



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Ley de mortalidad tipo fase
para la población mexicana de 2000 a 2015.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

PRESENTA:

KARINA VÁZQUEZ MARTÍNEZ

TUTOR:

DR. FERNANDO BALTAZAR LARIOS

2022





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	Vázquez
Apellido materno	Martínez
Nombre(s)	Karina
Teléfono	5587183188
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Actuaría
Número de cuenta	312270179
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Dr.
Nombre(s)	Fernando
Apellido paterno	Baltazar
Apellido materno	Larios
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dra.
Nombre(s)	Nina
Apellido paterno	Castro
Apellido materno	Méndez
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Dra.
Nombre(s)	Luz Judith
Apellido paterno	Rodríguez
Apellido materno	Esparza
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	M. en C.
Nombre(s)	Daniel
Apellido paterno	Cervantes
Apellido materno	Filoteo
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	M. en A.
Nombre(s)	Blanca Dulce Miriam
Apellido paterno	Benítez
Apellido materno	Pérez
7. Datos del trabajo escrito	7. Datos del trabajo escrito
Título	Ley de mortalidad tipo fase para la población mexicana de 2000 a 2015
Subtítulo	-
Número de páginas	103 p
Año	2022

Agradecimientos

A mis padres por el apoyo incondicional que siempre me han brindado, por creer siempre en mí y por confiar en mis decisiones. A mis hermanos por apoyarme en todo momento.

A mis amigos, familia por elección, por estar siempre conmigo.

A todos y cada uno de los profesores que me incentivaron y motivaron a alcanzar este primer logro.

A mis sinodales, por ser parte importante de este proyecto, por sus valiosos comentarios, su atención y apoyo.

A mi asesor por la inagotable confianza depositada en mí, la paciencia y la ayuda continua.

A la UNAM por proveerme las armas necesarias para dar este paso, que en conjunto con el proyecto PAPIIT IA105418 realizaron el financiamiento parcial de este proyecto.

A mis padres,
porque este logro
también es suyo.

Contenido

<i>Introducción</i>	10
<i>Capítulo 1. Análisis de la mortalidad a lo largo del tiempo</i>	13
1.1 Breve historia de las tablas de mortalidad.....	13
1.1.1 Primeras mediciones de la mortalidad	13
1.1.2 Primeros modelos matemáticos para la construcción de tablas de mortalidad	14
1.1.3 Tablas de mortalidad en México	15
1.1.4 Tablas de mortalidad comúnmente usadas en la actualidad en México.....	16
1.2 Leyes de mortalidad	16
1.2.1 Ley de Moivre.....	16
1.2.2 Ley de Gompertz	17
1.2.3 Ley de Gompertz-Makeham.....	17
1.3 Modelos para la medición de la mortalidad	18
1.3.1 Modelo de Heligman & Pollard	18
1.3.2 Método de Coale & Kisker.....	18
1.3.3 Tabla de vida	18
1.3.4 Modelo Logit	20
1.3.5 Tablas con ajuste anual	21
<i>Capítulo 2. Bases teóricas</i>	23
2.1 Procesos estocásticos.....	23
Definición 2.1.1 Proceso estocástico.....	23
Características de los procesos estocásticos.....	24
Definición 2.1.2 Proceso de Markov	24
Definición 2.1.3 Probabilidad de transición	24
Definición 2.1.4 Matriz de transición	24
Definición 2.1.5 Proceso de saltos	25
Definición 2.1.6 Distribución inicial.....	25
2.2 Procesos de saltos de Markov	25
Definición 2.2.1 Proceso de saltos de Markov	25
Propiedades del proceso de saltos de Markov	25
Definición 2.2.2 Generador infinitesimal asociado a un proceso de saltos de Markov.....	26
2.3 Distribuciones tipo fase.....	27
Definición 2.3.1 Matriz de intensidad asociada a un proceso de saltos de Markov	27
Definición 2.3.2 Matriz de subintensidad asociada a un proceso de saltos de Markov	27

Definición 2.3.3 Matriz de transición asociada a un proceso de saltos de Markov	28
Definición 2.3.4 Distribución tipo fase	28
Propiedades de las distribuciones tipo fase.....	28
2.4 Estadística e inferencia.....	29
Definición 2.4.1 Población.....	29
Definición 2.4.2 Función de supervivencia.....	29
Definición 2.4.3 Estadística suficiente.....	29
Definición 2.4.4 Función de verosimilitud.....	29
Definición 2.4.5 Estimador máximo verosímil	29
Definición 2.4.6 Estimador máximo verosímil para distribuciones tipo fase.....	29
2.5 Envejecimiento y mortalidad	33
Definición 2.5.1 Edad cronológica.....	33
Definición 2.5.2 Edad fisiológica	33
Definición 2.5.3 Proceso de envejecimiento.....	33
Definición 2.5.4 Probabilidad de muerte	33
Definición 2.5.5 Tabla de mortalidad	33
Definición 2.5.6 Factores que influyen en la mortalidad	34
<i>Capítulo 3. Ley de mortalidad tipo fase.....</i>	<i>36</i>
3.1 Modelo tipo Fase.....	36
3.2 Tipo de datos disponibles.....	38
3.2.1 Datos de forma continua.....	38
3.2.2 Función de verosimilitud para el caso continuo	38
3.2.3 Estimador máximo verosímil para el caso continuo	38
3.2.4 Datos de forma discreta	38
3.3 Probabilidad de muerte y esperanza de vida.....	39
3.3.1 Función de supervivencia bajo distribución tipo fase.....	39
3.3.2 Probabilidad de muerte bajo el modelo de distribuciones tipo fase.....	39
3.3.3 Esperanza de vida bajo la ley de mortalidad tipo fase.....	39
<i>Capítulo 4. Construcción de la tabla de mortalidad (México 2000 - 2015).....</i>	<i>41</i>
4.1 Datos de la población mexicana.....	41
4.2 Primeros índices	42
4.2.1 Índice de mortalidad	42
4.2.2 Índice de incidentes	42
4.2.3 Índice de hábitos saludables	43
4.3 Avanzando a través de las edades fisiológicas.....	45
4.4 Población mexicana simulada	46

4.5 Estimador máximo verosímil de la distribución tipo fase	47
4.6 Probabilidad de muerte y esperanza de vida de la población mexicana (2000 –2015) bajo el modelo de distribuciones tipo fase	49
4.7 Comparación con distintas tablas de mortalidad mexicanas.....	60
4.8 Comparación con la mortalidad registrada en México de 2016 a 2018	67
<i>Capítulo 5. Conclusiones</i>	71
<i>Bibliografía y referencias</i>	75
<i>Anexo 1. Tabla de mortalidad para la población mexicana 2000 – 2015 bajo ley tipo fase</i>	79
<i>Anexo 2. Esperanza de vida estimada</i>	82
<i>Anexo 3. Fuentes de los datos usados en la construcción de la tabla de mortalidad bajo la ley tipo fase</i>	85
<i>Anexo 4. Clasificación de la información</i>	86
<i>Anexo 5. EMSSA 09</i>	87
<i>Anexo 6. EMSSA 09 proyectada al 2015</i>	90
<i>Anexo 7. Tabla EMSSA CMG 09</i>	93
<i>Anexo 8. Tabla EMSSI IMSS-ISSSTE 09</i>	96
<i>Anexo 9. Tabla CNSF 2000 I</i>	99
<i>Anexo 10. Tasas de mortalidad en México durante 2016-2018</i>	101

Índice de Tablas

<i>Tabla 1. Variación del estimador máximo verosímil de la distribución tipo fase.</i>	32
<i>Tabla 2. Tasa de crecimiento poblacional.</i>	42
<i>Tabla 3. Estilo de vida en México y en Estados Unidos.</i>	44
<i>Tabla 4. Tasas de mortalidad. México 2000-2015.</i>	56
<i>Tabla 5. Esperanza de vida al nacer (CONAPO).</i>	58
<i>Tabla 6. Esperanza de vida estimada por quinquenio.</i>	59
<i>Tabla 7. Esperanza de vida en México por sexo, 60, 70 y 80 años.</i>	59
<i>Tabla 8. Esperanza de vida promedio, 60, 70 y 80 años.</i>	60
<i>Tabla 9. Tabla de mortalidad bajo ley tipo fase.</i>	79
<i>Tabla 10. Esperanza de vida estimada.</i>	82
<i>Tabla 11. Clasificación de los egresos hospitalarios.</i>	86
<i>Tabla 12. Tabla de tasas de mortalidad de activos para la Seguridad Social, 2009.</i>	87
<i>Tabla 13. EMSSA 09 proyectada al 2015.</i>	90
<i>Tabla 14. Tabla de tasas de mortalidad de activos para la Seguridad Social, CMG 2009. Para el capital mínimo de garantía.</i>	93
<i>Tabla 15. Tabla de tasas de mortalidad de inválidos para la Seguridad Social, 2009.</i>	96
<i>Tabla 16. CNSF 2000 I, (1991-1998).</i>	99
<i>Tabla 17. Mortalidad en México durante 2016-2018.</i>	101

Índice de Gráficos

Gráfico 1. Tasas de mortalidad en México.	49
Gráfico 2. Tasas de mortalidad durante la esperanza de vida al nacer (0 a 76 años). ..	50
Gráfico 3. Tasas de mortalidad en México de 0 a 4 años.	51
Gráfico 4. Tasas de mortalidad en México de 4 a 19 años.	52
Gráfico 5. Tasas de mortalidad en México de 19 a 45 años.	53
Gráfico 6. Tasas de mortalidad en México de 45 a 76 años.	54
Gráfico 7. Tasas de mortalidad en México de 76 a 100 años.	55
Gráfico 8. Esperanza de vida en México.	57
Gráfico 9. Comparación con EMSSA 09.	61
Gráfico 10. Comparación con EMSSA 09 al 2015.	62
Gráfico 11. Comparación con EMSSA CMG 09.	63
Gráfico 12. Comparación con EMSSI 09.	64
Gráfico 13. Comparación con CNSF 2000-I.	66
Gráfico 14. Mortalidad mexicana en 2016.	68
Gráfico 15. Mortalidad mexicana en 2017.	69
Gráfico 16. Mortalidad mexicana en 2018.	70

Introducción

A través del tiempo se ha buscado comprender como se comportan las poblaciones frente al fenómeno de la mortalidad, una vía ha sido mediante el desarrollo de modelos matemáticos que tienen el propósito de estimar las tasas de fallecimiento.

Contar con una forma de aproximar la mortalidad humana es actuarialmente importante por diversas razones. Como ejemplo de éstas tenemos el cálculo de primas y reservas en seguros, valuaciones actuariales en sistemas de seguridad social, cálculo de pasivos laborales, análisis poblacional y proyecciones demográficas, entre otras. Todos ellos necesarios y relevantes en la toma de decisiones personales, empresariales y en la implementación de políticas públicas.

Una de las formas más comunes de medir la mortalidad es a través de tablas de vida, también conocidas como tablas de mortalidad, las cuales se realizaron desde hace mucho tiempo. Halley (1693)[26] construye la primera tabla de vida para una población específica, dando pauta al estudio de la mortalidad mediante análisis actuarial.

A pesar de que se podría pensar que la mejor forma de conocer la mortalidad de una población es observarla desde el nacimiento hasta la muerte de todos los integrantes, esto no es posible ni factible, ya que seguir a un conjunto de individuos desde su nacimiento hasta su muerte requiere un tiempo demasiado prolongado para efectos prácticos. Además, aunque fuera posible no permitiría realizar estimaciones sobre la dinámica de mortalidad posterior, debido a que muchos de los factores humanos que influyen en las defunciones cambian con el paso del tiempo. Es por eso por lo que se construyen probabilidades de muerte para cada edad con base en la experiencia histórica disponible.

Haciendo el supuesto de que ésta no se modificará drásticamente en un futuro cercano, se tendrá una forma apropiada de estimar la probabilidad de muerte de la población actual. Así, dicha probabilidad de muerte estimada podrá ser utilizada para realizar adecuadamente cálculos o valuaciones actuariales necesarios en algunos ámbitos.

Actualmente, las tablas de mortalidad son construidas y usadas por los actuarios para el cálculo de primas, reservas, valuaciones y proyecciones, entre otras. Sin embargo, los métodos más usados en la elaboración de estas tablas no son las únicas formas de estimar la probabilidad de muerte de los individuos pertenecientes a una población en un intervalo de tiempo. También pueden utilizarse procesos estocásticos para modelar el tiempo que transcurre hasta la muerte o la probabilidad de que ésta ocurra.

Esparza y Baltazar (2018)[19] extienden el modelo propuesto por Lin y Liu (2007)[39], modelando el proceso de envejecimiento de un individuo mediante un proceso de saltos de Markov con espacio de estados finito y un único estado absorbente, obteniendo así que el tiempo hasta la muerte sigue una distribución tipo fase.

El objetivo de este trabajo es construir una tabla de mortalidad para la población mexicana usando el modelo desarrollado por Esparza y Baltazar (2018)[19], cuyo procedimiento se basa en describir la probabilidad de fallecimiento por medio de una estructura de edad fisiológica (índice relativo de salud que representa el grado de envejecimiento de los individuos) incorporando diversos factores (endógenos y exógenos) que afectan la probabilidad de morir. Cambiando el supuesto de que las muertes siguen una distribución uniforme en el intervalo de tiempo en el que ocurren.

Se considerará una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados finito y un solo estado absorbente (el fallecimiento) para modelar el proceso de envejecimiento de los mexicanos. De esta forma el tiempo transcurrido hasta la muerte sigue una distribución tipo fase.

Esparza y Baltazar (2018)[19] muestran que modelando de esa forma el envejecimiento es posible realizar una aproximación cercana a los fallecimientos realmente acontecidos en una población, ellos lo evidencian particularmente para la población de Estados Unidos.

Este proyecto se centra en aplicar el modelo descrito anteriormente para construir una tabla de mortalidad para el caso específico de la población mexicana, es decir, se evidenciará que el modelo impulsado por Esparza y Baltazar (2018)[19] puede utilizarse para plasmar la mortalidad mexicana acontecida entre 2000 y 2015.

Evidenciando que es posible modelar la mortalidad mexicana suponiendo que el envejecimiento de los mexicanos puede asociarse a un proceso de saltos de Markov, y, por consiguiente, que el tiempo de vida de cada persona sigue una distribución tipo fase.

Lo anterior se realizará usando información de defunciones y egresos hospitalarios de la Secretaría de Salud, población obtenida de los censos de 2000 y 2010 elaborados por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) y los datos recolectados en la Encuesta Nacional de Salud y Nutrición (ENSANUT) aplicada por el Instituto Nacional de Salud Pública (INSP).

La información usada será la correspondiente al periodo comprendido entre 2000 y 2018. Los primeros 16 años se explotarán para el ajuste del modelo, mientras que los 3 años restantes se emplearán para examinar si es factible emplear la mortalidad ajustada para estimar las defunciones reales acontecidas en México posteriores al periodo considerado en el ajuste.

La hipótesis principal es que la ley de mortalidad tipo fase puede emplearse para modelar las defunciones mexicanas y se aproximará a la experiencia de mortalidad mexicana registrada en el periodo de estudio, inclusive posteriormente si las condiciones generales de la población no sufren cambios drásticos. Para verificar dicha hipótesis se tomaron los datos disponibles en México en el periodo comprendido entre 2000 y 2018.

La investigación se presenta a lo largo de los cinco capítulos que conforman el presente trabajo.

En el primer capítulo se presenta el análisis de la mortalidad a lo largo del tiempo, dividido en tres secciones. En la primera de ellas se sintetiza la historia de las tablas de mortalidad y algunas de las más usadas actualmente en México. En la segunda sección se presentan las leyes de mortalidad más comunes en la construcción de tablas de vida. Mientras que en la tercera sección se describen algunos de los modelos habituales para la construcción de tablas de mortalidad mexicanas.

En el segundo capítulo se presentan las bases teóricas del proyecto, se incluyen las definiciones y conceptos esenciales para la comprensión de la ley de mortalidad tipo fase la cual se presenta de forma general en el tercer capítulo.

En el cuarto capítulo se exhibe el procedimiento empleado para la construcción de la tabla de mortalidad para el caso específico de la población mexicana haciendo uso de la experiencia histórica de 2000 a 2015, bajo la ley tipo fase. Además, se muestra la esperanza de vida bajo el mismo método.

Se presenta también una comparación entre la mortalidad real registrada en el periodo de estudio y la mortalidad ajustada en este trabajo. Así como una comparación gráfica de la tabla de mortalidad construida, con las tablas de mortalidad generalmente empleadas en la actualidad para algunos cálculos actuariales en México. Además, se muestra la semejanza con la mortalidad registrada durante los siguientes 3 años al periodo de estudio.

Finalmente, en el capítulo cinco se exponen las conclusiones del presente trabajo.

Adicionalmente se incluyen 10 anexos, en los primeros dos se exhibe la tabla de mortalidad y la esperanza de vida construida a lo largo de este proyecto. Los anexos 3 y 4 contienen información sobre las principales fuentes de consulta para la recolección de los datos.

Posteriormente, en los anexos 5 al 9 se incluyen las tablas con las cuales se comparó la tabla ajustada en el desarrollo de este trabajo. Para finalizar, en el anexo 10 se adjunta la tabla que contrasta la mortalidad obtenida en este proyecto con la mortalidad registrada en la población mexicana los 3 años siguientes al periodo de estudio.

Capítulo 1. Análisis de la mortalidad a lo largo del tiempo

Se iniciará comentando como a través de la historia, se ha avanzado en el estudio de factores tanto propios como externos a la humanidad que repercuten en los individuos y en las poblaciones, específicamente, cómo es que estos factores influyen en la mortalidad humana. Se mencionarán las contribuciones de diversos investigadores en la construcción de tablas de vida.

1.1 Breve historia de las tablas de mortalidad

Desde hace tiempo, el análisis de la mortalidad o supervivencia de las personas pertenecientes a una población con determinadas características ha sido estudiado por diversos investigadores. En temas competentes a cálculos en seguros, pensiones, finanzas, entre otros, es de suma importancia contar con una forma de estimar o aproximar la probabilidad de que alguien sobreviva o fallezca.

Derivado de diversos estudios a lo largo del tiempo, se puede corroborar que uno de los principales factores para que los ajustes a la probabilidad de muerte tengan errores pequeños, es la calidad de los datos. Es decir, el nivel de exactitud que estos tengan y el nivel de representatividad con respecto a la población total. Por ejemplo, no es posible elaborar una tabla de mortalidad para un país, que ajuste con un error bajo la probabilidad de muerte, midiéndola con datos únicamente de una pequeña localidad situada en un lugar específico de ese país, debido a que las condiciones generales del país y de la localidad serán diferentes. O utilizando datos con una cantidad alta de sesgo, errores u omisiones.

1.1.1 Primeras mediciones de la mortalidad

Huerta y Reynaud (2009)[30] mencionan que el primer registro de nacimientos y defunciones se originó en Inglaterra a principios del siglo XVI, como consecuencia de que, en 1614, el papa Paulo V ordenó que se registraran funerales y entierros realizados, adicionales a los registros de bautizos y matrimonios que ya eran contabilizados.

Este tipo de registros sirvieron de base para que, en Inglaterra, gracias a John Graunt y a las cuentas de mortalidad (*Bills of mortality*), en las que se recopilaba información de nacimientos y fallecimientos en Londres entre los años 1604 y 1661, se desarrollaran estimaciones de la esperanza de vida y una tabla de mortalidad que no estaba en función de la edad de las personas, sino de las causas de mortalidad. Smith (2012)[54].

Sin embargo, es hasta 1693 que Halley (1693)[26] construye la primera tabla de mortalidad, fue elaborada para la población de la ciudad de Breslau, a partir de tablas de nacimientos y defunciones registrados en esa ciudad.

Posteriormente, se dieron a conocer diversos trabajos en los que se vislumbraba la importancia de la estadística en la medición de aspectos relacionados a la población, uno de ellos es el primer censo registrado en Bélgica en el año 1829 por Adolphe

Quételet en el que se sugiere cierta influencia de algunas variables como edad, sexo, estación del año, profesión y situación económica en la mortalidad humana.

Esto sirvió de base para numerosos estudios que permitieron conocer que en la muerte de un individuo influyen muchos factores, tanto dependientes del individuo como independientes a él.

1.1.2 Primeros modelos matemáticos para la construcción de tablas de mortalidad

A lo largo del tiempo, se ha deseado obtener una estimación para las defunciones que podrían ocurrir en un futuro cercano, es por esto por lo que, desde hace varios siglos, numerosos científicos han propuesto que el comportamiento de la mortalidad puede modelarse matemáticamente.

Algunos de estos modelos son los presentados por Moivre (1725)[43], Gompertz (1825)[24] y Makeham (1980)[42] por mencionar los más conocidos, los cuales se presentarán en la siguiente sección.

En el siglo XVIII, Moivre (1725)[43], modela matemáticamente el comportamiento de la mortalidad, afirmando que la supervivencia sigue una función lineal decreciente, sin embargo, este modelo tiene una deficiencia importante, ya que no es apropiado para edades tempranas. La función asociada a la ley de Moivre es la siguiente:

$$\mu_x = \frac{B}{l_0 - Bx}, \quad (1)$$

Donde μ_x modela la mortalidad a cierta edad x , l_0 corresponde a la población inicial y $B > 0$ es una constante de proporcionalidad.

Craik (2002)[17] menciona que, en el siglo XIX, Edward Sang, como parte de sus múltiples aportaciones a los seguros, propone un modelo en el que sugiere que la población decrece geométricamente, en la que incluye un factor adicional a la edad que afecta directamente a la probabilidad de muerte. Edward asocia la siguiente ecuación a la mortalidad a edad x ,

$$\mu_x = -\frac{\ln(B)}{B^{w-x} - 1}, \quad (2)$$

donde $0 < B < 1$ es una constante de proporcionalidad y w representa la última edad.

Más tarde, Gompertz (1825)[24] propone que la mortalidad después de cierta edad es modelada por una progresión geométrica que depende únicamente de la edad de los individuos. Obteniendo así, la ecuación de Gompertz que describe la tasa de mortalidad después de cierta edad, considerando α y β constantes que representan la velocidad de mortalidad de la población,

$$\mu_x = \alpha e^{\beta x}. \quad (3)$$

Posteriormente, Makeham (1980)[42] extiende el modelo propuesto por Gompertz incluyendo otros factores, como epidemias o accidentes, modelados por la constante

$\gamma > 0$. Obteniendo la ahora conocida ley de mortalidad de Gompertz–Makeham, descrita por la ecuación:

$$\mu_x = \gamma + \alpha e^{\beta x}. \quad (4)$$

Sin embargo, ninguno de estos modelos podía determinar la probabilidad de muerte para cualquier edad. Es hasta que Heligman y Pollard (1980)[29] logran encontrar una fórmula que describe la tasa de mortalidad australiana para todas las edades. Además, asumen que la mortalidad no depende únicamente de la edad de las personas. Y modelan la probabilidad de muerte q_x entre las edades x y $x+1$ con la ecuación:

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = A^{(x+\alpha)^\beta} + De^{-E[\log(x/F)]^2} + GH^x, \quad (5)$$

donde q_x es la probabilidad de que una persona de edad x muera en un año; $A^{(x+\alpha)^\beta}$ representa la mortalidad infantil, $De^{-E[\log(x/F)]^2}$ representa la mortalidad por accidentes y GH^x representa la mortalidad por envejecimiento.

1.1.3 Tablas de mortalidad en México

Huerta y Reynaud (2009)[30] señalan que la primera tabla de mortalidad usada en México, a principios del siglo XX, fue la *American Experience*, construida en 1868 por Sheppard Homans en Nueva York. Dicha tabla, aunque no correspondía a experiencia mexicana, fue utilizada en México para el cálculo de primas de seguros de vida, debido a que en nuestro país no existían estudios que permitieran construir una tabla de mortalidad con experiencia propia.

El Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI)[32], apunta que fue hasta 1895, durante el gobierno de Porfirio Díaz, que se realizó el primer censo en el país, sin embargo, solo contenía información sobre el número de habitantes de la república mexicana.

Huerta y Reynaud (2009)[30] mencionan también que en 1927, Alfredo Wulf y Sotero Prieto elaboraron la primera tabla de mortalidad con experiencia mexicana, sin embargo, ésta fue usada solo en *Seguros de Latinoamérica*, y no pudo ser usada por otras compañías debido a que no fue publicada.

Casi un siglo después de la llegada de la *American Experience*, en México se seguían utilizando tablas de mortalidad construidas con experiencia extranjera para cálculo de primas y reservas de seguros. Fue hasta que, en 1968, un grupo de actuarios, se vieron impulsados a crear una tabla con experiencia mexicana de los años 1962 a 1967.

Como esta tabla de mortalidad era la primera construida con experiencia mexicana comenzó a usarse un año antes de su presentación, la cual se dio durante el IV Congreso de Actuarios de la Asociación Mexicana de Actuarios (AMA) y se publicó con el nombre de *Experiencia Mexicana 62-67* en las memorias de ese congreso.

A inicios de los años noventa se publica la tabla *Experiencia Mexicana Individual (EM 82-89-I)* elaborada por Rosa María Alatorre y Mario López Domínguez en la Comisión Nacional Bancaria y de Seguros, la cual se utilizó durante diez años, hasta que, en 1999,

la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF), publica la tabla *Comisión Nacional de Seguros y Fianzas 2000 (CNSF 2000-I)* con experiencia de 1992 a 1998, para vida individual, creadas por Ana María Madrigal, Evangelina Martínez y Manuel Mendoza en la CNSF.

1.1.4 Tablas de mortalidad comúnmente usadas en la actualidad en México.

Actualmente algunas de tablas usadas se construyen tomando una cohorte ficticia y una población cerrada, (una población que no presenta ingresos; nacimientos o nuevas llegadas de personas, el único movimiento en este tipo de poblaciones usadas para diversos estudios es la muerte), evaluando las funciones que se detallarán en la Sección 1.3.3. Este método de construcción es común en análisis demográficos.

Otro de los métodos empleados en México en la construcción de tablas de mortalidad es suponer que la cantidad de defunciones por edad sigue una distribución binomial. Este método es usado por actuarios de la CNSF para el cálculo de la mortalidad para seguros de vida. O bien, existen tablas que ajustan la probabilidad de muerte a cada año, como la *Experiencia Mexicana de la Seguridad Social 2009 (EMSSA 09)* las cuales se detallan en la Sección 1.3.5, usadas, por ejemplo, para la valuación de pasivos laborales.

1.2 Leyes de mortalidad

A lo largo de la historia se han utilizado distintas formas de medir la mortalidad humana, esto se ha realizado obedeciendo diversas leyes de mortalidad, en los siguientes apartados describiremos algunas de ellas.

Motoyuki (2007)[44] menciona las hipótesis usadas por Moivre (1725)[43], Gompertz (1825)[24] y Makeham (1980)[42] para encontrar una expresión para el número de personas vivas (l_x) de edad x .

1.2.1 Ley de Moivre

Moivre (1725)[43] afirmaba que entre los 12 y 86 años la cantidad de personas vivas de edad x seguía una función lineal decreciente dada por $l_x = I - Bx$, donde I y B son constantes de magnitud.

