



Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Físicas
Instituto de Ciencias Nucleares
Física de Altas Energías, Física Nuclear,
Gravitación y Física Matemática

Relación entre las probabilidades de oscilación en
materia de ν_e y $\bar{\nu}_e$ para el caso de tres sabores.

T E S I S

que para optar por el grado de
Maestro en Ciencias (Física)

PRESENTA:

Carlos Leonardo Juarez Mansilla

Tutor Principal:

Dr. Dr. Juan Carlos D'Olivo Saez, Instituto de Ciencias Nucleares

Miembros del comité tutor:

Dra. María Catalina Espinoza Hernández, Instituto de Física

Dr. Lusi Fernando Urrutia Rios, Instituto de Ciencias Nucleares

México, CDMX. (mayo) 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Resumen	1
Introducción	3
1. Oscilaciones de neutrinos en el vacío	7
1.1. Teoría estándar de las oscilaciones de neutrinos	8
1.2. La Matriz de Mezcla	13
1.3. Mezcla de dos sabores en el vacío	14
1.4. Mezcla de tres sabores en el vacío	15
2. Oscilaciones de neutrinos en materia	19
2.1. Potencial efectivo en materia	20
2.2. Formalismo de las oscilaciones en materia	25
2.2.1. Caso del neutrino	26
2.2.2. Caso del antineutrino	29
2.3. Mezcla de dos sabores en materia	31
2.3.1. Caso del neutrino	31
2.3.2. Caso del antineutrino	37
3. Oscilaciones para tres generaciones	43
3.1. Oscilaciones de neutrinos en materia para el caso de tres ge- neraciones	43
3.1.1. Probabilidades de Oscilaciones en materia para el caso de tres sabores	47
3.2. Oscilaciones de antineutrinos en materia para el caso de tres generaciones	54
3.2.1. Probabilidades de Oscilaciones en materia para el an- tineutrino en el caso de tres generaciones	57
4. Diagonalización de \mathcal{H}_m y $\overline{\mathcal{H}}_m$	61
4.1. Caso del neutrino	61

4.1.1.	Eigenvalores exactos del neutrino	61
4.1.2.	Eigenvalores aproximados del neutrino	65
4.1.3.	Parametrización exacta de \mathcal{O}_m	69
4.1.4.	Parametrización aproximada de \mathcal{O}_m	73
4.2.	Caso del antineutrino	76
4.2.1.	Eigenvalores exactos del antineutrino	76
4.2.2.	Eigenvalores aproximados del antineutrino	79
4.2.3.	Parametrización exacta de $\overline{\mathcal{O}}_m$	82
4.2.4.	Parametrización aproximada de $\overline{\mathcal{O}}_m$	84
5.	Neutrino y antineutrino	87
5.1.	Relaciones entre P_c y \overline{P}_c en el caso de dos sabores	87
5.2.	Relación entre las probabilidades de oscilación del neutrino y antineutrino	91
5.2.1.	Relación entre los operadores de evolución de los estados instantáneos en el medio	95
5.2.2.	Relación entre las probabilidades de oscilación del neutrino y el antineutrino	106
6.	Conclusiones	115
A.	Solución de la cúbica	119
B.	Matriz unitaria de 2×2	123
C.	Matriz unitaria de 3×3	127
D.	Factorización de \mathcal{U}_{NA}	131
	Bibliografía	134

Resumen

En el presente trabajo se da una manera de calcular la probabilidad de supervivencia de un antineutrino electrónico en términos de la probabilidad de supervivencia del neutrino cuando se considera que las tres generaciones de neutrinos toman parte activa en la mezcla. El principal interés en establecer una relación entre ambos casos se basa en el hecho de que, para las oscilaciones de los neutrinos en un medio material con densidad variable, es posible desarrollar soluciones aproximadas aprovechándonos del comportamiento casi degenerado de los eigenvalores de la energía en ciertas regiones. Sin embargo, estas condiciones no son aplicables al caso del antineutrino, lo cual nos obliga a explorar otros métodos de resolución.

Haciendo el cambio de signo en las diferencias cuadráticas de masas, somos capaces de establecer una relación clara entre las funciones de onda del neutrino y su antipartícula. Definiendo los estados instantáneos como aquellos para los cuales el Hamiltoniano en materia resulta ser diagonal, desarrollamos soluciones aproximadas para el caso del neutrino y utilizando las relaciones encontradas entre el neutrino y antineutrino se establece una relación entre la matriz de mezcla y el operador de evolución de los estados instantáneos, relaciones que utilizamos para encontrar la probabilidad de supervivencia del antineutrino.

Introducción

Las oscilaciones de neutrinos se refieren a las transformaciones periódicas entre los diferentes sabores de los neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ . El concepto de oscilaciones de neutrinos fue introducido por primera vez, en 1958, por B. Pontecorvo, para transiciones de neutrino/antineutrino. Con el descubrimiento del neutrino muónico en 1962, en el experimento realizado por Lederman, Schwartz y Steinberger, surge la posibilidad de las transiciones entre los distintos sabores del neutrino.

Por otro lado, las primeras medidas experimentales del flujo de neutrinos solares predicho por el Modelo Estándar Solar se llevaron a cabo en la década de los 60, por Davies y sus colaboradores. Dichas medidas arrojaron un déficit respecto al valor predicho, discrepancia posteriormente confirmada por varios experimentos llevados a cabo en diferentes laboratorios, dando lugar al conocido “problema de los neutrinos solares”. Las oscilaciones de neutrinos son la mejor propuesta para resolver este problema. Fue en 1978 cuando Wolfenstein discutió los efectos de la materia en la propagación de los neutrinos debido a las interacciones con las partículas del medio, concluyendo que los neutrinos se encuentran sujetos a un potencial efectivo que es análogo al índice de refracción de la luz a través de la materia.

Por su parte, en 1985, Mikheyev y Smirnov descubrieron que las probabilidades de transición en las oscilaciones de neutrinos pueden ser sensiblemente modificadas cuando el neutrino se propaga en un medio con densidad variable, este es el efecto MSW, el cual se volvió famoso rápidamente debido a ser el mejor candidato para explicar el problema de los neutrinos solares.

La literatura disponible acerca de las oscilaciones del antineutrino en materia, suele ser escasa o, en su defecto, abordar el tema de forma somera. El propósito del presente trabajo es tratar de manera equitativa los casos del neutrino y el antineutrino en materia. El tema del neutrino ha sido ampliamente discutido y las aproximaciones hechas están bien fundamentadas y conducen a resultados que son coherentes con los experimentos; sin embargo, estas mismas aproximaciones no están suficientemente justificadas para el caso del antineutrino, por lo cual con la finalidad de poder describir la evolución de los estados de sabor del antineutrino, nos gustaría encontrar

un modo de poder usar los resultados deducidos para el caso del neutrino.

Nuestro principal interés será establecer una relación de la probabilidad de supervivencia del neutrino electrónico solar, con la correspondiente probabilidad de supervivencia del antineutrino. Además, deduciremos una relación general entre los operadores de evolución de los estados instantáneos al propagarse en materia.

El presente trabajo se estructura del siguiente modo. En el Capítulo 1, revisamos la teoría estándar de las oscilaciones de neutrinos, en el vacío, el principal interés de este capítulo es dar una base firme al origen del fenómeno de las oscilaciones de neutrinos, así como estudiar la matriz de mezcla y algunas de sus propiedades más relevantes.

En el Capítulo 2, nos enfocamos en los efectos de la materia en las oscilaciones de neutrinos; empezamos estudiando el origen del llamado potencial efectivo de interacción, el cual se puede explicar a partir de la dispersión de los neutrinos con las partículas de medio. Verificamos los aspectos generales de cálculo de las probabilidades de oscilación, finalizando con un breve repaso del caso de dos generaciones, este último tema es ampliamente estudiado en la literatura, por lo cual no hacemos mucho énfasis en el mismo.

En el Capítulo 3, estudiamos las oscilaciones de neutrinos y antineutrinos en materia para el caso de tres generaciones; empezamos escribiendo el Hamiltoniano en materia de una forma más sencilla, al quitar los parámetros δ y θ_{23} de la matriz de mezcla. El nuevo Hamiltoniano que así resulta tiene los mismos eigenvalores que el Hamiltoniano en materia original. Empleando la aproximación de que en el borde del medio el potencial de interacción decae a cero, somos capaces de deducir las probabilidades de oscilación del neutrino en un medio. En el caso del antineutrino nos percatamos que no podemos usar el mismo razonamiento para encontrar las probabilidades de oscilación, por ende optamos por establecer una relación entre ambos casos, la cual nos permita conocer la probabilidad de oscilación del antineutrino usando los resultados previamente deducidos para el neutrino.

En el capítulo 4, nos dedicamos a la diagonalización del Hamiltoniano en materia tanto para el neutrino como para el antineutrino, los eigenvalores son obtenidos tanto de manera exacta como aproximada, verificando que el error porcentual se encuentra por debajo del 1%. Para dar las entradas de la matriz de paso de modo exacto nos valemos de los resultados de un trabajo reciente elaborado por Denton y Parke [7]. En esta misma sección damos una aproximación para los ángulos efectivos de mezcla en materia.

Empezamos el Capítulo 5 con un repaso a la relación que existe entre las probabilidades de cruzamiento del neutrino y antineutrino cuando se considera que solo dos sabores toman parte activa en la mezcla. Posteriormente, empleando los resultados obtenidos en el capítulo 4, investigamos la relación

entre el caso del neutrino y el antineutrino, empezando por realizar el cambio de signo en las diferencias cuadráticas de las masas del neutrino y, a partir de allí, establecer la relación entre las amplitudes de los neutrinos con las del antineutrino, finalizamos el capítulo usando las relaciones antes mencionadas para dar la probabilidad de oscilación para el caso del antineutrino en términos de las expresiones del neutrino.

En el Capítulo 6 presentamos las conclusiones principales de esta tesis.

Capítulo 1

Oscilaciones de neutrinos en el vacío

Las oscilaciones de neutrinos se refiere al fenómeno físico de las transiciones periódicas entre distintos sabores de neutrinos. Estas transiciones son generadas por la interferencia de diferentes estados masivos, que se producen y son detectados coherentemente debido a sus muy pequeñas diferencias de masa.

En la década de los 50, solo un tipo de neutrino activo era conocido (neutrino electrónico) fue en 1957 cuando por primera vez B. Pontecorvo [28] sugirió que los neutrinos oscilaban, en analogía con la mezcla de kaones neutros $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$, donde el número cuántico de la extrañeza oscila en el tiempo.

Con el descubrimiento del neutrino muónico en 1962, en el experimento realizado por Lederman, Schwartz y Steinberger en el Brookhaven National Laboratory [6]; quedó claro que la oscilación entre diferentes sabores de neutrinos activos era posible. En 1962, Z. Maki, M. Nakagawa y S. Sakata consideraron por primera vez un modelo con la mezcla de neutrinos de diferente sabor; fue hasta 1967 cuando el mismo Pontecorvo presentó los primeros trabajos acerca de las oscilaciones entre dos sabores [29].

La teoría estándar de las oscilaciones en la aproximación de onda plana fue desarrollada en 1976 por Eliezer y Swift [10], Fritzsche y Minkowski [12], Bilenky y Pontecorvo [4].

En este capítulo revisaremos la derivación estándar de las probabilidades de oscilación de los neutrinos y discutiremos los principales aspectos fenomenológicos de las oscilaciones de neutrinos en el vacío.

1.1. Teoría estándar de las oscilaciones de neutrinos

Los estados de sabor definido ν_α ($\bar{\nu}_\alpha$) son creados por procesos de corriente cargada junto con el correspondiente leptón cargado l^+ (l^-), en algún punto del espacio-tiempo, después de recorrer una cierta distancia desde el punto de producción, este neutrino puede cambiar su sabor, es decir, la probabilidad de encontrarlo en el estado de sabor inicial o en cualquier otro, varía con el tiempo.

Para que esto sea posible es necesario suponer que los estados de sabor definido, no son estados con masa bien definida, sino que en vez de ello, estos son una combinación lineal de otros estados que sí tienen masas bien definidas, a los que conoceremos como estados de masa.

La relación entre los estados de sabor y los estados de masa se puede expresar de la siguiente manera

$$\Psi = U\Phi \quad (1.1)$$

con

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \\ \psi_\tau \end{pmatrix}; \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

donde Ψ , Φ representan las funciones de onda de los estados de sabor y los estados masa respectivamente y U es una matriz unitaria conocida como *matriz de mezcla*.

La ecuación de Schrödinger es la que describe la evolución temporal de las amplitudes de sabor de los neutrinos; sin embargo, en la base de sabor el Hamiltoniano resulta ser no diagonal. Por otro lado, los estados de masa poseen masa y momentos bien definidos de donde se concluye que son eigenestados del Hamiltoniano del vacío, el cual denotamos por H_0 .

Ya que los estados que son detectados son los estados de sabor mediante los procesos de interacción débil; nos interesa saber como evolucionan los mismos, para ello consideremos un neutrino de sabor α y momento \vec{p} creado en algún proceso de corriente cargada, junto con el correspondiente anti-leptón l_α^+ , el estado de sabor se puede escribir como una combinación de los estados de masa

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle, \quad (1.3)$$

donde usamos la convención habitual de utilizar índices latinos (i, j, k, \dots) para denotar los estados de masa, mientras que los índices griegos ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) se reservan para los estados de sabor. Por simplicidad, consideramos que

tanto los estados de masa como los estados de sabor son ortonormales, es decir,

$$\begin{aligned}\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle &= \delta_{\alpha\beta}, \\ \langle \nu_i | \nu_j \rangle &= \delta_{ij}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Como mencionamos antes, los estados de masa son eigenestados del Hamiltoniano en el vacío

$$H_0 |\nu_k\rangle = E_k |\nu_k\rangle,\tag{1.5}$$

con eigenvalores de la energía,

$$E_k = \sqrt{p_k^2 c^2 + m_k^2 c^4}.\tag{1.6}$$

La ecuación de Schrödinger para los estados de masa es

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\nu_k(t)\rangle = H_0 |\nu_k(t)\rangle\tag{1.7}$$

cuya solución esta dada por

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-i\hbar E_k t} |\nu_k\rangle.\tag{1.8}$$

Consideremos por un momento un estado de sabor puro $|\nu_\alpha\rangle$ creado en algún lugar del espacio, al tiempo $t = 0$. De las ecuaciones (1.3) y (1.8) la evolución temporal de los estados de sabor está dada por

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-i\hbar E_k t} |\nu_k\rangle\tag{1.9}$$

del tal forma que

$$|\nu_\alpha(t=0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle.\tag{1.10}$$

Usando la relación de unitariedad de la matriz de mezcla

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I \quad \Rightarrow \quad \sum_\alpha U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} = \delta_{ij},\tag{1.11}$$

los estados de masa se pueden expresar en términos de los estados de sabor invirtiendo (1.3). Así,

$$|\nu_i\rangle = \sum_\beta U_{\beta i} |\nu_\beta\rangle,\tag{1.12}$$

que sustituida en (1.9) nos da

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(\sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-i\hbar E_k t} \right) |\nu_\beta\rangle\tag{1.13}$$

De esta forma, el estado que en el $t = 0$ es un estado de sabor puro $|\nu_\alpha\rangle$ a un tiempo $t > 0$ este se convierte en una superposición de todos los estados de sabor. Por lo tanto, la amplitud de tener un estado de sabor $|\nu_\beta\rangle$ a un tiempo t es dada por

$$\psi_\beta^\alpha(t) \equiv \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_i U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-i\hbar E_k t} \quad (1.14)$$

Esta es la amplitud de transición de $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ como función del tiempo, la correspondiente probabilidad es

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= |\psi_\beta^\alpha(t)|^2 \\ &= \sum_k \sum_j U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i\hbar(E_k - E_j)t}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

a fin de facilitar la notación y ser congruente con las derivaciones presentadas en la mayoría de los textos, de ahora en adelante usaremos la convención $\hbar = c = 1$.

Llegados a este punto es conveniente hacer algunas suposiciones adicionales [13]. Consideremos que el neutrino es una partícula ultrarelativista, es decir, $p_i \gg m_i$, con lo cual la relación de dispersión en (1.6) se puede aproximar por

$$E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \approx p_i + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{p_i}. \quad (1.16)$$

si además, suponemos que los distintos tipos de neutrinos tienen el mismo momento p .

$$E_k - E_j \simeq \frac{1}{2} \frac{\Delta m_{kj}^2}{p_i} \quad (1.17)$$

donde definimos Δm_{kj}^2 como la diferencia cuadrática de masas

$$\Delta m_{kj}^2 \equiv m_k^2 - m_j^2. \quad (1.18)$$

Por lo tanto, la probabilidad de transición (1.15) se puede expresar como

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \sum_k \sum_j U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} t\right) \\ &= \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} t\right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Como último paso en la derivación estándar, la probabilidad de transición está basada en el hecho de que en los experimentos de oscilaciones de neutrinos el tiempo de propagación desde el punto de creación hasta el punto de

detección t no es medido, lo que realmente se conoce es la distancia L entre la fuente y el detector. Como supusimos que el neutrino era una partícula ultrarelativista, este viaja casi a la velocidad de la luz y es posible aproximar $L = t$, para finalmente llegar a

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; E, L) = \sum_k \sum_j U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L\right). \quad (1.20)$$

de esta última expresión se puede apreciar que la distancia fuente-detector L y la energía del neutrino son las cantidades físicas que determinan la fase de oscilación

$$\Phi_{kj} = \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \quad (1.21)$$

Esta cantidad esta determinada por la diferencia cuadrática de masas Δm_{kj}^2 las cuales son constantes físicas, esto implica que las amplitudes de oscilación están determinadas únicamente por los elementos de la matriz de mezcla $U_{\alpha i}$ mediante sus productos cuadráticos,

$$U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \quad (1.22)$$

estos últimos no dependen de la elección de las fases, de hecho los productos cuadráticos de (1.22) son invariantes ante una transformación global de fase

$$U_{\alpha k} \rightarrow e^{i\psi_\alpha} U_{\alpha k} e^{i\phi_k} \quad (1.23)$$

esto corresponde a correr la fase de los campos del leptón cargado y del neutrino. En el caso de neutrinos de Majorana como veremos más adelante, la matriz de mezcla de tres generaciones contiene además de la fase de Dirac, dos fases de Majorana que aparecen en una matriz diagonal a la derecha de la matriz de mezcla, es decir

$$U = U^D D^M \quad (1.24)$$

donde U^D es la matriz de mezcla para neutrinos de Dirac y D^M es una matriz diagonal unitaria con dos fases independientes, llamadas usualmente fases de Majorana; en términos de componentes

$$U_{\alpha k} = U_{\alpha k}^D e^{i\lambda_k} \quad (1.25)$$

debido a la invarianza ante el recorrimiento de fase de la ecuación (1.22); los experimentos de oscilaciones de neutrinos son independientes de las fases de Majorana y no pueden arrojar información sobre ellas, esta última afirmación es en general cierta sin importar el número de generaciones que se estén

considerando, en particular las violaciones de las simetrías de CP y T en las oscilaciones de neutrinos dependen únicamente de la fase de Dirac.

De la ecuación (1.20) es claro que la probabilidad entre diferentes sabores se da para los casos en donde $L > 0$, ya que por la relación de unitariedad de la matriz de mezcla (1.11)

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; E, L = 0) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (1.26)$$

La probabilidad de oscilación en la ecuación (1.20) deben satisfacer las reglas de conservación de la probabilidad

1. La suma de la probabilidad de oscilación de un sabor dado ν_α a todos los demás sabores ν_β (incluyendo el caso $\alpha = \beta$) es igual a uno

$$\sum_{\beta} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; E, L) = 1.$$

2. La suma de la probabilidad de oscilación de cualquier sabor ν_α a un neutrino de sabor dado ν_β (incluyendo el caso $\alpha = \beta$) es igual a uno

$$\sum_{\alpha} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; E, L) = 1.$$

Existen muchas formas de derivar la ecuación (1.20), la aquí presentada es la más sencilla que aparece en la mayoría de los libros de texto, la cual usa conceptos simples de mecánica cuántica, donde los neutrinos son tratados como ondas planas. Una derivación un poco más rigurosa se puede conseguir tratando los neutrinos como paquetes de ondas y finalmente es posible derivarla esta ecuación en el marco de la Teoría cuántica de campos (*QFT* por su sigla en inglés), un breve tratamiento de la derivación de esta ecuación en el marco de los paquetes de ondas se puede encontrar en las referencias [13, 14].

Para el caso del antineutrino es necesario realizar el cambio $U_{\alpha k}^* \rightarrow U_{\alpha k}$ en la ecuación (1.20), esto se debe a que los neutrinos de sabor son creados en los procesos de interacción débil de corriente cargada mediante la parte del Lagrangiano que describe las interacciones débiles

$$j_{W, L}^\rho = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_k U_{\alpha k}^* \bar{\nu}_{kL} \gamma^\rho l_{\alpha L} \quad (1.27)$$

al considerar el caso del antineutrino es necesario tomar el hermítico conjugado de la corriente leptónica

$$j_{W, L}^{\rho\dagger} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_k U_{\alpha k} \bar{l}_{\alpha L} \gamma^\rho \nu_{kL} \quad (1.28)$$

En este caso el hermitico conjugado de la corriente cargada leptónica crea antineutrinos de sabor $\bar{\nu}_\alpha$ que son a su vez superposición de antineutrinos masivos $\bar{\nu}_k$ con pesos proporcionales a $U_{\alpha k}$, de esta forma la relación que existe entre los estados de sabor del antineutrino y sus estados de masa es

$$|\bar{\nu}_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\bar{\nu}_i\rangle. \quad (1.29)$$

1.2. La Matriz de Mezcla

En general, una matriz unitaria de $N \times N$ depende de N^2 parámetros reales independientes, queremos saber cómo están repartidos estos parámetros. La matriz unitaria S se puede descomponer de la siguiente manera

$$S = FO \quad (1.30)$$

donde F es una matriz de fases y O es una matriz ortogonal real, que satisface $O^T O = O O^T = \mathbb{I}$.

La condición de ortogonalidad impone N condiciones a la diagonal principal, más $(N^2 - N)/2$ condiciones fuera de la diagonal, así el número de condiciones impuestas a O es establecido por $N + (N^2 - N)/2 = (N^2 + N)/2$. Por lo tanto, el número de parámetros independientes de O es:

$$\frac{N(N - 1)}{2} \quad (1.31)$$

y el número de parámetros independientes de F es:

$$\frac{N(N + 1)}{2} \quad (1.32)$$

Al igual que en el caso de los quarks, si el neutrino es una partícula de Dirac, $2N - 1$ fases pueden eliminarse mediante una transformación de fase redefiniendo los campos leptónicos [13, 21], tales fases son inobservables y, por lo tanto, no tienen significado físico. Así, el número de fases físicas está dado por [13]

$$\frac{(N - 1)(N - 2)}{2} \quad \text{fases físicas de Dirac,} \quad (1.33)$$

Como se indicó anteriormente los experimentos de oscilaciones de neutrinos no son capaces de determinar si el neutrino es una partícula de Dirac o de Majorana, por lo que durante el presente trabajo supondremos que el neutrino es una partícula de Dirac. Esta suposición nos permitirá trabajar con el menor número de parámetros físicos relevantes sin perder generalidad en los resultados.

1.3. Mezcla de dos sabores en el vacío

Consideraremos el caso en el que solo existen dos sabores de neutrinos activos, y dos estados de masa (ν_1, ν_2), con sus respectivos eigenvalores (m_1, m_2). De las ecuaciones (1.31) y (1.33)

$$N = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{N(N-1)}{2} = 1 & \text{ángulos de mezcla} \\ \frac{(N-1)(N-2)}{2} = 0 & \text{fases de Dirac} \end{cases} \quad (1.34)$$

en este caso la matriz de mezcla depende de un solo parámetro físico, el ángulo de mezcla y puede representarse como

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Al no haber fase de violación de CP , la matriz de mezcla resulta ser real de donde se concluye

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} \quad (1.36)$$

esto se puede ver directamente de la ecuación (1.15); en forma matricial la relación entre los estados de sabor y los estados de masa puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Suponga que al tiempo $t = 0$ es creado en algún punto del espacio-tiempo un neutrino electrónico con momento p , en términos de los estados de masa el estado inicial es

$$|\nu(t=0)\rangle = |\nu_e\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle \quad (1.37)$$

la ecuación (1.8) nos dice como evolucionan los estados de masa para cualquier tiempo posterior, de donde el estado del neutrino al tiempo t será

$$|\nu(t)\rangle = \cos \theta e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + \sin \theta e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle. \quad (1.38)$$

La probabilidad de supervivencia del neutrino electrónico está dada por

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) &= \|\langle \nu_e | \nu(t) \rangle\|^2 \\ &= \|\cos \theta \langle \nu_1 | \nu(t) \rangle + \sin \theta \langle \nu_2 | \nu(t) \rangle\|^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta + \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \cos((E_2 - E_1)t) \\ &= 1 - \sin^2 2\theta \left(1 - \cos^2 \left[\frac{\Delta m^2}{4E} t \right] \right), \end{aligned} \quad (1.39)$$

donde usamos la aproximación vista en (1.17). Para neutrinos que viajan una larga distancia, el término oscilante, promedia a cero, por lo cual la probabilidad de supervivencia se reduce a

$$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) \rangle = 1 - \text{sen}^2 2\theta.$$

De la misma forma se puede calcular la probabilidad de conversión

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) &= \| \langle \nu_\nu | \nu(t) \rangle \|^2 \\ &= \text{sen}^2 2\theta \left(1 - \cos^2 \left[\frac{\Delta m^2}{4E} t \right] \right) \end{aligned} \quad (1.40)$$

cuya probabilidad promedio es

$$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) \rangle = \text{sen}^2 2\theta.$$

Una de las razones por la cuales el caso de dos sabores tan sencillo es el poco número de parámetros físicos relevantes, ya que para este caso solo se tiene un ángulo de mezcla y una diferencia cuadrática de masas.

1.4. Mezcla de tres sabores en el vacío

El caso más general considera los tres estados de sabor (ν_e, ν_μ, ν_τ) y los tres estados de masa (ν_1, ν_2, ν_3) con sus respectivos eigenvalores (m_1, m_2, m_3). Usando las ecuaciones (1.31) y (1.33)

$$N = 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{N(N-1)}{2} = 3 & \text{ángulos de mezcla} \\ \frac{(N-1)(N-2)}{2} = 1 & \text{fases de Dirac} \end{cases} \quad (1.41)$$

Para el caso de tres generaciones la matriz de mezcla depende ahora de tres ángulos de mezcla y una fase de Dirac, existen varias parametrizaciones de la misma, siendo algunas de las más conocidas la propuesta por M. Kobayashi y T. Maskawa al estudiar la fase de violación de CP en las interacciones débiles [16] y la parametrización propuesta años mas tarde por Lincoln Wolfenstein [31]. Sin embargo, hasta ahora no se ha hecho referencia alguna a la parametrización y, por lo tanto, los resultados obtenidos hasta el momento no dependen de la misma.

En lo subsecuente usaremos la representación estándar [13, 19]

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

en donde definimos la notación compacta $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ y $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ con $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Estas cantidades no pueden deducirse a partir de primeros principios, por lo tanto, la fase responsable de la violación de la simetría CP y los ángulos de mezcla se deben determinar experimentalmente.

Una forma más conveniente de representar la matriz de mezcla (1.42), es expresarla como productos de las matrices de rotación de Euler [11, 17].

$$U = \mathcal{O}_{23}\Gamma\mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}\Gamma^\dagger, \quad (1.43)$$

donde \mathcal{O}_{ij} son matrices ortogonales expresadas en términos de los ángulos de mezcla en el vacío $\theta_{ij} \in [0, \pi/2)$, $i, j = 1, 2, 3$ y Γ es una matriz diagonal que contiene la fase de violación CP , de forma explícita

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{12} &= \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{O}_{13} &= \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \\ \mathcal{O}_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}, & \Gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Además de los tres ángulos de mezcla y de la fase de Dirac, para este caso contamos con tres masas de neutrinos m_1, m_2, m_3 dejándonos así con siete parámetros físicos relevantes. Para neutrinos ultrarelativistas existen solo dos diferencias cuadráticas de masas independientes ($\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$).

Vamos a numerar (únicamente por conveniencia) la masa de los neutrinos de tal manera que $m_2 > m_1$, así $\Delta m_{21}^2 > 0$ con esta elección tenemos dos posibilidades ya sea $m_1 < m_2 < m_3$ (orden normal) ó $m_3 < m_1 < m_2$ (orden invertido).

Dependiendo si trabajamos con el orden Normal o el orden Invertido de masas, la diferencia cuadrática de masas más grande queda como Δm_{31}^2 ó Δm_{32}^2 respectivamente; también es sabido a partir de los datos experimentales que $\Delta m_{21}^2 \ll |\Delta m_{31(32)}^2|$ por un factor de casi treinta, es decir $\Delta m_{21}^2/\Delta m_{31(32)}^2 \cong 0.03$, esto implica que ambos casos tenemos $\Delta m_{21}^2 \approx \Delta m_{31(32)}^2$ con $|\Delta m_{31}^2 - \Delta m_{32}^2| = \Delta m_{21}^2 \ll \Delta m_{31(32)}^2$ [25].

La enorme cantidad de datos acumulados a lo largo de muchos años de investigación nos han permitido determinar los parámetros, que son responsables de las oscilaciones de los neutrinos solares. El elemento $U_{e3} \simeq \sin \theta_{13}$ de la matriz dada en (1.42) es relativamente pequeño, lo cual nos permite identificar los ángulos θ_{12} y θ_{23} como los ángulos de mezcla relacionados con la componente dominante de las oscilaciones de los neutrinos solares y atmosféricos respectivamente, mientras que Δm_{21}^2 y Δm_{31}^2 son frecuentemente nombradas como diferencia cuadrática de masas “solar” y “atmosférica” y

se les denota como $\Delta m_{21}^2 \equiv \Delta m_{\odot}^2$, $\Delta m_{31}^2 \equiv \Delta m_{atm}^2$. Sin embargo, los datos experimentales no permiten determinar el signo de Δm_{31}^2 los dos posibles signos corresponden con los dos tipos de espectros de masas de los neutrinos y dependiendo del valor de la masa del neutrino más ligero el espectro puede ser [25]:

Jerarquía normal:

$$m_1 < m_2 \ll m_3 \quad (1.45)$$

Jerarquía invertida:

$$m_3 \ll m_1 < m_2 \quad (1.46)$$

Para encontrar la probabilidad de supervivencia del neutrino electrónico usamos la ecuación (1.19) y la parametrización estándar de la matriz de mezcla (1.42), de donde

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) = & c_{12}^4 c_{13}^4 + s_{12}^4 c_{13}^4 + s_{13}^4 + 2c_{13}^4 c_{12}^2 s_{12}^2 \cos\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) \\ & + 2c_{13}^2 c_{12}^2 s_{13}^2 \cos\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) + 2c_{13}^2 s_{12}^2 s_{13}^2 \cos\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \end{aligned} \quad (1.47)$$

Para neutrinos que viajan una larga distancia desde el punto de producción, los términos oscilantes promedian a cero y la correspondiente probabilidad de supervivencia promedio es:

$$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) \rangle = c_{12}^4 c_{13}^4 + s_{12}^4 c_{13}^4 + s_{13}^4, \quad (1.48)$$

Para las probabilidades de conversión $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t)$ y $P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; t)$ aparecen factores proporcionales a δ , por lo tanto los efectos de la fase de violación de CP deben ser tomados en cuenta.

Una importante diferencia entre el caso de dos y de tres generaciones es

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \neq P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} \quad (1.49)$$

pues en este caso U es una matriz compleja, y hacer el cambio $U_{\alpha k} \rightarrow U_{\alpha k}^*$, no deja las ecuaciones (1.15) invariantes; sin embargo, de la estructura de estas mismas, es claro que

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = P_{\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha} \quad (1.50)$$

esto no es más que una consecuencia del teorema CPT [21].

Sin importar el número de generaciones que se considere o la representación explícita que se use para la matriz de mezcla, las probabilidades, ya sea de supervivencia o conversión de neutrinos en el vacío, queda completamente determinado por la ecuación (1.20).

Las oscilaciones de neutrinos en el vacío, son quizás uno de los temas más estudiado en la física de neutrinos, y aún hoy, a más de sesenta años, de que fuera propuesto, sigue intrigando a los físicos de todo el mundo.

Capítulo 2

Oscilaciones de neutrinos en materia

Fue en 1978 cuando L. Wolfenstein [30] se percató de que cuando el neutrino se propaga en materia, está sujeto a un potencial efectivo debido a la dispersión elástica con las partículas del medio. Este potencial modifica las oscilaciones de los neutrinos, por ejemplo, en el caso de dos generaciones, el ángulo de mezcla en el vacío es remplazado por un ángulo de mezcla efectivo en materia, el cual es función del potencial.

Wolfenstein [30], V Barger, K Whisnant, S Pakvasa y RJN Phillips [2] fueron quienes a principios de la década de los ochenta estudiaron la propagación de los neutrinos a través de un medio con densidad constante. Desafortunadamente, en estos primeros trabajos el signo de potencial efectivo resultó ser incorrecto y posteriormente fue corregido por Langacker, Leveille, y Sheiman, [20].

Para estimar el orden de magnitud del camino libre medio debido a la dispersión elástica con las partículas del entorno procedamos de la siguiente manera. Del análisis dimensional sabemos que la sección eficaz de interacción débil del neutrino con un leptón cargado o un hadrón en el centro de masa está dada por [13]:

$$\sigma_{cm} \sim G_F s, \quad (2.1)$$

donde s es una variable de Mandelstam, la cual resulta ser un invariante de Lorentz que representa el cuadrado de la energía en el centro de masa. En el sistema de referencia de laboratorio, donde la partícula blanco está en reposo, la variable de Mandelstam, está dada por $s = 2EM$ donde E es la energía del neutrino y M es la masa de la partícula blanco, por lo tanto

$$\sigma_{lab} \sim 2G_F EM \sim 10^{-38} \text{cm}^2 \frac{EM}{\text{GeV}^2}. \quad (2.2)$$

El camino libre medio del neutrino en un medio con N partículas blanco está dado por

$$l \sim \frac{1}{N\sigma} \sim \frac{10^{38}\text{cm}}{(N\text{cm}^3)(EM/\text{GeV}^2)}. \quad (2.3)$$

En materia ordinaria, donde la mayoría de las partículas blanco son nucleones con masa de aproximadamente 1 GeV y una densidad de $N \sim N_A/\text{cm}^3 \sim 10^{24}/\text{cm}^3$, donde N_A es el número de Avogadro, se llega a

$$l_{\text{materia}} \sim \frac{10^{14}\text{cm}}{(E/\text{GeV})}. \quad (2.4)$$

Vemos que la tierra, que tiene un diámetro aproximado de 10^9 cm, es transparente ante neutrinos con energía menores 10^5 GeV, sin embargo, el efecto de la materia terrestre sobre las oscilaciones de neutrinos es importante. En la siguiente sección estudiaremos el potencial efectivo que sienten los neutrinos al propagarse a través de la materia y como modifica las probabilidades de oscilación.

2.1. Potencial efectivo en materia

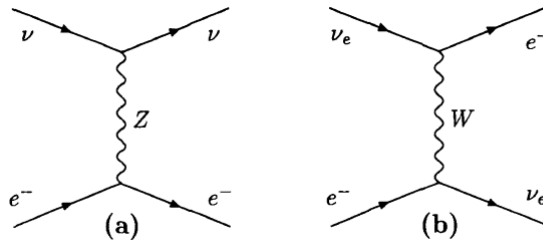


Figura 2.1: Diagrama de Feynman a nivel árbol de la dispersión de neutrinos en el modelo estándar. Recuperado de [23]

Cuando los estados de sabor se propagan en materia, estos pueden interactuar con las partículas del entorno mediante los procesos de corriente cargada (CC) intercambiando de un bosón W o mediante procesos de corriente neutra (NC) al intercambiar un bosón Z . Primero calculemos el potencial debido a los efectos de las interacciones de corriente cargada; del Lagrangiano efectivo de las interacciones débiles a bajas energías

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{CC}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j_W^\dagger j_W^\mu. \quad (2.5)$$

El Hamiltoniano efectivo de corriente cargada correspondiente al diagrama izquierdo de la Figura 2.1 es:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{CC}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_e] \quad (2.6)$$

aplicando una transformación de Fierz, se pueden separar las contribuciones del neutrino y de los leptones cargados

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{CC}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e]. \quad (2.7)$$

Nos interesa calcular el Hamiltoniano promedio, en un entorno con electrones en reposo, el cual será descrito por

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{CC}}} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e] \int d^3 p_e f(E_e, T) \\ &\times \frac{1}{2} \sum_{h_e = \pm 1} \langle e^-(p_e, h_e) | \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e | e^-(p_e, h_e) \rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde $f(E_e, T)$ corresponde a la distribución estadística de la energía de los electrones en el medio, que depende de la temperatura. Los estados del electrón tienen su cuadrimomento y su helicidad idénticas antes y después de la dispersión, esto se debe a que el medio debe permanecer inalterable en orden a que las interacciones contribuyan al potencial efectivo de los neutrinos.

El estado de un electrón con momento p_e y helicidad h_e está dado por:

$$|e^-(p_e, h_e)\rangle = \frac{1}{2E_e V} a_{h_e}^\dagger(p_e) |0\rangle \quad (2.9)$$

donde V es el volumen de normalización y $a_{h_e}^\dagger(p_e)$ se interpreta como el operador que crea el estado de un electrón con momento p_e y helicidad h_e a partir del estado de vacío $|0\rangle$ [18].

El promedio sobre las helicidades se puede calcular del siguiente modo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{h_e} \langle e^-(p_e, h_e) | \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e | e^-(p_e, h_e) \rangle \\ &= \frac{1}{4E_e V} \sum_{h_e} \overline{u_e^{h_e}(p)} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_e^{h_e}(p) \\ &= \frac{1}{4E_e V} \text{Tr} \left[\left(\sum_{h_e} u_e^{h_e}(p) \overline{u_e^{h_e}(p)} \right) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \right] \\ &= \frac{1}{4E_e V} \text{Tr} [(\not{p}_e + m_e) \gamma_\mu (1 - \gamma^5)] = \frac{p_{e\mu}}{E_e V} \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde $u_e^{h_e}(p)$ es un espinor de Dirac con momento p y helicidad h_e y hemos usamos la identidad [21]

$$\sum_h u_h(p)\bar{u}_h(p) = \not{p} + m. \quad (2.11)$$

Sustituyendo en (2.8)

$$\overline{\mathcal{H}}_{\text{eff}}^{\text{CC}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{1}{V} \int d^3p_e f(E_e, T) \bar{\nu}_e \frac{\not{p}_e}{E_e} (1 - \gamma^5) \nu_e, \quad (2.12)$$

haciendo la integral sobre d^3p_e

$$\int d^3p_e f(E_e, T) \frac{\not{p}_e}{E_e} = \int d^3p_e f(E_e, T) \left(\gamma^0 - \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{\gamma}}{E_e} \right) = N_e V \gamma^0. \quad (2.13)$$

La integral sobre \vec{p}_e/E_e se anula por paridad, en esta última igualdad hicimos uso del hecho que la función $f(E_e, T)$ está normalizada por

$$\int d^3p_e f(E_e, T) = N_e V, \quad (2.14)$$

de esta forma la ecuación (2.12) se puede reescribir como

$$\overline{\mathcal{H}}_{\text{eff}}^{\text{CC}} = V_{CC} \bar{\nu}_{eL} \gamma^0 \nu_{eL} \quad (2.15)$$

donde el potencial de corriente cargada se define de la siguiente manera [13]

$$V_{CC} = \sqrt{2} G_F N_e. \quad (2.16)$$

Para calcular el potencial de corriente neutra al que están sujetos los neutrinos al propagarse en un medio con N_f fermiones, $f = \{e^-, p, n\}$, usamos el diagrama derecho de la Figura 2.1, de esta forma el Hamiltoniano efectivo de corriente neutra es:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{\text{NC}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \left[\bar{\nu}_\alpha \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_\alpha \right] \sum_{f=e^-,p,n} \left[\bar{f} \gamma_\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) f \right], \quad (2.17)$$

realizando el mismo proceso que antes, el potencial de corriente neutra para un neutrino de sabor arbitrario ν_α al dispersarse con los fermiones f en el medio está dado por [13]

$$V_{NC} = \sqrt{2} G_F N_f g_V^f, \quad (2.18)$$

dependiendo del fermión que se considere g_V^f tomará diferentes, valores a saber [13],

$$\begin{aligned} g_V^e &= -\frac{1}{2} + 2 \sin \theta_W, \\ g_V^p &= \frac{1}{2} - 2 \sin \theta_W, \\ g_V^n &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

La materia ordinaria es electricamente neutra, lo cual implica la igualdad en el número de protones y electrones en el medio, así las contribuciones al potencial de corriente neutra de estas partículas se cancelan mutuamente, de donde solo la densidad de neutrones contribuye

$$V_{NC} = -\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_n. \quad (2.20)$$

En resumen, el Hamiltoniano efectivo promedio en un entorno astrofísico con baja temperatura y densidad, es dado por

$$\overline{\mathcal{H}_{eff}}(x) = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} V_\alpha \bar{\nu}_{\alpha L}(x) \gamma^0 \nu_{\alpha L}(x), \quad (2.21)$$

con

$$V_a = V_{CC} \delta_{ae} + V_{NC} = \sqrt{2} G_F \left(N_e \delta_{ae} - \frac{1}{2} N_n \right). \quad (2.22)$$

Este potencial es muy pequeño, ya que el factor de peso es:

$$\sqrt{2} G_F = 7.63 \times 10^{-14} \frac{\text{eVcm}^3}{N_A}. \quad (2.23)$$

Para entender el significado físico del potencial V_α calculemos la energía potencial promedio de un neutrino propagándose en el medio

$$\mathcal{V}_\alpha = \langle \nu_\alpha^{\text{WP}}(p, h) | \int d^3x \overline{\mathcal{H}_{eff}}(x) | \nu_\alpha^{\text{WP}}(p, h) \rangle, \quad (2.24)$$

donde consideramos al neutrino como un paquete de ondas del tipo

$$| \nu_\alpha^{\text{WP}}(p, h) \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E}} \varphi(\vec{p}, \langle \vec{p} \rangle) | \nu_\alpha(p, h) \rangle. \quad (2.25)$$

En esta última expresión, $\varphi(\vec{p}, \langle \vec{p} \rangle)$ es la distribución de momentos y $|\nu_\alpha(p, h)\rangle$ representa el estado de un neutrino con helicidad h y momento promedio $\langle \vec{p} \rangle$, sustituyendo en (2.24) y tomando en cuenta que el neutrino es una partícula izquierda (*left-handed*) con $h = -1$

$$\mathcal{V}_\alpha = \frac{1}{2} V_\alpha \int \frac{d^3 p}{2E} \|\varphi(\vec{p}, \langle \vec{p} \rangle)\|^2 \overline{u_\nu^{(-1)}(p)} \gamma^0 (1 - \gamma^5) u_\nu^{(-1)}(p). \quad (2.26)$$

Para calcular el término $\overline{u_\nu^{(-1)}(p)} \gamma^0 (1 - \gamma^5) u_\nu^{(-1)}(p)$ tendremos que usar la siguiente identidad [13]

$$\left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{s}_h}{2} \right) = \frac{u_h(p) \bar{u}_h(p)}{2m}, \quad (2.27)$$

donde s_h es el cuadrivector de polarización que cumple con las siguientes propiedades

$$s_\mu s^\mu = -1, \quad s_\mu p^\mu = 0. \quad (2.28)$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} \overline{u_\alpha^{(-1)}(p)} \gamma^0 (1 - \gamma^5) u_\alpha^{(-1)}(p) &= \text{Tr} \left[u_\nu^{(-1)}(p) \bar{u}_\nu^{(-1)}(p) \gamma^0 (1 - \gamma^5) \right] \\ &= \text{Tr} \left[(\not{p} + m_\nu) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{s}_{(-1)}}{2} \right) \gamma^0 (1 - \gamma^5) \right] \\ &= 4E \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde hemos despreciado la masa del neutrino. Aquí vale la pena al hacer un pequeño comentario al respecto; el estado que aparece en (2.25) hace referencia a neutrino de sabor arbitrario ν_α , como se mencionó anteriormente los estados de sabor no poseen masa bien definida, por lo tanto, m_ν se debe interpretar como la masa efectiva del neutrino de sabor α .

