser posible encontrar un camino en D , digamos C' cuyas flechas estén en el primer vértice del camino C , después, las flechas de C' estarán en la segundo vértice del camino C , posteriormente en el tercer vértice de C y así sucesivamente. Esta es la idea de las particiones en H -clases que preservan caminos. Es importante decir que este concepto nos permitirá trabajar con cierta libertad entre la digráfica de H -clases y la digráfica base. Además, el camino en D encontrado a partir del proceso antes explicado tiene la peculiaridad de que es posible localizar fácilmente dónde están las obstrucciones: justamente en los extremos de los caminos contenidos en $D\langle F_i \rangle$, por lo que será posible controlar la H -longitud de dicho camino.

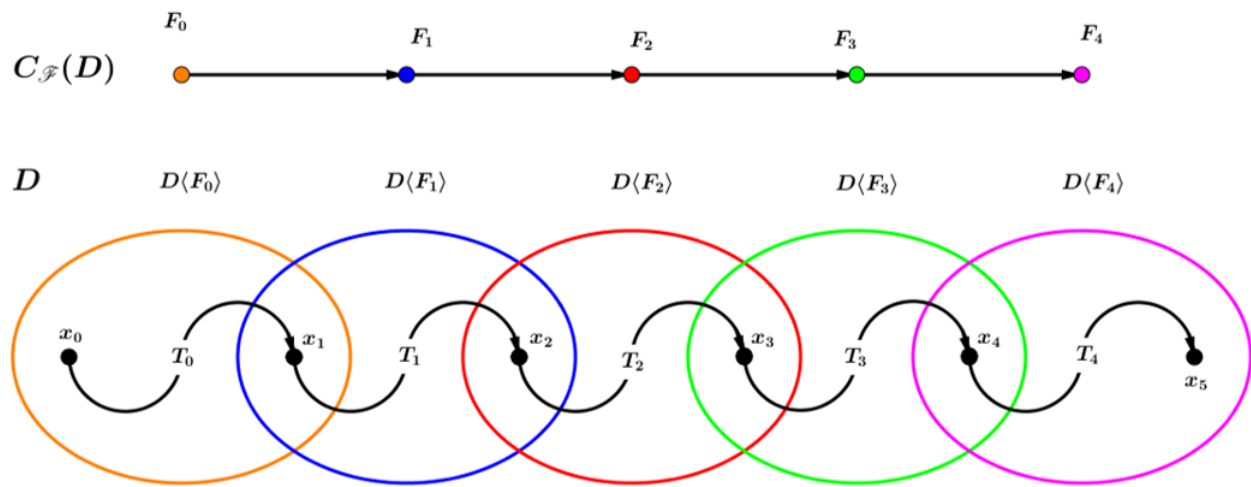


Figura 6.2: Idea del concepto de partición en H -clases que preserva caminos

El lector podrá preguntarse qué tan sencillo o complicado puede ser encontrar condiciones que garanticen que una partición en H -clases preserve caminos. Creemos que no tienen por qué ser condiciones muy complicadas. De hecho, en el capítulo anterior trabajamos justamente con particiones en H -clases que preservan caminos, como lo muestra el lema siguiente.

Lema 6.1.1. Sean $k \geq 2$, D una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$. Si $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo, digamos $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_0)$, entonces \mathcal{F} preserva caminos.

Demostración. Consideremos $(P_i, P_j) \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$ arbitraria y $x \in V(D\langle F \rangle)$. Mostraremos que existe un vértice z en $V(D\langle P_i \rangle) \cap V(D\langle P_j \rangle)$ y un xz -camino contenido en $D\langle P_i \rangle$.

Si $x \in V(D\langle P_i \rangle) \cap V(D\langle P_j \rangle)$, entonces el camino trivial (x) satisface las condiciones requeridas, por lo que podemos suponer que x no está en la intersección de dichos conjuntos. Notemos que, de lo anterior,

podemos suponer que $i \neq j$, y por ser $C_{\mathcal{F}}(D)$ un k -ciclo, entonces $j = i + 1$. Primero mostraremos la siguiente afirmación.

Afirmación. x tiene una ex-flecha en $D\langle P_i \rangle$.

Procederemos por contradicción al suponer que x no tiene ex-flechas en la clase P_i . Ello querría decir que x tiene al menos una in-flecha en P_i , pues $x \in V(D\langle P_i \rangle)$. Supongamos que dicha in-flecha es a . Por otro lado, por ser D fuertemente conexa, x necesariamente tiene una ex-flecha, la cual llamaremos b . Ésta debe estar en alguna clase de \mathcal{F} , digamos P_t . Por suposición, $t \neq i$, y por definición de $C_{\mathcal{F}}(D)$, tendríamos que $(F_i, F_t) \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$, pues $a \in P_i$ y $b \in P_t$. Así, como $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo, entonces $t = i + 1$, se sigue de ello que $x \in V(D\langle P_{i+1} \rangle)$, lo cual no es posible, pues supusimos que x no estaba simultáneamente en $D\langle P_i \rangle$ y $D\langle P_{i+1} \rangle$. Con lo anterior, x tiene al menos una ex-flecha en P_i .

Por la afirmación previa, supongamos que (x, x_1) es una ex-flecha de x en P_i . Como D es fuertemente conexa, podemos considerar una trayectoria desde x_1 hacia cualquier vértice en $V(D\langle P_i \rangle) \cap V(D\langle P_{i+1} \rangle)$, digamos w . Con ello, la concatenación de la flecha (x, x_1) y dicho camino es un xw -camino en D , digamos $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, cuya flecha inicial está en P_i . Ahora, si C tiene todas sus flechas en P_i , entonces w y C son el vértice y el camino deseados. Si las flechas de C no están todas en P_i , podemos considerar a x_s como el primer vértice en C tal que $(x_s, x_{s+1}) \notin P_i$. Nótese que (x_0, C, x_s) es un camino en $D\langle P_i \rangle$. Por otro lado, como $(x_s, x_{s+1}) \notin P_i$, pero $(x_{s-1}, x_s) \in P_i$, se deduce del hecho de que $C_{\mathcal{F}}(D)$ sea un k -ciclo que $(x_s, x_{s+1}) \in P_{i+1}$ y, en particular, $x_s \in V(D\langle P_i \rangle) \cap V(D\langle P_{i+1} \rangle)$. Así, x_s y (x_0, C, x_s) son el vértice y el camino deseados. Por lo antes dicho, \mathcal{F} preserva caminos. \square

Como podemos darnos cuenta del lema anterior, ya habíamos trabajado con particiones en H -clases que preservan caminos, pero en el caso en el que D fuera fuertemente conexa y la digráfica de H -clases, un ciclo. En este capítulo también trabajaremos con este tipo de particiones, pero en digráficas más generales; es decir, cuando D no necesariamente es fuertemente conexa y cuando la digráfica de H -clases no necesariamente es un ciclo.

Ahora que tenemos la idea intuitiva y formal de las particiones en H -clases que preservan caminos, procederemos a demostrar algunas propiedades de ellas.

Lema 6.1.2. Sean D una digráfica H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$ tal que para toda $F \in \mathcal{F}$, $D\langle F \rangle$ es fuertemente conexa. Los siguientes enunciados se satisfacen:

- a) \mathcal{F} preserva caminos.
- b) $C_{\mathcal{F}}(D)$ es una digráfica simétrica.

c) Si S es un conjunto independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$ y $\{F, G\} \subseteq S$ con $F \neq G$, entonces $D\langle F \rangle$ y $D\langle G \rangle$ son ajenas en vértices.

Demostración. a) Para este inciso, primero notemos que si $(F, G) \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$, entonces se sigue de ello que $V(D\langle F \rangle) \cap V(D\langle G \rangle) \neq \emptyset$. Por otro lado, si $x \in V(D\langle F \rangle)$, entonces por ser $D\langle F \rangle$ fuertemente conexa, debe existir una trayectoria entre x y cualquier vértice en $V(D\langle F \rangle) \cap V(D\langle G \rangle)$, en particular, si z pertenece a dicha intersección, debe existir una xz -trayectoria en $D\langle F \rangle$, lo que demuestra que \mathcal{F} preserva caminos.

b) Para demostrar este inciso, consideremos (F, G) arbitraria en $A(C_{\mathcal{F}}(D))$. Por definición de la digráfica de H -clases relativa, debe existir $(u, v) \in F$ y $(v, w) \in G$ para algunos vértices u, v y w en D . Como tanto $D\langle F \rangle$ y $D\langle G \rangle$ son fuertemente conexas y no triviales, entonces v debe tener un ex-vecino en $D\langle F \rangle$, digamos u' , y un in-vecino en $D\langle G \rangle$, digamos w' ; es decir $(w', v) \in G$ y $(v, u') \in F$. Se sigue de la definición de $C_{\mathcal{F}}(D)$ que $(G, F) \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$ y así $C_{\mathcal{F}}(D)$ es simétrica.

c) En este inciso procederemos por contradicción; es decir supondremos que $V(D\langle F \rangle) \cap V(D\langle G \rangle) \neq \emptyset$, y consideremos $x \in V(D\langle F \rangle) \cap V(D\langle G \rangle)$. Como $D\langle F \rangle$ y $D\langle G \rangle$ son fuertemente conexas y no triviales, entonces x debe tener un ex-vecino en $D\langle F \rangle$, digamos u , y un in-vecino en $D\langle G \rangle$, digamos w ; es decir $(w, v) \in G$ y $(v, u) \in F$. Se sigue que $(G, F) \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$, lo cual no es posible pues $\{F, G\} \subseteq S$ y S es un conjunto independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Así, $V(D\langle F \rangle) \cap V(D\langle G \rangle) = \emptyset$

□

Dentro de los resultados que remarcamos el capítulo anterior se encuentra el lema 5.1.4, el cual establece que si D es una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada y \mathcal{F} es una partición en H -clases de $A(D)$ tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un k -ciclo, digamos $(P_0, \dots, P_{k-1}, P_0)$, entonces para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$, siempre es posible encontrar un núcleo por trayectorias en $D\langle P_i \rangle$ que además esté contenido en $D\langle P_{i+1} \rangle$. Dicho núcleo por trayectorias fue el conjunto que usamos en los resultados principales del capítulo pasado para demostrar la existencia de un (k, H) -núcleo en D . Ahora procederemos a generalizar dicho lema.

Proposición 6.1.3. Sean D una digráfica H coloreada y \mathcal{F} una partición no trivial en H -clases de $A(D)$ que preserva caminos tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ no tiene pozos. Si S es un conjunto independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, entonces existe un núcleo por trayectorias en $D\langle \cup S \rangle$, digamos N , tal que $N \subseteq V(D\langle \cup N^+(S) \rangle)$.

Demostración. Para simplificar notación, denotaremos por D_0 la digráfica $D\langle \cup S \rangle$ y por D_1 la digráfica $D\langle \cup N^+(S) \rangle$; es decir, D_1 es la digráfica inducida en D por todas las flechas de D que estén en una clase perteneciente a S , y D_2 es la digráfica inducida en D por todas las flechas de D que estén en una clase perteneciente a $N^+(S)$. Sea N un núcleo por trayectorias de D_0 cuya intersección con $V(D_1)$ tenga la mayor cantidad posible de vértices,

equivalentemente: para todo núcleo por trayectorias de D_0 , digamos N' , se satisface que:

$$|N' \cap V(D_1)| \leq |N \cap V(D_1)| \quad (6.1)$$

Ahora mostraremos que N es el núcleo por trayectorias deseado, por lo que probaremos que $N \subseteq V(D_1)$. Procederemos por contradicción al suponer que existe x_0 en N tal que $x_0 \notin V(D_1)$. Para tener una mejor idea de la estructura de esta demostración, dividiremos el resto de la prueba en varias afirmaciones.

Afirmación 1. Existe $z \in V(D_1) \cap V(D_0)$ y una x_0z -trayectoria en D_0 .

Primero notemos que, como $x_0 \in V(D_0)$, entonces x_0 tiene una flecha incidente que está en alguna clase de S ; es decir, debe existir $F \in S$ tal que $x_0 \in V(D\langle F \rangle)$. Ya que F no puede ser un pozo en $C_{\mathcal{F}}(D)$, entonces existe $G \in V(C_{\mathcal{F}}(D))$ tal que (F, G) es una flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$ y $G \neq F$. Como S es un conjunto independiente, entonces no es posible que $G \in S$, por lo que $G \in N^+(S)$. Por otro lado, como \mathcal{F} preserva caminos, debe existir una x_0z -trayectoria en $D\langle F \rangle$, digamos C , para algún $z \in V(D\langle F \rangle) \cap V(D\langle G \rangle)$. Como F es una clase en S y G es una clase en $N^+(S)$, es sencillo verificar que $z \in V(D_0) \cap V(D_1)$. Así, z y C son el vértice y la trayectoria deseados, respectivamente. deseados.

Gracias a la afirmación 1, consideremos una x_0z -trayectoria contenida en D_0 , la cual llamaremos T , tal que $z \in V(D_0) \cap V(D_1)$. Ya que N es un conjunto independiente por trayectorias en D_0 , se tiene que $z \notin N$ y, al aplicar la propiedad de N de ser un conjunto absorbente por trayectorias en D_0 , debe existir $v \in N$ y una zv -trayectoria en D_0 , digamos T' . Notemos que si $x_0 \neq v$, entonces $T \cup T'$ es un camino en D_0 entre dos vértices distintos de N , lo cual contradice la independencia por trayectorias de N , así, $x_0 = v$.

Afirmación 2. El conjunto N' , definido como $(N \setminus \{x_0\}) \cup \{z\}$, es un núcleo por trayectorias en D_0 .

Primero mostraremos que N' es un conjunto absorbente por trayectorias en D_0 . Dicho conjunto se encuentra representado en la figura 6.3. Primero veremos que N' es absorbente por trayectorias en D . Para ello, consideremos $w \in V(D_0) \setminus N'$. Si $w = x_0$, entonces T es una x_0N' -trayectoria en D_0 . Por otro lado, si $w \neq x_0$, entonces $w \in V(D_0) \setminus N$ y así por ser N un conjunto absorbente por trayectorias en D_0 , existe una wu -trayectoria en D_0 con $u \in N$, digamos C . Si $u \neq x_0$, entonces se tiene que C es una wN' -trayectoria en D_0 . Y si $w = x_0$, entonces $C \cup T$ es un wN' -camino en D_0 , al cual se le puede sustraer una wN' -trayectoria. En cualquier caso, se puede concluir que N' es un conjunto absorbente por trayectorias en D_0 .

Ahora procederemos a demostrar que N' es un conjunto independiente por trayectorias en D_0 . Para ello, supongamos por contradicción que existen dos vértices distintos en N' , digamos r y s , y una rs -trayectoria en D_0 , digamos C . Ya que N es un conjunto independiente por trayectorias, no es posible que r y s sean

ambos vértices en $N \setminus \{x_0\}$, por uno de uno de dichos vértices es igual a z y el otro está en $N \setminus \{x_0\}$. Si $r = z$, entonces $T \cup C$ es un x_0s -camino en D_0 , lo cual no es posible pues x_0 y s son vértices distintos en N y este conjunto es independiente por trayectorias en D_0 . Si $s = z$, entonces $C \cup T'$ es un rx_0 -camino en D_0 , lo que genera una contradicción similar. Con lo anterior, se puede concluir que N' es un núcleo por trayectorias en D_0 .

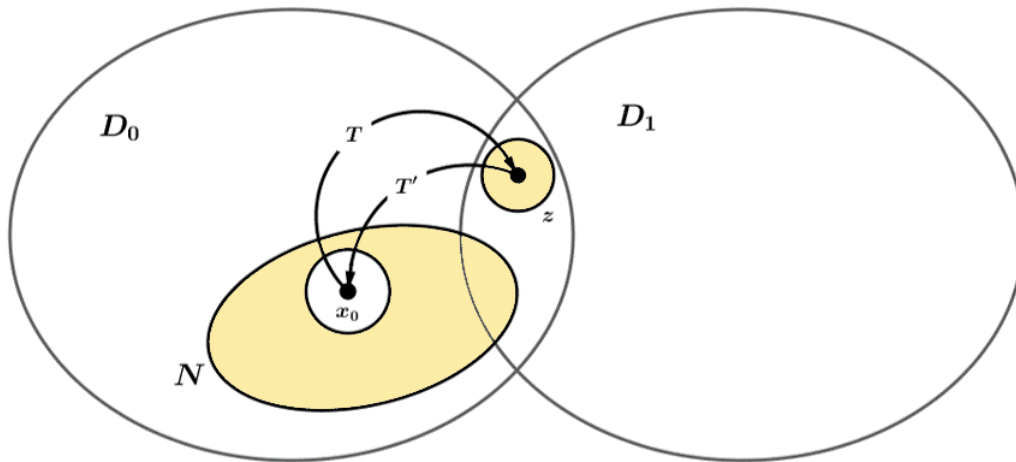


Figura 6.3: El núcleo N' exhibido en la afirmación 2, resaltado en color

De acuerdo con la afirmación 2, y por la elección de N , se debería cumplir que $|N' \cap V(D_1)| \leq |N \cap V(D_1)|$, sin embargo, por la construcción de N' y la elección de x_0 y z , se tiene que $|N' \cap V(D_1)| = |N \cap V(D_1)| + 1$, lo cual es contradictorio. De los argumentos previos, podemos deducir que $N \subseteq V(D_1)$. \square

Ahora, casi para finalizar esta sección de resultados previos, enunciaremos el resultado que relaciona la existencia de conjuntos l -absorbentes en la digráfica de H -clases y los conjuntos (l, H) -absorbentes por caminos en la digráfica base. Con este lema remarcamos la necesidad de usar particiones en H -clases que preserven caminos.

Proposición 6.1.4. Sean D una digráfica H -coloreada sin vértices aislados, \mathcal{F} una partición en H -clases que preserve caminos y S un conjunto independiente y l -absorbente de $C_{\mathcal{F}}(D)$ ($l \geq 1$). Si N es un núcleo por trayectorias de $D \langle \cup S \rangle$, entonces N es un conjunto $(l + 1, H)$ -absorbente por caminos en D .

