



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO**  
Maestría en Ciencias (Física)

Propiedades de transporte de caminatas aleatorias persistentes en una y dos dimensiones

Tesis  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS(Física)

PRESENTA:  
Fís. Biomed. Francisco Ricardo Torres Arvizu

DIRECTOR DE TESIS  
Dr. Hernán Larralde Ridaura  
Instituto de Ciencias Físicas

DEL COMITÉ TUTOR  
Dr. François Alain Leyvraz Waltz  
Instituto de Ciencias Físicas  
Dr. Alejandro Pérez Riascos  
Instituto de Física

Cuernavaca, México, 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Quiero agradecer a CONACYT por la beca que significó un gran apoyo económico apoyo en estos momentos de incertidumbre.

Estaré eternamente agradecido a mi supervisor principal, el Dr. Hernán Larralde Ridaura por su apoyo constante tanto en el infierno burocrático y en lo académico, así como por su paciencia y humanidad.

De igual manera me siento bendecido por tener al mejor comité tutor, el Dr. Alejandro Pérez Riascos y el Dr. François Leyvraz, que siempre estuvieron disponibles para ayudar en cuanto se presentó.

Al jurado evaluador: Dr. Denis Boyer, Dr. Francisco Sevilla, Dr. Federico Vázquez y al Dr. Raúl Salgado por sus comentarios destinados a mejorar enormemente esta tesis, además de su tiempo y paciencia



# Índice general

<b>1. Antecedentes</b>	<b>7</b>
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>11</b>
2.1. Procesos estocásticos	11
2.2. Caminante aleatorio	12
2.2.1. Función característica	12
2.2.2. Función generadora	13
2.2.3. Caminantes aleatorios en redes	14
2.2.4. Caminante aleatorio simple	14
<b>3. Caminatas aleatorias persistentes asimétricas</b>	<b>17</b>
3.1. Caminata aleatoria con persistencia	17
3.1.1. Casos límite de la ecuación del telegrafista	20
3.1.2. Solución de la ecuación del telegrafista generalizada	20
3.2. Transformación de la ecuación del telegrafista	25
3.3. Las ecuaciones del telegrafista, Klein-Gordon y Dirac	28
3.4. Colisiones	31
<b>4. Caminatas aleatorias con persistencia en dos dimensiones</b>	<b>35</b>
4.1. Planteamiento del problema	35
4.1.1. Momentos de exactos de la distribución	37
4.2. Límite ultrapersistente	38
4.3. Aproximación para $\tau$ , $\xi$ y $\eta$ grandes	41
4.4. Colisiones	42
4.5. Simulaciones	45
4.5.1. Diseño de los algoritmos	45
4.5.2. Resultados	50
4.5.3. Simulaciones para tiempos largos	54
<b>5. Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>61</b>
5.1. Conclusiones	61
5.2. Trabajo a futuro	62
<b>A. Determinación de la transformada de Laplace <math>f(\zeta) = \frac{e^{-k\sqrt{\zeta^2-a^2}}}{\sqrt{\zeta^2-a^2}}</math></b>	<b>63</b>



# Índice de figuras

3.1. Estados del sistema	17
4.1. Estados del sistema	36
4.2. Diagramas de flujo del método de enumeración exacta.	46
4.3. Diagramas de flujo del método numérico Monte Carlo.	47
4.4. Resultados del código Monte Carlo. Una caminata aleatoria. II) Diez caminatas aleatorias. Las caminatas se realizaron para 1,000,000 pasos . III) Posición inicial y final de 1000 caminantes aleatorios después de 500 pasos. Los parámetros utilizados son $\beta = 0.001$ , $\gamma = 0$ y el estado inicial es 'E'.	50
4.5. Resultados de la simulación Monte Carlo y la enumeración exacta para valores descendentes de $\beta = [0.5, 0.1, 0.05, 0.01]$ y $\gamma = 0.1$ ; para 1,000,000 de caminantes.	52
4.6. Resultados de la simulación Monte Carlo y la enumeración exacta para valores descendentes de $\gamma = [0, 0.3, 0.4]$ y $\beta = 0.01$ ; para 1,000,000 de caminantes.	54
4.7. Distribución de la longitud de los tramos en el límite ultrapersistente ( $l$ ) (medida en pasos individuales), obtenida a partir del histograma normalizado de una simulación Monte Carlo usando el código para pasos individuales con $\beta = 0.01$ y 100,000 de realizaciones, y su comparación con la expresión 4.45.	55
4.8. La gráfica anterior muestra un histograma usando el generador de variables aleatorias distribuidas según 4.45 (histograma en verde), comparado con los tramos generados a partir de pasos individuales (histograma en azul), y la expresión teórica de la distribución (línea roja).	55
4.9. Diagrama de flujo del algoritmo que genera caminatas aleatorias	56
4.10. Resultados de la simulación Monte Carlo y comparación con las expresiones 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 para distintos tiempos de simulación (1-100,000 pasos)	58
4.11. Errores asociados al código Monte Carlo usando el sesgo relativo y el sesgo.	58
4.12. Evolución de la función de densidad de probabilidad de un caminante con los parámetros $\gamma = 0$ y $\beta = 0.01$ para 10,100, 1000,1250, 10,000 pasos.	60
A.1. Trayectoria usada en la integral para $k > t$	63
A.2. Trayectoria usada en la integral para $k < t$	64



# Capítulo 1

## Antecedentes

En 1827 Robert Brown, un eminente botánico escocés, mientras investigaba el proceso de fertilización en *Clarkia pulchella*, notó un "movimiento irregular rápido" de las partículas de polen suspendidas en agua bajo el microscopio [1]. Inicialmente, Brown creyó que tal movimiento era debido a la actividad vital de las células sexuales masculinas de las plantas, pero luego comprobó que el polen de las plantas muertas por más de un siglo también mostraban el mismo movimiento. Brown llamó a esto un "hecho muy inesperado de la aparente vitalidad retenida por estas 'moléculas' tanto tiempo después de la muerte de la planta". Un estudio posterior hecho por el mismo Brown reveló que se podía observar el mismo movimiento no sólo con partículas de otros organismos, sino también con astillas de vidrio o granito y partículas de humo [1] [2]. Si bien este fenómeno ya había sido reportado mucho antes, en 1784 por el médico, botánico, fisiólogo y químico británico de origen neerlandés Jan Ingenhousz, que lo observó en una suspensión de polvo de carbón vegetal en alcohol, Brown fue el primero en estudiarlo con profundidad y rigurosidad por lo que se denomina a esta clase de movimiento en su honor como **Movimiento browniano** [3].

Durante aproximadamente 30 años decayó el interés sobre el movimiento browniano, pero en 1858 el profesor de farmacología de la *École de Pharmacie* Jules Regnault sugirió que el movimiento Browniano, basándose en sus experimentos, se debía a las corrientes de convección causadas por absorción de calor proveniente de los rayos de luz que caían en una suspensión de partículas [4]. En la década de 1860, el profesor de geometría descriptiva y geodesia en Karlsruhe, Christian Weirner, atribuyó el movimiento a fuerzas internas del líquido [5]. Esta tesis fue apoyada en la década de 1870 por los científicos belgas J. Delsaux, J. Thirion y por el italiano Carbonnelle [3].

En 1888, Leon Gouy supuso la conexión entre el movimiento browniano y el principio de Carnot destacando la naturaleza estadística de las leyes de la termodinámica. Y en 1889, Gouy, determinó que el tamaño pequeño de partícula, la baja viscosidad del fluido y el aumento en la temperatura circundante provocaban un movimiento browniano más rápido, lo que sugería que su causa estaba en el "movimiento molecular térmico en el entorno líquido" [3]. La idea de que las moléculas de un líquido o gas están en constante movimiento y chocando entre sí, es una parte importante de la teoría cinética de los gases desarrollada en el tercer cuarto del siglo XIX por James Clerk Maxwell, Ludwig Boltzmann y Rudolf Clausius como explicación de los fenómenos de calor [2].

Sin embargo, la contribución más importante a la teoría del movimiento browniano fue dada por

Albert Einstein en su artículo de 1905 '*On the Motion of Small Particles Suspended in Liquids at Rest Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat*', donde Einstein argumentó que el efecto acumulado de distintas colisiones de las partículas suspendidas en un fluido provoca una serie de saltos aleatorios en la posición de la partícula, dando como resultado una especie de caminata aleatoria. Einstein asumió que la posición de la partícula como función del tiempo es un proceso estocástico y propuso una ecuación en derivadas parciales para la evolución temporal de la función de densidad de probabilidad tomando en cuenta que estos saltos son pequeños [6]. Poco después de la publicación del manuscrito de Einstein, un físico polaco, Marian von Smoluchowski publicó un artículo en el mismo tema llegando a las mismas conclusiones que Einstein. El mismo año de la publicación del artículo de Einstein, Karl Pearson proponía el término de caminata aleatoria en la publicación de su pregunta de consulta en la revista *Nature* en 1905: "*Un hombre parte de un punto  $O$  y camina  $l$  yardas en línea recta; luego gira en cualquier ángulo y camina otras  $l$  yardas en una segunda línea recta. Se repite este proceso  $n$  veces. Necesito la probabilidad de que después de estos  $n$  tramos el hombre esté a una distancia entre  $r$  y  $r + \delta r$  desde su punto de partida,  $O$ " [7], esta pregunta tuvo la famosa contestación por parte de Lord Rayleigh, quien ya había resuelto una forma más general de este problema en 1880, en el contexto de ondas sonoras en materiales heterogéneos [8][9]. Sin embargo el problema de la caminata aleatoria fue planteado incluso antes de la pregunta de Pearson y el trabajo de Einstein en movimiento Browniano por el matemático francés Louis Bachelier en su tesis de la teoría financiera de especulaciones (*La Théorie de la Spéculation*) publicada en 1900 [9]. Mientras era un estudiante de doctorado en matemáticas en la Sorbona, Bachelier derivó su modelo financiero considerando el movimiento de los precios de los bonos en la Bolsa de París. La conclusión fue que los precios seguían una caminata aleatoria, influenciados por las noticias de última hora, y éstos variaban de una manera que era imposible de predecir. Esto dio paso a lo que hoy se llama la hipótesis del mercado eficiente [9]. Los precios de las acciones en Wall Street y otros mercados financieros se ajustan instantáneamente a toda la información disponible, dado que cualquier información que pueda usarse para predecir el precio de las acciones de mañana ya se refleja en el precio de hoy [10]. A los trabajos de Einstein y Smoluchowski siguió el de Langevin 1908, quien construyó una ecuación de movimiento basada en la segunda ley de Newton para la posición de una partícula browniana, tomando los supuestos que la partícula se ve sometida a dos tipos fuerzas: 1) la fuerza de fricción y 2) la fuerza que fluctúa rápidamente debida a las colisiones. A su vez, Adriaan Fokker, en 1914, y Max Planck, en 1917, introdujeron una ecuación de movimiento en derivadas parciales que gobierna la evolución de la densidad de probabilidad de las posiciones de un partícula browniana en un fluido. A esta ecuación también se le conoce como ecuación de Kolmogorov debido a que fue descubierta de forma independiente por el matemático ruso Andréi Nikoláyevich Kolmogórov en 1931 [11].*

El primer análisis de las caminatas aleatorias en una red se debe a Polya, que consideró la pregunta de si un caminante inicialmente en el origen eventualmente volvería a su punto de partida [8]. En 1965, Elliott W. Montroll y George H. Weiss generalizaron las caminatas aleatorias a procesos de tiempo continuo [12]. Aplicaciones de las caminatas aleatorias en tiempo continuo han sido desarrolladas por Scher y Lax para la teoría general del transporte estocástico en sistemas desordenados [13].

En la década de 1920, G.I Taylor [14] y R. Fürst [15] introdujeron la caminata aleatoria persistente, que es un tipo de caminante que tiende a mantener misma dirección de movimiento actual en sus siguientes pasos, como un modelo para la difusión en un medio turbulento. En 1951, Sydney Goldstein [16] derivó la ecuación del telegrafista en una dimensión en el límite continuo a partir de un

conjunto de ecuaciones que describen la evolución temporal de una caminata aleatoria persistente. Para dimensiones más altas un ansatz basado en el método de Markov fue propuesto por Domb y Fisher [17]. Sin embargo, quizá las personas que más a contribuido a muchos aspectos de la teoría de caminatas aleatorias persistentes han sido George H. Weiss, Jaume Masoliver y Katja Lindenberg [18], en 1989, desarrollaron una versión continua de la caminata aleatoria persistente, que permitía pasos de longitud arbitraria en una línea. En 2018 Vicent Rossetto [19] resolvió la ecuación generalizada del telegrafista para un caminante aleatorio persistente asimétrico, esta ecuación fue derivada en 1992 por George H. Weiss y Jaume Masoliver [20].

En 1992, Joseph M. Porrà, Jaume Masoliver y George H. Weiss estudiaron una caminata aleatoria persistente bidimensional cuyo movimiento consiste en pasos alternativos a lo largo de uno de los dos vectores,  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ . En el límite continuo su ecuación de evolución no conlleva a una ecuación de telegrafista bidimensional sino unidimensional [21]. Los mismos autores un año después formularon versiones no markovianas de la caminata aleatoria persistente en dos y tres dimensiones para tiempo continuo [22]. Cinco años más tarde, Marià Boguña, Porrà y Masoliver propusieron una generalización de la caminata aleatoria persistente multidimensional a partir un modelo basado en una red cúbica. Al examinar el límite continuo obtuvieron una ecuación diferencial para la función de densidad de probabilidad de la posición del caminante aleatorio, cuyas soluciones para el movimiento proyectado a lo largo de un eje se pueden expresar en términos de la solución de la ecuación del telegrafista unidimensional en el espacio libre [23]. Otras dos generalizaciones han sido dadas por Hernán Larralde, la primera en su artículo del 1997, donde introdujo una caminata aleatoria con un sesgo en sentido horario (o antihorario) en cada nueva dirección de paso y estudió sus propiedades de transporte [24], y la segunda en su artículo de 2015 junto con François Leyvraz Waltz, en el cual se derivó una ecuación de Fokker-Plank para una caminata aleatoria con persistencia helicoidal usando el marco de referencia de las ecuaciones de Frenet-Serret [25].

Las estadísticas de primer paso de los caminantes aleatorios unidimensionales fueron estudiadas por George H. Weiss [26] en la década de los 80 y para el caso persistente por Josep M. Porrà, Jaume Masoliver y George H. Weiss en los 90 [20]. Las probabilidades de primer paso y el promedio sitios visitados para un caminante aleatorio persistente en redes de una y dos dimensiones fue tratado por Hernán Larralde en 2019 [27].

Las caminatas aleatorias se han aplicado últimamente en biología para modelar el movimiento de animales [28] [29], el movimiento de partículas activas autopropulsadas [30] y en modelos de propagación de la luz [31].

## Objetivos

En esta tesis se trataron dos problemas de caminatas aleatorias con persistencia, por lo que los objetivos de este trabajo pueden dividirse en:

- Objetivo del primer problema:
  1. El objetivo de este problema fue analizar las transformaciones de la ecuación generalizada del telegrafista para un caminante aleatorio persistente asimétrico y sus implicaciones.

- Objetivo del segundo problema:
  1. El objetivo de este problema fue encontrar y analizar la función de distribución de probabilidad de un caminante aleatorio bidimensional con persistencia en una red cuadrada.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

Para el estudio de los caminantes aleatorios es necesario comenzar con elementos de la teoría de probabilidad, los cuales son revisados en la sección 2.1. En la sección 2.2 se introduce la definición más general de caminante aleatorio, posteriormente en las subsecciones 2.2.1 y 2.2.2 se definen las herramientas básicas para el tratamiento de las caminatas aleatorias: la función característica y la función generadora. La subsección 2.2.3 es un breve resumen del formalismo general de los caminantes aleatorios en redes. Finalmente, se aborda el problema del caminante aleatorio simple en una red y se ilustra el proceso límite que transforma su ecuación de evolución en la ecuación de difusión, adicionalmente se resuelve dicha ecuación y se mencionan algunas implicaciones de su solución.

### 2.1. Procesos estocásticos

Cotidianamente se habla de probabilidad de la ocurrencia o no, de ciertos eventos que no se pueden predecir. En general no es posible saber con certeza si sucederán estos eventos, lo que se puede hacer es medir la frecuencia con que se producen mediante experimentos o ensayos, los cuales son procedimientos que pueden repetirse infinitamente. Al conjunto de posibles resultados de los experimentos se le llama espacio muestral,  $(\Omega)$ . A cualquier subconjunto del espacio muestral se le denomina evento [32]. Una variable estocástica es una función  $X$  que mapea los elementos del espacio muestral a los números reales, es decir,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Las variables estocásticas están definidas por una distribución, la cual es una función  $F$  que mapea de los números reales al intervalo que va de  $[0, 1]$ , es decir,  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  [32], [33].

A una colección de variables aleatorias indizadas por un parámetro  $t$  se le denomina proceso estocástico, el cual se puede denotar como  $\{X(t)\}$ . Una realización de un proceso estocástico  $\{X(t), t \in T\}$  es una asignación de cada  $t \in T$  a un posible valor de  $X(t)$ . Los principales elementos para caracterizar un proceso estocástico son: el espacio de estados (o posibles valores que puede tomar  $X(t)$ ), el conjunto de índices  $T$ , y la dependencia entre las variables aleatorias  $X(t)$  especificadas por distribución conjunta para cada familia finita de variables  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  del proceso. Los procesos estocásticos se clasifican de manera muy general de acuerdo al conjunto  $T$ . Si  $T$  es un conjunto contable se dice que el proceso es discreto. En el caso de que  $T$  sea la recta real  $T = [0, \infty)$  se dice que el proceso es continuo [34].

Una clase muy importante de procesos son los que cumplen la siguiente propiedad: dado un valor

de  $X(s)$ , los valores de  $X(t+s)$ , con  $t > 0$ , no tienen dependencia estadística de los valores de  $X(u)$  para  $u < s$ , es decir, el comportamiento futuro del proceso cuando el estado actual es conocido de manera exacta no depende del conocimiento concerniente a su comportamiento pasado. Esta condición se denomina propiedad de Markov la cual se escribe formalmente en términos de probabilidad condicional como

$$P(X(s+t) = j | X(s) = i, \{X(u) : 0 < u < s\}) = P(X(s+t) = j | X(s) = i) = P_{i,j}(t), \quad (2.1)$$

donde  $P_{i,j}(t)$  es la probabilidad de estar en el estado  $j$  en  $t$  unidades de tiempo a partir  $s$ , dado que el estado al tiempo  $s$  es  $i$ . A las cantidades  $P_{i,j}(t)$  se les llama probabilidades de transición [33].

Cuando el espacio de estados de un proceso de Markov es numerable se le denomina cadena de Markov [34].

## 2.2. Caminante aleatorio

La definición más simple de un caminante aleatorio es la suma de una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Se denota al vector  $\vec{R}_n$  como la posición del caminante al  $n$ -ésimo paso, la cual se identifica con la suma

$$\vec{R}_n = \vec{Y}_1 + \cdots + \vec{Y}_n, \quad (2.2)$$

donde  $\vec{Y}_n = (Y_1, \dots, Y_D)$  son variables aleatorias  $D$ -dimensionales, también denominadas pasos o desplazamientos [8].

Sea  $P_n(\vec{r})dV$  la probabilidad de que el vector  $\vec{R}_n$  esté en una vecindad de volumen  $dV$  con centro en  $\vec{r}$ , si se define  $p(\vec{r})$  como la función de densidad de probabilidad del desplazamiento al  $n$ -ésimo paso, entonces, la evolución del caminante está gobernada por la siguiente ecuación

$$P_{n+1}(\vec{r}) = \int P_n(\vec{r}')p(\vec{r} - \vec{r}')dV', \quad (2.3)$$

la ecuación anterior dice que la probabilidad de tener al caminante en la posición  $\vec{r}$  después de  $n+1$  pasos es la probabilidad de arribar a la posición  $\vec{r}'$  en el paso  $n$  y hacer un desplazamiento  $\vec{r} - \vec{r}'$  en un paso adicional [35].

### 2.2.1. Función característica

La herramienta más básica para analizar las propiedades de una caminata aleatoria es la función característica. La función característica de un caminante  $n$ -dimensional continuo se define como la transformada de Fourier de la función de densidad de probabilidad del desplazamiento por paso  $p(\vec{r})$  definida en un intervalo  $\vec{r} + d\vec{r}$  [8] [9]

$$\hat{p}(\vec{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{r}} p(\vec{r}) d^d \vec{r}, \quad (2.4)$$

la cual tiene asociada la relación inversa

$$p(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{r}} \hat{p}(\vec{\theta}) d^d \vec{\theta}. \quad (2.5)$$

Por otra parte, debido a la estructura de convolución de la ecuación [2.3](#) en espacio de Fourier está dada por

$$\hat{P}_n(\vec{\theta}) = \hat{P}_{n-1}(\vec{\theta}) \hat{p}(\vec{\theta}), \quad (2.6)$$

la cual es una relación de recurrencia que se puede escribir de forma equivalente como

$$\hat{P}_n(\vec{\theta}) = \hat{p}^n(\vec{\theta}), \quad (2.7)$$

la ecuación anterior implica que la función característica de la distribución de un caminante aleatorio después de  $n$  pasos es simplemente el producto de  $n$  funciones características de la probabilidad de desplazamiento por paso, siempre y cuando los pasos sucesivos sean independientes entre sí. Tomando la relación inversa [2.5](#) se tiene

$$P_n(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{p}^n(\vec{\theta}) e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{r}} d^d \vec{\theta}, \quad (2.8)$$

la ecuación anterior permite encontrar la representación exacta de  $P_n(\vec{r})$  a través de la función característica de  $p(\vec{r})$ .

En el caso de una red, la función característica  $\hat{p}(\vec{\theta})$  de  $p(\vec{j})$ , la probabilidad desplazamiento en un paso está dada por [8](#), [9](#)

$$\hat{p}(\vec{\theta}) = \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_d} p(\vec{j}) e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{j}}. \quad (2.9)$$

Una de las propiedades más útiles de la función característica es la obtención de los momentos de la probabilidad del desplazamiento por paso mediante la diferenciación de la ecuación [2.4](#). Si se define  $\vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ , entonces los momentos de la probabilidad del desplazamiento en un paso estarán dados por la siguiente expresión [8](#), [9](#)

$$\langle x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n} \rangle = (-i)^{m_1 + \dots + m_n} \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_n}}{\partial m_1 \theta_1 \cdots \partial m_n \theta_n} p(\vec{\theta}) \Big|_{\vec{\theta} = \vec{0}}. \quad (2.10)$$

### 2.2.2. Función generadora

Una caminata aleatoria se caracteriza por que su probabilidad de desplazamiento por paso  $P_n(\vec{r})$  es una secuencia. Una forma general de estudiar estas secuencias es por medio de la función generadora [9](#).

Una secuencia de números  $\{f_n\}$  puede ser considerada como los coeficientes de una serie de Taylor de una función  $f(z)$

$$f(z) = \sum_n f_n z^n, \quad (2.11)$$

donde se asume que la serie converge en el intervalo  $-1 \leq z \leq 1$ . La función generadora está íntimamente relacionada con la transformada de Laplace, siempre que los coeficientes  $f_n = \phi(n)$  tengan ciertas propiedades de regularidad, su función generadora  $z$  puede ser aproximada por una transformada de Laplace en el límite en que  $z \rightarrow 1$  [9](#).

