

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

CARRERA DE INGENIERÍA QUÍMICA

**FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA COMPLEJA APLICADA AL
FLUJO PULSÁTIL DE LÍQUIDOS COMPLEJOS FLUYENDO EN
GEOMETRÍAS CILÍNDRICAS: CONFIGURACIÓN MECÁNICA DE
MODELOS VISCO-PLASTO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO QUÍMICO

PRESENTA:

BRANDON LUKE CARRANCO ARIAS

JURADO DEL EXAMEN

DIRECTOR: DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

ASESOR: DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

ASESOR: M.C. LUIS ANTONIO RAMIREZ TORRES

SINODAL: I.Q. ORTIZ BAUTISTA DOMINGA

SINODAL: DRA. SLAINAS JUAREZ MARIA GUADALUPE



CIUDAD DE MÉXICO

AGOSTO 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPITT) de la UNAM <<IN115919>> <<Análisis del flujo pulsátil de sangre humana con hipercolesterolemia, mediante una ecuación constitutiva nueva, caracterización reológica y simulación computacional en venas elásticas e inelásticas>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM <<PE116519>> << Fenómenos de transporte avanzados: fluidos no newtonianos viscoelásticos lineales y no lineales >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM <<PE105919>> << Material didáctico, aula virtual y blog para apoyo de las asignaturas de matemáticas I y II de la carrera de Ingeniería Química >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.

- Al seminario de investigación de las líneas de investigación: Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos (LI-FESZ-420415) y Reología Teórica y Reometría de Fluidos Estructurados (LI-FESZ-570619) por todas las observaciones y aportaciones realizadas a este trabajo.
- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.

Dedicatorias

- A César por las charlas de cinco palabras en los recurrentes viajes por la cena, las ingeniosas e inesperadas bromas mutuas y, sobre todo, por morderse la lengua mientras sus orejas se iban poniendo coloradas cuando la situación se me iba de las manos.
- A Gabriela por la relación equiparable a los gemelos dicigóticos y las chuscas canciones maquinadas en las largas tardes, en tanto alguno se esforzaba por alimentar al otro con pellets para tortuga.
- A Blanca por la pizza en miércoles con sabor a gloria, aunque “esa no es comida” y sus constantes mimos (a veces no merecidos) recordatorio perenne de un amor incondicional.
- A Omar por convertir muchos lugares de la ciudad en travesías dignas de los mejores aventureros, porque ahora no puedo mirar un cine viejo sin sentir un golpe en el estómago y expectorar una sonrisa.
- A Jeraldine, por poder entrar a la peor fosa, temblar de miedo y aun así convencerme de que todo va bien, acompañarme a saltar de cabeza sin dudar un segundo y bailar en el centro comercial.
- Profesor no representa a alguien de pie hablando un par de horas, es más parecido a inspirar emoción mientras se destripa al jeroglífico en turno, para mi profesor Edtson por la ayuda incluso cuando los grillos ya estaban cantando.

Contenido

Agradecimientos.....	II
Dedicatorias	IV
Nomenclatura y símbolos	IX
Letras griegas.....	IX
Vectores, diadas y tensores.....	X
Números adimensionales	XI
Lista de figuras	XII
Glosario	XIII
Resumen	9
CAPÍTULO I.....	11
INTRODUCCIÓN.....	11
1.1 Definiciones básicas	12
1.2 Aplicaciones (motivación).....	14
1.3 Relevancia: importancia.	15
1.4 Antecedentes.....	15
1.5 Hipótesis.	18
1.6 Objetivos:	18

1.6.1 General.....	18
1.6.2 Particular.....	18
1.7 Distribución del material de la tesis de licenciatura.....	19
CAPÍTULO II.....	20
MARCO TEÓRICO	20
2.1 Reología de la sangre humana.....	21
2.2 Flujo de Hagen y Poiseuille en un capilar de radio $r=a$ y longitud $z=L$	22
2.2.1 Cálculo del perfil de velocidad con deslizamiento en la pared.	23
2.2.2 Cálculo del flujo volumétrico.....	24
2.2.3 Cálculo de la velocidad promedio	25
2.3 Flujo de Hagen y Poiseuille en una corona circular de radios R_1 y R_2 con $R_1 < R_2$ y longitud finita $z=L$	26
2.3.1 Perfil de velocidades.....	26
2.3.2 Flujo volumétrico	29
2.4 Número de Deborah De.....	30
2.5 Modelo mecánico viscoelástico de Maxwell.....	31
2.6 Modelo mecánico viscoplasto de Kelvin-Voigt.	33
CAPÍTULO III.	37
PROBLEMA FÍSICO Y ECUACIONES TEÓRICAS	37
3.1 Geometría cilíndrica (capilar).....	38

3.2 Geometría corona circular.....	39
3.3.1 Ecuación de continuidad.....	42
3.3.2 Ecuación de momento	44
3.3.4 Operador fluidez.....	49
CAPÍTULO IV.....	52
MODELADO MATEMÁTICO	52
4.1.1 Balance de masa si reacción química	53
4.1.2 Ecuación de movimiento con mecanismos inerciales	53
4.1.3 Perfil de velocidades.....	55
4.1.4 Ecuación diferencial homogénea.....	55
4.1.5 Solución particular.....	56
4.1.6 Condiciones de frontera.....	57
4.1.7 Flujo volumétrico con transformada de Fourier	58
4.1.7 Función de transferencia compleja	60
4.2. Cálculo de la función de transferencia para una corona circular.....	61
4.2.1 Perfil de velocidades en una corona circular	61
4.2.2 Condiciones de frontera.....	61
4.2.3 Flujo volumetrico en una corona circular con mecanismos inerciales	64
4.3 Parámetro Beta	65
4.3.1 Fluido Newtoniano	65

4.3.2 Fluido No-Newtoniano: modelo visco-plasto de Voigt-Kelvin	66
4.4 Resumen del capítulo 4	66
CAPÍTULO V.	67
SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	67
5.1 Variables y ecuaciones adimensionales.....	68
Escalamiento de Variables.....	68
5.2 Ecuaciones adimensionales	68
5.3 Vector de onda β	69
5.1 Funcion de transferencia fluido Newtoniano.....	71
5.2 Funcion de transferencia fluido Kelvin-Voigt (KV)	77
5.4 Resumen del capítulo	85
CAPÍTULO VI.	87
CONCLUSIONES.....	87
6.1 Contribución al conocimiento	88
6.2 Capilar.	91
6.3 Modelo viscoplasto: Kelvin-Voigt.	91
6.4 Corona circular.	92
6.5 Resumen de este capítulo	95
BIBLIOGRAFÍA.....	97

Nomenclatura y símbolos

a	Radio del tubo capilar [m]
G_0	Módulo elástico [Pa]
$I\%$	Aumento de flujo [1]
L	Longitud del capilar [m]
p	Presión [Pa]
Q_0	Flujo volumétrico independiente del flujo pulsátil [m^3/s]
$\langle Q(t) \rangle$	Flujo volumétrico dependiente del flujo pulsátil [m^3/s]
r	Coordenada radial [m]
z	Coordenada rectangular [m]

Letras griegas

η	Función de viscosidad [Pa s]
$\dot{\gamma}_{ji}$	Escalar rapidez de deformación de i respecto a j [1/s]
λ	Tiempo estructural [s]
σ_{ij}	Componente ij del tensor de esfuerzos [Pa]
θ	Componente angular [1]
ρ	Densidad [kg/m^3]
λ_0	Tiempo de relajación, modelo de Maxwell [Pa]

β	Parámetro Beta
ω	Frecuencia [1/s]
γ_v	Deformación viscosa
γ_e	Deformación elástica

Vectores, diadas y tensores

\mathbf{V}	Vector velocidad [m/s]
$\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$	Producto diádico del vector velocidad [m ² /s ²]
\mathbf{D}	Tensor rapidez de deformación [1/s]
\mathbf{f}	Fuerza de cuerpo [N/m ³]
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de esfuerzos [Pa]
\mathbf{W}	Tensor vorticidad [1/s]
$\nabla \mathbf{V}$	Tensor gradiente del vector velocidad [1/s]
$\nabla \mathbf{V}^T$	Transpuesta del tensor gradiente del vector velocidad [1/s]
\mathbf{g}	Aceleración gravitacional [m/s ²]
\mathbf{I}	Tensor unitario
\mathbf{T}	Tensor de esfuerzos totales

Operadores diferenciales y otros símbolos

$()^T$	Transpuesta para la matriz $m \times n$ [1]
---------	---

∇	Operador gradiente (Nabla) [1/m]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]
∇^2	Operador Laplaciano [1/m]
$F\{\}$	Transformada de Fourier
O_η	Operador viscosidad
O_ϕ	Operador fluidez
Y_0	Función de Bessel de segunda especie
J_0	Función de Bessel de primera especie

Números adimensionales

R	Relación de radios
De	Número de Deborah
φ_0	Fluidez

Lista de figuras

Figura 1. a) Geometría capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ y b) Función de transferencia $T(\omega)$	13
Figura 2. Geometría cilíndrica vista lateral.	26
Figura 3. Modelo para fluido de Maxwell.	33
Figura 4. Modelo para fluido de Kelvin-Voigt.	35
Figura 5. Geometría cilíndrica, perspectiva lateral y transversal.	39
Figura 6. Geometría de cilindros concéntricos vista lateral y transversal.	40
Figura 7. Modelo para fluido de Newton.	71
Figura 8. FT vs frecuencia, fluido newtoniano, capilar.....	72
Figura 9. Re de FT vs frecuencia, fluido newtoniano, corona circular y R_{var}	73
Figura 10. Im de FT vs frecuencia, fluido newtoniano, corona circular, G_{cte} y R_{var}	75
Figura 11. Modelo para fluido de Kelvin-Voigt.....	77
Figura 12. Re de FT vs frecuencia, fluido K-V, capilar, G_{var} y R_{cte}	78
Figura 13. . Im de FT vs frecuencia, fluido K-V, capilar, G_{var} y R_{cte}	79
Figura 14. Re de FT vs frecuencia, fluido K-V, corona circular, G_{cte} y R_{var}	80
Figura 15. Re de FT vs frecuencia, fluido K-V, corona circular, G_{var} y R_{cte}	81
Figura 16. Im de FT vs frecuencia, fluido K-V, corona circular, G_{cte} y R_{var}	82
Figura 17. Im de FT vs frecuencia, fluido K-V, corona circular, G_{var} y R_{cte}	83

Glosario

Modelo de Kelvin-Voigt.

Deformación: Cambio de posición de un punto material a otro.

Ecuación constitutiva: Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación).

Ecuación de continuidad: Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.

Ecuación de Hagen-Poiseuille. Ley que permite determinar el flujo laminar estacionario de un líquido incompresible y newtoniano a través de un tubo cilíndrico de sección circular constante.

Ecuación de movimiento: Segunda ley newton aplicada aun medio continuo.

Esfuerzo en la pared: Esfuerzo evaluado en la pared.

Estado estacionario: Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.

Fluido: Es aquel que al aplicarle un esfuerzo cortante sufre una deformación continua e irreversiblemente.

Fluido biológico: Son las diferentes excreciones y secreciones que provienen del organismo.

Fluidos complejos: Son aquellos que presentan comportamiento reológico en estado estacionario y no estacionario.

Flujo cortante: Flujo que se aplica una fuerza tangencial al sistema que se deforma continua e irreversiblemente.

Flujo homogéneo: Es el flujo en la cual las propiedades del sistema no dependen de la posición.

Fluido incompresible: Fluido que tiene una densidad constante.

Fluido newtoniano: Son aquellos donde la viscosidad muestra una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación.

Fluido no-newtoniano: La viscosidad no muestra una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación.

Flujo oscilante: Es el flujo que se origina cuando un plato oscila a una función periódica.

Flujo pulsátil: Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.

Fluido viscoelástico. Fluido capaz de exhibir una respuesta que se asemeja a la de un sólido elástico en combinación con un líquido por lo que ante la aplicación de un esfuerzo la parte de la deformación será recuperada.

Fluido viscoplasto. Material que se comporta como un cuerpo rígido al estar sometido a tensiones reducidas, pero fluye como un fluido viscoso al ejercer sobre el mismo tensiones mayores.

Flujo volumétrico: Volumen por unidad de tiempo.

Frecuencia Angular: Se refiere a la frecuencia del movimiento circular expresada en proporción del cambio de ángulo.

Función de transferencia. Modelo matemático algebraico de un sistema dinámico, basado en la transformada de Laplace, relación entre la variable de entrada del sistema y la variable de salida.

Función estocástica: Función probabilística que evoluciona en el tiempo.

Gradiente: Operador matemático espacial que físicamente describe los cambios de la propiedad respecto al espacio.

Modelo de Jeffreys: Ecuación geológica viscoelástico lineal que acopla un solvente con un polímero.

Modelo de Maxwell: Ecuación constitutiva que describe el estado viscoelástico de un sistema en el régimen de rapidez de deformación bajas (viscoelasticidad lineal).

Módulo elástico Está asociado con la energía almacenada en el material, y se mide en pascal.

Módulo viscoso Está asociada con la energía disipada por el material, y se mide en pascal.

Módulo complejo Es el módulo del vector obtenido como suma de las contribuciones de los módulos elásticos y viscosos.

Rapidez de deformación: Rapidez con la que se deforma un fluido.

Sangre: Fluido biológico que presenta dos fases y que es viscoelástico.

Reología: Ciencia que estudia el flujo de materia y su deformación.

Tensor. Un tensor es un objeto matemático que pertenece a un espacio vectorial (tensorial) y que es invariante ante un cambio de base. Cuando cambia la base, sus componentes se pueden recalcular a través de una fórmula conocida.

Tensor de Esfuerzo: Es una matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en el cual se describe el estado de las fuerzas en un elemento de control.

Tiempo de relajación: Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar un estado de equilibrio después de un periodo.

Tiempo de retardo: Es el tiempo en el que tarda el material en llegar al equilibrio debido a la aplicación de un esfuerzo cortante.

Velocidad promedio: Es la velocidad axial promediada a través del área de flujo.

Viscoelasticidad lineal: Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.

Viscoelasticidad no lineal: Es la región a medias y altas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.

Viscosidad: Es una medida de la resistencia a fluir de un fluido.

Resumen

En este trabajo se analiza el flujo de un líquido visco-plasto de Kelvin-Voigt fluyendo en geometrías cilíndricas. La primera de estas, es un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. La segunda es una corona circular de radio R_1 y R_2 y longitud $z = L$, con $R_1 < R_2$ respectivamente. El líquido es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión transitorio. El sistema es caracterizado por una ecuación constitutiva tipo Kelvin-Voigt (KV), la cual es una ecuación de estado reológica que describe un fluido que presenta un comportamiento viscoso y plástico y se deduce a partir de una configuración mecánica en paralelo. Asumiendo estado no-estacionario (mecanismos inerciales son diferentes de cero), efectos gravitacionales despreciables, flujo cortante simple, i.e., el vector velocidad es unidireccional depende del tiempo y de la coordenada radial r , el gradiente de velocidad es ortogonal al vector velocidad por lo que el término convectivo se anula. El proceso es isotérmico por lo que las propiedades materiales no dependen de esta, ni de la posición, se supone que la componente z del vector velocidad no depende del eje coordenado z (invarianza axial). El flujo y la reología es caracterizada por el modelo de KV, resultando una ecuación diferencial parcial que involucra mecanismos: (i) inerciales, (ii) viscosos y (iii) plásticos. Con el fin de obtener la respuesta mecánica del sistema, se aplica la transformada de Fourier para transformar el tiempo en términos de la frecuencia y así obtener el perfil de velocidades. Este, proviene de una ecuación diferencial modificada de Bessel no homogénea y suponiendo que no hay deslizamiento en la pared y simetría en el centro del capilar. En el caso de la corona circular, en $r = R_1$ y $r = R_2$ se anula la velocidad. El perfil de velocidades es una consecuencia del operador fluidez, el vector de onda beta y la razón de funciones de Bessel. Integrando el perfil de velocidades sobre una sección de área transversal, se obtiene

una expresión cerrada para el flujo volumétrico. Las ecuaciones resultantes, se hacen adimensionales con el fin de obtener grupos adimensionales, ejemplo de ello es el número de Deborah que relaciona los mecanismos viscoelásticos en el sistema. La función de transferencia es general y puede ser aplicada a cualquier ecuación constitutiva lineal o fraccional respectivamente. Las simulaciones son realizadas en el programa Mathematica 12.1 (Licencia-UNAM). En el caso newtoniano, no se observa resonancias, mientras que en el viscoelástico sí. El efecto de la geometría en la corona circular induce que se obtengan resonancias a valores mayores en la frecuencia angular en función de las propiedades materiales. Finalmente, los resultados obtenidos son aplicados a un fluido biológico con el fin de dilucidar una posible aplicación.

Palabras claves: *Función de transferencia, Soluciones analíticas, Modelado Matemático, Sangre humana, Hipercolesterolemia.*

CAPÍTULO I.
INTRODUCCIÓN

1.1 Definiciones básicas

En estudio de fluidos no-newtonianos a través de los fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos los fluidos se alejan notablemente del comportamiento Newtoniano, i.e. su viscosidad no es constante y depende de la rapidez de deformación (Bird et al 1977). Una de las primeras aplicaciones que se analizan, es suponer que el fluido es visco-elástico es decir, que contiene componentes elásticas y viscosas (Bird et al 2012). Este fluido representa un avance gigantesco en la comprensión del comportamiento e interacciones en el sistema. El modelo de Maxwell es uno de los primeros intentos en describir este tipo de interacciones y la ecuación resultante, al combinar la ecuación de movimiento, reológica y de continuidad tiene la forma:

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + \lambda_0 \frac{\partial^2 V_z}{\partial t^2} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \lambda_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (1.1)$$

Este modelo ha sido punto de partida en las primeras aproximaciones en el modelado de fluidos viscoelásticos en el régimen de viscoelasticidad lineal (**Del Rio et al 1999; Collepardo-Guevara y Corvera Poire 2007**). En este trabajo, se analizará una versión diferente de este modelo, caracterizado con el de **Kelvin-Voigt (KV)**. El modelo resultante esta dado por, lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial^2 V_z}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z} + G_0 \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (1.2)$$

¿Poner z como subíndice?