Demostración. Para simplificar notación, denotemos por D' la digráfica $D \langle \cup S \rangle$. Consideremos $x_0 \in V(D) \setminus N$ arbitrario. Si $x_0 \in V(D')$, se sigue del hecho de que N es un núcleo por trayectorias en D' que deba existir una x_0N -trayectoria en D' , digamos T . Por el lema 4.3.3, D' es una H -subdigráfica de D , por lo que T es una H -trayectoria, en particular, $l_H(T) \leq l + 1$, lo que muestra lo deseado.

Ahora, supondremos que $x \notin V(D')$. Ya que D no tiene vértices aislados, entonces x debe tener al menos una in-flecha o al menos una ex-flecha, misma que debe estar en alguna clase de \mathcal{F} , digamos F_0 . Como

$x_0 \notin V(D')$; es decir, no tiene flechas incidentes en ninguna de las clases pertenecientes a S , en particular se tiene que $F_0 \notin S$. Así, por ser S un conjunto l -absorbente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, entonces podemos considerar una F_0S -trayectoria en $C_{\mathcal{F}}(D)$ de longitud mínima, digamos $T = (F_0, \dots, F_r)$. Nótese que $l(T) \leq l$. Además, para todo $i \in \{0, \dots, r\}$, denotaremos por D_i la digráfica $D\langle F_i \rangle$.

Por otro lado, por ser \mathcal{F} una partición en H -clases que preserva caminos, entonces para toda $i \in \{1, \dots, r\}$ debe existir $x_i \in V(D_{i-1}) \cap V(D_i)$ tal que para toda $i \in \{0, \dots, r-1\}$, existe una $x_i x_{i+1}$ -trayectoria en D_i , digamos T_i . Es inmediato del hecho de que \mathcal{F} sea una partición en H -clases, que todas las trayectorias T_i son H -trayectorias en D , por lo que ninguna de ellas tiene obstrucciones. Ahora consideremos $C = \cup_{i=0}^{r-1} T_i$ y supongamos que $C = (z_0, \dots, z_n)$. Véase la figura 6.4 para referencia.

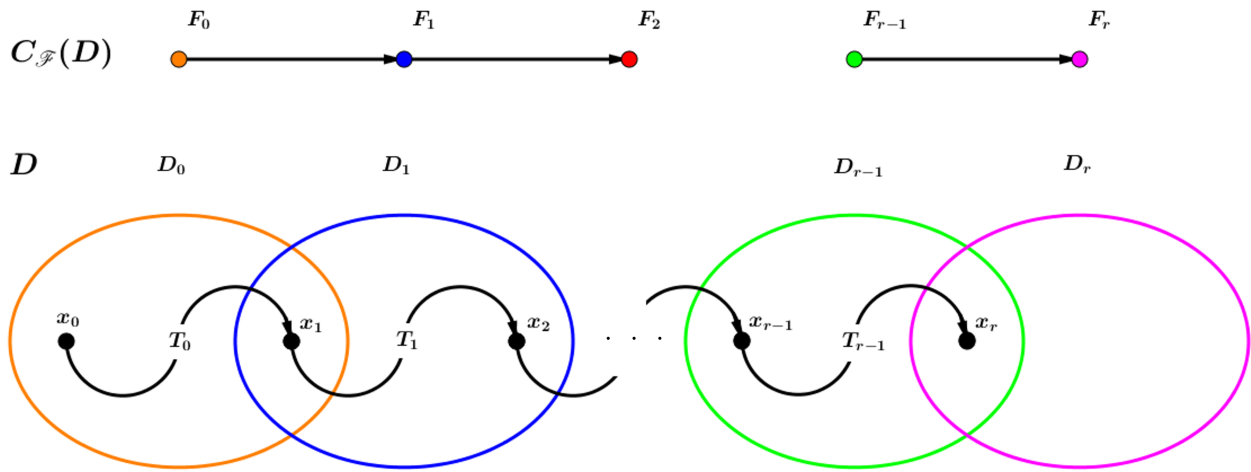


Figura 6.4: Fragmento de la demostración

Afirmación 1. $l_H(C) \leq l$

Para cada $i \in \{0, \dots, r-2\}$, definimos $U_i = \{s \in \{1, \dots, n-1\} : (z_{s-1}, z_s) \in F_i\}$; es decir, los índices i para los cuales (z_{s-1}, z_s) es una flecha de la clase F_i . Sin embargo, es posible que algunos de estos conjuntos sean vacíos, pues algunos de los caminos T_i pueden ser caminos triviales. Así, definimos $L = \{i \in \{0, \dots, r-2\} : U_i \neq \emptyset\}$ y para todo $i \in L$, $\beta_i = \max U_i$.

Ahora mostraremos que $O_H(C) \subseteq \{\beta_i : i \in L\}$. Si $m \in O_H(C)$, entonces se sigue de la definición de $O_H(C)$ que $(\rho(z_{m-1}, z_m), \rho(z_m, z_{m+1})) \notin A(H)$. Por otro lado, por definición de C , necesariamente $(z_{m-1}, z_m) \in A(T_j)$ para algún $j \in \{0, \dots, r-1\}$, y por ser T_j un H -camino en D , entonces no es posible que $(z_m, z_{m+1}) \in A(T_j)$, lo que implica que $z_m = x_{j+1}$; es decir, z_m es el vértice final de T_j . Así, (z_{m-1}, z_m) es la última flecha de C que está en T_j , por lo que $m = \max U_j$ y que $j \leq r-2$, y así, $m \in \{\beta_i : i \in L\}$, lo que demuestra que $O_H(C) \subseteq L$. Con ello, $|O_H(C)| \leq |L|$; es decir, $|O_H(C)| \leq r-1 \leq l-1$, y de lo anterior, $l_H(C) \leq l$.

Por último, si $z_n \in N$, entonces C es un x_0N -camino en D de H -longitud a lo más l . Si $z_n \notin N$, se sigue del hecho de que N sea un núcleo por caminos en D' que exista una z_nN -trayectoria en D' , digamos T_r . Notemos que T_r es una H -trayectoria en D , por lo que, $C \cup T_r$ es un x_0N -camino en D tal que $l_H(C \cup T_r) \leq l + 1$, como lo mostramos en el inciso (c) del lema 4.1.2. Con lo anterior, N es un conjunto $(l + 1, H)$ -absorbente por caminos en D . \square

Como mencionamos anteriormente, este capítulo lo dedicaremos a lo siguiente: dada una digráfica, digamos D , que esté H -coloreada, y una partición en H -clases de $A(D)$ tal que su digráfica de H -clases tenga un (k, l) -núcleo, ¿qué condiciones debemos pedir para que D tenga un (k', l', H) -núcleo, para ciertos valores de l' y k' ? El lema recién demostrado ya nos empieza a dar algunas pistas sobre ello con respecto a la l -absorbencia, pues cuando hay un conjunto l -absorbente en la digráfica de H -clases, entonces bajo ciertas condiciones es posible encontrar conjuntos $(l + 1, H)$ -absorbentes por caminos en D . En cierta forma, podemos decir que tenemos manera de usar la l -absorbencia de la digráfica de H -clases para obtener $(l + 1, H)$ -absorbencia por caminos en D . Esto nos permitirá dedicarnos a buscar condiciones similares pero con respecto a la k -independencia: Si sabemos que algunos conjuntos en la digráfica de H -clases son k -independientes, entonces ¿cómo podemos usar dicha independencia para obtener (k, H) -independencia por caminos en D ? Si logramos obtener respuestas satisfactorias a esa pregunta, entonces podremos usar a los (k, l) -núcleos en la digráfica de H -clases para obtener algunos (k', l', H) -núcleos en D . Así, en la siguiente sección nos dedicaremos a verificar condiciones sobre independencia.

Pero antes de ello, es importante mencionar que continuaremos agregando como hipótesis que la partición en H -clases preserve caminos. De hecho, sin ella no nos será posible garantizar que los conjuntos l -absorbentes de la digráfica de H -clases puedan usarse para garantizar la existencia de conjuntos $(l + 1, H)$ -absorbentes por caminos en la digráfica H -coloreada.

Primero veamos que sin la hipótesis de pedir que \mathcal{F} sea una partición en H -clases que preserve adyacencias, no es posible concluir la proposición 6.1.4. Observemos la digráfica H -coloreada mostrada en la figura 6.5. Además, para toda $i \in \{1, \dots, 5\}$, sean F_i el conjunto de flechas en D que tienen color c_i y \mathcal{F} la familia $\{F_i : i \in \{1, \dots, 5\}\}$. Es sencillo ver que \mathcal{F} es una partición en H -clases de $A(D)$.

Sin embargo, (F_2, F_3) es una flecha en $C_{\mathcal{F}}(D)$, pero para el vértice x_2 en $D\langle F_2 \rangle$, no existe un camino en $D\langle F_2 \rangle$ que inicie en x_2 y termine en $V(D\langle F_2 \rangle) \cap V(D\langle F_3 \rangle)$, por lo que \mathcal{F} no preserva caminos. Por otro lado, $\{F_5\}$ es un conjunto 4-absorbente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, pero veremos que ningún núcleo por trayectorias en $D\langle F_5 \rangle$ es $(4, H)$ -absorbente por caminos, pues el único núcleo por trayectorias en $D\langle F_5 \rangle$ es $\{x_6, z_6\}$, el cual no absorbe por caminos a x_2 , en particular, no lo absorbe por caminos de H -longitud a lo más cuatro. Así, si queremos conservar esta dualidad entre los conjuntos l -absorbentes de la digráfica de H -clases y los conjuntos $(l + 1, H)$ -absorbentes en D , requeriremos que la partición en H -clases preserve caminos.

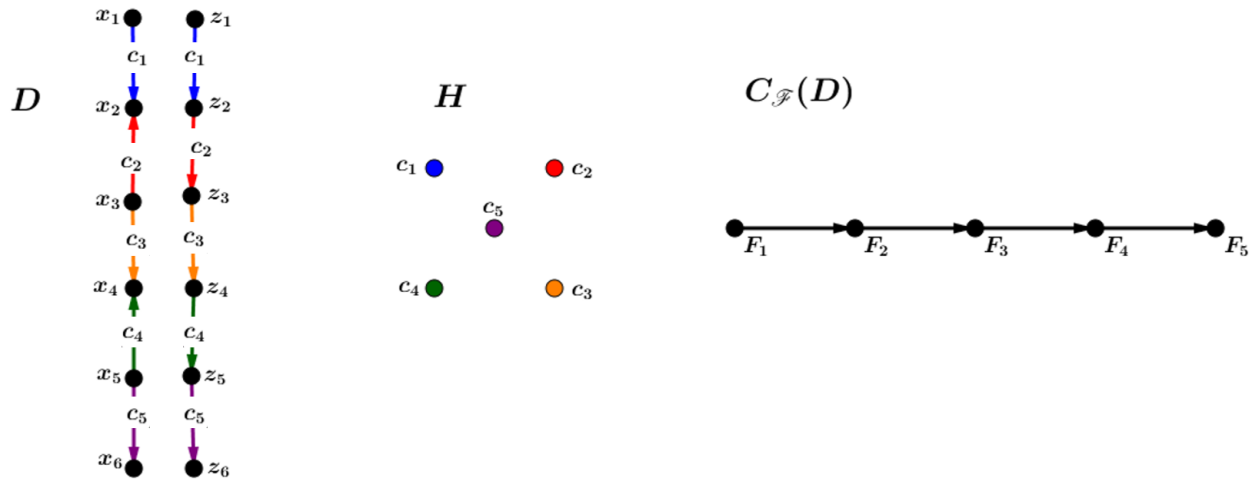


Figura 6.5: No es posible omitir que la partición en H -clases de la proposición 6.1.4 preserve caminos

Por otro lado, también veremos que no es posible mejorar el valor $l + 1$ en la proposición 6.1.4. Consideremos la digráfica H -coloreada mostrada en la figura 6.6. Para cada $i \in \{1, \dots, 6\}$, denotamos por F_i al conjunto de flechas en D con color c_i . Nótese que la familia $\mathcal{F} = \{F_i : i \in \{1, \dots, 6\}\}$ es una partición en H -clases que preserva caminos. Es sencillo ver que $\{F_6\}$ es un conjunto independiente y 3-absorbente en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Por otro lado, nótese que $\{x_4\}$ es un núcleo por trayectorias en $D \setminus \langle F_6 \rangle$, sin embargo, dicho conjunto no es un conjunto (r, H) -absorbente por caminos para toda $r \in \{1, 2, 3\}$, pues para el vértice x_5 , cualquier $x_5 x_4$ -camino en D tiene al menos tres obstrucciones; es decir, tiene H -longitud al menos cuatro. Así, no es posible mejorar el valor $l + 1$ en la $(l + 1, H)$ -absorbencia por caminos de la proposición 6.1.4.

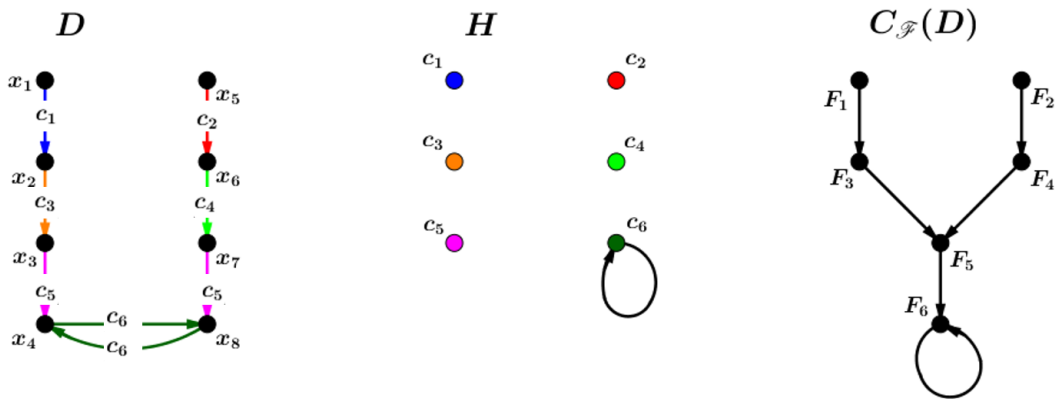


Figura 6.6: No es posible mejorar la $(l + 1, H)$ -absorbencia por caminos de la proposición 6.1.4

6.2. Resultados principales

Antes de presentar los resultados principales de este capítulo, es importante y conveniente que hagamos una observación. Sean D una digráfica H -coloreada y denotamos por D^0 la digráfica H -coloreada obtenida a partir de D al eliminar todos sus vértices aislados. Notemos que D debe tener un (k, l, H) -núcleo por camino si y sólo si D^0 tiene un (k, l, H) -núcleo por caminos. Con ello en mente, a pesar de que los resultados de esta sección son válidos independientemente de si la digráfica tenga o no vértices aislados, nosotros presupondremos, para lo que resta del capítulo, que las digráficas aquí trabajadas no tienen vértices aislados. Esto nos ayudará a simplificar los enunciados de los resultados y volver más simples sus demostraciones. Además, en virtud de la proposición 6.1.4, nuestro objetivo principal será el preservar de alguna manera la k -independencia de los conjuntos en $C_{\mathcal{F}}(D)$ hacia conjuntos (k, H) -independientes en D .

Teorema 6.2.1. *Sean D una digráfica H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$ que preserve caminos y $S \subseteq V(C_{\mathcal{F}}(D))$ tal que S es independiente y l -absorbente para algún $l \geq 1$. Si $N^+(S) = \emptyset$ y $k \geq 2$, entonces todo núcleo por trayectorias de $D \langle \cup S \rangle$ es un $(k, l + 1, H)$ -núcleo por caminos en D .*

Demostración. Para simplificar notación, denotamos por D' la digráfica $D \langle \cup S \rangle$, y consideremos un núcleo por trayectorias en D' , digamos N .

Por la proposición 6.1.4 se tiene que N es un conjunto $(l + 1, H)$ -absorbente por caminos en D , por lo que sólo resta por demostrar que para todo $k \geq 2$, N es un conjunto (k, H) -independiente por caminos en D . Esto último lo demostraremos al ver que, de hecho, N es un conjunto independiente por trayectorias en D . Procederemos por contradicción al suponer que existe una $x_1 x_n$ -trayectoria en D , digamos $T' = (x_1, \dots, x_n)$, donde x_1 y x_n son vértices distintos en N . Buscaremos contradecir el hecho de que el conjunto S no tiene ex-vecinos en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Por el lema 1.6.1 se tiene que x_0 tiene un in-vecino en D , digamos x_0 . Con base en ello, definimos $T = (x_0, x_1) \cup T'$.

Por otro lado, como (x_0, x_1) es una flecha en D' , se sigue de la definición de D' que exista $F_0 \in S$ tal que $(x_0, x_1) \in F_0$. Si $A(T') \subseteq F_0$; es decir, todas las flechas de T' también están en F_0 , entonces por definición de D' , todas las flechas de T' están en D' y así T' es un $x_1 x_n$ -trayectoria en D' , lo cual no es posible pues N es un conjunto independiente por trayectorias en D' . Por lo anterior, $A(T') \not\subseteq F_0$. Con base en esto último, podemos definir $t = \min\{i \in \{1, \dots, n-1\} : (x_i, x_{i+1}) \notin F_0\}$. Por definición de t , se sigue que $(x_{t-1}, x_t) \in F_0$ y que $(x_t, x_{t+1}) \in G$ para algún $G \in \mathcal{F}$, con $F_0 \neq G$. Nótese que $(F_0, G) \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$, pues (x_t, x_{t+1}) es una flecha consecutiva de (x_{t-1}, x_t) . Sin embargo, por ser S un conjunto independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, se sigue que $G \notin S$. En resumen, $F_0 \in S$, $G \notin S$ y $(F_0, G) \in A(C_{\mathcal{F}}(D))$, lo que concluye que $G \in N^+(S)$, lo cual no es posible por la hipótesis sobre S .

Así, N es un conjunto independiente por trayectorias en D' , por lo que N es (k, H) -independiente por

caminos para todo $k \geq 2$. Por lo anterior N es un $(k, l + 1, H)$ -núcleo de D . \square

Como consecuencia inmediata del resultado anterior, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.2.2. Sean D una digráfica H -coloreada, \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$ que preserva caminos, $k \geq 2$ y $l \geq 1$. Si S es un (k, l) -núcleo en $C_{\mathcal{F}}(D)$ y además $N^+(S) = \emptyset$, entonces D tiene un $(k, l + 1, H)$ -núcleo por caminos.

