



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS**

**CAOS CUÁNTICO EN SERIES DE FOTONES  
INDIVIDUALES COMO UNA SUPERPOSICIÓN DE  
ESTADOS DE ONDA Y PARTÍCULA**

**T E S I S**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**PRESENTA:**

**BENJAMÍN DAVID MENDOZA ZÁRATE**

**TUTOR PRINCIPAL**

**DR. VÍCTOR MANUEL VELÁQUEZ AGUILAR  
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM**

**MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR**

**DR. ENRIQUE LÓPEZ MORENO  
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM**

**DR. EFRAÍN RAFAEL CHÁVEZ LOMELÍ  
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM**

**CDMX**

**JUNIO 2022**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Benjamín David Mendoza Zárate  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Programa de Posgrado en Ciencias Físicas  
Facultad de Ciencias  
Doctorado en Ciencias (Física)  
Cuenta 517031803

2. Datos del tutor principal

Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar  
Facultad de Ciencias, UNAM  
Profesor de carrera titular B  
Profesor de asignatura A

3. Datos de miembros del comité tutor

Dr. Enrique López Moreno  
Facultad de Ciencias, UNAM  
Profesor titular B

Dr. Efraín Rafael Chávez Lomelí  
Instituto de Física, UNAM  
Investigador titular C

4. Datos del sinodal 1

Dr. José Ignacio Jiménez Mier y Terán  
ICN, UNAM  
Departamento de Física de Plasmas e Interacción de Radiación con Materia  
Investigador

5. Datos del sinodal 2

Dra. Ana María Beatriz Cetto Kramis  
Instituto de Física, UNAM  
Investigador titular C

6. Datos del sinodal 3

Dr. Jesús Garduño Mejía  
ICAT, UNAM  
Investigador titular B

7. Datos del sinodal 4

Dra. Sara Guadalupe Cruz y Cruz  
UPIITA-IPN  
Investigador

8. Datos del sinodal 5

Dr. Roberto de Jesús León Montiel  
ICN, UNAM  
Departamento de Estructura de la Materia  
Investigador

9. Datos del trabajo escrito

Caos cuántico en series de fotones individuales como una superposición de estados de onda y partícula

107p

2022

*“Ubuntu”*

Pueblos bantúes del sur de África

*A mis padres*

# Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia, su cobijo ha sido indispensable para que esta vida tenga sabor.

Quiero agradecer a Diego, Leonardo, y Josué porque contribuyeron en gran medida con sus comentarios y enseñanzas para el desarrollo de este trabajo. También a Gustavo, Raul y Erick, por su disposición para compartir sus conocimientos a todo aquel que se los pide. Al Dr. Víctor, por su paciencia para dialogar con todos sus alumnos. A Jehú, su aportación a este proyecto fue muy importante. A Edna, por tomarse el tiempo de corroborar gran parte de los resultados que obtuvimos.

# Índice general

|   |            |
|---|------------|
| <b>Lista de figuras</b>   | <b>III</b> |
| <b>1. Introducción</b>  | <b>1</b>   |
| <b>2. Función de correlación de segundo orden <math>g^{(2)}(0)</math></b>                         | <b>4</b>   |
| 2.1. Experimento de anticorrelación de Grangier-Aspect-Roger . . . . .                            | 8          |
| <b>3. Caos cuántico</b>   | <b>12</b>  |
| 3.1. Caos clásico. . . . .  | 12         |
| 3.1.1. Atractores . . . . .   | 13         |
| 3.1.2. Exponentes de Lyapunov . . . . .   | 16         |
| 3.2. Criterios del caos cuántico . . . . .  | 16         |
| 3.2.1. Billares cuánticos . . . . .   | 21         |
| 3.2.2. Caos Cuántico y ruido $1/f$ . . . . .  | 23         |
| 3.2.3. El factor de Fano y caos cuántico . . . . .  | 26         |
| 3.3. Caos cuántico y el experimento de la doble rendija . . . . .                                 | 31         |
| 3.4. Caos cuántico y la visibilidad . . . . .   | 33         |
| <b>4. Experimento pensado de acción retardada de Wheeler</b>                                      | <b>37</b>  |
| 4.1. Realización del experimento de acción retardada de Wheeler . . . . .                         | 39         |
| 4.2. Experimento de acción retardada de Wheeler (superposición cuántica onda-partícula) . . . . . | 43         |
| <b>5. Complejidad</b>   | <b>49</b>  |
| <b>6. Caos cuántico en series de fotones individuales</b>   | <b>56</b>  |
| 6.1. Superposición de ondas y partículas con el criterio estadístico . . . . .                    | 58         |
| 6.2. Sub-ruido de disparo, función de correlación de segundo orden y factor de Fano . . . . .     | 60         |
| 6.3. Experimento . . . . .  | 62         |
| 6.4. Factor de Fano en series tiempo de fotones individuales . . . . .                            | 63         |
| 6.5. Espectro de potencias en series de tiempo de fotones . . . . .                               | 64         |
| 6.6. Complejidad, información de Shannon y caos cuántico . . . . .                                | 66         |
| <b>7. Conclusiones</b>  | <b>70</b>  |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>A. Óptica no lineal</b>                                   | <b>72</b> |
| A.1. Efectos de segundo orden . . . . .                      | 72        |
| A.2. Conversión espontánea paramétrica descendente . . . . . | 73        |
| <b>B. Mecánica cuántica de divisores de haz</b>              | <b>77</b> |
| <b>C. Interferometría de Mach-Zehnder de un solo fotón</b>   | <b>81</b> |
| <b>D. Compuerta Hadamard</b>                                 | <b>84</b> |
| <b>E. Factor de Fano</b>                                     | <b>87</b> |



# Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| 2.1. Cascada atómica que genera 2 fotones correlacionados en la fuente S. El fotón $\nu_1$ va directamente al detector $PM_1$ , mientras que el fotón $\nu_2$ tiene que pasar primeramente por el divisor BS para posteriormente llegar a uno de los dos detectores $PM_r$ ó $PM_t$ ; $\nu_1$ abre la ventana temporal $\omega$ que dura un ensayo. $N_1$ es el número de ensayos que se realiza el experimento, $N_{r,t}$ es el número de fotones que llegaron al detector $PM_{r,t}$ , $N_c$ es el número de coincidencias que hay en las detecciones registradas por $PM_r$ y $PM_t$ . Tomada de [11]. . . . . | 9  |
| 2.2. Gráfica de la función de correlación $\alpha = g^{(2)}$ vs $N\omega$ (número de cascadas emitidas durante la ventana $\omega \sim 9$ ns) y $N_1$ (detecciones por segundo del testigo). Tomada de [11]. . . . .  | 9  |
| 2.3. Esquema experimental para la detección del estado de un fotón; VL- Láser Violeta (405 nm), PB- Haz de bombeo, NLC- Cristal no lineal BBO I, S- Haz señal (810nm), I- Haz testigo (810nm), BS- Divisor de haz, F- Filtro (810nm), $D_R$ - Detector R (Reflejado), $D_T$ - Detector T (Transmitido), $D_I$ - Detector I (Testigo), CO- Sistema de cómputo y tarjeta, SC- Pantalla. . . .   | 10 |
| 3.1. Ciclos límite (curvas remarcadas) para la ecuación de van der Pol con la fuerza $F = 0$ para a) $\epsilon$ pequeños b) $\epsilon$ grandes tal que $\epsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt}$ compite con los demás términos de la ecuación (3.1). Tomada de [12]. . . . .   | 14 |
| 3.2. El atractor de Lorenz, con valores $b = 28$ , $a = 10$ , $c = 8/3$ . La forma de mariposa del atractor de Lorenz puede haber inspirado el nombre del efecto mariposa en la teoría del caos. Tomado de [27]. . . . .  | 15 |
| 3.3. Secuencia de niveles energéticos cuando <b>a)</b> $n_x = 1$ y variamos $n_y$ . <b>b)</b> Dejamos la secuencia calculada en a) e incorporamos la secuencia cuando se fija $n_x = 2$ . <b>c)</b> Dejamos las secuencias de a) y b) e incorporamos la secuencia generada a $n_x = 3$ . En este sistema integrable se puede ver una alta aleatoriedad en el espaciado entre niveles consecutivos de la Figura c). . . .  | 18 |

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 3.4.  | Espectros energéticos para el oscilador armónico (izquierda), sistema caótico (centro) y el de partícula en una caja bidimensional (derecha). El espacio del espectro caótico se encuentra entre uno que es ordenado (sistema integrable con un solo grado de libertad) y uno que es aleatorio (sistema integrable con dos grados de libertad.) En general los espectros energéticos de los sistemas integrables son completamente aleatorios, mientras que los caóticos tienen cierta correlación entre niveles que hace que se organicen entre ellos para parecerse más a una secuencia de niveles ordenados. Tomada de [14]. . . . .   | 19 |
| 3.5.  | Izquierda: Billar circular. Tomada de Chernov [6]. Derecha: Billar de Bunimovich, Tomada de Ullmo y Tomosovic [17]. . . . .   | 22 |
| 3.6.  | Izquierda: Distribución correspondiente a un billar semicircular. Derecha: Distribución correspondiente a un billar de Bunimovich (estadio). Tomadas de [33]. . . . .   | 23 |
| 3.7.  | Espectro de potencias promedio de la función $\delta_n$ para $^{24}\text{Mg}$ y $^{34}\text{Na}$ . Los ajustes se desplazan para evitar traslapes. Las pendientes de estas rectas son $\alpha = 1.11 \pm 0.03$ para $^{34}\text{Na}$ , y $\alpha = 1.06 \pm 0.05$ para $^{24}\text{Mg}$ . Tomada de [8]. 25   | 25 |
| 3.8.  | Espectro de potencias de la función $\delta_n$ para niveles de energía GDE (sistema integrable) comparados con los de GOE, GUE y GSE (sistemas caóticos). Las gráficas para estos cuatro ensambles se han separado para evitar traslapes. Tomada de [8]. . . . .  | 26 |
| 3.9.  | Cavidad caótica en el régimen clásico y cuántico. Diagramas de una cavidad caótica conectada por dos contactos a un reservorio izquierdo (L) y derecho (R). En el régimen clásico (izquierda) de dispersión determinista, los electrones con una dirección de momento específica dentro de la cavidad se originan en el reservorio izquierdo (rojo) ó derecho (amarillo). El movimiento caótico conduce a una función de distribución $f_C$ dentro de la cavidad que cambia aleatoriamente entre 0 (amarillo) y 1 (rojo). Esto se ilustra con el patrón de manchas dentro de la cavidad. En el caso cuántico (derecha), la función de onda de los electrones se extiende por toda la cavidad y no podemos decidir si un electrón proviene del lado izquierdo o derecho, lo que hace que la función de distribución $f_C$ se encuentre en el rango de entre 0 y 1. Tomada de [16]. . . . . | 27 |
| 3.10. | El factor de Fano $F$ muestra una caída pronunciada por debajo del límite cuántico $1/4$ . Un ajuste lineal de los datos a la ecuación (3.17) produce un $t_Q$ de 270 ps. Tomada de [16]. . . . .   | 29 |
| 3.11. | Un ajuste lineal (ecuación (3.17)) da como resultado un tiempo de dispersión cuántica $\tau_Q \sim 485$ ps, que concuerda cualitativamente con $\tau_Q$ obtenido de las mediciones a campo magnético cero. Nuevamente observamos una reducción del factor de Fano $F$ conforme el tiempo de permanencia $\tau_D$ aumenta. Tomada de [16]. . . . .   | 30 |
| 3.12. | Geometría de la simulación numérica del experimento de la doble rendija. Tomada de Casati y Prosen [18]. . . . .  | 31 |
| 3.13. | Intensidad obtenida para la simulación del experimento de la doble rendija pero con una (ú otra) tapada. Tomada de Casati y Prosen [18]. . . . .  | 32 |

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 3.14. | Intensidad obtenida para la simulación del experimento de la doble rendija. Se observa que para el billar regular existe interferencia mientras que para el caótico no la hay. Tomada de Casati y Prosen [18]. . . . .  | 32 |
| 3.15. | Energías de los 1627 estados con $J = 3+$ en el $^{48}\text{Ca}$ con dependencia del parámetro $\chi$ . Podemos observar que para valores bajos de $\chi$ las curvas tienen saltos muy remarcados. Tomada de [15]. . . . .  | 34 |
| 3.16. | Gráficas de distribución de energía para cuatro secuencias de energías mostradas en la Figura 3.15; a) $\chi = 0,01$ , b) $\chi = 0,04$ , c) $\chi = 0,07$ , d) $\chi = 0,25$ . En a) se tiene la coherencia más alta, en b) se tiene la coherencia más baja. Tomada de [15]. . . . .   | 35 |
| 3.17. | Parámetro de espectros de potencia y visibilidad para series temporales de energía dependientes del parámetro cuadrupolo-cuadrupolo $\chi$ . Para poder comparar, la visibilidad se incrementó en uno. Tomada de [15]. . . . .  | 35 |
| 4.1.  | Propuesta del experimento de acción retardada de Wheeler. La elección de introducir ó eliminar el divisor $\text{BS}_{\text{output}}$ (configuración cerrada ó abierta) se realiza sólo después del paso del fotón en el divisor $\text{BS}_{\text{input}}$ , de modo que el fotón que ingresa al interferómetro “no puede saber” cuál de los dos experimentos complementarios ( <i>diferencia de trayectoria</i> versus <i>which-way</i> ) se realizará en la salida. Tomada de [2]. . . . .   | 38 |
| 4.2.  | Realización experimental del experimento pensado de Wheeler. Los fotones individuales emitidos por un solo centro de color N-V se envían a través de un interferómetro polarizante colocado a 48 m, equivalente a un tiempo de vuelo de aproximadamente 160 ns. Un número aleatorio binario 0 ó 1, generado por el QRNG, impulsa el voltaje EOM entre $V = 0$ y $V = V_\pi$ en un lapso de 40 ns, después de un retardo electrónico de 80 ns. Se utilizan dos señales sincronizadas del reloj para activar la emisión de fotón único y el QRNG. En el marco de referencia del laboratorio, la elección aleatoria entre la configuración abierta y la cerrada se realiza simultáneamente con la entrada del fotón en el interferómetro. Tomada de [2]. . . . . | 40 |
| 4.3.  | Resultados del experimento de acción retardada. El desplazamiento de fase $\Phi$ (indicado con origen arbitrario) se varía inclinando $\text{BS}'$ . (A) Casos en los que se aplica $V_\pi$ en la EOM (configuración cerrada); se obtiene interferencia con un 94 por ciento de visibilidad. (B) Casos cuando no se aplica voltaje en el EOM (configuración abierta); no se observa interferencia. Tomada de [2].   | 42 |

- 4.4. Diagramas lógicos de los experimentos clásicos (**a**) y cuánticos (**b**) de elección retardada de Wheeler. La primera compuerta H (Hadamard) corresponde a la división de los dos caminos, después de lo cual se agrega una fase  $\varphi$ . La segunda compuerta H corresponde al dispositivo de detección, que está controlado por un ancilla. Las configuraciones difieren de la siguiente manera. En **a**, el ancilla se establece primero sobre la base de  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$  como  $|\text{pol}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle + |H\rangle)$  para generar una serie de números aleatorios,  $p$ , y estos números se utilizan para controlar la segunda compuerta H. En **b**, el ancilla  $|\text{pol}\rangle = \sin\alpha |V\rangle + \cos\alpha |H\rangle$  se usa directamente para controlar la segunda compuerta H, colocando de esta manera a la compuerta en un estado de superposición cuántica de producir y no producir franjas de interferencia. Tomada de [4]. . . . . 44
- 4.5. Configuración experimental. El experimento incluye cuatro partes: generación de fotones individuales, el MZI abierto (cerrado) (quarzo, BD1, BD3, HWP1 (HWP2), BD4), los aparatos de control cuántico ( $\alpha$ , BD2, **Particle layer**, **Wave layer**, BD5), y los aparatos de detección (polarizador móvil, APDs, contadores y analizadores de tiempo los cuales no se muestran). **Nota:** las flechas se usan para representar la polarización de los fotones, y los HWPs no se muestran; ‘Layer’ en la figura de más abajo representa un panorama más detallado de las capas de partícula y onda. Tomada de [4]. . . . . 46
- 4.6. Probabilidades de encontrar un fotón en la trayectoria 1. De **a** a **h**,  $\alpha = j\pi/8$  ( $j = 0$  a  $7$ ). Los círculos rojos son el resultado de la mezcla clásica de ondas y partículas, y los círculos azules son el resultado de la superposición cuántica. Las líneas muestran el ajuste teórico correspondiente. Tomada de [4]. . . . . 48
- 5.1. Bosquejo de la noción intuitiva de la magnitud de la información ( $H$ ) y el desequilibrio ( $D$ ) para sistemas físicos y el coportamiento intuitivo que se requiere para la magnitud de la complejidad ( $C$ ). La cantidad  $C = HD$  se propone para medir tal magnitud. Tomada de [19]. . . . . 50
- 5.2. Diagramas esquemáticos que muestran las transiciones de estado de las (a) RBN críticas y (b) caóticas con  $N = 20$ ,  $X = 2$ ,  $O = 1$ ,  $T = 40$ . La configuración  $X = 2$ ,  $O = 1$ ,  $T=40$ , significa que los estados de dos nodos elegidos al azar en cada configuración se convierten cada dos pasos de tiempo hasta que el tiempo de ejecución de la simulación se convierta  $T=40$ . El lado izquierdo es la red sin perturbaciones y el derecho es la red con perturbaciones con los mismos estados iniciales. Cada cuadrado representa el estado de un nodo (blanco = 0, negro = 1). Las transiciones de estado comienzan desde los estados iniciales en la parte superior a los estados en la parte inferior durante  $T = 40$ . (a)  $K = 2$  (crítica), la complejidad aumenta con las perturbaciones: antifrágil. (b)  $K = 3$  (caótica), la complejidad disminuye por perturbaciones: frágil. Tomada de [20]. . . . . 53
- 5.3. Relación entre cambio  $\bar{E}$ , regularidad  $1 - \bar{E}$  y complejidad  $C$  en RBN. Tomada de [20]. . . . . 55

|      |   |    |
|------|---|----|
| 6.1. | Configuración experimental donde se producen un par de fotones, señal y un testigo (S, I), cuando un cristal no lineal ( <i>NLC</i> , Non Linear Crystal) <i>BBO</i> – <i>I</i> está bombeado por un láser violeta ( <i>VL</i> ), a través del proceso de conversión paramétrica descendente. Los fotones testigo se envían al detector $D_I$ . Los fotones señal se envían a una lámina de media onda $\lambda/2$ seguida de un <i>PBS</i> . Para compensar las imperfecciones del divisor de haz polarizado, colocamos dos polarizadores con sus ejes horizontal y vertical en las salidas transmitidas y reflejadas, respectivamente. Finalmente, se colocan filtros ( <i>F</i> ) de 810 nm antes de los fotodiodos de avalancha ( $D_R, D_T$ ). . . . . | 59 |
| 6.2. | Probabilidad de detectar ( $P_1$ ) o no ( $P_0$ ) fotones individuales en el detector $D_T$ . Las probabilidades $P_0$ (x verdes) y $P_1$ (+ azules) están en función del ángulo de la lámina de media onda $\phi/2$ el cual se puede interpretar como una proporción normalizada de 1's y 0's, almacenadas en las series de tiempo. . . . .  | 63 |
| 6.3. | El factor de Fano como función de la probabilidad transmitida $P_T$ (círculos rojos) y reflejada $P_R$ (círculos verdes). Las series de tiempo de fotones que se obtienen en los detectores del canal transmitido y reflejado muestran caos cuántico en $F = 0.25$ (0.75) para $P = 0.75$ (0.25). . . . .   | 65 |
| 6.4. | Comportamiento de las pendientes del análisis del espectro de potencias ( $\beta$ ) como función de la probabilidad de transmisión para diferentes bases ( $n$ ), $\beta \approx -1, +1$ corresponden a $P \approx 0,25, 0,75$ , respectivamente, en estos puntos se tiene caos cuántico. $\beta \approx 0$ corresponde a $P = 1/2$ para la aleatoriedad o comportamiento tipo onda. . . . .  | 66 |
| 6.5. | Varianza del conteo experimental de fotones versus la probabilidad transmitida. La línea horizontal a $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = 3/16$ , indica los valores teóricos para el ruido asociado al ruido del conteo de fotones para el caso cuántico $F=1/4, 3/4$ correspondientes a la probabilidad de transmisión $P_T = 3/4, 1/4$ respectivamente. . . . .   | 68 |
| 6.6. | Resultados experimentales para: entropía de Shannon (triángulos azules), complejidad $C = 4S(1 - S)$ (puntos rojos) y la regularidad $1 - S$ (cuadrados negros), como función de la probabilidad de transmisión. . . . .  | 69 |
| A.1. | Esquema de la Conversión espontanea paramétrica descendente, tomada de [52]. . . . .  | 74 |
| A.2. | Esquema de la condición paramétrica; podemos inferir que esta condición involucra dos leyes fundamentales de la física, conservación de la energía y conservación del momento. Tomada de [52]. . . . .  | 75 |
| B.1. | Funcionamiento de un divisor de haz clásico. El campo de entrada $\mathcal{E}_1$ se divide en los campos $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ después de pasar por el divisor. . . . .   | 77 |
| B.2. | La descripción cuántica correcta de un divisor de haz considera el operador de creación (asociado al vacío) en la entrada donde no hay campo clásico. Tomada de [50]. . . . .   | 78 |
| C.1. | Un interferómetro Mach-Zehnder con un solo fotón entrante. Los divisores de haz $BS_1$ y $BS_2$ son 50:50, $M_1$ y $M_2$ son espejos, y la caja etiquetada por $\theta$ representa el cambio de fase relativa a los brazos. Tomada de [50]. . . . .   | 82 |

|  |    |
|--|----|
| D.1. Circuito simbólico de una compuerta Hadamard. $x$ toma valores de 0 y 1.<br>Tomada de [50]. . . . . | 85 |
| D.2. Circuito simbólico de una compuerta de fase de 1-qubit. Tomada de [50]. . .                         | 86 |
| D.3. Circuito para la generación de los estados de la ecuación D.9. Tomada de [50].                      | 86 |

# Capítulo 1

## Introducción

La dualidad onda-partícula se vino manejando durante mucho tiempo como fenómenos que se excluyen uno al otro. Si el comportamiento medido sobre el sistema es el de una partícula, automáticamente el comportamiento de onda se excluye, y viceversa. La propuesta del experimento pensado de acción retardada de Wheeler [1, 2] confirma esta afirmación debido a los utensilios de medición clásica. El entendimiento de la mecánica cuántica logra promover que los mecanismos de medición pasen a tener propiedades cuánticas, conllevando de esta manera a un nivel de mayor abstracción al experimento pensado de acción retardada de Wheeler [3, 4]. En este punto por primera vez se habla de una superposición cuántica onda-partícula que los sistemas pueden exhibir, sugiriendo así expandir más el principio de complementariedad de Bohr. Por otra parte, los estudios del caos cuántico en sistemas nucleares [5] y billares [6] nos han dado herramientas que lo caracterizan. Por la simpleza del factor de Fano [7] y el espectro de potencias [8], que son algunas de esas herramientas, al ser implementadas en nuestras series de fotones, se logra identificar dos regiones que caracterizan a un comportamiento de onda y uno de partícula [9], y en el intermedio de estas dos regiones observamos una en particular con propiedades que caracterizan al caos cuántico. Es aquí donde nace nuestra propuesta de decir que el caos cuántico yace sobre el comportamiento de la superposición onda-partícula que la luz puede exhibir. En este trabajo de tesis damos los argumentos y evidencia experimental que respalda esta propuesta y que en resumen se desarrolla de la siguiente manera.

En el capítulo 1 damos una introducción de este trabajo donde exponemos la motivación detrás de este proyecto juntamente con un resumen de su desenvolvimiento. La idea principal es exponer aquellos argumentos que conectan las propiedades onda-partícula que exhibe la luz con aquellas que caracterizan al caos cuántico [9].

En el capítulo 2 hacemos una revisión de la función de correlación de segundo orden [10], ya que esta da información sobre el tipo de campos ópticos que se trabajan en el laboratorio. Una de sus funciones principales es decirnos el régimen donde los campos funcionan como paquetes de onda (o ondas en totalidad) que son muy importantes en el desarrollo de las tecnologías cuánticas cuando se ven como estados de número. Hacemos mención del experimento de Grangier-Aspect-Roger [11] ya que en este se basa nuestro montaje experimental, pero modificado con tecnologías más recientes, para las detecciones de fotones individuales que son muy importantes para la generación de nuestras series de fotones.

En el capítulo 3 damos los elementos necesarios para la comprensión del caos cuántico. Partimos de lo que se considera ser caos en un esquema clásico [12] haciendo ver las características principales que lo definen que al intentar llevarlas a una definición cuántica se enfrenta a ciertas problemáticas, las cuales se resuelven al conectar la integrabilidad de los sistemas con los espectros energéticos [13] y de ahí perturbar tales sistemas integrables que nos llevan a sistemas con caos cuántico para su potencial análisis espectral [14], el cual da características del caos cuántico en este contexto. Todo esto bajo la conjetura de Bohigas-Giannoni-Schmit [5].

Entre las principales herramientas de estudio del caos cuántico hacemos mención de dos, el factor de Fano [7, 15, 16] y el espectro de potencias [8] que son determinantes en nuestro estudio de series de fotones. Exhibimos algunas propiedades de los billares cuánticos en relación al análisis de sus estadísticas espectrales [6, 17] remarcando las principales diferencias que existen entre aquellos sistemas que son regulares y aquellos que son caóticos. El estudio de Casati y Prosen [18] sobre cavidades regulares y caóticas con la doble rendija establece una relación con el comportamiento de onda ó partícula de los fotones. Esto nos lleva a revisar la visibilidad de los espectros de los sistemas integrables y caóticos [15] que se respaldan con el estudio del espectro de potencias.

En el capítulo 4 revisamos dos versiones de la literatura sobre la realización del experimento pensado de acción retardada de Wheeler, la primera, que podemos llamar versión clásica [2], es una propuesta experimental lo más cercana al caso ideal de Wheeler, la segunda es una variante del experimento pensado que podríamos llamarla versión cuántica [4]. Esta última es muy importante porque es la primera vez que se habla de una superposición de estados de onda y partícula la cual se puede medir. Esto trae consigo un cuestionamiento sobre el principio de complementariedad de Bohr.



En el capítulo 5 vemos las nociones intuitivas que determinan a la complejidad [19], tales como la “información, equilibrio y orden” que se conjugan en un par de ejemplos extremos (cristal y gas) para dar lugar a una definición de complejidad. Teniendo esto en mente se puede redefinir la complejidad en las redes booleanas aleatorias [20]. Esta última definición es la que ocupamos para nuestro estudio de series de fotones en la que buscamos una relación con el caos cuántico; esto tiene sentido por tratarse de series de bits en nuestras series.

En el capítulo 6 es donde empieza todo nuestro estudio de caos cuántico en series de fotones [9]. Primeramente hacemos una breve remembranza del concepto de superposición onda-partícula y damos los argumentos para aseverar que el comportamiento de onda o partícula de fotones individuales se encuentra codificado en las estadísticas de fotones. Damos el criterio que determina el comportamiento de onda y el de partícula en nuestras series de fotones que ayuda a formular el estado onda-partícula. Hacemos una descripción de nuestro montaje experimental para la obtención de las series de fotones. Damos los resultados obtenidos del análisis de nuestras series de fotones, primeramente con el factor de Fano y posteriormente con el espectro de potencias, en las que podemos identificar las regiones que determinan un comportamiento de partícula y uno de onda que ayudan a visualizar una región intermedia que tiene propiedades de caos cuántico, lo cual hace concluir que el caos cuántico en nuestras series de fotones es porque el fotón está en una superposición de onda-partícula. En la última parte de este capítulo sugerimos una conexión del caos cuántico y la complejidad que se puede indagar en nuestras series de fotones.

Finalmente, en el capítulo 7 se concluye que el caos cuántico puede interpretarse como un balance entre el comportamiento tipo onda y tipo partícula, entendidos estos como la capacidad de presentar interferencia o no, y además es posible observar esta transición desde el comportamiento de onda (ó partícula) al caos en la serie de tiempo de fotones obtenida mediante el experimento aquí desarrollado por medio del análisis de la complejidad.

## Capítulo 2

# Función de correlación de segundo orden $g^{(2)}(0)$

La función de correlación de segundo orden  $g^{(2)}(\tau)$  tiene una gran importancia en la historia de la óptica cuántica<sup>1</sup>. De hecho, se puede argumentar que las mediciones realizadas por Hanbury-Brown y Twiss [21] acerca de las cantidades relacionadas al grado de coherencia de segundo orden son las que estimulan la creación de campos ópticos modernos. Uno de los primeros experimentos para observar un efecto puramente cuántico en un campo óptico fue la observación del antibunching de fotones en el cual la cantidad de interés es  $g^{(2)}(\tau)$ . Desde entonces las mediciones de  $g^{(2)}(\tau)$  han jugado un rol importante en la óptica cuántica.