La Ec. (1.2) es punto de partida para el análisis de la presente tesis de investigación de licenciatura. La Ec. (1.2) se puede redefinir como:

$$V_z(r,t) = T(Dt,r) \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (1.3)$$

En donde $T(Dt)$ es la función de transferencia compleja que será estudiada en la presente tesis de licenciatura.

$$T(Dt,r) = \frac{\frac{\partial}{\partial t}}{\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - G_0 \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}} \quad (1.4)$$

En términos de un diagrama de Bloque, se tiene la Fig. (1)

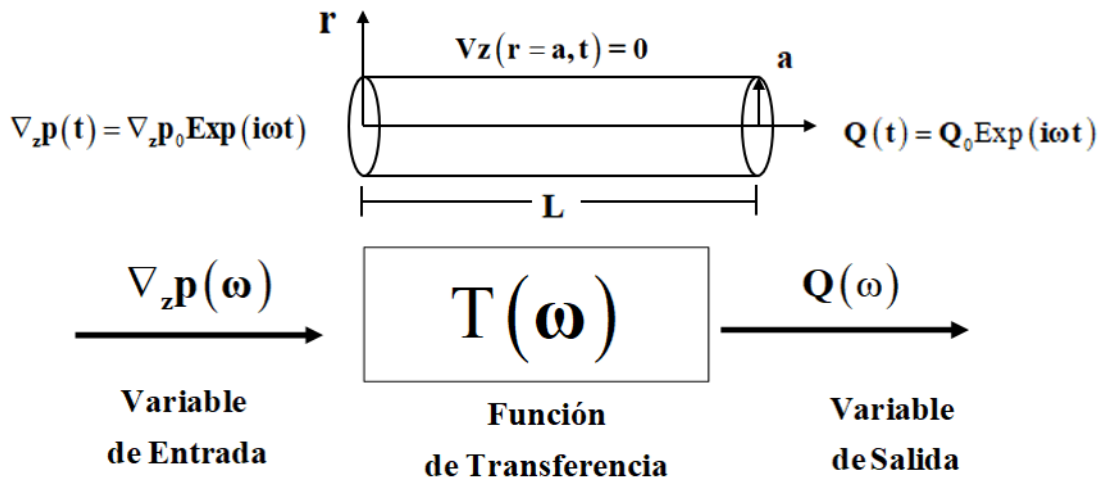


Figura 1. a) Geometría capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ y b) Función de transferencia $T(\omega)$.

La Fig. (1) Ilustra el líquido que fluye en el capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. El gradiente de presión oscilante (variable de entrada) induce un flujo volumétrico pulsante

(variable de salida). El sistema puede ser visualizado por medio de un diagrama de bloque en el dominio de Fourier. La función de transferencia $T(\omega)$ relaciona las variables de entrada y salida en el sistema de estudio.

1.2 Aplicaciones (motivación)

El flujo de líquidos en estos sistemas ha sido ampliamente estudiado en Bioreología, en biología en medicina, en el área de liberado de fármacos controlados y drogas experimentales (**Collepardo-Guevara y Corvera Poire 2007**). Otra aplicación de estos sistemas, se ha empleado en la extracción terciaria en yacimientos de petróleo (**Manero et al. 2002**). En ciencias físicas en el estudio de la permeabilidad magnética y eléctrica, se han calculado expresiones para describir la interacción de materiales con campos magnéticos y eléctricos (**Del rio et al. 2001, 2004**). Otra de las aplicaciones es el estudio de la curvatura promedio en sistemas biológicos que amplifican la respuesta mecánica y resonante en el oído humano (**Herrera-Valencia et al. 2009, 2010, 2012, 2014, 2018, 2021**).

Las oclusiones centrales y periféricas representan uno de los problemas más difíciles de describir en ingeniería química, debido al comportamiento complejo del flujo de líquidos newtonianos (**Torres et. al. 2017**) y no newtonianos en estos sistemas (**Collepardo-Guevara y Corvera Poire 2007**).

Las oclusiones periféricas, son obstrucciones creadas debido a los minerales que se depositan en pocas cantidades y continuamente en las paredes de las geometrías que transportan los fluidos en los sistemas de interés en ingeniería (**Collepardo-Guevara y Corvera Poire 2007; Ortega et al. 2015**).

Un ejemplo biológico de una oclusión periférica se presenta en el estudio del hipercolesterolemia en vasos sanguíneos, el calcio se adhiere a las paredes y son los puntos que permiten que el colesterol migre a las paredes, produciendo un engrosamiento en estas (**Moreno et al. 2015**). Por otra parte, las oclusiones centrales describen un sistema en donde hay una obstrucción central, la cual es aproximada mediante dos cilindros concéntricos, en los cuales el líquido de interés fluye por la región de la corona circular (**Collepardo-Guevara y Corvera Poire 2007**).

1.3 Relevancia: importancia.

Todos estos estudios involucran una propiedad del medio que cuantifica la resistencia a fluir en este, y se conoce como: Permeabilidad dinámica, la cual se define como: “La propiedad intrínseca que tiene un sistema físico para fluir en este”, la ecuación básica se define en términos de la Ecuación de Hagen y Poiseuille, la cual relaciona el gradiente de presión (variable de entrada) y el flujo volumétrico (variable de salida).

1.4 Antecedentes.

Collepardo-Guevara y Corvera Poire (2007) estudiaron la permeabilidad dinámica en fluidos viscoelásticos, en oclusiones centrales y periféricas y utilizaron datos de sangre humana fresca, para describir las curvas resonantes del fluido de Maxwell. Ellos demostraron que, al contrastar la permeabilidad dinámica de ambos sistemas, las oclusiones centrales tenían una mayor recuperación de flujo que aquellas en donde la oclusión fue periférica. Para describir el flujo pulsátil, utilizaron una serie de Fourier en términos del seno y coseno.

Finalmente, probaron las bondades de sus predicciones teóricas con datos de sangre humana fresca (**Del río et al. 1996, 1998, 2001, 2003, 2004; Collepardo-Guevara y Corvera Poire 2007**).

Del Río y Castrejon Pita (2002) estudiaron la permeabilidad dinámica para dos fluidos diferentes, uno newtoniano e incompresible y un fluido maxwelliano asumiendo un estado estacionario y con la condición de no deslizamiento en las paredes de los capilares porosos para el cálculo analítico y para el análisis práctico utilizaron sangre fresca teniendo en cuenta sus propios parámetros físicos como la viscosidad, la densidad, el tiempo de relajación y para la geometría utilizaron un rango de arteria (cilindro) para poder ilustrar la respuesta del sistema. Ellos recabaron una serie de razones para motivar la búsqueda de otras aplicaciones en otros campos como la física aplicada o la ingeniería como: La evidencia cualitativa de la explicación de la frecuencia cardiaca humana y la obtención de la frecuencia óptima de bombeo para la sangre a través de las arterias (**Manero, y Walters, 1980; Del Río y Castrejon Pita 2002**)

Corvera Poire y Del Río (2004) estudiaron el problema de la digitación viscosa y dentro de ella, la permeabilidad dinámica y su relación con la frecuencia y cómo los resultados varían para los fluidos newtonianos y para los fluidos viscoelásticos partiendo la investigación con un fluido Maxwelliano. Ellos encontraron que la amplitud de la anchura del dedo en el tiempo depende de la permeabilidad dinámica y esto implica que cuando el dedo es conducido con una frecuencia que maximiza la permeabilidad (**Castro et. al. 2008**), las variaciones de la amplitud también se maximizan. Para un fluido cercano al límite newtoniano, la amplitud decae con la frecuencia. En cambio, para un fluido viscoelástico, la amplitud tendrá máximos en las mismas frecuencias que maximizan la permeabilidad

dinámica (De Gennes 1987; Hernández-Machado et al. 2003; Ledesma et al. 2004; Corvera Poire y Del Río 2004).

Flores et. al. (2016) enfocaron su estudio en demostrar que la hemodinámica de la onda de pulso arterial en las grandes arterias puede simularse con precisión utilizando un Modelo Elástico de Darcy Generalizado (GDEM) para el que existe una solución analítica completa en el dominio de la frecuencia (Flores et. al. 2010). Ellos encontraron un nuevo modelo el cual fue evaluado en diferentes casos de prueba cuya complejidad crecía a medida que se avanzaba en ellos, llevando las formas de onda desde una hasta tres dimensiones. Además, este estudio proporciono un apoyo adicional para simular con precisión y a un costo muy bajo la hemodinámica de las ondas de pulso arteriales, tomando en cuenta los parámetros físicos del sistema cardiovascular cómo la presión sanguínea y las formas de onda del flujo (Hughes y Lubliner 1973; Figueroa et al. 2006; Flores et. al. 2016).

Sin embargo, y a pesar de todos lo intentos en describir las oclusiones centrales y periféricas en sangre, la mayoría de los modelos de estudio **no contemplan todas las propiedades características** de la sangre: (i) viscoelasticidad, (ii) esfuerzo de cedencia, (iii) transferencia de masa acoplada con la transferencia de movimiento, (iv) concentración de colesterol en la sangre (Moreno et. al. 2013, 2015). *Precisamente, este trabajo de investigación a nivel licenciatura contribuye en esta búsqueda.*

El estudio de la función de transferencia en sistemas de flujo pulsátil, debe de hacerse con modelos más sofisticados, en este caso, estudiaremos la sangre con hipercolesterolemia con el modelo de Jeffrey el cual acopla la contribución del **solvente y la del polímero combinado** con la elasticidad de las interacciones Rouleaux-Rouleaux a través de un modelo Hookeano. Para hacer eso se plantea la siguiente hipótesis.

1.5 Hipótesis.

Si el gradiente de presión pulsátil afecta al flujo volumétrico, este podrá ser cuantificado a través de la función de transferencia compleja en el espacio de Fourier y dependerá de las propiedades materiales a través de los grupos adimensionales.

1.6 Objetivos:

Para debatir esta hipótesis, se propondrán el siguiente objetivo general y los específicos

1.6.1 General

Estudiar la respuesta dinámica del flujo volumétrico y el gradiente de presión mediante la función de transferencia del sistema para dos sistemas de estudio: (i) oclusiones periféricas y (ii) centrales, de un líquido inercial visco-plasto.

1.6.2 Particular

P.1: Obtener la función de transferencia compleja mediante del gradiente de presión pulsátil y flujo volumétrico mediante la transformada integral de Fourier.

P.2: Obtener expresiones analíticas para la velocidad axial, flujo volumétrico y función de transferencia en función de las propiedades materiales del sistema.

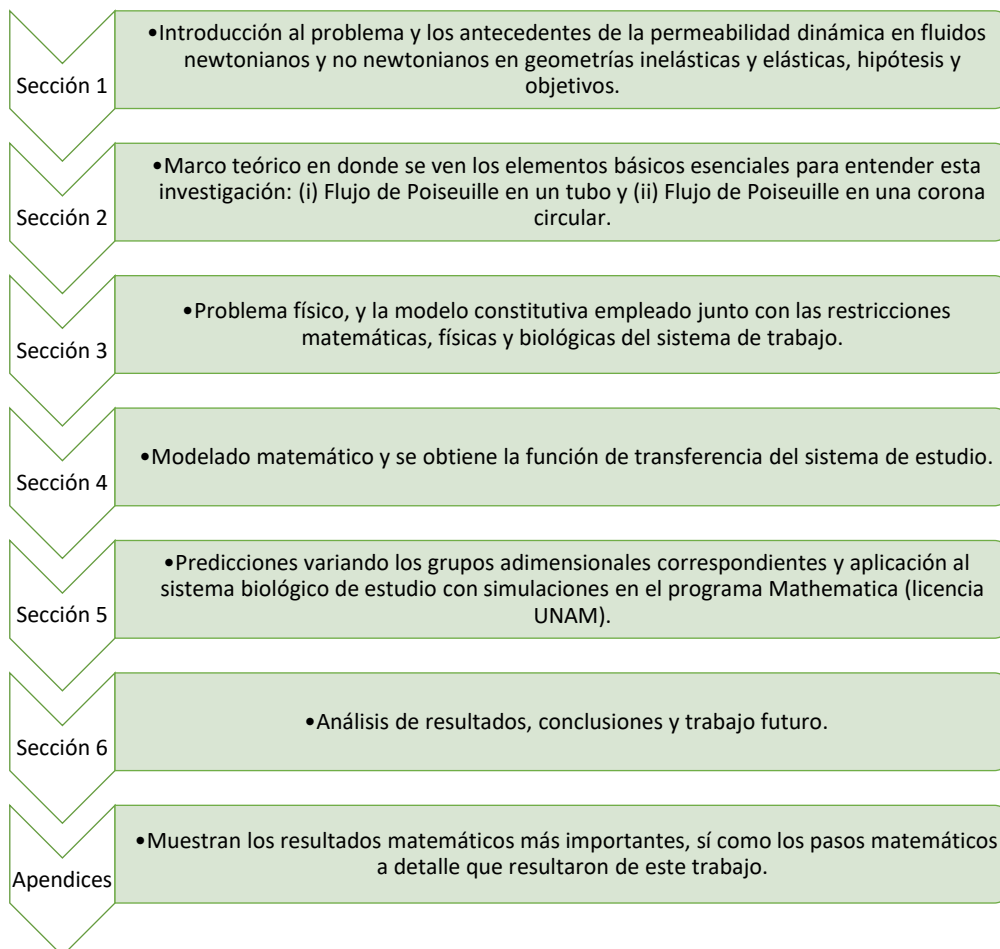
P.3: Analizar la función de transferencia en el espacio de Fourier en función de la frecuencia y las propiedades del sistema.

P.4.: Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar las ecuaciones y que se obtengan grupos adimensionales que describan los mecanismos físicos que gobiernan al sistema de estudio.

P.5.: Utilizar datos reométricos provenientes de la literatura con el fin de obtener las curvas resonantes en función de la concentración de colesterol en la muestra biológica (Sangre humana con hipercolesterolemia).

1.7 Distribución del material de la tesis de licenciatura

Este documento está organizado de la siguiente manera:



CAPÍTULO II.
MARCO TEÓRICO

En este capítulo se introduce al lector a las bases necesarias para entender el modelado matemático los conceptos básicos para entender este proyecto de investigación a nivel de licenciatura. Para obtener un mejor aprovechamiento de los conceptos básicos necesarios para capturar la física del sistema, este capítulo se ha dividido de la siguiente manera:

En la primera sección (2.1) se describe brevemente el comportamiento bioquímico y reológico de la sangre, en la sección (2.2) se deduce la ecuación de Hagen-Poiseuille la cual, es punto de partida para la extensión en el estado no estacionario, caracterizando el flujo y la reología con el modelo viscoplasto de Kelvin-Voigt. En la sección (2.3) se estudia el flujo de H-P en una geometría de tubos concéntricos (corona circular). En la sección (2.4) se estudia el número de Deborah el cual es una razón de tiempos característicos asociados al material y al proceso y describe la viscoelasticidad de un material. Finalmente, en la última sección (2.5) se deducen los modelos de Maxwell y Kelvin-Voigt a partir de sus respectivas configuraciones mecánicas.

2.1 Reología de la sangre humana

La sangre es un tejido formado por eritrocitos (glóbulos rojos RCB), leucocitos (glóbulos blancos) y trombocitos (plaquetas), que son forzados por un gradiente de presión periódica a través del cuerpo circulante humano (**Moreno et al. 2013, 2015**). Los glóbulos rojos constituyen alrededor del 45% de la sangre total en volumen, el plasma alrededor del 54.3% y los glóbulos blancos alrededor del 0.7% (**Moreno et al. 2013, 2015**). Desde un punto de vista reológico, la sangre (plasma y células) es un fluido no newtoniano complejo, y la principal explicación de su comportamiento complejo (viscoelasticidad, adelgazamiento por corte, tixotropía y esfuerzo de cedencia) se encuentra en la capacidad de agregación,

desagregación, deformación, orientación y migración de los eritrocitos (**Owen, 2009; Moyers-Gonzalez, et al., 2008a-c; Moyers-Gonzalez, y Owens 2010; Herrera et al. 2017**). En muchos casos, el flujo de sangre dentro de los vasos se ve fuertemente afectado por los niveles de colesterol y la hiperglucemia en las venas, después de muchos años de hipercolesterolemia, trastorno en el cuerpo humano debido a un exceso de colesterol (**Moreno et al. 2013, 2015; Apostolidis et al. 2015, 2016; Herrera-Valencia et al. 2017**). Esta condición puede conducir a otras enfermedades como: la aterosclerosis acelerada, angina de pecho, infarto, estenosis, obesidad y diabetes tipo 2 debido a trastornos alimentarios y predisposiciones genéticas (**Moreno et al. 2013, 2015, Herrera-Valencia et al. 2017; Sánchez-Villavicencio et al. 2017**), que han alcanzado el estatus de epidemia en todo el mundo, y herramientas como el modelo matemático, simulación computacional (**EL-shahed 2003; Ghasemi et al. 2016; Kolbasov et al. 2016**) y la medicina alternativa basada en la plantas tradicionales utilizadas por médicos y aborígenes son alternativas que permitirían encontrar soluciones a estos problemas (**Sánchez-Villavicencio et al. 2016 y referencias ahí citadas**).

2.2 Flujo de Hagen y Poiseuille en un capilar de radio $r=a$ y longitud $z=L$.

En esta sección se obtiene las expresiones analíticas para el perfil de velocidades y flujo volumétrico en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$.

Suponiendo que el fluido de estudio puede ser caracterizado por el modelo newtoniano, y que además el sistema se encuentra en estado estacionario y el fluido es incompresible, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\sigma_{rz}) = \nabla_z p \quad (2.1)$$

Al integrar la Ec. (2.1) con respecto a coordenada espacial r ,

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} (\nabla_z p) r + \frac{C_1}{r} \quad (2.2)$$

Como el esfuerzo debe de permanecer acotado en todo el intervalo de integración, en particular $r = 0$, la constante C_1 debe valer cero (consistencia física), i.e. $C_1 = 0$:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} (\nabla_z p) r \quad (2.3)$$

La Ec. (2.3) es la componente rz del tensor de esfuerzos. Es importante señalar que la Ec. (2.3) es independiente del fluido y es completamente general porque no depende de ninguna propiedad del fluido, i.e. solo de la fuerza que lo de forma continua e irreversiblemente a través del gradiente de presión.