Para obtener las constantes I y B adecuadas para calcular la población a cada año, se toma $x = 0$ y $l_0 = I$, es decir, I es la población inicial, y para encontrar B se debe igualar x a la edad en la que la población se extingue, por ejemplo, en el supuesto de que la población se reduce a 0 en la edad 100, entonces, $l_{100} = 0$, por lo que, $0 = I - 100B$, esto implica que $B = \frac{I}{100}$. Así, la expresión del número de personas vivas a edad x , (l_x) es:

$$l_x = l_0 - \frac{l_0}{100}x. \quad (6)$$

1.2.2 Ley de Gompertz

Gompertz (1825)[24] afirmaba que la mortalidad dependía de la edad del individuo y de un factor externo que afectaba a todos por igual, por lo que ésta seguía una progresión geométrica para periodos cortos de tiempo, modelada por:

$$\mu_x = Bc^x, \quad (7)$$

de donde obtiene que $l_x = kg^{c^x}$. Para el cálculo de las constantes k, g y c , se toman tres valores equidistantes de l_x ; (l_x, l_{x+t}, l_{x+2t}) , generando un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, de donde se obtiene el siguiente sistema:

$$\Delta \log l_x = c^x(c^t - 1) \log g \quad (8)$$

$$\Delta \log l_{x+t} = c^{x+t}(c^t - 1) \log g \quad (9)$$

Despejando $\log c$, se obtiene:

$$\log c = \frac{\log(\Delta \log l_{x+t}) - \log(\Delta \log l_x)}{t}, \quad (10)$$

usando antilogaritmos se encuentra el valor de c , el cual, se sustituye en las ecuaciones (8) y (9) para encontrar los valores de las constantes k y g .

1.2.3 Ley de Gompertz-Makeham

Makeham (1980)[42] consideraba que a pesar de que Gompertz había introducido la noción de que la mortalidad estaba influenciada por un factor externo, al calcular l_x bajo el método que Gompertz propuso, no tomaba en cuenta ese factor, por lo que, Makeham afirma que, al incluir la influencia externa A sobre la mortalidad, ésta puede modelarse por:

$$\mu_x = A + Bc^x, \quad (11)$$

de donde se obtiene que $l_x = ks^x g^{c^x}$.

Tomando ${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$ y tres valores equidistantes (l_x, l_{x+t}, l_{x+2t}) , se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas, despejando c^t , se tiene:

$$\frac{c^{x+t}(c^t - 1)^2 \log g}{c^x(c^t - 1)^2 \log g} = c^t, \quad (12)$$

usando antilogaritmos encuentra c y si se sustituye en cualquiera de las ecuaciones se encontrarán los valores de g, k y s .

Todos estos modelos utilizan constantes, $A, B, c, k, g, etc.$ como parámetros de localización, para medir la velocidad de la mortalidad y para estimar el grado en que diversos factores influyen en la mortalidad.

1.3 Modelos para la medición de la mortalidad

1.3.1 Modelo de Heligman & Pollard

Heligman y Pollard (1980)[29] proponen una fórmula que describe acertadamente las tasas de mortalidad para todas las edades,

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = A(x+\alpha)^\beta + De^{-E[\log(x/F)]^2} + GH^x, \quad (13)$$

donde A representa el nivel de la mortalidad infantil, β representa la caída de la mortalidad infantil y α es un parámetro constante de localización, D representa la severidad de accidentes que afectan la mortalidad, E y F representan la dispersión y localización de dichos accidentes. Adicionalmente, G y H representan el nivel de incremento en la mortalidad en edades avanzadas debido al envejecimiento.

1.3.2 Método de Coale & Kisker

Coale y Kisker (1990)[14] proponen un método que ha sido aplicado a los datos de mortalidad de países desarrollados, suponiendo que las tasas de mortalidad aumentan con una tasa de disminución lineal, ellos definen:

$$k(x) = k(x - 1) - R \quad (14)$$

donde $k(x) = \ln\left(\frac{m_x}{m_{x-1}}\right)$, R es la constante de disminución y $x \geq y - 1$, con y la edad inicial de la extrapolación. De donde puede despejarse la tasa de mortalidad m_x .

Extendiendo la fórmula hasta w se tiene:

$$\sum_{x=y}^w k(x) = w - (y - 1)k(y - 1) - R \sum_{i=1}^{w-(y-1)} i. \quad (15)$$

Se resuelve la ecuación para R , asumiendo que $m_w = 1$ para hombres, es decir, la población masculina se extingue a la edad w . Mientras que $m_w = 0.8$ para mujeres, con el fin de evitar un cruce de la mortalidad para hombres y mujeres a la edad w . Con lo que se obtiene la constante R que define el decremento en la tasa de mortalidad.

1.3.3 Tabla de vida

El método actuarial (demográfico) más común para construir tablas de mortalidad consiste en considerar una cohorte ficticia y evaluar las siguientes funciones para cada edad x . Este método hace uso de las funciones que se describen a continuación.

m_x := tasa bruta de mortalidad calculada mediante las defunciones de edad x dividido por la población de la misma edad. Tanto las defunciones como la población a cada una de las edades corresponden a valores observados realmente. La tasa bruta de mortalidad se calcula mediante la fórmula:

$$m_x = \frac{D_x}{P_x}, \quad (16)$$

donde D_x corresponde a las defunciones a edad x y P_x corresponde a la población de edad x .

${}_nq_x$: = probabilidad de que una persona de edad x fallezca antes de llegar a la edad $x + n$,

$${}_nq_x = \frac{{}_n m_x}{1 + n(1 - {}_n a_x) m_x} \quad (17)$$

con $a_0 = .1$, ${}_4a_1 = .4$ y ${}_n a_x = 1/2$ para $n \geq 5$.

O bien,

$${}_nq_x = \frac{2n * nm_x}{2 + (n * nm_x)}. \quad (18)$$

De esta forma se obtiene la probabilidad de muerte q_x .

l_0 : = población inicial. Se elige arbitrariamente, sin embargo, generalmente es un múltiplo de 10.

${}_n d_x$: = número de defunciones estimadas entre las edades x y $x + n$,

$${}_n d_x = l_x * {}_n q_x. \quad (19)$$

l_x : = personas vivas estimadas a edad exacta x . Para $x \in \{1, \dots, w - 1\}$ con w la edad máxima en la tabla,

$$l_{x+1} = l_x - d_x. \quad (20)$$

l_w := población de edad w , (población final), siendo w la última edad representada en la tabla y en la que se asume que la población se extingue, por lo que $l_w = 0$.

${}_n p_x$: = probabilidad de que una persona llegue con vida de la edad x a edad $x + n$. Dicho de otra forma, es la probabilidad de que una persona de edad x no fallezca dentro de los siguientes n años,

$${}_n p_x = 1 - {}_n q_x. \quad (21)$$

L_x := años persona vividos o población estacionaria de la tabla de vida, representa el tiempo total que vive la generación entre las edades x y $x + n$,

$${}_n L_x = n({}_n l_{x+n} + {}_n a_x * {}_n d_x) \quad (22)$$

con $a_0 = .1$, ${}_4a_1 = .4$ y ${}_n a_x = 1/2$ para $n \geq 5$.

O bien,

$${}_nL_x = n \left(\frac{l_{x+n} + l_x}{2} \right), \quad (23)$$

$$L_w = \frac{l_w}{m_w}. \quad (24)$$

T_x := tiempo vivido, representa el tiempo total que le resta por vivir a la generación,

$$T_x = \sum_{i=x}^{w-1} nL_i, \quad (25)$$

$$T_w = L_w. \quad (26)$$

e_x := esperanza de vida a edad x , representa el tiempo que se espera que viva una persona de edad x ,

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}. \quad (27)$$

Una de las ventajas de este método es que adicionalmente permite estimar la esperanza de vida restante de un individuo a cualquier edad.

1.3.4 Modelo Logit

Vargas (2014)[58] señala que, suponiendo que las defunciones son homogéneas e independientes, el ajuste de la mortalidad utilizando el modelo logit (modelo de probabilidades no lineales) se rige por:

1. El número de muertes a edad x , (d_x), sigue una distribución binomial de parámetro q_x ,

$$d_x \sim \text{Bin}(E_x, q_x). \quad (28)$$

De donde se tiene que:

$E_x^* = \sum_{i=1}^n E_{x_i}$ con n el total de muestras, es decir, E_x^* es el total de expuestos o tamaño de la población.

$d_x^* = \sum_{i=1}^n d_{x_i}$ el total de fallecimientos.

$q_x^* = \frac{d_x^*}{E_x^*}$ probabilidad de muerte esperada.

De las probabilidades de fallecimiento se obtiene el índice "odds" = $\frac{q_x}{1-q_x}$.

2. El índice "odds" toma los posibles valores:
 - a) $\frac{q_x}{1-q_x} = 1$, es decir, la probabilidad de muerte o supervivencia tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

- b) $\frac{q_x}{1-q_x} < 1$, es decir, la probabilidad de morir es menor que la probabilidad de sobrevivir.
- c) $\frac{q_x}{1-q_x} > 1$, es decir, la probabilidad de morir es mayor a la probabilidad de sobrevivir.
3. Se toman logaritmos del índice "odds" para calcular el valor de la función logit

$$\text{logit}(q_x) = \ln\left(\frac{q_x}{1-q_x}\right). \quad (29)$$

4. Se usa la transformación inversa a la función logit para regresar los valores probabilísticos a su estado natural y obtener la tasa de mortalidad.
- 5.

$$e^{\text{logit}(q_x)} = \left(\frac{q_x}{1-q_x}\right), \quad (30)$$

$$q_x = \frac{e^{\text{logit}(q_x)}}{1 + e^{\text{logit}(q_x)}}. \quad (31)$$

1.3.5 Tablas con ajuste anual

Existen tablas de mortalidad como la Experiencia Demográfica de Mortalidad de la Seguridad Social para Activos 2009 (EMSSA 09) que ajustan la probabilidad de muerte cada año mediante proyecciones. La EMSSA 09 cuenta con una tabla de mortalidad base y una tabla que contiene los factores de mejora, los cuales dan la magnitud de la disminución de la mortalidad.

El método que utiliza la EMSSA 09 se basa en seguir la fórmula:

$$q_x^{A+t} = q_x^A (1 - TM_x)^t. \quad (32)$$

Donde:

q_x^{A+t} := probabilidad de muerte entre las edades x y $x + 1$ proyectada con la mejora de la mortalidad del año $A + t$, con $t = 0, 1, 2, \dots$.

q_x^A := valor correspondiente de la tabla de mortalidad base.

TM_x := factor de mejora.

t := número de años desde el año base hasta el año de proyección.

A := año base, para este caso 2009.

Con esto se tiene que la probabilidad de muerte disminuye a cada año. Estas tablas, así como el método fueron publicados por la Secretaría de Gobernación en el Diario Oficial de la Federación en el año 2009. SEGOB (2009)[52].

A lo largo del capítulo se hizo un recorrido a través de la historia respecto a la forma de medir la mortalidad, usualmente se atribuye el inicio de las tablas de vida a Halley (1693)[26], sin embargo, como se recapituló existen numerosas investigaciones anteriores que sirvieron de base para el desarrollo de la primera tabla de vida.

También se percibió que con el paso del tiempo surgen diversos métodos con el objetivo de hacer ajustes más aproximados a la realidad, con el objetivo de lograr apegarse a la mortalidad humana que evidentemente no ha sido la misma a través del tiempo pues está influenciada por diversos factores móviles.

Capítulo 2. Bases teóricas

En este capítulo se presentan algunas definiciones y propiedades relevantes para comprender el método desarrollado por Esparza y Baltazar (2018)[19], el cual, durante el desarrollo del presente trabajo será aplicado a la información de la población mexicana.

Se iniciará con los conceptos básicos que permitirán entender los procesos de saltos de Markov, los cuales son fundamentales para adentrarse en las distribuciones tipo fase. Posteriormente se definirán conceptos estadísticos asociados a los estimadores de una distribución.

Finalmente, se describirán los conceptos fuera del ámbito matemático que permiten modificar la forma de tasar la mortalidad.

2.1 Procesos estocásticos

Primero se definirá que es un proceso estocástico, ya que conocer este concepto es fundamental para incorporarlo en el modelo de la supervivencia de un individuo.

Definición 2.1.1 Proceso estocástico

Dado el conjunto T un espacio parametral y el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, se define un *proceso estocástico* $X = \{X_t\}_{t \in T}$, como una función de dos variables, $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con valores en el espacio de estados E , donde:

1. $X_t = X(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria para todo elemento t del conjunto T .
2. $X(\cdot, \omega) : T \rightarrow \mathbb{R}$ es una trayectoria del proceso para todo ω en el espacio muestral Ω .

Si el espacio parametral T es un conjunto discreto entonces se dice que es un *proceso estocástico a tiempo discreto*, comúnmente denotado por $X = \{X_n\}_{n \in T}$. Sin embargo, si el espacio parametral es un conjunto continuo se trata de un *proceso estocástico a tiempo continuo*, usualmente denotado por $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$.

Un proceso estocástico puede interpretarse como la evolución a través del tiempo de algún fenómeno que se rige por el azar.

Al conjunto E de todos los posibles valores que puede tomar el proceso estocástico se le conoce como *espacio de estados*. El conjunto E puede ser un conjunto numerable (discreto) o un conjunto no numerable (continuo). Cuando se tiene un proceso estocástico X con un conjunto de estados finito entonces puede asociarse cada uno de los estados con un número natural y escribirse de la forma $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Características de los procesos estocásticos

A continuación, se enunciarán algunas características importantes de un proceso estocástico.

- a) Se dice que un proceso estocástico es un proceso con *incrementos independientes* si, dado el proceso $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, cualesquiera variables aleatorias $X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$, con $j = 1, \dots, k - 1$, son independientes, para cualquier combinación de tiempos $t_0 < \dots < t_k < t_{k+1}$ en T .
- b) Se dice que un proceso estocástico es un proceso *estacionario* si, dado el proceso $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, para cualesquiera tiempos $t_0 < \dots < t_k$ en T , para $s > 0$, $(X_{t_0+s}, \dots, X_{t_k+s})$ tiene la misma distribución que $(X_{t_0}, \dots, X_{t_k})$.

Definición 2.1.2 Proceso de Markov

Se dice que un proceso estocástico a tiempo continuo es un Proceso de Markov si cumple la propiedad de Markov, es decir, si para cualesquiera tiempos $t_0 < \dots < t_k < t_{k+1}$ y para cualquier subconjunto \mathcal{B} del espacio de estados E se cumple:

$$\mathbb{P}(X_{t_{k+1}} \in \mathcal{B} | X_{t_k}, \dots, X_{t_0} \in \mathcal{B}) = \mathbb{P}(X_{t_{k+1}} \in \mathcal{B} | X_{t_k} \in \mathcal{B}). \quad (33)$$

Un proceso de Markov puede verse como un proceso estocástico en el que, conocer la historia completa del proceso, no aporta más información que conocer solo el último valor.

Definición 2.1.3 Probabilidad de transición

Dado un proceso estocástico a tiempo continuo $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, con espacio de estados E numerable y dados los tiempos $s \geq 0$ y $t > 0$, la probabilidad de ir del estado i al estado j en un tiempo t ,

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_{s+t} = j | X_s = i), \quad (34)$$

con $i, j \in E$, es llamada *probabilidad de transición*.

Para $t = 0$, se define:

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (35)$$

Las probabilidades de transición cumplen las siguientes condiciones:

1. $p_{ij}(t) \geq 0$, para todos los estados i, j en el espacio de estados.
2. $p_{ii}(t) = 0$.
3. $\sum_j p_{ij}(t) = 1$ si el espacio de estados es finito.

Definición 2.1.4 Matriz de transición

Si el espacio de estados E es numerable, $E = \{1, 2, \dots\}$, entonces a la matriz que contiene las probabilidades de transición al tiempo t , sobre todo el espacio de estados, se le denomina *matriz de transición*, y se denota:

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Definición 2.1.5 Proceso de saltos

Dado un proceso estocástico a tiempo continuo $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, que inicia en el estado i al tiempo 0, el proceso permanece en ese estado un tiempo aleatorio T_1 , y salta a un nuevo estado j distinto de i , y permanece un tiempo aleatorio T_2 , posteriormente pasa a un nuevo estado k , distinto al anterior y permanece ahí un tiempo aleatorio T_3 , y así sucesivamente. A los tiempos aleatorios T_i , donde el proceso permanece en un cierto estado se les conoce como *tiempos de estancia*, y los momentos en los cuales el proceso cambia de estado (brinca a otro estado) son los tiempos W_n con $W_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$, con $n \geq 1$. Un proceso de este tipo es conocido como *proceso de saltos*.

Definición 2.1.6 Distribución inicial

Se dice que el vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, es la *distribución inicial* del proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$ con espacio de estados finito $E = \{1, \dots, n\}$, si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, donde:

$$\alpha_i = \mathbb{P}(X_0 = i). \quad (37)$$

El vector α refiere la probabilidad de iniciar en cada uno de los n estados.

2.2 Procesos de saltos de Markov

Definición 2.2.1 Proceso de saltos de Markov

Un proceso de saltos que cumple la propiedad de Markov, ecuación (33), es llamado *proceso de saltos de Markov* y cumplirá también que los tiempos de estancia en los estados no absorbentes siguen una distribución exponencial.

Así, el tiempo de estancia T_i en un estado i no absorbente se distribuye exponencial de parámetro λ_i , con $\lambda_i > 0$. Cuando el $T_i = \infty$, puede considerarse que $\lambda_i = 0$, correspondiendo a un estado *absorbente*. Si $0 < \lambda_i < \infty$, entonces i es un estado *estable o transitorio*.

De igual forma, si en un proceso de saltos, los tiempos de estancia siguen una distribución exponencial, entonces el proceso cumplirá la propiedad de Markov. De esta manera, es más sencillo identificar a un proceso de saltos de Markov.

Un proceso de saltos de Markov puede especificarse por tres parámetros; una distribución inicial, los parámetros λ_i que rigen los tiempos de estancia en cada estado y las probabilidades de saltos entre estados p_{ij} .

Propiedades del proceso de saltos de Markov

Dado el proceso de saltos de Markov $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, con espacio de estados E finito, $E = \{1, \dots, n\}$, algunas de las propiedades del proceso se enuncian a continuación:

a) $\sum_j p_{ij}(t) = 1$.

- b) La colección de matrices formada por las matrices de transición $\{P_t\}_{t \geq 0}$, forma un semigrupo de transición, es decir, cumple:
- $P(0) = I$, con I la matriz identidad.
 - $P(t)$ es una matriz estocástica, es decir, si $P(t)$ es una matriz cuadrada, cuyas entradas son no negativas y la suma por renglones de todas sus entradas es igual a 1.
 - Cumple la ecuación de Chapman-Kolmogorov, es decir, para cualesquiera tiempos $t \geq 0, s \geq 0$ se cumple que $P(t + s) = P(t)P(s)$.
- c) X_t sigue la misma distribución que X_0 , para todo $t > 0$.
- d) Si $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ está en el estado i al tiempo $t \geq 0$, entonces existe λ_i independiente de t , tal que el tiempo de estancia T_i sigue una distribución exponencial de parámetro λ_i .
- e) Si el tiempo del k -ésimo salto $W_k < \infty$ y $X_{W_k} = i$, entonces las variables aleatorias $X_{W_{k+1}}$ y T_{k+1} son independientes.

Para la demostración de las propiedades ver Baltazar (2011)[3].

Definición 2.2.2 Generador infinitesimal asociado a un proceso de saltos de Markov

Dado un proceso de saltos de Markov, que al tiempo t se encuentra en el estado i , en el intervalo de tiempo $(t, t + h)$, para h pequeña, pueden pasar dos cosas con el proceso:

1. Al tiempo $t + h$ el proceso puede seguir en el mismo estado i , lo cual puede pasar con probabilidad $p_{ii}(h) + o(h)$, asociando $o(h)$ a la posibilidad de que el proceso se mueva a otro estado y regrese al estado i durante el tiempo h .
2. Al tiempo $t + h$ el proceso se mueve del estado i al estado j con probabilidad $p_{ij}(h) + o(h)$, asociando $o(h)$ a la posibilidad de que el proceso se mueva a uno o más estados antes de llegar a j .

Cuando el tiempo h es tan pequeño, que tiende a cero, se obtienen los límites:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = \lambda_i, \tag{38}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{ij}(h)}{h} = \lambda_{ij} \text{ con } i \neq j. \tag{39}$$

Los límites de las ecuaciones (38) y (39) existen y definen el generador infinitesimal, con $0 \leq \lambda_{ij} < \infty$ y $0 \leq \lambda_i < \infty$. Además, $\lambda_i = \sum_{i \neq j} \lambda_{ij}$. Para la demostración de esta afirmación ver Karlin y Taylor (1975)[36] citado por Baltazar (2011)[3].

Si el proceso de saltos de Markov tiene un espacio de estados finito y numerable con $n + 1$ elementos, tomando la matriz cuadrada de dimensión $n + 1$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n+1} \\ \lambda_{21} & -\lambda_2 & \dots & \lambda_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{(n+1)1} & \lambda_{(n+1)2} & \dots & -\lambda_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

y tomando $P(t) = \exp(tQ)$, con $\exp(\cdot)$ la función exponencial matricial.

Si todas las entradas fuera de la diagonal de Λ son no negativas y la suma por renglones de Λ es cero, entonces Λ genera el proceso de Markov $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, por lo que Λ es llamado *generador infinitesimal*. Además, el conjunto de todos los generadores del proceso con respecto a la dimensión n puede expresarse como:

$$\{\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \mid \lambda_{ij} \geq 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } \lambda_i = \sum_{i \neq j} \lambda_{ij}\}. \quad (41)$$

Es primordial mencionar que si el proceso de saltos de Markov está en el estado i al tiempo t , entonces, el tiempo de estancia en el estado i sigue una distribución exponencial de parámetro λ_i . Para su demostración ver Baltazar (2011)[3].

2.3 Distribuciones tipo fase

A continuación, se definirán las distribuciones tipo fase, concepto principal en el desarrollo de este trabajo. Para definir una distribución tipo fase es necesario definir antes algunos conceptos.

Definición 2.3.1 Matriz de intensidad asociada a un proceso de saltos de Markov

Bladt y Nielsen (2017)[9] definen que si se considera $\{X_t\}_{t \in T}$ un proceso de saltos de Markov, con espacio de estados finito $E = \{1, \dots, n, n+1\}$, donde los primeros n estados son estados transitorios y $n+1$, es el único estado absorbente. El proceso tiene una *matriz de intensidad o generador infinitesimal* de la forma:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} Q & r \\ \bar{0} & 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

La matriz de intensidad Λ cumple ciertas características:

1. La suma por renglones es igual a cero.
2. $r = -Qe$

Donde e es un vector columna de dimensión n , con todas sus entradas iguales a 1 y r es el vector de salidas el cual contiene las tasas con las que los procesos pasan directamente de cada uno de los estados al estado absorbente.

El *generador infinitesimal* de un proceso de saltos de Markov también puede ser llamado *matriz de intensidad* del proceso.

Definición 2.3.2 Matriz de subintensidad asociada a un proceso de saltos de Markov

Bladt y Nielsen (2017)[9] señalan que si se considera $\{X_t\}_{t \in T}$ un proceso de saltos de Markov, con espacio de estados finito $E = \{1, \dots, n, n+1\}$, donde los primeros n

estados $\{1, \dots, n\}$ son estados transitorios y $n + 1$, es el único estado absorbente. La matriz Q es la matriz de dimensión $n \times n$ que contiene las probabilidades de pasar del estado i al estado j , con $i, j \in \{1, \dots, n\}$, dicha matriz es llamada *matriz de subintensidad* del proceso.

Definición 2.3.3 Matriz de transición asociada a un proceso de saltos de Markov

Si se tiene un proceso de saltos de Markov $\{X_t\}_{t \in T}$, con las características mencionadas en la Definición 2.3.1. La *matriz de transición* de probabilidades del proceso para el tiempo $t > 0$, está dada por:

$$P(t) = \exp(tQ) = \begin{pmatrix} \exp(tQ) & e - \exp(tQ)e \\ \bar{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

donde la entrada $p_{ij}(t)$ representa la probabilidad de transitar del estado i al estado j en el intervalo de tiempo t y e es el vector de entradas 1. $P(t)$ es una matriz estocástica, es decir, la suma de los elementos de la matriz, por renglones es igual a 1.

Definición 2.3.4 Distribución tipo fase

Bladt y Nielsen (2017)[9] apuntan que teniendo $\{X_t\}_{t \in T}$ un proceso de saltos de Markov, con espacio de estados finito y numerable $E = \{1, \dots, n, n + 1\}$, donde los primeros n estados son estados transitorios y $n + 1$, es el único estado absorbente, y teniendo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, la distribución inicial del proceso, tal que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, entonces, la *distribución tipo fase* τ se define como:

$$\tau = \inf\{t > 0 | X_t = n + 1\}. \quad (44)$$

La variable aleatoria τ modela el tiempo que tarda el proceso en caer en el estado absorbente $n + 1$. Es decir, τ modela el tiempo transcurrido desde el inicio del proceso hasta la absorción de este, coloquialmente es el primer momento en el que el proceso X_t llega al estado absorbente.

Generalmente, las *distribuciones tipo fase* se denotan por:

$$\tau \sim PH(\alpha, Q), \quad (45)$$

donde α es la distribución inicial y Q es la matriz de subintensidad del proceso de saltos de Markov.

Propiedades de las distribuciones tipo fase

Algunas de las propiedades de las distribuciones tipo fase son:

- La función de supervivencia de τ está dada por $\mathbb{P}(\tau > t) = \alpha \exp(tQ) e$, para todo $t \geq 0$. Donde e es el vector de dimensión n con todas sus entradas iguales a 1.
- La función de densidad de τ está dada por $f_\tau(t) = \alpha \exp(tQ) r$, para todo $t \geq 0$. Donde r es el vector de salidas, el cual contiene las tasas con las cuales el proceso pasa del estado i directamente al estado absorbente.
- El i -ésimo momento de τ está dado por: $\mathbb{E}(\tau^i) = i! (-1)^i \alpha (Q^{-1}) e$.

Ver Bladt (2005)[8] para las demostraciones de estas propiedades.

2.4 Estadística e inferencia

Se hará mención de algunos conceptos estadísticos relevantes para la comprensión de los estimadores usados en el método impulsado por Esparza y Baltazar (2018)[19], el cual se expondrá en el siguiente capítulo.

Definición 2.4.1 Población

Rincón (2019)[48] define a una *población* como un conjunto de personas, objetos o eventos de los cuales se está interesado en estudiar algún fenómeno o alguna de sus características. En este trabajo, la población será un conjunto de personas al que se le seguirá el proceso de envejecimiento, interesándose especialmente en el momento de la muerte. Se tomarán los datos históricos de la población mexicana en el periodo entre 2000 y 2015.

Definición 2.4.2 Función de supervivencia

La *función de supervivencia* $s(x)$, corresponde a la probabilidad de que una variable aleatoria X alcance o pase cierto valor x , así, $s(x) = \mathbb{P}(X \geq x) = 1 - F_X(x)$, siendo F_X la función de distribución de la variable aleatoria X .

Definición 2.4.3 Estadística suficiente

Se dice que una estadística es una *estadística suficiente* si dado un valor de la estadística, la muestra no contiene más información sobre el parámetro de interés que la información contenida en la estadística.

Definición 2.4.4 Función de verosimilitud

Rincón (2019)[48] define a la *función de verosimilitud* de un vector de variables aleatorias (X_1, X_2, \dots, X_n) cuya distribución depende del parámetro θ , se define como la función de densidad conjunta, $L(\theta) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n, \theta)$, donde los valores x_1, \dots, x_n son constantes y la función depende de θ , la cual puede tomar valores en el conjunto continuo del espacio parametral si la función de densidad es continua.

