



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

## FACULTAD DE CIENCIAS

Estadística de criptomonedas y un enfoque  
econofísico para la incertidumbre de portafolios de  
inversión.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Noé Oswaldo Rodríguez Rodríguez

TUTOR

Dr. Octavio Reymundo Miramontes Vidal





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

Quiero agradecer de manera especial al Instituto de Física de la UNAM por haber financiado este trabajo de tesis mediante un proyecto especial PRIDIF-2021, en los difíciles meses de la pandemia de COVID-19.



# Resumen

Para este trabajo se caracterizaron estadísticamente las distribuciones de probabilidad de los rendimientos diarios de 18 criptomonedas<sup>1</sup>, mostrando que estos no presentan normalidad y exhiben un comportamiento leptocúrtico con colas pesadas. Para ello, se hicieron distintas pruebas de normalidad como gráficos QQ-normal y el test de Shapiro–Wilk. Posteriormente, se ajustaron distribuciones de cola pesada por medio del método del máxima verosimilitud (MLE) mostrando que las distribuciones de cola pesada se ajustan mejor a las observaciones en comparación con la distribución normal.

Adicionalmente, se presenta el marco teórico suficiente que justifica el hecho de explorar la entropía en lugar de la varianza como medida de incertidumbre en los mercados financieros, particularmente en la gestión de portafolios de inversión. Como ejemplo, se genera aleatoriamente un portafolio de inversión con las 18 criptomonedas estudiadas y, empleando la caracterización de las distribuciones de probabilidad de los rendimientos diarios, se compara la entropía empírica contra la entropía normal destacando el hecho de que la entropía verifica el efecto de diversificación y tiene un comportamiento similar, aunque no igual, a la varianza.

—

---

<sup>1</sup>Basic Attention Token (BAT), Bitcoin Cash (BCH), Bitcoin (BTC), Dai (DAI), Eido (EDO), Eos (EOS), Ethereum Classic (ETC), Ethereum (ETH), Metaverse ETP (ETP), Litecoin (LTC), Neo (NEO), OMG Network (OMG), Tron (TRX), Stellar (XLM), Monero (XMR), Verge (XVG), Ripple (XRP) y Zcash (ZEC)



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Econofísica: De la física a la economía . . . . .	2
1.2. Criptomonedas . . . . .	8
<b>2. Econofísica: complejidad y entropía</b>	<b>11</b>
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>15</b>
3.1. Función de entropía discreta . . . . .	15
3.1.1. Conexión entre la entropía de Shannon y la entropía de Boltzmann . . . . .	16
3.2. Función de entropía continua . . . . .	17
3.3. Entropía como medida de incertidumbre . . . . .	17
3.4. Entropía normal . . . . .	20
3.5. Estimación de la Función de Densidad de Probabilidad (PDF) . . . . .	20
3.6. Portafolios de inversión . . . . .	23
3.7. Comparación entre la entropía y la varianza . . . . .	24
<b>4. Metodología y Análisis de Datos</b>	<b>27</b>
4.1. Métodos . . . . .	27
4.2. Análisis de Datos . . . . .	27
4.2.1. Distribución normal y gráficos Q-Q plot . . . . .	28
4.2.2. Distribuciones de cola pesada . . . . .	39
4.2.3. Entropía de portafolios . . . . .	47
<b>5. Conclusiones</b>	<b>55</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Si consideramos a Galileo Galilei y a Francis Bacon como los forjadores de la física moderna y el método científico, los estudios sobre la organización social y la economía irían muy de la mano con ellos. En efecto, Thomas Hobbes el insigne polímata inglés [1], amigo y admirador de ambos, habría ideado una aproximación a la sociedad desde la perspectiva de una ciencia cuantitativa [2]. El autor del célebre *Leviathan*, argumentaba que la “verdadera física” solo podía serlo si se basaba en principios matemáticos. A la par, Hobbes concluyó que la filosofía política, que él llamaba “filosofía civil” debería ser una ciencia capaz de demostraciones formales [3]. Desde entonces han existido muchos intentos de matematizar a las disciplinas sociales y una de las más maduras en ese sentido es la economía. Esta etapa renacentista, que enfatiza lo analítico, arranca propiamente<sup>1</sup> con uno de los discípulos de Hobbes: William Petty. Petty, miembro fundador de la “Royal Society” y uno de los primeros economistas cuantitativos, consideraba importante tomar en cuenta los “números sociales”: población, presupuestos, comercio etc. [2]. Más tarde, varias personalidades del mundo de la filosofía y la política siguieron con entusiasmo la visión estadística de los fenómenos sociales, podemos citar entre ellos a René Descartes, Immanuel Kant, Auguste Comte, John Stuart Mill y Karl Marx; pero desde la física también hubo los polímatas que no soltaron el dedo del renglón: Pierre-Simon Laplace, Siméon Denis Poisson, James Clerk Maxwell y Ludwig Boltzmann, entre otros [2].

La economía moderna recibió un empuje decisivo cuando incorporó en su teoría el paradigma termodinámico de la física, como lo mencionaremos más adelante en este capítulo. Sin embargo la teoría del equilibrio, piedra fundamental de la economía de mercado, se basa en la termodinámica ideal del equilibrio de sistemas cerrados. El equilibrio en estas condiciones es un estado de la economía de mercado donde las fuerzas tales como la oferta y la demanda se equilibran. Las variables económicas, se supone, estarían o tenderían a su “estado natural” [4]. Pero así como la termodinámica de sistemas cerrados es de uso limitado para describir procesos reales en la naturaleza, la economía basada en la visión del equilibrio

---

<sup>1</sup>al menos en el mundo anglosajón.

también lo es. La termodinámica de sistemas fuera de equilibrio creada, entre otros, por Ilya Prigogine daría a la física contemporánea un empuje a nivel de una auténtica revolución científica y la empujaría hacia las fronteras que atestiguamos en el siglo XXI: la emergencia y consolidación del paradigma de la complejidad [5]. Así, la economía como ciencia no podía quedar atrás, rezagada, ajena [6, 7]. Conceptos como no linealidad, autoorganización, adaptabilidad, criticalidad se volcarían de lleno en la economía más vanguardista, después de una reunión auspiciada por el Instituto Santa Fe en 1988 y donde coincidieron grandes personalidades de la física y la economía: Davis Pines, Doyne Farmer, Stuart A. Kauffman, Norman Packard, David Ruelle, J.-P. Eckmann, Philip W. Anderson, Kenneth J. Arrow, Brian Arthur, entre otros y cuyas contribuciones se publicaron bajo el título “The Economy as an Evolving Complex System” [8]. El matrimonio de la complejidad y la economía, la “complejidad económica” ha resultado tan exitoso que en 2021 la revista *Nature Physics* publicó una colección de artículos bajo el título “From Economics to Physics” reuniendo nuevamente a un selecto grupo de físicos de la complejidad y economistas [9]. En esta línea es de destacarse el pensamiento que apunta a considerar a los fenómenos sociales y la economía como fenómenos genuinamente físicos, estudiables desde la física, pues no serían otra cosa que expresiones de la materia compleja [10].

Paralelamente y bajo otra corriente de pensamiento, principalmente dentro de la física estadística, sería acuñado el termino “econofísica” [11]. Haciendo referencia a propiedades de escalamiento y universalidad en sistemas complejos de naturaleza económica [12]. El concepto de “universalidad” surge en dos frentes: las propiedades de universalidad de sistemas dinámicos no lineales en su ruta al caos vía doblamiento de periodo y donde sistemas tan disímiles, como por ejemplo el mapeo discreto 1-D logístico y la ecuación continua 3-D acoplada de Lorenz pertenecen a la misma clase de universalidad por el criterio de la constante de Feigenbaum ( $\delta = 4.669201\dots$ ) [13]. Por otra parte, el concepto surge a partir de la observación de que los valores de ciertos parámetros físicos en las cercanías de las transiciones de fase son iguales, aun cuando los sistemas en cuestión sean muy diferentes [14]. El concepto de universalidad (comportamiento dinámicos semejantes en sistemas aparentemente disímiles) es muy relevante para el presente trabajo como lo explicaremos en las conclusiones.

## 1.1. Econofísica: De la física a la economía

La economía financiera y las finanzas matemáticas son las dos disciplinas científicas tradicionales que constituyen la teoría financiera moderna. Ambas disciplinas utilizan los modelos y teorías de su disciplina original (economía y matemáticas) para analizar mercados y crear herramientas financieras. Ambas se consolidaron como disciplina académica o científica hasta 1960, aunque hay estudios anteriores, fueron marginales y sin fundamento teórico sólido [15].

Estas disciplinas han desarrollado sus propias especificidades y modelos sujetos a sus

propios formalismos teóricos, lo que podría limitar la introducción de nuevas hipótesis o modelos. Además, aunque usan terminología común (como mercado eficiente), su definición o uso puede diferir. En respuesta, han surgido nuevos campos de estudio, como la econofísica [15].

A groso modo, “econofísica” se refiere a la extensión de la física al estudio de problemas generalmente considerados como pertenecientes a la economía. Es un neologismo utilizado en la rama de los sistemas complejos de la física para conocer las propiedades dinámicas y estadísticas de los mercados financieros, usando un gran volumen de datos y la metodología de la física estadística. La influencia de la física en la economía no es nueva, como ya se mencionó. Mirowski (1989) [16] destaca las contribuciones de la física al desarrollo de la economía marginalista y matemática. Ingrao e Israel (1990) [17] hablan sobre la influencia de la mecánica en la conceptualización del equilibrio en la economía, etc. [15, 18].

La economía financiera o más en general, las finanzas, también se ha visto influida por la física. Jules Regnault fue de los primeros en acercar la física a las finanzas en la segunda mitad del siglo XIX. En el siglo XX, varios conceptos físicos ayudaron a desarrollar la teoría financiera moderna. Entre los ejemplos más conocidos se encuentra la aplicación de la ecuación de difusión de calor y varios estudios relacionados con el movimiento Browniano [15].

A pesar de estos vínculos teóricos e históricos entre la física y las finanzas, la econofísica representa un enfoque nuevo. Ya que sus practicantes no son economistas que se inspiran en la física, sino físicos que utilizan métodos propios de su disciplina para estudiar problemas planteados en las ciencias sociales. Este enfoque encuentra, probablemente, sus inicios en cuando Bachelier (1900) [19] probó que los precios de las acciones siguen un recorrido aleatorio, aunque con un modelo simplista que no consideró factores como la variación de los precios. Adicionalmente, asumió que tales precios siguen una distribución normal, constante en el tiempo y no tomó en cuenta la ocurrencia de eventos extremos. En los años sesenta Mandelbrot (1963) [20] analizó los rendimientos financieros del precio del algodón y refutó su condición de normalidad. Pero quedó en el olvido hasta que Mantegna (1991) [21] al analizar el mercado italiano de valores, descubrió que los rendimientos eran compatibles con las distribuciones no gaussianas estables de Lévy. En 1970, ciertos físicos comenzaron a publicar artículos dedicados al estudio de fenómenos sociales, creando la sociofísica. Esta es un área que no ha dejado de crecer, cada vez hay más físicos publicando artículos relacionados a fenómenos sociales como el mimetismo social (Callen y Shapiro 1974) [22], las huelgas industriales (Galam y col., 1982) [23], procesos democráticos (Galam 1986) [24], por citar solamente algunos ejemplos [15, 18, 25]. Véase también [2, 26].

Como se mencionó anteriormente, en la década de 1990 los físicos centraron su atención en la economía, particularmente en la economía financiera, dando lugar a la econofísica. Aunque oficialmente, esta disciplina nació por un artículo publicado en 1996 por Stanley et al.

(1996) [27] al estudiar el índice Dow Jones, encontraron que los rendimientos de las acciones de algodón siguen una distribución de ley de potencias. Mantegna y Stanley (1999) [28] definieron a la econofísica como “un enfoque cuantitativo que utiliza ideas, modelos, métodos conceptuales y computacionales de la física estadística” aplicados principalmente al estudio de los fenómenos financieros [15, 18].

Así es como los físicos y matemáticos, a partir de la década de los noventa, adoptaron un enfoque no gaussiano para el estudio de los rendimientos financieros (Kutner y col., 2008) [29], centrándose en un inicio en los procesos de Lévy [15].

La historia de la economía financiera está ampliamente ligada a la historia de la teoría de la probabilidad moderna, a la que se deben sus principales resultados, hipótesis y modelos (Davis y Etheridge 2006) [30]. La distribución gaussiana (o normal), es una distribución particular clave en la historia de la economía financiera. Esta distribución es la base de la creación de la mayoría de las teorías y modelos de la corriente principal: la hipótesis del mercado eficiente, teoría moderna de la cartera, CAPM y modelo de Black y Scholes. Sin embargo, la econofísica rechaza la idea de que las distribuciones financieras sólo deban describirse con distribuciones normales, este rechazo caracteriza el surgimiento de la econofísica [15].

La economía financiera conlleva un grado alto de matematización en los modelos de los rendimientos bursátiles. Modelar los rendimientos del mercado de valores o las variaciones de los precios es el primer paso en el desarrollo de modelos financieros, esto se ha realizado utilizando paseos aleatorios, movimiento browniano y martingala (Stabile 2005 [31], Poitras 2006 [32], Poitras et al., 2007 [33], Jovanovic 2009 [34]). Estos modelos requieren caracterizar estadísticamente los rendimientos o los cambios en el precio. Determinar la distribución estadística de los rendimientos es un problema clave en la teoría financiera moderna. Las primeras representaciones estadísticas de las variaciones de los precios se realizaron bajo un marco gaussiano y se estandarizaron aquellas observaciones no gaussianas o “ruido blanco” [15].

Las distribuciones gaussianas de los rendimientos de activos han estado presentes en el desarrollo de la teoría financiera moderna, desde la teoría de cartera moderna de Markowitz (MPT), el modelo de fijación de precios de activos de capital (CAPM), el modelo de Black y Scholes hasta el desarrollo del valor en riesgo (VaR), por lo que ha jugado un papel central en la construcción de la economía financiera [15, 18].

A principios del siglo XX se hizo evidente que los datos estadísticos de los precios seguían distribuciones leptocúrticas que era incompatible con las distribuciones gaussianas. El trabajo estadístico y matemático para modelar estas distribuciones apareció más tarde pues en ese momento no se tenían las herramientas para el análisis dinámico de estas observaciones.

Fue hasta 1960 que el comportamiento leptocúrtico se integró a los modelos usados en finanzas gracias al desarrollo de la probabilidad moderna. En esos años, Mandelbrot (1962, 1963, 1965) [35–37] Samuelson (1965) [38] y Fama (1965) [39] propusieron estudiar los mercados financieros en un marco no gaussiano inspirado en el trabajo de Lévy (1924) [40] sobre la estabilidad de las distribuciones de probabilidad y la generalización del teorema del límite central propuesto por Gnedenko y Kolmogorov (1954) [41]. Los modelos que rechazaban explícitamente el marco gaussiano y la hipótesis de continuidad debían integrarse en una nueva percepción probabilística de la incertidumbre. Estos estudios forman parte de la econofísica. En particular Mandelbrot y Fama trabajaron en un marco estadístico paretiano y probabilístico de “Lévy estable”. Así, se inició un movimiento teórico al proponer una generalización del marco gaussiano para describir los mercados financieros. Algunos modelos económicos han supuesto que los rendimientos siguen una distribución normal, pero la econofísica lo ha contradicho desde su aparición: si las distribuciones de los rendimientos de las acciones siguen una distribución de ley de potencias, significa que pueden ocurrir grandes fluctuaciones en las bolsas de valores. Aceptar que los mercados financieros están sujetos a amplias variaciones puede ayudar a mitigar las inestabilidades financieras e incluso prevenirlas [15, 18, 42].

Los procesos de Lévy en su forma paretiana permiten tener en cuenta variaciones de precios que son muy grandes en relación con las variaciones promedio. Lo anterior, junto con la estabilidad de las distribuciones, generan que la varianza no tenga un valor límite, por lo que se dice que es infinita. Por ello, no han sido utilizados en la economía financiera. La varianza y la media son esenciales en las interpretaciones teóricas [15].

En 1960, mientras la economía financiera se consolidaba como disciplina científica, la relación entre riesgo y retorno fue tomada del trabajo de Markowitz (1952,1959) [43, 44]. Markowitz asoció el riesgo con la varianza y el rendimiento con la media. Desde esta perspectiva, si la varianza fuera infinita no se podría entender el riesgo como lo definió Markowitz. Por eso en ese momento trabajar con procesos de Lévy era complicado, ya que no había ni herramientas computacionales ni herramientas estadísticas para tratar con distribuciones paretianas estables. Por ello, la mayoría de los economistas ignoró este camino y continuó con las distribuciones normales [15].

En 1970 los procesos de Lévy parecían demasiado complicados, así que se realizaban combinaciones de distribuciones normales generalmente con leyes de Poisson. Posteriormente se observó que estos modelos de salto no permitían soluciones únicas, por lo que no conducían a un mercado eficiente (arbitraje). Así que entre los 70’s y 80’s, surgieron las finanzas matemáticas proporcionando una interpretación técnica de arbitraje. Sin embargo, aún no se conocía cómo integrar los procesos de Lévy [15].

La econofísica se puede pensar como una extensión de la termodinámica. El uso de los

procesos de Lévy permitió modelar el transporte no lineal y la turbulencia. A pesar de la extensión de la probabilidad a la termodinámica los físicos no estaban dispuestos a integrar los procesos estables de Lévy a la física. Esto se debe a que una varianza infinita significa una temperatura infinita, que no describe los procesos reales. Su implementación se resolvió en 1990 cuando se implementó las distribuciones de Lévy truncadas. Algunos autores trabajaron métodos para la estandarización de las distribuciones  $\alpha$ -estables de Lévy, de modo que la varianza ya no fuera infinita. Con ello los procesos estables de Lévy se integrarían al estudio estadístico de los mercados financieros sin el problema asociado a la varianza [15].

El término “big data” se ha popularizado en los últimos años dado el avance de la tecnología que permite, por un lado la disponibilidad de grandes conjuntos de datos, y por el otro, la capacidad de analizarlos. Se ha usado en varias áreas como inteligencia empresarial, marketing, economía, salud, psicología, finanzas y otras tantas áreas. En particular, el big data permite el análisis de problemas complejos por lo que ha llamado la atención de los físicos. De hecho, el big data, la complejidad y la evolución de la informática también influyeron en el surgimiento de la econofísica. El desarrollo de la computación ha permitido una mayor diferenciación de la distribución empírica de las variaciones del precio de las acciones y ha provocado un aumento de las variaciones extremas [15, 18].

En el área de las finanzas se cuenta con una gran cantidad de datos disponibles que se divulgan de manera pública, otros están disponibles en bases de datos mediante suscripción. Esto justifica la necesidad de verificar si estos datos pueden ayudar a analizar y predecir variables financieras, en cuyo caso se requieren herramientas de sistemas complejos como análisis multifractal, multiescalar, redes temporales o multinivel. Estos mercados financieros son gobernados por los mercados electrónicos que brindan datos en tiempo real y permiten un análisis más preciso. La automatización de los mercados ha permitido que se generen datos intradía. Esto es importante a nivel estadístico pues, entre más datos, más confiable es la identificación de patrones estadísticos. Gracias a esto, en las últimas dos décadas se han realizado varios estudios que muestran anomalías empíricas respecto al marco gaussiano [15, 18].

Tanto la econofísica como la economía financiera utilizan la hipótesis ergódica estacionaria que indica que los datos futuros serán un reflejo estadístico de los datos pasados. Algo que es importante señalar es que determinar si las distribuciones siguen una ley de potencias u otro tipo de ley, no es sencillo. Mitzenmacher (2004) [45] señaló que estas se acercan a las llamadas leyes exponenciales y que sólo es posible distinguir entre una ley de potencia o una ley normal si se cuenta con un gran volumen de datos. Así que los datos intradiarios permitieron confirmar que los mercados financieros se pueden describir por medio de procesos de Lévy, particularmente por medio de leyes de potencia la cual se ha convertido en la principal herramienta de la econofísica [15]. Recientemente se han desarrollado métodos más sofisticados y exactos para distinguir entre leyes de potencias y otras distribuciones usando métodos de máxima verosimilitud (maximum likelihood) y criterios informáticos de Akaike [46].

Otro factor que influye es la informatización de los mercados financieros. La creciente liquidez de los mercados tras su informatización ha acentuado la especulación y la volatilidad del mercado (Barber y Odean 2001, 47) [47]. Esta mayor volatilidad significa un aumento de las variaciones extremas de cotizaciones. Por lo que se requieren nuevas herramientas estadísticas, lo que ha sido favorable para el desarrollo de la econofísica. Bouchaud (2002) [48] explicó que la informatización de los mercados transformó el análisis de los mercados financieros en una verdadera ciencia empírica, convirtiéndola en “un área natural para los físicos” [15].

Desde su aparición la econofísica ha hecho una contribución a varios temas en las finanzas: autocorrelaciones, dependencia a largo plazo y distribuciones asintóticas anormales [28]; evaluación del riesgo financiero y fijación de precios activos [49]; predicción de crisis y colapsos del mercado [50]; modelado basado en agentes [51, 52]; riesgo sistemático y redes [53–56], el análisis de la hipótesis del mercado eficiente (EMH) [57, 58], etc. [18].

Entre los procesos de Lévy generalizados que se usan en finanzas matemáticas y economía financiera se encuentra el proceso gaussiano inverso normal, la varianza gamma, el proceso hiperbólico generalizado o el proceso CGMY [15].

Las empresas pueden utilizar sus datos para incrementar sus retornos. Gracias a una mayor capacidad computacional, el sector financiero puede usar modelos de econofísica para identificar, probar y evaluar modelos que pueden usarse, entre otras cosas, para identificar patrones en grandes datos financieros. Por ejemplo [59–61] han usado big data para anticipar posibles señales de alerta en los mercados financieros [18].

Al principio los economistas presentaban cierta desconfianza hacia la econofísica [62, 63], actualmente algunos economistas han adoptado métodos originados en la econofísica reconociendo su aplicabilidad en diferentes áreas de la economía. En un inicio sus aplicaciones se limitaban a los mercados financieros y la macroeconomía. Ahora la econofísica se utiliza en varias áreas como energía (Ondrej et al., 2016) [64], economía regional (Jian et al, 2018) [65], ambiental [42] (Satoshi et al., 2013), etc. Por lo que se ha mostrado que la econofísica puede ayudar en el entendimiento y posible solución de varios problemas económicos reales. [18]

El reconocimiento de que la econofísica puede ser útil en el contexto de crisis financieras hizo que, en diciembre de 2017, la Asociación Estadounidense de Economía presentara una conferencia sobre econofísica. Dicha conferencia muestra la aceptación y reconocimiento de la econofísica entre los economistas más duros [18].

El big data y la complejidad van de la mano, la econofísica es una forma de utilizar este tipo de datos, con la particularidad de ser usados principalmente en finanzas. La disponibi-

lidad de grandes conjuntos de datos y el mayor procesamiento computacional, hizo que el big data y las finanzas fueran áreas de particular interés en el análisis de eventos de crisis. Los gobiernos de todo el mundo han actuado para mejorar la estabilidad financiera y reducir el riesgo de un sistema altamente interconectado, usando la complejidad [66]. La complejidad nos ha dejado un par de lecciones: pueden ocurrir eventos extremos en los mercados de valores, los mercados financieros están interconectados, algunos sectores o empresas son demasiado centrales para fracasar, diferentes sistemas (salud, transporte, industria, finanzas, etc.) están interrelacionados aumentando el riesgo global, las crisis financieras pueden ser fenómenos complejos, de modo que cualquier evento puede provocar una crisis y esparcirse [18].

En el contexto actual, el análisis de riesgos requiere el seguimiento de temas que van más allá de las finanzas y la economía, se deben incorporar temas como el medio ambiente, salud pública, política, crédito, energía, etc. Por ello existe una necesidad de complejidad para comprender la inestabilidad en un mundo globalizado e interconectado con un gran volumen de información. El uso del big data puede ayudarnos a prepararnos para los desafíos del futuro [18].

## 1.2. Criptomonedas

La irrupción en la primera década del siglo XXI de tecnologías de cómputo distribuido, redes de comunicaciones de alta velocidad y avances en el diseño de algoritmos sofisticados de cifrado; pero de fácil implementación hizo posible la aparición del dinero digital, abriendo un nuevo panorama de acción para la econofísica. Así, Nakamoto (2008) [67] propuso la primer criptomoneda, que es una moneda digital basada en la tecnología de blockchain para construir un libro público descentralizado sin la autoridad central para asegurar las transacciones y controlar la creación de nuevas unidades de moneda. Su propuesta fue rápidamente aceptada y, en 2009, se lanzó la red de Bitcoin como una red de pago entre pares que significó una innovación de tecnología financiera de rápido desarrollo. Desde entonces, se han creado más criptomonedas. Las criptomonedas ahora forman un sistema complejo implementado a través de intercambios, billeteras, pagos y minería de monedas. Para Enero de 2022 existen más de 8.500 criptomonedas, aunque el Bitcoin sigue siendo la más popular. El Bitcoin fue la primer criptomoneda descentralizada, aunque se han creado más, y representa más del 42.11 % del mercado total de criptomonedas.