2.2.1 Cálculo del perfil de velocidad con deslizamiento en la pared.

Para un fluido Newtoniano, el esfuerzo es una relación lineal con la rapidez de deformación del sistema, y solo contiene una propiedad material μ denominada viscosidad o viscosidad cortante:

$$\eta_0 \frac{dV_z(r)}{dr} = \sigma_{rz} = \frac{1}{2} (\nabla_z p) r \quad (2.4)$$

Integrando la Ec. (2.4) con respecto a la coordenada radial r y tomando en cuenta los efectos de no deslizamiento en la pared, i.e. que la velocidad en $r = a$ debe ser diferente de cero, i.e.

$$V_z(r = a) = 0 \quad (2.5)$$

La Ec. (2.5) se conoce como la condición de no adherencia en la interfase entre el sólido y el fluido. Integrando la Ec. (2.4), se tiene lo siguiente:

$$V_z(r) = \frac{1}{4\eta_0} (\nabla_z p) r^2 + C_2 \quad (2.6)$$

Al aplicar en la Ec. (2.6) la condición de no deslizamiento en la pared Ec. (2.5), se obtiene que el valor de la constante

$$C_2 = -\frac{a^2}{4\eta_0} (\nabla_z p) \quad (2.7)$$

y el perfil de velocidades toma la siguiente forma para un fluido newtoniano:

$$V_z(r) = \beta \sigma_w + \frac{a^2}{4\eta_0} (-\nabla_z p) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (2.8)$$

La Ec. (2.8) es el perfil de velocidades para un fluido newtoniano sin deslizamiento en la pared.

2.2.2 Cálculo del flujo volumétrico.

Integrando la Ec. (2.8) con respecto al área de sección transversal,

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r) r dr d\theta = \frac{1}{4\eta_0} (-\nabla_z p) \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] r dr d\theta \quad (2.9)$$

Para facilitar la integración, se hace el siguiente cambio de variable: $u = r/a$ en la Ec. (2.9), se tiene lo siguiente:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r) r dr d\theta = 2\pi a^2 \left(\frac{1}{4\eta_0} (-\nabla_z p) \int_0^1 (1-u^2) u du \right) \quad (2.10)$$

Realizando la integración de la Ec. (2.10), nos queda el resultado principal de este trabajo, la ecuación modificada de Poiseuille por efecto de los mecanismos adelgazantes.

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} (-\nabla_z p) \quad (2.11)$$

Simplificando la Ec. (2.11), se tiene lo siguiente:

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} (-\nabla_z p) \quad (2.12)$$

La Ec. (12) obtenida se conoce en la literatura como la ecuación de Hagen y Poiseuille el cual fue deducido para estudiar el flujo de un fluido no newtoniano en un medio poroso. Esta ecuación es válida en el régimen laminar, gradiente de presión constante y fluido incompresible.

2.2.3 Cálculo de la velocidad promedio

La velocidad promedio puede ser calculada a partir del flujo volumétrico, simplemente dividiendo el área característica del sistema por el flujo promedio, i.e.

$$\langle Vz \rangle = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{a^2}{8\eta_0} (-\nabla_z p) \quad (2.13)$$

La Ec. (2.13) describe la velocidad promedio del fluido para un fluido newtoniano, la cual depende de las propiedades geométricas de la tubería, del medio y del gradiente de presión.

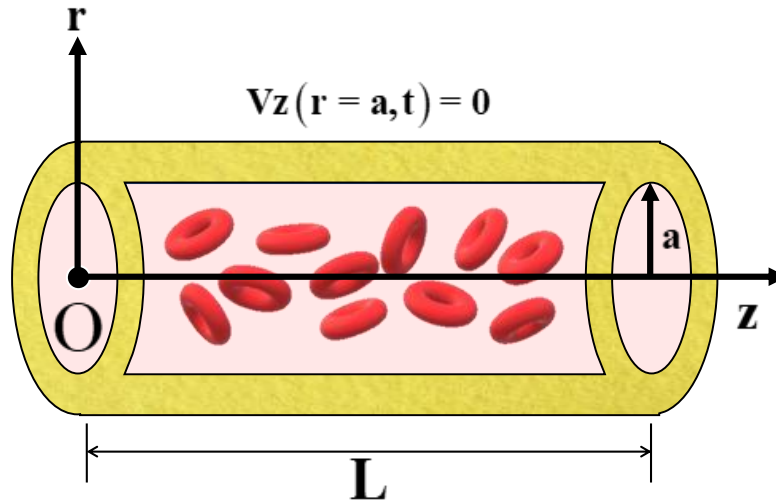


Figura 2. Geometría cilíndrica vista lateral.

2.3 Flujo de Hagen y Poiseuille en una corona circular de radios R_1 y R_2 con $R_1 < R_2$ y longitud finita $z=L$.

En esta sección se obtiene las expresiones analíticas para el perfil de velocidades y flujo volumétrico en una corona circular de radio $r = R_1$, $r = R_2$ y longitud axial $z=L$. El balance de momento es exactamente el mismo que en el capilar de $r=a$ y $z=L$, por lo que, se tiene la siguiente expresión.

$$\eta_0 \frac{dV_z(r)}{dr} = \frac{1}{2} (\nabla_z p) r + \frac{C_1}{r} \quad (2.14)$$

2.3.1 Perfil de velocidades

Integrando la Ec. (2.14), se obtiene el perfil de velocidades general

$$V_z = \left(\frac{r^2}{4\eta_0} \frac{dP}{dz} \right) + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (2.15)$$

Aplicando las condiciones de frontera que básicamente, son de no deslizamiento en las paredes de contacto del fluido.

$$V_z(r=R_1)=0 \quad (2.16a)$$

$$V_z(r=R_2)=0 \quad (2.16b)$$

Al sustituir la Ec. (2.16) en (2.15) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas.

$$0 = \left(\frac{R_1^2}{4\eta_0} \cdot \frac{dP}{dz} \right) + C_1 \ln(R_1) + C_2 \quad (2.17a)$$

y

$$0 = \left(\frac{R_2^2}{4\eta_0} \cdot \frac{dP}{dz} \right) + C_1 \ln(R_2) + C_2 \quad (2.17b)$$

La Ec. (2.17b) se manipula algebraicamente multiplicándola por -1

$$0 = - \left(\frac{R_2^2}{4\eta_0} \cdot \frac{dP}{dz} \right) - C_1 \ln(R_2) - C_2 \quad (2.18)$$

Se suman las Ecs. (2.17a) y (2.18) con la finalidad de reducir el número de variables y se factoriza por agrupación.

$$0 = \left(\frac{1}{4\eta_0} \cdot \frac{dP}{dz} \right) (R_1^2 - R_2^2) + C_1 [\ln(R_1) - \ln(R_2)] \quad (2.19)$$

Usando propiedad de logaritmo para cociente.

$$0 = \left(\frac{1}{4\eta_0} \cdot \frac{dP}{dz} \right) (R_1^2 - R_2^2) + C_1 \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \quad (2.20)$$

Despejando C_1 .

$$C_1 = - \left(\frac{1}{4\eta_0 \cdot \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \cdot \frac{dP}{dz} \right) (R_1^2 - R_2^2) \quad (2.21)$$

Sustituimos C_1 , Ec. (2.21) en la Ec. (2.17a) para determinar la constante de integración C_2 .

$$0 = \left(\frac{R_2^2}{4\eta_0} \cdot \frac{dP}{dz} \right) - \left(\frac{1}{4\eta_0 \cdot \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \cdot \frac{dP}{dz} \right) (R_1^2 - R_2^2) \ln(R_2) + C_2 \quad (2.22)$$

Despejamos C_2 , se obtiene la siguiente expresión.

$$C_2 = - \left(\frac{R_2^2}{4\eta_0} \cdot \frac{dP}{dz} \right) + \left(\frac{1}{4\eta_0 \cdot \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \cdot \frac{dP}{dz} \right) (R_1^2 - R_2^2) \ln(R_2) \quad (2.23)$$

Aplicando la propiedad asociativa de un producto en la Ec. (2.23), y factorizando la diferencia de cuadrados perfectos, se obtiene la Ec. (2.24)

$$C_2 = \frac{1}{4\eta_0} \frac{dP}{dz} \left(\frac{(R_1^2 - R_2^2) \ln(R_2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} - R_2^2 \right) \quad (2.24)$$

Una vez que las constantes de integración C_1 y C_2 son calculadas, estas, se sustituyen en la ecuación general de la velocidad (Ec. 2.15) obteniéndose, el perfil de velocidades particular

$$V_z(r) = -\frac{R_2^2}{4\eta_0} \cdot \frac{dP}{dz} + \frac{r^2}{4\eta_0} \cdot \frac{dP}{dz} \left\{ \left(\frac{1}{4\eta_0 \cdot \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \cdot \frac{dP}{dz} \right) (R_1^2 - R_2^2) \ln(r) - \left(\frac{1}{4\eta_0 \cdot \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \cdot \frac{dP}{dz} \right) (R_1^2 - R_2^2) \ln(R_2) \right\} \quad (2.25)$$

La Ec. (2.25) se puede expresar de la siguiente manera mediante manipulaciones algebraicas

$$V_z(r) = \frac{R_2^2}{4\eta_0} \left(1 - \left(\frac{r}{R_2} \right)^2 \right) \left(-\frac{dP}{dz} \right) + \left(\frac{R_2^2 \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right)}{4\eta_0 \cdot \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \right) \cdot \text{Ln}\left(\frac{r}{R_2}\right) \left(-\frac{dP}{dz} \right) \quad (2.26)$$

La Ec. (2.26) es el perfil de velocidades axial de un sistema de flujo de un líquido complejo.

2.3.2 Flujo volumétrico

En esta sección, se analiza el flujo volumétrico en una sección transversal de corona circular. Partiendo de la definición de flujo volumétrico, se tiene lo siguiente:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} V_z(r) r dr d\theta \quad (2.27)$$

Al sustituir el perfil de velocidades (Ec. 2.26) en la Ec. (2.27), se tiene lo siguiente:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{R_2^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R_2} \right)^2 \right) \\ & + \frac{R_2^2 \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right)}{4\eta_0 \cdot \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right)} \cdot \text{Ln} \left(\frac{r}{R_2} \right) \end{aligned} \right\} \left(-\frac{dP}{dz} \right) r dr d\theta \quad (2.28)$$

Simplificando y escalando la Ec. (2.28), obtenemos:

$$Q = \frac{2\pi R_2^4}{4\eta_0} \left(-\frac{dP}{dz} \right) \left\{ \int_R^1 (1 - (u)^2) u du + \frac{1 - R^2}{\ln(R)} \int_R^1 u \text{Ln} u du \right\}; u = r/R, R = R_1 / R_2 \quad (2.29a-c)$$

Integrando mediante métodos convencionales, se tiene lo siguiente:

$$Q = \frac{\pi R_2^4}{8\eta_0} \left\{ \left(2u^2 - u^4 \right) \Big|_R^1 - \frac{1 - R^2}{\ln(R)} \left(2u^2 \text{Ln} u - u^2 \right) \Big|_R^1 \right\} \left(-\frac{dP}{dz} \right) \quad (2.30)$$

Finalmente, el flujo volumétrico en una corona circular toma la forma:

$$Q = \frac{\pi R_2^4}{8\eta_0} \left(-\frac{dP}{dz} \right) \cdot I(R) \quad (2.31)$$

En donde el factor geométrico $I(R)$, es función del radio reducido R , i.e.,

$$I(R) = 1 - (2R^2 - R^4) - \frac{1 - R^2}{\ln(R)} (1 - R^2 + 2R^2 \text{Ln} R) \quad (2.32)$$

2.4 Número de Deborah De

El número de Deborah, es un número adimensional usado primordialmente en la reología para poder caracterizar la viscoelasticidad de un material y se define como el cociente de tiempos característicos (**Bird et. al. 1987, 2002**).

$$De = \frac{\lambda_{mat}}{t_{proc}} \quad (2.33)$$

En la Ec. (15), el tiempo característico λ_{mat} es un tiempo del material y por lo general se conoce como un tiempo característico viscoelástico. El tiempo de proceso t_{proc} , está asociado al sistema de estudio, por lo regular es un tiempo que se formula a través de variables cinemáticas o dinámicas y geométricas del sistema. Si $De = 0$, el material se considera viscoso mientras que, si el material es elástico el valor numérico del De es muy grande, i.e. $De \rightarrow \infty$, por lo que el sistema es elástico. En particular, si $De = 1$, el material es viscoelástico. En la siguiente subsección se deducirá el modelo de Maxwell y de Voigt-Kelvin mediante sus respectivas configuraciones mecánicas.

2.5 Modelo mecánico viscoelástico de Maxwell.

El modelo por excelencia viscoelástico lineal, es la ecuación constitutiva reológica de Maxwell. Este modelo se puede suponer que:

- a) La deformación total del fluido es la suma de las contribuciones viscosas y elásticas del material
- b) Los esfuerzos viscosos y elásticos del material son iguales en magnitud, es decir, $\sigma_v = \sigma_e$.

Definiendo la deformación total como:

$$\gamma = \gamma_v + \gamma_e \quad (2.34)$$

La rapidez de deformación viscosa se puede aproximar mediante el modelo de Newton

$$\sigma_v = \eta_0 \dot{\gamma}_v \quad (2.33)$$

Y para el sólido elástico, se tiene lo siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma}_e = G_0 \boldsymbol{\gamma}_e \quad (2.34)$$

En la ecuación de Hooke, G_0 , es el módulo elástico de corte. Derivando la expresión la deformación total, se tiene lo siguiente:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_v + \dot{\boldsymbol{\gamma}}_e \quad (2.35)$$

Del modelo Newtoniano, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_v}{\eta_0} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_v \quad (2.36)$$

Del modelo Hookeano obtenemos:

$$\frac{1}{G_0} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e}{\partial t} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_e \quad (2.37)$$

Sustituyendo en la deformación total, se tiene lo siguiente:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_v}{\eta_0} + \frac{1}{G_0} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e}{\partial t} \quad (2.38)$$

Simplificando, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\eta_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\sigma}_v + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e}{\partial t} \quad (2.39)$$

Como los esfuerzos viscoso y elástico son iguales, se tiene la siguiente expresión matemática

$$\boldsymbol{\sigma}_v = \boldsymbol{\sigma}_e = \boldsymbol{\sigma} \quad (2.40)$$

Finalmente, obtenemos:

$$\boldsymbol{\sigma} + \frac{\eta_0}{G_0} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = \eta_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (2.41)$$

Definiendo el tiempo de relajación de Maxwell de la siguiente forma:

$$\lambda_0 = \frac{\eta_0}{G_0} \quad (2.42)$$

Y la derivada temporal de la deformación, se puede definir en términos del tensor rapidez de deformación, que es la parte simétrica del tensor espacial gradiente de velocidad

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = 2\mathbf{D} \quad (2.43)$$

El tensor simétrico \mathbf{D} , se puede expresar como:

$$2\mathbf{D} = \nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T \quad (2.44)$$

En la Ec. (2.44) T significa la matriz transpuesta del tensor espacial gradiente de velocidad.

Finalmente, el modelo de Maxwell puede ser expresado en forma tensorial de la siguiente Manera:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad (2.45)$$

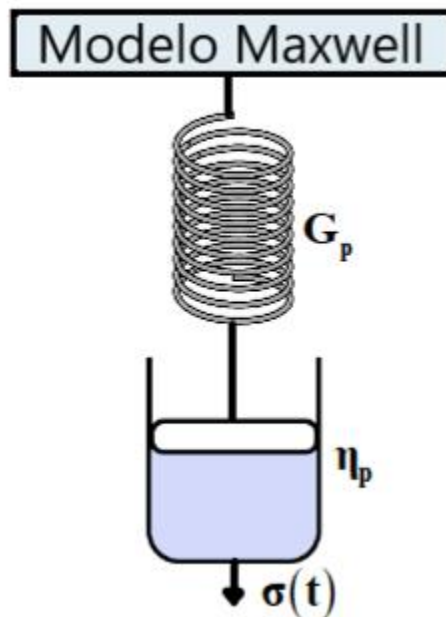


Figura 3. Modelo para fluido de Maxwell.

2.6 Modelo mecánico viscoplasto de Kelvin-Voigt.

En esta sección se deduce de manera similar el modelo viscoelástico de Voigt-Kelvin. Este modelo se puede suponer que:

- c) El esfuerzo total del fluido es la suma de los esfuerzos viscosos y elásticos del material
- d) Las deformaciones viscosos y elásticos del material son iguales en magnitud, es decir, $\gamma_v = \gamma_e$.

Definiendo el esfuerzo total como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_v + \boldsymbol{\sigma}_e \quad (2.46)$$

La rapidez de deformación viscosa se puede aproximar mediante el modelo de Newton

$$\boldsymbol{\sigma}_v = \eta_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}}_v \quad (2.47)$$

Y para el sólido elástico, se tiene lo siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma}_e = G_0 \boldsymbol{\gamma}_e \quad (2.48)$$

Del modelo Newtoniano, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_v}{\eta_0} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_v \quad (2.49)$$

Del modelo Hookeano obtenemos:

$$\frac{1}{G_0} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e}{\partial t} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_e \quad (2.50)$$

Sustituyendo en la deformación total, se tiene lo siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \eta_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}}_v + \frac{G_0}{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{\boldsymbol{\gamma}}_e \quad (2.51)$$

Simplificando, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = \eta_0 \frac{\partial}{\partial t} \dot{\boldsymbol{\gamma}}_v + G_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}}_e \quad (2.52)$$

Como las deformaciones viscosa y elástica son iguales, se tiene la siguiente expresión matemática

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_v = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_e = \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (2.53)$$

Finalmente, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = G_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \eta_0 \frac{\partial}{\partial t} \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (2.54)$$

Definiendo el tiempo de relajación de Maxwell de la siguiente forma:

$$\lambda_0 = \frac{\eta_0}{G_0} \quad (2.55)$$

Y la derivada temporal de la deformación, se puede definir en términos del tensor rapidez de deformación, que es la parte simétrica del tensor espacial gradiente de velocidad

$$\dot{\gamma} = 2\mathbf{D} \quad (2.56)$$

El tensor simétrico \mathbf{D} , se puede expresar como:

$$2\mathbf{D} = \nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T \quad (2.57)$$

En la Ec. (14) T significa la matriz transpuesta del tensor espacial gradiente de velocidad. Finalmente, la ecuación reológica se puede expresar como:

$$\frac{1}{G_0} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = \dot{\gamma} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \dot{\gamma} \quad (2.58)$$

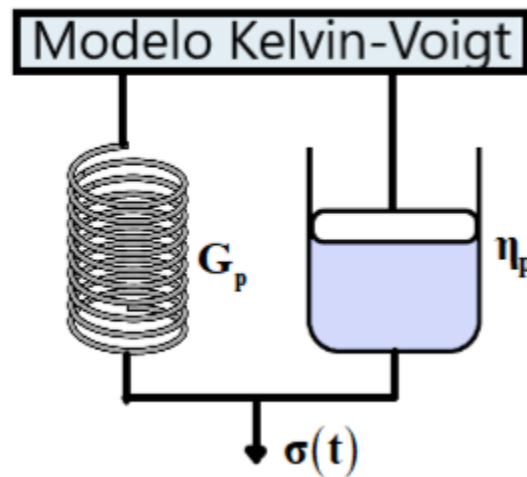


Figura 4. Modelo para fluido de Kelvin-Voigt.