Definición 2.4.5 Estimador máximo verosímil

El método de máxima verosimilitud consiste en encontrar el valor de θ que maximiza la función $L(\theta)$. De esta manera, al valor estimado de θ , denotado por $\hat{\theta}$, que hace que el valor de $L(\theta) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n, \theta)$ sea máximo se le conoce como el *estimador máximo verosímil de θ* .

Definición 2.4.6 Estimador máximo verosímil para distribuciones tipo fase

Considere que se tienen M procesos de saltos de Markov $\{X_t\}_{t \geq 0}$, con espacio de estados $E = \{1, \dots, n, n+1\}$ con el estado $n+1$ el único estado absorbente y generador infinitesimal Λ , cuya trayectoria y tiempos de estancia en el intervalo de tiempo $[0, T]$ son completamente conocidos. Sin embargo, los parámetros que dan origen a dichos procesos son desconocidos, es posible estimarlos usando inferencia estadística.

Sabiendo que el tiempo transcurrido hasta que cada proceso cae en el estado absorbente sigue una distribución tipo fase, es posible estimar los parámetros de la distribución mediante el método de máxima verosimilitud.

Debido a que es posible parametrizar el proceso en términos de los elementos λ_{ij} de la matriz de intensidad, o bien, a través de las intensidades λ_i junto con las probabilidades de transición p_{ij} pues las probabilidades λ_{ij} están dadas por $\lambda_i p_{ij}$.

Dado $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}_{i,j \in E}$ la notación para la matriz de intensidad del proceso, se dice que $\lambda_i = -\lambda_{ii}$ es la intensidad de la distribución exponencial de los tiempos de estancia.

Teniendo M trayectorias y conociendo $x = \{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$, la observación completa del proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$ en el intervalo de tiempo $[0, T]$. Esparza y Baltazar (2018)[19] citan a Billingsley (1961)[6], Jacobsen (1982)[34] y Kuchler y Sorensen (1997)[38] quienes señalan que la función de verosimilitud de (α, Λ) está dado por:

$$L_T(\alpha, \Lambda) = \prod_{i=1}^n \alpha_i^{B_i} \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq i}^n \lambda_{ij}^{N_{ij}(T)} e^{-\lambda_i Z_i(T)} \prod_{i=1}^n r_i^{N_i(T)}. \quad (46)$$

Donde:

B_i = el número de procesos que comienzan en i .

$N_{ij}(T) = \sum_{m=1}^M N_{ij}^m(T)$; el número de saltos del estado i al estado j en $[0, T]$, con $N_{ij}^m(T)$ = el número de saltos del estado i al estado j del m -ésimo proceso en $[0, T]$.

$N_i(T) = \sum_{m=1}^M N_i^m(T)$, con $N_i(T)$ el número de procesos que van del estado i al absorbente en el intervalo de tiempo $[0, T]$, donde:

$$N_i^m(T) = \begin{cases} 1 & \text{si el } m - \text{ésimo proceso pasa} \\ & \text{del estado } i \text{ al estado absorbente } n + 1 \text{ en } [0, T] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (47)$$

$Z_i(T) = \sum_{m=1}^M Z_i^m(T)$ = el tiempo total de estancia en el estado i , con $Z_i^m(T)$ = el tiempo de estancia en el estado i del m -ésimo proceso en el intervalo de tiempo $[0, T]$.

La expresión (46) puede escribirse como:

$$L_T(\alpha, \Lambda) = \prod_{i=1}^n \alpha_i^{B_i} \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq i}^n \lambda_{ij}^{N_{ij}(T)} e^{-\lambda_{ij} Z_i(T)} \prod_{i=1}^n r_i^{N_i(T)} e^{r_i Z_i(T)}. \quad (48)$$

De donde se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned}
l_T(\alpha, \Lambda) = & \sum_{i=1}^n B_i \log(\alpha_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n N_{ij}(T) \log(\lambda_{ij}) - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \lambda_{ij} Z_i(T) \\
& + \sum_{i=1}^n N_i(T) \log(r_i) - \sum_{i=1}^n r_i Z_i(T).
\end{aligned} \tag{49}$$

Por lo que al maximizar $l_T(\alpha, \Lambda)$ se obtienen los estimadores máximo-verosímiles de (α, Λ) , los cuales están dados en función de las estadísticas suficientes B_i, N_{ij}, N_i y Z_i y corresponden a:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{B_i}{M}, \tag{50}$$

$$\hat{\lambda}_{ij} = \frac{N_{ij}(T)}{Z_i(T)}, \tag{51}$$

$$\hat{r}_i = \frac{N_i(T)}{Z_i(T)}. \tag{52}$$

Ejemplo: Considérese que se tiene el proceso de saltos de Markov $\{X_t\}_{t \geq 0}$, cuyo espacio de estados es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, supóngase que el proceso tiene un único estado absorbente y es el estado 6, mientras que el resto de los estados son transitorios. Considere también que la distribución inicial del proceso es $\alpha = (1, 0, 0, 0, 0)$ y que la matriz de subintensidad asociada al generador del proceso es:

$$Q = \begin{pmatrix} -0.98 & 0.94 & 0.02 & 0.01 & 0.001 \\ 0 & -0.99 & 0.92 & 0.02 & 0.01 \\ 0 & 0 & -0.99 & 0.91 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & -0.97 & 0.90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.85 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$r = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.04 \\ 0.06 \\ 0.07 \\ 0.85 \end{pmatrix}$$

Se realizó la simulación de 5,000 trayectorias, de los cuales se registró cada uno de los saltos, tiempos de estancia y estados visitados en cada uno de los procesos en el intervalo de tiempo $[0, 1000]$. Supóngase ahora que los parámetros que dieron origen a los procesos eran desconocidos. Usando la Definición 2.4.6 es posible obtener el estimador máximo verosímil de los parámetros.

Entonces el estimador máximo verosímil de (α, Λ) es:

$$\hat{\alpha} = (1, 0, 0, 0, 0)$$

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} -0.97 & 0.93 & 0.01 & 0.01 & 0.001 \\ 0 & -0.97 & 0.91 & 0.02 & 0.01 \\ 0 & 0 & -0.99 & 0.92 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & -0.97 & 0.90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.84 \end{pmatrix}$$

Por lo que:

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.03 \\ 0.06 \\ 0.07 \\ 0.84 \end{pmatrix}$$

En la Tabla 1 se presenta el valor real del parámetro, el estimador máximo verosímil obtenido y el valor absoluto de la diferencia entre ambos valores.

Tabla 1. Variación del estimador máximo verosímil de la distribución tipo fase.

Parámetro	Valor real	Estimador máximo verosímil	Diferencia
λ_{12}	0.94	0.93	0.0075
λ_{13}	0.02	0.01	0.0025
λ_{14}	0.01	0.01	0.0022
λ_{15}	0.001	0.001	0.0000
λ_{23}	0.92	0.91	0.0109
λ_{24}	0.02	0.02	0.0020
λ_{25}	0.01	0.01	0.0002
λ_{34}	0.91	0.92	0.0051
λ_{35}	0.02	0.01	0.0016
λ_{45}	0.90	0.90	0.0013
r_1	0.02	0.02	0.0009
r_2	0.04	0.03	0.0068
r_3	0.06	0.06	0.0048
r_4	0.07	0.07	0.0029
r_5	0.85	0.84	0.0080

Fuente: elaboración propia.

Puede observarse que si bien $(\hat{\alpha}, \hat{\Lambda})$ no es exactamente igual a los parámetros (α, Λ) de la distribución tipo fase considerada inicialmente, puede considerarse que es una estimación cercana a los valores reales.

2.5 Envejecimiento y mortalidad

A continuación, se describirán los conceptos que no pertenecen al ámbito matemático que son importantes para el planteamiento de este proyecto ya que permiten modificar la forma de tasar las defunciones.

Definición 2.5.1 Edad cronológica

Considere para efectos de este trabajo, a la *edad cronológica* como el tiempo calendario que ha transcurrido en la vida de un ser humano desde su nacimiento hasta la fecha actual.

Si bien el tiempo transcurre de la misma manera para todos los individuos, generalmente las condiciones de vida no son las mismas para todos ellos. Es por esto por lo que, regularmente la edad cronológica no coincide con la magnitud del deterioro de los órganos de un individuo. En ocasiones, para modelar el envejecimiento es conveniente utilizar la edad fisiológica, la cual es una forma de medir este deterioro.

Definición 2.5.2 Edad fisiológica

Knowles (2011)[37] definen a la *edad fisiológica* como un “índice relativo de salud que representa el grado de envejecimiento de un individuo”, así mismo, puede verse como una “estimación biológicamente significativa del envejecimiento sistemático” de un individuo, por lo que “se esperaría que fuera un mejor predictor de envejecimiento que la edad cronológica”.

Definición 2.5.3 Proceso de envejecimiento

Generalmente, las capacidades psicológicas y motrices de los individuos se deterioran con el paso del tiempo, lo cual va de la mano con una disminución en las funciones de los órganos, a este proceso natural, inevitable y hasta ahora irreversible podemos denominarlo proceso de envejecimiento.

Jones (1956)[35] define el *proceso de envejecimiento* como “la progresiva, y esencialmente irreversible disminución con el paso del tiempo de las habilidades de un organismo o una de sus partes para adaptarse a su entorno, manifestando una disminución en sus capacidades para soportar el estrés al que está sometido y culminar en la muerte del organismo”.

Utilizando la definición de Jones, se define al *proceso de envejecimiento* como la disminución progresiva de las habilidades de una persona para adaptarse a su entorno, disminuyendo también su capacidad para soportar el estrés al que está sometido, derivando irremediablemente en la muerte del individuo.

Definición 2.5.4 Probabilidad de muerte

Medida en el intervalo $[0,1]$ asociada a la posibilidad de que la vida de una persona termine. También puede encontrarse expresada en porcentaje, entre 0% y 100%.

Definición 2.5.5 Tabla de mortalidad

Una *tabla de mortalidad* es una tabla en la que se muestran las probabilidades de muerte (generalmente por edad) de los individuos pertenecientes a una población en específico y en un periodo de tiempo determinado.

Huerta y Reynaud (2009)[30] señalan que, para comprender la noción de una tabla de mortalidad, “el elemento clave es, como se ve, la noción de probabilidades de fallecimiento o sobrevivencia de un individuo en función de su edad, este parámetro se resume, generalmente, en lo que llamamos una tabla de mortalidad”, recopilando de forma adecuada el principio básico para la construcción de una tabla de mortalidad.

Definición 2.5.6 Factores que influyen en la mortalidad

Como se ha vislumbrado a lo largo de la historia, la mortalidad de una persona depende de numerosos factores, uno de ellos y el de especial importancia es la edad, la cual está ligada directamente con el envejecimiento y la degradación física-funcional vinculada al envejecimiento.

En el proceso de envejecimiento están inmersos numerosos factores que actúan en conjunto para determinar el grado del deterioro. Uno de ellos y tal vez el de mayor influencia es el tiempo transcurrido, el cual está estrechamente asociado con la disminución de capacidades biológicas de un individuo.

Otros de los factores que afectan el curso del proceso de envejecimiento son la calidad de la salud o la nutrición del individuo.

Por esto, es interesante incluir aspectos que intervienen en la salud de las personas, como hábitos alimenticios, adicciones, sedentarismo, accidentes severos o enfermedades crónicas que afectan trascendentalmente la salud.

Otra de las causas de defunciones que resulta atractiva es la medición de los suicidios o intentos de suicidio, ya que, es un factor que en ocasiones puede detectarse antes de ser ejecutado. Es tal su importancia, que, por ejemplo, las compañías de seguros determinan un periodo de espera para hacer efectiva la cobertura por esta causa.

Números investigadores han planteado que la mortalidad de las personas está influenciada por una gran cantidad de causas, que influyen directa e indirectamente sobre ella. Estos factores pueden ser físicos, psicológicos, biológicos y/o sociales. Dichas causas usualmente se agrupan en causas endógenas y exógenas.

Las causas endógenas son propias del individuo y no son modificables, Cordero (1968)[16] estudia la subestimación de la mortalidad infantil en México y define a las causas endógenas como “la falta de viabilidad intrínseca para sobrevivir que proceden de la constitución del niño, sujeta a malformaciones eventuales y a las condiciones en las que se desarrollan tanto el embarazo como el parto”. Así mismo, Cordero (1968)[16] señala que los factores exógenos “abarcaban todos aquellos de procedencia extrínseca como las infecciones, las intoxicaciones alimenticias y los accidentes”.

Siguiendo lo anterior, se definen las *causas endógenas* como todos aquellos factores propios del individuo y fuera de su control que tienen una incidencia directa o indirecta en el envejecimiento y la mortalidad. Ejemplo de estos factores podrían considerarse la herencia genética que desencadenan ciertas enfermedades o bien factores congénitos.

De la misma manera, se definen las *causas exógenas* a todos los factores no endógenos que repercuten en la salud y por consiguiente en el envejecimiento y mortalidad. Como ejemplo de ellos es posible mencionar los hábitos de cada persona, el ambiente o condiciones de vida, los accidentes que puede sufrir un individuo, así como las enfermedades no congénitas que frecuentemente son derivadas de la actividad o hábitos personales. De esa forma, los factores exógenos son hasta cierto punto modificables o dependientes en cierto grado del individuo. Pues si bien no es posible evitar un accidente circunstancial, si es posible actuar para evitar en la medida de lo posible la Enfermedad Pulmonar Obstructiva Crónica (EPOC) por ejemplo evitando fumar.

Durante este capítulo se expusieron los conceptos más importantes que se necesitan conocer para entender el modelo desarrollado por Esparza y Baltazar (2018)[19]. En el que, basándose en los factores exógenos que participan en la degradación de las capacidades y habilidades de una persona para poder desarrollarse de manera satisfactoria y suficiente en su entorno modifican la forma de aproximar una tasa de mortalidad.

Capítulo 3. Ley de mortalidad tipo fase

Buscando la mejor estimación de la mortalidad humana han surgido grandes modelos matemáticos los cuales han cambiado a través del tiempo.

Algunos años atrás, Lin y Liu (2007)[39] propusieron el uso de distribuciones tipo fase para modelar la mortalidad humana. Su modelo utiliza la edad fisiológica como un índice de salud modelada con un proceso de Markov, que consideraba únicamente la posibilidad de transitar al estado siguiente con cierta probabilidad.

Esparza y Baltazar (2018)[19] extienden ese modelo y no solo consideran factores de riesgo endógenos en los individuos. Su modelo también considera factores exógenos como accidentes y enfermedades a los que una población está expuesta y que influyen en la posibilidad de morir, además considera hábitos alimenticios, cantidad de ejercicio realizado, entre otros. Con esto introducen la posibilidad de transitar a un estado posterior sin necesidad de pasar por todos los estados intermedios.

3.1 Modelo tipo Fase

La principal diferencia del modelo basado en distribuciones tipo fase con respecto a los modelos descritos en el Capítulo 1, consiste en el uso de procesos estocásticos para modelar la supervivencia de los individuos de una población, y, por consiguiente, la muerte de estos.

Suponiendo que la vida de una persona puede ser dividida en n edades fisiológicas y que la muerte es identificada con la edad $n+1$. Considerando también que el tiempo que permanece en cada edad es una variable aleatoria, se tienen elementos suficientes para modelar el proceso de envejecimiento de una población hipotética mediante un proceso estocástico.

Si se considera que el envejecimiento de un individuo puede ser modelado por un proceso de saltos de Markov en tiempo homogéneo, con espacio de estados finito $E = \{1, \dots, n, n+1\}$, con un solo estado absorbente, el estado $n+1$.

Entonces, es posible asociar al proceso de envejecimiento de un individuo a un proceso de saltos de Markov, asignando cada una de las n edades fisiológicas a cada uno de los elementos del espacio de estados E , y al estado $n+1$ con la muerte.

Con esto se puede decir que el momento de la muerte, representado por el tiempo τ , es equivalente al tiempo transcurrido desde el nacimiento hasta la muerte de un individuo de la población. Con esas características, se puede modelar el tiempo transcurrido desde el nacimiento de un individuo hasta la muerte de éste con una distribución tipo fase.

Suponiendo que una persona de edad fisiológica i , con $i \in \{1, \dots, n\}$ pasa un tiempo t en esa edad fisiológica, este tiempo t sigue una distribución exponencial de parámetro λ_i , con $0 < \lambda_i < \infty$.

Si $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ y transcurre un tiempo $t > 0$, existen cuatro posibles casos:

- La persona permanece en la edad i , con una intensidad en la transición dada por λ_i , la i -ésima entrada de la matriz de subintensidad del proceso.
- La persona presenta un envejecimiento natural, por lo que pasará de la edad i a la edad $i+1$, con una intensidad en la transición dada por $\lambda_{i,i+1}$, la entrada $i, i + 1$ de la matriz de subintensidad del proceso.
- El proceso de envejecimiento de la persona es afectado por un incidente inusual como un accidente o enfermedad que cause una disminución en las capacidades físicas o biológicas de la persona en cuestión. En este caso, la persona pasará de la edad i en la que se encontraba, a la edad j para algún $j \in \{i + 2, \dots, n\}$, con una intensidad en la transición dada por $\lambda_{i,j}$, la entrada i, j de la matriz de subintensidad del proceso.
- La persona muere a la edad i , es decir, pasará de la edad i , a la muerte con una intensidad en la transición r_i dada por la i -ésima entrada del vector de salidas.

Si $i = n$ el único caso posible es eventualmente pasar al estado $n + 1$, es decir, morir, esto sucederá con una intensidad de transición $\lambda_n = r_n$ dada por la n -ésima entrada del vector de salidas.

Entonces, la matriz de subintensidad de cada proceso tienen la forma:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{1n} \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{2n} \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \cdots & \lambda_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n \end{pmatrix}, \quad (53)$$

donde $\lambda_i = \sum_{j=i+1}^n \lambda_{ij} + r_i$ con $i = 1, \dots, n - 1$.

Así, cada una de las edades fisiológicas es representada por un estado en el espacio de estados del proceso y el envejecimiento de cada individuo es representado por el proceso de saltos de Markov. Entonces, el proceso de envejecimiento de cada persona es asociado al proceso $\{X_t^m\}_{t \geq 0}$, con $m \in \{1, \dots, M\}$, donde M es el tamaño de la población a considerar.

La distribución inicial es el vector α el cual contiene la probabilidad de iniciar en la edad i . Si $\alpha = \alpha_i$ con α_i el vector con todas sus entradas iguales a 0, excepto la i -ésima entrada, haciéndola igual a 1, se asume el proceso iniciará con probabilidad 1 en la edad fisiológica i .

El vector de salidas r es el vector columna que contiene las probabilidades de morir a cada una de las edades,

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Recordando la Definición 2.3.1, el vector de salidas puede obtenerse a partir de la matriz de subintensidad Q haciendo $r = -Qe$, con e el vector de dimensión n con todas las entradas iguales a 1.

Entonces, la probabilidad de muerte para cada una de las personas de edad fisiológica i pertenecientes a la población en el intervalo de tiempo $[0, t]$ está representada por $q_i(t)$, dada por:

$$q_i(t) = \mathbb{P}(\tau_i < t) = 1 - e_i \exp(tQ) e. \quad (55)$$

Donde e_i es el vector de la base canónica con la entrada $i = 1$, $\exp(\cdot)$ es la exponencial matricial de la matriz de subintensidad Q y el tiempo hasta la muerte τ_i se distribuye tipo fase, $\tau_i \sim PH(\alpha_i, Q)$.

3.2 Tipo de datos disponibles

Existen dos posibles casos en la recolección de datos, el primero de ellos, y el deseable para la aplicación de este método, que las observaciones del proceso de envejecimiento de la población en estudio se realicen en forma continua. También existe el caso en el que las observaciones del proceso de envejecimiento solo se tienen en determinados puntos del tiempo, es decir, teniendo solo observaciones discretas en ciertos momentos del proceso de saltos de Markov.

Se considera que todos los miembros de la población en estudio están expuestos a los mismos factores de riesgo y que el proceso de envejecimiento entre los individuos es independiente. Es decir, el envejecimiento de cualquiera de los miembros de la población no influye en el envejecimiento de ninguna de las demás personas de la población.

3.2.1 Datos de forma continua

Cuando las observaciones se realizan de forma continua, siguiendo a cada uno de los miembros de la población en estudio a cada instante, se pueden obtener exactamente cada uno de los procesos.

Tomando una población de tamaño M en el intervalo de tiempo $[0, T]$, cada proceso $\{X_t^m\}_{t \geq 0}$ con $m = 1, \dots, M$ es un proceso de saltos de Markov independiente, con el mismo espacio de estados finito $E = \{1, \dots, n, n + 1\}$, y la misma matriz de intensidad Λ . Así, cada proceso X^m representa a una persona de la población en cuestión.

Suponiendo que cada proceso X^m es observado continuamente en el tiempo es necesario encontrar la función de verosimilitud para el conjunto de observaciones a tiempo continuo.

3.2.2 Función de verosimilitud para el caso continuo

En el caso de tener observaciones a tiempo continuo, la Definición 2.4.6 describe la función de verosimilitud correspondiente a este caso.

3.2.3 Estimador máximo verosímil para el caso continuo

Entonces el estimador máximo verosímil de los parámetros del proceso está determinado por las ecuaciones (50), (51) y (52).

3.2.4 Datos de forma discreta

En el caso en el que las observaciones se tienen de forma discreta, es decir, solo se tiene información en determinados momentos del tiempo. Se puede decir que es una muestra

de datos con observaciones incompletas o faltantes de un caso en el que las observaciones se tienen a tiempo continuo.

Se puede suponer que las observaciones se tenían de forma continua y por alguna razón se han perdido, rescatando solo información en determinados puntos del tiempo. Por lo cual es necesario recurrir a algunas técnicas adicionales para estimar el generador infinitesimal del proceso para poder construir la probabilidad de muerte.

En este caso, es necesario hacer inferencia para encontrar la mejor estimación de los procesos basada en la muestra de observaciones. Para ello, es viable usar el algoritmo EM pues es útil cuando se tiene solo información parcial acerca del proceso, ya que es necesario encontrar una estimación para la función de log-verosimilitud para las observaciones discretas pues en este caso derivar la función de verosimilitud es bastante complicado.

Este caso no se abordará en este trabajo, para conocer a detalle acerca de él, consultar la investigación realizada por Esparza y Baltazar (2018)[19] en la que abordan satisfactoriamente este problema.

3.3 Probabilidad de muerte y esperanza de vida

Una vez que se ha calculado el estimador máximo verosímil de los parámetros de la distribución tipo fase que modela el proceso de envejecimiento de los individuos, es posible estimar la función de supervivencia, así como la tasa de mortalidad y por consiguiente la esperanza de vida.

3.3.1 Función de supervivencia bajo distribución tipo fase

A partir del estimador máximo verosímil del generador infinitesimal Λ , podemos obtener la función de supervivencia del proceso, esto es, podemos calcular la probabilidad con la cual el proceso superará cierto tiempo t , esto se hace calculando:

$$s(t) = \hat{\alpha} \exp(t\hat{Q}) e. \quad (56)$$

3.3.2 Probabilidad de muerte bajo el modelo de distribuciones tipo fase

Una vez que se obtiene el estimador máximo verosímil de Λ , la probabilidad de muerte de una persona de edad fisiológica i , con $i \in \{1, \dots, n\}$, en el intervalo de tiempo $[0, t]$, puede calcularse mediante:

$$q_i(t) = 1 - e_i \exp(t\hat{Q}) e. \quad (57)$$

donde e es el vector de longitud n con 1 en todas sus entradas, y e_i es el vector cuya única entrada distinta de cero es la i -ésima entrada, la cual toma el valor 1 y $\exp(\cdot)$ es la exponencial matricial del estimador de la subintensidad del proceso.

3.3.3 Esperanza de vida bajo la ley de mortalidad tipo fase

Además, podemos obtener la esperanza de vida de una persona suponiendo que su tiempo de vida se rige mediante una distribución tipo fase. Se obtiene calculando el primer momento de dicha distribución. Así, la esperanza de vida de una persona de edad i , en este trabajo denotada como E_i , será el resultado de:

$$e_i = -e_i(\hat{Q}^{-1})e, \quad (58)$$

donde e es el vector de longitud n con 1 en todas sus entradas, y e_i es el vector cuya única entrada distinta de cero es la i -ésima entrada, la cual toma el valor 1.

Durante el capítulo se expuso el método desarrollado por Esparza y Baltazar (2018)[19] el cual aplicaron a información de la población estadounidense. En el siguiente capítulo se probará que el modelo descrito en este capítulo para ajustar la tasa de defunciones de Estados Unidos no es exclusivo para dicha población.

En el capítulo siguiente se aplicará dicho procedimiento para ajustar la probabilidad de muerte de la población mexicana y evidenciar que el modelo de distribuciones tipo fase puede utilizarse para tasar las defunciones acontecidas en México.

Capítulo 4. Construcción de la tabla de mortalidad (México 2000 - 2015)

Durante este capítulo, se describirá el proceso que se siguió para construir la tabla de mortalidad para el caso específico de la población mexicana haciendo uso de la ley tipo fase descrita en el capítulo anterior.

Utilizando los datos disponibles en el periodo de tiempo comprendido entre 2000 y 2015, se construyó una estructura de edad fisiológica, considerando que cada mexicano puede ser ubicado en cada una de estas edades y que puede transitar entre ellas con cierta probabilidad.

Se considera una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados finito y un solo estado absorbente (la muerte) para modelar el proceso de envejecimiento. De esta forma, es posible modelar el tiempo que transcurre hasta que se presenta el fallecimiento a través de una distribución tipo fase.

Es esencial destacar que, durante este trabajo se considera únicamente el caso en el que se tienen las observaciones completas, es decir, los registros completos de los procesos a tiempo continuo.

4.1 Datos de la población mexicana

Para construir la tabla de mortalidad para la población mexicana que obedezca la ley tipo fase antes descrita, se tomaron datos del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), del Instituto Nacional de Salud Pública (INSP) y de la Secretaría de Salud correspondientes a los años 2000 a 2015.

Se utilizaron los registros de defunciones y egresos hospitalarios de la Secretaría de Salud, así como los datos de la Encuesta Nacional de Salud y Nutrición (ENSANUT) y la población registrada en los censos realizados por INEGI para la construcción de los índices que se describen a continuación.

Para el índice de muerte a edad i , denominada desde este momento como μ_i , las defunciones fueron prorrateadas mediante un prorrateo simple de aquellos cuya edad no fue especificada. Para la construcción del índice de incidentes que influyen de manera significativa en la mortalidad, desde este momento denominada γ_i , los egresos hospitalarios por grupo de edad fueron prorrateados en función de la población a cada edad.

Los datos de la población fueron obtenidos del INEGI, corresponden a datos recolectados en los años 2000 y 2010 mediante el Censo Nacional de Población y Vivienda 2000 y 2010, respectivamente. Se estimó la población para los años entre censos (2001 – 2009 y 2011 – 2015), considerando la tasa de crecimiento poblacional publicada por el mismo Instituto, presentadas en la Tabla 2. En los Anexos 3 y 4 se encuentran las fuentes de las cuales se tomaron los datos, así como los criterios considerados para clasificar los datos disponibles.

Tabla 2. Tasa de crecimiento poblacional.

Año	Tasa de crecimiento media anual de la población
2000	1.90%
2010	1.40%

Fuente: Elaboración propia con datos del INEGI, tasa de crecimiento media anual de la población por entidad federativa y periodo.