Presentamos la expresión de  $g^{(2)}(\tau)$  en términos de cantidades experimentales medibles. El caso especial de  $\tau = 0$  es importante, porque  $g^{(2)}(0)$  se puede usar para distinguir entre un campo clásico y un campo cuántico. La teoría de función de onda clásica predice que  $g^{(2)}(0) \geq 1$ , mientras que la cuántica permite  $g^{(2)}(0) < 1$ . En una misma fuente de fotones podemos observar los distintos valores de  $g^{(2)}(0)$ . Para observar campos clásicos basta hacer mediciones de  $g^{(2)}(0)$  realizadas por dos detectores. Para llegar a valores de  $g^{(2)}(0) < 1$  que asociamos a campos no clásicos, es necesario insertar un tercer detector. Hacemos una distinción entre dos y tres detectores en las mediciones de  $g^{(2)}(0)$ , nos referimos a estas como  $g_{2D}^{(2)}(0)$  y  $g_{3D}^{(2)}(0)$  respectivamente [10].

Cuando consideramos un divisor de haz por donde el campo incide, como resultado se obtienen dos salidas las cuales se monitorean por dos fotodetectores respectivamente.

---

<sup>1</sup>El  $\tau$  que aparece en  $g^{(2)}(\tau)$  es la diferencia de tiempo que existen entre los campos que se están correlacionando.

Las mediciones para tres detectores las llamamos condicionales, porque los dos detectores que monitorean las salidas del divisor de haz se toman como una detección cuando existe otra en el tercer detector. Este tercer detector monitorea un segundo campo. De modo que  $g_{3D}^{(2)}(0)$  depende no sólo de las propiedades del campo incidente sobre el divisor de haz sino también de las correlaciones entre este campo y el campo incidente sobre el tercer detector.

Una medición típica de  $g^{(2)}(\tau)$ , para un haz que se hace pasar a través de un divisor de haz, se hace por medio de las intensidades  $I_T$  e  $I_R$  de la señal en los puertos reflejado y transmitido, respectivamente. Clásicamente  $g^{(2)}(\tau)$  de un haz incidente es dada por las correlaciones normalizadas de los haces de salida:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I_T(t + \tau)I_R(t) \rangle}{\langle I_T(t + \tau) \rangle \langle I_R(t) \rangle}, \quad (2.1)$$

donde el brackets indica un promedio temporal, el cual se puede remplazar por un promedio de ensamble para un campo estacionario. Para una función de onda clásica, las intensidades de los haces transmitidos y reflejados se relacionan con la intensidad de entrada a través de  $I_T(t) = TI_I(t)$  y  $I_R(\tau) = RI_I(t)$ , donde  $T$  y  $R$  son los coeficientes de transmisión y reflexión del divisor de haz que satisfacen  $T + R = 1$ . Debido a este hecho,  $g^{(2)}(\tau)$  se puede escribir en términos de la intensidad incidente de la siguiente manera,

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I_I(t + \tau)I_I(t) \rangle}{\langle I_I(t + \tau) \rangle \langle I_I(t) \rangle}, \quad (2.2)$$

notemos que esta expresión ya no tiene dependencia de las propiedades  $T$  y  $R$  del divisor de haz. En la práctica no podemos tener un haz perfectamente dividido ya que existen pérdidas por detalles microscópicos del divisor. Para  $\tau = 0$ , la función de correlación es

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle I_I^2(t) \rangle}{\langle I_I(t) \rangle^2}. \quad (2.3)$$

La desigualdad de Cauchy-Schwartz aplicada a esta expresión lleva a  $g^{(2)}(0) \geq 1$  para funciones de onda. La Ecuación 2.2 es una expresión para la intensidad de un campo electromagnético; para un campo electromagnético cuantizado, las intensidades se remplazan por sus correspondientes operadores, de manera que la función anterior se transforma en

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle : \hat{I}_I(t + \tau) \hat{I}_I(t) : \rangle}{\langle \hat{I}_I(t + \tau) \rangle \langle \hat{I}_I(t) \rangle}, \quad (2.4)$$

donde los dos puntos indica que los operadores involucrados tienen que tener un ordenamiento normal. Si la luz está en un estado de Fock de  $n$  fotones y se hace incidir en un

divisor de haz, inmediatamente

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2} = \frac{\langle \hat{n}(\hat{n} - 1) \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2} = 1 + \frac{\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2}, \quad (2.5)$$

dado que para cualquier estado de Fock  $|n\rangle$ ,  $\Delta n^2 = 0$  y la ecuación anterior queda como:

$$g^{(2)}(\tau) = 1 - \frac{\langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2} = \frac{n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}, \quad (2.6)$$

es decir, para cualquier estado de Fock se cumple que  $g^{(2)}(0) < 1$ , lo cual difiere del comportamiento de onda donde  $g^{(2)}(0) \geq 1$ . Para el estado de Fock  $|1\rangle$ , la función de correlación alcanza su mínimo,  $g^{(2)}(0) = 0$ .

En los experimentos no se miden directamente las intensidades, de modo que es necesario relacionar las expresiones para  $g^{(2)}(0)$ , dadas anteriormente, con cantidades experimentales o medibles. Se puede mostrar que cuando  $g^{(2)}(0)$  se mide usando fotodetectores, esta queda en términos de probabilidades de fotodetecciones individuales como

$$g_{2D}^{(2)}(0) = \frac{P_{TR}}{P_T P_R}, \quad (2.7)$$

donde  $P_T$  ( $P_R$ ) es la probabilidad de detección en el detector  $T$  ( $R$ ) en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , y  $P_{TR}$  es la probabilidad de hacer detecciones en ambos detectores  $T$  y  $R$  en el mismo intervalo de tiempo. El subíndice  $2D$  enfatiza que la ecuación (2.7) es válida para mediciones realizadas con dos detectores [10].

La ecuación (2.7) se obtiene usando tanto teoría semiclásica o cuántica de la fotodetección. Recordemos que para el caso en que la luz sea clásica  $g_{2D}^{(2)}(0) \geq 1$ , mientras que para la luz no clásica  $g_{2D}^{(2)}(0) < 1$ .

Experimentalmente, ¿cómo se mide  $g_{2D}^{(2)}(0)$ ?. Para contestar tenemos que explicar cómo se determinan las probabilidades de la ecuación (2.7). Por ejemplo, la probabilidad de detección en el detector  $T$  en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , es dada simplemente por el ancho promedio de detecciones en  $T$ ,  $R_T$ , multiplicado por  $\Delta t$ , donde el ancho promedio es simplemente el número total de detecciones  $N_T$  dividido por el tiempo total de conteos  $\Delta T$ . Las probabilidades para las detecciones en  $R$  y coincidencias en  $TR$  son dadas similarmente:

$$\begin{aligned} P_T &= R_T \Delta t = \left( \frac{N_T}{\Delta T} \right) \Delta t, \\ P_R &= R_R \Delta t = \left( \frac{N_R}{\Delta T} \right) \Delta t, \\ P_{TR} &= R_{TR} \Delta t = \left( \frac{N_{TR}}{\Delta T} \right) \Delta t. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sustituyendo estas probabilidades en la ecuación (2.7) resulta

$$g_{2D}^{(2)}(0) = \frac{N_{TR}}{N_T N_R} \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right). \quad (2.9)$$

Como hemos descrito antes,  $g_{2D}^{(2)}(0)$  se mide para un solo haz que incide sobre un divisor de haz de donde emergen dos haces, uno transmitido y otro reflejado, que se dirigen a dos detectores etiquetados por  $T$  y  $R$  respectivamente. Sin embargo, existen experimentos donde se utiliza un segundo haz fuente que incide sobre un tercer detector que se usa como un testigo [11], por ejemplo, el esquema experimental de la Figura 2.1 y la Figura 2.3. Como se puede observar, en la Figura 2.3 un haz llega al detector testigo  $D_I$ , mientras que el haz restante va al divisor de haz de donde emergen dos haces, uno transmitido y otro reflejado para los cuales les esperan los detectores  $T$  y  $R$  respectivamente. Es razonable pensar que las probabilidades de la ecuación (2.7) se condicionen por la presencia del haz testigo, por esta razón la expresión para tres detectores es

$$g_{3D}^{(2)}(0) = \frac{P_{iRT}}{P_{iT} P_{iR}}, \quad (2.10)$$

donde  $P_{iRT}$  es la probabilidad de obtener una triple coincidencia entre los detectores  $T$ ,  $R$  e  $i$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . El subíndice  $3D$  es para enfatizar que esta expresión es válida para mediciones de tres detectores de  $g^{(2)}(0)$ . La tercer detección impone la condición de correlación entre los campos que se registran en el detector reflejado y el detector transmitido en una ventana temporal  $\Delta t$ . Por lo tanto, decimos que esta medición es condicional.

Debido a las mediciones del tercer detector, las detecciones testigo se pueden usar como el número de ensayos. Es posible normalizar las probabilidades de la ecuación (2.10) de forma diferente de la ecuación (2.7). Las probabilidades están dadas por las coincidencias divididas por el número de ensayos los cuales son igual al número de detecciones testigo:

$$P_{iRT} = \frac{N_{iRT}}{N_i}, \quad P_{iT} = \frac{N_{iT}}{N_i}, \quad P_{iR} = \frac{N_{iR}}{N_i}, \quad (2.11)$$

donde, dada una ventana de tiempo  $\Delta t$ ,  $N_{iT}$  ( $N_{iR}$ ) es el número de fotoconteos simultáneos en el detector  $T$  ( $R$ ) y el detector  $i$ ;  $N_{iTR}$  es el número de triples coincidencias,  $N_i$  es el número de conteos en el detector  $D_I$ . Note que en estas expresiones no hacemos explícita la ventana de coincidencias o el tiempo total. Usando las ecuaciones (2.11), la determinación experimental de  $g_{3D}^{(2)}(0)$  se puede reescribir como

$$g_{3D}^{(2)}(0) = \frac{N_{iTR} N_i}{N_{iT} N_{iR}}. \quad (2.12)$$

Nuevamente, esta cantidad es independiente de la eficiencias de los detectores, porque cuando relacionamos el número de fotodetecciones con las intensidades, el numerador y el denominador dependen linealmente de las eficiencias en  $T$  y  $R$  y cuadráticamente en la eficiencia de  $i$ .

Con el fin de evitar confusión, se evidencian las diferencias entre las mediciones para dos y tres detectores. Las mediciones de dos detectores para  $g_{2D}^{(2)}(0)$  es lo más cercano a la verdadera definición de  $g^{(2)}(0)$  para un haz de luz. Las mediciones de tres detectores de  $g_{3D}^{(2)}(0)$  representa una condicional de  $g^{(2)}(0)$ , donde la condición es hecha al usar mediciones sobre un segundo haz, en algún sentido uno podría pensar que (2.10)-(2.12) es lo que define una medición condicional. Una condición se usa en casos donde se tienen dos haces que se correlacionan en intensidad y uno desea medir  $g^{(2)}(0)$  de un haz condicionado (el que se dirige al divisor) por la presencia de un fotón que se encuentra en el segundo haz (el testigo.)

El método descrito anteriormente tiene el propósito de obtener una función de correlación de segundo orden lo más cercana a cero, es decir, obtener una anticorrelación que está asociada a un estado de número  $|1\rangle$  (este método es utilizado por Aspect et al., para probar que un fotón no se puede dividir [11]), la importancia de medir este estado juega un papel relevante en la visualización experimental del carácter de onda ó partícula que exhibe la luz, por lo que la función de correlación de segundo orden funge como un parámetro que dice si lo que estamos midiendo es un cuanto de luz ó es una onda.

## 2.1. Experimento de anticorrelación de Grangier-Aspect-Roger

La evidencia experimental de los estados de un fotón fue uno de los grandes retos por la década de los 80's. Los primeros en evidenciar la existencia de estados de fotones individuales fueron Grangier et al. [11], quienes se basan en la obtención de fotones correlacionados por medio de cascadas de pares de fotones emitidas por átomos excitados de  $^{48}\text{Ca}$ , ver Figura 2.1, los cuales se analizan por medio de la función de correlación de segundo orden  $g^{(2)}(0) = \alpha$ .

El experimento consiste en generar el par de fotones correlacionados ( $\nu_1$  y  $\nu_2$ ) los cuales van hacia un sistema de detectores;  $\nu_2$  primeramente debe de pasar por el divisor de haz y posteriormente llegar a los detectores, mientras que  $\nu_1$  va directamente hacia su correspondiente detector.

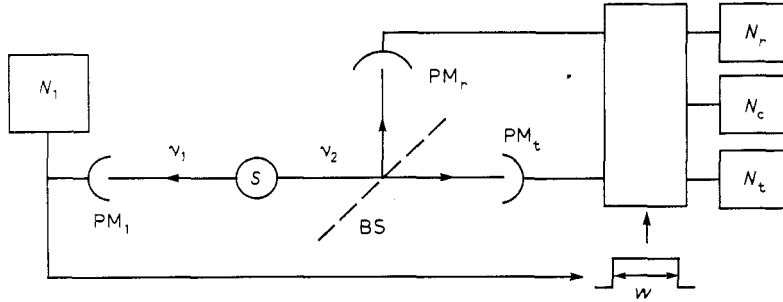


Figura 2.1: Cascada atómica que genera 2 fotones correlacionados en la fuente S. El fotón  $\nu_1$  va directamente al detector  $PM_1$ , mientras que el fotón  $\nu_2$  tiene que pasar primeramente por el divisor BS para posteriormente llegar a uno de los dos detectores  $PM_r$  ó  $PM_t$ ;  $\nu_1$  abre la ventana temporal  $\omega$  que dura un ensayo.  $N_1$  es el número de ensayos que se realiza el experimento,  $N_{r,t}$  es el número de fotones que llegaron al detector  $PM_{r,t}$ ,  $N_c$  es el número de coincidencias que hay en las detecciones registradas por  $PM_r$  y  $PM_t$ . Tomada de [11].

Midiendo conteos individuales en cada detector y coincidencias dobles entre el fotón transmitido y reflejado en una ventana temporal  $\omega$  uno puede obtener el valor de la función de correlación de segundo orden donde  $g^{(2)}(\tau)$ .

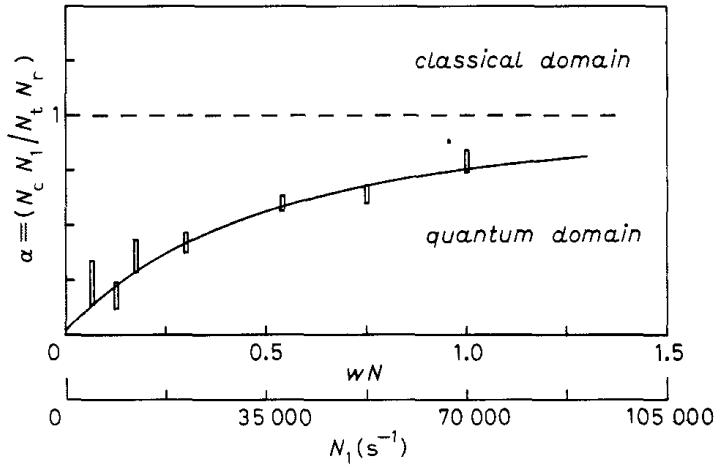


Figura 2.2: Gráfica de la función de correlación  $\alpha = g^{(2)}$  vs  $N\omega$  (número de cascadas emitidas durante la ventana  $\omega \sim 9$  ns) y  $N_1$  (detecciones por segundo del testigo). Tomada de [11].

En la Figura 2.2 se puede observar que conforme se va abriendo la ventana temporal  $\omega$  el comportamiento cuántico se va perdiendo (si la función  $g^{(2)}$  tiene valores cercanos a cero corresponde a un comportamiento cuántico y para valores mayores o iguales a uno corresponden a comportamientos clásicos [22].) Debido a la alta correlación que existe entre el fotón  $\nu_1$  y  $\nu_2$  (el tiempo de correlación de estos fotones es del orden de femtosegundos),

una vez que  $\nu_1$  es detectado, se espera que llegue el fotón  $\nu_2$  ya sea en el detector  $PM_r$  ó  $PM_t$  en una ventana temporal que es del orden de nanosegundos. Conforme la ventana se va haciendo más grande, la posibilidad de detectar fotones en ambos brazos de las salidas del divisor deja de ser nula.

Actualmente se dispone de mejores tecnologías para realizar esta clase de experimentos; desde los detectores cuánticos, los fotodiodos de avalancha (*APDs*, avalanche photodiodes), hasta generar fotones correlacionados por medio del proceso de conversión espontánea paramétrica descendente [23] (SPDC, spontaneous parametric down conversion) tipo **I** y **II**. El proceso SPDC tipo I consiste en hacer incidir un láser sobre un cristal no lineal, el láser excita los átomos a cierto nivel de energía que al regreso a su estado original devuelven un cono de fotones donde hay pares de fotones correlacionados temporalmente conservando la energía y momento incidente. El tiempo de correlación del par de fotones se le denomina  $\tau$  el cual es del orden de femtosegundos. En el tipo II se generan dos conos de fotones, cada cono con una polarización ortogonal al otro, en la intersección se generan pares de fotones con polarizaciones superpuestas por una componente ortogonal y otra vertical. Para este proyecto de tesis basta con la SPDC tipo **I**, ver Apéndice A.2. En el artículo [10], M. Beck realiza una versión de detección de estado de número parecido al de [11] pero con todo el andamiaje descrito en este párrafo.

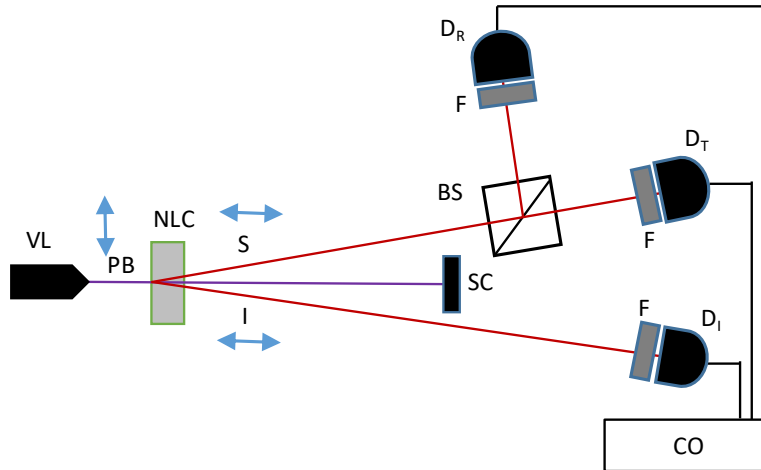


Figura 2.3: Esquema experimental para la detección del estado de un fotón; VL- Láser Violeta (405 nm), PB- Haz de bombeo, NLC- Cristal no lineal BBO I, S- Haz señal (810nm), I- Haz testigo (810nm), BS- Divisor de haz, F- Filtro (810nm),  $D_R$ - Detector R (Reflejado),  $D_T$ - Detector T (Transmitido),  $D_I$ - Detector I (Testigo), CO- Sistema de cómputo y tarjeta, SC- Pantalla.

Como se muestra en la Figura 2.3, a la entrada del cristal BBO (Beta Barium Borate) tipo **I** incidimos un haz láser violeta de 405 nm y a la salida emerge, por SPDC, un



par de haces de fotones correlacionados (un cono en donde es posible encontrar haces correlacionados) de 810 nm. A un haz se le nombra *señal* y al otro *testigo*. Al señal lo hacemos pasar por el divisor de haz generando un haz reflejado (R) y un haz transmitido (T). Al analizar la función de correlación de segundo orden de este sistema encontramos que adquiere un valor de cero, indicándonos que hemos logrado generar el estado de un fotón.

Si realizamos una medición de  $g^{(2)}(0)$  condicionada por un haz testigo en una ventana temporal de 7.39 ns, en nuestro laboratorio logramos obtener  $g_{3D}^{(2)}(0) = 0,025 \pm 0,015$ . Si quitamos el haz testigo y medimos el valor de  $g^{(2)}(0)$  en esa misma ventana temporal obtenemos experimentalmente una  $g_{2D}^{(2)}(0) = 1,06 \pm 0,19$ . Este resultado nos indica que la presencia del fotón testigo es crucial para localizar al fotón señal en un estado de fotón individual tal que la función de correlación con tres detectores  $g_{3D}^{(2)}(0) \sim 0$ . El fotón testigo juega un papel muy importante en este proyecto de tesis para la generación de las series de fotones, como se ve en el Capítulo 6.

## Capítulo 3

# Caos cuántico

Los conceptos del caos clásico son muy importantes ya que son el punto de partida para el entendimiento y desarrollo del caos cuántico. De hecho la parte teórica más relevante que los conecta es la conjetura de Bohigas et al. En este capítulo veremos los elementos más relevantes que determinan al caos clásico. Posteriormente rescataremos aquellos que facilitan el entendimiento de lo que sugiere ser el caos cuántico el cual da paso a mencionar algunas herramientas con las que se explora este último régimen.

### 3.1. Caos clásico.

Para comenzar con el estudio del caos clásico primeramente es necesario hacer mención de los llamados sistemas integrables, que son sistemas conservativos ligados, a los cuales les podemos encontrar en su función hamiltoniana  $H_0$  un conjunto de variables canónicas conjugadas tales que sus coordenadas generalizadas sean cíclicas. De esta manera lo que obtenemos es un conjunto de ecuaciones diferenciales, las cuales se obtienen con las ecuaciones de Hamilton, que tienen la propiedad de ser desacoplables, es decir, podemos usar el método de variables separables para hallar sus soluciones. Ahora incorporamos un nuevo elemento a esta función de Hamilton el cual es un hamiltoniano de perturbación quien es acompañado por un parámetro. Al producto del parámetro con el hamiltoniano de perturbación le llamamos la perturbación  $\Delta H$ . Entonces el nuevo hamiltoniano queda expresado como  $H = H_0 + \Delta H$ . Si la perturbación es pequeña entonces podemos usar teoría de perturbaciones para hallar las soluciones a las ecuaciones del nuevo hamiltoniano perturbado. Recordemos que se puede hallar soluciones para este sistema  $H$  a partir de las soluciones asociadas a la parte meramente integrable  $H_0$ . Esto significa que las nuevas trayectorias en el espacio fase, provenientes de las ecuaciones de movimiento correspondientes al nuevo hamiltoniano  $H$ , difieren muy poco de las de  $H_0$ . A este tipo de soluciones se les

denomina regulares o normales. Bajo estas consideraciones surge lo que conocemos como el teorema de Kolmogorov - Arnold - Moser (KAM) [12] el cual nos dice las condiciones bajo las cuales las trayectorias permanece estables, con alteraciones ligeras y localizadas en la misma región del espacio fase.

Si ahora la perturbación es grande, que es una condición donde ya no se cumple más el teorema de KAM, no podemos usar teoría de perturbaciones. Las nuevas trayectorias son muy distintas a las asociadas a  $H_0$ . Es decir, estamos ante una dinámica muy diferente. Cuando se rompe alguna de las condiciones del teorema de KAM lo que se podría obtener es un movimiento el cual denominamos caótico.

### 3.1.1. Atractores

Antes de entrar con lo referente al caos clásico, revisamos en breve lo que son los atractores, esto lo hacemos porque el caos clásico está relacionado con lo que se define como atractor extraño que contrasta con el concepto de atractor. Los atractores extraños proveen información que define al caos clásico. Un atractor es una región del espacio fase (puede ser una curva estable la cual llamamos ciclo límite, ó un punto el cual llamamos punto fijo) cuyas condiciones iniciales están fuera de esta región y que después de cierto tiempo van a parar al atractor, esto se debe a que dentro de su dinámica puede existir una fuerza que entra en forma de perturbación (no pequeña) que ocasiona un final acotado como lo es el atractor. Un ejemplo de atractor es el que se genera por la ecuación de van der Pol,<sup>1</sup>

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - \epsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F \cos(\omega_D t), \quad (3.1)$$

si  $F = 0$  y  $\epsilon = 0$  tenemos un oscilador simple cuya trayectoria en el espacio fase es un círculo. Si  $\epsilon$  es pequeño, el movimiento irá a parar al ciclo límite, que en este caso es un círculo de radio uno, ver Figura 3.1 a). Para  $x^2 > 1$  el amortiguamiento es positivo y el movimiento es en forma de espiral que va de adentro hacia afuera pero estabilizándose en el círculo, es decir el atractor; mientras que para  $x^2 < 1$  el amortiguamiento es negativo y la trayectoria es un espiral que va de afuera hacia adentro finalizando en el ciclo límite. Si  $\epsilon$  es suficientemente grande, el término de amortiguamiento es comparable con los otros términos de la ecuación de movimiento, y las trayectorias siguen yendo hacia el ciclo límite pero ahora deformado, ver Figura 3.1 b).

A diferencia de los atractores donde el movimiento muere en una órbita estable, en el atractor extraño el movimiento parece ser atraído hacia un sitio pero que con precisión

---

<sup>1</sup>La ecuación de van der Pol la podemos encontrar en el estudio de las oscilaciones en circuitos que usaban válvulas de vacío [24]. En biología emerge del estudio del potencial de acción de las neuronas [25, 26].

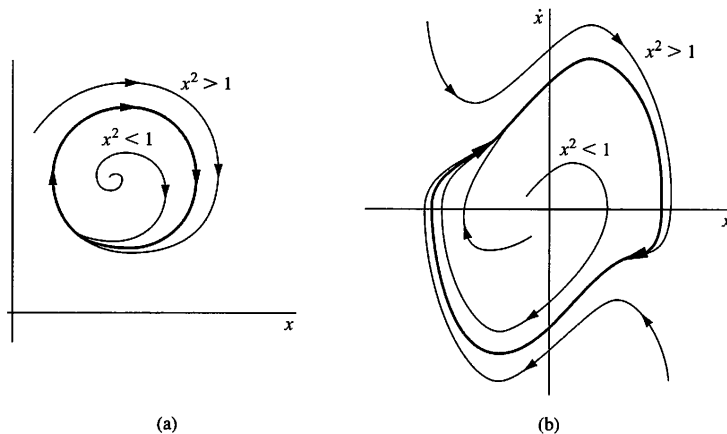


Figura 3.1: Ciclos límite (curvas remarcadas) para la ecuación de van der Pol con la fuerza  $F = 0$  para a)  $\epsilon$  pequeños b)  $\epsilon$  grandes tal que  $\epsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt}$  compite con los demás términos de la ecuación (3.1). Tomada de [12].

no se sabe cual, los llamados puntos de equilibrio inestable. La trayectoria deambula en una extensa e irregular región del espacio fase de manera que parece ser aleatoria. Si consideramos el hecho de que partimos de un hamiltoniano  $H = H_0 + \Delta H$  tal que la perturbación  $\Delta H$  es grande, entonces la parte aleatoria que caracteriza a este movimiento realmente está templada por la parte integrable  $H_0$  haciendo que la trayectoria no sea tan aleatoria. Las trayectorias andan de aquí a allá, re-visitando las regiones por donde pasaron, pareciendo de esta manera llenar todo el espacio fase accesible pero sin pasar por el mismo punto dos veces. Estas cualidades dan elementos suficientes para definir las propiedades del movimiento caótico.

El movimiento caótico tiene las propiedades de mezclado, las trayectorias son cuasi-periódicas densas, y tiene sensibilidad a las condiciones iniciales. El mezclado se refiere a que si elegimos dos pequeñas regiones  $I_1$  e  $I_2$  las cuales están muy cercanas tal que en la región de  $I_1$  pasa la trayectoria, esta misma pasará por la región  $I_2$ . Las trayectorias son cuasi-periódicas porque no son cerradas y no tienen un periodo fijo de revisita para las regiones cercanas, son densas porque pasan muy cerca en cada punto del dominio. La sensibilidad a las condiciones iniciales hace referencia a que pequeños cambios en las condiciones iniciales resultan en cambios considerables en la posición y velocidad en tiempos posteriores. Entonces las trayectorias con condiciones iniciales muy cercanas son muy diferentes en un tiempo posterior. La sensibilidad a las condiciones iniciales hace que un sistema meteorológico sea muy difícil de predecir. Podríamos tener información sobre una trayectoria en la evolución del sistema meteorológico; si variamos ligeramente la condición inicial, sólo un intervalo muy corto es predecible (tomando como referencia la trayectoria

vieja) en la nueva trayectoria, después de ese rango las trayectorias se separan muy notablemente haciendo que no se pueda emplear toda la información anterior (de la primera trayectoria) para predecir un desenlace con los nuevos datos.

Un ejemplo de un atractor extraño es el que investigó por primera vez Lorenz. Si bien no podemos representar un espacio fase en seis dimensiones, sí podemos representar la evolución de las coordenadas en el espacio tridimensional que visualiza las características que determinan el movimiento caótico que hemos mencionado en el párrafo anterior. El sistema está compuesto por tres ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(b - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - cz.\end{aligned}\tag{3.2}$$

En este sistema podemos hallar tres puntos de equilibrio inestable que dan lugar al atractor extraño. Ver Figura 3.2.

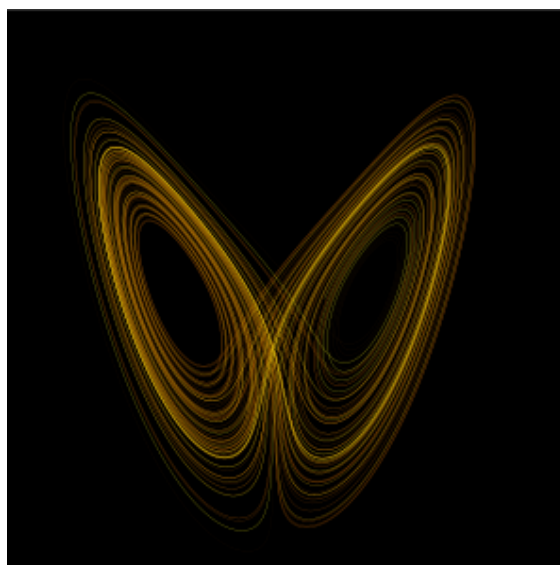


Figura 3.2: El atractor de Lorenz, con valores  $b = 28$ ,  $a = 10$ ,  $c = 8/3$ . La forma de mariposa del atractor de Lorenz puede haber inspirado el nombre del efecto mariposa en la teoría del caos. Tomado de [27].