En este capítulo se estudiaron los conceptos básicos del flujo y la reología de materiales newtonianos y no newtonianos viscoelásticos y viscoplasto lineales. Se obtuvieron expresiones analíticas para el flujo de un líquido newtoniano en dos geometrías: (i) capilar de radio $r=a$ y $z=L$ y (ii) corona circular de radio $r=R_1$ y $r=R_2$. En estas geometrías se obtuvo que el flujo volumétrico es proporcional a la fuerza motriz asociada al gradiente de presión y que, este depende de las propiedades geométricas y del medio a través de la viscosidad o la fluidez del líquido de estudio. En el siguiente capítulo las premisas y los resultados encontrados en esta sección serán extendidos para un fluido viscoplasto lineal el cual es

caracterizado con el modelo K-V. El punto clave en esta extensión será analizar la función de transferencia compleja que relaciona la variable de entrada (gradiente de presión) y la variable de salida a través del flujo volumétrico. Esta función de transferencia dependerá de las propiedades reológicas y geométricas, a través de la función de Bessel que relaciona las coordenadas cilíndricas de estas configuraciones geométricas.

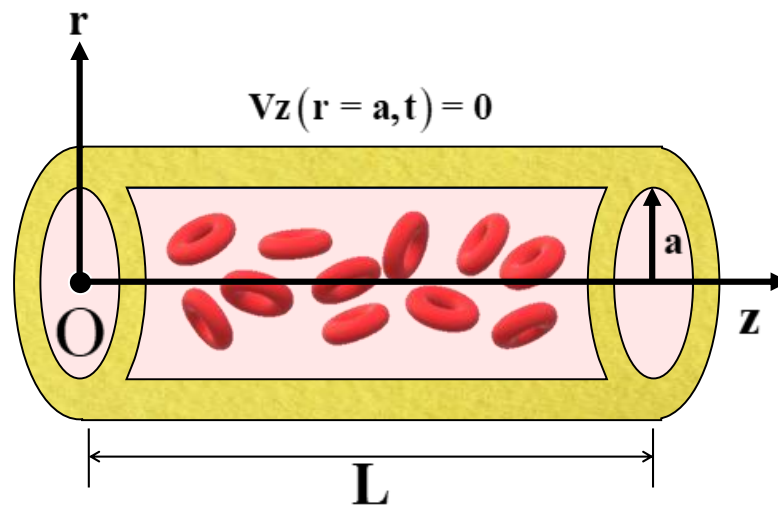
CAPÍTULO III.

PROBLEMA FÍSICO Y ECUACIONES TEÓRICAS

En este capítulo, se discutirá el problema principal de esta tesis de licenciatura en las dos geometrías principales. La primera de ellas será discutida en la sección 3.1 la cual, consiste en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. En la sección 3.2 se plantea la segunda geometría que consiste en una corona circular de radio $r = R_1$ y radio $r = R_2$ y longitud $z = L$, con $R_1 < R_2$. En la sección 3.3 se describe el análisis del sistema y se plantea las ecuaciones de continuidad, transporte y reológica.

3.1 Geometría cilíndrica (capilar).

La primera geometría que se discute se muestra en la Fig.1 la cual, consiste en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. El eje coordenado z se coloca en el centro del tubo y se supone que existe simetría cilíndrica. La O de la Fig. 1 se coloca para señalar el origen de coordenadas en el sistema y se supone que en la interfase entre el sólido y el fluido, el sistema cumple la condición de no deslizamiento, i.e., la velocidad axial z es cero en $r = a$.



(a)

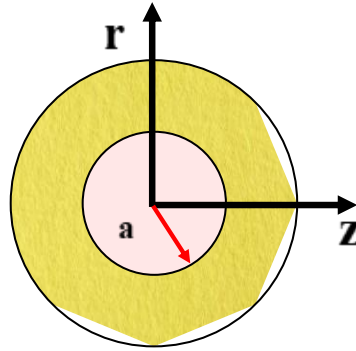


Figura 5. Geometría cilíndrica, perspectiva lateral y transversal.

(b)

Figura 5. Ilustra el sistema de flujo en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$.
(b) Sección de corte transversal del sistema de estudio. Aquí, los toroides en color rojo
representan los hematocritos en la sangre, el color rojo menos intensos representan el
plasma en el sistema.

3.2 Geometría corona circular.

En la Fig. (6) se ilustra la segunda figura de este sistema, que consiste en dos cilindros concéntricos de radio $r = R_1$ y $r = R_2$ con longitud $z = L$. El sistema de coordenadas es similar al de la Fig. (5), el cilindro sólido amarillo en el centro induce que el líquido fluya a través de la corona circular indicado por los toroides rojos en la parte superior e inferior. Nótese, que la condición de frontera de no deslizamiento se cumple en las dos áreas de contacto $V_z(R_1, t) = 0$ y $V_z(r = R_2, t) = 0$.

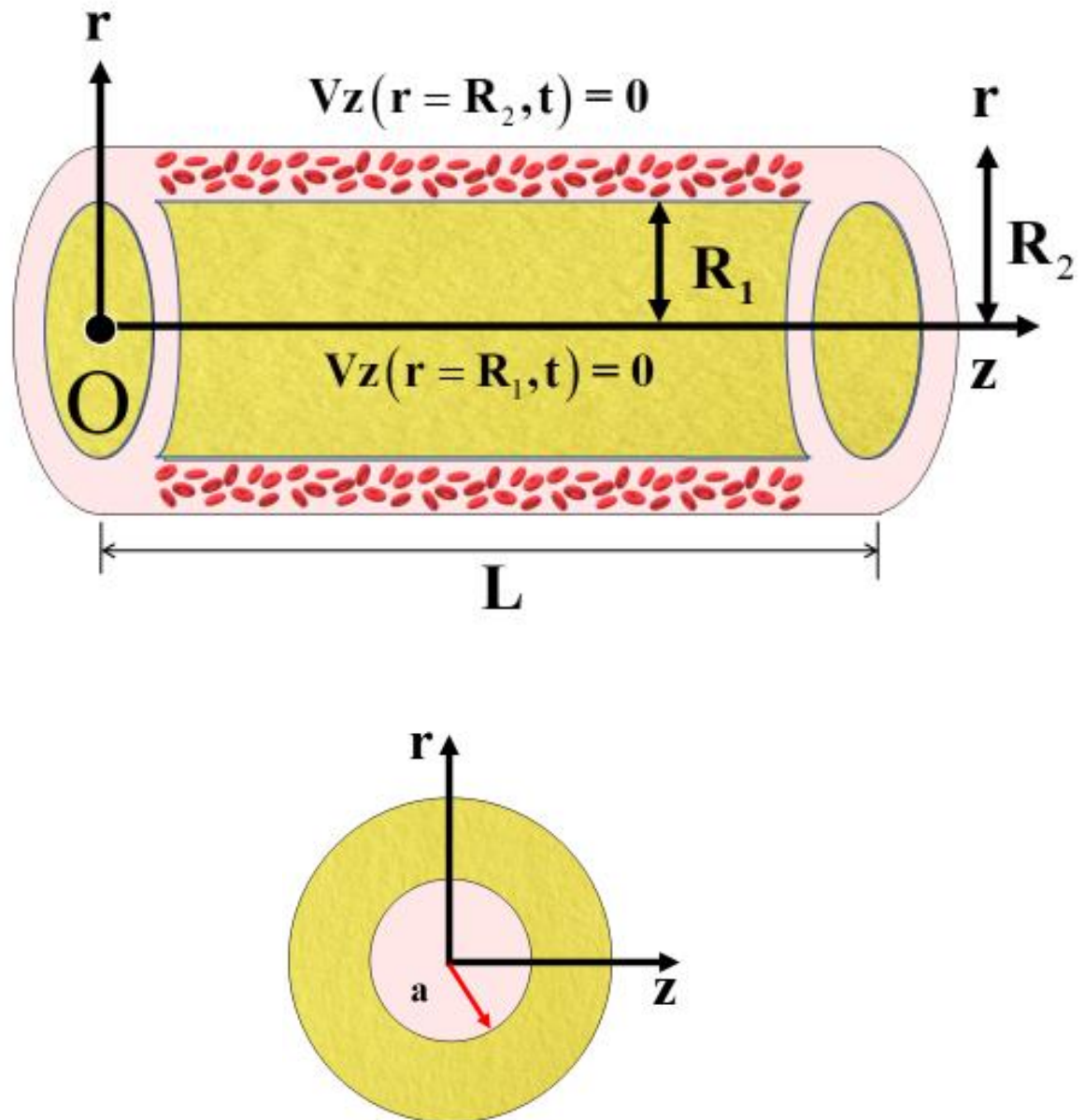


Figura 6. Geometría de cilindros concéntricos vista lateral y transversal.

Figura 6. Ilustra el sistema de flujo en una corona circular de radios $r = R_1$ y $r = R_2$ y longitud $z = L$. (b) Sección de corte transversal del sistema de estudio. Aquí, los toroides en color rojo representan los hematocitos en la sangre, el color rojo menos intensos representan el plasma en el sistema.

3.3 Ecuaciones teoricas

En esta sección se presentan las principales restricciones y el análisis de problema.

Razonamiento: Se tiene un fluido incompresibles (densidad constante), fluyendo en dos geometrias. La primera de ellas es un capilar de radio $r = a$, longitud $z = L$ y la segunda configuración es un fluido de radios $r = R_1$ y $r = R_2$ y longitud $z = L$. El sistema de coordenadas es descrito con las coordenadas cartersianas cilíndricas (r, θ, z) . El proceso es isotérmico (Temperatura constante), es decir, las propiedades materiales no dependen de la temperatura, suponemos estado no estacionario, es decir la velocidad, gradiente de presión depende, esfuerzo cortante del tiempo, i.e., $V_z = V_z(r,t)$ y $p = p(t)$, $\sigma_{rz}(t)$. El fluido es cortado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión transitorio. Los mecanismos gravitacionales son despreciables, es decir, la gravedad no es la fuerza motriz y suponemos simetría cilíndrica, es decir, ninguna propiedad, característica o atributo del sistema depende de la variable angular θ . Se supone que el fluido es incompresible es decir su densidad es constante e independiente de la posición y del tiempo. El líquido es caracterizado con la ecuación reológica viscoplástica de Kelvin-Voigt la cual, describe el comportamiento viscoso y plástico de un material. El campo de velocidades es unidireccional, es decir las líneas de corriente se encuentran orientadas en la dirección axial z .

El modelo resultante es una variante de la ecuación de Navier-Stokes que describe los procesos inerciales (aceleración instantánea), mecanismos viscosos y elásticos y de presión. La ecuación diferencial parcial es resuelta mediante la transformada de Fourier de la física matemática la cual, se aplica al tiempo con el fin de transformar el tiempo al espacio de las frecuencias. Esto permite obtener una ecuación diferencial de segundo orden de Bessel modificada no homogénea, la cual será resuelta mediante un método de coeficientes indeterminados. Asumiendo no deslizamiento en la interfase líquido-sólido

(pared) y simetría del campo de velocidades (matemáticamente se supone que el flujo alcanza su máximo en el centro del sistema).

Una vez que, se sustituyen las condiciones de frontera en el perfil de velocidades general, se obtiene el perfil particular para el campo de velocidades y mediante una integración del perfil particular de velocidades en la sección de área transversal, el flujo volumétrico es obtenido. Suponiendo que el gradiente de presión se puede modelar mediante una exponencial compleja, el sistema resultante demuestra que el flujo volumétrico viscoplasto es una consecuencia del producto del flujo volumétrico newtoniano multiplicado por la función de transferencia compleja y el gradiente de presión transitorio-pulsante.

En la siguiente sección, se presentan las ecuaciones principales de esta investigación en sistemas viscoplasto respectivamente.

- a) Ecuación de continuidad: (Balance de masa sin reacción química)
- b) Ecuación de movimiento: (Segunda ley de Newton en un medio continuo)
- c) Ecuación reológica: Modelo mecánico en paralelo de un fluido viscoplasto (Kelvin-Voigt)

3.3.1 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad se puede expresar como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (3.1)$$

Al desarrollar la Ec. (3.1) se tiene lo siguiente, por lo que al desarrollar el operador divergencia sobre un escalar y un vector

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{V} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (3.2)$$

Al aplicar conmutatividad, en la Ec. (3.2)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (3.3)$$

Al definir la derivada material, como:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho \quad (3.4)$$

Al combinar las Ecs. (3.3) y (3.4),

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (3.5)$$

Si el fluido es incompresible, la densidad no depende de la posición y del tiempo, es decir, la derivada material de la Ec. (3.5) es cero, i.e.,

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (3.6)$$

La Ec. (3.5) se simplifica a:

$$\rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (3.7)$$

Como la densidad del fluido es diferente de cero, i.e., $\rho \neq 0$, por lo que:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.8)$$

La divergencia en terminos de coordenadas cartersianas cilíndricas

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

Si suponemos que flujo unidireccional y que el campo de velocidades es en la direccion z.

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z(r, \theta, z, t)) \quad (3.10)$$

Combinando las Ecs. (3.9) y (3.10) se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.11)$$

Al resolver las Ec. (11) se tiene que la velocidad en z, no depende de z, por lo que si asumimos simetría cilíndrica, i.e., $V_z \neq V_z(\theta)$ y por lo tanto, la velocidad z no depende de la coordenada radial r y del tiempo t.

$$V_z = V_z(r, t) \quad (3.12)$$

3.3.2 Ecuación de momento

La ecuación de movimiento es la segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo. Asumiendo fluido incompresible y que los vectores de velocidad y de esfuerzos se pueden expresar como:

$$\mathbf{V} = (0, 0, V_z(r, t)) \quad (3.13)$$

El tensor de esfuerzos, para este sistema tiene la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

La ecuación de movimiento, se puede expresar en forma tensorial de la siguiente manera:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (3.15)$$

Desarrollando la derivada material $D\mathbf{V}/Dt$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (3.16)$$

El tensor de esfuerzos totales \mathbf{T} tiene la siguiente forma analítica:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} \quad (3.17)$$

En donde \mathbf{I} es el tensor unitario definido como:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

EL tensor de esfuerzos totales, tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} T_{rr} & 0 & T_{rz} \\ 0 & T_{\theta\theta} & 0 \\ T_{zr} & 0 & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p + \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & -p + \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & -p + \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Al sustituir el vector de velocidad y el tensor de esfuerzos total en la ecuación de movimiento, se tiene lo siguiente:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} (0, 0, V_z(r, t)) + \left((0, 0, V_z(r, t)) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) (0, 0, V_z(r, t)) \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} T_{rr} & 0 & T_{rz} \\ 0 & T_{\theta\theta} & 0 \\ T_{zr} & 0 & T_{zz} \end{pmatrix} + \rho (\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_\theta, \mathbf{g}_z) \quad (3.20)$$

Al realizar las operaciones tensoriales, en la Ec. (3.20), se tiene lo siguiente:

$$\rho \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial t} V_z(r,t) + V_z(r,t) \frac{\partial}{\partial z} V_z(r,t) \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} T_{rr} + \frac{\partial}{\partial z} T_{rz} + \rho g_r, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} T_{\theta\theta} + \rho g_\theta, \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} T_{rz} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zz} + \rho g_z \right) \quad (3.21)$$

Igualando las componentes de la Ec. (3.21), se tiene en la coordenada radial r

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} T_{rr} + \frac{\partial}{\partial z} T_{rz} + \rho g_r \quad (3.22)$$

Igualando las componentes de la Ec.(3.21), se tiene en la coordenada angular θ

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} T_{\theta\theta} + \rho g_\theta \quad (3.23)$$

Igualando las componentes de la Ec.(3.21), se tiene en la coordenada axial z

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} V_z(r,t) + V_z(r,t) \frac{\partial}{\partial z} V_z(r,t) \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} T_{rz} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zz} + \rho g_z \quad (3.24)$$

De la Ec. (24) de continuidad, la Ec. (3.24) se simplifica de la siguiente manera:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} V_z(r,t) = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} T_{rz} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zz} + \rho g_z \quad (3.25)$$

Asumiendo que los mecanismos inerciales son despreciables, se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} V_z(r,t) = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} T_{rz} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zz} \quad (3.26)$$

AL sustituir las componentes del tensor de esfuerzos totales via la Ec. (3.19) por lo que:

$$T_{rz} = \sigma_{rz} \quad (3.27)$$

Entonces, se tiene lo siguiente:

$$T_{zz} = -p + \sigma_{zz} \quad (3.28)$$

Al sustituir las Ecs. (3.27) y (3.28) en la Ec. (3.26) por lo que:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} Vz(r,t) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (3.29)$$

Suponiendo, que el sistema geoméricamente se modela con un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$, con $a/L \ll 1$, por lo que por análisis de ordenes de magnitud, se tiene lo siguiente

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) \gg \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} \quad (3.30)$$

Por lo tanto, la Ec. (3.26) toma la forma:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} Vz(r,t) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \cong -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) \quad (3.31)$$

Entonces, se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} Vz(r,t) = -\frac{\partial p(t)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}(r,t)) \quad (3.32)$$

La ecuación reológica es un balance entre los mecanismos inerciales, gradiente de presión y la divergencia del tensor de esfuerzos.

3.3.3. Ecuación reológica

Para caracterizar el fluido y la reología del sistema se propone el modelo mecánico en paralelo visco-plasto de Kelvin-Voigt el cual, tiene la siguiente representación matemática:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} = G_0 \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) 2\mathbf{D} \quad (3.33)$$

El tensor rapidez de deformación es la parte simétrica del tensor espacial gradiente de velocidad

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \quad (3.34)$$

El tensor gradiente de velocidad para este sistema se puede expresar como:

$$\nabla\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

La transpuesta de la Ec. (3.35)

$$\nabla\mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Al sustituir las Ecs. (3.35) y (3.36) en la Ec. (3.34), se tiene lo siguiente:

$$2\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Al sustituir el tensor rapidez de deformación \mathbf{D} (Ec. 3.37) y el tensor de esfuerzos (Ec. 3.14), por lo que, al remplazar estos tensores en la Ecuación reológica, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = G_0 \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Igualando las componnetes del tensor de esfurezos:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial t} = 0 \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial t} = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zz} = 0 \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} = G_0 \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial t} = G_0 \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (3.44)$$

Combinando las Ecs. (3.32) y (3.43)

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} V_z(r,t) = - \frac{\partial^2 p(t)}{\partial t \partial z} + G_0 \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (3.45)$$

La Ec. (3.45) es el resultado fundamental en este estudio y es punto de partida en la formulación de la función de transferencia compleja.