Demostración. Dado que todo conjunto k -independiente es, en particular, un conjunto independiente, entonces por el teorema 6.2.1 se sigue que cualquier núcleo por trayectorias de $D \langle \cup S \rangle$ es un $(k, l + 1, H)$ -núcleo de la digráfica D . \square

Para el siguiente teorema necesitamos recordar momentáneamente una notación. Si W es un camino en una digráfica D y x es un vértice en el camino, denotaremos por x^- y por x^+ al antecesor y al sucesor de x en el camino W , respectivamente.

Teorema 6.2.3. Sean $k \geq 2$, $l \geq 1$, D una digráfica H -coloreada y \mathcal{F} una partición de $A(D)$ que preservan caminos tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ tiene un (k, l) -núcleo, digamos S . Si las siguientes condiciones se satisfacen:

- a) $C_{\mathcal{F}}(D)$ no tiene pozos y todo ciclo en $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un lazo o tiene longitud al menos k .
- b) Para todo $x \in V(D)$ tal que $N_{\mathcal{F}}(x) \cap S \neq \emptyset$ y $N_{\mathcal{F}}(x) \cap N^+(S) \neq \emptyset$, se cumple que $N_{\mathcal{F}}^-(x) \subseteq S$.

Entonces D tiene un $(k, l + 1, H)$ -núcleo por caminos.

Demostración. Para simplificar notación, denotemos por D_1 la digráfica $D \langle \cup S \rangle$. Por otro lado, como D no tiene pozos y S es un conjunto independiente, entonces cualquier vértice de S tiene un ex-vecino fuera de S , por lo que $N^+(S) \neq \emptyset$ y con ello, denotamos por D_2 la digráfica $D \langle \cup N^+(S) \rangle$. Así, la digráfica D_1 es la inducida en D por todas aquellas flechas que estén en alguna clase perteneciente a S , mientras que D_2 es la inducida en D por todas aquellas flechas que están en alguna clase perteneciente a $N^+(S)$. Gracias a la proposición 6.1.3 podemos considerar un núcleo por trayectorias en D_1 , digamos N , tal que $N \subseteq V(D_2)$ (véase la figura 6.7). Mostraremos que N es un $(k, l + 1, H)$ -núcleo en D .

En virtud del teorema 6.1.4 se tiene que N es un conjunto $(l + 1, H)$ -absorbente por caminos en D , por lo que sólo resta por demostrar que N es (k, H) -independiente por caminos en D , pero antes de ello, demostraremos una afirmación que será de utilidad.

Afirmación 1. Para todo $x \in N$, $N_{\mathcal{F}}^-(x) \subseteq S$.

Para demostrar esta afirmación, notemos que si $x \in N$, entonces se sigue de la elección de N que $x \in V(D_1)$ y $x \in V(D_2)$, por lo que de acuerdo con la definición de estas digráficas, x debe tener una

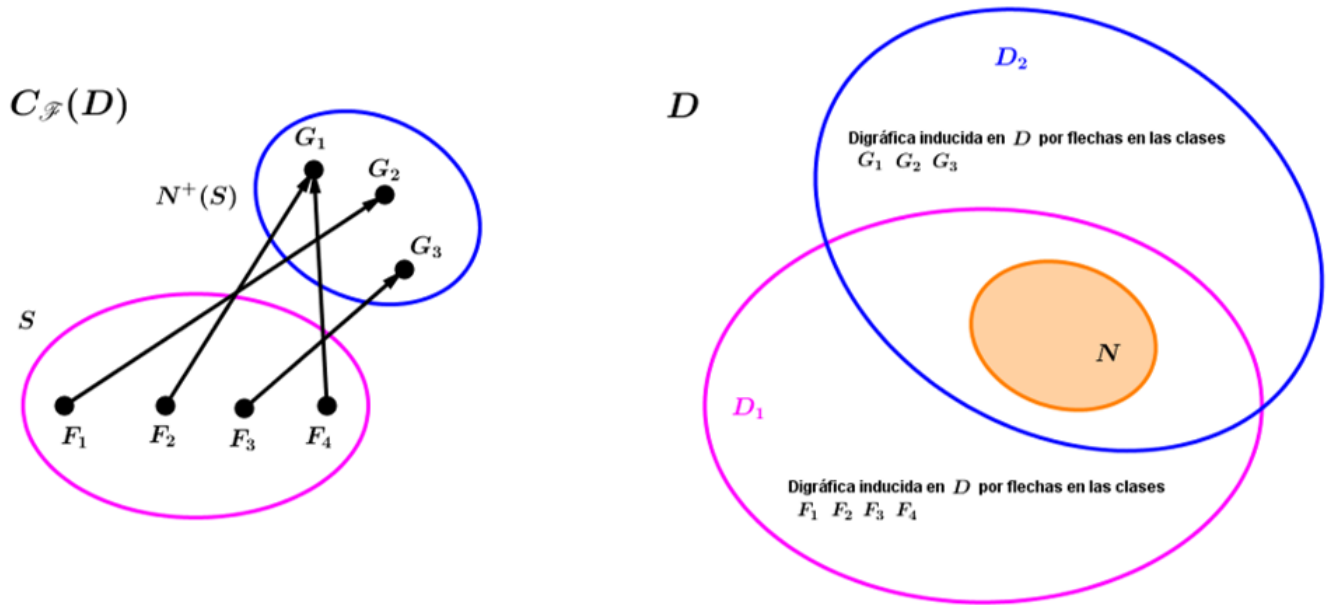


Figura 6.7: Representación de las digráficas D_1 , D_2 y el conjunto N

flecha incidente en alguna clase perteneciente al conjunto S y una flecha incidente perteneciente a alguna clase en el conjunto $N^+(S)$; es decir, $A(x) \cap F \neq \emptyset$ para algún $F \in S$ y $A(x) \cap G \neq \emptyset$ para algún $G \in N^+(S)$. Por ello, $N_{\mathcal{F}}(x) \cap S \neq \emptyset$ y $N_{\mathcal{F}}(x) \cap N^+(S) \neq \emptyset$. Así, por la hipótesis (b) de este teorema, $N_{\mathcal{F}}^-(x) \subseteq S$, lo que concluye la demostración de esta afirmación.

Ahora iniciaremos la demostración que justifica que N es un conjunto (k, H) -independiente por caminos en D . Consideremos un x_0x_n -camino en D , digamos $T = (x_0, \dots, x_n)$ tal que $x_0 \neq x_n$ y ambos extremos están en N . Nuestro objetivo en esta demostración es verificar que la H -longitud de T es al menos k . Para tener una mejor idea de la demostración, la dividiremos en varias afirmaciones.

Afirmación 2. $O_H(T) \neq \emptyset$.

Procederemos por contradicción al suponer que $O_H(T) = \emptyset$; es decir, T es un H -camino. Así, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A(T) \subseteq F$. En particular, $(x_{n-1}, x_n) \in F$ y gracias a ello, $F \in N_{\mathcal{F}}^-(x_n)$. Sin embargo, por la afirmación 1 de este resultado, $N_{\mathcal{F}}^-(x) \subseteq S$, por lo que $F \in S$. Se sigue que T es un x_0x_n -camino en D_1 , lo cual contradice el hecho de que N sea independiente por trayectorias en D_1 , lo que concluye la demostración de esta afirmación.

Por la afirmación 2, podemos suponer que $O_H(T) = \{\alpha_i: i \in \{1, \dots, t\}\}$, donde $t \geq 1$. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_t$. Ya que por definición \mathcal{F} es una partición de $A(D)$, consideremos, para todo $i \in \{1, \dots, t\}$, $F_i \in \mathcal{F}$ tal que $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}^+) \in F_i$ y $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que $(x_0, x_1) \in F_0$. Nótese que para todo $i \in \{1, \dots, t-1\}$, $(x_{\alpha_i}, T, x_{\alpha_{i+1}})$ es un H -camino, por lo que sus flechas deben estar

contenidas en la clase F_i , lo mismo para (x_0, T, x_{α_1}) , cuyas flechas deben estar en F_0 y con (x_{α_t}, T, x_n) , cuyas flechas deben estar en F_t . Ya que T es un camino en D , se seguiría que $T' = (F_0, F_1, \dots, F_t)$ es un camino en $C_{\mathcal{F}}(D)$ (véase la figura 6.8). Nótese que de la simple definición de longitud y H -longitud, $l_H(T') = l(T) + 1$. Además, por la afirmación 1 y el hecho de que $x_n \in N$, se tiene que $N_{\mathcal{F}}^-(x_n) \subseteq S$, pero como $F_t \in N_{\mathcal{F}}^-(x_n)$, podemos concluir que $F_t \in S$.

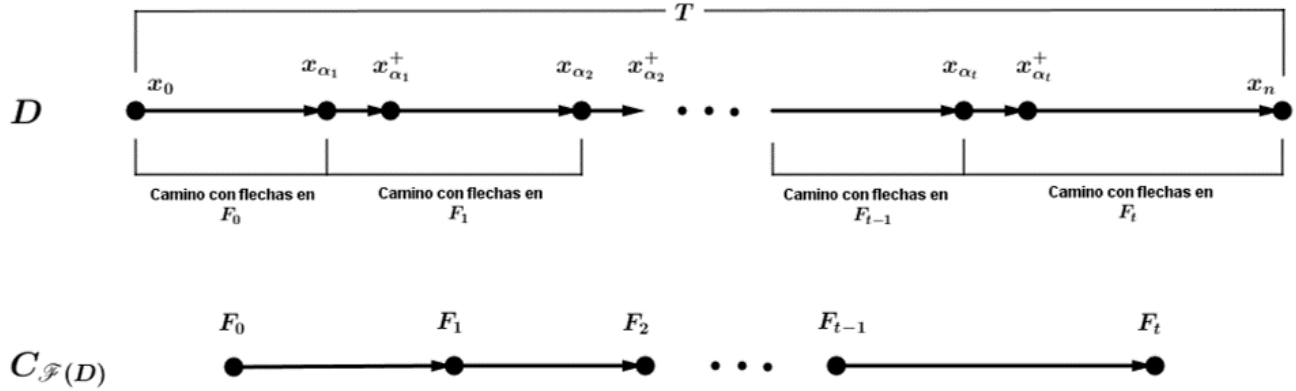


Figura 6.8: Representación del camino T en D y T' en $C_{\mathcal{F}}(D)$

Para encaminarnos a la conclusión final de esta demostración, consideremos los siguientes casos con respecto a la clase F_0 .

Caso 1. $F_0 \in S$.

En este primer caso, si $F_0 \neq F_t$, entonces por ser S un conjunto k -independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, se tiene que $l(T') \geq k$ y por lo mencionado en párrafos anteriores, concluimos que $l_H(T) \geq k + 1$. Ahora, si $F_0 = F_t$, entonces T' es un camino cerrado en $C_{\mathcal{F}}(D)$ que no es un lazo, pues $t \geq 1$. Así, por la hipótesis (a) de este teorema, $l(T') \geq k$ y nuevamente por lo dicho en los párrafos previos, $l_H(T) \geq k + 1$.

Caso 2. $F_0 \notin S$.

Por el lema 1.6.1, x_0 tiene al menos una in-flecha en D_1 , por lo que x_0 tiene una in-flecha en alguna clase perteneciente a S ; es decir, debe existir $F \in S$ tal que $F \in N_{\mathcal{F}}^-(x_0)$. Ya que por suposición $F_0 \notin S$, entonces $F \neq F_0$ y además se sigue de la definición de $C_{\mathcal{F}}(D)$ que $T'' = (F, F_0) \cup T'$ es un camino en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Nótese que por la definición de H -longitud y longitud usual, $l_H(T) = l(T'')$. Ahora, si $F \neq F_t$, entonces por ser S un conjunto k -independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, se tiene que $l(T'') \geq k$ y con ello, $l_H(T) \geq k$. Si $F = F_t$, entonces T'' es un camino cerrado en $C_{\mathcal{F}}(D)$ y no es un lazo, por lo que debe tener longitud al menos k y así $l_H(T) \geq k$.

De los casos anteriores podemos concluir que $l_H(T) \geq k$, por lo que N es un conjunto (k, H) -independiente por caminos en D .

Por lo anterior, N es un $(k, l + 1, H)$ -núcleo por caminos y, en particular, D tiene un $(k, l + 1, H)$ -núcleo por caminos. \square

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.2.4. *Sean $k \geq 2$, $l \geq 1$, D una digráfica fuertemente conexa y H -coloreada, y \mathcal{F} una partición de $A(D)$ que preservan caminos tal que $C_{\mathcal{F}}(D)$ tiene un (k, l) -núcleo, digamos S . Si las siguientes condiciones se satisfacen:*

- a) *Todo ciclo en $C_{\mathcal{F}}(D)$ es un lazo o tiene longitud al menos k .*
- b) *Para todo $x \in V(D)$ que satisface que $N_{\mathcal{F}}(x) \cap S \neq \emptyset$ y $N_{\mathcal{F}}(x) \cap N^+(S) \neq \emptyset$, se cumple que $N_{\mathcal{F}}^-(x) \subseteq S$.*

Entonces D tiene un $(k, l + 1, H)$ -núcleo por caminos.

Demostración. Si D es una H -digráfica, entonces para todo $k \geq 2$ y $l \geq 1$, D tiene un (k, l, H) -núcleo (lema 4.2.3), por lo que podemos suponer que D no es una H -digráfica. Así, por el lema 4.3.5, $C_{\mathcal{F}}(D)$ es una digráfica fuertemente conexa y no trivial, por lo que $C_{\mathcal{F}}(D)$ no tiene pozos. Por el teorema 6.2.3, D tiene un $(k, l + 1, H)$ -núcleo por caminos. \square

Encaminándonos a los últimos resultados de este capítulo, analizaremos las siguientes condiciones: dada una digráfica H -coloreada y una partición en H -clases que preserve caminos, digamos \mathcal{F} , ¿basta pedir condiciones de conexidad a las digráficas inducidas por las clases de \mathcal{F} para heredar la k -independencia en la digráfica de H -clases hacia (k, H) -independencia en D ? Los siguientes resultados son consecuencia de dicha pregunta.

Teorema 6.2.5. *Sean $k \geq 3$, $l \geq 1$, D una digráfica H -coloreada, \mathcal{F} una partición en H -clases que preserve caminos y S un (k, l) -núcleo de $C_{\mathcal{F}}(D)$. Si para todo $F \in S$, $D\langle S \rangle$ es unilateralmente conexa y no tiene pozos, entonces todo núcleo por trayectorias en $D\langle \cup S \rangle$ es un $(k - 1, l + 1, H)$ -núcleo por caminos en D .*

Demostración. Para simplificar notación, denotamos por D_1 la digráfica $D\langle \cup S \rangle$ y sea N un núcleo por trayectorias en D_1 . Dado que \mathcal{F} es una partición en H -clases de $A(D)$ que preserve caminos, entonces por el lema 6.1.4 se tiene que N es un conjunto $(l + 1, H)$ -absorbente por caminos, por lo que nos dedicaremos a demostrar que N es un conjunto $(k - 1, H)$ -independiente por caminos en D . Para ello, consideremos un x_0x_n -camino abierto en D , digamos $C = (x_0, \dots, x_n)$, tal que $\{x_0, x_n\} \subseteq N$. Antes de continuar con nuestra demostración, la siguiente afirmación será de utilidad.

Afirmación 1. $N_{\mathcal{F}}^-(x_0) \cap S \neq \emptyset$ y $N_{\mathcal{F}}^+(x_n) \cap S \neq \emptyset$.

Primero, para demostrar que $N_{\mathcal{F}}^-(x_0) \cap S \neq \emptyset$, basta con ver que como $x_0 \in N$, y de acuerdo con el lema 1.6.1, al menos una in-flecha de x_0 debe estar en D_1 , por lo que debe existir una clase $F' \in S$ a la que pertenece dicha in-flecha y con esto se tiene que $F' \in N_{\mathcal{F}}^-(x)$, lo que demuestra que $F' \in N_{\mathcal{F}}^-(x) \cap S$. Por otro lado, para mostrar que $N_{\mathcal{F}}^+(x_n) \cap S \neq \emptyset$, basta con ver que como $x_n \in N$, en particular, $x_n \in V(D_1)$, entonces alguna de las flechas incidentes en x debe estar en alguna clase de S , por lo que existe $F'' \in S$ tal que $x_n \in V(D\langle F'' \rangle)$. Pero por hipótesis, $D\langle F'' \rangle$ no tiene pozos, por lo que x_n debe tener al menos una ex-flecha en F'' . Así, $F'' \in N_{\mathcal{F}}^+(x_n)$, lo que concluye que $F'' \in N_{\mathcal{F}}^+(x_n) \cap S$, lo cual termina la demostración de la afirmación.

Ahora, por la afirmación anterior, consideremos $F' \in N_{\mathcal{F}}^-(x_0) \cap S$ y $F'' \in N_{\mathcal{F}}^+(x_n) \cap S$. Nótese que por el lema 4.3.7, podemos concluir que $F' \neq F''$. Además de lo anterior, tendremos la siguiente afirmación.

Afirmación 2. $O_H(C) \neq \emptyset$.

Procederemos por contradicción al suponer que $O_H(C) = \emptyset$, ello implica que C es un H -camino, por lo que debe existir $F \in \mathcal{F}$ tal que $A(C) \subseteq F$. Por la definición de $C_{\mathcal{F}}(D)$ y la elección de las clases F' , F y F'' , se tiene que (F', F) y (F, F'') son ambas flechas de $C_{\mathcal{F}}(D)$. Ya que $\{F', F''\} \subseteq S$ y S es un conjunto independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, tenemos que $F \neq F'$ y que $F \neq F''$, y también sabíamos que $F' \neq F''$. Así, (F', F, F'') es una trayectoria en $C_{\mathcal{F}}(D)$, lo cual no es posible pues S es un conjunto k -independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, con $k \geq 3$. De lo anterior, $O_H(C) \neq \emptyset$.