Las criptomonedas son dinero digital diseñado específicamente para el intercambio mediante redes descentralizadas de computadoras y sin la intervención o control de bancos tradicionales. Por su naturaleza no existen en forma física y solamente en línea. Para su existencia se utilizan métodos de cifrado (encriptamiento) para identificar y brindar seguridad a sus transacciones. En la actualidad existen más de mil criptomonedas. Algunas de ellas con existencia aprobada por gobiernos locales como es el caso de la “Petro moneda”

de Venezuela anunciada en el año 2017. El Petro, es una criptomoneda respaldada por las riquezas naturales (oro, petróleo, gas y diamantes) de Venezuela. Otros países tienen como política monetaria oficial el respaldo a ciertas criptomonedas como es el caso de El Salvador y el Bitcoin. Otras criptomonedas han sido lanzadas por empresas bien establecidas como la KodakCoin en 2018.

Se estima que la capitalización total de las criptomonedas es aproximadamente de 2T USD. Hasta ahora, muchas investigaciones y análisis se han centrado en una o pocas criptomonedas, por lo que aún falta un análisis exhaustivo. Para este trabajo se emplearon los precios históricos de las criptomonedas que se presentan en CryptoDataDownload [68] y que existen desde hace al menos 3 años. Estas son: Basic Attention Token (BAT), Bitcoin Cash (BCH), Bitcoin (BTC), Dai (DAI), Eido (EDO), Eos (EOS), Ethereum Classic (ETC), Ethereum (ETH), Metaverse ETP (ETP), Litecoin (LTC), Neo (NEO), OMG Network (OMG), Tron (TRX), Stellar (XLM), Monero (XMR), Verge (XVG), Ripple (XRP) y Zcash (ZEC) [69, 70].



Figura 1.1: Precio histórico del Bitcoin, En dólares americanos, hasta marzo del 2022. Fuente: Investopedia

El gran auge del mercado de criptomonedas y su alto volumen de capitalización, surge principalmente por lo atractivo de que no existan instituciones bancarias controlando y regulando (al menos inicialmente) el flujo de inversión ni las ganancias potenciales (por ejemplo, pago de impuestos). El mercado de criptomonedas ofrece una gran atractivo para sus inversionistas porque es fácil realizar transacciones, ofrece anonimato y una alta seguridad. Adicionalmente, no requiere -en principio- involucrar a terceros para apertura de cuentas y su manejo. ¿Es confiable invertir en criptomonedas? La respuesta es doble, por una parte la seguridad de encriptamiento da una confiabilidad muy grande a las transacciones y por otra parte, es importante mencionar que el gran atractivo del mercado de criptomonedas

es la ganancia relativa para los inversionistas que se ha experimentado de manera histórica. Consideremos la figura 1.1 donde se muestra el valor histórico en dólares americanos del Bitcoin. Podemos observar que existe un crecimiento sostenido del valor de la criptomoneda, al menos hasta el 2021 cuando inicia un periodo de gran volatilidad causado, posiblemente, por las crisis desatadas por la pandemia de COVID-19. Los inversionistas de Bitcoin entre 2008 y 2021 gozaron de ganancias claras.

En este trabajo, sin embargo, no se propondrá un método para predecir ganancias en el mercado de criptomonedas y por tanto una sugerencia de si invertir o no en bitcoins. Lo que se mostrará es que la incertidumbre en los retornos disminuye si se diversifica el portafolio de inversión.

## Capítulo 2

# Econofísica: complejidad y entropía

Los mercados de valores son sistemas complejos pues son sistemas abiertos donde innumerables subsistemas actúan e interactúan de manera no lineal y dinámica. Esto representa un atractivo para los físicos que estudian los mercados financieros por medio de métodos distintos a los usados tradicionalmente por los economistas. De acuerdo a Bonnano et al. (2001) [71] los mercados financieros presentan distintos niveles de complejidad debido a que son sistemas compuestos por agentes que interactúan de manera no lineal. Estos autores, entre otros, consideran que los modelos clásicos de valoración de activos (CAPM y APT) han fracasado debido a que los supuestos básicos de estos modelos no se verifican empíricamente [25].

La entropía es una cantidad definida matemáticamente que usualmente se emplea para caracterizar la probabilidad de estados en un sistema que está pasando por un proceso de cambio. Originalmente fue introducida por Rudolf Clausius (1870) [72] para medir la relación de calor transferido a través de un proceso reversible en un sistema aislado. En mecánica estadística la entropía es la medida de la incertidumbre que queda sobre el sistema después de observar sus propiedades macroscópicas (presión, temperatura o volumen). Esta última interpretación fue introducida por Ludwig Boltzmann (1970) [73], quién definió la entropía de configuraciones como la diversidad de formas específicas en las que se pueden organizar los componentes de un sistema. De este modo encontró una fuerte relación entre la termodinámica y los aspectos estadísticos de la entropía. La entropía termodinámica y la de configuraciones sólo difieren por la constante de Boltzmann. En teoría de la información se suele emplear la entropía de Shannon (1948) [74]. Esto se debe a que el sistema que provee la información opera como un sistema cibernético estocástico, en el cual el mensaje se puede considerar una variable aleatoria. En teoría de la información se emplea la entropía para comparar la incertidumbre y las imprecisiones de un mensaje con un mensaje de referencia. La entropía puede cuantificar el valor esperado de la información en un mensaje, es decir, la cantidad de información que falta antes de recibir el mensaje. Cuanto más incierto sea el mensaje que proporciona el sistema, mayor será el valor esperado de la información con-

tenida en el mensaje. Por tanto, mayor incertidumbre en los mensajes del sistema significa mayor entropía. Debido a que la entropía es igual a la cantidad de información esperada en un mensaje, mide la tasa de compresión máxima que se puede aplicar sin perder información. De este modo entendemos a la entropía como una medida de desorden, dispersión, incertidumbre y diversificación utilizada en estadística, procesos dinámicos y teoría de la información. Aunque recientemente se ha adoptado en la teoría financiera [25, 75].

Markowitz (1952) [76] fue el primero en introducir un enfoque cuantitativo para la selección de carteras. Propuso un algoritmo que encuentra la asignación de capital óptimo en un conjunto de activos en función de parámetros de riesgo. Basado en la volatilidad de los rendimientos aleatorios, la optimización de carteras de varianza media (MVPO) de Markowitz mide el riesgo de un activo por su segundo momento central: la varianza. Para múltiples activos, se emplea la covarianza pesada por la respectiva asignación de capital. Minimizar la varianza da como resultado una cartera con el equilibrio óptimo entre riesgo y rentabilidad. Este modelo pronto popularizó la palabra varianza en el mundo de evaluación de riesgos financieros. Además, paulatinamente inspiró la creación de modelos como el de fijación de precios de activos de capital (CAPM) [77]. Incluso, en la actualidad es normal relacionar la varianza o desviación estándar y el VaR (valor en riesgo) como las principales medidas de riesgo e incertidumbre. Por ello, tanto la teoría moderna de carteras de Markowitz como los modelos de valoración de activos en equilibrio suponen que los retornos son estacionarios y normalmente distribuidos, aunque realmente este no es el caso [78]. Las caídas del mercado de valores son un ejemplo de la incapacidad de los modelos clásicos para describir el verdadero funcionamiento del mercado. Esto se debe a que no capturan toda la información relevante y son incapaces de cuantificar la incertidumbre de los movimientos futuros. En particular, los rendimientos del mercado muestran distribuciones más complicadas que la distribución normal, con picos y colas pesadas. La entropía, por otro lado, no tiene este tipo de condiciones límite.

Philippatos y Wilson (1972) [79] encontraron que la entropía es más general y tiene algunas ventajas sobre la varianza al comparar los comportamientos de la desviación estándar y la entropía en la gestión de carteras. Ellos encontraron que las dos principales medidas de incertidumbre son la entropía y la varianza. Nawrocki y Harding (1986) [80] propusieron aplicar la entropía ponderada de valor de estado como medida del riesgo de inversión; sin embargo, trataron con el caso discreto. De acuerdo a Maasoumi (1993) [81], la entropía puede ser una medida alternativa de dispersión. Bouchaud et al. (1997) [82] propusieron el uso de la entropía para minimizar la diversificación y obtener un riesgo aceptable para el inversor. Particularmente, utilizaron la entropía como medida integradora en el proceso de selección de carteras basándose en el modelo de entropía media de Markowitz. Gulko (1998) [83] analizó el equilibrio del mercado mediante un modelo que maximiza la entropía de acuerdo a ciertas constricciones. Maasoumi y Racine (2002) [84] mostraron que la entropía tiene varias propiedades deseables y puede capturar eficientemente las dependencias no lineales en las series temporales de rendimiento del mercado, así como entre los rendimientos y otras variables de predicción obtenidas de otros modelos. Arafat et al. (2003) [85]

discutieron distintos métodos de incertidumbre y concluyeron que la entropía puede ser una buena medida de incertidumbre. Dionisio et al. (2006) [25] emplearon la entropía de Shannon de manera empírica a datos recopilados de la Bolsa de Valores de Portugal para observar que la entropía es sensible al efecto de diversificación. Kirchner y Zunckel (2011) [86] en su artículo argumentó que en la economía financiera la entropía es una mejor herramienta para capturar la reducción del riesgo por diversificación; sin embargo, en su estudio suponen que los activos son gaussianos. Ormos y Zibriczky (2014) [75] investigaron la entropía como medida de riesgo financiero. Concluyeron que la entropía explica la prima de renta variable de valores y carteras de una modo más sencillo y eficaz que el parámetro beta del modelo de valoración de activos de capital. En este caso emplearon la entropía continua, como medida de riesgo, para la fijación de los precios de activos. Los autores econtraron que la entropía decrece en función del número de valores involucrados en un portafolio, de manera similar a como lo hace la varianza. Además, mostraron empíricamente que la información mutua y la entropía condicional se comportan adecuadamente cuando se comparan con el riesgo sistemático y el específico a través del modelo de equilibrio lineal.

Mahmoud y Naoui (2017) [87] compararon la entropía de Shannon con el enfoque de media-varianza de Markowitz al estudiar la bolsa de valores de Túnez. Sus resultados muestran que la entropía se comporta de manera similar a la varianza al verificar el efecto de diversificación y concluyen que la entropía es una alternativa para identificar el riesgo relacionado con la inversión. Aunque la idea de usar la entropía en la economía no es nueva ya que tiene al menos 70 años, fue ridiculizada por Paul Samuelson y, dada su autoridad (Premio Nobel de Economía en 1970), su uso se popularizó en la econofísica tan sólo recientemente.

De este modo, la entropía caracteriza la incertidumbre y mide la dispersión de una variable aleatoria. Como medida de incertidumbre, parece tener mucho potencial y amplias aplicaciones, tanto para el trabajo teórico como el empírico. Los trabajos académicos anteriores reconocen que puede ser empleada como medida de riesgo. De manera análoga a lo realizado por Dionisio et al. (2006), [25], Ormos y Zibriezky (2014) [75] y Mahmoud y Naoui (2017) [87], el objetivo principal de este trabajo es estudiar la capacidad de la entropía como medida de incertidumbre en la gestión de carteras aplicado al mercado de valores de las criptomonedas, donde se destaca el hecho de que la entropía verifica el efecto de la diversificación. Además, es necesario incluso estimar las funciones de densidad. Hasta donde sabemos, muy pocos artículos usan la entropía con relación a las criptomonedas y prácticamente ninguno de ellos la emplea como medida de riesgo. Así mismo, son pocos los artículos que estudian las propiedades estadísticas de las criptomonedas yendo más allá del Bitcoin.



# Capítulo 3

## Marco Teórico

### 3.1. Función de entropía discreta

Sea  $X$  una variable aleatoria discreta,  $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$  un conjunto de eventos posibles y las probabilidades correspondientes  $p_X(x_i) = Pr(X = A_i)$ , con  $p_X(x_i) \geq 0$  y  $\sum_{i=1}^n p_X(x_i) = 1$ . La función de entropía discreta generalizada o entropía de Rényi [75, 88] para la variable  $X$  se define como

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \log \left( \sum_{i=1}^n p_X(x_i)^\alpha \right) \quad (3.1)$$

donde  $\alpha$  es el orden de la entropía y  $\alpha \geq 0$ . Este orden se puede considerar como un parámetro de sesgo, cuando  $\alpha \leq 1$  privilegia los eventos raros y cuando  $\alpha \geq 1$  privilegia los eventos comunes [89]. La base del logaritmo es 2. Los ordenes más empleados son  $\alpha = 1$  y  $\alpha = 2$ .

$\alpha = 1$  es un caso especial de la entropía generalizada que asume ergodicidad e independencia, cosa que el caso generalizado no hace. Sin embargo, al sustituir en (3.1) da como resultado una división entre cero. Por medio de la regla de L'Hôpital, se puede demostrar que cuando  $\alpha$  tiende a 1, se tiene la entropía de Shannon

$$H_1(X) = - \sum_{i=1}^n p_X(x_i) \log(p_X(x_i)) \quad (3.2)$$

donde dado el límite correspondiente, cuando  $p_X(x_i) \rightarrow 0$ , entonces  $0 \log(0)$  se define como 0.

La entropía de Shannon produce distribuciones de equilibrio exponencial, mientras que la entropía generalizada produce distribuciones de ley de potencia. Además, se puede interpretar como el valor esperado de  $\log\left(\frac{1}{p_X(x)}\right)$ .

### 3.1.1. Conexión entre la entropía de Shannon y la entropía de Boltzmann

Se denomina probabilidad termodinámica  $W$  al número de microestados que tiene un macroestado. Es decir,  $W$  es el número total de estados microscópicos correspondientes al estado macroscópico de un sistema.

La ecuación de Boltzmann para la entropía toma la forma

$$S = k_B \ln(W) \quad (3.3)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. La probabilidad termodinámica  $W$  no es una probabilidad ordinaria, sino un número entero. Consideremos un sistema aislado formado por  $N$  moléculas que pertenecen a  $n$  estados de energía. Si suponemos un número fijo de moléculas y valores fijos de la energía total, el número de estados macroscópicos del sistema es

$$W = \frac{N!}{\prod_{i=1}^n N_i!} \quad (3.4)$$

Empleando las dos expresiones anteriores

$$S = k_B \ln\left(\frac{N!}{\prod_{i=1}^n N_i!}\right) \quad (3.5)$$

consideremos  $p_i = N_i/N$  i.e. la probabilidad de que la molécula se encuentre en el  $i$ -ésimo estado de energía. Además, usando la aproximación de Stirling cuando  $N \rightarrow \infty$

$$S \approx -k_B N \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) \quad (3.6)$$

obtenemos la ecuación de entropía para un sistema formado por  $N$  moléculas distribuidas con distribución de probabilidad  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  entre  $n$  estados de energía. Por lo

que cuando  $N$  tiende a infinito, la entropía de Boltzmann es proporcional a la entropía de Shannon [90].

Consideramos  $S = -k_B \sum_{i=1}^N p_i \ln(p_i)$ . Notemos que desde el punto de vista de la teoría de la información, los bits son necesariamente indistinguibles (etiquetar bits, requiere bits extras), lo que es consistente con la entropía de Boltzmann.

El postulado de igualdad de probabilidades a priori (o el principio de máxima entropía) dice que la probabilidad de un microestado  $i$  es  $p_i = \frac{1}{W}$ . En términos de teoría de la información, los  $p_i$  iguales implican que los datos son totalmente aleatorios. Por lo tanto, no debería haber forma de comprimir los datos en absoluto. Los datos se pueden comprimir sólo si hay algo más de información en las probabilidades. Entonces, la mínima información conduce a la máxima entropía. Si  $p_i = \frac{1}{W}$  entonces  $S = -k_B \sum_{i=1}^W \frac{1}{W} \ln\left(\frac{1}{W}\right) = k_B \ln(W)$ .

## 3.2. Función de entropía continua

Sea  $X$  una variable aleatoria continua que toma valores de  $\mathbb{R}$  y  $p_X(x)$  la función de densidad de la variable aleatoria. La entropía continua se define como

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \int p_X(x)^\alpha \quad (3.7)$$

Notemos que la base del logaritmo de (3.1) y (3.7) son diferentes. Aunque la entropía depende de la base, se puede demostrar que el valor de la entropía cambia sólo por un coeficiente constante para diferentes bases.

Para  $\alpha = 1$

$$H_1(X) = - \int p_X(x) \ln(p_X(x)) dx \quad (3.8)$$

## 3.3. Entropía como medida de incertidumbre

De acuerdo a Shannon (1948) [74], una medida de incertidumbre  $H(p_X(x_1), p_X(x_2), \dots, p_X(x_n))$  debe satisfacer:

1.  $H$  debe ser continuo en  $p_X(x_i)$ , con  $i = 1, \dots, n$ .

2. Si  $p_X(x_i) = \frac{1}{n}$ ,  $H$  debe ser monótona creciente como función de  $n$ .
3. Si una opción se divide en dos opciones sucesivas, la  $H$  original debe ser la suma ponderada de los valores individuales de  $H$ .

Shannon mostró que una medida que satisface todas estas propiedades es (3.2) multiplicada por cualquier constante positiva (la constante sólo establece la unidad de medida). Entre las propiedades que la hacen una buena elección de incertidumbre se encuentran

1.  $H(X) = 0$  si y sólo si todos las  $p_X(x_i)$ , menos uno, son cero. Así, cuando tenemos total certeza del resultado  $H$  se desvanece, de otro modo  $H$  es positivo.
2. Cuando  $p_X(x_i) = \frac{1}{n}$  i.e. cuando la distribución de probabilidad discreta es constante,  $H(X)$  es máximo e igual a  $\log(n)$ . Esta es otra propiedad intuitivamente cierta que favorece su uso como medida de incertidumbre.
3. Para dos variables arbitrarias  $X$  y  $Y$ , con  $m$  y  $n$  posibilidades, respectivamente. Sea  $p_{X,Y}(x_i, y_j)$  la probabilidad conjunta. La entropía del evento conjunto es

$$H(X, Y) = - \sum_i^n \sum_j^m p_{X,Y}(x_i, y_j) \log(p_{X,Y}(x_i, y_j)) \quad (3.9)$$

mientras que las entropías marginales son

$$H(X) = - \sum_i^n \sum_j^m p_{X,Y}(x_i, y_j) \log \left( \sum_j^m p_{X,Y}(x_i, y_j) \right) \quad (3.10)$$

$$H(Y) = - \sum_i^n \sum_j^m p_{X,Y}(x_i, y_j) \log \left( \sum_i^n p_{X,Y}(x_i, y_j) \right) \quad (3.11)$$

Con las relaciones anteriores es fácil demostrar que  $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$ , donde la igualdad se cumple si y sólo si  $X$  y  $Y$  son estadísticamente independientes i.e.  $p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j)$ . Esto implica que la incertidumbre de un evento conjunto es menor o igual a la suma de las incertidumbres individuales.

4. Cualquier cambio hacia la igualación de las probabilidades  $p_X(x_i)$ , aumenta  $H$ . Por tanto, si  $p_X(x_1) \leq p_X(x_2)$  y aumentamos  $p_X(x_1)$  disminuyendo  $p_X(x_2)$  en una cantidad igual para que  $p_X(x_1)$  y  $p_X(x_2)$  sean similares, entonces  $H$  aumenta. De hecho, cualquier operación "promedio" en  $p_X(x_i)$  de la forma

$$p_X(x_i)' = \sum_j a_{i,j} p_X(x_j) \quad (3.12)$$

con  $\sum_i a_{i,j} = \sum_j a_{i,j} = 1$  y  $a_{i,j} \geq 0$ , incrementa a  $H$ , excepto en el caso especial donde esta operación equivale a una permutación, en ese caso  $H$  permanece igual.

5. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias como en (3), no necesariamente independientes. La probabilidad condicional de  $y_j$  dado  $x_i$  es

$$p_{X,Y}(y_j|x_i) = \frac{p_{X,Y}(x_i, y_j)}{\sum_i^n p_{X,Y}(x_i, y_j)} \quad (3.13)$$

Se define la entropía condicional como

$$H(Y|X) = - \sum_i^n \sum_j^m p_{X,Y}(x_i, y_j) \log(p_{X,Y}(y_j|x_i)) \quad (3.14)$$

Esta cantidad mide qué tanta incertidumbre tenemos de  $Y$  cuando conocemos  $X$ . Sustituyendo el valor de  $p_{X,Y}(y_j|x_i)$  en la expresión anterior tenemos

$$H(Y|X) = H(X, Y) - H(X) \quad (3.15)$$

o

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) \quad (3.16)$$

Por lo que la incertidumbre del evento conjunto ( $Y|X$ ) es la incertidumbre de  $X$  más la incertidumbre de  $Y$  cuando  $X$  se conoce.

6. de los puntos 3 y 5

$$H(X) + H(Y) \geq H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) \quad (3.17)$$

Por lo que

$$H(Y) \geq H(Y|X) \quad (3.18)$$

Que implica que la incertidumbre de  $Y$  nunca aumenta por el conocimiento de  $X$ . Disminuye, a menos que  $X$  y  $Y$  sean independientes, en cuyo caso no cambia.

Arafat et al. (2003) [85] consideran que una medida de incertidumbre debe atender las siguientes propiedades:

1. Nitidez: La incertidumbre debe ser cero cuando se tiene certeza de la ocurrencia o no ocurrencia de un evento.
2. Maximidad: Se requieren valores máximos cuando la incertidumbre en la ocurrencia y no ocurrencia de un evento es igualmente probable.

3. Resolución, requiere que  $H(X) \geq H(X^*)$ , donde  $H(X^*)$  es más cercano a 0 o 1 que  $H(X)$
4. Simetría  $H(X) = H(1 - X)$
5. Valoración  $H(X \cup Y) + H(X \cap Y) = H(X) + H(Y)$

Estos autores discuten métodos combinados de incertidumbre y concluyen que la entropía puede ser una buena medida de incertidumbre. Las propiedades de la entropía discreta y diferencial son similares. Las diferencias se encuentran en que la entropía discreta es invariante ante cambios de variable y la continua no necesariamente lo es, además la entropía continua puede tomar valores negativos. De este modo la incertidumbre continua es una buena medida de incertidumbre para variables continuas.

### 3.4. Entropía normal

La suposición de que los datos y residuos siguen una distribución normal es común tanto en la gestión de carteras como en el análisis de riesgos. Por ende, para estimar paramétricamente la entropía de una distribución normal empleamos

$$NH(X) = \int p_X(x) \log(\sqrt{2\pi}\sigma) dx + \int p_X(x) \frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2} dx = \log(\sqrt{2\pi}e\sigma) \quad (3.19)$$

### 3.5. Estimación de la Función de Densidad de Probabilidad (PDF)

En la práctica, las medidas de riesgo estándar como el CAPM beta o la desviación estándar se calculan sobre los rendimientos diarios o mensuales. También seguimos esta metodología. Dado que los rendimientos de los valores pueden tomar valores de un codominio continuo, nos centramos principalmente en la entropía diferencial.

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  las observaciones de la variable aleatoria continua  $X$  y  $H_{\alpha,n}(X)$  la estimación muestral de  $H_\alpha(X)$ . La evaluación de la entropía se obtiene por medio de la estimación de la función de densidad. La función de densidad de probabilidad  $p_X(x)$  se aproxima mediante  $p_{X,n}(x)$ . De este modo, la estimación integral de la entropía es

$$H_{\alpha,n}(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \int_{A_n} p_{X,n}(x)^\alpha dx \quad (3.20)$$

donde  $A_n = (\min(x), \max(x))$ . Por este motivo, una de las dificultades para determinar la entropía continua es que se desconoce la función de densidad de probabilidad (o *PDF* por sus siglas en inglés) subyacente. Para superar este problema existen tres métodos: estimadores basados en histogramas, basados en kernel y paramétricos. [25, 75]

## Histograma

Sea  $b_n = (\max(x), \min(x))$  el rango de los valores de la muestra; dividimos el rango en  $k$  contenedores de igual ancho donde los cortes se realizan en los puntos  $t_j$ . El ancho de cada contenedor es  $h = \frac{b_n}{k} = t_{j+1} - t_j$ . La función de densidad se estima mediante

$$p_{X_n}(x) = \frac{v_j}{nh} \quad (3.21)$$

si  $x \in (t_j, t_{j+1})$ , con  $v_j$  el número de puntos que caen en el  $j$ -ésimo contenedor. De (3.8) y (3.20)

$$H_{1,n}(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k v_j \ln \left( \frac{v_j}{nh} \right) \quad (3.22)$$

El hiperparámetro de este método es el número de contenedores  $k$ . Existen varios métodos para elegir este parámetro, por ejemplo la regla de referencia normal de Scott (1979) [91], la regla de Freedman-Diaconis (1981) [92], la de la raíz cuadrada, etc. En particular la regla de Freedman-Diaconis es bastante robusta y suele dar buenos resultados en la práctica. El método consiste en minimizar la integral de la diferencia al cuadrado entre el histograma y la densidad de la distribución teórica. El ancho de banda en este método está dado por

$$h = 2 \cdot IQR(x) \cdot n^{-1/3} \quad (3.23)$$

donde  $n$  es el número de observaciones y  $IQR(x)$  es el rango intercuartílico del conjunto de datos. De este modo el número de contenedores óptimo se escoge como

$$k = \frac{b_n \cdot n^{1/3}}{2 \cdot IQR(x)} \quad (3.24)$$

### Estimación de la densidad del Kernel

Sea  $x_1, \dots, x_n$  una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d. por sus siglas en inglés), entonces un estimador de la función de distribución es

$$p_{X_n}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^x K\left(\frac{u - x_i}{h}\right) du \quad (3.25)$$

donde  $K$  es la función de Kernel y  $h$  es el parámetro de ancho de banda. La función  $K$  debe ser una función real tal que  $K(x) \geq 0$ ,  $K(x) = K(-x)$  para toda  $x$  en  $\mathbb{R}$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$  y  $\int_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx = 0$ . Se ha estudiado la convergencia uniforme a la distribución teórica independientemente de la forma del Kernel empleado [93]. Los hiperparámetros son el Kernel y el ancho de banda, la elección del Kernel determina cómo se distribuye la influencia de cada observación.