4.2 Primeros índices

Se tomaron 101 edades correspondientes a las edades 0, 1, ..., 99 años, las personas con edad a partir de 100 años se concentraron en el grupo de edad 100 y más. Con cada uno de estos grupos se construyeron los índices que serán descritos en esta sección.

4.2.1 Índice de mortalidad

Representa el promedio de la tasa bruta de mortalidad por edad de la población mexicana registrada en cada uno de los años comprendidos en el periodo de estudio 2000 a 2015.

$$\mu_i = \frac{\sum_{j=2000}^{2015} \mu_i(j)}{16}. \quad (59)$$

Donde:

$$\mu_i(j) = \frac{d_i(j)}{p_i(j)}, \quad (60)$$

con:

$d_i(j)$:= defunciones de edad i en el año j .

$p_i(j)$:= población de edad i en el año j .

4.2.2 Índice de incidentes

Las causas de egresos hospitalarios contenidas en las bases de datos abiertos de la Secretaría de Salud se clasificaron en 3 grandes grupos; intento de suicidio, accidentes y enfermedades. El anexo 4 se encuentran dichas clasificaciones. Con estos datos se calculó el índice de incidentes, representa la probabilidad promedio de que una persona de edad i sufra un incidente que merme de manera importante su salud.

$$\gamma_i = \frac{\sum_{j=2000}^{2015} \gamma_i(j)}{16}. \quad (61)$$

$\gamma_i(j)$ se calcula mediante:

$$\begin{aligned} \gamma_i(j) = \sum_{l=1}^3 \gamma_{il}(j) - \gamma_{i1}(j)\gamma_{i2}(j) - \gamma_{i1}(j)\gamma_{i3}(j) - \gamma_{i2}(j)\gamma_{i3}(j) \\ + \gamma_{i1}(j)\gamma_{i2}(j)\gamma_{i3}(j), \end{aligned} \quad (62)$$

donde:

$\gamma_{il}(j)$:= factor de incidente l en una persona de edad i en el año j .

con:

$$\gamma_{i1}(j) = \frac{su_i(j)}{T_i(j)}, \quad (63)$$

$$\gamma_{i2}(j) = \frac{ac_i(j)}{T_i(j)}, \quad (64)$$

$$\gamma_{i3}(j) = \frac{ef_i(j)}{T_i(j)}, \quad (65)$$

donde:

$su_i(j)$:= número de egresos hospitalarios por intento de suicidio (lesiones autoinfligidas) de edad i en el año j .

$ef_i(j)$:= número de egresos hospitalarios por enfermedades de edad i en el año j .

$ac_i(j)$:= número de egresos por accidentes de edad i en el año j .

$T_i(j)$:= tiempo vivido a edad i , representa el tiempo que le resta por vivir a la generación una vez alcanzada la edad i en el año j .

4.2.3 Índice de hábitos saludables

También, es necesario contar con el índice de personas de edad i que se considera tienen hábitos saludables, desde este momento denominado s_i . Según Loprinzi et al.(2016)[41] en la población estadounidense, este índice puede ser considerado el mismo valor para cada una de las edades. En su investigación se considera que una persona tiene un estilo de vida muy saludable si cumplen con las siguientes 4 características.

1. Realizan ejercicio moderado a vigoroso por más de 150 minutos semanales.
2. Tienen una puntuación superior al 40% en el índice de alimentación saludable.
3. Su porcentaje de grasa corporal es menor al 20% para los hombres y al 30% para las mujeres.
4. Sean personas no fumadoras.

Ellos concluyen que solo el 2.7% de los estadounidenses tiene hábitos considerados saludables, por lo que afirman que tomando $s_i = 0.027$ para cada una de las edades se reflejan de buena manera los hábitos de la población estadounidense.

Para la construcción del índice de personas saludables que será usado para el ajuste mexicano se consultó la ENSANUT realizada por el INSP y la Secretaría de Salud en el año 2012 (ENSANUT 2012). A pesar de que existen datos disponibles de la Encuesta Nacional de Salud 2000 (ENSA 2000) y la Encuesta Nacional de Salud y Nutrición 2006 (ENSANUT 2006) no se utilizaron los datos debido a que las encuestas se realizaron con cuestionarios diferentes que no son comparables.

Las categorías de la ENSANUT 2012 que fueron consideradas son:

1. Componente de Salud para obtener información sobre fumadores.

2. Componente de Nutrición (Bases Trabajadas) para obtener información sobre actividad física y antropometría.

Para cada edad se construyeron los índices correspondientes a personas no fumadoras, Índice de Masa Corporal (IMC) y personas sedentarias, sin embargo, para el desarrollo del índice correspondiente a alimentación saludable se vio manifestada una complicación.

Dicho inconveniente derivó de la escasa información disponible en México, además de la mala calidad de la información existente, pues el descriptor de variables del componente de alimentación de la ENSANUT 2012 no permitió conocer específicamente cada una de las variables ni la unidad de medida en que se registraron los alimentos que la población especificó consumir.

Derivado de los anterior, se tomó la decisión de no incluir el componente de alimentación saludable pues de intentar construir el índice con los datos disponibles se encontraría muy sesgado a las suposiciones que se deberían realizar a la información para trabajar los datos.

Al no contar con uno de los 4 puntos importantes en el método de Loprinzi et al.(2016)[41] para el desarrollo del índice de personas con hábitos saludables se recurrió a resultados de diversos investigadores cuyo trabajo se centró en comparar los hábitos de la población mexicana y estadounidense.

A partir de los datos de la ENSANUT y con los índices de actividad física, IMC y fumadores, así como con la información contenida en diversos artículos publicados en el periodo de estudio (2000-2015) relacionados a la nutrición, obesidad, adicciones y actividad física en México y Estados Unidos de América se construyó la siguiente tabla comparativa:

Tabla 3. Estilo de vida en México y en Estados Unidos.

Rubro	Estados Unidos de América	México
Fumadores	25%	28%
Actividad física	40%	43%
Sobrepeso	66% - 75%	60% - 70%
Obesidad	26% - 35%	34%
Sedentarismo	25%	23%

Fuente: Elaboración propia a partir de ENSANUT 2012 y otras fuentes incluidas en la bibliografía.

Es posible observar en la Tabla 3 que los principales factores que influyen para considerar un estilo de vida saludable en las personas residentes en Estados Unidos y en México es similar. Además, la alimentación de la población de Estados Unidos y de México, si bien no es la misma, ambas incluyen en grandes porciones alimentos procesados y altamente azucarados, así como carnes y grasas.

Derivado de lo anterior, y de la falta de información disponible en México referente a los hábitos alimenticios de los mexicanos, se considera el mismo índice de hábitos

saludables calculado por Loprinzi et al. (2016)[41] para la población estadounidense cuyo valor es $s_i = 0.027$.

Con lo que se decide que el índice de hábitos saludables de la población mexicana será 0.027 para todas las edades.

Con la información de la población mexicana se calcularon los índices μ_i y γ_i necesarios para obtener el generador infinitesimal que dará origen a cada uno de los procesos de saltos de Markov.

Con ellos se tendrá la distribución tipo fase que modelará el tiempo transcurrido hasta el fallecimiento de un individuo de la población mexicana. Dicho generador se construyó como se relata a continuación.

4.3 Avanzando a través de las edades fisiológicas

Se considera un espacio de estados finito $E = \{1, \dots, 102\}$ con un único estado absorbente, el estado 102, el cual representa el fallecimiento. El estado 1 representa la edad 0, el estado 101 agrupa a todas las edades a partir de la edad 100.

Utilizando los índices descritos en la sección 4.2 y con el apoyo del software estadístico de licencia libre R se construyó la matriz P , cuyas entradas P_{ij} , representan la probabilidad de ir de la edad fisiológica i a la j en un año.

$$P_{ij} = \begin{cases} (1 - \mu_i)s_i(1 - \gamma_i) & \text{si } j = i \\ (1 - \mu_i)(1 - s_i)(1 - \gamma_i) & \text{si } j = i + 1 \\ (1 - \mu_i)\gamma_i t_{ij} & \text{si } j \geq i + 2. \end{cases} \quad (66)$$

Donde el ponderador t_{ij} hace referencia a que, si a una persona le ocurre un incidente, la probabilidad de transitar del estado i al estado j es inversamente proporcional a la distancia entre los dos estados. El ponderador es calculado mediante la fórmula:

$$t_{ij} = \frac{(n - 1) + (i + 2) - j}{(n(n - 1) - i(i + 1))/2}, \quad (67)$$

para $i \in \{1, \dots, n - 2\}$ y $j \in \{i + 2, \dots, n\}$.

Haciendo $\Gamma = \log P$ se tiene la matriz necesaria para construir el generador infinitesimal Λ del proceso de envejecimiento que seguirán los individuos de la población,

$$\Lambda_{ij} = \begin{cases} \Gamma_{ij} & \text{si } i \neq j \text{ y } \Gamma_{ij} \geq 0 \\ 0 & \text{si } i \neq j \text{ y } \Gamma_{ij} < 0 \\ -\sum_{j \neq i} \Lambda_{ij} & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (68)$$

Se construyó la matriz \wp de probabilidades de salto, la cual representa la probabilidad de pasar de la edad i a la edad j . Para obtenerla se siguió el siguiente procedimiento:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{\Lambda_{ij}}{-\Lambda_{ii}} & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}, \quad \text{para } i, j \in \{1, \dots, 101\}. \quad (69)$$

Se puede observar que todas las entradas correspondientes a la diagonal de la matriz de probabilidad de salto es cero, esto para garantizar que independientemente del tiempo de estancia, el proceso cambie de estado cada que se realiza un movimiento.

4.4 Población mexicana simulada

Se simularon 100,000 procesos de saltos de Markov utilizando la matriz de intensidad Λ antes construida. Dichos procesos simulados representan una muestra de la población mexicana.

Se considera un horizonte de tiempo máximo de vida de 100 años ($T = 100$), esto para garantizar que todos los procesos, los cuales simulan el tiempo de vida de una persona, terminan en un tiempo razonable. Es decir, esto garantiza que todos los procesos de vida simulados morirán en a lo más 100 años. A pesar de que es conocido que hay personas que viven más de 100 años, el horizonte de tiempo se eligió así debido a que, en los datos históricos, todos los individuos de más de 100 años se agruparon en el mismo segmento, 100 y más.

La distribución inicial utilizada es el vector canónico $\alpha_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, asumiendo así que la única posibilidad de iniciar el proceso es en el estado 1. Este estado representa la edad 0, es decir, todos los procesos comienzan al momento del nacimiento del individuo. Por lo que el tiempo de vida de todas las personas de la población simulada comienza a registrarse desde su nacimiento.

Se registraron cada una de las trayectorias de cada uno de los procesos para tener datos de manera continua.

Para simular cada uno de los procesos de Markov que representan el envejecimiento de cada uno de los miembros de la muestra se siguió el algoritmo que se presenta en Baltazar (2011)[3]. Considere que Y_n es el estado en que se encuentra el proceso al inicio del tiempo n .

1. Inicializar el tiempo de salto $W_0 = 0$. Obtener Y_0 con la distribución inicial α_0 . Hacer $X_0 = Y_0$ y $n = 0$.
2. Hacer $i = Y_n$.
3. Obtener T_{n+1} con $\exp(-\lambda_i)$.
4. Hacer $W_{n+1} = W_n + T_{n+1}$.
5. Para $W_n \leq t \leq W_{n+1}$ hacer $X_t = Y_n$.
6. Obtener Y_{n+1} con la distribución del i -ésimo renglón de \wp .
7. Hacer $n = n + 1$.
8. Mientras el proceso no caiga en el estado absorbente o mientras W_j no rebase el horizonte de tiempo H dado, se vuelve a 2.

El proceso termina cuando cae en el estado absorbente o cuando W_j rebasa el horizonte de tiempo dado, para $j \in \{1, \dots, n + 1\}$.

El algoritmo funciona de la siguiente forma:

1. Se inicializa el primer tiempo de salto en 0 y el tiempo acumulado W_0 en 0.
2. Con la distribución inicial α_0 se obtiene X_0 . Por la elección de α_0 todos los procesos comienzan a edad 0. Se hace $n = 0$.
3. Se obtiene el tiempo de estancia T_1 en la edad 0 generando una distribución exponencial de parámetro $-\lambda_1$. El tiempo de estancia se suma W_0 .
4. Se obtiene el estado i al que saltará haciendo uso del primer renglón de \mathcal{J} .
5. Se hace $n = n + 1$.
6. Se obtiene el tiempo de estancia T_{n+1} en la edad i generando una distribución exponencial de parámetro $-\lambda_i$. El tiempo de estancia se suma W_n .
7. Se obtiene el estado j al que saltará haciendo uso del j -ésimo renglón de \mathcal{J} . Y se hace $i = j$.
8. Los pasos 5 a 7 se repite hasta que el proceso cae en el estado absorbente, el cual representa el fallecimiento o cuando el tiempo total de estancia en todos estados visitados supera el horizonte de tiempo dado.

A cada paso se registra el estado visitado, el tiempo de estancia en dicha edad y se obtienen el tiempo vivido, es decir el acumulado de los tiempos de permanencia en todas las edades que el proceso ha visitado.

El procedimiento anterior se repite un número de veces idéntico del tamaño de la población a simular. Obteniendo así un proceso de saltos de Markov para cada uno de los individuos simulados, teniendo registro específico de cada uno de los saltos y estancias de cada uno de los procesos. De esta manera se tiene el proceso de envejecimiento completo de cada sujeto de la población que se simula.

Cada uno de los individuos está representado por un proceso de saltos de Markov. Se registró cada una de las trayectorias en un vector, donde cada estado visitado fue almacenado en una entrada, lo mismo se realizó con los tiempos de estancia y los tiempos de salto. Con los M vectores registrados se creó una matriz para los estados visitados, los tiempos de estancia y los tiempos de salto, teniendo así 3 matrices distintas. En cada una de las matrices, el renglón m corresponde al m -ésimo proceso simulado. La matriz 1 está compuesta por los M vectores de trayectorias. La matriz 2 está compuesta por los M vectores de tiempos de estancias y la matriz 3 está compuesta por los M vectores de tiempos de saltos.

4.5 Estimador máximo verosímil de la distribución tipo fase

Como en este caso se tiene la información completa de los procesos simulados, para obtener el estimador máximo verosímil de los parámetros de la distribución tipo fase se necesitan las estadísticas suficientes $B_i, N_i(T), N_{ij}(T), Z_i(T)$.

Usando los registros continuos de la población simulada se calculó $N_{ij}^m(T), N_i^m(T), Z_i^m(T)$ y B_i .

$N_{ij}^m(T)$ se obtuvo contando el número de saltos de la edad i a la edad j del m -ésimo proceso en el intervalo de tiempo $[0,100]$. Recordando que el horizonte de tiempo T es 100 años. Como el proceso de envejecimiento no puede volver a estados anteriores al estado en el que se encuentra, entonces $N_{ij}^m(T)$ solo puede tomar valores distintos a 0 cuando $j > i$.

$N_i^m(T)$ se obtuvo contando el número de procesos que van directamente de la edad i a la muerte (estado absorbente).

$$N_i^m(T) = \begin{cases} 1 & \text{si el } m - \text{ésimo proceso pasa} \\ & \text{de la edad } i \text{ al estado absorbente} \\ & \text{en el intervalo de tiempo } [0,100]. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (70)$$

$Z_i^m(T)$ se obtuvo con el tiempo total que el proceso de envejecimiento del sujeto m estuvo en la edad i en el intervalo de tiempo $[0,100]$. Es decir, el tiempo de estancia en la edad i , pues el proceso no puede regresar al estado i una vez que ya estuvo en él, pues solo pasa a lo más una vez por cada uno de los estados.

B_i se obtuvo con el número de procesos que comienzan a edad i . Como en la población que se simuló se seleccionó la distribución inicial α_0 de tal manera que todos los procesos comenzaron en el estado 1, entonces;

$$B_i(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1. \end{cases} \quad (71)$$

$N_{ij}^m(T), N_i^m(T), Z_i^m(T)$ se tienen para cada uno de los miembros de la población, sumando de 1 hasta M se obtienen las estadísticas $N_i(T), N_{ij}(T), Z_i(T)$.

$$N_i(T) = \sum_{m=1}^M N_i^m(T), \quad (72)$$

$$N_{ij}(T) = \sum_{m=1}^M N_{ij}^m(T), \quad (73)$$

$$Z_i(T) = \sum_{m=1}^M Z_i^m(T). \quad (74)$$

Así obtenemos los estimadores de $\hat{\alpha}, \hat{Q}$, y \hat{r} , mediante:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{B_i}{M}, \quad (75)$$

$$\hat{\lambda}_{ij} = \frac{N_{ij}(T)}{Z_i(T)}, \quad (76)$$

$$\hat{r}_i = \frac{N_i(T)}{Z_i(T)}. \quad (77)$$

para $i = 1, 2, \dots, 100$.

Con lo que se obtiene el estimador máximo verosímil para el generador infinitesimal del proceso de saltos de Markov, y por consiguiente el estimador máximo verosímil de los parámetros de la distribución tipo fase.

4.6 Probabilidad de muerte y esperanza de vida de la población mexicana (2000 – 2015) bajo el modelo de distribuciones tipo fase

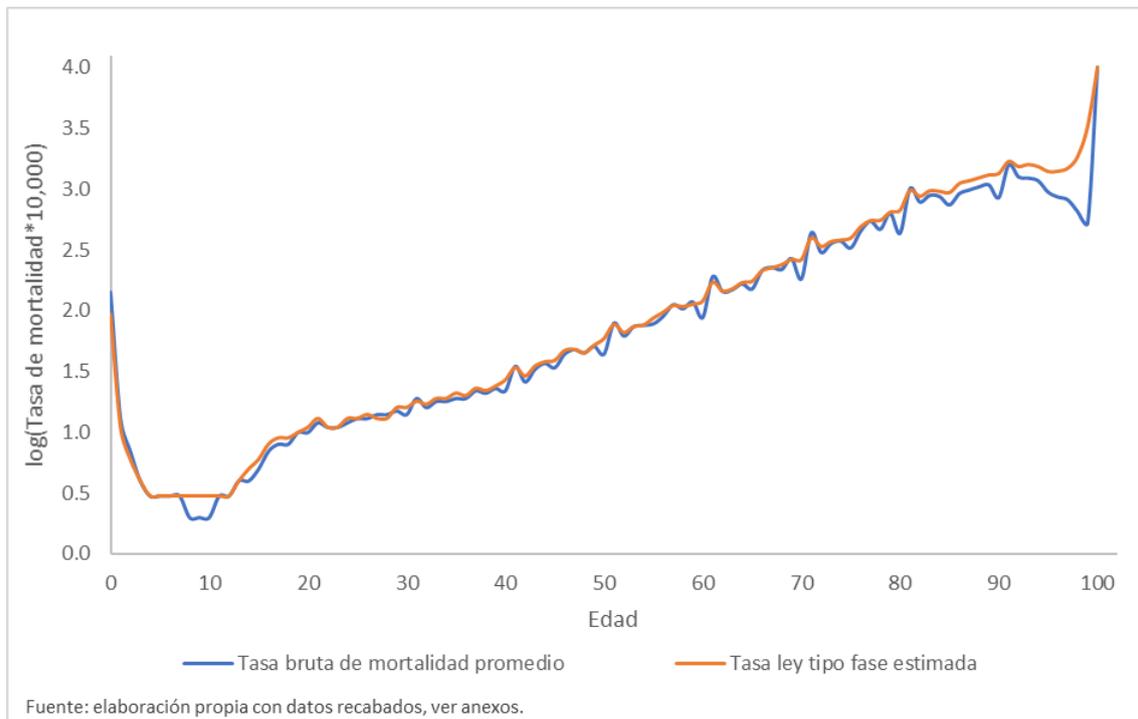
Posteriormente se calculó la probabilidad de muerte de una persona de edad fisiológica $i \in \{0, \dots, 99\}$ en un año, haciendo uso del estimador:

$$\hat{q}_i(1) = 1 - e_i \exp(\hat{Q}) e. \quad (78)$$

Donde e es el vector de entradas 1 y e_i es el vector canónico con 1 en la i -ésima posición y 0 en el resto de las entradas. Se considera $\hat{q}_{100}(1) = 1$ asegurando que la población se extingue a la edad 100.

En el Gráfico 1 se puede observar la tasa bruta de mortalidad promedio observada en la población mexicana de 2000 a 2015. Así como la probabilidad de muerte bajo la ley tipo fase estimada a partir del generador infinitesimal correspondiente a la población simulada, en el mismo periodo y para la misma población.

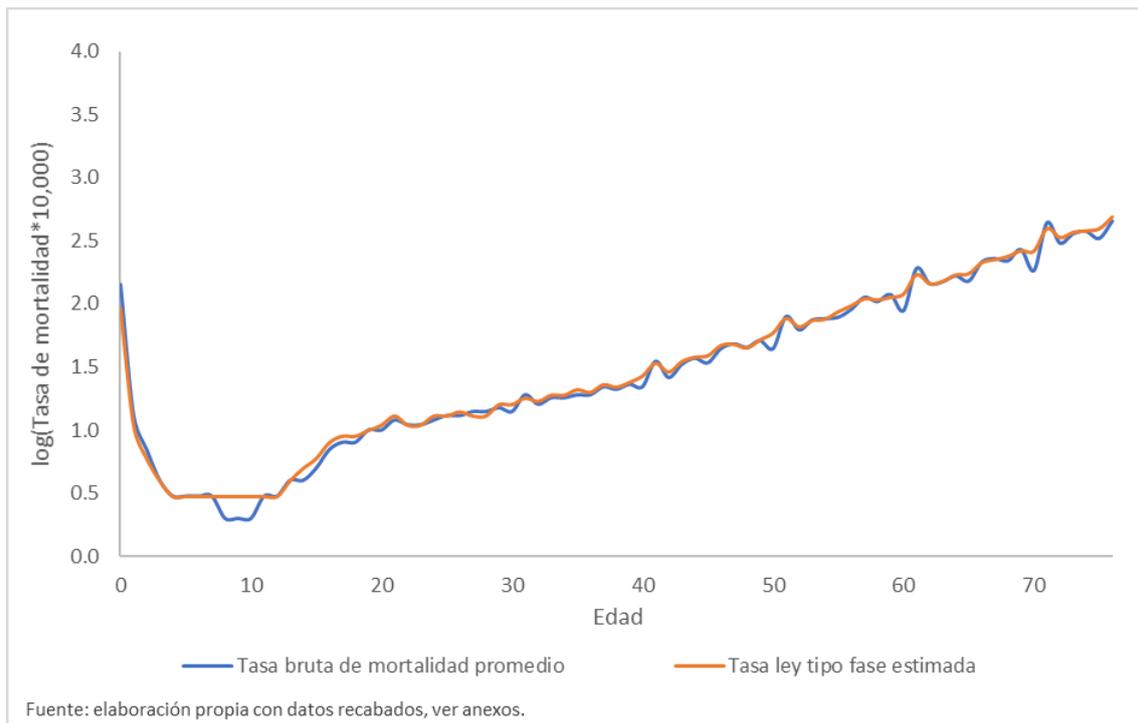
Gráfico 1. Tasas de mortalidad en México.



En el Gráfico 1 puede observarse que la probabilidad de muerte estimada es muy similar en comportamiento y magnitud a la tasa bruta real observada en la población mexicana en el periodo de tiempo en estudio.

Como se verá en la Tabla 6, la esperanza de vida al nacer calculada bajo este método es de 75.86 años. Por lo que si se realiza el gráfico considerando solo el tiempo de vida esperado (Gráfico 2) puede apreciarse aún mejor que la probabilidad de muerte estimada para la población mexicana es muy próxima a la mortalidad bruta media registrada en México de 2000 a 2015.

Gráfico 2. Tasas de mortalidad durante la esperanza de vida al nacer (0 a 76 años).



Es evidente que la mortalidad cambia dependiendo la edad como consecuencia de causas endógenas y exógenas al individuo, por ejemplo, la mortalidad antes de la adolescencia es muy baja en comparación con la presentada en los adultos mayores o la que ocurre durante el primer año de vida. También depende de factores cuya influencia directa no fue considerada en el modelo, como las condiciones de vivienda, recursos económicos, acceso a servicios de salud, entre muchos otros.

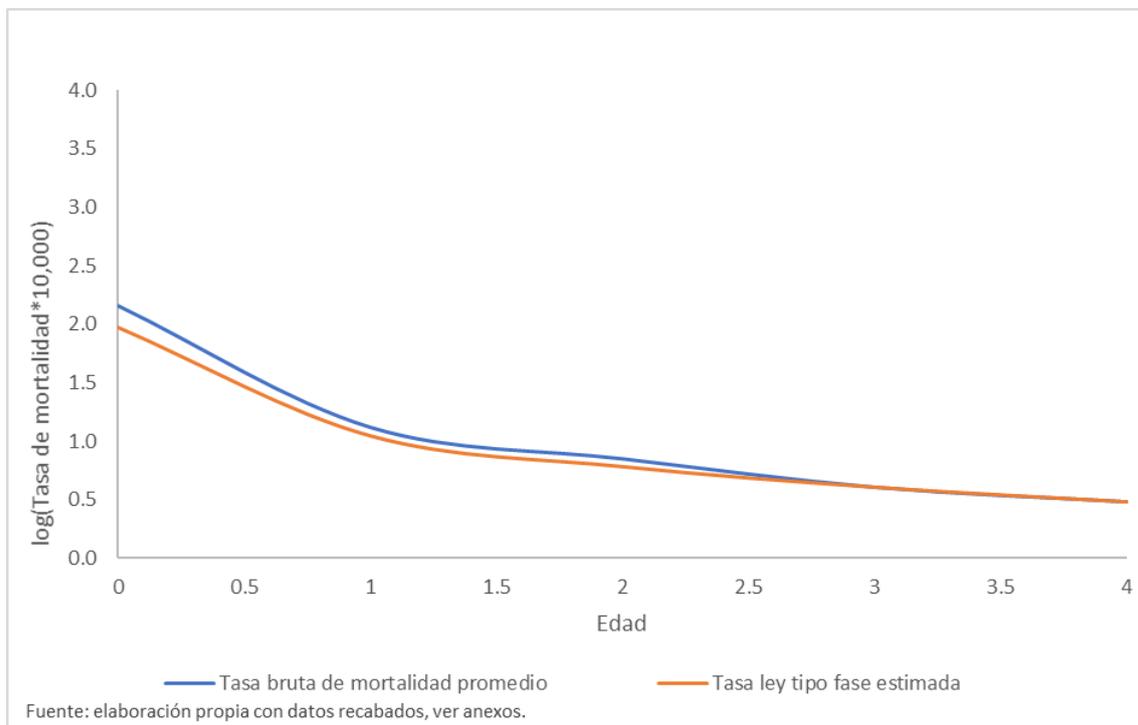
A raíz de la evidente variación en las tasas de fallecimiento por edad, a lo largo de la historia se han realizado análisis para ciertos grupos de edad. Uno de los más estudiados debido a la importancia de la medición de las muertes ha sido la mortalidad infantil (defunciones acontecidas dentro del primer año de vida) pues se ha estudiado con métodos o parámetros diferentes al resto de las edades.

García-Moro, Hernandez y Martinic (1995)[21] señalan que la mortalidad infantil “es máxima justo después del nacimiento y cae rápidamente tras los primeros días, semanas y meses de vida”. Inclusive aseveran que las defunciones neonatales (las ocurridas en las primeras cuatro semanas de vida) están mayormente influenciadas por las causas endógenas. Mientras que las causas exógenas repercuten con mayor fuerza en las defunciones postneonatales (a partir de la semana cuatro y hasta el primer año de vida).