3.3.4 Operador fluidez

En esta sección se presentan los resultados más importantes de esta sección relacionadas al balance de masa sin reacción química, ecuación de momento y reológica en

terminos de un operador fluidez que generaliza los resultados y permite que el tratamiento sea más facil y generaliza los resultados obtenidos.

a) Balance de masa

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.46)$$

b) Componente z d ela Ecuacion de Movimiento

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} V_z(r,t) = -\frac{\partial p(t)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}(r,t)) \quad (3.47)$$

c) Componente rz de la ecuación de movimeinto

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial t} = G_0 \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (3.48)$$

d) Operador viscosidad

$$O_\eta(D_t) = \frac{\sigma_{rz}}{\frac{\partial V_z}{\partial r}} = G_0 \frac{1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}{\frac{\partial}{\partial t}}; D_t \triangleq \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.49)$$

e) Operador fluidez

$$O_\Phi(D_t) = \frac{1}{O_\eta(D_t)} \quad (3.50)$$

f) Ecuacion de movimiento modificada por el operador viscosidad o fluidez

$$\boxed{\left(\rho O_\Phi(D_t) \frac{\partial}{\partial t} - O_\eta(D_t) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) V_z(r,t) = -O_\Phi(D_t) \frac{\partial p(t)}{\partial z}} \quad (3.51)$$

La Ecs. (a-f) son las las importantes de este proyecto de investigación. En particular, la Ec. (f) es la más importante y punto de partida en el desarrollo del siguiente capítulo. En el capítulo IV se aplicara la transformada de Fourier con el fin de obtener una expresión cerrada para la velocidad axial y flujo volumétrico en el espacio de las frecuencias (Fourier).

CAPÍTULO IV.
MODELADO MATEMÁTICO

En esta sección se presenta el modelado matemático de un fluido visco-plasto en dos configuraciones distintas. En la sección 4.1, se presenta la función de transferencia para un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. En la segunda sección (4.2), se desarrollan los resultados para dos cilindros concéntricos de radio $r = R_1$ y $r = R_2$, con $R_1 < R_2$ con $z = L$.

4.1 Función de transferencia en un capilar de radio $r = a$ y longitud axial z

Para resolver el problema se asumen las siguientes condiciones de proceso en el sistema:

- a) Estado estacionario:
- b) Fluido incompresible
- c) Proceso isotérmico
- d) Flujo unidireccional
- e) Mecanismos gravitacionales despreciables
- f) El fluido es deformado por un gradiente de presión en la dirección axial.
- g) Simetría cilíndrica
- h) El gradiente de presión es constante en la dirección z
- i) Existe un balance entre las fuerzas viscosas y el gradiente de presión.

4.1.1 Balance de masa si reacción química

Suponiendo que, el fluido es incompresible, e isotérmico, simetría cilíndrica y flujo unidireccional,

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

4.1.2 Ecuación de movimiento con mecanismos inerciales

La componente z de la ecuación de movimiento tomando en cuenta los mecanismos inerciales, toma la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) \quad (4.2)$$

El término $\rho \partial_t V_z$ es la masa por unidad de volumen multiplicada por la aceleración instantánea en el sistema. El esfuerzo cortante σ_{rz} es el producto de la función viscosidad por la rapidez de deformación:

$$\sigma_{rz} = O_\eta (D_t) \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (4.3a)$$

En donde $O_\eta(D_t)$ es un operador viscosidad que en este caso en particular es caracterizado por el modelo de Voigt-Kelvin, definido como:

$$O_\eta(D_t) = \frac{G_0 + G_0\lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}{\frac{\partial}{\partial t}} \quad (4.3b)$$

Al combinar las Ecs. (4.2) y (4.3), se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r O_\eta(D_t) \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (4.4)$$

Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + O_\eta(D_t) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (4.5)$$

La Ec. (5) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\rho}{O_\eta(D_t)} \frac{\partial}{\partial t} \right\} V_z = \frac{1}{O_\eta(D_t)} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.6)$$

La Ec. (4.6) es diferencial lineal y describe las variaciones de la velocidad por efectos del espacio y tiempo. Aplicando el formalismo de Fourier, en las derivadas temporales de la Ec. (4.6)

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \rightarrow (i\omega)^k \quad (4.7a)$$

Y para las funciones: (i) Velocidad axial $V_z = V_z(r, t)$, $p = p(t)$, $Q = Q(t)$. Además, el operador viscosidad en el espacio de Fourier, toma la forma:

$$O_\eta \left(D_t = \frac{\partial}{\partial t} \right) \rightarrow O_\eta(i\omega) \quad (4.8)$$

Por lo que al aplicar la ecuación diferencial lineal toma la forma

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2(\omega) \right\} V_z(r, \omega) = O_\eta(i\omega) \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (4.9)$$

Y el parámetro Beta, tiene la forma:

$$\alpha^2(\omega) = \frac{P}{O_\eta(i\omega)} i^3 \omega = \rho O_\phi(i\omega) i^3 \omega \quad (4.10)$$

En la Ec. (10) se ha definido la fluidez compleja O_ϕ como el inverso del operador viscosidad

$$O_\phi(i\omega) = \frac{1}{O_\eta(i\omega)} \quad (4.11)$$

La Ec. (9) es punto de partida para el cálculo de la velocidad y el flujo volumétrico respectivamente.

4.1.3 Perfil de velocidades

Para resolver la Ec. (4.9), se propone que la solución general se puede descomponer en términos de una solución homogénea y particular.

$$V_Z(r,\omega) = V_{Z_H}(r,\omega) + V_{Z_P}(r,\omega) \quad (4.12)$$

4.1.4 Ecuación diferencial homogénea

Solución de la ecuación diferencial homogénea, por lo que, se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \alpha^2(\omega) \right\} V_Z(r,\omega) = 0 \quad (4.13)$$

Desarrollando la velocidad en el espacio de Fourier, se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2(\omega) \right\} V_Z(r,\omega) = 0 \quad (4.14)$$

Multiplicando por r^2 se tiene la ecuación diferencial del modelo de Bessel:

$$\left\{ r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2(\omega) r^2 \right\} V_Z(r,\omega) = 0 \quad (4.15)$$

La Ec. (4.20) es paramétrica de Bessel y para resolverla se propone el siguiente cambio de variable $z = \alpha r$

$$\left\{ z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z \frac{\partial}{\partial z} + z^2 \right\} Vz(r, \omega) = 0 \quad (4.16)$$

La solución de la ecuación diferencial Ec. (4.16) está dada por la expresión:

$$Vz(z, \omega) = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) \quad (4.17)$$

En la Ec. (17) $\{J_0(z), Y_0(z)\}$ son las funciones de Bessel de orden cero de primera y segunda especie respectivamente.

4.1.5 Solución particular

La solución particular para el problema de la Ec. (4.17) se puede expresar como:

$$Vz_p(r, \omega) = A; A \in \mathbb{R} \quad (4.18)$$

Al sustituir la Ec. (4.23) en la Ec. (4.9)

$$\alpha^2(\omega) A = O_\Phi(i\omega) \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \quad (4.19)$$

Por lo que, la constante A se despeja y se tiene lo siguiente:

$$A = \frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.20)$$

La solución homogénea de la Ec. (4.17) en términos de la coordenada radial r, se puede expresar como:

$$Vz(r, \omega) = C_1 J_0(r) + C_2 Y_0(r) + \frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.21)$$

4.1.6 Condiciones de frontera

La solución general (Ec. 4.22) contiene dos constantes de integración C_1 y C_2 , las cuales deben de determinarse a partir de las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{C.F.1: } r = 0; \quad |V_z(0, \omega)| \leq M \quad (4.22)$$

$$\text{C.F.2: } r = R; \quad V_z(R, \omega) = 0 \quad (4.23)$$

La primera de estas condiciones obedece a que la solución particular debe de permanecer acotada, i.e. que para ningún valor que tome la coordenada radial debe ser infinita.

La segunda condición de frontera, se relaciona con la condición de no deslizamiento en la frontera (pared del tubo capilar). Al sustituir la primera C.F.1 en la ecuación diferencial, se tiene lo siguiente:

$$V_{z_{\max}} = V_z(r = 0, \omega) = C_1 J_0(\alpha 0) + C_2 Y_0(\alpha 0) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.24)$$

Simplificando la expresión se obtiene la siguiente expresión algebraica:

$$V_{z_{\max}} = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-\infty) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.25)$$

Simplificando la ecuación anterior, se tiene lo siguiente:

$$V_{z_{\max}} = C_2 \cdot (-\infty) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \cong C_2 \cdot (-\infty) \quad (4.26)$$

La última igualdad, demuestra que la velocidad en el centro del capilar, es infinita lo que carece de sentido físico. Para evitar esta inconsistencia física, la constante C_2 debe ser cero, i.e. $C_2 = 0$. Por lo que la solución general tiene la siguiente estructura:

$$V_z(r,\omega) = C_1 J_0(\alpha r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.27)$$

La segunda condición de frontera al sustituirla nos da la siguiente información física:

$$V_z(R,\omega) = C_1 J_0(\alpha R) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.28)$$

De análisis de la primera condición de frontera se deduce que la constante C_2 es cero por lo que al despejar C_1 se tiene lo siguiente:

$$C_1(\omega) = -\frac{1}{J_0(\alpha R)} \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.29)$$

Finalmente, la velocidad axial $V_z(r, \omega)$ tiene la siguiente forma:

$$V_z(r,\omega) = C_1(\omega) J_0(\alpha r) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.30)$$

Esta expresión nos permite obtener el perfil de velocidades en función de los parámetros materiales del líquido, la fuerza motriz que deforma continua e irreversiblemente el fluido asociado al gradiente de presión en la dirección axial. Nótese, que el perfil de velocidades está determinado por un cociente de funciones de Bessel, lo que podría inducir efectos resonantes en el sistema.

4.1.7 Flujo volumétrico con transformada de Fourier

La expresión para calcular el flujo volumétrico en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$, se puede expresar como la doble integral del producto interno del vector de velocidad y la diferencial de superficie. El vector velocidad solo tiene componente axial z y el vector unitario que describe la sección de área transversal es el vector unitario en la dirección z ,

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^R Vz(r,t) r dr d\theta = 2\pi \int_0^R Vz(r,t) r dr \quad (4.31)$$

Al tomar la transformada de Fourier del flujo volumétrico, se tiene lo siguientes:

$$Q(\omega) = F\{Q(t)\} = F\left\{2\pi \int_0^R Vz(r,t) r dr\right\} \quad (4.32)$$

Por otra parte, suponiendo que la función es continua, el operador de Fourier se puede introducir en la doble integral por lo que se tiene lo siguiente:

$$F\left\{2\pi \int_0^R Vz(r,t) r dr\right\} = 2\pi \int_0^R F\{Vz(r,t)\} r dr = 2\pi \int_0^R Vz(r,\omega) r dr \quad (4.33)$$

El flujo volumétrico transformado en el espacio de Fourier toma la forma:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^R Vz(r,\omega) r dr \quad (4.34)$$

Al sustituir el perfil de velocidades en el flujo volumétrico, se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_0^R Vz(r,\omega) r dr = 2\pi \int_0^R \left(C_1(\omega) J_0(\alpha r) + \frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \right) r dr \quad (4.35)$$

Haciendo el cambio de variable,

$$Q(\omega) = 2\pi C_1(\omega) \int_0^R (J_0(\alpha r)) r dr + 2\pi \frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^R r dr \quad (4.36)$$

Definiendo las siguientes cantidades adimensionales: $u = r/R$; $\beta = \alpha R$ como una longitud característica adimensional, la Ec. (4.36) se puede expresar como:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi R^2}{\beta^2} C_1(\omega) \int_0^\beta z J_0(z) dz + 2\pi R^4 \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^1 u du \quad (4.37)$$

En donde $z = \beta r$. Para integrar las funciones de Bessel, se utiliza la siguiente propiedad matemática:

$$\frac{d}{dz}[zJ_1(z)] = zJ_0(z) \quad (4.38)$$

Al sustituir la Ec. (38), en la integral de la expresión del flujo volumétrico (Ec. 4.37), se tiene lo siguiente por lo que,

$$Q(\omega) = \frac{2\pi R^2}{\beta^2} C_1(\omega) \int_0^\beta \frac{d}{dz}[zJ_1(z)] dz + 2\pi R^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^1 u du \quad (4.39)$$

La Ec. (39), se puede simplificar a lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi R^2}{\beta^2} C_1(\omega) \int_0^\beta d[zJ_1(z)] + \pi R^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \int_0^1 du^2 \quad (4.40)$$

Finalmente, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = \pi R^4 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) + 2\pi R^2 C_1(\omega) \frac{J_1(\beta)}{\beta} \quad (4.41)$$

En donde la constante $C_1(\omega)$, dada por la Ec. (4.29) se sustituye en la Ec. (4.41), y se obtiene:

$$Q(\omega) = \frac{\pi R^3}{4} \frac{8i^2 O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(1 - 2 \frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} R \right) \quad (4.42)$$

4.1.7 Función de transferencia compleja

La Ec. (42) puede ser descrito en términos de la función de transferencia $T(\omega)$,

$$Q(\omega) = \frac{\pi R^3}{4} T(\omega) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} R \right) \quad (4.43)$$

En donde la función de transferencia $T(\omega)$, tiene la siguiente expresión analítica:

$$T(\omega) = 8i^2 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(1 - 2 \frac{J_1(\beta(\omega))/\beta(\omega)}{J_0(\beta(\omega))} \right) \quad (4.44)$$

La función de transferencia $T(\omega)$,

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} T(\omega) &= 8i^2 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left\{ 1 - 2 \frac{J_1(\beta(\omega))/\beta(\omega)}{J_0(\beta(\omega))} \right\} \\ &= 8i^2 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(i^2 \frac{\beta^2}{88i^2} \right) = O_\phi(i\omega) \end{aligned} \quad (4.45)$$

4.2. Cálculo de la función de transferencia para una corona circular.

Las consideraciones matemáticas del capilar, se mantienen en la corona circular de radio $r = R_1$ y $r = R_2$ y longitud $z = L$.

4.2.1 Perfil de velocidades en una corona circular

Por lo tanto, las siguientes ecuaciones se cumplen como en el caso de un a capilar inextensible, por lo que se tiene:

$$V_z(r, \omega) = C_1 J_0(r\alpha) + C_2 Y_0(r\alpha) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad (4.46)$$

La Ec. (1) contiene dos constantes de integración $\{C_1, C_2\}$, por lo que estas deben ser calculadas mediante dos condiciones de frontera.

4.2.2 Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera, para la configuración de la corona circular y que cumplen las condiciones de deslizamiento en la frontera, por lo que se tiene lo siguiente:

C.F.1.: La velocidad axial en la frontera del tubo es cero, i.e., $V_z (r = R_2) = 0$.

(4.47)

C.F.2.: La velocidad axial en el centro del tubo es máxima, i.e., $V_z (r = R_1) = 0$.

(4.48)

Aplicando las condiciones de frontera, en la Ecs. (4.47) y (4.48) se tiene lo siguiente:

$$V_z(R_2, \omega) = C_1 J_0(R_2 \alpha) + C_2 Y_0(R_2 \alpha) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.49)$$

Y para la segunda constante de integración, se tiene lo siguiente:

$$V_z(R_1, \omega) = C_1 J_0(R_1 \alpha) + C_2 Y_0(R_1 \alpha) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.50)$$

Y

$$C_1 J_0(R_2 \alpha) + C_2 Y_0(R_2 \alpha) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.51)$$

Y para la segunda constante de integración, se tiene lo siguiente:

$$C_1 J_0(R_1 \alpha) + C_2 Y_0(R_1 \alpha) + \frac{O_\phi(i\omega)}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.52)$$

Las Ecs. (4.51) y (4.52) pueden ser rescritas de la siguiente forma:

$$C_1 J_0(\beta) + C_2 Y_0(\beta) + R_2^2 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.53)$$

Y para la segunda constante de integración, se tiene lo siguiente:

$$C_1 J_0(R\beta) + C_2 Y_0(R\beta) + R_2^2 \frac{O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.54)$$

En donde $R = R_1/R_2$. Al resolver el sistema de ecuaciones algebraicas, podemos obtener las constantes C_1 y C_2 . Al restar las Ecs. (4.53) y (4.54), se obtiene la constante C_1 en terminos C_2

$$C_1 = -C_2 \frac{Y_0(\beta) - Y_0(R\beta)}{J_0(\beta) - J_0(R\beta)} \quad (4.55)$$

Al despejar C_2 de la Ec. (4.54)

$$C_2 = -C_1 \frac{J_0(R\beta)}{Y_0(R\beta)} - \frac{1}{Y_0(R\beta)} \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \quad (4.56)$$

Al combinar las Ecs. (4.55) y (4.56)

$$C_2 = C_4 \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \quad (4.57)$$

En donde C_4 , esta definida como:

$$C_4 = \frac{J_0(R\beta) - J_0(\beta)}{J_0(\beta)Y_0(R\beta) - Y_0(\beta)J_0(R\beta)} \quad (4.58)$$

De la Ecs. (4.53) y (4.55), se tiene:

$$C_1 = C_3 \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \quad (4.59)$$

Entonces C_3 , se define como:

$$C_3 = \frac{Y_0(\beta) - Y_0(R\beta)}{J_0(\beta)Y_0(R\beta) - Y_0(\beta)J_0(R\beta)} \quad (4.60)$$

Por lo que el perfil de velocidades puede ser reescalado de la siguiente manera.

$$Vz(r,\omega) = C_1 J_0(r\beta) + C_2 Y_0(r\beta) + \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \quad (4.61)$$

4.2.3 Flujo volumetrico en una corona circular con mecanismos inerciales

El flujo volumétrico transformado en el espacio de Fourier toma la forma:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} V_Z(r, \omega) r dr \quad (4.62)$$

Al sustituir el perfil de velocidades en el flujo volumétrico, se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left(C_1 J_0(r\beta) + C_2 Y_0(r\beta) + \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \right) r dr \quad (4.63)$$

Escalando la Ec. (4.63) se tiene:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_R^1 \left(C_1 J_0(r\beta) + C_2 Y_0(r\beta) + \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \right) r dr \quad (4.64)$$

Aplicando linealidad a la Ec. (4.64), se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = 2\pi C_1 \int_R^1 J_0(r\beta) r dr + 2\pi C_2 \int_R^1 Y_0(r\beta) r dr + 2\pi \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \int_R^1 r dr \quad (4.65)$$

Escalando de nueva cuenta, la Ec. (4.65) toma la forma:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi}{\beta^2} C_1 \int_{R\beta}^\beta J_0(r\beta) \beta r d\beta + \frac{2\pi C_2}{\beta^2} \int_{R\beta}^\beta Y_0(r\beta) r dr + \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \int_R^1 r dr \quad (4.66)$$

El flujo volumétrico puede ser descrito como:

$$Q(\omega) = \frac{\pi R_2^3}{4} T(\omega) \left(i^2 \frac{1}{2} \frac{\partial p(\omega)}{\partial z} R_2 \right) \quad (4.67)$$

En donde la función de transferencia compleja para la corona circular tiene la siguiente forma matemática:

$$T(\omega) = i^2 \frac{8O_\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left\{ 1 - R^2 + 2C_3 \left(\frac{J_0(\beta) - J_0R(R\beta)}{\beta} \right) + 2C_4 \left(\frac{Y_0(\beta) - RY_0(R\beta)}{\beta} \right) \right\} \quad (4.68)$$

La Ec. (4.68) es el segundo resultado más importante de la presente tesis de licenciatura. Este resultado obtenido a diferencia del capilar, depende de la razón geométrica y de las funciones de Bessel de primer y segunda especie de orden cero y del parámetro β que depende del número de Deborah y del operador complejo fluidez $O\Phi$.