### Estimación de densidad paramétrica

Se denota como  $\mathcal{P}$  al conjunto de distribuciones de probabilidad en un espacio muestral indexado por un conjunto  $\Theta$  (espacio de parámetros). Para cada  $\theta \in \Theta$ , se tiene un  $P_\theta$  miembro de  $\mathcal{P}$  que es una distribución. Los modelos estadísticos se pueden escribir como

$$\mathcal{P} = \{P_\theta | \theta \in \Theta\} \quad (3.26)$$

Estos modelos son paramétricos si  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$  con  $k \geq \in \mathbb{Z}^+$  (en otro caso se tendría un modelo no paramétrico como los estimadores de Kernels). En cuyo caso, el modelo consta de distribuciones continuas. Los métodos paramétricos suponen que se conoce la forma particular de la función de distribución de probabilidad y sólo deben estimarse sus parámetros (en el caso de una distribución normal, sólo debe estimarse su media y varianza).

### Estimación máxima del Likelihood

Consideremos un conjunto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de datos i.i.d. Dado que están idénticamente distribuidos, deben tener la misma función de probabilidad  $f(X|\theta)$ . La verosimilitud o el likelihood de que los datos tengan el parámetro  $\theta$  es

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad (3.27)$$

Para diferentes  $\theta$ 's, la probabilidad de que los datos tengan esos parámetros será distinta. En la estimación de máxima verosimilitud o maximum likelihood (MLE), el objetivo es encontrar

los parámetros  $\theta$ 's que maximicen la función de verosimilitud  $\mathcal{L}$ . El MLE supone que<sup>1</sup>

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} (\mathcal{L}(\theta)) \quad (3.28)$$

Se suele emplear la función Log-Verosimilitud o Log-Likelihood

$$\mathcal{LL}(\theta) = \log(\mathcal{L}(\theta)) = \log \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i|\theta) \quad (3.29)$$

Dado que el logaritmo es monóticamente creciente, en la práctica para el MLE se trabaja con

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} (\mathcal{LL}(\theta)) \quad (3.30)$$

Para esta tesis se empleó el método del histograma, Kernel y paramétrico para determinar los *PDF*'s, usando siempre la regla de Freedman-Diaconis. En los dos últimos casos, las funciones de densidad de probabilidad se calcularon por la estimación de máxima verosimilitud (MLE).

## 3.6. Portafolios de inversión

Un portafolio o cartera de inversión es simplemente una colección de activos. Se caracterizan por el valor invertido en cada activo. Sea  $w_i$  la fracción invertida en el activo  $i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ , la restricción requerida es que

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.31)$$

Definimos el rendimiento  $R_i$  de una acción ordinaria  $i$ , durante un cierto período como

$$R_i = \frac{P_{1,i} - P_{0,i}}{P_{0,i}} \quad (3.32)$$

donde  $P_{0,i}$  es el precio de la acción  $i$  al comienzo del período y  $P_{1,i}$  es el precio de  $i$  al final de ese período. Este retorno es el retorno histórico o ex post retorno. Mientras que el

---

<sup>1</sup>Los argumentos del máximo o *argmax* son aquellos puntos del dominio de una función en los cuales esta se maximiza.

rendimiento total de la cartera es simplemente el promedio ponderado de los rendimientos esperados de los valores individuales de la cartera

$$R_T = \sum_{i=1}^n w_i R_i \quad (3.33)$$

El objetivo de la selección de carteras es encontrar una cartera óptima asignando pesos que minimicen el riesgo y maximicen los rendimientos. Markowitz definió el riesgo como la varianza de los rendimientos de la cartera. El MVPO de Markowitz minimiza la varianza y maximiza los rendimientos esperados

$$\min\{Var(R_T)\} = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \quad (3.34)$$

$$\max\{E(R_T)\} = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) \quad (3.35)$$

### 3.7. Comparación entre la entropía y la varianza

De acuerdo a Ebrahimi et al. (1999) [94] una densidad suave y continua se puede aproximar bien mediante

$$p_X(x) \approx a_0 G_0(x) + a_1 G_1(x) + \dots + a_N G_N(x) \quad (3.36)$$

donde  $G_i(x)$  con  $i = 1, \dots, N$  son los polinomios de Legendre. Notemos que

$$\int_{-1}^1 G_i(x) G_j(x) dx = \frac{2\delta_{ij}}{2i+1} \quad (3.37)$$

$\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker y  $x \in [-1, 1]$ . Los autores argumentan que se puede obtener un  $a_0$  y  $a_1$  para satisfacer la restricción de normalización y la de media cero.

Dado que

$$x^2 = \frac{1}{3}[2G_2(x) + G_0(x)] \quad (3.38)$$

la varianza se puede aproximar por

$$V(x) = \int x^2 p_X(x) dx \approx \frac{1}{3}[\frac{4}{5}a_2 + 2a_0] \quad (3.39)$$

lo que muestra que la varianza aumenta si y sólo si  $a_2$  aumenta. Mientras que los  $a_i$  con  $i \geq 3$  no influyen en la varianza.

Usando (3.36) se puede verificar que la derivada de  $H$  respecto a  $a_2$  es

$$\frac{\partial H}{\partial a_2} \approx - \int G_2(x) \log[a_0 G_0(x) + a_1 G_1(x) + \dots + a_N G_N(x)] dx \quad (3.40)$$

Por lo que la entropía incrementa con la varianza si la última expresión es positiva. Además, la variación de la entropía depende de muchos más parámetros además de  $a_2$ . De este modo Ebrahimi et al. mostraron que la entropía puede estar relacionada con momentos de orden superior de una distribución, por lo que puede ofrecer una mejor caracterización de  $p_X(x)$  debido a que emplea más información sobre la distribución de probabilidad que la varianza.

La entropía mide la disparidad de la densidad  $p_X(x)$  de la distribución uniforme. Es decir, mide la incertidumbre en el sentido de utilizar  $p_X(x)$  en lugar de la distribución uniforme [87]. Mientras que la varianza mide un promedio de distancias respecto a la media de la distribución de probabilidad. De acuerdo a Ebrahimi et al. [94], ambas medidas reflejan concentración, pero usan distintas métricas. La varianza mide la concentración alrededor de la media y la entropía mide la difusión de densidad independientemente de la ubicación de la concentración. Estadísticamente hablando, la entropía no es una medida centrada en la media, sino que toma en cuenta toda la distribución empírica sin concentrarse en un momento específico. De este modo puede tomar en cuenta toda la distribución de rendimientos sin centrarse en uno en particular [95]. La entropía discreta es positiva e invariante bajo transformaciones, pero la varianza no lo es. En el caso continuo ni la entropía ni la varianza son invariantes bajo transformaciones uno a uno [25] [87]. De acuerdo a Pele et al. (2017) [93] la entropía está fuertemente relacionada a las colas de la distribución, esta característica es importante para distribuciones de colas pesadas o con un momento de segundo orden infinito, donde la varianza es obsoleta. Además, la entropía se puede estimar para cualquier distribución, sin conocimiento previo de su forma funcional. Estos autores encontraron que las distribuciones de cola pesada general bajos niveles de entropía, mientras que las distribuciones de cola ligera generan altos valores de entropía.

En esta tesis se busca observar la sensibilidad de la entropía de Shannon al efecto de diversificación en activos no clásicos, en este caso particular, en las criptomonedas. El riesgo de las carteras de inversión se puede dividir en específico y sistemático. El riesgo sistemático es inherente a la incertidumbre del mercado, por lo que no es diversificable, usualmente el precio de un activo se ve afectado por factores como la inflación, el crecimiento económico o la recesión económica, y las fluctuaciones en el mercado financiero mundial. El riesgo específico o no sistemático corresponde al riesgo de un activo o un grupo pequeños de activos debido a sus características específicas, por lo que sí es diversificable. Formar portafolios o

carteras puede reducir el riesgo específico o no sistemático.

La entropía puede brindar información similar si definimos la información mutua media entre  $X$  y  $Y$  como

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{X,Y}(x_i, y_j) \log \left( \frac{P_{X,Y}(x_i|y_j)}{P_X(x_i)P_Y(y_j)} \right) \quad (3.41)$$

para el caso discreto y

$$I(X, Y) = \int_X \int_Y p_{X,Y}(x, y) \log \left( \frac{P_{X,Y}(x|y)}{P_X(x)P_Y(y)} \right) \quad (3.42)$$

para el caso continuo. De este modo  $H(X) = I(X, Y) + H(X|Y)$ , donde  $I(X, Y)$  se puede comparar al riesgo sistemático; mientras que  $H(X|Y)$  se puede comparar con el riesgo específico. Sin embargo, las medidas de teoría de información no se pueden comparar directamente con la varianza en términos métricos [25, 70].

La desviación estándar es una función convexa, por lo que obedece la desigualdad de Jensen  $E[\sigma(X)] \geq \sigma[(EX)]^2$ . Esto permite emplearla como medida de riesgo en las carteras de inversión, ya que toman en cuenta el efecto de diversificación. Por otro lado, la entropía es una función cóncava y tiene un máximo para la mayoría de las distribuciones de probabilidad y sólo cumple la desigualdad de Jensen para distribuciones uniformes. Esto puede dar la idea de que no va a satisfacer el efecto de diversificación, pero debemos recordar que la entropía no es una función de los valores de las variables, sino de la probabilidad en sí, por lo que la desigualdad  $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$  puede permitirnos observar la diversificación [25, 87].

# Capítulo 4

## Metodología y Análisis de Datos

### 4.1. Métodos

Usamos los precios de apertura y cierre de 18 criptomonedas, cotizados en dólares, desde el 16/10/2018 hasta el 31/12/2021, lo que da un total de 1172 observaciones por criptomoneda, de la base de datos de CryptoDataDownload [68] para calcular los rendimientos diarios. Primero, caracterizamos estadísticamente las distribuciones de los rendimientos diarios de cada criptomoneda por medio de pruebas de normalidad y ajustes paramétricos de distribuciones de cola pesada. Posteriormente, realizamos un análisis similar a lo presentado por Dionisio et al. (2006), [25], Ormos y Zibriezky (2014) [75] y Mahmoud y Naoui (2017) [87]. Del conjunto de las 18 criptomonedas, seleccionamos de manera aleatoria los activos para componer carteras de inversión, donde la única premisa utilizada es que la proporción invertida en cada activo es de  $\frac{1}{N}$ , siendo  $N$  el número de activos en la cartera. Para comparar la entropía con la desviación estándar de manera coherente, usamos la entropía normal ya que es función de la varianza.

### 4.2. Análisis de Datos

Presentamos los resultados en tres partes. Primero, mostramos que los rendimientos diarios de cada criptomoneda no siguen una distribución normal. En segundo lugar, se indica que los rendimientos diarios presentan colas gordas. Finalmente, se muestra el comportamiento de la entropía en función del número de activos en el portafolio.

### 4.2.1. Distribución normal y gráficos Q-Q plot

En la figura 4.1 se muestran los histogramas de la distribución de probabilidad de los rendimientos diarios de las criptomonedas estudiadas. La curva azul muestra la distribución normal con la varianza y media calculada a partir de los datos empíricos. La línea roja muestra el estimador de densidad de Kernel, se empleó el método de validación cruzada para determinar el ancho de banda y el Kernel que maximizan el Log-Verosimilitud o Log-Likelihood total de los datos en  $X$  [96]. Entre los Kernels empleados se encuentran:

Gaussiano: Los pesos se asignan siguiendo una distribución normal con una desviación estándar igual al ancho de banda

$$K(x, h) \propto \exp\left(-\frac{x^2}{2h^2}\right) \quad (4.1)$$

Epanechnikov: Los pesos están entre 1 y 0 y caen de forma cuadrática

$$K(x, h) \propto 1 - \frac{x^2}{h^2} \quad (4.2)$$

Tophat: Asigna el mismo peso a las observaciones dentro del mismo ancho de banda

$$K(x, h) \propto 1 \text{ si } x \leq h \quad (4.3)$$

Exponencial: Los pesos decaen de forma exponencial.

$$K(x, h) \propto \exp\left(-\frac{x}{h}\right) \quad (4.4)$$

Lineal: El peso decae de forma lineal dentro del ancho de banda

$$K(x, h) \propto 1 - \frac{x}{h} \text{ si } x \leq h \quad (4.5)$$

Coseno: El peso dentro del ancho de banda es proporcional a un coseno

$$K(x, h) \propto \cos\left(\frac{\pi x}{2h}\right) \text{ si } x \leq h \quad (4.6)$$

El ancho de banda se optimizó para valores entre 0 y 1. Vemos que en todos los casos hay una desviación importante de la distribución calculada con Kernels respecto a la distribución normal.

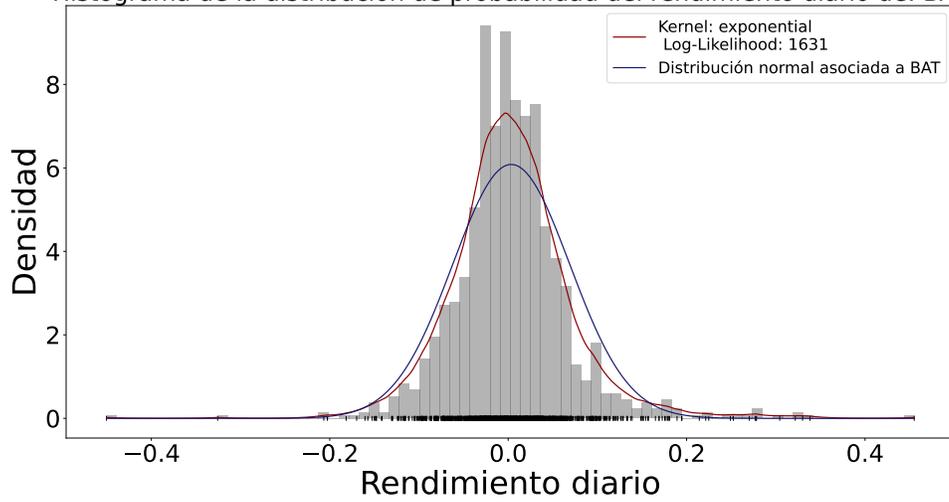
Los cuantiles son valores que dividen una distribución de probabilidad en intervalos iguales, teniendo en cada intervalo la misma fracción de la población total. Los Q-Q plots se utilizan comúnmente para visualizar datos y encontrar comparativamente el tipo de distribución de probabilidad al que una variable aleatoria puede pertenecer, por ejemplo, si son distribuciones gaussianas, uniformes, paretianas, exponenciales, etc. Para construir un QQ-plot se traza en el eje  $X$  los cuantiles de la distribución base o los "cuantiles teóricos" y en el eje  $Y$  se colocan los cuantiles de la muestra. Si ambos conjuntos de cuantiles provienen de la misma distribución, se debería apreciar que los puntos forman una línea más o menos recta.

En la figura 4.2 se muestran los gráficos Q-Q normal de los rendimientos diarios empíricos de las criptomonedas estudiadas. La distribución normal captura bien las partes medias de los datos, pero no las colas. De hecho, se observa claramente el comportamiento característico de distribuciones de cola pesada por la forma de "S" en el gráfico. Esto significa que, en comparación con una distribución normal, hay más datos ubicados en los extremos de la distribución y menos datos en el centro de la misma.

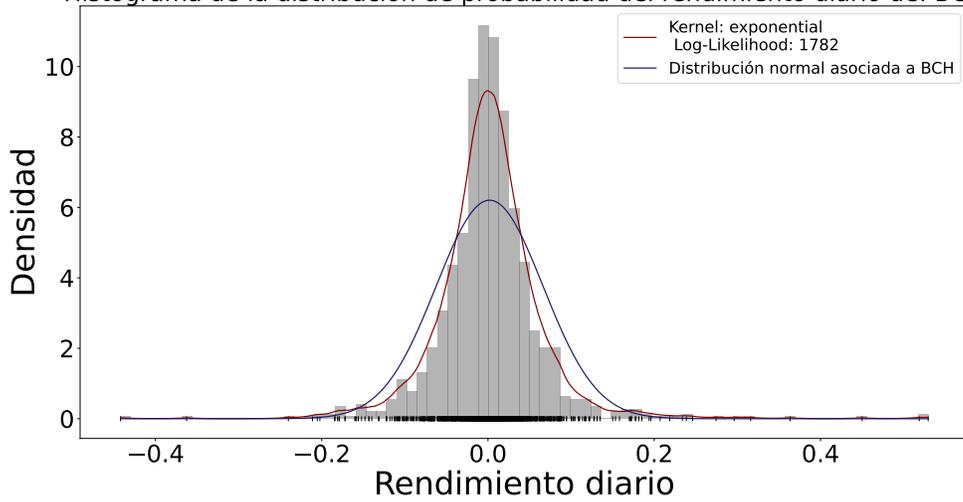
En la tabla 4.1 se encuentran los resultados de la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk aplicada a los rendimientos diarios de las criptomonedas estudiadas. La prueba de Shapiro-Wilks plantea la hipótesis nula que una muestra proviene de una distribución normal. Además, produce el valor estadístico  $W$  junto a un valor  $p$  (p-value). Se establece como práctica común que si el valor  $p$  es menor que 0.05, debe rechazarse la hipótesis de que la muestra sea normal. En nuestro caso, el valor  $p$ , es muy pequeño para todas las criptomonedas, lo que indica fuertemente que se debe rechazar la hipótesis nula de que los rendimientos diarios siguen una distribución normal [97]. Por lo que aceptamos la hipótesis alternativa de que los rendimientos no presentan normalidad.

Este breve análisis justifica el hecho de buscar ajustar los datos a otro tipo de distribuciones ya que la distribución normal no refleja con precisión las propiedades de los datos.

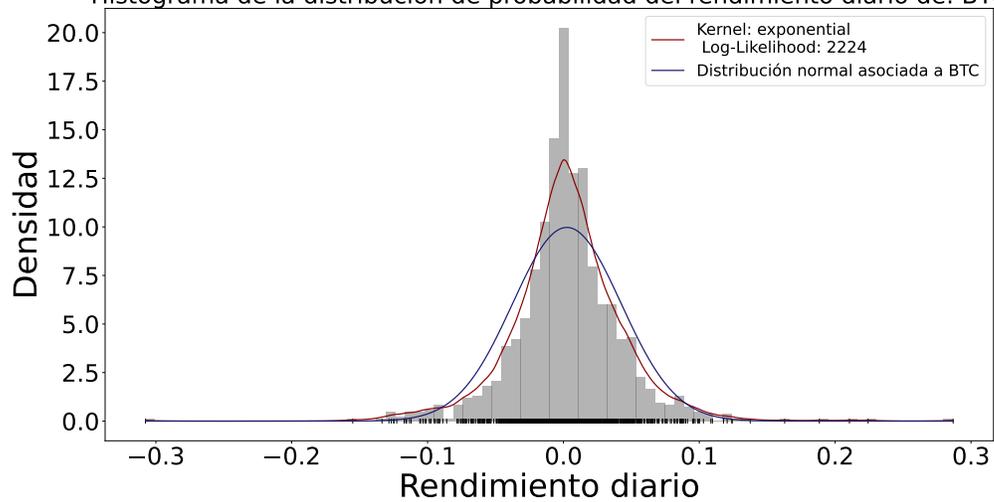
Histograma de la distribución de probabilidad del rendimiento diario de: BAT

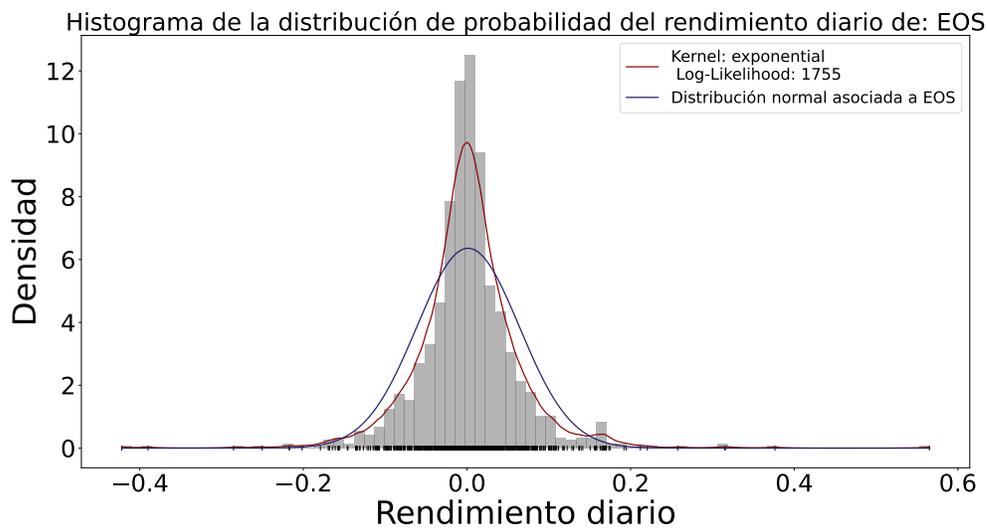
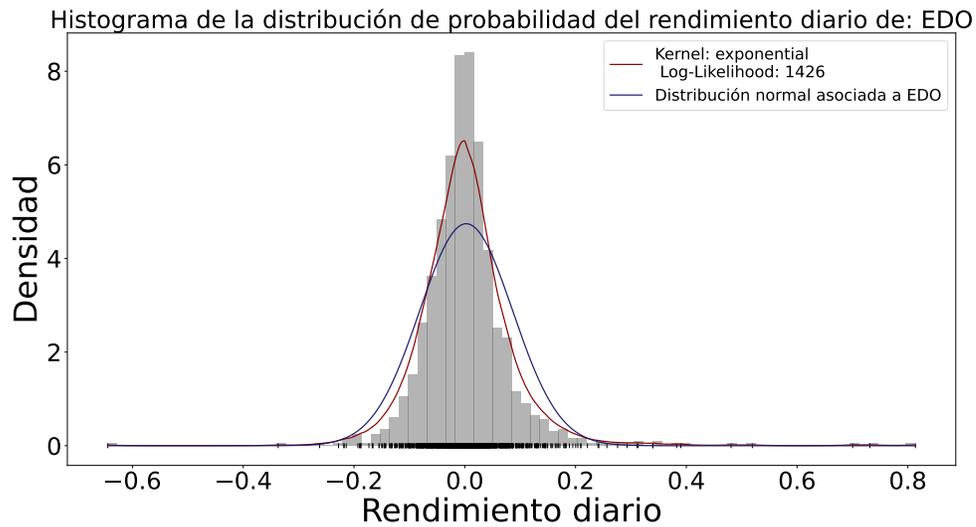
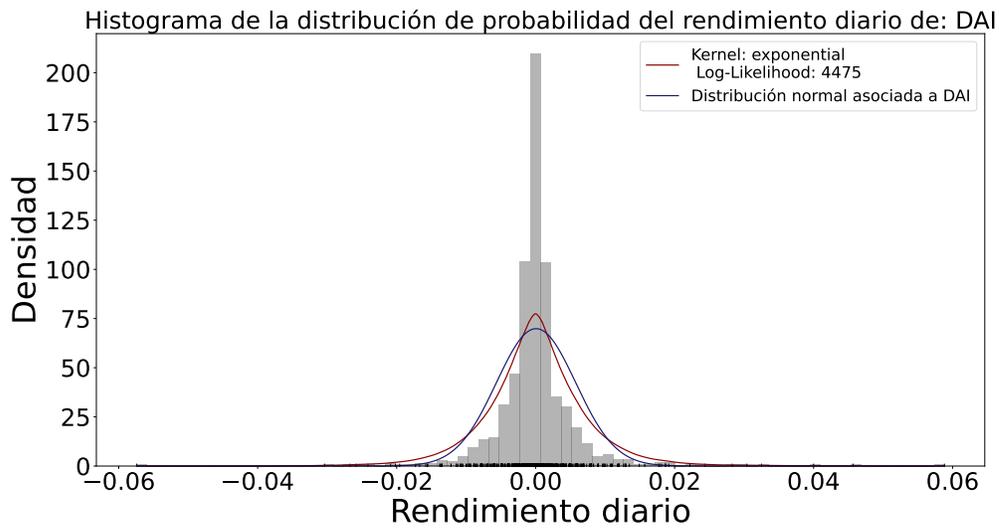