De la misma manera, Cordero (1968)[16] asegura que la mortalidad postneonatal depende considerablemente de las causas exógenas como las intoxicaciones, infecciones o accidentes, así como de la atención médica respecto a ellos, asegurando que los países cuyos habitantes poseen menor cantidad de recursos económicos presentan una mortalidad infantil mayor al resto de la población.

Hebrero (2016)[28] sugiere que el cambio en la mortalidad presenta patrones bien definidos en la mayoría de las poblaciones. Señala que la mortalidad humana es muy alta durante el primer mes, baja rápidamente durante el primer año y continúa bajando en menor medida hasta los 4 años. Se mantiene baja y relativamente estable desde los 5 y hasta los 19 años, para presentar un incremento paulatino a partir de 20 y hasta los 40 o 50 años. Seguido de un incremento más acelerado hasta las edades más altas. Si se observa con detenimiento el Gráfico 2 puede apreciarse que este patrón pareciera estar presente en la mortalidad mexicana. Para analizar a detalle el comportamiento de la tasa de mortalidad ajustada se seccionó la tabla con base en ese planteamiento.

Gráfico 3. Tasas de mortalidad en México de 0 a 4 años.

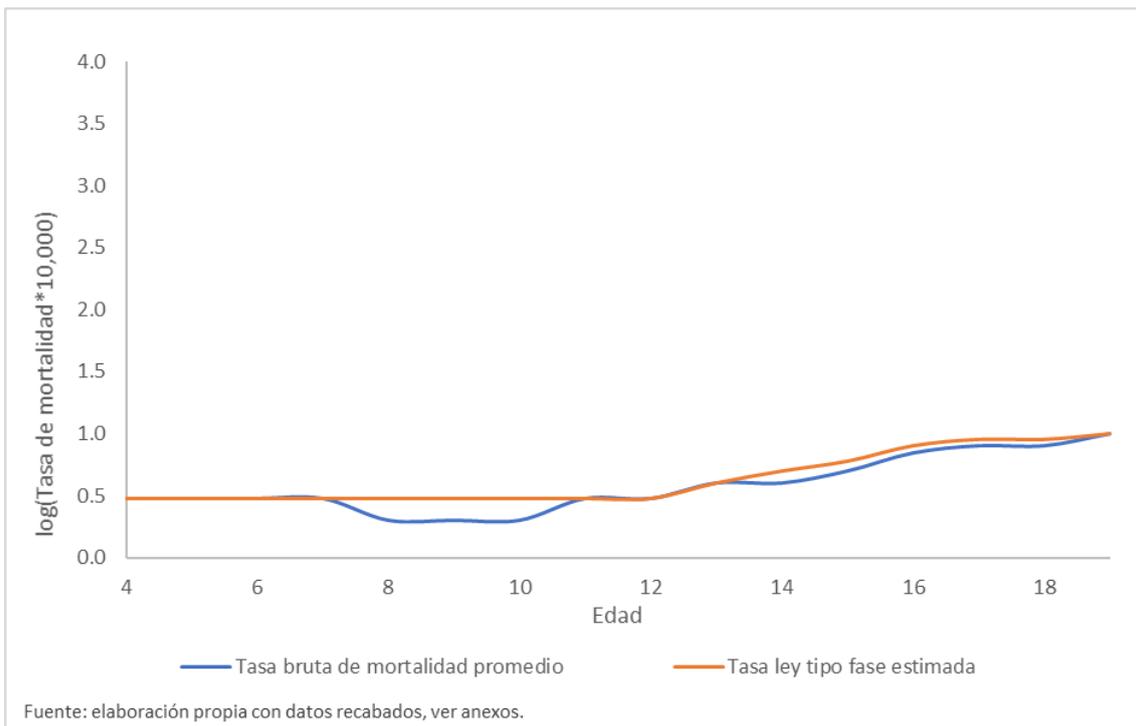


En el Gráfico 3 puede apreciarse claramente, que, si bien la mortalidad ajustada al nacer es menor a la realmente registrada entre 2000 y 2015, la diferencia disminuye drásticamente durante el primer medio año de vida. Una posible causa de esta discrepancia es que el modelo de distribuciones tipo fase otorga un peso mayor a los factores exógenos en comparación con los endógenos, que como se mencionó anteriormente, son los más importantes durante el primer mes de vida.

Sin embargo, es posible apreciar que a partir de la edad 2 y hasta la edad 4 se presenta una disminución en la mortalidad y es posible notar que las curvas son tan cercanas que casi se observa una sola curva.

Hebrero (2016)[28] señala que la mortalidad suele mantenerse casi constante de los 4 a los 19 años, situación que no se ve reflejada en el Gráfico 4 debido a que la mortalidad mexicana presentó un incremento a partir de los 12 años.

Gráfico 4. Tasas de mortalidad en México de 4 a 19 años.

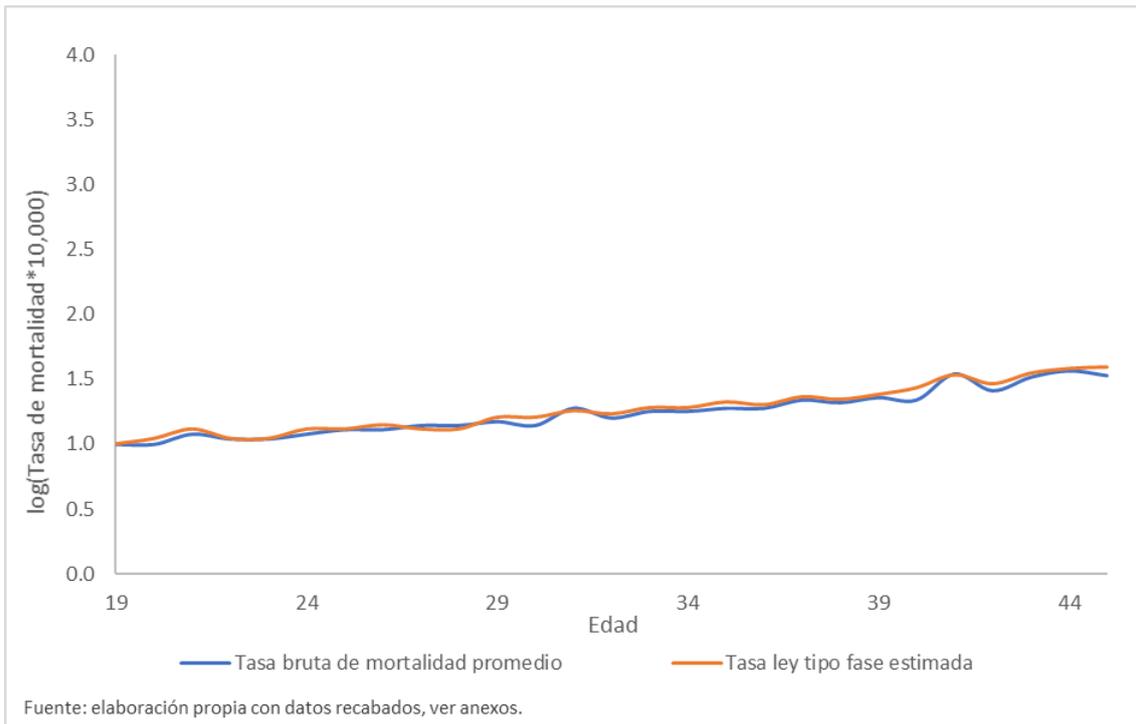


A pesar de esto, las curvas que representan la mortalidad real y la mortalidad estimada son relativamente cercanas entre ellas. El incremento a partir de los 12 años puede deberse a la dinámica poblacional en México que da paso a gran cantidad de accidentes en adolescentes y facilita el acceso a sustancias adictivas.

Además, puede apreciarse que la curva correspondiente a los datos reales registrados presenta una disminución durante las edades 8 a 10, situación que resulta subsanada en el ajuste realizado a lo largo de este trabajo.

En el Gráfico 5 se verá el comportamiento de las tasas de defunciones a partir de los 19 años y hasta los 45 años.

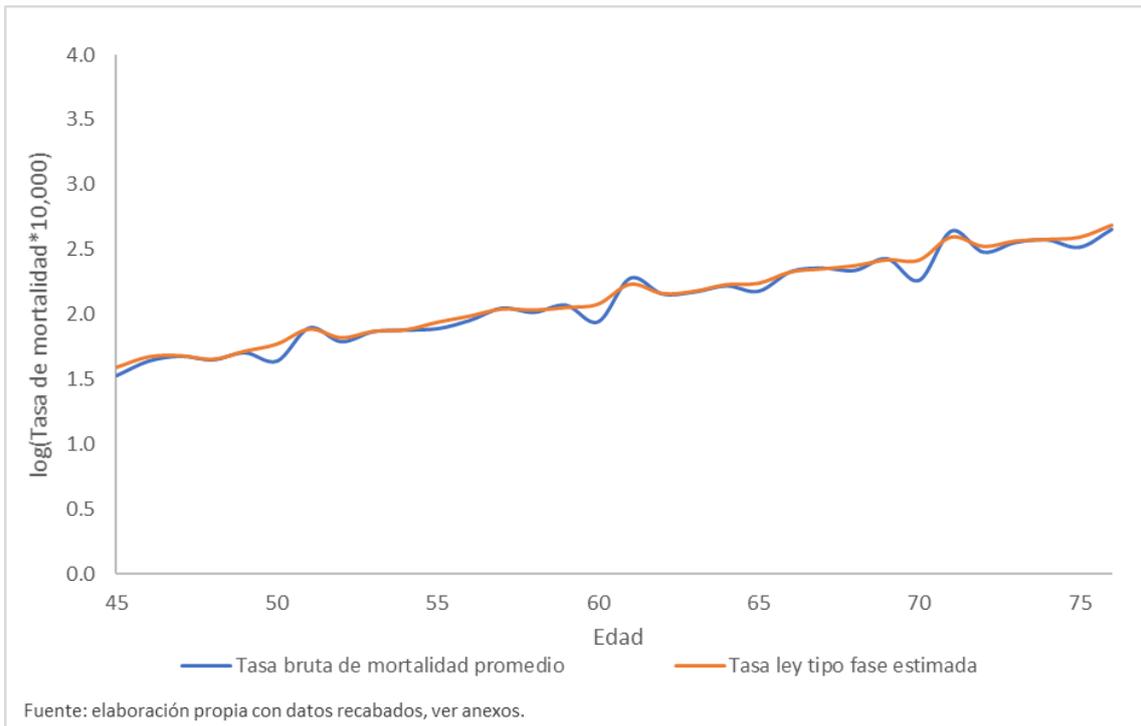
Gráfico 5. Tasas de mortalidad en México de 19 a 45 años.



Como se esperaba, la mortalidad incrementa a partir de los 19 años. En el Gráfico 5 puede apreciarse que la distancia entre la mortalidad real promedio y la mortalidad ajustada suponiendo que el tiempo de vida es modelado por una distribución tipo fase es muy pequeña.

Para observar mejor el comportamiento de la mortalidad en edades avanzadas se fraccionó de 45 a 76 años, lo cual se podrá observar en el Gráfico 6, se eligió ese valor de corte debido a que se aproxima a la esperanza de vida al nacimiento.

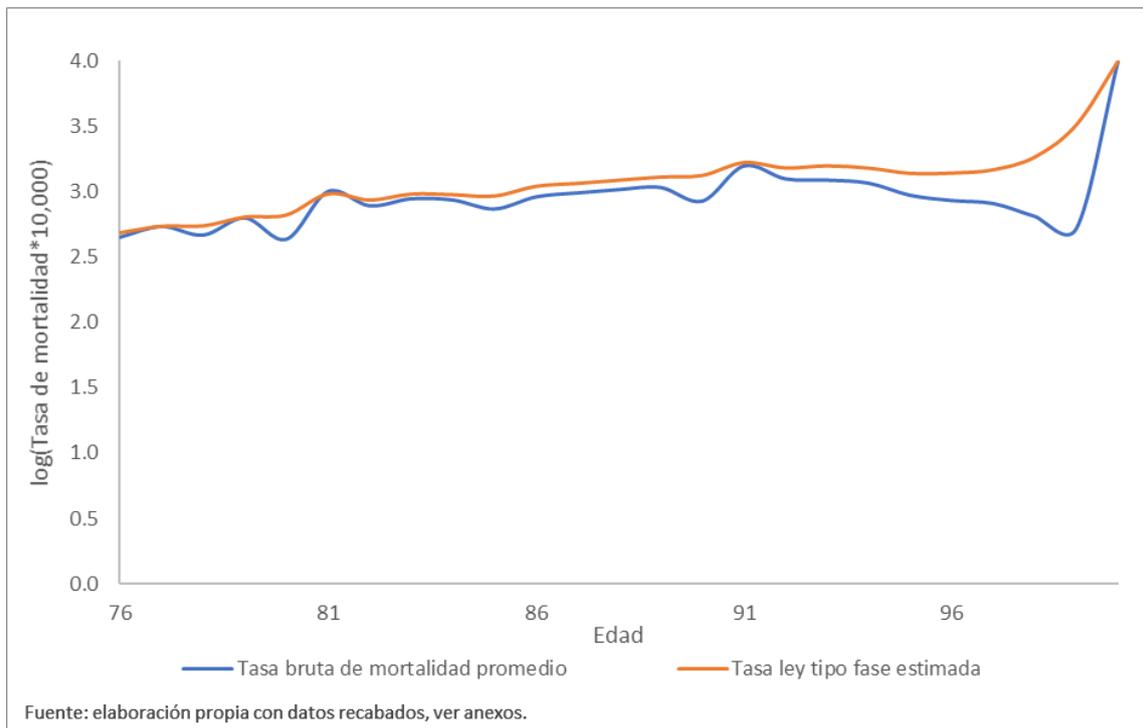
Gráfico 6. Tasas de mortalidad en México de 45 a 76 años.



En el Gráfico 6 puede apreciarse que la discrepancia entre las curvas es muy pequeña, y presentan el mismo comportamiento. Inclusive puede notarse como la ley tipo fase estima de buena manera las crestas registradas, inclusive las más pronunciadas como las ocurridas alrededor de los 60 y 70 años. Además, modela y suaviza los valles observados en los gráficos.

Finalmente, en el Gráfico 7 se advierte el comportamiento de las curvas desde los 76 años hasta la edad 100, límite considerado en este proyecto.

Gráfico 7. Tasas de mortalidad en México de 76 a 100 años.



Es natural esperar que, a mayor edad, la probabilidad de muerte sea más alta, sin embargo, curiosamente, eso no es lo que se observa en los registros de la población en estudio, ya que se observa una disminución de la probabilidad de muerte alrededor de la edad 90.

Una posible causa de dicha disminución es debido a las condiciones generales de vida en México, tanto sociales como económicas. Es probable que la mayor parte de aquellas personas que rebasan la esperanza de vida (76 años) presente niveles socioeconómicos más altos. Por consiguiente, un mejor acceso a información que permite desarrollar hábitos saludables, así como una menor exposición al riesgo al desarrollar sus actividades laborales, aunado al acceso a mejores servicios de salud que el resto de la población. Lo cual podría derivar en una reducción en la mortalidad.

Es atractivo destacar que ley tipo fase capta dicha cuestión y disminuye la caída en la tasa, ya que, como se observa en el Gráfico 7, la probabilidad de muerte desciende en menor medida en comparación con la tasa bruta promedio.

Puede notarse que la diferencia entre la tasa real y la tasa estimada es relativamente pequeña a lo largo de toda la curva. Puede observarse también lo que pareciera ser cierto suavizamiento de la curva con respecto a las tasas brutas.

En la Tabla 4 se muestra la probabilidad de muerte bajo la ley tipo fase en edades quinquenales, así como la tasa bruta de mortalidad promedio registrada en México de 2000 a 2015.

En ella puede observarse que la diferencia entre ambas tablas es relativamente pequeña. Siendo ligeramente mayor la tabla ajustada para todas las edades, a excepción

de la edad 0, pues, como se mencionó anteriormente en el primer año la influencia de los factores endógenos es mayor a los exógenos, los cuales son una base importante en el modelo utilizado en este proyecto.

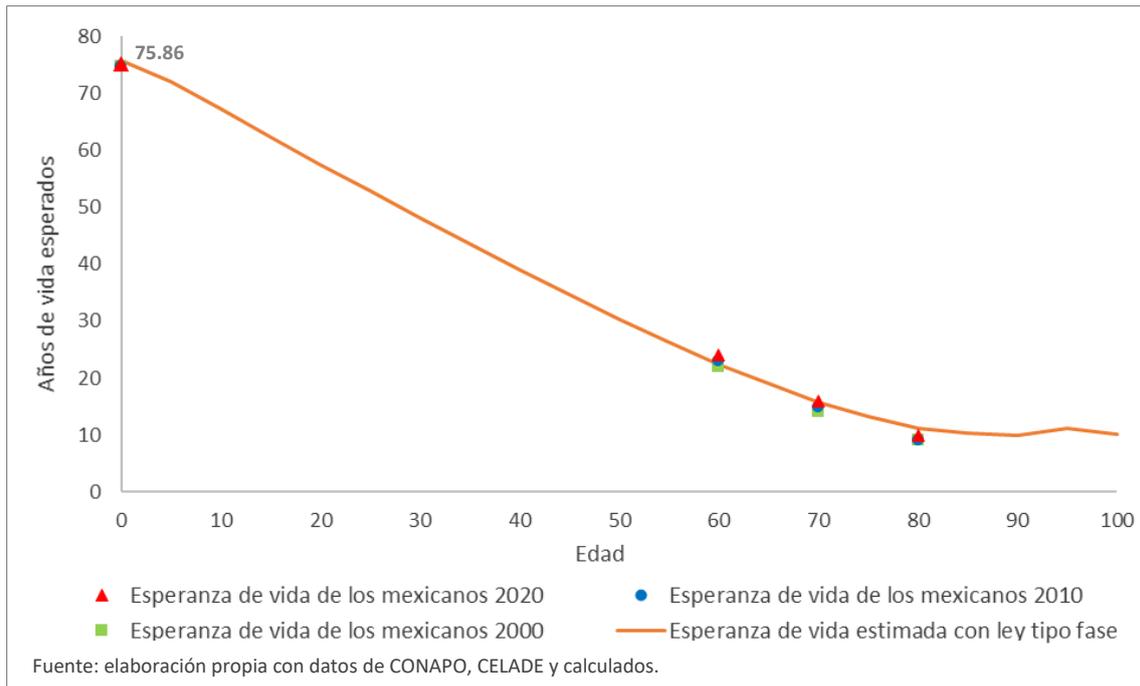
Tabla 4. Tasas de mortalidad. México 2000-2015.

Edad	Tasa bruta de mortalidad promedio	Tasa estimada de mortalidad
0	0.0142	0.0093
5	0.0003	0.0003
10	0.0002	0.0003
15	0.0005	0.0006
20	0.0010	0.0011
25	0.0013	0.0013
30	0.0014	0.0016
35	0.0019	0.0021
40	0.0022	0.0027
45	0.0034	0.0039
50	0.0044	0.0059
55	0.0078	0.0087
60	0.0088	0.0120
65	0.0151	0.0174
70	0.0183	0.0263
75	0.0328	0.0395
80	0.0434	0.0669
85	0.0740	0.0933
90	0.0850	0.1341
95	0.0942	0.1392
100 y más	1.0000	1.0000

Fuente: elaboración propia.

Utilizando la ecuación $e_i = -e_i(\hat{Q}^{-1})e$, se calculó la esperanza de vida de un mexicano de edad i , a partir de la ley de mortalidad tipo fase. Graficando la esperanza de vida calculada a cada edad se obtiene el Gráfico 8.

Gráfico 8. Esperanza de vida en México.



En el Gráfico 8 puede observarse la esperanza de vida estimada bajo el modelo tipo fase, así como la esperanza de vida al nacer publicada por el Consejo Nacional de Población (CONAPO) y la esperanza de vida a los 60, 70 y 80 años publicada por el Centro Latinoamericano de Demografía (CELADE). Se aprecia un comportamiento en la curva relacionada al aumento en la esperanza de vida a partir de la edad 90, que prevalece hasta los 100 años. Lo que indicaría que se espera que las personas de 100 años vivan alrededor de 10 años más. Esto es concordante con la información de la población mexicana entre los años 2000 y 2015 pues en la realidad no todas las personas fallecen a los 100 años o antes, pues hay personas que viven más de 100 años, las cuales si fueron consideradas en el ajuste y se agruparon en la última edad considerada (100 y más años).

La esperanza de vida al nacer estimada a través del método presentado en este trabajo es 75.86 años, valor ligeramente mayor a la esperanza de vida estimada por el Consejo Nacional de Población (CONAPO)[15].

La esperanza de vida al nacer publicada por CONAPO para cada año entre 2000 y 2020 se encuentra resumida en la Tabla 5.

Tabla 5. Esperanza de vida al nacer (CONAPO).

Año	Esperanza de vida al nacer
2000	74.73
2001	75.04
2002	75.06
2003	75.06
2004	75.40
2005	75.22
2006	75.54
2007	75.35
2008	75.15
2009	74.86
2010	74.75
2011	74.91
2012	75.01
2013	75.04
2014	74.95
2015	74.71
2016	74.83
2017	74.88
2018	75.00
2019	75.10
2020	75.23

Fuente: Elaboración propia con datos de CONAPO.

En la Tabla 6 se presenta la esperanza de vida obtenida a partir del modelo de distribuciones tipo fase por quinquenio.

Tabla 6. Esperanza de vida estimada por quinquenio.

Edad	Esperanza de vida estimada con población simulada
0	75.86
5	72.15
10	67.24
15	62.34
20	57.57
25	52.88
30	48.22
35	43.61
40	39.04
45	34.60
50	30.32
55	26.26
60	22.48
65	19.00
70	15.85
75	13.23
80	11.11
85	10.30
90	9.97
95	11.10
100 y más	10.08

Fuente: Elaboración propia.

Velázquez (2004)[59] señala que las estimaciones realizadas por el CELADE para la esperanza de vida en México a los 60, 70 y 80 años ronda los valores presentados en la Tabla 7.

Tabla 7. Esperanza de vida en México por sexo, 60, 70 y 80 años.

Año	Sexo	Edad (años)		
		60	70	80
2000	Hombres	20	13	8
	Mujeres	23	15	9
2010	Hombres	21	14	8
	Mujeres	24	16	10
2020	Hombres	22	14	9
	Mujeres	26	17	10

Fuente: elaborada con información del CELADE presentada en Velázquez (2004)[52]

Debido a que la esperanza de vida del CELADE es presentada por sexo y el análisis realizado en este proyecto no fue diferenciado por sexo, se obtuvo el promedio de la esperanza de vida para las 3 edades. Los valores obtenidos se presentan en la Tabla 8.

Tabla 8. Esperanza de vida promedio, 60, 70 y 80 años.

Año	Edad (años)		
	60	70	80
2000	22	14	9
2010	23	15	9
2020	24	16	10

Fuente: elaboración propia con promedio por sexo de la tabla 7.

Al comparar la esperanza de vida promedio de cada año y a cada edad con la presentada en la Tabla 6 es muy fácil notar que los valores son muy cercanos. Con lo que es posible afirmar que la esperanza de vida estimada es concordante con la esperanza de vida calculada por Organismos Internacionales dedicados al análisis de las poblaciones humanas.

4.7 Comparación con distintas tablas de mortalidad mexicanas

Actualmente existen diferentes tablas de mortalidad que se elaboraron con base en la experiencia histórica de la mortalidad de la población mexicana, haciendo uso de distintos modelos matemáticos y métodos actuariales.

La gran mayoría de estas tablas de mortalidad se realizan con fines específicos, por ejemplo, para ser utilizadas para el cálculo de primas, reservas, etc. en el sector asegurador, pensiones, entre otros.

Como resultado de lo anterior se puede notar que existen notables diferencias entre tablas. Pues, a pesar de que todas ellas son elaboradas con información de la población mexicana, las muestras tomadas para realizarlas son diferentes.

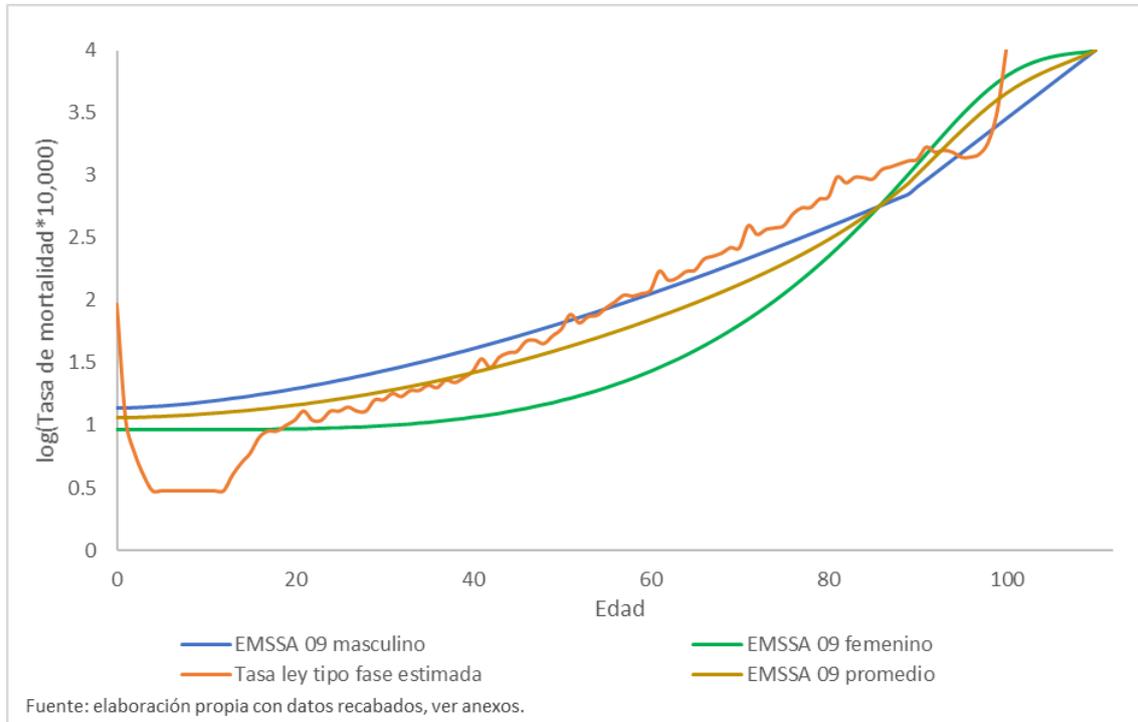
A continuación, se presenta una comparación gráfica entre la tabla de mortalidad ajustada en este trabajo y algunas tablas de mortalidad realizadas recientemente para la población mexicana.

Apuntando que no es posible decir que se trate de la misma población en cuestión, debido a que las tablas presentadas fueron las elaboradas con la experiencia mexicana de la seguridad social o con la experiencia del sector asegurador en México. Sin embargo, no toda la población mexicana se encuentra afiliada a la seguridad social, así como no todos los mexicanos tienen una póliza de seguro de vida.

A pesar de estas diferencias, se realizó la comparación entre tablas debido a que son tablas elaboradas con experiencia mexicana utilizadas comúnmente en el ámbito

actuarial, por ejemplo, para el cálculo de pasivos laborales o de tarifas en seguros de vida.

Gráfico 9. Comparación con EMSSA 09.