Así que vemos que para la energía potencial de un neutrino ultrarelativista de sabor arbitrario propagándose en el medio se tiene

$$\mathcal{V}_\alpha = V_\alpha. \quad (2.30)$$

Hagamos el mismo proceso para un antineutrino propagándose en el medio, en este caso, el paquete de ondas que describe el antineutrino es

$$|\bar{\nu}_\alpha^{\text{WP}}(p, h)\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E}} \varphi(\vec{p}, \langle \vec{p} \rangle) |\bar{\nu}_\alpha(p, h)\rangle. \quad (2.31)$$

El antineutrino es una partícula derecha (*right-handed*) con $h = 1$

$$\bar{\mathcal{V}}_\alpha = -\frac{1}{2}V_\alpha \int \frac{d^3p}{2E} \|\varphi(\vec{p}, \langle \vec{p} \rangle)\|^2 \overline{v_\nu^{(1)}}(p) \gamma^0 (1 - \gamma^5) v_\nu^{(1)}(p). \quad (2.32)$$

Para calcular el término que aparece en la integral usamos la identidad

$$\left(\frac{m - \not{p}}{2m}\right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{p}_h}{2}\right) = -\frac{v_h(p) \bar{v}_h(p)}{2m}, \quad (2.33)$$

y, después de calcular la traza,

$$\overline{v_\alpha^{(1)}}(p) \gamma^0 (1 - \gamma^5) v_\alpha^{(1)}(p) = 4E, \quad (2.34)$$

Finalmente,

$$\bar{\mathcal{V}}_\alpha = -V_\alpha. \quad (2.35)$$

En el límite ultrarelativista, los neutrinos de Dirac pueden ser considerados como partículas sin masa, en consecuencia, solo toman parte en las interacciones débiles los neutrinos con helicidad negativa y los antineutrinos con helicidad positiva al tener helicidad opuesta el signo de la energía potencial promedio al propagarse en materia cambia al considerar el caso del antineutrino, este el motivo por el cual es necesario hacer el cambio $V \rightarrow -V$.

Queremos enfatizar que estos cambios aplican a los estados de sabor, ya que son estos lo que interactúan con las partículas del medio. Esto implica que el Hamiltoniano de vacío se debe modificar por un término de interacción con el medio H_{int} , este último será diagonal en la base de sabor.

En 1985, Mikheyev y Smirnov descubrieron que las oscilaciones de neutrinos pueden ser dramáticamente modificadas cuando el neutrino se propaga a través de un medio con densidad variable, inclusive si los valores de los ángulos de mezcla en el vacío son pequeños [22]. Este es el llamado efecto MSW, el cual se volvió famoso rápidamente al ser el mejor candidato para explicar el problema de los neutrinos solares [13].

Hoy es sabido que el ángulo de mezcla relevante en las oscilaciones de los neutrinos solares es grande, pero no máximo, y las transiciones de sabores son debidas al efecto MSW [13].

2.2. Formalismo de las oscilaciones en materia

En la presente sección desarrollaremos el formalismo de las oscilaciones de neutrinos/antineutrinos en materia sin hacer referencia al número de

generaciones que participan en la mezcla. Tomaremos en cuenta el término que describe la interacción con el medio y revisaremos las implicaciones del mismo.

2.2.1. Caso del neutrino

El Hamiltoniano que describe la evolución de los estados de sabor de los neutrinos propagándose en materia se puede escribir como

$$H_m(t) = UH_0U^\dagger + H_{int}(t), \quad (2.36)$$

donde H_0 es el Hamiltoniano del sistema en el vacío y $H_{int}(t)$ es el término de interacción, el cual es diagonal en la base de sabor.

La ecuación que describe la evolución de los estados de sabor en materia está dada por:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H_m(t)\Psi. \quad (2.37)$$

Los estados de sabor no son eigenestados del Hamiltoniano H_m ; sin embargo, siempre es posible encontrar una nueva base en donde el Hamiltoniano en materia H_m sea diagonal, a esta nueva base la conoceremos como la base de los estados instantáneos en materia Φ_m . La relación entre los estados de sabor y los estados instantáneos está dada de la siguiente manera;

$$\Psi(t) = U_m(t)\Phi_m(t) \quad (2.38)$$

donde U_m es una transformación unitaria que tiene la particularidad de diagonalizar el Hamiltoniano en materia, es decir,

$$U_m^\dagger(t)H_m(t)U_m(t) = H_D(t). \quad (2.39)$$

Antes de proseguir debemos contestar una cuestión fundamental ¿Cuál es la ecuación de evolución que obedecen los estados $\Phi_m(t)$? Para ello vamos a sustituir (2.38) directamente en (2.37)

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}(U_m(t)\Phi_m(t)) &= H_m(t)U_m(t)\Phi_m(t), \\ iU_m(t)\frac{\partial\Phi_m(t)}{\partial t} &= \left[H_m(t)U_m(t) - i\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right] \Phi_m(t), \end{aligned}$$

multiplicando por la izquierda por $U_m^\dagger(t)$ y usando (2.39) nos queda

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_m(t) = \left\{ H_D - iU_m^\dagger(t)\frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right\} \Phi_m(t). \quad (2.40)$$

Al Hamiltoniano de los estados instantáneos lo denotaremos por \mathcal{H}_m

$$\mathcal{H}_m = H_D - iU_m^\dagger(t) \frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \quad (2.41)$$

La ecuación (2.40) es general y es independiente del número de generaciones que se consideren; sin embargo, no es posible encontrar soluciones generales a la misma, ya que el Hamiltoniano depende de la forma explícita que tome la matriz de mezcla $U_m(t)$, la cual tendrá más parámetros físicos entre más generaciones se consideren.

En este punto es conveniente hacer algunas consideraciones adicionales. Consideremos por un momento un neutrino de un sabor dado ν_α producido en el interior de algún objeto astrofísico al tiempo t_0 , si denotamos por t_\star el tiempo en el cual el neutrino abandona el medio, para todo tiempo $t > t_\star$ la evolución del neutrino se dará en el vacío y las probabilidades de conversión y/o supervivencia se podrán calcular de acuerdo al formalismo visto en el Capítulo 2.

Para cualquier tiempo $\psi(t)$ será una combinación lineal de los estados de sabor, esto es cierto en particular para t_\star

$$\begin{aligned} |\psi(t_\star)\rangle &= \sum_{\beta} \psi_{\beta}(t_\star) |\nu_{\beta}\rangle \\ &= \sum_{\beta} \sum_i \psi_{\beta}(t_\star) |\nu_i\rangle \langle \nu_i | \nu_{\beta}\rangle \\ &= \sum_{\beta} \sum_i U_{\beta i}^* \psi_{\beta}(t_\star) |\nu_i\rangle \\ &= \sum_i \phi_i(t_\star) |\nu_i\rangle \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde $\psi_{\beta}(t_\star)$ es la amplitud del estado de sabor ν_{β} al tiempo t_\star y $\phi_i(t_\star)$ es la amplitud del estado de masa ν_i al tiempo t_\star . Estas amplitudes están relacionadas por

$$\phi_i(t_\star) = \sum_{\beta} U_{\beta i}^* \psi_{\beta}(t_\star).$$

Para tiempos $t > t_\star$ los estados de masa evolucionarán de acuerdo a la ecuación (1.8)

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i \phi_i(t_\star) e^{-iE_i(t-t_\star)} |\nu_i\rangle. \quad (2.43)$$

La probabilidad de transición de un neutrino de sabor arbitrario ν_α a cualquier otro estado ν_β , (incluyendo $\alpha = \beta$) se puede calcular de la misma forma que se hizo en (1.19)

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \sum_i \|U_{\beta i}\|^2 \|\phi_i(t_\star)\|^2 + 2\text{Re} \left[\sum_{i>j} U_{\beta i} U_{\beta j}^* \phi_i(t_\star) \phi_j(t_\star)^* e^{-i\Delta_{ij}(t-t_\star)} \right].$$

Generalmente, el término oscilante promedia cero para neutrinos que viajan una larga distancia, así la probabilidad promedio es dada por:

$$\langle P_{\alpha \rightarrow \beta} \rangle = \sum_i \|U_{\beta i}\|^2 \langle \|\phi_i(t_\star)\|^2 \rangle. \quad (2.44)$$

Es importante señalar que, en esta última ecuación las $\phi_i(t_\star)$, hacen referencia a las amplitudes de los estados de masa en el vacío; si somos capaces de alguna manera de determinar las $\phi_i(t_\star)$ el problema quedará completamente resuelto.

Con esto en mente analicemos el Hamiltoniano dado en (2.36), para tiempos posteriores a t_\star la evolución de los estados adiabáticos se da en el vacío y el término de interacción se anula, de donde el Hamiltoniano de la base adiabática se reduce al Hamiltoniano del vacío

$$U_m^\dagger(t) H_m(t) U_m(t) = U_m^\dagger(t) U H_0 U^\dagger U_m(t) = H_D, \quad (2.45)$$

con $t > t_\star$. A fin de recuperar los eigenvalores del vacío se debe cumplir que

$$\lim_{V \rightarrow 0} U_m \rightarrow U. \quad (2.46)$$

Por otro lado, podemos obtener una relación general entre los estados de masa y los estados de instantáneos en materia, si igualamos las ecuaciones (1.1) y (2.38) y despejando Φ se llega a:

$$\Phi(t) = U^\dagger U_m(t) \Phi_m(t), \quad (2.47)$$

si suponemos que al momento en que el neutrino abandona el medio, él potencia de interacción cae abruptamente tal que $V(t_\star) = 0$. Entonces podemos usar la ecuación (2.46)

$$\Phi(t_\star) = \Phi_m(t_\star) \quad \text{si} \quad V(t_\star) = 0, \quad (2.48)$$

bajo estas condiciones podemos utilizar la ecuación de evolución de los estados instantáneos en materia para los tiempos $t_\star \geq t \geq t_0$, para obtener los estados de masa en el borde del medio.

Empleando el formalismo del operador de evolución podemos obtener el estado instantáneo en el borde del medio

$$\Phi_m(t_\star) = \mathcal{U}_m(t_\star, t_0)\Phi_m(t_0), \quad (2.49)$$

el operador de evolución obedece la ecuación de Schrödinger con $\mathcal{H}_m(t)$ dado por (2.41)

$$i\frac{\partial \mathcal{U}_m}{\partial t} = \mathcal{H}_m(t)\mathcal{U}_m, \quad (2.50)$$

sujeto a la condición inicial $\mathcal{U}_m(t_0, t_0) = \mathbb{I}$.

Nuestro objetivo es dar las probabilidades de oscilación en un medio, en otras palabras, si deseamos utilizar la ecuación (2.44) debemos ser capaces de dar una representación al operador de evolución de los estados instantáneos. Resolver directamente la ecuación (2.50) resulta poco práctico, ya que las soluciones dependen de la forma explícita que tome el potencial de interacción, en vez de ello buscaremos una forma de dar una parametrización general al mismo sin hacer una referencia a las soluciones explícitas de la ecuación y posteriormente pretenderemos conectar estos resultados con los que se obtendrían para el antineutrino bajo las mismas condiciones.

2.2.2. Caso del antineutrino

Al considerar que es al antineutrino el que se propaga en un medio la ecuación de evolución de los estados de sabor se debe modificar haciendo los cambios $U \rightarrow U^*$ y $H_{int}(t) \rightarrow -H_{int}(t)$ en la ecuación (2.36), si denotamos al Hamiltoniano en materia de la antipartícula como $\overline{H}_m(t)$, este toma la siguiente forma

$$\overline{H}_m(t) = U^* H_0 U^T - H_{int}(t), \quad (2.51)$$

La base en la cual el Hamiltoniano en materia del antineutrino es diagonal, será conocida como la base de los estados instantáneos de la antipartícula y su relación con los estados de sabor será análoga a la encontrada en el caso del neutrino

$$\overline{\Psi}(t) = \overline{U}_m(t)\overline{\Phi}_m(t) \quad (2.52)$$

donde $\overline{U}_m(t)$ es la matriz de mezcla en materia para el antineutrino.

Por definición

$$\overline{U}_m^\dagger(t)\overline{H}_m(t)\overline{U}_m(t) = \overline{H}_D(t). \quad (2.53)$$

siendo \overline{H}_D la matriz diagonal que contiene los eigenvalores de (2.51). Para encontrar la ecuación de evolución de los estados instantáneos procedemos

de la misma manera que se hizo antes

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} &= \bar{H}_m(t) \bar{\Psi}. \\
i \frac{\partial}{\partial t} (\bar{U}_m(t) \bar{\Phi}_m(t)) &= \bar{H}_m(t) \bar{U}_m(t) \bar{\Phi}_m(t), \\
i \bar{U}_m(t) \frac{\partial \bar{\Phi}_m(t)}{\partial t} &= \left[\bar{H}_m(t) \bar{U}_m(t) - i \frac{\partial \bar{U}_m(t)}{\partial t} \right] \bar{\Phi}_m(t), \\
i \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Phi}_m(t) &= \left\{ \bar{H}_D - i \bar{U}_m^\dagger(t) \frac{\partial \bar{U}_m(t)}{\partial t} \right\} \bar{\Phi}_m(t).
\end{aligned} \tag{2.54}$$

para obtener la última igualdad usamos la ecuación (2.53).

Dicho de otro modo, el Hamiltoniano que dicta la evolución de los estados instantáneos del antineutrino es:

$$\bar{\mathcal{H}}_m = \bar{H}_D - i \bar{U}_m^\dagger(t) \frac{\partial \bar{U}_m(t)}{\partial t} \tag{2.55}$$

Denotamos una vez más por t_\star el tiempo al cual el antineutrino alcanza el borde del medio y si nuevamente consideramos que en el borde del mismo el potencial efectivo decae a cero, nos podemos concentrar únicamente en el cálculo de las probabilidades promedio

$$\langle P_{\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}} \rangle = \sum_i \|U_{\beta i}\|^2 \langle \|\bar{\phi}_i(t_\star)\|^2 \rangle. \tag{2.56}$$

Bajo estas condiciones podemos establecer una relación entre los estados instantáneos y los estados de masa del antineutrino de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}(t) &= U^* \bar{\Phi}(t) \\
\bar{\Psi}(t) &= \bar{U}_m(t) \bar{\Phi}_m(t)
\end{aligned} \tag{2.57}$$

igualando y despejando $\bar{\Phi}(t)$

$$\bar{\Phi}(t) = U^T \bar{U}_m(t) \bar{\Phi}_m(t). \tag{2.58}$$

Al igual que en el caso del neutrino, en el límite en que el potencial efectivo se anula la matriz de mezcla en materia se debe reducir a la matriz de mezcla del vacío conjugada, es decir,

$$\lim_{V \rightarrow 0} \bar{U} \rightarrow U^*, \tag{2.59}$$

y, por lo tanto, si evaluamos la ecuación (2.58) en t_\star se tiene

$$\bar{\Phi}(t_\star) = \bar{\Phi}_m(t_\star). \tag{2.60}$$

Para encontrar el estado instantáneo $\bar{\Phi}_m(t_*)$ en el borde del medio nos valdremos del operador de evolución de los estados instantáneos del antineutrino,

$$\bar{\Phi}_m(t_*) = \bar{\mathcal{U}}_m(t_*, t_0) \bar{\Phi}_m(t_0), \quad (2.61)$$

el cual debe obedecer la ecuación de Schrödinger con $\bar{\mathcal{H}}_m(t)$ dado por (2.55),

$$i \frac{\partial \bar{\mathcal{U}}_m}{\partial t} = \bar{\mathcal{H}}_m(t) \bar{\mathcal{U}}_m, \quad (2.62)$$

sujeto a la condición inicial $\bar{\mathcal{U}}_m(t_0, t_0) = \mathbb{I}$.

Como veremos en los capítulos siguientes, para el caso de dos generaciones, es posible dar una parametrización general de $\bar{\mathcal{U}}_m(t, t_0)$ en términos de la representación general de una matriz unitaria de 2×2 ; sin embargo, el caso de tres generaciones resulta más complicado de tratar y se debe optar por otros medios para dar una representación explícita de este operador.

2.3. Mezcla de dos sabores en materia

Como motivación para los capítulos subsecuentes estudiaremos los efectos de la materia en las oscilaciones de neutrinos/antineutrinos para el caso de dos generaciones [3]. Este tema es ampliamente estudiado en la literatura, por lo cual solo daremos un breve repaso del mismo.

2.3.1. Caso del neutrino

Consideraremos el caso en donde la mezcla se realiza entre el ν_e y cualquier otro de los estados de sabor activos ν_α con $\alpha = \{\mu, \tau\}$, la ecuación que describe la evolución de los estados de sabor es:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\alpha \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ c & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_e(t) & 0 \\ 0 & V_\alpha(t) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\alpha \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

en donde hemos usado la notación compacta $c \equiv \cos \theta$, $s \equiv \sin \theta$.

En esta ecuación es posible factorizar un término proporcional a la identidad, el cual puede ser despreciado ya que corresponde a una fase global inobservable [21].

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\alpha \end{pmatrix} = \left\{ \left(\frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{V_e + V_\alpha}{2} \right) \mathbb{I} + \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Delta_0 & 0 \\ 0 & \Delta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ c & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & -V \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\alpha \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

donde hemos definido las cantidades $\Delta_0 \equiv (m_2^2 - m_1^2)/4E$ y $V \equiv (V_e - V_\alpha)/2$. De esta forma, el Hamiltoniano en materia se puede reescribir de forma más sencilla:

$$H_m = \zeta(t)\mathbb{I} + H_m^{\text{red}}(t), \quad (2.65)$$

con

$$\zeta(t) = \left(\frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{V_e(t) + V_\alpha(t)}{2} \right) \quad (2.66)$$

y

$$\begin{aligned} H_m^{\text{red}}(t) &= \begin{pmatrix} -\Delta_0 \cos 2\theta & \Delta_0 \sin 2\theta \\ \Delta_0 \sin 2\theta & \Delta_0 \cos 2\theta \end{pmatrix} + V(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (V(t) - \Delta_0 \cos 2\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \Delta_0 \sin 2\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (V(t) - \Delta_0 \cos 2\theta)\sigma_3 + \Delta_0 \sin 2\theta \sigma_1 \end{aligned} \quad (2.67)$$

donde σ_3, σ_1 son matrices de Pauli. La ecuación de evolución de los estados de sabor con el Hamiltoniano dado por (2.67), puede ser resuelta analíticamente solamente para un número limitado de funciones de $V(t)$ [15], en particular, los casos correspondientes a una densidad constante o aquellas que cambian de forma lineal, exponencial y como una función escalonada a lo largo de la trayectoria del neutrino [17, 27].

Para el caso de dos generaciones el Hamiltoniano en materia es simétrico, es decir, $H_m^T = H_m$; de donde se concluye que puede ser diagonalizado por medio de una transformación ortogonal

$$U_m^T(t)H_m(t)U_m(t) = H_D(t). \quad (2.68)$$

Aquí $U_m(t)$ es la matriz de mezcla en materia que, por analogía con (1.35), la denotamos como:

$$U_m(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta_m(t) & \sin \theta_m(t) \\ -\sin \theta_m(t) & \cos \theta_m(t) \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

en cuyo caso θ_m representa el ángulo efectivo de mezcla en materia.

En la base de los estados instantáneos la matriz de eigenvalores esta dada por:

$$H_D = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

sustituyendo (2.65) en (2.68)

$$\begin{aligned} U_m^T(t)H_m(t)U_m(t) &= U_m(t)^T(\zeta(t)\mathbb{I} + H_m^{\text{red}}(t))U_m(t) \\ &= \zeta(t)U_m^T(t)U_m(t) + U_m^T(t)H_m^{\text{red}}(t)U_m(t) \\ &= \zeta(t)\mathbb{I} + H_D^{\text{red}}(t) = H_D(t) \end{aligned} \quad (2.71)$$

nuevamente el factor proporcional a la identidad puede ser despreciado, por ende nos centraremos en la parte no trivial de esta ecuación

$$U_m^T(t)H_m^{\text{red}}(t)U_m(t) = H_D^{\text{red}}(t). \quad (2.72)$$

con $H_D^{\text{red}}(t) = \text{diag}(\epsilon_1(t), \epsilon_2(t))$.

Definimos los *eigenvalores instantáneos reducidos* $\epsilon_i(t)$ con $i=1,2$, como los eigenvalores de (2.67). Para obtener los eigenvalores instantáneos en materia es necesario diagonalizar el Hamiltoniano completo que aparece en la ecuación (2.64), es decir, se debe reincorporar el término proporcional a la identidad que acabamos de despreciar.

De esta forma, la relación de los eigenvalores completos $\mathcal{E}_i(t)$ con los reducidos está dada por:

$$\mathcal{E}_i(t) = \zeta(t) + \epsilon_i(t). \quad (2.73)$$

En lo subsecuente, y con la finalidad de no sobrecargar la notación, omitiremos la etiqueta “red” que aparece en la ecuación (2.72) y no referiremos al hamiltoniano simplemente como H_m ; de la misma forma, nos centraremos en los eigenvalores instantáneos reducidos $\epsilon_i(t)$, sin embargo no se debe olvidar que el eigenvalor completo está dado por (2.73).

Queremos saber cuales son las expresiones tanto de los eigenvalores reducidos, como del ángulo de mezcla en materia en términos de los parámetros del vacío; usando las ecuaciones (2.67), (2.69) y (2.72)

$$\begin{pmatrix} \alpha \cos 2\theta_m - B \sin 2\theta_m & \alpha \sin 2\theta_m + B \cos 2\theta_m \\ \alpha \sin 2\theta_m + B \cos 2\theta_m & -\alpha \cos 2\theta_m + B \sin 2\theta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1(t) & 0 \\ 0 & \epsilon_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

con $\alpha = V(t) - A$, $A \equiv \Delta_0 \cos 2\theta$ y $B \equiv \Delta_0 \sin 2\theta$. De las condiciones fuera de la diagonal principal obtenemos

$$\tan 2\theta_m(t) = \frac{\Delta_0 \sin 2\theta}{\Delta_0 \cos 2\theta - V(t)}. \quad (2.75)$$

Vemos que en los límites de bajas y altas densidades, respectivamente, el ángulo de mezcla en materia toma los valores

$$\begin{aligned} \lim_{V(t) \rightarrow 0} \tan 2\theta_m(t) &= \tan 2\theta, \\ \lim_{V(t) \rightarrow \infty} \tan 2\theta_m(t) &= 0^-, \end{aligned} \quad (2.76)$$

es decir, en el límite en el que la densidad en el medio se hace cero se recupera el valor del ángulo de mezcla en el vacío, tal como esperábamos, mientras

que en el límite de altas densidades ($V(t) \rightarrow \infty$), si tomamos el ángulo de mezcla en el vacío en el intervalo $\theta \in [0, \pi/2)$, entonces $\sin 2\theta$ en la ecuación (2.75) es positivo y el denominador se hace infinitamente negativo, con lo cual nos acercamos a cero por valores negativos.

A partir de (2.75) y de identidades trigonométricas podemos determinar $\cos 2\theta_m$ y $\sin 2\theta_m$. La ambigüedad en el signo se resuelve al tomar en consideración el límite en bajas densidades dado en (2.76). De esta forma, resulta

$$\begin{aligned}\cos 2\theta_m(t) &= \frac{\Delta_0 \cos 2\theta - V(t)}{\sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta - V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}}, \\ \sin 2\theta_m(t) &= \frac{\Delta_0 \sin 2\theta}{\sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta - V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}}.\end{aligned}\tag{2.77}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{V(t) \rightarrow 0} \cos 2\theta_m(t) &= \cos 2\theta, \\ \lim_{V(t) \rightarrow 0} \sin 2\theta_m(t) &= \sin 2\theta.\end{aligned}\tag{2.78}$$

Al considerar la mezcla de solo dos sabores la ecuación característica resultante es de orden cuadrático la cual se puede resolver por la fórmula general, de donde los eigenvalores instantáneos reducidos están dados por:

$$\begin{aligned}\epsilon_1(t) &= -\sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta - V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}, \\ \epsilon_2(t) &= \sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta - V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}.\end{aligned}\tag{2.79}$$

es importante recalcar que la única dependencia en t en los eigenvalores instantáneos, así como en los ángulos de mezcla en materia es a través del potencial efectivo.

Para encontrar la ecuación de evolución de los estados instantáneos usamos las ecuaciones (2.40) y (2.69) de donde obtenemos

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_1^m(t) \\ \phi_2^m(t) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_1(t) & 0 \\ 0 & \epsilon_2(t) \end{pmatrix} - i \dot{\theta}_m(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \phi_1^m(t) \\ \phi_2^m(t) \end{pmatrix}.\tag{2.80}$$

Para encontrar la derivada del ángulo de mezcla en materia usamos la expresión del $\sin 2\theta_m(t)$ en la ecuación (2.77):

$$\dot{\theta}_m(t) = \frac{\sin^2 2\theta_m(t)}{2 \Delta_0 \sin 2\theta} \dot{V}(t).\tag{2.81}$$

Los términos fuera de la diagonal provocan la mezcla entre los estados ϕ_1^m y ϕ_2^m . Consideremos el caso en el cual $|d\theta_m/dt| \ll |\epsilon_i(t)|$, es decir, los términos fuera de la diagonal principal son despreciables, y la ecuación (2.80) se reduce a

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_1^m(t) \\ \phi_2^m(t) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \epsilon_1(t) & 0 \\ 0 & \epsilon_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^m(t) \\ \phi_2^m(t) \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

En este caso, ϕ_1^m y ϕ_2^m hacen las veces de los estados en masa en el vacío ϕ_1 y ϕ_2 , sin embargo, tanto los eigenvalores como el ángulos de mezcla dependen de t . Esta es la llamada aproximación adiabática [17].

En la aproximación adiabática cada amplitud evoluciona de forma independiente, es decir,

$$\begin{aligned} \phi_1^m(t) &= e^{-i\alpha_1(t)} \phi_1^m(t_0), \\ \phi_2^m(t) &= e^{-i\alpha_2(t)} \phi_2^m(t_0), \end{aligned} \quad (2.83)$$

donde

$$\alpha_i(t) = \int_{t_0}^t \epsilon_i(t') dt'. \quad (2.84)$$

Si consideramos que al tiempo t_0 se crea un estado de sabor electrónico ν_e y haciendo el mismo procedimiento que se utilizó en el Capitulo 1, es posible calcular la probabilidad de supervivencia promedio, la cual está dada por:

$$\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}^{\text{adi}} \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \cos 2\theta_m(t_0), \quad (2.85)$$

donde hemos despreciado el término de interferencia, ya que para neutrinos que viajan una larga distancia promedia a cero.

De las ecuaciones (2.77) se puede observar que el ángulo de mezcla efectivo en materia posee un comportamiento resonante como función de V , que ocurre cuando $\Delta_0 \cos 2\theta = V(t)$, punto en donde la mezcla es máxima [17]. En la Figura 2.2, se gráfica sin $2\theta_m(t)$ como función del potencial.

La propagación adiabática a través de materia con densidad variable puede tener profundos efectos en las oscilaciones de neutrinos, por ejemplo consideremos un neutrino electrónico creado en el centro del sol o en una estrella que colapsa, donde la densidad es muy alta y se satisface $V \gg \Delta_0$.

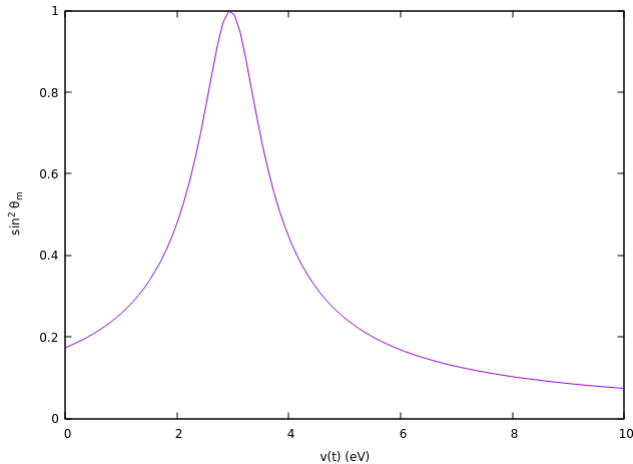


Figura 2.2: gráfica $\sin 2\theta_m$, donde θ_m es el ángulo de mezcla en materia como función de V , para ello tomamos $\Delta_0 = 3.0$ eV y $\sin^2 2\theta = 0.03$ [32].

Al momento de ser creado el neutrino se encuentra casi totalmente como un estado ν_2 , independientemente del valor del ángulo de mezcla. A medida que el neutrino se propaga en el medio el potencia efectivo decrece conforme la densidad disminuye y el neutrino eventualmente atravesará la resonancia, en el punto $\Delta_0 \cos 2\theta = V(t)$ donde la diferencia entre los eigenvalores de la energía es mínima (Figura 2.3). Si la densidad del medio cambia lo suficientemente lento como para que la propagación sea adiabática, el neutrino permanecerá en el mismo eigenestado de masa ν_2 y saldrá del sol como $\nu_2 = \sin \theta \nu_e + \cos \theta \nu_\alpha$; si el ángulo de mezcla es pequeño esto ocasionaría una casi completa conversión $\nu_e \rightarrow \nu_\alpha$, siendo el caso en el cual el efecto MSW es más efectivo [13, 17].

Cuando la evolución es no adiabática, los elementos fuera de la diagonal principal en (2.80) toman importancia, ocasionando la mezcla entre los estados $\phi_1^m(t) \leftrightarrow \phi_2^m(t)$ y, por ende nos vemos obligados a resolver la ecuación completa.

Para encontrar las probabilidades de oscilación, sin resolver de forma explícita la ecuación (2.50) usaremos la parametrización general de una matriz unitaria de 2×2 , denotando por P_c la probabilidad de cruzamiento entre los estados de masa en materia $\phi_1^m(t) \leftrightarrow \phi_2^m(t)$.

Usando los resultados del Apéndice B

$$\begin{pmatrix} \phi_1^m(t) \\ \phi_2^m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-P_c} & \sqrt{P_c} \\ -\sqrt{P_c} & \sqrt{1-P_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^m(t_0) \\ \phi_2^m(t_0) \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

donde por conveniencia hemos omitido las fases que aparecen en la ecuación (B.20), ya que estas no cobran relevancia al considerar las probabilidades clásicas.

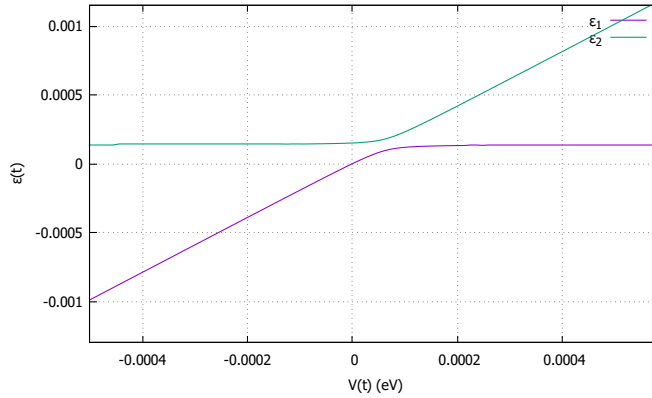


Figura 2.3: Gráfica de los eigenvalores completos de H_m como función de V , donde consideramos el ángulo de mezcla $\sin^2 \theta_{12} = 0.307$, y $\Delta_{21} = 7.53 \times 10^{-5}$ eV

Consideremos que al tiempo t_0 se crea un neutrino electrónico ν_e

$$\Psi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces, de las ecuaciones (2.69) y la inversa de (2.38),

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} \phi_1^m(t_0) \\ \phi_2^m(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_m(t_0) \\ \sin \theta_m(t_0) \end{pmatrix}, \quad (2.87)$$

y usando (2.44), (2.86) y (2.87) llegamos a

$$\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_c \right) \cos 2\theta \cos 2\theta_m(t_0). \quad (2.88)$$

Esta es conocida como la fórmula de Parke [13], para la probabilidad promedio de supervivencia del neutrino electrónico, note que en el caso en el que P_c se anula se recupera el límite adiabático ecuación (2.85), tal como se esperaba.

2.3.2. Caso del antineutrino

Para el antineutrino el caso de dos generaciones se puede tratar de forma análoga y la mayoría de las cantidades relevantes se pueden obtener de los resultados del neutrino haciendo el cambio en el signo del potencial efectivo, es decir, $V \rightarrow -V$.

La ecuación de evolución de los estados de sabor para el antineutrino viene dada por

$$\begin{aligned}\bar{H}_m(t) &= \begin{pmatrix} -\Delta_0 \cos 2\theta & \Delta_0 \sin 2\theta \\ \Delta_0 \sin 2\theta & \Delta_0 \cos 2\theta \end{pmatrix} - V(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -(V(t) + \Delta_0 \cos 2\theta)\sigma_3 + \Delta_0 \sin 2\theta \sigma_1\end{aligned}\quad (2.89)$$

en esta última ecuación hemos omitido el factor proporcional a la identidad que nuevamente corresponde a una fase global inobservable. Como el Hamiltoniano es simétrico, puede ser diagonalizado por una transformación ortogonal que denotamos por $\bar{U}_m(t)$:

$$\bar{U}_m(t) = \begin{pmatrix} \cos \bar{\theta}_m(t) & \sin \bar{\theta}_m(t) \\ -\sin \bar{\theta}_m(t) & \cos \bar{\theta}_m(t) \end{pmatrix}, \quad (2.90)$$

esta es la matriz de mezcla en materia del antineutrino que es análoga a (2.69).

De la diagonalización de (2.89) podemos obtener tanto los ángulos en materia como los eigenvalores de los estados instantáneos en materia. El ángulo de mezcla en materia se puede obtener directamente de (2.75) haciendo el cambio $V \rightarrow -V$:

$$\tan 2\bar{\theta}_m(t) = \frac{\Delta_0 \sin 2\theta}{\Delta_0 \cos 2\theta + V(t)}. \quad (2.91)$$

De esta expresión vemos que los límites para bajas y altas densidades son

$$\begin{aligned}\lim_{V(t) \rightarrow 0} \tan 2\bar{\theta}_m(t) &= \tan 2\theta, \\ \lim_{V(t) \rightarrow \infty} \tan 2\bar{\theta}_m(t) &= 0^+.\end{aligned}\quad (2.92)$$

Aquí encontramos la primera diferencia significativa con el comportamiento de los neutrinos al propagarse en materia. Cuando las densidades se hacen muy grandes, el denominador en (2.91) se hace infinitamente positivo, tomando en cuenta que el valor del ángulo de mezcla en vacío está en el intervalo $[0, \pi/2)$, el $\sin 2\theta$ es positivo, y el límite a altas densidades tiende a cero con valores positivos, contrario a lo que ocurriría para el neutrino.

A partir de (2.91) e identidades trigonométricas obtenemos

$$\cos 2\bar{\theta}_m(t) = \frac{\Delta_0 \cos 2\theta + V(t)}{\sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta + V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}}, \quad (2.93)$$

$$\sin 2\bar{\theta}_m(t) = \frac{\Delta_0 \sin 2\theta}{\sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta + V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}}. \quad (2.94)$$

Para resolver la ambigüedad en el signo en las expresiones anteriores, impusimos la condición de que en el límite donde $V \rightarrow 0$ se recuperen el ángulo de mezcla en el vacío.

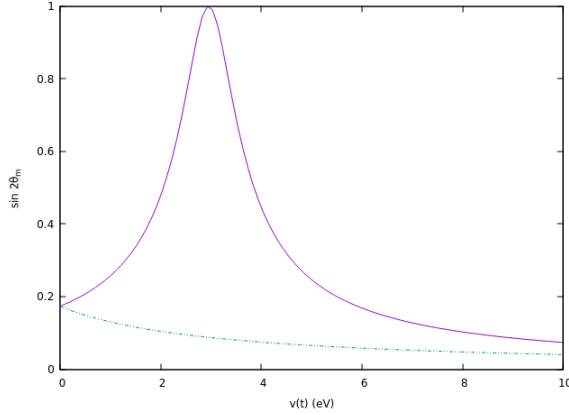


Figura 2.4: gráfica del $\sin 2\theta_m$, (línea sólida) y de $\sin 2\bar{\theta}_m$ (línea punteada), esta última tiene un comportamiento monótono decreciente, y ya no se presenta el comportamiento resonante. Hemos tomamos $\Delta_0 = 3.0$ eV y $\sin^2 2\theta = 0.03$

Notemos que el comportamiento resonante ya no se presenta en el intervalo de validez del potencial efectivo. En la Figura 2.4 graficamos tanto $\sin 2\theta_m$ y $\sin 2\bar{\theta}_m$ como función de V , usando los mismos valores que en la Figura 2.2

Para obtener los eigenvalores instantáneos reducidos para las antipartículas debemos resolver la ecuación característica de (2.89), o equivalentemente hacer el cambio $V \rightarrow -V$, en las ecuaciones (2.79)

$$\bar{\epsilon}_2(t) = -\bar{\epsilon}_1(t) = \sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta + V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}. \quad (2.95)$$

Para encontrar la ecuación de evolución de los estados instantáneos utilizamos la última de las ecuaciones (2.54), es decir,

$$i \frac{\partial \bar{\Phi}_m(t)}{\partial t} = \left\{ \bar{H}_D - i \bar{U}_m(t)^\dagger \frac{\partial \bar{U}_m(t)}{\partial t} \right\} \bar{\Phi}_m(t), \quad (2.96)$$

y la ecuación (2.90)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1^m(t) \\ \bar{\phi}_2^m(t) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_1(t) & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_2(t) \end{pmatrix} - i \dot{\bar{\theta}}_m(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1^m(t) \\ \bar{\phi}_2^m(t) \end{pmatrix}, \quad (2.97)$$

con

$$\dot{\bar{\theta}}_m(t) = -\frac{\sin^2 2\bar{\theta}_m(t)}{2 \Delta_0 \sin 2\theta} \dot{V}(t). \quad (2.98)$$

En la aproximación adiabática, donde los términos fuera de la diagonal principal puede ser despreciados, la probabilidad de supervivencia se puede expresar como:

$$\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}^{\text{adi}} \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \cos 2\bar{\theta}_m(t_0). \quad (2.99)$$

Si consideramos los elementos fuera de la diagonal principal, la mezcla entre los estados $\bar{\phi}_1^m \leftrightarrow \bar{\phi}_2^m$ se debe tomar en cuenta, para ello procederemos del mismo modo que se hizo para el neutrino, usando los resultados del Apéndice B y denotando a \bar{P}_c como la probabilidad de cruzamiento entre los estados instantáneos $\bar{\phi}_1^m \leftrightarrow \bar{\phi}_2^m$

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1^m(t) \\ \bar{\phi}_2^m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \bar{P}_c} & \sqrt{\bar{P}_c} \\ -\sqrt{\bar{P}_c} & \sqrt{1 - \bar{P}_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1^m(t_0) \\ \bar{\phi}_2^m(t_0) \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

Nuevamente hemos omitido las fases que aparecen en la ecuación (B.20), y nos enfocamos en el cálculo de las probabilidades clásicas. Para encontrar la condición inicial usamos la inversa de (2.52), donde al tiempo t_0 es creado un antineutrino electrónico $\bar{\nu}_e$, entonces,

$$\bar{\Psi}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y,

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1^m(t_0) \\ \bar{\phi}_2^m(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \bar{\theta}_m(t_0) \\ \sin \bar{\theta}_m(t_0) \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

De las ecuaciones (2.56), (2.100) y (2.101), obtenemos

$$\langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \bar{P}_c \right) \cos 2\theta \cos 2\bar{\theta}_m(t_0). \quad (2.102)$$

Esta última expresión es la fórmula de Parke del antineutrino.