4.3 Parámetro Beta

4.3.1 Fluido Newtoniano

El parámetro adimensional β tiene la forma adimensional:

$$\beta(\omega) = R\sqrt{\alpha(\omega)} \quad (4.69)$$

El parámetro beta en forma adimensional tiene la siguiente forma:

$$\beta(\omega) = R\alpha(\omega) = i^{3/2} \sqrt{\left(\frac{\rho R^2 \varphi c}{tc} \right)} O_\Phi(i\omega) \omega \quad (4.70)$$

En donde el operador fluidez fue escalado con las siguientes variables adimensionales:

$$O_\Phi(i\omega) = \frac{O_\Phi(i\omega)}{\varphi c}; \quad \omega = tc\omega \quad (4.71)$$

En donde la fluidez característica φc y la frecuencia característica ωc para un fluido newtoniano están dadas por las siguientes expresiones: (i) $\varphi c = 1/\mu$ y (ii) $tc = R^2/\mu = R^2/(\mu/\rho) = R^2/\nu$, en donde ν es el coeficiente de transferencia de momento. Por lo que el parámetro beta, para un fluido newtoniano este coeficiente se simplifica de la siguiente manera:

$$\beta(\omega) = i^{3/2} \sqrt{\omega} \quad (4.72)$$

4.3.2 Fluido No-Newtoniano: modelo visco-plasto de Voigt-Kelvin

Para un fluido no-newtoniano viscoelástico lineal, la fluidez característica $\varphi_c = 1/\eta_0$ y el tiempo característico del sistema t_c es el tiempo unimodal de Maxwell, i.e. $t_c = \lambda_0$. Por lo que el parámetro β tiene la forma:

$$\beta(\omega) = i^{3/2} \sqrt{De O_\phi(i\omega)} \omega \quad (4.73)$$

En la Eq. (4.73) De es el número de Deborah, el cual puede

$$De = \frac{\rho R^2 \varphi_c}{t_c} \quad (4.74)$$

En donde:

$$\beta(\omega, De) = i^{3/2} \sqrt{(De)^\delta O_\phi(i\omega)} \omega \quad (4.75)$$

En donde para $\delta = 0$, se tiene el modelo Newtoniano y para $\delta = 1$ se tiene un fluido viscoelástico lineal tipo Voigt-Kelvin

4.4 Resumen del capítulo 4

En este capítulo se desarrollaron las funciones de transferencia para geometrías de capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$ y coronas circulares de radio $r = R_1$ y $r = R_2$ y $z = L$. Los resultados obtenidos son generales y pueden ser aplicados a cualquier fluido newtoniano, viscoelástico, visco-plasto y fraccionario. La forma de extender los resultados analíticos deducidos pueden ser expresados mediante la función el vector de onda β , a través de la Ec. (4.75).

En el siguiente capítulo se presentarán las simulaciones de las funciones de transferencia para el fluido newtoniano y visco-plasto del modelo de Kelvin-Voigt en las diferentes configuraciones.

CAPÍTULO V.
SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

5.1 Variables y ecuaciones adimensionales

Escalamiento de Variables

En este capítulo se presentarán los resultados más importantes de las simulaciones realizadas en el programa Mathematica. Para simplificar las expresiones se propondrán un conjunto de variables adimensionales escaladas. Las variables de interés son la función de transferencia compleja, el vector de onda β . Entonces las variables escaladas se definen como:

$$T = \frac{T}{\varphi_0}; O_\Phi(Dt) = \frac{O_\Phi(Dt)}{\varphi_0}; \beta = \beta a; \omega = \lambda_0 \omega \quad (5.1)$$

5.2 Ecuaciones adimensionales

Las ecuaciones adimensionales importantes en este sistema son el modelo de Kelvin-Voigt el cual se describe como una generalización del modelo de Hook por lo que, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = G_0 \dot{\gamma} + G_0 \lambda_0 \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} \quad (5.2)$$

El operador viscosidad toma la forma en este modelo

$$O_\eta(Dt) = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} = \frac{G_0 + G_0 \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}}{\frac{\partial}{\partial t}} \quad (5.3)$$

En termino de variables adimensionales, se tiene lo siguiente:

$$O_\eta(i\omega) = \frac{1 + i\omega}{i\omega} \quad (5.4)$$

El operador fluidez, es el inverso del operador viscosidad:

$$O_{\phi}(i\omega) = \frac{1}{O_{\eta}(i\omega)} = \frac{i\omega}{1+i\omega} \quad (5.5)$$

5.3 Vector de onda β

El parámetro β tiene la forma adimensional siguiente:

$$\beta(\omega) = a\beta(\omega) = i^{3/2} \sqrt{\left(\frac{\rho a^2 \varphi_0}{\lambda_0}\right)} O_{\phi}(i\omega) \omega = i^{3/2} De \sqrt{O_{\phi}(i\omega) \omega} \quad (5.6)$$

En donde se ha definido el número de Deborah De mediante un cociente entre dos tiempos característicos. El primero de ellos, asociado es un tiempo compuesto asociado a los mecanismos inerciales, geométricos y elásticos del bulto del fluido. El segundo, relaciona la viscoelasticidad del material

$$De = \frac{\sqrt{\rho a^2 / G_0}}{\lambda_0} \quad (5.7)$$

En el caso de un fluido newtoniano, el vector de onda tiene la forma:

$$\beta(\omega) = a\beta(\omega) = i^{3/2} \sqrt{\omega} \quad (5.8)$$

En el fluido Newtoniano, el operador fluidez y el número de Deborah valen la unidad por lo que, el parámetro β se puede expresar de la siguiente manera:

$$\beta_{\text{visco-plasto}}(\omega) = \beta_{\text{Newtoniano}}(\omega) De \sqrt{O_{\phi}(i\omega)} \quad (5.9)$$

La función de Transferencia compleja en forma adimensional:

$$T(\omega) = \text{Re}[T(\omega)] + i\text{Im}[T(\omega)] = 8i^2 \frac{O_{\phi}(i\omega)}{\beta^2(\omega)} \left(1 - 2 \frac{J_1(\beta(\omega))/\beta(\omega)}{J_0(\beta(\omega))} \right) \quad (5.10)$$

Y para la corona circular tenemos lo siguiente:

$$T(\omega) = \text{Re}[T(\omega)] + i\text{Im}[T(\omega)]$$

$$i^2 \frac{8O_\phi(i\omega)}{\beta^2} \left\{ 1 - R^2 + 2C_3 \left(\frac{J_0(\beta) - J_0R(R\beta)}{\beta} \right) + 2C_4 \left(\frac{Y_0(\beta) - RY_0(R\beta)}{\beta} \right) \right\} \quad (5.11)$$

En la siguiente seccion se utilizaran las funciones de transferencia escaladas para graficar la parte real e imaginaria de las funciones de transferencia compleja dadas por las Ecs. (5.10) y (5.11). La programación de las ecuaciones ser realizara en el programa Mathematica 13.1 licencia UNAM y son exportadas al programa Excell.

5.1 Funcion de transferencia fluido Newtoniano

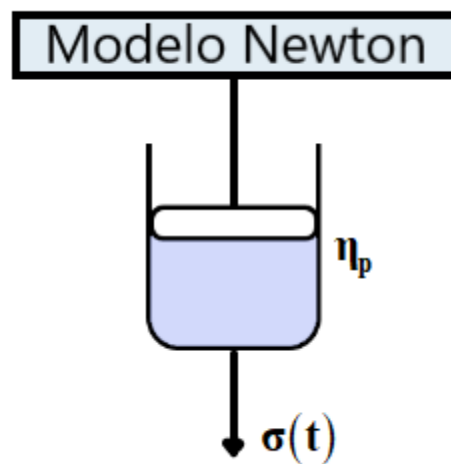


Figura 7. Modelo para fluido de Newton.

En esta sección se discutirán los resultados más importantes de la respuesta real e imaginaria de un fluido Newtoniano en una geometría capilar y en una corona circular a través de la función de transferencia.

a) Capilar

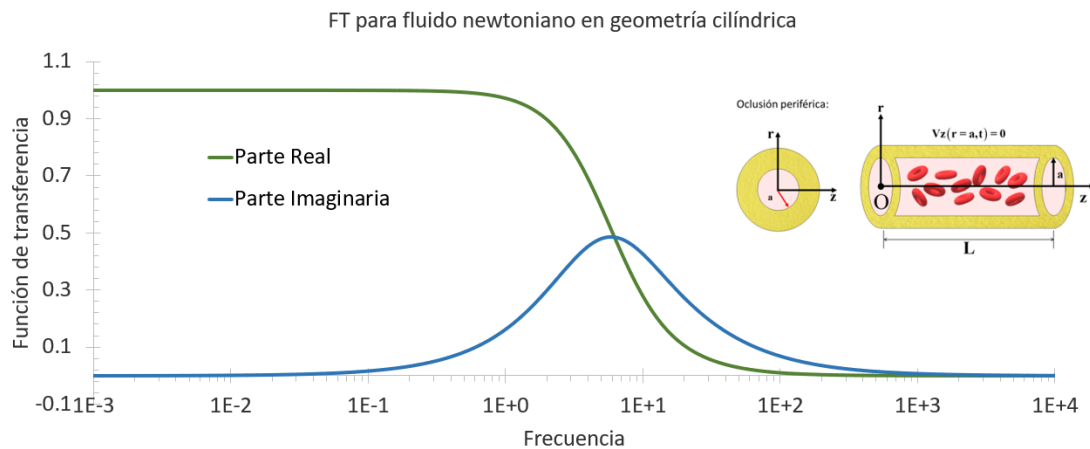


Figura 8. FT vs frecuencia, fluido newtoniano, capilar.

Figura 8. Ilustra la función de transferencia compleja en función de la frecuencia en el sistema del capilar de radio $r = R$ y longitud $z = L$. La geometría que se analiza correspondería a una oclusión periférica, en donde el fluido es modelado como un líquido Newtoniano

Matemáticamente, la parte real de la función de transferencia compleja (RFTC) se muestra en la Fig. (8) (Roja). En la ventana de observación de frecuencias bajas (0.01, 1), la RFTC, R_M es constante e independiente de la frecuencia. A una frecuencia crítica ($\omega < 1$), la respuesta real dinámica del sistema se comporta de una forma monótonica decreciente, en donde geoméricamente la derivada es negativa. A otra frecuencia crítica (altas frecuencias) la respuesta es asintótica y tiende a cero conforme la frecuencia aumenta.

La parte imaginaria de la función de transferencia compleja (IFTC) se observa de color negro en la Fig. (8). A frecuencias bajas (0.01, 0.1) observamos un comportamiento independiente de la frecuencia como en el caso real de la FTC. A una frecuencia crítica, el dispositivo muestra monótona creciente en donde la derivada de la IFTC con respecto a la frecuencia es positiva. A un valor de la frecuencia, se observa un máximo global en donde la pendiente es cero. Nótese que, para valores mayores al punto crítico, la curva es simétrica, i.e., se observa una clásica curva resonante asociada a el efecto de la parte imaginaria de la FTC (Bird et al. 1977).

Físicamente, se observa en la parte real un comportamiento de relajación asociado a que el sistema llega de estado de menor a mayor frecuencia por efecto del gradiente de presión pulsátil. Mientras que, la parte imaginaria está asociada a la disipación.

Biológicamente, la anchura y el máximo están asociados a proceso biológicos, en este punto se necesita más información.

b) Corona circular

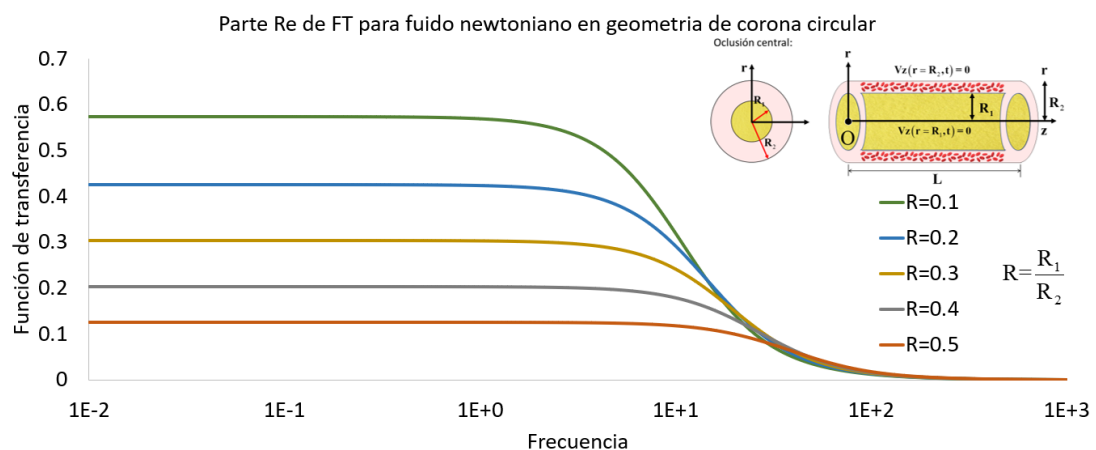


Figura 9. Re de FT vs frecuencia, fluido newtoniano, corona circular y Rvar..

Figura 9. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia en el sistema formado por dos cilindros concéntricos (corona circular)

de radio $r = R_1$ y $r = R_2$ con $z = L$. En esta simulación $R = R_1/R_2$ corresponde a la relación geométrica entre los cilindros.

En la Fig. (9) se ilustra la parte RFTC vs frecuencia en función del radio adimensional, $0 < R = R_1/R_2 < 1$. En este caso, este sistema simula una oclusión central en la cual existe un objeto suspendido en el seno del fluido Newtoniano, el cual reduce la geometría y se puede aproximar como dos cilindros concéntricos (corona circular). En la Fig. (9) cada simulación representa una obstrucción en el sistema. El color azul menos obstruido y la verde más obstruido.

De la misma manera que en la Fig. (9), matemáticamente se observa una zona constante o meseta independiente de la frecuencia (0.01, 10). Posteriormente, existe un valor crítico de la frecuencia para el cual la respuesta es monótono decreciente (pendiente negativa o la derivada de la RFTC es negativa), en el intervalo (10, 100) hasta un segundo valor crítico en la frecuencia. Finalmente, el valor tiende asintóticamente a cero. Nótese, que: (i) las curvas son similares y (ii) que el efecto geométrico a través de R es el de desfasar las curvas a menores valores de la meseta que se observa a valores bajos en la frecuencia.

Físicamente, existe una respuesta con la frecuencia en la venta de observación de frecuencias moderadas.

Biológicamente, en esta simulación no se observan las clásicas curvas resonantes que se presentan en otro sistema y solo se tiene una respuesta dinámica en las frecuencias moderadas. Se analizará la parte imaginaria para ver la resonancia, el máximo y la anchura del sistema.

Parte im de FT para fluido Newtoniano en geometría de corona circular.

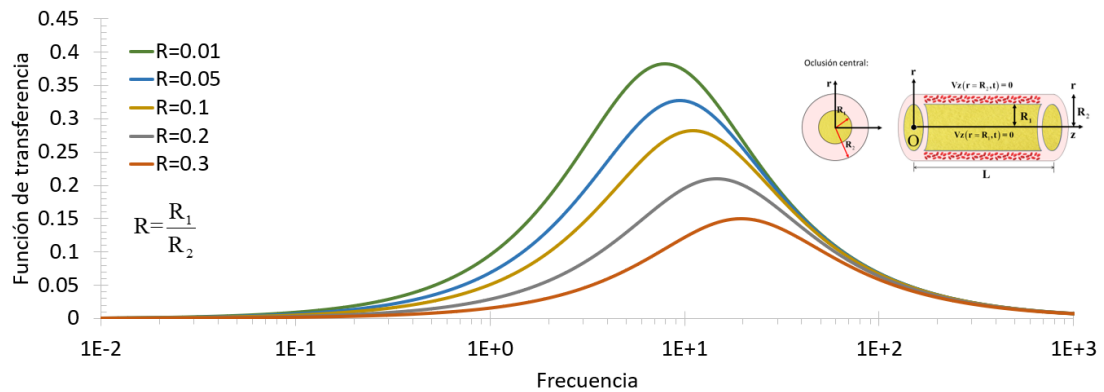


Figura 10. Im de FT vs frecuencia, fluido newtoniano, corona circular, Gcte y Rvar.

Figura 10. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia en el sistema formado por dos cilindros concéntricos (corona circular) de radio $r = R_1$ y $r = R_2$ con $z = L$. En esta simulación $R = R_1/R_2$ corresponde a la relación geométrica entre los cilindros.

En la Fig. (10) se ilustra la parte IFTC vs frecuencia en función del radio adimensional, $0 < R = R_1/R_2 < 1$. En este caso, este sistema simula una oclusión central en la cual existe un objeto suspendido en el seno del fluido Newtoniano, el cual reduce la geometría y se puede aproximar como dos cilindros concéntricos (corona circular). En la Fig. (10) cada simulación representa una obstrucción en el sistema. El color negro menos obstruido y la azul más obstruido.