El Gráfico 9 muestra algunas diferencias entre la tabla de mortalidad ajustada bajo el modelo tipo fase y la tabla de mortalidad realizada con experiencia demográfica de mortalidad correspondiente a trabajadores activos en la seguridad social, *Experiencia Demográfica de Mortalidad para Activos* (EMSSA 09). Puede observarse que es una tabla más larga (120 años) y ligeramente subvaluada.

En el Gráfico 9 puede apreciarse que la estimación realizada en este proyecto, si bien es similar a la tabla de mortalidad EMSSA 09 presentan un cruce a partir de la edad 55. Lo que indica que para edades menores a dicha edad la tabla ajustada bajo el modelo de distribuciones tipo fase es menor a la experiencia de la seguridad social. Sin embargo, para edades posteriores a 55 años, la mortalidad que obedece la ley tipo fase es mayor.

Es interesante apuntar que, el intervalo en el que las curvas tienen una discrepancia menor es el comprendido entre 20 y 60 años. Una de las razones de esto podría ser que la EMSSA 09 es una tabla realizada con la experiencia de mortalidad de activos de la seguridad social en México, y, por consiguiente, el grueso de la población considerada es población económicamente activa, que usualmente tiene entre 18 y 60 años.

Este cambio podría asociarse a que la población considerada para el cálculo de cada una de las tablas es diferente. Mientras que la EMSSA 09 analiza a la población afiliada a las instituciones de seguridad social en México, la tabla ajustada en este proyecto

contempla a toda la población mexicana, sin importar si se encuentran afiliados a la seguridad social o no.

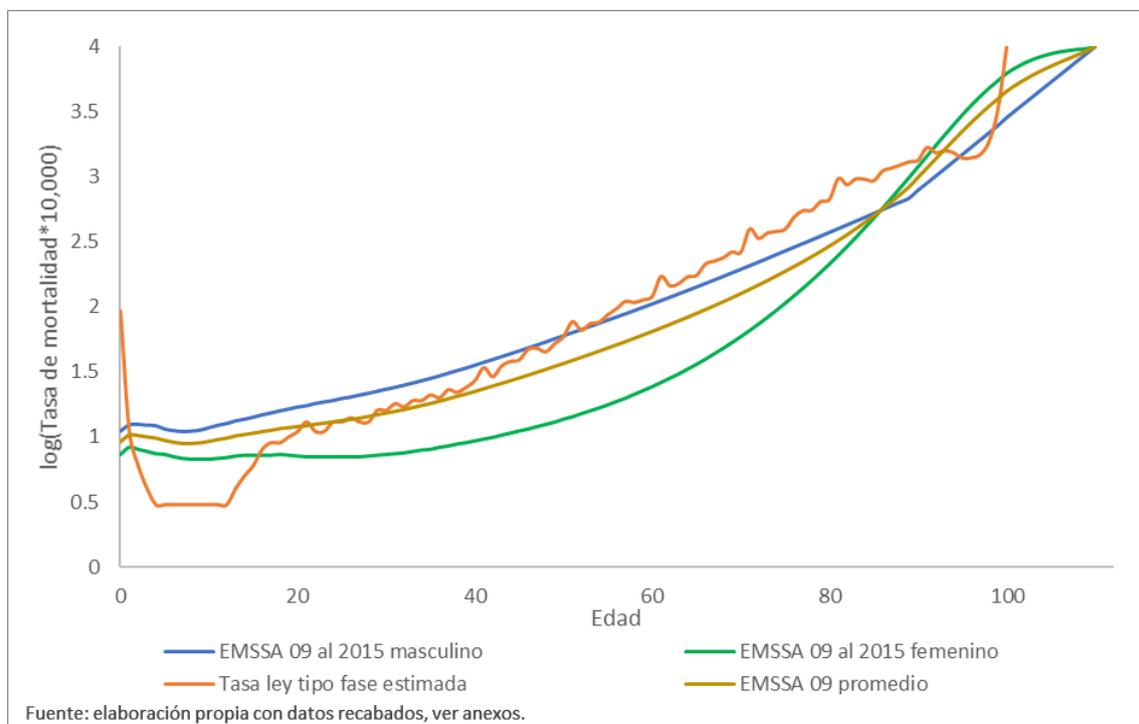
Dicho esto, resulta natural pesar que las tablas presenten tablas distintas pues una gran parte de la población mexicana económicamente activa no tiene acceso a la seguridad social, derivado de trabajos informales y subcontratación.

Además, la gran mayoría de aquellas personas menores de 60 años que se encuentran afiliados a la seguridad social son trabajadores activos que se encuentran expuestos a riesgos específicos de su área de trabajo, por ejemplo, los obreros en las plantas de trabajo y las personas que laboran en oficinas por ejemplo en corporativos.

A diferencia de la población considerada en este estudio, que incluye a toda la población mexicana, considera a personas que no pertenecen al sector económicamente activo, a niños y jóvenes, por ejemplo, estudiantes, que evidentemente no están expuestos a los mismos riesgos.

Como se mencionó anteriormente, la EMSSA 09 es una tabla dinámica que disminuye la probabilidad de muerte a cada año, por lo que adicionalmente se realizó una comparación con la proyección de la tabla al año 2015, al ser el último año del periodo en el cual se tomaron los datos para este estudio.

Gráfico 10. Comparación con EMSSA 09 al 2015.



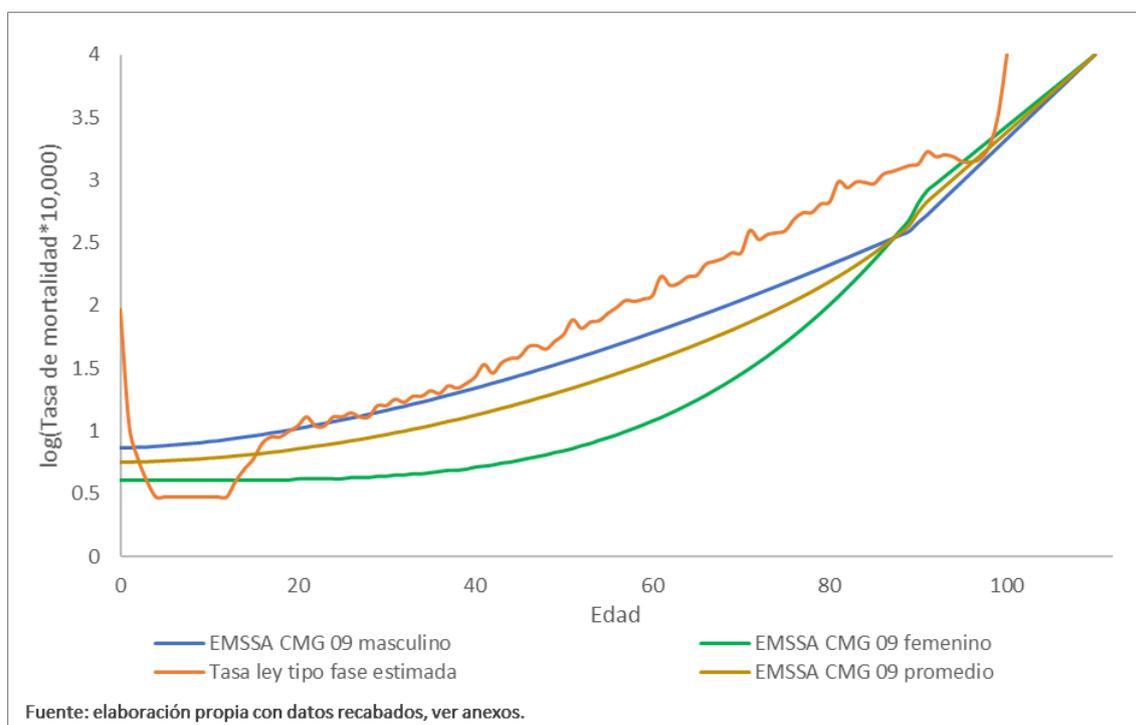
En el Gráfico 10 se observa que la diferencia entre las probabilidades de muerte es ligeramente mayor, lo cual es un resultado esperado debido a que como ya se mencionó antes, la EMSSA 09 disminuye la probabilidad de muerte a cada año.

El Gráfico 10 muestra, como se aseveró anteriormente, que al proyectar la tabla EMSSA 09 al 2015 la tasa de mortalidad disminuye y la brecha entre la mortalidad ajustada bajo el modelo tipo fase y la EMSSA 09 crece a partir de 60 años. Especialmente, el cruce entre tablas mencionado con anterioridad, el cual se daba aproximadamente a edad 55, pareciera darse ahora a edad 50.

De igual manera, la diferencia en edades jóvenes disminuye notablemente. La razón principal de que la brecha entre tablas sea mayor es que la EMSSA 09 se ajusta cada año con una tabla de mejoras que disminuye la probabilidad de muerte a cada año, lo cual no necesariamente ocurre así, si bien los avances científicos y tecnológicos sugieren una disminución, la interacción con otros factores puede ocasionar que la mortalidad no disminuya con el paso de los años.

En la seguridad social también existen distintas tablas de mortalidad, todas estas fueron calculadas con la experiencia de la seguridad social en México. Es decir, contienen la información histórica del Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) y del Instituto de Seguridad y Servicio Sociales de los trabajadores del estado (ISSSTE). En los Gráficos 11 y 12 se muestran las diferencias entre algunas de estas tablas y la tabla obtenida durante la elaboración de este proyecto.

Gráfico 11. Comparación con EMSSA CMG 09.



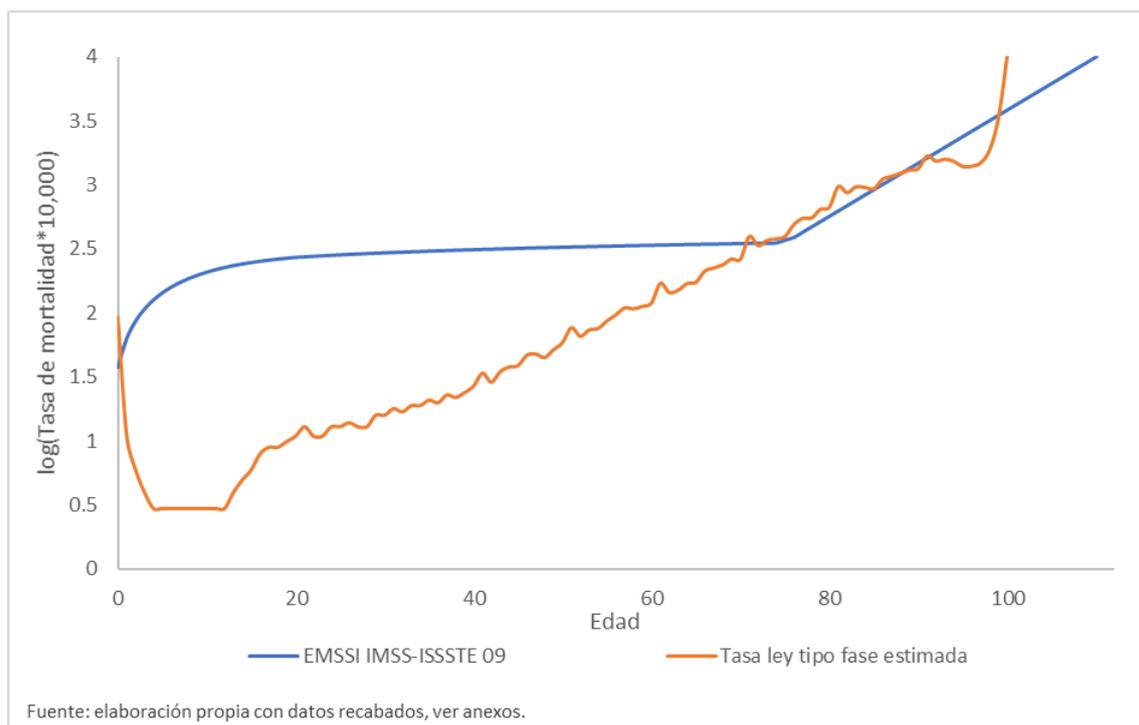
Es posible apreciar que la probabilidad de muerte reflejada en el Gráfico 11 tiene una discrepancia mayor a las observadas con la EMSSA 09.

Esto puede deberse a que la tabla EMSSA CMG 09 es una tabla cuyo principal uso es calcular el capital mínimo de garantía necesario que las compañías aseguradoras en México cumplan las obligaciones con sus asegurados. El capital mínimo de garantía es adicional a las reservas de una aseguradora por lo que para su cálculo se consideran eventos no esperados.

Esta puede ser una razón por la que las tasas de la EMSSA CMG 09 sean mucho menores, pues el riesgo principal de mortalidad ya fue considerado en otros cálculos realizados por las compañías, como primas y reservas.

El Gráfico 12 contrasta las tasas de defunciones de la (Experiencia Mexicana de la Seguridad Social para Inválidos 2009) EMSSI 09, la cual fue elaborada a partir de la experiencia de mortalidad de personas inválidas afiliadas a los sistemas de seguridad social en México.

Gráfico 12. Comparación con EMSSI 09.



En el Gráfico 12 se observa que la mortalidad de la población inválida afiliada a la seguridad social (IMSS e ISSSTE) es mucho mayor a la mortalidad que considera a toda la población mexicana.

Al observar de cerca, la discrepancia entre las tasas es indiscutiblemente elevada. Esto es completamente compatible con el planteamiento inicial que sugiere que la probabilidad de muerte no solo depende de la edad cronológica de las personas.

Claramente, si se comparara a dos personas, suponiendo que una de ellas presentó un evento que resultó en invalidez y la otra no, aunque la edad cronológica sea la misma, la edad fisiológica sería diferente, por lo que el proceso de envejecimiento de la persona con invalidez se verá acelerado por dicho evento.

Por lo que, por el contrario, para una persona que no ha sufrido un incidente de este tipo, es habitual pensar que su probabilidad de muerte será menor a la probabilidad de muerte de aquella persona que si sufrió el evento en cuestión.

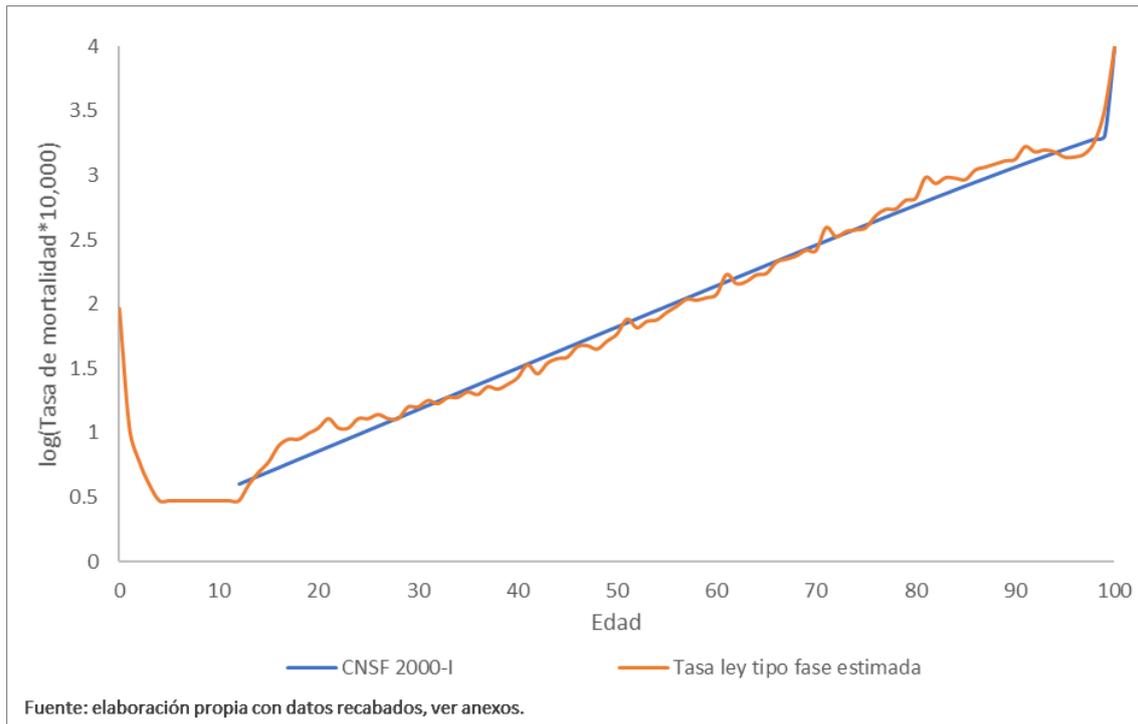
Es por esto por lo que al comparar las probabilidades de muerte solo de las personas con alguna invalidez contra aquella que considera a todas las personas en México se presenta una diferencia muy importante.

La discrepancia se presenta con mucha mayor claridad sobre todo, los primeros 75 años, para posteriormente ostentar un comportamiento muy similar los siguientes 15 años.

Es posible considerar que una razón de esto es que, a partir de cierta edad, las capacidades físicas y biológicas, así como la salud disminuyen considerablemente, provocando que el proceso de envejecimiento de los individuos sea similar en general. Produciendo que la diferencia con las capacidades de una persona que presentó una invalidez durante su juventud con aquellas que no presentaron algún evento de que derivó en una invalidez sea escasa.

En el Gráfico 13 se cotejan la tasa obtenida en este proyecto con la publicada por la CNSF para vida individual en el año 2000.

Gráfico 13. Comparación con CNSF 2000-I.



Otra de las tablas más usadas en la actualidad, sobre todo en el sector asegurador, es la tabla publicada por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas para vida individual (CNSF 2000-I). En el Gráficos 13 puede percibirse que el ajuste es muy similar a lo largo de la tabla.

Las discrepancias mayores se encuentran entre los 10 y 25 años, así como a partir de los 80 años, la primera de ellas puede asociarse a que la CNSF 2000-I fue elaborada con experiencia del sector asegurador y culturalmente en México los jóvenes no poseen un seguro de vida. Para el segundo caso, la razón principal pudiera ser que las compañías aseguradoras regularmente no emiten pólizas de seguros de vida para personas de edades avanzadas.

Otra de las diferencias se encuentra después de los 90 años, esta diferencia se atribuye a la disminución de la mortalidad observada en la última década de vida, situación que el modelo de distribuciones tipo fase reflejó en el ajuste y que no es considerada en ninguna de las otras tablas presentadas en los Gráficos 9 al 13.

En el Gráfico 13 puede evidenciarse que la tabla de mortalidad elaborada por la CNSF con información de todas las compañías aseguradoras que operaron seguros de vida en México presenta escasa diferencia en comparación con la tabla obtenida para la población mexicana ajustada siguiendo el modelo de distribuciones tipo fase.

Es fácil percatarse de que la tabla más similar a la tabla construida en este trabajo es la CNSF 2000-I, sin embargo, fue construida usando la experiencia del sector asegurador

mexicano de los años 1991 a 1998. Esta situación podría sugerir que la mortalidad acontecida no ha presentado cambios significativos en los últimos años.

Además, sugiere que la mortalidad de la población total en México presenta un comportamiento similar al de la mortalidad de personas que contrataron un seguro de vida. Lo que puede atribuirse a que mientras se cubra el costo de la póliza de un seguro de vida, casi cualquier persona puede contarlo.

En esta Sección fue posible notar que existen diferencias entre todas las tablas de mortalidad, esto debido a que cada una de ellas fue construida con información diferente y modelando las defunciones de diferentes sectores de la población mexicana.

4.8 Comparación con la mortalidad registrada en México de 2016 a 2018

Ahora se confrontará gráficamente la probabilidad de muerte ajustada en este trabajo y la mortalidad registrada por la Secretaría de Salud acontecida en la república mexicana en los años 2016, 2017 y 2018.

Para cada uno de los años (2016, 2017 y 2018) se calculó la tasa bruta de mortalidad haciendo uso de la fórmula:

$$\mu_i(j) = \frac{d_i(j)}{p_i(j)}, \quad (79)$$

Con $j = 2016, 2017$ y 2018 .

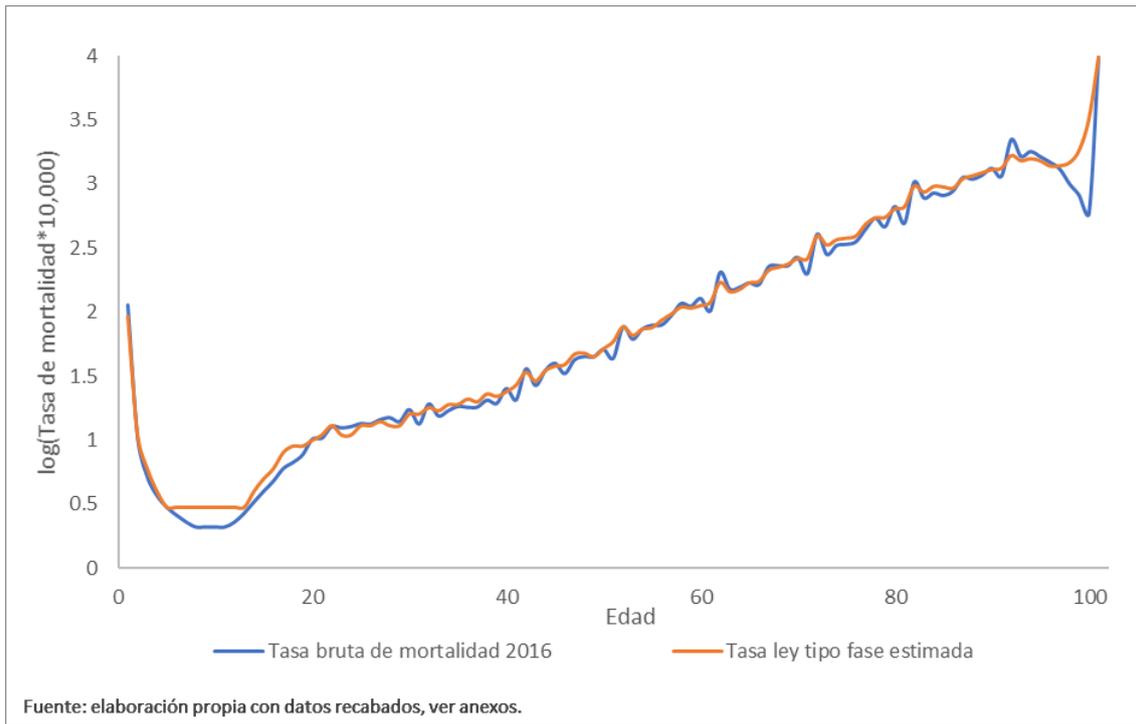
Donde:

$d_i(j)$:= defunciones de edad i en el año j .

$p_i(j)$:= población de edad i en el año j .

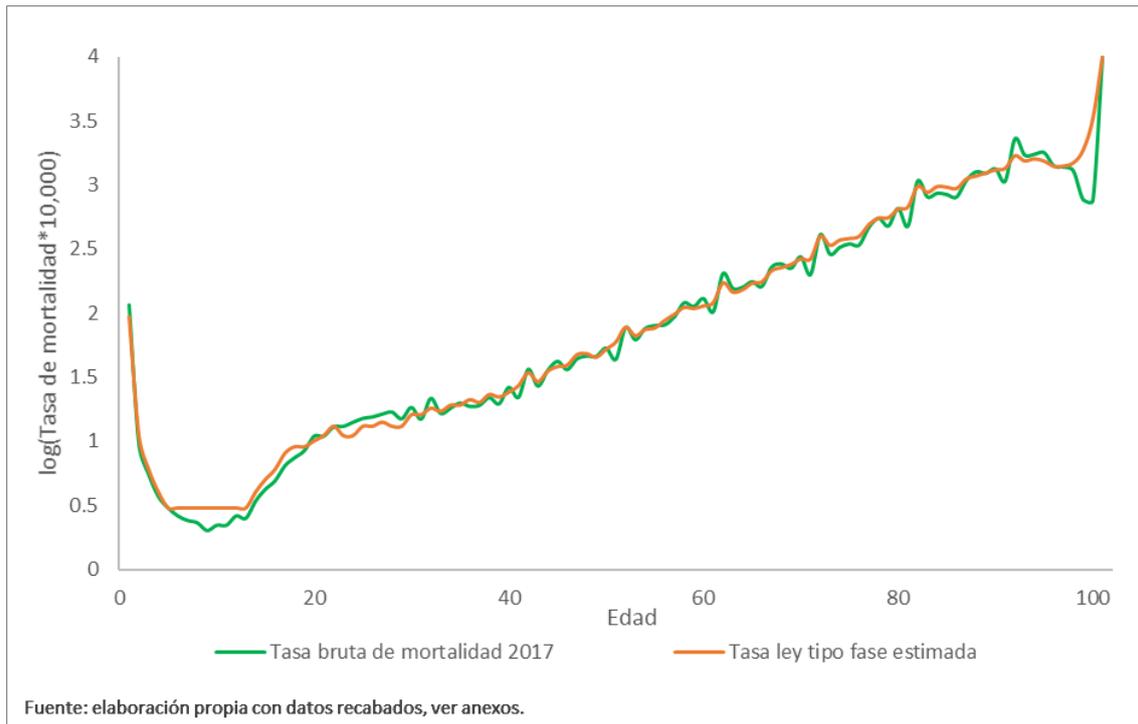
Las defunciones fueron las registradas por la Secretaría de Salud y la población se estimó tomando como base la población a cada edad registrada en el censo realizado por INEGI en 2010 e incrementada cada año con la tasa de crecimiento poblacional publicada por el INEGI.

Gráfico 14. Mortalidad mexicana en 2016.



Es posible apreciar que la tasa bruta de mortalidad en México en 2016 es estrechamente cercana a la tasa de mortalidad para la población mexicana cuando el envejecimiento de las personas se modela mediante un proceso de saltos de Markov. Puede observarse que las curvas son muy similares a lo largo de toda la gráfica, pues presentan el mismo comportamiento y magnitudes estrechamente cercanas.

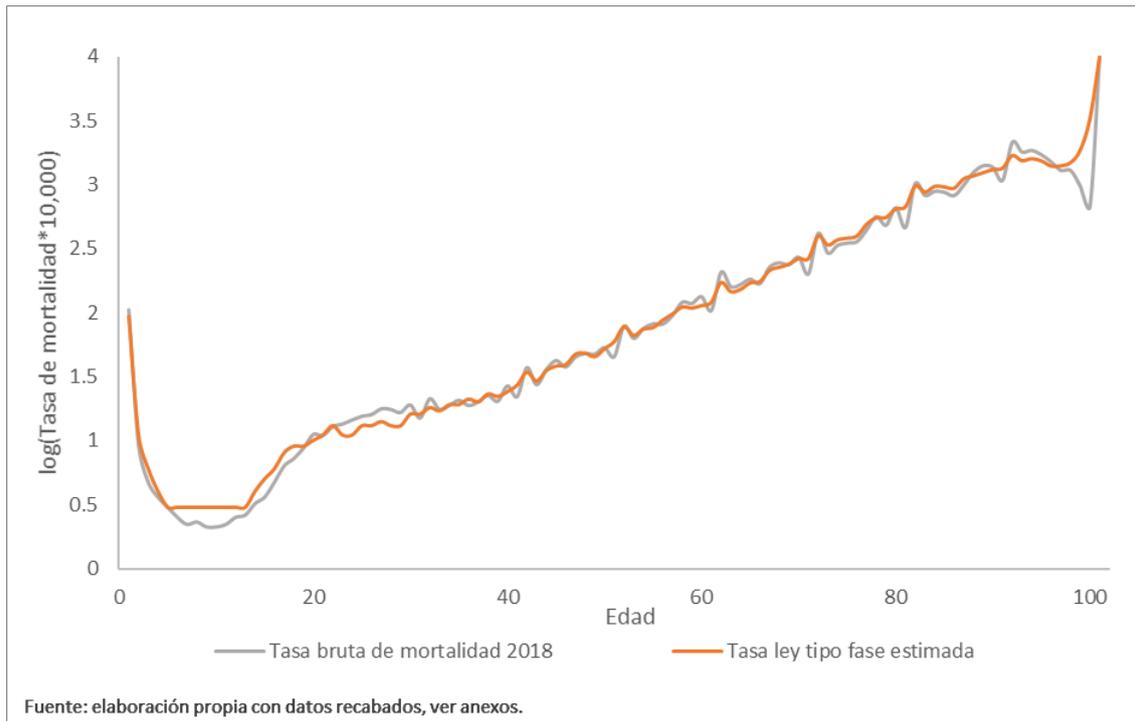
Gráfico 15. Mortalidad mexicana en 2017.