Por la afirmación 2, podemos suponer que $O_H(C) = \{\alpha_i : i \in \{1, \dots, t\}\}$, donde $t \geq 1$. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_t$. Ya que por definición \mathcal{F} es una partición de $A(D)$, consideremos, para todo $i \in \{1, \dots, t\}$, $F_i \in \mathcal{F}$ tal que $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}^+) \in F_i$ y $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que $(x_0, x_1) \in F_0$. Nótese que para todo $i \in \{1, \dots, t-1\}$, el camino $(x_{\alpha_i}, C, x_{\alpha_{i+1}})$ es un H -camino, por lo que todas sus flechas están en la misma clase, que de hecho debe ser la clase F_i . Lo mismo ocurre para el camino (x_0, C, x_{α_1}) , cuyas flechas deben estar en F_0 y con el camino (x_{α_t}, C, x_n) cuyas flechas deben estar en F_t . Ya que C es un camino en D , se seguiría que $C_0 = (F_0, F_1, \dots, F_t)$ es un camino en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Nótese que de la simple definición de longitud y H -longitud, $l_H(C) = l(C_0) + 1$.

Ahora bien, con las afirmaciones antes realizadas nos será más sencillo empezar la conclusión de esta demostración, la cual toma en cuenta los siguientes casos.

Caso 1. $F_0 \in S$.

Primero analizaremos el caso en que $F_t \in S$. Como $x_0 \in V(D\langle F_0 \rangle)$ y $x_n \in V(D\langle F_t \rangle)$, nuevamente por el lema 4.3.7, se tiene que $F_0 \neq F_t$, por lo que C_0 es un camino abierto en $C_{\mathcal{F}}(D)$ cuyos extremos están

en S . Se sigue del hecho de que S es un conjunto k -independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, obtenemos que $l(C_0) \geq k$, por lo que $l_H(C) \geq k - 1$.

Ahora, en el caso de que $F_t \notin S$, podemos considerar $C_1 = C_0 \cup (F_t, F'')$. El camino C_1 es un camino en $C_{\mathcal{F}}(D)$ tal que $l_H(C) = l(C_1)$. Ahora, como $\{F_0, F''\} \subseteq S$, $x_0 \in V(D\langle F_0 \rangle)$ y $x_n \in V(D\langle F'' \rangle)$, entonces nuevamente por el lema 4.3.7 se sigue que $F_0 \neq F''$. Así, como S es un conjunto k -independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, podemos concluir que $l(C_1) \geq k$, por lo que $l_H(C) \geq k$. Una representación del camino C_1 puede verse en la figura 6.9.

Caso 2. $F_0 \notin S$.

Primero analizaremos el caso en que $F_t \in S$. Para ello, consideremos $C_2 = (F', F_0) \cup C_0$. Nótese que C_2 es un camino en $C_{\mathcal{F}}(D)$ tal que $l_H(C) = l(C_2)$. Por otro lado, como $\{F', F_t\} \subseteq S$, $x_0 \in V(D\langle F' \rangle)$ y $x_n \in V(D\langle F_t \rangle)$, entonces una vez más por el lema 4.3.7, $F' \neq F_t$. Por lo anterior, C_2 es un camino abierto en $C_{\mathcal{F}}(D)$ cuyos extremos están en S , y por ser este conjunto k -independiente, entonces $l(C_2) \geq k$, lo que demuestra que $l_H(C) \geq k$. Una representación del camino C_2 puede verse en la figura 6.9.

Por último, analizaremos el caso en que $F_t \notin S$. Definimos $C_3 = (F', F_0) \cup C \cup (F_t, F'')$. Es sencillo notar que $l_H(C) + 1 = l(C)$. Por la elección de F' y F'' se tiene que $\{F', F''\} \subseteq S$, $x_0 \in V(D\langle F_0 \rangle)$ y $x_n \in V(D\langle F_t \rangle)$, podemos concluir que $F' \neq F''$, por lo que C_3 es un camino abierto en $C_{\mathcal{F}}(D)$ cuyos extremos están en S , lo que concluye que $l(C_3) \geq k$ y así $l_H(C) \geq k - 1$. Una representación del camino C_3 puede verse en la figura 6.9.

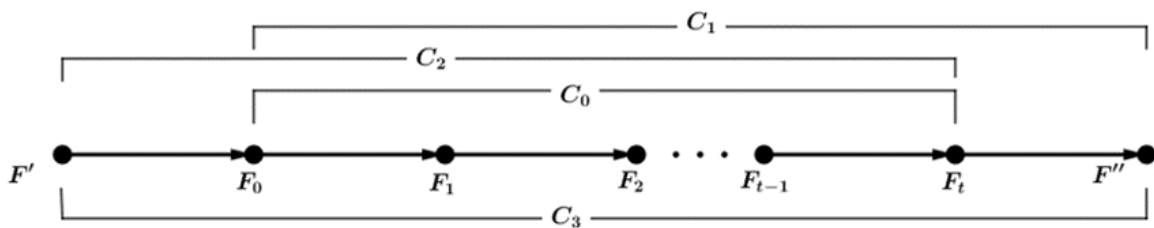


Figura 6.9: Representación de los caminos C_0 , C_1 , C_2 y C_3

De los casos anteriores, se puede concluir que N es un conjunto $(k - 1, H)$ -independiente por caminos en D y así N es un $(k - 1, l + 1, H)$ -núcleo por caminos en D . \square

Como consecuencia del anterior resultado, tenemos los siguientes dos corolarios.

Corolario 6.2.6. Sean D una digráfica H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases que preserva caminos tal que para todo $F \in \mathcal{F}$, $D\langle F \rangle$ es unilateralmente conexa y no tiene pozos. Si $C_{\mathcal{F}}(D)$ tiene un (k, l) -núcleo para algún $k \geq 3$ y $l \geq 1$, entonces D tiene un $(k - 1, l + 1, H)$ -núcleo por caminos.

Demostración. Este corolario es inmediato del teorema 6.2.5. \square

Corolario 6.2.7. Sean D una digráfica H -coloreada y \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$. Si para toda $F \in \mathcal{F}$, $D\langle F \rangle$ es fuertemente conexa, entonces para todo $k \geq 2$ y toda $l \geq k + 1$, D tiene un (k, l, H) -núcleo por caminos.

Demostración. Sean $k \geq 2$ y $l \geq k + 1$. Primero, notemos que por del hecho de que todas las clases en \mathcal{F} inducen digráficas fuertemente conexas, tenemos que \mathcal{F} preserva caminos (inciso (a) del lema 6.1.2) y para todo $F \in \mathcal{F}$, $D\langle F \rangle$ es unilateralmente conexa y no tiene pozos. Además nótese que por el inciso (b) del lema 6.1.2, $C_{\mathcal{F}}(D)$ es una digráfica simétrica. Ya que por hipótesis $k \geq 2$ y $l \geq k + 1$, en particular se tiene que $k + 1 \geq 3$ y que $l - 1 \geq (k + 1) - 1$. Se sigue del teorema 2.0.6 que $C_{\mathcal{F}}(D)$ tiene un $(k + 1, l - 1)$ -núcleo. Por el corolario 6.2.6, D tiene un (k, l, H) -núcleo. \square

Casi para concluir este capítulo, mostraremos el siguiente resultado referente a conexidad fuerte en las digráficas inducidas por las clases en una partición de H -clases.

Teorema 6.2.8. Sean $k \geq 2$, $l \geq 1$, D una digráfica H -coloreada, \mathcal{F} una partición en H -clases de $A(D)$ y S un (k, l, H) -núcleo de $C_{\mathcal{F}}(D)$. Si para toda $F \in \mathcal{F}(D)$ se cumple que $D\langle F \rangle$ es fuertemente conexa y tiene un vértice libre de obstrucciones en D , entonces D tiene un $(k + 1, l + 1, H)$ -núcleo por caminos.

Demostración. Primero supongamos que $S = \{F_1, \dots, F_r\}$ para algún $r \geq 1$ y denotamos por D_1 la digráfica $D\langle \cup S \rangle$. Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, sea z_i un vértice en $D\langle F_i \rangle$ que además sea libre de obstrucciones en D . Nótese que del inciso (c) del lema 6.1.2, $z_i \neq z_j$ si $i \neq j$. Ahora denotamos por N la colección de dichos vértices.

Afirmación 1. N es un núcleo por trayectorias en D_1 .

Para ver que N es un conjunto absorbente por trayectorias en D_1 , basta con tomar $w \in V(D_1) \setminus N$. Ya que $w \in V(D_1)$, al menos una de las flechas incidentes en w debe estar en una clase perteneciente al conjunto S , por lo que existe $j \in \{1, \dots, r\}$ tal que w_i es un vértice de $D\langle F_j \rangle$. Así, por ser $D\langle F_j \rangle$ una digráfica fuertemente conexa, se tiene que existe una wz_j -trayectoria en $D\langle F_j \rangle$, la cual llamaremos P . Con ello, P es una wN -trayectoria en D_1 , lo que demuestra que N es un conjunto absorbente por trayectorias en D_1 .

Ahora veremos que N es un conjunto independiente por trayectorias en D_1 . Procederemos por contradicción al suponer que existe una $z_i z_j$ -trayectoria en D_1 , con $i \neq j$, digamos T . Ya que z_i es un vértice libre de obstrucciones, todas las flechas incidentes en z_i deben pertenecer a una única clase, la cual debe ser F_i . En particular, la flecha inicial de T debe estar en F_i . Al razonar de manera análoga para el vértice z_j , se tiene que la flecha final de T debe estar en F_j . Así, la trayectoria T no tiene todas sus flechas en

una única clase de \mathcal{F} , por lo que T debe tener una obstrucción (inciso (e) del lema 4.3.2), lo cual no es posible, ya que D_1 debería ser una H -subdigráfica de D , como lo establece el lema 4.3.3. Por lo anterior, N es un conjunto independiente por trayectorias en D_1 .

Ahora veremos que N es un $(k+1, l+1, H)$ -núcleo por caminos en D . Una vez más, el lema 6.1.4 nos permitirá concluir que N es un conjunto $(l+1, H)$ -absorbente por caminos en D , pues \mathcal{F} es una partición en H -clases que preserva caminos (inciso (a) del lema 6.1.2) y S es un conjunto independiente y l -absorbente por en $C_{\mathcal{F}}(D)$.

Por lo anterior, sólo nos resta por demostrar que N es un conjunto $(k+1, H)$ -independiente por caminos en D . Consideremos un $z_i z_j$ -camino en D con $i \neq j$, digamos $C = (z_i = x_0, \dots, x_n = z_j)$, y nos enfocaremos a demostrar que $l_H(C) \geq k+1$. Para tener una mejor estructura de las ideas de esta demostración, la dividiremos en algunas afirmaciones.

Afirmación 2. $O_H(C) \neq \emptyset$.

Procederemos por contradicción al suponer que $O_H(C) = \emptyset$. Se sigue de lo anterior que C es un H -camino y con esto último, debe haber una clase de \mathcal{F} que contenga a todas las flechas de C . Sin embargo, como z_i es un vértice libre de obstrucciones en D , todas las flechas incidentes en z_i deben estar en una única clase, que de hecho debe ser F_i . En particular, la primera flecha de C debe estar en F_i y por lo previamente dicho, entonces todas las flechas de C deben estar en F_i . Así, la última flecha de C también debería estar en F_i , por lo que z_j debe ser un vértice de $D\langle F_i \rangle$, lo cual no es posible pues z es un vértice de $D\langle F_j \rangle$ y dichas digráficas son ajenas en vértices, como se mostró en el inciso (c) del lema 6.1.2. Así, $O_H(C) \neq \emptyset$.

Por la afirmación 2, podemos suponer que $O_H(C) = \{\alpha_i : i \in \{1, \dots, t\}\}$, donde $t \geq 1$. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_t$. Ya que por definición \mathcal{F} es una partición de $A(D)$, consideremos, para todo $i \in \{1, \dots, t\}$, $G_i \in \mathcal{F}$ tal que $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}^+) \in G_i$ y $G_0 \in \mathcal{F}$ tal que $(x_0, x_1) \in G_0$. Nótese que para todo $i \in \{1, \dots, t-1\}$, $T_i = (x_{\alpha_i}, C, x_{\alpha_{i+1}})$ es un H -camino en D , lo mismo que $T_0 = (x_0, C, x_{\alpha_1})$ y $T_t = (x_{\alpha_t}, C, x_n)$, por lo que para todo $i \in \{0, \dots, t\}$, todas las flechas de T_i están en la clase G_i . Ya que C es un camino en D , se seguiría que $C' = (G_0, G_1, \dots, G_t)$ es un camino en $C_{\mathcal{F}}(D)$. Nótese que $z_i \in V(D\langle G_0 \rangle)$, $z_j \in V(D\langle G_t \rangle)$ y de la simple definición de longitud y H -longitud, $l_H(C) = l(C') + 1$.

Por otro lado, como tanto z_i como z_j son libres de obstrucciones en D , entonces las flechas incidentes en cada uno de estos vértices están en una única clase de \mathcal{F} , por lo que $F_i = G_0$ y $F_j = G_t$, por ello C' es un camino abierto en $C_{\mathcal{F}}(D)$ cuyos extremos están en S . Así, debido a que S es un conjunto k -independiente en $C_{\mathcal{F}}(D)$, se tiene que $l(C') \geq k$. Lo que concluye que $l_H(C) \geq k+1$, como era deseado.

Por los argumentos anteriores, N es un $(k+1, l+1, H)$ -núcleo por caminos en D . □

Como consecuencia de resultado previo, tenemos los siguientes enunciados.

Teorema 6.2.9. *Si D es una digráfica H -coloreada y \mathcal{F} es una partición en H -clases tal que para todo $F \in \mathcal{F}$, $D\langle F \rangle$ es fuertemente conexa y tiene un vértice libre de obstrucciones en D , entonces para todo $k \geq 3$, D tiene un (k, H) -núcleo por caminos.*

Demostración. Dado que $C_{\mathcal{F}}(D)$ es una digráfica simétrica (inciso (b) del lema 6.1.2), para todo $k \geq 2$, $C_{\mathcal{F}}(D)$ tiene un k -núcleo (teorema 2.0.6). Por el teorema 6.2.8, para toda $k \geq 3$, D tiene un (k, H) -núcleo por caminos. \square

Corolario 6.2.10. *Sea D una digráfica m -coloreada tal que la digráfica inducida en D por cualquier clase monocromática es fuertemente conexa. Si para todo color representado en las flechas de D , digamos c , existe un vértice de D tal que $A(x)$ es monocromático de color c , entonces para todo $k \geq 3$, D tiene núcleo de k cambios propios por caminos.*

Demostración. Consideremos un patrón monocromático H cuyo conjunto de vértices son los colores representados en las flechas de D . Bajo este patrón, la partición \mathcal{F} que consta de las clases monocromáticas de D es una partición en H -clases. Nótese que para todo $F \in \mathcal{F}$, $D\langle F \rangle$ es fuertemente conexa y tiene un vértice libre de obstrucciones en D , por lo que para todo $k \geq 3$, D tiene (k, H) -núcleo por caminos, el cual debe ser un núcleo de k cambios propios por caminos. \square

Capítulo 7

(k, H) -núcleos en generalizaciones de torneos

En este último capítulo pretendemos abordar la existencia de (k, H) -núcleos en ciertas familias de digráficas que son generalizaciones de torneos. Esto tiene una doble intención. Por un lado, las generalizaciones de torneos son familias de digráficas que han ayudado a atacar diversos problemas bastante complicados en gráficas dirigidas, como por ejemplo, hamiltonicidad. Es por ello que empezaremos a trabajar con estas familias de digráficas en el tema que nos compete, que es el de los (k, l, H) -núcleos. Por otro lado, consideramos que a pesar de que encontrar condiciones suficientes para la existencia de (k, H) -núcleos en digráficas H -coloreadas en general puede ser muy complicado, deben existir ciertas familias de digráficas tales que, sin importar el patrón H ni la H -coloración que se les dé, estas siempre tendrán un (k, H) -núcleo. De hecho, las digráficas que nombramos \mathcal{H} -pancromáticas y que fueron estudiadas en el capítulo 3 muestran que para el caso $k = 2$, existen digráficas que sin importar el patrón H ni la H -coloración, siempre tendrán (k, H) -núcleo por trayectorias. Así, utilizaremos algunas digráficas que son generalizaciones de torneos para encontrar cierto tipo de (k, H) -pancromaticidad para k más general.

7.1. Resultados preliminares

En esta sección introduciremos los resultados que nos serán de utilidad para demostrar la existencia de (k, H) -núcleos en digráficas H -coloreadas. La gran mayoría de ellos están relacionados con una digráfica auxiliar que definiremos a continuación. Si D es una digráfica H -coloreada y $k \geq 1$, definimos la **(k, H) -cerradura de D** , denotada por $R_H^k(D)$, como la digráfica tal que $V(R_H^k(D)) = V(D)$ y $(u, v) \in A(R_H^k(D))$ si y sólo si existe una uv -trayectoria de H -longitud a lo más k en D . Nótese que esta digráfica es una extensión muy natural de la H -cerradura pero al considerar la H -longitud. Por otro lado, una relación natural entre los núcleos

y los (k, H) -núcleos por trayectorias en la $(k - 1, H)$ -cerradura es la siguiente:

Lema 7.1.1. *Sean D una digráfica H -coloreada y $k \geq 2$. D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias si y sólo si $R_H^{k-1}(D)$ tiene un núcleo.*

Demostración. Primero mostraremos la condición suficiente del enunciado lo que demuestra que si la digráfica D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias, digamos N , entonces N es un núcleo en $R_H^{k-1}(D)$.

Para mostrar que N es un conjunto absorbente en $R_H^{k-1}(D)$, consideremos $x \in V(R_H^{k-1}(D)) \setminus N$. Por definición de (k, H) -núcleo por trayectorias, existe una xN -trayectoria en D cuya H -longitud es a lo más $k - 1$, se sigue de la definición de $R_H^{k-1}(D)$ que existe una xN -flecha en $R_H^{k-1}(D)$. Ahora, para mostrar que N es un conjunto independiente en $R_H^{k-1}(D)$, procederemos por contradicción; es decir, supondremos que $(u, v) \in A(R_H^{k-1}(D))$ y $\{u, v\} \subseteq N$. Por definición de $R_H^{k-1}(D)$, existe una uv -trayectoria en D de H -longitud a lo más $k - 1$, lo cual no es posible pues N es un conjunto (k, H) -independiente por trayectorias en D . Así, N es un núcleo de $R_H^{k-1}(D)$.

Ahora para mostrar la parte suficiente del enunciado, veremos que si $R_H^{k-1}(D)$ tiene un núcleo, digamos N , entonces N es un (k, H) -núcleo por trayectorias en D .