### 2.2.3. Caminantes aleatorios en redes

Una red consiste en un conjunto de sitios que están conectados por uniones. El movimiento de un caminante aleatorio en una red consiste en secuencias de pasos dados entre los sitios conectados. Muchas de las propiedades estadísticas del caminante aleatorio se estudian con el formalismo de la función de probabilidad de ocupación del sitio ( $P_n(s|s_0)$ ), que es la probabilidad de que el caminante esté en un sitio  $s$  en el paso  $n$  habiendo partido de  $s_0$ . La dinámica de estos sistemas puede ser estudiada por medio de las "Leyes de evolución", las cuales pueden ser escritas como relaciones de recurrencia, estas Leyes de evolución se basan en calcular la probabilidad  $P_{n+1}(s|s_0)$  a partir de  $P_n(s'|s_0)$ , es decir, se busca calcular la probabilidad de sitio del caminante con base en su posición en el paso anterior. Básicamente, esto se puede hacer de dos formas [35]:

#### 1. Partición sobre el último paso

El caminante se encuentra en el sitio  $s'$  después de  $n$  pasos y habiendo empezado en el sitio  $s_0$ . La probabilidad de llegar al sitio  $s$  en el próximo paso partiendo de  $s'$  es  $p(s'|s)$ . Al sumar sobre todos los sitios  $s'$ , entonces, se tiene la relación de recurrencia:

$$P_{n+1}(s|s_0) = \sum_{s'} p(s'|s) P_n(s'|s_0). \quad (2.12)$$

#### 2. Partición sobre el primer paso

Alternativamente, se puede considerar el resultado del primer paso. El caminante se mueve hacia al sitio  $s'$  con probabilidad  $p(s'|s_0)$ . Para llegar al sitio  $s$ , el caminante debe realizar una caminata de  $n$  pasos del sitio  $s'$  al sitio  $s$ , tal caminata tiene probabilidad  $P_n(s|s')$ , entonces la relación de recurrencia es

$$P_{n+1}(s|s_0) = \sum_{s'} p(s'|s_0) P_n(s|s'). \quad (2.13)$$

### 2.2.4. Caminante aleatorio simple

Sea  $p_n(j)$  la probabilidad de que un caminante este en el sitio  $j$  de una red unidimensional al  $n$ -ésimo paso. La evolución de la probabilidad de ocupación estará descrita por la siguiente relación de recurrencia [8]

$$p_{n+1}(j) = ap_n(j-1) + bp_n(j+1), \quad (2.14)$$

donde  $a$  y  $b$  son las probabilidades de transición  $j \rightarrow j-1$  y  $j \rightarrow j+1$  respectivamente. Por normalización se debe cumplir que  $a + b = 1$ .

Este proceso se puede estudiar en el límite continuo usando transformación de variables

$$(n, j) \rightarrow (t, x)$$

a través de las siguientes relaciones de escalamiento

$$n = \frac{t}{\delta t}, \quad (2.15)$$

$$j = \frac{x}{\delta x}. \quad (2.16)$$

Al desarrollar en serie de Taylor la relación de recurrencia [2.14](#) para las nuevas variables  $x$ ,  $t$  y tomando a primer orden se tiene

$$(a - b) \left( \delta x \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{(\delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = \delta t \frac{\partial p(x, t)}{\partial t}, \quad (2.17)$$

para que está ecuación sea consistente con el escalamiento de  $j$  y  $n$ , los coeficientes de las derivadas de  $p(x, t)$  deben ser del mismo orden de magnitud, para lograr esto se toman los límites  $\delta x \rightarrow 0$ ,  $\delta t \rightarrow 0$ . Dado lo anterior es necesario definir las constantes  $D$  y  $v$  como

$$v = \lim_{\substack{\delta x, \delta t \rightarrow 0, \\ (a-b) \rightarrow 0}} (a - b) \frac{\delta x}{\delta t}, \quad (2.18)$$

$$D = \lim_{\delta x, \delta t \rightarrow 0} \frac{(\delta x)^2}{2\delta t}, \quad (2.19)$$

a la constante  $D$  se conoce la constante difusiva y la variable  $v$  como velocidad.

Cuando se cumple las condiciones anteriormente mencionadas, la ecuación [2.14](#) se convierte en

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - v \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}, \quad (2.20)$$

hay que notar que para  $v = 0$ , la ecuación [2.14](#) se transformara en la ecuación de difusión [8](#)

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}. \quad (2.21)$$

La solución de la ecuación de difusión se puede obtener fácilmente usando el método de transformada de Fourier-Laplace considerando que la condición inicial puede ser escrita como  $p(x, 0) = \delta(x)$

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}, \quad (2.22)$$

la distribución  $p(x, t)$  es del tipo Gaussiano [8](#). Este resultado está relacionado con el **Teorema del límite central**. La varianza de [2.22](#) está dada por  $Var[x] = 2Dt$ , la cual una función lineal del tiempo [36](#).

De manera general, los segundos momentos de los procesos asociados a problemas de difusión ( $|\vec{r}(t)|^2$ ) siguen la ley de escalamiento

$$\langle |\vec{r}(t)|^2 \rangle \sim t^\gamma.$$

De acuerdo al valor de  $\gamma$  los procesos se clasifican en: difusivo si  $\gamma = 1$ , sub-difusivo si  $\gamma < 1$  y super-difusivo si  $\gamma > 1$  [36](#).

Otra forma de lidiar con la ecuación [2.20](#) es a través de la transformación de variables [19](#)

$$x' = x - vt, \quad t' = t, \quad (2.23)$$

ya que en el nuevo sistema de coordenadas [2.20](#) es

$$\frac{\partial p(x', t')}{\partial t'} = D \frac{\partial^2 p(x', t')}{\partial x'^2}, \quad (2.24)$$

la cual es la ecuación de difusión. La transformación [2.23](#) es una transformación Galileana.



# Capítulo 3

## Caminatas aleatorias persistentes asimétricas

En este capítulo se discuten las propiedades de un caminante aleatorio persistente asimétrico en una red unidimensional. A partir de las relaciones de recurrencia la probabilidad de ocupación se realizó un re-escalamiento de las variables posición en la red y número de pasos para pasar al límite continuo a partir de ahí se derivó la ecuación diferencial que describe la evolución del sistema, la ecuación generalizada del telegrafista. Se calcularon las soluciones de dicha ecuación diferencial siguiendo los enfoques de Weiss [8] y Rossetto [19]. Después, se analizaron las implicaciones que conllevan algunas transformaciones de coordenadas en la ecuación generalizada del telegrafista, y su conexión con otras ecuaciones de la física. Finalmente, se hizo un análisis de la evolución del caminante tomando en cuenta los eventos de cambio de dirección del mismo, los cuales denominamos colisiones.

### 3.1. Caminata aleatoria con persistencia

Para la descripción un caminante aleatorio unidimensional con persistencia se deben definir los estados a partir de sus posición anterior en la red, estos se denotan como sigue:

- $+$ :  $j - 1 \rightarrow j$
- $-$ :  $j + 1 \rightarrow j$

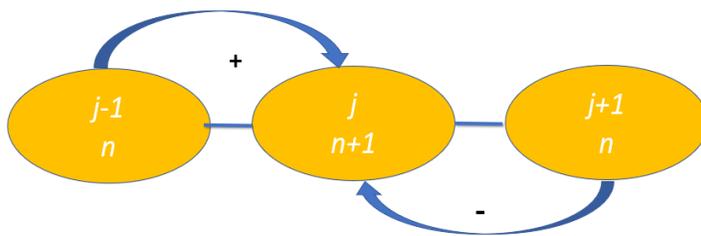


Figura 3.1: Estados del sistema

Para que esta descripción sea detallada y completa se deben especificar las condiciones iniciales las cuales consisten en un **estado inicial** y una **posición inicial**. La probabilidad de que el caminante permanezca en el estado  $+$  ( $-$ ) es  $a$  ( $a'$ , respectivamente). Por otra parte,  $b$  ( $b'$ ) es la probabilidad de que el caminante cambie del estado  $+$  ( $-$ ) al estado  $-$  ( $+$ , respectivamente). Por normalización se debe cumplir que  $a + b = 1$  y  $a' + b' = 1$ . Cuando  $a = a'$  y  $b = b'$  entonces se tiene una **caminata aleatoria persistente simétrica**. De esta forma,  $p_n(j|\pm)$  representa la probabilidad de que el caminante esté en el paso  $n$  y la posición  $j$  proviniendo de la posición  $j - 1$  y cuyo estado inicial es  $+$  o  $-$ , análogamente,  $q_n(j|\pm)$  es la probabilidad que el caminante esté en el paso  $n$  y la posición  $j$  proviniendo de la posición  $j + 1$  y cuyo estado inicial es  $+$  o  $-$ . Entonces,  $p_n(j|\pm)$  y  $q_n(j|\pm)$  satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} p_{n+1}(j|\pm) &= ap_n(j-1|\pm) + b'q_n(j-1|\pm), \\ q_{n+1}(j|\pm) &= bp_n(j+1|\pm) + a'q_n(j+1|\pm), \end{aligned} \quad (3.1)$$

sujetas las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \text{Condiciones iniciales+} &: p_0(j|+) = \delta_{j,0}, & q_0(j|+) &= 0. \\ \text{Condiciones iniciales-} &: p_0(j|-) = 0, & q_0(j|-) &= \delta_{j,0}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Al usar la relaciones de escalamiento [2.15](#), [2.16](#) y expandiendo en serie de Taylor a primer orden en las ecuaciones [3.1](#) se tiene

$$\begin{aligned} a \left( p(x, t|\pm) - \delta x \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial x} \right) + b' \left( q(x, t|\pm) - \delta x \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial x} \right) &= p(x, t|\pm) + \delta t \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial t}, \\ b \left( p(x, t|\pm) + \delta x \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial x} \right) + a' \left( q(x, t|\pm) + \delta x \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial x} \right) &= q(x, t|\pm) + \delta t \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial t}, \end{aligned}$$

sustituyendo  $a$  ( $a'$ ) por  $1 - b$  ( $1 - b'$ , respectivamente)

$$\begin{aligned} (1 - b) \left( p(x, t|\pm) - \delta x \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial x} \right) + b' \left( q(x, t|\pm) - \delta x \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial x} \right) &= p(x, t|\pm) + \delta t \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial t}, \\ b \left( p(x, t|\pm) + \delta x \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial x} \right) + (1 - b') \left( q(x, t|\pm) + \delta x \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial x} \right) &= q(x, t|\pm) + \delta t \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial t}, \end{aligned}$$

desarrollando y simplificando

$$\begin{aligned} -bp(x, t|\pm) - \delta x \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial x} + b\delta x \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial x} + b'q(x, t|\pm) - b'\delta x \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial x} &= \delta t \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial t}, \\ bp(x, t|\pm) + b\delta x \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial x} + \delta x \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial x} - b'q(x, t|\pm) - b'\delta x \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial x} &= \delta t \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial t}, \end{aligned}$$

dividiendo entre  $\delta t$

$$\begin{aligned} -\frac{b}{\delta t}p(x, t|\pm) - \frac{\delta x}{\delta t} \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial x} + \frac{b\delta x}{\delta t} \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial x} + \frac{b'}{\delta t}q(x, t|\pm) - \frac{b'\delta x}{\delta t} \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial x} &= \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial t}, \\ \frac{b}{\delta t}p(x, t|\pm) + \frac{b\delta x}{\delta t} \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial x} + \frac{\delta x}{\delta t} \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial x} - \frac{b'}{\delta t}q(x, t|\pm) - \frac{b'\delta x}{\delta t} \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial x} &= \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial t}. \end{aligned}$$

En este punto es necesario establecer la relación

$$c = \lim_{(\delta x, \delta t) \rightarrow (0,0)} \frac{\delta x}{\delta t},$$

donde  $c$ , tiene unidades de velocidad.

Por otra parte, en el límite continuo es necesario que los términos  $\frac{b}{\delta t}$ ,  $\frac{b'}{\delta t}$  converjan a una constante, por lo tanto, se define  $b = \frac{\delta t}{T_+}$  y  $b' = \frac{\delta t}{T_-}$ , donde  $T_-$  y  $T_+$  son constantes positivas de escalamiento con unidades de tiempo.

Tomando  $\delta t \rightarrow 0$ ,  $\delta x \rightarrow 0$  se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_-}q(x, t|\pm) - \frac{1}{T_+}p(x, t|\pm) - c\frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial x} &= \frac{\partial p(x, t|\pm)}{\partial t} \\ -\frac{1}{T_-}q(x, t|\pm) + \frac{1}{T_+}p(x, t|\pm) + c\frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial x} &= \frac{\partial q(x, t|\pm)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden re-exresar introduciendo la probabilidad total  $\rho(x, t|\pm)$  de encontrar a la partícula entre  $x$  y  $x + \delta x$ , definida como,

$$\rho(x, t|\pm) = p(x, t|\pm) + q(x, t|\pm), \quad (3.4)$$

y del flujo  $J(x, t|\pm)$  de probabilidad, el cual está dado por la diferencia de las probabilidades,

$$J(x, t|\pm) = p(x, t|\pm) - q(x, t|\pm). \quad (3.5)$$

Por otra parte, es útil definir los siguientes parámetros

$$\kappa = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T_-} - \frac{1}{T_+} \right), \quad (3.6)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T_-} + \frac{1}{T_+} \right), \quad (3.7)$$

$\mu$  se puede ver como una tasa de transición promedio y  $\kappa$  es el parámetro de asimetría de transición entre estados. Debido a que  $\mu$  es la suma de dos constantes positivas y  $\kappa$  es la resta de estas constantes, entonces, se cumple que  $\mu > \kappa$ . Además estos parámetros siguen la relación

$$\mu^2 - \kappa^2 = 1/(T_-T_+), \quad (3.8)$$

donde hay que notar que  $1/(T_-T_+) > 0$ . Finalmente, se puede obtener fácilmente  $\frac{1}{T_-}, \frac{1}{T_+}$  en función de  $\mu$  y  $\kappa$

$$\frac{1}{T_+} = -\kappa + \mu, \quad \frac{1}{T_-} = \kappa + \mu. \quad (3.9)$$

Considerando lo anterior, el sistema de ecuaciones [3.3](#) se puede re-exresar como

$$\begin{aligned} -c\frac{\partial J(x, t|\pm)}{\partial x} &= \frac{\partial \rho(x, t|\pm)}{\partial t}, \\ 2\kappa\rho(x, t|\pm) - 2\mu J(x, t|\pm) - c\frac{\partial \rho(x, t|\pm)}{\partial x} &= \frac{\partial J(x, t|\pm)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para desacoplar [3.10](#), se deriva la primera ecuación respecto a  $t$  y la segunda respecto a la variable  $x$

$$\begin{aligned} -c \frac{\partial^2 J(x, t|\pm)}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial^2 \rho(x, t|\pm)}{\partial t^2}, \\ 2\kappa \frac{\partial \rho(x, t|\pm)}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial J(x, t|\pm)}{\partial x} - c \frac{\partial^2 \rho(x, t|\pm)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 J(x, t|\pm)}{\partial t \partial x}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

y despejando el término con derivada mixta se obtiene la ecuación del telegrafista generalizada

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho(x, t|\pm)}{\partial t^2} - \frac{2\kappa}{c} \frac{\partial \rho(x, t|\pm)}{\partial x} - \frac{2\mu}{c^2} \frac{\partial \rho(x, t|\pm)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \rho(x, t|\pm)}{\partial x^2} = 0. \quad (3.12)$$

Cabe mencionar que cuando el parámetro  $\kappa = 0$ , se tiene la ecuación del telegrafista normal o simétrica, lo cual es consistente con las relaciones de recurrencia si  $a = a'$  y  $b = b'$ .

### 3.1.1. Casos límite de la ecuación del telegrafista

Como se mencionó en la sección pasada si  $\kappa = 0$ , entonces [3.12](#) se transforma en

$$\frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.13)$$

La ecuación anterior tiene dos límites importantes:

1. Cuando  $\mu = 0$ , y  $c = \text{constante}$ , la ecuación del telegrafista tiende a la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.14)$$

2. Cuando cuando  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $c \rightarrow \infty$  y  $D = (c^2)/2\mu \rightarrow \text{constante}$ , la ecuación del telegrafista tiende a la ecuación de difusión

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.15)$$

Sin embargo, esta aproximación conduce a lo que se conoce como *el problema de la velocidad infinita* [37](#), es decir, las soluciones de la ecuación [3.15](#) se propagan con velocidad infinita.

### 3.1.2. Solución de la ecuación del telegrafista generalizada

La solución de la ecuación del telegrafista simétrica para caminatas aleatorias con persistencia es ampliamente conocida [8](#). Sin embargo, el problema de la ecuación generalizada del telegrafista no había sido resuelta sino hasta 2018 por Rossetto [19](#).

Existen varios métodos para encontrar la solución a la ecuación [3.12](#), sin embargo, resulta conveniente el método de las transformadas integrales, primeramente se usará la de Fourier para resolver sobre la variable  $x$  y después se combinará con la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial en  $t$ .

Se define la transformada de Fourier-Laplace de la función  $\rho(x, t)$  como

$$\hat{P}(\omega, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \rho(x, t) e^{-st} dt \right] e^{x\omega i} dx, \quad (3.16)$$

ya que  $\rho(x, t)$  satisface [3.12](#), esta ecuación en espacio de Fourier-Laplace es

$$-s^2 \hat{P}(\omega, s) + s \hat{\rho}(\omega, 0) + \frac{\partial \hat{\rho}(\omega, 0)}{\partial t} - 2i\omega \kappa c \hat{P}(\omega, s) - 2s\mu \hat{P}(\omega, s) + 2\mu \hat{\rho}(\omega, 0) - (c\omega)^2 \hat{P}(\omega, s) = 0, \quad (3.17)$$

donde  $\hat{\rho}(\omega, 0)$  y  $\frac{\partial \hat{\rho}(\omega, 0)}{\partial t}$  son las condiciones iniciales de  $\rho(\omega, t)$  en el espacio de Fourier. Despejando  $\hat{P}(\omega, s)$  de la ecuación anterior se tiene

$$\hat{P}(\omega, s) = \frac{(s + 2\mu) \hat{\rho}(\omega, 0) + \frac{\partial \hat{\rho}(\omega, 0)}{\partial t}}{s^2 - 2i\omega \kappa c + 2s\mu + (c\omega)^2}. \quad (3.18)$$

Para obtener la solución general en el espacio  $(x, t)$  primeramente se identifica el numerador de la ecuación [3.18](#) como la función de Green de la ecuación diferencial [3.12](#)

$$\hat{G}(\omega, s) = \frac{1}{s^2 - 2i\omega \kappa c + 2s\mu + (c\omega)^2}, \quad (3.19)$$

la cual se puede expresar en la forma

$$\hat{G}(\omega, s) = \frac{1}{(s + \mu)^2 + (c\omega - \kappa i)^2 - (T_+ T_-)^{-1}}. \quad (3.20)$$

Debido a que en la ecuación anterior hay dos translaciones rígidas el denominador de [3.20](#), por lo que, sólo se considerará la siguiente función para el cálculo de la inversa de Fourier-Laplace

$$\hat{g}(\omega, s) = \frac{1}{s^2 + (c\omega)^2 - (T_+ T_-)^{-1}}, \quad (3.21)$$

ya que  $\hat{G}(\omega, s) = \hat{g}(\omega - \kappa i/c, s + \mu)$ .

Primero se obtiene la transformada inversa de Fourier de [3.21](#) usando el método de los residuos<sup>1</sup>

$$g(x, s) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}(\omega, s)) = \frac{e^{-|x|\sqrt{(s/c)^2 - (c^2 T_+ T_-)^{-1}}}}{2c^2 \sqrt{(s/c)^2 - (c^2 T_+ T_-)^{-1}}}. \quad (3.22)$$

<sup>1</sup>Para calcular la transformada inversa de Fourier se usa la fórmula [38](#)

$$g(x, s) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}(\omega, s)) = -i \sum \text{Res}(e^{-ix\omega} \hat{g}(\omega, s)) \text{ en } L,$$

donde  $\text{Res}(e^{-ix\omega} \hat{g}(\omega, s))$  es el residuo de de la función  $e^{-ix\omega} \hat{g}(\omega, s)$  y  $L$  denota al semiplano inferior complejo. Cabe mencionar que la fórmula anterior es valida si  $x > 0$ , en caso contrario se deben tomar los residuos en las singularidades del plano superior complejo ( $H$ ) y el signo de la fórmula es positivo.

Debido a que la única singularidad en  $L$  es un polo simple en  $\omega_0 = -i\sqrt{(s/c)^2 - (c^2 T_+ T_-)^{-1}}$ . Entonces, sólo se tendrá un residuo en  $L$ , el cual está dado por

$$\text{Res}(e^{-ix\omega} \hat{g}(\omega, s), -i\sqrt{(s/c)^2 - (c^2 T_+ T_-)^{-1}}) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{e^{-i\omega x}}{2c^2 \omega} = -\frac{e^{-|x|\sqrt{(s/c)^2 - (c^2 T_+ T_-)^{-1}}}}{2ic^2 \sqrt{(s/c)^2 - (c^2 T_+ T_-)^{-1}}}.$$

donde  $|x|$  aparece del requerimiento de que  $x > 0$ . Al sustituir en la fórmula para la inversa de Fourier se obtiene finalmente [3.22](#)

La transformada de Laplace inversa de [3.22](#) está dada por

$$\frac{e^{-k\sqrt{s^2-a^2}}}{\sqrt{s^2-a^2}} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-k\sqrt{s^2-a^2}}}{\sqrt{s^2-a^2}}\right) = \Theta(t-|k|)I_0(a\sqrt{t^2-k^2}),$$

donde  $I_0$  es una función de modificada de Bessel de primer tipo y orden cero,  $\Theta$  es una función de Heaviside. El cálculo detallado de la transformada inversa de Laplace anterior se puede encontrar en el apéndice A.

Sustituyendo se tiene

$$g(x, t) = \mathcal{L}^{-1}(g(x, s)) = \frac{1}{c}I_0\left(\frac{1}{c\sqrt{T_-T_+}}\sqrt{(ct)^2-x^2}\right)\Theta(ct-|x|), \quad (3.23)$$

al aplicar la propiedad de translación rígida para las transformadas integrales se obtiene

$$G(x, t) = \frac{e^{\kappa x/c-\mu t}}{c}I_0\left(\frac{1}{c\sqrt{T_-T_+}}\sqrt{(ct)^2-x^2}\right)\Theta(ct-|x|), \quad (3.24)$$

por lo tanto, la solución de la ecuación generalizada del telegrafista será

$$\rho(x, t) = \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} * \rho(x, 0) + G(x, t) * \left(2\mu\rho(x, 0) + \frac{\partial\rho(x, 0)}{\partial t}\right), \quad (3.25)$$

donde  $*$  representa la convolución espacial [2](#). Sustituyendo  $G(x, t)$  en la ecuación anterior se obtiene la expresión explícita de  $\rho(x, t)$

$$\begin{aligned} \rho(x, t|\pm) = & \left(\frac{e^{\kappa x/c-\mu t}}{2c}I_0\left(\frac{1}{c\sqrt{T_-T_+}}\sqrt{(ct)^2-x^2}\right)\Theta(ct-|x|)\right) * \left(\frac{\partial\rho(x, 0)}{\partial t} + 2\mu\rho(x, 0)\right) + \\ & \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{\kappa x/c-\mu t}}{2c}I_0\left(\frac{1}{c\sqrt{T_-T_+}}\sqrt{(ct)^2-x^2}\right)\Theta(ct-|x|)\right)\right] * (\rho(x, 0)). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Finalmente, se deben definir las condiciones iniciales, Rossetto [19](#) propone como condiciones iniciales  $\rho(x, 0|\pm) = \delta(x)$  y  $\frac{\partial\rho(x, 0|\pm)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x, 0|\pm)}{\partial x} = \mp c\delta'(x)$ . La primera condición implica una acumulación de probabilidad en un punto de la red a  $t = 0$  y segunda condición de inicial implica una flujo de probabilidad en la dirección preferencial inicial del caminante.