De la misma manera que en la Fig. (1) de la parte IFTC, a frecuencias bajas (0.01, 0.1) observamos un comportamiento independiente de la frecuencia como en el caso real de la FTC. A una frecuencia crítica, el dispositivo muestra comportamiento monótono creciente en donde la derivada de la IFTC con respecto a la frecuencia es positiva. A un valor de la frecuencia, se observa un máximo global en donde la pendiente es cero. Nótese que, para valores mayores al punto crítico, la curva es simétrica, i.e., se observa una clásica curva resonante asociada a el efecto de la parte imaginaria de la FTC (Bird et al. 1977).

Curva con menos obstrucción negra tiene la máxima respuesta resonante, curva azul con mayor obstrucción la frecuencia está en función de la geometría, hay un desfase

Físicamente la parte imaginaria está asociada a la disipación.

Biológicamente, la anchura y el máximo están asociados a proceso biológicos, en este punto se necesita más información.

5.2 Funcion de transferencia fluido Kelvin-Voigt (KV)

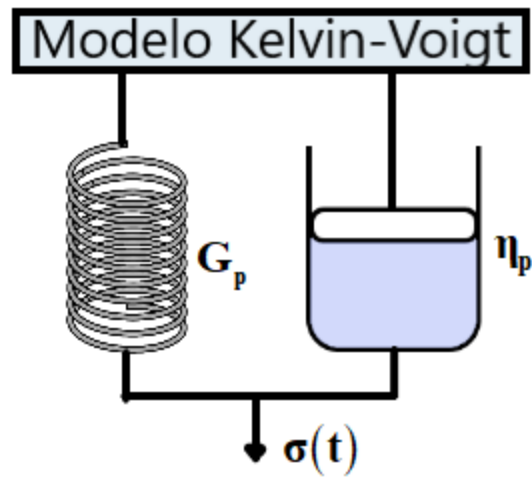


Figura 11. Modelo para fluido de Kelvin-Voigt.

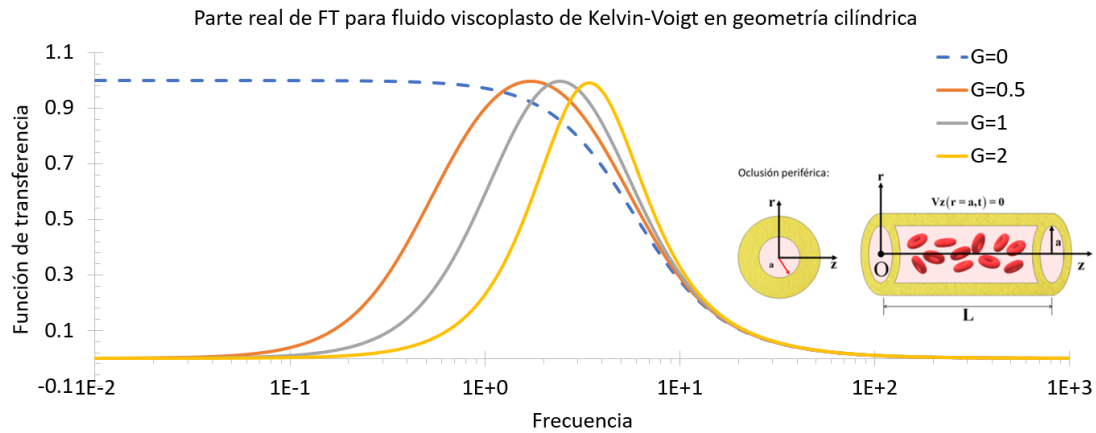


Figura 12. Re de FT vs frecuencia, fluido K-V, capilar, G_{var} y R_{cte} .

Figura 12. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia en el sistema del capilar de radio $r = R$ y longitud $z = L$. La geometría que se analiza correspondería a una oclusión periférica, en donde el fluido es modelado como un líquido Viscoplasto de Kelvin-Voigt.

En la Fig. 12 se representa la simulación de la FT vs frecuencia angular en función de la elasticidad del fluido complejo. El caso newtoniano se muestra con la línea punteada en color azul la cual, corresponde a $G=0$ que básicamente no contiene elasticidad y su respuesta dinámica está dominada por los mecanismos de relajación. Por una parte, el caso viscoelástico se representa con las tres curvas tipo campana asociadas a los procesos disipativos de la parte real. Nótese que la condición necesaria y suficiente para presentar este tipo de curvas es que el fluido sea viscoplasto (Kelvin-Voigt) y viscoelástico (Maxell). Dos aseveraciones importantes son vistas en la Fig. 12. La primera de ellas, asociada a la frecuencia resonante la cual, va cambiando en función de la elasticidad del fluido, es decir, esta depende de las propiedades materiales del sistema. Por otra parte, el máximo se mantiene y solo se ve desfasado por el valor de la elasticidad y por último la anchura de la distribución o de la curva resonante, va disminuyendo conforme el efecto elástico aumenta.

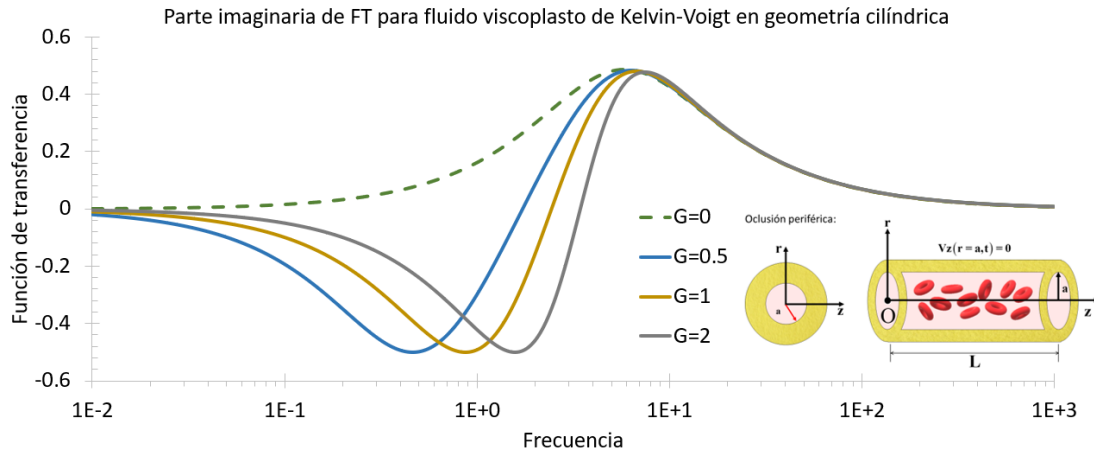


Figura 13. . Im de FT vs frecuencia, fluido K-V, capilar, Gvar y Rcte.

Figura 13. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia en el sistema del capilar de radio $r = R$ y longitud $z = L$. La geometría que se analiza correspondería a una oclusión periférica, en donde el fluido es modelado como un líquido Viscoplasto de Kelvin-Voigt.

En la FIG. 13 se representa la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs frecuencia en función de la elasticidad del fluido. El comportamiento del fluido newtoniano se recupera cuando el valor del modulo elástico es igual a cero ($G=0$), está representada por la curva discontinua verde. Notese, que a pesar de ser un fluido newtoniano la parte imaginaria presenta resonancia que es un efecto de la parte imaginaria de la función de transferencia compleja. Sin embargo, en el caso de un fluido viscoplasto de Kelvin-Voigt a una frecuencia selectiva el comportamiento del fluido es anti resonante, mientras que, a otra frecuencia mayor que la anti resonante, la respuesta presenta un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo, para un valor de resonancia máxima. En este punto, una frecuencia mayor a la del máximo resonante implica que el sistema dinámico y su respuesta decrece monótonicamente hasta un valor asintótico cercano a cero. Físicamente, el efecto anti resonante y resonante tenga una implicación biológica relacionada con algún efecto de contraflujo en el sistema, la cual podría ser detectada con los perfiles de velocidad en donde los perfiles parabólicos se inviertan por efecto de la resonancia.

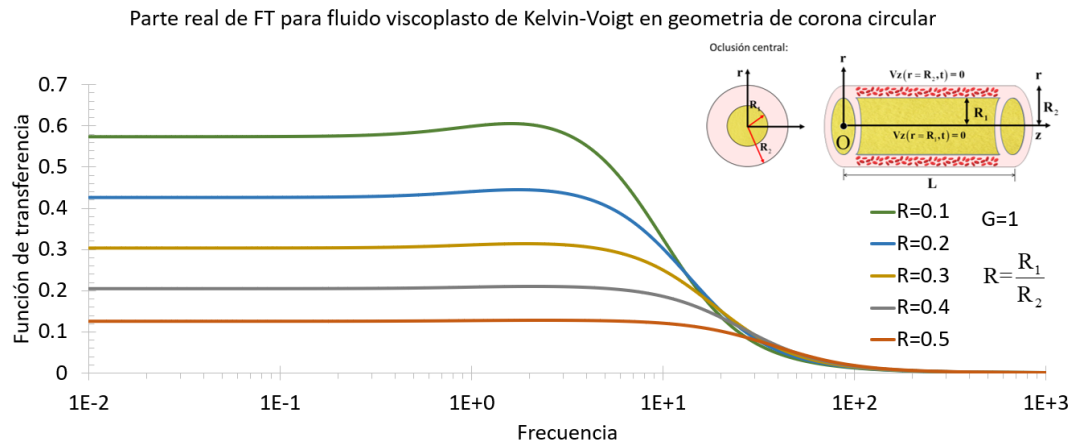


Figura 14. Re de FT vs frecuencia, fluido K-V, corona circular, Gcte y Rvar.

Figura 14. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia en el sistema del capilar de radio $r = R$ y longitud $z = L$. La geometría que se analiza correspondería a una oclusión periférica, en donde el fluido es modelado como un líquido Viscoplasto de Kelvin-Voigt

En la Fig. 14 se relaciona la parte real de la función de transferencia compleja vs la frecuencia en función de la relación geométrica a través de la variable reducida R . La otra propiedad material que se matuvo constante fue la elasticidad de bulto ($G=1$). A frecuencias bajas y moderadas, la respuesta de la parte real de la función de transferencia compoleja es constante e independiente. A una frecuencia crítica el sistema presenta un comportamineto monótono decreciente con pendiente cercana a 1, seguido de una segunda meseta en donde la respuesta dinámica del sistema es constante. Notese, que el efécto geometrico, a través de la variable reducida R , es el de disminuir la respuesta dinámica lineal entre el gradiente de presión y el flujo volumétrico, aunque, el comportamiento es prácticamente el mismo.

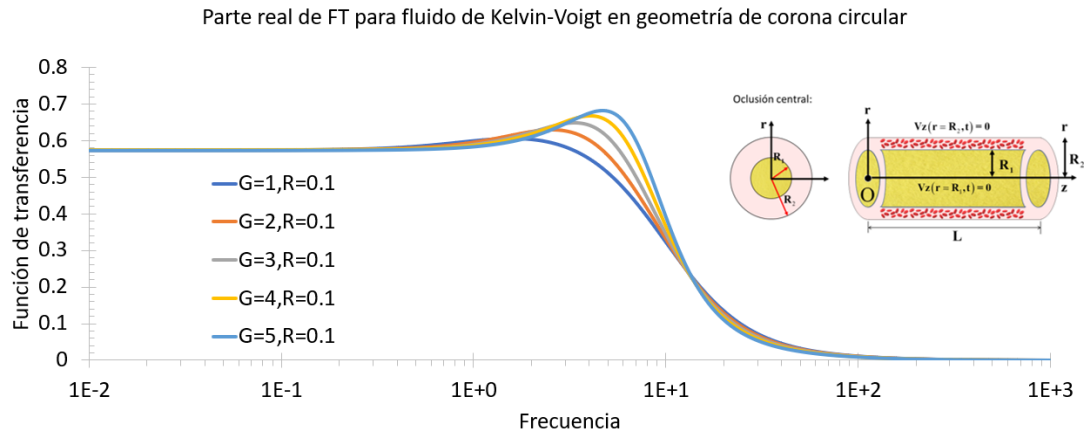


Figura 15. Re de FT vs frecuencia, fluido K-V, corona circular, Gvar y Rcte.

Figura 15. Ilustra la parte real de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia en el sistema del capilar de radio $r = R$ y longitud $z = L$. La geometría que se analiza correspondería a una oclusión periférica, en donde el fluido es modelado como un líquido Viscoplasto de Kelvin-Voigt.

En la Fig. 15 se relaciona la parte real de la función de transferencia compleja vs la frecuencia en función de la elasticidad de bulto (G). La otra propiedad geométrica que se matuvo constante fue la relación de radios ($R=0.1$). A frecuencias bajas y moderadas la respuesta de la parte real de la función de transferencia compleja es constante e independiente de la frecuencia. A una frecuencia resonante, el sistema presenta comportamiento resonante, seguido de un comportamiento decreciente, hasta un valor asintótico que se aproxima a cero. Notese que el valor elástico de G incrementa la resonancia del fluido y esta intimamente ligada con la máxima disipación viscosa o viscoelástica del sistema.

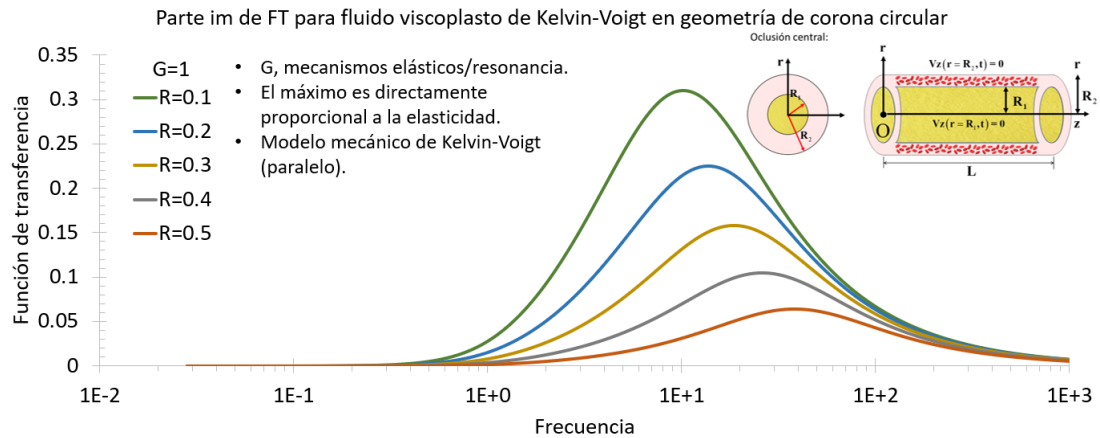


Figura 16. Im de FT vs frecuencia, fluido K-V, corona circular, Gcte y Rvar

Figura 16. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia en el sistema del capilar de radio $r = R$ y longitud $z = L$. La geometría que se analiza correspondería a una oclusión periférica, en donde el fluido es modelado como un líquido Viscoplasto de Kelvin-Voigt.

En la Fig. 16 se observa la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs frecuencia, en función de las características geométricas del sistema R . El valor de la constante elástica en esta simulación es $G=1$. A frecuencias bajas el sistema no presenta ninguna respuesta. Sin embargo, a frecuencias moderadas el dispositivo describe un comportamiento creciente hasta llegar a un valor máximo, en una frecuencia resonante. A frecuencias mayores de la resonante la respuesta decrece asintóticamente hasta un valor asintótico a cero. Es importante resaltar cuatro aspectos de esta simulación:

- El valor máximo resonante se debe a un acoplamiento entre las propiedades viscoplásticas del material.
- El efecto geométrico a través de R induce una disminución considerable en el máximo cuando la R aumenta y un valor mínimo cuando R tiende a 1.
- La frecuencia para alcanzar el máximo resonante es mayor conforme la relación geométrica aumenta es decir, el sistema necesita un valor mayor en la frecuencia de proceso para alcanzar el máximo.

d) Este tipo de comportamiento puede ser muy útil en la descripción de un fluido viscoplasto en sistemas que pueden ser modelados mediante dos tubos concéntricos. En particular, esta simulación puede aplicarse en la descripción de tejido muerto, hipercolesterolemia en sangre humana con trastornos como alto contenido de colesterol, cirrosis hepática, hipoglucemia y cáncer.

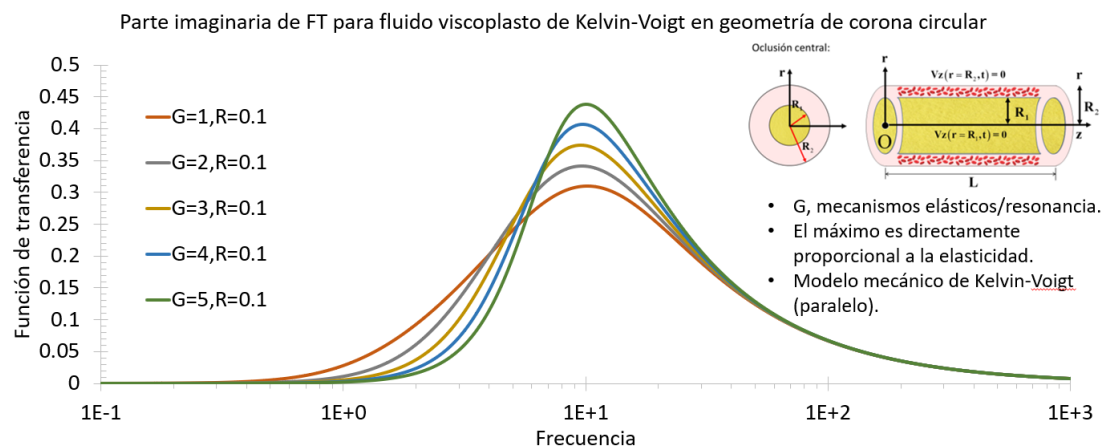


Figura 17. Im de FT vs frecuencia, fluido K-V, corona circular, Gvar y Rcte.

Figura 17. Ilustra la parte imaginaria de la función de transferencia compleja en función de la frecuencia en el sistema del capilar de radio $r = R$ y longitud $z = L$. La geometría que se analiza correspondería a una oclusión periférica, en donde el fluido es modelado como un líquido Viscoplasto de Kelvin-Voigt

En la Fig. 11 se observa la parte imaginaria de la función de transferencia compleja vs frecuencia, en función de las propiedades materiales del sistema G. El valor de la relación de radios R es de 0.1. A frecuencias bajas el sistema no presenta respuesta. Sin embargo, a frecuencias moderadas la función de transferencia, muestra matemáticamente un comportamiento creciente hasta llegar a un valor máximo, para una frecuencia resonante selectiva. A frecuencias mayores de la resonante, la función decrece asintóticamente hasta un valor asintótico que tiende a cero. Es importante resaltar que la elasticidad en los casos

estudiados modifica el máximo resonante y la anchura de las campanas matemáticas y que en general, el efecto geométrico simplemente disminuye la respuesta geométrica y aumenta la frecuencia de resonancia en la cual se puede alcanzar la máxima respuesta viscosa disipativa o viscosa plástico disipativa, cuando se trata de un fluido no newtoniano.

