



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SIMULACIÓN DE IMAGENOLÓGÍA DE ESTRUCTURAS EN LA
PIRÁMIDE EL CASTILLO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

JAVIER IDALÍ LÓPEZ LUNA

TUTOR

DR. ARTURO ALEJANDRO MENCHACA ROCHA



Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

López

Luna

Javier Idali

5521511175

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

314256889

2. Datos del tutor

Dr

Arturo Alejandro

Menchaca

Rocha

3. Datos del sinodal 1

Dr

José Julio Emilio

Herrera

Velázquez

4. Datos del sinodal 2

Dr

Ernesto José María de la Salette

Belmont

Moreno

5. Datos del sinodal 3

Dr

Luis Abraham

García

Hernández

6. Datos del sinodal 4

Fís

Arcadio

Huerta

Hernández

7. Datos del trabajo escrito

Simulación de imagenología de estructuras en la pirámide El Castillo

50 p.

2022

*A mis padres:
Leonila Luna Serrano y Javier López Licea*

Agradecimientos

A mi madre Leonila, por siempre darme todo su apoyo, amor y cariño.

A mi padre Javier, pues a pesar de ya no estar conmigo, me dio todo lo que un padre puede darle a un hijo.

A mi hermana Alejandra, por sus revisiones de mis trabajos a lo largo de la carrera y por su cariño, aun que luego nos enojemos.

A mi tía Dominga Luna, por su apoyo y cariño en mis primeros años.

Agradezo mi Maestro y Asesor, Dr. Arturo Menchaca Rocha, por darme la oportunidad de trabajar con el, por todas sus enseñanzas, consejos y paciencia a lo largo de este proyecto.

A Ángel Silva, por su ayuda con las dudas computacionales de esta tesis, así como por su apoyo y amistad a lo largo de la carrera.

A Osiris Saavedra, por su ayuda con los esquemas de los detectores y por su amistad.

A Miguel Álcocer, por resolver mis dudas respecto los comandos de linux.

A mis amigos de siempre Ángel Silva, Osiris Saavedra, Aldo Pezzat, Ramón Yabra, Hugo Vega, Javier Zamora, Carlos Manríquez, Ismael Peralta, Julio César Espinosa, Patricio Vargas, Daniel Núñez, Jorge Ortega, Rigoberto Valenzuela, Juan Carlos Medina, Roberto Bazán, Iván Muñoz y todas las personas que estuvieron en los buenos y malos momentos a lo largo de la carrera. A mis profesores Mat. Luis Manuel Hernández Gallardo, Dr. Juan Carlos Pompa Váldez, Escultor Juan Rabadán Tapia y a todos mis maestros de la Facultad Ciencias de la UNAM y de la Prepa 5.

Índice general

Introducción	8
1. El Castillo	9
1.1. Chichén Itzá y El Castillo	9
1.2. Dimensiones	10
1.3. Interior	10
1.3.1. Estructuras interiores de El Castillo	12
2. Partículas Fundamentales	14
2.1. Modelo Estándar	14
2.1.1. Bosones	14
2.1.2. Fermiones	15
2.2. Generaciones	15
2.3. Muones	16
3. Rayos Cósmicos	18
3.1. Composición	18
3.2. Muones atmosféricos	18
3.2.1. Rayos cósmicos en la superficie de la Tierra	19
4. Muografía	21
4.1. Atenuación de Muones	21
4.1.1. Ecuación de Bethe-Bloch	22
4.1.2. Dispersión múltiple para ángulos pequeños	23
4.2. La técnica de Álvarez	24
5. Simulación Geométrica	27
5.1. Gráficas con un detector ubicado en la base del eje de simetría de la pirámide (0,0,0)	29
5.1.1. Pirámide en función de la distancia al detector, sin estructuras internas	29

5.1.2. Pirámide en función de la distancia al detector, con estructuras interiores	31
5.2. Distribución de flujo aproximado para detector en (0,0,0)	34
5.2.1. Pirámide sin estructuras internas	35
5.2.2. Pirámide con estructuras internas	35
5.3. Distribución de flujo aproximado para un detector desplazado horizontalmente	36
5.3.1. Gráfica de flujo con el detector en (0,-12,0)	38
5.3.2. Efecto aproximado de la dispersión múltiple	38
6. Conclusiones	42
7. Apéndice	43
7.1. Código generador de rayos	43
7.2. Obtención de catetos adyacentes	47
Bibliografía	49

Introducción

En ocasiones, diferentes áreas del conocimiento se deben unir para resolver un problema en común. Esta tesis versa sobre una aplicación de la física a la arqueología y el problema es el poder estudiar el interior y exterior de un monumento por medio de técnicas no invasivas. La aquí descrita fue originalmente propuesta por Luis Álvarez, Premio Nobel de Física 1968.

Álvarez instaló un detector de muones en la única cavidad conocida al interior de la Pirámide de Kefrén, ubicada en Giza, Egipto. Con ese instrumento midió el flujo de muones atmosféricos que atravesaban la pirámide y llegaban a su aparato. Conocida la geometría externa de la pirámide, y suponiendo que posee una densidad uniforme en su interior, fue posible estimar el flujo integrado durante suficiente tiempo de los rayos cósmicos que incidirían sobre el detector, en ausencia de cavidades intermedias. De esa manera, el exceso de flujo medido, respecto del estimado, en alguna dirección podrían evidenciar la existencia de una cavidad.

Hoy en día los principales procesos físicos a que está expuesto un muón que atraviesa la materia que compone una pirámide son bien conocidos y se encuentran integrados en una plataforma de simulación denominada GEANT4. Por lo tanto ésta constituye la opción más confiable para ser utilizada en muografía. Sin embargo en ella se da seguimiento incluso a rayos que no impactan el detector y consume mucho tiempo de cómputo. Así, con la finalidad de ser más eficientes, en esta tesis se simulará la geometría de la pirámide, así como, los rayos cósmicos y el detector utilizando un programa simplificado, basado en parametrizaciones para la atenuación y utilizando el lenguaje C++. El interés es realizar una estimación sobre la viabilidad de visualizar las estructuras internas de la pirámide 'El Castillo' en Chichen Itzá a partir de proyecciones planas y, en su caso, buscar la(s) localización(es) óptima(s) del detector y así obtener inicialmente resultados aproximados que permitan encontrar, por ejemplo la mejor ubicación del detector, previo a realizar una simulación mas precisa.

Dada la complejidad de la geometría de 'El Castillo', para las simulaciones de esta tesis se considerará una pirámide con la estructura exterior de las pirámides de Giza pero agregando estructuras interiores cuyas dimensiones sean similares a las de 'El Castillo'.

Capítulo 1

El Castillo

1.1. Chichén Itzá y El Castillo

Los inicios de Chichén Itzá datan desde el Clásico Tardío, de 600 a 870 d.C, cuando comienza la arquitectura temprana, siendo la Casa de los Estucos, debajo del Templo de la Serie Inicial, la más antigua. En el Clásico Terminal, del 800-870 al 900, se da el primer apogeo de Chichén. Dentro de este periodo encontramos numerosos textos jeroglíficos que hacen referencia a la vida del gobernante K'ahk' Upakal, de 867 a 897, quien supervisó el primer gran período de expansión arquitectónica y crecimiento urbano. Todas las estructuras mencionadas corresponden a lo que hoy se conoce como Chichén Viejo.[1]

De 900 al 950-980 sobresale la subestructura o interior de *El Castillo* (900 al 950), un edificio importante para la historia de Chichén, ya que tal temporalidad sigue siendo Clásico Terminal, pero a la vez conecta con el Posclásico Temprano: es un periodo transitorio. El estilo arquitectónico es el llamado transicional, combina el estilo Puuc con ciertos elementos toltecas o del Centro de México. Después de 950 ocurriría el inicio de la actual construcción exterior de *El Castillo*, también conocida como el templo de Kukulcán. El actual templo se terminó de construir en el siglo XII d. c.



Figura 1.1: El Castillo. Imagen tomada de Wikipedia CC BY-SA 4.0

Su diseño tiene una forma geométrica piramidal; cuenta con nueve niveles o basamentos, cuatro fachadas principales, cada una con una escalinata central, y una plataforma superior, rematada por un templete. En esta construcción, se rindió culto a la entidad maya Kukulcán (en idioma maya: serpiente emplumada), razón por la cual se pueden apreciar motivos serpentinos en la decoración arquitectónica. La alineación de la construcción de la pirámide permite que se puedan observar diversos fenómenos de luz y sombra, los cuales se producen en su propio cuerpo durante los equinoccios y solsticios cada año.[2]

1.2. Dimensiones

La altura de la pirámide de Kukulcán alcanza los 24 m hasta la plataforma superior, más 6 m de su templete para lograr 30 m como máximo. La pirámide de Kukulcán mide 55.3 m en las bases de sus fachadas.

De tal forma, las medidas de la pirámide de Kukulcán no rivalizan con otras construcciones similares en el mundo; incluso la pirámide de Tikal (47 m) es más alta. Son sus características arquitectónicas, sus simbolismos calendáricos y astronómicos los que la destacan de forma particular.[3]

1.3. Interior

En 1566 el templo fue descrito por fray Diego de Landa en el manuscrito *Relación de las cosas de Yucatán*; casi tres siglos más tarde John Lloyd Stephens describió de manera más minuciosa la arquitectura de la pirámide en su libro *Incidentes del viaje a Yucatán*, obra publicada en 1843. El libro decorado con litografías de Frederick Catherwood muestra la pirámide cubierta de abundante vegetación en todos sus taludes. Existen



Figura 1.2: Tamaño comparativo del templo de Kukulcán (Estructura naranja y de menor tamaño) con la pirámide Sol (Estructura amarilla) y la pirámide de Giza (Azul y de mayor tamaño)

fotografías tomadas a principios del siglo XX donde aparece la pirámide cubierta parcialmente con dicha vegetación.



Figura 1.3: Templo de Kukulcán en 1860, tal y como lo encontró el arqueólogo francés Désiré Charnay. Imagen de dominio público, tomada de Wikipedia.