Sustituyendo las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \rho(x, t|\pm) = & \mp c\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{\kappa x/c-\mu t}}{2c}I_0\left(\frac{1}{c\sqrt{T_-T_+}}\sqrt{(ct)^2-x^2}\right)\Theta(ct-|x|)\right] + \\ & \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{e^{\kappa x/c-\mu t}}{2c}I_0\left(\frac{1}{c\sqrt{T_-T_+}}\sqrt{(ct)^2-x^2}\right)\Theta(ct-|x|)\right] + \frac{2\mu e^{\kappa x/c-\mu t}}{2c}I_0\left(\frac{1}{c\sqrt{T_-T_+}}\sqrt{(ct)^2-x^2}\right)\Theta(ct-|x|). \end{aligned} \quad (3.27)$$

<sup>2</sup>La convolución entre dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  esta dada por [39](#)

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)f(x-\xi)d\xi.$$

Finalmente, para calcular explícitamente  $\rho(x, t|\pm)$  se deben calcular las derivadas con respecto a  $x$  y  $t$  haciendo uso de las siguientes relaciones:

- $I_1(x) = \frac{dI_0(x)}{dx}$  (Donde  $I_1$  es una función de modificada de Bessel de primer tipo y orden uno).
- $\frac{d\Theta(x)}{dx} = \delta(x)$
- $f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$
- $\Theta(t - |x|) = \Theta(x + t)\Theta(x - t)$ .

La derivada con respecto a  $x$  es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \right] &= \kappa \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c^2} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \\ -x \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c^2 \sqrt{T_+ T_-} \sqrt{(ct)^2 - x^2}} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) &+ \frac{1}{4c} (-\delta(x + ct)e^{-t/T_-} + \delta(ct - x)e^{-t/T_+}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

y respecto a  $t$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \right) &= -\mu \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c^2} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) + \\ t \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c^2 \sqrt{T_+ T_-} \sqrt{(ct)^2 - x^2}} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) &+ \frac{1}{4} (\delta(x + ct)e^{-t/T_-} + \delta(ct - x)e^{-t/T_+}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Al sustituir en [3.27](#) se obtiene  $\rho(x, t)$

$$\begin{aligned} \rho(x, t|\pm) &= (ct \pm x) \left( \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c\sqrt{T_- T_+} \sqrt{(ct)^2 - x^2}} I_1 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \right) + \\ &\frac{1}{T_{\pm}} \left[ \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \right] + \frac{1}{2} \delta(ct \mp x) e^{-t/T_{\pm}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

De forma análoga a  $\rho(x, t)$ , se puede desacoplar el sistema de ecuaciones [3.10](#) como función de  $J(x, t)$  derivando la primera ecuación respecto a  $x$  y la segunda respecto a  $t$

$$\begin{aligned} -c \frac{\partial^2 J(x, t|\pm)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \rho(x, t|\pm)}{\partial t \partial x}, \\ 2\kappa \frac{\partial \rho(x, t|\pm)}{\partial t} - 2\mu \frac{\partial J(x, t|\pm)}{\partial t} - c \frac{\partial^2 \rho(x, t|\pm)}{\partial x t} &= \frac{\partial^2 J(x, t|\pm)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

despejando el termino de derivada mixta y usando [3.10](#), se tiene que  $J(x, t)$  también sigue la ecuación generalizada del telegrafista [3.12](#), cuya solución para  $J(x, t)$  está dada por

$$J(x, t|\pm) = \left( \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \right) * \left( \frac{\partial J(x, 0)}{\partial t} + 2\mu J(x, 0) \right) + \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \right) \right] * J(x, 0). \quad (3.32)$$

Para este caso las condiciones iniciales se pueden establecer a partir de las de  $\rho(x, t)$  y de la ecuación [3.10](#), entonces,  $J(x, 0|\pm) = \pm\delta(x)$ ,  $\frac{\partial J(x, 0)}{\partial t} = -c\frac{\partial\delta(x)}{\partial x} \mp 2\mu\delta(x) + 2\kappa\delta(x)$ . Sustituyendo las condiciones de frontera

$$J(x, t|\pm) = -c\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \right] \pm \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \right] + \frac{2\kappa e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|), \quad (3.33)$$

usando las ecuaciones [3.30](#) y [3.32](#)

$$J(x, t|\pm) = \frac{\mp 1}{T_{\pm}} \left[ \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \right] \pm (ct \pm x) \left[ \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c\sqrt{T_- T_+} \sqrt{(ct)^2 - x^2}} I_1 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \right] + \frac{1}{2} \delta(ct \mp x) e^{-t/T_{\pm}}, \quad (3.34)$$

al despejar  $p(x, t|\pm)$  y  $q(x, t|\pm)$  se tiene

$$p(x, t|\pm) = \frac{1}{2} (\rho(x, t|\pm) + J(x, t|\pm)), \quad (3.35)$$

$$q(x, t|\pm) = \frac{1}{2} (\rho(x, t|\pm) - J(x, t|\pm)), \quad (3.36)$$

por lo tanto, hay 2 diferentes resultados para  $p(x, t)$  y  $q(x, t)$  dependiendo del estado inicial de la caminata aleatoria. Si el estado inicial es (+)

$$p(x, t|+) = (tc + x) \left[ \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c\sqrt{T_- T_+} \sqrt{(ct)^2 - x^2}} I_1 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \right] + \frac{1}{2} \delta(tc - x) e^{-t/T_+},$$

$$q(x, t|+) = \frac{1}{T_+} \left( \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \right), \quad (3.37)$$

si el estado inicial es (-)

$$q(x, t|-) = (ct - x) \left[ \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c\sqrt{T_- T_+} \sqrt{(ct)^2 - x^2}} I_1 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \right] + \frac{1}{2} \delta(ct + x) e^{-t/T_-},$$

$$p(x, t|-) = \frac{1}{T_-} \left( \frac{e^{\kappa x/c - \mu t}}{2c} I_0 \left( \frac{1}{c\sqrt{T_- T_+}} \sqrt{(ct)^2 - x^2} \right) \Theta(ct - |x|) \right). \quad (3.38)$$

### 3.2. Transformación de la ecuación del telegrafista

Dado que las transformaciones de Galileo eliminan el término relacionado con la asimetría en la ecuación [2.20](#) convirtiéndola en la ecuación de difusión, por lo que vale la pena preguntarse si una transformación lineal de las coordenadas espacio temporales elimina el término asociado a la asimetría de la ecuación generalizada del telegrafista de forma que ésta se transforme en la ecuación del telegrafista normal o simétrica.

Para responder a la pregunta anterior se propone una transformación lineal general de la forma

$$x' = \alpha x + \beta t, \quad (3.39)$$

$$t' = \epsilon t + \delta x. \quad (3.40)$$

Las derivadas asociadas a estas transformaciones para una función  $(\rho(x, t))$  arbitraria son

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial t^2} &= \epsilon^2 \frac{\partial^2 \rho(x', t')}{\partial t'^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \rho(x', t')}{\partial x'^2} + 2\epsilon\beta \frac{\partial^2 \rho(x', t')}{\partial x' \partial t'}, \\ \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} &= \alpha \frac{\partial \rho(x', t')}{\partial x'} + \delta \frac{\partial \rho(x', t')}{\partial t'}, \\ \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} &= \beta \frac{\partial \rho(x', t')}{\partial x'} + \epsilon \frac{\partial \rho(x', t')}{\partial t'}, \\ \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} &= \delta^2 \frac{\partial^2 \rho(x', t')}{\partial t'^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \rho(x', t')}{\partial x'^2} + 2\alpha\delta \frac{\partial^2 \rho(x', t')}{\partial x' \partial t'}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

que al sustituir en la ecuación generalizada del telegrafista [3.12](#) se tiene

$$\begin{aligned} \left( \alpha^2 - \frac{\beta^2}{c^2} \right) \beta^2 \frac{\partial^2 \rho(x', t')}{\partial x'^2} + \left( \delta^2 - \frac{\epsilon^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \rho(x', t')}{\partial t'^2} + \left( \alpha\delta - \frac{\beta\epsilon}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \rho(x', t')}{\partial x' \partial t'} \\ - 2 \left( \frac{\kappa\alpha}{c^2} + \frac{\mu\beta}{c} \right) \frac{\partial \rho(x', t')}{\partial x'} - 2 \left( \frac{\kappa\delta}{c} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \right) \frac{\partial \rho(x', t')}{\partial t'} = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Para obtener la ecuación del telegrafista se deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\alpha^2 - \frac{\beta^2}{c^2} = 1, \quad (3.43)$$

$$\delta^2 - \frac{\epsilon^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2}, \quad (3.44)$$

$$\alpha\delta - \frac{\beta\epsilon}{c^2} = 0, \quad (3.45)$$

$$\frac{\kappa\alpha}{c^2} + \frac{\mu\beta}{c} = 0, \quad (3.46)$$

resolviendo para  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}}, \quad (3.47)$$

$$\beta = \frac{-\kappa c}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}}, \quad (3.48)$$

$$\epsilon = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}}, \quad (3.49)$$

$$\delta = \frac{-\kappa}{c\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}}, \quad (3.50)$$

entonces, el conjunto de transformaciones será

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\mu x - \kappa c t}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}}, \\ t' &= \frac{-\frac{\kappa}{c} x + \mu t}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Adicionalmente las ecuaciones anteriores se pueden escribir en función de la velocidad promedio a tiempos largos. La ecuación diferencial para  $\langle u(t) \rangle$  se puede obtener al multiplicar por  $x$  la ecuación [3.12](#) e integrarla respecto a esta misma variable en el intervalo de  $(-\infty, \infty)$

$$\frac{d\langle u(t) \rangle}{dt} + 2\mu\langle u(t) \rangle = 2c\kappa, \quad (3.52)$$

resolviendo la ecuación anterior y tomando el límite para tiempos largos ( $t \rightarrow \infty$ ) se tiene que

$$\langle u_\infty \rangle \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle u(t) \rangle = \frac{\kappa}{\mu} c, \quad (3.53)$$

al sustituir  $\langle u_\infty \rangle$  en [3.51](#) se puede escribir como

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - \langle u_\infty \rangle t}{\sqrt{1 - \left(\frac{\langle u_\infty \rangle}{c}\right)^2}}, \\ t' &= \frac{-\frac{\langle u_\infty \rangle}{c} x + t}{\sqrt{1 - \left(\frac{\langle u_\infty \rangle}{c}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

El sistema de ecuaciones anterior son las transformaciones de Lorentz, la ecuación anterior implica que la velocidad relativa entre los dos marcos de referencia, primado y no primado, es igual a  $\langle u_\infty \rangle$ .

Finalmente, la ecuación del telegrafista asociada al sistema de coordenadas dado por [3.51](#) es

$$\frac{\partial^2 \rho(x', t')}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho(x', t')}{\partial t'^2} - 2 \frac{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}}{c^2} \frac{\partial \rho(x', t')}{\partial t'} = 0, \quad (3.55)$$

la cual es similar a la ecuación del telegrafista reportada por Weiss para el caso del caminante aleatorio simétrico pero con otras constantes [\[8\]](#), este resultado coincide con reportado por Rossetto

anteriormente.

Debido a que  $\rho(x, t)$ ,  $J(x, t)$  son cantidades análogas a la densidad de carga y de corriente en electromagnetismo, éstas se pueden escribir de como un cuadvivector relativista y se transforman a través de una transformación de Lorentz [40]

$$\begin{aligned}\rho'(x, t) &= \frac{\mu\rho(x, t) - \kappa J(x, t)}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}}, \\ J'(x, t) &= \frac{\mu J(x, t) - \kappa\rho(x, t)}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}},\end{aligned}\tag{3.56}$$

en este caso no aparece el factor  $c$ , ya que,  $\rho$  y  $J$  por como están definidas tienen las mismas unidades.

Otras cantidades a las que también se pueden aplicar las transformaciones de Lorentz son  $\kappa$  y  $\mu$ , ya que con la transformación de estas cantidades resulta en que están relacionadas con el cuadvivector relativista de la velocidad relativa entre marcos de referencia, el cual está definido como

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\langle u_\infty \rangle}{c}\right)^2}} \\ \frac{\langle u_\infty \rangle}{\sqrt{1 - \left(\frac{\langle u_\infty \rangle}{c}\right)^2}} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}} \\ \frac{\kappa}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}} \end{pmatrix}.\tag{3.57}$$

En el sistema primado  $\kappa$  y  $\mu$  se transforman en

$$\begin{aligned}\mu' &= \sqrt{\mu^2 - \kappa^2}, \\ \kappa' &= 0,\end{aligned}\tag{3.58}$$

por lo tanto, el cuadvivector de velocidad del marco de referencia primado será

$$\vec{v}' = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\tag{3.59}$$

ya que la segunda componente de este cuadvivector es cero, entonces, se concluye que la posición promedio del caminante en el marco de referencia primado está en reposo. Adicionalmente, se puede observar que para el sistema primado también se cumple que

$$\mu'^2 - \kappa'^2 = \mu^2 - \kappa^2 = \frac{1}{T_+ T_-} \quad y \quad |\vec{v}| = |\vec{v}'| = c,\tag{3.60}$$

la primera ecuación indica que un invariante relativista del sistema es  $\frac{1}{T_+ T_-}$ , así como  $c$ .

Finalmente, es necesario obtener el sistema de ecuaciones [3.10] en términos de las variables primadas, para esto es necesario obtener las transformaciones inversas de [3.56] dadas por

$$\begin{aligned}\rho(x, t) &= \frac{\mu\rho'(x, t) + \kappa J'(x, t)}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}}, \\ J(x, t) &= \frac{\mu J'(x, t) + \kappa\rho'(x, t)}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}},\end{aligned}\tag{3.61}$$

sustituyendo en [3.10](#) y usando [3.41](#) para expresar las derivadas se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -c \frac{\partial J'(x', t')}{\partial x'} &= \frac{\partial \rho'(x', t')}{\partial t'}, \\ -2\mu' J'(x', t') - c \frac{\partial \rho'(x', t')}{\partial x'} &= \frac{\partial J'(x', t')}{\partial t'}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

el cual es el mismo que se reporta para un caminante aleatorio simétrico [\[8\]](#). Al desacoplar [3.62](#) se obtiene a la ecuación del telegrafista

$$\frac{\partial^2 \rho'(x', t')}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho'(x', t')}{\partial t'^2} - 2\mu' \frac{\partial \rho'(x', t')}{\partial t'} = 0, \quad (3.63)$$

que es igual a [3.55](#).

### 3.3. Las ecuaciones del telegrafista, Klein-Gordon y Dirac

Un método para encontrar las soluciones de la ecuación del telegrafista consiste en multiplicar la ecuación [3.13](#) por una función tipo factor integrante de la forma  $e^{\phi(t)}$ , y encontrar una nueva ecuación para la función  $e^{\phi(t)}\rho(x, t)$  de manera que la ecuación diferencial resultante de esta transformación sea más tratable. En particular, es conocido que si  $\phi(t)$  es la función lineal  $\mu t$ , la ecuación del telegrafista se convierte en una ecuación tipo Klein Gordon. Esta transformación cambia la normalización de la función  $\rho(x, t)$  y fue descrita en el trabajo seminal de B. Gaveau y cols. en 1984 [\[41\]](#).

Para la ecuación del telegrafista generalizada [3.12](#) el factor integrante que nos permite transformarla en una ecuación tipo Klein-Gordon es

$$e^{\mu t - \frac{\kappa}{c}x}, \quad (3.64)$$

de forma que la ecuación diferencial transformada resultante es

$$\left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{T_- T_+} \right) e^{\mu t - \frac{\kappa}{c}x} \rho(x, t) = 0. \quad (3.65)$$

Por otra parte, la ecuación de Klein Gordon unidimensional para una partícula libre es

$$\left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi(x, t) = 0, \quad (3.66)$$

haciendo una correspondencia entre [3.65](#) y [3.66](#) se identifican los siguiente términos como

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_- T_+} &\leftrightarrow -\frac{(mc)^2}{\hbar^2}, \\ \Psi(x, t) &\leftrightarrow e^{\mu t - \frac{\kappa}{c}x} \rho(x, t). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Debido a que  $\frac{1}{T_- T_+}$  siempre es positiva, y además que  $c$  y  $\hbar$  son constantes físicas bien definidas, se puede concluir que [3.65](#) es la ecuación de Klein -Gordon para una partícula con masa imaginaria.

Es importante mencionar de forma sucinta algunos aspectos importantes de la ecuación de Klein-Gordon [3.66](#) [\[42\]](#):

- Es una ecuación de onda relativista que fue propuesta por Oskar Klein y Walter Gordon en 1926 como una ecuación de onda relativista. Esta ecuación puede ser vista como una generalización de la ecuación de Schrödinger, y a diferencia de esta, es invariante ante transformaciones de Lorentz [42].
- La ecuación de Klein Gordon es de segundo orden, por lo que se requieren dos condiciones iniciales para resolverla: una para la función y otra para la derivada, sin embargo, esto conduce a que  $\int |\Psi|^2 dV \neq 1$ , es decir, la condición de normalización no se cumple. Quizá el mayor problema que presenta la ecuación es que las densidades de probabilidad que se deducen a partir de ella pueden adquirir valores negativos, esto conduce a un problema de interpretación física, el cual no se profundizará en este trabajo [42].

Un enfoque para resolver los inconvenientes de la ecuación de Klein-Gordon tradicionalmente consiste proponer una ecuación relativista de primer orden de la forma [42]

$$\left(-i\hbar\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta mc^2\right)\Psi(x,t) = \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi(x,t). \quad (3.68)$$

tal que sus soluciones también sean soluciones de la ecuación de Klein-Gordon. Para cumplir este requerimiento se 'elevan al cuadrado' los términos en paréntesis de la ecuación [3.68]

$$\left(-\hbar^2 c^2 \alpha \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} - mc^3 \hbar i (\alpha \beta + \beta \alpha) \frac{\partial}{\partial x} + m^2 c^4 \beta^2\right)\Psi(x,t) = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x,t), \quad (3.69)$$

y se comparan con la ecuación [3.66], por lo que se obtienen las siguientes relaciones

$$\alpha = 1, \quad \beta^2 = 1, \quad \alpha\beta + \beta\alpha = 0, \quad (3.70)$$

de las que se deduce que  $\alpha$  y  $\beta$  deben ser matrices. Muchas matrices pueden satisfacer esta relación, Dirac hizo la elección canónica de las matrices de Pauli  $\alpha = \sigma_z$  y  $\beta = \sigma_x$ . Dado lo anterior la ecuación de Dirac es [42]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -i\hbar\sigma_z\frac{\partial}{\partial x}\Psi + mc^2\sigma_x\Psi(x,t). \quad (3.71)$$

La transformación [3.67] permite establecer una analogía entre los caminantes aleatorios persistentes asimétricos con la mecánica cuántica relativista, por lo que valdría la pena preguntarse la relación que existe entre la ecuación de Dirac y las ecuaciones de evolución del caminante aleatorio persistente asimétrico. Para el caso simétrico, B. Gaveau y cols. [41] establecieron que las ecuaciones [3.3] con  $\kappa = 0$ , tenían una correspondencia con la ecuación de Dirac de forma análoga a las relaciones [3.67]. Para el caso asimétrico ( $\kappa \neq 0$ ) la relación entre [3.3] y [3.71] no es directa, ya que se tiene que hacer uso de las transformaciones [3.61] y [3.51] para establecer la correspondencia entre las dos ecuaciones, para lograr esto, el sistema de ecuaciones [3.3] se puede expresar en función de los parámetros  $\mu$  y  $\kappa$  como

$$\begin{aligned} (\mu + \kappa)q(x,t|\pm) - (\mu - \kappa)p(x,t|\pm) - c\frac{\partial p(x,t|\pm)}{\partial x} &= \frac{\partial p(x,t|\pm)}{\partial t}, \\ -(\mu + \kappa)q(x,t|\pm) + (\mu - \kappa)p(x,t|\pm) + c\frac{\partial q(x,t|\pm)}{\partial x} &= \frac{\partial q(x,t|\pm)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

usando las expresiones para las derivadas dadas por [3.41](#) en el sistema de referencia primado entonces se tiene

$$\begin{aligned} (\mu + \kappa)q(x', t'|\pm) - (\mu - \kappa)p(x', t'|\pm) - c \frac{(\mu - \kappa)}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}} \frac{\partial p(x', t'|\pm)}{\partial x'} &= \frac{(\mu - \kappa)}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}} \frac{\partial p(x', t'|\pm)}{\partial t'}, \\ -(\mu + \kappa)q(x', t'|\pm) + (\mu - \kappa)p(x', t'|\pm) + c \frac{(\mu + \kappa)}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}} \frac{\partial q(x', t'|\pm)}{\partial x'} &= \frac{(\mu + \kappa)}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}} \frac{\partial q(x', t'|\pm)}{\partial t'}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

la transformación para encontrar  $p'(x', t'|\pm)$  y  $q'(x', t'|\pm)$  a partir de  $p(x', t'|\pm)$  y  $q(x', t'|\pm)$  no es análoga a [3.51](#), sin embargo, ésta se puede encontrar usando la ecuación [3.56](#)

$$\begin{aligned} p'(x', t'|\pm) + q'(x', t'|\pm) &= \frac{\mu(p(x', t'|\pm) + q(x', t'|\pm)) + \kappa(p'(x', t'|\pm) - q'(x', t'|\pm))}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}}, \\ p'(x', t'|\pm) - q'(x', t'|\pm) &= \frac{\mu(p(x', t'|\pm) - q(x', t'|\pm)) + \kappa(p(x', t'|\pm) + q(x', t'|\pm))}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

resolviendo para  $p'(x', t'|\pm)$  y  $q'(x', t'|\pm)$

$$\begin{aligned} p'(x', t'|\pm) &= \frac{(\mu - \kappa)p(x', t'|\pm)}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}}, \\ q'(x', t'|\pm) &= \frac{(\mu + \kappa)q(x', t'|\pm)}{\sqrt{\mu^2 - \kappa^2}}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

despejando  $p(x', t'|\pm)$  y  $q(x', t'|\pm)$ , sustituyendo en [3.73](#) y además de usar [3.58](#)

$$\begin{aligned} \mu'(q'(x', t'|\pm) - p'(x', t'|\pm)) - c \frac{\partial p'(x', t'|\pm)}{\partial x'} &= \frac{\partial p'(x', t'|\pm)}{\partial t'}, \\ -\mu'(q'(x', t'|\pm) - p'(x', t'|\pm)) + c \frac{\partial q'(x', t'|\pm)}{\partial x'} &= \frac{\partial q'(x', t'|\pm)}{\partial t'}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

La relación entre [3.76](#) y [3.71](#) se puede encontrar definiendo

$$u(x', t') = \begin{pmatrix} p'(x', t'|\pm) \\ q'(x', t'|\pm) \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

y estableciendo la transformación de fase

$$u(x', t') = e^{\mu' t'} \Psi(x', t'), \quad (3.78)$$

donde se identifica a  $\mu'$  gracias a [3.58](#) y [3.67](#) como

$$\mu' = \frac{imc}{\hbar}, \quad (3.79)$$

lo cual coincide con los resultados obtenidos por [41](#).