### 3.1.2. Exponentes de Lyapunov

En la sección anterior dijimos implícitamente que si tenemos dos trayectorias caóticas con condiciones iniciales muy cercanas, al evolucionar se separan notablemente. Designemos como  $s(t)$  la separación entre las dos órbitas al tiempo  $t$  en el espacio de estados. Una medida de la separación  $s(t)$  de las trayectorias es el exponente de Lyapunov  $\lambda$ . Si dos órbitas están separadas por una distancia  $s_0$  al tiempo  $t = 0$ , al tiempo  $t$  la separación será

$$s(t) = s_0 e^{\lambda t}. \quad (3.3)$$

Si el movimiento es caótico se tiene  $\lambda > 0$ . En  $s(0)$  ambas trayectorias son muy cercanas entre sí. Después de algún tiempo  $t$ ,  $s(t)$  es comparable con las dimensiones del espacio coordinado accesible de manera que para tiempos posteriores no puede ir más allá de este espacio; a partir de este valor de  $t$ ,  $s(t)$  varía de manera aleatoria. Si  $\lambda < 0$ , el exponente de Lyapunov mide la razón para la cual el sistema se aproxima a un atractor regular.

El distanciamiento de las trayectorias debido a un ligero cambio en las condiciones iniciales en el espacio de estados es un concepto que se vuelve a emplear para el estudio de microcavidades electrodinámicas [16] donde el comportamiento caótico toma en cuenta la manera en que el electrón puede dispersarse dentro de la cavidad. El electrón es un ente que tiene las propiedades tanto de onda como de partícula y por tanto la dispersión dentro de la cavidad será clásica o cuántica. Esto último aunado con los estudios correspondientes al caos cuántico (que más adelante revisamos) nos dan una inferencia para poner al caos cuántico en el contexto de las propiedades onda-partícula que la luz puede exhibir.

## 3.2. Criterios del caos cuántico

La mecánica clásica es una aproximación a una teoría más completa, aquella es la mecánica cuántica. Si sucede algo en el mundo clásico referente al caos, también debe haber algo análogo en el mundo cuántico. En mecánica cuántica lo que se tiene ahora es una ecuación lineal, por ende tiene un par de consecuencias referentes a la fenomenología del caos que son muy importantes. Primero, en cuántica no podemos definir trayectorias ya que la posición y momento no se pueden precisar de manera simultánea. Lo siguiente es que la información de la trayectoria se encuentra codificada en la función de onda, esto nos hace pensar que podemos trabajar con la función de onda y a partir de aquí podemos definir la distancia entre dos funciones de onda distintas: preparo dos funciones de onda ligeramente diferentes y vemos como se separan, pero debido a la evolución unitaria, sabemos que el producto interior a tiempos posteriores mantiene la misma distancia, el solapamiento se

mantiene todo el tiempo. Lo que define la fenomenología del caos clásico es un movimiento errático y el distanciamiento de las trayectorias de forma exponencial. Entonces, a partir de los recursos que por sí solos ofrece la mecánica cuántica, la fenomenología de caos se destruye.

La información clásica sobre caos debe estar en la mecánica cuántica en algún sitio. No puede aparecer mágicamente cuando el sistema alcanza algún tamaño. La parte que conecta al caos clásico con la mecánica cuántica para desembocar en una teoría cuántico caótica es a través de la relación que existe entre la integrabilidad de los sistemas clásicos con los espectros energéticos. Es aquí donde nace la idea de analizar los espectros energéticos; cuánticamente la energía está cuantizada, clásicamente la energía es un continuo, pero no deja de ser un espectro, por lo que da razón para analizar el espectro para sistemas integrables y caóticos en el marco de la mecánica cuántica. La manera de conectar la integrabilidad de los sistemas hamiltonianos con los espectros energéticos de la mecánica cuántica podemos decir que es a través de las variables acción ángulo.

En la vieja mecánica cuántica se parte de ciertas acciones (momentos que son constantes de movimiento) que caracterizan al sistema integrable y las cuantizamos [13]. De esta manera conseguimos los espectros energéticos; a modo de ejemplo, consideremos un sistema integrable, por lo tanto las coordenadas generalizadas son cíclicas, quedando la función hamiltoniana sólo en términos de constantes de movimiento asociadas a los momentos (las acciones); es decir, tenemos una función hamiltoniana de la forma  $H(I_1, \dots, I_N)$ , con  $I_i$  constantes de movimientos las que llamamos acciones. Cuantizamos cada una las acciones  $I_i$ , que significa sólo tener ciertas áreas accesibles cuantizadas en el espacio fase, quedando  $I_i = 2\pi\hbar n_j$  y su correspondiente espectro sería  $E_{n_1, \dots, n_N} = H(2\pi\hbar n_1, \dots, 2\pi\hbar n_N)$ , se tiene un espectro energético que depende de que tantas acciones se tenga en la función hamiltoniana. Esto parte del hecho de que antes no se tenía la ecuación de Schrödinger y se hacía con el afán de explicar los espectros energéticos de los sistemas cuantizados observados en la naturaleza. Es una descripción no cien por ciento correcta, aunque en algunos casos coincide, pero es una muy buena aproximación de cómo funciona la cuántica. Si clásicamente podemos acceder a las regiones de caos clásico partiendo de los sistemas integrables entonces podemos hacer un estudio del espectro energético de estos mismos sistemas pero desde el punto de vista cuántico. Aquí se puede pasar al hecho de usar ya sea esta forma primitiva de obtener la cuantización de los sistemas o las formas modernas en las que se usa la ecuación de Schrödinger para hallar el espectro energético.

Para ejemplificar lo dicho en el párrafo anterior consideremos la partícula libre limitada a moverse en una caja bidimensional. En este problema podemos identificar dos constantes de movimiento asociadas a los momentos las cuales están relacionadas con las acciones que se cuantizan en la vieja mecánica cuántica para encontrar el espectro energético. También

podemos hallar el espectro con la ecuación de Schrödinger; tanto uno y otro método conllevan en este caso al mismo espectro energético el cual es

$$E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left[ \left( \frac{n_x}{a} \right)^2 + \left( \frac{n_y}{b} \right)^2 \right], \quad (3.4)$$

con  $n_{x,y} = 1, 2, 3 \dots$

Al fijar  $n_x$  (asociado a autoestados correspondientes a  $p_x^2 = \text{Cte}$ ) se encuentra una secuencia ordenada de niveles que van como  $E \sim n_y^2$ , ver Figura 3.3 a). Sobre esta misma secuencia incorporamos otra secuencia de niveles al fijar  $n_x + 1$  y variar  $n_y$ . Y así podemos ir incorporando varias secuencias de niveles de energía para distintos valores de  $n_x$  fijos; lo que podemos observar es que el espacio entre niveles energéticos es aleatorio, ver Figura 3.3 c).

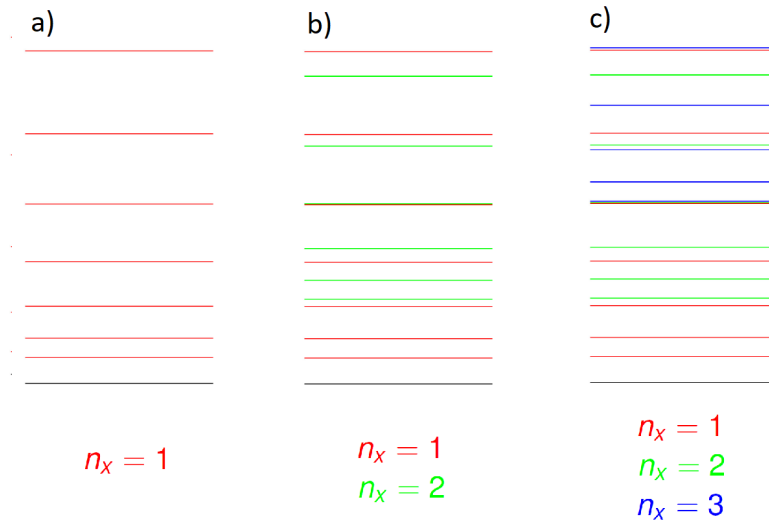


Figura 3.3: Secuencia de niveles energéticos cuando **a)**  $n_x = 1$  y variamos  $n_y$ . **b)** Dejamos la secuencia calculada en a) e incorporamos la secuencia cuando se fija  $n_x = 2$ . **c)** Dejamos las secuencias de a) y b) e incorporamos la secuencia generada a  $n_x = 3$ . En este sistema integrable se puede ver una alta aleatoriedad en el espaciado entre niveles consecutivos de la Figura c).

La versión cuántica de todo sistema integrable tiene una parte funcional que determina el espectro según sea la función hamiltoniana, y una parte aleatoria asociada a la mezcla de diferentes secuencias de su espectro correspondiente a cada acción. Esto va a aparecer en todos los sistemas cuánticos cuyos análogos clásicos sean integrables. Esto conlleva obtener un resultado universal sobre como son los niveles de energía [28]: si definimos la



distancia entre dos niveles consecutivos  $s_i = E_{i+1} - E_i$  normalizado a uno  $\langle s \rangle = 1$  con la idea de comparar distintos sistemas con dependencia funcional hamiltoniana diferente, siguen una distribución de Poisson  $P(s) = \exp(-s)$  para todos los sistemas integrables de más de un grado de libertad. En este contexto tenemos una idea cuántica de como se manifiesta la integrabilidad clásica.

El siguiente paso es explorar sistemas que ya nos son clásicamente integrables como aquellos que son caóticos. Recordemos, los sistemas ya no se puede escribir de la forma  $H(I_1, \dots, I_N)$  y por lo tanto no se puede obtener un espectro de la forma  $E = H(2\pi\hbar n_1, \dots, 2\pi\hbar n_N)$ . El resultado interesante es que el espectro no es el resultado de mezclar secuencias independientes como en el caso integrable, es decir, existen correlaciones entre niveles para el espectro energético del caos. Las primeras investigaciones sobre qué le pasa a los sistemas cuánticos ergódicos caóticos con respecto a su espectro de energía fue a partir de estudiar el billar de Sinái [29].<sup>2</sup> Estos estudios se resumen en la conjetura de Bohigas, Giannoni y Schmit (**conjetura BGS**) [5]: la distancia  $s$  entre cada dos niveles consecutivos  $s_i = E_{i+1} - E_i$ , normalizada a uno  $\langle s \rangle = 1$ , sigue una distribución de Wigner,  $P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp(-\frac{\pi}{4} s^2)$ , para todos los sistemas clásicamente ergódicos. Podemos observar que espectros asociados a sistemas caóticos se encuentran casi ordenados a diferencia de los asociados a los sistemas integrables que son aleatorios, ver Figura 3.4.



Figura 3.4: Espectros energéticos para el oscilador armónico (izquierda), sistema caótico (centro) y el de partícula en una caja bidimensional (derecha). El espaciado del espectro caótico se encuentra entre uno que es ordenado (sistema integrable con un solo grado de libertad) y uno que es aleatorio (sistema integrable con dos grados de libertad.) En general los espectros energéticos de los sistemas integrables son completamente aleatorios, mientras que los caóticos tienen cierta correlación entre niveles que hace que se organicen entre ellos para parecerse más a una secuencia de niveles ordenados. Tomada de [14].

<sup>2</sup>La mesa del billar de Sinái es cuadrada y en su centro se ha extrae una zona circular.

¿Por qué los espectros caóticos tienen una distribución de Wigner? ¿qué es lo que justifica esa distribución? Consideremos una interacción que puede ser por ejemplo aquella dada en el interior de un núcleo atómico. Esta interacción puede ser modelada por un hamiltoniano  $\hat{H}$  compuesto por una parte integrable  $\hat{H}_0$  y una perturbación  $\Delta\hat{H}$ , lo cual podemos expresar como  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \Delta\hat{H}$ . Muy semejante a lo que se hace en clásica. Queremos encontrar el espectro energético de este hamiltoniano  $\hat{H}$ . Para poder hallarlo, necesitamos la base del hamiltoniano integrable que satisface  $\hat{H}_0|\psi_i\rangle = E_i^0|\psi_i\rangle$ . Hallamos los elementos de matriz del hamiltoniano  $\hat{H}$  con la base de  $\hat{H}_0$ ,

$$\langle\psi_i|\hat{H}|\psi_j\rangle = \langle\psi_i|\hat{H}_0|\psi_j\rangle + \langle\psi_i|\Delta\hat{H}|\psi_j\rangle, \quad (3.5)$$

y la representación matricial es

$$\hat{H} \doteq \begin{pmatrix} E_1^0 + \Delta H_{11} & \Delta H_{12} & \cdots & \Delta H_{1n} \\ \Delta H_{21} & E_2^0 + \Delta H_{22} & \cdots & \Delta H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta H_{n1} & \Delta H_{n2} & \cdots & E_1^0 + \Delta H_{11} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

con la propiedad de que los  $\Delta H_{ij}$  pueden ser mucho menores ó mucho mayores a 1. A partir de la matriz (3.6) podemos obtener el espectro energético del núcleo. La conjetura BGS se basa en describir el como son las matrices (3.6) lo cual incorpora los métodos de la teoría de matrices aleatorias (RMT, Random Matrices Theory) [30]. La RMT tienen un origen en la física<sup>3</sup> al tratar de describir interacciones muy complejas de la física nuclear en la que muchas veces no se sabe muy bien que está pasando dentro del núcleo. Este método considera que no nos interesa el detalle de donde está cada nivel energético, sólo nos interesa las propiedades globales; de una manera muy parecida a lo que se hace en física estadística donde renunciamos al conocimiento preciso de la trayectoria de una partícula para escribirlo todo en términos estadísticos y obtener de ello una descripción termodinámica. Si bien en física estadística renunciamos a la posición de una partícula, en la RMT se renuncia al saber cual es la interacción concreta, es decir, todas las interacciones son igualmente probables. Reduciéndose a que la representación matricial está conformada por números aleatorios sin correlación entre ellos. Bajo este modelo se obtiene la distribución de Wigner, aquella que Bohigas-Giannoni-Schmit postularon que caracteriza cualquier sistema cuántico cuyo análogo clásico es ergódico. Todo esto da una primera

---

<sup>3</sup>Las matrices aleatorias aparecieron primero en la matemática estadística alrededor de los años 30, [30] sin llamar mucho la atención. Posteriormente en los años 50 y 60 fue desarrollada por Wigner, Dyson Mehta y otros con la finalidad de sistematizar el estudio de los espectros de los núcleos complejos, esto mediante las estadísticas de los eigenvalores y eigenfunciones de dichos sistemas.

imagen de lo que es el caos en mecánica cuántica.

### 3.2.1. Billares cuánticos

Una aplicación concreta de lo que hemos dicho sobre las distribución de Poisson y Wigner que siguen los sistemas regulares y caóticos, respectivamente, es en los billares balísticos. De hecho han sido el caballo de batalla en numerosos estudios para el entendimiento del caos cuántico. Lo interesante de los billares es que se ve directamente el paralelismo que existe entre el caos clásico y el caos cuántico; clásicamente en su ergodicidad, cuánticamente en su distribución espectral.

La teoría matemática de los billares caóticos nace alrededor de los años 30 con los trabajos de George Birkhoff [31, 32]. Durante los últimos años se ha convertido en un área muy bien establecida dentro de la teoría moderna de los sistemas dinámicos y mecánica estadística.

Los billares son modelos matemáticos para diversos fenómenos físicos donde una o más partículas se mueven en un contenedor compacto de un espacio  $d$ -dimensional y colisionan con las paredes y entre sí. Las propiedades dinámicas de cada modelo quedan determinadas por la forma de las paredes que contienen las partículas, y pueden variar de un comportamiento completamente regular (integrable) a uno completamente caótico [6]. Es por eso que el estudio de los billares cuánticos ha sido fundamental para alcanzar el nivel de comprensión actual del caos cuántico. Así, los billares pueden tener una dinámica regular, mezclada o caótica. Para un valor dimensional  $d = 2$  se tiene que la dinámica no es trivial, el círculo y la elipse son dos de los principales ejemplos de billares integrables. Por otra parte dos casos de billares caóticos muy estudiados son el billar de Sinái<sup>4</sup> y el estadio de Bunimovich<sup>5</sup>.

El análogo cuántico de un billar clásico está definido por la ecuación de Schrödinger estacionaria con condiciones de frontera de Dirichlet, es decir, la función de onda se anula en la frontera. El hamiltoniano de la partícula está compuesto por el laplaciano multiplicado por algunas constantes, por lo cual el problema se asemeja al de las vibraciones de una membrana. Por tanto, es evidente que la estructura de la mecánica cuántica no deja lugar a un comportamiento caótico similar al de la mecánica clásica. Sin embargo, puesto que la mecánica clásica debe emerger de la mecánica cuántica cuando el tamaño del sistema es suficientemente grande, o equivalentemente, cuando  $\hbar \rightarrow 0$ ,<sup>6</sup> puede haber algunas características del comportamiento caótico en el espectro y la función onda. Los

---

<sup>4</sup>El billar de Sinái consiste de un cuadrado al cual se le ha quitado un círculo concéntrico.

<sup>5</sup>El estadio de Bunimovich consiste en dos rectas paralelas de la misma longitud que están unidas por dos semicírculos.

<sup>6</sup>No significa que  $\hbar$  sea una variable, si no que cuando las escalas se reducen la mecánica clásica deja de ser aplicable.

billares son necesarios aquí: cómo definir una contraparte clásica de un sistema cuántico particular, sólo es clara y directa para sistemas con pocos grados de libertad, y por lo tanto la mayoría de los resultados se refieren a este tipo de sistemas. A finales de los años setenta y principios de los ochenta, muchos autores comenzaron a estudiar sistemas cuánticos simples como el billar cuántico o pequeñas moléculas, tratando de relacionar sus propiedades con el carácter integrable o caótico de la dinámica de sus análogos clásicos.

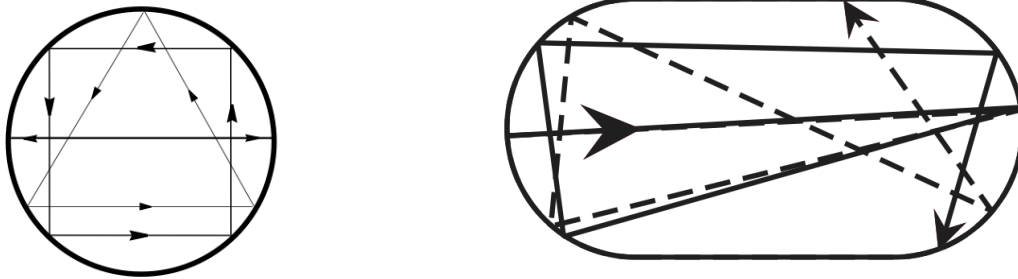


Figura 3.5: Izquierda: Billar circular. Tomada de Chernov [6]. Derecha: Billar de Bunimovich, Tomada de Ullmo y Tomosovic [17].

Este hecho enlaza directamente con la teoría de matrices aleatorias. El paradigma del caos cuántico son los billares cuánticos: partícula confinada en un potencial de paredes infinitas. Para ello se suelen hacer analogías entre los billares clásicos y cuánticos. Por ejemplo, una partícula clásica confinada en un billar rectangular sigue trayectorias bien definidas, su movimiento es totalmente determinista e integrable; una partícula cuántica en un potencial rectangular de paredes infinitas es su análogo cuántico. Si se estudian las fluctuaciones del espectro energético, se puede observar que se sigue una estadística de Poisson. Por otra parte para el caso de un billar como el de Bunimovich ó de Sinái las fluctuaciones estadísticas de su espectro siguen una distribución de Wigner. Un ejemplo de las distribuciones ajustadas para un billar regular y un billar caótico pueden verse en las Figuras 3.6 donde se muestran las distribuciones de Wigner y de Poisson.

Al final, esto es un análisis estadístico que caracteriza las fluctuaciones del espectro energético de los sistemas cuánticos cuyos análogos clásicos son caóticos ó integrables. Esta forma estadística de analizar los espectros no es única, estudios posteriores encuentran más firmas estadísticas que caracterizan al caos cuántico, como lo son el espectro de potencias y el factor de Fano que a continuación se explican y que serán la herramienta de estudio del caos en nuestras series de tiempo.

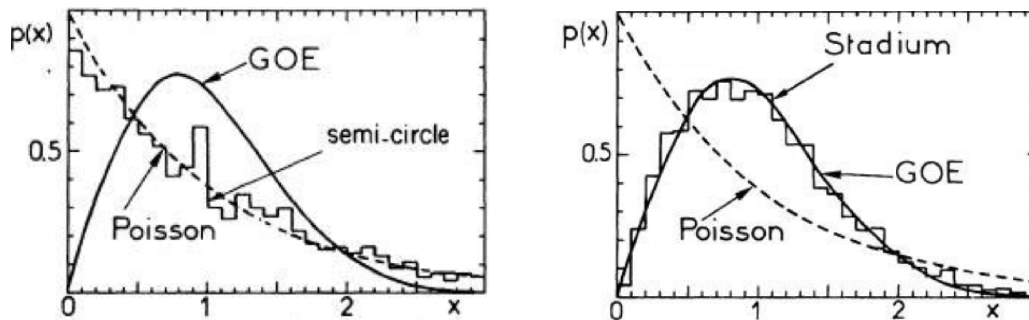


Figura 3.6: Izquierda: Distribución correspondiente a un billar semicircular. Derecha: Distribución correspondiente a un billar de Bunimovich (estadio). Tomadas de [33].

### 3.2.2. Caos Cuántico y ruido $1/f$

El trabajo pionero de Berry y Tabor [28] muestra que las fluctuaciones espectrales de un sistema cuántico cuyo análogo clásico es totalmente integrable están bien descritas por la estadística de Poisson; es decir, los niveles de energía sucesivos no están correlacionados. Bohigas et al. [5] conjeturaron que las propiedades de fluctuación de los sistemas cuánticos tal que en el límite clásico son totalmente caóticos, coinciden con aquellas de la RMT. Si ahora se consideran a las fluctuaciones del espectro de energía de los sistemas cuánticos como una serie de tiempo discreta, se puede hacer un análisis con el espectro de potencias. La característica esencial de los espectros de energía caóticos en sistemas cuánticos es la existencia de repulsión entre niveles y correlaciones. Para estudiar estas correlaciones, Relaño et al. [8] consideran al espectro de energía como una señal discreta y la secuencia de los niveles de energía como una serie de tiempo. La secuencia de espaciamientos entre niveles más cercanos tiene similitudes con el proceso de difusión de una partícula. La examinación del espectro de potencias de las fluctuaciones de los niveles de energía revelan una ley potencia muy precisa para sistemas hamiltonianos cuánticos completamente regulares ó completamente caótico. A continuación mostramos lo realizado por Relaño y colaboradores [8] donde muestran que los sistemas caótico tienen ruido  $1/f$ , en contraste con el ruido marrón  $1/f^2$  de los sistemas regulares.

El primer paso, previo a cualquier análisis estadístico de fluctuaciones espectrales, es el unfolding (re-escalamiento) del espectro energético. Las amplitudes de fluctuación de niveles se modulan por el valor de la densidad de niveles media  $\bar{\rho}(E)$  y, por lo tanto, para comparar las fluctuaciones de diferentes sistemas, se debe eliminar el comportamiento suave de la densidad de niveles. Los niveles de energía reales  $E_i$  se asignan a nuevos niveles adimensionales  $\epsilon_i$ ,

$$E_i \rightarrow \epsilon_i = \bar{N}(E_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.7)$$

donde  $N$  es la dimensión del espectro y  $\bar{N}$  es dado por

$$\bar{N}(E) = \int_{-\infty}^E dE' \bar{\rho}(E'). \quad (3.8)$$

La secuencia de espaciamiento de vecinos más cercanos se define por

$$s_i = \epsilon_{i+1} - \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (3.9)$$

La fluctuación del espectro se caracteriza por la estadística  $\delta_n$  [30]

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n (s_i - \langle s \rangle) = \sum_{i=1}^n w_i, \quad (3.10)$$

donde el índice  $n$  corre desde 1 hasta  $N - 1$ .

Es posible estudiar la señal  $\delta_n$  de los sistemas cuánticos caóticos, de esa manera se analizan sus estadísticas espectrales con técnicas numéricas normalmente utilizadas en el estudio de sistemas complejos. Una de esas técnicas es el cálculo del espectro de potencia  $S(k)$  de una serie discreta y finita  $\delta_n$  dada por

$$S(k) = \left| \hat{\delta}_k \right|^2, \quad (3.11)$$

donde

$$\hat{\delta}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \delta_n \exp\left(\frac{-2\pi i k n}{N}\right) \quad (3.12)$$

y  $N$  es el tamaño de la serie.

Como ejemplo de sistemas caóticos, Relaño et al. [8] toman núcleos atómicos a energías de excitación altas, donde los niveles de la densidad son grandes. Para obtener el espectro de energías se realizan cálculos en el modelo de capas para un núcleo seleccionado. Las matrices hamiltonianas para diferentes momentos angulares, paridad e isoespín se diagonalizan, con un unfolding global cuidadoso.

La Figura 3.7 muestra los resultados para una capa nuclear  $sd$  estable,  $^{24}\text{Mg}$ , y para un núcleo exótico,  $^{34}\text{Na}$ , en las capas protón  $sd$  y neutrón  $pf$ . El espectro de potencias de  $\delta_n$  sigue una ley de potencias. Se puede suponer la forma funcional simple

$$\langle S(k) \rangle \sim \frac{1}{k^\alpha}. \quad (3.13)$$

Por el método de mínimos cuadrados, se observa un ajuste a los datos de la Figura 3.7

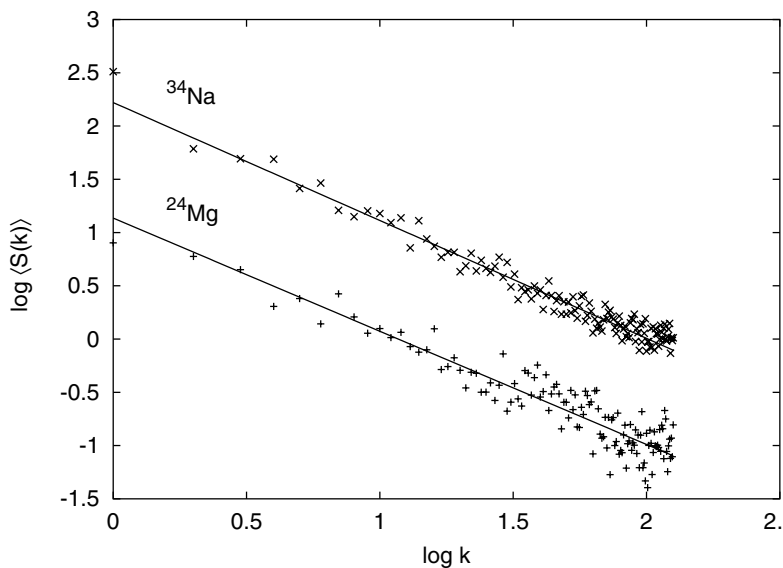


Figura 3.7: Espectro de potencias promedio de la función  $\delta_n$  para  $^{24}\text{Mg}$  y  $^{34}\text{Na}$ . Los ajustes se desplazan para evitar traslapes. Las pendientes de estas rectas son  $\alpha = 1.11 \pm 0.03$  para  $^{34}\text{Na}$ , y  $\alpha = 1.06 \pm 0.05$  para  $^{24}\text{Mg}$ . Tomada de [8].

que dan  $\alpha = 1.11 \pm 0.03$  para  $^{34}\text{Na}$ , y  $\alpha = 1.06 \pm 0.05$  para  $^{24}\text{Mg}$ . Ya que estos núcleos son considerados caóticos desde su relación con la conjetura de Bohigas y la teoría de matrices aleatorias, entonces cuando se encuentran sistemas con  $\alpha = \pm 1$ , implica que poseen caos cuántico. Este criterio también lo utilizaremos para estudiar la estadística cuántica en nuestras series de fotones individuales.

Este método de análisis espectral con el espectro de potencias, Relaño et al. también lo aplican para ensambles de matrices de sistemas hamiltonianos con propiedades caóticas y regulares. Para el caso caótico trataron con [30]: GOE (gaussian orthogonal ensemble), matrices de dimensión  $N$ , aplicable a sistemas caóticos invariantes ante regresión temporal con simetría rotacional o espín entero y simetría rotacional rota; GUE (gaussian unitary ensemble) aplicable para sistemas caóticos en el cual la invarianza de regresión temporal se viola; GSE (gaussian symplectic ensemble), aplicable para sistemas caóticos invariantes ante regresión temporal con espín semientero y simetría rotacional rota. Para el caso integrable usaron el ensamble GDE (Gaussian diagonal ensemble). En la Figura 3.8 podemos observar una potencia  $\alpha = 2$  para el caso de Poisson (GDE), y para los caóticos se tiene  $\alpha = 1$ .