Está ecuación es similar a (2.88), con la sutíliza de que $P_c \rightarrow \bar{P}_c$ y $\theta_m(t_0) \rightarrow \bar{\theta}_m(t_0)$.

Antes de finalizar este capítulo nos gustaría dedicar algunas líneas a discutir la ecuación (2.102) y su homóloga para el caso del neutrino (2.88). De los resultados deducidos en la presente sección uno puede observar que para el caso de dos generaciones hacer la sustitución $V \rightarrow -V$ en las soluciones obtenidas para el caso del neutrino, nos conducen a los correctos resultados para el antineutrino, esto se debe principalmente a dos factores. El primero de ellos es la simplicidad del problema, ya que la matriz de mezcla, además de ser real, solo depende de un parámetro físico relevante.

El segundo y quizás el más importante es el hecho de que únicamente existe una posible forma de mezclar los estados instantáneos, es decir, existe

una única probabilidad de cruzamiento, lo cual, como veremos más adelante, permite establecer una relación entre las probabilidades de cruzamiento de ambos casos; sin embargo, cuando se consideran las tres generaciones existen varias maneras en las que los estados instantáneos se mezclen dando pie a más de una probabilidad de cruzamiento, más aún en el caso del antineutrino no es posible definir las probabilidades de cruzamiento de forma satisfactoria.

Esta es justamente la motivación que tenemos para estudiar el caso de tres generaciones de manera separada, ya que las sutilezas entre ambos casos merecen un estudio detallado y profundo con la finalidad de evitar caer en errores o conclusiones equivocadas.

Capítulo 3

Oscilaciones para tres generaciones

Como el objetivo del presente trabajo está dirigido a encontrar una forma de expresar el operador de evolución del antineutrino, en la base de los estados instantáneos para el caso de tres generaciones, decidimos dedicarle un capítulo al tema de las oscilaciones de neutrino/antineutrino en materia cuando toman parte activa en la mezcla las tres generaciones, esto tiene dos objetivos principales. El primero de ellos es darle una base firme a los resultados que presentaremos más adelante.

El segundo es estudiar con cierto detalle la mezcla de tres generaciones en materia, ya que en la literatura el caso de dos generaciones es ampliamente estudiado [13, 15, 21], y en la mayoría de las veces el caso de tres generaciones no es discutido.

Por tales motivos en el presente capítulo nos disponemos a revisar con cierto detalle las oscilaciones de neutrino/antineutrino en materia, esto presenta nuevos retos, empezando por el hecho de que la matriz de mezcla ahora depende de cuatro parámetros físicos, a saber, tres ángulos de mezcla y una fase responsable de la violación de la simetría de CP .

3.1. Oscilaciones de neutrinos en materia para el caso de tres generaciones

Empecemos considerando la ecuación de evolución de los estados de sabor del neutrino,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \\ \psi_\tau \end{pmatrix} = \left\{ U \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} U^\dagger + \begin{pmatrix} V_e & 0 & 0 \\ 0 & V_\mu & 0 \\ 0 & 0 & V_\tau \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \\ \psi_\tau \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

La materia ordinaria está compuesta por e^- , p , n , de donde las interacciones de corriente cargada (CC) solo afectan a los neutrinos electrónicos ν_e . De la ecuación (2.22) el potencial de V_μ y V_τ son iguales y en este caso es seguro poner $V \equiv V_e - V_\mu \sim V_e - V_\tau$ [21], de tal forma que

$$H_m(t) = \zeta(t)\mathbb{I} + U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} U^\dagger + V(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

con

$$\zeta(t) = E_1 + V_{\mu,\tau}. \quad (3.3)$$

Nuevamente redefiniendo los campos leptónicos, es posible eliminar el factor proporcional a la identidad; haciendo abuso de la notación, denotaremos a H_m como la parte no trivial de (3.2) y nos centraremos en la misma para estudiar la evolución de los estados de sabor.

Buscaremos una forma más sencilla de escribir el Hamiltoniano en materia, para ello usaremos la parametrización de la matriz de mezcla dada en (1.43).

$$\begin{aligned} H_m(t) &= U H_0 U^\dagger + V(t) Y \\ &= \tilde{U} H_0 \tilde{U}^\dagger + V(t) Y, \end{aligned} \quad (3.4)$$

con

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

donde hemos usado el hecho de que tanto H_0 y Γ son matrices diagonales, y, por lo tanto, conmutan, es decir $[H_0, \Gamma] = 0$. También definimos

$$\tilde{U} = \mathcal{O}_{23} \Gamma \mathcal{O}_{13} \mathcal{O}_{12} \quad (3.6)$$

tal que

$$U = \tilde{U} \Gamma^\dagger. \quad (3.7)$$

otro par de relaciones que nos serán útiles, son las siguientes

$$\begin{aligned} [\Gamma, Y] &= 0 \\ [\mathcal{O}_{23}, Y] &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Lo cual se sigue de las definiciones de Γ , \mathcal{O}_{23} y Y .

De esta forma podemos reescribir H_m como

$$\begin{aligned} H_m(t) &= \mathcal{O}_{23} \Gamma \{ \mathcal{O}_{13} \mathcal{O}_{12} H_0 \mathcal{O}_{12}^T \mathcal{O}_{13}^T + V(t) Y \} \Gamma^\dagger \mathcal{O}_{23}^T, \\ &= \mathcal{O}_{23} \Gamma \mathcal{H}_m \Gamma^\dagger \mathcal{O}_{23}^T, \end{aligned} \quad (3.9)$$

definiendo el Hamiltoniano $\mathcal{H}_m(t)$ del siguiente modo:

$$\mathcal{H}_m(t) = \mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{12}^T\mathcal{O}_{13}^T + V(t)Y. \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.9) en la ecuación de Schrödinger y multiplicando por la izquierda por $\Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T$

$$i\frac{\partial}{\partial t}(\Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T\Psi) = \{\mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{12}^T\mathcal{O}_{13}^T + V(t)Y\}(\Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T\Psi). \quad (3.11)$$

En este punto nos es conveniente definir

$$\Psi' \equiv \Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T\Psi, \quad (3.12)$$

de forma explícita

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_e \\ c_{23}\psi_\mu - s_{23}\psi_\tau \\ [s_{23}\psi_\mu + c_{23}\psi_\tau]e^{-i\delta} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

El estado Ψ' no es un estado de sabor, ya que está dado en términos de la mezcla entre los estados ψ_μ y ψ_τ ocasionada por el ángulo θ_{23} , además de contener la fase de violación de CP . La evolución de los nuevos estados está dictada por $\mathcal{H}_m(t)$.

Queremos estudiar las propiedades del Hamiltoniano $\mathcal{H}_m(t)$. La relación entre este nuevo Hamiltoniano y el Hamiltoniano en materia original está dada por la ecuación (3.9).

A continuación probaremos el siguiente Teorema

Teorema 3.1.1. $H_m(t)$ y $\mathcal{H}_m(t)$ tienen los mismos eigenvalores.

Demostración. De la ecuación (3.9) y de la propiedad cíclica del determinante se tiene que

$$\begin{aligned} \det(H_m(t) - \lambda\mathbb{I}) &= \det(\mathcal{O}_{23}\Gamma\mathcal{H}_m(t)\Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T - \lambda\mathbb{I}) \\ &= \det(\mathcal{O}_{23}\Gamma(\mathcal{H}_m(t) - \lambda\mathbb{I})\Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T) \\ &= \det(\mathcal{O}_{23}\Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T(\mathcal{H}_m(t) - \lambda\mathbb{I})) \\ &= \det(\mathcal{H}_m(t) - \lambda\mathbb{I}) \end{aligned}$$

como $H_m(t)$ y $\mathcal{H}_m(t)$ tiene la misma ecuación característica, el teorema ha quedado demostrado.

QED

Estudiar los eigenvalores de $\mathcal{H}_m(t)$ tiene algunas ventajas sobre $H_m(t)$. La primera de ella es que el número de parámetros físicos se reduce, ya que $\mathcal{H}_m(t)$ no depende de θ_{23} ni de δ ; más aún, del teorema 3.1.1, se deduce que los eigenvalores del Hamiltoniano completo $H_m(t)$ tampoco dependerán de estas cantidades.

La segunda ventaja que ofrece $\mathcal{H}_m(t)$, es el hecho de que es una matriz real y simétrica, la cual se puede diagonalizar por una transformación ortogonal que denotaremos por $\mathcal{O}_m(t)$, es decir,

$$\mathcal{O}_m^T(t)\mathcal{H}_m(t)\mathcal{O}_m(t) = H_D(t) = \text{diag}(\epsilon_1(t), \epsilon_2(t), \epsilon_3(t)). \quad (3.14)$$

donde H_D es la matriz de los eigenvalores reducidos.

Debemos recordar que para encontrar los eigenvalores completos de H_m que aparecen en la ecuación (3.1) debemos reincorporar el factor proporcional a la identidad que sustrajimos en la ecuación (3.4), es decir, el eigenvalor completo estará dado por

$$\mathcal{E}_i(t) = \zeta(t) + \epsilon_i(t), \quad (3.15)$$

con $\zeta(t)$ dado por (3.3).

Para encontrar la transformación unitaria que diagonaliza el Hamiltoniano completo dado en (3.4), procedamos del siguiente modo. Sustituyamos la inversa de (3.9) en (3.14)

$$\mathcal{O}_m^T(t)\Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T H_m(t)\mathcal{O}_{23}\Gamma\mathcal{O}_m(t) = H_D(t),$$

haciendo uso del hecho de que tanto Γ como $H_D(t)$ son matrices diagonales y, por tanto, conmutan

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_m^T(t)\Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T H_m(t)\mathcal{O}_{23}\Gamma\mathcal{O}_m(t) &= H_D(t) \\ \Gamma\mathcal{O}_m^T(t)\Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T H_m(t)\mathcal{O}_{23}\Gamma\mathcal{O}_m(t)\Gamma^\dagger &= \Gamma H_D(t)\Gamma^\dagger \\ (\mathcal{O}_{23}\Gamma\mathcal{O}_m(t)\Gamma^\dagger)^\dagger H_m(t)(\mathcal{O}_{23}\Gamma\mathcal{O}_m(t)\Gamma^\dagger) &= H_D(t) \\ U_m^\dagger(t)H_m(t)U_m(t) &= H_D(t) \end{aligned}$$

donde definimos la matriz de mezcla en materia como

$$U_m(t) = \mathcal{O}_{23}\Gamma\mathcal{O}_m(t)\Gamma^\dagger. \quad (3.16)$$

al comparar esta última ecuación con la parametrización de la matriz de mezcla en el vacío dada en (1.43), se puede apreciar que el producto $\mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}$ es remplazado por la transformación ortogonal $\mathcal{O}_m(t)$. En capítulos subsecuentes buscaremos proporcionar una forma exacta o aproximada de las entradas de la matriz $\mathcal{O}_m(t)$, siendo éstas últimas las más fáciles de usar y las más conveniente para nuestros propósitos.

3.1.1. Probabilidades de Oscilaciones en materia para el caso de tres sabores

Al diagonalizar el Hamiltoniano $\mathcal{H}_m(t)$, implícitamente, hemos hecho un cambio de base, a la base de los estados instantáneos en materia $\Phi_m(t)$. Su relación con los estados de sabor está dada por la transformación

$$\Psi(t) = U_m(t)\Phi_m(t),$$

la cual es análoga a (2.38) con la salvedad de que $U_m(t)$ estará dada por (3.16) donde \mathcal{O}_m aún es desconocida.

La ecuación de evolución que obedecen los estados $\Phi_m(t)$ se puede obtener a partir de la ecuación (2.40) usando (3.16), esto es:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U_m(t) \Phi_m(t) &= H_m(t) U_m(t) \Phi_m(t), \\ i \mathcal{O}_{23} \Gamma \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{O}_m(t) \Gamma^\dagger \Phi_m(t)) &= H_m(t) \mathcal{O}_{23} \Gamma \mathcal{O}_m(t) \Gamma^\dagger \Phi_m(t) \end{aligned}$$

donde hemos tomado en cuenta que \mathcal{O}_{23} y Γ no dependen del tiempo y, por lo tanto, conmutan con la derivada temporal. Multiplicando la última ecuación por la izquierda por $\Gamma^\dagger \mathcal{O}_{23}^T$ y usando la ecuación (3.9)

$$i \mathcal{O}_m(t) \frac{\partial}{\partial t} \Gamma^\dagger \Phi_m(t) = \left\{ \mathcal{H}_m(t) \mathcal{O}_m(t) - i \frac{\partial \mathcal{O}_m(t)}{\partial t} \right\} \Gamma^\dagger \Phi_m(t),$$

y multiplicando nuevamente por la izquierda por $\mathcal{O}_m^T(t)$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \Gamma^\dagger \Phi_m(t) &= \left\{ \mathcal{O}_m^T(t) \mathcal{H}_m(t) \mathcal{O}_m(t) - i \mathcal{O}_m^T(t) \frac{\partial \mathcal{O}_m(t)}{\partial t} \right\} \Gamma^\dagger \Phi_m(t) \\ i \frac{\partial}{\partial t} \Phi'_m(t) &= \left\{ H_D(t) - i \mathcal{O}_m^T(t) \frac{\partial \mathcal{O}_m(t)}{\partial t} \right\} \Phi'_m(t). \end{aligned} \quad (3.17)$$

En la última igualdad usamos la ecuación (3.14) y definimos $\Phi'_m(t)$ como

$$\Phi'_m(t) \equiv \Gamma^\dagger \Phi_m(t). \quad (3.18)$$

Podemos denotar al Hamiltoniano dado en la ecuación (3.17) por $\mathcal{H}_m(t)$,

$$\mathcal{H}_m(t) = H_D(t) - i \mathcal{O}_m^T(t) \frac{\partial \mathcal{O}_m(t)}{\partial t}. \quad (3.19)$$

A diferencia del caso de dos sabores, donde teníamos una representación de $U_m(t)$, desconocemos la estructura explícita de $\mathcal{O}_m(t)$. Como veremos

más adelante, esta puede ser encontrada de forma explícita si conocemos la representación exacta de los eigenvalores en la base instantánea; sin embargo, el objetivo del presente trabajo no es buscar soluciones exactas a la ecuación (3.17), sino más bien encontrar una manera de relacionar los resultados que se obtienen al resolver estas ecuaciones, con los resultados que se obtendrían al resolver el mismo juego de ecuaciones para el caso del antineutrino.

Con ello en mente trabajaremos con esta ecuación he intentaremos deducir resultados generales que nos permitan dar una conexión entre el caso del neutrino y el antineutrino; primero que nada consideraremos nuevamente el caso en el que los términos fuera de la diagonal principal son despreciables, es decir, la aproximación adiabática. En este caso la ecuación (3.17) se restringe a:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi'_m(t) = H_D(t) \Phi'_m(t),$$

en otras palabras, no habrá transiciones entre los estados $\phi_1^m(t) \leftrightarrow \phi_2^m(t) \leftrightarrow \phi_3^m(t)$, este caso es totalmente análogo al de resolver el problema en un medio con densidad constante, en el aspecto de que no habrá transiciones entre los estados de masa instantáneos.

Nuestro principal interés de la aproximación adiabática consiste en dar el operador de evolución adiabático. Denotemos por $\Phi'_m{}^A(t)$ a las amplitudes de los estados instantáneos de masa en materia en la aproximación adiabática. Su ecuación de evolución temporal está únicamente dictada por $H_D(t)$ y su operador de evolución $\Phi'_m{}^A(t) = \mathcal{U}_m^A(t, t_0) \Phi'_m{}^A(t_0)$, obedece la ecuación

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}_m^A(t, t_0) = H_D(t) \mathcal{U}_m^A(t, t_0), \quad \mathcal{U}_m^A(t_0, t_0) = \mathbb{I} \quad (3.20)$$

en este caso el operador de evolución toma la forma:

$$\mathcal{U}_m^A(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha_3(t)} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\alpha_i(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{E}_i(t') dt', \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.22)$$

donde en las definiciones de las cantidades $\alpha_i(t)$ se usan los eigenvalores completos dados en la ecuación (3.15).

Ya que este es el caso más simple posible a tratar cuando se consideran los efectos de la materia en las oscilaciones de neutrinos en donde toman parte las tres generaciones, tomaremos algunas líneas para discutirlo de manera cualitativa. Como veremos más adelante, los eigenvalores del Hamiltoniano

H_m o equivalentemente \mathcal{H}_m , presentan un comportamiento resonante como funciones del potencial efectivo; donde los eigenvalores son casi degenerados. Las resonancias ocurren cuando la masa inducida del neutrino electrónico se acerca a una de las masas de los neutrinos más pesados; la resonancia baja (*lower*) ocurre cuando $V_l \simeq m_2^2$, mientras que la resonancia alta (*higher*) toma lugar en $V_h \simeq m_3^2$ [17].

Este argumento es usado en [17] para desarrollar soluciones aproximadas cerca de cada resonancia, ya que es posible desacoplar uno de los estados de sabor y quedarnos con un problema efectivo de 2×2 para cada resonancia. En las vecindades de la primera resonancia, denotada por $V \simeq V_l$, las transiciones ocurren los estados $\phi_1^m(t) \leftrightarrow \phi_2^m(t)$ dejando el estado $\phi_3^m(t)$ sin cambios; por otro lado, cuando el potencial se acerca al valor de la resonancia de altas densidades $V \simeq V_h$ las transiciones ocurren entre los estados $\phi_2^m(t) \leftrightarrow \phi_3^m(t)$ y el estado $\phi_1^m(t)$ queda desacoplado de este sistema.

Al considerar el Hamiltoniano completo dado en (3.19) la parte no diagonal del mismo ocasionará que los tres estados instantáneos tomen parte activa en la mezcla $\phi_1^m(t) \leftrightarrow \phi_2^m(t) \leftrightarrow \phi_3^m(t)$, por lo que nos vemos obligados a resolver la ecuación (3.17), como se hizo notar anteriormente. Este enfoque presenta varios inconvenientes, el primero de ellos es que necesitamos conocer la matriz \mathcal{O}_m , y aunque esto es posible ya sea de forma exacta o bien aproximada, aún permanece la complejidad de resolver la ecuación diferencial, la que depende en gran medida de la forma funcional de $V(t)$. Por eso, optaremos por dar una parametrización general del operador de evolución de la parte no adiabática sin hacer referencia específica a sus soluciones.

El Hamiltoniano (3.19) se puede escribir como la suma de un Hamiltoniano que describe la evolución adiabática de los estados instantáneos H_D , más un Hamiltoniano que describe la evolución no adiabática, es decir,

$$\mathcal{H}_m(t) = H_D(t) + H_{NA}(t), \quad (3.23)$$

donde $H_{NA}(t) = -i\mathcal{O}_m^T(t)\dot{\mathcal{O}}_m(t)$; como la solución de los estados adiabáticos es conocida, podemos usar los resultados del Apéndice D, para factorizar el operador de evolución del siguiente modo:

$$\mathcal{U}_m(t, t_0) = \mathcal{U}_m^A(t, t_0)\mathcal{U}_m^{NA}(t, t_0). \quad (3.24)$$

El operador de evolución correspondiente a la parte adiabática está dado por las ecuaciones (3.21) y (3.22). Para encontrar una aproximación a $\mathcal{U}_m^{NA}(t, t_0)$ podemos aprovechar el hecho de que razón la razón de Δ_{21}/Δ_{31} es pequeña y, por lo tanto, las resonancias o equivalentemente los valores de potencial donde dos de los eigenvalores se vuelven casi degenerados, están lo

suficientemente separados para considerar que en las vecindades de los valores resonantes del potencial efectivo el problema se puede considerar como una mezcla efectiva de dos sabores y un tercer neutrino desacoplado.

Tal como se muestra en la referencia [1], usando nuevamente los resultados del Apéndice D, la ecuación que obedece la parte no adiabática se puede escribir como:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}_{NA} = -i (\mathcal{U}_A^\dagger \mathcal{O}_m^T \dot{\mathcal{O}}_m \mathcal{U}_A) \mathcal{U}_{NA}, \quad (3.25)$$

Si usáramos la aproximación a la matriz \mathcal{O}_m dada en dicha referencia, es posible demostrar que el Hamiltoniano de la parte no adiabática nuevamente puede separarse en la suma de un Hamiltoniano que describe la evolución de los estados instantáneos en la región de bajas densidades y un Hamiltoniano que describe la evolución de los estados de instantáneos a altas densidades $\mathcal{H}_l + \mathcal{H}_h$, de este modo el operador de evolución de la parte no adiabática se puede aproximar como el producto

$$\mathcal{U}_{NA}(t, t_0) \simeq \mathcal{U}_l(t, t_0) \mathcal{U}_h(t, t_0) \quad (3.26)$$

donde $\mathcal{U}_{l,h}$ es el operador de evolución de $\mathcal{H}_{l,h}$; cada uno correspondiente a un problema efectivo de 2×2 .

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_l &= \begin{pmatrix} \sqrt{1-P_l} & \sqrt{P_l} e^{i\zeta} & 0 \\ -\sqrt{P_l} e^{-i\zeta} & \sqrt{1-P_l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U}_h &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-P_h} & \sqrt{P_h} e^{i\beta} \\ 0 & -\sqrt{P_h} e^{-i\beta} & \sqrt{1-P_h} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

en esta última ecuación P_h y P_l representan las probabilidades de cruzamiento en las vecindades de los valores resonantes V_h y V_l , respectivamente.

Esta aproximación del operador de evolución de la parte no adiabática suele usarse en la literatura [17] a fin de desarrollar soluciones aproximadas a las probabilidades de oscilaciones de los neutrinos para el caso de tres generaciones en materia. Ha resultado muy exitosa al considerar la mezcla de tres sabores en materia para el neutrino; sin embargo, este mismo razonamiento no se puede aplicar al caso de los antineutrinos, ya que el cambio en el signo del potencial efectivo (ecuaciones (2.30) y (2.35)) provoca que los valores resonantes del potencial efectivo se encuentren en valores negativos y, por tanto, no físicos. Por tal motivo, nos gustaría dar la probabilidad de oscilación de un neutrino electrónico sin emplear la aproximación (3.26).

Consideraremos que en el borde del medio el potencial efectivo se anula, es decir, $V(t_\star) = 0$, y enfoquémonos en obtener las probabilidades de

oscilación promedio dadas en la ecuación (2.44). Supongamos una vez más que, al tiempo t_0 , se crea un estado puro de sabor electrónico y, utilizando el formalismo del operador de evolución, obtengamos los estados instantáneos en el borde del medio:

$$\Phi_m(t_\star) = \mathcal{U}_m(t_\star, t_0)\Phi_m(t_0), \quad (3.28)$$

o, en términos de componentes,

$$\begin{aligned} \phi_1^m(t_\star) &= \mathcal{U}_{11}^m \phi_1^m(t_0) + \mathcal{U}_{12}^m \phi_2^m(t_0) + \mathcal{U}_{13}^m \phi_3^m(t_0), \\ \phi_2^m(t_\star) &= \mathcal{U}_{21}^m \phi_1^m(t_0) + \mathcal{U}_{22}^m \phi_2^m(t_0) + \mathcal{U}_{23}^m \phi_3^m(t_0), \\ \phi_3^m(t_\star) &= \mathcal{U}_{31}^m \phi_1^m(t_0) + \mathcal{U}_{32}^m \phi_2^m(t_0) + \mathcal{U}_{33}^m \phi_3^m(t_0), \end{aligned} \quad (3.29)$$

ya que en la ecuación (2.44) solo aparecen las probabilidades promedio, los términos de interferencia pueden ser despreciados,

$$\begin{aligned} \langle \|\phi_1^m(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\mathcal{U}_{11}^m\|^2 \|\phi_1^m(t_0)\|^2 + \|\mathcal{U}_{12}^m\|^2 \|\phi_2^m(t_0)\|^2 + \|\mathcal{U}_{13}^m\|^2 \|\phi_3^m(t_0)\|^2, \\ \langle \|\phi_2^m(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\mathcal{U}_{21}^m\|^2 \|\phi_1^m(t_0)\|^2 + \|\mathcal{U}_{22}^m\|^2 \|\phi_2^m(t_0)\|^2 + \|\mathcal{U}_{23}^m\|^2 \|\phi_3^m(t_0)\|^2, \\ \langle \|\phi_3^m(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\mathcal{U}_{31}^m\|^2 \|\phi_1^m(t_0)\|^2 + \|\mathcal{U}_{32}^m\|^2 \|\phi_2^m(t_0)\|^2 + \|\mathcal{U}_{33}^m\|^2 \|\phi_3^m(t_0)\|^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Gracias a los trabajos de P. Dita [9], la factorización de una matriz unitaria de 3×3 es conocida en forma general y la podemos utilizar para encontrar las entradas del operador de evolución \mathcal{U}_{ij}^m usando los resultados dados en el Apéndice C,

$$\mathcal{U}_m(t, t_0) = \mathcal{U}_m^A(t, t_0)\mathcal{U}_m^{NA}(t, t_0) \quad (3.31)$$

donde

$$\mathcal{U}_m^A(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha_3(t)} \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_m^{NA} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{1-P_t} & -\sqrt{P_t} e^{i\gamma} \\ 0 & -\sqrt{P_t} e^{-i\gamma} & \sqrt{1-P_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-P_l} & \sqrt{P_l} e^{i\zeta} & 0 \\ -\sqrt{P_l} e^{-i\zeta} & \sqrt{1-P_l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-P_h} & \sqrt{P_h} e^{i\beta} \\ 0 & -\sqrt{P_h} e^{-i\beta} & \sqrt{1-P_h} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Al hacer la aproximación (3.26) consideramos que los efectos de la mezcla de los estados instantáneos solo ocurre cerca de las resonancias, aquí hemos

introducido una nueva variable, que tiene el significado físico de dar cuenta de los efectos que se desprecian en esta aproximación, es decir esta nueva variable la interpretamos como una probabilidad de cruzamiento de los estados instantáneos en materia $\phi_1^m(t) \rightleftharpoons \phi_2^m(t) \rightleftharpoons \phi_3^m(t)$, cuando el potencial efectivo está en un valor intermedio entre el valor resonante del potencial a bajas densidades V_l y el valor del potencial en la región de altas densidades V_h ; a esta nueva probabilidad de cruzamiento la llamaremos *Probabilidad de transición* y la denotaremos por P_t .

Vemos que en el caso en el que $P_t \rightarrow 0$ se recupera la aproximación dada en (3.26), en este caso aún quedan tres fases independientes a determinar α, β, γ .

La condición inicial de los estados instantáneos se puede obtener invirtiendo la ecuación (2.38), $\Phi_m(t_0) = U_m^\dagger(t) \Psi(t_0)$,

$$\begin{aligned}\Phi_m(t_0) &= U_m^\dagger(t_0) \Psi(t_0) = (\mathcal{O}_{23} \Gamma \mathcal{O}_m(t_0) \Gamma^\dagger)^\dagger \Psi(t_0) \\ \Phi'_m(t_0) &= \mathcal{O}_m^T(t_0) \Psi'(t_0)\end{aligned}\quad (3.34)$$

con $\Phi'_m(t_0) = \Psi'(t_0) = \Gamma^\dagger \mathcal{O}_{23}^T \Psi(t_0)$, donde hemos usado la parametrización de la matriz de mezcla dada en (3.16) y las definiciones (3.12) y (3.18). Así la relación entre los estados de instantáneos y los estados de sabor se puede transformar a una relación entre los estados primados, la cual resulta ser más conveniente para nuestros propósitos.

Como supusimos que al tiempo t_0 se creó un estado puro de sabor electrónico

$$\Psi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

y dado que en este caso las amplitudes de los estados ψ_μ y ψ_τ se anulan, la condición inicial queda en términos de las estradas de la matriz $\mathcal{O}_m(t_0)$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \phi_1^m(t_0) \\ \phi_2^m(t_0) \\ \phi_3^m(t_0) e^{-i\delta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{11}^m(t_0) & \mathcal{O}_{12}^m(t_0) & \mathcal{O}_{13}^m(t_0) \\ \mathcal{O}_{21}^m(t_0) & \mathcal{O}_{22}^m(t_0) & \mathcal{O}_{23}^m(t_0) \\ \mathcal{O}_{31}^m(t_0) & \mathcal{O}_{32}^m(t_0) & \mathcal{O}_{33}^m(t_0) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{11}^m(t_0) \\ \mathcal{O}_{12}^m(t_0) \\ \mathcal{O}_{13}^m(t_0) \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (3.36)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|\phi_1^m(t_0)\|^2 &= \|\mathcal{O}_{11}^m(t_0)\|^2, \\ \|\phi_2^m(t_0)\|^2 &= \|\mathcal{O}_{12}^m(t_0)\|^2, \\ \|\phi_3^m(t_0)\|^2 &= \|\mathcal{O}_{13}^m(t_0)\|^2,\end{aligned}\quad (3.37)$$

Empleando las ecuaciones (C.16) y (3.30) podemos dar los módulos de las amplitudes de los estados instantáneos en el borde del medio

$$\begin{aligned}
\langle \|\phi_1^m(t_\star)\|^2 \rangle &= (1 - P_l)\|\mathcal{O}_{11}^m(t_0)\|^2 + (1 - P_h)P_l\|\mathcal{O}_{12}^m(t_0)\|^2 \\
&\quad + P_hP_l\|\mathcal{O}_{13}^m(t_0)\|^2, \\
\langle \|\phi_2^m(t_\star)\|^2 \rangle &= (1 - P_t)P_1\|\mathcal{O}_{11}^m(t_0)\|^2 \\
&\quad + (P_tP_h + (1 - P_1)(1 - P_h)(1 - P_t) - \mathcal{P})\|\mathcal{O}_{12}^m(t_0)\|^2 \\
&\quad + ((1 - P_l)(1 - P_t)P_h + (1 - P_h)P_t + \mathcal{P})\|\mathcal{O}_{13}^m(t_0)\|^2, \\
\langle \|\phi_3^m(t_\star)\|^2 \rangle &= P_lP_t\|\mathcal{O}_{11}^m(t_0)\|^2 \\
&\quad + ((1 - P_l)(1 - P_h)P_t + (1 - P_t)P_h + \mathcal{P})\|\mathcal{O}_{12}^m(t_0)\|^2 \\
&\quad + ((1 - P_l)P_hP_t + (1 - P_h)(1 - P_t) - \mathcal{P})\|\mathcal{O}_{13}^m(t_0)\|^2,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

donde definimos la cantidad

$$\mathcal{P} \equiv 2\sqrt{(1 - P_l)(1 - P_h)(1 - P_t)P_hP_t} \cos(\beta - \gamma). \tag{3.39}$$

Finalmente, usando las ecuaciones (3.38) y (2.44) estamos en condiciones de proporcionar la probabilidad promedio de supervivencia del neutrino eléctrico:

$$\begin{aligned}
\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle &= \|U_{e1}\|^2 \left[(1 - P_l)\|\mathcal{O}_{11}^m(t_0)\|^2 + (1 - P_h)P_l\|\mathcal{O}_{12}^m(t_0)\|^2 \right. \\
&\quad \left. + P_hP_l\|\mathcal{O}_{13}^m(t_0)\|^2 \right] \\
&\quad + \|U_{e2}\|^2 \left[(1 - P_t)P_l\|\mathcal{O}_{11}^m(t_0)\|^2 \right. \\
&\quad + (P_tP_h + (1 - P_l)(1 - P_h)(1 - P_t) - \mathcal{P})\|\mathcal{O}_{12}^m(t_0)\|^2 \\
&\quad \left. + ((1 - P_l)(1 - P_t)P_h + (1 - P_h)P_t + \mathcal{P})\|\mathcal{O}_{13}^m(t_0)\|^2 \right] \\
&\quad + \|U_{e3}\|^2 \left[P_lP_t\|\mathcal{O}_{11}^m(t_0)\|^2 \right. \\
&\quad + ((1 - P_l)(1 - P_h)P_t + (1 - P_t)P_h + \mathcal{P})\|\mathcal{O}_{12}^m(t_0)\|^2 \\
&\quad \left. + ((1 - P_l)P_hP_t + (1 - P_h)(1 - P_t) - \mathcal{P})\|\mathcal{O}_{13}^m(t_0)\|^2 \right].
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Para recuperar las soluciones aproximadas cerca de las resonancias en la ecuación anterior debemos hacer tender $P_t \rightarrow 0$. Lo primero que notamos es

que, si $P_t = 0 \Rightarrow \mathcal{P} = 0$, esto se ve directamente la ecuación (3.39) y, por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle = & \|U_{e1}\|^2 \left[(1 - P_l) \|\mathcal{O}_{11}^m(t_0)\|^2 + (1 - P_h) P_l \|\mathcal{O}_{12}^m(t_0)\|^2 \right. \\ & \left. + P_h P_l \|\mathcal{O}_{13}^m(t_0)\|^2 \right] + \|U_{e2}\|^2 \left[P_1 \|\mathcal{O}_{11}^m(t_0)\|^2 \right. \\ & \left. + (1 - P_1)(1 - P_h) \|\mathcal{O}_{12}^m(t_0)\|^2 + (1 - P_l) P_h \|\mathcal{O}_{13}^m(t_0)\|^2 \right] \\ & + \|U_{e3}\|^2 \left[P_h \|\mathcal{O}_{12}^m(t_0)\|^2 + (1 - P_h) \|\mathcal{O}_{13}^m(t_0)\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Queremos enfatizar la importancia de la ecuación (3.40), ya que será una de las ecuaciones que nos permitirá establecer la conexión con el caso del antineutrino, además del hecho de que en el límite $P_t = 0$ recuperamos las soluciones aproximadas a la probabilidad de oscilaciones promedios cuando se considera que el problema puede ser tratado como dos subsistemas de 2×2 , tal como se esperaba.

3.2. Oscilaciones de antineutrinos en materia para el caso de tres generaciones

En esta sección estudiaremos las oscilaciones del antineutrino en materia para el caso de tres generaciones y, aunque es cierto que presenta una gran similitud con el caso del neutrino, también presenta algunas sutilezas que vale la pena enfatizar. Como se mencionó en la sección 2.1, cuando los antineutrinos se propagan en materia es necesario hacer el cambio del signo del potencial efectivo $V \rightarrow -V$, pero este no es el único cambio que debemos realizar, ya que como se señaló en la sección 1.1 debemos hacer la modificación adicional de cambiar $U \rightarrow U^*$.

Por lo tanto, la ecuación que dicta la evolución de las amplitudes de los estados de sabor para el caso del antineutrino se escribe de la siguiente manera:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_e \\ \bar{\psi}_\mu \\ \bar{\psi}_\tau \end{pmatrix} = \left\{ U^* \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} U^T - \begin{pmatrix} V_e & 0 & 0 \\ 0 & V_\mu & 0 \\ 0 & 0 & V_\tau \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_e \\ \bar{\psi}_\mu \\ \bar{\psi}_\tau \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

La notación $\bar{\psi}$, se refiere a las cantidades del antineutrino, es decir, las cantidades con barra se refieren al caso de la antimateria, mantendremos esta

notación durante el resto del presente trabajo. Al igual que en caso del neutrino, podemos factorizar un término proporcional a la identidad, el cual da lugar a una fase global inobservable. De esta manera

$$\overline{H}_m(t) = \overline{\zeta}(t)\mathbb{I} + U^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} U^T - V(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

donde

$$\overline{\zeta}(t) = E_1 - V_{\mu,\tau}(t). \quad (3.44)$$

con Δ_{ij} y $V(t)$ definidas de igual forma que en el caso del neutrino y hemos considerado únicamente las interacciones de corriente cargada (CC).

Haciendo uso de que al ser H_0 y Γ conmutan y de los conmutadores dados en (3.8), es posible reescribir \overline{H}_m como

$$\begin{aligned} \overline{H}_m(t) &= \mathcal{O}_{23}\Gamma^\dagger \{ \mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{12}^T\mathcal{O}_{13}^T - V(t)Y \} \Gamma\mathcal{O}_{23}^T, \\ &= \mathcal{O}_{23}\Gamma^\dagger \overline{\mathcal{H}}_m(t)\Gamma\mathcal{O}_{23}^T, \end{aligned} \quad (3.45)$$

con

$$\overline{\mathcal{H}}_m(t) = \mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{12}^T\mathcal{O}_{13}^T - V(t)Y. \quad (3.46)$$

Definiendo

$$\overline{\Psi}' \equiv \Gamma\mathcal{O}_{23}^T\Psi, \quad (3.47)$$

la ecuación (3.42) se puede reescribir de una forma más compacta

$$i\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Psi}' = \{ \mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{12}^T\mathcal{O}_{13}^T - V(t)Y \} \overline{\Psi}'. \quad (3.48)$$

Siguiendo la misma línea de pensamiento que se usó en el caso del neutrino, buscaremos establecer una relación entre los eigenvalores de los hamiltonianos \overline{H}_m y $\overline{\mathcal{H}}_m$, con ello en mente, demostremos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. \overline{H}_m y $\overline{\mathcal{H}}_m$ tienen los mismos eigenvalores.

Demostración. De la ecuación (3.45) y de la propiedad cíclica del determinante se tiene que

$$\begin{aligned} \det(\overline{H}_m - \lambda\mathbb{I}) &= \det(\mathcal{O}_{23}\Gamma^\dagger\overline{\mathcal{H}}_m\Gamma\mathcal{O}_{23}^T - \lambda\mathbb{I}) \\ &= \det(\mathcal{O}_{23}\Gamma^\dagger(\overline{\mathcal{H}}_m - \lambda\mathbb{I})\Gamma\mathcal{O}_{23}^T) \\ &= \det(\mathcal{O}_{23}\Gamma^\dagger\Gamma\mathcal{O}_{23}^T\overline{\mathcal{H}}_m - \lambda\mathbb{I}) \\ &= \det(\overline{\mathcal{H}}_m - \lambda\mathbb{I}) \end{aligned}$$

como \overline{H}_m y $\overline{\mathcal{H}}_m$ tiene la misma ecuación característica, se deduce que ambos deben tener necesariamente los mismos eigenvalores.

QED

Del Teorema (3.2.1) se deduce que los eigenvalores de \overline{H}_m no dependen ni de θ_{23} ni de δ , esta no es la única ventaja que ofrece trabajar con $\overline{\mathcal{H}}_m$, ya que al ser esta última una matriz real y simétrica, puede diagonalizarse por una transformación ortogonal, la cual denotamos como $\overline{\mathcal{O}}_m$, en otras palabras,

$$\overline{\mathcal{O}}_m^T(t)\overline{\mathcal{H}}_m\overline{\mathcal{O}}_m(t) = \overline{H}_D(t) = \text{diag}(\overline{\epsilon}_1(t), \overline{\epsilon}_2(t), \overline{\epsilon}_3(t)). \quad (3.49)$$

Las cantidades $\overline{\epsilon}_i(t)$ que aparecen en esta última ecuación son los eigenvalores reducidos del antineutrino y se relacionan con los eigenvalores completos de \overline{H}_m de la siguiente manera,

$$\overline{\mathcal{E}}_i(t) = \overline{\zeta}(t) + \overline{\epsilon}_i(t), \quad (3.50)$$

con $\overline{\zeta}(t)$ dado en (3.44).