### 3.4. Colisiones

Se puede hacer una descripción de la evolución del caminante aleatorio tomando en cuenta los cambios de dirección, o colisiones. Para esto, se modifica el sistema de ecuaciones de recurrencia [3.1](#) en

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x, \mu|+) &= (1 - \beta a)p_n(x - 1, \mu|+) + \beta a' q_n(x - 1, \mu - 1|+), \\ q_{n+1}(x, \mu|+) &= (1 - \beta a')q_n(x + 1, \mu|+) + a\beta p_n(x + 1, \mu - 1|+), \end{aligned} \quad (3.80)$$

donde  $p_n(x, \mu|+)$  es la probabilidad de que el caminante este en el paso  $n$  y la posición  $x$  proviniendo de la posición  $x - 1$  habiendo dado  $\mu$  cambios de dirección y  $q_n(x, \mu|+)$  es la probabilidad que el caminante esté en el paso  $n$  y la posición  $x$  proviniendo de la posición  $x + 1$  habiendo dado  $\mu$  cambios de dirección, por otra parte,  $(1 - \beta a)$  y  $(1 - \beta a')$  denotan la probabilidad de que el caminante permanezca en sus siguiente paso en la misma dirección que en su paso anterior. Por simplicidad sólo se considerará el caso cuando el estado inicial del caminante es  $+$ .

Primero se definen múltiples funciones generadoras sucesivas relacionadas con las variables  $n$  y  $\mu$

$$p(x, z, \mu|+) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x, \mu|+) z^n, \quad (3.81)$$

$$\tilde{p}(x, z, \nu|+) = \sum_{\mu=0}^{\infty} p(x, z, \mu|+) \nu^\mu, \quad (3.82)$$

al tomar la transformada de Fourier discreta o la función característica [2.9](#) de las funciones generadoras anteriores para las relaciones de recurrencia [3.80](#) se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\theta, z, \nu|+) &= 1 + e^{i\theta} [(1 - \beta a)\tilde{p}(\theta, z, \nu|+) + \beta a' \nu \tilde{q}(\theta, z, \nu|+)], \\ \tilde{q}(\theta, z, \nu|+) &= e^{-i\theta} [(1 - \beta a')\tilde{q}(\theta, z, \nu|+) + a\beta \nu \tilde{p}(\theta, z, \nu|+)], \end{aligned} \quad (3.83)$$

de lo cual se encuentra

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\theta, z, \nu|+) &= \tilde{p}(\theta, z, \nu|+) + \tilde{q}(\theta, z, \nu|+) = \\ &= \frac{1 - e^{-i\theta} \beta [1 - \beta(a\nu + a')]}{1 - e^{i\theta} z(1 - \beta a) - e^{-i\theta} z(1 - \beta a') + z^2(1 - \beta a - \beta a' + \beta^2 a a'(1 - \nu^2))}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Debido a la dificultad para encontrar la inversa de Fourier y de la función generadora, se determinó el comportamiento del proceso en el límite ultrapersistente  $\beta \rightarrow 0$ . En esta aproximación, los trayectos recorridos por el caminante antes de cambiar de dirección son largos en comparación con los pasos individuales, el número de pasos y las posiciones se pueden considerar como variables continuas. Para una descripción adecuada en este régimen se introducen las siguientes variables espaciales reescaladas  $\vartheta_x = \theta_x / \beta$ ,  $\xi = \beta x$ . En el caso de la función generadora, ésta se puede aproximar como una transformada de Laplace, sin embargo, la relación entre la variable  $z$  de la función generadora y la  $s$  de la transformada de Laplace no es trivial. Para establecer un relación entre las dos cantidades se toma en secuencia  $f_n = 1$ , cuya función generadora está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}. \quad (3.85)$$

Por otra parte, si se considera la transformada de Laplace  $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$ , entonces, se puede concluir que la relación de variables debe ser  $s = 1 - z$ , y la respectiva variable re-escalada será  $\sigma = s/\beta$ , el número de pasos pasa a ser el tiempo en el límite continuo  $\tau = n\beta$ . La definición anterior del tiempo implica que este se medirá en términos de la unidad discreta de tiempo  $1/\beta$ . Análogamente, las variables espaciales son medidas en términos de la distancia fundamental  $1/\beta$ .

Para este caso, escribiendo para las variables re-escaladas, expandiendo en serie y tomando el término dominante en  $\beta$  se tiene

$$\beta\hat{\rho}(\theta, z, \nu|+) \rightarrow \tilde{\rho}(\vartheta, \sigma, \nu|+) \sim \frac{a' + a\nu + i\vartheta + \sigma}{(\sigma + (a + a')/2)^2 + (\vartheta + i(a - a')/2)^2 - aa'\nu^2}, \quad (3.86)$$

primero se calcula la transformada inversa de Fourier-Laplace de la función

$$\tilde{G}(\vartheta, \sigma, \nu|+) = \frac{1}{(\sigma + (a + a')/2)^2 + (\vartheta + i(a - a')/2)^2 - aa'\nu^2}, \quad (3.87)$$

la cual es análoga a [3.21](#), por lo tanto

$$\tilde{G}(\xi, \tau, \nu|+) = e^{(a+a')\xi/2 - (a-a')\tau/2} I_0\left(\nu\sqrt{aa'}\sqrt{\tau^2 - \xi^2}\right) \Theta(t - |x|). \quad (3.88)$$

La expansión en serie de potencias de  $\nu$  de la ecuación anterior es

$$\tilde{G}(\xi, \tau, \nu|+) = e^{(a+a')\xi/2 - (a-a')\tau/2} \sum_{\mu} \frac{\nu^{2\mu}}{(\mu!)^2} \left(\frac{\sqrt{aa'}\sqrt{\tau^2 - \xi^2}}{2}\right)^{2\mu} \Theta(t - |x|), \quad (3.89)$$

entonces [3.86](#) estará dada por

$$\tilde{\rho}(\xi, \tau, \nu|+) = \left(a' + a\nu + \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\xi}\right) \tilde{G}(\xi, \tau, \nu|+), \quad (3.90)$$

sustituyendo [3.89](#) y re-enumerando la serie

$$\tilde{\rho}(\xi, \tau, \nu|+) = e^{(a+a')\xi/2 - (a-a')\tau/2} \left(a' + \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\xi}\right) \sum_{\mu_{par}} \frac{\nu^{\mu}}{((\mu/2)!)^2} \left(\frac{\sqrt{aa'}\sqrt{\tau^2 - \xi^2}}{2}\right)^{\mu} \Theta(t - |x|) + \quad (3.91)$$

$$ae^{(a+a')\xi/2 - (a-a')\tau/2} \sum_{\mu_{impar}} \frac{\nu^{\mu}}{((\mu-1)/2!)^2} \left(\frac{\sqrt{aa'}\sqrt{\tau^2 - \xi^2}}{2}\right)^{\mu-1} \Theta(t - |x|), \quad (3.92)$$

los coeficientes de  $\nu^{\mu}$  de la primera serie se asocian a un número de cambios de dirección par, mientras los coeficientes de  $\nu^{\mu}$  de la segunda serie están relacionados a un número de cambios de dirección impar. Por lo tanto, la función  $\rho(\xi, \tau, \mu|+)$  se divide para los casos donde  $\mu$  sea par o impar.

Tomando los coeficientes y calculando las derivadas se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}\rho_{par}(\xi, \tau, \mu|+) &= \frac{e^{(a+a')\xi/2-(a-a')\tau/2}}{((\mu/2)!)^2} \left( \frac{\sqrt{aa'}\sqrt{\tau^2-\xi^2}}{2} \right)^{2\mu} \Theta(t-|x|) \left( 2a' + \frac{\mu}{x+t} \right), \\ \rho_{impar}(\xi, \tau, \mu|+) &= a \frac{e^{(a+a')\xi/2-(a-a')\tau/2}}{2} \frac{1}{((\mu-1)/2)!^2} \left( \frac{\sqrt{aa'}\sqrt{\tau^2-\xi^2}}{2} \right)^{\mu-1} \Theta(t-|x|),\end{aligned}\quad (3.93)$$

hay que notar que el método utilizado en esta sección reproduce algunos de los resultados obtenidos al resolver la ecuación generalizada del telegrafista [19] (con  $c = 1$ ).



# Capítulo 4

## Caminatas aleatorias con persistencia en dos dimensiones

En este capítulo consideramos un caminante aleatorio persistente simétrico sobre una red regular bidimensional cuadrada. Se buscó calcular la probabilidad de ocupación a través de la función generadora de la transformada de Fourier. Debido a la dificultad de la inversión tanto de la transformada de Fourier como de la función generadora, se estudio el proceso en el límite ultrapersistente. En este régimen, la probabilidad de que el caminante cambie de dirección es muy baja y el caminante realiza largos trayectos entre cambios de dirección, adicionalmente para esta aproximación la función generadora se puede tratar como una transformada de Laplace, por lo que se obtuvo la función distribución de probabilidad asintótica para tiempos largos del caminante aleatorio persistente bidimensional. Para tiempos cortos, se implementaron métodos numéricos para el análisis de la función de distribución de probabilidad del caminante aleatorio persistente bidimensional.

### 4.1. Planteamiento del problema

Una caminata aleatoria con persistencia en una red cuadrada bidimensional puede ser descrita como una caminata aleatoria de cuatro estados. Estos estados se especifican los estados conforme a la posición anterior del caminante aleatorio y se pueden denotar como (fig. [4.1](#))

1. **N (por Northbound)**  $(x, y - 1) \rightarrow (x, y)$
2. **S (por Southbound)**  $(x, y + 1) \rightarrow (x, y)$
3. **E (por Eastbound)**  $(x - 1, y) \rightarrow (x, y)$
4. **W (por Westbound)**  $(x + 1, y) \rightarrow (x, y)$

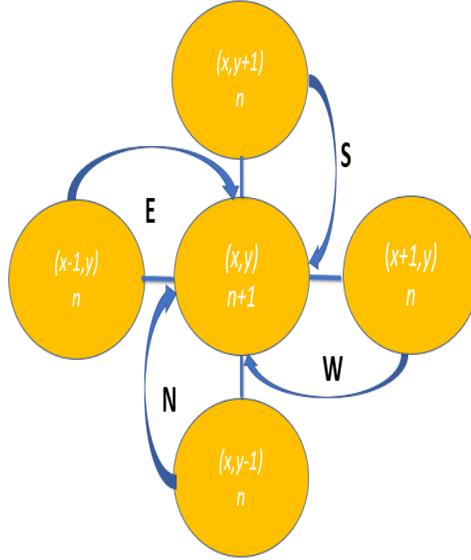


Figura 4.1: Estados del sistema

En este caso,  $(1 - \beta)$  denota la probabilidad de que el caminante permanezca en la misma dirección que en su paso anterior,  $\alpha\beta$  es la probabilidad de que cambie de eje con respecto al actual, y a su vez el caminante puede invertir su dirección con probabilidad  $\beta\gamma$ . Por normalización se debe cumplir la relación  $\gamma + 2\alpha = 1$

Se denotan  $P_K(x, y, n|E)$  las probabilidades de estar en un sitio  $(x, y)$  en el paso  $n$  en el estado  $K = N, S, E, W$ , dado que el estado inicial del caminante es  $E$ . Entonces, estas probabilidades deben satisfacer las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned}
 P_E(x, y, n+1|E) &= (1 - \beta)P_E(x-1, y, n|E) + \beta\alpha(P_S(x-1, y, n|E) + P_N(x-1, y, n|E)) + \gamma\beta P_W(x-1, y, n|E), \\
 P_W(x, y, n+1|E) &= (1 - \beta)P_W(x+1, y, n|E) + \beta\alpha(P_S(x+1, y, n|E) + P_N(x+1, y, n|E)) + \gamma\beta P_E(x+1, y, n|E), \\
 P_N(x, y, n+1|E) &= (1 - \beta)P_N(x, y-1, n|E) + \beta\alpha(P_E(x, y-1, n|E) + P_W(x, y-1, n|E)) + \gamma\beta P_S(x, y-1, n|E), \\
 P_S(x, y, n+1|E) &= (1 - \beta)P_S(x, y+1, n|E) + \beta\alpha(P_E(x, y+1, n|E) + P_W(x, y+1, n|E)) + \gamma\beta P_N(x, y+1, n|E),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

con las condiciones iniciales (Estado inicial y posición inicial)

$$P_E(x, y, 0|E) = \delta_{x,0}\delta_{y,0}, \quad P_N(x, y, 0|E) = P_S(x, y, 0|E) = P_W(x, y, 0|E) = 0. \tag{4.2}$$

Para desacoplar las ecuaciones se calcula la función generadora en  $n$  y la transformada de Fourier del sistema de ecuaciones [4.1](#), la cual, para este caso se define como

$$\hat{H}(\theta_x, \theta_y) = \sum_{x,y=-\infty}^{\infty} H(x, y)e^{i(\theta_x x + \theta_y y)}.$$

La transformada de Fourier nos permite encontrar las relaciones entre las posiciones adyacentes mientras que la función generadora transforma relaciones de recurrencia en ecuaciones algebraicas. En-

tonces se obtiene el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\hat{P}_E(\theta_x, \theta_y, z|E) &= 1 + ze^{i\theta_x}[(1 - \beta)\hat{P}_E(\theta_x, \theta_y, z|E) + \beta\alpha(\hat{P}_S(\theta_x, \theta_y, z|E) + \hat{P}_N(\theta_x, \theta_y, z|E)) + \gamma\beta\hat{P}_W(\theta_x, \theta_y, z|E)], \\
\hat{P}_W(\theta_x, \theta_y, z|E) &= ze^{-i\theta_x}[(1 - \beta)\hat{P}_W(\theta_x, \theta_y, z|E) + \beta\alpha(\hat{P}_S(\theta_x, \theta_y, z|E) + \hat{P}_N(\theta_x, \theta_y, z|E)) + \gamma\beta\hat{P}_E(\theta_x, \theta_y, z|E)], \\
\hat{P}_N(\theta_x, \theta_y, z|E) &= ze^{i\theta_y}[(1 - \beta)\hat{P}_N(\theta_x, \theta_y, z|E) + \beta\alpha(\hat{P}_E(\theta_x, \theta_y, z|E) + \hat{P}_W(\theta_x, \theta_y, z|E)) + \gamma\beta\hat{P}_S(\theta_x, \theta_y, z|E)], \\
\hat{P}_S(\theta_x, \theta_y, z|E) &= ze^{-i\theta_y}[(1 - \beta)\hat{P}_S(\theta_x, \theta_y, z|E) + \beta\alpha(\hat{P}_E(\theta_x, \theta_y, z|E) + \hat{P}_W(\theta_x, \theta_y, z|E)) + \gamma\beta\hat{P}_N(\theta_x, \theta_y, z|E)].
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Buscamos encontrar la probabilidad total cuya transformada de Fourier se denota como

$$\hat{P}(\theta_x, \theta_y, z|E) = \hat{P}_E(\theta_x, \theta_y, z|E) + \hat{P}_W(\theta_x, \theta_y, z|E) + \hat{P}_N(\theta_x, \theta_y, z|E) + \hat{P}_S(\theta_x, \theta_y, z|E), \tag{4.4}$$

para esto hay que despejar las funciones  $\hat{P}_E(\theta_x, \theta_y, z|E)$ ,  $\hat{P}_W(\theta_x, \theta_y, z|E)$ ,  $\hat{P}_N(\theta_x, \theta_y, z|E)$ ,  $\hat{P}_S(\theta_x, \theta_y, z|E)$  del sistema de ecuaciones [4.3](#).

La forma más directa de resolver el sistema [4.3](#) es por medio de la regla de Cramer. Para hacer esto notamos que el sistema de ecuaciones [4.3](#) se puede representar matricialmente como

$$\begin{bmatrix} z(1 - \beta) - e^{-i\theta_x} & z\beta\alpha & z\beta\alpha & z\beta\gamma \\ z\beta\alpha & z(1 - \beta) - e^{-i\theta_y} & z\beta\gamma & z\beta\alpha \\ z\beta\alpha & z\beta\gamma & z(1 - \beta) - e^{i\theta_y} & z\beta\alpha \\ z\beta\gamma & z\beta\alpha & z\beta\alpha & z(1 - \beta) - e^{i\theta_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_E(\theta_x, \theta_y, z|E) \\ \hat{P}_N(\theta_x, \theta_y, z|E) \\ \hat{P}_S(\theta_x, \theta_y, z|E) \\ \hat{P}_W(\theta_x, \theta_y, z|E) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-i\theta_x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

que es de la forma  $A\vec{X} = \vec{b}$ . Las variables  $\hat{P}_K(\theta_x, \theta_y, z|E)$  se obtienen usando la relación

$$\hat{P}_K(\theta_x, \theta_y, z|E) = \frac{\Delta_K}{\Delta}, \tag{4.6}$$

donde  $\Delta$  es el determinante de la matriz  $A$  y  $\Delta_K$  es el determinante de matriz formada al reemplazar la  $K$ -ésima columna de  $A$  por el vector columna  $\vec{b}$ .

Entonces, usando [4.6](#), probabilidad total se expresa de forma compacta como

$$\hat{P}(\theta_x, \theta_y, z|E) = \frac{e^{-i\theta_x} B_x[\Gamma_y + 2\alpha\beta z \operatorname{Re}(B_y)]}{\Gamma_x \Gamma_y - 4\alpha^2 \beta^2 z^2 [\operatorname{Re}(B_x) \operatorname{Re}(B_y)]}, \tag{4.7}$$

donde  $B = B(\theta, z) = e^{i\theta} - z(1 - \beta(\gamma + 1))$  y  $\Gamma = \Gamma(\theta, z) = \|B\|^2 - 2z\beta\gamma \operatorname{Re}(B)$  (cabe aclarar que  $\|B\|^2 = BB^*$ )

#### 4.1.1. Momentos de exactos de la distribución

Al aplicar la relación [2.10](#) a la ecuación [4.7](#) se obtiene la función generadora para cada uno de los momentos exactos, cuya expansión en serie de Taylor permite obtener los momentos como función de número de pasos. Este procedimiento fue realizado mediante cálculo simbólico en el lenguaje Mathematica (Mathworks, Natick, MA, EE. UU.).

Para el caso del primer momento respecto a  $x$  está dado por

$$\langle x(n) \rangle = \frac{(1 - \beta(1 + \gamma))}{\beta(1 + \gamma)} [1 - (1 - \beta(1 + \gamma))^n], \quad (4.8)$$

por otra parte, el primer momento respecto a  $y$  es

$$\langle y(n) \rangle = 0, \quad (4.9)$$

el término [4.8](#) es diferente de cero cuando  $n \rightarrow \infty$  debido a que las condiciones iniciales generan términos en el denominador que al aplicar la ecuación [2.10](#) a [4.7](#) para calcular el primer momento en  $x$  este no se anule.

Los segundos momentos son importantes para determinar el comportamiento difusivo del sistema.

El segundo momento en  $x$  es

$$\begin{aligned} \langle x^2(n) \rangle = & \frac{2 - \beta(1 + \gamma)}{4\beta(1 + \gamma)} [n + 1] - \frac{2(1 - 3\gamma) - 4\beta^2(1 - \gamma)(1 + \gamma)^2 + \beta(1 + \gamma)(5 - 3\gamma)}{8\beta^2(1 - \gamma)(1 + \gamma)^2}, \\ & - \frac{2 + \beta(\gamma - 3)}{8\beta^2(1 - \gamma)(1 - 3\gamma)} [1 - 2\beta(1 - \gamma)]^{n+1} - \frac{2\gamma - \beta(1 - \gamma^2)}{8\beta^2(1 + \gamma)^2(1 - 3\gamma)} [1 - \beta(1 + \gamma)]^{n+1}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

y para  $y$  es

$$\begin{aligned} \langle y^2(n) \rangle = & \frac{2 - \beta(1 + \gamma)}{4\beta(1 + \gamma)} [n + 1] - \frac{2(\gamma - 3) + \beta(1 + \gamma)(5 - 3\gamma)}{4\beta^2(1 - \gamma)(1 + \gamma)^2} - \frac{2 + \beta(\gamma - 3)}{4\beta^2(1 - \gamma)(1 - 3\gamma)} [1 - 2\beta(1 - \gamma)]^{n+1} \\ & - \frac{2(1 - \gamma)(1 - \beta(1 + \gamma))}{4\beta^2(1 + \gamma)^2(1 - 3\gamma)} [1 - \beta(1 + \gamma)]^{n+1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Se observa que los segundos momentos respecto a  $x$  y a  $y$  para un número de pasos largo tienen dependencia lineal respecto a la variable  $n$ , por lo que en este régimen el comportamiento del sistema es difusivo.

## 4.2. Límite ultrapersistente

Para este problema debido a la dificultad para encontrar la inversa de Fourier y de la función generadora se realizó un tratamiento similar al de la sección 3.4 usando el límite ultrapersistente, es decir, cuando  $\beta \rightarrow 0$ . Procediendo de igual forma que en el caso unidimensional las siguientes definiciones de variables re-escaladas  $\vartheta_{x,y} = \theta_{x,y}/\beta$ ,  $\xi = \beta x$ ,  $\eta = \beta y$ ,  $s = 1 - z$ , y  $\sigma = s/\beta$  y  $\tau = n\beta$ .

Expresando [4.7](#) en términos de las variables re-escaladas dadas anteriormente, tomando el orden dominante en  $\beta$  (ya que  $\beta \rightarrow 0$ ), y usando el cambio de variable ( $\varsigma = (\sigma + 1)$ ), se tiene que  $\Gamma = \beta^2(\varsigma^2 + \vartheta^2 - \gamma^2)$  y  $B = \beta(\varsigma + \gamma + i\vartheta)$ , por lo tanto

$$\beta \hat{P}(\theta_x, \theta_y, z|E) \rightarrow \hat{P}(\vartheta_x, \vartheta_y, \varsigma|E) \approx \frac{(\varsigma^2 + (1 - \gamma)(\varsigma + \gamma) + \vartheta_y^2 - \gamma^2)(\varsigma + \gamma + i\vartheta_x)}{[(\varsigma^2 + \vartheta_x^2 - \gamma^2)(\varsigma^2 + \vartheta_y^2 - \gamma^2) - (1 - \gamma)^2(\varsigma + \gamma)^2]}. \quad (4.12)$$

Para calcular la transformada de Laplace inversa se debe encontrar las raíces del denominador dado por el siguiente polinomio

$$\varsigma^4 + \varsigma^2(\vartheta_y^2 - \gamma^2 + \vartheta_x^2 - \gamma^2 - (1 - \gamma)^2) - 2(1 - \gamma)^2\gamma\varsigma + (\vartheta_x^2 - \gamma^2)(\vartheta_y^2 - \gamma^2) - \gamma^2(1 - \gamma)^2 = 0, \quad (4.13)$$

el polinomio anterior es de la forma  $y^4 + py^2 + qy + r$  (polinomio cuártico deprimido). En principio las raíces se pueden calcular analíticamente [43], pero sus expresiones son extremadamente complicadas y por lo tanto la transformada inversa de Laplace resultante obtenida por medio de la expansión de Heaviside es intratable.