El Instituto Carnegie de Washington solicitó en 1924 permiso al Gobierno mexicano para realizar exploraciones y reconstrucciones en la zona de Chichén Itzá. En 1927, con la asistencia de arqueólogos mexicanos, se iniciaron los trabajos. En 1931, buscando confirmar la hipótesis de que la estructura de la pirámide de Kukulcán se encontraba construida sobre otra pirámide más antigua, se iniciaron los trabajos de excavación y exploración, pese a la reticencia general de la época. En gran medida, el arqueólogo José Erosa Peniche influyó en la autorización de dicha exploración. El 7 de junio de 1932

se encontró una caja con objetos de coral y obsidiana e incrustaciones de turquesa a un lado de restos humanos; los objetos se exhiben en el Museo Nacional de Antropología de la Ciudad de México.[3]

Después de largos trabajos, en abril de 1935 se encontró en el interior del templo una figura de Chac Mool con incrustaciones de concha nácar en sus uñas, dientes y ojos. El recinto donde se realizó el hallazgo fue bautizado como Sala de las Ofrendas o Cámara Norte. A sólo unos cuantos metros, y tras más de un año de excavaciones, en agosto de 1936 se descubrió un segundo recinto, el cual se bautizó con el nombre de cámara de sacrificios, dentro del cual se encontraron dos hileras de canillas humanas empotradas de forma paralela al fondo de la cámara, y la escultura de un jaguar de color rojo con 74 incrustaciones de jade que simulan en el cuerpo las manchas características de la especie; los ojos son simulados con medias lunas de la misma piedra y los colmillos y dientes en pedernal pintados de blanco. En el lomo se encontraba un disco de turquesas, el cual aparentemente servía para quemar copal. Como conclusión se determinó la existencia de una pirámide de medidas aproximadas de 33 metros de ancho, de igual forma que la exterior, con nueve basamentos y una altura de 17 m hasta la plataforma del templete donde se encontraron el Chac Mool y el jaguar. Se estima que esta construcción corresponde al siglo XI d. C. Concluidos los trabajos se construyó una puerta de acceso en la balaustrada de la escalinata exterior de la fachada para facilitar el acceso a los turistas. La pirámide interior más antigua es referida como «subestructura».[4]



(a) Chac Mool



(b) Jaguar

Figura 1.4: Esculturas conocidas dentro del Castillo. Imágenes tomadas de Wikipedia CC BY-SA 3.0

1.3.1. Estructuras interiores de El Castillo

La pirámide que se ve ahora es la tercera “capa” de edificios con un total de tres estructuras que corresponden a diferentes periodos de tiempo: la más antigua fue construida entre los años 500 y 800 d.C., luego se construyó una segunda encima que

data de entre los años 950 y 980, sobresaliendo la subestructura o interior de *El Castillo*. Es decir, la sala de ofrendas y cámara de sacrificios, donde se encuentran el Chac Mool y el jaguar respectivamente, no es más que la parte superior de lo que sería la segunda capa. Los mayas no destruían los edificios porque eran sagrados, sino que construían encima de ellos.[1][5]

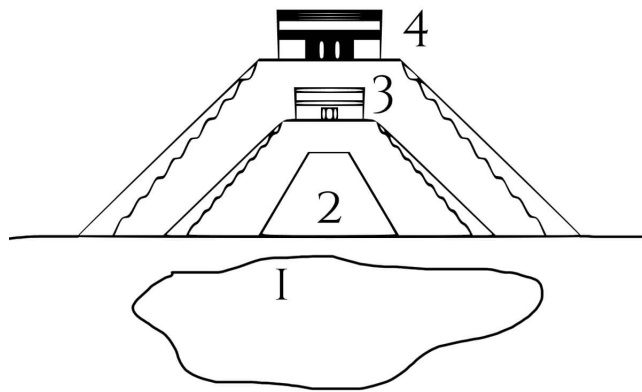


Figura 1.5: Corte transversal de la pirámide, de estructuras conocidas

1. Cenote sobre el cual se construyó *El Castillo*
2. Subsubestructura
3. Subestructura, construcción sobre la cual se hizo la pirámide actual.
4. Pirámide hoy en día.

Capítulo 2

Partículas Fundamentales

Las partículas fundamentales son los componentes más básicos de la materia, es decir son entidades que no están constituidas por otras partículas más simples. Estas partículas junto con sus interacciones (con excepción de la gravedad) son descritas por el Modelo Estándar.

2.1. Modelo Estándar

Es una teoría cuántica de campos, basada en las ideas de la unificación y simetrías que describe la estructura fundamental de la materia y el vacío, considerando las partículas elementales como entes irreducibles cuya cinemática está regida por tres, de las cuatro interacciones fundamentales conocidas (ya que la gravedad, cuya principal teoría, la relatividad general, no encaja con los modelos matemáticos del mundo cuántico). Las partículas que conforman el Modelo Estándar se agrupan en dos familias: bosones y fermiones.[6]

2.1.1. Bosones

Los bosones son las partículas que transmiten las fuerzas, en la teoría de partículas, se entienden las fuerzas fundamentales como el intercambio de partículas bosónicas. Se llaman bosones, porque al tener espín entero siguen la estadística de Bose-Einstein. Las fuerzas del modelo estándar son:

- **Fuerza nuclear fuerte:** Es la responsable de mantener unidos a los nucleones (protones y neutrones) que coexisten en el núcleo atómico, venciendo a la repulsión electromagnética entre los protones que poseen carga eléctrica del mismo signo (positiva) y haciendo que los neutrones, que no tienen carga eléctrica, permanezcan unidos entre sí y también a los protones.

- Fuerza nuclear débil: La fuerza nuclear débil es la responsable de la desintegración radiactiva de las partículas subatómicas y es la iniciadora del proceso conocido como fusión nuclear en las estrellas.
- Fuerza Electromagnética: Describe la interacción de partículas cargadas con campos eléctricos y magnéticos. Las partículas cargadas interactúan electromagnéticamente mediante el intercambio de fotones.
- Fuerza gravitatoria: La fuerza de atracción entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Sin embargo, a nivel nuclear su intensidad es despreciable.

Campo	Bosón	Símbolo	Espín (\hbar)	Masa (GeV/c^2)	Color	Carga (C)
Electromagnético	Fotón	γ	1	0	no	0
Fuerte	Gluón	g	1	0	r,a,v	0
Débil	De norma	W+/-	1	80	no	+/-
Débil	De norma	Z ⁰	1	91	no	0
Gravitacional	Gravitón	G	2	0	no	0
De Higgs	Higgs	H ⁰	0	125.7	no	0

Cuadro 2.1: Caracterización de Bosones

2.1.2. Fermiones

Se llaman fermiones porque siguen la estadística de Fermi-Dirac y se caracterizan por tener espín semi entero: $1/2\hbar, 3/2\hbar, 5/2\hbar, \dots$. A diferencia de los bosones, los fermiones siguen el Principio de exclusión de Pauli, el cual establece que no puede haber dos fermiones en el mismo estado cuántico. En consecuencia, al agruparse forman sistemas más complejos, como los núcleos, los átomos y las moléculas.[7]

Los fermiones existen en dos familias, quarks y leptones, cuya única diferencia es que los quarks interactúan por la fuerza nuclear fuerte y los leptones no.[6]

2.2. Generaciones

El modelo estándar agrupa las partículas en tres generaciones de leptones y tres de quarks. Entre ellas varía la masa que va aumentando de acuerdo con el número de la generación, siendo la tercera la más pesada. Más allá del Modelo Estándar, no podría descartarse del todo la posibilidad de una cuarta generación. El Modelo Estándar también incluye la existencia de seis sabores de quarks (q) divididos en las tres generaciones

ya mencionadas. En la primera tenemos los quarks arriba (u) y abajo (d). En la segunda, los quarks encantado (c) y extraño (s). Y en la tercera, los quarks fondo (b) y cima (t). Las Antipartículas de los quarks son los antiquarks, y son denotados por una barra sobre el símbolo del correspondiente, por ejemplo, si un quark se representa u , un antiquark se escribe \bar{u} . Así como con la antimateria en general, los antiquarks tienen la misma masa, vida media, y espín que sus respectivos quarks, pero con carga de signo opuesto. [8]

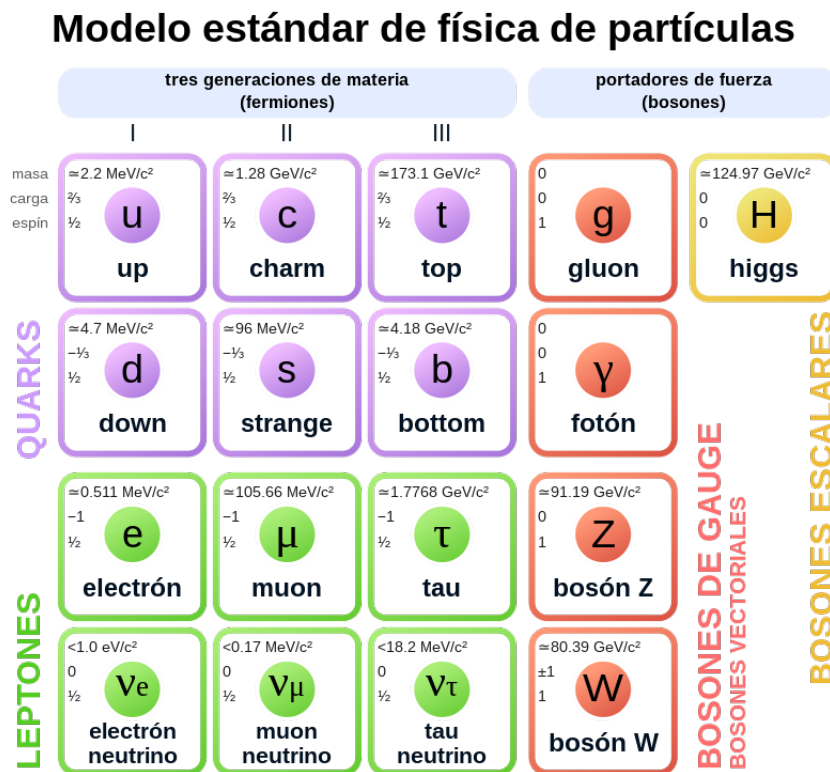


Figura 2.1: Modelo Estándar de partículas elementales. Imagen tomada de Wikipedia CC BY-SA 4.0

2.3. Muones

El muon (μ) es una partícula elemental masiva que pertenece a la segunda generación de leptones. Su espín es $1/2$. Posee carga eléctrica negativa, como el electrón, pero su masa es 207 veces mayor que éste. El muón es inestable, aunque su vida media es algo más larga que otras partículas inestables ($2,2 \mu\text{s}$). El muón también tiene asociado su correspondiente antipartícula, el antimuón (μ^+) [9]

Los muones atmosféricos producidos por los rayos cósmicos son una de las formas naturales de radiación a la que estamos expuestos diariamente. Hasta la década de los 60, su estudio se centraba en entender su origen y propiedades, pero esto cambió y también se han investigado aplicaciones, desde radiografiar pirámides, hasta detectar restos radiactivos.

Debido a su alta masa, los muones tienen gran capacidad de penetración, que llega a ser de varios kilómetros en roca, antes de detenerse o decaer. Los muones de origen cósmico se crean principalmente en las capas altas de la atmósfera, misma que logran atravesar con cierta eficiencia, hasta alcanzar la superficie de la Tierra. Su flujo no es muy grande (alrededor de un muón por centímetro cuadrado por minuto al nivel del mar), pero nos llegan continuamente. Por su elevada energía, se trata de radiación ionizante que llega a impartir una dosis radiológica en materia biológica de unos 0.39 mSv (miliSievert). Comparada con la dosis anual total de ≈ 3 mSv a la que estamos expuestos debida a varias fuentes, representa cerca del 10%. [10]

Capítulo 3

Rayos Cósmicos

Los rayos cósmicos fueron descubiertos por Victor Hess en 1912 en experimentos con globos aerostáticos. Por este hallazgo recibió el Premio Nobel de Física en 1936.