De igual manera, la tasa ajustada en este trabajo presenta una semejanza estrecha con la mortalidad real de la población mexicana en 2017. El Gráfico 15 muestra que el comportamiento de la mortalidad en México de 2000 a 2015 se mantiene para el año 2017.

De igual manera que en el Gráfico 16, es altamente notorio que las tasas ajustadas tienen una buena aproximación a las tasas reales, pues ajustan de buena manera inclusive las crestas y valles advertidos en las tasas reales registradas en México.

Gráfico 16. Mortalidad mexicana en 2018.



De manera análoga, las defunciones registradas en México en 2018 tienen un comportamiento semejante a las tasas ajustadas en el desarrollo de este trabajo.

En los Gráficos 15, 16 y 17 se aprecia claramente que las tasas brutas de mortalidad observadas en México en los años 2016, 2017 y 2018 y la tasa de mortalidad estimada con la ley tipo fase son considerablemente cercanas. Por lo que puede decirse que el ajuste realizado es cercano a las defunciones registradas durante los 3 años siguientes al periodo de estudio.

Es importante destacar que el comportamiento de ambas curvas es muy similar, con lo que se puede aseverar que la tabla de mortalidad construida en este trabajo (para la población mexicana modelando el tiempo transcurrido hasta la muerte de cada individuo mediante una distribución tipo fase) ajusta de manera cercana la mortalidad registrada en México en el periodo 2000-2015.

Inclusive el ajuste es cercano a la mortalidad registrada en los 3 años siguientes, por lo que sería viable utilizarla en cálculos que involucren probabilidades de fallecimiento o supervivencia en un periodo de tiempo posterior al periodo de estudio, siempre y cuando no se tenga evidencia de la aparición de nuevos factores que influyan de manera importante en la mortalidad o el envejecimiento de los mexicanos.

Capítulo 5. Conclusiones

Recordando que el objetivo del proyecto que se presentó a lo largo de este trabajo es comprobar que es posible utilizar el modelo propuesto por Esparza y Baltazar (2018) para aproximar la tasa de mortalidad de la población mexicana. El cual se basa en que el envejecimiento de los mexicanos puede medirse mediante una estructura de edad fisiológica y modelarse mediante un proceso de saltos de Markov, para obtener que el tiempo de vida de cada persona sigue una distribución tipo fase.

Durante el extenso trabajo se realizó un breve recorrido por algunos de los modelos que han surgido a lo largo del tiempo para la medición de la mortalidad, posteriormente se presentaron los conceptos elementales para el desarrollo del modelo tipo fase que también fue claramente expuesto.

Para alcanzar el objetivo se trabajó con información disponible en México en el periodo comprendido entre 2000 y 2018. Los datos que se utilizaron fueron tomados del INEGI, la Secretaría de Salud y del INSP. Se utilizaron los primeros 16 años (2000 a 2015) para realizar el ajuste del modelo de distribuciones tipo fase y los 3 años restantes (2016 a 2018) para evaluar el ajuste de la mortalidad estimada con respecto a la mortalidad registrada posterior al periodo de estudio.

Como pudo apreciarse durante el desarrollo del presente trabajo, se asevera que la ley de mortalidad tipo fase modela de forma adecuada la mortalidad registrada en México de 2000 a 2018. Lo cual permite obtener una tabla que contiene la probabilidad de muerte para cada edad y que es cercana a la mortalidad real registrada en México. Por lo que se puede decir que el ajuste se adecua apropiadamente a la realidad.

Haciendo viable considerar a la ley tipo fase como un método de aproximar la probabilidad de muerte futura de la población mexicana mientras las características actuales sean concordantes con posibles características futuras. Es decir, mientras no se tenga evidencia que permita aseverar posibles cambios sustanciales en la población en estudio que puedan cambiar drásticamente el comportamiento de las defunciones.

Lo anterior se debe, en buena medida a la consideración inicial de que la edad fisiológica de un mexicano no depende exclusivamente del tiempo y que el envejecimiento no se presenta necesariamente en edades consecutivas. Si bien esto es así en la mayoría de los casos, existen otros factores que afectan dicho proceso. Un ejemplo de esto es los accidentes o enfermedades que derivan en invalidez, ya que como se observó en el Gráfico 12 la probabilidad de fallecimiento es significativamente distinta.

Si bien, se observó que el ajuste realizado se acerca a la realidad, puede apreciarse que presenta diferencias importantes al nacer, lo cual puede deberse a que la mortalidad infantil está fuertemente influenciada por causas endógenas y el modelo da mayor prioridad a las causas exógenas.

Otra de las diferencias se presenta de los 8 a los 10 años, edades en las cuales la mortalidad mexicana disminuye notablemente, lo que podría deberse a que

corresponde a edades en la que los niños son ligeramente más conscientes de lo que podría suceder si realizan ciertas acciones consideradas peligrosas.

Además, lucen diferencias en las tasas alrededor de los 50, 60, 70, 80 y 90 años. Una posible causa de esto es el sesgo a múltiplos de 10 al momento de declarar edades. Es muy probable también, que una de las causas de dichas discrepancias sea la falta de pensiones, lo que ocasiona que las personas sigan trabajando aún después de las edades de retiro. Ya sea de manera activa en el mercado laboral para lograr un deficiente sustento económico, o bien, realizando labores domésticos y cuidado de menores con la finalidad de obtener las condiciones mínimas necesarias para vivir. Lo cual claramente interviene en el envejecimiento.

Aunado a lo anterior, las nada equitativas condiciones de vida de los mexicanos inducen a pensar que es en edades avanzadas cuando de los hábitos desarrollados en edades tempranas, así como el acceso a servicios de salud, alimentación básica o actividades recreativas repercuten en el envejecimiento haciéndolas más evidentes. Así, si una persona vive más allá de los 85 años (una década más que la esperanza de vida), es usual pensar que podría haber tenido acceso a mejores servicios de salud, una ocupación con un riesgo bajo, una alimentación saludable y balanceada, entre muchas cosas más que podrían derivar en una disminución en la probabilidad de muerte posterior y que es probable que viva más años, inclusive sería posible que gozara más allá de 100 años de vida (edad límite considerada en este trabajo).

Dado que la probabilidad de muerte estimada exhibe discrepancias relativamente pequeñas con respecto a la mortalidad real registrada, al calcular la esperanza de vida al nacer no se obtienen variaciones significativas con respecto a las publicadas por INEGI o CONAPO. Sin embargo, es posible apreciar que a pesar de que la tabla considera la extinción de la población a edad 100, la esperanza de vida a esa edad es de 10 años, lo cual puede ser derivado de la disminución en la mortalidad observada a partir de la edad 80 aproximadamente.

La probabilidad de muerte ajustada es ventajosa en el sentido de que es muy similar a la mortalidad real observada en México en el periodo de estudio. Pues al realizar el ajuste con el estimador máximo verosímil la curva real se suaviza, manteniendo las crestas y valles observados realmente.

No obstante, es creíble pensar que mejorando la calidad de la información podría tenerse un ajuste que fuera aún más similar a la mortalidad real. Además, la mortalidad registrada no necesariamente corresponde a la mortalidad real acontecida en México debido a que es posible que la edad de defunción registrada esté mal especificada. Esto en el sentido de que en el ámbito demográfico es bien sabido que existe una variación en la edad que declaran tener las personas, existiendo un sesgo hacia los múltiplos de 5 y 10. Regularmente, el sesgo aumenta en edades avanzadas pues muchas veces las personas no recuerdan su edad cronológica real. Lo cual hace discutible pensar que de la misma manera la edad de defunción podría estar registrada con ciertos errores.

Así mismo, si se tuvieran datos de mejor calidad podría construirse un índice de hábitos saludables distinto para cada edad, lo cual posiblemente conseguiría una mejor estimación a las tasas de mortalidad reales.

Usualmente en el cálculo actuarial se utilizan curvas de mortalidad suavizadas para disminuir variaciones importantes al pasar de los años. Lo mencionado anteriormente podría considerarse una desventaja del método para lo cual podría utilizarse algún método para suavizar aún más la curva obtenida.

Sin embargo, es valioso remarcar que el método utilizado realiza una aproximación muy cercana a la mortalidad registrada en México, inclusive para años posteriores al periodo de estudio, por lo que es viable evaluar su impacto en áreas actuariales, por ejemplo, en los seguros, las pensiones, las proyecciones demográficas u otras áreas que requieran estimar las defunciones de los individuos de la población mexicana.

Otra de las ventajas del método es que a partir de una muestra de datos en determinados puntos del tiempo permite simular poblaciones que se comportan de manera similar a la población real.

Además, al considerar que el de envejecimiento de los individuos es similar a un proceso de saltos de Markov permite tener la posibilidad de emplear el método de distribuciones tipo fase inclusive cuando los datos de la población en estudio solo se tienen de forma discreta. Es decir, solo en ciertos momentos del tiempo sin saber exactamente si la edad fisiológica en la que se encuentran los individuos al realizar el registro fue la única visitada después del último registro o si se transitó por más edades antes de llegar a la edad registrada. Situación más realista pues en la práctica la información se registra cada cierto periodo de tiempo, por ejemplo, anualmente, quinquenalmente o inclusive cada 10 años como es el caso de los censos de población realizados en México.

Es bien sabido que, al utilizar modelos matemáticos para estimar probabilidades de muerte, uno de los supuestos más importantes para sostener que las tasas de mortalidad ajustadas reflejarán adecuadamente las defunciones futuras es considerar que las condiciones pasadas que dieron origen a los registros históricos serán en cierta medida afines a condiciones posteriores.

Es por eso, por lo que resulta conveniente realizar revisiones periódicas de los registros reales comparándolas con los modelos ajustados. Por esta razón, es de suma importancia mejorar la calidad de los registros y el acceso a los mismos, así como hacer revisiones periódicas de las tasas registradas, sobre todo cuando se detectan factores que influyen de manera importante en la supervivencia de los individuos.

Un ejemplo de esto es la situación actual derivada del virus del SARS-CoV-2, pues tras el primer año desde su aparición, las defunciones se han visto incrementadas de manera importante, por lo que será viable analizar si el patrón de muertes por esta causa continua, si cambiará y en que magnitud los registros de defunciones en México.

Adicionalmente podría analizarse el ajuste utilizando el modelo de distribuciones tipo fase en la aproximación de tasas de mortalidad por sexo, por estrato socioeconómico,

por región, por ocupación, etc. Ya que es natural pensar que, dado que una de las principales consideraciones del modelo es la influencia de factores exógenos en el envejecimiento, este podría verse fuertemente influenciado por las condiciones regionales, económicas o sociales de los individuos.

Bibliografía y referencias

- [1] Aburto, L. I., Freyre, G. F., y et al., e. (2018). *Principales problemas de Salud Pública en México*. Ciudad de México: UNAM, FES Zaragoza.
- [2] Asmussen, S. y Hobolth, A. (2012). *Markov bridges, bisection and variance reduction*. In L. Plaskota & H. Wozniakowski. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2010., 23, 3–22.
- [3] Baltazar, F. L. (2011). *Estimation of discretely observed Markov processes*. México, 2-19.
- [4] Beltrán, P. A. (2010). *Manual de Actuaría*. En P. A. Beltrán, Manual de Actuaría. Cuarta Edición del 2010 del manual sin publicar (págs. 3-20).
- [5] Bertran, M. V. (2010). *Acercamiento antropológico de la alimentación y la salud en México*. Physis, Revista de Saúde Coletiva, 387-411.
- [6] Billingsley, P. (1961). *Statistical Inference for Markov Processes*. University of Chicago Press.
- [7] Biscarat, J., Celeux, G. y Diebolt, J. (1992). *STOCHASTIC VERSIONS OF THE EM ALGORITHM*. TECHNICAL REPORT No.227, University of Washington, Department of Statistics, GN-22, Seattle, Washington.
- [8] Bladt, Morgens. (2005). *A Review on Phase-type Distributions and their Use in Risk Theory*. ASTIN Bulletin, 35, pp 145-161 doi: 10.1017/S0515036100014100.
- [9] Bladt, M. y Nielsen, B. F. (2017). *Matrix-Exponential Distributions in Applied Probability*. Springer.
- [10] Celeux, G. y Diebolt, J. (1986). *The SEM algorithm: a probabilistic teacher algorithm derived from the EM algorithm for mixture problem*. Computational Statistics Quarterly., 2, 599–613.
- [11] Centros para el Control y la Prevención de Enfermedades. (2008). *Centros para el Control y la Prevención de Enfermedades*. Obtenido de La obesidad en los adultos en Estados Unidos, BRFSS, 2007: <https://www.cdc.gov/spanish/datos/obesidadadultos.html>
- [12] Centros para el Control y la Prevención de las Enfermedades. (2020). *Centros para el Control y la Prevención de las Enfermedades*. Obtenido de Carga del consumo de cigarrillos en los EE. UU.: <https://www.cdc.gov/tobacco/campaign/tips/spanish/acerca/Carga-del-consumo-de-tabaco-en-los-Estados-Unidos.html>
- [13] Coale, A. y Guo, G. (1989). *Revised Regional Model Life Tables at Very Low Mortality*. Population Index, 55, 614–643.
- [14] Coale, A. y Kisker, E. (1990). *Defects in Data on Old-age Mortality in the United States: New Procedures for Calculating Mortality Schedules and Life Tables at the Highest Ages*. Asian and Pacific Population Forum, 4, 1-31.
- [15] CONAPO. (s.f.). *Indicadores demográficos de México de 1950 a 2050*. Obtenido de http://www.conapo.gob.mx/work/models/CONAPO/Mapa_Ind_Dem18/index_2.html

- [16]Cordero, E. (1968). *La subestimación de la mortalidad infantil en México*. Estudios Demográficos y Urbanos, 2(01), 44–62. <https://doi.org/10.24201/edu.v2i01.61>
- [17]Craik, A. (2002). *Edward Sang (1805–1890): calculator extraordinary', special number of Newsletter in memory of J.G. Fauvel*. British Society for the History of Mathematics Newsletter., 45, 32-45.
- [18]Dempster, A.P., Rubin, D.B. y Laird, N.M. (1977). *Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm (with discussion)*. Journal of the Royal Statistical Society B., 39, 1-38.
- [19]Esparza, L. y Baltazar, F. (2018). *A stochastic Expectation–Maximisation (EM) algorithm for construction of mortality tables*. Annals of Actuarial Science, 12(1), 1-22.
- [20]Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Málaga. (2008). *Aulas TIC, Programación docente*. Recuperado el 15 de 09 de 2020, de Campus virtual, enseñanza virtual y laboratorios tecnológicos.: <http://webpersonal.uma.es/~afdez/slab/supervivencia/index.htm>
- [21]García-Moro, C., Hernández, M. y Martinic, M. (1995). *Estructura de la población infantil en la población colonizadora de Magallanes*. Vol. 23, 67-74.
- [22]Gobierno de México. *Índice de cobertura de capital mínimo de garantía*. CNSF. recuperado el:18 de 01 de 2021. <http://www.cnsf.gob.mx/EntidadesSupervisadas/InstitucionesSociedadesMutualistas/Indicadores/Paginas/IndiceCoberturaCapitalMinimoGarantia.aspx#:~:text=%E2%80%8BEI%20capital%20m%C3%ADnimo%20de,t%C3%A9cnicos%2C%20de%20reaseguro%2Cn%20financieros%20y>
- [23]Gomez, D. Y., y Velázquez, R. E. (2019). *Salud y cultura alimentaria en México*. Revista Digital Universitaria, Vol. 20, Número 1.
- [24]Gompertz, B. (1825). *On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London., 115, 513–583.
- [25]González, C.A., Orozco, K., Arias, M.P., Carbajal, M.G. y Samper, R. (2018). *Envejecimiento y mortalidad: condiciones de salud, económicas y familiares en el último año de vida de las personas mayores en México*. Papeles de población, 24(97), 43-62. <https://doi.org/10.22185/24487147.2018.97.24>
- [26]Halley, E. (1693). *An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslau; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 17, 596–610.
- [27]Halley, E. (1693). *An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables*. Journal of the Institute of Actuaries, 49–80.
- [28]Hebrero Martinez, Mirna. (2016). *Mortalidad y envejecimiento en México*. Instituto de Investigaciones Sociales de la UNAM. 8 de Noviembre de 2016.
- [29]Heligman, M.A.L. y Pollard, J.H. (1980). *The age pattern of mortality*. Journal of the Institute of Actuaries., 107, 49–80.

- [30]Huerta, L. y Reynaud, C. (2009). *La actuaría en México* (Vol. Primera edición). México, D.F.
- [31]INEGI. (20 de 01 de 2020). *Módulo de Práctica Deportiva y Ejercicio Físico (MOPRADEF)*.
Obtenido de Módulo de Práctica Deportiva y Ejercicio Físico (MOPRADEF):
<https://www.inegi.org.mx/programas/mopradeef/>
- [32]INEGI. (s.f.). *INEGI*. Obtenido de <https://www.inegi.org.mx/programas/ccpv/1895/>
- [33]Instituto Nacional de las Mujeres. (2015). *Situación de las personas adultas mayores en México*. Recuperado el 31 de 03 de 2022, de http://cedoc.inmujeres.gob.mx/documentos_download/101243_1.pdf
- [34]Jacobsen, M. (1982). *Statistical analysis of counting processes*. Lecture Notes in Statistics, 12.
- [35]Jones, H.B. (1956). *A special consideration of the aging process, disease and life expectancy*. In J.H. Lawrence & C.A. Tobias. *Advances in Biological and Medical Physics*, 4, 281–337.
- [36]Karlin, S. y Taylor, H. M. (1975). *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press, Orlando.
- [37]Knowles, D. P. (2011). *Inferring a measure of physiological age from multiple ageing related phenotypes*. NIPS Workshop From Statistical Genetics to Predictive Models in Personalized Medicine.
- [38]Küchler, H. y Sorensen, M. (1997). *Exponential Families of Stochastic Processes*. Springer.
- [39]Lin, X.S. y Liu, X. (2007). *Markov aging process and phase-type law of mortality*. North American Actuarial Journal., 11(4), 92–109.
- [40]López-Ríos, O. (1996). *SciELO - Salud Pública*. Recuperado el 31 de 03 de 2022, de <https://www.scielosp.org/article/spm/1997.v39n1/16-24#ModalArticles>
- [41]Loprinzi P.D., Branscum, A., Hanks, J. y Smit, E. (2016). *Healthy lifestyle characteristics and their joint association with cardiovascular disease biomarkers in US adults*. Mayo Clinic Proceedings, 432-442.
- [42]Makeham, W.M. (1980). *On the law of mortality and the construction of annuity tables*. The Assurance Magazine, and Journal of the Institute of Actuaries., 8(06), 301–310.
- [43]Moivre, A.D. (1725). *Annuities Upon Lives or The Valuation of Annuities Upon Any Number of Live; as alfo, of Reversions*. W.P. and sold by Francis Fayram.
- [44]Motoyuki, A. (2007). *Matemática Actuarial. Valuaciones Actuariales*. Córdoba-República Argentina.: Ediciones EUDECOR, 62-67.
- [45]Rincón, L. (2011). *Introducción a los procesos estocásticos*. México: Facultad de Ciencias, UNAM.
- [46]Rincón, L. (2012). *Introducción a los procesos estocásticos*. México: Facultad de Ciencias, UNAM.
- [47]Rincón, L. (2015). *0630 Matrices estocásticas*. México. Recuperado el 19 de 09 de 2020, de <https://www.youtube.com/watch?v=gJ8368Udxzs>

- [48]Rincón, L. (2019). *Una introducción a la estadística inferencial*. México: Las prensas de ciencias.
- [49]Rivero, L. (2016). *Notas de simulación e inferencia para procesos de Markov con espacio de estados*. Trabajo de titulación para licenciatura., Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias.
- [50]Roselló, B. (2007). *elmundo.es Salud*. Obtenido de El 75% de los estadounidenses tendrá sobrepeso en 2015: <https://www.elmundo.es/elmundosalud/2007/07/26/corazon/1185449671.html>
- [51]Salud, N. y. (2013). *Qué comemos los mexicanos y el resto del mundo*. Obtenido de Nutrición y Salud: <http://www.nutricionysalud.net/queacutecomemos-los-mexicanos-y-otros-paiacuteses.html>
- [52]SEGOB. (2009). *Diario Oficial de la Federación*. Recuperado el 15 de 09 de 2020, de http://dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5103739&fecha=14/08/2009
- [53]SEGOB. (s.f.). *Diario Oficial de la Federeción* . Obtenido de Secretaría de Hacienda y Crédito Público.- Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.CIRCULAR S-22.2.: https://www.dof.gob.mx/nota_detalle_popup.php?codigo=5103739
- [54]Smith, R. (2012). *Gresham College*. Obtenido de <https://www.gresham.ac.uk/lectures-and-events/john-graunt-the-law-of-decline-and-the-origins-of-urban-historical-demography>
- [55]Tapia-Conyer, R., y et al., e. (2001). *Salud Pública de México*. Salud Pública de México, Vol.43, Número 5.
- [56]Trust for America's Health. (2019). *Trust for America's Health*. Obtenido de Tasas de obesidad en Estados Unidos con altos récords históricos: <https://www.tfah.org/article/tasas-de-obesidad-en-estados-unidos-con-altos-records-historicos/>
- [57]Valdés, A. M. (2009). *Uso de las funciones de supervivencia en las ciencias sociales y en los estudios de población: Aplicación al caso de México*. Papeles de población, 15(61), 53-74. Recuperado el 15 de 09 de 2020, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-74252009000300004&lng=es&tlng=es
- [58]Vargas, K. (2014). *CNSF*. Recuperado el 2018, de Cálculo de la edad máxima estimada de la tabla de mortalidad mexicana CNSF 2000-I, su importancia y sus aplicaciones.: https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/75951/Segundo_Lugar_Seguros_L_EUCE_2014.pdf
- [59]Velázquez, U. M. (2004). *El envejecimiento de la población*. Ciencias. Vol. 75. 28-34.

Anexo 1. Tabla de mortalidad para la población mexicana 2000 – 2015 bajo ley tipo fase

La siguiente tabla contiene la tasa bruta de mortalidad observada en México en el periodo de estudio, así como la tasa de mortalidad estimada en este proyecto.

Tabla 9. Tabla de mortalidad bajo ley tipo fase.

Edad	Tasa bruta de mortalidad observada	Tasa de mortalidad estimada tipo fase
0	0.0142	0.0093
1	0.0013	0.0011
2	0.0007	0.0006
3	0.0004	0.0004
4	0.0003	0.0003
5	0.0003	0.0003
6	0.0003	0.0003
7	0.0003	0.0003
8	0.0002	0.0003
9	0.0002	0.0003
10	0.0002	0.0003
11	0.0003	0.0003
12	0.0003	0.0003
13	0.0004	0.0004
14	0.0004	0.0005
15	0.0005	0.0006
16	0.0007	0.0008
17	0.0008	0.0009
18	0.0008	0.0009
19	0.0010	0.0010
20	0.0010	0.0011
21	0.0012	0.0013
22	0.0011	0.0011
23	0.0011	0.0011
24	0.0012	0.0013
25	0.0013	0.0013
26	0.0013	0.0014
27	0.0014	0.0013
28	0.0014	0.0013
29	0.0015	0.0016
30	0.0014	0.0016
31	0.0019	0.0018
32	0.0016	0.0017
33	0.0018	0.0019
34	0.0018	0.0019

Edad	Tasa bruta de mortalidad observada	Tasa de mortalidad estimada tipo fase
35	0.0019	0.0021
36	0.0019	0.0020
37	0.0022	0.0023
38	0.0021	0.0022
39	0.0023	0.0024
40	0.0022	0.0027
41	0.0035	0.0034
42	0.0026	0.0029
43	0.0033	0.0035
44	0.0037	0.0038
45	0.0034	0.0039
46	0.0044	0.0047
47	0.0048	0.0048
48	0.0045	0.0045
49	0.0051	0.0052
50	0.0044	0.0059
51	0.0079	0.0077
52	0.0062	0.0066
53	0.0074	0.0074
54	0.0076	0.0076
55	0.0078	0.0087
56	0.0090	0.0097
57	0.0112	0.0110
58	0.0104	0.0108
59	0.0118	0.0113
60	0.0088	0.0120
61	0.0190	0.0171
62	0.0144	0.0145
63	0.0149	0.0151
64	0.0166	0.0170
65	0.0151	0.0174
66	0.0213	0.0213
67	0.0227	0.0225
68	0.0218	0.0238
69	0.0268	0.0264
70	0.0183	0.0263
71	0.0436	0.0396
72	0.0301	0.0336
73	0.0357	0.0369
74	0.0373	0.0380
75	0.0328	0.0395
76	0.0450	0.0489
77	0.0544	0.0549

Edad	Tasa bruta de mortalidad observada	Tasa de mortalidad estimada tipo fase
78	0.0467	0.0552
79	0.0632	0.0645
80	0.0434	0.0669
81	0.1007	0.0970
82	0.0782	0.0870
83	0.0885	0.0966
84	0.0867	0.0956
85	0.0740	0.0933
86	0.0916	0.1108
87	0.0982	0.1166
88	0.1042	0.1234
89	0.1081	0.1304
90	0.0850	0.1341
91	0.1580	0.1681
92	0.1258	0.1531
93	0.1230	0.1588
94	0.1167	0.1526
95	0.0942	0.1392
96	0.0859	0.1398
97	0.0814	0.1482
98	0.0649	0.1855
99	0.0526	0.3279
100 y más	1.0000	1.0000

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 2. Esperanza de vida estimada

A continuación, se presenta la esperanza de vida estimada a cada edad usando la ley tipo fase.

Tabla 10. Esperanza de vida estimada.

Edad	Esperanza de vida estimada con población simulada
0	75.86
1	75.94
2	75.04
3	74.09
4	73.12
5	72.15
6	71.17
7	70.19
8	69.20
9	68.22
10	67.24
11	66.25
12	65.27
13	64.29
14	63.31
15	62.34
16	61.37
17	60.41
18	59.46
19	58.51
20	57.57
21	56.63
22	55.69
23	54.75
24	53.81
25	52.88
26	51.94
27	51.01
28	50.08
29	49.15
30	48.22
31	47.29
32	46.38
33	45.45
34	44.53
35	43.61
36	42.69
37	41.78

Edad	Esperanza de vida estimada con población simulada
38	40.87
39	39.95
40	39.04
41	38.13
42	37.26
43	36.35
44	35.47
45	34.60
46	33.72
47	32.86
48	32.02
49	31.16
50	30.32
51	29.45
52	28.68
53	27.85
54	27.06
55	26.26
56	25.46
57	24.69
58	23.96
59	23.21
60	22.48
61	21.67
62	21.08
63	20.38
64	19.68
65	19.00
66	18.28
67	17.66
68	17.05
69	16.42
70	15.85
71	15.13
72	14.79
73	14.23
74	13.72
75	13.23
76	12.65
77	12.21
78	11.86
79	11.41
80	11.11
81	10.58
82	10.65

Edad	Esperanza de vida estimada con población simulada
83	10.48
84	10.40
85	10.30
86	10.04
87	9.96
88	9.92
89	9.93
90	9.97
91	9.78
92	10.31
93	10.58
94	10.86
95	11.10
96	11.11
97	11.04
98	10.90
99	10.57
100 y más	10.08

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 3. Fuentes de los datos usados en la construcción de la tabla de mortalidad bajo la ley tipo fase

Este anexo contiene las fuentes de las cuales fueron tomados todos los datos utilizados durante el desarrollo de este trabajo.