### Momentos de $P(\xi, \eta, \tau)$

A partir de la ecuación 4.12 en términos de la variable  $\sigma$  se pueden obtener los momentos usando la ecuación 2.10

$$\langle \xi(\sigma) \rangle = \frac{1}{\sigma[\sigma + \gamma + 1]}, \quad (4.14)$$

cuya transformada inversa de Laplace es

$$\langle \xi(\tau) \rangle = \frac{1}{1 + \gamma} [1 - e^{-(\gamma+1)\tau}]. \quad (4.15)$$

En términos de  $x$  y  $n$  se tiene

$$\beta \langle x(n) \rangle = \frac{1}{\gamma + 1} - \frac{e^{-(\gamma+1)\beta n}}{\gamma + 1}, \quad (4.16)$$

y cuando  $\beta \rightarrow 0$

$$\langle x(n) \rangle = n, \quad (4.17)$$

que corresponde a una partícula con movimiento balístico. Para  $\beta \neq 0$  y  $\tau \rightarrow \infty$  4.15 tiende a la constante  $\frac{1}{(1+\gamma)}$ .

Utilizando el mismo procedimiento, el primer momento de  $\eta$  es

$$\langle \eta(\tau) \rangle = 0, \quad (4.18)$$

del que se puede deducir que

$$\langle y(n) \rangle = 0, \quad (4.19)$$

el segundo momento de  $\xi$  en el espacio  $\sigma$  es

$$\langle \xi^2(\sigma) \rangle = \frac{2[\sigma + (1 - \gamma)]}{[1 + \gamma + \sigma][\sigma + 2(1 - \gamma)]\sigma^2}, \quad (4.20)$$

calculando la inversa por medio de residuos se obtiene

$$\langle \xi^2(\tau) \rangle = \frac{3\gamma - 1 + 2\tau(1 - \gamma^2)}{2(1 - \gamma)(1 + \gamma)^2} + \frac{4\gamma e^{-(1+\gamma)\tau}}{(1 + \gamma)^2(3\gamma - 1)} + \frac{e^{-2(1-\gamma)\tau}}{2(1 - \gamma)(1 - 3\gamma)}, \quad (4.21)$$

por otra parte, segundo momento para  $\eta$  en el espacio  $\sigma$  es

$$\langle \eta^2(\sigma) \rangle = \frac{2(1 - \gamma)}{[1 + \gamma + \sigma][\sigma + 2(1 - \gamma)]\sigma^2}, \quad (4.22)$$

cuya transformada inversa de Laplace está dada por

$$\langle \eta^2(\tau) \rangle = \frac{\gamma - 3 + 2\tau(1 - \gamma^2)}{2(1 - \gamma)(1 + \gamma)^2} - \frac{2(1 - \gamma)e^{-(1+\gamma)\tau}}{(1 + \gamma)^2(3\gamma - 1)} - \frac{e^{-2(1-\gamma)\tau}}{2(1 - \gamma)(1 - 3\gamma)}. \quad (4.23)$$

Para tiempos largos el coeficiente de difusión se puede calcular a partir de los momentos usando la relación

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle \sim 4Dt \quad \text{para} \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.24)$$

tomando la expresiones asintóticas para  $\tau$  grande que  $\langle \eta^2(\tau) \rangle$  y  $\langle \xi^2(\tau) \rangle$  son

$$\langle \eta^2(\tau) \rangle \sim \frac{\tau}{1 + \gamma}, \quad (4.25)$$

$$\langle \xi^2(\tau) \rangle \sim \frac{\tau}{1 + \gamma}, \quad (4.26)$$

las ecuaciones anteriores indican que para tiempos largos el procesos efectivamente es difusivo. Finalmente, sustituyendo en [4.24](#) se tiene que

$$D = \frac{1}{2(\gamma + 1)\beta}. \quad (4.27)$$

Por otra parte, recordando que  $\xi = \beta x$ ,  $\eta = \beta y$  y  $\tau = \beta n$ , si se toma el límite  $\beta \rightarrow 0$

$$\langle x^2(t) \rangle = n^2, \quad (4.28)$$

$$\langle y^2(\tau) \rangle = 0, \quad (4.29)$$

de igual forma que en el promedio, este resultado indica que el movimiento es balístico en este límite.

### Los casos especiales de $\gamma = 1$ y $\gamma = 1/3$

En las expresiones [4.21](#) y [4.23](#) cuando  $\gamma \rightarrow 1/3$  y  $\gamma \rightarrow 1$  existe una indeterminaciones del tipo  $\frac{0}{0}$ , entonces los momentos  $\langle \xi^2(\tau) \rangle$  para esos dos casos se calculan usando la regla de L'Hopital

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \langle \xi^2(\tau) \rangle = \frac{1}{2}(e^{-2\tau} - 1) + \tau, \quad (4.30)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1/3} \langle \xi^2(\tau) \rangle = \frac{3}{4} [1 - e^{-4\tau/3}] \tau, \quad (4.31)$$

para el caso de  $\langle \eta^2(\tau) \rangle$  los límites son

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \langle \eta^2(\tau) \rangle = 0, \quad (4.32)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1/3} \langle \eta^2(\tau) \rangle = \frac{3}{8} [(3 + 2\tau)e^{-4\tau/3} + (-3 + 2\tau)], \quad (4.33)$$

cuando  $\gamma \rightarrow 1$  es consistente que el segundo momento sea igual a cero, ya que en ese límite [4.12](#) representa la transformada de Laplace de la función característica de una caminata aleatoria persistente unidimensional simétrica, siendo análoga a las ecuaciones [3.18](#) (con  $\kappa = 0$ ) y [3.86](#) (con  $\nu = 1$  y  $a = a'$ ).

### 4.3. Aproximación para $\tau$ , $\xi$ y $\eta$ grandes

La manera más sencilla de encontrar la distribución para  $\tau$ ,  $\xi$  y  $\eta$  grandes es calcular los límites  $\vartheta_x \rightarrow 0$ ,  $\vartheta_y \rightarrow 0$  y  $\sigma \rightarrow 0$  en la distribución [4.12](#). Tomando el término dominante se tiene

$$\hat{P}(\vartheta_x, \vartheta_y, \sigma|E) \sim \frac{2(1 + \gamma + i\vartheta_x)}{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + 2(1 + \gamma)\sigma}. \quad (4.34)$$

El numerador de la ecuación anterior se puede expresar de forma asintóticamente equivalente a una exponencial cuando  $\vartheta \rightarrow 0$

$$e^{\frac{i\vartheta}{1+\gamma}} \sim 1 + \frac{i\vartheta}{1 + \gamma},$$

entonces, [4.34](#) se puede re-escribir como

$$\hat{P}(\vartheta_x, \vartheta_y, \sigma|E) \sim \frac{2(1 + \gamma)e^{\frac{i\vartheta}{1+\gamma}}}{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + 2(1 + \gamma)\sigma}, \quad (4.35)$$

ya que la exponencial del numerador de la ecuación representa una translación en el eje  $\xi$  en la transformada inversa de Fourier, entonces, por simplicidad nos enfocamos en calcular la transformada inversa de Fourier-Laplace de la función

$$\hat{\hat{P}}(\vartheta_x, \vartheta_y, \sigma|E) \sim \frac{2(1 + \gamma)}{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + 2(1 + \gamma)\sigma}. \quad (4.36)$$

Las transformada inversa de Laplace se puede calcular fácilmente, ya que, [4.34](#) sólo tiene un polo en  $\sigma = -\frac{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2}{2(1+\gamma)}$ . Usando el teorema de expansión de Heaviside se tiene que la transformada inversa de Laplace de [4.36](#) es

$$\hat{\hat{P}}(\vartheta_x, \vartheta_y, \tau|E) \sim e^{-\frac{(\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2)\tau}{2(1+\gamma)}}. \quad (4.37)$$

El siguiente paso es invertir la transformada de Fourier, la cual se puede calcular usando la fórmula integral dada por [2.5](#)

$$\tilde{P}(\xi, \eta, \tau|E) \sim \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2)\tau}{2(1+\gamma)} - i(\vartheta_x\xi + \vartheta_y\eta)} d\vartheta_x d\vartheta_y, \quad (4.38)$$

calculando la integral y aplicando la propiedad de la transformación rígida para transformadas de Fourier se tiene

$$P(\xi, \eta, \tau|E) \sim \frac{(1 + \gamma)}{2\pi\tau} e^{-\frac{(1+\gamma)}{2\tau} [(\xi - \frac{1}{1+\gamma})^2 + \eta^2]}, \quad (4.39)$$

la ecuación anterior implica que para  $\tau$ ,  $\xi$  y  $\eta$  grandes, la distribución de probabilidad es una función Gaussiana bidimensional centrada en  $(\frac{1}{1+\gamma}, 0)$ . Una distribución gaussiana en general tiene la forma

$\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$ , donde  $\mu_x$  corresponde al primer momento y  $\sigma_x$  a la desviación estándar, a partir de esto se pueden identificar estas cantidades en [4.39](#), por lo tanto

$$\mu_x = \frac{1}{\gamma + 1},$$

$$\mu_y = 0,$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\tau}{1+\gamma}},$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\tau}{1+\gamma}},$$

las cuales corresponden a las aproximaciones asintóticas de [4.15](#), [4.18](#), [4.21](#), [4.23](#) cuando  $\tau \rightarrow \infty$ .

Finalmente, se puede expresar [4.39](#) en términos de las variables no re-escaladas  $(x, y, n)$

$$P(x, y, n|E) \sim \frac{(1+\gamma)}{2\pi\beta n} e^{-\frac{\beta(1+\gamma)}{2n} [(x-\frac{1}{\beta(1+\gamma)})^2 + y^2]}. \quad (4.40)$$

## 4.4. Colisiones

Consideremos  $P_K(x, y, n, \mu, \nu|E)$  la probabilidad conjunta de estar en un sitio  $(x, y)$  en el paso  $n$  y en el estado  $K$  con  $K \in \{N, S, E, W\}$ , habiendo tenido  $\mu$  cambios de dirección (colisiones),  $\nu$  de las cuales fueron cambios de eje de movimiento (esquinas), dado que el caminante estaba en un inicio en el estado  $E$ . Entonces se tienen las siguientes relaciones de recurrencia válidas para  $\nu$  y  $\mu$  mayores que 0:

$$P_E(x, y, n+1, \mu, \nu|E) = (1-\beta)P_E(x-1, y, n, \mu, \nu|E) + \gamma\beta P_W(x-1, y, n, \mu-1, \nu|E) + \beta\alpha \left( P_S(x-1, y, n, \mu-1, \nu-1|E) + P_N(x-1, y, n, \mu-1, \nu-1|E) \right),$$

$$P_W(x, y, n+1, \mu, \nu|E) = (1-\beta)P_W(x+1, y, n, \mu, \nu|E) + \gamma\beta P_E(x+1, y, n, \mu-1, \nu|E) + \beta\alpha \left( P_S(x+1, y, n, \mu-1, \nu-1|E) + P_N(x+1, y, n, \mu-1, \nu-1|E) \right),$$

$$P_N(x, y, n+1, \mu, \nu|E) = (1-\beta)P_N(x, y-1, n, \mu, \nu|E) + \gamma\beta P_S(x, y-1, n, \mu-1, \nu|E) + \beta\alpha \left( P_E(x, y-1, n, \mu-1, \nu-1|E) + P_W(x, y-1, n, \mu-1, \nu-1|E) \right),$$

$$P_S(x, y, n+1, \mu, \nu|E) = (1-\beta)P_S(x, y+1, n, \mu, \nu|E) + \gamma\beta P_N(x, y+1, n, \mu-1, \nu|E) + \beta\alpha \left( P_E(x, y+1, n, \mu-1, \nu-1|E) + P_W(x, y+1, n, \mu-1, \nu-1|E) \right),$$

Para  $\nu = 0$  y  $\mu$  mayor que 0 tenemos:

$$P_E(x, y, n+1, \mu, 0|E) = (1-\beta)P_E(x-1, y, n, \mu, 0|E) + \gamma\beta P_W(x-1, y, n, \mu-1, 0|E),$$

$$P_W(x, y, n+1, \mu, 0|E) = (1-\beta)P_W(x+1, y, n, \mu, 0|E) + \gamma\beta P_E(x+1, y, n, \mu-1, 0|E),$$

$$P_N(x, y, n, \mu, 0|E) = 0,$$

$$P_S(x, y, n, \mu, 0|E) = 0.$$

Y para  $\mu = 0$

$$\begin{aligned} P_E(x, y, n+1, 0, 0|E) &= (1 - \beta)P_E(x-1, y, n, 0, 0|E), \\ P_W(x, y, n, 0, 0|E) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, para continuar, definimos múltiples funciones generadoras.

Primero  $P'(x, y, n, \mu, q|E) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P(x, y, n, \mu, \nu|E)q^\nu$ , entonces, multiplicando por  $q^\nu$  y sumando desde  $\nu = 1$  hasta infinito, las relaciones de recurrencia quedan

$$\begin{aligned} P'_E(x, y, n+1, \mu, q|E) &= (1 - \beta)P'_E(x-1, y, n, \mu, q|E) + \gamma\beta P'_W(x-1, y, n, \mu-1, q|E) + \\ & q\beta\alpha \left( P'_S(x-1, y, n, \mu-1, q|E) + P'_N(x-1, y, n, \mu-1, q|E) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_W(x, y, n+1, \mu, q|E) &= (1 - \beta)P'_W(x+1, y, n, \mu, q|E) + \gamma\beta P'_E(x+1, y, n, \mu-1, q|E) + \\ & q\beta\alpha \left( P'_S(x+1, y, n, \mu-1, q|E) + P'_N(x+1, y, n, \mu-1, q|E) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_N(x, y, n+1, \mu, q|E) &= (1 - \beta)P'_N(x, y-1, n, \mu, q|E) + \gamma\beta P'_S(x, y-1, n, \mu-1, q|E) + \\ & q\beta\alpha \left( P'_E(x, y-1, n, \mu-1, q|E) + P'_W(x, y-1, n, \mu-1, q|E) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_S(x, y, n+1, \mu, q|E) &= (1 - \beta)P'_S(x, y+1, n, \mu, q|E) + \gamma\beta P'_N(x, y+1, n, \mu-1, q|E) + \\ & q\beta\alpha \left( P'_E(x, y+1, n, \mu-1, q|E) + P'_W(x, y+1, n, \mu-1, q|E) \right), \end{aligned}$$

Ahora definimos la función generadora  $P''(x, y, n, k, q|E) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P'(x, y, n, \mu, q|E)k^\mu$ , con la cual obtenemos:

$$\begin{aligned} P''_E(x, y, n+1, k, q|E) &= (1 - \beta)P''_E(x-1, y, n, k, q|E) + k\gamma\beta P''_W(x-1, y, n, k, q|E) + \\ & kq\beta\alpha \left( P''_S(x-1, y, n, k, q|E) + P''_N(x-1, y, n, k, q|E) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P''_W(x, y, n+1, k, q|E) &= (1 - \beta)P''_W(x+1, y, n, k, q|E) + k\gamma\beta P''_E(x+1, y, n, k, q|E) + \\ & kq\beta\alpha \left( P''_S(x+1, y, n, k, q|E) + P''_N(x+1, y, n, k, q|E) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P''_N(x, y, n+1, k, q|E) &= (1 - \beta)P''_N(x, y-1, n, k, q|E) + k\gamma\beta P''_S(x, y-1, n, k, q|E) + \\ & kq\beta\alpha \left( P''_E(x, y-1, n, k, q|E) + P''_W(x, y-1, n, k, q|E) \right), \end{aligned}$$

$$P_S''(x, y, n+1, k, q|E) = (1 - \beta)P_S''(x, y+1, n, k, q|E) + k\gamma\beta P_N'(x, y+1, n, k, q|E) + kq\beta\alpha \left( P_E''(x, y+1, n, k, q|E) + P_W''(x, y+1, n, k, q|E) \right),$$

donde usamos las ecuaciones para  $\nu = 0$  y  $\mu = 0$ , y la identidad  $P_W''(x, y, n, 0, q|E) = P_W(x, y, n, 0, 0|E)$ . Estas ecuaciones son idénticas a las ecs. [4.1](#), con las mismas condiciones iniciales:  $P_E''(x, y, 0, k, q|E) = \delta_{x,0}\delta_{y,0}$ ,  $P_W''(x, y, 0, k, q|E) = P_N''(x, y, 0, k, q|E) = P_S''(x, y, 0, k, q|E)$ , pero con cambios en las constantes:  $\gamma \rightarrow k\gamma$  y  $\alpha \rightarrow kq\alpha$ .

Resolviendo y usando [4.7](#) se obtiene

$$\hat{P}''(\theta_x, \theta_y, z, k, q|E) = \frac{e^{-i\theta_x} B_x [\Gamma_y + 2qk\alpha\beta z \operatorname{Re}(B_y)]}{\Gamma_x \Gamma_y - 4q^2 k^2 \alpha^2 \beta^2 z^2 [\operatorname{Re}(B_x) \operatorname{Re}(B_y)]}, \quad (4.41)$$

donde  $B = B(\theta, z) = e^{i\theta} - z(1 - \beta(k\gamma + 1))$  y  $\Gamma = \Gamma(\theta, z) = \|B\|^2 - 2zk\beta\gamma \operatorname{Re}(B)$  ahora tomando el límite ultrapersistente y rescalando las variables como en la sección anterior, se tiene

$$\hat{P}''(\vartheta_x, \vartheta_y, \varsigma|E) \approx \frac{\varsigma + \gamma k + i\vartheta_x}{\varsigma + \gamma k} \left[ \frac{1 + 2qk\alpha\mathcal{P}(\vartheta_y)}{1 - 4\alpha^2 q^2 k^2 \mathcal{P}(\vartheta_y)\mathcal{P}(\vartheta_x)} \mathcal{P}(\vartheta_x) \right] \quad (4.42)$$

donde

$$\mathcal{P}(\vartheta) = \frac{\varsigma + k\gamma}{\varsigma^2 - (k\gamma)^2 + \vartheta^2} \quad (4.43)$$

Para el término entre paréntesis se tiene la expansión en serie

$$\left[ \frac{1 + 2qk\alpha\mathcal{P}(\vartheta_y)}{1 - 4\alpha^2 q^2 k^2 \mathcal{P}(\vartheta_y)\mathcal{P}(\vartheta_x)} \right] \mathcal{P}(\vartheta_x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2kq\alpha)^{2n} \mathcal{P}^{n+1}(\vartheta_x) \mathcal{P}^n(\vartheta_y) + \sum_{n=0}^{\infty} (2kq\alpha)^{2n+1} \mathcal{P}^{n+1}(\vartheta_x) \mathcal{P}^{n+1}(\vartheta_y). \quad (4.44)$$

La expansión es análoga la que se obtuvo para el caso unidimensional, el primer término está relacionado con cambios de dirección pares, y el segundo con cambios de dirección impares, esto implica que la paridad en el número de colisiones divide la función de densidad de probabilidad, como en el caso unidimensional, estos cambios de dirección pueden ser tanto de eje como una inversión en la dirección. Básicamente, la función de probabilidad evoluciona a través de múltiples autoconvoluciones sucesivas con cada cambio de dirección dado por el caminante.

## 4.5. Simulaciones

### 4.5.1. Diseño de los algoritmos

En esta sección nos enfocaremos en dos métodos tradicionales para el estudio de caminatas aleatorias: la enumeración exacta y las simulaciones Monte Carlo.

La enumeración exacta es un método iterativo que nos permite calcular la distribución de las probabilidades en cada punto de la red en cada paso que da el caminante. Para eso se iteran las ecuaciones de recurrencia [4.1](#) partiendo de la condición inicial [4.2](#). Sin embargo, este método es computacionalmente costoso, por lo que sólo puede usarse para un número pequeño de pasos [44](#).

Por otra parte, las simulaciones Monte Carlo consisten en generar un número grande de caminatas aleatorias diferentes de tal forma que sean representativas del conjunto total de caminatas posibles. Para obtener la precisión deseada de los valores esperados de las cantidades de interés se aumenta el número de realizaciones hasta que estos no parecen variar dentro de una tolerancia determinada. En la implementación de este método fue necesario generar un estado ('E', 'W', 'N', 'S'), representado por una cadena de caracteres, el cual se define por la dirección del paso anterior que dio el caminante. Estos estados van a determinar unívocamente cómo se va mover el caminante:

- 'E' el caminante se va a mover un paso en el eje  $x$  en dirección positivo.
- 'S' el caminante se va a mover un paso en el eje  $y$  en dirección negativa.
- 'W' el caminante se va a mover un paso en el eje  $x$  en dirección negativa.
- 'N' el caminante se va a mover un paso en el eje  $y$  en dirección positiva.

Adicionalmente, las probabilidades de transición de un estado a otro van estar determinadas según las relaciones de recurrencia [4.1](#).

El Monte Carlo es un método menos costoso computacionalmente que la enumeración exacta, por lo que se pueden alcanzar un número de pasos mayor. Sin embargo, para un número de pasos del orden de varias veces  $1/\beta$ , es necesario realizar algunas modificaciones que se mencionaran en la siguiente sección.

### Código

A continuación se muestran los pseudocódigos de los dos métodos numérico: enumeración exacta (fig. [4.2](#)) y Monte Carlo (fig. [4.3](#)).