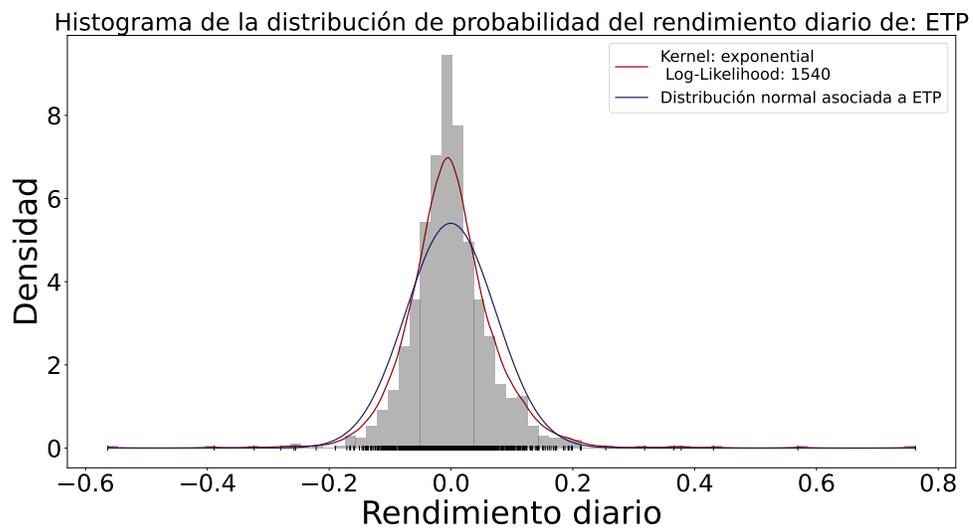
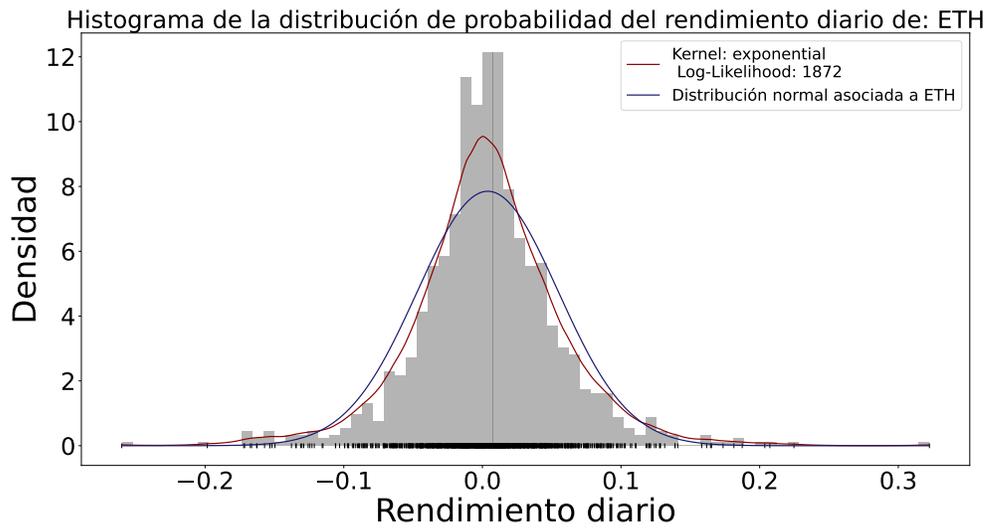
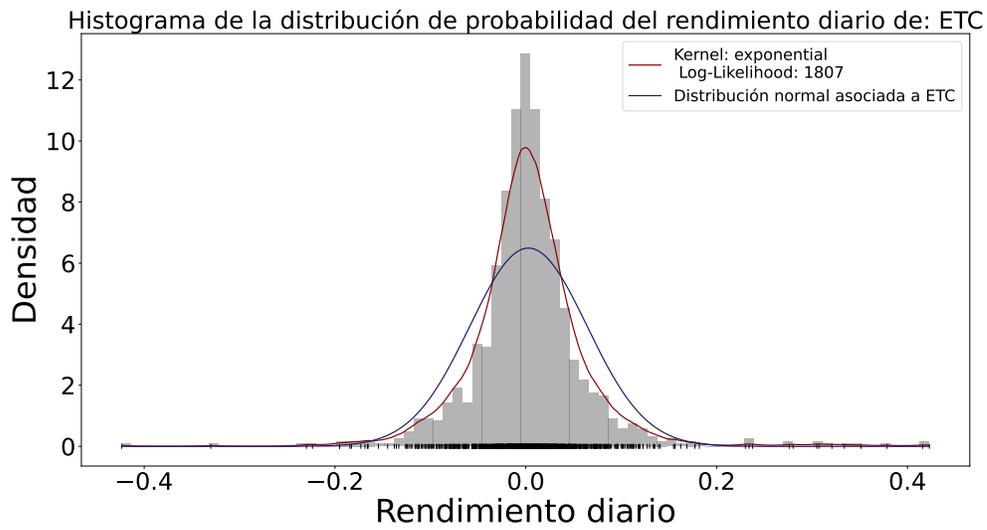
Histograma de la distribución de probabilidad del rendimiento diario de: BCH

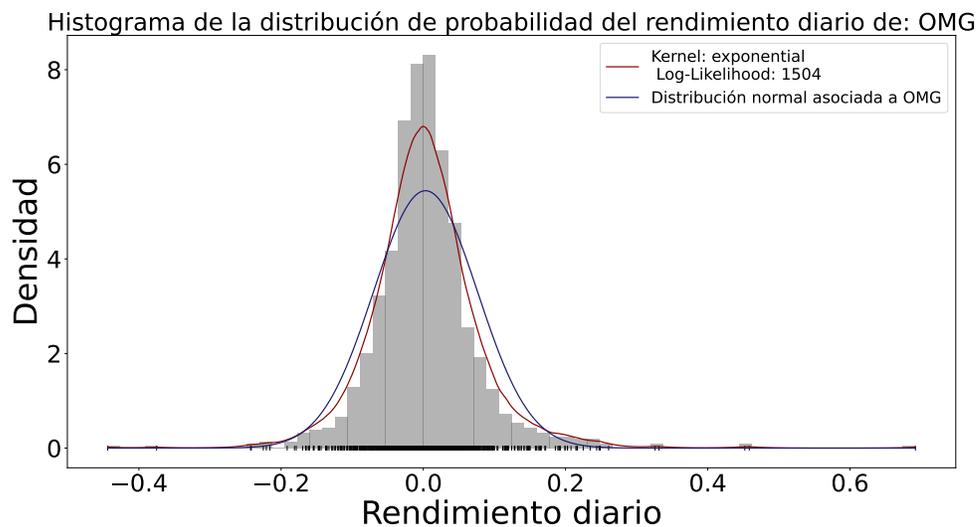
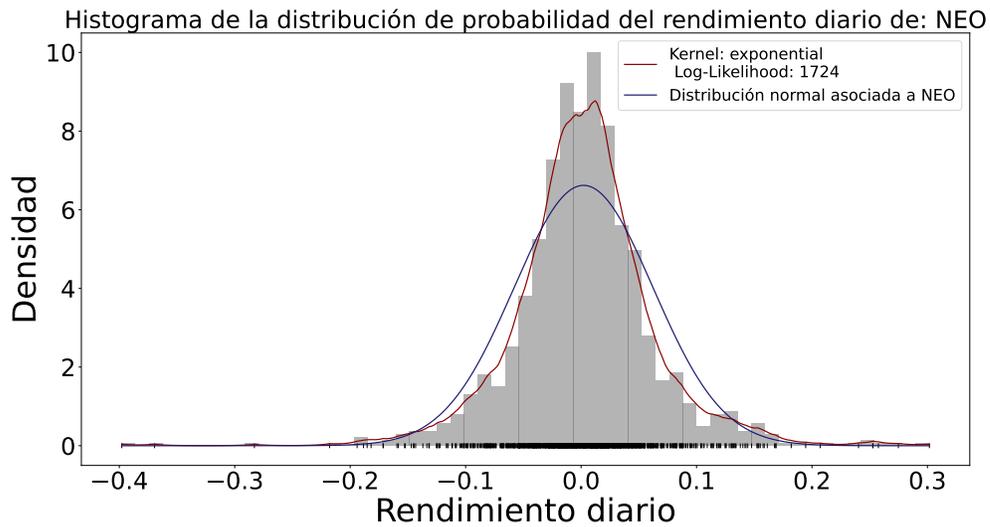
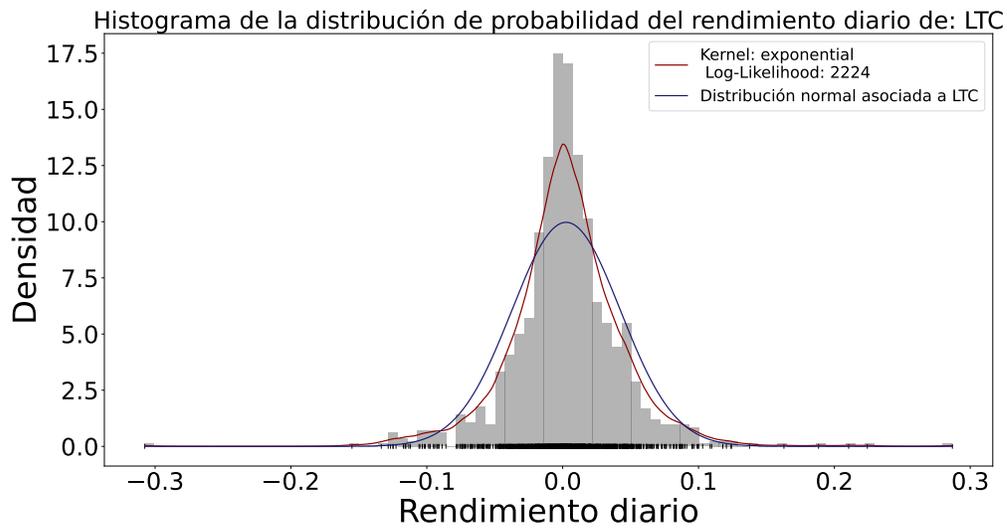


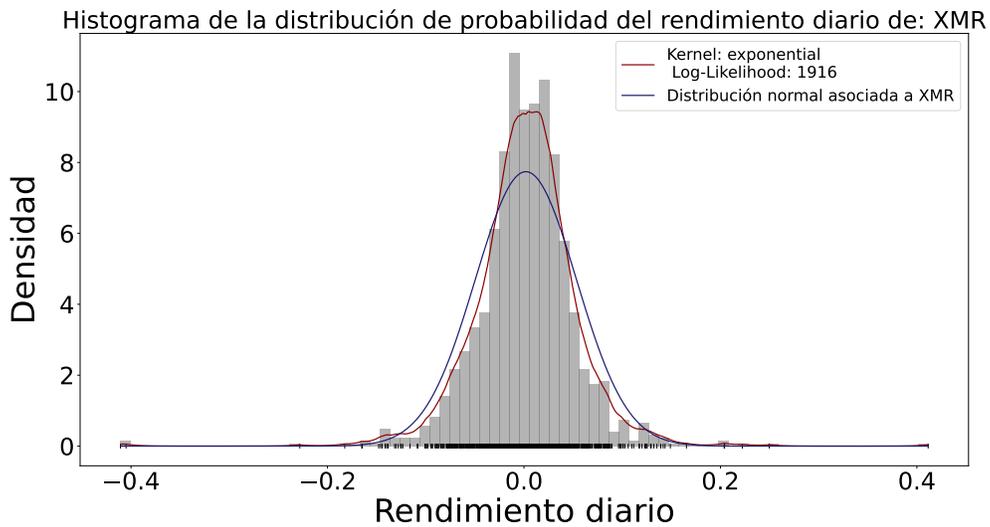
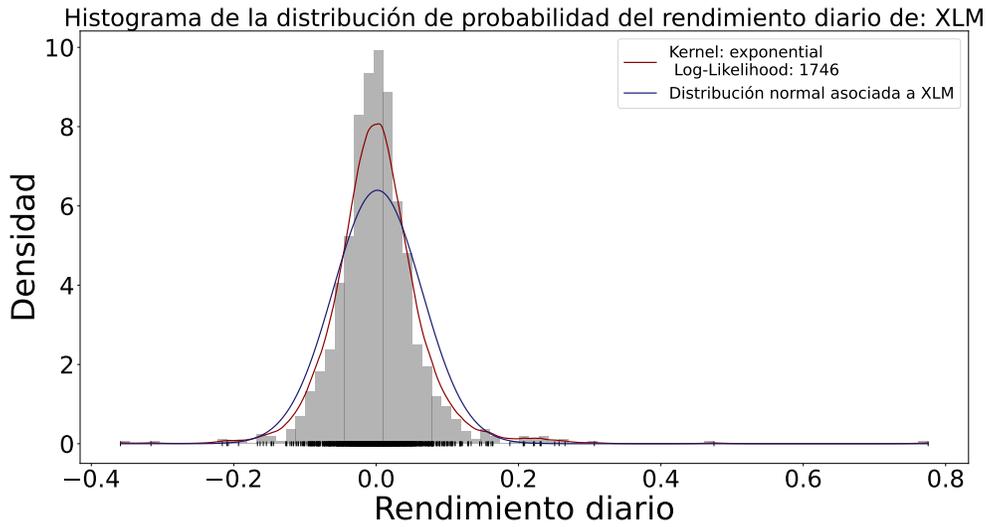
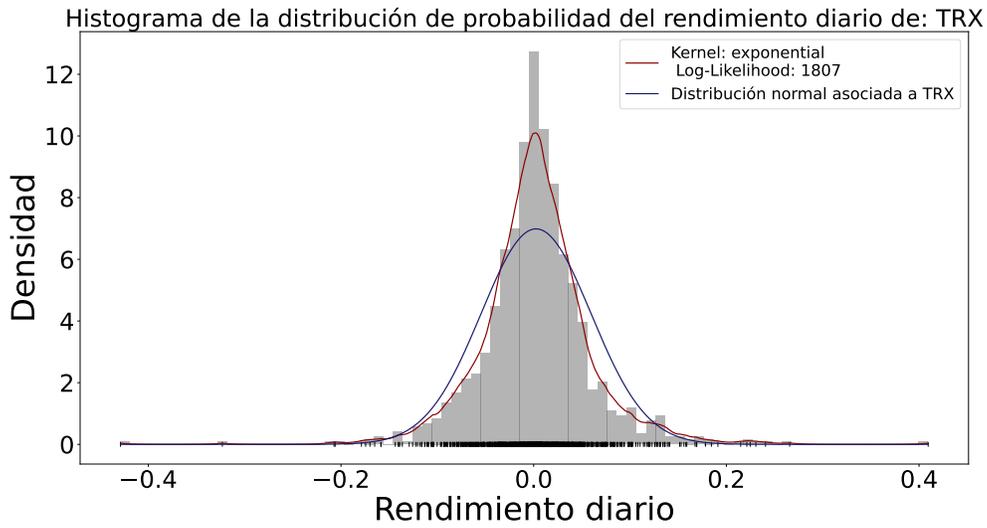
Histograma de la distribución de probabilidad del rendimiento diario de: BTC











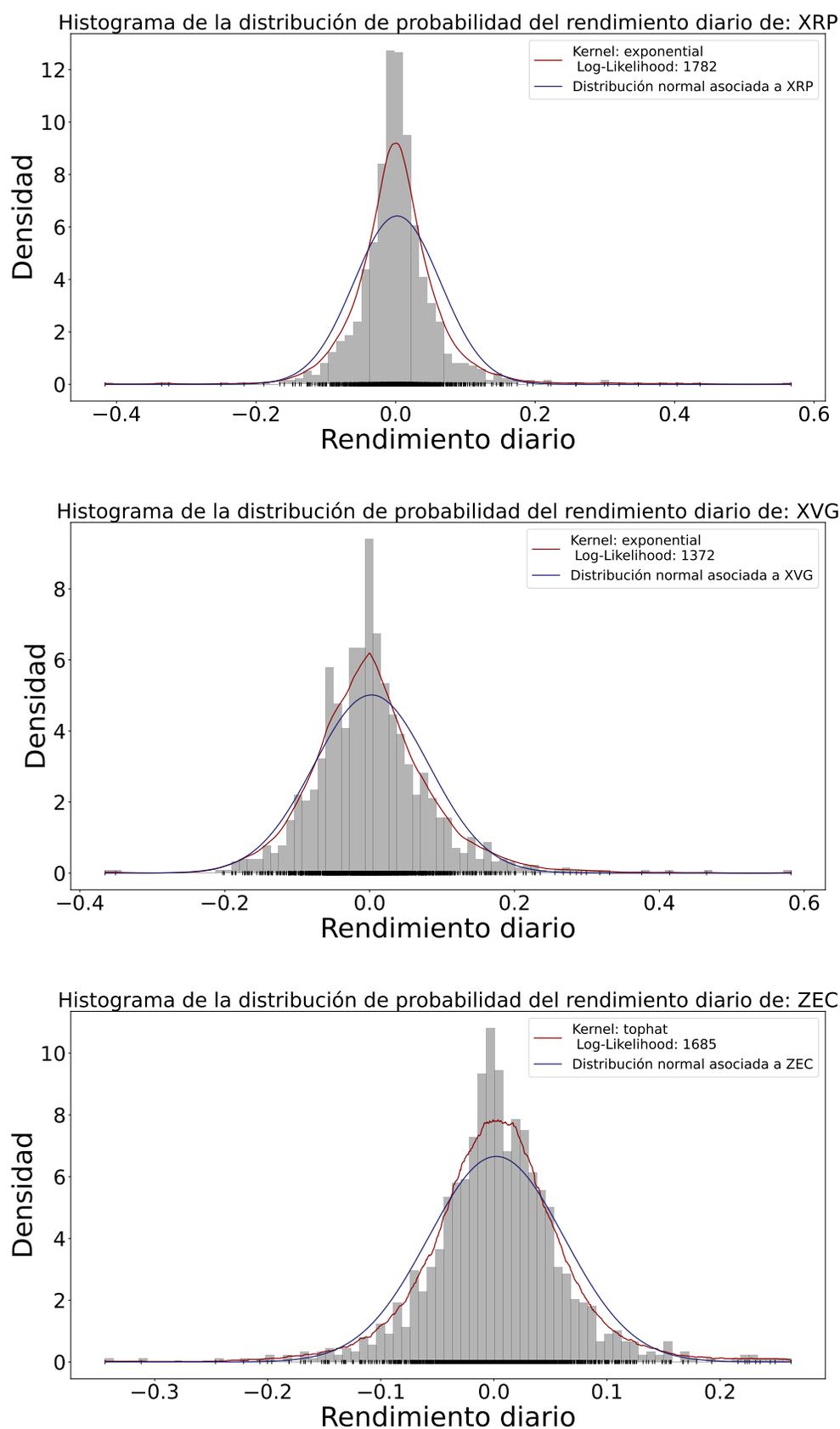
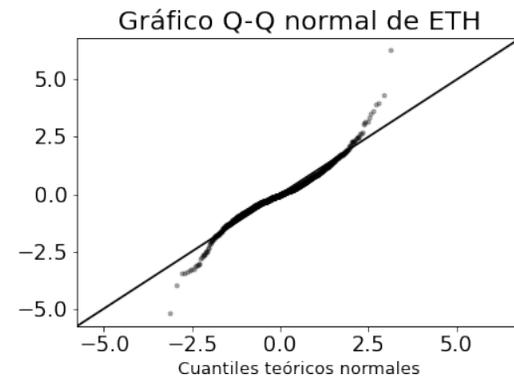
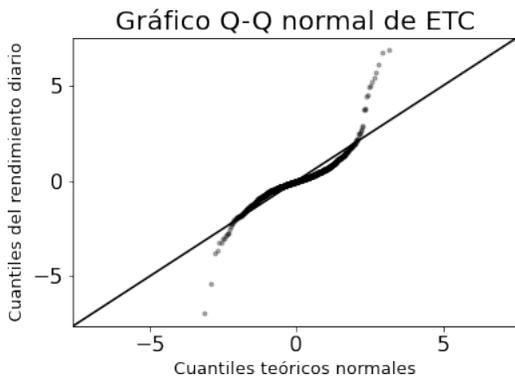
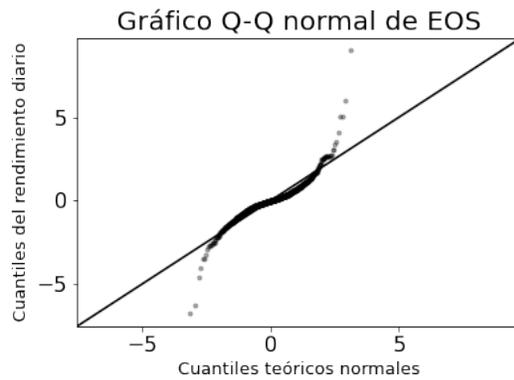
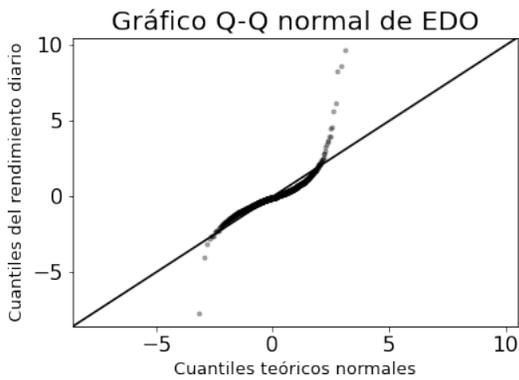
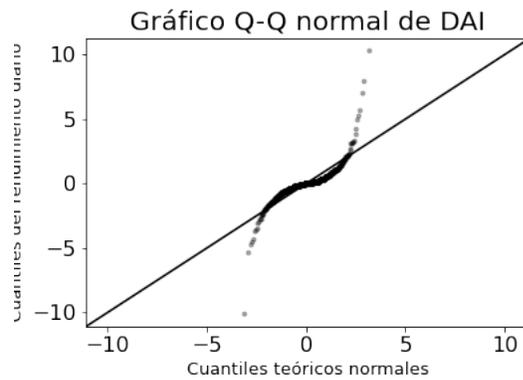
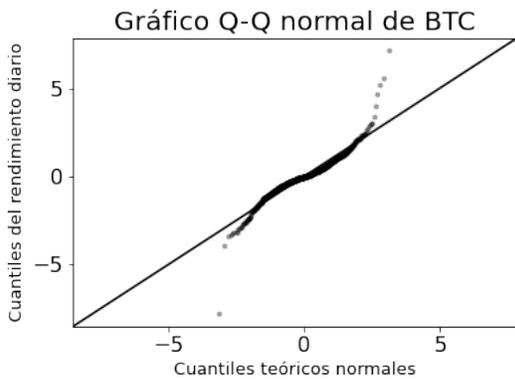
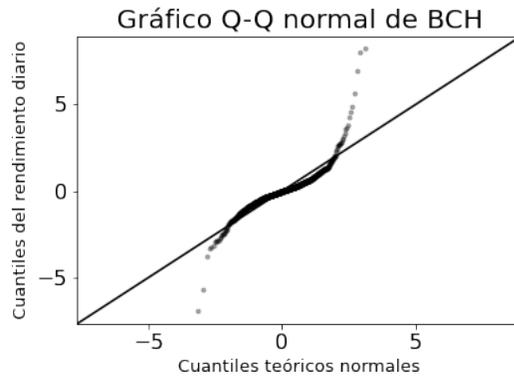
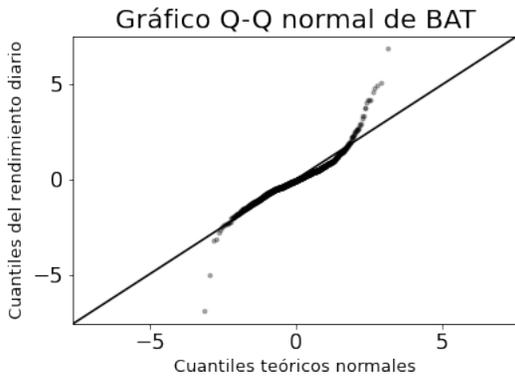
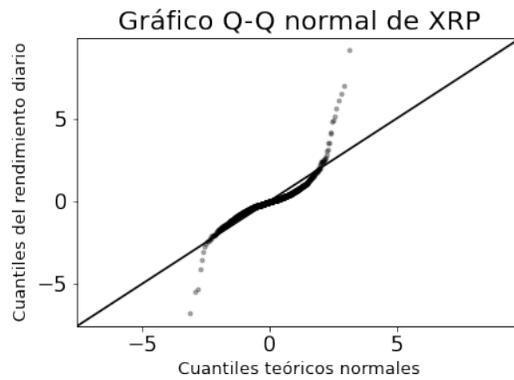
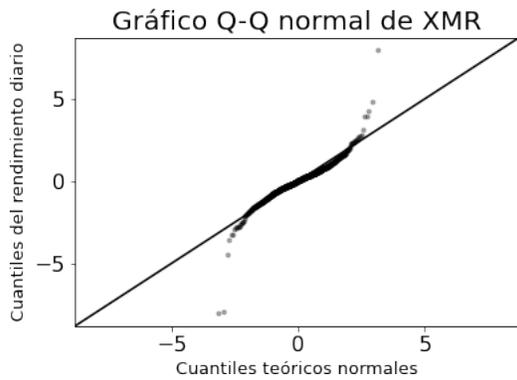
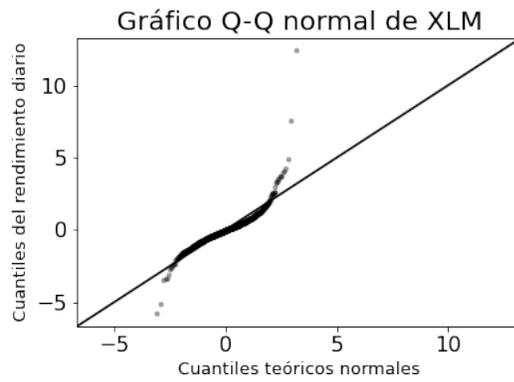
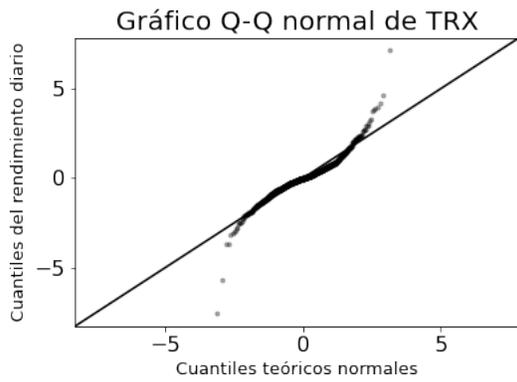
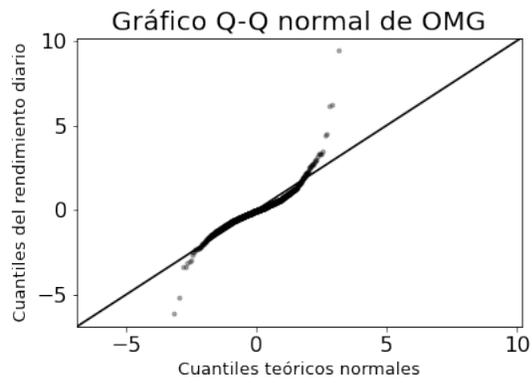
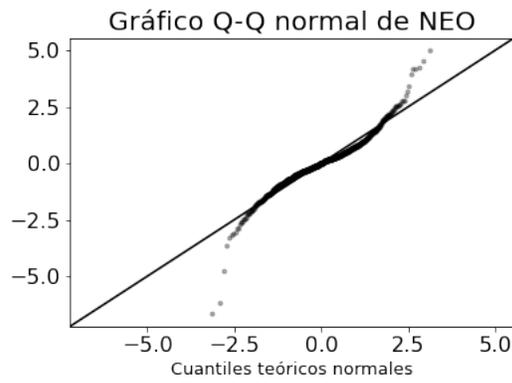
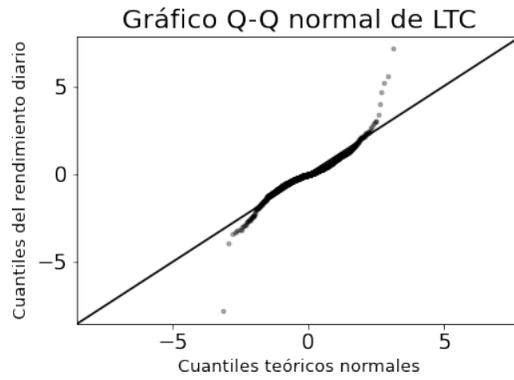
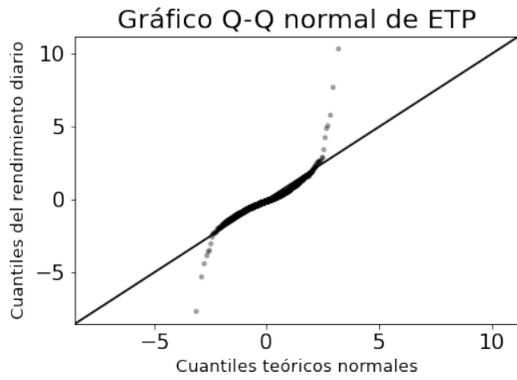