Primero, para verificar que N es un conjunto $(k - 1, H)$ -absorbente por trayectorias en D , basta con ver que si $x \in V(D) \setminus N$, entonces necesariamente debe existir una xN -flecha en $R_H^{k-1}(D)$, pues N es absorbente en la $(k - 1, H)$ -cerradura. Se sigue de ello que debe existir una xN -trayectoria de H -longitud a lo más $k - 1$ en D . Por otro lado, para mostrar que N es un conjunto (k, H) -independiente por trayectorias en D , procederemos por contradicción; es decir, supondremos que existen dos vértices distintos de N , digamos u y v , unidos por una uv -trayectoria de H -longitud a lo más $k - 1$ en D . Así, por definición de $R_H^{k-1}(D)$, se tiene que $(u, v) \in A(R_H^{k-1}(D))$, lo cual contradice la independencia de N en $R_H^{k-1}(D)$. De lo anterior podemos concluir que N es un (k, H) -núcleo por trayectorias de D . \square

Por último, analizaremos el siguiente lema que nos permite garantizar la existencia de algunas flechas en la $(k - 1, H)$ -cerradura mediante condiciones sencillas de verificar en la digráfica D .

Lema 7.1.2. *Sean D una digráfica H -coloreada, $k \geq 2$ y $\{u, v\} \subseteq V(D)$. Los siguientes enunciados se satisfacen:*

- a) *Si existe un uv -camino de longitud a lo más $k - 1$ en D , entonces $(u, v) \in A(R_H^{k-1}(D))$.*
- b) *Toda flecha en D es una flecha en $R_H^{k-1}(D)$.*
- c) *Si u y v están en un camino cerrado de longitud a lo más k , entonces (u, v) es una flecha simétrica en $R_H^{k-1}(D)$.*

Demostración. a) Para este inciso, basta con ver que si existe un uv -camino de longitud a lo más $k - 1$ en D , en particular debe existir una uv -trayectoria de longitud a lo más $k - 1$. Se sigue del inciso (a) del lema 4.1.2 que dicha trayectoria tiene H -longitud a lo más $k - 1$, por lo que $(u, v) \in A(R_H^{k-1}(D))$.

b) Sea (u, v) una flecha en D . Como (u, v) es un uv -camino de longitud a lo más $k - 1$ en D , entonces por el inciso previo, $(u, v) \in A(R_H^{k-1}(D))$.

c) Dado que existe un camino cerrado de longitud a lo más k en D que contiene simultáneamente a u y v , entonces debe existir un uv -camino en D y un vu -camino en D , ambos de longitud estrictamente menor a k . Por el inciso (a) de este lema, (u, v) y (v, u) son flechas de $R_H^{k-1}(D)$.

□

Los enunciados anteriores ayudarán a simplificar varias de las demostraciones presentadas en la siguiente sección.

7.2. Existencia de (k, H) -núcleos en generalizaciones de torneos

Esta sección consta de resultados de existencia de (k, H) -núcleos por trayectorias en torneos, digráficas semicompletas, r -transitivas, r -casi transitivas, torneos multipartitos y torneos locales. Con la intención de presentar un trabajo más organizado, dividiremos esta sección en varias subsecciones.

7.2.1. Torneos y digráficas semicompletas

Para esta subsección, recordemos que una digráfica es **semicompleta** si entre cada par de vértices distintos hay al menos una flecha entre ellos. Si además dicha digráfica es asimétrica, diremos que D es un **torneo**. La familia de los torneos es sin lugar a dudas una de las familias más estudiadas en digráficas, no sólo por sus múltiples aplicaciones y resultados teóricos, también porque aportan una primera aproximación para resolver problemas bastante complicados de abordar en otras familias de digráficas. Con ello en mente, iniciaremos nuestro trabajo sobre (k, H) -núcleos por trayectorias en esta familia de digráficas.

Lema 7.2.1. *Si D es una digráfica semicompleta y H -coloreada, entonces para todo $k \geq 3$, D tiene un (k, H) -núcleo.*

Demostración. Para este resultado, basta con considerar un casi-núcleo de D , digamos N . Dado que D es semicompleta y N es un conjunto independiente, entonces N consta de un único vértice, digamos x , por lo que N debe ser un conjunto (k, H) -independiente por trayectorias. Por otro lado, como todo vértice de D está a distancia a lo más dos hacia x , entonces por el inciso (a) del lema 4.1.2 podemos concluir que todo vértice

en D , digamos z , tiene una zN -trayectoria de H -longitud a lo más dos en D , por lo que N es un conjunto $(k - 1, H)$ -absorbente. Así, N es un (k, H) -núcleo de D . \square

Es importante mencionar que en general no será posible garantizar la existencia de un $(2, H)$ -núcleo por trayectorias en una digráfica semicompleta y H -coloreada. Una forma de ver lo anterior es la siguiente. En [25] se mostró que para todo $n \geq 6$ existe un torneo T_n que está 4-coloreado pero no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Por ejemplo, notemos que el torneo 4-coloreado mostrado en la figura 7.1 satisface que para todo $i \in \{1, \dots, 6\}$, no existe una $v_{i+1}v_i$ -trayectoria monocromática (los índices se consideran módulo 6), por lo que dicho torneo no puede tener un núcleo por trayectorias monocromáticas.

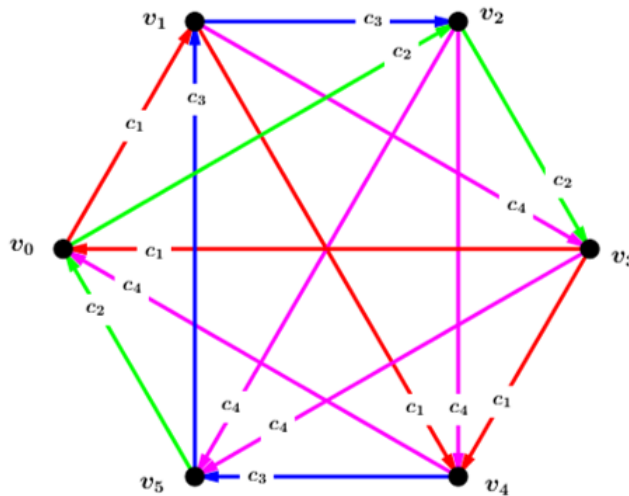


Figura 7.1: Ejemplo de T_6

Con ello en mente, si consideramos un patrón monocromático H cuyos vértices son los colores representados en T_n , entonces T_n no puede tener un $(2, H)$ -núcleo por trayectorias, pues éste debería ser un núcleo por trayectorias monocromáticas. Así, en general no es posible mejorar las conclusiones en el teorema previo. Sin embargo, al agregar una sencilla hipótesis sí será posible garantizar la existencia de $(2, H)$ -núcleos en digráficas semicompletas.

Teorema 7.2.2. Sean D una digráfica semicompleta y H -coloreada en la que todo ciclo de longitud 3 es un H -ciclo. Si $k \geq 2$, entonces D tiene un (k, H) -núcleo.

Demostración. Por el lema 7.2.1, basta con analizar el caso $k = 2$. Nuevamente, consideremos un casi-núcleo de D , digamos N , y mostraremos que N es un H -núcleo de D . Claramente, como N es independiente y D una digráfica semicompleta, entonces N consta de un único vértice, digamos x , se sigue de ello que N es un conjunto independiente por H -trayectorias. Ahora sólo resta por mostrar que N es un conjunto absorbente por H -trayectorias. Para ello, tomemos $w \in V(D) \setminus N$. Si $(w, x) \in A(D)$, entonces (w, x) es una wN - H -trayectoria. Si $(w, x) \notin A(D)$, entonces existe $z \in V(D)$ tal que (w, z, x) es una trayectoria en D . Además,

por ser D semicompleta y no existir la flecha (w, x) , se sigue que (w, z, x, w) es un ciclo en D , el cual es un H -ciclo. Así, (w, z, x) es la wN - H -trayectoria deseada. \square

Gracias a los resultados previos, tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 7.2.3. *Si D es un torneo H -coloreado y $k \geq 3$, entonces D tiene un (k, H) -núcleo.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del lema 7.2.1. \square

Corolario 7.2.4. *Si D es un torneo H -coloreado y todo ciclo de longitud tres es un H -ciclo, entonces para todo $k \geq 2$, D tiene un (k, H) -núcleo.*

Demostración. Se sigue del teorema 7.2.2. \square

Corolario 7.2.5. [20] *Si D es un torneo m -coloreado tal que todo ciclo de longitud tres es monocromático, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Demostración. Para esta demostración, consideremos un patrón monocromático H cuyos vértices sean los colores representados en $A(D)$. Bajo esta coloración, D es un torneo H -coloreado en el que todo ciclo de longitud tres es un H -ciclo, por lo que debe tener un H -núcleo, el cual es un núcleo por trayectorias monocromáticas. \square

Corolario 7.2.6. *Si D es un torneo m -coloreado en tal que todo ciclo de longitud tres es propiamente coloreado, entonces D tiene un núcleo por trayectorias alternantes.*

Demostración. Para esta demostración, consideremos un patrón alternante H cuyos vértices sean los colores representados en $A(D)$. Bajo esta coloración, D es un torneo H -coloreado en el que todo ciclo de longitud tres es un H -ciclo, por lo que debe tener un H -núcleo, el cual es un núcleo por trayectorias alternantes. \square

7.2.2. Digráficas r -transitivas

Dada una digráfica D y $r \geq 2$, diremos que D es **r -transitiva** si para cualquier par de vértices de D , digamos u y v , la existencia de una uv -trayectoria de longitud r implica que $(u, v) \in V(D)$. Este tipo de digráficas han sido ampliamente estudiadas, como puede verificarse en [5], [36], [34] y [50], debido a sus múltiples aplicaciones y que son un caso general de las digráficas transitivas cuando $r = 2$. El resultado que usaremos para esta subsección será el siguiente:

Lema 7.2.7. [37] *Sean D una digráfica r -transitiva y $\{u, v\} \subseteq V(D)$. Si existe una uv -trayectoria en D , entonces $d_D(u, v) \leq r - 1$.*

Gracias al resultado anterior, será sencillo verificar el siguiente resultado:

Teorema 7.2.8. *Sea D una digráfica r -transitiva ($r \geq 2$) y H -coloreada. Para todo $l \geq r - 1$ y todo $k \geq 2$, D tiene un (k, l, H) -núcleo.*

Demostración. Sean N un núcleo por trayectorias en D , $l \geq r$ y $k \geq 2$. Dado que N es independiente por trayectorias, entonces N es (k, H) -independiente. Por otro lado, para verificar que N es (l, H) -absorbente, consideremos $x \in V(D) \setminus N$. Ya que existe una xN -trayectoria en D , se sigue del lema 7.2.7 que debe existir una xN -trayectoria de longitud a lo más $r - 1$, digamos T , en particular, dicha trayectoria debe tener longitud a lo más l . Sin embargo, por el inciso (a) del lema 4.1.2, se sigue que T tiene H -longitud a lo más l , lo que demuestra que N es (l, H) -absorbente. Por lo anterior, N es un (k, l, H) -núcleo. \square

Como consecuencia, tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 7.2.9. *Si D es una digráfica r -transitiva ($r \geq 2$) y H -coloreada, entonces para todo $k \geq r$, D tiene un (k, H) -núcleo.*

Demostración. Esta demostración es inmediata del teorema 7.2.8 cuando $k = l + 1$. \square

Corolario 7.2.10. *Si D es una digráfica transitiva y H -coloreada, entonces para todo $k \geq 2$, D tiene un (k, H) -núcleo.*

Demostración. Nuevamente, el corolario es inmediato del teorema 7.2.8 en el caso particular $r = 2$. \square

Corolario 7.2.11. [37] *Si D es una digráfica r -transitiva ($r \geq 2$), entonces para todo $k \geq r$, D tiene un k -núcleo.*

Demostración. Sea $k \geq r$ y consideremos un patrón vacío de orden $|A(D)|$, digamos H , y una H -coloración de $A(D)$ que asigna a cada par de flechas distintas de D un color diferente. Claramente, D es una digráfica H -coloreada y por el teorema 7.2.8, D tiene un (k, H) -núcleo, el cual, por la elección del patrón, debe ser un k -núcleo de D . \square

7.2.3. Digráficas casi-transitivas

Las digráficas casi-transitivas surgen como una generalización de las digráficas transitivas. Recordemos que una digráfica D es casi-transitiva si para todo trío de vértices distintos, digamos u , v y w , si (u, v) y (v, w) son flechas de D , entonces u y w son adyacentes. Esta familia de digráficas fue introducidas en [35] como una consecuencia de su relación con gráficas de comparabilidad y es una de las familias de digráficas más estudiadas, posiblemente debido a un teorema de caracterización propuesto por Bang-Jensen y Huang en [6]. La propiedad de esta familia que nosotros utilizaremos será la siguiente:

Lema 7.2.12. [4] Sean D una digráfica casi-transitiva y $\{u, v\} \subseteq V(D)$, con $u \neq v$, tales que existe una uv -trayectoria en D . Si u y v no son adyacentes en D , entonces existe $\{x, z\} \subseteq V(D) \setminus \{u, v\}$ tal que (u, x) , (x, z) , (z, v) , (z, u) y (v, x) son flechas de D .

Al aplicar la propiedad previa en el caso de digráficas casi-transitivas y H -coloreadas, se tiene el siguiente resultado:

Lema 7.2.13. Sean D una digráfica casi-transitiva y H -coloreada, $\{u, v\} \subseteq V(D)$ con $u \neq v$ y $k \geq 4$. Si existe un uv -camino en D , entonces: u y v son adyacentes en D o (u, v) es una flecha simétrica en $R_H^{k-1}(D)$.

Demostración. Primero notemos que si (u, v) o (v, u) es una flecha de D , entonces no hay nada que demostrar, por lo que supondremos que u y v no son adyacentes en D . Se sigue del lema 7.2.12 previamente enunciado que existe $\{x, z\} \subseteq V(D) \setminus \{u, v\}$ tal que (u, x) , (x, z) , (z, v) , (z, u) y (v, x) son flechas de D . Así, tanto (u, x, z, v) como (v, x, z, u) son trayectorias en D de longitud tres, las cuales deben tener H -longitud a lo más tres y así por la definición de $(k-1, H)$ -cerradura, tanto (u, v) como (v, u) son flechas de $R_H^{k-1}(D)$. \square

Ahora, gracias al lema anterior, podemos demostrar con mayor facilidad el siguiente teorema.

Teorema 7.2.14. Si D es una digráfica casi-transitiva y H -coloreada, entonces para todo $k \geq 4$, D tiene un (k, H) -núcleo.

Demostración. Primero mostraremos que todo ciclo en $R_H^{k-1}(D)$ tiene una flecha simétrica, luego se seguirá de ello que $R_H^{k-1}(D)$ tiene un núcleo (por el teorema 2.0.3) y, finalmente, al aplicar el lema 7.1.1 habremos terminado.

Procederemos por contradicción al suponer que $R_H^{k-1}(D)$ tiene un ciclo tal que ninguna de sus flechas es simétrica en $R_H^{k-1}(D)$, digamos $C = (u_0, \dots, u_n)$. Claramente, $n \geq 3$. Primero veremos que, de hecho, C también es un ciclo en D . Por el lema 7.2.13 y al tener en cuenta que (u_i, u_{i+1}) no es una flecha simétrica en $R_H^{k-1}(D)$, pero existe un $u_i u_{i+1}$ -camino en D , se tendría que para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, u_i y u_{i+1} son adyacentes en D . Sin embargo, como C no tiene flechas simétricas en $R_H^{k-1}(D)$, en particular no es posible que $(u_{i+1}, u_i) \in A(D)$ para algún $i \in \{0, \dots, n-1\}$, pues en caso contrario, dicha flecha debería estar también en $R_H^{k-1}(D)$ como lo demostramos en el lema 7.2.13 (b), lo que concluye que para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $(u_i, u_{i+1}) \in A(D)$, con lo cual, C también es un ciclo en D .

Ahora, definimos $q = \max\{i \in \{1, \dots, n-1\} : (u_0, u_i) \in A(D)\}$. Nótese que $q \leq n-2$, pues en caso contrario, (u_{n-1}, u_0) sería una flecha simétrica en D y, en particular, sería una flecha simétrica en $R_H^{k-1}(D)$, lo cual no es posible. Así, (u_0, u_q, u_{q+1}) es una trayectoria en D y dado que D es casi-transitiva, entonces $(u_0, u_{q+1}) \in A(D)$ o $(u_{q+1}, u_0) \in A(D)$. Sin embargo, por la elección de q , podemos deducir que (u_{q+1}, u_0) es un flecha en $A(D)$.

Con lo anterior, no es difícil ver que (u_{q+1}, u_0, u_q) es una trayectoria de longitud 2 en D , por lo que debe tener H -longitud a lo más 2. Se sigue de ello que $(u_{q+1}, u_q) \in A(R_H^{k-1}(D))$, lo cual contradice nuestra suposición sobre C .

Por lo tanto, todo ciclo de $R_H^{k-1}(D)$ tiene una flecha simétrica. Por el teorema 2.0.3, $R_H^{k-1}(D)$ tiene núcleo y por el lema 7.1.1 podemos afirmar que D tiene (k, H) -núcleo. \square

Como consecuencia de lo anterior, se tiene que:

Corolario 7.2.15. [21] *Si D es una digráfica casi-transitiva, entonces para todo $k \geq 4$, D tiene un k -núcleo.*

Demostración. Sean $k \geq 4$ y H un patrón vacío de orden $|A(D)|$. Si consideramos la H -coloración de D en la que cada par de flechas distintas de D tienen asignado distinto color, entonces por el teorema 7.2.14 podemos concluir que D tiene un (k, H) -núcleo, el cual debe ser un k -núcleo. \square

7.2.4. Digráficas 3-casi-transitivas

Una digráfica D es **3-casi-transitiva** si para todo par de vértices distintos de D , digamos u y v , la existencia de una uv -trayectoria de longitud 3 implica que $(u, v) \in A(D)$ o $(v, u) \in A(D)$. Al igual que en las subsecciones previas, es posible explotar la estructura de este tipo de digráficas en términos de H -coloraciones. Para ello, utilizaremos el siguiente resultado:

Lema 7.2.16. [37] *Sean D una digráfica 3-casi-transitiva y $\{u, v\} \subseteq V(D)$ con $u \neq v$. Si existe un uv -camino en D , entonces los siguientes enunciados se satisfacen:*

- a) *Si $d_D(u, v) = 3$ o $d_D(u, v) \geq 5$, entonces $d_D(v, u) = 1$.*
- b) *Si $d_D(u, v) = 4$, entonces $d_D(v, u) \leq 4$.*

Gracias al lema anterior, podemos deducir el siguiente corolario:

Corolario 7.2.17. *Sean D una digráfica 3-casi-transitiva y H -coloreada, $k \geq 5$ y $(u, v) \in A(R_H^{k-1}(D))$. Si (u, v) es una flecha asimétrica en $R_H^{k-1}(D)$, entonces $d_D(u, v) \leq 2$.*

Demostración. Procederemos por contradicción al suponer que $d_D(u, v) \geq 3$. Se sigue del lema 7.2.16 que debe existir una vu -trayectoria de longitud a lo más 4 en D , la cual debe tener H -longitud a lo más cuatro. Así $(v, u) \in A(R_H^{k-1}(D))$, lo cual no es posible pues (u, v) es asimétrica en $R_H^{k-1}(D)$. Así, $d_D(u, v) \leq 2$. \square

Ahora podemos demostrar de manera más sencilla el siguiente resultado.