Las cifras de la población mexicana al año 2000 y 2010 fueron tomadas de los respectivos censos realizados por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), disponibles en las siguientes direcciones electrónicas:

<http://www.beta.inegi.org.mx/proyectos/ccpv/2000/>

<http://www.beta.inegi.org.mx/proyectos/ccpv/2010/>

Las tasas de crecimiento poblacional para 2000 y 2010 fueron tomadas de la página electrónica del mismo Instituto, disponibles en la dirección electrónica:

http://www.beta.inegi.org.mx/app/tabulados/pxweb/inicio.html?rxid=d518b312-a32e-4d23-a8dd-08a64c187a6c&db=Poblacion&px=poblacion_3

Los registros de las defunciones y egresos hospitalarios para cada año fueron tomados de la página electrónica de la Secretaría de Salud, en la sección *Datos Abiertos-Defunciones y Datos Abiertos-Egresos Hospitalarios*. Los cuales se encuentran en las siguientes direcciones electrónicas:

http://www.dgis.salud.gob.mx/contenidos/basesdedatos/da_defunciones_gobmx.htm
|

http://www.dgis.salud.gob.mx/contenidos/basesdedatos/da_egresoshosp_gobmx.htm
|

Los datos anteriores son de acceso libre y abierto a todo público que desee consultarlos.

Los datos sobre ejercicio, hábitos alimenticios, Índice de Masa Corporal (IMC) y fumadores fueron tomados de la Encuesta Nacional de Salud y Nutrición del año 2012 (ENSANUT 2012) realizada por el Instituto Nacional de Salud Pública (INSP) y la Secretaría de Salud. Para tener acceso a dichos datos es necesario registrarse en el portal del Instituto indicando los datos personales del solicitante, actividad, finalidad de los datos, responsable de la investigación e institución. Los datos disponibles en el portal con dirección electrónica: <https://ensanut.insp.mx/basesdoctos.php> son de acceso libre una vez completado el debido registro.

Los datos fueron consultados durante los meses de febrero, marzo, abril de 2018 y febrero de 2020.

Anexo 4. Clasificación de la información

Enfermedades, accidentes y lesiones consideradas en la segmentación de la información para la construcción de γ_i .

Tabla 11. Clasificación de los egresos hospitalarios.

Grupo	Causa
Enfermedades	Septicemia, tumor maligno, melanoma maligno, leucemia, diabetes mellitus, parkinsonismo, enfermedades cardíacas, enfermedades renales, hipertensión, infartos, enfermedades cardiovasculares, enfermedades cerebrovasculares, influenza, neumonía, bronquitis, enfermedades pulmonares crónicas, asma, síndrome nefrótico, insuficiencia renal, insuficiencia cardíaca, cirrosis hepática alcohólica y alzhéimer.
Accidentes	Peatón, ciclista, conductor, pasajero u ocupante, lesionado en accidente en cualquier tipo de vehículo o embarcación, ahogamiento accidental, accidente de cualquier tipo, caídas accidentales y secuelas de accidentes.
Intento de suicidios	Envenenamiento autoinfligido, lesión autoinfligida intencionalmente y secuelas de lesiones autoinfligidas.

Fuente: Elaboración propia con datos del catálogo de causas de egresos hospitalarios de la Secretaría de Salud.

Anexo 5. EMSSA 09

Tabla de mortalidad de la experiencia demográfica de la seguridad social al 2009. Utilizada por los institutos de seguridad social del país para aproximar la mortalidad de asegurados no inválidos.

Tabla 12. Tabla de tasas de mortalidad de activos para la Seguridad Social, 2009.

Edad	EMSSAH-09 (q _x)	EMSSAM-09 (q _x)	Tasa de Mejora Hombres	Tasa de Mejora Mujeres
0	0.00138	0.00092	0.03594	0.03595
1	0.00138	0.00092	0.01826	0.01592
2	0.00139	0.00092	0.01769	0.02111
3	0.00140	0.00092	0.02100	0.02707
4	0.00142	0.00092	0.02550	0.03293
5	0.00143	0.00092	0.03578	0.03639
6	0.00145	0.00092	0.04267	0.04215
7	0.00147	0.00092	0.04684	0.04643
8	0.00149	0.00092	0.04851	0.04901
9	0.00152	0.00092	0.04790	0.04977
10	0.00155	0.00092	0.04430	0.04873
11	0.00158	0.00092	0.04110	0.04668
12	0.00161	0.00092	0.03825	0.04374
13	0.00165	0.00092	0.03563	0.04092
14	0.00168	0.00092	0.03321	0.03872
15	0.00172	0.00092	0.03099	0.03736
16	0.00177	0.00092	0.02902	0.03690
17	0.00181	0.00092	0.02736	0.03724
18	0.00186	0.00093	0.02604	0.03823
19	0.00191	0.00093	0.02508	0.03966
20	0.00197	0.00093	0.02445	0.04133
21	0.00202	0.00093	0.02413	0.04307
22	0.00209	0.00094	0.02407	0.04474
23	0.00215	0.00094	0.02420	0.04622
24	0.00222	0.00095	0.02450	0.04744
25	0.00230	0.00095	0.02490	0.04834
26	0.00237	0.00096	0.02535	0.04889
27	0.00246	0.00096	0.02582	0.04908
28	0.00254	0.00097	0.02625	0.04894
29	0.00264	0.00098	0.02663	0.04850
30	0.00274	0.00099	0.02692	0.04779
31	0.00284	0.00100	0.02710	0.04684
32	0.00295	0.00101	0.02716	0.04571
33	0.00307	0.00102	0.02709	0.04443
34	0.00319	0.00104	0.02689	0.04304
35	0.00332	0.00105	0.02657	0.04156
36	0.00346	0.00107	0.02612	0.04004
37	0.00361	0.00109	0.02558	0.03849
38	0.00377	0.00111	0.02495	0.03694
39	0.00393	0.00113	0.02426	0.03540
40	0.00411	0.00116	0.02351	0.03389
41	0.00430	0.00118	0.02273	0.03242

Edad	EMSSAH-09 (qx)	EMSSAM-09 (qx)	Tasa de Mejora Hombres	Tasa de Mejora Mujeres
42	0.00450	0.00121	0.02193	0.03100
43	0.00471	0.00124	0.02112	0.02964
44	0.00493	0.00128	0.02032	0.02834
45	0.00517	0.00132	0.01953	0.02712
46	0.00542	0.00136	0.01877	0.02596
47	0.00569	0.00141	0.01804	0.02488
48	0.00598	0.00146	0.01734	0.02386
49	0.00629	0.00151	0.01667	0.02292
50	0.00661	0.00158	0.01605	0.02204
51	0.00696	0.00164	0.01546	0.02123
52	0.00733	0.00172	0.01491	0.02047
53	0.00772	0.00180	0.01439	0.01977
54	0.00814	0.00189	0.01391	0.01913
55	0.00859	0.00199	0.01346	0.01853
56	0.00906	0.00211	0.01313	0.01806
57	0.00957	0.00223	0.01279	0.01759
58	0.01011	0.00237	0.01245	0.01713
59	0.01069	0.00253	0.01211	0.01666
60	0.01131	0.00270	0.01177	0.01619
61	0.01198	0.00290	0.01143	0.01572
62	0.01268	0.00312	0.01109	0.01525
63	0.01344	0.00336	0.01075	0.01478
64	0.01425	0.00364	0.01041	0.01431
65	0.01512	0.00396	0.01007	0.01384
66	0.01604	0.00432	0.00973	0.01337
67	0.01703	0.00473	0.00939	0.01290
68	0.01810	0.00520	0.00904	0.01243
69	0.01924	0.00574	0.00870	0.01195
70	0.02045	0.00636	0.00836	0.01148
71	0.02176	0.00707	0.00802	0.01101
72	0.02316	0.00790	0.00768	0.01053
73	0.02467	0.00886	0.00733	0.01006
74	0.02628	0.00998	0.00699	0.00959
75	0.02801	0.01130	0.00665	0.00911
76	0.02986	0.01285	0.00651	0.00890
77	0.03185	0.01467	0.00637	0.00868
78	0.03399	0.01683	0.00624	0.00847
79	0.03629	0.01940	0.00613	0.00823
80	0.03875	0.02247	0.00604	0.00798
81	0.04139	0.02614	0.00597	0.00772
82	0.04423	0.03056	0.00591	0.00744
83	0.04728	0.03588	0.00587	0.00717
84	0.05055	0.04233	0.00584	0.00689
85	0.05406	0.05014	0.00580	0.00661
86	0.05783	0.05964	0.00575	0.00632
87	0.06187	0.07121	0.00568	0.00603
88	0.06621	0.08530	0.00559	0.00574
89	0.07087	0.10245	0.00548	0.00545
90	0.08147	0.12327	0.00536	0.00515
91	0.09207	0.14846	0.00522	0.00486
92	0.10439	0.17874	0.00505	0.00456
93	0.11835	0.21478	0.00479	0.00435

Edad	EMSSAH-09 (qx)	EMSSAM-09 (qx)	Tasa de Mejora Hombres	Tasa de Mejora Mujeres
94	0.13418	0.25716	0.00452	0.00414
95	0.15212	0.30616	0.00424	0.00391
96	0.17247	0.36163	0.00396	0.00367
97	0.19554	0.42286	0.00367	0.00342
98	0.22170	0.48842	0.00338	0.00317
99	0.25135	0.55626	0.00308	0.00291
100	0.28497	0.62390	-	-
101	0.32309	0.68873	-	-
102	0.36630	0.74844	-	-
103	0.41530	0.80133	-	-
104	0.47085	0.84648	-	-
105	0.53383	0.88375	-	-
106	0.60523	0.91358	-	-
107	0.68618	0.93683	-	-
108	0.77796	0.95453	-	-
109	0.88202	0.96773	-	-
110	1.00000	1.00000	-	-

Fuente: DOF, S-22.2. Anexo 4.

Anexo 6. EMSSA 09 proyectada al 2015

Siguiendo la metodología de la EMSSA 09 publicada en el Diario Oficial de la Federación, se proyectó la tabla EMSSA 09 al 2015 para realizar la comparación con la tabla bajo la ley tipo fase.

Tabla 13. EMSSA 09 proyectada al 2015.

Edad	Masculino (qx)	Femenino (qx)
0	0.00111	0.00074
1	0.00124	0.00084
2	0.00125	0.00081
3	0.00123	0.00078
4	0.00122	0.00075
5	0.00115	0.00074
6	0.00112	0.00071
7	0.00110	0.00069
8	0.00111	0.00068
9	0.00113	0.00068
10	0.00118	0.00068
11	0.00123	0.00069
12	0.00127	0.00070
13	0.00133	0.00072
14	0.00137	0.00073
15	0.00142	0.00073
16	0.00148	0.00073
17	0.00153	0.00073
18	0.00159	0.00074
19	0.00164	0.00073
20	0.00170	0.00072
21	0.00174	0.00071
22	0.00181	0.00071
23	0.00186	0.00071
24	0.00191	0.00071
25	0.00198	0.00071
26	0.00203	0.00071
27	0.00210	0.00071
28	0.00217	0.00072
29	0.00225	0.00073
30	0.00233	0.00074
31	0.00241	0.00075
32	0.00250	0.00076
33	0.00260	0.00078
34	0.00271	0.00080
35	0.00282	0.00081

Edad	Masculino (q_x)	Femenino (q_x)
36	0.00295	0.00084
37	0.00309	0.00086
38	0.00324	0.00089
39	0.00339	0.00091
40	0.00356	0.00094
41	0.00375	0.00097
42	0.00394	0.00100
43	0.00414	0.00104
44	0.00436	0.00108
45	0.00459	0.00112
46	0.00484	0.00116
47	0.00510	0.00121
48	0.00538	0.00126
49	0.00569	0.00131
50	0.00600	0.00138
51	0.00634	0.00144
52	0.00670	0.00152
53	0.00708	0.00160
54	0.00748	0.00168
55	0.00792	0.00178
56	0.00837	0.00189
57	0.00886	0.00200
58	0.00938	0.00214
59	0.00994	0.00229
60	0.01053	0.00245
61	0.01118	0.00264
62	0.01186	0.00285
63	0.01260	0.00307
64	0.01338	0.00334
65	0.01423	0.00364
66	0.01513	0.00398
67	0.01609	0.00438
68	0.01714	0.00482
69	0.01826	0.00534
70	0.01945	0.00593
71	0.02073	0.00662
72	0.02211	0.00741
73	0.02360	0.00834
74	0.02520	0.00942
75	0.02691	0.01070
76	0.02871	0.01218
77	0.03065	0.01392
78	0.03274	0.01599
79	0.03498	0.01846
80	0.03737	0.02142

Edad	Masculino (q_x)	Femenino (q_x)
81	0.03993	0.02495
82	0.04268	0.02922
83	0.04564	0.03436
84	0.04880	0.04061
85	0.05221	0.04818
86	0.05586	0.05741
87	0.05979	0.06867
88	0.06402	0.08240
89	0.06857	0.09915
90	0.07888	0.11951
91	0.08922	0.14418
92	0.10127	0.17391
93	0.11499	0.20923
94	0.13058	0.25084
95	0.14829	0.29905
96	0.16841	0.35374
97	0.19127	0.41426
98	0.21724	0.47920
99	0.24674	0.54662
100	0.28497	0.62390
101	0.32309	0.68873
102	0.36630	0.74844
103	0.41530	0.80133
104	0.47085	0.84648
105	0.53383	0.88375
106	0.60523	0.91358
107	0.68618	0.93683
108	0.77796	0.95453
109	0.88202	0.96773
110	1.00000	1.00000

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 7. Tabla EMSSA CMG 09

Tabla de mortalidad con experiencia de activos de la seguridad social en México. Refleja la mortalidad de asegurados no inválidos para pensiones otorgadas por la seguridad social. Utilizada por las instituciones de seguros en México para el cálculo del capital mínimo de garantía.

Tabla 14. Tabla de tasas de mortalidad de activos para la Seguridad Social, CMG 2009. Para el capital mínimo de garantía.

Edad	EMSSAH-CMG-09	EMSSAM-CMG-09
0	0.00073	0.00041
1	0.00073	0.00041
2	0.00074	0.00041
3	0.00074	0.00041
4	0.00075	0.00041
5	0.00076	0.00041
6	0.00077	0.00041
7	0.00078	0.00041
8	0.00079	0.00041
9	0.00080	0.00041
10	0.00082	0.00041
11	0.00083	0.00041
12	0.00085	0.00041
13	0.00087	0.00041
14	0.00089	0.00041
15	0.00091	0.00041
16	0.00093	0.00041
17	0.00096	0.00041
18	0.00098	0.00041
19	0.00101	0.00041
20	0.00104	0.00042
21	0.00107	0.00042
22	0.00111	0.00042
23	0.00114	0.00042
24	0.00118	0.00042
25	0.00122	0.00042
26	0.00126	0.00043
27	0.00130	0.00043
28	0.00135	0.00043
29	0.00140	0.00044
30	0.00145	0.00044
31	0.00151	0.00045
32	0.00156	0.00045
33	0.00163	0.00046
34	0.00169	0.00046
35	0.00176	0.00047
36	0.00184	0.00048
37	0.00192	0.00049
38	0.00200	0.00049
39	0.00209	0.00050
40	0.00218	0.00052

Edad	EMSSAH-CMG-09	EMSSAM-CMG-09
41	0.00228	0.00053
42	0.00239	0.00054
43	0.00250	0.00056
44	0.00262	0.00057
45	0.00275	0.00059
46	0.00288	0.00061
47	0.00303	0.00063
48	0.00318	0.00065
49	0.00334	0.00068
50	0.00352	0.00070
51	0.00370	0.00073
52	0.00390	0.00077
53	0.00411	0.00080
54	0.00433	0.00085
55	0.00457	0.00089
56	0.00483	0.00094
57	0.00510	0.00100
58	0.00539	0.00106
59	0.00570	0.00113
60	0.00604	0.00121
61	0.00639	0.00129
62	0.00677	0.00139
63	0.00718	0.00150
64	0.00761	0.00163
65	0.00808	0.00177
66	0.00858	0.00193
67	0.00912	0.00212
68	0.00969	0.00233
69	0.01030	0.00257
70	0.01096	0.00285
71	0.01167	0.00317
72	0.01243	0.00354
73	0.01325	0.00397
74	0.01413	0.00448
75	0.01507	0.00507
76	0.01608	0.00577
77	0.01717	0.00660
78	0.01834	0.00758
79	0.01960	0.00874
80	0.02095	0.01014
81	0.02241	0.01182
82	0.02397	0.01385
83	0.02566	0.01631
84	0.02748	0.01931
85	0.02944	0.02297
86	0.03154	0.02746
87	0.03381	0.03300
88	0.03626	0.03984
89	0.03889	0.04831
90	0.04560	0.06516
91	0.05231	0.08202
92	0.06110	0.09355
93	0.07136	0.10671

Edad	EMSSAH-CMG-09	EMSSAM-CMG-09
94	0.08335	0.12173
95	0.09735	0.13885
96	0.11371	0.15838
97	0.13281	0.18067
98	0.15512	0.20608
99	0.18118	0.23507
100	0.21162	0.26814
101	0.24718	0.30586
102	0.28870	0.34889
103	0.33721	0.39798
104	0.39386	0.45396
105	0.46003	0.51782
106	0.53731	0.59067
107	0.62758	0.67377
108	0.73302	0.76855
109	0.85616	0.87667
110	1.00000	1.00000

Fuente: DOF, Circular S-22.2.

Anexo 8. Tabla EMSSI IMSS-ISSSTE 09

Tabla de mortalidad realizada con experiencia de la seguridad social que refleja la mortalidad de asegurados inválidos del IMSS e ISSSTE.

Tabla 15. Tabla de tasas de mortalidad de inválidos para la Seguridad Social, 2009.

Edad	EMSSI IMSS-ISSSTE 09
0	0.00377
1	0.00633
2	0.00864
3	0.01073
4	0.01263
5	0.01435
6	0.01591
7	0.01733
8	0.0186
9	0.01976
10	0.02081
11	0.02177
12	0.02263
13	0.02341
14	0.02412
15	0.02476
16	0.02534
17	0.02586
18	0.02634
19	0.02677
20	0.02716
21	0.02743
22	0.02769
23	0.02793
24	0.02817
25	0.0284
26	0.02862
27	0.02884
28	0.02905
29	0.02925
30	0.02945
31	0.02964
32	0.02983
33	0.03001
34	0.03019
35	0.03036
36	0.03053

Edad	EMSSI IMSS-ISSSTE 09
37	0.0307
38	0.03086
39	0.03102
40	0.03117
41	0.03132
42	0.03147
43	0.03162
44	0.03176
45	0.0319
46	0.03204
47	0.03218
48	0.03231
49	0.03244
50	0.03257
51	0.0327
52	0.03282
53	0.03295
54	0.03307
55	0.03319
56	0.0333
57	0.03342
58	0.03353
59	0.03365
60	0.03376
61	0.03387
62	0.03397
63	0.03408
64	0.03418
65	0.03429
66	0.03439
67	0.03449
68	0.03459
69	0.03469
70	0.03479
71	0.03488
72	0.03498
73	0.03507
74	0.03516
75	0.03703
76	0.03889
77	0.04279
78	0.04707
79	0.05179
80	0.05698
81	0.06269

Edad	EMSSI IMSS-ISSSTE 09
82	0.06897
83	0.07589
84	0.08349
85	0.09186
86	0.10106
87	0.11119
88	0.12233
89	0.13459
90	0.14808
91	0.16292
92	0.17924
93	0.19721
94	0.21697
95	0.23871
96	0.26263
97	0.28895
98	0.3179
99	0.34976
100	0.38481
101	0.42337
102	0.4658
103	0.51247
104	0.56383
105	0.62033
106	0.68249
107	0.75089
108	0.82613
109	0.90892
110	1

Fuente: DOF, Circular S-22.2.

Anexo 9. Tabla CNSF 2000 I

La tabla CNSF 2000-I fue construida por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) con información del sector asegurador de 1991 a 1998 en México, siguiendo el modelo logit. Es usada como base demográfica legal en los seguros de vida individual, para el cálculo de la reserva matemática de primas de los seguros de vida individual.

Tabla 16. CNSF 2000 I, (1991-1998).

Edad	q_x
12	0.000396
13	0.000427
14	0.000460
15	0.000495
16	0.000533
17	0.000575
18	0.000619
19	0.000667
20	0.000718
21	0.000773
22	0.000833
23	0.000897
24	0.000966
25	0.001041
26	0.001121
27	0.001207
28	0.001300
29	0.001400
30	0.001508
31	0.001624
32	0.001749
33	0.001884
34	0.002029
35	0.002186
36	0.002354
37	0.002535
38	0.002730
39	0.002940
40	0.003166
41	0.003410
42	0.003672
43	0.003954
44	0.004258
45	0.004585
46	0.004938
47	0.005317
48	0.005725
49	0.006164
50	0.006637
51	0.007145

Edad	q_x
52	0.007693
53	0.008282
54	0.008915
55	0.009597
56	0.010330
57	0.011119
58	0.011967
59	0.012879
60	0.013860
61	0.014914
62	0.016048
63	0.017265
64	0.018574
65	0.019980
66	0.021490
67	0.023111
68	0.024851
69	0.026720
70	0.028724
71	0.030874
72	0.033180
73	0.035651
74	0.038300
75	0.041136
76	0.044174
77	0.047424
78	0.050902
79	0.054619
80	0.058592
81	0.062834
82	0.067362
83	0.072190
84	0.077337
85	0.082817
86	0.088649
87	0.094850
88	0.101436
89	0.108424
90	0.115832
91	0.123677
92	0.131973
93	0.140737
94	0.149983
95	0.159723
96	0.169970
97	0.180733
98	0.192020
99	0.203837
100	1.000000

Fuente: Tablas de Mortalidad CNSF 2000-I y CNSF 2000-G. Documento de trabajo No. 80.

Anexo 10. Tasas de mortalidad en México durante 2016-2018

En la tabla se muestran las tasas brutas de mortalidad registradas en México por la Secretaría de Salud durante 2016, 2017 y 2018.

Tabla 17. Mortalidad en México durante 2016-2018.

Edad	Tasa bruta de mortalidad 2016	Tasa bruta de mortalidad 2017	Tasa bruta de mortalidad 2018
0	0.01143	0.01153	0.01048
1	0.00106	0.00095	0.00092
2	0.00052	0.00055	0.00047
3	0.00037	0.00037	0.00036
4	0.00030	0.00030	0.00030
5	0.00026	0.00026	0.00025
6	0.00023	0.00024	0.00022
7	0.00021	0.00023	0.00023
8	0.00021	0.00020	0.00021
9	0.00021	0.00022	0.00021
10	0.00021	0.00022	0.00022
11	0.00023	0.00026	0.00025
12	0.00027	0.00025	0.00026
13	0.00033	0.00034	0.00032
14	0.00040	0.00042	0.00036
15	0.00048	0.00049	0.00047
16	0.00060	0.00064	0.00063
17	0.00067	0.00074	0.00072
18	0.00077	0.00084	0.00087
19	0.00102	0.00109	0.00111
20	0.00104	0.00109	0.00109
21	0.00128	0.00129	0.00128
22	0.00125	0.00130	0.00134
23	0.00128	0.00140	0.00144
24	0.00135	0.00150	0.00154
25	0.00134	0.00154	0.00159
26	0.00145	0.00162	0.00176
27	0.00150	0.00168	0.00174
28	0.00140	0.00149	0.00165
29	0.00174	0.00183	0.00189
30	0.00134	0.00148	0.00149
31	0.00192	0.00215	0.00211
32	0.00155	0.00164	0.00174
33	0.00170	0.00180	0.00187
34	0.00184	0.00198	0.00205
35	0.00181	0.00186	0.00187

Edad	Tasa bruta de mortalidad 2016	Tasa bruta de mortalidad 2017	Tasa bruta de mortalidad 2018
36	0.00182	0.00190	0.00200
37	0.00206	0.00218	0.00224
38	0.00194	0.00195	0.00202
39	0.00254	0.00262	0.00266
40	0.00207	0.00219	0.00219
41	0.00361	0.00362	0.00369
42	0.00268	0.00268	0.00272
43	0.00351	0.00355	0.00357
44	0.00400	0.00418	0.00420
45	0.00332	0.00361	0.00375
46	0.00424	0.00436	0.00447
47	0.00451	0.00460	0.00477
48	0.00449	0.00457	0.00471
49	0.00513	0.00531	0.00529
50	0.00437	0.00433	0.00450
51	0.00767	0.00768	0.00781
52	0.00617	0.00616	0.00626
53	0.00741	0.00753	0.00748
54	0.00792	0.00796	0.00812
55	0.00798	0.00804	0.00809
56	0.00945	0.00926	0.00943
57	0.01172	0.01196	0.01197
58	0.01117	0.01119	0.01174
59	0.01284	0.01293	0.01327
60	0.01027	0.01018	0.01032
61	0.02047	0.02026	0.02059
62	0.01516	0.01553	0.01588
63	0.01567	0.01582	0.01651
64	0.01699	0.01752	0.01817
65	0.01648	0.01606	0.01675
66	0.02269	0.02273	0.02258
67	0.02316	0.02404	0.02436
68	0.02318	0.02226	0.02360
69	0.02690	0.02733	0.02693
70	0.02005	0.01988	0.01994
71	0.04075	0.04075	0.04139
72	0.02832	0.02867	0.02905
73	0.03326	0.03241	0.03332
74	0.03402	0.03452	0.03479
75	0.03562	0.03384	0.03567
76	0.04478	0.04653	0.04414
77	0.05454	0.05473	0.05597
78	0.04665	0.04751	0.04788
79	0.06720	0.06539	0.06563
80	0.04985	0.04746	0.04613

Edad	Tasa bruta de mortalidad 2016	Tasa bruta de mortalidad 2017	Tasa bruta de mortalidad 2018
81	0.10439	0.10663	0.10130
82	0.07827	0.08027	0.08203
83	0.08561	0.08565	0.08826
84	0.08195	0.08379	0.08675
85	0.08882	0.08006	0.08175
86	0.11303	0.10780	0.09875
87	0.10995	0.12603	0.12436
88	0.11805	0.12250	0.13973
89	0.13361	0.13284	0.13600
90	0.11636	0.10669	0.10761
91	0.22415	0.22803	0.21319
92	0.16572	0.17042	0.17913
93	0.18058	0.17270	0.18428
94	0.16432	0.17779	0.17043
95	0.14893	0.13998	0.15012
96	0.13148	0.13717	0.12872
97	0.10072	0.12799	0.12852
98	0.08206	0.07649	0.09700
99	0.05940	0.07514	0.06756
100 y más	1.00000	1.00000	1.00000

Fuente: Elaboración propia.