## Enumeración exacta

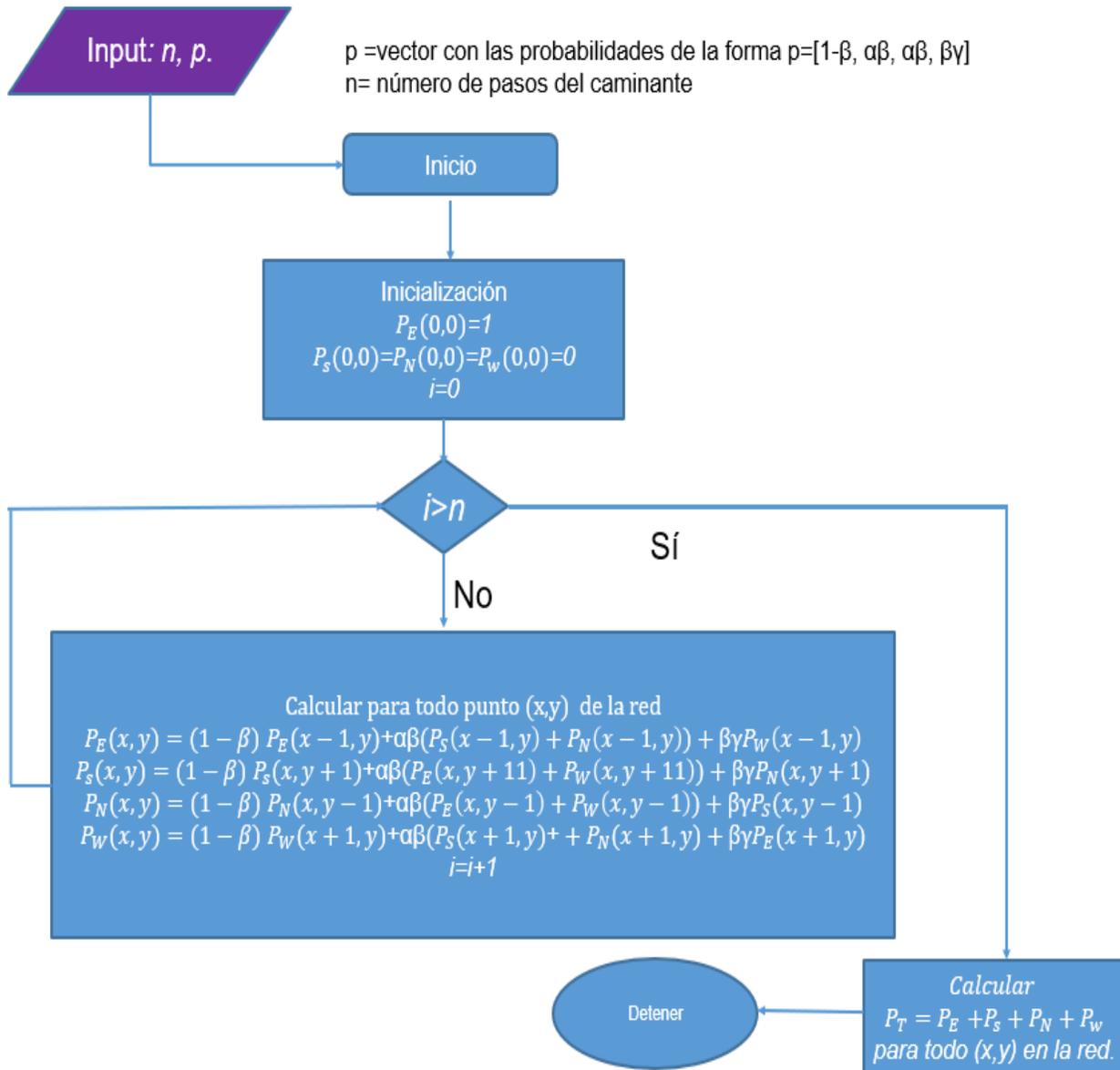


Figura 4.2: Diagramas de flujo del método de enumeración exacta.

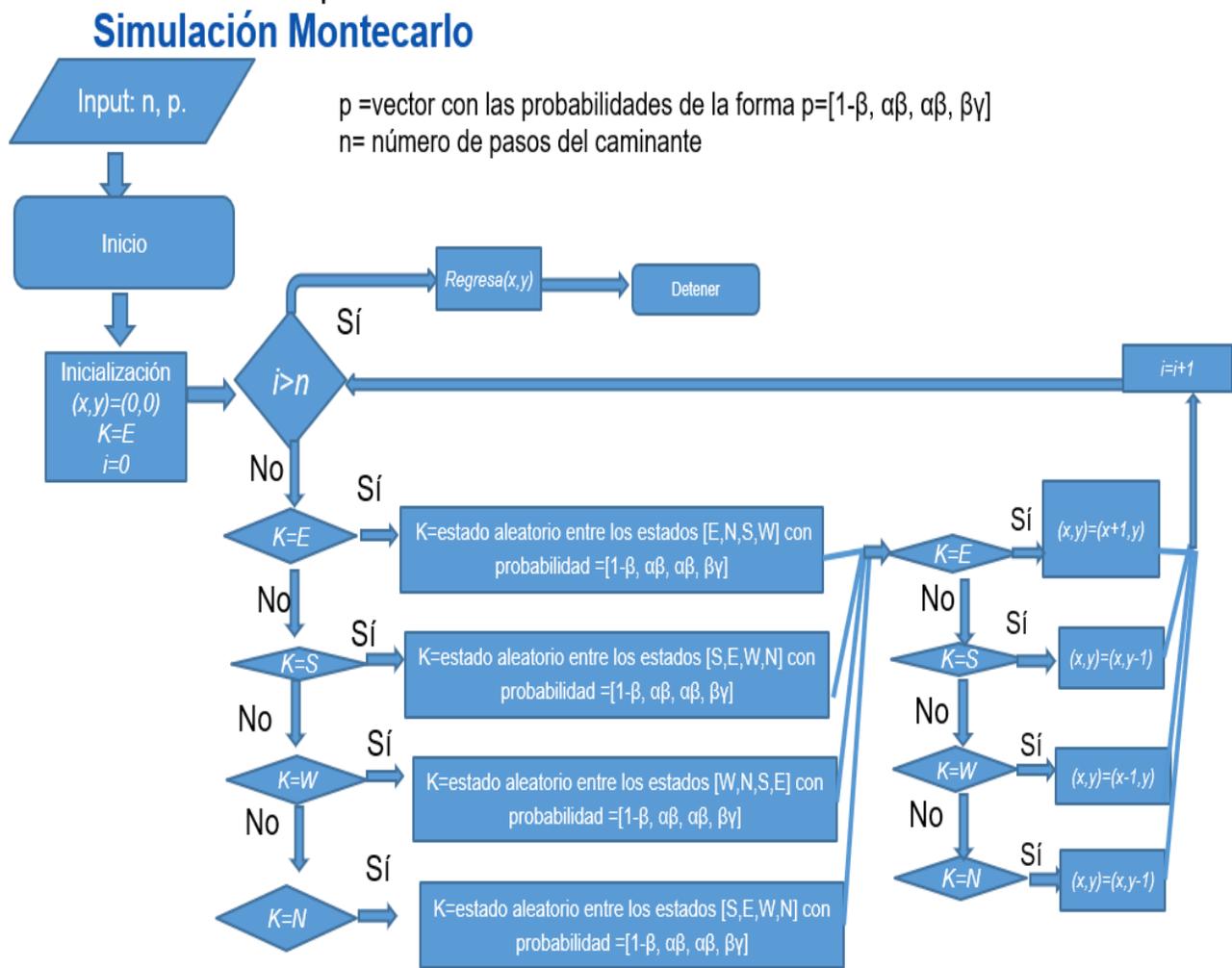


Figura 4.3: Diagramas de flujo del método numérico Monte Carlo.

**Input:**  $state$   $\triangleright$  \*[r]String que indica el estado del caminante en un paso  $n$

**Output:** Un vector que indica el movimiento del caminante dependiendo del estado.

**Function**  $statemap(state)$ :

```

if  $state = E$  then
  | return (1,0)
else if  $state = N$  then
  | return (0,1)
else if  $state = S$  then
  | return (0,-1)
else if  $state = W$  then
  | return (-1,0)

```

**End Function**

**Algorithm 1:** Pseudocódigo de la función que mapea estados con sus correspondientes movimientos

**Input:**  $p$   $\triangleright$  Vector de la forma  $[1 - \beta, \beta\alpha, \beta\alpha, \beta(1 - 2\alpha)]$  que indica las probabilidades

**Input:**  $n$   $\triangleright$  Número de pasos del caminante

**Output:**  $x$   $\triangleright$  Posición final del caminante después de  $n$  pasos

**Function**  $2drandomwalkpersistent(p,n)$ :

$x \leftarrow (0,0)$   $\triangleright$  asignar a la variable  $x$  la posición inicial del caminante

$state \leftarrow E$

**for**  $i \leftarrow 0$  **to**  $n$  **do**

**if**  $state = E$  **then**

    Elegir aleatoriamente entre los estados [E,N,S,W] con probabilidad

$[1 - \beta, \beta\alpha, \beta\alpha, \beta(1 - 2\alpha)]$

$x \leftarrow x + statemap(state)$

**else if**  $state = N$  **then**

    Elegir aleatoriamente entre los estados [N,E,W,S] con probabilidad

$[1 - \beta, \beta\alpha, \beta\alpha, \beta(1 - 2\alpha)]$

$state = \text{Estado elegido}$

$x \leftarrow x + statemap(state)$

**else if**  $state = S$  **then**

    Elegir aleatoriamente entre los estados [S,E,W,N] con probabilidad

$[1 - \beta, \beta\alpha, \beta\alpha, \beta(1 - 2\alpha)]$

$state = \text{Estado elegido}$

$x \leftarrow x + statemap(state)$

**else if**  $state = W$  **then**

    Elegir aleatoriamente entre los estados [W,N,S,E] con probabilidad

$[1 - \beta, \beta\alpha, \beta\alpha, \beta(1 - 2\alpha)]$

$state = \text{Estado elegido}$

$x \leftarrow x + statemap(state)$

**end**

**return**  $x$ ;

**End Function**

**Algorithm 2:** Generador de caminatas aleatorias con persistencia 2-D

Para validar la precisión de los métodos numéricos se usarán los momentos exactos de la distribución dados por las ecuaciones [4.8](#), [4.9](#), [4.10](#), [4.11](#), además, se utilizarán las expresiones para los momentos en el límite ultra-persistente dadas por las ecuaciones [4.15](#), [4.21](#), [4.18](#), [4.23](#).

En el caso de las simulaciones Monte Carlo, los momentos se obtienen simplemente calculando el promedio de cada componente de las posiciones finales de la caminata aleatorias generada. Para el cálculo de los momentos  $m$ -ésimos respecto a  $x$  y  $y$  usando la enumeración exacta basta con aplicar las ecuaciones

$$\langle x^m \rangle = \sum_{x,y} p_{x,y} x^m,$$
$$\langle y^m \rangle = \sum_{x,y} p_{x,y} y^m,$$

donde  $p_{x,y}$  es la probabilidad de ocupación en el sitio  $x, y$  de la red, y la suma depende del número de pasos.

Para la implementación de los métodos numéricos se usaron los lenguajes Python 3 para el Monte Carlo y MATLAB (Mathworks, Natick, MA, EE. UU.) para la enumeración exacta. En la generación de números aleatorios del Monte Carlo se utilizaron las librerías *random* y *NumPy* de Python. El generador principal de números aleatorios en Python es Mersenne Twister. Produce flotantes de precisión de 53 bits y tiene un período de  $2^{19937}-1$  [45]. Por otra parte, las simulaciones Monte Carlo fueron paralelizadas a través de las bibliotecas *Multiprocessing* y *Joblib*. La representación gráfica de las simulaciones numéricas fue realizada completamente en MATLAB.

### 4.5.2. Resultados

A continuación se muestran los resultados de la implementación del código que genera las caminatas aleatorias para la simulación Monte Carlo (fig. 4.4). Es importante recalcar que todas las simulaciones Monte Carlo y los cálculos de enumeración exacta fueron hechos tomando como estado inicial 'E'.

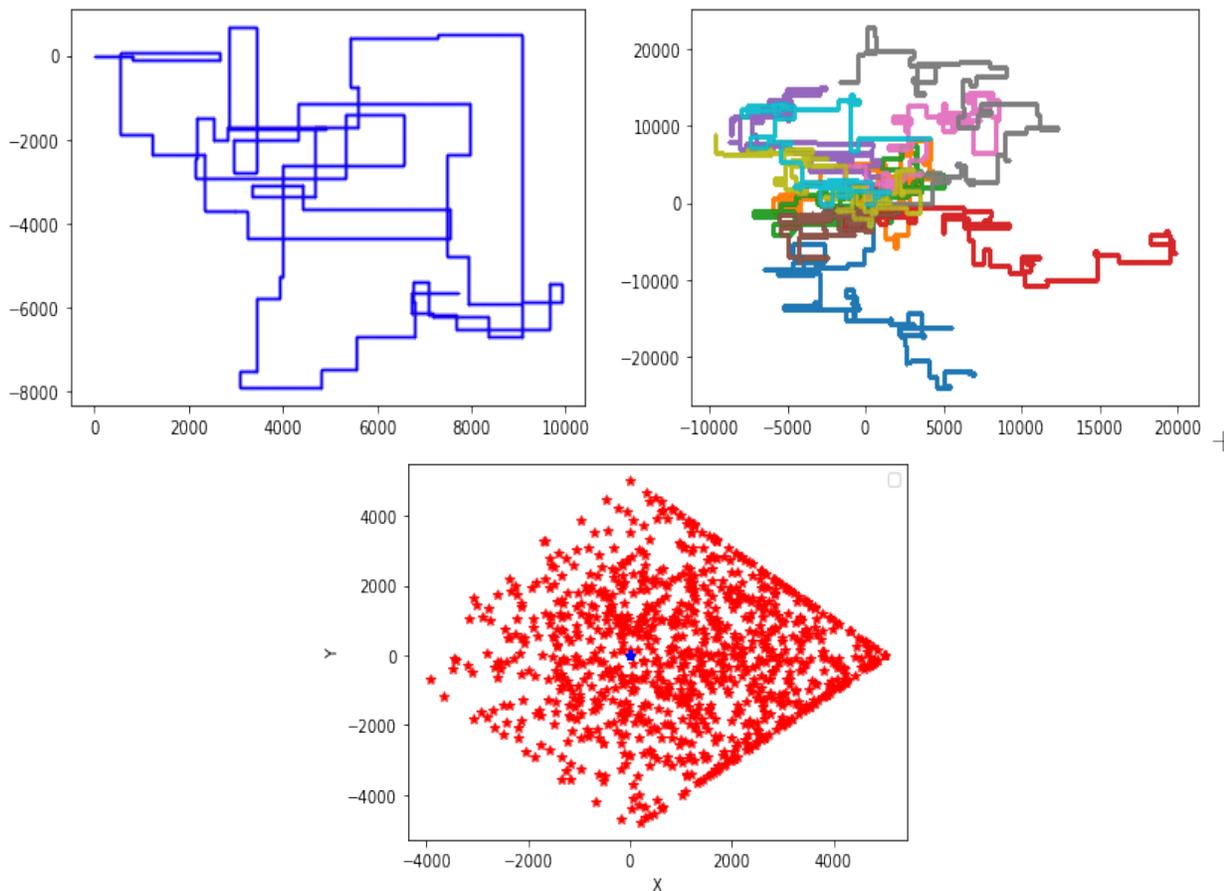
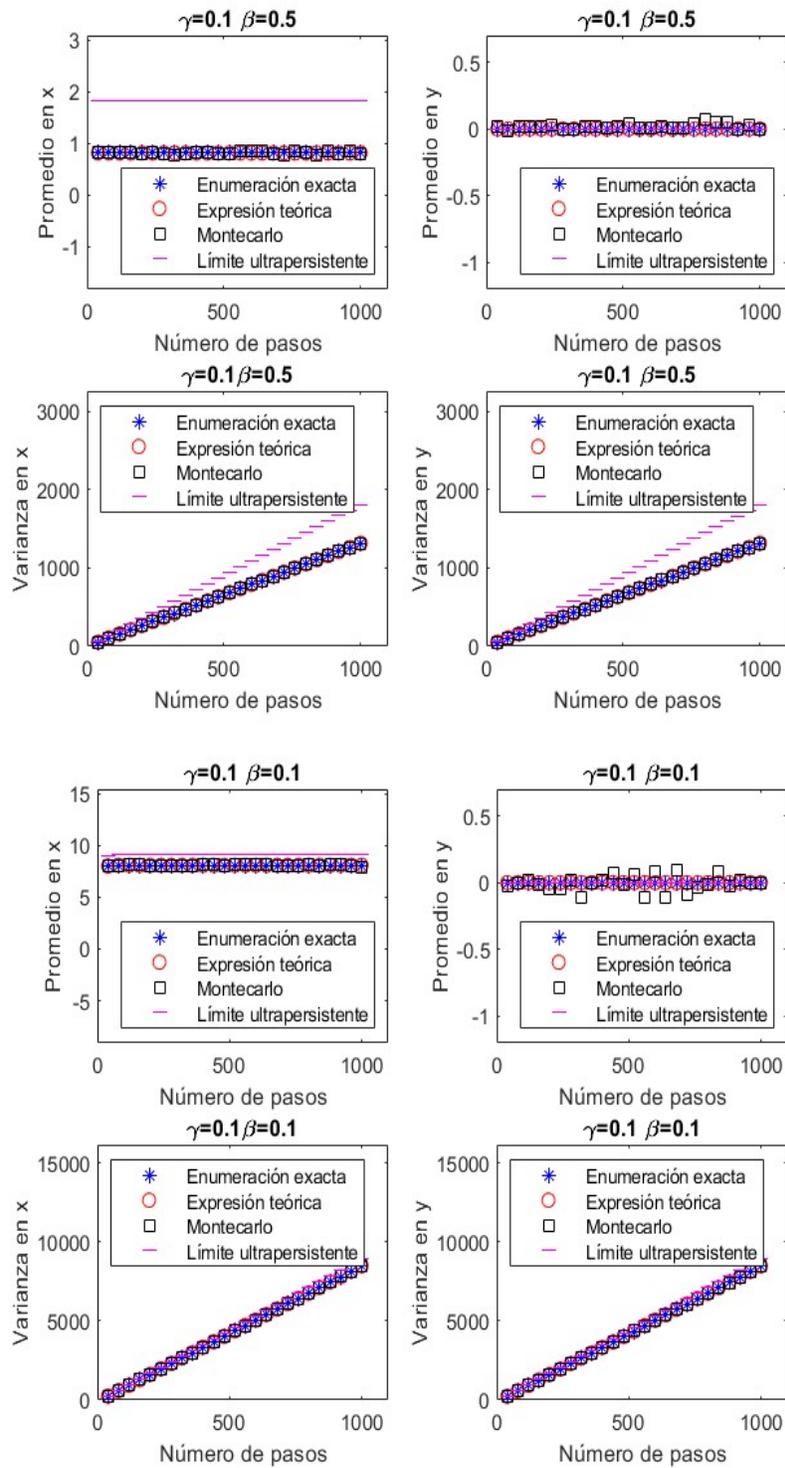


Figura 4.4: Resultados del código Monte Carlo. I) Una caminata aleatoria. II) Diez caminatas aleatorias. Las caminatas se realizaron para 1,000,000 pasos. III) Posición inicial y final de 1000 caminantes aleatorios después de 500 pasos. Los parámetros utilizados son  $\beta = 0.001$ ,  $\gamma = 0$  y el estado inicial es 'E'.

En seguida se observan las gráficas para ciertos valores descendentes de  $\beta$  y un valor de  $\gamma$  fijo. Se compararon los promedios obtenidos con la simulación Monte Carlo y la enumeración exacta con las expresiones teóricas exactas y en el límite ultrapersistente (fig. 4.5).



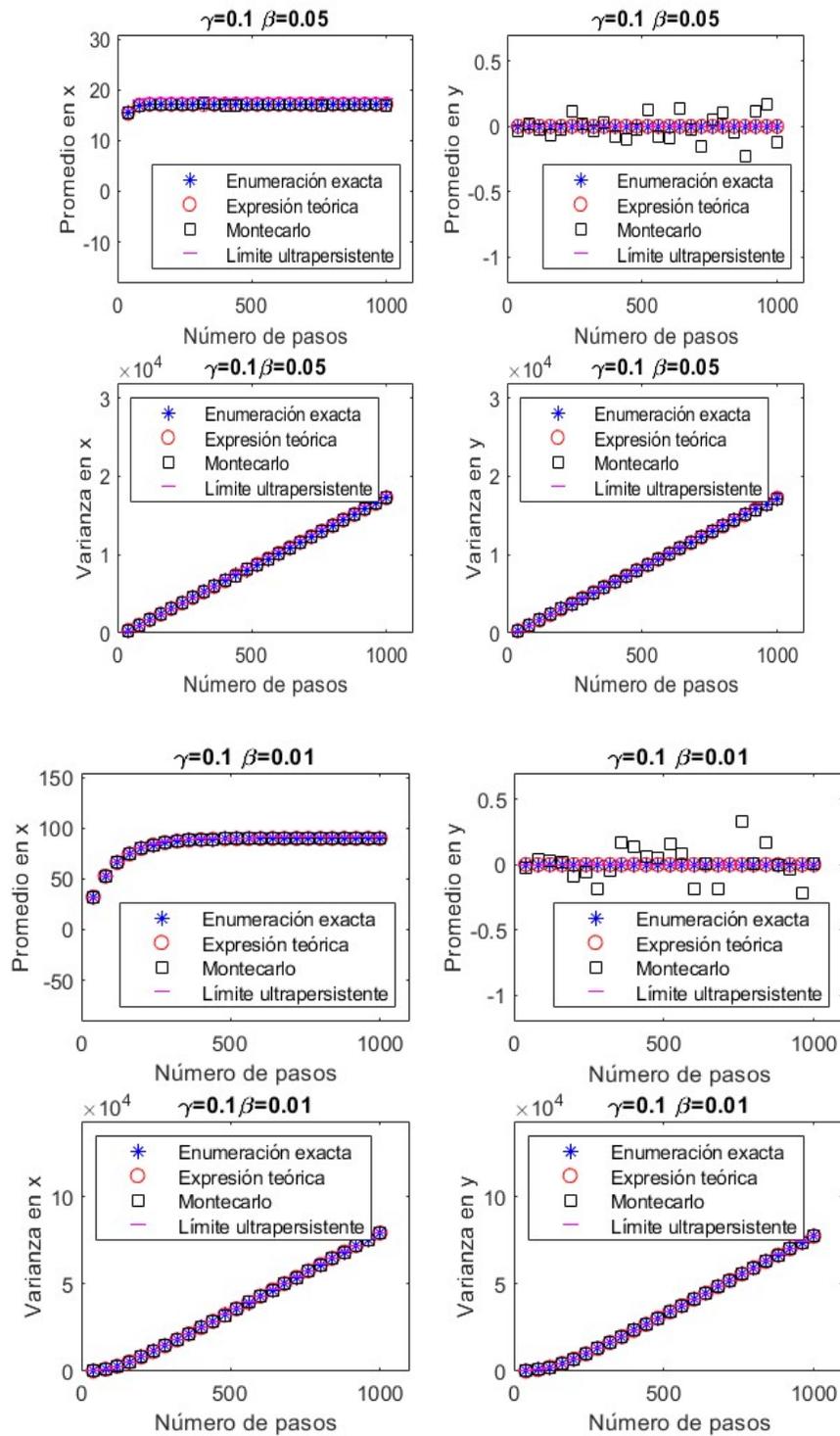
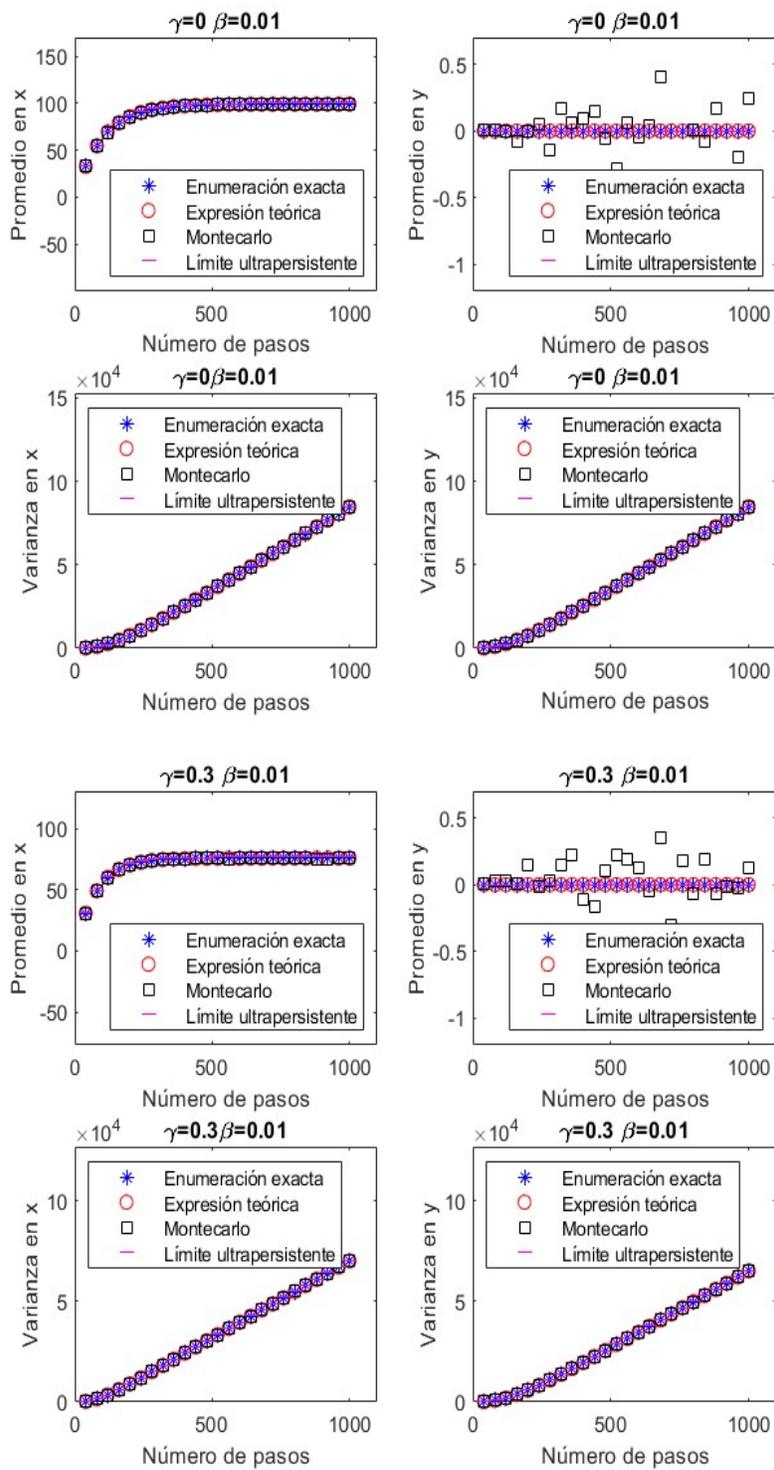


Figura 4.5: Resultados de la simulación Monte Carlo y la enumeración exacta para valores descendentes de  $\beta = [0.5, 0.1, 0.05, 0.01]$  y  $\gamma = 0.1$ ; para 1,000,000 de caminantes.