Teorema 7.2.18. *Si D es una digráfica 3-casi-transitiva y H -coloreada, entonces para todo $k \geq 5$, D tiene un (k, H) -núcleo.*

Demostración. Primero mostraremos que todo ciclo en $R_H^{k-1}(D)$ tiene una flecha simétrica, luego por el teorema de Duchet (teorema 2.0.3) podremos afirmar que $R_H^{k-1}(D)$ tiene núcleo y, finalmente, por el lema 7.1.1 se concluirá que D tiene un (k, H) -núcleo.

Procederemos por contradicción al suponer que $R_H^{k-1}(D)$ tiene un ciclo sin ninguna flecha simétrica en $R_H^{k-1}(D)$, digamos $C = (u_0, \dots, u_n)$. Es claro que bajo estas condiciones, $n \geq 3$.

Ahora, para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$, consideremos una $u_i u_{i+1}$ -geodésica, a la que llamaremos W_i (los índices se consideran módulo n). Gracias al corolario 7.2.17, podemos deducir que para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $l(W_i) \leq 2$. Sea C' la concatenación de las trayectorias W_i y supongamos que $C' = (x_0, \dots, x_l)$. Notemos que C' es un camino cerrado en D , pues $x_0 = u_0$ y $u_0 = x_l$. En lo consecuente, dividiremos la demostración en varias afirmaciones, ello con la intención de simplificar las ideas de la demostración.

Afirmación 1. Para todo $i \in \{l-3, l-2, l-1, l\}$, $(u_1, x_i) \notin A(D)$.

Procederemos por contradicción al suponer que existe $i \in \{l-3, l-2, l-1, l\}$ tal que $(u_1, x_i) \in A(D)$. Si $i = l$, entonces (u_1, u_0) es una flecha de D , pues $x_l = u_0$, por lo que dicha flecha es también una flecha en $R_H^{k-1}(D)$, lo cual no es posible pues (u_0, u_1) es asimétrica en $R_H^{k-1}(D)$. Así, $i \neq l$, en cuyo caso, $(u_1, x_i) \cup (x_i, C', x_l)$ es un $u_1 u_0$ -camino en D de longitud a lo más cuatro, lo que implica que dicho camino tiene H -longitud a lo más cuatro y por ello, $(u_1, u_0) \in A(R_H^{k-1}(D))$, lo cual contradice la elección de C , lo que demuestra la afirmación.

Por otro lado, dado que $u_1 \in V(C')$, entonces u_1 debe tener al menos un ex-vecino en C' y ello nos permite definir $q = \max\{i \in \{1, \dots, l\} : (u_1, x_i) \in A(D)\}$. Nótese que u_1 no puede tener ex-vecinos de la forma x_t con $t \in \{q+1, \dots, l\}$. Con respecto a q , las siguientes observaciones serán de utilidad:

1. $q \leq l-4$.

Esto se deduce de la afirmación 1.

2. Para todo $t \in \{q+1, q+2, q+3, q+4\}$, $x_q \neq x_t$.

Esto se deduce de la definición de q .

3. Para todo $t \in \{q+1, q+2, q+3, q+4\}$, $u_1 \neq x_t$.

Para este punto, notamos que todo vértice en C' tiene un ex-vecino en C' , por lo que si $q < l-4$, entonces se sigue de la definición de q que para todo $t \in \{q+1, q+2, q+3, q+4\}$, $u_1 \neq x_t$. Por otro lado, si $q = l-4$; es decir, $x_{q+4} = x_l$, entonces se sigue que $u_1 \neq x_i$ para todo $i \in \{q, q+1, q+2, q+3\}$, pues todo estos vértices tienen un ex-vecino en C' y, como $u_0 = x_l$, también debe ser que $u_1 \neq x_l$.

Se sigue de (2) y (3) que $(u_1, x_q, x_{q+1}, x_{q+2})$ es una trayectoria en D y, por ser D una digráfica 3-casi-transitiva, entonces $(u_1, x_{q+2}) \in A(D)$ o $(x_{q+2}, u_1) \in A(D)$, pero debido a la elección de q , podemos concluir que $(x_{q+2}, u_1) \in A(D)$.

Afirmación 2. Existe $t \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $x_{q+1} = u_t$ y $x_{q+3} = u_{t+1}$.

Primero mostraremos que (x_q, x_{q+1}, x_{q+2}) no tiene vértices consecutivos del camino C . Procederemos por contradicción al suponer que (x_q, x_{q+1}, x_{q+2}) tiene dos vértices consecutivos de C , a los que llamaremos u_r y u_{r+1} . Ya que $(u_1, x_q, x_{q+1}, x_{q+2}, u_1)$ es un ciclo en D de longitud cuatro, podemos deducir del inciso (c) del lema 7.1.2 que (u_r, u_{r+1}) es una flecha simétrica en $R_H^{k-1}(D)$, lo cual no es posible por la elección de C . Así, (x_q, x_{q+1}, x_{q+2}) no tiene vértices consecutivos del camino C .

Para continuar con la demostración de la afirmación 2, recordemos que C' es la unión de las geodésicas W_i , las cuales son de longitud a lo más dos, por lo que el camino (x_q, x_{q+1}, x_{q+2}) necesariamente tiene al menos uno de los extremos de alguna geodésica W_i , al que llamaremos u_t . Sin embargo, como mostramos en el párrafo anterior, (x_q, x_{q+1}, x_{q+2}) no puede tener al vértice u_{t+1} , se sigue de ello que $u_t = x_{q+1}$ y que $u_{t+1} = x_{q+3}$, lo que demuestra la afirmación (véase la figura 7.2).

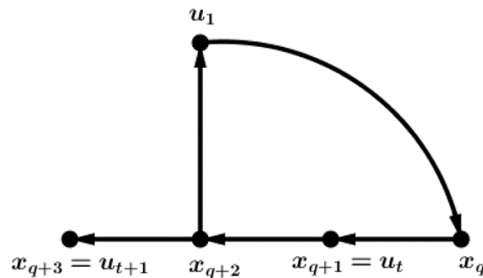


Figura 7.2: Fragmento de la demostración

Ahora, para obtener la contradicción final de este teorema, mostraremos que $T = (x_q, x_{q+1}, \dots, x_{q+4})$ es una trayectoria. Para ello bastará ver que ningún vértice de la sucesión T coincide con ninguno de los vértices siguientes en la sucesión T .

Recordemos que por (2), $x_q \notin \{x_{q+1}, x_{q+2}, x_{q+3}, x_{q+4}\}$.

Para mostrar que $x_{q+1} \notin \{x_{q+2}, x_{q+3}, x_{q+4}\}$, basta con ver que x_{q+1} y x_{q+2} son adyacentes, por lo que deben ser distintos. Como $x_{q+1} = u_t$ y $x_{q+3} = u_{t+1}$ (por la afirmación 2), entonces $x_{q+1} \neq x_{q+3}$. Y por último, si $x_{q+1} = x_{q+4}$, entonces $(x_{q+3}, x_{q+1}) \in A(D)$; es decir, $(u_{t+1}, u_t) \in A(D)$, lo cual implicaría que (u_{t+1}, u_t) está en $R_H^{k-1}(D)$, lo cual no es posible por la elección de C , lo que concluye que $x_{q+1} \neq x_{q+4}$. Así, $x_{q+1} \notin \{x_{q+2}, x_{q+3}, x_{q+4}\}$.

Ahora, para mostrar que $x_{q+2} \notin \{x_{q+3}, x_{q+4}\}$, basta con ver que por ser x_{q+2} y x_{q+3} adyacentes, entonces deben ser distintos. Y si $x_{q+2} = x_{q+4}$, se tendría que $(u_{t+1}, x_{q+2}, u_1, x_q, u_t)$ es un $u_{t+1}u_t$ -camino de longitud

cuatro en D , por lo que por el inciso (a) del lema 7.1.2 se tendría que $(u_{t+1}, u_t) \in A(R_H^{k-1}(D))$, lo cual no es posible por la elección de C , lo que concluye que $x_{q+2} \neq x_{q+4}$. Así, $x_{q+2} \notin \{x_{q+3}, x_{q+4}\}$.

Por último, $x_{q+3} \notin \{x_{q+4}\}$ pues x_{q+3} y x_{q+4} son adyacentes en D .

Con los argumentos anteriores, podemos deducir que $(x_q, x_{q+1}, \dots, x_{q+4})$ es una trayectoria en D .

Ya que D es una digráfica 3-casi-transitiva, entonces $(x_q, x_{q+3}) \in A(D)$ o $(x_{q+3}, x_q) \in A(D)$. Si (x_{q+3}, x_q) está en $A(D)$, entonces (x_{q+3}, x_q, x_{q+1}) es una $u_{t+1}u_t$ -trayectoria en D de longitud a lo más $k-1$, por lo que $(u_{t+1}, u_t) \in A(R_H^{k-1}(D))$, lo cual no es posible. Con ello, $(x_q, x_{q+3}) \in A(D)$.

Nuevamente, al usar que D es 3-casi-transitiva y que $(u_1, x_q, x_{q+3}, x_{q+4})$ es una trayectoria en D , se tiene que $(u_1, x_{q+4}) \in A(D)$ o que $(x_{q+4}, u_1) \in A(D)$. Pero debido a la elección de q , concluimos que $(x_{q+4}, u_1) \in A(D)$. Con esto último en mente, se deduce que $(u_1, x_q, x_{q+3}, x_{q+4}, u_1)$ es un ciclo de longitud 4 en D , el cual contiene tanto a u_t como a u_{t+1} , lo cual implicaría, por el inciso (c) del lema 7.1.2 que (u_t, u_{t+1}) es una flecha simétrica en $R_H^{k-1}(D)$, lo cual contradice la elección de C (véase la figura 7.3).

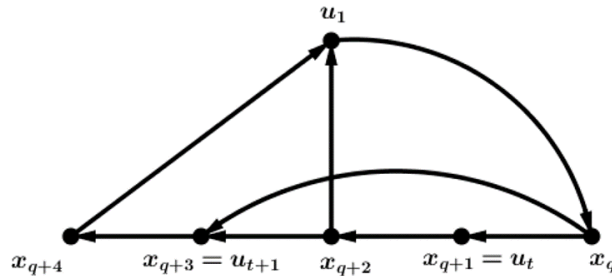


Figura 7.3: Fragmento de la demostración

Por lo tanto, todo ciclo en $R_H^{k-1}(D)$ tiene una flecha simétrica. Se sigue del teorema 2.0.3 que $R_H^{k-1}(D)$ tiene núcleo y por el lema 7.1.1 se seguiría que D tiene un (k, H) -núcleo. \square

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente. Un resultado similar fue demostrado en [37], pero para k -núcleos con $k \geq 4$.

Corolario 7.2.19. *Si D es una digráfica 3-casi-transitiva, entonces D tiene un k -núcleo para todo $k \geq 5$.*

Demostración. Sean $k \geq 5$, H un patrón vacío de orden $|A(D)|$ y consideremos una H -coloración de $A(D)$ en la que a cada par de flechas distintas de D se les asigna un color distinto. Por el teorema 7.2.18, D tiene un (k, H) -núcleo, el cual debe ser un k -núcleo. \square

7.2.5. Digráficas r -casi-transitivas

Una generalización natural de las digráficas casi-transitivas y 3-casi-transitivas es el de las digráficas r -casi-transitivas. Para $r \geq 2$, una digráfica D es r -casi-transitiva si para todo par de vértices distintos de D ,

digamos u y v , la existencia de una uv -trayectoria de longitud r implica que u y v son adyacentes. Es sencillo ver que para el caso $r = 2$, una digráfica r -casi-transitiva es simplemente casi-transitiva. Con esta definición en mente, podemos analizar los teoremas 7.2.14 y 7.2.18, vistos en las subsecciones previas, y formular la siguiente conjetura:

Conjetura 7.2.20. *Si D es una digráfica H -coloreada y r -casi-transitiva, entonces para toda $k \geq r + 2$, D tiene un (k, H) -núcleo.*

Actualmente, con el trabajo que realizamos y los métodos empleados en los teoremas de las dos subsecciones previas, no es posible determinar si esta conjetura es verdadera o falsa para digráficas H -coloreadas. Sin embargo, se mostró en [37] que toda digráfica r -casi-transitiva ($r \geq 2$ y r par) tiene k -núcleo para toda $k \geq r + 2$. Nosotros no abordaremos la resolución de dicha conjetura, sin embargo, sí podremos aportar un resultado en digráficas r -casi-transitivas y H -coloreadas, pero bajo una hipótesis extra. Para ello, usaremos el siguiente lema:

Lema 7.2.21. *Sean $r \geq 2$, D una digráfica r -casi-transitiva y H -coloreada tal que todo ciclo en D con longitud $r + 1$ es un H -ciclo y $\{u, v\} \subseteq V(D)$. Si $d_D(u, v) \geq r$ y T es una uv -geodésica, entonces T es una H -trayectoria.*

Demostración. Supongamos que $T = (u = x_0, \dots, x_n = v)$. Si $n = r$, se seguiría del hecho de que D es r -casi-transitiva que $(u, v) \in A(D)$ o $(v, u) \in A(D)$, sin embargo, como T es una geodésica y $r \geq 2$, no es posible que $(u, v) \in A(D)$. Así, $T \cup (v, u)$ es un ciclo en D de longitud $r + 1$ el cual, por hipótesis, es un H -ciclo. En particular, T debe ser una H -trayectoria.

Ahora supondremos que $n > r$. Para mostrar que T es una H -trayectoria, mostraremos que T no tiene obstrucciones. Consideremos $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ y los siguientes casos sobre i .

Caso 1. $i \in \{1, \dots, n - r\}$.

En este caso, notemos que $(x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+r-1})$ es una trayectoria de longitud r en D , por lo que x_{i-1} y x_{i+r-1} deben ser adyacentes. Sin embargo, como T es una geodésica, no es posible que (x_{i-1}, x_{i+r-1}) sea una flecha de D , por lo que (x_{i+r-1}, x_{i-1}) es una flecha en D , en particular, $(x_{i-1}, \dots, x_{i+r-1}, x_{i-1})$ es un ciclo de longitud $r + 1$ en D , el cual es un H -ciclo por hipótesis. Así, podemos concluir que no hay obstrucción en i .

Caso 2. $i \in \{n - r + 1, \dots, n\}$.

En este caso, notamos que $(x_{n-r}, x_{n-r+1}, \dots, x_n)$ es una trayectoria de longitud r en D que además contiene el vértice x_i . Como D es r -casi-transitiva, entonces x_{n-r} y x_n deben ser adyacentes. Sin embargo, como T es una geodésica, no es posible que (x_{n-r}, x_n) sea una flecha de D , por lo que (x_n, x_{n-r}) es

una flecha de D y así $(x_{n-r}, \dots, x_n, x_{n-r})$ es un ciclo de longitud $r + 1$ en D , el cual es un H -ciclo por hipótesis y, en particular, i no es una obstrucción de T .

Gracias a lo aquí mostrado, podemos concluir que T es una H -trayectoria. □

Ahora, con el resultado anterior, será sencillo mostrar el teorema principal de esta subsección.

Teorema 7.2.22. *Sean $r \geq 2$ y D una digráfica r -casi-transitiva. Si todos los ciclos de longitud $r + 1$ en D son H -ciclos, entonces para todo $k \geq r$, D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias.*

Demostración. Para esta demostración, primero veremos que $R_H^{k-1}(D)$ es transitiva. Luego, por el teorema 2.0.4, $R_H^{k-1}(D)$ debe tener núcleo, lo que concluye que D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias.

Consideremos tres vértices distintos en D , digamos u , v y w tales que (u, v) y (v, w) son flechas en $R_H^{k-1}(D)$. En particular se tiene que existe un uv -camino en D y un vw -camino en D , por lo que debe existir un uw -camino en D . Así consideremos una uw -geodésica, digamos T . Si $l(T) \leq k - 1$, entonces se sigue del inciso (a) del lema 7.1.2 que (u, w) es una flecha de $R_H^{k-1}(D)$. Si $l(T) \geq k$, entonces por hipótesis sobre r se tiene que $l(T) \geq r$ y gracias al lema 7.2.21 se concluye que T es una H -trayectoria. En particular podemos deducir que $(u, w) \in A(R_H^{k-1}(D))$.