En resumen, en los sistemas cuánticos la función  $\delta_n$  se puede considerar como una serie de tiempo, donde el índice de orden de nivel  $n$  juega el papel de un tiempo discreto. El

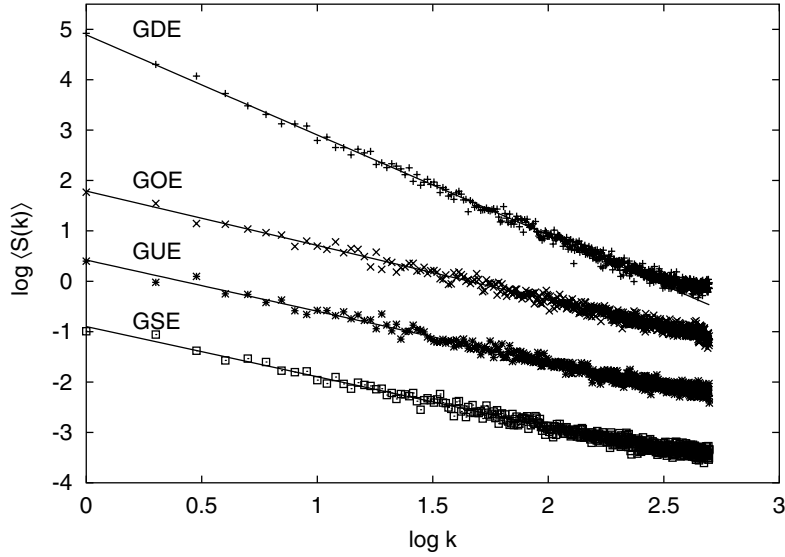


Figura 3.8: Espectro de potencias de la función  $\delta_n$  para niveles de energía GDE (sistema integrable) comparados con los de GOE, GUE y GSE (sistemas caóticos). Las gráficas para estos cuatro ensambles se han separado para evitar traslapes. Tomada de [8].

espectro de potencias  $\langle S(k) \rangle$  de  $\delta_n$  caracteriza los espectros de energía que representan a sistemas cuánticos regulares ó caóticos. En ambos casos se encuentran leyes de potencias claras  $\langle S(k) \rangle \sim 1/k^\alpha$ . Para los espectros de Poisson, el valor de la potencia es  $\alpha = 2$ , como se espera para las variables aleatorias independientes. Para espectros de núcleos atómicos a energías más altas, en regiones de densidad de alto nivel y para los conjuntos GOE, GUE y GSE, se obtiene  $\alpha = 1$ . Estos resultados sugieren la conjetura de que los sistemas cuánticos caóticos se caracterizan por un ruido  $1/f$  en las fluctuaciones del espectro de energía. Esta propiedad no es una mera estadística para medir la caoticidad del sistema. Proporciona una caracterización intrínseca de los sistemas caóticos cuánticos sin ninguna referencia a las propiedades de los conjuntos RMT. Este criterio del ruido  $1/f$  lo vamos a poder identificar en el análisis del espectro de potencias en nuestras series de fotones.

### 3.2.3. El factor de Fano y caos cuántico

En esta sección revisamos el trabajo realizado por Oberholzer et al. [16] quienes hacen un estudio del factor de Fano en cavidades microscópicas para diferenciar el caos clásico del caos cuántico.

La primera vez que se usó el factor de Fano  $F$  fue para medir las fluctuaciones del número de iones que se generan debido a la radiación ionizante que incide en un gas [7].



El factor de Fano, ver Apéndice E, se define como

$$F = \frac{\sigma_W^2}{\bar{n}}, \quad (3.14)$$

donde  $\sigma_W^2$  es la varianza y  $\bar{n}$  el promedio de las mediciones.

El factor de Fano tiene muchas aplicaciones en la medición de ruido en señales [34]. Ha sido de gran utilidad en el estudio de ruido cuántico en microcavidades de semiconductores conocidas como puntos cuánticos o billar de electrones. Estos billares de electrones son pequeñas regiones que confinan un gas de electrones 2D, libre de desorden, con dos aberturas estrechas a través de las cuales pasa una corriente [16]. Si la forma del potencial de confinamiento es suficientemente irregular, la dinámica clásica es caótica y uno puede buscar rastros de ese caos en las propiedades de la mecánica cuántica.

En el caos clásico, las trayectorias son muy sensibles a los pequeños cambios en las condiciones iniciales y están determinadas por ellas de manera única, como hemos visto en la sección 3.1.2; un cambio  $\delta x(0)$  en la coordenada inicial se amplifica exponencialmente en el tiempo:  $\delta x(t) = \delta x(0)e^{at}$ . La mecánica cuántica introduce una incertidumbre en  $\delta x(0)$  del orden de la longitud de onda de Fermi  $\lambda_F$ . Uno puede pensar en  $\delta x(0)$  como el tamaño inicial de un paquete de ondas. El paquete de ondas se extiende por todo el billar (de tamaño  $L$ ) cuando  $\delta x(t) = L$ .

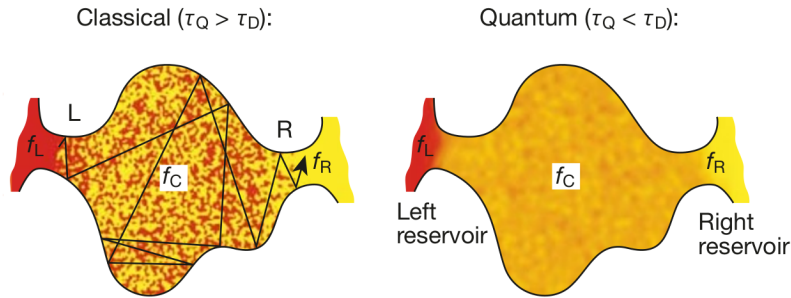


Figura 3.9: Cavidad caótica en el régimen clásico y cuántico. Diagramas de una cavidad caótica conectada por dos contactos a un reservorio izquierdo (L) y derecho (R). En el régimen clásico (izquierda) de dispersión determinista, los electrones con una dirección de momento específica dentro de la cavidad se originan en el reservorio izquierdo (rojo) ó derecho (amarillo). El movimiento caótico conduce a una función de distribución  $f_C$  dentro de la cavidad que cambia aleatoriamente entre 0 (amarillo) y 1 (rojo). Esto se ilustra con el patrón de manchas dentro de la cavidad. En el caso cuántico (derecha), la función de onda de los electrones se extiende por toda la cavidad y no podemos decidir si un electrón proviene del lado izquierdo o derecho, lo que hace que la función de distribución  $f_C$  se encuentre en el rango de entre 0 y 1. Tomada de [16].

La medición del ruido de disparo<sup>7</sup>, el cual se relaciona con el factor de Fano, en un billar de electrones permite distinguir la dispersión determinista, característica de las partículas, de la dispersión estocástica, característica de las ondas. Si la dinámica de las partículas es determinista, la posición inicial y el momento fijan toda la trayectoria, ver Figura 3.9 izquierda. En particular, determinan si la partícula se transmitirá o reflejará. Si la dinámica de onda es estocástica, la incertidumbre cuántica en la posición y el momento introduce un elemento probabilístico en la dinámica, por lo que se vuelve ruidosa en escalas de tiempo suficientemente largas, ver Figura 3.9 derecha. Dentro de la cavidad, el movimiento de los electrones es caótico. Un electrón que ingresa a la cavidad desde el contacto izquierdo se dispersa dentro de la cavidad y la deja después del tiempo de permanencia  $t_D$  ya sea en el contacto izquierdo o derecho con probabilidades determinadas por las conductancias  $G_{L,R}$ . La aleatoriedad dentro de la cavidad conduce a una resistencia total  $R$  que es simplemente la suma de las resistencias de contacto izquierda y derecha:  $R = R_L + R_R$ , ver Figura 3.10 a). La región dentro de la cavidad tiene una resistencia despreciable. Se debe tener en cuenta que  $R = R_L + R_R$  se mantiene independientemente de si el caos dentro de la cavidad es clásico o cuántico.

Se puede demostrar que el factor de Fano  $F$  se relaciona con la densidad espectral  $S$  [35] de la siguiente forma,

$$F = \frac{S}{2e|I|}, \quad (3.15)$$

siendo  $I$  el promedio de la corriente,  $e$  la carga eléctrica de los electrones,  $S$  el promedio de las fluctuaciones cuadradas de corriente,  $\langle \Delta I(f)^2 \rangle$ , por unidad de ancho de banda  $\Delta f$ ,

$$S(f) = \frac{\langle \Delta I(f)^2 \rangle}{\Delta f}. \quad (3.16)$$

Para cavidades simétricas y considerando términos a primer orden en  $\tau_Q/\tau_D$  [16], el factor de Fano queda expresado como

$$F = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\tau_Q}{\tau_D} \right), \quad (3.17)$$

done  $\tau_Q$  es el tiempo de dispersión cuántica y  $\tau_D$  es el tiempo de permanencia del electrón dentro de la cavidad. Lo que determina si la dinámica es clásica o cuántica es  $\tau_Q$ , que cualitativamente es el tiempo medio durante el cual la trayectoria clásica se pierde por difracción, es decir, es un tiempo característico del sistema. Entonces, para transitar entre

---

<sup>7</sup>El ruido de disparo se debe a la naturaleza granular de la carga del electrón manifiesta en las fluctuaciones. El electrón a pesar de ser una partícula, puede exhibir un comportamiento ondulatorio descrito por la mecánica cuántica.

las regiones del caos clásico y cuántico se debe variar en la Ecuación 3.17 el tiempo de permanencia  $\tau_D$ .

En la Figura 3.10 **a** recuadro derecho se muestra una cavidad realizada experimentalmente en un gas de electrones bidimensional [16]. Dos puntos de contacto cuánticos, definidos electrostáticamente por compuertas metálicas de corte, conectan la cavidad a los reservorios. En los dos lados laterales, los electrones están confinados por un grabado químico húmedo del gas de electrones bidimensional. Las aberturas de la cavidad se pueden alterar variando los voltajes de la compuerta. Las cavidades “abiertas” se definen cuando ambos puntos de contacto cuánticos se ajustan a una meseta de conductancia con un número entero  $N$  de modos totalmente transmisivos ( $T = 1$ ). Las desviaciones del

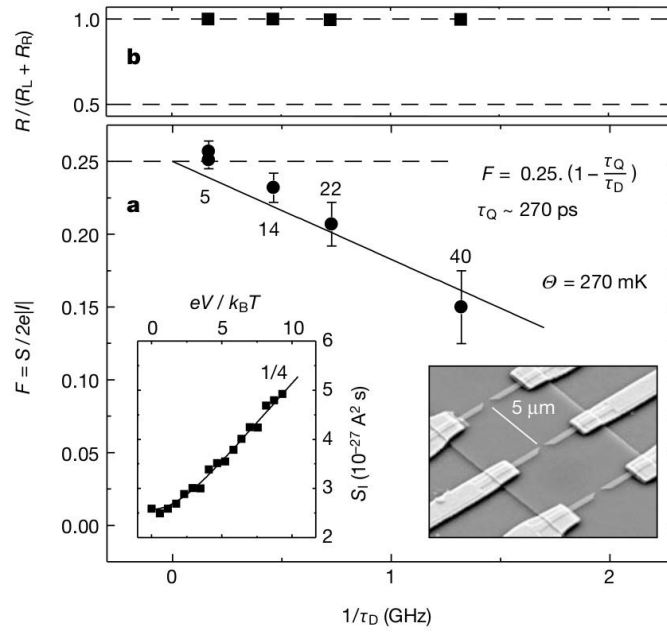


Figura 3.10: El factor de Fano  $F$  muestra una caída pronunciada por debajo del límite cuántico  $1/4$ . Un ajuste lineal de los datos a la ecuación (3.17) produce un  $t_Q$  de 270 ps. Tomada de [16].

límite cuántico  $F = 1/4$  hacia el régimen de dispersión determinista  $F < 1/4$ , descrito por la ecuación (3.17), se exploran cambiando  $\tau_D$ . Este tiempo de permanencia depende del área  $A$  de la cavidad y de las conductancias  $G_{L,R}$  de los contactos:

$$\tau_D = \frac{2e^2 m}{\pi \hbar^2} \frac{A}{G_L + G_R}. \quad (3.18)$$

Un primer experimento [16] se cambian las aperturas (conductancias) de los contactos para alterar  $\tau_D$ . En la Fig. 3.10 **a**, el factor de Fano  $F$  de una cavidad simétrica ( $N_L = N_R$ ) se representa como una función del tiempo de permanencia inverso  $\tau_D^{-1}$  para cuatro

configuraciones diferentes,  $N_L = N_R = 5, 14, 22$  y  $40$ . El recuadro izquierdo de la Figura 3.10 **a** muestra el ruido de disparo medido para  $N_L = N_R = 5$ . A medida que los contactos se abren más y el tiempo de permanencia se reduce, se observa que el ruido de disparo disminuye.

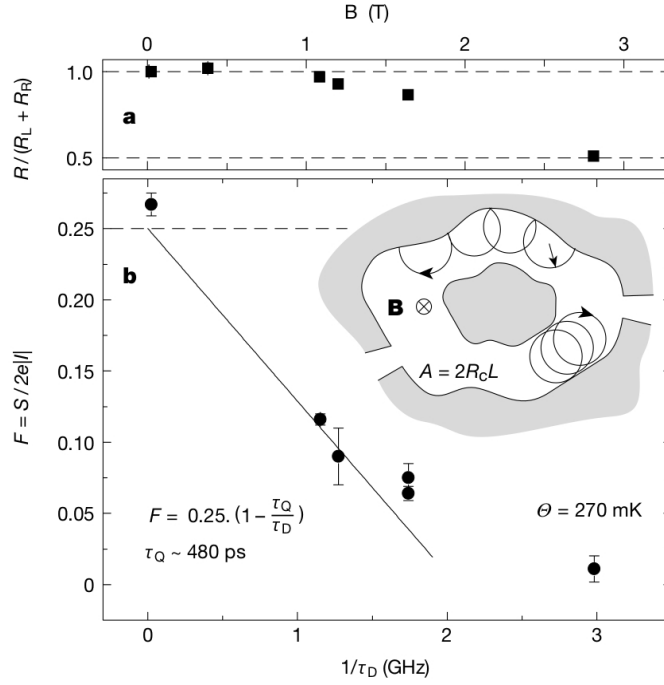


Figura 3.11: Un ajuste lineal (ecuación (3.17)) da como resultado un tiempo de dispersión cuántica  $\tau_Q \sim 485$  ps, que concuerda cualitativamente con  $\tau_Q$  obtenido de las mediciones a campo magnético cero. Nuevamente observamos una reducción del factor de Fano  $F$  conforme el tiempo de permanencia  $\tau_D$  aumenta. Tomada de [16].

Un segundo experimento para cambiar  $\tau_D$  [16] es aplicar un campo magnético perpendicular a la cavidad. Debido a que un campo magnético restringe a los electrones en órbitas circulares con el radio del ciclotrón  $R_c = mv_F/eB$  (donde  $m$  denota la masa del electrón y  $v_F$  la velocidad de Fermi), el tiempo de permanencia  $t_D$  se reduce con el aumento del campo magnético  $B$  siempre que  $R_c < L$ . Se forma un anillo de órbitas (recuadro de la Fig. 3.11 **a**.) Para campos magnéticos bajos, la dinámica electrónica dentro del anillo aún puede considerarse aleatoria (debido a las impurezas o irregularidades en la geometría de la cavidad). El área  $A$  en la ecuación (3.18) se reemplaza por  $A = 2R_c L_c$ , donde  $L_c \sim L$  es la circunferencia de la cavidad. Esto conduce a que  $\tau_D^{-1}$  sea proporcional a  $B$ .

La Figura 3.11 **b** muestra el factor de Fano  $F$  medido en función del tiempo de permanencia inverso  $\tau_D^{-1}$  en un campo magnético. Nuevamente observamos una reducción muy marcada de  $F$  al aumentar  $\tau_D^{-1}$ , mientras que la resistencia total  $R$  es aproximada-

mente igual a la resistencia en serie  $R_L + R_R$  de los dos contactos en campos inferiores ( $B < 1,2$  T), ver Fig. 3.11 **a**. Si el campo magnético aumenta más allá de 1,2 T, la relación  $R/(R_L + R_R)$  comienza a desviarse de la unidad y es igual a 1/2 en el campo magnético más alto.

Lo interesante de este estudio para nuestro proyecto de investigación, es que el factor de Fano llega a tener un valor  $F = 1/4$  para cuando los electrones tienen un ruido caótico cuántico, representando un criterio para saber si el estudio del ruido en el conteo de fotones puede adquirir caos cuántico como se ve en el Capítulo 6.

### 3.3. Caos cuántico y el experimento de la doble rendija

Como se ha mencionado con anterioridad, la RMT puede aplicarse para el estudio de los billares regulares y no regulares. En ese sentido, en la referencia [18] hacen un estudio de un billar cuántico para simular numéricamente el experimento de la doble rendija. El propósito de esto es ver la relación que existe entre el comportamiento del billar regular (y no regular) en términos de la interferencia producida en la simulación del experimento de la doble rendija. Giulio Casati y Tomas Prosen [18] llevaron a cabo una simulación

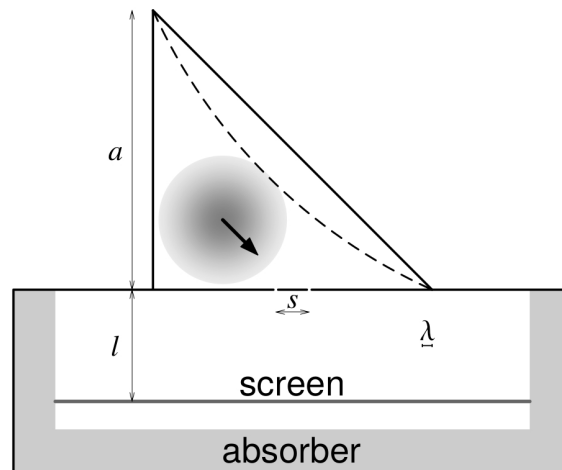


Figura 3.12: Geometría de la simulación numérica del experimento de la doble rendija. Tomada de Casati y Prosen [18].

numérica del experimento de la doble rendija, tomando como geometría del experimento la Figura 3.12. En base a esa geometría dividen esta en dos regiones, llamando a la parte superior de la figura dominio del billar y a la parte inferior región radiante.

La región del dominio del billar está conformada por un billar triangular con dos rendijas en la base de dicho triángulo, el estado inicial del sistema en  $t = 0$  es un paquete de ondas Gaussiano centrado en la parte sombreada de la Figura 3.12 con una velocidad

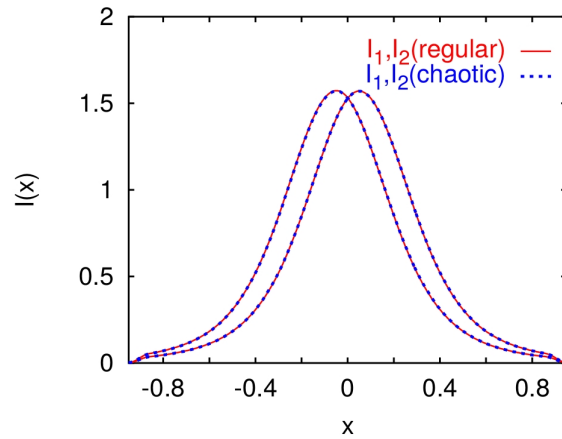


Figura 3.13: Intensidad obtenida para la simulación del experimento de la doble rendija pero con una (ú otra) tapada. Tomada de Casati y Prosen [18].

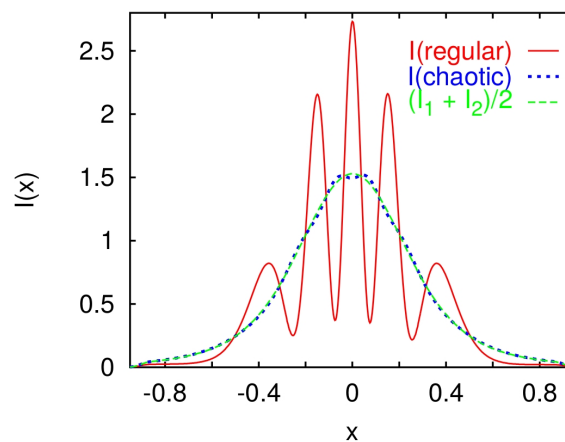


Figura 3.14: Intensidad obtenida para la simulación del experimento de la doble rendija. Se observa que para el billar regular existe interferencia mientras que para el caótico no la hay. Tomada de Casati y Prosen [18].

$v$  en dirección al punto medio entre las dos rendijas.

Por otra parte la región radiante está compuesta por una pantalla que se encuentra posicionada a una distancia  $l$  de la doble rendija y una capa absorbente que rodea esta región. Así entonces, la simulación consiste en dejar evolucionar temporalmente la función de onda y una pequeña parte del flujo de probabilidad escapará del billar y esta se irradiará por las rendijas. La probabilidad radiada es registrada en la pantalla, y el experimento llega a su fin cuando la probabilidad de que la partícula permanezca en el billar sea muy pequeña.

De acuerdo con lo anterior, los resultados de la simulación arrojan las curvas de las Figuras 3.13 y 3.14. Para el caso de la Figura 3.13 se representa el experimento de una

rendija (tapando una y dejando la otra abierta, una curva, y viceversa, la curva restante) en el cual obtienen dos curvas. La curva roja representa el caso de un billar regular, es decir el billar triangular mostrado en la Figura 3.12 y la curva azul corresponde a un billar no regular (caótico) que es el mismo billar triangular pero cambiando la hipotenusa por un arco circular (líneas punteadas), Figura 3.12.

La Figura 3.14 muestra los resultados obtenidos para el experimento de la doble rendija donde de igual manera se tomaron dos geometrías correspondientes a un billar regular y un billar caótico. La curva roja representa la intensidad total después del experimento de la doble rendija para el billar regular y la curva azul corresponde al billar caótico. Además se tiene una tercer curva correspondiente al promedio de las intensidades que obtuvieron para la simulación del experimento de una sola rendija.

La conclusión de Casati y Prosen es que para la simulación del experimento de una rendija se obtiene una distribución unimodal simple para las dos geometrías del billar utilizadas. Por otra parte, para el experimento de la doble rendija se obtienen franjas de interferencia que están de acuerdo con el experimento habitual de la doble rendija con ondas planas. Entonces, si el billar cuántico es clásicamente integrable se pueden observar franjas de interferencia en concordancia con el experimento de la doble rendija realizado con ondas planas. Sin embargo, para el caso en que el billar es caótico, las franjas de interferencia desaparecen completamente y la intensidad observada es la suma de las intensidades obtenidas para una sola rendija. Los resultados obtenidos por Casati y Prosen muestran la manifestación del caos clásico en mecánica cuántica.

El artículo de Casati y Prosen establece una relación entre el comportamiento ondulatorio y corpuscular que exhiben los sistemas integrables y los sistemas cuánticos caóticos, respectivamente. Hay un comportamiento ondulatorio para cavidades que se relacionan con sistemas cuánticos integrables, mientras que para los sistemas cuánticos caóticos la visibilidad queda prácticamente nula. Esto podría ser un indicio de estudiar la visibilidad en la transición de los sistemas integrables a sistemas cuánticos caóticos en el contexto de sus espectros energéticos como lo aborda la referencia [15] y que discutimos a continuación.

### 3.4. Caos cuántico y la visibilidad

En el artículo [15] se hace un estudio de los estados nucleares excitados debido a la interacción cuadrupolo-cuadrupolo que se originan en el núcleo del  $^{48}\text{Ca}$ , donde la distribución de energías exhibe un patrón de interferencia visible el cual depende de la interacción mencionada basándose en analogía con la óptica, la visibilidad de interferencia se relaciona con la pureza de los estados. Muestran que las fluctuaciones asociadas al caos cuántico tienen como origen la coherencia remanente cuántica con una visibilidad del 5%.

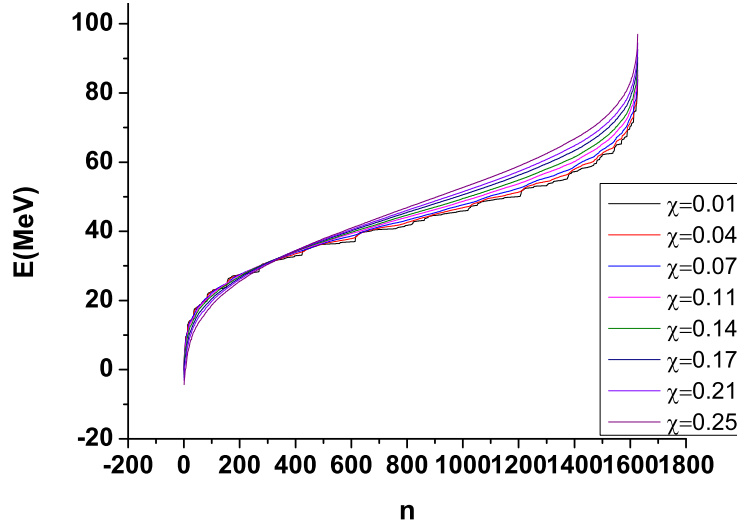


Figura 3.15: Energías de los 1627 estados con  $J = 3+$  en el  $^{48}\text{Ca}$  con dependencia del parámetro  $\chi$ . Podemos observar que para valores bajos de  $\chi$  las curvas tienen saltos muy remarcados. Tomada de [15].

La idea es diagonalizar un hamiltoniano expresado como

$$\hat{H}_{SM} = \hat{H}_m - \chi \hat{Q} \cdot \hat{Q} + g \hat{P} \cdot \hat{P}, \quad (3.19)$$

donde  $\hat{H}_m$  es la parte monopolar asociada a la interacción del campo medio del oscilador armónico,  $\hat{P} \cdot \hat{P}$  es la parte de interacción por pares con constante de acoplamiento  $g = 0,46$ ,  $\hat{Q} \cdot \hat{Q}$  es la interacción cuadrupolo-cuadrupolo con parámetro de interacción  $\chi$  el cual se varía para acceder a distintas configuraciones de niveles que se analizan para visualizar como es la transición de un sistema integrable cuántico a caótico cuántico. Esta interacción es aplicable al núcleo del  $^{48}\text{Ca}$  en la capa  $fp$ . La Figura 3.15 muestra la secuencia de energías para cada diagonalización del hamiltoniano (3.19) que difiere de la intensidad de la fuerza cuadrupolar modulada por el parámetro  $\chi$ . En la Figura 3.16 se muestra la distribución de los niveles de energía para cuatro intensidades de la interacción cuadrupolar: (a)  $\chi = 0,01$ , (b)  $\chi = 0,04$ , (c)  $\chi = 0,07$  y (d)  $\chi = 0,25$ .

En la interacción cuadrupolar más baja,  $\chi = 0,01$ , existen estados que comparten propiedades en común, lo que se interpreta como interferencia; la distribución de las energías en la Figura 3.16 tiene la forma de un patrón de interferencia. La diferencia que existe entre las cuatro gráficas de la Figura 3.16 radica en sus respectivos grados de coherencia la cual decrece a partir de la Figura 3.16 a. Cuando la fuerza cuadrupolar se incrementa hasta un valor considerable, la interferencia (muy marcada en la Figura 3.15 a) se reduce a fluctuaciones, ver Figura 3.16 d. Haciendo una analogía con la óptica, la diferencia



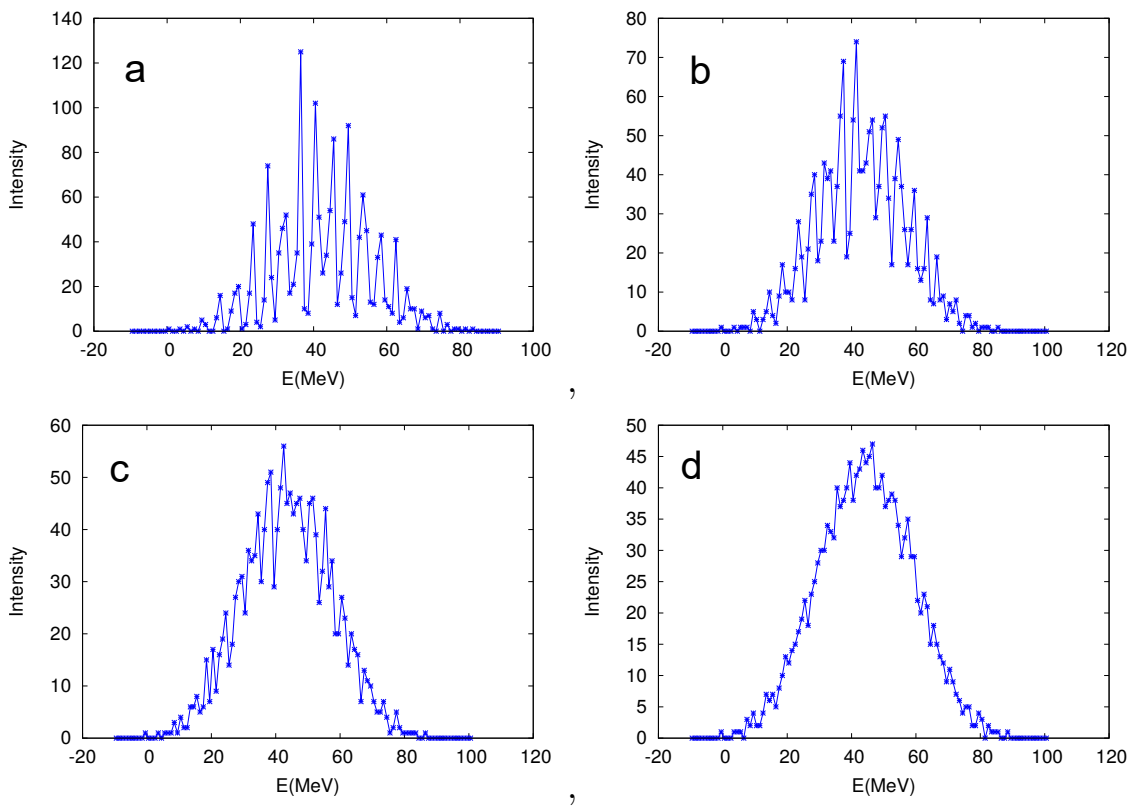


Figura 3.16: Gráficas de distribución de energía para cuatro secuencias de energías mostradas en la Figura 3.15; a)  $\chi = 0,01$ , b)  $\chi = 0,04$ , c)  $\chi = 0,07$ , d)  $\chi = 0,25$ . En a) se tiene la coherencia más alta, en b) se tiene la coherencia más baja. Tomada de [15].