Figura 4.1: Histogramas de la distribución de probabilidad del rendimiento de las criptomonedas estudiadas. Se muestra la curva normal, en azul, asociada a cada conjunto de datos y la curva estimada por medio del método de Kernel, en rojo.

Criptomoneda	Estadístico $W$	Valor $p$
BAT	0.9145918488502502	$3.583642497137703 \times 10^{-25}$
BCH	0.8442956209182739	$2.0687267940732195 \times 10^{-32}$
BTC	0.9200488924980164	$1.9557796521798937 \times 10^{-24}$
DAI	0.7424888610839844	$3.2179880363248326 \times 10^{-39}$
EDO	0.8076344728469849	$3.4445560323724676 \times 10^{-35}$
EOS	0.8804945349693298	$4.2083570446443943 \times 10^{-29}$
ETC	0.8532063364982605	$1.171599467840273 \times 10^{-31}$
ETH	0.9555951356887817	$2.196983641929869 \times 10^{-18}$
ETP	0.8586546182632446	$3.5253790281725702 \times 10^{-31}$
LTC	0.9145918488502502	$3.583642497137703 \times 10^{-25}$
NEO	0.9394873976707458	$1.8727637659561556 \times 10^{-21}$
OMG	0.8932422399520874	$9.49543455300675 \times 10^{-28}$
TRX	0.9232430458068848	$5.5030834196300105 \times 10^{-24}$
XLM	0.8445523977279663	$2.1722708017125762 \times 10^{-32}$
XMR	0.9094425439834595	$7.782088178101993 \times 10^{-26}$
XRP	0.8247969150543213	$6.025280066822763 \times 10^{-34}$
XVG	0.9367734789848328	$6.557130993748175 \times 10^{-22}$
ZEC	0.9547221064567566	$1.433121016930785 \times 10^{-18}$

Tabla 4.1: Resultados de la prueba de normalidad de Shapiro–Wilk a los rendimientos diarios de las diversas criptomonedas. En todos los casos, el valor  $p$  es tan pequeño que indica que los datos no se explican mediante una distribución normal.





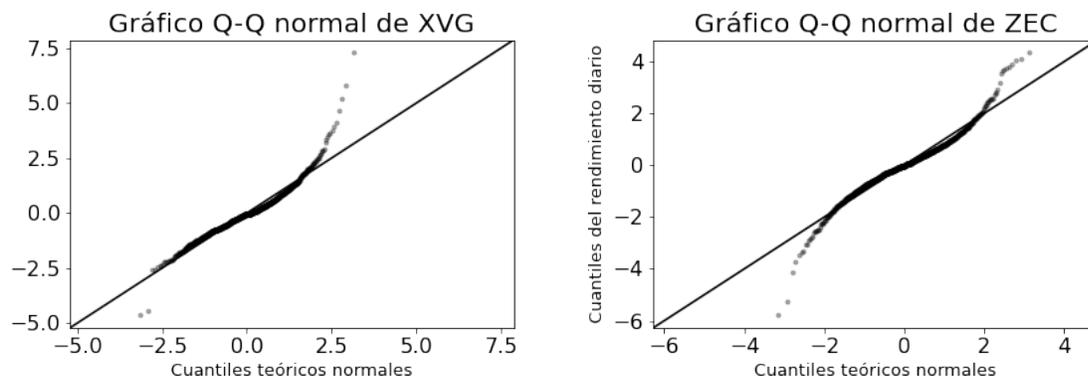


Figura 4.2: Gráfico Q-Q normal del rendimiento diario de diversas criptomonedas. Se grafican los cuantiles teóricos normales contra los cuantiles observados.

### 4.2.2. Distribuciones de cola pesada

Nadarajah et al. (2015) [98] realizaron ajustes al tipo de cambio de distintas monedas fiat<sup>1</sup> usando distribuciones flexibles. Emplearon distribuciones como la Student-t, la asimétrica Student-t, hiperbólica, hiperbólica generalizada, lambda generalizada, la Skew-T y la inversa normal gaussiana a los datos. De acuerdo a la sección anterior, debemos limitarnos al estudio de distribuciones con colas pesadas. Osterrieder (2016) [69] realizó ajustes de colas pesadas a distintas criptomonedas con la distribución Student-t, Student-t generalizada, hiperbólica, hiperbólica generalizada, inversa normal gaussiana y la varianza gamma asimétrica. En ambos estudios, encontraron que todas las distribuciones de colas pesadas que se emplearon daban resultados estadísticamente similares, aunque el mejor ajuste se hallaba con la distribución hiperbólica generalizada. Además, concluyeron que la Student-t es una buena opción dada su simplicidad. Análogamente, Briere et al. (2017) [99] llegaron a resultados similares al estudiar ajustes paramétricos a los rendimientos de las 7 criptomonedas más cotizadas de 2015. Por ello, aquí realizamos ajustes a los rendimientos diarios con la distribución de t-Student y la hiperbólica generalizada, además de una distribución normal para comparar, aunque es de cola ligera.

Distribución normal

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (4.7)$$

para  $-\infty \leq x \leq \infty$ ,  $-\infty \leq \mu \leq \infty$  y  $\sigma \geq 0$ .

Distribución Student-t

---

<sup>1</sup>dinero que no es respaldado por valores o bienes físicos como el oro, sino que es respaldado por el gobierno que lo emite.

$$p_X(x) = \frac{K(\nu)}{\sigma} \left[ 1 + \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2 \nu} \right]^{-(1+\nu)^2/2} \quad (4.8)$$

para  $-\infty \leq x \leq \infty$ ,  $-\infty \leq \mu \leq \infty$  y  $\sigma \geq 0$  u  $\nu \geq 0$ . Donde  $K(\nu) = \sqrt{\nu} B(\nu/2, 1/2)$  y  $B$  es la función beta definida por

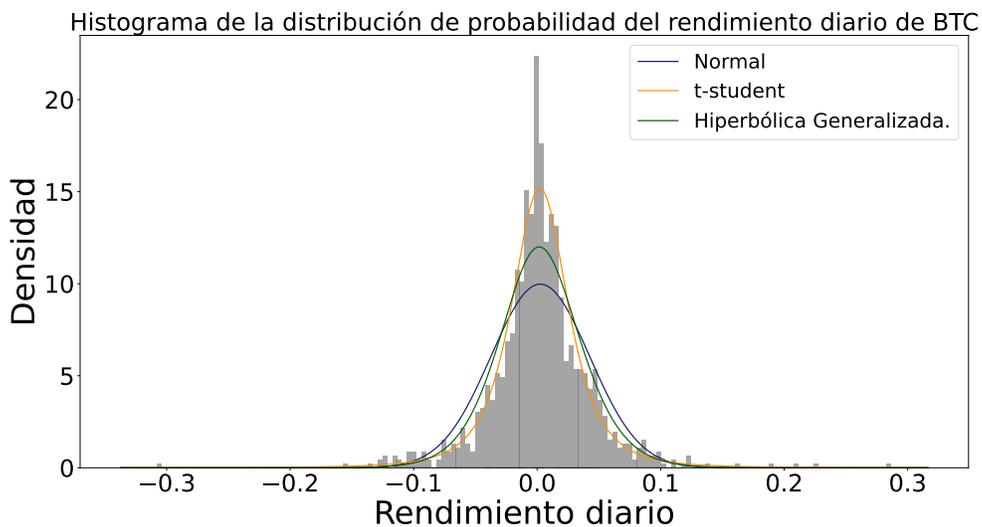
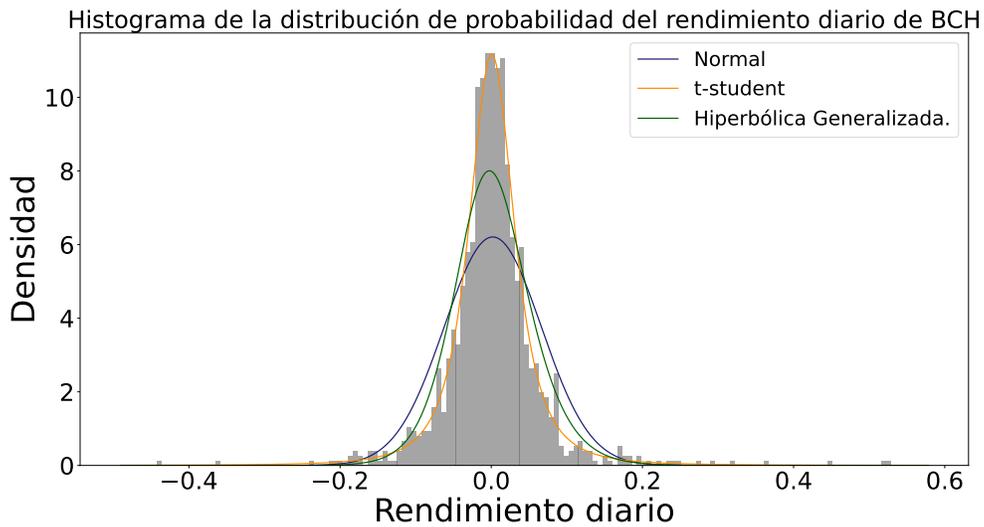
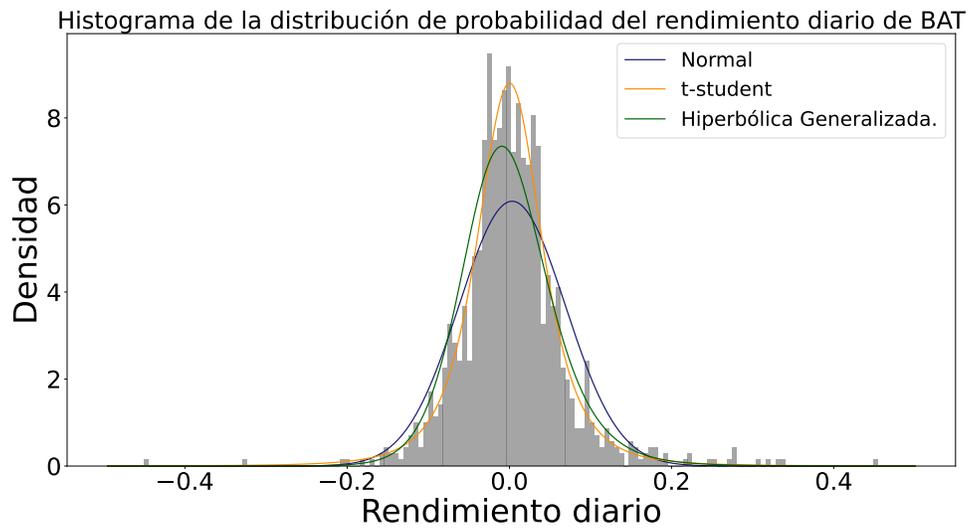
$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt \quad (4.9)$$

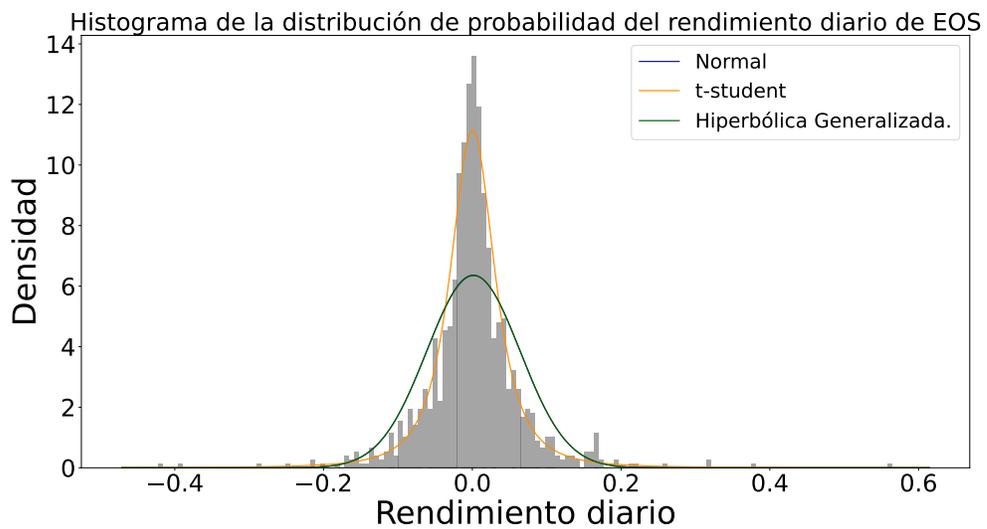
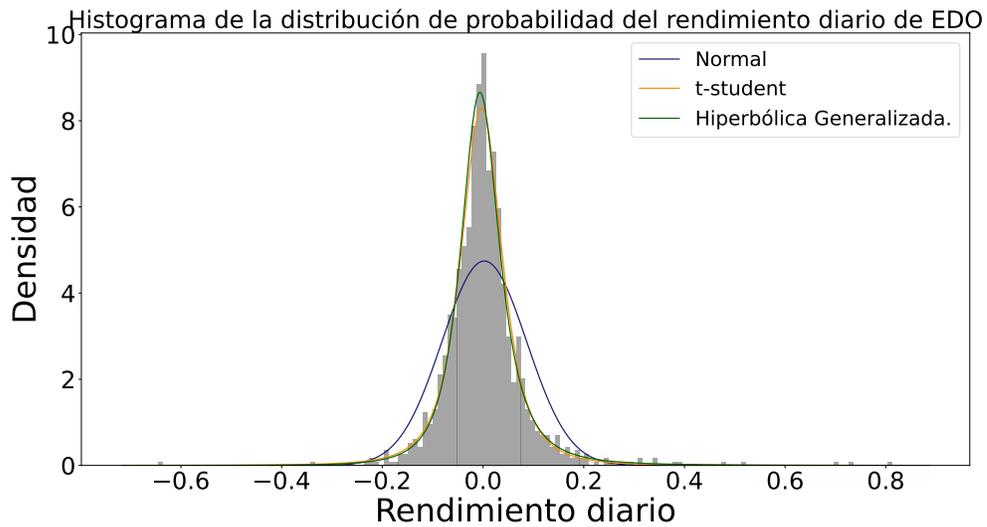
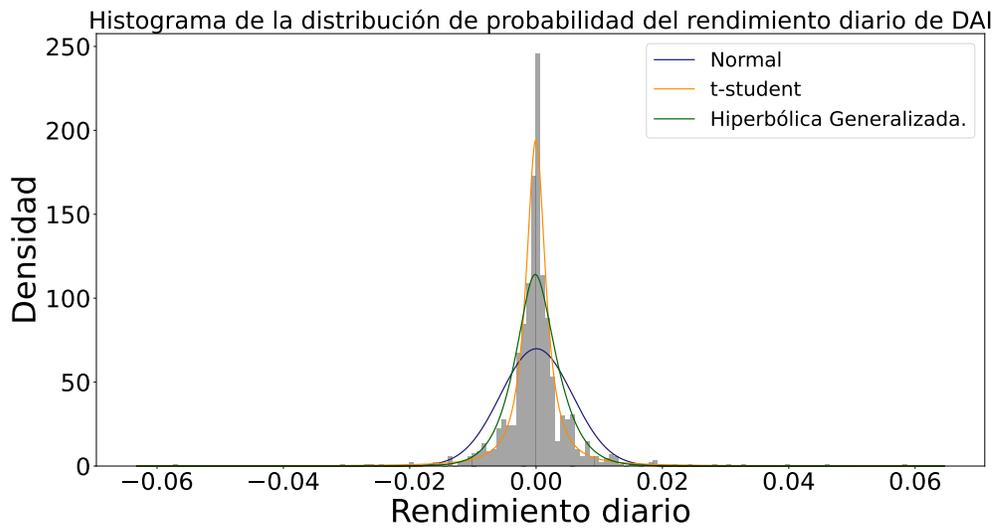
Distribución hiperbólica generalizada

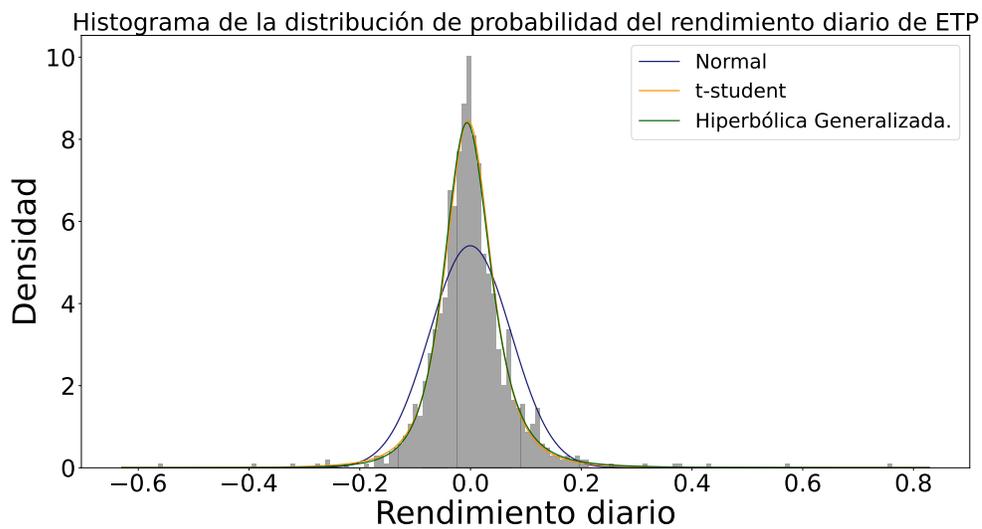
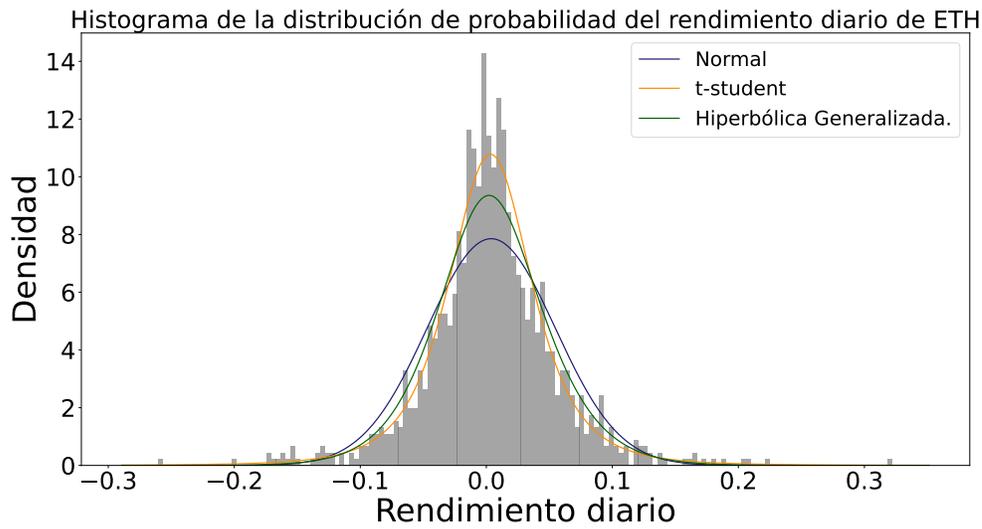
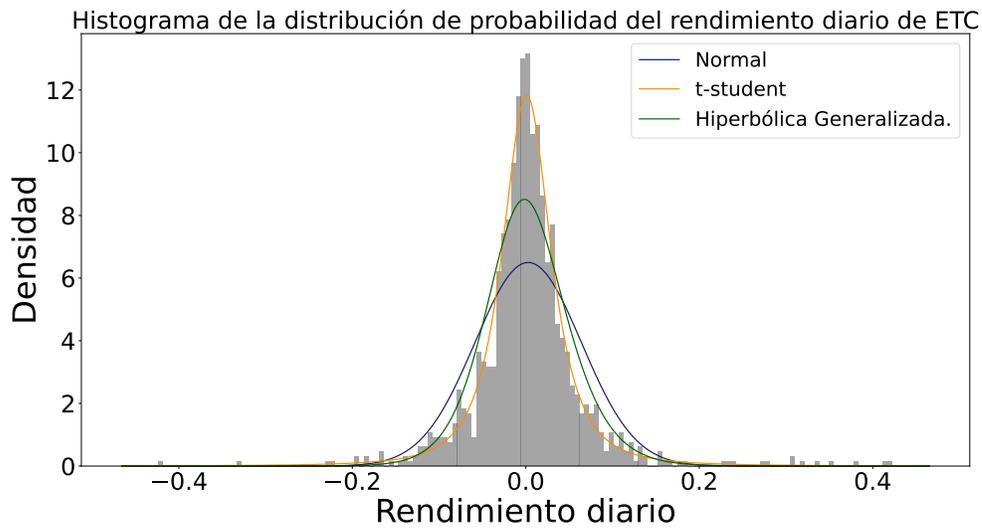
$$p_X(x) = \frac{(\gamma/\delta)^\lambda \alpha^{1/2-\lambda}}{\sqrt{2\pi} K_\lambda(\delta\gamma)} [\delta^2 + (x - \mu)^2]^{\lambda-1/2} K_{\lambda-1/2} \left( \alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right) \quad (4.10)$$