De forma análoga al caso anterior, se compararon los promedios obtenidos para simulaciones Monte Carlo y la enumeración exacta, tomando varios valores de  $\gamma$  y un valor de  $\beta$ , con las expresiones teóricas exactas y las obtenidas en el límite ultrapersistente (fig. 4.6).



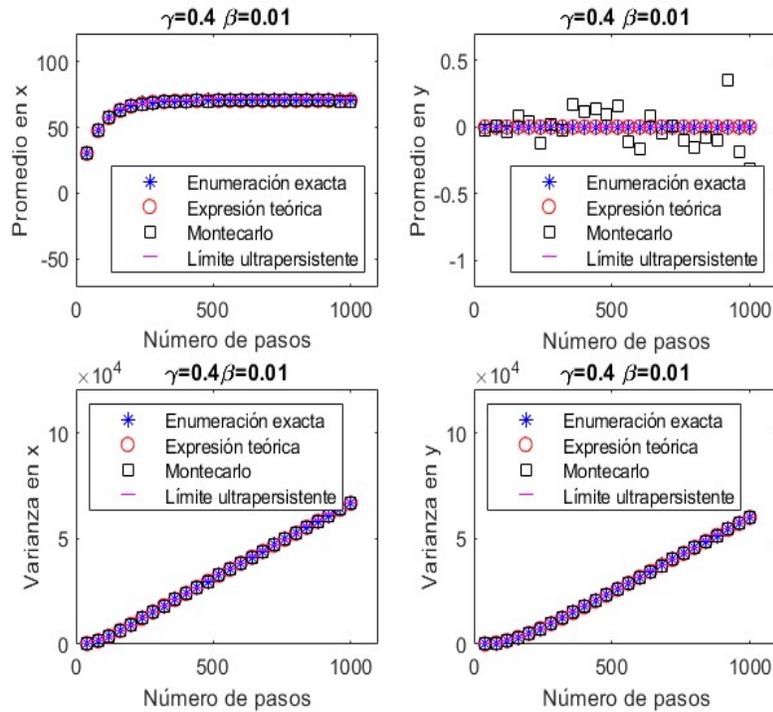


Figura 4.6: Resultados de la simulación Monte Carlo y la enumeración exacta para valores descendentes de  $\gamma = [0, 0.3, 0.4]$  y  $\beta = 0.01$ ; para 1,000,000 de caminantes.

En ambos casos se observa que con conforme el número de pasos aumenta el proceso se convierte en difusivo, ya que su desviación estándar se comporta como una función lineal, del tiempo y los primeros momentos adquieren un valor constante.

### 4.5.3. Simulaciones para tiempos largos

Debido a que la expresión de la probabilidad total se obtuvo para valores de  $\tau$  grandes, es necesario comprobar la precisión de las simulaciones Monte Carlo para un número de pasos grande. En este límite, se propuso una modificación del método Monte Carlo original, aprovechando las propiedades del límite ultrapersistente. En el régimen ultrapersistente la longitud de los tramos ( $l$ ), siendo un tramo el número total de pasos antes de que el caminante cambie de dirección, sigue una distribución de probabilidad exponencial (fig. 4.7)

$$p(l) = (1 - \beta)^l. \quad (4.45)$$

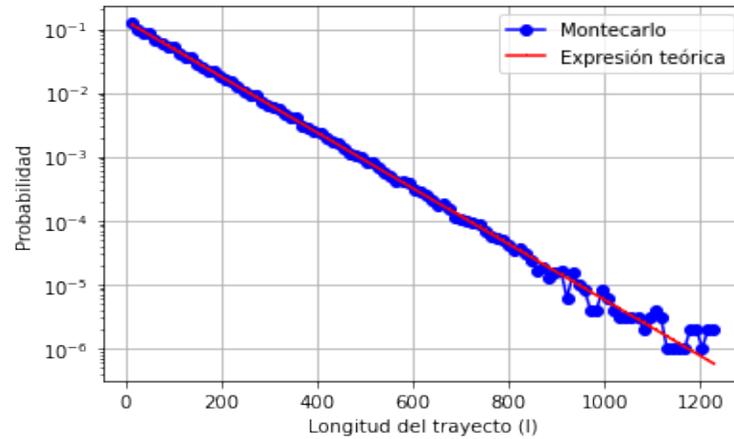


Figura 4.7: Distribución de la longitud de los tramos en el límite ultrapersistente ( $l$ ) (medida en pasos individuales), obtenida a partir del histograma normalizado de una simulación Monte Carlo usando el código para pasos individuales con  $\beta = 0.01$  y 100,000 de realizaciones, y su comparación con la expresión [4.45](#).

Lo anterior sugiere que se puede simular al caminante aleatorio persistente a través de la generación de tramos cuya longitud sea aleatoria y que siga la distribución [4.45](#), junto con cambios de dirección generados aleatoriamente, en lugar de generar pasos individuales (fig. [4.9](#)).

Bajo este enfoque, al inicio de la simulación, el caminante elige una de las cuatro direcciones posibles ('E', 'S', 'N', 'O') con probabilidad  $1 - \beta, \beta\alpha, \beta\alpha, \beta(1 - 2\alpha)$ , estas probabilidades están determinadas por su estado inicial (en este caso es 'E'). Dependiendo de la dirección elegida al caminante se le asigna el estado correspondiente. Una vez elegida la dirección, el caminante recorre  $l$  pasos en ese eje, es decir, un tramo de longitud  $l$ , el cual es generado a partir de la distribución [4.45](#) (fig. [4.8](#)).

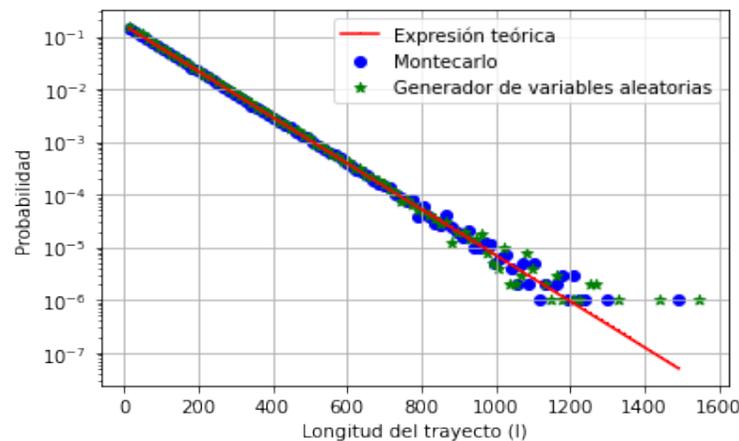


Figura 4.8: La gráfica anterior muestra un histograma usando el generador de variables aleatorias distribuidas según [4.45](#) (histograma en verde), comparado con los tramos generados a partir de pasos individuales (histograma en azul), y la expresión teórica de la distribución (línea roja).

Después de completar el tramo en la dirección elegida, el caminante puede cambiar de eje o regre-

sarse con probabilidades  $\alpha$ ,  $(1 - 2\alpha)$  respectivamente, pero no continuar en la misma dirección. La elección de una nueva dirección conlleva un cambio de estado. Finalmente el caminante recorrerá un tramo de longitud  $l_1$  en la nueva dirección, ( $l_1$  también se genera a partir de la distribución 4.45). Este proceso se repite hasta completar  $n$  pasos, es decir, se generaran  $s$  tramos de longitud  $l_i$  de tal forma que  $n = \sum_{i=1}^s l_i$ .

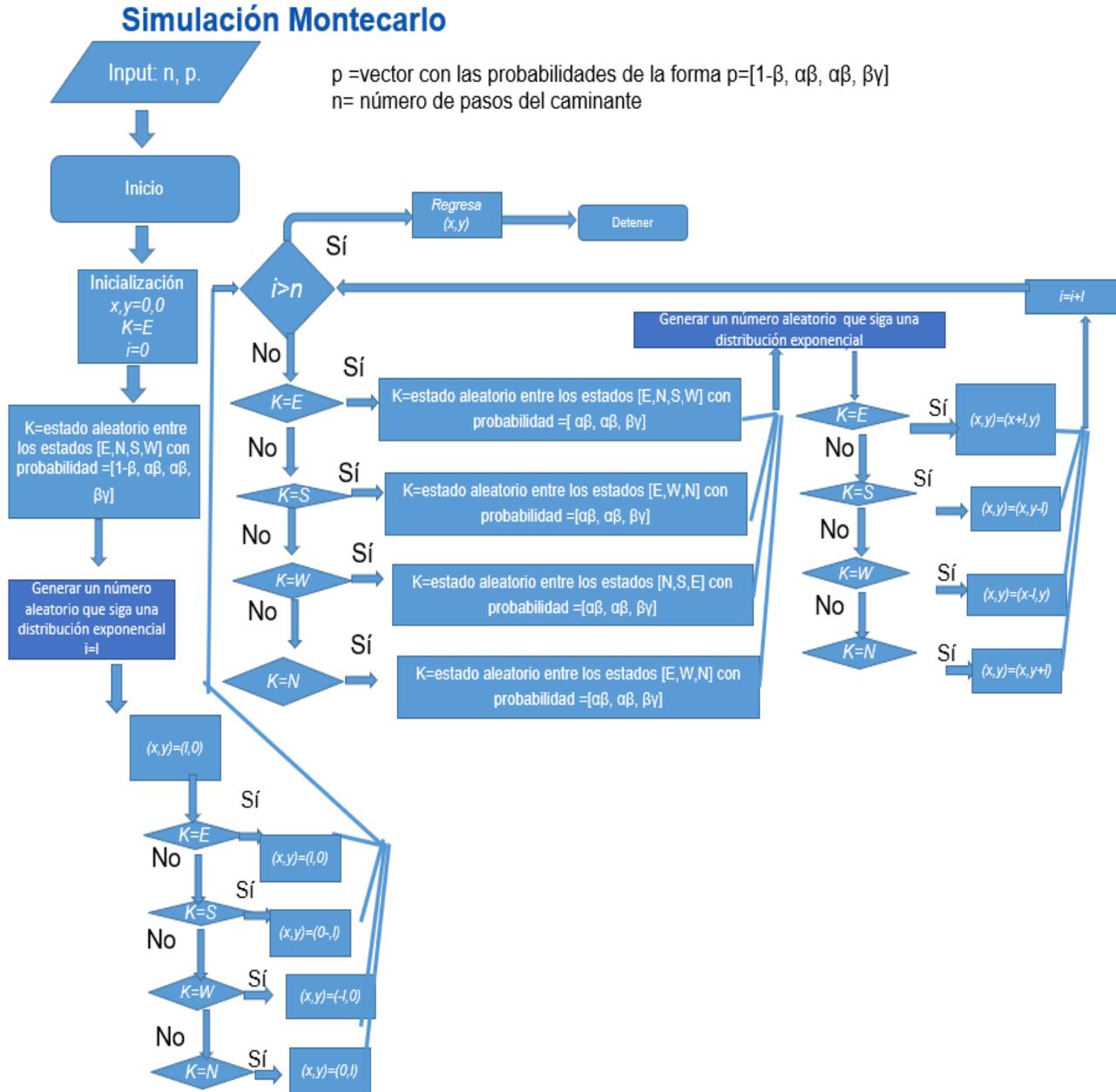


Figura 4.9: Diagrama de flujo del algoritmo que genera caminatas aleatorias

**Input:** *state*      ▷  $*[r]$ String que indica el estado del caminante en un paso *n*

**Output:** Un vector que indica el movimiento del caminante dependiendo del estado.

**Function** *statemap*(*state2*):

```

  Generar un número l que siga una distribución 4.45 if state = E then
  | return (l, 0)
else if state = N then
  | return (0, l)
else if state = S then
  | return (0, -l)
else if state = W then
  | return (-l, 0)

```

**End Function**

**Algorithm 3:** Pseudocódigo de la función que mapea estados con sus correspondiente movimientos

**Input:** *p*      ▷ Vector de la forma  $[1 - \beta, \beta\alpha, \beta\alpha, \beta(1 - 2\alpha)]$  que indica las probabilidades

**Input:** *n*      ▷ Número de pasos del caminante

**Output:** *x*      ▷ Posición final del caminante después de *n* pasos

**Function** *2drandomwalkpersistent2*(*p, n*):

```

x ← (0, 0)      ▷ asignar a la variable x la posición inicial del caminante
state ← E
Elegir aleatoriamente entre los estados [E,N,S,W] con probabilidad
[1 -  $\beta$ ,  $\beta\alpha$ ,  $\beta\alpha$ ,  $\beta(1 - 2\alpha)$ ]
x ← x + statemap(state) Generar longitud del tramo l Recorrer l pasos en la dirección
asociada al estado for i ← 0 to n do
  | if state = E then
  | | Elegir aleatoriamente entre los estados [N,S,W] con probabilidad [ $\alpha$ ,  $\alpha$ , (1 - 2 $\alpha$ )]
  | | x ← x + statemap(state)
  | else if state = N then
  | | Elegir aleatoriamente entre los estados [E,W,S] con probabilidad [ $\alpha$ ,  $\alpha$ , (1 - 2 $\alpha$ )]
  | | state=Estado elegido
  | | x ← x + statemap(state)
  | else if state = S then
  | | Elegir aleatoriamente entre los estados [E,W,N] con probabilidad [ $\alpha$ ,  $\alpha$ , (1 - 2 $\alpha$ )]
  | | state=Estado elegido
  | | x ← x + statemap(state)
  | else if state = W then
  | | Elegir aleatoriamente entre los estados [N,S,E] con probabilidad [ $\alpha$ ,  $\alpha$ , (1 - 2 $\alpha$ )]
  | | state=Estado elegido
  | | x ← x + statemap(state)
end
return x;

```

**End Function**

**Algorithm 4:** Generador de caminatas aleatorias con persistencia 2-D

A continuación se muestran los resultados de las simulaciones para tiempos largos, y sus respectivos errores, se observa que al igual que el caso anterior, el proceso es difusivo para este número de pasos (fig. 4.10). Adicionalmente, se cuantifican los errores de este método por medio del sesgo relativo. Los valores de sesgo relativo son relativamente bajos lo que muestra que el Monte Carlo es preciso.

Para el primer momento en  $y$  se usó el sesgo simple, debido a que el valor esperado de este valor es cero y conduce a una indeterminación (fig. 4.11).

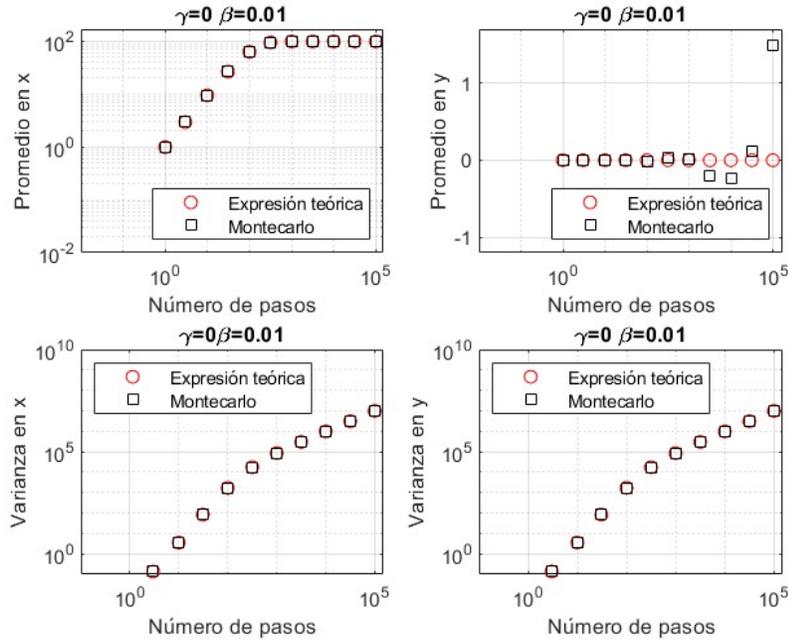


Figura 4.10: Resultados de la simulación Monte Carlo y comparación con las expresiones 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 para distintos tiempos de simulación (1-100,000 pasos)

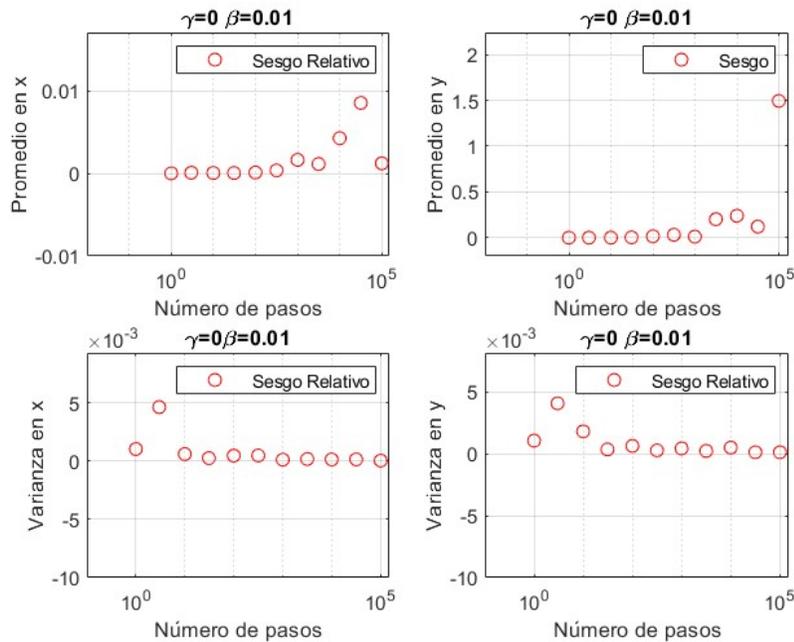
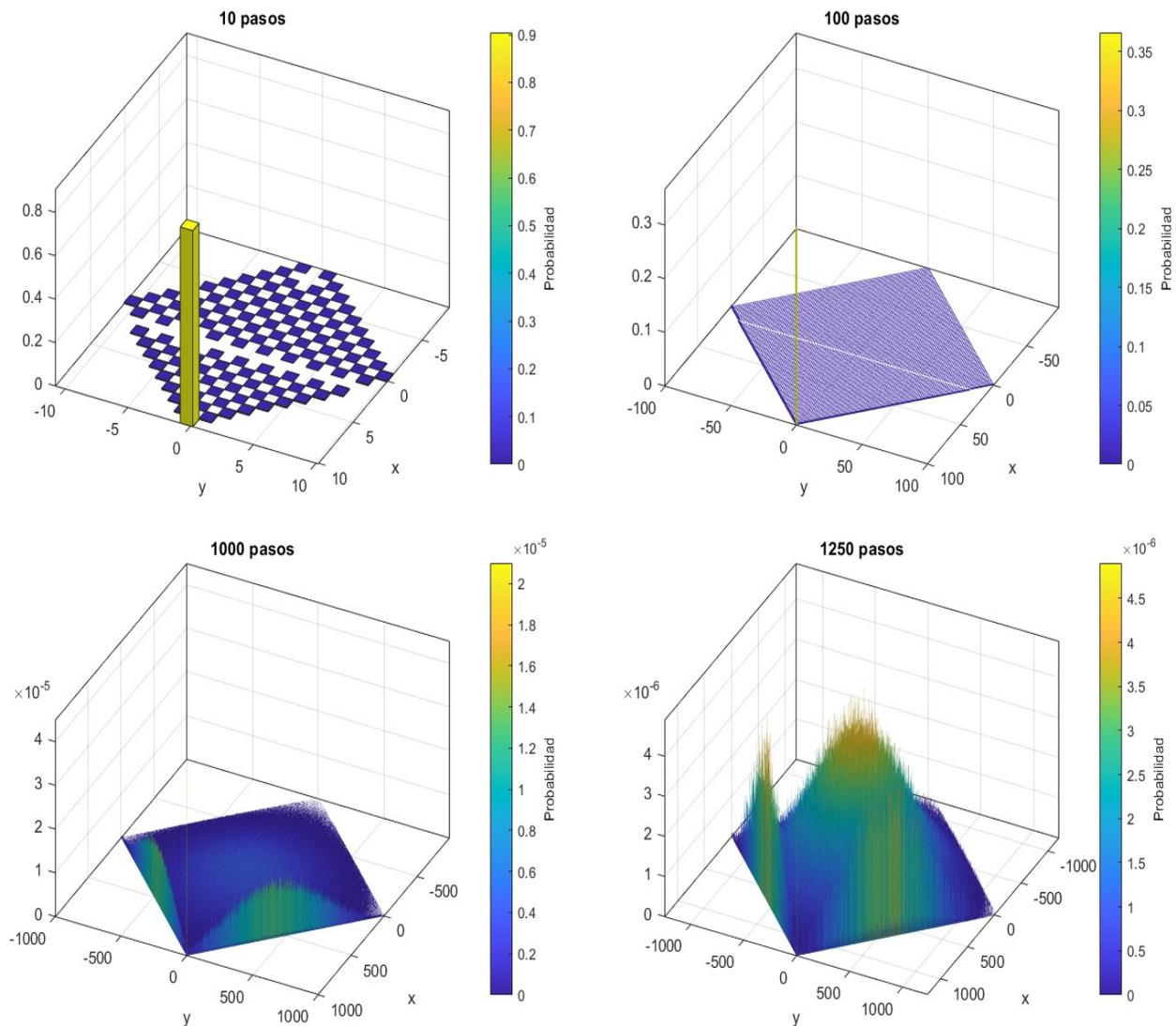


Figura 4.11: Errores asociados al código Monte Carlo usando el sesgo relativo y el sesgo.