3.1. Composición

Como su nombre lo indica, inicialmente estos rayos provienen del cosmos, es decir, más allá de la atmósfera terrestre. De ellos, el 99 % son núcleos atómicos completamente ionizados, mientras que alrededor del 1 % son electrones. De los núcleos, alrededor del 90 % son protones, y el 9 % son núcleos de helio. El 1 % restante son núcleos de elementos más pesados. Estas fracciones varían mucho en el rango de energía. Finalmente, una fracción muy pequeña son partículas estables de antimateria, como positrones y antiprotones.[6]

3.2. Muones atmosféricos

La radiación cósmica primaria que logra penetrar el campo geomagnético debe poseer velocidades cercanas a la de la luz. Sólo una pequeña fracción de esta radiación se origina en el Sol, mientras que la mayor parte proviene de más allá del Sistema Solar, sobre todo de nuestra galaxia. Algo de esta radiación puede, incluso, originarse en otras galaxias, pero se estima que la fracción es muy escasa. Más que su origen, lo que aquí importa de esta radiación, llamada primaria, es aquella que logra incidir sobre la atmósfera terrestre. Cuando esto ocurre, se producen colisiones de la radiación primaria con las moléculas que componen los gases atmosféricos, produciéndose chubascos de partículas secundarias. Entre estas últimas encontramos a los piones cargados, que son hadrones (mesones) altamente inestables, con una vida media de 26 ns. Por lo tanto, estas avanzan muy poco antes de decaer, produciéndose así los muones cargados que nos interesan aquí, también conocidos como muones atmosféricos. Aunque el

muón también es inestable, su vida media de $2.2 \mu\text{ s}$ permite que algunos de ellos, especialmente aquellos que tienen suficiente energía, logran penetrar en línea (casi) recta hasta kilómetros de tierra, antes de perder toda su energía y/o decaer. Esta es la característica que permite su uso en imagenología.

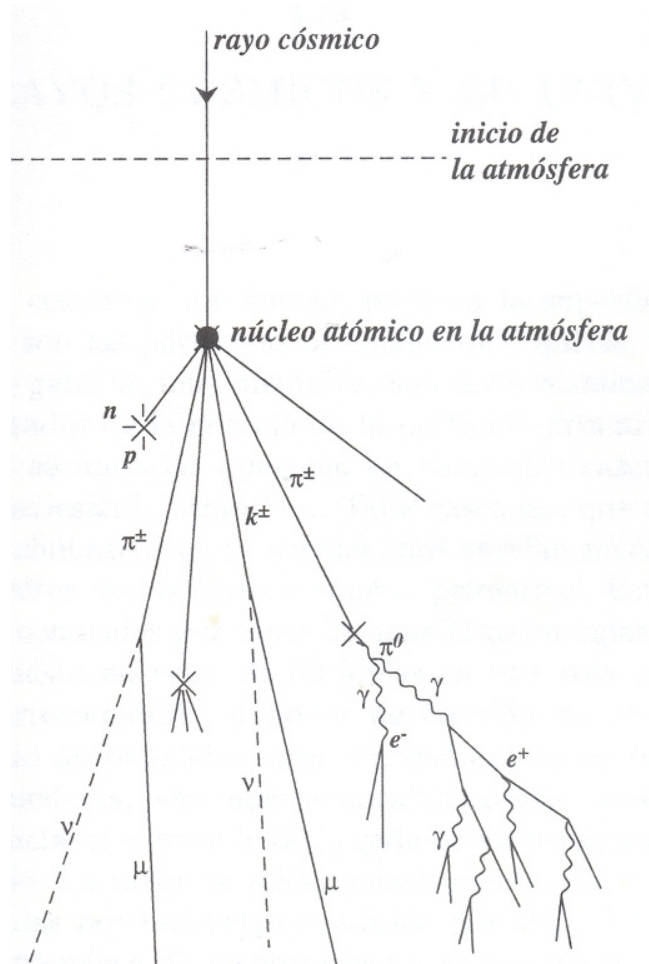


Figura 3.1: Rayo cósmico primario colisionando con partículas de la atmósfera.

3.2.1. Rayos cósmicos en la superficie de la Tierra

La mayoría de los muones se producen en los 15 km más altos de la atmósfera. En promedio, estos pierden unos 2 GeV de su energía cinética por ionización de la atmósfera, antes de llegar al suelo con una energía media de 4 GeV. Por debajo de 1 GeV, el espectro de energía es casi plano. Más allá, el flujo disminuye casi monótonicamente, de acuerdo a una ley exponencial del tipo $P_\mu^{-2,7}$, donde P_μ es el momento del muón y $\frac{dN}{dP_\mu}$ representa la variación del número de muones respecto a su momento. Al eliminar dependencia exponencial (ver gráfica 3.2) vemos que la dependencia del flujo vertical normalizado ($\theta = 0^\circ$) aumenta gradualmente. A mayores energías el espectro llega a un máximo y luego disminuye. Esto último se debe al decaimiento de los piones que los originan. [11]

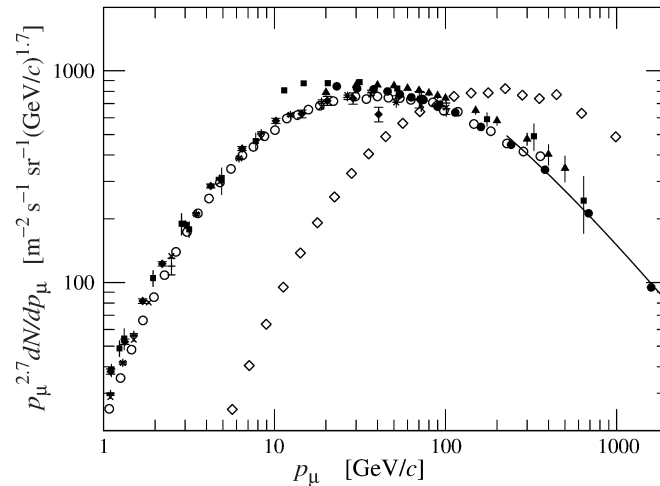


Figura 3.2: Espectro de energía de los muones a nivel del mar para dos ángulos $\theta=70^\circ$ representados por los rombos vacíos, mientras que $\theta=0^\circ$ es representado por el resto de figuras.[12]

Los rayos cósmicos que inciden sobre la Tierra cuyos ángulos polares son grandes ($\theta = 70^\circ$), por cruzar una capa de atmósfera más larga, los muones de baja energía que producen decaen antes de alcanzar la superficie de la Tierra. El efecto de la relatividad hace que los muones de mayor energía aumenten su vida media, por lo tanto, el máximo del espectro normalizado se corre hacia mayor energía ¹. [13]

¹Nótese que el efecto de la relatividad para muones de ≥ 4 GeV es tal que la energía residual ($m_\mu c^2 = 0.106$ GeV) pasa a ser una fracción pequeña de la energía total. Por lo tanto, la magnitud de su momento P_μ en unidades de GeV/c, se aproxima al de la energía total, medida en GeV. Esto explica por qué el pie de la Fig. 3.2 se refiere al espectro de energía, cuando lo que se muestra es el espectro de momento

Capítulo 4

Muografía

La muografía es una técnica de imagenología basada en la atenuación del flujo de muones atmosféricos que ocurre al atravesar una determinada cantidad de materia. Como veremos a continuación, la atenuación está asociada con la probabilidad de que los muones atmosféricos interactúen y se detengan al atravesar un material, lo cual es proporcional a la densidad del medio. Como se vió en el capítulo anterior, el flujo inicial, es decir, previo a atravesar el objeto material a investigar, depende del momento del muón como $P_{\mu}^{-2,7}$. Esto implica que los muones de menor energía son los más abundantes. Entonces, si a lo largo de la trayectoria de los muones hay un hueco (o una zona de menor densidad), el flujo medido al final de la trayectoria aumentará significativamente, comparado con trayectorias que no pasan por ese hueco (o la zona menos densa). Por lo tanto, el principio de funcionamiento de la técnica se basa en esta dependencia inversa entre el flujo de muones que atraviesa un volumen material y el patrón de densidad del material a su interior. Así, los muógrafos deben reconstruir la ecuación de la trayectoria de cada muón para producir un muograma. Se trata de la matriz de los números resultantes de muones transmitidos en diferentes ángulos después de haber pasado a través de las estructuras estudiadas. La estructura interna del objeto, representada en términos de densidad, se muestra convirtiendo muogramas en imágenes muográficas.[14]

4.1. Atenuación de Muones

Una partícula cargada eléctricamente que pasa a través de un medio, interactúa principalmente con los electrones atómicos, produciendo ionización. Es así como los muones atmosféricos pierden energía hasta detenerse.

4.1.1. Ecuación de Bethe-Bloch

La ecuación de Bethe-Bloch describe la pérdida de energía (también referida como poder de frenamiento) media por distancia recorrida de partículas cargadas que atraviesan la materia, algunas de las suposiciones para la deducción de esta ecuación, son que las partículas que atraviesan el medio únicamente interactúan electrónicamente y que las nubes de electrones están prácticamente en reposo . [15]

La formulación relativista para la pérdida de energía tiene la siguiente forma[16]:

$$-\frac{dE}{dx} = (4\pi N_A r_e^2 m_e c^2) z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 W_{max}}{I^2}\right) - \beta^2 - \delta(\beta\gamma) \right] \quad (4.1)$$

Donde:

- r_e Representa el radio clásico del electrón (2.82 f).
- N_A Es el número de Avogadro.
- m_e Es la masa del electrón.
- I Representa el potencial de excitación del medio.
- A Es la masa atómica del medio absorbente.
- Z Es el número atómico del medio absorbente.
- z Es la carga de la partícula incidente en unidades de e
- $\beta = v/c$ con v la velocidad de la partícula incidente
- $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$
- δ Representa la corrección de efecto de densidad
- W_{max} Máxima energía transferida en una sola colisión