Con lo antes mostrado, $R_H^{k-1}(D)$ es una digráfica transitiva, la cual debe tener núcleo y con ello, D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias. □

Algunas consecuencias del enunciado anterior son las siguientes:

Corolario 7.2.23. *Si D es una digráfica r -casi-transitiva ($r \geq 2$) sin ciclos de longitud $r + 1$, entonces para todo $k \geq r$, D tiene k -núcleo.*

Demostración. Consideremos un patrón vacío H y una H -coloración de D en la que cada par de flechas tiene asignado distinto color. Por hipótesis en D , todo ciclo de longitud $r + 1$ es un H -ciclo y se sigue del teorema 7.2.22 que D tiene un (k, H) -núcleo, el cual es un k -núcleo. □

Corolario 7.2.24. *Si D una digráfica casi-transitiva y H -coloreada en la que todo ciclo de longitud tres es un H -ciclo, entonces para todo $k \geq 2$, D tiene un (k, H) -núcleo.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del teorema 7.2.22 en el caso particular $r = 2$. □

Corolario 7.2.25. *Si D es una digráfica casi-transitiva y m -coloreada en la que todo ciclo de longitud 3 es monocromático, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.*

Demostración. Consideremos un patrón monocromático H cuyos vértices son los colores representados en $A(D)$. Como todo ciclo de longitud 3 en D es monocromático, en particular todo ciclo de longitud 3 en D es un H -ciclo. Por el teorema 7.2.22 se tiene que D tiene un $(2, H)$ -núcleo, el cual debe ser un núcleo por trayectorias monocromáticas. \square

Corolario 7.2.26. [14] *Si D es una digráfica casi-transitiva y m -coloreada en la que todo ciclo de longitud 3 es propiamente coloreado, entonces D tiene núcleo por trayectorias alternantes.*

Demostración. Una demostración análoga al del corolario previo, pero al considerar un patrón alternante, muestra este corolario. \square

7.2.6. Torneos multipartitos

Los torneos multipartitos son una familia de digráficas consideradas inicialmente por Moon en [44]. Si $r \geq 2$ y D es una digráfica, diremos que D es un **torneo r -partito** si existe una partición de los vértices de D en conjuntos independientes, digamos $\{W_1, \dots, W_r\}$, tales que para todo $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, r\}$, con $i \neq j$, y todo $x \in W_i$ y todo $z \in W_j$, existe una única flecha de D entre x y z . Cuando no es necesario especificar el valor de r , diremos simplemente que la digráfica es un **torneo multipartito**. Notemos que, en particular, si D es un torneo de orden n , entonces es un torneo n -partito. Diversos autores han estudiado propiedades en esta familia de digráficas debido a su hermosa estructura y comportamiento. Una amplia recopilación de resultados en esta familia de digráficas se puede encontrar en [5].

Gracias a la buena estructura de los torneos multipartitos, podemos garantizar la existencia de (k, H) -núcleos por trayectorias para ciertos valores de k . Al igual que en las subsecciones previas, un lema preliminar nos será de utilidad.

Lema 7.2.27. *Sean $r \geq 2$, $k \geq 5$, D un torneo r -partito y H -coloreado y $(u, v) \in A(R_H^{k-1}(D))$. Si (u, v) es asimétrica en $R_H^{k-1}(D)$, entonces $d_D(u, v) \leq 2$.*

Demostración. Primero supongamos que $\{S_1, \dots, S_r\}$ es la partición en $V(D)$ en conjuntos independientes dada por la definición. Procederemos por contradicción al suponer que $d_D(u, v) \geq 3$ y consideremos $W = (u = x_0, \dots, x_n = v)$ una uv -geodésica en D . Notemos que si $u \in S_i$ y $v \in S_j$ con $i \neq j$, entonces por ser D un torneo multipartito, $(u, v) \in A(D)$ o $(v, u) \in A(D)$. Ya que $d_D(u, v) \geq 3$, entonces $(v, u) \in A(D)$, en particular, (v, u) está en $A(R_H^{k-1}(D))$, lo cual contradice nuestras suposiciones sobre (u, v) . De lo anterior, existe $t \in \{1, \dots, r\}$ tal que $\{u, v\} \subseteq S_t$. Ahora consideremos los siguientes casos sobre la longitud de W .

Caso 1. $l(W) = 3$.

Dado que S_t es un conjunto independiente y u está en S_t , entonces $x_1 \notin S_t$. Se sigue de ello que $(x_1, v) \in A(D)$ o que $(v, x_1) \in A(D)$. Sin embargo, como $d_D(u, v) = 3$, entonces $(x_1, v) \notin A(D)$; es

decir, $(v, x_1) \in A(D)$. Un argumento análogo muestra que $(x_2, u) \in A(D)$. Entonces podemos concluir que (v, x_1, x_2, u) es un vu -camino de longitud a lo más $k - 1$. Por el inciso (a) del lema 7.1.2, se concluye que $(v, u) \in A(R_H^{k-1}(D))$, lo cual contradice la hipótesis sobre la flecha (u, v) .

Caso 2. $l(W) \geq 4$.

Primero mostraremos que para todo $i \in \{2, \dots, n - 2\}$, el vértice x_i debe estar en S_t . Procederemos por contradicción al suponer que $x_i \notin S_t$. Como D es un torneo multipartito, entonces $(u, x_i) \in A(D)$ o $(x_i, u) \in A(D)$. Sin embargo, por ser W una uv -geodésica, no es posible que $(u, x_i) \in A(D)$, lo que concluye que $(x_i, u) \in A(D)$. Un argumento análogo mostraría que $(v, x_i) \in A(D)$. Así, (v, x_i, u) tiene que ser una vu -trayectoria de longitud a lo más $k - 1$ en D , por lo que, de acuerdo con el inciso (a) del lema 7.1.2, $(v, u) \in A(R_H^{k-1}(D))$, lo cual contradice nuevamente la hipótesis sobre (u, v) . Así, para todo $i \in \{2, \dots, n - 2\}$, $x_i \in S_t$. Con esto último y al tener en consideración que S_t es un conjunto independiente, entonces $n = 4$.

Dado que S_t es un conjunto independiente y u está en S_t , entonces $x_1 \notin S_t$. Se sigue de ello que $(x_1, v) \in A(D)$ o que $(v, x_1) \in A(D)$. Sin embargo, como $d_D(u, v) = 4$, entonces $(x_1, v) \notin A(D)$; es decir, $(v, x_1) \in A(D)$. Un argumento análogo muestra que $(x_3, u) \in A(D)$. Así, (v, x_1, x_2, x_3, u) es un uv -camino de longitud a lo más $k - 1$ en D , por lo que nuevamente por el lema 7.1.2, $(v, u) \in A(R_H^{k-1}(D))$.

Por los casos previos, podemos concluir que $d_D(u, v) \leq 2$. □

Con base en el lema previo, podremos demostrar de manera más sencilla el siguiente teorema:

Teorema 7.2.28. *Sean $r \geq 2$ y D un torneo r -partito. Si $k \geq 5$, entonces D tiene un (k, H) -núcleo.*

Demostración. Primero, supongamos que $\{S_1, \dots, S_r\}$ es la partición en conjuntos independientes dada por la definición de D . Nuevamente veremos que todo ciclo en $R_H^{k-1}(D)$ tiene una flecha simétrica, gracias a ello, $R_H^{k-1}(D)$ tiene núcleo y ello implicaría que D tiene un (k, H) -núcleo. Procederemos por contradicción al suponer que $R_H^{k-1}(D)$ tiene un ciclo asimétrico, digamos $C = (u_0, \dots, u_n)$. Para todo $i \in \{0, \dots, n - 1\}$, sea W_i una $u_i u_{i+1}$ -geodésica (los índices se consideran módulo n). De acuerdo con el lema 7.2.27, para todo $i \in \{0, \dots, n - 1\}$, $l(W_i) \leq 2$. Además, denotaremos por C' la concatenación de las trayectorias W_i , y supondremos que $C' = (x_0, \dots, x_l)$. Nótese que C' es un camino cerrado en D , pues $x_0 = x_l = u_0$. Para mejorar la estructura de la demostración, probaremos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. Para todo $i \in \{l - 3, l - 2, l - 1, l\}$, $(u_1, x_i) \notin A(D)$.

Procederemos por contradicción al suponer que existe $i \in \{l - 3, l - 2, l - 1, l\}$ tal que $(u_1, x_i) \in A(D)$.

Si $i = l$, entonces tenemos que (u_1, u_0) está en D , en particular, está en $R_H^{k-1}(D)$, lo cual no es posible

por la elección de C , así, $l \neq i$. Con ello, $(u_1, x_i) \cup (x_i, C', x_l)$ es un $u_1 u_0$ -camino de longitud a lo más $k - 1$ en D . Se sigue del inciso (a) del lema 7.1.2 que $(u_1, u_0) \in A(R_H^{k-1}(D))$, lo cual no es posible por la elección del ciclo C .

Por otro lado, como u_1 es un vértice de C' , entonces u_1 tiene al menos un ex-vecino en C' , por lo que podemos definir $q = \max\{i \in \{1, \dots, l\} : (u_1, x_i) \in A(D)\}$. Nótese que por la definición de q , u_1 no tiene ex-vecinos en el conjunto $\{x_{q+1}, x_{q+2}, \dots, x_l\}$. Por otro lado, por la afirmación 1, también se tiene que $q \leq l - 4$.

Afirmación 2. $(x_{q+2}, u_1) \in A(D)$.

Procederemos por contradicción al suponer que $(x_{q+2}, u_1) \notin A(D)$. Por otro lado, por la elección de q , además se cumple que $(u_1, x_{q+2}) \notin A(D)$, ello implica que existe un clase S_m tal que tanto u_1 como x_{q+2} están en S_m (véase la figura 7.4). Como S_m es independiente, entonces $x_{q+3} \notin S_m$, en cuyo caso, por ser D un torneo multipartito, (x_{q+3}, u_1) es una flecha de D o (u_1, x_{q+3}) es una flecha de D . Por la elección de q , se sigue que $(x_{q+3}, u_1) \in A(D)$. Por lo anterior, $(u_1, x_q, x_{q+1}, x_{q+2}, x_{q+3}, u_1)$ es un camino cerrado de longitud a lo más $k - 1$ en D . Pero como para toda $i \in \{0, \dots, n - 1\}$, $l(W_i) \leq 2$, entonces en el camino $(x_q, x_{q+1}, x_{q+2}, x_{q+3})$ tiene al menos a dos vértices consecutivos de C , digamos u_t y u_{t+1} . Así, por el lema 7.1.2, (u_t, u_{t+1}) es una flecha simétrica en $R_H^{k-1}(D)$, lo cual no es posible por la elección de C . Por lo anterior, $(x_{q+2}, u_1) \in A(D)$.

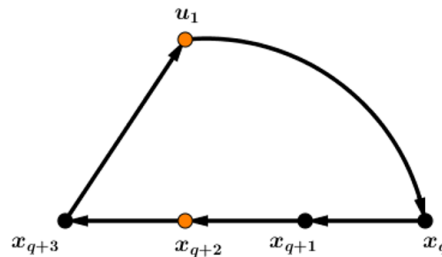


Figura 7.4: Fragmento de la demostración

Afirmación 3. Existe $t \in \{0, \dots, n - 1\}$ tal que $x_{q+1} = u_t$ y $x_{q+3} = u_{t+1}$.

Primero mostraremos que (x_q, x_{q+1}, x_{q+2}) no puede contener dos vértices consecutivos de C . Procederemos por contradicción al suponer que u_s y u_{s+1} están en (x_q, x_{q+1}, x_{q+2}) . Por ser $(u_1, x_q, x_{q+1}, x_{q+2}, u_1)$ un camino cerrado de longitud a lo más $k - 1$ en D , se seguiría del inciso (c) del lema 7.1.2 que u_s y u_{s+1} estén unidos por una flecha simétrica en $R_H^{k-1}(D)$, lo cual no es posible. Así, (x_q, x_{q+1}, x_{q+2}) no puede contener dos vértices consecutivos de C .

Para continuar con la demostración de esta afirmación, recordemos que C' es la unión de las geodésicas W_i , las cuales son de longitud a lo más dos, por lo que el camino (x_q, x_{q+1}, x_{q+2}) necesariamente tiene al

menos uno de los extremos de alguna geodésica W_i , al que llamaremos u_t . Sin embargo, como mostramos en el párrafo anterior, (x_q, x_{q+1}, x_{q+2}) no puede tener al vértice u_{t+1} , se sigue de ello que $u_t = x_{q+1}$ y que $u_{t+1} = x_{q+3}$, lo que demuestra la afirmación.

Ahora, para preparar nuestra contradicción final, consideremos los siguientes casos.

Caso 1. $\{u_1, x_{q+3}\} \subseteq S_m$ para algún $m \in \{1, \dots, r\}$.

En este caso, como S_m es un conjunto independiente, entonces $x_{q+4} \notin S_m$, pues $x_{q+3} \in S_m$. Pero ya que D es un torneo multipartito, entonces $(x_{q+3}, u_1) \in A(D)$ o $(u_1, x_{q+3}) \in A(D)$, pero por la elección de q , se tiene que $(x_{q+4}, u_1) \in A(D)$. Así, $(x_{q+3}, x_{q+4}, u_1, x_q, x_{q+1})$ es un $u_{t+1}u_t$ -camino de longitud a lo más $k - 1$ en D , por lo que, por el inciso (a) del lema 7.1.2, (u_t, u_{t+1}) es simétrica en $R_H^{k-1}(D)$, lo cual contradice nuestra suposición sobre C (véase la figura 7.5).

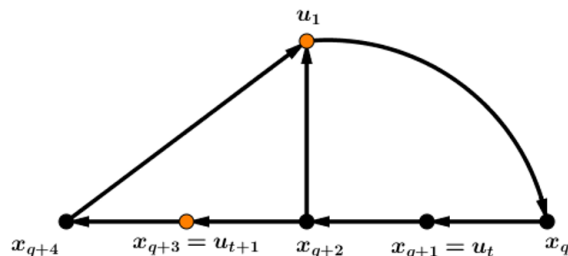


Figura 7.5: Fragmento de la demostración

Caso 2. $u_1 \in S_m$ y $x_{q+3} \in S_{m'}$ con $m \neq m'$.

En este caso, por ser D un torneo multipartito, u_1 y x_{q+3} deben ser adyacentes en D , y por la elección de q , se tiene que $(x_{q+3}, u_1) \in A(D)$. Con ello, $(x_{q+3}, u_1, x_q, x_{q+1})$ es un $u_{t+1}u_t$ -camino de longitud a lo más $k - 1$ en D y, nuevamente por el inciso (a) del lema 7.1.2, (u_t, u_{t+1}) debe ser simétrica, lo cual contradice la elección de C (véase Figura 7.6).

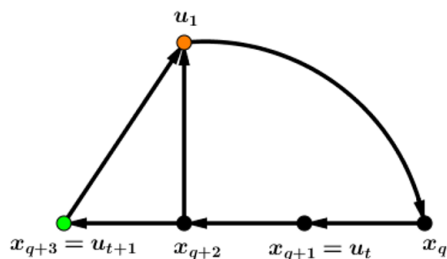


Figura 7.6: Fragmento de la demostración

Gracias a las contradicciones obtenidas en los casos anteriores, podemos concluir que todo ciclo en $R_H^{k-1}(D)$

tiene una flecha simétrica. Se sigue del teorema 2.0.3 que $R_H^{k-1}(D)$ tiene núcleo, y por el lema 7.1.1 se seguiría que D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias. \square

Como consecuencia directa del resultado arriba demostrado, tenemos el siguiente corolario. Es importante mencionar que en [23] se mostró que todo torneo r -partito tiene k -núcleo con $k \geq 4$.

Corolario 7.2.29. *Si D es un torneo r -partito, entonces para todo $k \geq 5$, D tiene un k -núcleo.*

Demostración. Sean $k \geq 5$ y H un patrón vacío de orden $|A(D)|$. Consideremos además una H -coloración de $A(D)$ que asigne a cada par de flechas distintas, colores diferentes. Se sigue del teorema 7.2.28 que D tiene un (k, H) -núcleo, el cual debe ser un k -núcleo. \square

7.2.7. Torneos locales

Los torneos locales serán la última familia que trabajaremos. Esta familia de digráficas fue introducida por Bang-Jensen en [7] como sigue. Una digráfica D es un **torneo local interior** (respectivamente, es un **torneo local exterior**) si la in-vecindad de cualquier vértice de D induce un torneo en D (respectivamente, si la ex-vecindad de cualquier vértice de D induce un torneo en D). Un **torneo local** es una digráfica que es simultáneamente un torneo local interior y exterior. Una de las propiedades interesantes de los torneos locales interiores (torneos locales exteriores) es que, bajo la hipótesis de ser fuertemente conexa, estas resultan ser hamiltonianas [7], propiedad que explotaremos ampliamente en esta subsección. De dicha propiedad se deduce el siguiente lema.

Lema 7.2.30. [7] *Todo par de vértices en una misma componente fuertemente conexa de un torneo local interior (torneo local exterior) están en un mismo ciclo.*

Gracias a esta propiedad de los torneos locales interiores, será posible garantizar la existencia de (k, H) -núcleos por trayectorias en este tipo de digráficas bajo ciertas condiciones.

Teorema 7.2.31. *Sea D un torneo local interior y H -coloreado. Si todo ciclo de D tiene H -longitud a lo más $k - 2$, entonces D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias.*

Demostración. Una vez más, el protagonista de esta demostración será el teorema de Duchet (teorema 2.0.3). Mostraremos que todo ciclo en $R_H^{k-1}(D)$ tiene una flecha simétrica, lo que implicaría que $R_H^{k-1}(D)$ tiene un núcleo y con ello, D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias.

Sea $C = (x_0, \dots, x_n)$ un ciclo en $R_H^{k-1}(D)$. Por definición de $R_H^{k-1}(D)$, se tiene en particular que para todo $i \in \{0, n-1\}$, existe un $x_i x_{i+1}$ -camino en D (los índices se toman módulo n), por lo que la concatenación de dichos caminos es un camino cerrado en D y contiene a todos los vértices de C . En particular, x_0 y x_1 están en la misma componente fuertemente conexa de D . Por el lema 7.2.30, los vértices x_0 y x_1 están en un mismo

ciclo de D , digamos $C_0 = (u_0, \dots, u_l)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x_1 = u_0$ y $x_0 = u_m$ para alguna $m \in \{1, \dots, l-1\}$. Si $C'_0 = (u_0, C_0, u_m)$, entonces gracias al inciso (d) del lema 4.1.2 tenemos que $|O_H(C'_0)| \leq |O_H(C_0)|$, y por hipótesis sobre los ciclos de D , podemos concluir que $|O_H(C'_0)| \leq k-2$. Así, como C'_0 es un camino abierto, entonces $l_H(C'_0) \leq k-1$, por lo que $(x_1, x_0) \in A(R_H^{k-1}(D))$, lo que demuestra que C tiene una flecha simétrica.