5.4 Resumen del capítulo

En este capítulo se hicieron las simulaciones del modelo de Kelvin-Voigt en las diferentes geometrías de estudio, las cuales consistieron en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$, y una corona circular la cual, fue modelada como dos tubos concéntricos de radio $r = R_1$ y $r = R_2$. Para describir la reología y el flujo, se utilizó el modelo visco-plasto de Kelvin-Voigt. Para resolver la ecuación diferencial inercial-visco-plástica, se aplicó el formalismo de Fourier y se obtuvo la función de transferencia que relaciona el gradiente de presión y el flujo volumétrico. Los siguientes resultados son los más importantes de las simulaciones presentadas:

a) El fluido newtoniano no presenta una respuesta resonante y solo se observa un proceso de relajación en el sistema de estudio.

b) La parte imaginaria del sistema newtoniano, presenta un comportamiento resonante debido a que la parte imaginaria de los sistemas resonantes muestran este tipo de comportamiento matemático.

c) La resonancia es un efecto de los mecanismos elásticos, es decir que los fluidos que presentan resonancia en la parte real, son aquellos que presentan fenómenos de memoria, es decir mecanismos que permiten almacenar energía del sistema.

d) En la corona circular el efecto geométrico a través de la variable reducida R , implica que esta, tiene un efecto considerable en la respuesta dinámica lineal. En el caso, de que R se aproxime a la unidad, las respuestas real e imaginaria de la función de transferencia compleja decrece drásticamente.

e) En el caso de un fluido visco-plasto la parte real presenta comportamiento resonante en contraste con el fluido newtoniano, en el que no se observa este.

f) La parte imaginaria de un fluido visco-plasto presenta una transición de un estado anti- resonantes a uno resonante en función de la frecuencia. Es importante, señalar que la contribución imaginaria de un fluido Newtoniano solo presenta comportamiento resonante.

g) Al igual que el caso newtoniano, el fluido visco-plasto de Kelvin-Voigt es sensible al parámetro geométrico reducido R , debido a que este induce que, la respuesta dinámica lineal decrezca considerablemente.

h) El efecto del número de Deborah, es el de modificar la función de transferencia compleja, es decir, si el número de Deborah tiende a cero, el sistema viscoelástico se reduce al de un fluido Newtoniano.

i) El sistema estudiado en el capilar es equivalente al efecto que se presenta cuando el diámetro de la pared de una vena o arteria se engrosa, puede deberse en el caso biológico a una vena o arteria en la que fluye sangre, y por efecto del calcio en las paredes, la molécula del colesterol se incrusta generando obstrucciones, lo que induce una reducción en el flujo volumétrico sanguíneo.

j) En el caso de un sistema en donde existe tejido muerto, y este obstruye el flujo sanguíneo se puede modelar o aproximar al flujo entre dos cilindros concéntricos de radio R_1 y R_2 , con $R_1 < R_2$ y longitud axial común $z = L$.

En el siguiente capítulo, se presentarán las conclusiones y perspectivas a futuro de este trabajo.

CAPÍTULO VI.
CONCLUSIONES

6.1 Contribución al conocimiento

En este proyecto de licenciatura, se estudió la respuesta dinámica real de un fluido viscoplasto deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión transitorio. El primer sistema de estudio es un capilar de $r=a$ y longitud $z=L$.

El segundo sistema consiste en una corona circular de radio $r=R1$ y $r=R2$ y longitud $z=L$.

Las condiciones de proceso en el sistema se modelaron de la siguiente manera:

- Estado estacionario.
- Fluido incompresible.
- Proceso isotérmico.
- Simetría cilíndrica.
- Mecanismos gravitacionales despreciables.
- Fuerza cortante: Gradiente de presión transitorio, el cual deforma continua e irreversiblemente el líquido.
- El fluido complejo es viscoplasto y se caracteriza mediante el modelo de Kelvin-Voigt.

Suponiendo flujo cortante simple, es decir que el sistema no contiene componentes extensionales asociadas a velocidades en las coordenadas y o z , se obtiene un balance entre la aceleración instantánea, el gradiente de presión transitorio y divergencia del tensor de esfuerzos viscoplasto. A partir del balance de materia se obtuvo que la velocidad en z no depende de z es decir, solamente depende de la coordenada espacial r asumiendo simetría cilíndrica. Esto implica que el campo de velocidades es solenoidal y que las líneas de

corriente que entran a un elemento de control son las mismas líneas de corriente que salen de un elemento de control.

La ecuación dinámica lineal resultante, es un modelo de la familia de ecuaciones de Navier-Stokes, en donde, se ha definido un operador viscosidad o fluidez que cuantifica las propiedades reológicas de nuestro modelo mecánico en paralelo. La elección del modelo de Kelvin-Voigt se propuso debido a que se tiene un solvente, plasma y un componente elástico que relaciona las interacciones de la estructura (eritrocito).

Para resolver la ecuación diferencial parcial, se utilizó el formalismo de Fourier, el cual transforma la variable temporal en términos del inverso de la frecuencia por lo que, se tiene una ecuación algebraica en las frecuencias. La ecuación resultante es un modelo de la física matemática conocido como la ecuación diferencial de Bessel modificada no homogénea, la cual captura toda la física descrita en el estudio de este fluido complejo. Las condiciones de frontera utilizadas son: la condición de no deslizamiento entre la frontera y el líquido y la condición de simetría del campo de velocidades en el centro del tubo. Para resolver la ecuación de Bessel se utilizó un cambio de variable el cual nos permitió obtener una ecuación de Bessel compleja, cuya solución, se expresa en términos de una combinación lineal de funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden cero. El caso no homogéneo se trabajó con una solución particular resultando una contribución en términos del gradiente de presión multiplicado por el inverso del cuadrado de beta. Este vector está asociada a las oscilaciones de las funciones de Bessel. Al sustituir las condiciones de frontera en el perfil de velocidades general, se obtuvo la ecuación particular del perfil de velocidades, la cual depende de tres factores importantes: el parámetro beta, operador fluidez y gradiente de presión en el espacio de Fourier. Nótese, que el perfil de velocidades tendrá dos

componentes una real y otra imaginaria. Los perfiles de velocidad dependerán de las propiedades materiales del sistema a través del número de Deborah.

Integrando el perfil de velocidades sobre una sección de área transversal mediante la transformación jacobiana, obtenemos, el flujo volumétrico en función de las propiedades geométricas, parámetro beta, cociente de funciones de Bessel de ordenes cero-primer y gradiente de presión. Mediante una manipulación algebraica se obtiene la función de transferencia compleja la cual nos da una relación entre la variable de entrada y la variable respuesta (salida) es decir que es una medida del efecto de las propiedades materiales, geométricas y reológicas en el sistema de estudio.

La función de transferencia está compuesta de dos contribuciones real e imaginaria, ambas dependen del operador viscosidad y el parámetro beta que es el vector de longitud de onda en el sistema. Para simplificar la interpretación física y permitir un manejo computacional adecuado se propusieron un conjunto de variables adimensionales con el fin de acotar el sistema e introducir grupos adimensionales que describan la física implícita de los mecanismos macroscópicos del proceso. Ejemplo de estos números es el Deborah, el cuál relaciona los mecanismos viscoplasto del fluido. Este número se puede interpretar como el cociente de dos tiempos característicos principales: el tiempo inercial y el tiempo viscoelástico del material. Cuando el Deborah es cero significa que el fluido es completamente viscoso, mientras que cuando el Deborah es infinito el fluido se comporta como un sólido elástico de Hooke, mientras que en el caso particular de $De=1$ el sistema es viscoelástico.

Para entender la diferencia entre un fluido viscoplasto y un fluido newtoniano se analizó como primera aproximación la respuesta del fluido newtoniano en las dos geometrías.

6.2 Capilar.

En el caso del capilar la respuesta real de la función de transferencia es de relajación es decir una meseta a bajas frecuencias en donde el sistema no muestra una respuesta seguida de una función monótona decreciente donde el sistema se relaja hasta una segunda meseta, es claro, que aquí no presenta **resonancia** el sistema. La parte compleja, para el newtoniano presenta una respuesta resonante característica de la parte imaginaria de las funciones de transferencia, sin embargo, es claro que el fluido newtoniano no presenta resonancias y que la curva en la parte imaginaria es un comportamiento característico que se presenta en todos los sistemas. Para verificar la resonancia de un sistema se debe incluir la norma de la función de transferencia la cual nos da información completa de la parte real e imaginaria, y que en el caso de un fluido newtoniano se observa una curva de relajación. En el caso particular de la corona circular, el fluido newtoniano presenta la misma respuesta que en el capilar, pero introducimos la relación geométrica $R1/R2$ a través de una variable reducida R , la cual nos da la relación de la sección de área trasversal en donde se deforma el fluido. La diferencia notable entre un sistema y otro es que cuando la variable reducida se aproxima al valor de 1 hay una reducción considerable de la respuesta de la función de transferencia, mientras que en la parte imaginaria existen curvas asimétricas en donde la respuesta resonante se obtiene a mayores frecuencias. Biológicamente el capilar puede representar un proceso de hipercolesterolemia en las venas/arterias y la oclusión central podría presentarse cuando un sistema presenta tejido muerto que es básicamente un obstáculo en donde la sangre tiene que bifurcarse y atravesar una sección reducida de área.

6.3 Modelo viscoplasto: Kelvin-Voigt.

En el caso de un fluido viscoplasto de Kelvin-Voigt es evidente que la incorporación de la elasticidad que está asociada a la energía que se recupera presenta cambios importantes en la respuesta dinámica de la función de transferencia las cuales se van a describir a continuación:

- a. El fluido viscoelástico es caracterizado por un número adimensional conocido como el número de Deborah, este número nos representa los mecanismos viscoplasto del líquido.
- b. Cuando el número de Deborah tiende a cero el fluido newtoniano es recuperado y no se presentan resonancias en el sistema.
- c. Cuando el número de Deborah es diferente de cero el fluido presenta resonancia asociada a la parte real y la parte imaginaria del sistema de estudio.
- d. La parte real se observan solamente curvas resonantes que dependen del número de Deborah mientras que, en la parte imaginaria se observan resonantes y anti resonantes.
- e. La resonancia está asociada a una frecuencia muy particular del sistema, asociada al inverso del tiempo viscoelástico de Kelvin-Voigt.

6.4 Corona circular.

La corona circular es básicamente una geometría de dos cilindros concéntricos en donde las soluciones particulares son muy parecidas, la única diferencia es que las constantes C_1 y C_2 de la ecuación general de velocidad quedan expresadas en términos de funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden cero. Al sustituir las condiciones de frontera que en las dos áreas se anula la velocidad, es decir en $r=R_1$ y $r=R_2$ la velocidad en z es igual a cero. Procediendo de la misma manera que en el capilar se integra sobre una sección de

área circular las velocidades y obtenemos una expresión cerrada para el flujo volumétrico, que cuantifica la relación entre el gradiente de presión en el espacio de Fourier, operador fluidez, series de Bessel, relación geométrica y parámetro beta (vector de onda).

Las siguientes conclusiones del estudio de la función de transferencia en esta geometría son resumidas a continuación:

- a. La parte real de la función de transferencia muestra un comportamiento muy similar al del capilar, es decir, una función de relajación la cual depende de la relación geométrica R .
- b. Al incrementar el valor de la relación geométrica R , la respuesta dinámica del sistema tiende a decrecer considerablemente tanto en la parte real como en la imaginaria.
- c. El número de Deborah está relacionado íntimamente con las resonancias en el sistema y la resonancia dominante está explícitamente relacionada por el tiempo de relajación viscoplasto de Kelvin-Voigt.
- d. La parte imaginaria de la función de transferencia compleja en la corona circular muestra un comportamiento resonante y un anti resonante para otra frecuencia en particular.
- e. El efecto de la relación geométrica R sobre la parte imaginaria de la función de transferencia compleja es la de decrecer la respuesta dinámica lineal del sistema, es decir el efecto geométrico implica una reducción de área lo cual está asociado a un aumento de la frecuencia resonante para que el sistema alcance los máximos descritos a valores menores del valor geométrico R .
- f. Es importante resaltar que después del valor resonante dominante, sigue un tren de resonancias las cuales desde un punto de vista biológico podrían ser importantes.

- g. Los parámetros materiales importantes en esta tesis son: la densidad de fluido, viscosidad, fluidez, tiempo de relajación, longitudes características axiales y radiales, forma matemática de la onda de perturbación y módulo elástico de corte.
- h. Los números adimensionales importantes en este trabajo son el número de Deborah y la relación geométrica R.
- i. La concentración, efectos de temperatura pueden ser evaluados indirectamente a través de las propiedades materiales. Patologías particulares sólo pueden ser analizadas a través de las propiedades materiales en el sistema y deben de ser calculadas mediante experimentos reológicos en estado transitorio y estacionario.

6.5 Resumen de este capítulo

En este proyecto de licenciatura de la carrera de ingeniería química FES Zaragoza, UNAM se desarrolló un modelo que describe un fluido viscoplasto deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión transitorio. La herramienta que se utilizó para la caracterización de este sistema fue fenómenos de transporte, combinado con reología de fluidos complejos y dinámica de control de procesos. Académicamente, este trabajo representó nuevo conocimiento en el área de ecuaciones diferenciales parciales, transformada de Fourier, variable compleja, funciones especiales de la física matemática que están asociadas a coordenadas cilíndricas. El reto fue generalizar los resultados previos expuestos en la literatura mediante un operador viscosidad o fluidez que generaliza la mayoría de los fluidos viscoelásticos lineales isotrópicos. Es decir, que esta metodología matemática puede ser utilizada para describir fluidos como Maxwell, Jeffreys, Burgers, Kelvin-Voigt, variantes de familias de Kelvin-Voigt y fluidos fraccionales en donde se utiliza cálculo fraccional y generalizaciones de la función Gamma. Este trabajo tiene potencial aplicación en materia blanda, como sistemas micelares, dispersión de cristales líquidos y fluidos biológicos.

Finalmente, este trabajo y el esfuerzo en su realización representa una luz en el camino de nuevos modelos que describan y capturen la física de sistemas con varios grados de libertad y muestra una metodología estricta que se puede aplicar a varias áreas de la ciencia. Por último, agradezco a la carrera de ingeniería química FES Zaragoza, UNAM, al grupo de fenómenos de transporte y reología el apoyo para la terminación con éxito de este trabajo.

6.6 Trabajo futuro.

Este trabajo se puede extender al régimen no lineal de viscoelasticidad tomando en cuenta las características no lineales de fluido y geometría.

Por otra parte, se pueden desarrollar los experimentos con diferentes fluidos con el fin de alimentar los modelos y comprobar los resultados teóricos a través del experimento.

El estudio de métodos numéricos y códigos de programación que permitan extender los resultados obtenidos en este trabajo a través de paquetes computacionales basados en el elemento finito (comsol multiphysics).

Finalmente, se puede utilizar fenómenos acoplados de transferencia de momento, masa, reología y cristales líquidos en el estudio de diferentes patologías.

BIBLIOGRAFÍA.

- Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. 1987 Dynamics of polymeric liquids, vol. 1. New York: John Wiley & Sons.
- Bird, R.B., Stewart E. & Lighfoot E.N. 2002 Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.
- Cuevas, S & Del Rio, J.A. 2001 Dynamical permeability of electrically conducting fluids under magnetic fields in a annular ducts. Phys. Rev. E. 64, 016313/1-7.
- Del Rio J.A., De Haro, M.L. & Castrejón-Pita J.R. 1998 Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. Phys. Rev. E. 58 (5) 6323.
- Herrera-Valencia E.E. & Rey, A.D. 2014 Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. Phil. Trans. R. Soc. A. 372: 20130369/1-28.
- Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E., Manero, O. & Mena, B. 2009 Effect of random longitudinal vibrations pipe on the Poiseuille flow of a complex liquid. Rheol. Acta 48 779-800.
- Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E. & Manero, O. 2010 Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 165 174-183.
- Moreno L. Calderas, F. Sánchez-Olivares, G, Medina-Torres, L., Sánchez-Solis, A & Manero, O. 2013 La sangre humana desde el punto de vista de la reología. Materiales Avanzados. 20, 33-37.

- Moreno L. Calderas, F. Sánchez-Olivares, G, Medina-Torres, L., Sánchez-Solis, A & Manero, O. 2015 Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behaviour of the human blood. *Korea-Australia rheology journal* 3
- Torres, A.M., Pagonabarraga, I. y Corvera, E.P. (2017). Resonances of Newtonian fluids in elastomeric microtubes. *Phys. Fluids*, 29(122003), 1-7. doi: <https://doi.org/10.1063/1.5001061>
- Castro, M., Bravo, G.M., Hernandez, M.A. y Corvera E.P. (2008). Dynamic Characterization of Permeabilities and Flows in Microchannels. *Physical Review Letters*, 101(224501), 224501-1-224501-4. doi: [10.1103/PhysRevLett.101.224501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.224501)
- Colleparado, G.R. y Corvera, P.E. (2007). Controlling viscoelastic flow by tuning frequency during occlusions. *Physical Review E*, 76(026301), 026301-1-026301-7. doi: [10.1103/PhysRevE.76.026301](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.026301)
- Corvera, E.P. y del Río, J.A. (2004). Viscoelastic fingering with a pulsed pressure signal. *Institute of Physics Publishing*, 16, S2055–S2060. doi: [10.1088/0953-8984/16/22/003](https://doi.org/10.1088/0953-8984/16/22/003)
- Flores, J., Alastruey, J. y Corvera, E.P. (2016). A Novel Analytical Approach to Pulsatile Blood Flow in the Arterial Network. *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. 44, No. 10, pp. 3047–3068. doi: [10.1007/s10439-016-1625-3](https://doi.org/10.1007/s10439-016-1625-3)

- Flores, J., Corvera, E.P., del Río, J.A. y López, H.M. (2010). A plausible explanation for heart rates in mammals. *Journal of Theoretical Biology*, 265, 599–603.
- Del Río, J.A. y Castrejón, P.J.R. (2002). Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos. *Revista Mexicana de Física*, 49 (1), 74–85.