Por otro lado, sea $\overline{U}_m(t)$ la matriz de mezcla en materia para el caso del antineutrino o, dicho de otra manera, la matriz que diagonaliza a \overline{H}_m

$$\overline{U}_m^\dagger(t)\overline{H}_m\overline{U}_m(t) = \overline{H}_D(t). \quad (3.51)$$

Para establecer una relación entre las transformaciones $\overline{U}_m(t)$ y $\overline{\mathcal{O}}_m(t)$ procedemos del siguiente modo; empezamos considerando la ecuación (3.49) y usamos la inversa de (3.45)

$$\overline{\mathcal{O}}_m^T(t)\overline{\mathcal{H}}_m(t)\overline{\mathcal{O}}_m(t) = \overline{\mathcal{O}}_m^T(t)(\Gamma\mathcal{O}_{23}^T\overline{H}_m\mathcal{O}_{23}\Gamma^\dagger)\overline{\mathcal{O}}_m(t) = \overline{H}_D(t), \quad (3.52)$$

de aquí

$$\begin{aligned} \Gamma^\dagger\overline{\mathcal{O}}_m^T(t)\Gamma\mathcal{O}_{23}^T\overline{H}_m\mathcal{O}_{23}\Gamma^\dagger\overline{\mathcal{O}}_m(t)\Gamma &= \Gamma^\dagger\overline{H}_D(t)\Gamma \\ (\mathcal{O}_{23}\Gamma^\dagger\overline{\mathcal{O}}_m(t)\Gamma)^\dagger\overline{H}_m\mathcal{O}_{23}\Gamma^\dagger\overline{\mathcal{O}}_m(t)\Gamma &= \overline{H}_D(t) \end{aligned}$$

y comparando con

$$\overline{U}_m^\dagger(t)\overline{H}_m\overline{U}_m(t) = \overline{H}_D(t)$$

concluimos, que la matriz de mezcla en materia para el caso del antineutrino se puede escribir en términos de $\overline{\mathcal{O}}_m$ como se muestra a continuación

$$\overline{U}_m = \mathcal{O}_{23}\Gamma^\dagger\overline{\mathcal{O}}_m(t)\Gamma. \quad (3.53)$$

Al igual que en el caso del neutrino, el producto $\mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}$ que aparece en la matriz de mezcla del vacío es remplazado nuevamente por la transformación ortogonal $\overline{\mathcal{O}}_m$, la cual debe ser determinada, ya sea de forma exacta o aproximada.

En la sección 3.1.1 estudiamos en cierto detalle los aspectos generales de las oscilaciones de neutrinos en materia. Nos gustaría extender estos mismos resultados al caso de los antineutrinos, considerando las sutiles diferencias que se presentan entre ambos.

3.2.1. Probabilidades de Oscilaciones en materia para el antineutrino en el caso de tres generaciones

Al considerar el caso del antineutrino es una práctica común hacer el cambio $V \rightarrow -V$ en las ecuaciones (3.40), e interpretar esta nueva cantidad como la probabilidad de oscilaciones del antineutrino; sin embargo, para llegar a esta última ecuación hicimos varias aproximaciones alguna de las cuales no son aplicables al caso del antineutrino. Por tal motivo queremos estudiar de forma independiente el modo de obtener la probabilidad de oscilación del antineutrino.

Al diagonalizar el hamiltoniano $\overline{\mathcal{H}}_m$ hicimos un cambio a la base de los estados instantáneos en materia del antineutrino denotados por $\overline{\Phi}_m(t)$; la relación entre la base de sabor y la de los estados instantáneos es

$$\overline{\Psi}(t) = \overline{U}_m(t)\overline{\Phi}_m(t), \quad (3.54)$$

con $\overline{U}_m(t)$ dada por (3.53). Para encontrar la ecuación que dicta la evolución de los estados instantáneos empezamos sustituyendo (3.54) en $\partial_t \overline{\Psi} = \overline{H}_m \overline{\Psi}$, con $\overline{H}_m(t)$ dado por (3.43)

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \overline{U}_m(t) \overline{\Phi}_m(t) &= \overline{H}_m(t) \overline{U}_m(t) \overline{\Phi}_m(t), \\ i \mathcal{O}_{23} \Gamma^\dagger \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\mathcal{O}}_m(t) \Gamma \overline{\Phi}_m(t)) &= \overline{H}_m(t) \mathcal{O}_{23} \Gamma^\dagger \overline{\mathcal{O}}_m(t) \Gamma \overline{\Phi}_m(t) \end{aligned}$$

multiplicando por la izquierda por $\Gamma \mathcal{O}_{23}^T$ y usando la regla de producto de Leibnitz y la inversa de (3.45),

$$i \overline{\mathcal{O}}_m(t) \frac{\partial}{\partial t} \Gamma \overline{\Phi}_m(t) = \left\{ \overline{\mathcal{H}}_m(t) \overline{\mathcal{O}}_m(t) - i \frac{\partial \overline{\mathcal{O}}_m(t)}{\partial t} \right\} \Gamma \overline{\Phi}_m(t),$$

multiplicando por la izquierda por $\overline{\mathcal{O}}_m^T(t)$ y usando la ecuación (3.49)

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \Gamma \overline{\Phi}_m(t) &= \left\{ \overline{\mathcal{O}}_m^T(t) \overline{\mathcal{H}}_m(t) \overline{\mathcal{O}}_m(t) - i \overline{\mathcal{O}}_m^T(t) \frac{\partial \overline{\mathcal{O}}_m(t)}{\partial t} \right\} \Gamma \overline{\Phi}_m(t), \\ i \frac{\partial}{\partial t} \overline{\Phi}'_m(t) &= \left\{ \overline{H}_D(t) - i \overline{\mathcal{O}}_m^T(t) \frac{\partial \overline{\mathcal{O}}_m(t)}{\partial t} \right\} \overline{\Phi}'_m(t) \end{aligned} \quad (3.55)$$

donde hemos definimos $\overline{\Phi}'_m(t)$ como

$$\overline{\Phi}'_m(t) \equiv \Gamma \overline{\Phi}_m(t). \quad (3.56)$$

Denotaremos $\overline{\mathcal{H}}_m(t)$ al Hamiltoniano de los estados instantáneos en materia del antineutrino, es decir

$$\overline{\mathcal{H}}_m(t) = \overline{H}_D(t) - i\overline{\mathcal{O}}_m^T(t) \frac{\partial \overline{\mathcal{O}}_m(t)}{\partial t} \quad (3.57)$$

Al igual que en el caso del neutrino, la aproximación adiabática consiste en despreciar los términos fuera de la diagonal principal que dan origen a las transiciones entre los estados $\overline{\phi}_1^m(t) \leftrightarrow \overline{\phi}_2^m(t) \leftrightarrow \overline{\phi}_3^m(t)$, de donde (3.55) se reduce a

$$i \frac{\partial}{\partial t} \overline{\Phi}'_m(t) = \overline{H}_D(t) \overline{\Phi}'_m(t) \quad (3.58)$$

Para encontrar el operador de evolución adiabático debemos resolver la ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano $\overline{H}_D(t)$, sujeto a la condición inicial $\overline{\mathcal{U}}_m^A(t_0, t_0) = \mathbb{I}$, es decir

$$i \frac{\partial}{\partial t} \overline{\mathcal{U}}_m^A(t, t_0) = \overline{H}_D(t) \overline{\mathcal{U}}_m^A(t, t_0), \quad \text{con} \quad \overline{\mathcal{U}}_m^A(t_0, t_0) = \mathbb{I}. \quad (3.59)$$

Bajo estas consideraciones el operador de evolución adiabático para el antineutrino se puede escribir como

$$\overline{\mathcal{U}}_m^A(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-i\overline{\alpha}_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\overline{\alpha}_2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\overline{\alpha}_3(t)} \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

$$\overline{\alpha}_i(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{E}_i(t') dt', \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.61)$$

donde las cantidades $\overline{\alpha}_i(t)$ se definen usando los eigenvalores completos de \overline{H}_m dados en la ecuación (3.50).

Hasta el momento se han podido extrapolar los resultados del neutrino al caso del antineutrino, pero la situación se vuelve más complicada cuando consideramos el caso no adiabático, es decir, tomamos en cuenta los efectos de las transiciones entre los estados $\overline{\phi}_1^m(t) \leftrightarrow \overline{\phi}_2^m(t) \leftrightarrow \overline{\phi}_3^m(t)$, ya que no podemos encontrar soluciones aproximadas valiéndonos de algún fenómeno resonante.

Aun así, es posible utilizar los resultados del Apéndice D, para factorizar el operador de evolución en una parte adiabática y una parte no adiabática. Consideremos el Hamiltoniano (3.57) como la suma de un Hamiltoniano adiabático y un Hamiltoniano no adiabático, es decir

$$\overline{\mathcal{H}}_m(t) = \overline{H}_D(t) + \overline{H}_{NA}(t), \quad (3.62)$$

con $\overline{H}_{NA}(t) = -i\overline{\mathcal{O}}_m^T(t)\dot{\overline{\mathcal{O}}}_m(t)$; como la solución de los estados adiabáticos es conocida, podemos factorizar el operador de evolución en una parte adiabático y una parte no adiabática

$$\overline{\mathcal{U}}_m(t, t_0) = \overline{\mathcal{U}}_m^A(t, t_0)\overline{\mathcal{U}}_m^{NA}(t, t_0). \quad (3.63)$$

con $\overline{\mathcal{U}}_m^A(t, t_0)$ dado por (3.60); sin embargo, en este caso no tenemos una forma adecuada de aproximar la parte no adiabática del operador de evolución del antineutrino.

Al no poder dar una aproximación adecuada para $\overline{\mathcal{U}}_m^{NA}(t, t_0)$, y con la finalidad de poner dar la probabilidad de oscilaciones del antineutrino, sería conveniente usar los resultados que obtuvimos para el caso del neutrino. Con ello en mente, intentaremos establecer una relación entre ambos casos empezando por el siguiente teorema

Teorema 3.2.2. *Sea $\Psi(\Delta_{21}, \Delta_{31}; t)$ solución de la ecuación $\partial_t \Psi = H_m \Psi$, con H_m dado por (3.2) y condición inicial $\Psi(\Delta_{21}, \Delta_{31}; t_0) = (1, 0, 0)^T$. Al hacer los cambios*

- $\Delta_{21} \rightarrow -\Delta_{21}$ y $\Delta_{31} \rightarrow -\Delta_{31}$.
- $\Psi \rightarrow \Psi^*$,

la nueva función es solución de $\overline{\partial}_t \overline{\Psi} = \overline{H}_m \overline{\Psi}$, con \overline{H}_m dado en (3.42) y condición inicial $\overline{\Psi}(\Delta_{21}, \Delta_{31}; t_0) = (1, 0, 0)^T$, es decir

$$\Psi^*(-\Delta_{21}, -\Delta_{31}; t) = \overline{\Psi}(\Delta_{21}, \Delta_{31}; t) \quad (3.64)$$

Demostración. De la definición de H_0 , ecuación (3.5), hacer los cambios $\Delta_{21} \rightarrow -\Delta_{21}$ y $\Delta_{31} \rightarrow -\Delta_{31}$ es equivalente a cambiar el signo de H_0

$$H_0(-\Delta_{21}, -\Delta_{31}) = -H_0(\Delta_{21}, \Delta_{31}),$$

por simplicidad denotaremos por $\Delta \rightarrow -\Delta$, al hecho de hacer los cambios $\Delta_{21} \rightarrow -\Delta_{21}$ y $\Delta_{31} \rightarrow -\Delta_{31}$ simultáneamente.

Usando la ecuación de Schrödinger y conjugando

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(-\Delta) &= \{U^* H_0 U^T - V(t) Y\} \Psi^*(-\Delta) \\ i \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(-\Delta) &= \overline{H}_m \Psi^*(-\Delta) \end{aligned}$$

Nótese que hacer los cambios $\Delta_{21} \rightarrow -\Delta_{21}$ y $\Delta_{31} \rightarrow -\Delta_{31}$ no afecta la condición inicial, por lo tanto, $\Psi^*(-\Delta; t)$ y $\overline{\Psi}(\Delta; t)$ obedecen la misma ecuación diferencial, con la misma condición inicial, de donde se deduce el teorema. QED

Un resultado que se deduce de forma inmediata de este Teorema, es la igualdad entre los estados de masa al hacer los mismos cambio, es decir,

$$\Phi^*(-\Delta; t) = \bar{\Phi}(\Delta; t) \quad (3.65)$$

como se puede ver de la ecuación (1.1) y su análoga para el antineutrino

$$U^*\bar{\Phi}(\Delta; t) = \bar{\Psi}(\Delta; t) = \Psi^*(-\Delta; t) = U^*\Phi^*(-\Delta; t). \quad (3.66)$$

Son precisamente los resultados 3.2.2 los que permiten establecer una relación entre las probabilidades de oscilaciones de ambos casos,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(\Delta; t) &= \Psi^*(-\Delta; t), \\ \Rightarrow \quad \|\bar{\Psi}(\Delta; t)\|^2 &= \|\Psi(-\Delta; t)\|^2, \end{aligned} \quad (3.67)$$

y, por lo tanto,

$$\bar{P}_{\alpha \rightarrow \beta}(\Delta; t) = P_{\alpha \rightarrow \beta}(-\Delta; t) \quad (3.68)$$

donde $\bar{P}_{\alpha \rightarrow \beta}$ es la probabilidad de oscilaciones del antineutrino de sabor α a sabor β y $P_{\alpha \rightarrow \beta}$ es la probabilidad de oscilación para el neutrino en el mismo caso.

La ecuación (3.68) nos da el resultado que buscábamos, ya que esta nos permite encontrar la probabilidad de oscilación de antineutrino usando los resultados previamente obtenidos para el caso del neutrino; sin embargo, para obtener las probabilidades de oscilación del neutrino aún falta determinar la matriz que diagonaliza al Hamiltoniano en materia para el neutrino y el antineutrino, tema al que dedicamos el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Diagonalización de \mathcal{H}_m y $\overline{\mathcal{H}}_m$

En el presente capítulo estudiaremos la manera de obtener los eigenvalores de los Hamiltonianos \mathcal{H}_m y $\overline{\mathcal{H}}_m$ tanto de forma exacta como aproximada y daremos un acercamiento a la matriz de paso de ambos casos.

4.1. Caso del neutrino

4.1.1. Eigenvalores exactos del neutrino

Se quiere diagonalizar el hamiltoniano dado en (3.10); por simplicidad de la notación y siempre y cuando no cause confusión, omitiremos la dependencia temporal en el hamiltoniano,

$$\mathcal{H}_m = \mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{13}^T\mathcal{O}_{12}^T + V(t)Y. \quad (4.1)$$

De (3.5) y (1.44) se tiene

$$\begin{aligned} H_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix}, & Y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{O}_{12} &= \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{O}_{13} &= \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y de forma explícita,

$$\mathcal{H}_m = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2c_{13}^2 + \Delta_{31}s_{13}^2 + V & \Delta_{21}s_{12}c_{12}c_{13} & \Delta_{31}c_{13}s_{13} - \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}c_{13} \\ \Delta_{21}s_{12}c_{12}c_{13} & \Delta_{21}c_{12}^2 & -\Delta_{21}s_{12}c_{12}s_{13} \\ \Delta_{31}c_{13}s_{13} - \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}c_{13} & -\Delta_{21}s_{12}c_{12}s_{13} & \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

La ecuación característica asociada a esta matriz resulta poco práctica para encontrar una solución en forma analítica, en vez de ello buscaremos una forma de simplificarla. Para ello factoricemos la matriz O_{13} y denotemos al nuevo Hamiltoniano por $\mathbb{H}_m(t)$:

$$\mathbb{H}_m(t) = O_{13}^T \mathcal{H}_m(t) O_{13} = O_{12} H_0 O_{12}^T + V(t) O_{13}^T Y O_{13}. \quad (4.3)$$

Antes de continuar debemos probar la siguiente proposición

Proposición 4.1.1. $\mathbb{H}_m(t)$ y $\mathcal{H}_m(t)$ tienen los mismos eigenvalores

Demostración. De la ecuación característica y usando nuevamente la propiedad cíclica del determinante

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{H}_m(t) - \lambda \mathbb{I}) &= \det(O_{13}^T \mathcal{H}_m(t) O_{13} - \lambda \mathbb{I}) \\ &= \det(O_{13}^T (\mathcal{H}_m(t) - \lambda \mathbb{I}) O_{13}) \\ &= \det(O_{13}^T O_{13} (\mathcal{H}_m(t) - \lambda \mathbb{I})) \\ &= \det(\mathcal{H}_m(t) - \lambda \mathbb{I}). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{H}_m(t)$ y $\mathcal{H}_m(t)$ tiene la misma ecuación característica y, por lo tanto, la proposición queda demostrada.

QED

Corolario 4.1.1. $\mathbb{H}_m(t)$ y $H_m(t)$ tienen los mismos eigenvalores

Demostración. Del Teorema 3.1.1 y la proposición 4.1.1

$$\det(H_m(t) - \lambda \mathbb{I}) = \det(\mathcal{H}_m(t) - \lambda \mathbb{I}) = \det(\mathbb{H}_m(t) - \lambda \mathbb{I}), \quad (4.4)$$

de donde se obtiene el resultado deseado.

QED

Con los resultados anteriores en mente nos centraremos en encontrar los eigenvalores de $\mathbb{H}_m(t)$,

$$\mathbb{H}_m(t) = \begin{pmatrix} \Delta_{21} s_{12}^2 + c_{13}^2 V(t) & \Delta_{21} c_{12} s_{12} & V(t) c_{13} s_{13} \\ \Delta_{21} c_{12} s_{12} & \Delta_{21} c_{12}^2 & 0 \\ V(t) c_{13} s_{13} & 0 & \Delta_{31} + s_{13}^2 V(t) \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

en lo subsecuente nuevamente omitiremos la dependencia temporal tanto en el potencial como en el Hamiltoniano. La ecuación característica de (4.5) está especificada por

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2(\Delta_{21} + \Delta_{31} + V) + \\ \lambda(\Delta_{21} \Delta_{31} + V \Delta_{31} c_{13}^2 + V \Delta_{21} (c_{12}^2 + s_{13}^2 s_{12}^2)) - V \Delta_{21} \Delta_{31} c_{12}^2 c_{13}^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

En los subsecuente usaremos la notación λ , para referimos a los eigenvalores de forma abstracta y la notación $\epsilon(t)$ ó $\mathcal{E}_i(t)$ sera revesada únicamente para los eigenvalores exactos. Por brevedad de la notación definimos las cantidades

$$\begin{aligned} a &= -(\Delta_{21} + \Delta_{31} + V), \\ b &= (\Delta_{21}\Delta_{31} + V\Delta_{31}c_{13}^2 + V\Delta_{21}(c_{12}^2 + s_{13}^2s_{12}^2)), \\ c &= -V\Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2c_{13}^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como \mathbb{H}_m es una matriz hermitiana sus eigenvalores serán reales. Por consiguiente es posible calcular las soluciones de (4.6) usando la fórmula trigonométrica dada en el apéndice A, para lo cual necesitamos calcular las cantidades dadas en la ecuación (A.4)

$$\begin{aligned} p &= b - \frac{1}{3}a^2 \\ q &= c - \frac{1}{3}ba + \frac{2}{27}a^3 \end{aligned}$$

tras un poco de álgebra se llega a

$$\begin{aligned} p &= V\Delta_{31}c_{13}^2 + V\Delta_{21}(c_{12}^2 + s_{13}^2s_{12}^2) + \\ &\quad \frac{1}{3}(\Delta_{21}\Delta_{31} - \Delta_{21}^2 - \Delta_{31}^2 - V^2 - 2V(\Delta_{21} + \Delta_{31})) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{9}\left\{\Delta_{21}^2\Delta_{31} + \Delta_{21}\Delta_{31}^2 - \Delta_{21}\Delta_{31}V\right\} + \\ &\quad \frac{1}{3}\left\{V(\Delta_{21}\Delta_{31}c_{13}^2 + \Delta_{21}(c_{12}^2 + s_{13}^2s_{12}^2) + \Delta_{31}^2c_{13}^2 + \Delta_{21}\Delta_{31}(c_{12}^2 + s_{13}^2s_{12}^2))\right. \\ &\quad \left. + V^2(\Delta_{31}c_{13}^2 + \Delta_{21}(c_{12}^2 + s_{13}^2s_{12}^2))\right\} - \frac{2}{9}\left\{V(\Delta_{31}^2 + \Delta_{21}^2) + V^2(\Delta_{31} + \Delta_{21})\right\} \\ &\quad - \frac{2}{27}\left\{\Delta_{31}^3 + \Delta_{21}^3 + V^3\right\} - V\Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2c_{13}^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sustituyendo en la fórmula trigonométrica (A.20) se obtiene

$$z_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right) \quad \text{para } k = \{0, 1, 2\}. \quad (4.10)$$

Como se discute en el Apéndice A, estas son soluciones de la ecuación cúbica reducida, es decir una ecuación de la forma $z^3 + zp + q = 0$, para obtener los eigenvalores de la ecuación cúbica completa dada en (4.6) es necesario

reincorporar el término cuadrático, esto se logra haciendo la siguiente sustitución

$$\epsilon_k(t) = z_k - \frac{a}{3}, \quad (4.11)$$

de esta forma los eigenvalores reducidos de $\mathbb{H}_m(t)$ y, por tanto, de $\mathcal{H}_m(t)$ están dados por

$$\epsilon_i(t) = \frac{|a|}{3} + 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right). \quad (4.12)$$

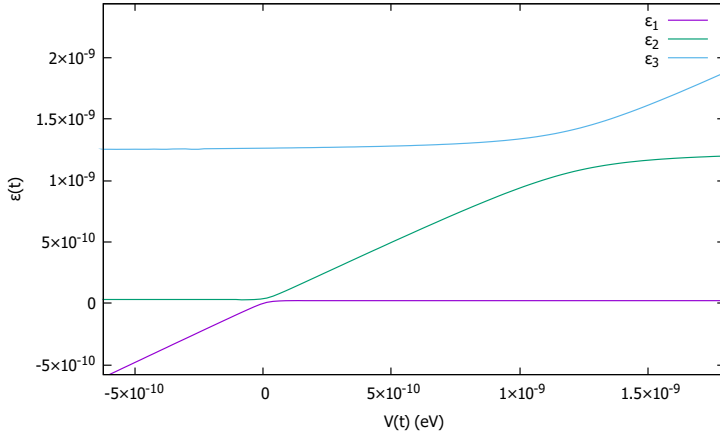


Figura 4.1: Gráficas de los eigenvalores de \mathcal{H}_m dados por la ecuación (4.12), siendo ϵ_1 el menor de ellos y ϵ_3 el mayor. Donde tomamos los siguientes valores $E_\nu = 1$ MeV, $\Delta_{21} = 7.53 \times 10^{-5}$ eV², $\Delta_{31} = 2.453 \times 10^{-3}$ eV² (orden normal), $\sin^2 \theta_{21} = 0.307$ y $\sin^2 \theta_{31} = 2.20 \times 10^{-2}$ [32].

Dado que los eigenvalores de \mathcal{H}_m representan las eigenenergias del sistema, es convención ordenarlos de menor a mayor, por lo cual definimos un nuevo índices para los eigenvalores de \mathcal{H}_m , los que son denotados por $\epsilon_1(t) < \epsilon_2(t) < \epsilon_3(t)$ y cuya relación con las soluciones de la ecuación cúbica es

$$\begin{aligned} \epsilon_1(t) &= z_1 + \frac{|a|}{3}, \\ \epsilon_2(t) &= z_2 + \frac{|a|}{3}, \\ \epsilon_3(t) &= z_0 + \frac{|a|}{3}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde hemos tomado en cuenta, que de su definición en (4.7), la cantidad a lleva una signatura negativa y en esta última ecuación el valor absoluto se debe entender como $|a| = \Delta_{21} + \Delta_{31} + V$.

Podemos observar de las definiciones de p y q dadas en las ecuaciones (4.8) y (4.9), que las expresiones de los eigenvalores exactos de \mathcal{H}_m son complicadas y la interpretación física está lejos de ser transparente. Por tal motivo tomaremos ventaja de que la razón Δ_{21}/Δ_{31} es mucho menor que uno para derivar expresiones aproximadas de los $\epsilon_i(t)$, las cuales son válidas en el rango completo de $V(t)$ [1].

4.1.2. Eigenvalores aproximados del neutrino

De la ecuación (4.5) podemos obtener dos subsistemas de 2×2 , cada uno correspondiente a los valores del potencial donde los eigenvalores en materia son casi degenerados por pares, como se puede observar de la Gráfica 4.1.

Para el primero de ellos tomemos $V(t)c_{13}s_{13} = 0$, con lo cual

$$\mathbb{H}'_m(t) = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2 + c_{13}^2V(t) & \Delta_{21}c_{12}s_{12} & 0 \\ \Delta_{21}c_{12}s_{12} & \Delta_{21}c_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} + s_{13}^2V(t) \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Para el segundo subsistema tomemos $\Delta_{21}c_{12}s_{12} = 0$

$$\mathbb{H}''_m(t) = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2 + c_{13}^2V(t) & 0 & V(t)c_{13}s_{13} \\ 0 & \Delta_{21}c_{12}^2 & 0 \\ V(t)c_{13}s_{13} & 0 & \Delta_{31} + s_{13}^2V(t) \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

Al igual que el Hamiltoniano original \mathbb{H}_m , los Hamiltonianos \mathbb{H}'_m y \mathbb{H}''_m pueden ser diagonalizados separadamente por medio de transformaciones ortogonales, es decir

$$\mathcal{O}_{12}^T(\alpha)\mathbb{H}'_m\mathcal{O}_{12}(\alpha) = \text{diag}(\lambda'_-, \lambda'_+, \lambda'_0) \quad (4.16)$$

$$\mathcal{O}_{13}^T(\beta)\mathbb{H}''_m\mathcal{O}_{13}(\beta) = \text{diag}(\lambda''-, \lambda''_0, \lambda''_+) \quad (4.17)$$

donde

$$\mathcal{O}_{12}(\alpha) = \begin{pmatrix} c_\alpha & s_\alpha & 0 \\ -s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O}_{13}(\beta) = \begin{pmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

donde nuevamente usamos la notación compacta $c_\alpha \equiv \cos \alpha$, $s_\alpha \equiv \sin \alpha$, $c_\beta \equiv \cos \beta$ y $s_\beta \equiv \sin \beta$, con α y β por determinar.

Diagonalicemos separadamente los Hamiltonianos dados en (4.14) y en (4.15). La ecuación característica de \mathbb{H}'_m

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2(\Delta_{21} + \Delta_{31} + V) \\ + \lambda(\Delta_{21}\Delta_{31} + V\Delta_{21}(c_{12}^2 + s_{13}^2s_{12}^2) + V\Delta_{31}c_{13}^2 + V^2c_{13}^2s_{13}^2) \\ - (V\Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2c_{13}^2 + \Delta_{21}V^2c_{12}^2c_{13}^2s_{13}^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

por inspección de la fórmula se puede observar que en el límite en el que $\Delta_{31} \gg Vs_{13}^2$ se recupera la ecuación (4.6). De igual forma es sencillo comprobar que la ecuación anterior se satisface para $\lambda = \Delta_{31} + s_{13}^2 V(t)$ y, por lo tanto, es divisible entre $[\lambda - (\Delta_{31} + s_{13}^2 V(t))]$. La ecuación cuadrática resultante se obtiene de diagonalizar la menor de \mathbb{H}'_m que se obtiene de eliminar la tercer fila y la tercer columna

$$(\mathbb{H}'_m)^{\text{menor}} = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2 + c_{13}^2 V(t) & \Delta_{21}c_{12}s_{12} \\ \Delta_{21}c_{12}s_{12} & \Delta_{21}c_{12}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

los eigenvalores de (4.20) junto con la solución antes discutida, nos dan las soluciones a la ecuación (4.19)

$$\begin{aligned} \lambda'_- &= \frac{1}{2} \left[\Delta_{21} + c_{13}^2 V - \sqrt{(\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} - c_{13}^2 V)^2 + \Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta_{12}} \right], \\ \lambda'_+ &= \frac{1}{2} \left[\Delta_{21} + c_{13}^2 V + \sqrt{(\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} - c_{13}^2 V)^2 + \Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta_{12}} \right], \\ \lambda'_0 &= \Delta_{31} + s_{13}^2 V(t). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Por otro lado, la ecuación característica de \mathbb{H}''_m es

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2(\Delta_{21} + \Delta_{31} + V) \\ + \lambda(\Delta_{21}\Delta_{31} + V\Delta_{21}(c_{12}^2 + s_{13}^2 s_{12}^2) + V\Delta_{31}c_{13}^2 + \Delta_{21}^2 c_{12}^2 s_{12}^2) \\ - (V\Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2 c_{13}^2 + \Delta_{21}^2 \Delta_{31}c_{12}^2 s_{12}^2 + \Delta_{21}^2 Vc_{12}^2 s_{12}^2 s_{13}^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

y estudiemos un poco más a detalle los límites de (4.22) en el caso donde $Vc_{13}^2 \gg \Delta_{21}s_{12}^2$. Primero consideremos el coeficiente del término lineal, el cual se puede escribir como

$$\Delta_{21}\Delta_{31} + V\Delta_{31}c_{13}^2 + V\Delta_{21} \left(c_{12}^2 + s_{13}^2 s_{12}^2 + \frac{\Delta_{21}c_{12}^2 s_{12}^2}{V} \right), \quad (4.23)$$

como el coseno es una función acotada al tomar los inversos resulta $1 \leq 1/\cos^2 \theta$, esto implica

$$\frac{\Delta_{21}s_{12}^2 c_{12}^2}{V} \leq \frac{\Delta_{21}s_{12}^2}{V} \leq \frac{\Delta_{21}s_{12}^2}{Vc_{13}^2} \ll 1;$$

por lo tanto, el último término del coeficiente lineal se puede despreciar; considerando ahora el término independiente

$$V\Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2 c_{13}^2 \left(1 + \frac{\Delta_{21}s_{12}^2}{Vc_{13}^2} + \frac{\Delta_{21}s_{12}^2 s_{13}^2}{\Delta_{31}c_{13}^2} \right) \quad (4.24)$$

y usando que el seno es acotado

$$\frac{\Delta_{21}s_{13}^2s_{12}^2}{Vc_{13}^2} \leq \frac{\Delta_{21}s_{12}^2}{Vc_{13}^2} \ll 1.$$

de donde se concluye que, en el límite $Vc_{13}^2 \gg \Delta_{21}s_{12}^2$, la ecuación (4.22) se reduce a la ecuación (4.6) tal como esperábamos.

La ecuación (4.22) tiene como una de sus raíces $\lambda = \Delta_{21}c_{12}^2$, para encontrar las raíces faltantes se debe resolver la ecuación característica que resulta de la menor de eliminar la segunda fila y la segunda columna de \mathbb{H}_m''

$$(\mathbb{H}_m'')^{\text{menor}} = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2 + c_{13}^2V(t) & V(t)c_{13}s_{13} \\ V(t)c_{13}s_{13} & \Delta_{31} + s_{13}^2V(t) \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

de esta forma los eigenvalores de (4.15) están dados por

$$\begin{aligned} \lambda_0'' &= \Delta_{21}c_{12}^2, \\ \lambda_-'' &= \frac{1}{2} \left[\Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_{13} + V - \sqrt{(\Delta \cos 2\theta_{13} - V)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta_{13}} \right], \\ \lambda_+'' &= \frac{1}{2} \left[\Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_{13} + V + \sqrt{(\Delta \cos 2\theta_{13} - V)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta_{13}} \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

con $\Delta \equiv \Delta_{13} - \Delta_{21}s_{12}^2$

En el caso $Vc_{13}^2 \gg \Delta_{21}$ se tiene para λ_-'

$$\begin{aligned} \lambda_-' &= \frac{1}{2} \left[\Delta_{21} + c_{13}^2V - \sqrt{(\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} - c_{13}^2V)^2 + \Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta_{12}} \right], \\ &= \frac{1}{2} \left[\Delta_{21} + c_{13}^2V - c_{13}^2V \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta_{21}}{c_{13}^2V} \cos 2\theta_{12}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{21}}{c_{13}^2V}\right)^2 \sin^2 2\theta_{12}} \right] \end{aligned}$$

como

$$\left(\frac{\Delta_{21}}{c_{13}^2V}\right)^2 < \frac{\Delta_{21}}{Vc_{13}^2} \ll 1; \quad (4.27)$$

el último término en la ecuación anterior es despreciable

$$\begin{aligned} \lambda_-' &\simeq \frac{1}{2} \left[\Delta_{21} + c_{13}^2V - c_{13}^2V \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta_{21}}{c_{13}^2V} \cos 2\theta_{12}\right)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\Delta_{21} + c_{13}^2V - c_{13}^2V \left(1 - \frac{\Delta_{21}}{c_{13}^2V} \cos 2\theta_{12}\right) \right] \\ &= \Delta_{21} \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta_{12}) \right] \\ &= \Delta_{21}c_{12}^2 = \lambda_0''. \end{aligned}$$

De esta forma es conveniente tomar al eigenvalor aproximado de energía más baja como $\lambda_1 = \lambda'_-$ en intervalo completo.

Por otro lado, para $\Delta \gg V$, se tiene

$$\begin{aligned}\lambda_+'' &= \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_{13} + V) + \sqrt{(\Delta \cos 2\theta_{13} - V)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta_{13}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_{13} + V) + \Delta \sqrt{\left(\cos 2\theta_{13} - \frac{V}{\Delta} \right)^2 + \sin^2 2\theta_{13}} \right] \\ &\simeq \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_{13} + V) + \Delta \sqrt{1 - 2 \cos 2\theta_{13} \frac{V}{\Delta}} \right].\end{aligned}$$

Sea $x = 2 \cos 2\theta_{13} V / \Delta$, para que en el límite $V/\Delta \ll 1$, se mantenga la desigualdad $x \ll 1$ es necesario que $\theta_{13} < \pi/4$ lo cual es congruente con los datos experimentales [32], en este caso podemos usar la siguiente aproximación de la raíz cuadrada $\sqrt{1-x} \simeq 1 - x/2$, donde hemos despreciado los términos de orden cuadrático o superiores. Así,

$$\begin{aligned}\lambda_+'' &\simeq \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_{13} + V) + \Delta \left(1 - \cos \theta_{13} \frac{V}{\Delta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2\Delta_{13} + V - \cos \theta_{13} V \right] \\ &= \Delta_{13} + V \left[\frac{1}{2} (1 - \cos \theta_{13}) \right] \\ &= \Delta_{13} + V s_{13}^2 = \lambda_0'\end{aligned}$$

y, al igual que el caso anterior, es conveniente tomar el eigenvalor aproximado de mayor energía como $\lambda_3 = \lambda_+''$ en todo el intervalo de V .

Para encontrar el eigenvalor aproximado faltante usamos la propiedad de que la traza es un invariante, y, por tanto, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr } \mathbb{H}_m = \Delta_{21} + \Delta_{31} + V$. Finalmente, los eigenvalores aproximados de \mathbb{H}_m y, en consecuencia, de \mathcal{H}_m , son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[\Delta_{21} + c_{13}^2 V - \sqrt{(\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} - c_{13}^2 V)^2 + \Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta_{12}} \right], \\ \lambda_2 &= \Delta_{21} + \Delta_{31} + V - \lambda_1 - \lambda_3, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_{13} + V) + \sqrt{(\Delta \cos 2\theta_{13} - V)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta_{13}} \right].\end{aligned}\tag{4.28}$$

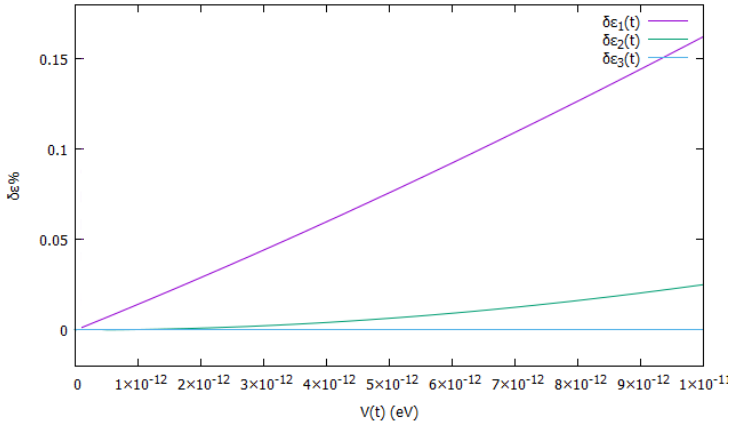


Figura 4.2: Gráficas de los errores porcentuales de los eigenvalores aproximados de \mathcal{H}_m dados por la ecuación (4.28). Donde tomamos los siguientes valores $E_\nu = 1$ MeV, $\Delta_{21} = 7.53 \times 10^{-5}$ eV², $\Delta_{31} = 2.453 \times 10^{-3}$ eV² (orden normal), $\sin^2 \theta_{21} = 0.307$ y $\sin^2 \theta_{31} = 2.20 \times 10^{-2}$ [32].

En la Figura 4.2 se pueden observar las gráficas de los errores porcentuales para los eigenvalores aproximados dados en la ecuación (4.28). La diferencia porcentual respecto a los eigenvalores exactos es de aproximadamente 0.03% cuando el potencial efectivo se encuentra en el rango de los 0 a 10^{-11} eV, para rangos 0 a 10^{-9} eV error porcentual es aproximadamente del 15% para $\delta\epsilon_1$, mientras que para $\delta\epsilon_2$ y $\delta\epsilon_3$ el error porcentual aun se mantiene debajo del 1%. En el caso de los neutrinos solares $V \sim 10^{-11}$ eV [13] de donde podemos concluir que los eigenvalores dados en la ecuación (4.28) son una excelente aproximación al caso exacto.

4.1.3. Parametrización exacta de \mathcal{O}_m

En teoría al conocer los eigenvalores de (4.2) debemos ser capaces de dar ya sea de forma exacta o aproximada las entradas de la matriz \mathcal{O}_m . El procedimiento habitual consiste en sustituir los eigenvalores en la ecuación

$$(\mathcal{H}_m - \lambda_i \mathbb{I})v = 0, \quad (4.29)$$

y resolver el sistema de ecuaciones. Desafortunadamente, debido a la complejidad de los eigenvalores, ya sean exactos (4.13) o aproximados (4.28), este método resulta poco práctico.

Por consiguiente, nos gustaría encontrar un modo más sencillo de dar las entradas de la matriz de paso, más aún, de la ecuación (3.37) podemos apreciar que nuestro interés está en calcular los módulos al cuadrado de

las entradas de la matriz de mezcla en materia. Esto nos permite utilizar los resultados de un trabajo reciente realizado por Denton, Parke, Tao y Zhang [7] que da justamente la relación entre las normas al cuadrado de los elementos de la matriz de mezcla y los eigenvalores del Hamiltoniano \mathcal{H}_m , en otras palabras, podemos obtener de forma exacta las cantidades $\|\mathcal{O}_{ij}^m(t)\|^2$.

La matriz \mathcal{O}_m diagonaliza al Hamiltoniano dado en la ecuación (3.10)

$$\mathcal{H}_m(t) \equiv \mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{12}^T\mathcal{O}_{13}^T + V(t)Y,$$

o, de manera explícita,

$$\mathcal{H}_m = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2c_{13}^2 + \Delta_{31}s_{13}^2 + V & \Delta_{21}s_{12}c_{12}c_{13} & \Delta_{31}c_{13}s_{13} - \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}c_{13} \\ \Delta_{21}s_{12}c_{12}c_{13} & \Delta_{21}c_{12}^2 & -\Delta_{21}s_{12}c_{12}s_{13} \\ \Delta_{31}c_{13}s_{13} - \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}c_{13} & -\Delta_{21}s_{12}c_{12}s_{13} & \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

donde hemos omitido la dependencia temporal en el potencial efectivo por simplicidad de la notación. A continuación enunciamos el resultado de [7] que vamos a usar para encontrar las cantidades $\|\mathcal{O}_{ij}^m\|^2$.

Teorema 4.1.1. *Sea A una matriz hermítica de $n \times n$ con eigenvalores $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ y sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$, entonces la j -ésima componente v_{ij} del eigenvector unitario v_i asociado con el eigenvalor $\lambda_i(A)$ está relacionado con los eigenvalores $\lambda_1(M_1), \dots, \lambda_{n-1}(M_j)$ de la menor M_j de A , obtenida de eliminar la j -ésima fila y la j -ésima columna, por la siguiente fórmula:*

$$\|v_{ij}\|^2 \prod_{k=1; k \neq i}^n (\lambda_i(A) - \lambda_k(A)) = \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_i(A) - \lambda_k(M_j)) \quad (4.31)$$

La demostración del teorema se puede revisar en la referencia [7], donde se encuentran distintas técnicas de demostración, incluyendo la demostración de la adjunta y el método de Cramer. Para usar la ecuación (4.31) necesitamos conocer las menores M_j de \mathcal{H}_m .