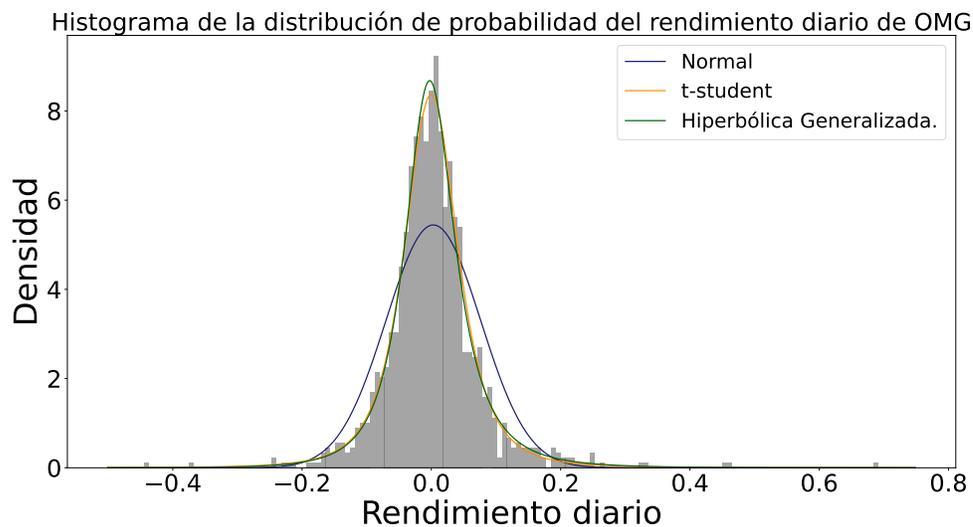
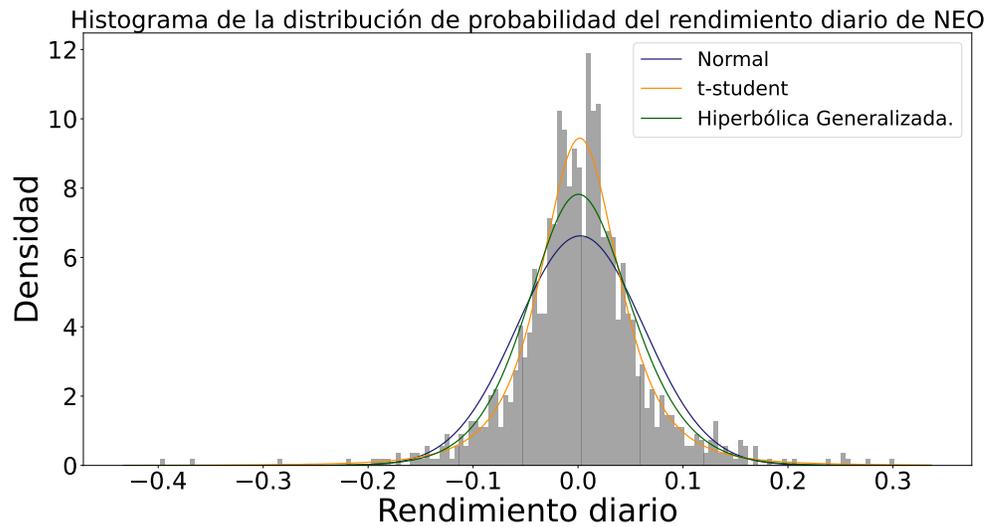
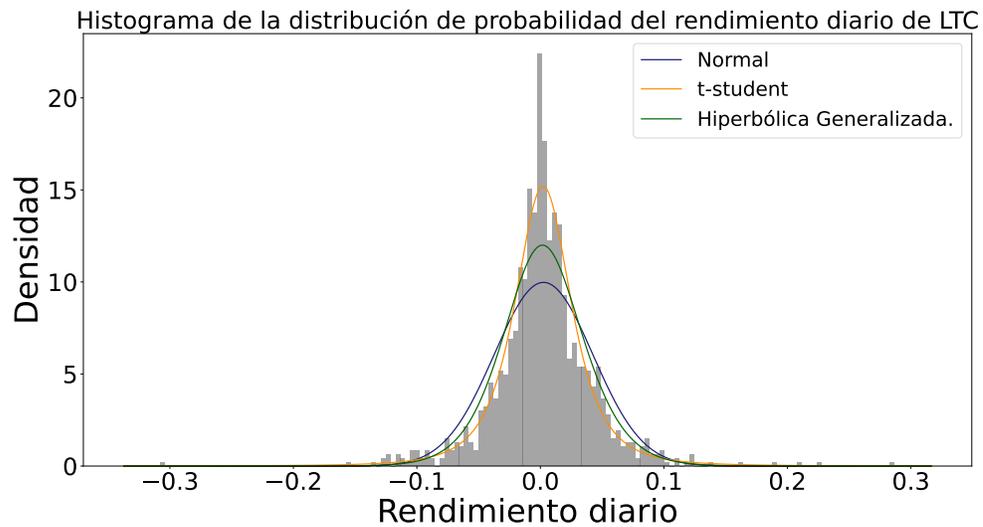
para  $-\infty \leq x \leq \infty$ ,  $-\infty \leq \mu \leq \infty$ ,  $-\infty \leq \lambda \leq \infty$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $\alpha \geq 0$  y  $\beta \geq 0$ . Donde  $\gamma = \sqrt{\alpha - \beta^2}$  y  $K_\lambda$  es la función de Bessel modificada de segundo orden.

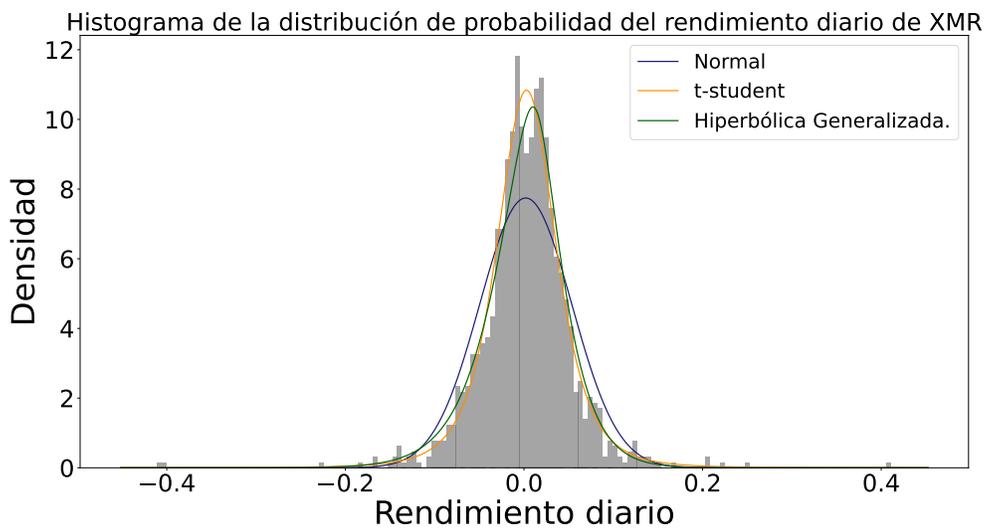
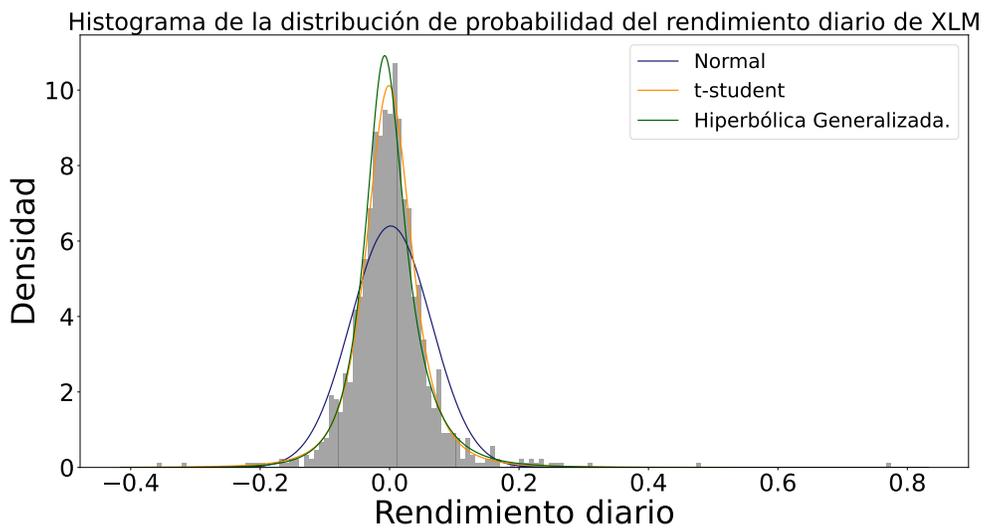
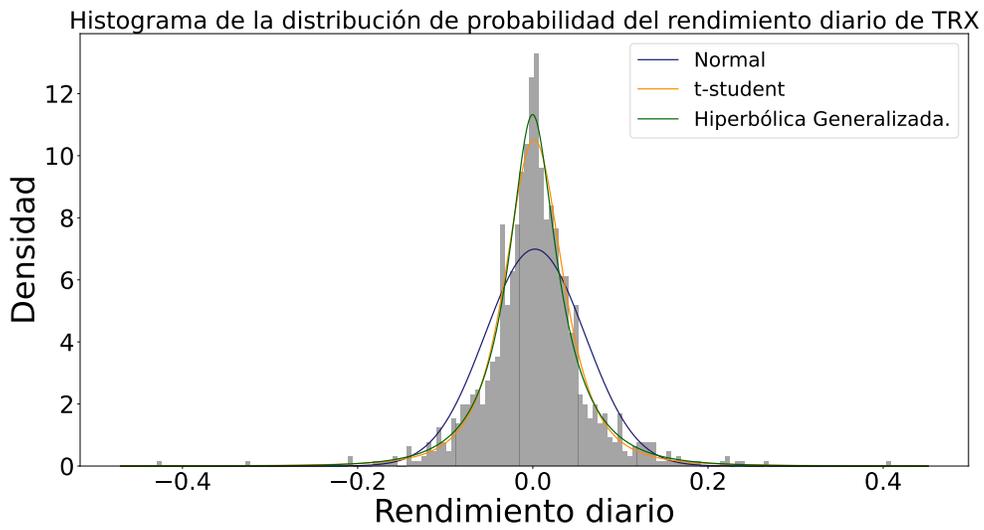
En la figura 4.3 se muestra el histograma de la distribución de probabilidad de los rendimientos diarios junto con los ajustes de cada distribución de modo que se maximiza el Log-Likelihood. El valor del Log-Likelihood para cada ajuste se muestra en la tabla 4.2. Notemos que el Log-Likelihood siempre es menor para la distribución normal y cualquiera de las dos distribuciones de cola pesada genera buenos ajustes.











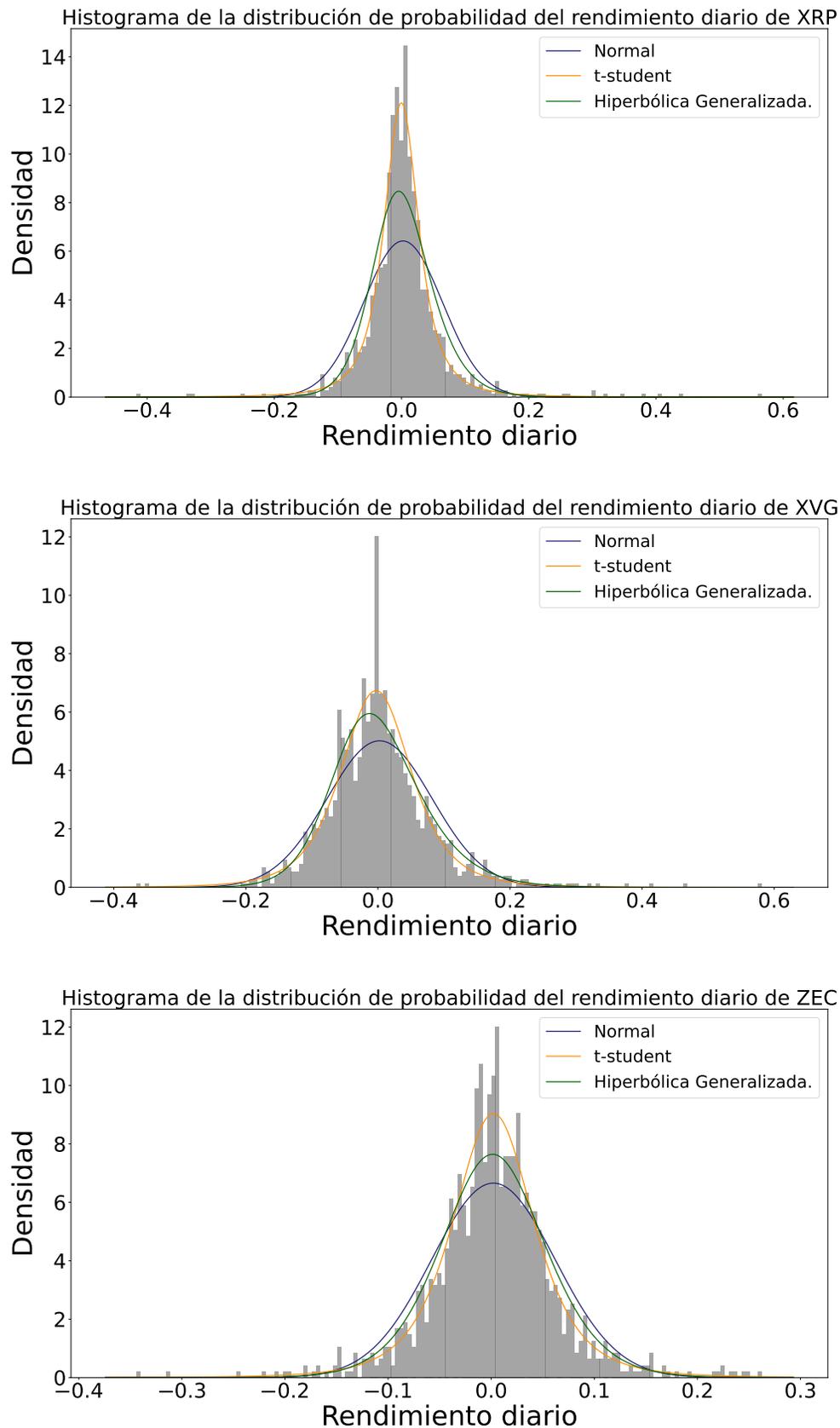


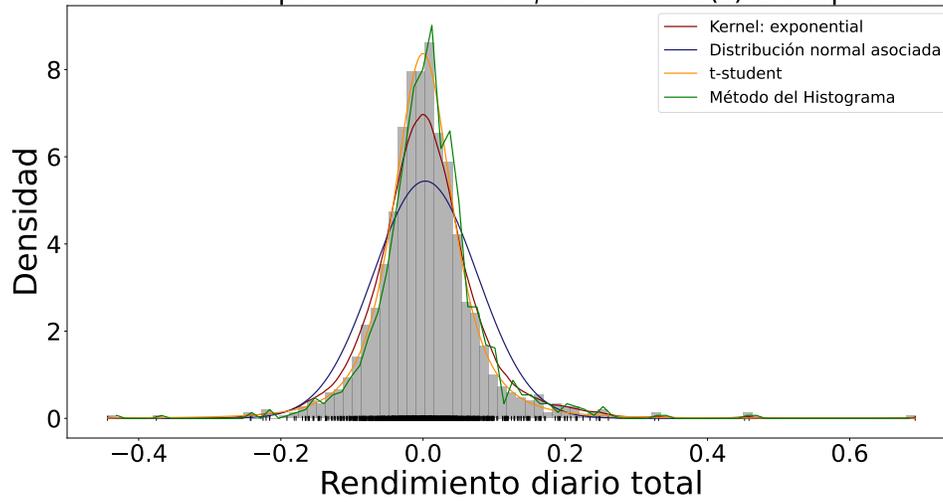
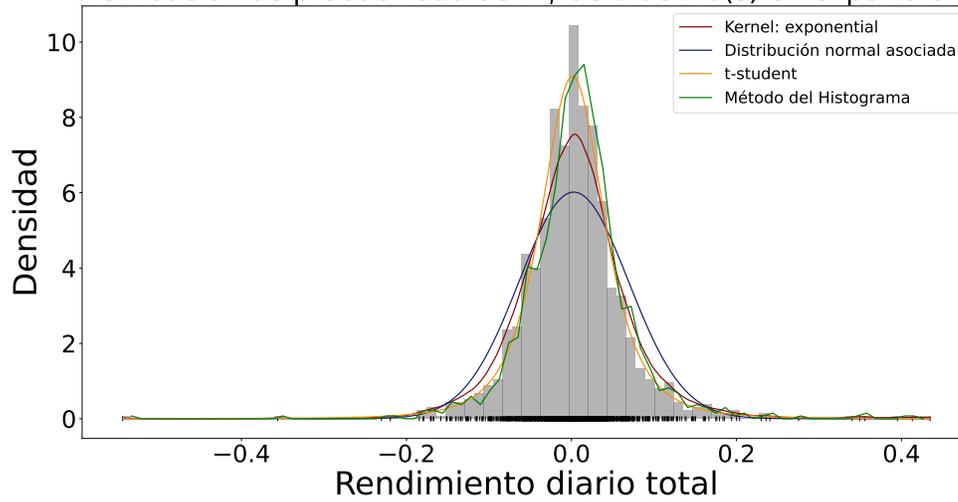
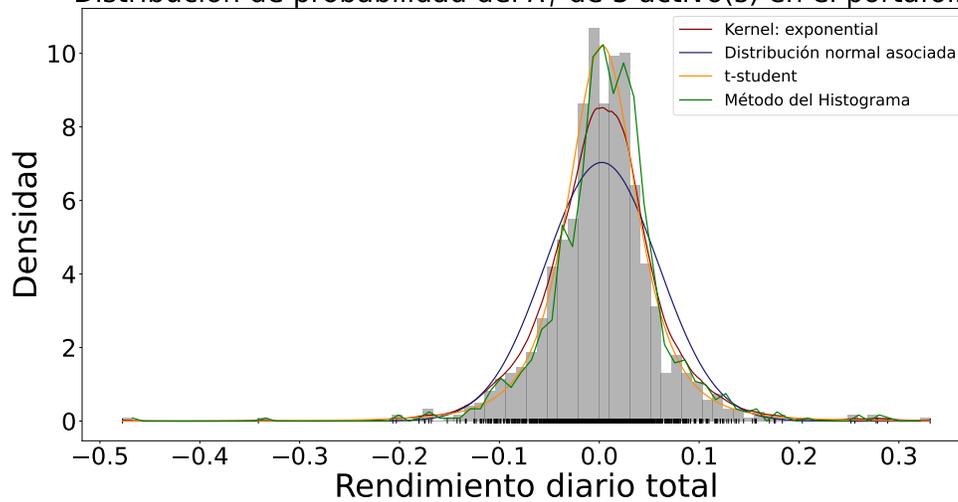
Figura 4.3: Histogramas de la distribución de probabilidad del rendimiento de las criptomonedas estudiadas con los ajustes de una distribución normal, t-student e hiperbólica generalizada.

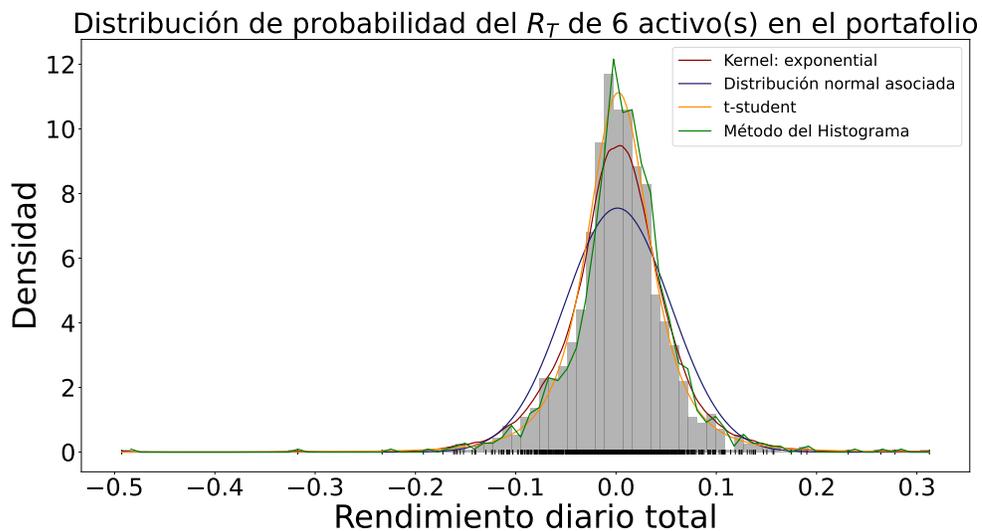
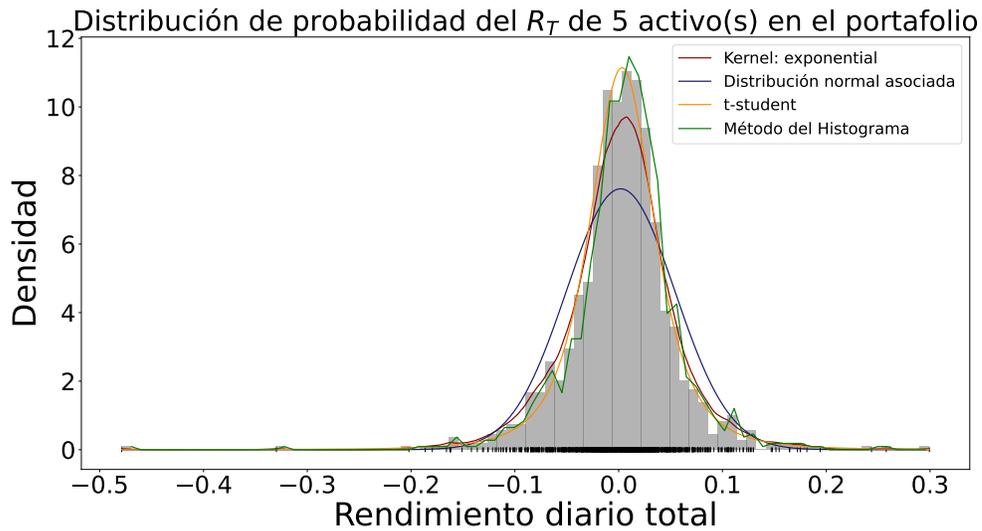
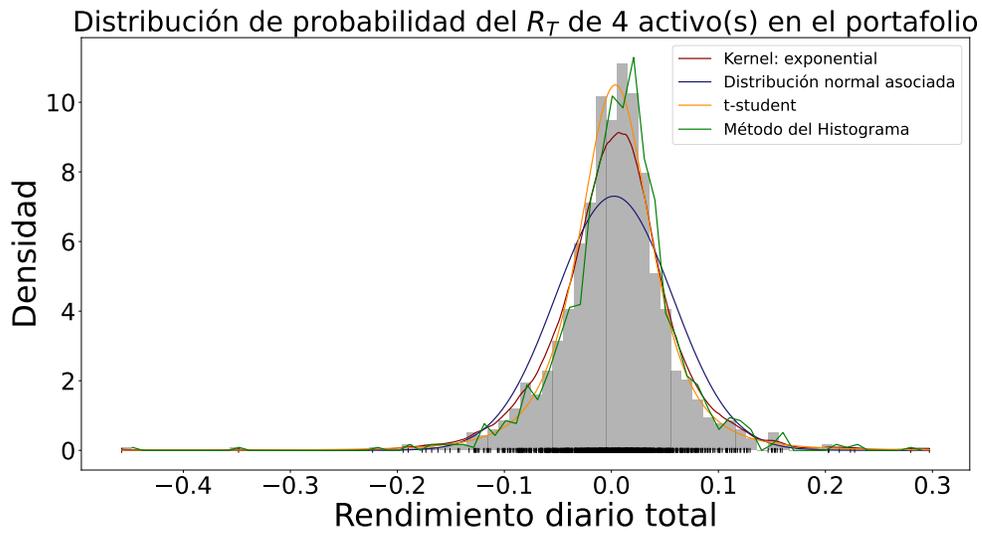
Criptomoneda	Normal	t-Student	Hiperbólica Generalizada
BAT	1531	1667	1639
BCH	1555	1815	1705
BTC	2111	2250	2196
DAI	4395	4871	4701
EDO	1239	1518	1521
EOS	1583	1794	1582
ETC	1608	1861	1754
ETH	1831	1915	1892
ETP	1393	1594	1598
LTC	2111	2250	2196
NEO	1631	1740	1700
OMG	1401	1570	1572
TRX	1694	1829	1833
XLM	1590	1808	1797
XMR	1814	1947	1924
XRP	1595	1884	1766
XVG	1305	1396	1384
ZEC	1637	1722	1689