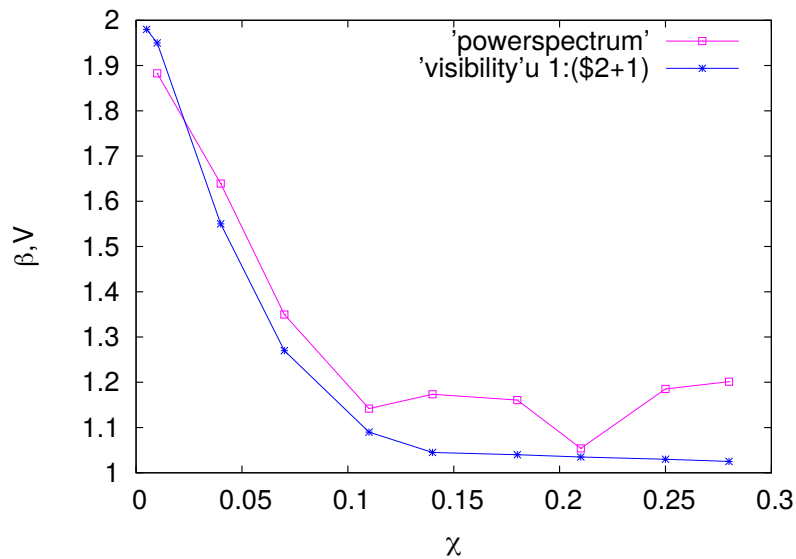


Figura 3.17: Parámetro de espectros de potencia y visibilidad para series temporales de energía dependientes del parámetro cuadrupolo-cuadrupolo  $\chi$ . Para poder comparar, la visibilidad se incrementó en uno. Tomada de [15].

entre un estado coherente y uno no coherente se puede expresar con su ancho espectral. Tal ancho espectral es inversamente proporcional a la longitud de coherencia. Coherencias más grandes garantiza interferencias más grandes y un estado más puro. En este modelo nuclear sucede algo similar. Esta analogía óptica permite definir la visibilidad de la distribución de energías:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (3.20)$$

donde  $I_{max}$  y  $I_{min}$  se refiere al número de conteos de un pico a un valle en una distribución. En la Figura 3.17 podemos observar un análisis del espectro de potencias en función de  $\chi$ . Para valores bajos de  $\chi$ , el ruido parece ser  $1/f^2$ , característico de un sistema integrable, y evoluciona a  $1/f$ , característico de sistemas caóticos, a medida que aumenta la interacción. Esto es muy congruente con lo que se vio en la sección 3.2.2. En el análisis de nuestras series de fotones emplearemos el espectro de potencias para determinar la ley de potencias que las caracterizan, encontrando así indicios de caos cuántico con el ruido  $1/f$ .

## Capítulo 4

# Experimento pensado de acción retardada de Wheeler

En este capítulo se revisa las referencias [2, 4] que exponen la realización del experimento de acción retardada de Wheeler para una mezcla estadística y una superposición de estados de onda y partícula, concepto que en nuestro trabajo de investigación conectamos con el caos cuántico.

La interferencia que las partículas individuales pueden presentar, por ejemplo en el experimento de Young, se le atribuye a que la partícula pasó por ambas trayectorias, lo cual es incompatible con nuestro sentido común: una partícula sigue una ruta u otra, pero no ambas. Varios experimentos de interferencia de un solo fotón han confirmado la dualidad onda-partícula de la luz. Para comprender su significado, considere el experimento de interferencia de un solo fotón esbozado en la Figura 4.1 la cual ilustra muy bien la dualidad onda-partícula del experimento pensado de acción retardada de Wheeler. Este involucra dos configuraciones de un interferómetro Mach-Zehnder, ver Apéndice C, las cuales se nombran como configuración abierta y configuración cerrada: cuando el interferómetro está cerrado (es decir, las dos vías se recombinan) se observa la interferencia<sup>1</sup>; cuando permanece abierto, se mide la trayectoria seguida por el fotón<sup>2</sup>.

En la configuración de interferómetro cerrado, un pulso de un solo fotón se divide por un primer divisor de haz  $BS_{\text{input}}$  de un interferómetro Mach-Zehnder y viaja a través de él hasta un segundo divisor  $BS_{\text{output}}$  que recombina los dos brazos interferentes, ver Figura 4.1. Cuando se varía el desplazamiento de fase  $\Phi$  entre los dos brazos, la interferencia aparece como una modulación de las probabilidades de detección en los puertos de salida

---

<sup>1</sup>También se le conoce como **diferencia de trayectoria**.

<sup>2</sup>En la literatura, a esto se le conoce como el **which-way**.

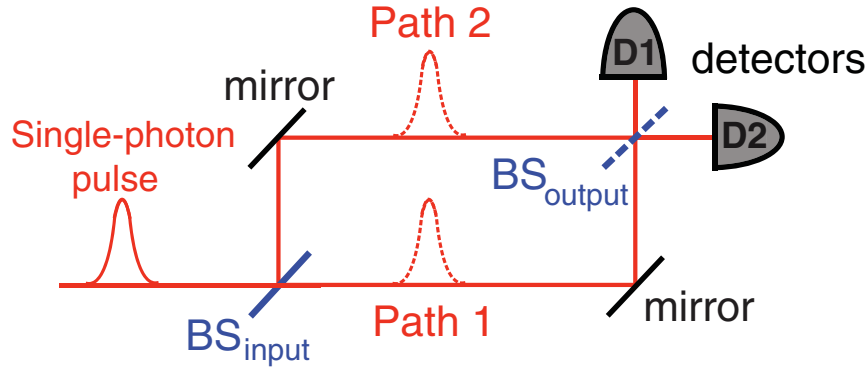


Figura 4.1: Propuesta del experimento de acción retardada de Wheeler. La elección de introducir ó eliminar el divisor  $BS_{\text{output}}$  (configuración cerrada ó abierta) se realiza sólo después del paso del fotón en el divisor  $BS_{\text{input}}$ , de modo que el fotón que ingresa al interferómetro “no puede saber” cuál de los dos experimentos complementarios (*diferencia de trayectoria* versus *which-way*) se realizará en la salida. Tomada de [2].

1 y 2, respectivamente, como  $\cos^2\Phi$  y  $\sin^2\Phi$ . Este resultado es el esperado para una onda, y como señaló Wheeler, “es evidencia de que cada cuanto de luz que se detecta ha llegado por ambas rutas” [36]. Si se elimina el divisor  $BS_{\text{output}}$  (la configuración abierta), cada detector  $D_1$  o  $D_2$  en los puertos de salida se asocia con una ruta determinada del interferómetro y, siempre que se utilicen pulsos de luz de fotón único, un contador va apagado, ó el otro, lo cual nos dice que el fotón ha viajado sólo por una ruta. Todo lo expresado en este párrafo es acorde a lo dicho por Bohr [37]: el comportamiento de un sistema cuántico está determinado por el tipo de medición realizada en él. Para las dos medidas complementarias consideradas aquí, los escenarios experimentales correspondientes son mutuamente excluyentes; es decir,  $BS_{\text{output}}$  no puede estar presente y ausente simultáneamente.

Como se ha mencionado, la complementariedad de Bohr nos dice: una vez seleccionada una propiedad del fotón, la otra queda excluida. Esto podría plantear que al ingreso del fotón en el interferómetro Mach-Zehnder, el fotón recibió alguna información oculta que determinó su comportamiento ondulatorio tal que puede producir interferencia. Para descartar esa interpretación de la complementariedad de la mecánica cuántica, Wheeler propuso el experimento pensado de “acción retardada” en el que la elección de qué propiedad se observará se realiza después de que el fotón ha pasado el divisor  $BS_{\text{input}}$ : “Por lo tanto, se decide que el fotón habrá llegado por una ruta o por ambas rutas después de haber hecho su viaje” [36].

Todo esto conforma la idea principal del experimento de acción retardada de Wheeler pero en la sección 4.2 se ve que la posibilidad de poner al divisor en un estado de superposición de ausente y presente es posible al relacionarlo con los estados de polarización del fotón.

## 4.1. Realización del experimento de acción retardada de Wheeler

La realización del experimento pensado de acción retardada de Wheeler la tomamos de la referencia [2] la cual se encuentra en un esquema cercano a la propuesta ideal como lo explicado para la Figura 4.1. La elección de insertar o eliminar el divisor  $BS_{\text{output}}$  se decide aleatoriamente mediante el uso de un generador de números aleatorios cuánticos (QRNG, quantum random number generator). El QRNG está ubicado cerca del  $BS_{\text{output}}$  y lo suficientemente lejos de la entrada para que no haya información acerca de la elección que pueda alcanzar el fotón antes de que pase por  $BS_{\text{output}}$ .

La fuente de fotón individual, se basa en la fotoluminiscencia pulsada, ópticamente excitada de un solo centro de color de vacancia de nitrógeno (N-V) en un nanocristal de diamante. Para detalles de la generación de estos fotones ver la referencia [38].

La acción retardada se implementa de la siguiente manera. Los fotones individuales linealmente polarizados se envían mediante un divisor  $BS_{\text{input}}$  polarizado a través de un interferómetro (48 m de longitud) con dos trayectos separados espacialmente con polarizaciones ortogonales S y P, ver Figura 4.2. El divisor  $BS_{\text{output}}$  móvil consiste en la combinación de una lámina de media onda (HWP, half wave plate), un divisor de haz polarizante  $BS'$ , un modulador electro-óptico (EOM, electro-optical modulator) con su eje óptico orientado a 22,5 grados de las polarizaciones de entrada y un prisma de Wollaston. Los dos haces del interferómetro, que están separados espacialmente y polarizados ortogonalmente, se superponen primero con el  $BS'$  pero aún pueden identificarse sin ambigüedades por su polarización. Luego, la elección entre las dos configuraciones del interferómetro, cerrada o abierta, se realiza con el EOM, que se puede cambiar entre dos configuraciones diferentes en un lapso de 40 ns por medio de un controlador rápido: no se aplica voltaje ( $V = 0$ ) al EOM, ó se le aplica voltaje de media onda  $V_{\pi}$ . En el primer caso,  $V_{\text{EOM}} = 0$ , la situación corresponde a la eliminación del  $BS_{\text{output}}$  y las dos rutas permanecen sin combinar (configuración abierta). Debido a que las polarizaciones S y P originales de las dos rutas están orientadas a lo largo de los estados propios de polarización del prisma, cada “clic” de un detector  $D_1$  o  $D_2$  colocado en los puertos de salida se asocia con una ruta específica (ruta 1 o ruta 2, respectivamente). En el segundo caso (interferómetro cerrado), se aplica

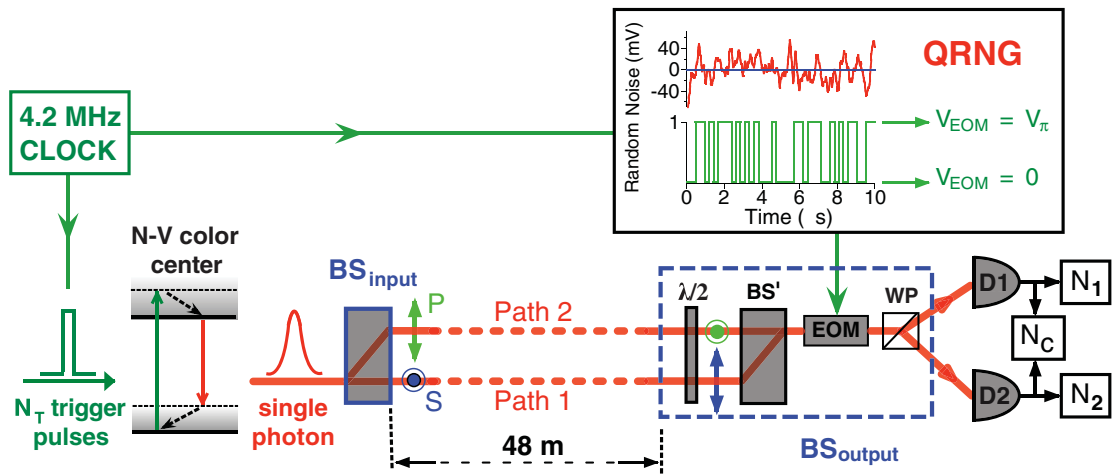


Figura 4.2: Realización experimental del experimento pensado de Wheeler. Los fotones individuales emitidos por un solo centro de color N-V se envían a través de un interferómetro polarizante colocado a 48 m, equivalente a un tiempo de vuelo de aproximadamente 160 ns. Un número aleatorio binario 0 ó 1, generado por el QRNG, impulsa el voltaje EOM entre  $V = 0$  y  $V = V_\pi$  en un lapso de 40 ns, después de un retardo electrónico de 80 ns. Se utilizan dos señales sincronizadas del reloj para activar la emisión de fotón único y el QRNG. En el marco de referencia del laboratorio, la elección aleatoria entre la configuración abierta y la cerrada se realiza simultáneamente con la entrada del fotón en el interferómetro. Tomada de [2].

el voltaje  $V_{\text{EOM}} = V_{\pi}$ , entonces el EOM es equivalente a una lámina de media onda que rota las polarizaciones de entrada en un ángulo de 45 grados; luego, el prisma recombina las dos polarizaciones giradas que han viajado a lo largo de diferentes trayectorias ópticas y aparece interferencia en los dos puertos de salida.

El comportamiento de un solo fotón se prueba primero utilizando los dos detectores de salida que alimentan los conteos individuales y de coincidencia sin la presencia de  $\text{BS}_{\text{output}}$  (configuración abierta). Considere una ejecución correspondiente a  $N_T$  pulsos trigger aplicados al emisor, con  $N_1$  recuentos detectados en la ruta 1 del interferómetro por  $D_1$ ,  $N_2$  recuentos detectados en la ruta 2 por  $D_2$ , y  $N_C$  coincidencias detectadas correspondientes a fotodetecciones conjuntas en  $D_1$  y  $D_2$  (Figura 4.2). Cualquier descripción en la que la luz se trate como una onda clásica, predice que estos números de conteos deben obedecer a la desigualdad

$$g^{(2)} = \frac{N_C \times N_T}{N_1 \times N_2} \geq 1, \quad (4.1)$$

como se dijo en el Capítulo 2. Para un paquete de onda de fotón único, la óptica cuántica predice una anticorrelación perfecta (es decir,  $g^{(2)} = 0$ ) de acuerdo con la imagen intuitiva de que una sola partícula no puede detectarse simultáneamente en las dos trayectorias del interferómetro. En este experimento Jacques et al [2]. midieron un valor de  $g^{(2)} = 0,12 \pm 0,01$ , por lo que se está cerca del régimen de fotón individual.

Con pulsos de fotón individual en la configuración abierta, se espera que cada detector  $D_1$  y  $D_2$  esté asociado de manera inequívoca con una ruta determinada del interferómetro. Para probar este punto, se evalúa el parámetro de información “which-way”  $I = (N_1 - N_2) / (N_1 + N_2)$  bloqueando una ruta (por ejemplo, la Ruta 2) y midiendo la tasas de conteos en  $D_1$  y  $D_2$ . Se obtiene un valor de  $I$  superior a 0.99. Se obtiene el mismo valor cuando se bloquea la otra ruta (por ejemplo, la ruta 1). En la configuración abierta, se tiene una medida casi ideal del “which-way”.

El experimento de acción retardada en sí se realiza con el EOM prendiendo y apagando el voltaje aleatoriamente para cada fotón enviado al interferómetro, lo que corresponde a una elección aleatoria entre las configuraciones abierta y cerrada. El desplazamiento de fase  $\Phi$  entre los dos brazos del interferómetro se varía inclinando el segundo divisor de haz polarizante  $\text{BS}'$  con un actuador piezoeléctrico (PZT, piezoelectric actuator). En la configuración cerrada, se observa interferencia con una visibilidad de 0,94, ver Figura 4.3 **A**. En la configuración abierta, la interferencia desaparece por completo, como lo demuestra la ausencia de modulación en los dos puertos de salida cuando se varía el desplazamiento de fase  $\Phi$ , ver Figura 4.3 **B**. En la siguiente sección vemos que los resultados mostrados en la Figuras 4.3 **A** y **B** son casos extremos de la versión cuántica del experimento pensado de acción retardada de Wheeler.

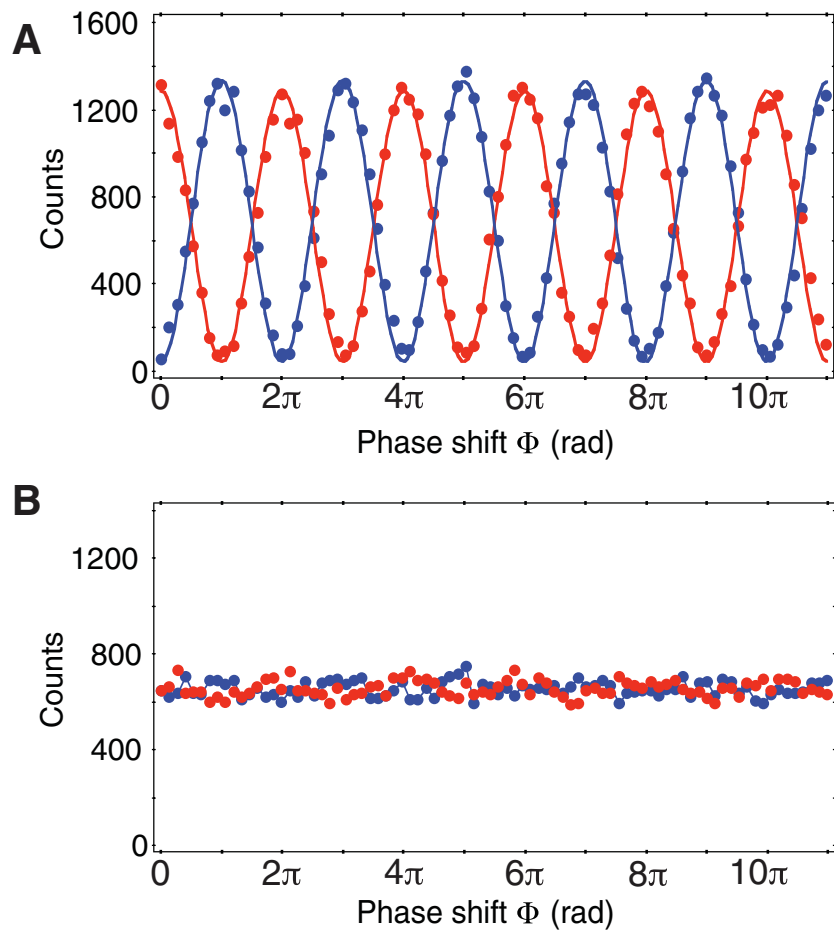


Figura 4.3: Resultados del experimento de acción retardada. El desplazamiento de fase  $\Phi$  (indicado con origen arbitrario) se varía inclinando BS'. (A) Casos en los que se aplica  $V_\pi$  en la EOM (configuración cerrada); se obtiene interferencia con un 94 por ciento de visibilidad. (B) Casos cuando no se aplica voltaje en el EOM (configuración abierta); no se observa interferencia. Tomada de [2].



La realización del experimento pensado de acción retardada de Wheeler realizada por Jacques et al. [2], que es la que acabamos de describir en esta sección, demuestra que el comportamiento del fotón en el interferómetro depende de la elección del observable que se mide, incluso cuando esa elección se hace en una posición y un momento en que está separada de la entrada del fotón en el interferómetro por un intervalo espacial. La razón fundamental detrás de la acción retardada es evitar un posible vínculo causal entre la configuración experimental y el comportamiento del fotón: el fotón no debería “saber” de antemano si tiene que comportarse como una partícula o como una onda.

## 4.2. Experimento de acción retardada de Wheeler (superposición cuántica onda-partícula)

En la sección anterior vimos que la acción de insertar o quitar  $BS_{\text{output}}$  se controla clásicamente mediante un generador de números aleatorios; un diagrama equivalente del experimento de acción retardada de Wheeler de la Figura 4.1, es el que se ilustra en la Figura 4.4 **a**, en esta versión las compuertas Hadamard, ver ApéndiceD, juegan el papel del divisor de haz. En esta sección revisamos las referencias [3,4] las cuales analizan qué sucede si reemplazamos este control clásico con un dispositivo cuántico. Esto nos permite extender el experimento de acción retardada de Wheeler a una versión cuántica.

Los diagramas lógicos de los experimentos de acción retardada de Wheeler “clásica” y “cuántica” se muestran en la Figura 4.4, en **a** correspondiente al caso clásico y en **b** al caso cuántico.

En esta versión cuántica del experimento de Wheeler, lo interesante es que se observa la transformación entre las propiedades de onda y partícula de estos fotones. Se visualiza la superposición cuántica de las propiedades de onda y partícula seleccionando el dispositivo cuántico de detección en el estado de superposición en lugar de los estados propios (en un interferómetro Mach-Zehnder (MZI), los estados propios son la presencia o ausencia del segundo divisor de haz (BS)). En [4] también muestra que la superposición cuántica de onda-partícula puede ser muy diferente de la mezcla clásica comparando sus franjas de interferencia en diversas condiciones. Esto se ve más adelante.

En el experimento de Jian-Shun [4], que es el que describimos en esta sección, toman el estado de polarización como el ancilla. Los fotones polarizados horizontalmente  $|H\rangle$  pueden pasar a través de un segundo divisor de haz (configuración del MZI cerrada), mientras que en los fotones polarizados verticalmente  $|V\rangle$  no existe un segundo divisor (configuración del MZI abierta). Ambas configuraciones es lo que se nombra como divisor de haz controlado por polarización (pc-BS, polarization-controlled beamsplitter). Como

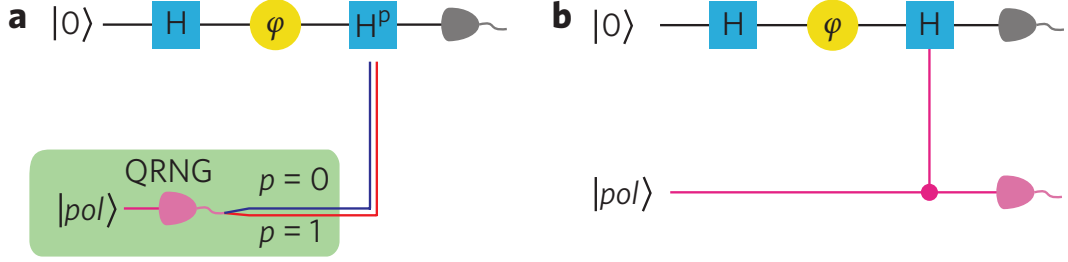


Figura 4.4: Diagramas lógicos de los experimentos clásicos (a) y cuánticos (b) de elección retardada de Wheeler. La primera compuerta H (Hadamard) corresponde a la división de los dos caminos, después de lo cual se agrega una fase  $\varphi$ . La segunda compuerta H corresponde al dispositivo de detección, que está controlado por un ancilla. Las configuraciones difieren de la siguiente manera. En **a**, el ancilla se establece primero sobre la base de  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$  como  $|\text{pol}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle + |H\rangle)$  para generar una serie de números aleatorios,  $p$ , y estos números se utilizan para controlar la segunda compuerta H. En **b**, el ancilla  $|\text{pol}\rangle = \sin\alpha |V\rangle + \cos\alpha |H\rangle$  se usa directamente para controlar la segunda compuerta H, colocando de esta manera a la compuerta en un estado de superposición cuántica de producir y no producir franjas de interferencia. Tomada de [4].

se estudia en la referencia [3] (Figura 4.4 **b**), cuando se elige el estado auxiliar  $|\text{pol}\rangle = \sin\alpha |V\rangle + \cos\alpha |H\rangle$ , el estado total del fotón será

$$|\Psi\rangle = \sin\alpha |\text{particle}\rangle|V\rangle + \cos\alpha |\text{wave}\rangle|H\rangle \quad (4.2)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de polarización de  $|\text{pol}\rangle$ ,  $|\text{particle}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle)$  es el estado de partícula, y  $|\text{wave}\rangle = e^{i(\varphi/2)}\cos(\varphi/2)|0\rangle - i\sin(\varphi/2)|1\rangle$  es el estado de onda. Como en la configuración habitual de MZI,  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  son los estados del camino del fotón y  $\varphi$  es la diferencia de fase entre estos dos caminos.

Como se enfatiza en [3], *los conceptos clásicos de partícula y onda* no se traducen perfectamente al lenguaje cuántico. Se adoptan las definiciones operativas de “partícula” y “onda” como la “incapacidad” y “capacidad” para producir interferencia, respectivamente. En el caso de un estado completamente de partículas, es decir, cuando  $\alpha = \pi/2$ — se observa el antibunching de los fotones individuales ( $g^{(2)}(0)$  debe ser 0) entre las trayectorias de  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  que reconfirma la propiedad de partícula de los fotones. Para los casos intermedios, incluso en el caso de estado de onda completo, todas las  $g^{(2)}(0)$  permanecen en 0. Esto tiene sentido porque la interferencia cuántica se mide clic por clic en el detector.

Ahora, si se mantienen los diferentes estados de polarización en la Ecuación (4.2) como etiquetas artificiales para las propiedades de onda y partícula, se puede derivar la mezcla clásica de estas dos propiedades simplemente haciendo la traza de la parte de polarización

del operador de densidad asociado a la Ecuación 4.2, resultando en

$$\rho_c = \sin^2\alpha |particle\rangle\langle particle| + \cos^2\alpha |wave\rangle\langle wave|. \quad (4.3)$$

Podemos observar que en la ecuación 4.2 para el caso de partícula siempre se acompaña por el estado de polarización  $|V\rangle$  y para el caso de onda por  $|H\rangle$ , estas etiquetas se pueden eliminar, por lo tanto, la superposición cuántica de los estados de onda y partícula queda como

$$|\Psi_q\rangle = \sin\alpha |particle\rangle + \cos\alpha |wave\rangle. \quad (4.4)$$

La configuración experimental se muestra en la Figura 4.5, construida para operar de acuerdo con la Figura 4.4 **b**. Esta configuración se puede dividir en cuatro partes:

- Primera parte, los fotones individuales se generan; para ver los detalles de esta generación de fotones individuales ver la referencia [4].
- Segunda parte. Consta de los MZI cerrado y abierto correspondientes a los dos estados propios del dispositivo de detección. El divisor BD1 (beam divider), que se asocia con la primera compuerta H en la Figura 4.4 **b**, divide la luz por igual en dos trayectorias con polarizaciones horizontales y verticales. Debido a la diferencia de polarización, se puede recorrer la fase  $\varphi$  simplemente inclinando las placas de cuarzo antes del BD1. El segundo divisor de haz (correspondiente a la segunda compuerta H) en el MZI cerrado (abierto) es proporcionado por BD3, BD4 y HWP2 (HWP1). En la Figura 4.5, ‘Layer’ representa un bosquejo detallado de la capa de partícula y la capa de onda. Para HWP2 en la capa de onda, la dirección del eje óptico ( $\theta$ ) se establece en 22,5 y aparece la interferencia, lo que demuestra la propiedad de onda del fotón (MZI cerrado). Para HWP1 en la capa de partícula ( $\theta = 0$  grados), el MZI está abierto. Esta configuración muestra la propiedad de partícula del fotón.
- Tercera parte. Contempla el aparato de control cuántico. Los fotones individuales se preparan con el estado de polarización  $|\text{pol}\rangle$  antes del BD2, y luego se controlan mediante la polarización para pasar a través de la capa de partícula o la capa de onda. Cada capa corresponde a un estado propio del dispositivo de detección. Las dos capas son luego combinadas por BD5, con los estados de los fotones exactamente coincidentes con la Ecuación (4.2).
- La última parte de la configuración realiza la operación de detección. Para la mezcla clásica onda-partícula, se cuenta directamente los números de fotones de la ruta 0

(Path 0) y la ruta 1 (Path 1) y se calcula la probabilidad de encontrar un fotón en la ruta 1. Para la superposición cuántica de onda-partícula, se inserta un polarizador a 45 grados para post-seleccionar los términos  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|presence\rangle + |absence\rangle)$ , luego se cuenta y se calcula la probabilidad.