Finalmente, se añaden los histogramas normalizados para un caminante a distintos número pasos. Se observa la evolución de la función de distribución del caminante aleatorio persistente. Se puede ver que para un número pequeño pasos la probabilidades de ocupación se distribuyen en forma de diamante, cuyo tamaño depende del número de pasos (paneles superiores fig. 4.12), y probabilidad de encontrarlo en un sitio  $(x, y)$  se acumula en el vértice correspondiente a la dirección del estado inicial. Conforme aumenta el número de pasos, la probabilidad se distribuye del vértice a los lados adyacentes a este (panel izquierdo del medio fig. 4.12) y posteriormente se va acumulando en el centro del diamante (panel derecho del medio fig. 4.12) hasta obtener aproximadamente una gaussiana (panel inferior fig. 4.12).



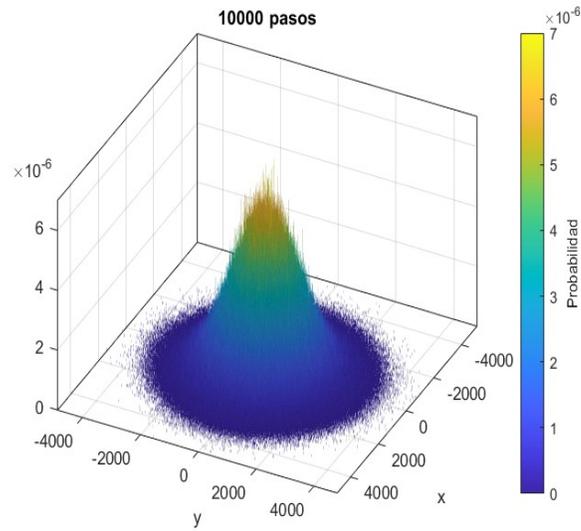


Figura 4.12: Evolución de la función de densidad de probabilidad de un caminante con los parámetros  $\gamma = 0$  y  $\beta = 0.01$  para 10,100, 1000,1250, 10,000 pasos.

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo a futuro

### 5.1. Conclusiones

La caminata aleatoria persistente asimétrica unidimensional ya había sido estudiada por Rossetto [19], quien resolvió la ecuación generalizada del telegrafista que se deriva en el límite continuo de las relaciones de recurrencia para la evolución del caminante aleatorio. Esta ecuación fue reportada antes por Weiss y Masoliver en 1992. Las soluciones de la ecuación generalizada del telegrafista difieren de las de la ecuación del telegrafista normal o simétrica, entre otras cosas, por un factor exponencial de la variable espacial. Sin embargo, se ha reportado que al aplicar una transformación de Lorentz se eliminan los términos de asimetría en la ecuación generalizada del telegrafista y ésta pasa a ser la ecuación del telegrafista normal o simétrica, por lo que las asimetrías del proceso se relacionan con un cambio en el sistema de referencia relativista de las coordenadas del caminante. Adicionalmente, durante la derivación de la ecuación del telegrafista se obtuvieron varias cantidades como la probabilidad de ocupación y el flujo de probabilidad, estas pueden ser expresadas como componentes de cuadvectores. Los parámetros de este proceso se relacionan con la velocidad promedio del caminante a tiempos largos, y forman una especie de cuadvector de velocidad. Este sistema posee un invariante relativista dado por la cantidad  $\frac{1}{T_+T_-}$ , donde  $T_+$  y  $T_-$  están relacionadas con las probabilidades de transición del sistema.

Las transformaciones de la ecuación del telegrafista son ampliamente conocidas, quizá una de las más importantes es la que lo relaciona con la ecuación de Klein-Gordon. Adicionalmente, gracias al trabajo seminal de Gaveau y colaboradores [41] y aplicando las transformaciones de Lorentz a las variables espacial y temporal, se encontró la continuación analítica correspondiente con la ecuación de Dirac. En este caso el invariante relativista se puede mapear a las constantes físicas  $i\hbar c^2/m \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{T_+T_-}}$ . Los componentes del espinor correspondiente a esta ecuación se relacionan  $p(x, t)$  y  $q(x, t)$  que representan la probabilidades de que el caminante esté al tiempo  $t$  en la posición  $x$  si su último paso fue a la derecha e izquierda respectivamente. A partir de esto, se puede pensar que el proceso estocástico de transporte relacionado a la ecuación de Dirac puede ser descrito por medio de caminantes aleatorios persistentes.

El segundo problema constó de una extensión del problema reportado [24]. El objetivo de este problema fue encontrar la probabilidad de encontrar al caminante en un sitio  $(x, y)$  sobre una red

cuadrada. A través de la función generadora de la transformada de Fourier fue posible desacoplar el sistema de relaciones de recurrencia que gobiernan la evolución del caminante. A partir de aquí se pudieron obtener las expresiones para las variables continuas a través del límite ultrapersistente. Sin embargo, debido a la dificultad para calcular la transformada de inversa de Laplace sólo se pudo encontrar la aproximación de la función de densidad de probabilidad para tiempos largos, la cual se aproxima gaussiana. Esto aunado al hecho que la varianza es una función lineal en el tiempo nos dice que el proceso para un número grande de pasos es difusivo.

Para estudiar la evolución de la probabilidad de ocupación del sistema se implementaron dos métodos numéricos: la enumeración exacta y las simulaciones Monte Carlo. El método de enumeración exacta calcula la distribución espacial exacta de la probabilidades de ocupación del caminante el sitio  $(x, y)$  de la red en cada paso. Mientras que la simulación Monte Carlo es un método para realizar estimados con base en las realizaciones de cierto número de caminatas. Si bien la enumeración exacta nos brinda la distribución correcta de probabilidades de ocupación para las posiciones de un caminante aleatorio, es un método demasiado costoso computacionalmente y sólo puede usarse para un número corto de pasos comparado con las simulaciones Monte Carlo. Entonces, al comparar ambos métodos, se puede evaluar la calidad de las simulaciones Monte Carlo mediante el uso del método de enumeración exacta, y de esta manera obtener buenos estimados Monte Carlo para tiempos de simulación largos.

Finamente, se realizó un análisis de colisiones del sistema, este mostró que al considerar el número de cambios de dirección en las relaciones de recurrencia en la evolución del caminante; la probabilidad ocupación del sistema se divide en dos expresiones, una para cambios de dirección impares y otra para pares.

## 5.2. Trabajo a futuro

Siguiendo el enfoque de los artículos que sirvieron de base de este trabajo [19][27], se pueden calcular más propiedades estadísticas de los caminantes aleatorios usando la función de probabilidad de ocupación como: las probabilidades de primer paso, las probabilidades de primer retorno y el número de sitios promedio visitados.

Adicionalmente, se pueden probar mejores aproximaciones para las raíces de 4.13 que permitan calcular expresiones para la probabilidad de ocupación para tiempos cortos.

# Apéndice A

## Determinación de la transformada de Laplace

$$f(\zeta) = \frac{e^{-k\sqrt{\zeta^2 - a^2}}}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}}$$

Para determinar la transformada de Laplace de  $f(\zeta) = \frac{e^{-k\sqrt{\zeta^2 - a^2}}}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}}$  se tiene que realizar la integral de línea sobre el siguiente contorno de Bromwich modificado A.1 debido a la presencia de un corte ramal en el los puntos  $-a, a$ .

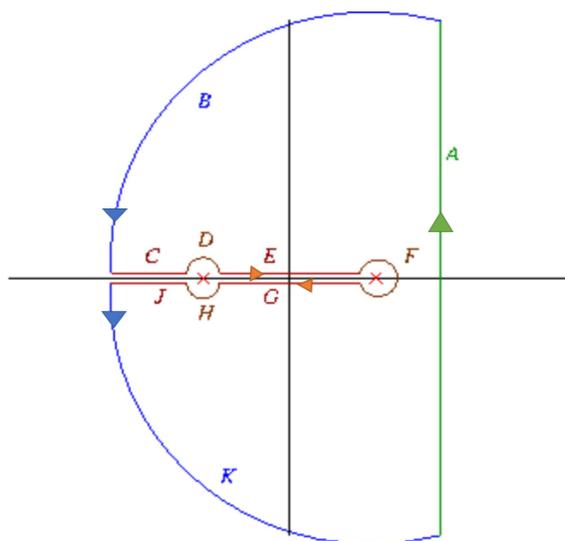


Figura A.1: Trayectoria usada en la integral para  $k > t$

Este método sólo es válido siempre y cuando se cumpla la condición

$$\int_{B,K} f(\zeta)e^{st} = 0, \tag{A.1}$$

donde  $\zeta = Re^{i\psi}$  y  $R \rightarrow \infty$  Para evaluar si se cumple lo anterior, hay que notar que para  $\zeta \gg a$  la función  $f(\zeta)$  se comporta como

$$f(\zeta) \approx \frac{e^{-k\zeta}}{\zeta},$$

entonces

$$\int_B f(\zeta)e^{st} = \int_{\psi'}^{\pi} f(Re^{i\psi})e^{Re^{i\psi}t} Re^{i\psi t} d\psi < ML, \quad (\text{A.2})$$

donde  $M = \frac{e^{-Rk+Rt}}{R}$  y  $L = \pi R$ , entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} ML = \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-Rk+Rt}, \quad (\text{A.3})$$

el límite anterior es cero siempre y cuando  $k > t$ , si esta condición no se cumple no se puede usar el contorno de integración A.1. En su lugar, se usa el contorno A.2, donde se concluye que si  $k > t$ , la integral es cero

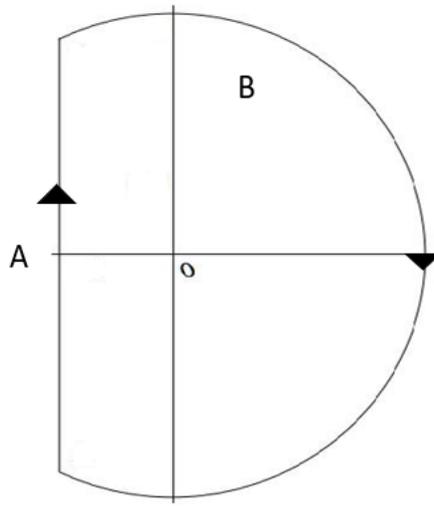


Figura A.2: Trayectoria usada en la integral para  $k < t$

Por teorema de Cauchy se tiene que la integral de Bromwich a calcular será

$$\int_{\gamma} f(\zeta)e^{st} = \int_A + \int_B + \int_C + \int_D + \int_E + \int_F + \int_G + \int_H + \int_J + \int_K f(\zeta)e^{st} = 0, \quad (\text{A.4})$$

las integrales sobre las curvas quedarán definidas como

1.  $\int_A f(\zeta)e^{st} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(\zeta)e^{st}$ ,
2.  $\int_C f(\zeta)e^{st} = \int_R^{r-a} f(\zeta)e^{st}$ ,
3.  $\int_E f(\zeta)e^{st} = \int_{r-a}^{r+a} f(\zeta)e^{st}$ ,
4.  $\int_G f(\zeta)e^{st} = \int_{r+a}^{r-a} f(\zeta)e^{st}$ ,
5.  $\int_J f(\zeta)e^{st} = \int_{r-a}^R f(\zeta)e^{st}$ ,

las integrales sobre las curvas  $B, D, F, H, K$  son cero cuando  $r \rightarrow 0$  y  $R \rightarrow \infty$ . Las curvas restantes quedan definidas como  $C = E = e^{i\pi}x$  y  $G = J = e^{-i\pi}x$ . Tomando el límite y sustituyendo se tiene

1.  $\int_A f(\zeta)e^{st} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{-k\sqrt{\zeta^2-a^2}}}{\sqrt{\zeta^2-a^2}} e^{st} d\zeta = \mathcal{L}^{-1}(f(\zeta)),$
2.  $\int_C f(X)e^{-xt} = -\int_{-\infty}^{-a} f(x)e^{xt} dx = -\int_{-\infty}^{-a} \frac{e^{-k\sqrt{x^2-a^2}}}{\sqrt{x^2-a^2}} e^{-xt} dx,$
3.  $\int_E f(\zeta)e^{st} = -\int_{-a}^a f(x)e^{xt} dx = -\int_{-a}^a \frac{e^{-ik\sqrt{a^2-x^2}}}{i\sqrt{a^2-x^2}} e^{-xt} dx,$
4.  $\int_G f(\zeta)e^{st} = -\int_a^{-a} f(x)e^{xt} dx = \int_a^{-a} \frac{e^{ik\sqrt{a^2-x^2}}}{i\sqrt{a^2-x^2}} e^{-xt} dx,$
5.  $\int_J f(\zeta)e^{st} = -\int_{-a}^{-\infty} f(x)e^{xt} dx = -\int_{-a}^{-\infty} \frac{e^{-k\sqrt{x^2-a^2}}}{\sqrt{x^2-a^2}} e^{-xt} dx,$

en las integrales sobre  $E, G$  se toma en cuenta el corte ramal correspondiente. Las integrales 2 y 5 no cambian de signo debido a la presencia de un traslape de corte ramal por lo tanto se anulan.

Sustituyendo en la ecuación 5

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{-k\sqrt{\zeta^2-a^2}}}{\sqrt{\zeta^2-a^2}} e^{st} d\zeta = \frac{-1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\cos(k\sqrt{a^2-x^2})}{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-xt} dx. \quad (\text{A.5})$$

La integral del lado derecho se puede calcular usando primero la sustitución  $\zeta = a \cos(\theta)$  entonces se tiene lo siguiente

$$\int_{-a}^a \frac{\cos(k\sqrt{a^2-x^2})}{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-xt} dx = \int_{\pi}^0 \cos(ka \sin \theta) e^{-a \cos \theta t} d\theta. \quad (\text{A.6})$$

La ultima integral se puede realizar convenientemente usando el teorema de Cauchy y la sustitución  $z = e^{i\theta}$  de forma que se puede expresar como una integral de línea sobre el círculo unitario

$$\int_0^{\pi} \cos(ka \sin \theta) e^{-a \cos \theta t} d\theta = \text{Re} \left( \pi i \oint_{|z|=1} e^{\frac{ka(z-z^{-1})-ta(z+z^{-1})}{2}} \frac{dz}{iz} \right) = \text{Re} \left( \pi \sum \text{Res} \left[ \frac{1}{z} e^{\frac{ka(z-z^{-1})-ta(z+z^{-1})}{2}} \right] \right), \quad (\text{A.7})$$

debido a que hay una singularidad esencial entonces para encontrar el residuo se tiene que usar la serie de Laurent.

Al colocar la exponencial de la forma  $e^{\alpha z + \beta z^{-1}}$  y expandir se tiene lo siguiente

$$e^{\alpha z + \beta z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!(k-m)!} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^m z^{2m-k},$$

tomando sólo el coeficiente que corresponde a  $z^0$ . Ya que  $\alpha = \frac{ka-ta}{2}$  y  $\beta = -\frac{ta+ka}{2}$ , entonces, se tiene que

$$\int_{\pi}^0 \cos(ka \sin \theta) e^{-a \cos \theta t} d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! 2^{2k}} (a\sqrt{t^2 - k^2})^{2k}, \quad (\text{A.8})$$

la serie anterior corresponde a una Bessel  $I_0$ . Debido a la analiticidad de la función se tiene que  $t$  mayor que  $k$  por lo tanto se debe añadir una función de Heaviside por lo tanto se concluye que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{-k\sqrt{\zeta^2 - a^2}}}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}} e^{s t} d\zeta = I_0(a\sqrt{t^2 - k^2})\Theta(t - k),$$

la función de Heaviside aparece como consecuencia de  $k > t$ .

# Bibliografía

- [1] R. Brown, “Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies,” *The Philosophical Magazine*, vol. 4, no. 21, pp. 161–173, 1828.
- [2] E. Gregersen, “Movimiento browniano,” 2021. <https://www.britannica.com/science/Brownian-motion>, Fecha de acceso : 2021-10-10´.
- [3] R. Mazo, *Brownian Motion: Fluctuations, Dynamics, and Applications*. International Series of Monographs on Physics, OUP Oxford, 2008.
- [4] J. Regnauld, “Études relatives au phénomène désigné sous le nom mouvement brownien,” no. 34, pp. 141–142, 1858.
- [5] C. Wiener, “Erklärung des atomistischen wesens des tropfbar flüssigen körperzustandes, und bestätigung desselben durch die sogenannten molecularbewegungen,” pp. 79–94.
- [6] A. Einstein, “Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen,” *Annalen der Physik*, vol. 322, pp. 549–560, Jan. 1905.
- [7] K. Pearson, “The problem of the random walk,” no. 72, pp. 1476–4687, 1905.
- [8] W. H. George, *Aspects and Applications of the Random Walks*. North-Holland, first ed., 1994.
- [9] J. Klafter and I. M. Sokolov, *First Steps in Random Walks: From Tools to Applications*. Oxford University Press, first ed., 2011.
- [10] J. Holt, “A random walk with Louis Bachelier,” 2013. <https://www.nybooks.com/articles/2013/10/24/random-walk-louis-bachelier/>, Fecha de acceso : 2021-9-16.
- [11] H. Risken and T. Frank, *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*. Springer Series in Synergetics, Springer Berlin Heidelberg, 1996.
- [12] E. W. Montroll and G. H. Weiss, “Random walks on lattices. ii,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 6, no. 2, pp. 167–181, 1965.
- [13] H. Scher and M. Lax, “Stochastic transport in a disordered solid. i. theory,” *Phys. Rev. B*, vol. 7, pp. 4491–4502, May 1973.

- [14] G. I. Taylor, “Diffusion by continuous movements,” *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s2-20, no. 1, pp. 196–212, 1922.
- [15] R. Fürth, “Die brownsche bewegung bei berücksichtigung einer persistenz der bewegungsrichtung. mit anwendungen auf die bewegung lebender infusorien,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 2, no. 3, pp. 244–256, 1920.
- [16] S. GOLDSTEIN, “ON DIFFUSION BY DISCONTINUOUS MOVEMENTS, AND ON THE TELEGRAPH EQUATION,” *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 4, pp. 129–156, 01 1951.
- [17] C. Domb and M. E. Fisher, “On random walks with restricted reversals,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 54, no. 1, p. 48–59, 1958.
- [18] J. Masoliver and G. H. Weiss, “A continuous-time generalization of the persistent random walk,” 1989.
- [19] V. Rossetto, “The one-dimensional asymmetric persistent random walk,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2018, 4 2018.
- [20] J. Masoliver and G. H. Weiss, “First passage times for a generalized telegrapher’s equation,” 1992.
- [21] J. Masoliver, J. M. Porrà, and G. H. Weiss, “The continuum limit of a two-dimensional persistent random walk,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 182, no. 4, pp. 593–598, 1992.
- [22] J. Masoliver, J. M. Porrh, and G. H. Weiss, “Some two and three-dimensional random walks,” 1993.
- [23] M. Bogaña, J. M. Porrà, and J. Masoliver, “Generalization of the persistent random walk to dimensions greater than 1,” 1998.
- [24] H. Larralde, “Transport properties of a two-dimensional “chiral” persistent random walk,” *Phys. Rev. E*, vol. 56, pp. 5004–5008, Nov 1997.
- [25] H. Larralde and F. Leyvraz, “Three-dimensional diffusion with helical persistence,” vol. 48, p. 265001, jun 2015.
- [26] G. H. Weiss, “First passage time problems random walks for one-dimensional,” 1981.
- [27] H. Larralde, “First-passage probabilities and mean number of sites visited by a persistent random walker in one- and two-dimensional lattices,” *Phys. Rev. E*, vol. 102, p. 062129, Dec 2020.
- [28] P. M. J. Codling Edward A and B. Simon, “Random walk models in biology,” *J. R. Soc. Interface*, vol. 5, p. 813–834, 2008.
- [29] H. i Wu, B.-L. Li, T. A. Springer, and W. H. Neill, “Modelling animal movement as a persistent random walk in two dimensions: expected magnitude of net displacement,” *Ecological Modelling*, vol. 132, no. 1, pp. 115–124, 2000.

- [30] Z. Sadjadi, M. R. Shaebani, H. Rieger, and L. Santen, “Persistent-random-walk approach to anomalous transport of self-propelled particles,” *Physical Review E*, vol. 91, no. 6, p. 062715, 2015.
- [31] M. Boguñá, J. M. Porrà, and J. Masoliver, “Persistent random walk model for transport through thin slabs,” *Phys. Rev. E*, vol. 59, pp. 6517–6526, Jun 1999.
- [32] G. Grimmett and D. Stirzaker, *Probability and random processes*. Oxford university press, 2020.
- [33] N. G. Van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry*, vol. 1. Elsevier, 1992.
- [34] S. Karlin, *A first course in stochastic processes*. Academic press, 2014.
- [35] B. D. Hughes, *Random walks and random environments. 1. Random walks*. Clarendon Press, 1996.
- [36] L. R. Evangelista and E. K. Lenzi, *Fractional diffusion equations and anomalous diffusion*. Cambridge University Press, 2018.
- [37] M. Kac, “Random walk and the theory of brownian motion,” *The American Mathematical Monthly*, vol. 54, no. 7, pp. 369–391, 1947.
- [38] J. E. Marsden, M. J. Hoffman, T. Marsden, *et al.*, *Basic complex analysis*. Macmillan, 1999.
- [39] N. H. Asmar, *Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*. Courier Dover Publications, 2016.
- [40] O. D. Jefimenko, “On the relativistic invariance of maxwell’s equation,” *Zeitschrift für Naturforschung A*, vol. 54, no. 10-11, pp. 637–644, 1999.
- [41] B. Gaveau, T. Jacobson, M. Kac, and L. S. Schulman, “Relativistic extension of the analogy between quantum mechanics and brownian motion,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 53, pp. 419–422, Jul 1984.
- [42] W. Greiner *et al.*, *Relativistic quantum mechanics*, vol. 2. Springer, 2000.
- [43] A. Kurosch, *Curso de Álgebra Superior*. Editorial Limusa S.A. De C.V., 2002.
- [44] I. Majid, D. B. Avraham, S. Havlin, and H. E. Stanley, “Exact-enumeration approach to random walks on percolation clusters in two dimensions,” *Phys. Rev. B*, vol. 30, pp. 1626–1628, Aug 1984.
- [45] Python Software Foundation, “Python 3.10.4 documentation,” 2022. <https://docs.python.org/3/>, Fecha de acceso : 2022-05-3.