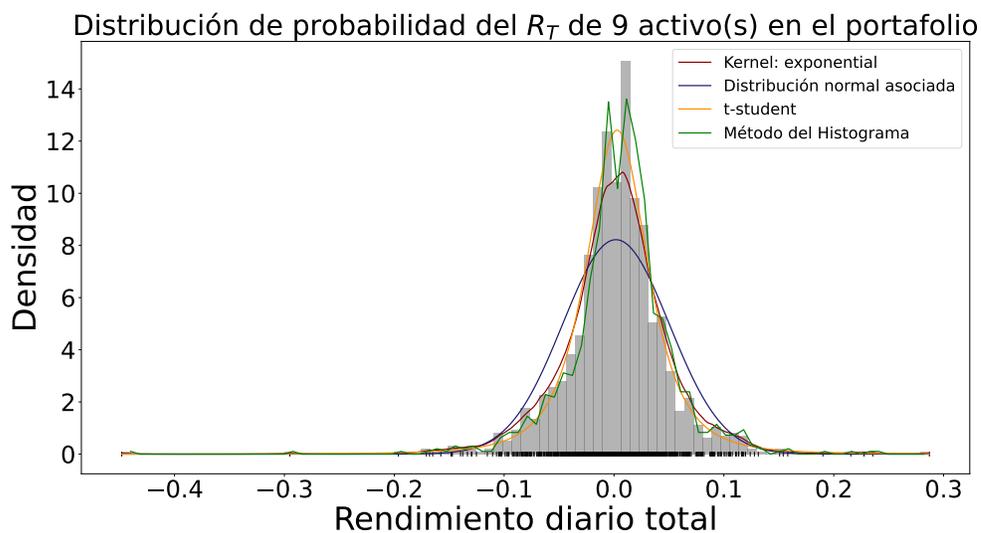
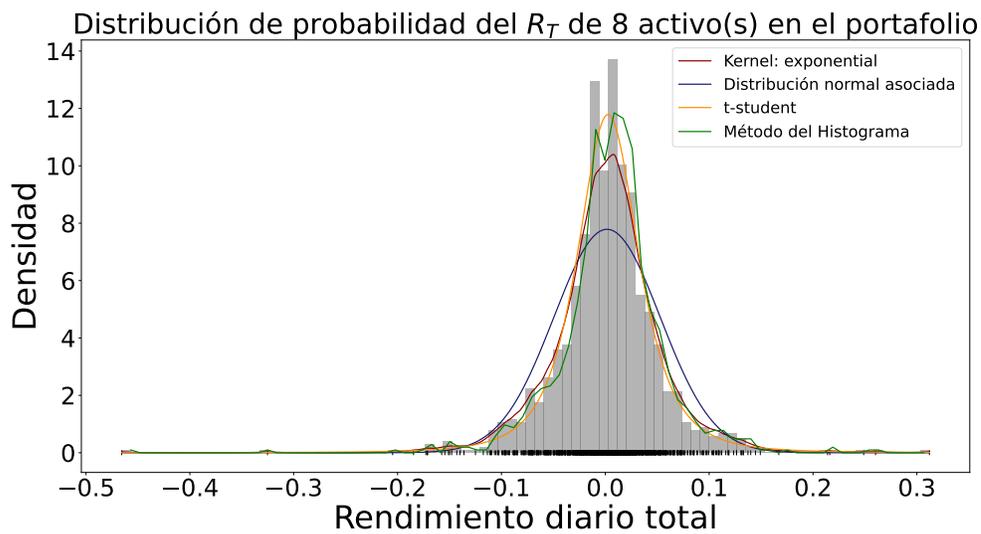
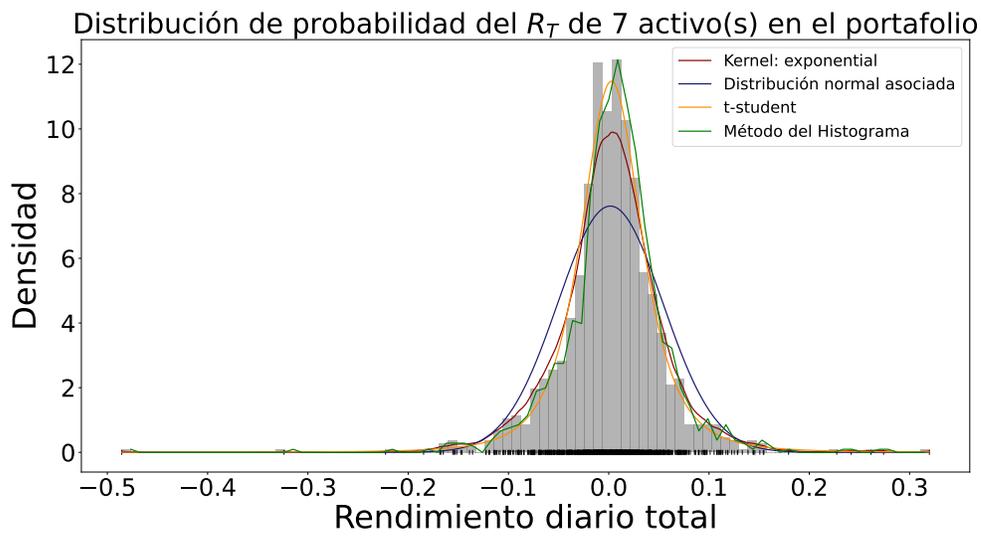
Tabla 4.2: Log-likelihood de las distribuciones ajustadas.

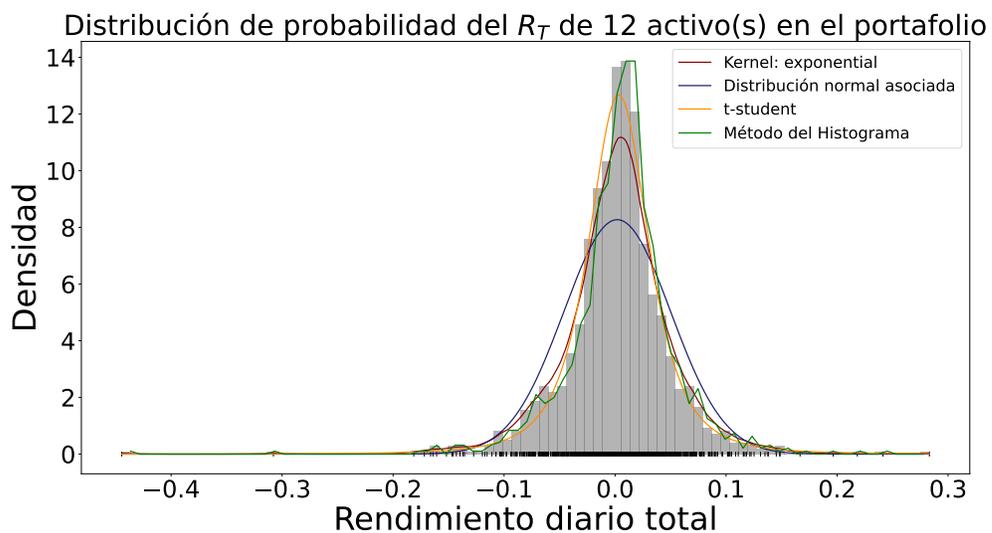
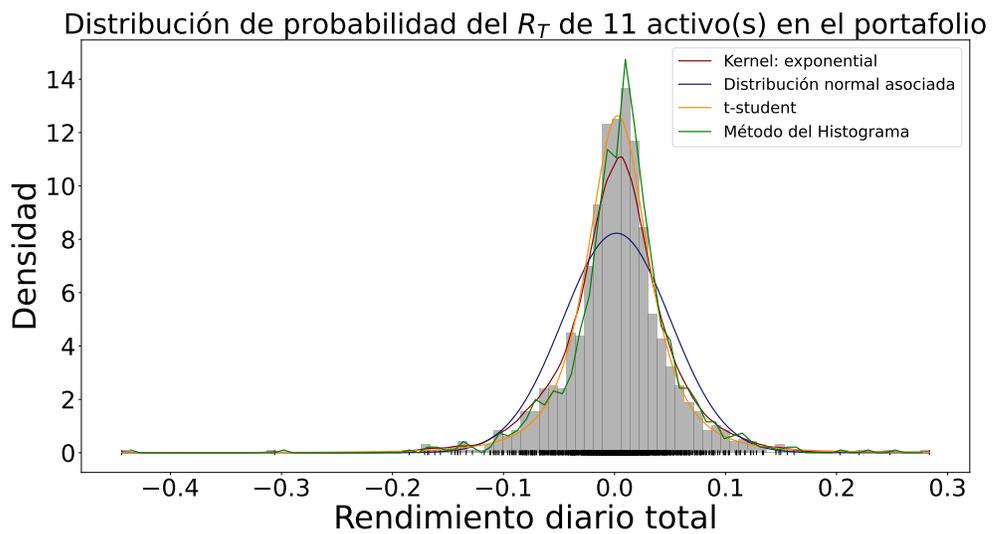
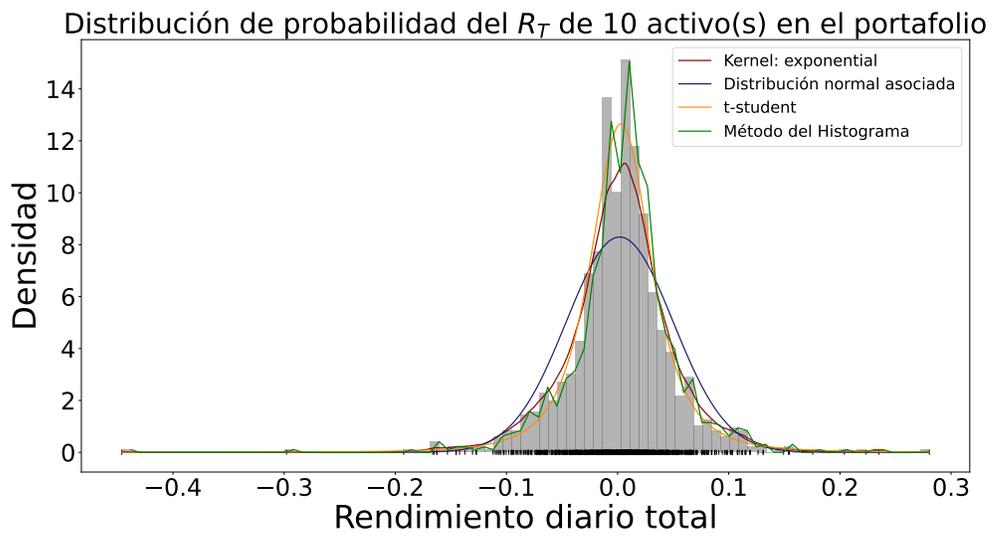
### 4.2.3. Entropía de portafolios

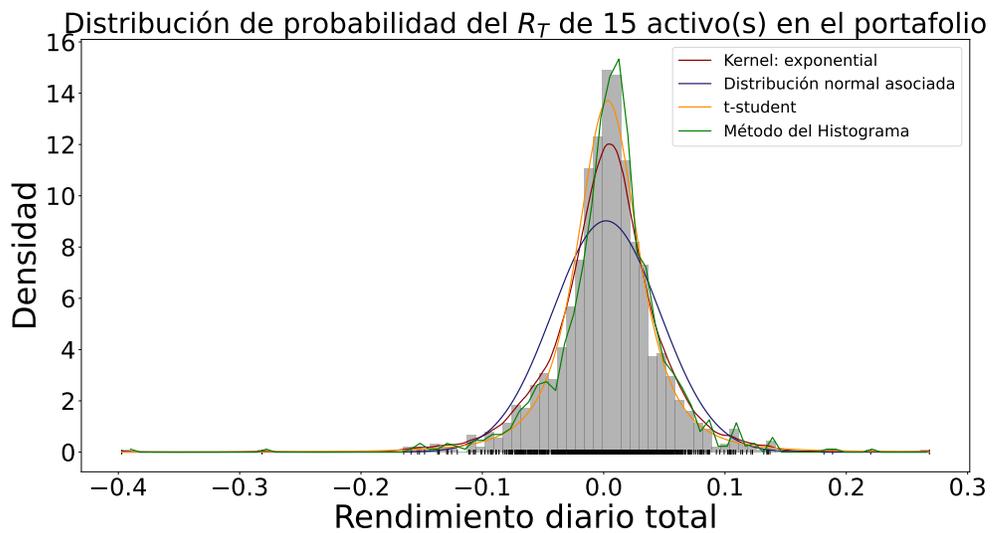
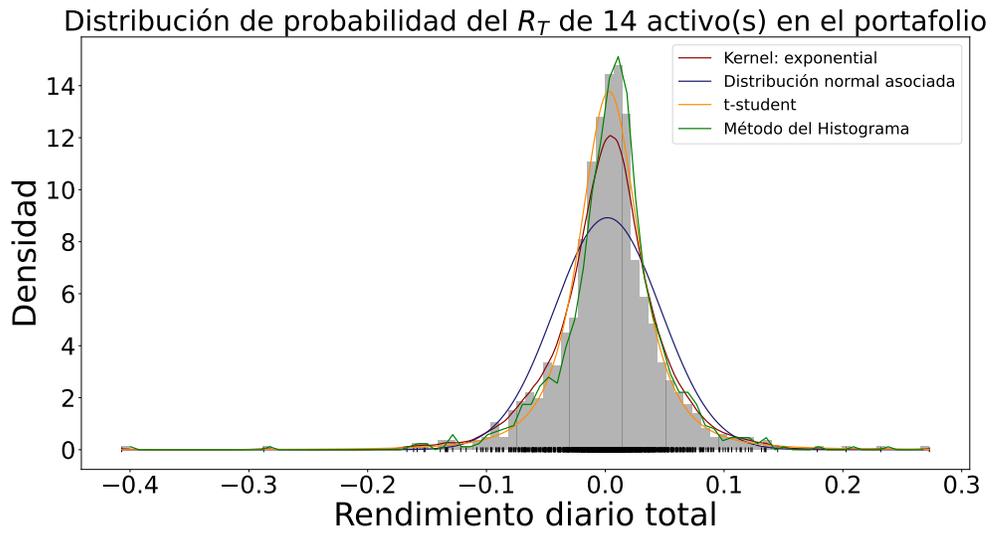
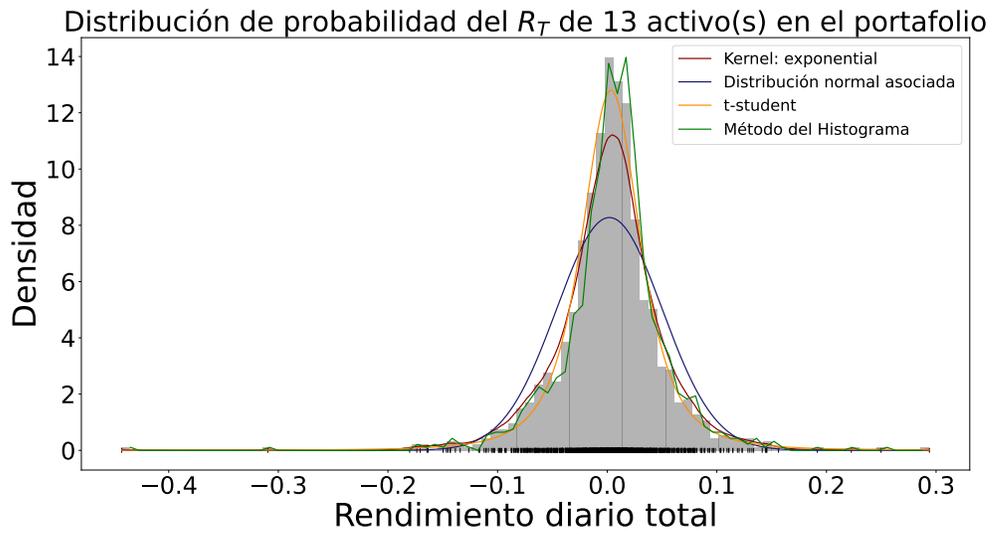
Se generó un portafolio agregando las 18 criptomonedas de manera aleatoria. Se comienza agregando un activo al portafolio, posteriormente se calcula su entropía normal y su entropía empírica por medio del método del histograma, Kernel y el paramétrico. Se continúa agregando activos de manera aleatoria hasta agregar las 18 criptomonedas estudiadas. Cada que se agrega un nuevo activo al portafolio, es necesario calcular la entropía normal y la entropía empírica del rendimiento total i.e., cada que se agrega un activo se calcula nuevamente la función de distribución del rendimiento total por medio de los tres métodos presentados. En la figura 4.4 se observan los ajustes al realizar el procedimiento anterior, mientras que en la figura 4.5 se muestra la entropía normal y la empírica contra el número de activos en el portafolio.

Distribución de probabilidad del  $R_T$  de 1 activo(s) en el portafolioDistribución de probabilidad del  $R_T$  de 2 activo(s) en el portafolioDistribución de probabilidad del  $R_T$  de 3 activo(s) en el portafolio









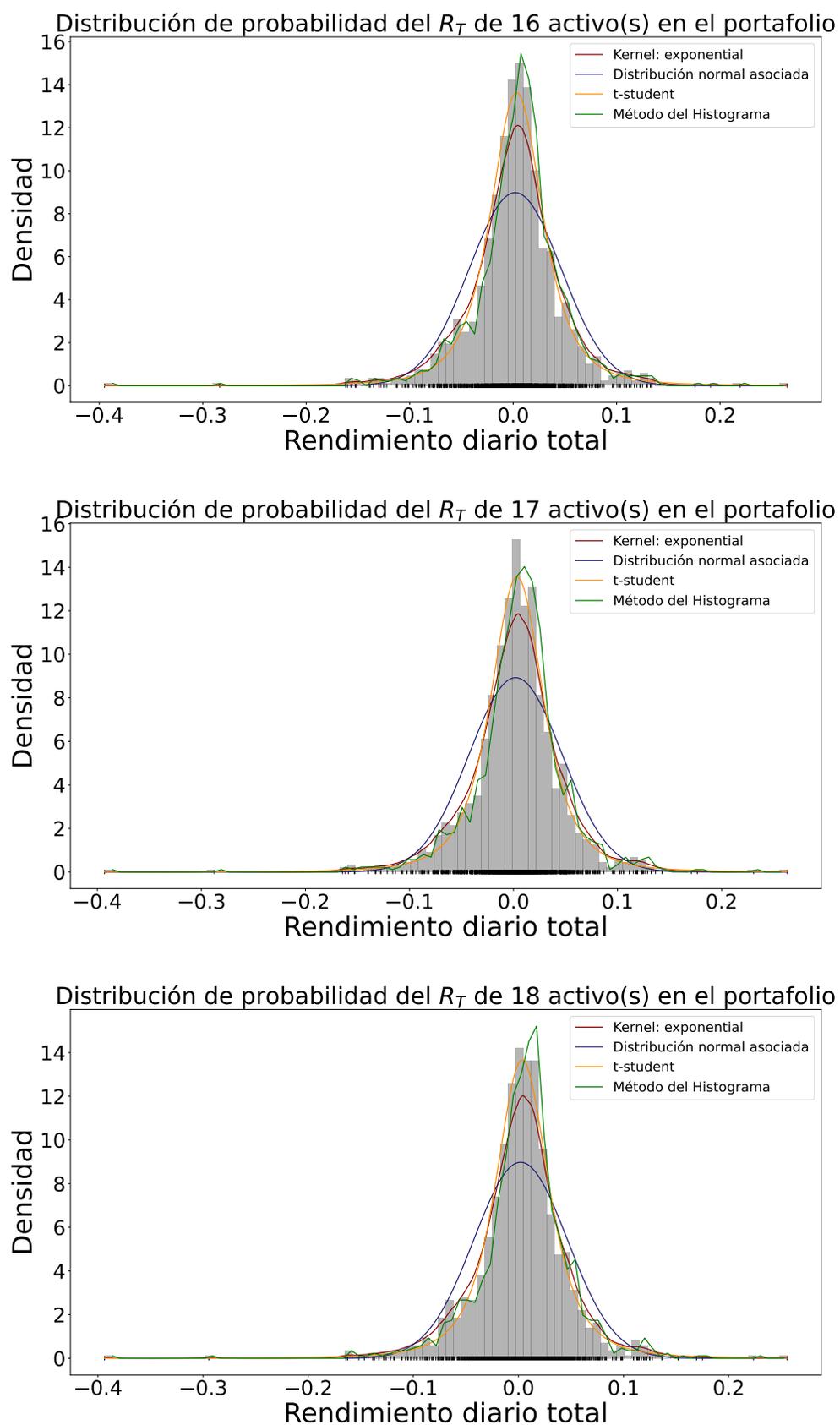


Figura 4.4: Ajustes a la distribución de probabilidad de los rendimientos diarios totales con  $n \in \{1, 2, \dots, 18\}$  activos en el portafolio.

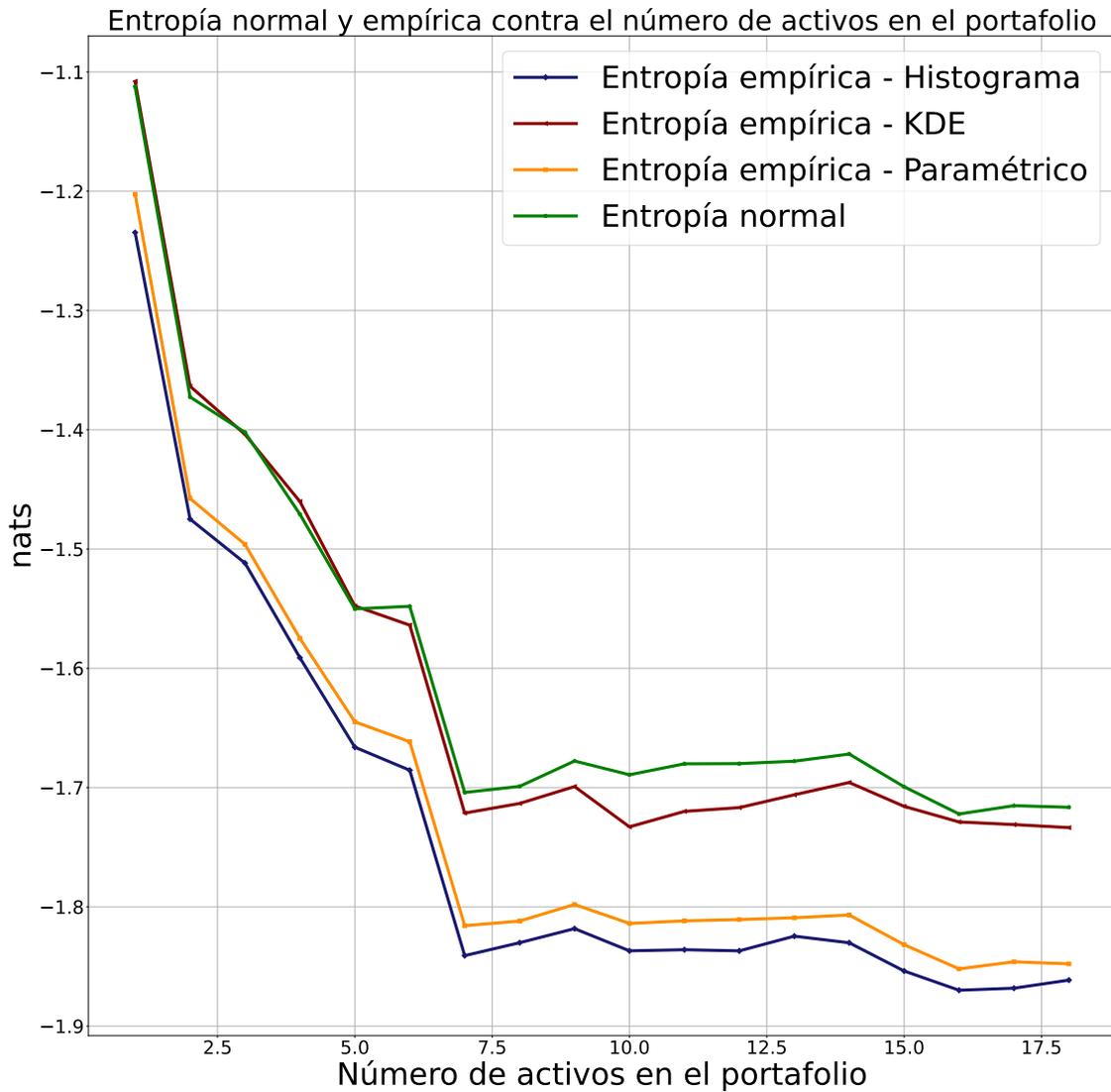


Figura 4.5: Entropía normal y empírica contra el número de activos en el portafolio. La disminución de la entropía al aumentar el número de activos en el portafolio verifica el efecto de diversificación.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En esta tesis se mostraron algunas propiedades estadísticas de los rendimientos de las criptomonedas estudiadas. Para ello, se ajustaron los rendimientos diarios a distintas distribuciones como la normal, t-student y la hiperbólica generalizada. Los resultados muestran que las distribuciones de los rendimientos diarios exhiben distribuciones de retorno leptocúrticas con colas pesadas estadísticamente significativas. En particular la distribución t-Student describe adecuadamente los datos y es una buena opción dada su simplicidad, lo cual puede ser útil para la gestión de riesgos financieros, donde es necesario calcular el valor en riesgo (VaR) y el déficit esperado (ES), pero los resultados también son útiles para fines de inversión. Hasta donde sabemos, este es uno de los pocos trabajos que investiga algunas propiedades estadísticas de las criptomonedas, yendo más allá del Bitcoin.