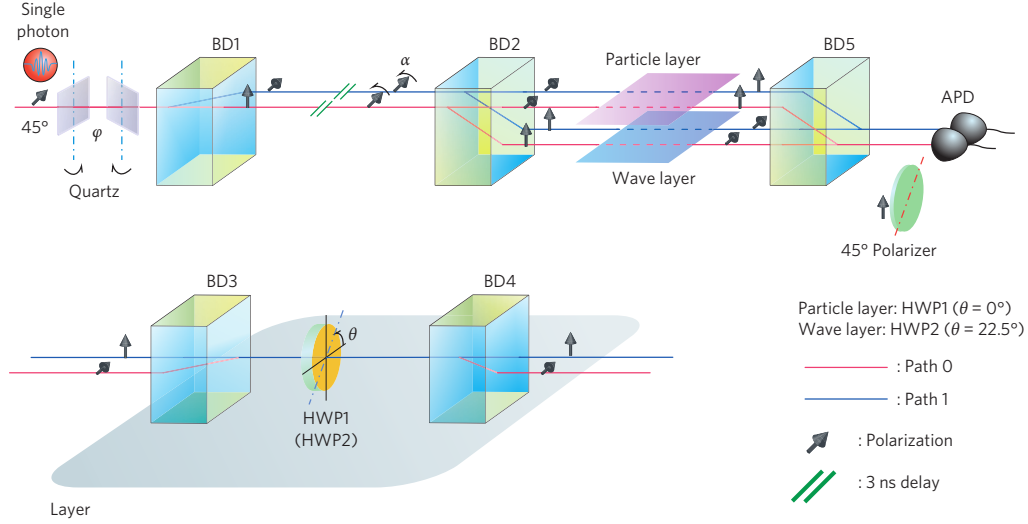


Figura 4.5: Configuración experimental. El experimento incluye cuatro partes: generación de fotones individuales, el MZI abierto (cerrado) (quarzo, BD1, BD3, HWP1 (HWP2), BD4), los aparatos de control cuántico ( $\alpha$ , BD2, **Particle layer**, **Wave layer**, BD5), y los aparatos de detección (polarizador móvil, APDs, contadores y analizadores de tiempo los cuales no se muestran).

**Nota:** las flechas se usan para representar la polarización de los fotones, y los HWPs no se muestran; ‘Layer’ en la figura de más abajo representa un panorama más detallado de las capas de partícula y onda. Tomada de [4].

Los resultados se muestran en la Figura 4.6 **a-h**, donde  $\alpha$  toma los valores de  $j\pi/8$  ( $j = 0-7$ ). Los círculos rojos son el resultado de la mezcla clásica de ondas y partículas, y las líneas rojas muestran el ajuste teórico correspondiente. La fórmula teórica se deriva de la Ecuación (4.3) calculando la probabilidad de que los fotones tomen el camino 1. Como era de esperar, en la Figura 4.6 **a** todos los fotones atraviesan la capa de ondas, por lo que se observa una oscilación con una visibilidad de 0.957. En la Figura 4.6 **e**, todos los fotones atraviesan la capa de partícula, por lo que la probabilidad detectada permanece  $\sim 0.5$  al variar  $\varphi$ , con una visibilidad de 0.016. Se mide la distinción<sup>3</sup> de la ruta 1 para que sea  $I = 0.973 \pm 0.003$ , la cual se calcula como

$$I = \frac{|N_{01} - N_{11}|}{N_{01} + N_{11}} \quad (4.5)$$

<sup>3</sup>Conocida también como el “which way”.

donde  $N_{ij}$  ( $i, j = 0,1$ ) es el número de fotones detectados de la ruta  $j$  cuando la ruta  $i$  está desbloqueada (y la otra ruta bloqueada). Se puede observar una mezcla entre la Figura 4.6 **a** y la Figura 4.6 **e** en los casos intermedios a estas dos. Las visibilidades se reducen, pero los centros (es decir, la media del máximo y mínimo) y las formas de las curvas no cambian.

Sin embargo, la situación es diferente para la superposición cuántica onda-partícula, como lo muestran los círculos azules en la Figura 4.6. Las líneas azules muestran el ajuste teórico correspondiente, derivado de la Ecuación (4.4). Las gráficas de la Figura 4.6 son diferentes entre los casos de superposición cuántica y de mezcla clásica; excepto en los casos de  $\alpha = 0$  y  $\pi/2$ , en los que todos los fotones atraviesan la capa de onda ó la capa de partícula. Las gráficas de la Figura 4.6 **a** y **e** son las mismas que las de la Figura 4.3 (para un solo camino.)

La Ecuación (4.4) muestra una superposición cuántica de los estados de onda y partícula del fotón, en contraposición a una mezcla estadística clásica de los dos estados. Los resultados experimentales son completamente diferente de la mezcla clásica, porque existe una interferencia cuántica entre las propiedades de las ondas y las partículas. Este fenómeno aporta un significado completamente nuevo al concepto de dualidad onda-partícula.

Una de las conclusiones de esta sección [4] es: la aplicación de un dispositivo de detección cuántico conduce a una reinterpretación del principio de complementariedad [3], porque el dispositivo de detección debe ser clásico según el concepto regular. Contrariamente a la opinión de Bohr, no se tiene que cambiar la configuración experimental para medir propiedades complementarias; se pueden medir ambas propiedades en un solo experimento, siempre que un componente del aparato sea un objeto cuántico en un estado de superposición.

En resumen, se ha observado la dualidad cuántica onda-partícula de estos fotones y se han comparado los resultados con los de una mezcla clásica onda-partícula. La superposición cuántica onda-partícula es distinta de la mezcla clásica debido a la interferencia cuántica entre las propiedades de onda y partícula del fotón. Estas dos propiedades pueden existir en una superposición cuántica.

Hasta aquí sólo se ha demostrado la existencia de la superposición de onda-partícula sin relación alguna con el caos cuántico. La manera en que analizamos nuestras series de fotones en el Capítulo 6 nos permite inferir que el caos cuántico se puede interpretar como la superposición de estados de onda y partícula.

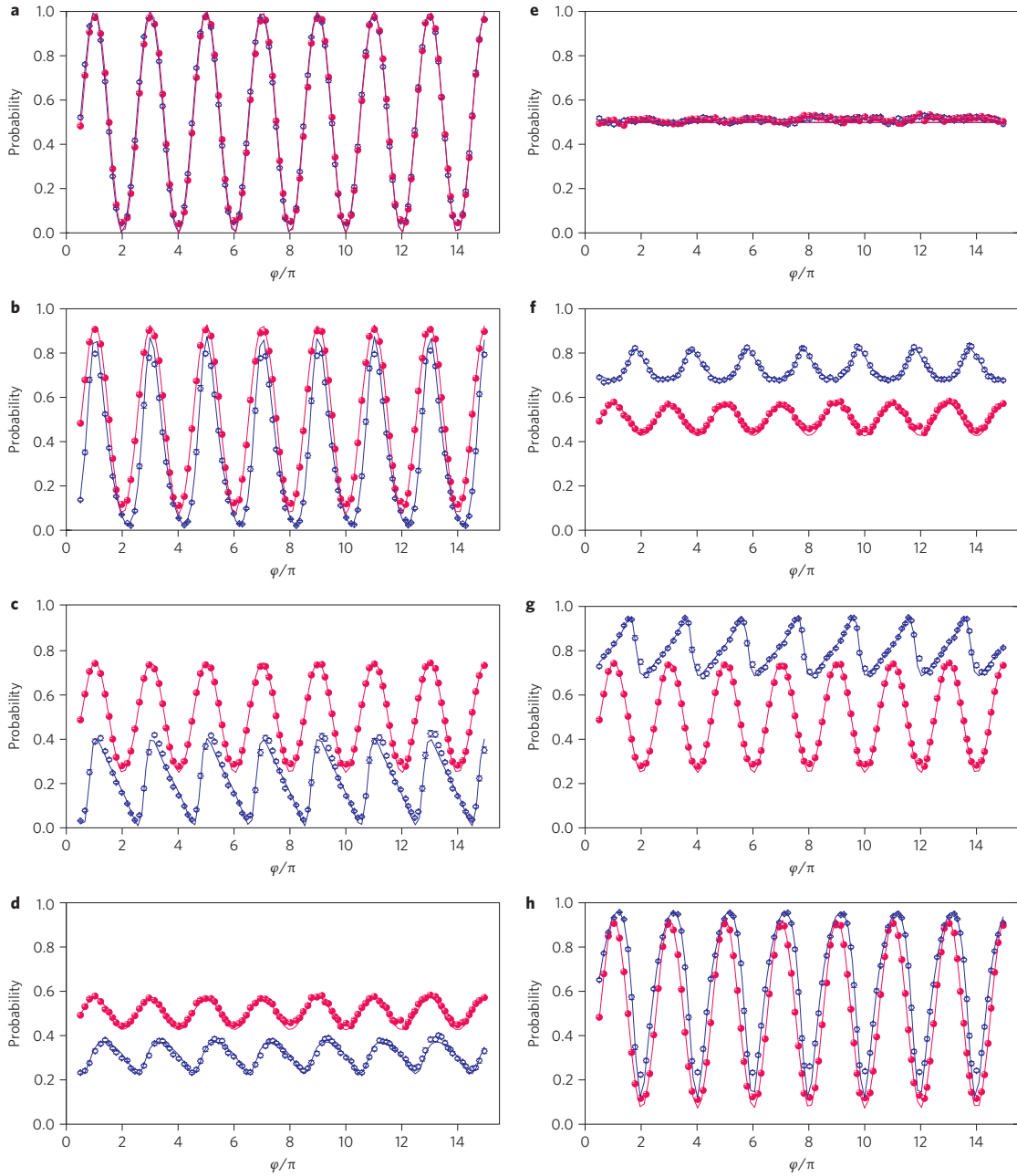


Figura 4.6: Probabilidades de encontrar un fotón en la trayectoria 1. De **a** a **h**,  $\alpha = j\pi/8$  ( $j = 0$  a  $7$ ). Los círculos rojos son el resultado de la mezcla clásica de ondas y partículas, y los círculos azules son el resultado de la superposición cuántica. Las líneas muestran el ajuste teórico correspondiente. Tomada de [4].

## Capítulo 5

# Complejidad

En este capítulo revisamos las referencias [19, 20]. En [19] se desarrolla una medida de la complejidad basada en una descripción probabilística de sistemas físicos. Esta medida incorpora las principales características de la noción intuitiva de tal magnitud. Se puede aplicar a muchas situaciones físicas y a diferentes descripciones de un sistema dado. Posteriormente estos conceptos podrán desarrollar una redefinición de la complejidad la cual se aplica a las RBNs (Random boolean networks) [20]. En esta nueva definición es donde nosotros trabajamos nuestras series de fotones en el Capítulo 6 para establecer una conexión suave con el caos cuántico.

Se dice que un sistema es “complejo” cuando no coincide con los patrones considerados simples. El conocimiento común nos dice qué es simple y qué es complejo: los sistemas simplificados o las idealizaciones son siempre un punto de partida para resolver problemas científicos. La noción de “complejidad” en física parte de considerar el cristal perfecto y el gas ideal aislado como ejemplos de modelos simples y por lo tanto como sistemas con cero “complejidad”. Sus principales características son: “orden”, “información” y “equilibrio”.

Un cristal perfecto está completamente ordenado y los átomos están ordenados siguiendo estrictas reglas de simetría. La distribución de probabilidad de los estados accesibles al cristal perfecto se centra en un estado predominante de simetría perfecta. Una pequeña “información” es suficiente para describir el cristal perfecto: las distancias y las simetrías que definen la celda elemental. La “información” almacenada en este sistema puede considerarse mínima. Por otro lado, el gas ideal aislado está completamente desordenado. El sistema se puede encontrar en cualquiera de sus estados accesibles con la misma probabilidad. Todos ellos contribuyen en igual medida a la “información” almacenada en el gas ideal. Tiene, por tanto, una “información” máxima. Estos dos sistemas simples son extremos en la escala de “orden” e “información”. De ello se desprende que la definición de “complejidad” no debe hacerse en términos de simplemente “orden” o “información”.

Podría parecer razonable proponer una medida de “complejidad” adoptando algún tipo de distancia de la distribución equiprobable de los estados accesibles del sistema. Así definido, “desequilibrio” daría una idea de la jerarquía probabilística del sistema. El “desequilibrio” sería diferente de cero si hay estados privilegiados, o más probables, entre los accesibles. Pero esto no funcionaría. Volviendo a los ejemplos del cristal y el gas; se ve fácilmente que un cristal perfecto está lejos de una equidistribución entre los estados accesibles porque uno de ellos prevalece totalmente, por lo que el “desequilibrio” sería máximo. Para el gas ideal, el “desequilibrio” sería cero por construcción. Por lo tanto, tal distancia o “desequilibrio” (una medida de una jerarquía probabilística) no se puede asociar directamente con la “complejidad”.

En la Figura 5.1 se esboza un comportamiento cualitativo intuitivo para la “información”  $H$  y el “desequilibrio”  $D$  para sistemas que van desde el cristal perfecto hasta el gas ideal. Este gráfico sugiere que el producto de estas dos cantidades podría usarse como una medida de “complejidad”:  $C = HD$  (Figura 5.1). De hecho, la función  $C$  tiene las características y propiedades asintóticas que uno esperaría intuitivamente: desaparece para el cristal perfecto y para el gas ideal aislado, y “es diferente de cero para el resto de los sistemas de partículas”. Todo esto sugiere establecer una medida cuantitativa de “complejidad”. Ahora se discute una medida de “complejidad” basada en la descripción estadística

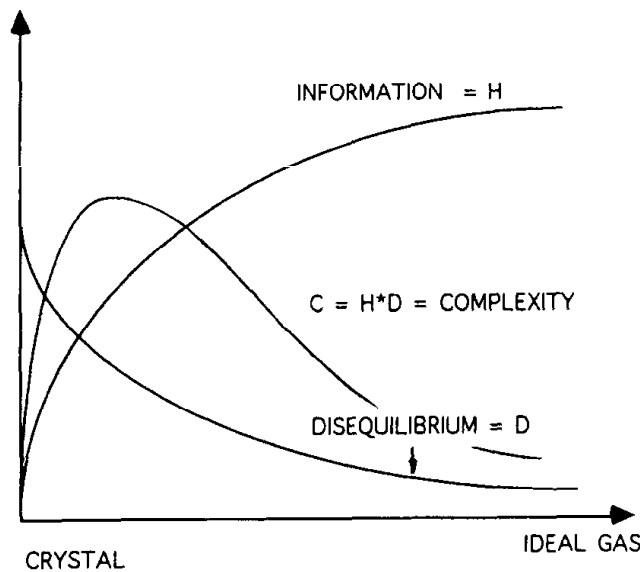


Figura 5.1: Bosquejo de la noción intuitiva de la magnitud de la información ( $H$ ) y el desequilibrio ( $D$ ) para sistemas físicos y el comportamiento intuitivo que se requiere para la magnitud de la complejidad ( $C$ ). La cantidad  $C = HD$  se propone para medir tal magnitud. Tomada de [19].

de los sistemas. Supongamos que el sistema tiene  $N$  estados accesibles  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$



cuando se observa a una escala dada. A esto se le nombra un sistema  $N$ . La comprensión del comportamiento de este sistema determina las probabilidades correspondientes  $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  (con la condición  $\sum p_i = 1$ ) de cada estado ( $p_i$  diferente de 0 para todo  $i$ ). Luego, el conocimiento de las leyes físicas subyacentes a esta escala se incorpora a una distribución de probabilidad para los estados accesibles. Es posible encontrar una cantidad que mida la cantidad de “información”. Bajo las condiciones más elementales de consistencia, Shannon [39] determinó la función única  $H(p_1, p_2, \dots, p_N)$  que da cuenta de la “información” almacenada en un sistema,

$$H = -K \sum_{i=1}^N p_i \log p_i \quad (5.1)$$

donde  $K$  es una constante positiva. La cantidad  $H$  es llamada información. En el caso de un cristal, un estado  $x_c$  sería el más probable,  $p_c \sim 1$ , y todos los demás  $x_i$  serían muy improbables,  $p_i \sim 0$ ,  $i \neq c$ . Luego  $H_c \sim 0$ . Por otro lado, la equiprobabilidad caracteriza a un gas ideal aislado,  $p_i \sim 1/N$  y así  $H_g \sim K \log N$ , es decir, el máximo de información para un sistema  $N$ ; Si se supone equiprobabilidad y  $K = k \equiv$  constante de Boltzmann,  $H$  se identifica con la entropía termodinámica  $S = k \log N$ . Cualquier otro sistema  $N$  tendrá una cantidad de información entre estos dos extremos.

La noción intuitiva de desequilibrio  $D$  en un sistema  $N$  sugiere que debería adoptarse algún tipo de distancia de una distribución equiprobable. Se imponen dos requisitos sobre la magnitud de  $D$ :  $D > 0$  para tener una medida positiva de “complejidad” y  $D = 0$  en el límite de equiprobabilidad. La solución sencilla es sumar las distancias cuadráticas de cada estado a la equiprobabilidad de la siguiente manera,

$$D = \sum_{i=1}^N (p_i - 1/N)^2. \quad (5.2)$$

Según esta definición, un cristal tiene un desequilibrio máximo (para el estado dominante,  $p_c \sim 1$ , y  $D_c \sim 1$  para  $N \rightarrow \infty$ ) mientras que el desequilibrio para un gas ideal desaparece ( $D \sim 0$ ) por construcción. Para cualquier otro sistema,  $D$  tendrá un valor entre estos dos extremos.

Ahora se presenta la definición de complejidad  $C$  de un sistema  $N$ . Esta es simplemente la interacción entre la información almacenada en el sistema y su desequilibrio,

$$\begin{aligned} C &= HD \\ &= - \left( K \sum_{i=1}^N p_i \log p_i \right) \left( \sum_{i=1}^N (p_i - 1/N)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Esta definición se ajusta a los argumentos intuitivos;

- Para un cristal, el desequilibrio es grande pero la información almacenada es muy pequeña, entonces  $C \sim 0$ .
- Por otro lado,  $H$  es grande para un gas ideal, pero  $D$  es pequeño, entonces  $C \sim 0$  también.
- Cualquier otro sistema tendrá un comportamiento intermedio y por tanto  $C > 0$ .

Como se sugirió intuitivamente, la definición de complejidad, Ecuación (5.3), también depende de la escala. En cada escala de observación aparece un nuevo conjunto de estados accesibles con su distribución de probabilidad correspondiente, de modo que la complejidad cambia. Las leyes físicas en cada nivel de observación nos permiten inferir la distribución de probabilidad del nuevo conjunto de estados accesibles y, por lo tanto, se obtendrán diferentes valores para  $H$ ,  $D$  y  $C$ .

La definición de complejidad anterior no es la única manera de hacerlo. En general, parte de una definición consiste en considerar las cualidades que la determinan. Para justificar la definición de complejidad de la Ecuación 5.5 es necesario hablar de las Redes Booleanas Aleatorias (RBNs, Random Boolean Networks.)

Las RBNs fueron propuestas como modelos de redes reguladoras de genes por Kauffman. Una RBN consta de  $N$  nodos que representan genes. Cada nodo puede tomar 0 (apagado, inhibido) o 1 (prendido, activado) como su estado. El estado del nodo está determinado por los estados de los nodos de entrada y las funciones booleanas asignadas a cada nodo. Cada nodo tiene  $K$  nodos de entrada (o enlaces de entrada)<sup>1</sup>. Se permiten entradas propias. Los enlaces están conectados de forma aleatoria y las funciones booleanas también se asignan de forma aleatoria. Una vez configurados los enlaces y las funciones booleanas, permanecen fijos.

La Figura 5.2 muestra cómo los estados iniciales elegidos al azar se actualizan a lo largo del tiempo. Las gráficas se simulan hasta  $T = 40$ . Un espacio de estados se refiere al conjunto de todas las configuraciones posibles ( $2^N$ ) y todas las transiciones entre ellas. Dependiendo de la estructura del espacio de estados, hay tres regímenes dinámicos en las RBNs: ordenadas, caóticas y críticas. Las dos primeras son fases, mientras que el régimen crítico se encuentra en la fase de transición. Las dinámicas ordenadas se caracterizan por el cambio de pocos estados de los nodos, lo que está relacionado con una alta estabilidad. La dinámica caótica se caracteriza por el cambio de la mayoría de los estados de los nodos, que se asocia con una alta variabilidad. Los regímenes dinámicos se pueden variar con  $K$ .

---

<sup>1</sup>El  $K$  que aparece aquí es distinto al  $K$  que aparece en la Ecuación 5.3.

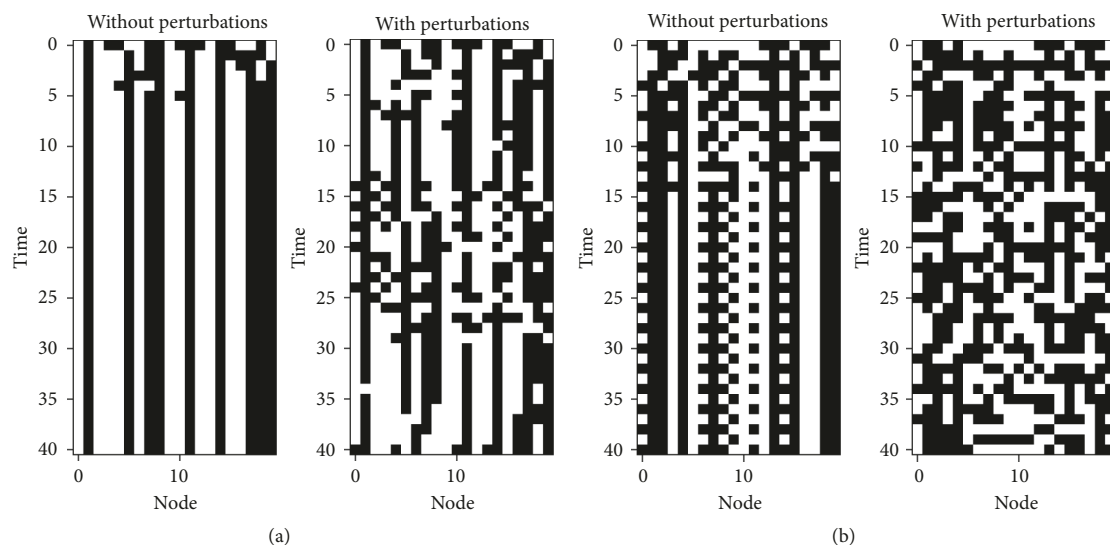


Figura 5.2: Diagramas esquemáticos que muestran las transiciones de estado de las (a) RBN críticas y (b) caóticas con  $N = 20$ ,  $X = 2$ ,  $O = 1$ ,  $T = 40$ . La configuración  $X = 2$ ,  $O = 1$ ,  $T=40$ , significa que los estados de dos nodos elegidos al azar en cada configuración se convierten cada dos pasos de tiempo hasta que el tiempo de ejecución de la simulación se convierta  $T=40$ . El lado izquierdo es la red sin perturbaciones y el derecho es la red con perturbaciones con los mismos estados iniciales. Cada cuadrado representa el estado de un nodo (blanco = 0, negro = 1). Las transiciones de estado comienzan desde los estados iniciales en la parte superior a los estados en la parte inferior durante  $T = 40$ . (a)  $K = 2$  (crítica), la complejidad aumenta con las perturbaciones: antifrágil. (b)  $K = 3$  (caótica), la complejidad disminuye por perturbaciones: frágil. Tomada de [20].

Es bien sabido que los sistemas adaptativos complejos están equipados con estabilidad y flexibilidad simultáneamente. Aquí, la complejidad significa un equilibrio entre la regularidad y el cambio, lo que permite que los sistemas se adapten de manera robusta. Desde el punto de vista de la información, la regularidad asegura que la información útil sobreviva, mientras que el cambio permite a los sistemas explorar nuevas posibilidades esenciales para la adaptabilidad. Los organismos vivos o los sistemas informáticos no sólo necesitan estabilidad para sobrevivir o mantener la información, sino también flexibilidad para evolucionar y adaptarse a su entorno. Siguiendo este concepto de complejidad, se infiere una medida cuantitativa. La complejidad se calcula en función de la entropía de información de Shannon como se puede ver en la ecuación 5.5,

$$E_i = -(p_0 \log_2 p_0 + p_1 \log_2 p_1) \quad (5.4)$$

$$C = 4 \times \bar{E} \times (1 - \bar{E}) \quad (5.5)$$

donde  $E_i$  es la “emergencia” del nodo  $i$ ,  $p_j$  es la probabilidad de que el estado del nodo

sea  $j$  ( $j = 0, 1$ ) entre los estados del nodo  $i$  actualizado en cada paso de tiempo hasta el tiempo de simulación  $T$ ,  $C$  ( $0 \leq C \leq 1$ ) es la complejidad de la red, y  $\bar{E}$  ( $0 \leq \bar{E} \leq 1$ ) es el promedio de los valores de la emergencia para todos los nodos. Específicamente,  $p_0$  ( $p_1$ ) se calcula contando el número de 0's (1's) en el nodo  $i$  hasta el tiempo de simulación  $T$ , ver Figura 5.2.  $\bar{E}$  y  $C$  dependen de los estados iniciales. En las funciones booleanas, cada valor se determina con probabilidad  $p$  de ser uno o probabilidad  $1 - p$  de ser cero.  $\bar{E}$ ,  $1 - \bar{E}$  y  $C$  dependen del tiempo porque se centran en la dinámica de los estados de los nodos.  $\bar{E}$  indica cuántos estados nuevos se producen a lo largo del tiempo (es decir, cambio). Como complemento de  $\bar{E}$ ,  $1 - \bar{E}$  representa la cantidad de estados existentes que se mantienen (es decir, la regularidad.)  $C$  significa el éxito con el que se cumplen ambos. Numéricamente,  $C$  alcanza el máximo cuando la emergencia  $\bar{E}$  es 0.5 ( $\bar{E} = 0,5 \rightarrow C = 1$ ), cuando la expresión de cualquiera de los dos estados es altamente probable, es decir,  $p_0$  o  $p_1 \approx 0,89$  para cada nodo. Mientras tanto,  $C$  se convierte en 0 cuando los dos estados están distribuidos uniformemente ( $p_0 = p_1 = 0,5; \bar{E} = 1$ ) o sólo un estado tiene la probabilidad máxima ( $p_0$  o  $p_1 = 1; \bar{E} = 0$ ).

La Figura 5.3 ilustra una relación matemática entre el cambio  $\bar{E}$ , la regularidad  $1 - \bar{E}$  y la complejidad  $C$  en las RBNs. Como se ve en la figura, se logra una alta complejidad cuando  $\bar{E} = 1 - \bar{E}$ , lo que significa un equilibrio óptimo entre mantener y cambiar los estados de la red. Para RBNs perturbadas, la Figura 5.2 (a) muestra que la red antifrágil mantiene estados originales en general y simultáneamente explora nuevos estados por medio de perturbaciones. La Figura 5.2 (b) representa que la mayoría de los estados en la red frágil cambian por perturbaciones, lo que indica que la red no mantiene información en un entorno ruidoso.

En nuestro análisis de la series de fotones, vamos a observar resultados muy similares a los que tenemos en la Figura 5.3. Esto es consecuencia de analizar secuencias de bits en nuestras series. A primer instancia lo que intentamos en nuestro proyecto es identificar alguna región en la gráfica de la Figura 5.3, ya que esta es muy parecida a la que obtenemos en el estudio de las series de fotones, que involucre al caos cuántico.

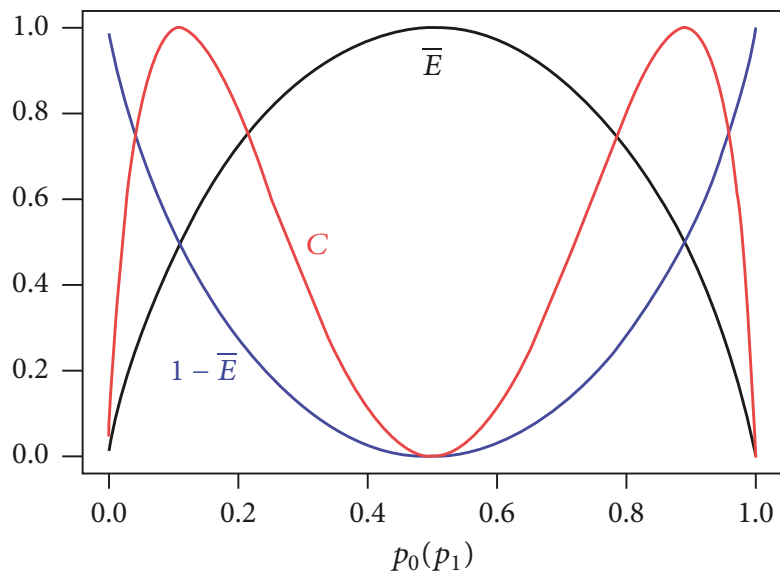


Figura 5.3: Relación entre cambio  $\bar{E}$ , regularidad  $1 - \bar{E}$  y complejidad  $C$  en RBN. Tomada de [20].