La menor M_1 de \mathcal{H}_m se obtiene eliminando la primera fila y la primera columna de (4.30),

$$M_1 = \begin{pmatrix} \Delta_{21}c_{12}^2 & -\Delta_{21}s_{12}c_{12}s_{13} \\ -\Delta_{21}s_{12}c_{12}s_{13} & \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

La ecuación característica de M_1 es:

$$\lambda^2 - \lambda(\Delta_{21}c_{12}^2 + \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2) + \Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2c_{13}^2 = 0; \quad (4.33)$$

resolviendo la ecuación cuadrática podemos encontrar los eigenvalores asociados a M_1

$$\lambda_{\pm}^{M_1} = \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}c_{12}^2 + \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2) \pm \sqrt{(\Delta_{21}c_{12}^2 + \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2)^2 - 4\Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2c_{13}^2} \right]. \quad (4.34)$$

Este mismo procedimiento se debe repetir para la menor M_2 . Eliminado la segunda fila y la segunda columna,

$$M_2 = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2c_{13}^2 + \Delta_{31}s_{13}^2 + V(t) & \Delta_{31}c_{13}s_{13} - \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}c_{13} \\ \Delta_{31}c_{13}s_{13} - \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}c_{13} & \Delta_{21}s_{12}^2s_{12}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

cuya ecuación característica es dada por

$$\lambda^2 - \lambda(\Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_{31} + V) + \Delta_{21}\Delta_{31}s_{12}^2 + V\Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + V\Delta_{31}c_{13}^2 = 0; \quad (4.36)$$

y resolviéndola encontramos sus eigenvalores:

$$\lambda_{\pm}^{M_2} = \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_{31} + V) \pm \sqrt{(\Delta_{21}s_{12}^2 - \Delta_{31})^2 + 2V \cos 2\theta_{13}(\Delta_{21}s_{12}^2 - \Delta_{31}) + V^2} \right]. \quad (4.37)$$

Finalmente, eliminando la tercer fila y la tercer columna obtenemos la menor M_3

$$M_3 = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2c_{13}^2 + \Delta_{31}s_{13}^2 + V(t) & \Delta_{21}s_{12}c_{12}c_{13} \\ \Delta_{21}s_{12}c_{12}c_{13} & \Delta_{21}c_{12}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

La ecuación característica de M_3 es:

$$\lambda^2 - \lambda(\Delta_{21}(c_{12}^2 + s_{12}^2c_{13}^2) + \Delta_{31}s_{13}^2 + V) + \Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2s_{13}^2 + V\Delta_{21}c_{12}^2 = 0, \quad (4.39)$$

con eigenvalores:

$$\lambda_{\pm}^{M_3} = \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}\omega_+ + \Delta_{31}s_{13}^2 + V) \pm \sqrt{\Delta_{21}^2\omega_+^2 - 2\Delta_{21}\omega_- [\Delta_{31}s_{13}^2 + V] + (\Delta_{31}s_{12}^2 + V)^2} \right] \quad (4.40)$$

donde, a fin de facilitar la notación, definimos las cantidades $\omega_+ \equiv (c_{12}^2 + s_{12}^2c_{13}^2)$ y $\omega_- \equiv (c_{12}^2 - s_{12}^2c_{13}^2)$

Los eigenvalores de las menores M_i son:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\pm}^{M_1} &= \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}c_{12}^2 + \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2) \right. \\
&\quad \left. \pm \sqrt{(\Delta_{21}c_{12}^2 + \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2)^2 - 4\Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2c_{13}^2} \right] \\
\lambda_{\pm}^{M_2} &= \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_{31} + V) \right. \\
&\quad \left. \pm \sqrt{(\Delta_{21}s_{12}^2 - \Delta_{31})^2 + 2V \cos 2\theta_{13}(\Delta_{21}s_{12}^2 - \Delta_{31}) + V^2} \right] \\
\lambda_{\pm}^{M_3} &= \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}\omega_+ + \Delta_{31}s_{13}^2 + V) \right. \\
&\quad \left. \pm \sqrt{\Delta_{21}^2\omega_+^2 - 2\Delta_{21}\omega_- [\Delta_{31}s_{13}^2 + V] + (\Delta_{31}s_{12}^2 + V)^2} \right].
\end{aligned} \tag{4.41}$$

De acuerdo con la notación de Teorema, debemos calcular la primera entrada de tres eigenvectores distintos, a saber

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{O}_{11}^m\|^2 &= \frac{(\epsilon_1 - \lambda_+^{M_1})(\epsilon_1 - \lambda_-^{M_1})}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 - \epsilon_3)}, \\
\|\mathcal{O}_{12}^m\|^2 &= \frac{(\epsilon_2 - \lambda_+^{M_1})(\epsilon_2 - \lambda_-^{M_1})}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 - \epsilon_3)}, \\
\|\mathcal{O}_{13}^m\|^2 &= \frac{(\epsilon_3 - \lambda_+^{M_1})(\epsilon_3 - \lambda_-^{M_1})}{(\epsilon_3 - \epsilon_1)(\epsilon_3 - \epsilon_2)}.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

en esta última ecuación omitimos la dependencia temporal tanto en las entradas de la matriz \mathcal{O}_{ij}^m como en los eigenvalores.

En general, cualquier entrada de la matriz \mathcal{O}_{ij}^m se puede escribir en términos de los eigenvalores de la siguiente manera [8]

$$\|\mathcal{O}_{ij}^m\|^2 = \frac{(\epsilon_j - \lambda_+^{M_i})(\epsilon_j - \lambda_-^{M_i})}{(\epsilon_j - \epsilon_l)(\epsilon_j - \epsilon_k)}, \tag{4.43}$$

donde $j \neq l, j \neq k, l \neq k$ y $l, k \in \{1, \dots, n\}$. Es importante notar que la notación es ligeramente diferente a la usada en el Teorema 4.1.1, ya que en el teorema el índice i hace referencia al i -ésimo eigenvector y j hace referencia al j -ésima entra de dicho eigenvector, mientras que en las ecuaciones (4.42) y (4.43) los índices i y j se refiere a la i -ésima fila y la j -ésima columna de la matriz \mathcal{O}^m .

Aunque la ecuación (4.43) nos permite conocer de forma exacta los módulos al cuadrado de las entradas de la matriz de paso \mathcal{O}_m , los eigenvalores exactos dados en la ecuación (4.12) están en términos de funciones trigonométricas, mientras que los eigenvalores de las menores M_j de \mathcal{H}_m , son expresiones puramente algebraicas, de donde la interpretación física de las mismas está lejos de ser transparente, por tal razón buscaremos una forma más sencilla para parametrizar la matriz de paso.

4.1.4. Parametrización aproximada de \mathcal{O}_m

Retomemos las ecuaciones (4.14) - (4.17), en la región de bajas densidades, donde se satisface $\Delta_{31} \gg V s_{13}^2$, la parte relevante del Hamiltoniano está descrito por (4.14) y el problema se reduce a un problema efectivo de dos sabores descrito por (4.20).

Podemos usar el mismo procedimiento que se empleó en la sección 2.2.1, para definir el ángulo de mezcla α en términos de las diferencias cuadráticas de masas y de los ángulos de mezcla en el vacío,

$$\tan 2\alpha = \frac{\Delta_{21} \sin 2\theta_{12}}{\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} - V c_{13}^2}. \quad (4.44)$$

A partir de identidades trigonométricas se pueden definir el seno y el coseno de α

$$\cos 2\alpha = \frac{\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} - V c_{13}^2}{\sqrt{(\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} - c_{13}^2 V)^2 + \Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta_{12}}}, \quad (4.45)$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\Delta_{21} \sin 2\theta_{12}}{\sqrt{(\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} - c_{13}^2 V)^2 + \Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta_{12}}}. \quad (4.46)$$

Por otro lado, para la región de altas densidades, donde se cumple $V c_{13}^2 \gg \Delta_{21} s_{12}^2$. La parte relevante del Hamiltoniano está dado por (4.25), de donde la definición de ángulo de mezcla β

$$\tan 2\beta = \frac{V \sin 2\theta_{13}}{\Delta - V \cos 2\theta_{13}}. \quad (4.47)$$

Las funciones trigonométricas restantes serán

$$\cos 2\beta = \frac{\Delta - V \cos 2\theta_{13}}{\sqrt{(\Delta \cos 2\theta_{13} - V)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta_{13}}}, \quad (4.48)$$

$$\sin 2\beta = \frac{V \sin 2\theta_{13}}{\sqrt{(\Delta \cos 2\theta_{13} - V)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta_{13}}}. \quad (4.49)$$

El Hamiltoniano $\mathbb{H}_m(t)$ puede ser diagonalizado en forma aproximada por el producto $\mathcal{O}_{13}(\beta)\mathcal{O}_{12}(\alpha)$, para encontrar la matriz de paso \mathcal{O}_m usamos los resultados de la proposición 4.1.1 y la ecuación (4.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{12}^T(\alpha)\mathcal{O}_{13}^T(\beta)\mathbb{H}_m(t)\mathcal{O}_{13}(\beta)\mathcal{O}_{12}(\alpha) &\simeq \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \\ \mathcal{O}_{12}^T(\alpha)\mathcal{O}_{13}^T(\beta)\mathcal{O}_{13}^T\mathcal{H}_m\mathcal{O}_{13}(\beta)\mathcal{O}_{12}(\alpha) &\simeq \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \\ \mathcal{O}_m^T\mathcal{H}_m\mathcal{O}_m &\simeq \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \end{aligned} \quad (4.50)$$

De la última de estas ecuaciones se deduce que

$$\mathcal{O}_m \simeq \mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{13}(\beta)\mathcal{O}_{12}(\alpha) \equiv \mathcal{O}_{13}^m\mathcal{O}_{12}^m, \quad (4.51)$$

es la matriz que diagonaliza (de forma aproximada) al Hamiltoniano en materia \mathcal{H}_m ; de manera explícita,

$$\mathcal{O}_m(t) \simeq \begin{pmatrix} c_{12}^m c_{13}^m & s_{12}^m c_{13}^m & s_{13}^m \\ -s_{12}^m & -c_{12}^m & 0 \\ -c_{12}^m s_{13}^m & -s_{12}^m s_{13}^m & c_{13}^m \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

donde la notación compacta $c_{ij}^m \equiv \cos \theta_{ij}^m$, $s_{ij}^m \equiv \sin \theta_{ij}^m$ se refieren a los ángulos efectivos de mezcla en materia $\theta_{13}^m = \beta + \theta_{13}$ y $\theta_{12}^m = \alpha$, los cuales se expresan en términos del potencial efectivo de la siguiente manera:

$$\cos 2\theta_{12}^m = \frac{\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} - V c_{13}^2}{\sqrt{(\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} - c_{13}^2 V)^2 + \Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta_{12}}}, \quad (4.53)$$

$$\sin 2\theta_{12}^m = \frac{\Delta_{21} \sin 2\theta_{12}}{\sqrt{(\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} - c_{13}^2 V)^2 + \Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta_{12}}}. \quad (4.54)$$

$$\cos 2\theta_{13}^m = \frac{\Delta \cos 2\theta_{13} - V}{\sqrt{(\Delta \cos 2\theta_{13} - V)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta_{13}}}, \quad (4.55)$$

$$\sin 2\theta_{13}^m = \frac{\Delta \sin 2\theta_{13}}{\sqrt{(\Delta \cos 2\theta_{13} - V)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta_{13}}}. \quad (4.56)$$

Estas últimas ecuaciones nos permiten estudiar los límites en donde la densidad se desvanece de forma más sencilla, es fácil corroborar que en dicho límite recuperamos el correspondiente ángulo de mezcla en el vacío, tal como deseamos, es decir:

$$\begin{aligned} \lim_{V(t) \rightarrow 0} \sin 2\theta_{12}^m(t) &= \sin 2\theta_{12}, \\ \lim_{V(t) \rightarrow 0} \sin 2\theta_{13}^m(t) &= \sin 2\theta_{13}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

lo mismo ocurre para $\cos 2\theta_{ij}^m(t)$. En esta aproximación ,

$$\lim_{V \rightarrow 0} \mathcal{O}_m(t) \rightarrow \mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12} \quad (4.58)$$

y la condición dada en (2.46) se satisface automáticamente, en otras palabras, si consideramos que en el borde del medio la densidad decae abruptamente,

$$\lim_{V \rightarrow 0} U_m = \mathcal{O}_{23}\Gamma \left\{ \lim_{V \rightarrow 0} \mathcal{O}_m(t) \right\} \Gamma^\dagger = \mathcal{O}_{23}\Gamma \mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}\Gamma^\dagger = U \quad (4.59)$$

y se recupera la definición de la matriz de mezcla en el vacío.

Bajo estas aproximaciones, la matriz de mezcla de los estados de masa en materia es

$$U_m(t) \simeq \mathcal{O}_{23}\Gamma \mathcal{O}_{13}^m(t) \mathcal{O}_{12}^m(t) \Gamma^\dagger. \quad (4.60)$$

Esta aproximación a la matriz de paso resulta sumamente útil en el caso de los neutrinos, por ejemplo, si retomamos la ecuación (3.41) y usamos la notación de (4.52), podemos reescribir la condición inicial

$$\begin{aligned} \|\mathcal{O}_{11}^m(t_0)\|^2 &= (c_{12}^m(t_0)c_{13}^m(t_0))^2, \\ \|\mathcal{O}_{12}^m(t_0)\|^2 &= (s_{12}^m(t_0)c_{13}^m(t_0))^2, \\ \|\mathcal{O}_{13}^m(t_0)\|^2 &= (s_{13}^m(t_0))^2, \end{aligned} \quad (4.61)$$

de forma tal que la ecuación (3.41) se reescribe como

$$\begin{aligned} \langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle &= \|U_{e1}\|^2 \left[(1 - P_l)(c_{12}^m(t_0)c_{13}^m(t_0))^2 + (1 - P_h)P_l(s_{12}^m(t_0)c_{13}^m(t_0))^2 \right. \\ &\quad \left. + P_h P_l (s_{13}^m(t_0))^2 \right] + \|U_{e2}\|^2 \left[P_l (c_{12}^m(t_0)c_{13}^m(t_0))^2 \right. \\ &\quad \left. + (1 - P_l)(1 - P_h)(s_{12}^m(t_0)c_{13}^m(t_0))^2 + (1 - P_l)P_h (s_{13}^m(t_0))^2 \right] \\ &\quad + \|U_{e3}\|^2 \left[P_h (s_{12}^m(t_0)c_{13}^m(t_0))^2 + (1 - P_h)(s_{13}^m(t_0))^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

A partir de la ecuación (4.62) es posible recuperar la fórmula de Parke. En concreto, es sabido a partir de los datos experimentales que $\|U_{e3}\|^2$ es relativamente pequeño por ende si consideramos el límite donde $\theta_{13} \rightarrow 0$, la ecuación se reduce a

$$\begin{aligned} \langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle &= c_{12}^2 \{ (1 - P_l)(c_{12}^{m0})^2 + P_l(1 - P_h)(s_{12}^{m0})^2 \} \\ &\quad + s_{12}^2 \{ P_l(c_{12}^{m0})^2 + (1 - P_l)(1 - P_h)(s_{12}^{m0})^2 \}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

y, por lo tanto, para recuperar la ecuación (2.88) necesitamos que $P_h \rightarrow 0$ cuando $\theta_{13} \rightarrow 0$, con lo cual queda únicamente en términos de los ángulos θ_{12} , θ_{12}^m y la probabilidad de cruzamiento a bajas densidades P_l .

Por otro lado, si tomamos $\theta_{12} \rightarrow \pi/2$ en la ecuación (4.62), ahora el término $\|U_{e1}\|^2$ se anula, dando así

$$\begin{aligned} \langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle = & c_{13}^2 \{ (1-P_l)(1-P_h)(c_{13}^{m0})^2 + (1-P_l)P_h(s_{13}^{m0})^2 \} \\ & + s_{13}^2 \{ (1-P_l)P_h(c_{13}^{m0})^2 + (1-P_h)(s_{13}^{m0})^2 \}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

En este caso, es necesario que $P_l \rightarrow 0$ cuando $\theta_{12} \rightarrow \pi/2$, para recuperar la ecuación (2.88), esta vez en términos de θ_{13} y θ_{13}^m y la probabilidad de cruzamiento a altas densidades P_h . Este es otra manera de exhibir la fiabilidad de la aproximación dada en (4.62), ya que en los límites adecuados y tras sencillas manipulaciones algebraicas es posible reducirnos al caso de 2×2

4.2. Caso del antineutrino

4.2.1. Eigenvalores exactos del antineutrino

Empezaremos por dar una representación manifiesta de $\overline{\mathcal{H}}_m$

$$\overline{\mathcal{H}}_m = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2c_{13}^2 + \Delta_{31}s_{13}^2 - V & \Delta_{21}s_{12}c_{12}c_{13} & \Delta_{31}c_{13}s_{13} - \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}c_{13} \\ \Delta_{21}s_{12}c_{12}c_{13} & \Delta_{21}c_{12}^2 & -\Delta_{21}s_{12}c_{12}s_{13} \\ \Delta_{31}c_{13}s_{13} - \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}c_{13} & -\Delta_{21}s_{12}c_{12}s_{13} & \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

Es inmediato ver que (4.65) se puede obtener de (4.2) únicamente haciendo el cambio $V \rightarrow -V$, por lo cual podemos repetir el procedimiento que se empleó en la sección 4.1.1 para encontrar los eigenvalores de $\overline{\mathcal{H}}_m$.

Empezamos factorizando la matriz \mathcal{O}_{13} de

$$\overline{\mathcal{H}}_m = \mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{13}^T\mathcal{O}_{12}^T - V(t)Y; \quad (4.66)$$

de donde definimos el hamiltoniano

$$\overline{\mathbb{H}}_m(t) = \mathcal{O}_{13}^T\overline{\mathcal{H}}_m(t)\mathcal{O}_{13} = \mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{12}^T - V(t)\mathcal{O}_{13}^TY\mathcal{O}_{13}. \quad (4.67)$$

Nuevamente, necesitamos establecer una relación entre los eigenvalores de $\overline{\mathcal{H}}_m(t)$ y $\overline{\mathbb{H}}_m(t)$, para ello usamos la siguiente proposición

Proposición 4.2.1. $\overline{\mathcal{H}}_m(t)$ y $\overline{\mathbb{H}}_m(t)$ tienen los mismos eigenvalores

Demostración. De la ecuación característica y usando nuevamente la propiedad cíclica del determinante

$$\begin{aligned}\det(\overline{\mathbb{H}}_m(t)_m(t) - \lambda\mathbb{I}) &= \det(\mathcal{O}_{13}^T \overline{\mathcal{H}}_m(t) \mathcal{O}_{13} - \lambda\mathbb{I}) \\ &= \det(\mathcal{O}_{13}^T (\overline{\mathcal{H}}_m(t) - \lambda\mathbb{I}) \mathcal{O}_{13}) \\ &= \det(\mathcal{O}_{13}^T \mathcal{O}_{13} (\overline{\mathcal{H}}_m(t) - \lambda\mathbb{I})) \\ &= \det(\overline{\mathcal{H}}_m(t) - \lambda\mathbb{I}).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{\mathbb{H}}_m(t)$ y $\overline{\mathcal{H}}_m(t)$ tiene los mismos eigenvalores.

QED

Corolario 4.2.1. $\overline{\mathbb{H}}_m(t)$ y $\overline{H}_m(t)$ tienen los mismos eigenvalores

Demostración. Del Teorema 3.2.1 y la proposición 4.2.1

$$\det(\overline{H}_m(t) - \lambda\mathbb{I}) = \det(\overline{\mathcal{H}}_m(t) - \lambda\mathbb{I}) = \det(\overline{\mathbb{H}}_m(t) - \lambda\mathbb{I}),$$

y el corolario queda demostrado.

QED

Una vez que a quedado establecida la relación entre $\overline{\mathcal{H}}_m(t)$ y $\overline{\mathbb{H}}_m(t)$ podemos proseguir a la diagonalización de

$$\overline{\mathbb{H}}_m(t) = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2 - c_{13}^2V(t) & \Delta_{21}c_{12}s_{12} & -V(t)c_{13}s_{13} \\ \Delta_{21}c_{12}s_{12} & \Delta_{21}c_{12}^2 & 0 \\ -V(t)c_{13}s_{13} & 0 & \Delta_{31} - s_{13}^2V(t) \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

cuya ecuación característica es:

$$\begin{aligned}\lambda^3 - \lambda^2(\Delta_{21} + \Delta_{31} - V) + \\ \lambda(\Delta_{21}\Delta_{31} - V\Delta_{31}c_{13}^2 - V\Delta_{21}(c_{12}^2 + s_{13}^2s_{12}^2)) + V\Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2c_{13}^2 = 0\end{aligned} \quad (4.69)$$

con coeficientes

$$\begin{aligned}\bar{a} &= -(\Delta_{21} + \Delta_{31} - V) \\ \bar{b} &= (\Delta_{21}\Delta_{31} - V\Delta_{31}c_{13}^2 - V\Delta_{21}(c_{12}^2 + s_{13}^2s_{12}^2)) \\ \bar{c} &= +V\Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2c_{13}^2\end{aligned} \quad (4.70)$$

donde hemos mantenido la convención de denotar las cantidades del anti-neutrino con barra. Usando los resultados del Apéndice A, definimos las cantidades

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \bar{b} - \frac{1}{3}\bar{a}^2 \\ \bar{q} &= \bar{c} - \frac{1}{3}\bar{b}\bar{a} + \frac{2}{27}\bar{a}^3\end{aligned}$$

o, de forma explícita,

$$\begin{aligned} \bar{p} = & -V\Delta_{31}c_{13}^2 - V\Delta_{21}(c_{12}^2 + s_{13}^2s_{12}^2) + \\ & \frac{1}{3}(\Delta_{21}\Delta_{31} - \Delta_{21}^2 - \Delta_{31}^2 - V^2 + 2V(\Delta_{21} + \Delta_{31})), \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \bar{q} = & \frac{1}{9}\left\{\Delta_{21}^2\Delta_{31} + \Delta_{21}\Delta_{31}^2 + \Delta_{21}\Delta_{31}V\right\} + \\ & \frac{1}{3}\left\{-V(\Delta_{21}\Delta_{31}c_{13}^2 + \Delta_{21}^2(c_{12}^2 + s_{13}^2s_{12}^2) + \Delta_{31}^2c_{13}^2 + \Delta_{21}\Delta_{31}(c_{12}^2 + s_{13}^2s_{12}^2))\right. \\ & \left.+ V^2(\Delta_{31}c_{13}^2 + \Delta_{21}(c_{12}^2 + s_{13}^2s_{12}^2))\right\} - \frac{2}{9}\left\{-V(\Delta_{31}^2 + \Delta_{21}^2) + V^2(\Delta_{31} + \Delta_{21})\right\} \\ & - \frac{2}{27}\left\{\Delta_{31}^3 + \Delta_{21}^3 - V^3\right\} + V\Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2c_{13}^2. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Usando la ecuación (A.20),

$$\bar{z}_{k+1} = 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\bar{q}}{2\bar{p}}\sqrt{\frac{-3}{\bar{p}}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right) \quad \text{para } k = \{0, 1, 2\} \quad (4.73)$$

para encontrar los eigenvalores exactos de la ecuación (4.69) es necesario reincorporar el factor $\bar{a}/3$ que se sustrajo para obtener la ecuación cúbica reducida; de esta forma, los eigenvalores exactos del antineutrino son

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{|\bar{a}|}{3} + 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\bar{q}}{2\bar{p}}\sqrt{\frac{-3}{\bar{p}}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad (4.74)$$

donde el valor absoluto en la ecuación (4.74) debe interpretarse como que la cantidad $|\bar{a}|$ es tomada sin signatura, es decir $|\bar{a}| \equiv \Delta_{21} + \Delta_{31} - V$ sin hacer referencia a los valores numéricos explícitamente.

Una vez más, queremos que los eigenvalores estén ordenados de menor a mayor, lo cual establece una relación entre los índices i y k , enteramente similar a la que se encontró en el caso de neutrino

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_1(t) &= \bar{z}_1 + \frac{|\bar{a}|}{3}, \\ \bar{\epsilon}_2(t) &= \bar{z}_2 + \frac{|\bar{a}|}{3}, \\ \bar{\epsilon}_3(t) &= \bar{z}_0 + \frac{|\bar{a}|}{3}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

de esta manera los eigenvalores quedan ordenados de forma adecuada $\bar{\epsilon}_1(t) < \bar{\epsilon}_2(t) < \bar{\epsilon}_3(t)$.

En la Gráfica 4.3 se muestran los eigenvalores exactos para el caso del antineutrino, donde se observa que los valores del potencial efectivo para los que ocurre las resonancias son negativos y, por tanto, no físicos. Lo siguiente que nos gustaría es averiguar si existe alguna forma de aproximar los eigenvalores exactos para el caso del antineutrino y como obtener dicha aproximación.

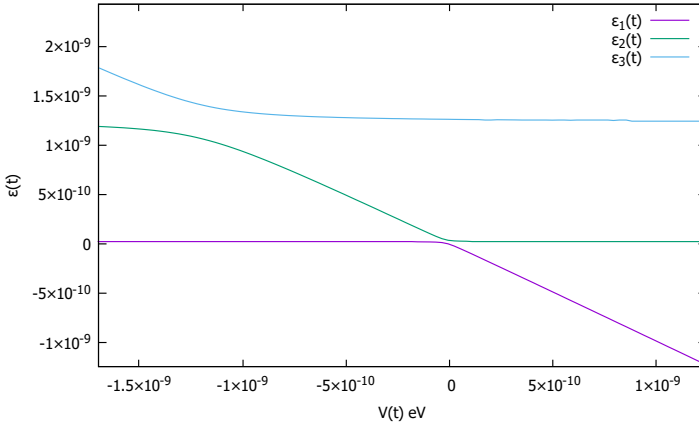


Figura 4.3: Gráficas de los eigenvalores de $\overline{\mathcal{H}}_m$ dados por la ecuación (4.12), siendo ϵ_1 el menor de ellos y ϵ_3 el mayor. Donde tomamos los siguientes valores $E_\nu = 1$ MeV, $\Delta_{21} = 7.53 \times 10^{-5}$ eV², $\Delta_{31} = 2.453 \times 10^{-3}$ eV² (orden normal), $\sin^2 \theta_{21} = 0.307$ y $\sin^2 \theta_{31} = 2.20 \times 10^{-2}$ [32].

4.2.2. Eigenvalores aproximados del antineutrino

En la Sección 4.1.2 nos aprovechamos de que la razón entre Δ_{21}/Δ_{31} es mucho menor que uno y, por lo tanto, las regiones donde los eigenvalores son casi degenerados se puede resolver independientemente y cada resonancia corresponde a la mezcla efectiva de solo dos sabores en materia.

Para derivar los eigenvalores aproximados de los antineutrinos, es posible seguir el mismo razonamiento, por ejemplo es posible definir los Hamiltonianos primados $\overline{\mathbb{H}}'_m(t)$ y $\overline{\mathbb{H}}''_m(t)$, de la siguiente manera.

Si en (4.68) tomamos $V(t)c_{13}s_{13} = 0$, con lo cual

$$\overline{\mathbb{H}}'_m(t) = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2 - c_{13}^2V(t) & \Delta_{21}c_{12}s_{12} & 0 \\ \Delta_{21}c_{12}s_{12} & \Delta_{21}c_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} - s_{13}^2V(t) \end{pmatrix}, \quad (4.76)$$

para el segundo subsistema tomemos $\Delta_{21}c_{12}s_{12} = 0$

$$\overline{\mathbb{H}}_m''(t) = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2 - c_{13}^2V(t) & 0 & -V(t)c_{13}s_{13} \\ 0 & \Delta_{21}c_{12}^2 & 0 \\ -V(t)c_{13}s_{13} & 0 & \Delta_{31} - s_{13}^2V(t) \end{pmatrix}. \quad (4.77)$$

Las ecuaciones característica de (4.76) y (4.77) son

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2(\Delta_{21} + \Delta_{31} - V) \\ + \lambda(\Delta_{21}\Delta_{31} - V\Delta_{21}(c_{12}^2 + s_{13}^2s_{12}^2) - V\Delta_{31}c_{13}^2 + V^2c_{13}^2s_{13}^2) \\ + (V\Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2c_{13}^2 - \Delta_{21}V^2c_{12}^2c_{13}^2s_{13}^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

y

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2(\Delta_{21} + \Delta_{31} - V) \\ + \lambda(\Delta_{21}\Delta_{31} - V\Delta_{21}(c_{12}^2 + s_{13}^2s_{12}^2) - V\Delta_{31}c_{13}^2 + \Delta_{21}^2c_{12}^2s_{12}^2) \\ + (V\Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2c_{13}^2 - \Delta_{21}^2\Delta_{31}c_{12}^2s_{12}^2 + \Delta_{21}^2Vc_{12}^2s_{12}^2s_{13}^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

respectivamente.

Si nuevamente tomamos el límite $\Delta_{31} \gg Vs_{13}^2$, la ecuación (4.78) tiende a (4.69). Por otro lado en el límite $Vc_{13}^2 \gg \Delta_{21}s_{12}^2$ y usando el hecho de que $\Delta_{21}/\Delta_{31} \ll 1$, la (4.79) se reduce a (4.69).

Los eigenvalores de los Hamiltonianos $\overline{\mathbb{H}}_m'(t)$ son:

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}'_- &= \frac{1}{2} \left[\Delta_{21} - c_{13}^2V - \sqrt{(\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} + c_{13}^2V)^2 + \Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta_{12}} \right], \\ \overline{\lambda}'_+ &= \frac{1}{2} \left[\Delta_{21} - c_{13}^2V + \sqrt{(\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} + c_{13}^2V)^2 + \Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta_{12}} \right], \\ \overline{\lambda}'_0 &= \Delta_{31} - s_{13}^2V(t). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Por otro lado para $\overline{\mathbb{H}}_m''(t)$, tenemos

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}''_- &= \frac{1}{2} \left[\Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_{13} - V - \sqrt{(\Delta \cos 2\theta_{13} + V)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta_{13}} \right], \\ \overline{\lambda}''_0 &= \Delta_{21}c_{12}^2, \\ \overline{\lambda}''_+ &= \frac{1}{2} \left[\Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_{13} - V + \sqrt{(\Delta \cos 2\theta_{13} + V)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta_{13}} \right]. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Los limites para este caso queda de la siguiente manera

- $Vc_{13}^2 \gg \Delta_{21}$
 - $\bar{\lambda}'_- \rightarrow \Delta_{21}s_{12}^2 - c_{13}^2V$
 - $\bar{\lambda}'_+ \rightarrow \Delta_{21}c_{12}^2 = \bar{\lambda}''_0$
- $\Delta \gg V$
 - $\bar{\lambda}''_- \rightarrow \Delta_{21}s_{12}^2 - c_{13}^2V$
 - $\bar{\lambda}''_+ \rightarrow \Delta_{31} - s_{13}^2V(t) = \bar{\lambda}'_0$

Por lo tanto podemos tomar $\bar{\lambda}'_-$ como el eigenvalor de energía más baja, mientras que para el eigenvalor de energía más alta usaremos $\bar{\lambda}''_+$. y usando una vez la invarianza de la traza, podemos obtener los eigenvalores aproximados para el antineutrino,

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_1 &= \frac{1}{2} \left[\Delta_{21} - c_{13}^2V - \sqrt{(\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} + c_{13}^2V)^2 + \Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta_{12}} \right], \\ \bar{\lambda}_2 &= \Delta_{21} + \Delta_{31} - V - \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3, \\ \bar{\lambda}_3 &= \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_{13} - V) + \sqrt{(\Delta \cos 2\theta_{13} + V)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta_{13}} \right].\end{aligned}\tag{4.82}$$

Se puede observar que estos se pueden obtener directamente de la ecuación (4.28), al hacer el cambio de $V \rightarrow -V$

En la Gráfica 4.4, mostramos la comparación entre los eigenvalores exactos del antineutrino y los eigenvalores aproximados obtenidos a partir de (4.28) haciendo el cambio $V \rightarrow -V$, la diferencia porcentual en el intervalo de 0 a 10^{-11} eV el error porcentual es menor al 0.15%; sin embargo, en el rango 0 a 10^{-9} eV, el error porcentual de $\delta\epsilon_2$ es de casi del 40%, a pesar de esto, en el intervalo de validez para el potencial efectivo es aún menor al 2%.

Para valores mayores del potencial efectivo la aproximación se separa muy rápidamente del caso exacto; esto también ocurre en el caso del neutrino. Por lo discutido anteriormente, podemos tomar los eigenvalores dados en (4.82) como una buena aproximación al caso exacto, con un error porcentual menor al 2% en el intervalo de los 0 a 10^{-11} eV. En consecuencia, podemos usar los eigenvalores aproximados siempre y cuando nos mantengamos dentro de este intervalo.

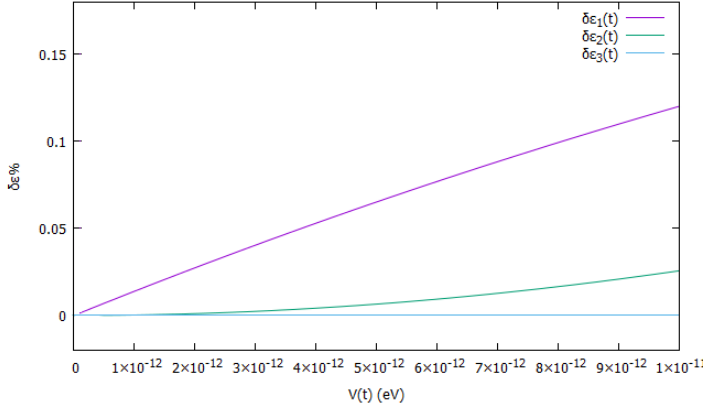


Figura 4.4: Comparación entre los eigenvalores exactos del antineutrino dados en la ecuación (4.74), y los eigenvalores aproximados (4.82). Donde tomamos los siguientes valores $E_\nu = 1$ MeV, $\Delta_{21} = 7.53 \times 10^{-5}$ eV², $\Delta_{31} = 2.453 \times 10^{-3}$ eV² (orden normal), $\sin^2 \theta_{21} = 0.307$ y $\sin^2 \theta_{31} = 2.20 \times 10^{-2}$ [32].

4.2.3. Parametrización exacta de $\overline{\mathcal{O}}_m$

Para proporcionar las entradas de la matriz $\overline{\mathcal{O}}_m(t)$, usaremos el Teorema 4.1.1 y calcularemos las menores de

$$\overline{\mathcal{H}}_m = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2c_{13}^2 + \Delta_{31}s_{13}^2 - V & \Delta_{21}s_{12}c_{12}c_{13} & \Delta_{31}c_{13}s_{13} - \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}c_{13} \\ \Delta_{21}s_{12}c_{12}c_{13} & \Delta_{21}c_{12}^2 & -\Delta_{21}s_{12}c_{12}s_{13} \\ \Delta_{31}c_{13}s_{13} - \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}c_{13} & -\Delta_{21}s_{12}c_{12}s_{13} & \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.83)$$

Utilizaremos la notación \overline{M}_i con $i = \{1, 2, 3\}$ para denotar las menores que resultan de eliminar la i -ésima fila y la i -ésima columna de $\overline{\mathcal{H}}_m$ y sus respectivos eigenvalores los denotaremos por $\overline{\lambda}_\pm^{\overline{M}_i}$, de esta forma las menores de $\overline{\mathcal{H}}_m$ son:

Eliminando la primera fila y la primera columna de (4.83).

$$\overline{M}_1 = \begin{pmatrix} \Delta_{21}c_{12}^2 & -\Delta_{21}s_{12}c_{12}s_{13} \\ -\Delta_{21}s_{12}c_{12}s_{13} & \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.84)$$

este mismo procedimiento se debe repetir para obtener \overline{M}_2 y \overline{M}_3

$$\overline{M}_2 = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2c_{13}^2 + \Delta_{31}s_{13}^2 - V & \Delta_{31}c_{13}s_{13} - \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}c_{13} \\ \Delta_{31}c_{13}s_{13} - \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}c_{13} & \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.85)$$

$$\overline{M}_3 = \begin{pmatrix} \Delta_{21}s_{12}^2c_{13}^2 + \Delta_{31}s_{13}^2 - V & \Delta_{21}s_{12}c_{12}c_{13} \\ \Delta_{21}s_{12}c_{12}c_{13} & \Delta_{21}c_{12}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.86)$$

Los eigenvalores de las menores son:

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_{\pm}^{\bar{M}_1} &= \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}c_{12}^2 + \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2) \right. \\
&\quad \left. \pm \sqrt{(\Delta_{21}c_{12}^2 + \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2)^2 - 4\Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2c_{13}^2} \right], \\
\bar{\lambda}_{\pm}^{\bar{M}_2} &= \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_{31} - V) \right. \\
&\quad \left. \pm \sqrt{(\Delta_{21}s_{12}^2 - \Delta_{31})^2 - 2V \cos 2\theta_{13}(\Delta_{21}s_{12}^2 - \Delta_{31}) + V^2} \right], \\
\bar{\lambda}_{\pm}^{\bar{M}_3} &= \frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}\omega_+ + \Delta_{31}s_{13}^2 - V) \right. \\
&\quad \left. \pm \sqrt{\Delta_{21}^2\omega_+^2 - 2\Delta_{21}\omega_- [\Delta_{31}s_{13}^2 - V] + (\Delta_{31}s_{12}^2 - V)^2} \right],
\end{aligned} \tag{4.87}$$

en donde ω_{\pm} se define igual que en el caso del neutrino, es decir, $\omega_+ \equiv (c_{12}^2 + s_{12}^2c_{13}^2)$ y $\omega_- \equiv (c_{12}^2 - s_{12}^2c_{13}^2)$.

Usando los resultados del Teorema 4.1.1 y las ecuaciones (4.75) y (4.87), podemos encontrar de forma exacta cualquiera de las entradas de la matriz $\bar{\mathcal{O}}_m(t)$, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m\|^2 &= \frac{(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\lambda}_+^{\bar{M}_1})(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\lambda}_-^{\bar{M}_1})}{(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_2)(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_3)}, \\
\|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m\|^2 &= \frac{(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\lambda}_+^{\bar{M}_1})(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\lambda}_-^{\bar{M}_1})}{(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_1)(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_3)}, \\
\|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m\|^2 &= \frac{(\bar{\epsilon}_3 - \bar{\lambda}_+^{\bar{M}_1})(\bar{\epsilon}_3 - \bar{\lambda}_-^{\bar{M}_1})}{(\bar{\epsilon}_3 - \bar{\epsilon}_1)(\bar{\epsilon}_3 - \bar{\epsilon}_2)},
\end{aligned} \tag{4.88}$$

En general, cualquier entrada de matriz $\bar{\mathcal{O}}_{ij}^m$ se puede dar usando la ecuación (4.31) con $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ y $j \neq l$, $l \neq k$, $j \neq k$

$$\|\bar{\mathcal{O}}_{ij}^m\|^2 = \frac{(\bar{\epsilon}_j - \bar{\lambda}_+^{\bar{M}_i})(\bar{\epsilon}_j - \bar{\lambda}_-^{\bar{M}_i})}{(\bar{\epsilon}_j - \bar{\epsilon}_l)(\bar{\epsilon}_j - \bar{\epsilon}_k)}. \tag{4.89}$$

Esta ecuación es general y análoga a (4.43) más aún no es necesario hacer ninguna suposición adicional para proporcionar los módulos al cuadro de las entradas de la matriz de paso del antineutrino; sin embargo, al igual que ocurrió con el caso del neutrino, la complejidad de la misma la hace poco

práctica y estudiar sus límites resulta una tarea intrincada. Por tal motivo, sería deseable encontrar una forma aproximada de la matriz de paso para el antineutrino.

4.2.4. Parametrización aproximada de $\overline{\mathcal{O}}_m$

En la sección 4.2.2 argumentamos que hacer el cambio $V \rightarrow -V$ en las ecuaciones (4.28), nos permitía obtener una buena aproximación a los eigenvalores del antineutrino, esta aseveración fue posteriormente comprobada al calcular el error porcentual respecto a los eigenvalores exactos, el cual se encontraba por debajo del 1 %.

Para poder dar una aproximación a la matriz de paso del antineutrino hagamos el cambio $V \rightarrow -V$ en la última de las ecuaciones (4.50)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_m^T(-V)\mathcal{H}_m(-V)\mathcal{O}_m(-V) &\simeq \text{diag}(\lambda_1(-V), \lambda_2(-V), \lambda_3(-V)) \\ \mathcal{O}_m^T(-V)\overline{\mathcal{H}}_m\mathcal{O}_m(-V) &\simeq \text{diag}(\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \overline{\lambda}_3) \end{aligned} \quad (4.90)$$

de la última de estas ecuaciones se deduce que matriz,

$$\overline{\mathcal{O}}_m \equiv \mathcal{O}_m(-V) = \mathcal{O}_{13}^m(-V)\mathcal{O}_{12}^m(-V) \quad (4.91)$$

diagonaliza de forma aproximada al Hamiltoniano $\overline{\mathcal{H}}_m$.