Para una partícula incidente de masa M , la máxima energía transferida en una colisión, está dada por[16]:

$$W_{max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2} \quad (4.2)$$

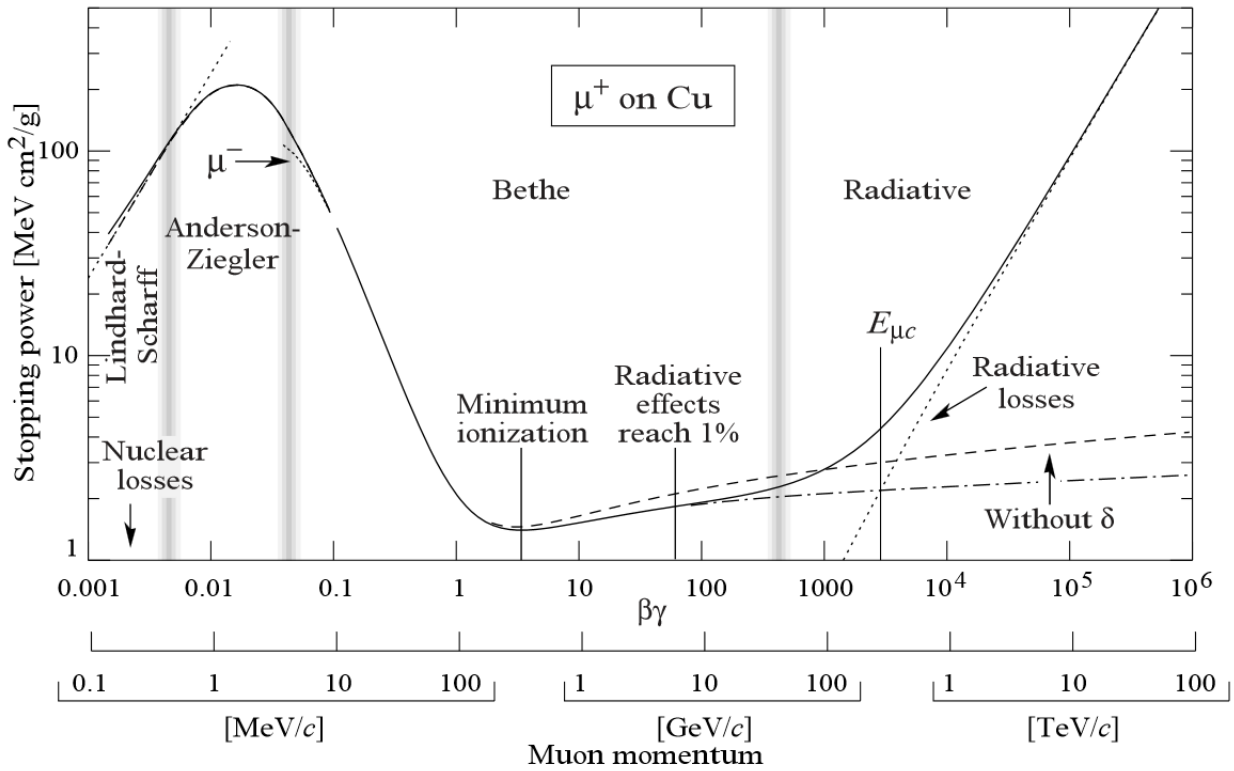


Figura 4.1: Poder de frenamiento másico para anti-muones en cobre como función de $\beta\gamma = p/Mc$ Tomada de PDG: P.A. Zyla et al. (Particle Data Group)

En la figura 4.1 para muones positivos en cobre, se aprecia que la ecuación de Bethe Bloch sólo es válida en la región entre la segunda y tercer franja vertical, entre $\beta\gamma \approx 0.1$ y $\beta\gamma \approx 1000$. Para $\beta\gamma > 1000$ las pérdidas por radiación son predominantes y se deben a otros procesos físicos. La mayoría de los muones cósmicos, tienen tasas de pérdida de energía media cercanas al mínimo, por ende, comúnmente se les conoce como partículas mínimo ionizantes.[14]

4.1.2. Dispersión múltiple para ángulos pequeños

Además de colisiones inelásticas, las partículas cargadas que pasan a través de la materia también sufren repetidas dispersiones elásticas debido a interacciones electromagnéticas con los núcleos. Como estos son mucho más masivos, la energía que les transfieren los muones es despreciable. Como resultado, los muones que atraviesan el medio sufren pequeñas desviaciones aleatorias, cuyo efecto acumulativo se puede ver como una pequeña deflexión respecto a la dirección inicial de la partícula.[14][17] Para ángulos de deflexión pequeños, la distribución de Molière para la dispersión de Coulomb múltiple puede ser aproximado por la gaussiana:

$$P(\theta_s)d\Omega_s \approx \frac{2\theta_s}{\langle\theta_s^2\rangle} \exp\left(\frac{-\theta_s^2}{\langle\theta_s^2\rangle}\right) d\theta_s \quad (4.3)$$

con θ_s el ángulo de dispersión, $d\Omega_s = 2\pi d\theta_s$ la sección diferencial de ángulo del dispersión, el término $\langle \theta_s^2 \rangle$ representa el valor cuadrático medio (rms) y está dado por:

$$\langle \theta_s^2 \rangle = \frac{13,6 \text{ MeV}}{\beta c p} z \sqrt{\frac{x}{X_0}} [1 + 0,038 \ln(\frac{x z^2}{X_0 \beta^2})] \quad (4.4)$$

Donde X_0 es la longitud de radiación, que se define como la distancia tras la cual la energía del electrón se reduce en un factor $1/e$ debido a pérdidas por radiación. Se trata de una característica de un material, relacionada con la pérdida de energía de las partículas de alta energía que interactúan electromagnéticamente con él. Sus unidades son g/cm^2 [17]

Usaremos la siguiente aproximación para la longitud de radiación:

$$X_0 = 716,4 \frac{A}{Z(Z+1) \ln(\frac{287}{\sqrt{Z}})} \quad (4.5)$$

4.2. La técnica de Álvarez

"Cuando vi por primera vez las pirámides en el verano de 1962, de camino a una conferencia de física de altas energías en Ginebra, traté de imaginar cómo fueron construidas. Sin embargo, no fue hasta que me encontré en la Antártida durante diez días a principios de 1964, cuando encontré tiempo para pensar más profundamente acerca de las pirámides. Entonces me entusiasmé tanto que, cuando volví a Berkeley, tomé una gran pila de libros de la biblioteca y me centré en ellos durante semanas"

Luis Álvarez

El primer muograma fue una matriz del número de eventos de muones producidos en 1970 por el físico estadounidense Luis Walter Álvarez. Él logró reunir a un equipo internacional de físicos y arqueólogos, mayoritariamente estadounidenses y egipcios, para llevar a cabo el singular experimento de 'radiografiar' una pirámide. El lugar elegido fue la única cámara conocida, denominada de Belzoni en honor a su descubridor, en el interior de la pirámide de Kefrén. Aunque la idea podía llevarse a cabo, no era algo precisamente barato y, además, el experimento tuvo que ser interrumpido en 1967 por la Guerra de los Seis Días. Cuando ya se había mapeado casi el veinte por ciento de la pirámide, sin encontrarse nuevas cámaras, se presentó un informe ante la American Physical Society.

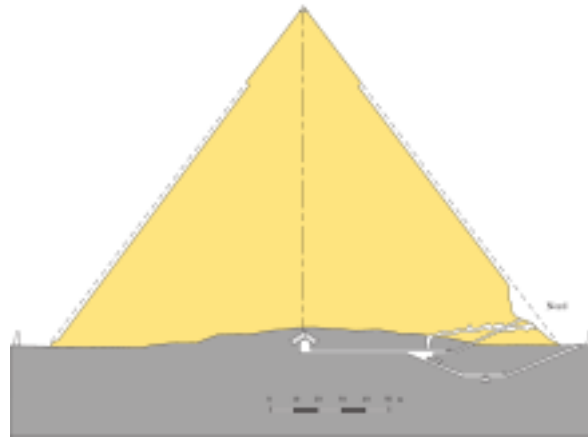


Figura 4.2: Interior pirámide de Kefrén

Álvarez instaló detectores conocidos como 'cámara de chispas' en la Cámara Belzoni. Estos detectores consisten en cámaras que contienen un gas noble (helio, neón, argón o una mezcla de varios), contenido entre dos planos a diferente potencial eléctrico (usualmente unos miles de voltios). Cuando una partícula cargada, como un muón, atraviesa el gas, deja una traza de gas ionizado. Al aplicar una diferencia de potencial entre los dos planos, la traza de ionización produce una descarga (una chispa) entre los planos. La chispa indica dónde se ha producido el impacto. Colocando varias cámaras una encima de otra, puede observarse la trayectoria de la partícula. Todo esto con el fin de buscar cámaras ocultas de la Pirámide de Kefrén. Previamente había colocado detectores en la Gran pirámide de Keops y comprobado la eficacia del método, pues Keops cuenta con estructuras internas conocidas. Registró el número de muones que pasaban por la Pirámide y en donde tuviera un mayor número de cuentas, es donde podría haber una estructura no descubierta, pues habría mayor flujo de muones ya que pasan por menos cantidad de piedra. Con la invención de esta técnica de seguimiento de partículas, desarrolló los métodos para generar el muograma en función de los ángulos de llegada de los muones. El muograma generado se comparó con los resultados de las simulaciones por computadora y concluyó que no había cámaras ocultas en la Pirámide de Kefren después de que el aparato estuvo expuesto a la Pirámide durante varios meses.[18][19]

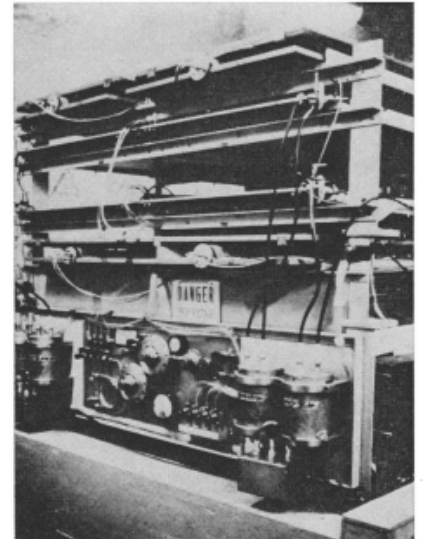
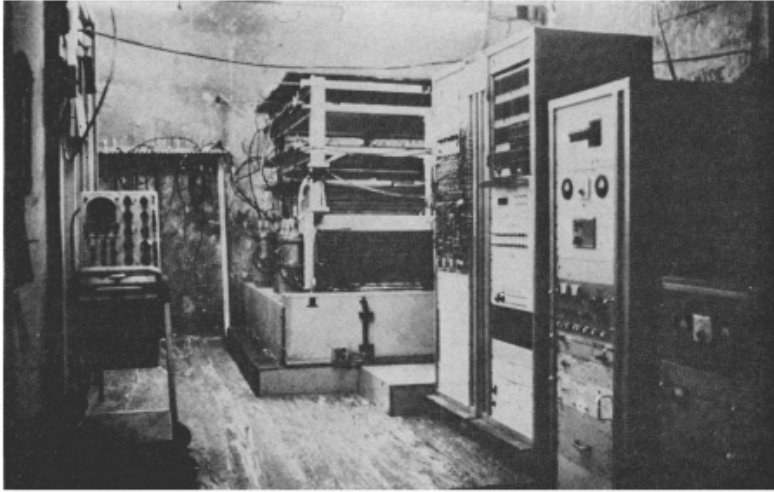


Fig. 6 (left). The equipment in place in the Belzoni Chamber under the pyramid.
Fig. 7 (right). The detection apparatus containing the spark chambers.

Figura 4.3: Cámaras de chispas instaladas en la cámara de Belzoni. [18]

Capítulo 5

Simulación Geométrica

En esta tesis, para la simulación de la pirámide se escribieron programas en C++ que tienen la ventaja de ejecutarse en 10 minutos desde una computadora personal, los dos principales programas están en 7.1 y 7.2 en el apéndice y son El generador de rayos (7.1) que emula dos detectores cuadrados de 1mx1m, separados entre sí 1m, con el objetivo de poder simular la mayor cantidad de trayectorias de rayos cósmicos que pasan por el detector y el de Obtención de catetos adyacentes (7.2) que se usa para generar la geometría externa de la pirámide.