Como todo ciclo en $R_H^{k-1}(D)$ tiene una flecha simétrica, entonces $R_H^{k-1}(D)$ tiene un núcleo y con ello, D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias. \square

De manera natural, tenemos un resultado similar para torneos locales exteriores.

Teorema 7.2.32. *Sea D un torneo local exterior y H -coloreado. Si todo ciclo de D tiene H -longitud a lo más $k-2$, entonces D tiene un (k, H) -núcleo.*

Demostración. Una demostración análoga al del teorema previo muestra la veracidad de este teorema. \square

Y como consecuencia de los resultados arriba enunciados, tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 7.2.33. *Sean $k \geq 2$, D un torneo local y H -coloreado. Si todo ciclo en D tiene H -longitud a lo más $k-2$, entonces D tiene (k, H) -núcleo.*

Demostración. Este corolario se deduce directamente del teorema 7.2.31, pues todo torneo local es, en particular, un torneo local interior. \square

Corolario 7.2.34. *Sean $k \geq 2$ y D un torneo local interior. Si todo ciclo en D tiene longitud a lo más $k-2$, entonces D tiene un k -núcleo.*

Demostración. Consideremos un patrón vacío H de orden $|A(D)|$ y una H -coloración de D tal que a cada flecha de D le asigna un color distinto. Dado que todo ciclo en D tiene longitud a lo más $k-2$, entonces todo ciclo debe tener H -longitud a lo más $k-2$. Se sigue del teorema 7.2.31 que D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias, el cual debe ser un k -núcleo. \square

Corolario 7.2.35. *Sean $k \geq 2$ y D un torneo local exterior. Si todo ciclo en D tiene longitud a lo más $k-2$, entonces D tiene un k -núcleo.*

Demostración. La demostración de este corolario es análoga a la del corolario anterior. \square

Corolario 7.2.36. *Sea D un torneo local interior o local exterior y está m -coloreado. Si todo ciclo en D tiene longitud a lo más $k-2$, entonces D tiene un núcleo de k cambios propios.*

Demostración. En este corolario basta considerar un patrón monocromático H cuyo conjunto de vértices son los colores representados en las flechas de D . Notemos que D es una digráfica H -coloreada y, como todo ciclo en D tiene longitud a lo más $k - 2$, entonces todo ciclo tiene H -longitud a lo más $k - 2$. Con ello, D tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias, el cual debe ser un núcleo de k cambios propios. \square

7.3. Una pequeña nota sobre digráficas (k, H) -pancromáticas

En el capítulo referente a digráficas \mathcal{H} -pancromáticas analizamos algunas familias para las cuales, sin importar el patrón H ni la H -coloración, estas siempre tenían un núcleo por H -trayectorias. De manera similar, algunos de los teoremas presentados en este capítulo establecen cierto tipo de *pancromaticidad* en algunas familias de digráficas. Ello quedará de manera explícita en el último teorema de este capítulo, pero primero es conveniente establecer una definición. Dada una digráfica D y un valor fijo $k \geq 2$, diremos que D es **(k, H) -pancromática** si para cualquier patrón de color H y cualquier H -coloración de D , la digráfica tiene un (k, H) -núcleo por trayectorias. Para $k = 2$, una digráfica (k, \mathcal{H}) -pancromática es una digráfica \mathcal{H} -pancromática, las cuales fueron estudiadas en el capítulo 3 de este trabajo. Gracias a lo demostrado en este capítulo, podemos reescribir algunos de los resultados antes expuestos en términos de esta nueva clase de digráficas.

Teorema 7.3.1. *Si D es una digráfica, entonces D es (k, H) -pancromática si se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

- a) (Teorema 7.2.1) D es semicompleta y $k \geq 3$.
- b) (Corolario 7.2.10) D es transitiva y $k \geq 2$
- c) (Corolario 7.2.9) D es r -transitiva, $r \geq 2$ y $k \geq r$.
- d) (Teorema 7.2.14) D es casi-transitiva y $k \geq 4$.
- e) (Teorema 7.2.18) D es 3-casi-transitiva y $k \geq 5$.
- f) (Teorema 7.2.28) D es un torneo multipartito y $k \geq 5$.

Capítulo 8

Conclusiones

A lo largo de este trabajo realizamos el estudio de diversos conceptos en digráficas H -coloreadas concernientes a núcleos. En primera instancia, dada una digráfica arbitrara, el determinar si ésta tiene un núcleo o no es un problema NP-completo, por lo que en general es un problema que puede ser difícil de abordar. A pesar de ello, existen diversos resultados que nos garantizan la existencia de núcleos en general. Derivado de las diversas aplicaciones de los núcleos, tanto teóricas y prácticas, han surgido variantes de este concepto. Dentro de los muchos tipos de núcleo existentes, nosotros nos centramos en el estudio de H -núcleos en digráficas H -coloreadas.

Nuestro estudio inició planteándonos la posibilidad de la existencia de familias de digráficas bajo las cuales, sin importar el patrón de color H , ni la H -coloración que estas tuvieran, siempre fuera posible garantizar la existencia de un H -núcleo. A estas digráficas las llamamos \mathcal{H} -pancromáticas. Aunque nuestra idea inicial era adentrarnos en una caracterización de dichas digráficas, notamos que en general dicha familia de digráficas es bastante variada y no fue posible aproximar la caracterización. Entre algunos de estos motivos destacan el que actualmente no se haya encontrado una caracterización de las digráficas pancromáticas, las cuales son un caso particular de las digráficas que nosotros estudiamos y que podría haber servido de referencia para nuestro trabajo. Por otro lado, varias familias de digráficas resultaron ser \mathcal{H} -pancromáticas, como lo son las digráficas transitivas, los torneos con núcleo, las digráficas casi-transitivas con núcleo y las digráficas acíclicas. Si las familias antes descritas son parte de las digráficas \mathcal{H} -pancromáticas, entonces una caracterización de las digráficas \mathcal{H} -pancromáticas necesariamente debe de considerar a todas las familias antes descritas, lo que hace pensar que una caracterización de las digráficas \mathcal{H} -pancromáticas puede ser más complicado de abordar. Además, vimos varias condiciones para las cuales ciertas operaciones entre digráficas resultan ser \mathcal{H} -pancromáticas, por lo que las digráficas con esta propiedad pueden llegar a ser más variada de lo previsto: unión de digráficas, suma de digráficas, composición de digráficas y extensiones de digráficas son ejemplo de lo antes dicho. En lo que respecta al capítulo 3, sólo resta por mencionar que es evidente que las digráficas \mathcal{H} -pancromáticas pueden

aportar resultados interesantes no sólo en cuestiones de H -núcleos en digráficas H -coloreadas, pues también obtuvimos resultados para núcleos usuales, núcleos por trayectorias monocromáticas y núcleos por trayectorias alternantes como consecuencia de nuestro estudio en las digráficas \mathcal{H} -pancromáticas.

El contenido restante del trabajo es el concerniente al concepto de (k, l, H) -núcleo por trayectorias y por caminos en digráficas H -coloreadas. Fue posible definir este tipo de núcleo gracias al concepto de H -longitud en digráficas H -coloreadas, el cual ya había sido estudiado previamente por otros autores. Los (k, l, H) -núcleos antes mencionados, como se tenía previsto, son una generalización de diversos tipos de núcleos ya estudiados en la literatura, como lo son los núcleos usuales, los (k, l) -núcleos, núcleos por trayectorias monocromáticas, núcleos por trayectorias alternantes y H -núcleos, y también tenemos otros tipos de núcleos que no se han estudiado previamente por separado, como son los núcleos de k cambios propios. Debido a la dificultad general de encontrar condiciones suficientes que garanticen la existencia de (k, l, H) -núcleos, fue necesario introducir algunas digráficas asociadas a una digráfica H -coloreada, como lo fue la digráfica de H -clases y la $(k - 1, H)$ -cierre. Con respecto a la digráfica de H -clases, vimos que ésta representa una generalización de la digráfica de clases de color, la cual es indiscutiblemente una herramienta bastante útil al momento de comprender el comportamiento global de una m -coloración en digráficas. Con ello, la digráfica de H -clases resultó ser un gran auxiliar para encontrar condiciones de existencia de (k, l, H) -núcleos, como puede verse en los capítulos 5 y 6 de este trabajo. En dichos capítulos, exploramos las propiedades de la digráfica de H -clases desde diversos ángulos: propiedades estructurales, condiciones cíclicas, (k, l) -núcleos, digráfica de líneas, digráfica de clases de color, etc. Todo ello con la intención de estudiar el comportamiento de la digráfica de H -clases y obtener condiciones suficientes para la existencia de (k, l, H) -núcleos. Como consecuencia de los resultados aquí presentados, se obtuvieron diversos corolarios para núcleos usuales, k -núcleos, núcleos por trayectorias monocromáticas, núcleos por trayectorias alternantes y núcleos de k cambios propios. Incluso algunos teoremas importantes de núcleos fueron generalizados, como el teorema de Richardson para digráficas fuertemente conexas, el teorema de Kwaśnik, y diversos resultados previos referentes a existencia de núcleos en generalizaciones de torneos. Por último, retomamos la idea de las digráficas \mathcal{H} -pancromáticas, definimos las digráfica (k, \mathcal{H}) -pancromáticas, las cuales son un tipo de digráfica tales que, sin importar el patrón de color H ni la H -coloración, estas siempre tendrán un (k, H) -núcleo por trayectorias. A lo largo del capítulo 7 pudimos mostrar que algunas generalizaciones de torneos entran dentro de esta nueva categoría de digráficas.

Después de todo lo anterior, sólo queda decir que el trabajo realizado en esta tesis nos permitió responder diversas preguntas que nos habíamos planteado al inicio del trabajo, pero que fueron abriendo el camino a muchas otras que no nos fue posible abordar por cuestiones de tiempo. Por ejemplo, si existen patrones de color H para los cuales el concepto de (k, H) -independiente por caminos y (k, H) -independiente por trayectorias sean equivalentes. O si existen patrones de color para los cuales es equivalente el concepto de conjunto

(l, H) -absorbente por caminos y (l, H) -absorbente por trayectorias. También nos planteamos condiciones que garanticen la existencia de particiones en H -clases, pues vimos que estas no siempre existen. Más aun, ¿existirán patrones de color H , además de los patrones monocromáticos, bajo los cuales una digráfica H -coloreada siempre tenga una partición en H -clases? Con respecto a los resultados referentes a existencia de (k, H) -núcleos en generalizaciones en torneos es sabido que algunas de los valores k para los cuales es posible garantizar la existencia de un (k, H) -núcleo por trayectorias puede reducirse para el caso particular de los k -núcleos, en cuyo caso, ¿será posible mejorar los valores de k para los resultados mostrados por nosotros? Dichas preguntas pueden quedar como un inicio para futuros temas de investigación.

Referencias

- [1] C. Andenmatten: *H*-distance, *H*-*A*-kernel and in-state splitting in *H*-colored graphs and digraphs. Tesis de maestría supervisada por H. Galeana-Sánchez y J. Pach, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suiza, 2019.
- [2] P. Arpin, V. Linek: Reachability problems in edge-colored digraphs. *Discrete Math.* 307 (17-18), 2276-2289, 2007.
- [3] Y. Bai, S. Fujita, S. Zhang: Kernels by properly colored paths in arc-colored digraphs. *Discrete Math.* 341 (6), 1523-1533, 2018.
- [4] J. Bang-Jensen, G. Gutin: *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, London, 2000.
- [5] J. Bang-Jensen, G. Gutin: *Classes of Directed Graphs*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2018.
- [6] J. Bang-Jensen, J. Huang: Quasi-transitive digraphs. *J. Graph Theory* 20 (2), 141-161, 1995.
- [7] J. Bang-Jensen, J. Huang, E. Prisner: In-tournament digraphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 59 (2), 267-287, 1993.
- [8] G. Benítez-Bobadilla, H. Galeana-Sánchez, C. Hernández Cruz: Panchromatic patterns by paths. ArXiv 1903.10031v1 <https://arxiv.org/pdf/1903.10031.pdf>, 24 Mar 2019.
- [9] C. Berge: *Graphs and Hypergraphs* in: North-Holland Mathematical Library, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.
- [10] V. Chvátal: On the computational complexity of finding a kernel. Technical Report CRM300, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1973.
- [11] V. Chvátal, L. Lovász: Every directed graph has a semi-kernel. Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, 411, 1974.

- [12] N. Creignou: The class of problems that are linearly equivalent to satisfiability or a uniform method for proving NP-completeness. *Theoret. Comput. Sci.* 145 (1-2), 111-145, 1995.
- [13] P. Delgado-Escalante, H. Galeana-Sánchez: Restricted domination in arc-colored digraphs. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* 11 (1), 95-104, 2014.
- [14] P. Delgado-Escalante, H. Galeana-Sánchez, E. O'Reilly-Regueiro: Alternating kernels. *Discrete Appl. Math.* 236, 153-164, 2018.
- [15] Y. Dimopoulos, V. Magirou: A graph theoretic approach to default logic. *Inform. and Comput.* 112 (2), 239-256, 1994.
- [16] Y. Dimopoulos, A. Torres: Graph theoretical structures in logic programs and default theories. *Theoret. Comp. Sci.* 170 (1-2), 209-244, 1996.
- [17] P. Duchet: Graphes noyau-parfaits. *Ann. Discrete Math.* 9, 93-101, 1980.
- [18] A. S. Fraenkel: Combinatorial game theory foundations applied to digraph kernels. *Electron. J. Comb.* 4 (2), 1997.
- [19] H. Galeana-Sánchez: Kernels by monochromatic paths and the color class digraph. *Discuss. Math. Graph Theory* 31 (2), 273-281, 2011.
- [20] H. Galeana-Sánchez: On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments. *Discrete Math.* 156, 103-112, 1996.
- [21] H. Galeana-Sánchez, C. Hernández-Cruz: k -kernels in generalizations of transitive digraphs. *Discuss. Math. Graph Theory* 31 (2), 293-312, 2011.
- [22] H. Galeana-Sánchez, C. Hernández-Cruz: On the existence of (k, l) -kernels in infinite digraphs: a survey. *Discuss. Math. Graph Theory* 34, 431-466, 2014.
- [23] H. Galeana-Sánchez, C. Hernández-Cruz, S. Arumugam: k -kernels in multipartite tournaments. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* 8 (2), 181-198, 2011.
- [24] H. Galeana-Sánchez, J. Montellano-Ballesteros: Richardson's Theorem for k -colored kernels in strongly connected digraphs. *Discrete Appl. Math.* 203, 47-52, 2016.
- [25] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy: A counterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments. *Discrete Math.* 282, 275-276, 2004.

- [26] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, R. Sánchez-López, J. I. Villareal-Valdés: Some conditions for the existence of Euler H -trails. *Graphs Combin.* 35, 1197-1208, 2019.
- [27] H. Galeana-Sánchez, R. Sánchez-López: H -kernels and H -obstructions in H -colored digraphs. *Discrete Math.* 338, 2288-2294, 2015.
- [28] H. Galeana-Sánchez, R. Sánchez-López: H -kernels by walks and the color-class digraph. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* 13, 120-129, 2016.
- [29] H. Galeana-Sánchez, R. Sánchez-López: Richardson's Theorem in H -coloured digraphs. *Graphs Combin.* 32, 629-638, 2016.
- [30] H. Galeana-Sánchez, R. Strausz: On panchromatic digraphs and the panchromatic number. *Graphs Combin.* 31, 115-125, 2015.
- [31] H. Galeana-Sánchez, R. Strausz: On panchromatic patterns. *Discrete Math.* 339, 2536 - 2542, 2016.
- [32] H. Galeana-Sánchez, M. Tecpa-Galván: \mathcal{H} -panchromatic digraphs. *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, 2019.
- [33] H. Galeana-Sánchez, M. Toledo: New classes of panchromatic digraphs. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* 12, 124-132, 2015.
- [34] P. García-Vázquez, C. Hernández-Cruz: Some results on 4-transitive digraphs. *Discuss. Math. Graph Theory* 37 (1), 117-129, 2017.
- [35] A. Ghouila-Houri: Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre. *C.R. Acad. Sci. Paris* 254, 1370-1371, 1962.
- [36] C. Hernández-Cruz: 3-transitive digraphs. *Discuss. Math. Graph Theory* 32 (3), 205-219, 2012.
- [37] C. Hernández-Cruz, H. Galeana-Sánchez: k -kernels in k -transitive and k -quasi-transitive digraphs. *Discrete Math.* 312 (16), 2522-2530, 2012.
- [38] D. König: *Theorie der endlichen undendlichen Graphen*. Reprinted from Chelsea Publishing Company, 1950.
- [39] M. Kwaśnik: On (k, l) -kernels. *Graph Theory (Lagów, 1981) Lecture Notes in Math* 1018, 114-121, 1983.
- [40] M. Kwaśnik: On (k, l) -kernels in graphs and their products. Tesis doctoral supervisada por M. Borowiecki, Technical University of Wrocław, Breslavia, 1980.
- [41] V. Linek, B. Sands: A note on paths in edge-colored tournaments. *Ars Combin.*, 44, 1996.

- [42] L. A. Martínez Chigo: Trayectorias monocromáticas en digráficas m -coloreadas. Tesis de licenciatura supervisada por J. J. Montellano Ballesteros, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2010.
- [43] S. B. Maurer: The king chicken theorems. *Math. Mag.* 53, 67-80, 1980.
- [44] J. W. Moon: Topics on tournaments. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.
- [45] K. B. Reid: Monotone reachability in arc-colored tournaments. *Congr. Numer.* 146, 131-141, 2000.
- [46] M. Richardson: Solutions of irreflexible relations. *Ann. of Math.* 58, 537-590, 1953.
- [47] A. Sánchez-Flores: A counterexample to a generalization of Richardson's Theorem. *Discrete Math.* 65, 319-320, 1987.
- [48] B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow: On monochromatic paths in edge coloured digraphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 33, 271-275, 1982.
- [49] J. von Neumann, O. Morgenstern: *Theory of Games and Economics Behavior*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1944.
- [50] R. Wang: $(k - 1)$ -kernels in strong k -transitive digraphs. *Discuss. Math. Graph Theory* 35 (2), 229-235, 2015.
- [51] R. Wang, H. Zhang: $(k + 1)$ -kernels and the number of k -kings in k -quasi-transitive digraphs. *Discrete Math.* 338 (1), 114-121, 2015.