En analogía con (4.52), denotemos las entradas de $\overline{\mathcal{O}}_m(t)$ de la siguiente manera

$$\overline{\mathcal{O}}_m(t) = \begin{pmatrix} \overline{c}_{12}^m \overline{c}_{13}^m & \overline{s}_{12}^m \overline{c}_{13}^m & \overline{s}_{13}^m \\ -\overline{s}_{12}^m & -\overline{c}_{12}^m & 0 \\ -\overline{c}_{12}^m \overline{s}_{13}^m & -\overline{s}_{12}^m \overline{s}_{13}^m & \overline{c}_{13}^m \end{pmatrix}, \quad (4.92)$$

en otras palabras, para definir de forma aproximada los ángulos de mezcla efectivos $\overline{\theta}_{13}^m$ y $\overline{\theta}_{12}^m$, para el antineutrino basta con hacer el cambio $V \rightarrow -V$ en las ecuaciones (4.53) - (4.56)

$$\cos 2\overline{\theta}_{12}^m = \frac{\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} + V c_{13}^2}{\sqrt{(\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} + c_{13}^2 V)^2 + \Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta_{12}}}, \quad (4.93)$$

$$\sin 2\overline{\theta}_{12}^m = \frac{\Delta_{21} \sin 2\theta_{12}}{\sqrt{(\Delta_{21} \cos 2\theta_{12} + c_{13}^2 V)^2 + \Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta_{12}}}. \quad (4.94)$$

$$\cos 2\overline{\theta}_{13}^m = \frac{\Delta \cos 2\theta_{13} + V}{\sqrt{(\Delta \cos 2\theta_{13} + V)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta_{13}}}, \quad (4.95)$$

$$\sin 2\overline{\theta}_{13}^m = \frac{\Delta \sin 2\theta_{13}}{\sqrt{(\Delta \cos 2\theta_{13} + V)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta_{13}}}. \quad (4.96)$$

En el límite donde el potencial de interacción decae a cero en el borde del medio,

$$\begin{aligned}\lim_{V(t) \rightarrow 0} \cos 2\theta_{ij}^m(t) &= \cos 2\theta_{ij}, \\ \lim_{V(t) \rightarrow 0} \sin 2\theta_{ij}^m(t) &= \sin 2\theta_{ij},\end{aligned}\tag{4.97}$$

Considerando que en el borde del medio el potencial de interacción se anula; debemos satisfacer la ecuación (2.59), es otras palabras, se debe cumplir que

$$\lim_{V \rightarrow 0} \overline{\mathcal{O}}_m(t) \rightarrow \mathcal{O}_{13} \mathcal{O}_{12},\tag{4.98}$$

tal como sucede de acuerdo con (4.97). Por lo tanto la matriz de mezcla de los antineutrinos en materia se puede aproximar

$$U_m(t) \simeq \mathcal{O}_{23} \Gamma^\dagger \overline{\mathcal{O}}_{13}^m(t) \overline{\mathcal{O}}_{12}^m(t) \Gamma,\tag{4.99}$$

Nuestro interés principal en esta aproximación es el de usar las ecuaciones (4.93) - (4.96) con la finalidad de escribir la probabilidad de supervivencia del antineutrino electrónico de una forma más sencilla, tema que abordamos en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Relación entre el caso del neutrino y el antineutrino

En este capítulo estudiaremos la relación que existe entre el caso del neutrino y el antineutrino, haciendo énfasis en la relación que se puede deducir entre los operadores de evolución de los estados instantáneos. Empezaremos investigando como cambian los parámetros del neutrino al hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$, estableciendo una relación entre los operadores de evolución de ambos casos, la cual nos permitirá definir las probabilidades de oscilación para el antineutrino en términos de la probabilidad de transición del neutrino.

5.1. Relaciones entre P_c y \bar{P}_c en el caso de dos sabores

Una de las principales motivaciones de este trabajo fue extender los resultados que ya se habían obtenido en un trabajo previo realizado bajo la tutela del Doctor D'Olivo [24], al caso de tres generaciones. Esta sección pretende dar un breve repaso a los resultados obtenidos en el dicho trabajo.

Tomemos como punto de partida la ecuación (3.68) y enfoquémonos únicamente en el cálculo de las probabilidades promedio

$$\left\langle \bar{P}_{\bar{e} \rightarrow \bar{e}}(t, \Delta) \right\rangle = \left\langle P_{e \rightarrow e}(t, -\Delta) \right\rangle. \quad (5.1)$$

Debido a la simplicidad del problema, las expresiones aproximadas de la probabilidad de oscilación promedio de ambos casos, son conocidas en forma explícita; ecuaciones (2.88) y (2.102), con lo cual el empleo de la ecuación (5.1) es inmediato

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \bar{P}_c(\Delta_0) \right) \cos 2\theta \cos 2\bar{\theta}_m(\Delta_0; t_0) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_c(-\Delta_0) \right) \cos 2\theta \cos 2\theta_m(-\Delta_0; t_0). \quad (5.2)$$

para obtener $\cos 2\theta_m(-\Delta; t_0)$ usamos la ecuación (2.77),

$$\begin{aligned} \cos 2\theta_m(-\Delta_0; t_0) &= \frac{-(\Delta_0 \cos 2\theta + V(t))}{\sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta - V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}}, \\ &= -\cos 2\bar{\theta}_m(\Delta_0; t_0) \end{aligned} \quad (5.3)$$

sustituyendo en (5.2) se llega a la relación entre las probabilidades de cruzamiento

$$\boxed{\bar{P}_c(\Delta_0) = 1 - P_c(-\Delta_0)} \quad (5.4)$$

dicho de otra manera, es posible obtener la probabilidad de cruzamiento de antineutrino, si se conoce correspondiente probabilidad para el neutrino, al hacer el cambio $\Delta_0 \rightarrow -\Delta_0$, este es el resultado principal obtenido en [24].

Revisemos una vez más la deducción de la ecuación (2.88), partamos de la relación entre los estados de sabor y los estados instantáneos

$$\begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_m(t) & \sin \theta_m(t) \\ -\sin \theta_m(t) & \cos \theta_m(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^m(t) \\ \phi_2^m(t) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

en términos de componentes

$$\begin{aligned} \psi_e &= \cos \theta_m(t) \phi_1^m(t) + \sin \theta_m(t) \phi_2^m(t), \\ \psi_\alpha &= -\sin \theta_m(t) \phi_1^m(t) + \cos \theta_m(t) \phi_2^m(t), \end{aligned} \quad (5.6)$$

la probabilidad de supervivencia promedio del neutrino electrónico se obtiene directamente de la primera de estas ecuaciones despreciando los términos de interferencia

$$\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle = \|\cos \theta_m(t)\|^2 \langle \|\phi_1^m(t)\|^2 \rangle + \|\sin \theta_m(t)\|^2 \langle \|\phi_2^m(t)\|^2 \rangle. \quad (5.7)$$

Usando la conservación de la probabilidad y algunas identidades trigonométricas la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle = \frac{1}{2} \left[1 - (1 - 2\langle \|\phi_1^m(t)\|^2 \rangle) \cos 2\theta_m(t) \right]. \quad (5.8)$$

Para encontrar el estado $\phi_1^m(t)$ tiempo t usemos el formalismo del operador de evolución

$$\Phi_m(t) = \mathcal{U}_m(t, t_0)\Phi_m(t_0), \quad (5.9)$$

si suponemos que al tiempo t_0 se crea un estado puro de sabor electrónico la condición inicial esta dada por

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} \phi_1^m(t_0) \\ \phi_2^m(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_m(t_0) \\ \sin \theta_m(t_0) \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Por otro lado, de los resultados del Apéndice B, el operador de evolución en forma abstracta se puede reescribir como

$$\mathcal{U}_m(t, t_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{11}(t, t_0) & \mathcal{U}_{12}(t, t_0) \\ -\mathcal{U}_{12}^*(t, t_0) & \mathcal{U}_{11}^*(t, t_0) \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

de esta forma

$$\begin{aligned} \langle \|\phi_1^m(t)\|^2 \rangle &= \langle \|\mathcal{U}_{11}(t, t_0)\|^2 \rangle \|\cos \theta_m(t_0)\|^2 + \langle \|\mathcal{U}_{12}(t, t_0)\|^2 \rangle \|\sin \theta_m(t_0)\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + (1 - 2\langle \|\mathcal{U}_{12}(t, t_0)\|^2 \rangle) \cos 2\theta_m(t_0) \right], \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde hemos usando la condición de unitariedad del operador de evolución. Sustituyendo en (5.8), finalmente se llega a:

$$\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle = \frac{1}{2} \left[1 + (1 - 2\langle \|\mathcal{U}_{12}(t, t_0)\|^2 \rangle) \cos 2\theta_m(t_0) \cos 2\theta_m(t) \right]. \quad (5.13)$$

Este mismo razonamiento puede ser repetido para el antineutrino llegando así a una ecuación completamente análoga

$$\langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle = \frac{1}{2} \left[1 + (1 - 2\langle \|\overline{\mathcal{U}}_{12}(t, t_0)\|^2 \rangle) \cos 2\bar{\theta}_m(t_0) \cos 2\bar{\theta}_m(t) \right]. \quad (5.14)$$

Si en la ecuación (5.13) hacemos el cambio $\Delta_0 \rightarrow -\Delta_0$, podemos usar la ecuación (5.1) para obtener una relación entre las entradas del operado de evolución dentro del medio

$$\langle \|\overline{\mathcal{U}}_{12}(\Delta; t, t_0)\|^2 \rangle = \langle \|\mathcal{U}_{12}(-\Delta; t, t_0)\|^2 \rangle \quad (5.15)$$

o en términos de las probabilidades de cruzamiento

$$\overline{P}_c(\Delta_0) = P_c(-\Delta_0) \quad (5.16)$$

Para deducir la formula de Parke ecuaciones (2.88) y (2.102) supusimos que el neutrino se detecta en el vacío después de recorrer una larga distancia desde el borde del medio, de tal forma que el medio ya no tiene ningún efecto sobre la propagación del neutrino, en este caso

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \cos 2\bar{\theta}_m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \cos 2\theta_m(t) = \cos 2\theta. \quad (5.17)$$

Sustituyendo este resultado en las ecuaciones (5.14) y (5.14) se tiene

$$\begin{aligned} \langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle &= \frac{1}{2} \left[1 + (1 - 2\langle \|\mathcal{U}_{12}(t_\infty, t_0)\|^2 \rangle) \cos 2\theta_m(t_0) \cos 2\theta \right], \\ \langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle &= \frac{1}{2} \left[1 + (1 - 2\langle \|\overline{\mathcal{U}}_{12}(t_\infty, t_0)\|^2 \rangle) \cos 2\bar{\theta}_m(t_0) \cos 2\theta \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

si en esta ecuaciones hacemos el cambio $\Delta_0 \rightarrow -\Delta_0$, obtenemos el siguiente resultado

$$\langle \|\overline{\mathcal{U}}_{12}(\Delta; t_\infty, t_0)\|^2 \rangle = 1 - \langle \|\mathcal{U}_{12}(-\Delta; t_\infty, t_0)\|^2 \rangle \quad (5.19)$$

esta última ecuación es equivalente a (5.4)

Nos gustaría discutir un poco la ecuación (5.4). La razón principal por la que fuimos capaces de establecer una relación entre las probabilidades de cruzamiento, es el hecho de que las probabilidades promedio de ambos casos se conocen de forma explícita. Esto se debe en gran medida a la simplicidad de problema, ya que al considerar la mezcla entre solo dos sabores existe una única manera en que los estados instantáneos se pueden mezclar $\phi_1^m(t) \leftrightarrow \phi_2^m(t)$ y en consecuencia una única probabilidad de cruzamiento.

Al considerar la mezcla entre los tres sabores, la situación es dramáticamente diferente, empezando por el hecho de que ahora se debe considerar la mezcla entre los tres estados instantáneos $\phi_1^m(t) \leftrightarrow \phi_2^m(t) \leftrightarrow \phi_3^m(t)$ y aún en el caso donde el problema pueda ser reducido a dos subsistemas independientes de 2×2 , esto nos deja con dos probabilidades de cruzamiento independientes, P_h y P_l (ecuación (3.27)), más aún, para el caso de tres sabores las entradas de la matriz de paso tienen una forma complicada y de difícil interpretación física. Por estas razones, el estudio para el caso de tres sabores se debe realizar de manera detallada, tema al que dedicamos la siguiente sección.

5.2. Relación entre las probabilidades de oscilación del neutrino y antineutrino

Para estudiar la relación que existe entre el caso del neutrino y el antineutrino empecemos con el Hamiltoniano $\mathcal{H}_m(t)$ dado en la ecuación (3.10), si en este hamiltoniano hacemos los cambios $\Delta_{21} \rightarrow -\Delta_{21}$ y $\Delta_{31} \rightarrow -\Delta_{31}$, o equivalentemente $H_0 \rightarrow -H_0$, resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_m(t) &= \mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}(-H_0)\mathcal{O}_{12}^T\mathcal{O}_{13}^T + V(t)Y, \\ &= -(\mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{12}^T\mathcal{O}_{13}^T - V(t)Y) = -\overline{\mathcal{H}}_m(t)\end{aligned}$$

lo que nos permite establecer una relación entre los hamiltonianos $\mathcal{H}_m(t)$ y $\overline{\mathcal{H}}_m(t)$, la cual se resume de la siguiente manera

$$\mathcal{H}_m(-\Delta; t) = -\overline{\mathcal{H}}_m(\Delta; t). \quad (5.20)$$

Usando la notación del Teorema 3.2.2, hacer el cambio de $\Delta \rightarrow -\Delta$, se debe interpretar como hacer simultáneamente los cambios $\Delta_{21} \rightarrow -\Delta_{21}$ y $\Delta_{31} \rightarrow -\Delta_{31}$.

De la ecuación (5.20) se concluye que debe existir una relación entre los eigenvalores de ambos hamiltonianos al hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$, para encontrar dicha relación trabajemos con los eigenvalores exactos dados en las ecuaciones (4.12) y (4.74). De las ecuaciones (4.8) y (4.9), es sencillo comprobar que hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$ en $p(\Delta; t)$ y $q(\Delta; t)$ tiene el siguiente efecto

$$\begin{aligned}p(-\Delta; t) &= \bar{p}(\Delta; t), \\ q(-\Delta; t) &= -\bar{q}(\Delta; t),\end{aligned} \quad (5.21)$$

esto se puede ver directamente haciendo el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$ en las ecuaciones (4.7) y comparando con (4.70)

$$\begin{aligned}a(-\Delta; t) &\rightarrow -\bar{a}, \\ b(-\Delta; t) &\rightarrow \bar{b}, \\ c(-\Delta; t) &\rightarrow -\bar{c}.\end{aligned} \quad (5.22)$$

En consecuencia, si en la ecuación (4.12), se hace el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$, los eigenvalores del neutrino se transforman de la siguiente manera:

$$\epsilon_i(-\Delta; t) = -\frac{\bar{a}}{3} + 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{3\bar{q}}{2\bar{p}}\sqrt{\frac{-3}{\bar{p}}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right). \quad (5.23)$$

Comparando con la ecuación (4.74) vemos que hay un cambio de signo en el argumento de arc cos, por lo tanto, para establecer una relación entre los eigenvalores del neutrino y el antineutrino, necesitamos hacer uso de las siguientes identidades trigonométricas,

$$\begin{aligned}\cos(x - \pi) &= -\cos(x), \\ \text{arc cos}(-x) &= \pi - \text{arc cos } x.\end{aligned}$$

A fin de simplificar la notación de la ecuación (5.23), denotemos al argumento del arc cos como:

$$\bar{x} \equiv \frac{3\bar{q}}{2\bar{p}} \sqrt{\frac{-3}{\bar{p}}}. \quad (5.24)$$

y estudiemos por separado cada eigenvalor de (5.23). Así para $\epsilon_1(-\Delta)$ se tiene

$$\begin{aligned}\epsilon_1(-\Delta) &= -\frac{\bar{a}}{3} + 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \text{arc cos}(-\bar{x}) + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{\bar{a}}{3} + 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(\frac{1}{3}(\pi - \text{arc cos}(\bar{x})) + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{\bar{a}}{3} + 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(-\frac{1}{3} \text{arc cos}(\bar{x}) + \pi\right) \\ &= -\frac{\bar{a}}{3} - 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \text{arc cos}(\bar{x})\right) = -\bar{\epsilon}_3(\Delta; t).\end{aligned}$$

Repitiendo el mismo procedimiento para $\epsilon_2(-\Delta)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\epsilon_2(-\Delta) &= -\frac{\bar{a}}{3} + 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \text{arc cos}(-\bar{x}) + \frac{4\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{\bar{a}}{3} + 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(-\frac{1}{3} \text{arc cos}(\bar{x}) + \frac{5\pi}{3} - 2\pi + 2\pi\right) \\ &= -\frac{\bar{a}}{3} + 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(-\frac{1}{3} \text{arc cos}(\bar{x}) + \frac{5\pi}{3} - 2\pi\right) \\ &= -\frac{\bar{a}}{3} + 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(-\left(\frac{1}{3} \text{arc cos}(\bar{x}) + \frac{4\pi}{3}\right) + \pi\right) \\ &= -\frac{\bar{a}}{3} - 2\sqrt{\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \text{arc cos}(\bar{x}) + \frac{4\pi}{3}\right) = -\bar{\epsilon}_2(\Delta; t).\end{aligned}$$

Finalmente, para $\epsilon_3(-\Delta)$,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_3(-\Delta) &= -\frac{\bar{a}}{3} + 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos(-\bar{x})\right) \\
 &= -\frac{\bar{a}}{3} + 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(\frac{1}{3}(\pi - \arccos(\bar{x})) + \pi - \pi\right) \\
 &= -\frac{\bar{a}}{3} + 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(-\left(\frac{1}{3} \arccos(\bar{x}) + \frac{2\pi}{3}\right) + \pi\right) \\
 &= -\frac{\bar{a}}{3} - 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos(\bar{x}) + \frac{2\pi}{3}\right) = -\bar{\epsilon}_1(\Delta; t).
 \end{aligned}$$

En resumen, la relación entre los eigenvalores exactos del neutrino y antineutrino se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1(-\Delta; t) &= -\bar{\epsilon}_3(\Delta; t), \\
 \epsilon_2(-\Delta; t) &= -\bar{\epsilon}_2(\Delta; t), \\
 \epsilon_3(-\Delta; t) &= -\bar{\epsilon}_1(\Delta; t),
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

de donde se concluye que hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$, implica no solo un cambio de signo, sino que además hay un cambio de orden respecto a los eigenvalores del antineutrino.

Aunque este resultado sé probó para los eigenvalores exactos, dado que los diferencia porcentual con los eigenvalores aproximados, en intervalo de validez del potencial efectivo es menor al 1%, se puede probar que esta redacción se mantiene para los eigenvalores aproximados, es decir,

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(-\Delta; t) &= -\bar{\lambda}_3(\Delta; t), \\
 \lambda_2(-\Delta; t) &= -\bar{\lambda}_2(\Delta; t), \\
 \lambda_3(-\Delta; t) &= -\bar{\lambda}_1(\Delta; t).
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Las ecuaciones (5.25) ó (5.26), nos dan la relación que existe entre los eigenvalores del neutrino y al antineutrino al hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$. Lo siguiente que debemos averiguar es cual es la relación entre las matrices de paso para ambos casos, es decir, como se relacionan las matrices $\mathcal{O}_m(t)$ y $\bar{\mathcal{O}}_m(t)$, al hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$

Para ello trabajemos con las ecuaciones (4.43) y (4.89). Estas expresiones se dedujeron a partir de los resultados del teorema 4.1.1, dicho de otro modo, para establecer una relación entre las entradas de las matrices de paso, debemos averiguar como cambian las ecuaciones (4.34), (4.37) y (4.40) al

hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$. Usando la primera de estas ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm}^{M_1}(-\Delta) &= -\frac{1}{2} \left[(\Delta_{21}c_{12}^2 + \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2) \right. \\ &\quad \left. \mp \sqrt{(\Delta_{21}c_{12}^2 + \Delta_{21}s_{12}^2s_{13}^2 + \Delta_{31}c_{13}^2)^2 - 4\Delta_{21}\Delta_{31}c_{12}^2c_{13}^2} \right] \\ &= -\bar{\lambda}_{\mp}^{\bar{M}_1}(\Delta). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Es sencillo verificar que al hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$ en las ecuaciones (4.37) y (4.40) obtenemos una relación similar para $\lambda_{\pm}^{M_2}(-\Delta)$ y $\lambda_{\pm}^{M_3}(-\Delta)$, es decir,

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm}^{M_1}(-\Delta) &= -\bar{\lambda}_{\mp}^{\bar{M}_1}(\Delta), \\ \lambda_{\pm}^{M_2}(-\Delta) &= -\bar{\lambda}_{\mp}^{\bar{M}_2}(\Delta), \\ \lambda_{\pm}^{M_3}(-\Delta) &= -\bar{\lambda}_{\mp}^{\bar{M}_3}(\Delta). \end{aligned} \tag{5.28}$$

Por lo tanto, hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$, no solo implica un cambio de signo de los eigenvalores del neutrino con respecto a los del antineutrino, sino que además existe un cambio de orden. Sustituyamos los resultados obtenidos en (5.25) y (5.28) en las ecuaciones (4.42) y comparemos con (4.88).

$$\begin{aligned} \|\mathcal{O}_{11}^m(-\Delta)\|^2 &= \frac{(\epsilon_1(-\Delta) - \lambda_+^{M_1}(-\Delta))(\epsilon_1(-\Delta) - \lambda_-^{M_1}(-\Delta))}{(\epsilon_1(-\Delta) - \epsilon_2(-\Delta))(\epsilon_1(-\Delta) - \epsilon_3(-\Delta))} \\ &= \frac{(-\bar{\epsilon}_3(\Delta) + \bar{\lambda}_-^{\bar{M}_1}(\Delta))(-\bar{\epsilon}_3(\Delta) + \bar{\lambda}_+^{\bar{M}_1}(\Delta))}{(-\bar{\epsilon}_3(\Delta) + \bar{\epsilon}_2(\Delta))(-\bar{\epsilon}_3(\Delta) + \bar{\epsilon}_1(\Delta))} \\ &= \frac{(\bar{\epsilon}_3 - \bar{\lambda}_-^{\bar{M}_1})(\bar{\epsilon}_3 - \bar{\lambda}_+^{\bar{M}_1})}{(\bar{\epsilon}_3 - \bar{\epsilon}_2)(\bar{\epsilon}_3 - \bar{\epsilon}_1)} = \|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m(\Delta)\|^2 \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{O}_{11}^m(-\Delta)\|^2 &= \frac{(\epsilon_2(-\Delta) - \lambda_+^{M_1}(-\Delta))(\epsilon_2(-\Delta) - \lambda_-^{M_1}(-\Delta))}{(\epsilon_2(-\Delta) - \epsilon_1(-\Delta))(\epsilon_2(-\Delta) - \epsilon_3(-\Delta))} \\ &= \frac{(-\bar{\epsilon}_2(\Delta) + \bar{\lambda}_-^{\bar{M}_1}(\Delta))(-\bar{\epsilon}_2(\Delta) + \bar{\lambda}_+^{\bar{M}_1}(\Delta))}{(-\bar{\epsilon}_2(\Delta) + \bar{\epsilon}_3(\Delta))(-\bar{\epsilon}_2(\Delta) + \bar{\epsilon}_1(\Delta))} \\ &= \frac{(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\lambda}_-^{\bar{M}_1})(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\lambda}_+^{\bar{M}_1})}{(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_3)(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_1)} = \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(\Delta)\|^2 \end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{O}_{13}^m(-\Delta)\|^2 &= \frac{(\epsilon_3(-\Delta) - \lambda_+^{M_1}(-\Delta))(\epsilon_3(-\Delta) - \lambda_-^{M_1}(-\Delta))}{(\epsilon_3(-\Delta) - \epsilon_1(-\Delta))(\epsilon_3(-\Delta) - \epsilon_2(-\Delta))} \\
&= \frac{(-\bar{\epsilon}_1(\Delta) + \bar{\lambda}_-^{M_1}(\Delta))(-\bar{\epsilon}_1(\Delta) + \bar{\lambda}_+^{M_1}(\Delta))}{(-\bar{\epsilon}_1(\Delta) + \bar{\epsilon}_3(\Delta))(-\bar{\epsilon}_1(\Delta) + \bar{\epsilon}_2(\Delta))} \\
&= \frac{(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\lambda}_-^{M_1})(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\lambda}_+^{M_1})}{(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_3)(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_2)} = \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(\Delta)\|^2
\end{aligned} \tag{5.31}$$

En otras palabras, hacer el cambio del signo en las diferencias cuadráticas de masas, implica reordenar las entradas de la matriz \mathcal{O}_m , los resultados anteriores se puede resumir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{O}_{11}^m(-\Delta)\|^2 &= \|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m(\Delta)\|^2 \\
\|\mathcal{O}_{12}^m(-\Delta)\|^2 &= \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(\Delta)\|^2 \\
\|\mathcal{O}_{13}^m(-\Delta)\|^2 &= \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(\Delta)\|^2
\end{aligned} \tag{5.32}$$

De la estructura de las ecuaciones (4.43) y (4.89) se deduce que los elementos restantes de \mathcal{O}_m tendrán relaciones similares. Si definimos la notación compacta $\mathcal{O}_{ij}^{m(-)} \equiv \mathcal{O}_{ij}^m(-\Delta)$ la relación entre las matrices de paso se puede dar de forma explícita,

$$\begin{pmatrix} \|\mathcal{O}_{11}^{m(-)}\|^2 & \|\mathcal{O}_{12}^{m(-)}\|^2 & \|\mathcal{O}_{13}^{m(-)}\|^2 \\ \|\mathcal{O}_{21}^{m(-)}\|^2 & \|\mathcal{O}_{22}^{m(-)}\|^2 & \|\mathcal{O}_{23}^{m(-)}\|^2 \\ \|\mathcal{O}_{31}^{m(-)}\|^2 & \|\mathcal{O}_{32}^{m(-)}\|^2 & \|\mathcal{O}_{33}^{m(-)}\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m\|^2 & \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m\|^2 & \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m\|^2 \\ \|\bar{\mathcal{O}}_{23}^m\|^2 & \|\bar{\mathcal{O}}_{22}^m\|^2 & \|\bar{\mathcal{O}}_{21}^m\|^2 \\ \|\bar{\mathcal{O}}_{33}^m\|^2 & \|\bar{\mathcal{O}}_{32}^m\|^2 & \|\bar{\mathcal{O}}_{31}^m\|^2 \end{pmatrix}. \tag{5.33}$$

Este resultado es general e independientemente de la forma explícita de la matriz de paso. La ecuación (5.33) se pueden entender como una consecuencia directa del hecho de que hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$ en los eigenvalores de \mathcal{H}_m , estos cambien de orden, lo que implica que los eigenvectores asociados a cada eigenvalor, también se deben reordenar.

5.2.1. Relación entre los operadores de evolución de los estados instantáneos en el medio

A continuación nos dedicaremos a deducir la relación general que existe entre los operadores de evolución de los estados instantáneos. Como punto de partida retomemos la ecuación (5.20)

$$\mathcal{H}_m(-\Delta; t) = -\overline{\mathcal{H}_m(\Delta; t)}.$$

Hagamos el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$ en la ecuación (3.14)

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_m^{(-)T}(t)\mathcal{H}_m^{(-)}(t)\mathcal{O}_m^{(-)}(t) &= H_D^{(-)}(t) \\ -\mathcal{O}_m^{(-)T}(t)\overline{\mathcal{H}}_m(t)\mathcal{O}_m^{(-)}(t) &= H_D^{(-)}(t)\end{aligned}\quad (5.34)$$

donde hemos continuado usando la notación $A^{(-)} \equiv A(-\Delta)$

$$H_D^{(-)}(t) = \begin{pmatrix} \epsilon_1(-\Delta; t) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2(-\Delta; t) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3(-\Delta; t) \end{pmatrix}$$

Usando las ecuaciones (5.25)

$$\begin{aligned}\epsilon_1(-\Delta; t) &= -\bar{\epsilon}_3(\Delta; t), \\ \epsilon_2(-\Delta; t) &= -\bar{\epsilon}_2(\Delta; t), \\ \epsilon_3(-\Delta; t) &= -\bar{\epsilon}_1(\Delta; t),\end{aligned}$$

se tiene

$$\mathcal{O}_m^{(-)T}(t)\overline{\mathcal{H}}_m(t)\mathcal{O}_m^{(-)}(t) = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_3(t) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\epsilon}_1(t) \end{pmatrix},$$

en esta última ecuación hemos omitido la dependencia de Δ en los eigenvalores de los antineutrinos.

A fin de recuperar el correcto orden de los eigenvalores en la matriz diagonal definimos la matriz Λ como sigue

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

la cual además de ser unitaria tiene la siguiente propiedad

$$\Lambda^T \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_3(t) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\epsilon}_1(t) \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\epsilon}_3(t) \end{pmatrix} = \overline{H}_D(t).$$

De esta forma, concluimos que

$$\Lambda^T \mathcal{O}_m^{(-)T}(t)\overline{\mathcal{H}}_m(t)\mathcal{O}_m^{(-)}(t)\Lambda = \overline{H}_D(t), \quad (5.36)$$

y comparando esta expresión con la ecuación (3.49), se deduce que

$$\overline{\mathcal{O}}_m(t) = \mathcal{O}_m^{(-)}(t)\Lambda. \quad (5.37)$$

Si en la ecuación (5.37) tomamos los módulos entrada por entrada recuperamos el resultado obtenido en (5.33), el cual se dedujo a partir del Teorema 4.1.1.

Lo siguiente que debemos investigar es la relación entre los estados instantáneos del neutrino y el antineutrino. Para ello, partamos de la relación general que existe entre los estados de masa y los estados instantáneos de los neutrinos dada en (2.47)

$$\Phi(t) = U^\dagger U_m(t) \Phi_m(t).$$

Para el antineutrino existe una relación análoga (Ec. (2.58))

$$\bar{\Phi}(t) = U^T \bar{U}_m(t) \bar{\Phi}_m(t) \quad (5.38)$$

Usando los resultados del Teorema 3.2.2 y, en particular, la ecuación (3.65), se puede establecer una relación entre los estados instantáneos del neutrino y el antineutrino,

$$\begin{aligned} \Phi^{*(-)}(t) &= U^T U_m^{*(-)}(t) \Phi_m^{*(-)}(t), \\ \bar{\Phi}(t) &= U^T U_m^{*(-)}(t) \Phi_m^{*(-)}(t), \end{aligned}$$

sustituyendo la ecuación (5.38) en esta última relación y despejando $\bar{\Phi}_m(t)$, se llega a

$$\bar{\Phi}_m(t) = \bar{U}_m^\dagger(t) U_m^{*(-)}(t) \Phi_m^{*(-)}(t), \quad (5.39)$$

la cual es válida para todo t . Para calcular el producto $\bar{U}_m^\dagger(t) U_m^{*(-)}(t)$, usemos la parametrización de $U_m(t)$ dada en (3.16)

$$U_m^{*(-)}(t) \equiv U_m^*(-\Delta, t) = \mathcal{O}_{23} \Gamma^\dagger \mathcal{O}_m(-\Delta, t) \Gamma, \quad (5.40)$$

y la parametrización de la matriz de mezcla para el antineutrino, ecuación (3.53)

$$\bar{U}_m(\Delta, t) = \mathcal{O}_{23} \Gamma^\dagger \bar{\mathcal{O}}_m(\Delta, t) \Gamma. \quad (5.41)$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \bar{U}_m^\dagger(\Delta, t) U_m^*(-\Delta, t) &= \Gamma^\dagger \bar{\mathcal{O}}_m^T(\Delta, t) \Gamma \mathcal{O}_{23}^T \mathcal{O}_{23} \Gamma^\dagger \mathcal{O}_m(-\Delta, t) \Gamma \\ &= \Gamma^\dagger \bar{\mathcal{O}}_m^T(\Delta, t) \mathcal{O}_m(-\Delta, t) \Gamma \end{aligned}$$

y haciendo uso de la ecuación (5.37)

$$\begin{aligned} \bar{U}_m^\dagger(\Delta, t) U_m^*(-\Delta, t) &= \Gamma^\dagger \bar{\mathcal{O}}_m^T(\Delta, t) \mathcal{O}_m(-\Delta, t) \Gamma \\ &= \Gamma^\dagger \bar{\mathcal{O}}_m^T(\Delta, t) \bar{\mathcal{O}}_m(\Delta, t) \Lambda \Gamma \\ &= \Gamma^\dagger \Lambda \Gamma. \end{aligned}$$

Finalmente la ecuación (5.39) se simplifica del siguiente modo

$$\bar{\Phi}_m(t) = \Gamma^\dagger \Lambda \Gamma \Phi_m^{*(-)}(t). \quad (5.42)$$

Esta última ecuación nos da la relación entre los estados instantáneos del neutrino con los estados instantáneos del antineutrino, al hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$. Para encontrar una relación entre los operadores de evolución de los estados instantáneos, evolucionemos la ecuación (5.42) desde un tiempo inicial t_0 hasta un tiempo arbitrario posterior t ,

$$\bar{\mathcal{U}}_m(t, t_0) \bar{\Phi}_m(t_0) = \Gamma^\dagger \Lambda \Gamma \mathcal{U}_m^{*(-)}(t, t_0) \Phi_m^{*(-)}(t_0). \quad (5.43)$$

Usando la relación entre los estados instantáneos y los estados de la base de sabor, ecuaciones (2.38) y (3.54),

$$\bar{\mathcal{U}}_m(t, t_0) \bar{U}_m^\dagger(\Delta, t_0) \bar{\Psi}(\Delta, t_0) = \Gamma^\dagger \Lambda \Gamma \mathcal{U}_m^{*(-)}(t, t_0) U_m^T(-\Delta, t_0) \Psi^*(-\Delta, t_0).$$

Si al igual que antes consideramos el caso en el que al tiempo t_0 se crea un estado puro de sabor electrónico, entonces

$$\bar{\Psi}(\Delta, t_0) = \Psi^*(-\Delta, t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

y de esta forma, la relación entre los operadores de evolución de los estados instantáneos se puede escribir como

$$\bar{\mathcal{U}}_m(t, t_0) = \Gamma^\dagger \Lambda \Gamma \mathcal{U}_m^{*(-)}(t, t_0) U_m^T(-\Delta, t_0) \bar{U}_m(\Delta, t_0). \quad (5.45)$$

el producto $U_m^T(-\Delta, t_0) \bar{U}_m(\Delta, t_0)$, se puede calcular del mismo modo que antes

$$\begin{aligned} U_m^T(-\Delta, t_0) \bar{U}_m(\Delta, t_0) &= \Gamma^\dagger \mathcal{O}_m^T(-\Delta, t_0) \Gamma \mathcal{O}_{23}^T \mathcal{O}_{23} \Gamma^\dagger \bar{\mathcal{O}}_m(\Delta, t_0) \Gamma \\ &= \Gamma^\dagger [\bar{\mathcal{O}}_m(\Delta, t_0) \Lambda]^T \bar{\mathcal{O}}_m(\Delta, t_0) \Gamma \\ &= \Gamma^\dagger \Lambda \bar{\mathcal{O}}_m^T(\Delta, t_0) \bar{\mathcal{O}}_m(\Delta, t_0) \Gamma \\ &= \Gamma^\dagger \Lambda \Gamma \end{aligned}$$

donde usamos que $\Lambda^T = \Lambda$.

Finalmente, se llega a la relación entre los operadores de evolución de los estados instantáneos

$$\boxed{\bar{\mathcal{U}}_m(\Delta, t, t_0) = \Gamma^\dagger \Lambda \Gamma \mathcal{U}_m^{*(-)}(-\Delta, t, t_0) \Gamma^\dagger \Lambda \Gamma} \quad (5.46)$$

Consideramos este como uno de los resultados principales de la presente tesis, ya que nos permite encontrar la forma del operador de evolución del antineutrino, a partir de los resultados del neutrino, sin la necesidad de hacer suposiciones adicionales.

Calculemos el producto $\Gamma^\dagger \Lambda \Gamma$, que aparece en la ecuación (5.46)

$$\Gamma^\dagger \Lambda \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{i\delta} \\ 0 & -1 & 0 \\ e^{-i\delta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

Sea S una matriz unitaria cualquiera con entradas

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

haciendo uso de la ecuación (5.46)

$$\begin{aligned} \bar{S}(\Delta) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{i\delta} \\ 0 & -1 & 0 \\ e^{-i\delta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11}^*(-\Delta) & S_{12}^*(-\Delta) & S_{13}^*(-\Delta) \\ S_{21}^*(-\Delta) & S_{22}^*(-\Delta) & S_{23}^*(-\Delta) \\ S_{31}^*(-\Delta) & S_{32}^*(-\Delta) & S_{33}^*(-\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{i\delta} \\ 0 & -1 & 0 \\ e^{-i\delta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_{33}^*(-\Delta) & -S_{32}^*(-\Delta)e^{i\delta} & S_{31}^*(-\Delta)e^{2i\delta} \\ S_{23}^*(-\Delta)e^{-i\delta} & -S_{22}^*(-\Delta) & S_{21}^*(-\Delta)e^{i\delta} \\ S_{13}^*(-\Delta)e^{-2i\delta} & -S_{12}^*(-\Delta)e^{-i\delta} & S_{11}^*(-\Delta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Usando la parametrización para el operador de evolución del neutrino dada en (3.31) - (3.33), podemos establecer una relación entre las entradas del los operadores de evolución

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{U}}_{11}^m(t, \Delta) &= -\sqrt{1 - P_l^{(-)}} \sqrt{P_h^{(-)}} \sqrt{P_t^{(-)}} e^{-i(\beta^{(-)} - \gamma^{(-)} + \bar{\alpha}_1)} \\ &\quad + \sqrt{1 - P_h^{(-)}} \sqrt{1 - P_t^{(-)}} e^{-i\bar{\alpha}_1} \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{U}}_{12}^m(t, \Delta) &= e^{i\delta} \left[\sqrt{1 - P_t^{(-)}} \sqrt{P_h^{(-)}} e^{i(-\bar{\alpha}_1 + \beta^{(-)})} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1 - P_l^{(-)}} \sqrt{1 - P_h^{(-)}} \sqrt{P_t^{(-)}} e^{i(-\bar{\alpha}_1 + \gamma^{(-)})} \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\overline{\mathcal{U}}_{13}^m(t, \Delta) = e^{2i\delta} \left[\sqrt{P_l^{(-)}} \sqrt{P_t^{(-)}} e^{i(-\bar{\alpha}_1 + \zeta^{(-)} + \gamma^{(-)})} \right] \quad (5.52)$$

$$\overline{\mathcal{U}}_{21}^m(t, \Delta) = e^{-i\delta} \left[-\sqrt{1 - P_l^{(-)}} \sqrt{1 - P_t^{(-)}} \sqrt{P_h^{(-)}} e^{-i(\beta^{(-)} + \bar{\alpha}_2)} \right. \\ \left. - \sqrt{1 - P_h^{(-)}} \sqrt{P_t^{(-)}} e^{-i(\gamma^{(-)} + \bar{\alpha}_2)} \right] \quad (5.53)$$

$$\overline{\mathcal{U}}_{22}^m(t, \Delta) = \sqrt{1 - P_l^{(-)}} \sqrt{1 - P_h^{(-)}} \sqrt{1 - P_t^{(-)}} e^{-i\bar{\alpha}_2} \\ - \sqrt{P_t^{(-)}} \sqrt{P_h^{(-)}} e^{-i(\gamma^{(-)} + \bar{\alpha}_2 - \beta^{(-)})} \quad (5.54)$$

$$\overline{\mathcal{U}}_{23}^m(t, \Delta) = e^{i\delta} \left[\sqrt{1 - P_t^{(-)}} \sqrt{P_l^{(-)}} e^{i(\zeta^{(-)} - \bar{\alpha}_2)} \right] \quad (5.55)$$

$$\overline{\mathcal{U}}_{31}^m(t, \Delta) = e^{-2i\delta} \left[\sqrt{P_h^{(-)}} \sqrt{P_l^{(-)}} e^{-i(\zeta^{(-)} + \beta^{(-)} + \bar{\alpha}_3)} \right] \quad (5.56)$$

$$\overline{\mathcal{U}}_{32}^m(t, \Delta) = e^{-i\delta} \left[-\sqrt{1 - P_h^{(-)}} \sqrt{P_l^{(-)}} e^{-i(\zeta^{(-)} + \bar{\alpha}_3)} \right] \quad (5.57)$$

$$\overline{\mathcal{U}}_{33}^m(t, \Delta) = \sqrt{1 - P_l^{(-)}} e^{-i\bar{\alpha}_3} \quad (5.58)$$

donde $P_i^{(-)} \equiv P_i(-\Delta)$ con $i = l, h, t$, y de igual forma $\zeta^{(-)} \equiv \zeta(-\Delta)$, $\gamma^{(-)} \equiv \gamma(-\Delta)$ y $\beta^{(-)} \equiv \beta(-\Delta)$ y hicimos uso del hecho que las ecuaciones (3.21), (3.22), (3.60), (3.61) y (5.25) implican,

$$\alpha_1(-\Delta; t) = \int_{t_0}^t \epsilon_1(-\Delta; t') dt' = - \int_{t_0}^t \bar{\epsilon}_3(\Delta; t') dt' = -\bar{\alpha}_3(\Delta; t) \\ \alpha_2(-\Delta; t) = \int_{t_0}^t \epsilon_2(-\Delta; t') dt' = - \int_{t_0}^t \bar{\epsilon}_2(\Delta; t') dt' = -\bar{\alpha}_2(\Delta; t) \quad (5.59) \\ \alpha_3(-\Delta; t) = \int_{t_0}^t \epsilon_3(-\Delta; t') dt' = - \int_{t_0}^t \bar{\epsilon}_1(\Delta; t') dt' = -\bar{\alpha}_1(\Delta; t)$$

Las ecuaciones (5.50) - (5.58), son en principio generales y no es necesario hacer uso de ninguna aproximación para llegar a las mismas.