A continuación se explicará la idea principal del código 7.1, se programaron dos matrices A y B de 100x100 elementos cada una, tal que las entradas son de la forma:

$$A_{ij} = (i, j) \tag{5.1}$$

$$B_{mn} = (m, n) \tag{5.2}$$

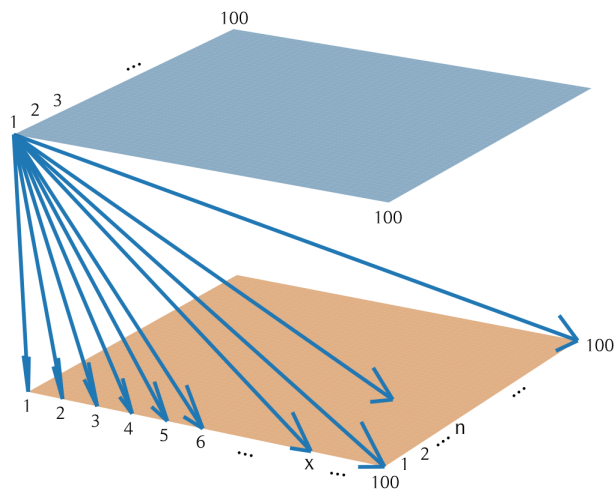


Figura 5.1: Vectores diferencia entre cada detector

Entonces tenemos 10000 entradas en cada matriz, sobre esa base y la distancia entre cada detector, podemos saber el vector diferencia que hay entre cada entrada de A con cada entrada de B, es decir:

$$A(i, j, 100) - B(m, n, 0) = C(i - m, j - n, 100) \quad (5.3)$$

Donde C es una matriz de 1000x1000 que contiene todos los vectores diferencia, C tiene la propiedad de ser simétrica en su diagonal, por lo cual podemos descartar la mitad de los vectores diferencia. Una vez hecho esto, es posible sacar el ángulo respecto de cada eje coordenado que hace con cada vector. Por lo tanto, tenemos tres listas con los ángulos que hace con respecto de eje x, y, z, las cuales se reducen usando los comandos sort y uniq de la terminal de Linux, los cuales ordenan los vectores, para después eliminar los que se repiten, entonces cada lista termina reducida a solo 80 000 ángulos diferentes.

Por medio de la geometría euclidiana, esta lista de ángulos permite reconstruir la estructura externa e interna de la pirámide.

A falta de información confiable que permita definir la forma externa de *El Castillo*, y por simplicidad, consideraremos la estructura externa de una pirámide egipcia, pero con las estructuras internas y dimensiones de *El Castillo*. La altura es de 36 m, con una base de 56mx56m.

5.1. Gráficas con un detector ubicado en la base del eje de simetría de la pirámide (0,0,0)

Inicialmente, el detector se ubicó sobre la base ($z = 0$) donde z se mide en metros, colocado en $(\theta_x = 0, \theta_y = 0)$, donde θ_x y θ_y son los ángulos que hace la proyección del vector diferencia con respecto de los ejes, x , y , que forman una distribución angular que se usará para mostrar la ubicación del detector[20]. En este caso el origen de nuestra distribución estará dado por el vector que sea ortogonal a ambos detectores, es decir, el ángulo de su proyección será 0° respecto a ambos planos.

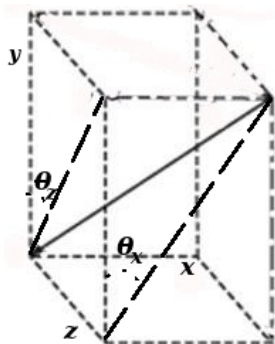


Figura 5.2: Esquema de la obtención de θ_x y θ_y los cuales forman una distribución angular en el plano

En esta sección veremos la pirámide con diferentes configuraciones, sin estructuras internas, con estructuras y también en función de la distancia en metros al detector (R), así como de $1/R^2$ que como explicaremos más adelante es proporcional al flujo de muones que llega al detector.

5.1.1. Pirámide en función de la distancia al detector, sin estructuras internas

La primera configuración que se simuló es la más sencilla, considerando que la pirámide es uniformemente densa y no tiene ninguna estructura interna. El esquema de la pirámide es el siguiente:

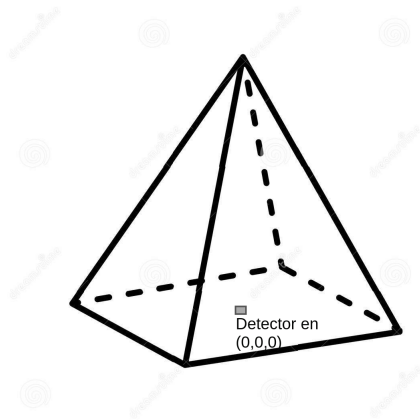


Figura 5.3: Esquema de la pirámide sin estructuras internas, con el detector en (0,0,0)

Es importante mencionar que la distancia R en esta simulación, será medida desde las caras de la pirámide hasta el detector, siempre y cuando no haya alguna estructura interna entre ellos, en dicho caso, la R representará la distancia de la estructura al detector y será menor pues se mide desde dicha estructura al detector.

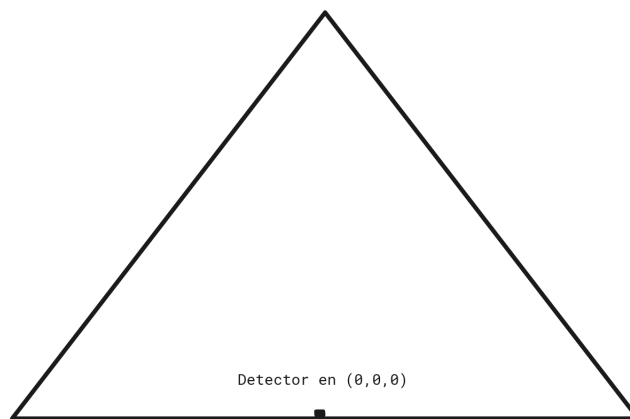


Figura 5.4: Proyección plana de la pirámide

Ejecutando la simulación, la primera gráfica de la pirámide en función de la distancia al detector queda de la siguiente forma:

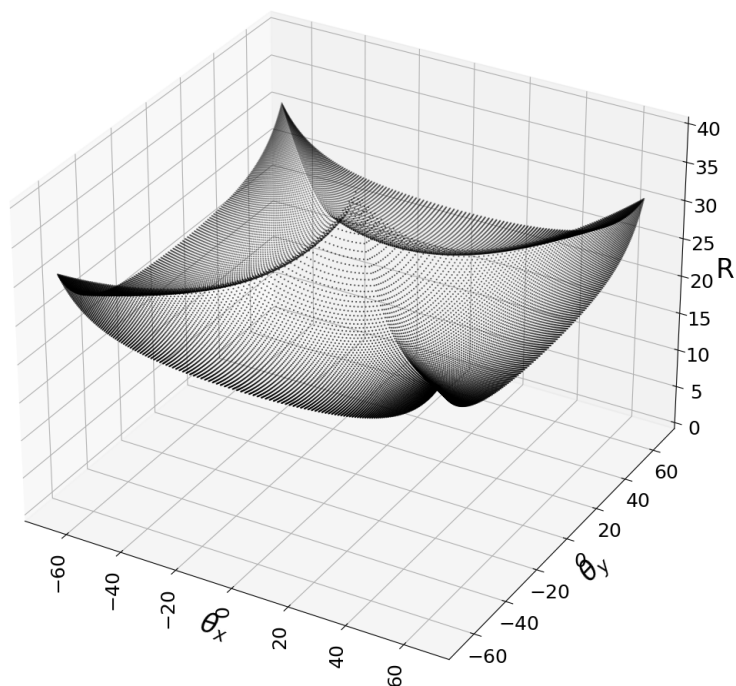


Figura 5.5: El Castillo sin estructuras interiores, en función de la distancia al detector

Podemos observar que la gráfica tiene una forma similar a una pagoda, lo cual se explica con la ubicación del detector, como está en $(0,0,0)$, las distancias más cortas son a la mitad de las caras de la pirámide, mientras los vértices son las que más lejanas están. Esta representación no mapea toda la pirámide, ya que todo está en función del ángulo máximo que observa el detector, en este caso es 0.95 radianes.

5.1.2. Pirámide en función de la distancia al detector, con estructuras interiores

Para esta configuración, se colocó un cubo de $10 \times 10 \times 10 \text{m}^3$ ubicada en $(0,0,20)$, y una escalera que va de $(0,-23,0)$, tal como se ve en este esquema:

5.1. GRÁFICAS CON UN DETECTOR UBICADO EN LA BASE DEL EJE DE SIMETRÍA DE LA PIRÁMIDE (0,0,0)

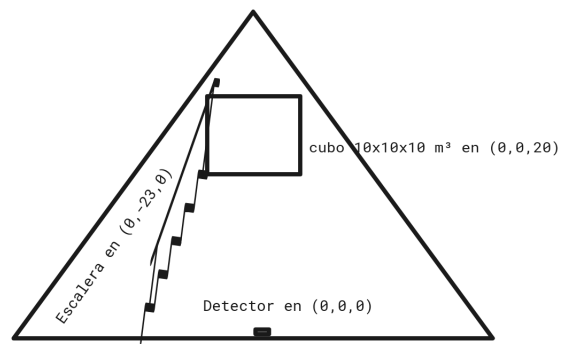


Figura 5.6: Esquema de la pirámide con estructuras internas y detector en $(0,0,0)$

Haciendo la simulación, de la pirámide con estas consideraciones, obtenemos lo siguiente:

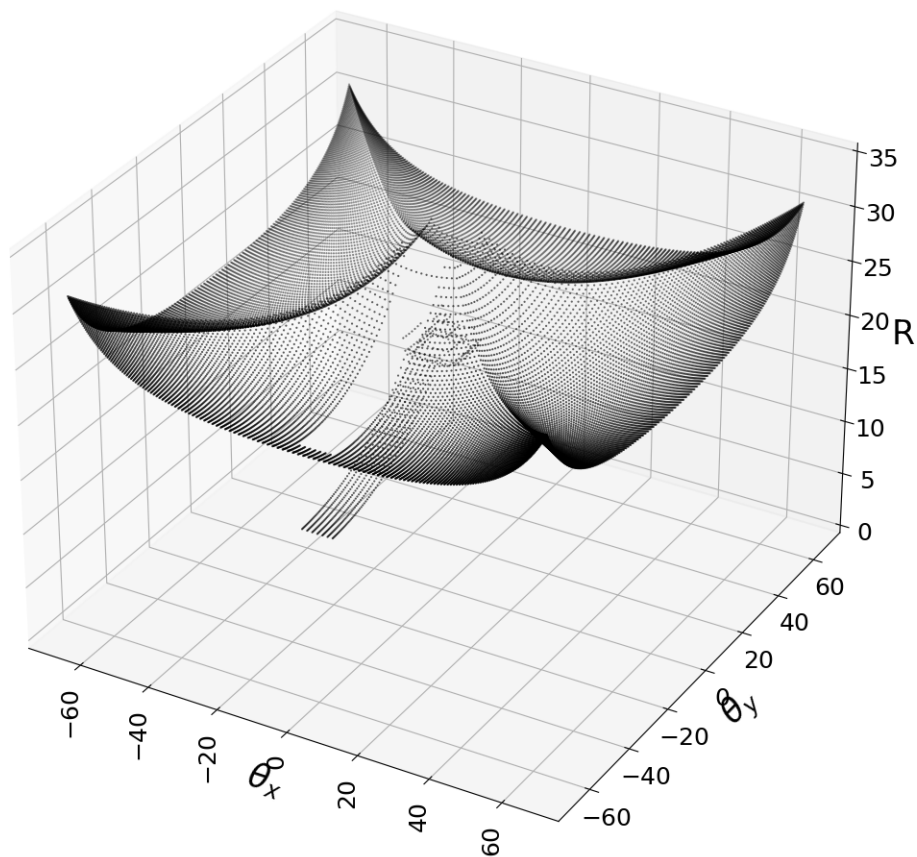


Figura 5.7: El Castillo con estructuras interiores, en función de la distancia al detector