## Capítulo 6

# Caos cuántico en series de fotones individuales

En este capítulo comienza nuestro tratado donde conjugamos todos los conceptos vistos en los capítulos anteriores para encontrar un significado de la superposición onda-partícula en relación con el caos cuántico. Lo que hacemos es construir una serie de tiempo de fotones individuales con estadísticas de caos cuántico, utilizando una versión del experimento de anticorrelación de Grangier. Los criterios utilizados para determinar la presencia de caos cuántico son el factor de Fano y el espectro de potencias. También mostramos que los fotones con estadística caótica se encuentran en una superposición de fotones con comportamientos tanto de onda como de partícula. Para respaldar la presencia del caos cuántico, estudiamos la complejidad de las series de tiempo de fotones individuales. Se encuentra que las series presentan una transición desde estadísticas no caóticas a caóticas. Este último capítulo de la tesis se pudo reportar en la referencia [9].

La dicotomía entre la naturaleza ondulatoria y corpuscular de la luz ha recorrido un largo camino en la historia de la física, pero todavía no entendemos realmente el significado de ondas y partículas a nivel cuántico. Sólo tenemos en mente una representación clásica de estos conceptos y algunas definiciones intuitivas sobre ellos: una onda cuántica puede producir interferencia, mientras que una partícula cuántica puede seguir un camino. J. Wheeler propuso el ahora famoso experimento pensado de acción retardada [1] para mostrar que la naturaleza de la luz, onda o partícula, depende de cómo se mida. Existen varios experimentos que intentan reproducir el experimento pensado de Wheeler, pero ninguno de estos lo reproduce como tal. Una de las mejores aproximaciones al caso ideal propuesto por Wheeler es el que se publicó en 2006 por Jacques et al. [2,40], como se revisa en la sección 4.1, quienes confirmaron el principio de complementariedad de Bohr. Se han llevado a cabo otros experimentos similares con algunas variantes, y los resultados [41–43] mues-

tran que los estados de la luz pueden considerarse una superposición de onda y partícula donde el dispositivo de medición colapsa el estado en uno de los dos comportamientos. Radu y colaboradores investigaron qué sucede en el experimento pensado si la acción retardada se realiza a través de experimentos controlados cuánticamente [3]. Esta propuesta fue desarrollada por Jian-Shun y colaboradores [4], quienes obtienen una superposición cuántica de ondas de un fotón individual y propiedades de partículas seleccionando el dispositivo de detección cuántico en un estado de superposición en lugar de los estados propios del experimento de acción retardada, ver sección 4.2. Esta superposición se puede medir indirectamente a través de la visibilidad de la interferencia. Entonces, es posible medir simultáneamente el comportamiento de ondas y partículas en fotones individuales con aplicaciones potenciales en la codificación de información cuántica [4, 44].

Entre las diversas definiciones que existen sobre el caos cuántico, una particularmente conocida es: un sistema cuántico se comporta caóticamente si hay un sistema análogo clásico que exhibe caos [5], ver sección 3.2.

Sin embargo, esta no es la única definición porque el caos cuántico parece tener un comportamiento esquivo en comparación con el caos clásico. Para explicar la esencia del caos cuántico a partir de la superposición del comportamiento de onda y partícula, pensamos: Existe una relación entre la visibilidad de interferencia de las partículas cuánticas y su transición del comportamiento regular al caótico [15, 18], ver sección 3.4 y 3.3. Por otro lado, hay un cambio en la visibilidad de la interferencia en función de su grado de superposición entre los comportamientos de tipo onda y tipo partícula, como se mencionó anteriormente [4], ver sección 4.2. Este razonamiento se cierra si el caos cuántico está relacionado con la superposición del comportamiento tanto de onda como de partícula en algunos sistemas. Al considerar las características del caos cuántico las cuales son similares a las de la superposición onda-partícula, se establece una relación entre estas dos cualidades de la naturaleza que en cierto sentido complementan por lo tanto la definición del caos cuántico. El propósito de este trabajo de tesis es encontrar esta relación de manera experimental partiendo de las características intrínsecas que el caos cuántico contiene.

Existen diferentes metodologías para el estudio del caos cuántico, algunas de ellas mencionadas en el Capítulo 3; en este trabajo de investigación nos centraremos en la metodología del factor de Fano [16, 45–47] y el espectro de potencias [8, 47, 48]. Al analizar la series de fotones individuales e identificar el comportamiento al cual corresponden (onda o partícula), logramos asociar al caos cuántico con la superposición onda-partícula.

## 6.1. Superposición de ondas y partículas con el criterio estadístico

Los experimentos pensados nos ayudan a comprender la naturaleza dual de las partículas cuánticas. Además, gracias a esto, podemos comprender el papel de variar el grado de superposición de estos comportamientos. El estado de un fotón se puede definir como una superposición cuántica de onda ( $|w\rangle$ ) y partícula ( $|p\rangle$ ) [3, 4, 44, 49]:

$$|\psi\rangle = C_w|w\rangle + C_p|p\rangle, \quad (6.1)$$

donde  $C_w$  y  $C_p$  son amplitudes de probabilidad, con  $P_w = |C_w|^2$ ,  $P_p = |C_p|^2$  las probabilidades de que cada fotón sea detectado en uno u otro comportamiento.

Para analizar la superposición de onda y partícula, reproducimos una versión del experimento de anticorrelación de Grangier, ver Figura 6.1, donde los fotones individuales cruzan un divisor de haz polarizado (PBS, polarizing beam splitter). Al seleccionar las proporciones del divisor de haz ( $P_T, P_R$ ), las probabilidades de transmisión y de reflexión, según el ángulo de polarización de los fotones individuales entrantes, tendremos trayectorias predecibles para  $(1_T, 0_R)$  y  $(0_T, 1_R)$ . Para cualquier otro caso, tendremos cierto grado de imprevisibilidad, teniendo el máximo de  $(0.5_T, 0.5_R)$ . Llamamos ‘**comportamiento de onda**’ a esta máxima imprevisibilidad y ‘**comportamiento de partícula**’ a las trayectorias predecibles de ambos casos  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ . Una superposición cuántica arbitraria de estos estados representa un cierto grado de imprevisibilidad, que puede medirse mediante fluctuaciones en el conteo de fotones por debajo del límite de ruido de disparo. Debido a que el experimento de Grangier carece del segundo divisor de haz en comparación con el experimento de elección retardada, aparentemente, el comportamiento de cada fotón siempre se detectará como ‘partícula’, pero podemos demostrar que existe una equivalencia. Al girar la polarización lineal de los fotones individuales entrantes (usando una lámina de  $\lambda/2$ ), las probabilidades en los dos puertos de salida del PBS son

$$P_T = \cos^2(\phi/2), \quad (6.2)$$

$$P_R = \sin^2(\phi/2), \quad (6.3)$$

donde  $\phi/2$  es el ángulo de la lámina de media onda  $\lambda/2$ . Estas probabilidades son equivalentes a las probabilidades de salida en el interferómetro de Mach-Zender si la fase habitual  $e^{i\theta}$  en uno de los dos brazos es  $\theta = \phi/2$ . La identidad trigonométrica para el ángulo doble indica que  $P_T = \frac{1}{2}(1 + \cos(\phi))$  y  $P_R = \frac{1}{2}(1 - \cos(\phi))$ , que corresponden al patrón de interferencia de fotones individuales [50]. Entonces, los comportamientos de ondas o



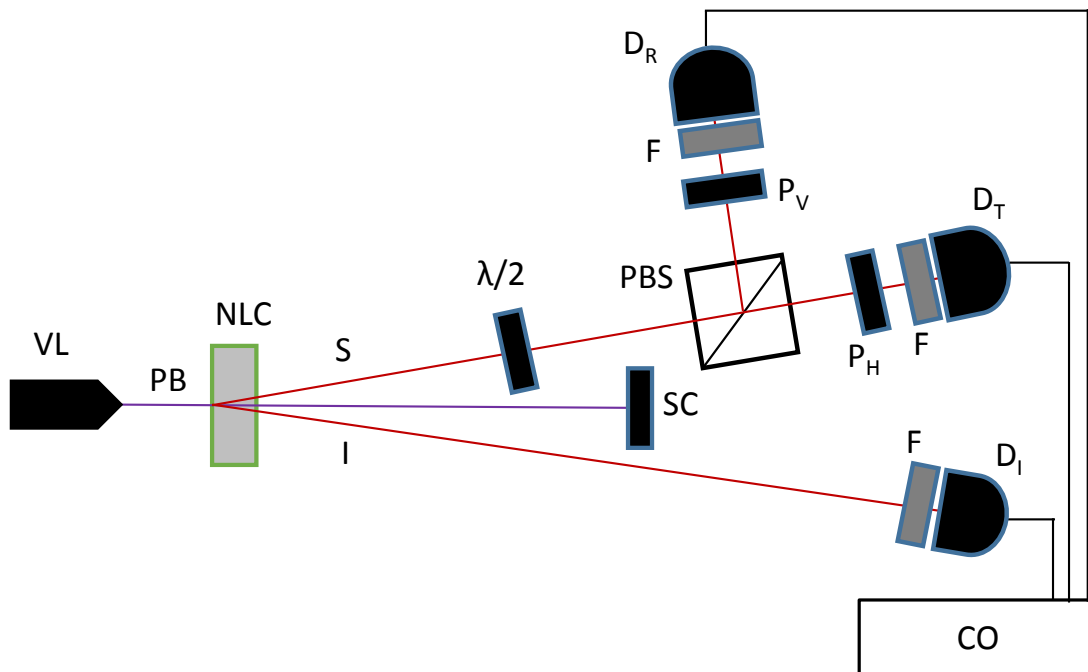


Figura 6.1: Configuración experimental donde se producen un par de fotones, señal y un testigo (S, I), cuando un cristal no lineal (*NLC*, Non Linear Crystal) *BBO* – *I* está bombeado por un láser violeta (*VL*), a través del proceso de conversión paramétrica descendente. Los fotones testigo se envían al detector  $D_I$ . Los fotones señal se envían a una lámina de media onda  $\lambda/2$  seguida de un *PBS*. Para compensar las imperfecciones del divisor de haz polarizado, colocamos dos polarizadores con sus ejes horizontal y vertical en las salidas transmitidas y reflejadas, respectivamente. Finalmente, se colocan filtros (*F*) de 810 nm antes de los fotodiodos de avalancha ( $D_R$ ,  $D_T$ ).

partículas de fotones individuales también deben codificarse en las estadísticas de fotones, particularmente en el ruido asociado con el recuento de fotones individuales.

## 6.2. Sub-ruido de disparo, función de correlación de segundo orden y factor de Fano

El ruido de disparo de los electrones emitidos en los tubos de vacío tiene una desviación estándar igual al promedio de los electrones emitidos en un tiempo fijo  $\Delta t$ . Por lo tanto, el factor de Fano en este caso es  $F = 1$ . Este es el límite de Poisson. Los fotones emitidos por un láser cumplen esta condición. Para obtener un ruido con estadísticas por debajo del ruido de disparo es necesario un control sobre la emisión de fotones, es decir, es necesaria una fuente de fotones individuales. La función de correlación de segundo orden para los fotones que cruzan un divisor de haz se define como [50]:

$$g^2(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger(0)\hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}(\tau)\hat{a}(0) \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger(0)\hat{a}(0) \rangle^2}, \quad (6.4)$$

$$= 1 + \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle^2}. \quad (6.5)$$

donde  $\langle \rangle$  implica un promedio temporal en el intervalo  $\Delta T$ ,  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación respectivamente, y  $\tau$  es el retraso producido por la diferencia en el camino óptico entre las dos señales detectadas. El factor de Fano, ver Apendice E, se define entonces como [7, 47, 51]:

$$F = \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle}{\langle \hat{n} \rangle}. \quad (6.6)$$

De las ecuaciones (6.5) y (6.6) encontramos que existe una relación entre la función de correlación de segundo orden y el factor de Fano,

$$g^2(\tau) = 1 + \frac{F - 1}{\langle \hat{n} \rangle}, \quad (6.7)$$

cuando  $\langle \hat{n} \rangle = 1$ , la función de correlación de segundo orden tiene el mismo valor que el factor de Fano. En este caso, el experimento de anticorrelación de Grangier, ver sección 2.1, nos permite controlar el factor de Fano en el intervalo  $0 \leq g^{(2)}(\tau) \leq 1$ . Una forma de controlar la transición de la estadística cuántica a la clásica es aumentando el tamaño de la ventana de coincidencia  $\Delta t$ ; o aumentando el número medio de fotones  $\bar{n}$  en el intervalo  $\Delta t$ .

Para conocer la dependencia entre el factor de Fano transmitido y el ángulo de la

lámina de media onda, consideramos que  $g^{(2)}(\tau) = 0$  para fotones individuales, y que  $\langle \hat{n} \rangle_{T,R} = P_{T,R}$  en la Ecuación (6.7). Luego, usando las ecuaciones (6.2) y (6.3) encontramos que  $F_T = \sin^2(\phi/2)$ , y  $F_R = \cos^2(\phi/2)$ . Además, de la ecuación (6.6) la varianza se puede expresar como  $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \sin^2(\phi/2) \cos^2(\phi/2)$ .

Teóricamente, si los fotones individuales están polarizados horizontalmente, la probabilidad de ser transmitidos en un PBS es  $P_T = 1$ . En este caso decimos que la trayectoria de los fotones está bien definida y presenta un comportamiento de ‘partícula’. El mismo argumento es válido cuando los fotones de polarización vertical se reflejan en el PBS con  $P_R = 1$ . Si la polarización de los fotones puede ser controlada por un HWP, los estados similares a partículas de fotones que salen del PBS se pueden escribir como:

$$|\psi\rangle_p^{\phi=0} = |H, 0\rangle^{\phi=0}, \quad (6.8)$$

$$|\psi\rangle_p^{\phi=\pi/2} = i|0, V\rangle^{\phi=\pi/2}, \quad (6.9)$$

donde etiquetamos cada estado con el ángulo de polarización  $\phi$ , y las etiquetas dentro del ket corresponden a los estados transmitidos y reflejados  $|H, V\rangle$  respectivamente. Cuando  $\phi = 0$  el fotón que pasa por el HWP está polarizado horizontalmente y mantiene su polarización original. Si  $\phi = \pi/2$ , el estado original  $|H, 0\rangle$  se convierte en  $|0, V\rangle$ . Por otro lado, cuando se gira la polarización horizontal  $\pi/4$ , el estado final es:

$$|\psi\rangle_w^{\phi=\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, 0\rangle^{\phi=\pi/4} + i|0, V\rangle^{\phi=\pi/4}). \quad (6.10)$$

En este caso, cada fotón tiene la misma probabilidad de ser transmitido o reflejado, por lo que tiene la máxima deslocalización y presenta un comportamiento ondulatorio. Por lo tanto, la superposición de estados de onda y partículas se puede reescribir como:

$$|\psi\rangle_{wp} = C_p |\psi\rangle_p^{\phi=0, \pi/2} + C_w |\psi\rangle_w^{\phi=\pi/4} \quad (6.11)$$

donde  $C_p$  y  $C_w$  son las amplitudes de probabilidad de que el fotón se registre como una partícula o como una onda, sin embargo, debemos tener cuidado aquí porque un estado de onda  $|\psi\rangle_w^{\phi=\pi/4}$  corresponde a un solo fotón que se puede detectar con la misma probabilidad en el detector transmitido  $D_T$  o reflejado  $D_R$ . En el caso de que usemos un solo detector  $D_T$  ( $D_R$ ) podemos caracterizar tanto el comportamiento de ondas como de partículas a través de su ruido estadístico, como veremos más adelante.

El paso fundamental en la realización de este experimento consiste en el análisis de las series temporales de fotones transmitidos o reflejados. La razón es simple, tenemos anticorrelación en cada momento, lo que implica  $g^{(2)} = 0$ , y por tanto  $F = 0$ , es decir, el

ruido asociado al conteo de fotones al sumar ambas salidas  $T$  y  $R$  es  $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = 0$ . Luego, analizamos una de las dos series de tiempo de salida de fotones ( $T$ ). La superposición de partícula y onda de los fotones expresada en la Ecuación (6.11) se puede escribir en función de los estados transmitido y reflejado:

$$|\psi\rangle_{wp}^{\phi=0} = C_p|H, 0\rangle^{\phi=0} + \frac{C_w}{\sqrt{2}}|H, 0\rangle^{\phi=\pi/4} + \frac{iC_w}{\sqrt{2}}|0, V\rangle^{\phi=\pi/4}, \quad (6.12)$$

$$|\psi\rangle_{wp}^{\phi=\pi/2} = iC_p|0, V\rangle^{\phi=\pi/2} + \frac{C_w}{\sqrt{2}}|H, 0\rangle^{\phi=\pi/4} + \frac{iC_w}{\sqrt{2}}|0, V\rangle^{\phi=\pi/4}. \quad (6.13)$$

Ponemos especial interés en los estados transmitidos (Ecuación (6.12)), donde debe quedar claro que  $|H, 0\rangle^{\phi=\pi/4}$  y  $|H, 0\rangle^{\phi=0}$  no son estadísticamente equivalentes y, por consiguiente, no se pueden factorizar como  $(C_p + \frac{C_w}{\sqrt{2}})|H, 0\rangle$ . El mismo argumento es válido para el estado reflejado.

### 6.3. Experimento

El experimento propuesto es una versión del experimento de Grangier [10, 11]. Enviamos fotones individuales con polarización lineal a un divisor de haz polarizado. El estado de los fotones, que cruzan la HWP cuyo eje rápido forma un ángulo  $\phi/2$ , se prepara en el estado  $|\psi\rangle = \cos(\phi)|H\rangle + \sin(\phi)|V\rangle$ . Las probabilidades de detectar fotones que salen de los puertos de salida transmitidos y reflejados son:  $P_T = \cos^2(\phi)$  y  $P_R = \sin^2(\phi)$ , respectivamente.

La Figura 6.1 muestra la configuración experimental. Usamos una fuente de pares de fotones basada en el proceso  $SPDC-I$ . Un láser violeta ( $\lambda = 405$  nm), excita un cristal no lineal tipo  $I$ , con un grosor de 2 mm. Los fotones infrarrojos salen en un ángulo de 3 grados con respecto al eje del experimento (este eje coincide con el haz láser violeta). Los fotones señal se dirigen hacia una HWP y un PBS. En los puertos de salida del PBS, colocamos dos polarizadores para reforzar la selección de polarización del PBS. En los puertos de salida del divisor de haz y después de los dos polarizadores, colocamos fotodiodos de avalancha (APD, avalanche photodiode) con una eficiencia cuántica del 60 %, que detectan los fotones ( $D_T$  y  $D_R$  respectivamente). Los fotones testigo se dirigen directamente al APD testigo ( $D_I$ ). Los tres APD están conectados a dispositivos electrónicos caseros que cuentan eventos individuales y coincidencias. Nuestra electrónica detecta todos los fotones que presentan la condición de anticorrelación. Para que esto suceda, es necesaria la presencia del fotón testigo. Las coincidencias se detectan en una ventana de tiempo  $\Delta t = 7,39$  ns. Comenzamos con  $g^2(0) = 0,025 \pm 0,015$ , que implica anti-correlación en la detección de fotones sobre las salidas  $T$  y  $R$ . Por lo tanto, se almacenan dos secuencias

binarias para un  $\phi$  dado, por ejemplo  $(1, 0, 0, 1, 1, 0, \dots)_T$  y  $(0, 1, 1, 0, 0, 1, \dots)_R$ , donde 1 indica un fotón detectado y 0 sin detección del fotón. Al final, hemos recopilado la serie temporal de fotones transmitidos y reflejados.

## 6.4. Factor de Fano en series tiempo de fotones individuales

La Figura 6.2 muestra las pruebas de conteo de 1's y 0's registrados por  $D_T$  en términos de las probabilidades de detección y no detección del fotón. Para cada fase  $\phi/2$  de la  $HWP$ , tomamos 102400 bits. En teoría, para  $\phi = 0$ , todos los bits detectados por  $D_T$  deberían ser uno, mientras que para  $\phi/2 = \pi/4$  todos los bits detectados por  $D_T$  deberían ser cero. Prestamos especial atención a los casos en los que las curvas de 1's y 0's se cruzan porque en estos puntos esperamos un comportamiento ondulatorio y una misma probabilidad  $P = 1/2$  de transmisión y reflexión.

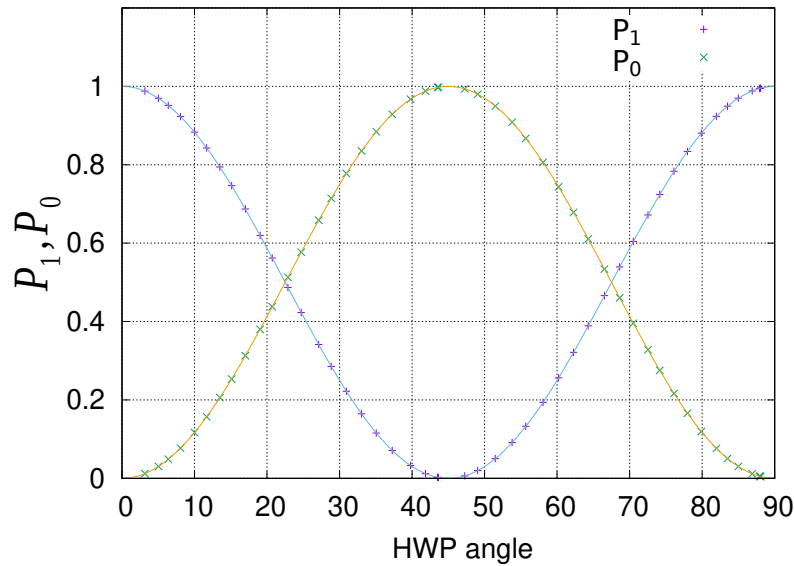


Figura 6.2: Probabilidad de detectar ( $P_1$ ) o no ( $P_0$ ) fotones individuales en el detector  $D_T$ . Las probabilidades  $P_0$  (x verdes) y  $P_1$  (+ azules) están en función del ángulo de la lámina de media onda  $\phi/2$  el cual se puede interpretar como una proporción normalizada de 1's y 0's, almacenadas en las series de tiempo.

La Figura 6.3 muestra el factor de Fano  $F$  para los puertos de salida  $T$  y  $R$ , como función de la probabilidad  $P_T = \cos^2(\phi/2)$  y  $P_R = \sin^2(\phi/2)$ . La curva va de  $F = 0$  a  $F = 1$  mostrando una transición del comportamiento de partícula a onda en el sector  $0 \leq F \leq 1/2$ . La probabilidad máxima transmitida  $P_T = 1$ , nos da  $F = 0$ , descrita por el estado:  $|\psi\rangle_p^{\phi=0} = |H, 0\rangle^{\phi=0}$ . En este caso, los fotones están localizados en  $D_T$  y tienen un comportamiento similar al de una partícula. El factor de Fano  $F = 1/2$  se

encuentra cuando la probabilidad de transmisión (o de reflexión) del fotón es  $P = 1/2$ , es decir, cuando los fotones se comportan como ondas (Ecuación (6.10)). Observamos que la predicción del caos cuántico en el sector por debajo del ruido de disparo tiene un factor de Fano de  $F = 1/4$  [16, 45–47]. Debido a que la probabilidad  $P_T$  está relacionada con el promedio del número de fotones detectados en  $D_T$ , experimentalmente, el factor de Fano caótico para la serie de tiempo transmitida de fotones se ubica en  $P_T = 3/4$ . En tal caso, para cumplir con las probabilidades de las estadísticas del caos cuántico, la *HWP* debe rotar el ángulo de polarización de los fotones a  $\phi = \pi/6$ . De esta forma, los fotones que cruzan el *PBS* pueden describirse mediante:

$$|\psi\rangle^{\phi=\pi/6} = \sqrt{\frac{3}{4}}|H, 0\rangle^{\pi/6} + i\sqrt{\frac{1}{4}}|0, V\rangle^{\pi/6}. \quad (6.14)$$

Es interesante observar de cerca el valor  $F = 3/4$  (obtenido para  $P_T = 1/4$ ) el cual implica caos cuántico para la salida reflejada ya que  $P_R = 3/4$  y el factor de Fano relativo al canal reflejado es  $F = 1/4$ . El estado asociado a esta última configuración esta dado por

$$|\psi\rangle^{\phi=\pi/3} = \sqrt{\frac{1}{4}}|H, 0\rangle^{\pi/3} + i\sqrt{\frac{3}{4}}|0, V\rangle^{\pi/3}. \quad (6.15)$$

Tenemos simetría de ruido porque  $P_T = 3/4$  produce estadísticas de caos cuántico con  $F = 1/4$  en la salida transmitida, pero  $F = 3/4$  en la reflejada, y viceversa para  $P_T = 1/4$ . Veremos más adelante que las probabilidades complementarias tienen la misma varianza para las mediciones de conteo de fotones. Esta es la razón por la que argumentamos que  $F = 3/4$  es también un criterio de caos cuántico. Los valores experimentales que obtuvimos para el factor de Fano con probabilidad de transmisión caótica son los siguientes (ver Figura 6.3):  $F = 0.25 \pm 0.01$  para  $P_T = 0.75 \pm 0.01$ ;  $F = 0.74 \pm 0.01$  para  $P_T = 0.26 \pm 0.01$ . Por otro lado, el factor de Fano obtenido para el comportamiento de onda de los fotones fue  $F = 0.53 \pm 0.01$  para  $P_T = 0.47 \pm 0.01$ , mientras que para el comportamiento de partículas se obtiene  $F = 0.005 \pm 0.001$  para  $P_T = 0.995 \pm 0.001$ .

## 6.5. Espectro de potencias en series de tiempo de fotones

Con el fin de verificar la presencia de caos cuántico en nuestras series, estudiamos el espectro de potencias asociado a estas. Aplicamos una versión simplificada del espectro de potencias para series de tiempo binarias. Se procedió de la siguiente manera: separamos las series de tiempo en particiones de  $2^n$  combinaciones de  $n$  bits, teniendo en cuenta que cada bit se detecta en el tiempo de coincidencia  $\Delta t$ . La serie de tiempo de fotones

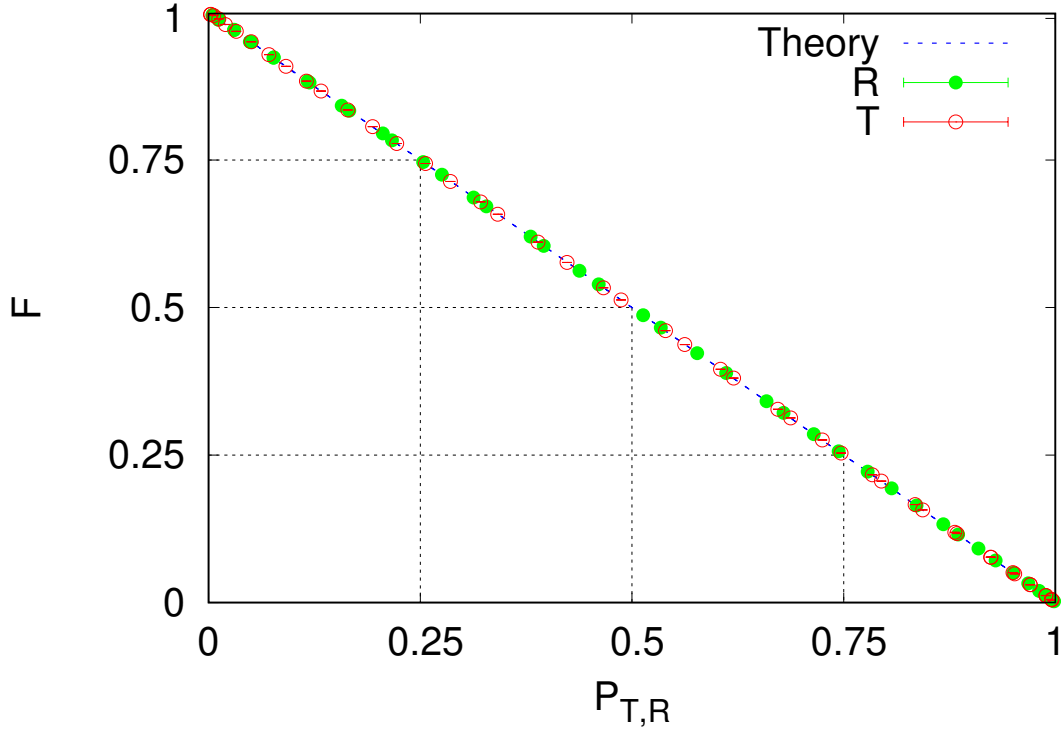


Figura 6.3: El factor de Fano como función de la probabilidad transmitida  $P_T$  (círculos rojos) y reflejada  $P_R$  (círculos verdes). Las series de tiempo de fotones que se obtienen en los detectores del canal transmitido y reflejado muestran caos cuántico en  $F = 0.25$  ( $0.75$ ) para  $P = 0.75$  ( $0.25$ ).

tiene una frecuencia  $f$  relacionada con el número de fotones contados durante el tiempo  $t = n\Delta t$ . Para  $n = 2$  podemos hacer la partición de la serie de tiempo con 102,400 bits en combinaciones de 2 bits, de los cuales hay 4: (0,0), (1,0), (0,1) y (1,1). Cada combinación tiene una frecuencia basada en el número de fotones registrados. Por ejemplo, el elemento (1,1) tiene dos fotones, y por lo tanto corresponde a  $f = 2$  con la amplitud  $A_f$  relacionada con el número de veces que aparece  $f = 2$ . El espectro de potencias está definido por  $PS(f) = |A_f|^2$ . Dado que (1,0) y (0,1) tienen el mismo número de fotones, entonces se tiene  $f = 1$ , estos se ubican en el mismo punto en la gráfica del espectro de potencias con una degeneración igual a 2. El estado (0,0) corresponde a  $f = 0$ . Si el espectro de potencias sigue una ley de potencias  $\ln(PS(f))$  en función de la frecuencia  $f$ , traza una línea recta cuya pendiente  $\beta$  es la potencia de la frecuencia en  $PS(f) \propto f^\beta$ . A continuación, obtenemos  $\beta$  en función de  $P_T$ .