Como mencionamos en la subsección 3.2.1 para el antineutrino aún es posible factorizar el operador de evolución, en una parte que describe la evolución adiabática de los antineutrino en el medio y una parte que describe la evolución no adiabática (3.63)

$$\overline{\mathcal{U}}_m(t, t_0) = \overline{\mathcal{U}}_m^A(t, t_0) \overline{\mathcal{U}}_m^{NA}(t, t_0).$$

Desafortunadamente, para el antineutrino no contamos con una forma adecuada de aproximar al operador de evolución de la parte no adiabática, sin embargo, podemos usar la parametrización general de una matriz unitaria de 3×3 para escribir el operador de evolución de los antineutrinos.

En analogía al caso del neutrino usaremos los resultados del Apéndice C y la notación $\overline{P}_h, \overline{P}_t$ y \overline{P}_l para escribir el operador de evolución. La interpretación de estas nuevas cantidades se dará mediante la relación que se establezca con las probabilidades de cruzamiento del neutrino, lo que nos permitirá interpretarlas como probabilidades de cruzamiento.

Los factores de la ecuación (3.63) son:

$$\overline{\mathcal{U}}_m^A(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-i\overline{\alpha}_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\overline{\alpha}_2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\overline{\alpha}_3(t)} \end{pmatrix}, \quad (5.60)$$

y para la parte no adiabática

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{U}}_m^{NA} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{1-\overline{P}_t} & -\sqrt{\overline{P}_t} e^{i\overline{\gamma}} \\ 0 & -\sqrt{\overline{P}_t} e^{-i\overline{\gamma}} & \sqrt{1-\overline{P}_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\overline{P}_l} & \sqrt{\overline{P}_l} e^{i\overline{\zeta}} & 0 \\ -\sqrt{\overline{P}_l} e^{-i\overline{\zeta}} & \sqrt{1-\overline{P}_l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\overline{P}_h} & \sqrt{\overline{P}_h} e^{i\overline{\beta}} \\ 0 & -\sqrt{\overline{P}_h} e^{-i\overline{\beta}} & \sqrt{1-\overline{P}_h} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Usando la parametrización de la parte no adiabática del antineutrino dada en (5.61). Las ecuaciones (5.50) - (5.58) se reescriben como

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\overline{P}_l} e^{-i\overline{\alpha}_1} = & -\sqrt{1-P_l^{(-)}} \sqrt{P_h^{(-)}} \sqrt{P_{ts}^{(-)}} e^{-i(\beta^{(-)}-\gamma^{(-)}+\overline{\alpha}_1)} \\ & + \sqrt{1-P_h^{(-)}} \sqrt{1-P_t^{(-)}} e^{-i\overline{\alpha}_1} \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\overline{P}_h} \sqrt{\overline{P}_l} e^{i(\overline{\zeta}-\overline{\alpha}_1)} = & e^{i\delta} \left[\sqrt{1-P_t^{(-)}} \sqrt{P_h^{(-)}} e^{i(-\overline{\alpha}_1+\beta^{(-)})} \right. \\ & \left. - \sqrt{1-P_l^{(-)}} \sqrt{1-P_h^{(-)}} \sqrt{P_t^{(-)}} e^{i(-\overline{\alpha}_1+\gamma^{(-)})} \right] \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\sqrt{\overline{P}_h} \sqrt{\overline{P}_l} e^{i(\overline{\zeta}+\overline{\beta}-\overline{\alpha}_1)} = e^{2i\delta} \left[\sqrt{P_l^{(-)}} \sqrt{P_t^{(-)}} e^{i(-\overline{\alpha}_1+\zeta^{(-)}+\gamma^{(-)})} \right] \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\overline{P}_{ts}} \sqrt{\overline{P}_l} e^{-i(\overline{\zeta}+\overline{\alpha}_2)} = & e^{-i\delta} \left[-\sqrt{1-P_l^{(-)}} \sqrt{1-P_t^{(-)}} \sqrt{P_h^{(-)}} e^{-i(\beta^{(-)}+\overline{\alpha}_2)} \right. \\ & \left. - \sqrt{1-P_h^{(-)}} \sqrt{P_t^{(-)}} e^{-i(\gamma^{(-)}+\overline{\alpha}_2)} \right] \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\bar{P}_{ts}}\sqrt{\bar{P}_h} e^{i(\bar{\gamma}-\bar{\alpha}_2-\bar{\beta})} - \sqrt{1-\bar{P}_l}\sqrt{1-\bar{P}_h}\sqrt{1-\bar{P}_{ts}} e^{-i\bar{\alpha}_2} = \\ & \sqrt{1-P_l^{(-)}}\sqrt{1-P_h^{(-)}}\sqrt{1-P_t^{(-)}} e^{-i\bar{\alpha}_2} - \sqrt{P_t^{(-)}}\sqrt{P_h^{(-)}} e^{-i(\gamma^{(-)}+\bar{\alpha}_2-\beta^{(-)})} \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} & -\sqrt{1-\bar{P}_l}\sqrt{1-\bar{P}_{ts}}\sqrt{\bar{P}_h} e^{i(\bar{\beta}-\bar{\alpha}_2)} - \sqrt{1-\bar{P}_h}\sqrt{\bar{P}_{ts}} e^{i(\bar{\gamma}-\bar{\alpha}_2)} = \\ & e^{i\delta} \left[\sqrt{1-P_t^{(-)}}\sqrt{P_l^{(-)}} e^{i(\zeta^{(-)}-\bar{\alpha}_2)} \right] \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\sqrt{\bar{P}_l}\sqrt{\bar{P}_{ts}} e^{-i(\bar{\alpha}_3+\bar{\zeta}+\bar{\gamma})} = e^{-2i\delta} \left[\sqrt{P_h^{(-)}}\sqrt{P_l^{(-)}} e^{-i(\zeta^{(-)}+\beta^{(-)}+\bar{\alpha}_3)} \right] \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-\bar{P}_l}\sqrt{1-\bar{P}_h}\sqrt{\bar{P}_{ts}} e^{-i(\bar{\alpha}_3+\bar{\gamma})} - \sqrt{1-\bar{P}_{ts}}\sqrt{\bar{P}_h} e^{-i(\bar{\alpha}_3+\bar{\beta})} = \\ & e^{-i\delta} \left[-\sqrt{1-P_h^{(-)}}\sqrt{P_l^{(-)}} e^{-i(\zeta^{(-)}+\bar{\alpha}_3)} \right] \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} & -\sqrt{1-\bar{P}_l}\sqrt{\bar{P}_h}\sqrt{\bar{P}_{ts}} e^{i(\bar{\beta}-\bar{\gamma}-\bar{\alpha}_3)} + \sqrt{1-\bar{P}_h}\sqrt{1-\bar{P}_{ts}} e^{-i\bar{\alpha}_3} \\ & = \sqrt{1-P_l^{(-)}} e^{-i\bar{\alpha}_3}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

De la discusión dada en la sección 3.1.1 se concluyó que, al tomar $P_t = 0$, se puede obtener la factorización del operador de evolución del neutrino en el producto $\mathcal{U}_{NA}(t, t_0) \simeq \mathcal{U}_l(t, t_0)\mathcal{U}_h(t, t_0)$ (ecuación (3.26)), lo cual posteriormente nos permitió recuperar la formula de Parke del neutrino para el caso de dos sabores a partir de la ecuación (4.62). Si en esta última ecuación despreciamos la cantidad $P_t^{(-)} = 0$, lo cual implica $\mathcal{P}^{(-)} = 0$, y tomamos los módulos, las ecuaciones se reducen a:

$$1 - \bar{P}_l = 1 - P_h^{(-)} \quad (5.71)$$

$$(1 - \bar{P}_h)\bar{P}_l = P_h^{(-)} \quad (5.72)$$

$$\bar{P}_h\bar{P}_l = 0 \quad (5.73)$$

$$(1 - \bar{P}_t)\bar{P}_l = (1 - P_l^{(-)})P_h^{(-)} \quad (5.74)$$

$$\bar{P}_t\bar{P}_h + (1 - \bar{P}_l)(1 - \bar{P}_h)(1 - \bar{P}_t) - \bar{\mathcal{P}} = (1 - P_l^{(-)})(1 - P_h^{(-)}) \quad (5.75)$$

$$(1 - \bar{P}_l)(1 - \bar{P}_t)\bar{P}_h + (1 - \bar{P}_h)\bar{P}_t + \bar{\mathcal{P}} = P_l^{(-)} \quad (5.76)$$

$$\bar{P}_l\bar{P}_t = P_h^{(-)}P_l^{(-)} \quad (5.77)$$

$$(1 - \bar{P}_l)(1 - \bar{P}_h)\bar{P}_t + (1 - \bar{P}_t)\bar{P}_h + \bar{\mathcal{P}} = (1 - P_h^{(-)})P_l^{(-)} \quad (5.78)$$

$$(1 - \bar{P}_l)\bar{P}_h\bar{P}_t + (1 - \bar{P}_h)(1 - \bar{P}_t) - \bar{\mathcal{P}} = 1 - P_l^{(-)} \quad (5.79)$$

donde definimos la cantidad

$$\overline{\mathcal{P}} \equiv \sqrt{(1 - \overline{P}_l)(1 - \overline{P}_h)(1 - \overline{P}_t)\overline{P}_h\overline{P}_t} \cos(\overline{\beta} - \overline{\gamma}). \quad (5.80)$$

que es análoga a la ecuación (3.39). De la ecuación (5.73) se deduce que $\overline{P}_h = 0$, lo cual implica que $\overline{\mathcal{P}} = 0$ como se puede observar directamente de la ecuación (5.80).

$$\begin{aligned} 1 - \overline{P}_l &= 1 - P_h^{(-)} \\ \overline{P}_l &= P_h^{(-)} \\ \overline{P}_h &= 0 \\ (1 - \overline{P}_t)\overline{P}_l &= (1 - P_l^{(-)})P_h^{(-)} \\ (1 - \overline{P}_l)(1 - \overline{P}_t) &= (1 - P_h^{(-)})(1 - P_l^{(-)}) \\ \overline{P}_t &= P_l^{(-)} \\ \overline{P}_l\overline{P}_t &= P_h^{(-)}P_l^{(-)} \\ (1 - \overline{P}_l)\overline{P}_t &= (1 - P_h^{(-)})P_l^{(-)} \\ (1 - \overline{P}_t) &= 1 - P_l^{(-)} \end{aligned}$$

El caso $\overline{P}_l = 0$ provoca que la mayoría de las cantidades de interés se anulen, lo que se sigue de (5.71) y (5.72), por lo tanto no consideraremos este caso.

De esta forma, podemos deducir una relación sencilla entre las probabilidades de cruzamiento del neutrino evaluadas en $-\Delta$ y las cantidades \overline{P}_h , \overline{P}_t y \overline{P}_l , en el límite cuando $P_t^{(-)} \rightarrow 0$,

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{P}_h(\Delta; t) &= 0, \\ \overline{P}_l(\Delta; t) &= P_h(-\Delta; t), \\ \overline{P}_t(\Delta; t) &= P_l(-\Delta; t). \end{aligned}} \quad (5.81)$$

Las ecuaciones (5.62) - (5.70) nos dicen como se transforman las cantidades $P_h(\Delta, t)$, $P_l(\Delta, t)$ y $P_t(\Delta, t)$ al hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$, con respecto a sus homologas para el casi del antineutrino, si además de ello hace la aproximación de que en el caso del neutrino podemos despreciar la cantidad $P_t(\Delta, t)$, aproximación que esta bien justificada, las relaciones entre las cantidades $P_i(\Delta, t)$ y $\overline{P}_i(\Delta; t)$ con con $i = l, h, t$, se simplifica considerablemente, ecuación (5.81).

Sin embargo, es importan recalcar que estas ecuaciones sólo son válidas dentro del medio, ya que es en el medio donde están definidos los estados instantáneos y, por lo tanto, las ecuaciones (5.42) y (5.46) son válidas para tiempos anteriores a t_* . Recordemos que tomar el límite donde el potencia súbitamente decae a cero en el borde del medio es lo que nos permitió establecer la ecuación (2.44) y todas las consecuencias que se derivan de ella.

Por lo comentado en el párrafo anterior, el uso de las ecuaciones (5.81) no está suficientemente justificado para hacer el cálculo de la probabilidades de supervivencia del antineutrino tal como se hizo en la sección 2.2.2 ecuación (2.56). Si momentáneamente nos olvidamos de este hecho y calculamos la probabilidad de supervivencia del antineutrino electrónico usando las ecuaciones (5.50) - (5.58), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle = & \|U_{e1}\|^2 \left\{ \left[(1 - P_l^{(-)}) P_h^{(-)} P_t^{(-)} + (1 - P_h^{(-)}) (1 - P_t^{(-)}) \right. \right. \\
& - \mathcal{P}^{(-)} \left. \left. \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 + \left[(1 - P_l^{(-)}) (1 - P_h^{(-)}) P_t^{(-)} + (1 - P_t^{(-)}) P_h^{(-)} \right. \right. \right. \\
& + \mathcal{P}^{(-)} \left. \left. \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 + P_l^{(-)} P_t^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 \right\} \\
& + \|U_{e2}\|^2 \left\{ \left[(1 - P_l^{(-)}) (1 - P_t^{(-)}) P_h^{(-)} + (1 - P_h^{(-)}) P_t^{(-)} \right. \right. \\
& + \mathcal{P}^{(-)} \left. \left. \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 + \left[P_h^{(-)} P_t^{(-)} + (1 - P_l^{(-)}) (1 - P_h^{(-)}) (1 - P_t^{(-)}) \right. \right. \right. \\
& - \mathcal{P}^{(-)} \left. \left. \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 + (1 - P_t^{(-)}) P_l^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 \right\} \\
& + \|U_{e3}\|^2 \left\{ P_h^{(-)} P_l^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 + (1 - P_h^{(-)}) P_l^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 \right. \\
& \left. + (1 - P_l^{(-)}) \|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 \right\},
\end{aligned} \tag{5.82}$$

y tomando $P_t^{(-)} = 0$

$$\begin{aligned}
 \langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle = & \|U_{e1}\|^2 \left\{ (1 - P_h^{(-)}) \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 + P_h^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 \right\} \\
 & + \|U_{e2}\|^2 \left\{ (1 - P_l^{(-)}) P_h^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 \right. \\
 & + (1 - P_l^{(-)}) (1 - P_h^{(-)}) \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 + P_l^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 \left. \right\} \\
 & + \|U_{e3}\|^2 \left\{ P_h^{(-)} P_l^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 + (1 - P_h^{(-)}) P_l^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 \right. \\
 & \left. + (1 - P_l^{(-)}) \|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Usamos la notación dada en (4.92), la condición inicial es dada por

$$\begin{aligned}
 \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 &= (\bar{c}_{12}^m(t_0) \bar{c}_{13}^m(t_0))^2, \\
 \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 &= (\bar{s}_{12}^m(t_0) \bar{c}_{13}^m(t_0))^2, \\
 \|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 &= (\bar{s}_{13}^m(t_0))^2.
 \end{aligned} \tag{5.83}$$

Finalmente, mediante las ecuaciones (5.83) y (5.81) podemos expresar la probabilidad de supervivencia del antineutrino electrónico de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle = & \|U_{e1}\|^2 \left\{ (1 - \bar{P}_l) (\bar{c}_{12}^m(t_0) \bar{c}_{13}^m(t_0))^2 + \bar{P}_l (\bar{s}_{12}^m(t_0) \bar{c}_{13}^m(t_0))^2 \right\} \\
 & + \|U_{e2}\|^2 \left\{ (1 - \bar{P}_t) \bar{P}_l (\bar{c}_{12}^m(t_0) \bar{c}_{13}^m(t_0))^2 \right. \\
 & + (1 - \bar{P}_t) (1 - \bar{P}_l) (\bar{s}_{12}^m(t_0) \bar{c}_{13}^m(t_0))^2 + \bar{P}_t (\bar{s}_{13}^m(t_0))^2 \left. \right\} \\
 & + \|U_{e3}\|^2 \left\{ \bar{P}_l \bar{P}_t (\bar{c}_{12}^m(t_0) \bar{c}_{13}^m(t_0))^2 \right. \\
 & \left. + (1 - \bar{P}_l) \bar{P}_t (\bar{s}_{12}^m(t_0) \bar{c}_{13}^m(t_0))^2 + (1 - \bar{P}_t) (\bar{s}_{13}^m(t_0))^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{5.84}$$

Revisemos los límites de esta ecuación; en el caso en el que $\theta_{13} = 0 \Rightarrow \bar{\theta}_{13}^m = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle = & c_{12}^2 \left\{ (1 - \bar{P}_l) (\bar{c}_{12}^{m0})^2 + \bar{P}_l (\bar{s}_{12}^{m0})^2 \right\} \\
 & + s_{12}^2 \left\{ (1 - \bar{P}_t) \bar{P}_l (\bar{c}_{12}^{m0})^2 + (1 - \bar{P}_t) (1 - \bar{P}_l) (\bar{s}_{12}^{m0})^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{5.85}$$

haciendo la hipótesis adicional de que $\bar{P}_t \rightarrow 0$ se recupera la ecuación (2.102)

$$\langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \bar{P}_l \right) \cos 2\theta_{12} \cos 2\bar{\theta}_{12}^m(t_0). \quad (5.86)$$

Por otro lado, si ahora tomamos $\theta_{12} \rightarrow \pi/2$ en la ecuación (5.84), ahora el término $\|U_{e1}\|^2$ se anula, dando así

$$\begin{aligned} \langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle = & c_{13}^2 \left\{ (1 - \bar{P}_t)(1 - \bar{P}_l)(\bar{c}_{13}^m(t_0))^2 + \bar{P}_t(\bar{s}_{13}^m(t_0))^2 \right. \\ & \left. + s_{13}^2 \left\{ (1 - \bar{P}_l)\bar{P}_t(\bar{c}_{13}^m(t_0))^2 + (1 - \bar{P}_t)(\bar{s}_{13}^m(t_0))^2 \right\} \right\} \end{aligned} \quad (5.87)$$

si ahora imponemos la condición $\bar{P}_l \rightarrow 0$ nuevamente recuperamos la ecuación (2.102)

$$\langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \bar{P}_t \right) \cos 2\theta_{13} \cos 2\bar{\theta}_{13}^m(t_0). \quad (5.88)$$

Al comparar con la ecuación (4.64) vemos que en este caso la cantidad \bar{P}_h que esperábamos obtener es remplazada por la cantidad \bar{P}_t . Esto nos da cierta seguridad en el resultado obtenido en (5.84) ya que bajo aproximaciones sencillas somos capaces de recuperar el caso mas simple de la mezcla de dos sabores para el antineutrino. Sin embargo debemos abordar la dificultad antes mencionada tema que abordamos en la siguiente sección

5.2.2. Relación entre las probabilidades de oscilación del neutrino y el antineutrino

Retomemos la ecuación (3.68) y establezcamos una relación entre las probabilidades de oscilación; al igual que en el caso del neutrino, si el antineutrino viaja una larga distancia se espera que el término oscilante promedie a cero, permitiendo que nos enfoquemos únicamente en las probabilidades promedio

$$\left\langle \bar{P}_{\bar{e} \rightarrow \bar{e}}(t, \Delta) \right\rangle = \left\langle P_{e \rightarrow e}(t, -\Delta) \right\rangle. \quad (5.89)$$

Utilicemos el formalismo del operador de evolución para evolucionar el estado instantáneo del antineutrino, desde el punto de producción hasta el tiempo en el que alcanza el borde del medio

$$\bar{\Phi}_m(t_*) = \bar{\mathcal{U}}_m(t_*, t_0) \bar{\Phi}_m(t_0). \quad (5.90)$$

donde $\overline{\mathcal{U}}_m(t_\star, t_0)$ representa el operador de evolución de los estados instantáneos, el cual queda por determinar.

En términos de sus componentes, la ecuación (5.90) se reescribe como:

$$\begin{aligned}\overline{\phi}_1^m(t_\star) &= \overline{\mathcal{U}}_{11}^m \overline{\phi}_1^m(t_0) + \overline{\mathcal{U}}_{12}^m \overline{\phi}_2^m(t_0) + \overline{\mathcal{U}}_{13}^m \overline{\phi}_3^m(t_0), \\ \overline{\phi}_2^m(t_\star) &= \overline{\mathcal{U}}_{21}^m \overline{\phi}_1^m(t_0) + \overline{\mathcal{U}}_{22}^m \overline{\phi}_2^m(t_0) + \overline{\mathcal{U}}_{23}^m \overline{\phi}_3^m(t_0), \\ \overline{\phi}_3^m(t_\star) &= \overline{\mathcal{U}}_{31}^m \overline{\phi}_1^m(t_0) + \overline{\mathcal{U}}_{32}^m \overline{\phi}_2^m(t_0) + \overline{\mathcal{U}}_{33}^m \overline{\phi}_3^m(t_0),\end{aligned}\quad (5.91)$$

donde hemos omitido la dependencia temporal del operador de evolución de los antineutrino a fin de evitar sobrecargar la notación.

Usando la ecuación (5.89)

$$\sum_k \|U_{ek}\|^2 \langle \|\overline{\phi}_k(t_\star, \Delta)\|^2 \rangle = \sum_k \|U_{ek}\|^2 \langle \|\phi_k(t_\star, -\Delta)\|^2 \rangle \quad (5.92)$$

y de aquí, agrupando en términos de $\|U_{ek}\|^2$

$$\langle \|\overline{\phi}_i(t_\star, \Delta)\|^2 \rangle = \langle \|\phi_i(t_\star, -\Delta)\|^2 \rangle. \quad (5.93)$$

Para obtener los estados de masa del antineutrino en el borde del medio usamos la ecuación (5.90)

$$\begin{aligned}\langle \|\overline{\phi}_1^m(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\overline{\mathcal{U}}_{11}^m\|^2 \|\overline{\phi}_1^m(t_0)\|^2 + \|\overline{\mathcal{U}}_{12}^m\|^2 \|\overline{\phi}_2^m(t_0)\|^2 + \|\overline{\mathcal{U}}_{13}^m\|^2 \|\overline{\phi}_3^m(t_0)\|^2 \\ \langle \|\overline{\phi}_2^m(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\overline{\mathcal{U}}_{21}^m\|^2 \|\overline{\phi}_1^m(t_0)\|^2 + \|\overline{\mathcal{U}}_{22}^m\|^2 \|\overline{\phi}_2^m(t_0)\|^2 + \|\overline{\mathcal{U}}_{23}^m\|^2 \|\overline{\phi}_3^m(t_0)\|^2 \\ \langle \|\overline{\phi}_3^m(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\overline{\mathcal{U}}_{31}^m\|^2 \|\overline{\phi}_1^m(t_0)\|^2 + \|\overline{\mathcal{U}}_{32}^m\|^2 \|\overline{\phi}_2^m(t_0)\|^2 + \|\overline{\mathcal{U}}_{33}^m\|^2 \|\overline{\phi}_3^m(t_0)\|^2\end{aligned}\quad (5.94)$$

Por otro lado, para obtener $\langle \|\phi_i(t_\star, -\Delta)\|^2 \rangle$, hacemos el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$ en las ecuaciones (3.30) y usamos la condición inicial dada en (3.37). Usando la notación compacta $\mathcal{U}_{ij}^{m(-)} \equiv \mathcal{U}_{ij}^m(-\Delta; t_\star, t_0)$, $\mathcal{O}_{ij}^{m(-)}(t_0) \equiv \mathcal{O}_{ij}^m(-\Delta, t_0)$, tenemos

$$\begin{aligned}\langle \|\phi_1^{m(-)}(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\mathcal{U}_{11}^{m(-)}\|^2 \|\mathcal{O}_{11}^{m(-)}(t_0)\|^2 + \|\mathcal{U}_{12}^{m(-)}\|^2 \|\mathcal{O}_{12}^{m(-)}(t_0)\|^2 \\ &\quad + \|\mathcal{U}_{13}^{m(-)}\|^2 \|\mathcal{O}_{13}^{m(-)}(t_0)\|^2, \\ \langle \|\phi_2^{m(-)}(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\mathcal{U}_{21}^{m(-)}\|^2 \|\mathcal{O}_{11}^{m(-)}(t_0)\|^2 + \|\mathcal{U}_{22}^{m(-)}\|^2 \|\mathcal{O}_{12}^{m(-)}(t_0)\|^2 \\ &\quad + \|\mathcal{U}_{23}^{m(-)}\|^2 \|\mathcal{O}_{13}^{m(-)}(t_0)\|^2, \\ \langle \|\phi_3^{m(-)}(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\mathcal{U}_{31}^{m(-)}\|^2 \|\mathcal{O}_{11}^{m(-)}(t_0)\|^2 + \|\mathcal{U}_{32}^{m(-)}\|^2 \|\mathcal{O}_{12}^{m(-)}(t_0)\|^2 \\ &\quad + \|\mathcal{U}_{33}^{m(-)}\|^2 \|\mathcal{O}_{13}^{m(-)}(t_0)\|^2.\end{aligned}$$

Usando (5.32) podemos reescribir las ecuaciones anteriores de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\langle \|\phi_1^{m(-)}(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\mathcal{U}_{11}^{m(-)}\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 + \|\mathcal{U}_{12}^{m(-)}\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 \\
&\quad + \|\mathcal{U}_{13}^{m(-)}\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2, \\
\langle \|\phi_2^{m(-)}(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\mathcal{U}_{21}^{m(-)}\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 + \|\mathcal{U}_{22}^{m(-)}\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 \\
&\quad + \|\mathcal{U}_{23}^{m(-)}\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2, \\
\langle \|\phi_3^{m(-)}(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\mathcal{U}_{31}^{m(-)}\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 + \|\mathcal{U}_{32}^{m(-)}\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 \\
&\quad + \|\mathcal{U}_{33}^{m(-)}\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2.
\end{aligned} \tag{5.95}$$

Para determinar la condición inicial del antineutrino, supondremos nuevamente que al tiempo t_0 se crea un estado puro de sabor electrónico, es decir, un $\bar{\nu}_e$. Procediendo de la misma manera que se hizo para la condición inicial del neutrino,

$$\overline{\Phi}'(t_0) = \overline{\mathcal{O}}_m^T(t_0) \overline{\Psi}'(t_0) \tag{5.96}$$

ó más explícitamente,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \overline{\phi}_1^m(t_0) \\ \overline{\phi}_2^m(t_0) \\ \overline{\phi}_3^m(t_0)e^{i\delta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0) & \overline{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0) & \overline{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0) \\ \overline{\mathcal{O}}_{21}^m(t_0) & \overline{\mathcal{O}}_{22}^m(t_0) & \overline{\mathcal{O}}_{23}^m(t_0) \\ \overline{\mathcal{O}}_{31}^m(t_0) & \overline{\mathcal{O}}_{32}^m(t_0) & \overline{\mathcal{O}}_{33}^m(t_0) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0) \\ \overline{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0) \\ \overline{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.97}$$

que sustituida en (5.94), nos da

$$\begin{aligned}
\langle \|\overline{\phi}_1^m(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\overline{\mathcal{U}}_{11}^m\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 + \|\overline{\mathcal{U}}_{12}^m\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 + \|\overline{\mathcal{U}}_{13}^m\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 \\
\langle \|\overline{\phi}_2^m(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\overline{\mathcal{U}}_{21}^m\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 + \|\overline{\mathcal{U}}_{22}^m\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 + \|\overline{\mathcal{U}}_{23}^m\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 \\
\langle \|\overline{\phi}_3^m(t_\star)\|^2 \rangle &= \|\overline{\mathcal{U}}_{31}^m\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 + \|\overline{\mathcal{U}}_{32}^m\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 + \|\overline{\mathcal{U}}_{33}^m\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2
\end{aligned}$$

De la ecuación (5.93) se tiene $\langle \|\overline{\phi}_1(t_\star, \Delta)\|^2 \rangle = \langle \|\phi_1(t_\star, -\Delta)\|^2 \rangle$ y, por ende,

$$\begin{aligned}
&\|\overline{\mathcal{U}}_{11}^m\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 + \|\overline{\mathcal{U}}_{12}^m\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 + \|\overline{\mathcal{U}}_{13}^m\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 \\
&= \|\mathcal{U}_{31}^{m(-)}\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 + \|\mathcal{U}_{32}^{m(-)}\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 + \|\mathcal{U}_{33}^{m(-)}\|^2 \|\overline{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2,
\end{aligned} \tag{5.98}$$

o, agrupando en términos de $\overline{\mathcal{O}}_{ij}^m$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}_{11}^m(t_\star, -\Delta)\|^2 &= \|\overline{\mathcal{U}}_{13}^m(t_\star, \Delta)\|^2, \\
\|\mathcal{U}_{12}^m(t_\star, -\Delta)\|^2 &= \|\overline{\mathcal{U}}_{12}^m(t_\star, \Delta)\|^2, \\
\|\mathcal{U}_{13}^m(t_\star, -\Delta)\|^2 &= \|\overline{\mathcal{U}}_{11}^m(t_\star, \Delta)\|^2.
\end{aligned} \tag{5.99}$$

Para $\langle \|\bar{\phi}_2(t_*, \Delta)\|^2 \rangle$ y $\langle \|\bar{\phi}_3(t_*, \Delta)\|^2 \rangle$ tendremos relaciones análogas, permitiéndonos definir las entradas del operador de evolución de antineutrino en términos de las entradas del operador de evolución del neutrino:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}_{11}^m(t_*, -\Delta)\|^2 &= \|\overline{\mathcal{U}}_{13}^m(t_*, \Delta)\|^2 \\
\|\mathcal{U}_{12}^m(t_*, -\Delta)\|^2 &= \|\overline{\mathcal{U}}_{12}^m(t_*, \Delta)\|^2 \\
\|\mathcal{U}_{13}^m(t_*, -\Delta)\|^2 &= \|\overline{\mathcal{U}}_{11}^m(t_*, \Delta)\|^2 \\
\|\mathcal{U}_{21}^m(t_*, -\Delta)\|^2 &= \|\overline{\mathcal{U}}_{23}^m(t_*, \Delta)\|^2 \\
\|\mathcal{U}_{22}^m(t_*, -\Delta)\|^2 &= \|\overline{\mathcal{U}}_{22}^m(t_*, \Delta)\|^2 \\
\|\mathcal{U}_{23}^m(t_*, -\Delta)\|^2 &= \|\overline{\mathcal{U}}_{21}^m(t_*, \Delta)\|^2 \\
\|\mathcal{U}_{31}^m(t_*, -\Delta)\|^2 &= \|\overline{\mathcal{U}}_{33}^m(t_*, \Delta)\|^2 \\
\|\mathcal{U}_{32}^m(t_*, -\Delta)\|^2 &= \|\overline{\mathcal{U}}_{32}^m(t_*, \Delta)\|^2 \\
\|\mathcal{U}_{33}^m(t_*, -\Delta)\|^2 &= \|\overline{\mathcal{U}}_{31}^m(t_*, \Delta)\|^2
\end{aligned} \tag{5.100}$$

Veamos como es posible recuperar estos resultados a partir de la relación general entre los operadores de evolución en la ecuación (5.46). Suponemos nuevamente que en el borde del medio $V(t_*) \rightarrow 0$ y, por lo tanto, las aproximaciones dadas en (2.48) y (2.60) son válidas. En consecuencia,

$$\bar{\Phi}_m(\Delta; t_*) \simeq \bar{\Phi}(\Delta; t_*) = \Phi^*(-\Delta; t_*) \simeq \Phi_m^*(-\Delta; t_*), \tag{5.101}$$

lo cual nos permite trasladar la relación entre los estados de masa a una relación entre los estados instantáneos; sin embargo, es importante recalcar que esta última ecuación es solo válida en t_* .

Usando el formalismo del operador de evolución

$$\overline{\mathcal{U}}_m(\Delta, t_*, t_0) \bar{\Phi}_m(\Delta; t_0) = \mathcal{U}_m^*(-\Delta, t, t_0) \Phi_m^*(-\Delta; t_0) \tag{5.102}$$

de la ecuación (5.42) podemos obtener la relación de los estados instantáneos en el punto de producción

$$\bar{\Phi}_m(t_0) = \Gamma^\dagger \Lambda \Gamma \Phi_m^{*(-)}(t_0),$$

que, al sustituir en la ecuación (5.102), nos da

$$\boxed{\overline{\mathcal{U}}_m(\Delta, t_*, t_0) = \mathcal{U}_m^*(-\Delta, t, t_0) \Gamma^\dagger \Lambda \Gamma} \tag{5.103}$$

si en esta última ecuación tomamos los módulos al cuadrado entrada por entrada recuperamos las ecuaciones (5.100).

Las ecuaciones (5.100) tienen la ventaja de estar en términos de las normas al cuadrado, lo cual en la mayoría de los casos nos permite eliminar las fases.

De (5.100) y (3.33) se tiene,

$$\|\overline{\mathcal{W}}_{11}^m(t_\star, \Delta)\|^2 = P_h^{(-)} P_l^{(-)} \quad (5.104)$$

$$\|\overline{\mathcal{W}}_{12}^m(t_\star, \Delta)\|^2 = (1 - P_h^{(-)}) P_l^{(-)} \quad (5.105)$$

$$\|\overline{\mathcal{W}}_{13}^m(t_\star, \Delta)\|^2 = (1 - P_l^{(-)}) \quad (5.106)$$

$$\|\overline{\mathcal{W}}_{21}^m(t_\star, \Delta)\|^2 = (1 - P_l^{(-)}) (1 - P_t^{(-)}) P_h^{(-)} + (1 - P_h^{(-)}) P_t^{(-)} + \mathcal{P}^{(-)} \quad (5.107)$$

$$\|\overline{\mathcal{W}}_{22}^m(t_\star, \Delta)\|^2 = P_h^{(-)} P_t^{(-)} + (1 - P_l^{(-)}) (1 - P_h^{(-)}) (1 - P_t^{(-)}) - \mathcal{P}^{(-)} \quad (5.108)$$

$$\|\overline{\mathcal{W}}_{23}^m(t_\star, \Delta)\|^2 = (1 - P_t^{(-)}) P_l^{(-)} \quad (5.109)$$

$$\|\overline{\mathcal{W}}_{31}^m(t_\star, \Delta)\|^2 = (1 - P_l^{(-)}) P_h^{(-)} P_t^{(-)} + (1 - P_h^{(-)}) (1 - P_t^{(-)}) - \mathcal{P}^{(-)} \quad (5.110)$$

$$\|\overline{\mathcal{W}}_{32}^m(t_\star, \Delta)\|^2 = (1 - P_l^{(-)}) (1 - P_h^{(-)}) P_t^{(-)} + (1 - P_t^{(-)}) P_h^{(-)} + \mathcal{P}^{(-)} \quad (5.111)$$

$$\|\overline{\mathcal{W}}_{33}^m(t_\star, \Delta)\|^2 = P_l^{(-)} P_t^{(-)} \quad (5.112)$$

donde $P_i^{(-)} \equiv P_i(-\Delta)$ con $i = l, h, t$, y usamos la ecuación (3.39).

Si en las ecuaciones (5.104)-(5.112) usamos la parametrización de la parte no adiabática del antineutrino dada en (5.61), obtenemos

$$1 - \overline{P}_l = P_h^{(-)} P_l^{(-)} \quad (5.113)$$

$$(1 - \overline{P}_h) \overline{P}_l = (1 - P_h^{(-)}) P_l^{(-)} \quad (5.114)$$

$$\overline{P}_h \overline{P}_l = (1 - P_l^{(-)}) \quad (5.115)$$

$$(1 - \overline{P}_t) \overline{P}_l = (1 - P_l^{(-)}) (1 - P_t^{(-)}) P_h^{(-)} + (1 - P_h^{(-)}) P_t^{(-)} + \mathcal{P}^{(-)} \quad (5.116)$$

$$\begin{aligned} \overline{P}_t \overline{P}_h + (1 - \overline{P}_l) (1 - \overline{P}_h) (1 - \overline{P}_t) - \overline{\mathcal{P}} \\ = P_h^{(-)} P_t^{(-)} + (1 - P_l^{(-)}) (1 - P_h^{(-)}) (1 - P_t^{(-)}) - \mathcal{P}^{(-)} \end{aligned} \quad (5.117)$$

$$(1 - \overline{P}_l) (1 - \overline{P}_t) \overline{P}_h + (1 - \overline{P}_h) \overline{P}_t + \overline{\mathcal{P}} = (1 - P_t^{(-)}) P_l^{(-)} \quad (5.118)$$

$$\overline{P}_l \overline{P}_t = (1 - P_l^{(-)}) P_h^{(-)} P_t^{(-)} + (1 - P_h^{(-)}) (1 - P_t^{(-)}) - \mathcal{P}^{(-)} \quad (5.119)$$

$$\begin{aligned} (1 - \overline{P}_l) (1 - \overline{P}_h) \overline{P}_t + (1 - \overline{P}_t) \overline{P}_h + \overline{\mathcal{P}} \\ = (1 - P_l^{(-)}) (1 - P_h^{(-)}) P_t^{(-)} + (1 - P_t^{(-)}) P_h^{(-)} + \mathcal{P}^{(-)} \end{aligned} \quad (5.120)$$

$$(1 - \overline{P}_l) \overline{P}_h \overline{P}_t + (1 - \overline{P}_h) (1 - \overline{P}_t) - \overline{\mathcal{P}} = P_l^{(-)} P_t^{(-)} \quad (5.121)$$

y si ahora consideramos la aproximación de hacer $P_t^{(-)} \rightarrow 0$, lo cual implica $\mathcal{P}^{(-)} = 0$, las ecuaciones anteriores se reducen a

$$1 - \bar{P}_l = P_h^{(-)} P_l^{(-)} \quad (5.122)$$

$$(1 - \bar{P}_h) \bar{P}_l = (1 - P_h^{(-)}) P_l^{(-)} \quad (5.123)$$

$$\bar{P}_h \bar{P}_l = (1 - P_l^{(-)}) \quad (5.124)$$

$$(1 - \bar{P}_t) \bar{P}_l = (1 - P_l^{(-)}) P_h^{(-)} \quad (5.125)$$

$$\bar{P}_t \bar{P}_h + (1 - \bar{P}_l)(1 - \bar{P}_h)(1 - \bar{P}_t) - \bar{\mathcal{P}} = (1 - P_l^{(-)})(1 - P_h^{(-)}) \quad (5.126)$$

$$(1 - \bar{P}_l)(1 - \bar{P}_t) \bar{P}_h + (1 - \bar{P}_h) \bar{P}_t + \bar{\mathcal{P}} = P_l^{(-)} \quad (5.127)$$

$$\bar{P}_l \bar{P}_t = (1 - P_h^{(-)}) \quad (5.128)$$

$$(1 - \bar{P}_l)(1 - \bar{P}_h) \bar{P}_t + (1 - \bar{P}_t) \bar{P}_h + \bar{\mathcal{P}} = P_h^{(-)} \quad (5.129)$$

$$(1 - \bar{P}_l) \bar{P}_h \bar{P}_t + (1 - \bar{P}_h)(1 - \bar{P}_t) - \bar{\mathcal{P}} = 0 \quad (5.130)$$

Para definir una relación entre la probabilidades de cruzamiento del neutrino y las cantidades \bar{P}_h, \bar{P}_t y \bar{P}_l operamos de la siguiente manera. De la ecuación (5.130) se tiene

$$\bar{\mathcal{P}} = (1 - \bar{P}_l) \bar{P}_h \bar{P}_t + (1 - \bar{P}_h)(1 - \bar{P}_t), \quad (5.131)$$

que sutituida en las ecuaciones (5.127) y (5.129) nos da

$$\boxed{\begin{aligned} P_l^{(-)} &= 1 - \bar{P}_l \bar{P}_h \\ P_h^{(-)} &= 1 - \bar{P}_l \bar{P}_t \end{aligned}} \quad (5.132)$$

Este resultado se asemeja más al obtenido para el caso de dos sabores en la ecuación (5.4), sin embargo, en este caso, las cantidades con barra no se desacoplan de manera sencilla.