Como era de esperarse, tanto la escalera como el cubo, son más cercanos al detector, lo que se ve reflejado en la gráfica. Comparando con la figura 5.5, notamos que la distancia R que en la configuración sin estructuras internas era la distancia que recorre el rayo simulado de cualquier cara de la pirámide al detector, en la figura 5.7 para las zonas donde está la escalera y el cuarto cúbico, R es la distancia que hay de dichas estructuras al detector, por lo tanto es menor en este caso, mientras que en las demás zonas, R es igual que en la figura 5.5.

5.2. Distribución de flujo aproximado para detector en (0,0,0)

La siguiente gráfica muestra la intensidad de los muones verticales en función de la profundidad hecha por diferentes grupos de investigadores. Al construir esta gráfica profundidad-intensidad, cada grupo tuvo en cuenta la distribución angular de los muones en la atmósfera, y las propiedades del medio local al conectar las mediciones en varias profundidades y ángulos a la intensidad vertical. El uso de datos de varios ángulos permite que un detector fijo cubra una amplia gamma de profundidades. La porción plana de la curva se debe a los muones producidos localmente por interacciones de corriente cargada de ν_μ , ya que no hay otra partícula aparte de los neutrinos que pueda penetrar a través de la Tierra y entrar en el detector desde abajo. Estos muones deben ser el resultado de interacciones de corriente de carga de neutrinos muónicos que producen muones, por medio de un proceso beta inverso que entran por debajo del detector. El recuadro muestra la curva de intensidad vertical para agua y hielo.[9][21]

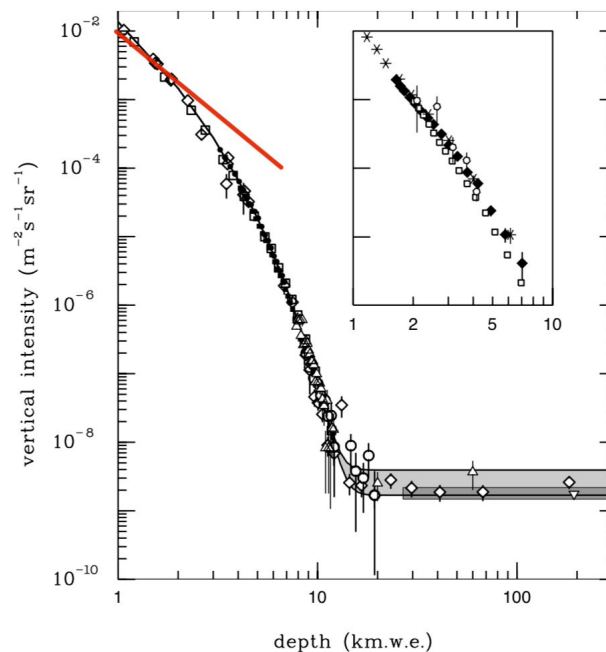


Figura 5.8: Intensidad de muones verticales frente a profundidad (1 km.w.e. = 10^5 g cm^{-2} de roca estándar). Los datos experimentales son de: las compilaciones de Crouch, Baksan, LVD, MACRO, Frejus, SNO. El área sombreada a grandes profundidades representa muones de energía inducidos por neutrinos por encima de 2 GeV. La línea superior es para muones inducidos por neutrinos horizontales, la inferior para muones verticales ascendentes. El sombreado más oscuro muestra el flujo de muones medido por el experimento SuperKamiokande. El recuadro muestra la curva de intensidad vertical para agua y hielo.

La línea roja es la gráfica de $1/x^2$, vemos que para los primeros dos kilómetros, ajusta

bien a los datos experimentales, de ahí que podamos usar:

$$Flujo_{\mu} \propto 1/R^2 \tag{5.4}$$

5.2.1. Pirámide sin estructuras internas

En esta sección usamos la relación de proporcionalidad 5.4, para ver cómo varía el flujo en la configuración sin estructuras y con el detector situado en (0,0,0).

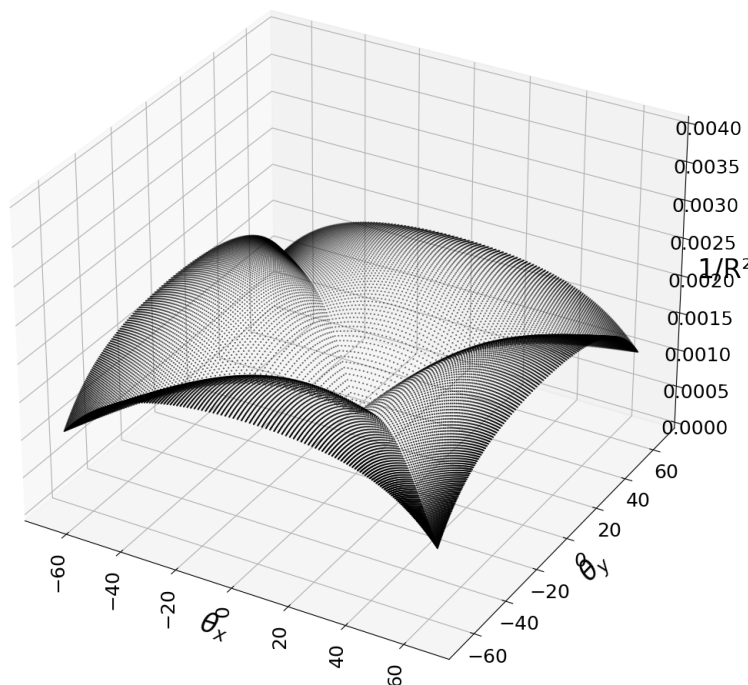


Figura 5.9: Variación aproximada por $(1/r^2)$ del flujo de muones

Comparando con la figura 5.5, vemos que en este caso la cercanía de los caras de la pirámide al detector se refleja en que hay un flujo mayor, por lo tanto se forman cuatro lóbulos en esas zonas, es decir un mayor número de cuentas.

5.2.2. Pirámide con estructuras internas

En esta gráfica se comprueba que al ser más pequeñas las distancias de la escalera y el cubo al detector, son las zonas en las que hay más cuentas, es decir, al estar más cerca

5.3. DISTRIBUCIÓN DE FLUJO APROXIMADO PARA UN DETECTOR DESPLAZADO HORIZONTALMENTE

simulamos que son zonas en las que hay más espacio libre, lo que ocasiona que más partículas logran atravesar la pirámide y ser detectadas. Al no haber movido el detector, las cuentas siguen siendo iguales en los lóbulos y se sigue conservando la simetría, el siguiente paso será ver que pasa si movemos el detector de posición.

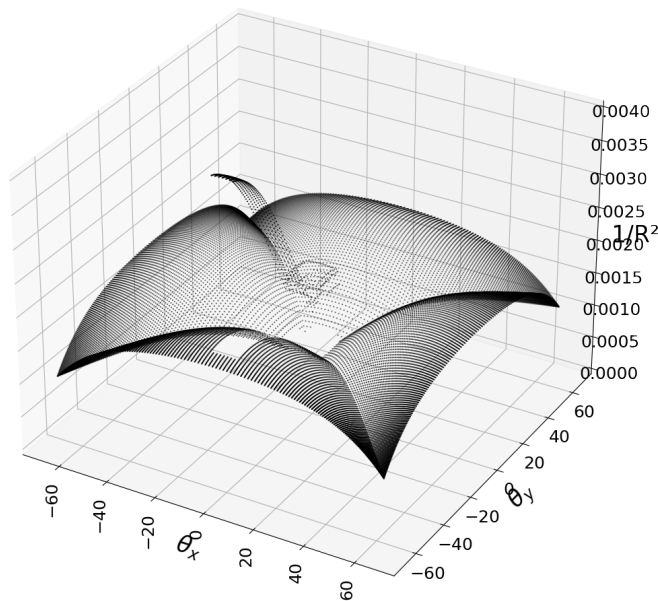


Figura 5.10: Distribución del flujo aproximado de muones para una pirámide con estructuras internas similares a las de El Castillo

5.3. Distribución de flujo aproximado para un detector desplazado horizontalmente

Para esta configuración, únicamente se trasladó el detector en la distribución de ángulos en $\theta_x = -12^\circ$, las dimensiones de la pirámide siguen siendo las mismas que en la figura 5.4. A continuación se muestra el esquema de un corte transversal de la pirámide con estas condiciones y con el que se ejecutaron las simulaciones restantes:

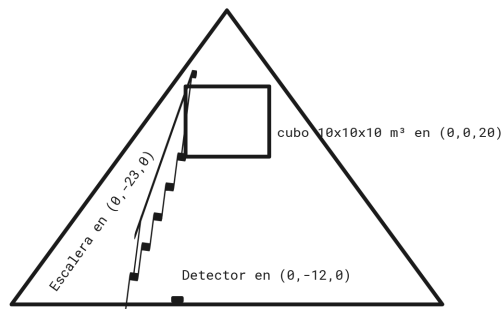


Figura 5.11: Esquema del Castillo con el detector en $(0, -12, 0)$

En la figura 5.12 podemos ver que, dado que el detector se corrió sobre el eje x , se pierde la simetría con las distancias iguales a los cuatro lados de la pirámide. Comparando con la figura 5.7, notamos que la traslación del detector se refleja en que el lado de la escalera es el más cercano, mientras que la zona de $\theta_y < 0$ queda más alejada. Por otro lado el cuarto cúbico queda 'inclinado' hacia donde está el detector, debido a estar en el eje de simetría de la pirámide.