Se empleó la entropía como medida de incertidumbre en la gestión de carteras. La figura 4.5 muestra que la entropía de Shannon presenta un comportamiento similar, aunque no igual, que la varianza, por lo que puede servir como medida de riesgo y verifica el efecto de diversificación ya que ambas tienden a disminuir al incluir activos en el portafolio. Esto se debe que al aumentar el número de activos en la cartera, el número posible de estados del sistema, en este caso la cartera, disminuye progresivamente y la incertidumbre sobre esta cartera también disminuye. Debemos notar que en todos los casos la entropía normal siempre toma valores mayores a la entropía empírica, lo que implica que la incertidumbre es menor que la que se observaría si los rendimientos se distribuyeran normalmente. Para los 18 valores, se puede lograr una reducción en nats de aproximadamente un 55 % en comparación con un solo valor.

En el estudio realizado por Ormos y Zibriezky (2014) [75] encontró que el método del histograma para calcular la entropía de Shannon mostró ser más eficiente en términos de poder explicativo y predictivo y exhibió simplicidad en comparación con el método del Kernel. Observamos que los ajustes al rendimiento diario total muestran que el método del histograma se ajusta mejor a los datos empíricos, seguido por el método paramétrico y finalmente

el KDE. En estos dos últimos casos, el Log-Likelihood del método paramétrico con la distribución t-Student, siempre fue mayor al del método del KDE; aunque el Log-likelihood de ambos siempre fue mayor al de la distribución normal. Sin embargo, con cualquier método se verifica la diversificación. Esto corrobora y contribuye a los hallazgos empíricos realizados por Dionisio et al. (2006), [25], Ormos y Zibriezky (2014) [75] y Mahmoud y Naoui (2017) [87] que observaron la diversificación de la entropía de Shannon, con la diferencia de que estos autores la verificaron en activos clásicos y no caracterizaron sus distribuciones. Esto puede ser de utilidad para inversores, comerciantes y los gestores de carteras.

De este modo concluimos que la entropía observa el efecto de diversificación y es una medida de incertidumbre más general que la desviación estándar ya que: (i) emplea más información de la distribución de probabilidad, pues usa momentos de orden superior, mientras que la desviación estándar sólo usa el segundo momento; (ii) No depende de ninguna distribución en particular, a diferencia de la desviación estándar, lo que elimina el error introducido al ajustar una distribución normal a los rendimientos. Esto se hace evidente en distribuciones no simétricas con momentos adicionales no normales. De este modo la entropía puede captar la complejidad de los sistemas sin necesidades de hipótesis que puedan sesgar los resultados; (iii) la entropía es independiente de la media dada cualquier distribución, por lo que satisface las condiciones de primer orden; (iv) cumple los requerimientos que deben satisfacer las buenas medidas de incertidumbre; (v) la entropía puede emplearse para datos tanto métricos como no métricos. Por ello, puede usarse como medida complementaria a los modelos tradicionales basados en la media y varianza que son más restrictivos con supuestos que empíricamente suelen no verificarse. Sin embargo, también debe mencionarse los inconvenientes del uso potencial de la entropía como medida de incertidumbre en portafolios, uno de ellos es que es más compleja en comparación de la desviación estándar común. Por otro lado, la entropía tampoco toma en cuenta los valores reales de las variables, por lo que se debe tener cuidado al emplearla en análisis de riesgo y selección de carteras. Además, siempre hay sesgo estadístico en las medidas de información debido a los grados de libertad permitidos en un experimento.

A pesar de que el presente no es un trabajo sobre predicción puntual del mercado de criptomonedas, es ilustrativo mencionar el éxito relativo, en este ámbito, del uso de métodos de la física no lineal para realizar estas predicciones, realizadas por la compañía estadounidense “Prediction Company” fundada por dos pioneros de la teoría del caos en 1991, asociados al Instituto Santa Fe. Es el caso de Doyne Farmer y Norm Packard [100]. En una de sus más conocidas contribuciones [101], Farmer menciona la posibilidad del uso de “dinámica adaptativa” para realizar predicciones en series de tiempo de naturaleza y que sigue los principios de las redes neuronales o más modernamente lo que se conoce como “machine learning” (aprendizaje de máquina). Básicamente consiste en el uso de sistemas que aprenden a clasificar patrones (salida) a partir de una serie de tiempo (entrada). La salida sería idealmente una estrategia de inversión que apuntaría a maximizar ganancias y la entrada sería la serie de tiempo inmediata, idealmente en tiempo real, del comportamiento del mercado. Desde luego, existen aplicaciones recientes de aprendizaje de máquina a la predicción del comportamiento

temporal de las criptomonedas [102, 103].

Para la predicción temporal de mercados financieros existen, hoy en día, más de 5,000 algoritmos creados por diversos programadores que los publican en bibliotecas públicas de software [104]. Hoy en día, los inversionistas utilizan varios de esos algoritmos combinados, aunque los más populares suelen estar basados en: Promedios de Valor Verdadero (ATR), Índice de Fortaleza Relativa (RSI), El Promedio Móvil Convergencia/Divergencia (MACD) y el Promedio Móvil Exponencial (EMA) [104]. Como puede verse, el uso de Promedios Móviles es común. Esencialmente contribuyen a disminuir el ruido o fluctuaciones en intervalos de tiempo. Algunos autores [105, 106] los acoplan con análisis de regresión para formar los modelos ARMA (Autoregressive–moving-average model) que a su vez se emplean junto a las funciones de distribución de probabilidad sesgadas (no normales), dado que, como ya dimos cuenta aquí, las PDF de los mercados financieros y de las criptomonedas no son normales. Es interesante hacer notar que existen “pronósticos” en línea que sugieren los momentos adecuados, en tiempo real, para vender o comprar criptomonedas y que se basan sobre todo en modelos de promedios móviles [107].

Por último, es ilustrativo mencionar que los mercados de criptomonedas tienen propiedades cualitativas y cuantitativas semejantes a los mercados financieros tradicionales, lo cual nos permite hablar de propiedades genéricas entre ambos, es decir de aspectos de universalidad, propios de los sistemas complejos.



# Bibliografía

- [1] Octavio Miramontes. La interdisciplina: Pleitos de vecindad. *Ludus Vitalis*, 19(36):313–316, 2016.
- [2] Philip Ball. The physical modelling of human social systems. *Complexus*, 1(4):190–206, 2003.
- [3] Marcus P. Adams. Hobbes’ Philosophy of Science. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Spring 2019 edition, 2019.
- [4] Hal R Varian. *Microeconomic analysis*. WW Norton, 1992.
- [5] Gregoire Nicolis and Ilya Prigogine. *Exploring complexity an introduction*. St. Martin’s Press, 1989.
- [6] Ilya Prigogine. The rediscovery of value and the opening. In Kurt Dopfer, editor, *The evolutionary foundations of economics*, page 61. Cambridge University Press, 2005.
- [7] Ilya Prigogine, Ping Chen, KH Wen, WW In Cooper, S Thore, D Gibson, and E Phillips. Instability, complexity, and bounded rationality in economic change. *Impact-How IC*, 2, 1997.
- [8] Philip W Anderson, Kenneth J. Arrow, and David Pines. *The economy as an evolving complex system*. CRC Press, 1988.
- [9] Brian Arthur. From economics to physics. <https://www.nature.com/collections/egbdijgjae>. *Nature*. Accesado: 2022-01-01, 2021.
- [10] Philip Ball. *Why society is a complex matter: Meeting twenty-first century challenges with a new kind of science*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] H Eugene Stanley, Luis AN Amaral, Sergey V Buldyrev, AL Goldberger, Shlomo Havlin, H Leschhorn, P Maass, HA Makse, C-K Peng, MA Salinger, et al. Scaling and universality in animate and inanimate systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 231(1-3):20–48, 1996.
- [12] Rosario N Mantegna and H Eugene Stanley. Scaling behaviour in the dynamics of an economic index. *Nature*, 376(6535):46–49, 1995.

- [13] MJ Feigenbaum. Universality in complex discrete dynamics. *Los Alamos Theoretical Division Annual Report*, 1976:1976, 1975.
- [14] Leo P Kadanoff. Scaling laws for ising models near  $T_c$ . *Physics Physique Fizika*, 2(6):263, 1966.
- [15] Jovanovic F and Schinckus C. The history of econophysics' emergence: A new approach in modern financial theory. *SSRN Electronic Journal*, 2012.
- [16] Philip Mirowski. *More heat than light: economics as social physics, physics as nature's economics*. Cambridge University Press, 1991.
- [17] Bruna Ingraio, Giorgio Israel, and Ian MacGilvray. *The invisible hand: economic equilibrium in the history of science*. MIT Press Cambridge, MA, 1990.
- [18] Paulo Ferreira, Éder JAL Pereira, and Hernane BB Pereira. From big data to econophysics and its use to explain complex phenomena. *Journal of Risk and Financial Management*, 13(7):153, 2020.
- [19] L. Bachelier. The theory of speculation. *The Journal of Mathematical Sociology*, The Random Character of Stock Market Prices, chapter 2. MIT Press, Cambridge, MA, 1964.
- [20] Benoit Mandelbrot. New methods in statistical economics. *Journal of political economy*, 71(5):421–440, 1963.
- [21] Rosario Nunzio Mantegna. Lévy walks and enhanced diffusion in Milan stock exchange. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 179(2):232–242, 1991.
- [22] Earl Callen and Don Shapero. A theory of social imitation. *Physics Today*, 27(7):23, 1974.
- [23] Galam Serge, Gefen Yuval, and Shapir Yonathan. Sociophysics: a mean behavior model for the process of strike. *The Journal of Mathematical Sociology*, 9(2):1–13, 1982.
- [24] Serge Galam. Majority rule, hierarchical structures, and democratic totalitarianism: A statistical approach. *Journal of Mathematical Psychology*, 30(4):426–434, 1986.
- [25] Andreia Dionisio, Rui Menezes, and Diana A Mendes. An econophysics approach to analyse uncertainty in financial markets: an application to the portuguese stock market. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 50(1):161–164, 2006.
- [26] Matjaž Perc. The social physics collective. *Scientific Reports*, 9(1):1–3, 2019.
- [27] H Eugene Stanley, Viktor Afanasyev, Luis A Nunes Amaral, Serguei V Buldyrev, Ary L Goldberger, Steve Havlin, Harry Leschhorn, Philipp Maass, Rosario N Mantegna, C-K Peng, et al. Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from DNA and physiology to econophysics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 224(1-2):302–321, 1996.

- [28] Rosario N Mantegna and H Eugene Stanley. *Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge University Press, 1999.
- [29] Ryszard Kutner and Dariusz Grech. Report on foundation and organization of econophysics graduate courses at faculty of physics of University of Warsaw and department of physics and astronomy of the Wroclaw University. *Acta Physica Polonica-Series A General Physics*, 114(3):637, 2008.
- [30] Paul A Samuelson, M Davis, and A Etheridge. *Louis Bachelier's theory of speculation: the origins of modern finance*. JSTOR, 2006.
- [31] Donald Stabile. *Forerunners of modern financial economics: a random walk in the history of economic thought*. Edward Elgar Publishing, 2005.
- [32] Geoffrey Poitras. *Pioneers of Financial Economics: Volume 1*. Edward Elgar Publishing, 2006.
- [33] Geoffrey Poitras and Franck Jovanovic. *Pioneers of Financial Economics: Volume 2*. Edward Elgar Publishing, 2007.
- [34] Franck Jovanovic. Le modèle de marche aléatoire dans l'économie financière de 1863 à 1976. *Revue d'histoire des sciences humaines*, 20(1):51–78, 2009.
- [35] Benoit Mandelbrot. Sur certains prix spéculatifs: faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs de Paul Lévy. *Comptes Rendus*, 254(1962):3968–3970, 1962.
- [36] Benoit Mandelbrot. Very long-tailed probability distributions and the empirical distribution of city sizes. *Mathematical explanations in behavioral science*, pages 322–332, 1965.
- [37] Benoit B Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. In *Fractals and scaling in finance*, pages 371–418. Springer, 1997.
- [38] Paul A Samuelson. Rational theory of warrant pricing. In *Henry P. McKean Jr. Selecta*, pages 195–232. Springer, 2015.
- [39] Eugene F Fama. Portfolio analysis in a stable paretian market. *Management science*, 11(3):404–419, 1965.
- [40] Paul Lévy. Théorie des erreurs. la loi de gauss et les lois exceptionnelles. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 52:49–85, 1924.
- [41] BV Gnedenko, AN Kolmogorov, BV Gnedenko, and AN Kolmogorov. Limit distributions for sums of independent. *Am. J. Math*, 105, 1954.
- [42] Eder Johnson de Area Leão Pereira, Marcus Fernandes da Silva, and HB de B Pereira. Econophysics: Past and present. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 473:251–261, 2017.

- [43] Harry M Markowitz. Portfolio theory. *The journal of finance*, 7(1):77–91, 1952.
- [44] Merton H Miller. Portfolio selection: Efficient diversification of investments., 1959.
- [45] M. Mitzenmacher. A brief history of generative models for power law and lognormal distributions. *Internet Mathematics*, The Random Character of Stock Market Prices, chapter 2. MIT Press, Cambridge, MA(1:2):226–251, 2004.
- [46] Andrew M Edwards, Richard A Phillips, Nicholas W Watkins, Mervyn P Freeman, Eugene J Murphy, Vsevolod Afanasyev, Sergey V Buldyrev, Marcos GE da Luz, Ernesto P Raposo, H Eugene Stanley, et al. Revisiting Lévy flight search patterns of wandering albatrosses, bumblebees and deer. *Nature*, 449(7165):1044–1048, 2007.
- [47] T. Odean B. Barber. The internet and the investor. *Journal of Economic Perspectives*, 15(1):41–54, 2001.
- [48] Bouchaud J.P. An introduction to statistical finance. *Physics A*, 313(1):238–251, 2002.
- [49] Jean-Philippe Bouchaud, Marc Potters, et al. *Theory of financial risk and derivative pricing: from statistical physics to risk management*. Cambridge university press, 2003.
- [50] Didier Sornette. *Why stock markets crash*. Princeton university press, 2009.
- [51] J Doyne Farmer and Duncan Foley. The economy needs agent-based modelling. *Nature*, 460(7256):685–686, 2009.
- [52] Thomas Lux and Michele Marchesi. Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market. *Nature*, 397(6719):498–500, 1999.
- [53] Stefano Battiston, Domenico Delli Gatti, Mauro Gallegati, Bruce Greenwald, and Joseph E Stiglitz. Liaisons dangereuses: Increasing connectivity, risk sharing, and systemic risk. *Journal of economic dynamics and control*, 36(8):1121–1141, 2012.
- [54] Benjamin M Tabak, Marcelo Takami, Jadson MC Rocha, Daniel O Cajueiro, and Sergio RS Souza. Directed clustering coefficient as a measure of systemic risk in complex banking networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 394:211–216, 2014.
- [55] Gang-Jin Wang, Chi Xie, Kaijian He, and H Eugene Stanley. Extreme risk spillover network: application to financial institutions. *Quantitative Finance*, 17(9):1417–1433, 2017.
- [56] Gang-Jin Wang, Zhi-Qiang Jiang, Min Lin, Chi Xie, and H Eugene Stanley. Interconnectedness and systemic risk of china’s financial institutions. *Emerging Markets Review*, 35:1–18, 2018.
- [57] Gili Yen and Cheng-few Lee. Efficient market hypothesis (emh): past, present and future. *Review of Pacific Basin Financial Markets and Policies*, 11(02):305–329, 2008.

- [58] Alexandra Gabriela Țițan. The efficient market hypothesis: Review of specialized literature and empirical research. *Procedia Economics and Finance*, 32:442–449, 2015.
- [59] Tobias Preis, Daniel Reith, and H Eugene Stanley. Complex dynamics of our economic life on different scales: insights from search engine query data. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 368(1933):5707–5719, 2010.
- [60] Tobias Preis, Dror Y Kenett, H Eugene Stanley, Dirk Helbing, and Eshel Ben-Jacob. Quantifying the behavior of stock correlations under market stress. *Scientific Reports*, 2(1):1–5, 2012.
- [61] Tobias Preis, Helen Susannah Moat, and H Eugene Stanley. Quantifying trading behavior in financial markets using google trends. *Scientific Reports*, 3(1):1–6, 2013.
- [62] Philip Ball. Econophysics: culture crash. *Nature*, 441(7094):686–689, 2006.
- [63] Christophe Schinckus. *When Physics Became Undisciplined An Essay on Econophysics*. PhD thesis, University of Cambridge, 2018.
- [64] Ondrej Filip, Karel Janda, Ladislav Kristoufek, and David Zilberman. Dynamics and evolution of the role of biofuels in global commodity and financial markets. *Nature Energy*, 1(12):1–9, 2016.
- [65] Jian Gao and Tao Zhou. Quantifying china’s regional economic complexity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 492:1591–1603, 2018.
- [66] Janet Yellen. Interconnectedness and systemic risk: lessons from the financial crisis and policy implications: a speech at the American Economic Association/American Finance Association joint luncheon, San Diego, California, january 4, 2013. Technical report, Board of Governors of the Federal Reserve System (US), 2013.
- [67] Satoshi Nakamoto. Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system. *Decentralized Business Review*, page 21260, 2008.
- [68] CryptoDataDownload.com. Historical data. <https://www.cryptodatadownload.com>. Accessed: 2022-01-01.
- [69] Joerg Osterrieder. The statistics of bitcoin and cryptocurrencies. *SSRN Electronic Journal 2872158*, 2016.
- [70] Jiaqi Liang, Linjing Li, Daniel Zeng, and Yunwei Zhao. Correlation-based dynamics and systemic risk measures in the cryptocurrency market. In *2018 IEEE International Conference on Intelligence and Security Informatics (ISI)*, pages 43–48. IEEE, 2018.
- [71] Giovanni Bonanno, Fabrizio Lillo, and Rosario N Mantegna. Levels of complexity in financial markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 299(1-2):16–27, 2001.

- [72] Rudolf Clausius. Xvi. on a mechanical theorem applicable to heat. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 40(265):122–127, 1870.
- [73] Ludwig Boltzmann. Weitere studien über das wärmeleichgewicht unter gasmolekülen. In *Kinetische Theorie II*, pages 115–225. Springer, 1970.
- [74] Claude Elwood Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, 27(3):379–423, 1948.
- [75] Mihály Ormos and Dávid Zibriczky. Entropy-based financial asset pricing. *PloS one*, 9(12):e115742, 2014.
- [76] H. Markowitz. Portfolio selection. *J. Financ.*, 7, 1952.
- [77] P.J. Mercurio, Y. Wu, and H. Xie. An entropy-based approach to portfolio optimization. *Entropy*, 7, 2020.
- [78] P Erdős and Mihály Ormos. Return calculation methodology: Evidence from the hungarian mutual fund industry. *Acta Oeconomica*, 59(4):391–409, 2009.
- [79] George C Philippatos and Charles J Wilson. Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. *Applied Economics*, 4(3):209–220, 1972.
- [80] David N Nawrocki and William H Harding. State-value weighted entropy as a measure of investment risk. *Applied Economics*, 18(4):411–419, 1986.
- [81] Esfandiar Maasoumi 1. A compendium to information theory in economics and econometrics. *Econometric reviews*, 12(2):137–181, 1993.
- [82] Jean-Philippe Bouchaud, Marc Potters, and Jean-Pierre Aguilar. Missing information and asset allocation. *arXiv preprint cond-mat/9707042*, 1997.
- [83] B Gulko. *The Entropy Pricing Theory—Market Beliefs, Valuation, Incomplete Markets, Asset Pricing*. PhD thesis, Ph. D. dissertation, UMI–Dissertations Services, 1998.
- [84] Maasoumi E and Racine J. Entropy and predictability of stock market returns. *Journal of Econometrics*, 107(1–2):291–312, 2002.
- [85] Samer Arafat, Marjorie Skubic, and Kevin Keegan. Combined uncertainty model for best wavelet selection. In *The 12th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2003. FUZZ'03.*, volume 2, pages 1195–1199. IEEE, 2003.
- [86] Caroline Zunckel Ulrich Kirchner. Measuring portfolio diversification. *Cornell University*, February 2011.
- [87] Imen Mahmoud and Kamel Naoui. Measuring systematic and specific risk: Approach mean-entropy. *Asian Journal of Empirical Research*, 7(3):42–60, 2017.

- [88] Alfréd Rényi. On measures of entropy and information. In *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics*, volume 4, pages 547–562. University of California Press, 1961.
- [89] Constantino Tsallis, Celia Anteneodo, Lisa Borland, and Roberto Osorio. Nonextensive statistical mechanics and economics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 324(1-2):89–100, 2003.
- [90] Aleksander Jakimowicz. The role of entropy in the development of economics. *Entropy*, 22:452, Apr 2020.
- [91] David W Scott. On optimal and data-based histograms. *Biometrika*, 66(3):605–610, 1979.
- [92] David Freedman and Persi Diaconis. On the histogram as a density estimator: L 2 theory. *Probability theory and related fields*, 57(4):453–476, 1981.
- [93] Daniel Traian Pele, Emese Lazar, and Alfonso Dufour. Information entropy and measures of market risk. *Entropy*, 19:226, 05 2017.
- [94] Nader Ebrahimi, Esfandiar Maasoumi, and Ehsan S Soofi. Ordering univariate distributions by entropy and variance. *Journal of Econometrics*, 90(2):317–336, 1999.
- [95] Galina Deeva et al. Comparing entropy and beta as measures of risk in asset pricing. *Acta Universitatis Agriculturae Silviculturae Mendelianae Brunensis*, 65:1889–1894, 2017.
- [96] Daniel Berrar. Cross-validation., 2019.
- [97] S Shaphiro and M Wilk. An analysis of variance test for normality. *Biometrika*, 52(3):591–611, 1965.
- [98] Saralees Nadarajah, Emmanuel Afuecheta, and Stephen Chan. A note on “modelling exchange rate returns: Which flexible distribution to use?”. *Quantitative Finance*, 15(11):1777–1785, 2015.
- [99] Marie Briere, Kim Oosterlinck, and Ariane Szafarz. Virtual currency, tangible return: Portfolio diversification with bitcoins. *Journal of Asset Management*, 16:365–73, 2015.
- [100] Peter Gwynne. Physicist who makes cash from chaos. *Physics World*, 14(10):9, 2001.
- [101] J. Doyne Farmer and John J. Sidorowich. Can new approaches to nonlinear modeling improve economic forecasts? In Philip W. Anderson, Kenneth Arrow, and David Pines, editors, *The Economy as an Evolving Complex System*. SFI, Westview Press, CRC, 1988.
- [102] Luisanna Cocco, Roberto Tonelli, and Michele Marchesi. Predictions of bitcoin prices through machine learning based frameworks. *PeerJ Computer Science*, 7:e413, 2021.

- [103] Wei Chen, Huilin Xu, Lifen Jia, and Ying Gao. Machine learning model for bitcoin exchange rate prediction using economic and technology determinants. *International Journal of Forecasting*, 37(1):28–43, 2021.
- [104] Tradingview.com. Indicators, strategies and libraries. <https://www.tradingview.com/scripts/indicator/>. Accessed: 2022-01-01, 2022.
- [105] Philippe Lambert and Sébastien Laurent. Modelling skewness dynamics in series of financial data using skewed location-scale distributions. *Institut de Statistique, Louvain-la-Neuve Discussion Paper*, 119, 2002.
- [106] Mohsen Maleki, Darren Wraith, Mohammad R Mahmoudi, and Javier E Contreras-Reyes. Asymmetric heavy-tailed vector auto-regressive processes with application to financial data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 90(2):324–340, 2020.
- [107] Tradingview.com. Indicators, strategies and libraries. <https://www.tradingview.com/symbols/BTCUSD/technicals/>. Accessed: 2022-01-01, 2022.