Con estos resultados somos capaces de dar la probabilidad promedio de superveniencia del antineutrino electrónico, cuando el potencial efectivo se anula en el borde del medio, es decir, $V(t_*) \rightarrow 0$. Utilizando las ecuaciones (5.92), (5.95), (5.97) y los resultados obtenidos en (5.104)-(5.112), llegamos a:

$$\begin{aligned}
\langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle = & \|U_{e1}\|^2 \left\{ P_h^{(-)} P_l^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 + (1 - P_h^{(-)}) P_l^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 \right. \\
& \left. + (1 - P_l^{(-)}) \|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 \right\} \\
& + \|U_{e2}\|^2 \left\{ \left[(1 - P_l^{(-)}) (1 - P_t^{(-)}) P_h^{(-)} + (1 - P_h^{(-)}) P_t^{(-)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \mathcal{P}^{(-)} \right] \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 + \left[P_h^{(-)} P_t^{(-)} + (1 - P_l^{(-)}) (1 - P_h^{(-)}) (1 - P_t^{(-)}) \right. \right. \\
& \left. \left. - \mathcal{P}^{(-)} \right] \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 + (1 - P_t^{(-)}) P_l^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 \right\} \\
& + \|U_{e3}\|^2 \left\{ \left[(1 - P_l^{(-)}) P_h^{(-)} P_t^{(-)} + (1 - P_h^{(-)}) (1 - P_t^{(-)}) \right. \right. \\
& \left. \left. - \mathcal{P}^{(-)} \right] \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 + \left[(1 - P_l^{(-)}) (1 - P_h^{(-)}) P_t^{(-)} \right. \right. \\
& \left. \left. + (1 - P_t^{(-)}) P_h^{(-)} + \mathcal{P}^{(-)} \right] \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 \right. \\
& \left. + P_l^{(-)} P_t^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{5.133}$$

la cual, para $P_t^{(-)} = 0$ se reescribe como

$$\begin{aligned}
\langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle = & \|U_{e1}\|^2 \left\{ P_h^{(-)} P_l^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 + (1 - P_h^{(-)}) P_l^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 \right. \\
& \left. + (1 - P_l^{(-)}) \|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 \right\} \\
& + \|U_{e2}\|^2 \left\{ (1 - P_l^{(-)}) P_h^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 \right. \\
& \left. + (1 - P_l^{(-)}) (1 - P_h^{(-)}) \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 + P_l^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t_0)\|^2 \right\} \\
& + \|U_{e3}\|^2 \left\{ (1 - P_h^{(-)}) \|\bar{\mathcal{O}}_{11}^m(t_0)\|^2 + P_h^{(-)} \|\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t_0)\|^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{5.134}$$

Usando las ecuaciones (5.132) y (5.83) la probabilidad de supervivencia promedio de un antineutrino electrónico queda completamente determinada, por la formula siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle = & \|U_{e1}\|^2 \left\{ (1 - \bar{P}_l \bar{P}_t)(1 - \bar{P}_l \bar{P}_h) (\bar{c}_{12}^m(t_0) \bar{c}_{13}^m(t_0))^2 \right. \\
& \left. + \bar{P}_l \bar{P}_t (1 - \bar{P}_l \bar{P}_h) (\bar{s}_{12}^m(t_0) \bar{c}_{13}^m(t_0))^2 + \bar{P}_l \bar{P}_h (\bar{s}_{13}^m(t_0))^2 \right\} \\
& + \|U_{e2}\|^2 \left\{ \bar{P}_l \bar{P}_h (1 - \bar{P}_l \bar{P}_t) (\bar{c}_{12}^m(t_0) \bar{c}_{13}^m(t_0))^2 \right. \\
& \left. + \bar{P}_h \bar{P}_t \bar{P}_l^2 (\bar{s}_{12}^m(t_0) \bar{c}_{13}^m(t_0))^2 + (1 - \bar{P}_l \bar{P}_h) (\bar{s}_{13}^m(t_0))^2 \right\} \\
& + \|U_{e3}\|^2 \left\{ \bar{P}_l \bar{P}_t (\bar{c}_{12}^m(t_0) \bar{c}_{13}^m(t_0))^2 + (1 - \bar{P}_l \bar{P}_t) (\bar{s}_{12}^m(t_0) \bar{c}_{13}^m(t_0))^2 \right\}.
\end{aligned}
\tag{5.135}$$

De esta última ecuación se pueden apreciar las diferencias con las ecuaciones (3.41) y (5.84). La primera de ellas, y quizás las más intrigante, son los términos de orden cuadrático en \bar{P}_l , esto ocasiona que en los límites $\theta_{13} \rightarrow 0$ ó $\theta_{12} \rightarrow \pi/2$ no se recupere la ecuación (2.102), en contraposición con el caso del neutrino donde en dichos límites se recuperaba la fórmula de Parke.

Es importante recordar que en el caso en que la detección del neutrino se da después de que se propaga una larga distancia en el vacío, desde el borde del medio hasta el detector, para calcular la probabilidad de supervivencia del antineutrino electrónico se debe usar la ecuación (5.134).

En resumen, si somos capaces de determinar ya sea de forma exacta o aproximada las cantidades $P_h(\Delta; t)$ y $P_l(\Delta; t)$, para el caso del neutrino, después de hacer el cambio de signo en la diferencia cuadrática de las masas, podemos usar las expresiones anteriores para definir una de probabilidad de “cruzamiento” para el antineutrino usando las ecuaciones (5.132) y, finalmente, calcular la probabilidad de supervivencia del antineutrino electrónico por medio de la ecuación (5.135).

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente trabajo estudiamos de forma detallada el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos en materia, profundizando en el caso de los antineutrinos, el cual suele ser mucho menos discutido en la literatura. Al considerar las oscilaciones en materia de los neutrino cuando hay mezcla entre tres generaciones, hicimos hincapié en las condiciones bajo las cuales es posible tratar el problema por medio de la factorización en dos subsistemas de 2×2 . Esta aproximación ha probado estar en buena concordancia con los datos experimentales.

Al tratar el problema para los antineutrinos es necesario realizar un cambio de signo en el potencial de interacción efectivo, el cual surge debido a la diferencia de las helicidades. A fin de determinar las probabilidades de oscilación para los antineutrinos, ingenuamente, uno puede verse tentado a tomar los resultados obtenidos para los neutrinos y remplazar en ellos el signo del potencial efectivo. Sin embargo, esta manera de proceder, apropiada en los (pocos) casos en que se tiene soluciones analíticas exactas al problema, puede llevar a resultados erróneos cuando el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna la evolución de las amplitudes de sabor de los neutrinos es resuelto de forma aproximada. Ello se debe a que dichas aproximaciones no son necesariamente válidas o no están físicamente justificadas en el caso de los antineutrinos

Más concretamente, el problema de las oscilaciones en materia entre los tres sabores activos de los antineutrinos, cuando se describe en la base de los autoestados de energía en el medio, también puede factorizarse en un par de subsistemas donde la mezcla se da sólo entre dos especies. No obstante, debido al cambio en el signo del potencial, los ángulos de mezcla en materia, a diferencia de los neutrinos, no presentan un comportamiento resonante y, por ende, las aproximaciones usadas para calcular las probabilidades de cruzamiento no resultan apropiadas. Por ello, debemos buscar una manera

diferente de evaluarlas. En este trabajo, optamos por establecer una relación con el caso de los neutrinos y utilizar los resultados de estos últimos para encontrar las probabilidades de oscilación de los antineutrinos. Probamos que hacer el cambio de signo en las diferencias cuadráticas de masas y tomar el complejo conjugado de la función de onda de los neutrinos, es equivalente a encontrar la función de onda de los antineutrino; más aun, estudiando la relación entre los autovalores de la energía en la materia de ambos casos, probamos que al hacer el cambio de signo en las diferencias cuadráticas de masas en los eigenvalores del neutrino, es posible recuperar los autovalores de los antineutrinos, cambiando no sólo su signatura, sino también su ordenamiento.

Usando trabajos recientes de Denton, Parke y colaboradores, fuimos capaces de hallar una representación exacta de los módulos de las entradas de la matriz de mezcla en materia y, mediante este resultado, obtuvimos la relación entre las matrices de paso de los neutrinos y los antineutrinos. Esta relación es general e independiente de la parametrización que se utilice y constituye uno de los resultados relevantes de este trabajo. La representación exacta de la matriz de mezcla en materia, más específicamente de la matriz O_m , es dada en función de productos de los eigenvalores exactos del hamiltoniano en materia $H_m(t)$, que son expresados en término de funciones trigonométricas y sus inversas, las cuales resultan complicadas de manipular y cuya interpretación física es poco transparente. Esto nos motivó a buscar una forma más simple de expresar los parámetros de mezcla efectivos en materia de los ν y $\bar{\nu}$, los cuales, aunque aproximados, mantienen la relación correcta.

Usando las relaciones entre las funciones de onda de las amplitudes de sabor de los neutrinos y sus antipartículas, pudimos establecer una relación general entre los operadores de evolución de los estados adiabáticos. A partir de este resultado fuimos capaces de usar el operador de evolución de los neutrinos, para calcular como evolucionan los antineutrinos y calcular las probabilidades de cruzamiento de los $\bar{\nu}$ a partir de las probabilidades correspondientes de los ν evaluadas en el negativo de las diferencias cuadráticas de las masas. Con este resultado, y bajo la aproximación de que en el borde del medio la densidad y, por tanto, el potencial efectivo de interacción, decae a cero, derivamos una expresión para la probabilidad de supervivencia del antineutrino del electrón. Consideramos que es éste un resultado valioso, porque ofrece una forma de calcular de manera analítica o semianalítica las probabilidades de oscilación de los antineutrinos aunque no puedan aplicarse de forma directa las aproximaciones usadas en el cálculo de las probabilidades de los neutrinos.

Por último, es pertinente hacer notar que, de las fórmulas derivadas con a metodología aplicada en esta tesis, al hacer cero el ángulo de mezcla θ_{13} , no recuperamos el resultado para las oscilaciones entre dos neutrinos. Resolver esta dificultad requerirá de estudios adicionales que están en curso.

Apéndice A

Solución trigonométrica de la ecuación cúbica

Sin pérdida de generalidad considere una ecuación cúbica de la forma

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (\text{A.1})$$

con a, b y c reales.

Introduciendo una nueva variable es posible simplificar la ecuación anterior de tal modo que el término cuadrático desaparezca; definamos esta nueva variable de la siguiente manera:

$$x = z - \frac{a}{3}. \quad (\text{A.2})$$

sustituyendo en A.1

$$\begin{aligned} \left(z - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(z - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(z - \frac{a}{3}\right) + c &= 0 \\ z^3 + z\left(b - \frac{a^2}{3}\right) + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde definimos las cantidades

$$\begin{aligned} p &= \left(b - \frac{a^2}{3}\right), \\ q &= \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

De esta forma pasamos de una ecuación cúbica que tiene a x como variable independiente a una ecuación cúbica cuya variable independiente es z , a esta última se le conoce como la ecuación cúbica reducida

$$z^3 + zp + q = 0. \quad (\text{A.5})$$

Para resolver (A.5), usamos el siguiente artilugio, trataremos de satisfacer la ecuación haciendo

$$z = v + u; \quad (\text{A.6})$$

donde hemos introducido un nuevo par de variables u y v . Sustituyendo (A.5) y agrupando de manera adecuada se llega

$$v^3 + u^3 + (p + 3uv)(u + v) + q = 0 \quad (\text{A.7})$$

este problema resulta indeterminado a menos que se imponga otra condición a las variables u y v , por lo tanto, imponemos la siguiente condición

$$3uv + p = 0 \quad (\text{A.8})$$

o equivalentemente

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \quad (\text{A.9})$$

de esta forma llegamos a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, a saber u^3 y v^3 , estas cantidades son las raíces de la ecuación

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Llamemos A y B a las raíces de la ecuación (A.10)

$$\begin{aligned} A &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \\ B &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

debido a la simetría que hay entre los términos u^3 y v^3 , podemos elegir

$$u^3 = A; \quad v^3 = B. \quad (\text{A.12})$$

Si denotamos raíz cúbica de A por $\sqrt[3]{A}$, las tres posibilidades para u son

$$u = \sqrt[3]{A}; \quad u = \omega \sqrt[3]{A}; \quad u = \omega^2 \sqrt[3]{A} \quad (\text{A.13})$$

con

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}. \quad (\text{A.14})$$

De igual forma, v tendrá tres posibilidades

$$v = \sqrt[3]{B}; \quad v = \omega \sqrt[3]{B}; \quad v = \omega^2 \sqrt[3]{B}. \quad (\text{A.15})$$

La forma en que se combinan las cantidades u y v tiene que cumplir la restricción $uv = -p/3$. Si suponemos que

$$\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} = -\frac{p}{3}; \quad (\text{A.16})$$

la única manera en que se pueden combinar las cantidades u y v para dar las raíces de la ecuación cúbica reducida serán

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}, \\ z_2 &= \omega\sqrt[3]{A} + \omega^2\sqrt[3]{B}, \\ z_3 &= \omega^2\sqrt[3]{A} + \omega\sqrt[3]{B}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Estas ecuaciones se le conoce como la fórmula de Cardano, ya que fue el primero en publicarlas en su libro titulado *Ars Magna* [5].

La naturaleza de las soluciones queda determinada por la cantidad

$$\Delta = 4p^3 + 27p^2, \quad (\text{A.18})$$

que aparece en el Discriminante de A.11

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{\Delta}{108}}. \quad (\text{A.19})$$

Evidentemente, delta tendrá tres posibilidades

1. $\Delta > 0$

En este caso la ecuación (A.5) tiene una raíz real y dos raíces complejas.

2. $\Delta = 0$ De las ecuaciones (A.17)

$$z_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \quad z_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}, \quad z_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

y tendremos una raíz con multiplicidad dos, y una raíz simple, en el caso $q = 0$, en cuyo caso las tres raíces son iguales a cero.

3. $\Delta < 0$; se tienen tres raíces reales distintas. En este caso es posible obtener soluciones puramente reales en términos de funciones trigonométricas. Las raíces reales de la ecuación cúbica reducida serán

$$z_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right) + \frac{2k\pi}{3} \right) \quad \text{para } k = \{0, 1, 2\} \quad (\text{A.20})$$

este método de solución fue propuesto por primera vez por Franciscus Vieta [26].

Apéndice B

Forma general de una matriz unitaria de 2×2 .

El propósito de este Apéndice es deducir la forma general de una matriz de 2×2 sujeta a la condición de ser unitaria. Tomemos una matriz compleja arbitraria y expresemos sus entradas en forma polar

$$U = \begin{pmatrix} Ae^{i\alpha} & Be^{i\beta} \\ Ce^{i\lambda} & De^{i\eta} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

imponiendo la condición de unitariedad

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= \begin{pmatrix} Ae^{i\alpha} & Be^{i\beta} \\ Ce^{i\lambda} & De^{i\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{-i\alpha} & Ce^{-i\lambda} \\ Be^{-i\beta} & De^{-i\eta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^2 + B^2 & ACe^{-i(\lambda-\alpha)} + BDe^{-i(\eta-\beta)} \\ ACe^{-i(\alpha-\lambda)} + BDe^{-i(\beta-\eta)} & C^2 + D^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

de las condiciones de la diagonal principal

$$A^2 + B^2 = 1 \quad (\text{B.3})$$

$$C^2 + D^2 = 1 \quad (\text{B.4})$$

de la condición fuera de la diagonal principal

$$ACe^{-i(\lambda-\alpha)} + BDe^{-i(\eta-\beta)} = 0 \quad (\text{B.5})$$

la otra ecuación no proporciona nueva información. por otro lado

$$\begin{aligned} \det(UU^\dagger) &= \det(U) \det(U^\dagger) \\ &= \det(U) \det(U)^* = 1 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

es decir

$$\det U = e^{i\varphi} \quad (\text{B.7})$$

con φ una fase arbitraria,

$$ADe^{i(\alpha+\eta)} - CBe^{i(\beta+\lambda)} = e^{i\varphi} \quad (\text{B.8})$$

de (B.5)

$$\begin{aligned} ACe^{-i\lambda}e^{i\alpha} &= -BDe^{-i\eta}e^{i\beta} \\ ACe^{i(\alpha+\eta)} &= -BDe^{i(\beta+\lambda)} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

multiplicando por $\frac{C}{D}$

$$\frac{AC^2}{D}e^{i(\alpha+\eta)} = -BCe^{i(\beta+\lambda)} \quad (\text{B.10})$$

sustituyendo en (B.7)

$$\left(\frac{AC^2}{D} + AD\right)e^{i(\alpha+\eta)} = e^{i\varphi} \quad (\text{B.11})$$

multiplicando por D y factorizando el término común en lado izquierdo y usando (B.4)

$$A(\cancel{C^2 + D^2}) \overset{1}{=} De^{i(\varphi-\alpha-\eta)} \quad (\text{B.12})$$

por lo tanto

$$A = De^{i\varphi'} \quad (\text{B.13})$$

con $\varphi' = \varphi - \alpha - \eta$, como A y D son reales $e^{i\varphi'} = \pm 1$, de donde

$$A = \pm D \quad (\text{B.14})$$

sustituyendo nuevamente en (B.5) y conjugando

$$Ce^{i\lambda} = \mp Be^{-i(\beta-\alpha-\eta)} \quad (\text{B.15})$$

Así

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{pmatrix} Ae^{i\alpha} & Be^{i\beta} \\ \mp Be^{-i(\beta-\alpha-\eta)} & \pm Ae^{i\alpha} \end{pmatrix} \\
 &= e^{i\frac{\alpha+\eta}{2}} \begin{pmatrix} Ae^{i\frac{\alpha-\eta}{2}} & Be^{i(\beta-\frac{\alpha+\eta}{2})} \\ \mp Be^{i(\beta-\frac{\alpha+\eta}{2})} & \pm Ae^{i\frac{\eta-\alpha}{2}} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

por conveniencia definimos

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha} &= \frac{\eta - \alpha}{2} \\
 \tilde{\beta} &= \beta - \frac{\alpha + \eta}{2}
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

con lo cual y obviando la fase global irrelevante

$$U = \begin{pmatrix} Ae^{-i\tilde{\alpha}} & Be^{i\tilde{\beta}} \\ \mp Be^{-i\tilde{\beta}} & \pm Ae^{i\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{B.18}$$

para resolver la ambigüedad en el signo imponemos la condición de que, en el límite de $B \rightarrow 0$

$$U \rightarrow \begin{pmatrix} Ae^{-i\tilde{\alpha}} & 0 \\ 0 & Ae^{i\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{B.19}$$

Si denotamos $A = \sqrt{1 - P_c}$, usando la ecuación (B.3)

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - P_c} e^{-i\tilde{\alpha}} & \sqrt{P_c} e^{i\tilde{\beta}} \\ -\sqrt{P_c} e^{-i\tilde{\beta}} & \sqrt{1 - P_c} e^{i\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{B.20}$$

Esta es la forma general del operador de evolución de 2×2 . Notemos que si $P_c = 0$ recuperamos el operador de evolución adiabático.

Apéndice C

Forma general de la matriz unitaria de 3×3 .

Anteriormente, ya dimos la parametrización general de una matriz unitaria de 2×2 , hacer lo mismo para el caso de 3×3 , es algo que resulta más complicado debido al gran número de parámetros independientes que existen (9 amplitudes y 9 fases), por fortuna esta parametrización ya han sido estudiada en los trabajos de P. Dita [9], en esta sección tenemos el propósito de usar los resultados de P. Dita, para escribir el operador de evolución en forma general.

De acuerdo a la referencia [9] una matriz unitaria en forma general se puede escribir como

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} S_{11} &= a e^{i\varphi_{11}}, \\ S_{12} &= b(1 - a^2) e^{i\varphi_{12}}, \\ S_{13} &= [(1 - a^2)(1 - b^2)]^{1/2} e^{i\varphi_{13}}, \\ S_{21} &= d(1 - a^2) e^{i\varphi_{21}}, \\ S_{22} &= [(1 - b^2)(1 - d^2)]^{1/2} e^{i\varphi_{22}} - abd e^{i(\varphi_{12} + \varphi_{21} - \varphi_{11})}, \\ S_{23} &= -ad(1 - b^2) e^{i(\varphi_{21} + \varphi_{13} - \varphi_{11})} - b(1 - d^2)^{1/2} e^{i(\varphi_{13} - \varphi_{12} + \varphi_{22})}, \\ S_{31} &= [(1 - a^2)(1 - d^2)]^{1/2} e^{i\varphi_{31}}, \\ S_{32} &= -ab(1 - d^2) e^{i(\varphi_{12} + \varphi_{31} - \varphi_{11})} - d(1 - b^2)^{1/2} e^{i(\varphi_{31} - \varphi_{21} + \varphi_{22})}, \\ S_{33} &= -a[(1 - b^2)(1 - d^2)]^{1/2} e^{i(\varphi_{13} + \varphi_{31} - \varphi_{11})} + bd e^{i(\varphi_{13} + \varphi_{31} - \varphi_{21} - \varphi_{12} + \varphi_{22})}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Por conveniencia de la notación definimos

$$\begin{aligned}
 \alpha_{22} &\equiv \varphi_{12} + \varphi_{21} - \varphi_{11} & \alpha_{32} &\equiv \varphi_{12} + \varphi_{31} - \varphi_{11} \\
 \alpha_{23} &\equiv \varphi_{21} + \varphi_{13} - \varphi_{11} & \beta_{32} &\equiv \varphi_{31} - \varphi_{21} + \varphi_{22} \\
 \beta_{23} &\equiv \varphi_{13} - \varphi_{12} + \varphi_{22} & \alpha_{33} &\equiv \varphi_{13} + \varphi_{31} - \varphi_{11} \\
 \beta_{33} &\equiv \varphi_{13} + \varphi_{31} - \varphi_{21} - \varphi_{12} + \varphi_{22}
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

comprobar que la matriz dada en (C.1) es efectivamente unitaria es un ejercicio de álgebra que puede resultar tedioso, pero no difícil.

Como mencionamos en la sección 1.2, toda matriz unitaria se puede descomponer en el producto de una matriz de amplitudes por una matriz de fases; la condición de ortogonalidad impone N condiciones a la diagonal principal, más $(N^2 - N)/2$ condiciones fuera de la diagonal, de esta forma tenemos

$$\frac{N(N-1)}{2} \text{ amplitudes independientes,}$$

y

$$\frac{N(N+1)}{2} \text{ fases independientes.}$$

Para el caso donde $N = 3$ tendremos tres amplitudes y seis fases independientes. Nuestro objetivo es saber como están distribuidos dichos parámetros.

Queremos probar que una matriz unitaria arbitraria S , se puede escribir como el producto de una matriz de fases P , por una matriz A donde a su vez $A = A_1 A_2 A_3$, donde cada A_i es una matriz diagonal por bloques, es decir

$$S = P A_1 A_2 A_3; \tag{C.4}$$

tomado

$$P = \begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\rho} \end{pmatrix}, \tag{C.5}$$

y

$$\begin{aligned}
 A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -d & -\sqrt{1-d^2}e^{i\gamma} \\ 0 & -\sqrt{1-d^2}e^{-i\gamma} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2}e^{i\zeta} & 0 \\ -\sqrt{1-a^2}e^{-i\zeta} & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & \sqrt{1-b^2}e^{i\beta} \\ 0 & -\sqrt{1-b^2}e^{-i\beta} & b \end{pmatrix}. \tag{C.6}
 \end{aligned}$$

comprando con (C.2) y usando (C.3) las seis fases independientes quedan como:

$$\begin{aligned}\delta &= \varphi_{11}, & \rho &= \varphi_{13} - \varphi_{12} - \varphi_{21} + \varphi_{31} + \varphi_{22}, \\ \alpha &= \varphi_{12} - \varphi_{11}, & \lambda &= \varphi_{21} + \varphi_{12} - \varphi_{11}, \\ \beta &= \varphi_{13} - \varphi_{12}, & \gamma &= \varphi_{11} + \varphi_{22} - 2\varphi_{12} - \varphi_{21} + \varphi_{13}.\end{aligned}\tag{C.7}$$

Como queremos interpretar a S como el operador de evolución de los neutrinos, usando los resultados del Apéndice D y conociendo la solución en el límite adiabático (3.20), interpretamos a

$$P = \mathcal{U}_m^A(t, t_0)\tag{C.8}$$

de donde tres de las fases (C.7), se relaciona directamente con los eigenvalores de la energía, a saber

$$\begin{aligned}\delta &= -\alpha_1(t) = -\int_{t_0}^t \epsilon_1(t') dt' \\ \lambda &= -\alpha_2(t) = -\int_{t_0}^t \epsilon_2(t') dt' \\ \rho &= -\alpha_3(t) = -\int_{t_0}^t \epsilon_3(t') dt'\end{aligned}\tag{C.9}$$

donde los $\epsilon_i(t)$ son los eigenvalores instantáneos reducidos.

Una aproximación común en la literatura es suponer que el operador de evolución de la parte no adiabática se puede descomponer en el producto de un

$$\mathcal{U}_{NA}(t, t_0) = \mathcal{U}_l(t, t_0)\mathcal{U}_h(t, t_0)\tag{C.10}$$

donde en analogía con el caso de 2×2 , $\mathcal{U}_l(t, t_0)$ describe la evolución y la mezcla de los estados $\phi_1^m(t) \rightleftharpoons \phi_2^m(t)$, cerca de la resonancia de bajas densidades V_l .

Por su parte, $\mathcal{U}_h(t, t_0)$ describe la evolución y la mezcla de los estados $\phi_2^m(t) \rightleftharpoons \phi_3^m(t)$ cerca de la resonancia de altas densidades V_h ; de forma explícita

$$\mathcal{U}_{NA}(t, t_0) \simeq \begin{pmatrix} \sqrt{1-P_l} & \sqrt{P_l} e^{i\zeta} & 0 \\ \sqrt{P_l} e^{i\zeta} & -\sqrt{1-P_l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-P_h} & \sqrt{P_h} e^{-i\beta} \\ 0 & -\sqrt{P_h} e^{-i\beta} & \sqrt{1-P_h} \end{pmatrix}.\tag{C.11}$$

con esto en mente vamos a interpretar, las amplitudes que aparecen en (C.2) como

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{1-P_l} \\ b &= \sqrt{1-P_h} \\ d &= \sqrt{1-P_t}\end{aligned}\tag{C.12}$$

donde P_l representa la probabilidad de cruzamiento entre los estados $\phi_1^m(t) \leftrightarrow \phi_2^m(t)$ cerca de la resonancia de bajas densidades V_l ; P_h representa la probabilidad de cruzamiento de los estados $\phi_2^m(t) \leftrightarrow \phi_3^m(t)$ en la región de altas cuando el potencial se aproxima a V_h , y hemos introducido una nueva variable P_t , como la *probabilidad de transición*, que describe el cruzamiento entre los tres estados $\phi_1^m(t) \leftrightarrow \phi_2^m(t) \leftrightarrow \phi_3^m(t)$ en la región intermedia entre V_l y V_h , esta nueva variable intenta dar cuenta de la importancia de los efectos de interferencia que suele ser despreciados al tomar la aproximación (C.11).

Finalmente, podemos dar una parametrización exacta del operador de evolución del neutrino en materia siendo esta

$$\mathcal{U}_m(t, t_0) = \mathcal{U}_m^A(t, t_0) \mathcal{U}_m^{NA}(t, t_0) \quad (\text{C.13})$$

donde

$$\mathcal{U}_m^A(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha_3(t)} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.14})$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_m^{NA} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{1-P_t} & -\sqrt{P_t} e^{i\gamma} \\ 0 & -\sqrt{P_t} e^{-i\gamma} & \sqrt{1-P_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-P_l} & \sqrt{P_l} e^{i\zeta} & 0 \\ -\sqrt{P_l} e^{-i\zeta} & \sqrt{1-P_l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-P_h} & \sqrt{P_h} e^{i\beta} \\ 0 & -\sqrt{P_h} e^{-i\beta} & \sqrt{1-P_h} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.15}) \end{aligned}$$

En términos de componentes,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{11}^m &= \sqrt{1-P_l} e^{-i\alpha_1} \\ \mathcal{U}_{12}^m &= \sqrt{1-P_h} \sqrt{P_l} e^{i(\zeta-\alpha_1)} \\ \mathcal{U}_{13}^m &= \sqrt{P_h} \sqrt{P_l} e^{i(\zeta+\beta-\alpha_1)} \\ \mathcal{U}_{21}^m &= \sqrt{1-P_t} \sqrt{P_l} e^{-i(\zeta+\alpha_2)} \\ \mathcal{U}_{22}^m &= \sqrt{P_t} \sqrt{P_h} e^{i(\gamma-\alpha_2-\beta)} - \sqrt{1-P_l} \sqrt{1-P_h} \sqrt{1-P_t} e^{-i\alpha_2} \\ \mathcal{U}_{23}^m &= -\sqrt{1-P_l} \sqrt{1-P_t} \sqrt{P_h} e^{i(\beta-\alpha_2)} - \sqrt{1-P_h} \sqrt{P_t} e^{i(\gamma-\alpha_2)} \\ \mathcal{U}_{31}^m &= \sqrt{P_l} \sqrt{P_t} e^{-i(\alpha_3+\zeta+\gamma)} \\ \mathcal{U}_{32}^m &= -\sqrt{1-P_l} \sqrt{1-P_h} \sqrt{P_t} e^{-i(\alpha_3+\gamma)} - \sqrt{1-P_t} \sqrt{P_h} e^{-i(\alpha_3+\beta)} \\ \mathcal{U}_{33}^m &= -\sqrt{1-P_l} \sqrt{P_h} \sqrt{P_t} e^{i(\beta-\gamma-\alpha_3)} + \sqrt{1-P_h} \sqrt{1-P_t} e^{-i\alpha_3} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

vemos que en el caso donde $P_t \rightarrow 0$ se recupera la ecuación (C.11) donde la entrada \mathcal{U}_{31}^m se anula.

Apéndice D

Factorización de \mathcal{U}_{NA}

En este apéndice tiene la finalidad de justificar la factorización del operador de evolución en una parte adiabática y una parte no adiabática

Queremos encontrar el operador de evolución del Hamiltoniano H , es decir, queremos saber cuál es la solución de

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t, t_0) = H\mathcal{U}(t, t_0); \quad (\text{D.1})$$

con la condición inicial

$$\mathcal{U}(t_0, t_0) = \mathbb{I}, \quad (\text{D.2})$$

para algún Hamiltoniano conocido.

Supongamos que el Hamiltoniano H se pueden escribir como

$$H = H_1 + H_2; \quad (\text{D.3})$$

con las soluciones de H_1 explícitamente conocidas.

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_1(t, t_0) = H_1\mathcal{U}_1(t, t_0). \quad (\text{D.4})$$

Sustituyendo (D.3) en (D.1)

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t, t_0) = (H_1 + H_2)\mathcal{U}(t, t_0) \quad (\text{D.5})$$

en este caso el operador de evolución de $\mathcal{U}(t, t_0)$ se puede factorizar como $\mathcal{U}(t, t_0) = \mathcal{U}_1(t, t_0)\mathcal{U}'(t, t_0)$, con $\mathcal{U}'(t, t_0)$ por determinar

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_1(t, t_0)\mathcal{U}'(t, t_0) = i\frac{\partial\mathcal{U}_1(t, t_0)}{\partial t}\mathcal{U}'(t, t_0) + i\mathcal{U}_1(t, t_0)\frac{\partial\mathcal{U}'(t, t_0)}{\partial t}; \quad (\text{D.6})$$

sustituyendo (D.6) en (D.5) y usando (D.4)

$$i \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial t} \mathcal{U}' + i \mathcal{U}_1 \frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial t} = H_1 \mathcal{U}_1 \mathcal{U}' + H_2 \mathcal{U}_1 \mathcal{U}' \quad (\text{D.7})$$

donde hemos omitido la dependencia temporal con la finalidad de evitar sobrecargar la notación; finalmente

$$i \frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial t} = (\mathcal{U}_1^\dagger H_2 \mathcal{U}_1) \mathcal{U}', \quad (\text{D.8})$$

podemos interpretar $\mathcal{U}_1^\dagger H_2 \mathcal{U}_1$ como un Hamiltoniano efectivo. En el caso especial en que $[\mathcal{U}_1, H_2] = 0$

$$i \frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial t} = H_2 \mathcal{U}', \quad (\text{D.9})$$

y \mathcal{U}' se convierte en el operador de evolución de H_2 .

Veamos como podemos aplicar estos resultados al caso del neutrino. Partamos de la ecuación (3.19)

$$\mathcal{H}_m(t) = H_D(t) - i \mathcal{O}_m^T(t) \frac{\partial \mathcal{O}_m(t)}{\partial t}. \quad (\text{D.10})$$

Como se menciona en la sección 3.1.1 al despreciar los términos fuera de la diagonal principal podemos resolver el operador de evolución de la parte diagonal

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}_m^A(t, t_0) = H_D(t) \mathcal{U}_m^A(t, t_0), \quad \mathcal{U}_m^A(t_0, t_0) = \mathbb{I} \quad (\text{D.11})$$

en este caso el operador de evolución toma la forma:

$$\mathcal{U}_m^A(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha_3(t)} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.12})$$

$$\alpha_i(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{E}_i(t') dt', \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{D.13})$$

Para la parte no adiabática del operador de evolución se tiene la siguiente ecuación

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}_{NA} = -i (\mathcal{U}_A^\dagger \mathcal{O}_m^T \dot{\mathcal{O}}_m \mathcal{U}_A) \mathcal{U}_{NA}, \quad (\text{D.14})$$

Si usamos la aproximación de la matriz de paso dada en (4.51)

$$\mathcal{O}_m^T \dot{\mathcal{O}}_m = \dot{\theta}_{12}^m \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dot{\theta}_{13}^m \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{12}^m(t) \\ 0 & 0 & s_{12}^m(t) \\ -c_{12}^m(t) & -s_{12}^m(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.15})$$

con

$$\dot{\theta}_{12}^m(t) = \frac{\sin^2 2\theta_{12}^m}{2V_l^R \tan 2\theta_{12}^m} \dot{V}(t), \quad \dot{\theta}_{13}^m(t) = \frac{\sin^2 2\theta_{13}^m}{2V_h^R \tan 2\theta_{13}^m} \dot{V}(t), \quad (\text{D.16})$$

De esta manera la ecuación (D.14) se reescribe como

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}_{NA} = (\mathcal{H}_l + \mathcal{H}_h) \mathcal{U}_{NA} \quad (\text{D.17})$$

donde

$$\mathcal{H}_l = \begin{pmatrix} 0 & \varrho_l(t) & 0 \\ \varrho_l^*(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.18})$$

$$\mathcal{H}_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varrho_h'(t) \\ 0 & 0 & \varrho_h(t) \\ \varrho_h'^*(t) & \varrho_h^*(t) & 0 \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} \varrho_l(t) &= -i\dot{\theta}_{12}^m e^{-i(\alpha_2 - \alpha_1)}, \\ \varrho_h(t) &= -i\dot{\theta}_{13}^m s_{12}^m(t) e^{-i(\alpha_3 - \alpha_2)}, \\ \varrho_h'(t) &= -i\dot{\theta}_{13}^m c_{12}^m(t) e^{-i(\alpha_3 - \alpha_1)}. \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Para encontrar \mathcal{U}_{NA} nos es útil tener en cuenta que las derivadas temporales de $\dot{\theta}_{12}^m$ y $\dot{\theta}_{13}^m$ son significativamente diferentes de cero solo en una estrecha región alrededor de sus respectivos máximos. Debido a pequeñez de la razón de Δ_{21}/Δ_{31} estos dos intervalos están bien separados lo cual nos permite escribir la solución de (D.17) en una forma factorizada

$$\mathcal{U}_{NA}(t, t_0) = \mathcal{U}_l(t, t_0) \mathcal{U}_h(t, t_0) \quad (\text{D.20})$$

Usando nuevamente los resultados del este Apéndice es posible escribir $\mathcal{U}_{NA} = \mathcal{U}_l \tilde{\mathcal{U}}$, donde $\tilde{\mathcal{U}}$ obedece la ecuación de ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano $\mathcal{U}_l^\dagger \mathcal{H}_h \mathcal{U}_l$. Si $[\mathcal{U}_l(t, t_0), \mathcal{H}_h(t)] = 0$ para todo tiempo, entonces $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}_h$ y la ecuación (D.20) resulta ser exacta. En el presente caso para los puntos cerca de la region de altas densidades $\dot{\theta}_{12}^m \simeq 0$ y por lo tanto $\mathcal{H}_l \simeq 0$, esto implica $\mathcal{U}_l \simeq \mathbb{I}$, por otro lado para la región de bajas densidades $\dot{\theta}_{13}^m \simeq 0$ y ahora $\mathcal{H}_h \simeq 0$. Bajo estas condiciones $[\mathcal{U}_l(t, t_0), \mathcal{H}_h(t)] = 0$ se cumple en un amplio rango y la ecuación (D.20), esta suficientemente justificada.

$\mathcal{U}_{l,h}$ es el operador de evolución de $\mathcal{H}_{l,h}$; cada uno correspondiente a un problema efectivo de 2×2 .

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_l &= \begin{pmatrix} \sqrt{1-P_l} & \sqrt{P_l} e^{i\zeta} & 0 \\ -\sqrt{P_l} e^{-i\zeta} & \sqrt{1-P_l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U}_h &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-P_h} & \sqrt{P_h} e^{i\beta} \\ 0 & -\sqrt{P_h} e^{-i\beta} & \sqrt{1-P_h} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{D.21}$$

en esta última ecuación P_h y P_l representan las probabilidades de cruzamiento en las vecindades de los valores resonantes V_h y V_l , respectivamente.

Bibliografía

- [1] AGUILAR-AREVALO, A. A., AND D'OLIVO, J. C. Magnus approximation for neutrino oscillations with three flavors in matter. In *Journal of Physics: Conference Series* (2010), vol. 203, IOP Publishing, p. 012096.
- [2] BARGER, V., WHISNANT, K., PAKVASA, S., AND PHILLIPS, R. Matter effects on three-neutrino oscillations. *Physical Review D* 22, 11 (1980), 2718.
- [3] BETHE, H. A. Possible explanation of the solar-neutrino puzzle. *Physical Review Letters* 56, 12 (1986), 1305.
- [4] BILENKY, S. M., GIUNTI, C., AND GRIMUS, W. Phenomenology of neutrino oscillations. *Progress in Particle and Nuclear Physics* 43 (1999), 1–86.
- [5] CARDANO, H. *Artis magnae, sive de regulis algebraicis, liber unus*. Joh. Petreius, 2011.
- [6] DANBY, G., GAILLARD, J. M., GOULIANOS, K., LEDERMAN, L. M., MISTRY, N., SCHWARTZ, M., AND STEINBERGER, J. Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos. *Physical Review Letters* 9, 1 (1962), 36.
- [7] DENTON, P., PARKE, S., TAO, T., AND ZHANG, X. Eigenvectors from eigenvalues: a survey of a basic identity in linear algebra. *Bulletin of the American Mathematical Society* 59, 1 (2022), 31–58.
- [8] DENTON, P. B., PARKE, S. J., AND ZHANG, X. Neutrino oscillations in matter via eigenvalues. *Physical Review D* 101, 9 (2020), 093001.
- [9] DITA, P. Parametrisation of unitary matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 15, 11 (1982), 3465.
- [10] ELIEZER, S., AND SWIFT, A. R. Experimental consequences of ν_e - ν_μ mixing in neutrino beams. *Nuclear Physics B* 105, 1 (1976), 45–51.

- [11] FREUND, M. Analytic approximations for three neutrino oscillation parameters and probabilities in matter. *Physical Review D* 64, 5 (2001), 053003.
- [12] FRITSCH, H., AND MINKOWSKI, P. Vectorlike weak currents, massive neutrinos, and neutrino beam oscillations. *Physics Letters B* 62, 1 (1976), 72–76.
- [13] GIUNTI, C., AND KIM, C. W. *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. Oxford university press, 2007.
- [14] HERNANDEZ, P. Neutrino physics. *arXiv preprint arXiv:1708.01046* (2017).
- [15] KIM, C. W., AND PEVSNER, A. Neutrinos in physics and astrophysics.
- [16] KOBAYASHI, M., AND MASKAWA, T. Cp-violation in the renormalizable theory of weak interaction. *Progress of theoretical physics* 49, 2 (1973), 652–657.
- [17] KUO, T.-K., AND PANTALEONE, J. Neutrino oscillations in matter. *Reviews of Modern Physics* 61, 4 (1989), 937.
- [18] LAHIRI, A., AND PAL, P. B. *A first book of quantum field theory*. CRC Press, 2005.
- [19] LANGACKER, P. *The standard model and beyond*. Taylor & Francis, 2017.
- [20] LANGACKER, P., LEVEILLE, J. P., AND SHEIMAN, J. On the detection of cosmological neutrinos by coherent scattering. *Physical Review D* 27, 6 (1983), 1228.
- [21] LIPARI, P. Introduction to neutrino physics. *CERN EUROPEAN ORGANIZATION FOR NUCLEAR RESEARCH-REPORTS-CERN*, 3 (2003), 115–200.
- [22] MIKHEYEV, S., AND SMIRNOV, A. Y. Resonant amplification of ν oscillations in matter and solar-neutrino spectroscopy. *Il Nuovo Cimento C* 9, 1 (1986), 17–26.
- [23] MOHAPATRA, R. N., AND PAL, P. B. *Massive neutrinos in physics and astrophysics*, vol. 72. World scientific, 2004.
- [24] MORALES, J. Estudio comparativo de las oscilaciones de neutrinos y antineutrinos en materia. Master’s thesis, UNAM, 2013.

- [25] NAKAMURA, K., PETCOV, S., ET AL. Neutrino masses, mixing, and oscillations.
- [26] NICKALLS, R. Viète, descartes and the cubic equation. *The Mathematical Gazette* 90, 518 (2006), 203–208.
- [27] PETCOV, S. An analytic description of three-neutrino oscillations in matter with varying density. *Physics Letters B* 214, 2 (1988), 259–266.
- [28] PONTECORVO, B. Mesonium and antimesonium. *Zhur. Eksptl'. i Teoret. Fiz.* 33 (1957).
- [29] PONTECORVO, B. Neutrino experiments and the problem of conservation of leptonic charge. *Sov. Phys. JETP* 26, 984-988 (1968), 165.
- [30] WOLFENSTEIN, L. Neutrino oscillations in matter. *Physical Review D* 17, 9 (1978), 2369.
- [31] WOLFENSTEIN, L. Parametrization of the kobayashi-maskawa matrix. *Physical Review Letters* 51, 21 (1983), 1945.
- [32] ZYLA, P. Particle data group. *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2020 (2020), 083C01.