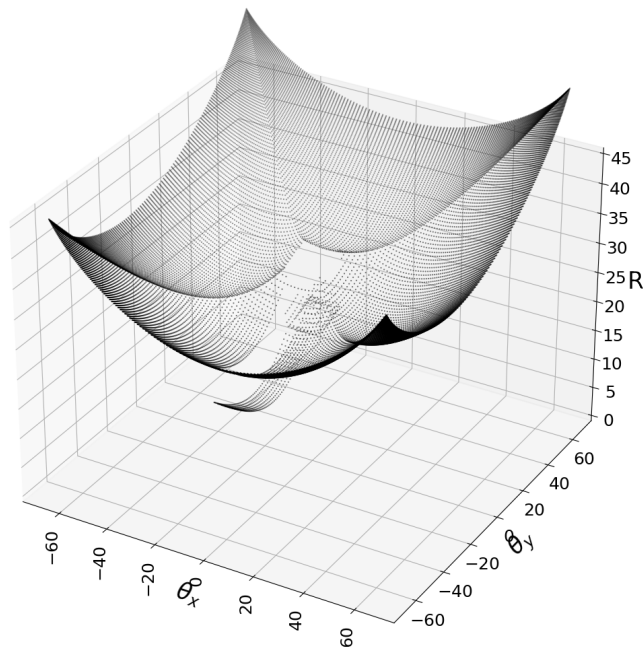


Figura 5.12: El Castillo en función de la distancia con el detector en $(0, -12, 0)$

5.3. DISTRIBUCIÓN DE FLUJO APROXIMADO PARA UN DETECTOR DESPLAZADO HORIZONTALMENTE

Ahora veremos cómo se ve la pirámide con estas condiciones en función del flujo de muones que llegan al detector.

5.3.1. Gráfica de flujo con el detector en (0,-12,0)

Utilizando de nuevo la relación de proporcionalidad 5.4, vemos que al igual que en la figura 5.12 se perdió la simetría en la gráfica de distancias. En este caso los lóbulos que teníamos en la figura 5.10 ya no son iguales en los lados, el flujo está cargado en la parte que está ubicado el detector, en la zona de la escalera es donde tenemos un máximo de cuentas, ya que aparte de que están por encima del detector, también hay espacio con aire, permitiendo un mayor paso de partículas. Por otro lado, en $\theta_y < 0$ es la zona con menos número de cuentas debido a la distancia tan grande que hay al detector.

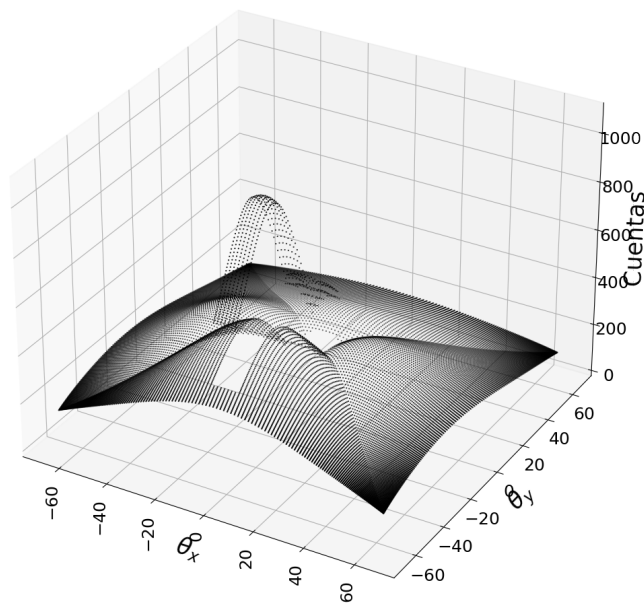


Figura 5.13: El Castillo en función del flujo con el detector en (0,-12,0)

5.3.2. Efecto aproximado de la dispersión múltiple

Hasta ahora, las simulaciones han sido ideales, no se ha tomado en cuenta ninguna cantidad que introduzca incertidumbre y la física solo ha aparecido en la aproximación de flujo. Para hacer estas simulaciones más realistas introduciremos el concepto de

dispersión múltiple (que se muestra en las ecuaciones 4.4 y 4.5), en los ángulos θ_x y θ_y , para esto se utilizará el método de Montecarlo.

Considerando que el material de la pirámide fuese bien representado por el Silicio(se considera al Silicio ya que es el elemento sólido más abundante en la corteza terrestre)[22] y que la energía cinética de los muones que logran atravesar el detector es ≈ 75 GeV y considerando que cada muon pierde $2\text{MeV} \frac{g}{cm^2}$. Utilizando la ecuación 4.4, el ángulo máximo de dispersión será 4.5° .

Para agregar estas incertidumbres, consideraremos una función guassiana tal que $\mu=0$, $\sigma = 1.2$, se eligen estos datos porque son los que mejor ajustan a los grados de desviación máxima.

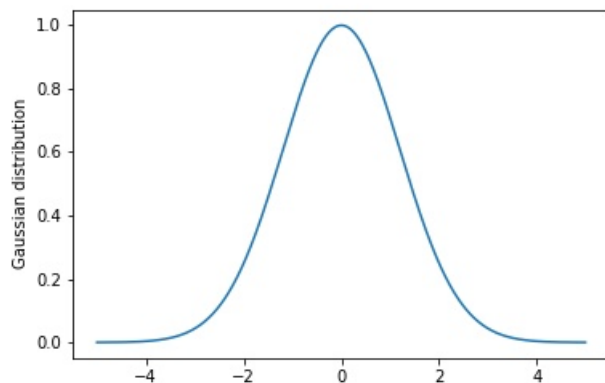


Figura 5.14: Distribución Gaussiana

Teniendo la función, por medio de un programa en python, generamos números racionales aleatorios para $\theta_{x,y}$ en el intervalo -4.5 y 4.5 grados y los guardamos en una lista 1, posteriormente a cada número de esa lista se le asigna otro número al azar pero esta vez entre $[0,1]$, es decir tenemos una especie de banco de puntos con coordenadas de la forma (número entre $[-4.5,4.5]$, número entre $[0,1]$) por lo que los puntos aleatorios se ve de esta forma sobre la gráfica de la Gaussiana:

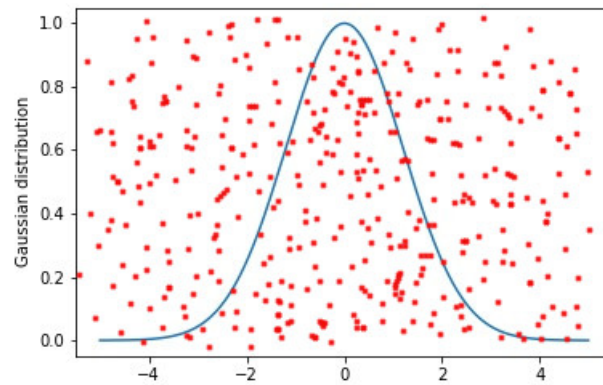


Figura 5.15: Distribución Gaussiana con todos los números aleatorios

Por último, nos quedaremos con la pareja de números que cumpla que la segunda entrada sea menor que la función Gaussiana evaluada en la primer entrada, de lo contrario se volverá a tirar números aleatorios hasta que tengamos otra lista que cumpla con la condición, de tal forma que los números aleatorios quedan así en la gráfica:

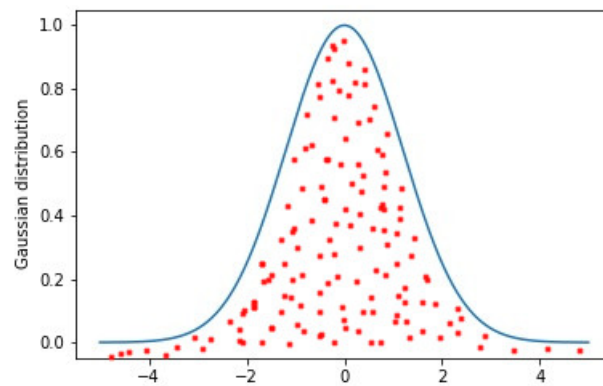


Figura 5.16: Distribución Gaussiana con todos los números aleatorios con la condición

Ahora que tenemos nuestra lista de incertidumbres para los ángulos, se la sumaremos y tenemos que la simulación queda así:

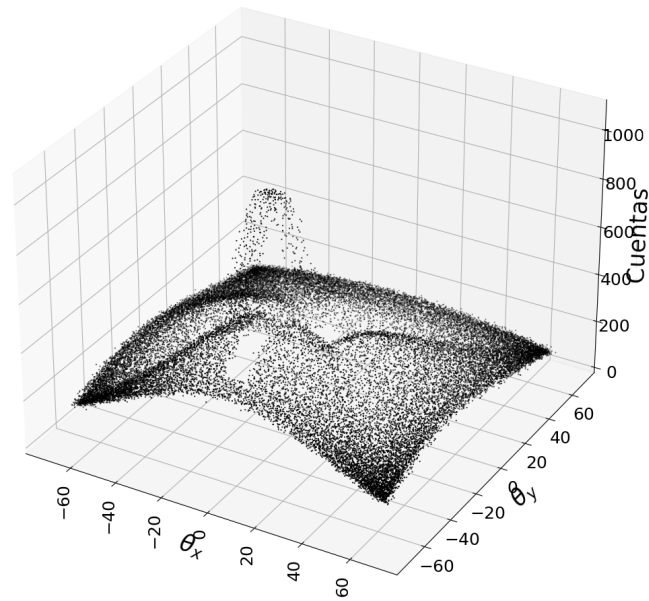


Figura 5.17: Distribución del flujo esperado cuando el detector está en $(0,-12,0)$ y las incertidumbres asociadas a los ángulos estimadas utilizando la distribución de Moliere, eq. 4.4

Capítulo 6

Conclusiones

Se cumplió el objetivo de lograr hacer simulaciones geométricas para un monumento arqueológico con la forma externa de prisma piramidal con base cuadrada, con y sin estructuras internas similares a las de la pirámide de El Castillo de Chichén Itzá. Se simuló el flujo de muones que llegaría a un detector interno, dependiendo su ubicación, de si hay o no estructuras internas, a partir de un programa que se ejecuta en 10 minutos en una computadora personal. Si bien este método es sólo aproximado, la ventaja respecto de simulaciones realizadas usando exclusivamente GEANT4, es que en este segundo caso el CPU involucrado puede llegar a tardar meses. Así, la intención no es eliminar una simulación final física más realista, sino realizar evaluaciones rápidas sobre la viabilidad de posibles arreglos experimentales, y así avanzar lo más rápido posible hacia diseños realistas, dejando GEANT4 como el recurso final.

Otra ventaja es que de este método permite cambiar la resolución del detector dependiendo de la capacidad de cada computadora. También se pueden cambiar las dimensiones de la pirámide, geometría externa, ubicación del detector y la simulación sigue corriendo en 10 minutos, por lo tanto podemos, a través de estas simulaciones jugar con diferentes configuraciones que den un bosquejo de qué esperar ver en una simulación hecha en GEANT4 que incluya todas las consideraciones físicas.

En cuanto a cosas que se podrían mejorar en futuros usos de esta técnica, está la optimización de los programas en C++. Por ejemplo, no encontré qué usar para lograr que el programa corriera si la resolución fuera mayor a 100x100 en cada detector.

También se podría tratar de agregar alguna sub rutina que pudiera simular el cambio de densidad en diferentes zonas de la pirámide y ver cuál es su influencia en el flujo de muones detectados. Otra mejora sería implementar la manera de cargar formas externas más realistas del monumento a investigar.

Se concluye que este modelo es efectivo para los propósitos de esta tesis y puede ser ocupado como complemento de la simulaciones en GEANT4.

Capítulo 7

Apéndice

7.1. Código generador de rayos

```
#include <iostream>
#include <math.h>
#include <iomanip>
#include <fstream>
#include <cstdlib>
#include <string>
#include <array>
#include <vector>
using namespace std;
// Función para generar un producto punto entre arreglos de tres números.
double dot(int vec1[3],int vec2[3]){
    double dt;
    dt= double(vec1[0])/100*double(vec2[0]) + double(vec1[1])/100*double(vec2[1]) + double(vec1[2])/100*double(vec2[2]);
    return dt;
}
// Función para obtener el ángulo entre dos vectores.
double angulo(int vec1[3],int vec2[3]){
    double ang;
    if(dot(vec1,vec1) == 0 || dot(vec2,vec2) == 0){
        ang = M_PI_2;
    }
    else{
        ang = acos(dot(vec1,vec2)/(sqrt(abs(dot(vec1,vec1)))*sqrt(abs(dot(vec2,vec2)))));
    }
    return ang;
}
```

```
}

int main()
{
/*Se definen las variables que tienen que ver con el tamaño del problema y las m
y sus proyecciones hacia los planos XZ y YZ*/
    int r=90, c=90, dez=-90;
    static int a[8100][8100][3];
    static int b[8100][8100][3];
    static int cc[8100][8100][3];
/*Se llenan las matrices de vectores a con los posibles vectores y b, con la proy
    int i, j, k, l, m=0, n=0;

    for(i = 0; i < r; ++i)
    {
    for(j = 0; j < c; ++j)
    {
    for(k = 0; k < r; ++k)
    {
    for(l = 0; l < c; ++l)
    {
a[m][n][0] = l - j;
a[m][n][1] = k - i;
a[m][n][2] = dez;
b[m][n][0] = 0;
b[m][n][1] = k - i;
b[m][n][2] = dez;
cc[m][n][0] = l - j;
cc[m][n][1] = k - i;
cc[m][n][2] = 0;

        n = n+1;
    }
    }
    n=0;
    m=m+1;
    }
}
```

```
// Se crea vd = -k, el vector unitario de la dirección z.
int vd[3];
vd[0] = 0; vd[1] = 0; vd[2] = -1;
int vd1[3];
vd1[0] = 1; vd1[1] = 0; vd1[2] = 0;
/*Se abre un archivo para imprimir todos los ángulos de los vectores en a respecto de
ofstream arc;
    arc.open("angulo.dat");
/*Estos archivos comentados son el resquicio de cuando se intentó graficar en gnuplot;
//ofstream fil;
// fil.open("angulo.csv");
    //Obteniendo los ángulos usando la función angulo y recorriendo la matriz con k e i.
    arc << fixed << setprecision(4);
// fil << fixed << setprecision(4);
    for(k = 0; k < r*c; ++k)
        for(i = 0; i < r*c; ++i)
        {
            arc << angulo(a[k][i],vd) << endl;
//            fil << angulo(a[k][i],vd) << "," << endl;
        }
    arc.close();
ofstream arc1;
    arc1.open("angulox.dat");
/*Estos archivos comentados son el resquicio de cuando se intentó graficar en gnuplot;
//ofstream fil;
// fil.open("angulo.csv");
    //Obteniendo los ángulos usando la función angulo y recorriendo la matriz con k e i.
    arc1 << fixed << setprecision(6);
// fil << fixed << setprecision(4);
    for(k = 0; k < r*c; ++k)
        for(i = 0; i < r*c; ++i)
        {
            arc1 << angulo(cc[k][i],vd1) << endl;

//            fil << angulo(a[k][i],vd) << "," << endl;
        }
    arc1.close();
// fil.close();
/*Se lleva de nueva cuenta los valores de m y n a cero para poder generar en a las pro
```

```

m=0; n=0;

    for(i = 0; i < r; ++i)
        {
    for(j = 0; j < c; ++j)
        {
    for(k = 0; k < r; ++k)
        {
    for(l = 0; l < c; ++l)
        {
a[m][n][l] = 0;

        n = n+1;
        }
        }
        n=0;
        m=m+1;
        }
        }

/*Se abre un archivo para imprimir los ángulos de las proyecciones respecto del s
//ofstream archivo;
//  archivo.open("angulos.dat");
ofstream file;
    file.open("angulos.csv");

//  archivo << fixed << setprecision(4);
    file << fixed << setprecision(6);

    for(k = 0; k < r*c; ++k)
    for(i = 0; i < r*c; ++i)
    {
        if(a[k][i][0] < 0){
//            archivo << -angulo(a[k][i],vd)*180/3.1416 << " ";
            file << -angulo(a[k][i],vd)*180/3.1416 << ",";
        }
        else{
//            archivo << angulo(a[k][i],vd)*180/3.1416 << " ";
            file << angulo(a[k][i],vd)*180/3.1416 << ",";
        }
    }

```

```
        if(b[k][i][1] < 0){
//            archivo << -angulo(b[k][i],vd)*180/3.1416 << endl;
            file << -angulo(b[k][i],vd)*180/3.1416 << "," << endl;
        }
        else{
//            archivo << angulo(b[k][i],vd)*180/3.1416 << endl;
            file << angulo(b[k][i],vd)*180/3.1416 << ","<< endl;
        }
    }
}

// archivo.close();
file.close();

return 0;
}
```

7.2. Obtención de catetos adyacentes

```
#include <iostream>
#include <math.h>
#include <iomanip>
#include <fstream>
#include <cstdlib>
#include <string>
using namespace std;
int main()
{
    ifstream file("angulox.dat");
    string line;
    ofstream filee;
        filee.open("catetoadyacente.dat");
        filee << fixed << setprecision(4);
    while (getline(file,line))
    {
        istringstream ss(line);

        // possibly you will want some other types here.
        float col1;
```



```
ss >> col1;    // extracts 1st col.

float alfa;

if((col1>=0 && col1<=0.7854) || (col1>2.3561 && col1<3.1416) ){
filee << abs(23/cos(abs(col1))) << endl;
}
else {

filee << abs(23/cos(abs(1.5708-col1))) << endl;

}

// r=150*sin(0.6532)*sin(3.1416-col1-0.6532);

// Now you can something with col2 and col4
// cout << r << " " << endl;

}
filee.close();
/*std::ifstream if_a("angulos.dat", std::ios_base::binary);
std::ifstream if_b("alturas.dat", std::ios_base::binary);
std::ofstream of_c("piramide.dat", std::ios_base::binary);

of_c << if_a.rdbuf() << if_b.rdbuf();*/
/*std::ofstream of_a("angulos.dat", std::ios_base::binary | std::ios_base::app);
std::ifstream if_b("z.txt", std::ios_base::binary);

of_a.seekp(0, std::ios_base::end);
of_a << if_b.rdbuf();*/

}
```

Bibliografía

- [1] Jonathan Ortiz López. El chac mool en chichén itzá: Historia de una imagen. *B.Sc. Thesis, UNAM*, 2021.
- [2] Ismael Arturo Montero García; Jesús Galindo Trejo; David Wood Cano. El castillo en chichén itzá. Un monumento al tiempo. <https://arqueologiamexicana.mx/mexico-antiguo/el-castillo-en-chichen-itza-un-monumento-al-tiempo>, accessed 2-03-2022.
- [3] Luis E Arochi. *La pirámide de Kukulcán: su simbolismo solar*. Panorama Editorial, 1984.
- [4] Universidad Autónoma de Yucatán. El Jaguar Rojo cobra vida. Chichén Itzá sigue sorprendido por sus tesoros mayas. <https://www.mayas.uady.mx/breves/mayo2007.html>, 22-03-2022.
- [5] BBC Mundo. México: descubren otra pirámide dentro de la gran pirámide maya de Kukulcán, en Chichen Itzá. <https://www.bbc.com/mundo/noticias-america-latina-38018192>, accessed 2-03-2022.
- [6] D.J. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley Sons, 1987.
- [7] Cohen-Tannoudji. *Quantum Mechanics*. Hermann, 1977.
- [8] G.D. Coughlan; J.E. Dodd; B.M. Gripaios. *The Ideas of Particle Physics: An Introduction for Scientists*. Cambridge University Press, 2006.
- [9] M. Tanabashi. Review of particle physics. *Physics Review D*, 98(030001), 2018.
- [10] Foro nuclear. ¿Qué son los muones, y cómo pueden aplicarse a las técnicas de seguridad nuclear? <https://www.foronuclear.org/descubre-la-energia-nuclear/preguntas-y-respuestas/sobre-aplicaciones-de-la-tecnologia-nuclear/que-son-los-muones-y-como-pueden-aplicarse-a-las-tecnicas-de-seguridad-nuclear/>, consultado 24-03-2022.

-
- [11] Review Particle Physics. Cosmic Rays. https://pdg.lbl.gov/2021/reviews/contents_sports.html, consultado 24-03-2022.
- [12] J. Matthews (Louisiana State U.) J.J. Beatty (Ohio State U.) and Kavli Inst.) S.P. Wakely (Chicago U.; Chicago U. Cosmic rays. *Review Particle Physics*, 30:8, 2020.
- [13] M. Ambrosio. Review of particle physics. *Physics Review D*, D52(3793), 1995.
- [14] Pablo Misael Maldonado Alonso. Optimización de un detector de muones para el monitoreo del volcán popocatepetl, mediante simulación geométrica. *B.Sc. Thesis, UNAM*, 2021.
- [15] Carl D Neddermeyer, Seth H.; Anderson. Note on the nature of cosmic-ray particles. *Phys. Rev.*, 51(10):884–886, 1937.
- [16] D.E. Groom (LBNL) and S.R. Klein (NSD LBNL; UC Berkeley). Passage of particles through matter. *Review Particle Physics*, 34:2–4, Agosto 2021.
- [17] Marcel GYR. Crystal extraction: Dispersion due to multiple scattering in the detectors. <https://cds.cern.ch/record/703372/files/sl-note-93-072.pdf>, consultado 12-04-2022.
- [18] L.W Alvarez. Search for hidden chambers in the pyramids. *Science*, 167(3919):832–839, 1970.
- [19] C Amsler. Particle data group. *Review of particle physics*, B667(1), 2008.
- [20] E. Belmont V. Grabski T. Ibarra V. Lemus L. Manzanilla A. Martínez A. Menchaca-Rocha M. Moreno y A. Sandoval S. Aguilar, R. Alfaro. Search for cavities in the teotihuacan pyramid of the sun using cosmic muons: preliminary results. *33RD International Cosmic Ray Conference, Rio de Janeiro 2013 The Astroparticle Physics Conference*, 2013.
- [21] Caballero Pagaza Lilia. Simulación geométrica de la pirámide del sol. *B.Sc. Thesis, UNAM*, 2014.
- [22] F. K. Tarbuck, E. J. Lutgens. *Ciencias de la Tierra*. Pearson Educación S. A, 2005.