En la Figura 6.4, se muestra  $\beta$  en función de la probabilidad de transmisión. Cuando la serie de tiempo se compone de sólo 0's ó 1's (probabilidades 0 y 1 respectivamente en el

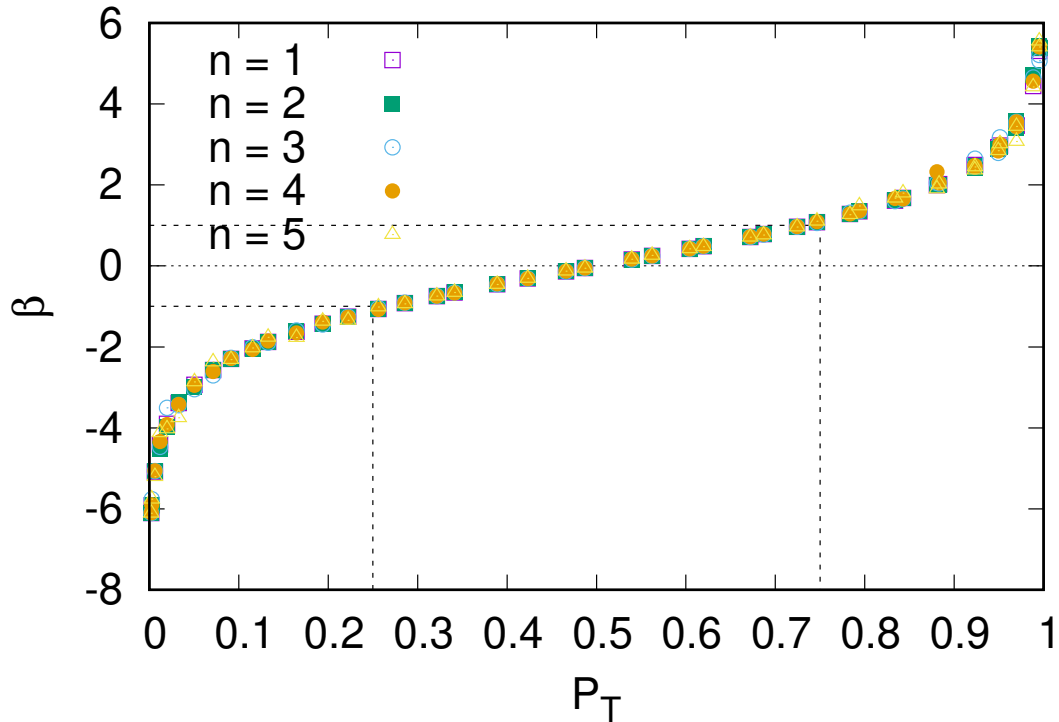


Figura 6.4: Comportamiento de las pendientes del análisis del espectro de potencias ( $\beta$ ) como función de la probabilidad de transmisión para diferentes bases ( $n$ ),  $\beta \approx -1, +1$  corresponden a  $P \approx 0,25, 0,75$ , respectivamente, en estos puntos se tiene caos cuántico.  $\beta \approx 0$  corresponde a  $P = 1/2$  para la aleatoriedad o comportamiento tipo onda.

puerto transmitido) las pendientes serán  $\beta_0, \beta_1 = \infty$ , con factores de Fano  $F = 1$  y  $F = 0$ , respectivamente. Experimentalmente obtenemos  $\beta_{0,1} \approx \pm 6$ . También podemos verificar que las pendientes para  $P = 1/4$  y  $P = 3/4$  tienden a las potencias esperadas teóricamente  $\beta_{1/4,3/4} = -1, +1$ , para  $F = 3/4, 1/4$  respectivamente, lo que indica la presencia de caos cuántico en ambas series. Experimentalmente obtenemos los valores  $\beta_{1/4} = -1,05 \pm 0,03$  y  $\beta_{3/4} = +1,08 \pm 0,01$ . También es claro que la serie que tiene  $F = 1/2$ , corresponde a  $\beta_{1/2} = 0$ , ya que el valor que obtenemos es  $\beta_{1/2} = 0,058 \pm 0,003$ .

## 6.6. Complejidad, información de Shannon y caos cuántico

Hemos demostrado que existe un comportamiento de caos cuántico en la serie de tiempo de fotones individuales para las probabilidades  $P_T = 3/4, 1/4$  con factor de Fano  $F = 1/4, 3/4$ . Ahora, comparando las ecuaciones 6.12 y 6.13 con las ecuaciones 6.14 y 6.15 respectivamente, es fácil ver que **la superposición de los comportamientos de ondas**



y partículas crea una condición de caos cuántico en  $F = 1/4, 3/4$  cuando

$$C_p = C_w = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (6.16)$$

ya que

$$|\psi\rangle_{wp}^{\phi=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}|H, 0\rangle^{\phi=0} + \frac{1}{2}|H, 0\rangle^{\phi=\pi/4} + \frac{i}{2}|0, V\rangle^{\phi=\pi/4} \quad (6.17)$$

reproduce la probabilidad  $P_T(H) = 3/4$  con  $F = 1/4$ , y

$$|\psi\rangle_{wp}^{\phi=\pi/2} = \frac{i}{\sqrt{2}}|0, V\rangle^{\phi=\pi/2} + \frac{1}{2}|H, 0\rangle^{\phi=\pi/4} + \frac{i}{2}|0, V\rangle^{\phi=\pi/4} \quad (6.18)$$

para  $P_T(H) = 1/4$  con  $F = 3/4$ .

En otras palabras, interpretamos el comportamiento del caos cuántico ( $F = 1/4, 3/4$ ) cuando **un fotón individual se comporta la mitad de las veces como una partícula y la mitad de las veces como una onda**. Debemos dejar en claro cómo las series hacen la transición desde una estadística no caótica a una estadística caótica. Para esto, estudiamos la entropía de Shannon y la complejidad de cada una de las series. Como ya se sabe, la entropía de Shannon es una medida de la información requerida para describir un sistema, por otra parte, la complejidad representa un balance entre orden y desorden. En este marco, queremos mostrar cómo se da la transición desde estadísticas que no presentan caos hacia estadísticas caóticas. Dado que nuestro sistema es binario, usamos la entropía de Shannon, con la notación  $p_i(\phi)$ , donde  $i = 1, 0$ , las probabilidades de que cada fotón sea detectado o no, para algún ángulo de polarización  $\phi$ . La Figura 6.6 muestra el comportamiento de tres cantidades: la entropía de Shannon,  $S = -\sum_i p_i(\phi) \log(p_i(\phi))$ , la complejidad  $C = 4S(1 - S)$ , y la regularidad  $1 - S$  [19, 20].

Una definición intuitiva de complejidad puede asociarse a sistemas compuestos con componentes que interactúan, donde el equilibrio entre regularidad y desorden proviene de interacciones emergentes. La complejidad que aquí se invoca tiene que ver con una combinación de regularidad y desorden, como se ve en la última parte del Capítulo 5. El comportamiento experimental de esta combinación muestra dos picos de complejidad. Todavía no existe una expresión matemática que relacione la complejidad y el caos, y sólo podemos decir que los dos comportamientos de caos cuántico en  $F = 1/4, 3/4$  pueden asociarse<sup>1</sup> con los dos máximos de complejidad  $C = 1$  que aparece aquí en  $S = 1/2$  (ver Figura 6.6), mientras que obtenemos  $S = 0$  para el comportamiento de partícula y  $S = 1$

<sup>1</sup>Lo que intentamos decir es que para estos valores del factor de Fano, la complejidad casi tiene un máximo.

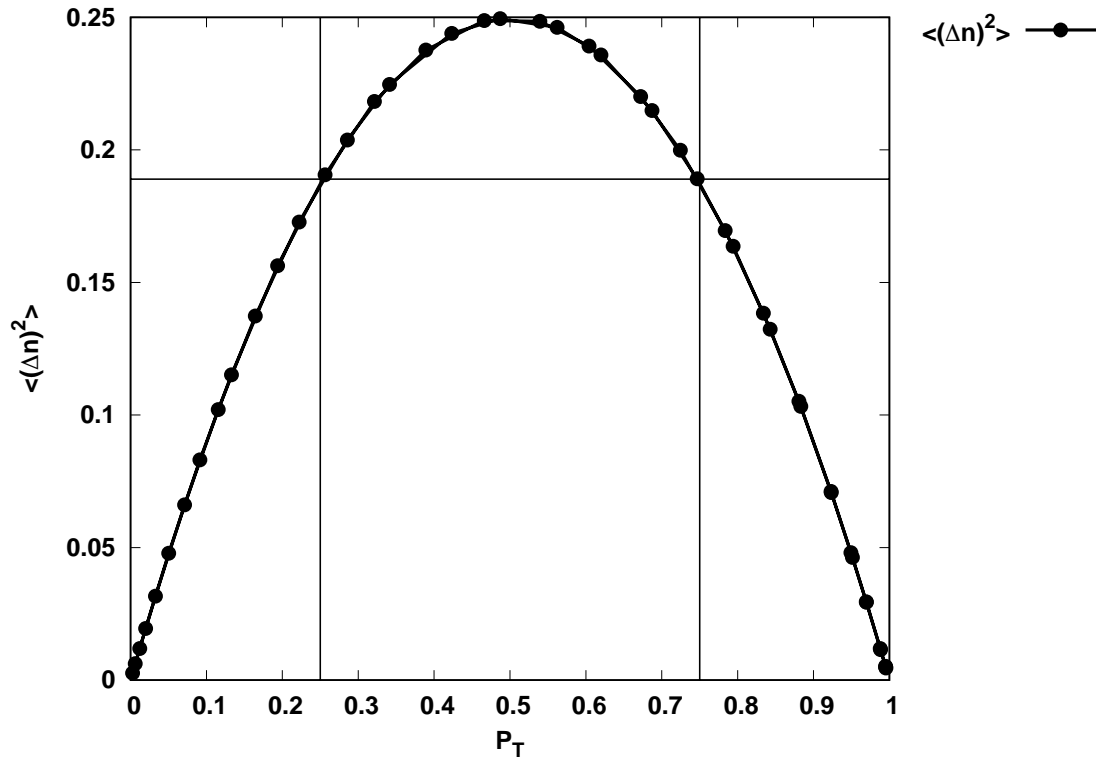


Figura 6.5: Varianza del conteo experimental de fotones versus la probabilidad transmitida. La línea horizontal a  $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = 3/16$ , indica los valores teóricos para el ruido asociado al ruido del conteo de fotones para el caso cuántico  $F=1/4, 3/4$  correspondientes a la probabilidad de transmisión  $P_T = 3/4, 1/4$  respectivamente.

para el comportamiento de onda. Una superposición de ambos comportamientos, onda y partícula, se encuentra aquí cuando  $S \approx 0.81$ , que corresponde al caos cuántico.

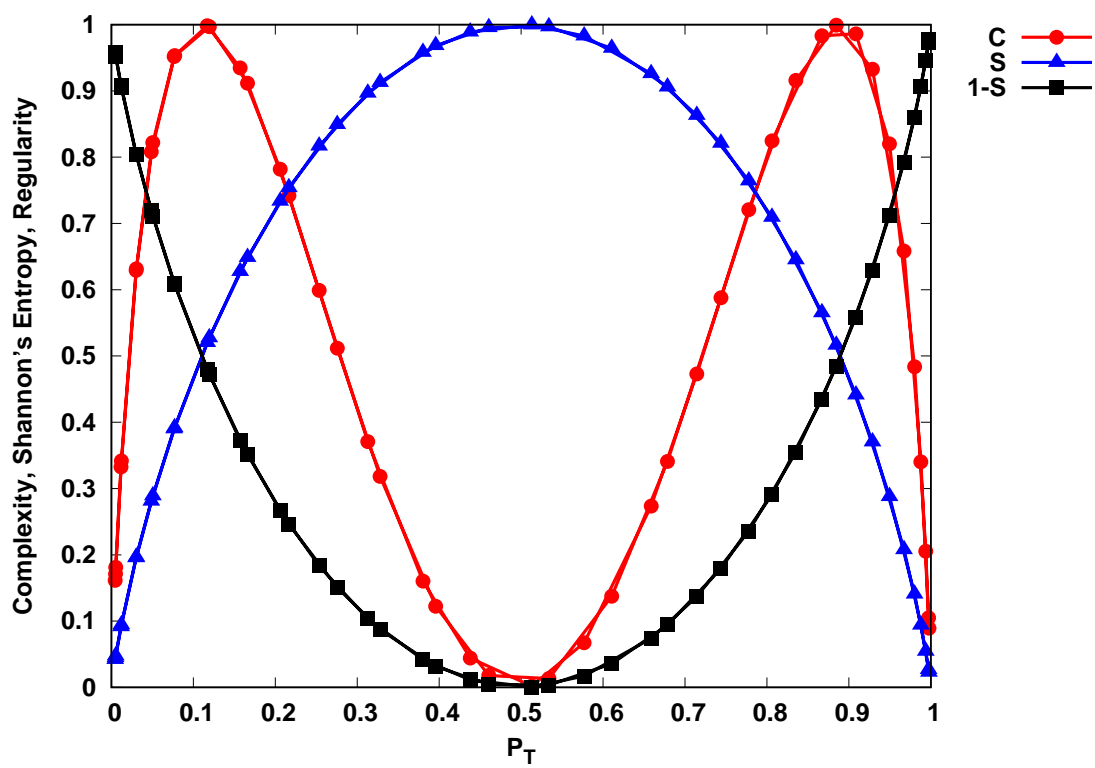


Figura 6.6: Resultados experimentales para: entropía de Shannon (triángulos azules), complejidad  $C = 4S(1 - S)$  (puntos rojos) y la regularidad  $1 - S$  (cuadrados negros), como función de la probabilidad de transmisión.

## Capítulo 7

# Conclusiones

El caos es una propiedad que debe estar presente sin importar el tamaño de los sistemas. Si hay caos clásico debe haber algo que se le parezca a nivel cuántico. Una de las principales conclusiones que se encuentra en la literatura sobre el caos cuántico y que vale la pena traer a colación es que estudiamos el espectro energético de los sistemas regulares y caóticos debido a que estos están estrictamente ligados con la integrabilidad y no integrabilidad de los sistemas. El estudio del caos cuántico se centra principalmente en aquello que lo caracteriza, mas no en aquello que lo define porque como tal no existe una definición.

El experimento de acción retardada de Wheeler y posteriormente su realización, han dado un paso para expandir el entendimiento sobre el principio de complementariedad de Bohr. Si bien por ahora no podemos dar una versión nueva sobre este principio, sí podemos decir que existe una superposición de dos naturalezas en un mismo experimento que hace que se deba redefinir este principio de complementariedad. En este trabajo de tesis, gracias al análisis de las series de fotones con el factor de Fano y espectro de potencias, se pudo establecer una relación con la superposición onda-partícula y caos cuántico; series de fotones que presentan caos es porque el fotón está en una superposición onda-partícula.

Hemos demostrado que es posible obtener series de tiempo de fotones individuales con diferentes estadísticas, en particular, estadísticas caóticas. Esto se probó utilizando el factor de Fano y el espectro de potencias. Además, obtenemos un máximo de complejidad cerca de cada región de probabilidad de caos cuántico.

Encontramos que el caos cuántico puede interpretarse como la superposición equilibrada de estados de partícula y onda de fotones individuales. Como consecuencia, se puede pensar que un solo fotón se comporta de una manera caótica cuántica y se caracteriza por

un ruido  $1/f$  o ruido rosa para  $F = 3/4$  ( $P_T = 1/4$ ) y ruido  $f$  para  $F = 1/4$  ( $P_T = 3/4$ ). De la misma manera, los máximos de complejidad aparecen para  $S = 1/2$  como un equilibrio ‘óptimo’ entre orden y desorden. También hemos demostrado que ambas señales son complementarias entre sí usando señales de conteo de fotones, ya que su desviación cuadrática media alrededor del promedio de conteo es la misma para  $F = 1/4, 3/4$ , lo que implica  $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = 3/16$ , ver Figura 6.6.

# Apéndice A

## Óptica no lineal

Los experimentos de anticorrelación han sido parte del hito a seguir para el desarrollo de los sistemas cuánticos y sus posibles aplicaciones a tecnologías cuánticas. El más conocido es el experimento de anticorrelación de Grangier; con el paso del tiempo se ha venido mejorando al implementar nuevas técnicas para la obtención de estados de fotón individual. En nuestro análisis de las series de fotones es necesario manejar fotones individuales. La técnica que usamos para la obtención de estado número  $|1\rangle$  es la que nos brinda la SPDC (spontaneous parametric down-conversion) que es en esencia un proceso no lineal de segundo orden al que la luz se somete. En el presente capítulo se expondrán los efectos de segundo orden de la interacción del campo electromagnético con la materia para dar lugar a fenómenos ópticos interesantes, uno de ellos, la conversión espontánea paramétrica descendente, en donde se generan fotones individuales a partir de una haz de bombeo incidente en un medio material. En el estudio de la conversión paramétrica se revisa primero la aproximación paramétrica y luego se estudia la interacción tipo I donde los fotones generados tienen igual polarización entre sí.

### A.1. Efectos de segundo orden

Cuando la luz incide sobre algún material existen interacciones entre la radiación y la materia, frente a un campo eléctrico la respuesta del medio es la Polarización que se puede escribir como

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \tag{A.1}$$

donde  $\chi$  es susceptibilidad eléctrica del medio. Si esta susceptibilidad o la intensidad del campo eléctrico son pequeñas suele haber únicamente respuestas lineales pero cuando alguna de estas características crecen pueden aparecer ordenes de interacción mayor y la

polarización se puede escribir como

$$P = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E + \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2 + \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3 + \dots \quad (\text{A.2})$$

donde el primer término de la derecha corresponde a la polarización lineal y el resto a la no lineal, en particular observando los fenómenos de segundo orden ( $P = \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2$ ), podemos escribir las componentes de la polarización en términos de los ejes del medio como

$$P^{(2)} = \varepsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k \quad (\text{A.3})$$

donde se ha escrito al tensor de susceptibilidad no lineal de segundo orden y los subíndices  $i, j, k$  corresponden a los ejes cartesianos definidos coincidentes con los ejes del cristal. Escribiendo la representación tensorial con el coeficiente óptico no lineal  $d_{ij}$ , las componentes de la polarización son calculadas como

$$\begin{pmatrix} P_x^{(2)} \\ P_y^{(2)} \\ P_z^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x E_x \\ E_y E_y \\ E_z E_z \\ 2E_y E_z \\ 2E_z E_x \\ 2E_x E_y \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

En la ecuación anterior se pueden identificar los términos  $d_{11} = \varepsilon_0 \chi_{xxx}^{(2)}$ ;  $d_{14} = \varepsilon_0 \chi_{xyz}^{(2)}$ , En particular para el cristal BBO ( $\beta$ -Borato de Bario) se tiene  $d_{22} = -d_{21} = -d_{16}$ ,  $d_{31} = d_{32}$ ,  $d_{24} = d_{15}$ ,  $d_{33}$  y todos los demás son cero.

## A.2. Conversión espontánea paramétrica descendente

Algunos ejemplos de fenómenos ópticos no lineales de 2do. orden son la suma de frecuencias, la amplificación paramétrica, la generación del 2do. armónico y el que nos interesa particularmente, la Conversión Espontánea Paramétrica Descendente (spontaneous parametric down-conversion, SPDC por sus siglas en inglés). La SPDC es un fenómeno que consiste en la llegada de luz de una frecuencia (p, bombeo) a un material óptico no lineal y en la salida de 2 frecuencias menores a la incidente (s, señal; i, acompañante ó testigo). Este es un fenómeno cuántico donde un solo fotón se transforma en dos fotones correlacionados por medio de una interacción con la materia, ver Figura A.1. Lo anterior no significa que un fotón se puede dividir arbitrariamente pues en realidad aquel que incide

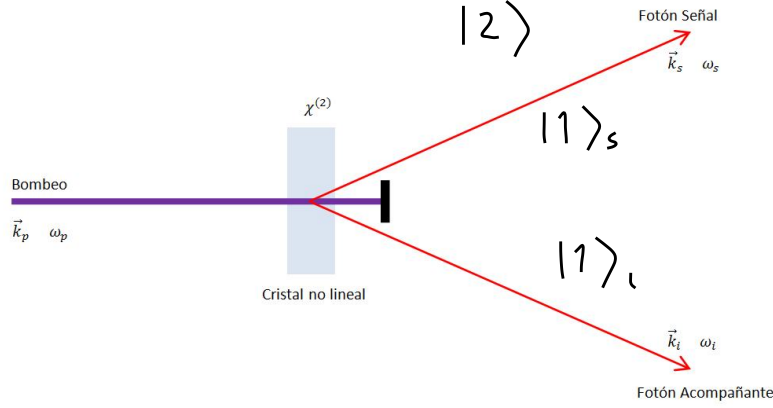


Figura A.1: Esquema de la Conversión espontánea paramétrica descendente, tomada de [52].

es absorbido por el material y luego la energía es emitida en dos nuevos fotones idénticos de luz de manera simultánea. Como inicialmente los modos señal y testigo son el vacío, el proceso se denomina espontáneo. El caso degenerado es cuando  $\omega = \omega_s = \omega_i = \omega_p/2$ . La interacción está dada por el hamiltoniano

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_p\hat{b}^\dagger\hat{b} + i\hbar\chi^{(2)}\left(\hat{a}^2\hat{b}^\dagger - \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}\right), \quad (\text{A.5})$$

donde  $\hat{b}$  y  $\hat{a}$  son los modos de bombeo y señal respectivamente. La aproximación paramétrica dice que el campo de bombeo es un fuerte estado coherente clásico  $|\beta e^{-i\omega_p t}\rangle$  que no queda empobrecido de fotones en una escala temporal relevante, entonces aproximando los operadores  $\hat{b}$  y  $\hat{b}^\dagger$  como  $\beta e^{-i\omega_p t}$  y  $\beta^* e^{-i\omega_p t}$  y si además ponemos  $\eta = \beta\chi^{(2)}$ , los hamiltonianos se convierten en

$$\hat{H}^{AP} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + i\hbar\left(\eta^*\hat{a}e^{i\omega_p t} - \eta\hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right). \quad (\text{A.6})$$

Transformando este hamiltoniano a la imagen de interacción,

$$\hat{H}^I = i\hbar\left[\eta^*\hat{a}^2 e^{i(\omega_p-2\omega)t} - \eta\hat{a}^{\dagger 2} e^{i(\omega_p-2\omega)t}\right], \quad (\text{A.7})$$

y como  $\omega = \omega_p/2$ , el hamiltoniano anterior queda como

$$\hat{H}^I = i\hbar\left[\eta^*\hat{a}^2 - \eta\hat{a}^{\dagger 2}\right]. \quad (\text{A.8})$$



Como este proceso cumple con la conservación de energía se tiene que

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i. \quad (\text{A.9})$$

Además, dentro del cristal

$$\hbar\vec{k}_p \approx \hbar\vec{k}_s + \hbar\vec{k}_i, \quad (\text{A.10})$$

con  $\vec{k}_p$ ,  $\vec{k}_s$ ,  $\vec{k}_i$ , los vectores de onda de cada uno de los fotones; el signo  $\approx$  es resultado de una incertidumbre dada por el recíproco de la longitud del medio no lineal. Las ecuaciones (A.9) y (A.10) son las condiciones de “empataamiento de fase” y significa que los fotones creados por SPDC son de menor energía que el fotón inicial y que la suma vectorial de sus momentos es igual al momento inicial de modo que los fotones creados aparecen opuestos en conos concéntricos al haz de bombeo. Para la SPDC tipo I, en la que los fotones

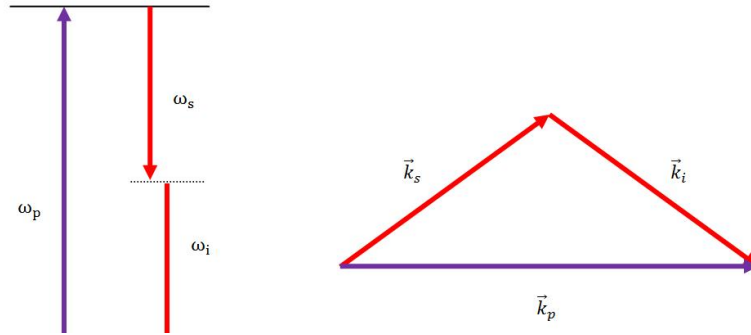


Figura A.2: Esquema de la condición paramétrica; podemos inferir que esta condición involucra dos leyes fundamentales de la física, conservación de la energía y conservación del momento. Tomada de [52].

creados tienen la misma polarización que es perpendicular al del fotón de bombeo, se tiene un hamiltoniano de interacción dado por

$$\hat{H}_I = \hbar\eta\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger + H.C., \quad (\text{A.11})$$

donde se ha hecho uso de la aproximación paramétrica antes mencionada y H.C. representa al Hermitiano conjugado. Así, en términos del operador de evolución temporal  $\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)$  podemos escribir al estado final (o de salida del cristal no lineal) como

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle, \quad (\text{A.12})$$

donde  $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle_s |0\rangle_i |\alpha\rangle$  es el estado de entrada al cristal (adelante se quitará  $|\alpha\rangle$  ya que la aproximación paramétrica contempla un fuerte campo coherente). Haciendo una expansión de la exponencial del operador  $\hat{U}(t)$  y cortando la serie a primer orden, tenemos  $\hat{U} \approx 1 - \frac{it\hat{H}}{\hbar}$ . De manera que el estado final  $|\Psi\rangle$ , en una aproximación a primer orden, viene dado por

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &\approx \left(1 - \frac{it\hat{H}}{\hbar}\right) |\Psi(0)\rangle \\ &= \left(1 - it\eta\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger\right) |\Psi(0)\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

que al final resulta

$$|\Psi(t)\rangle = |0\rangle_s |0\rangle_i - i\mu |1\rangle_s |1\rangle_i, \quad (\text{A.14})$$

donde  $\mu = \eta t$ .

## Apéndice B

# Mecánica cuántica de divisores de haz

En la imagen clásica del divisor de haz hay un “puerto” no utilizado que, al estar vacío de un campo de entrada, no tiene ningún efecto sobre los haces de salida, ver Figura B.1. Sin embargo, en la imagen de la mecánica cuántica, el puerto “no utilizado” todavía

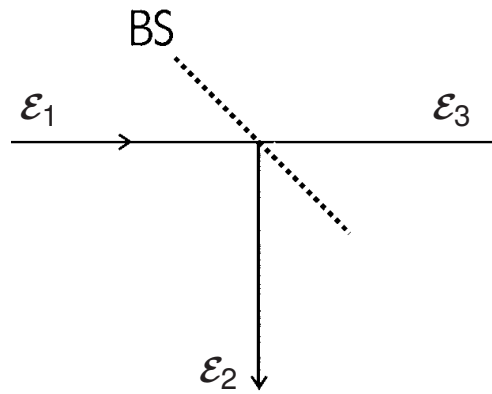


Figura B.1: Funcionamiento de un divisor de haz clásico. El campo de entrada  $\mathcal{E}_1$  se divide en los campos  $\mathcal{E}_2$  y  $\mathcal{E}_3$  después de pasar por el divisor.

contiene un modo de campo cuantificado referente al estado de vacío. Como sabemos, las fluctuaciones del vacío conducen a importantes efectos físicos. La situación con el divisor de haz no es una excepción. En la Figura B.2 indicamos todos los modos necesarios para una descripción cuántica adecuada del divisor de haz, representando  $\hat{a}_0$  el operador de campo del modo de entrada clásicamente vacante. También se indican dos conjuntos de transmitancias y reflectancias, lo que permite la posibilidad de un divisor de haz asimétrico. Ahora escribimos las transformaciones del divisor de haz para los operadores de campo

como

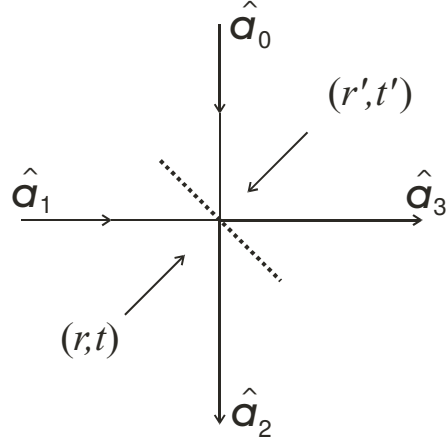


Figura B.2: La descripción cuántica correcta de un divisor de haz considera el operador de creación (asociado al vacío) en la entrada donde no hay campo clásico. Tomada de [50].

$$\hat{a}_2 = r\hat{a}_1 + t'\hat{a}_0, \quad \hat{a}_3 = t\hat{a}_1 + r'\hat{a}_0, \quad (\text{B.1})$$

o colectivamente como

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' & r \\ r' & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Se ve fácilmente que las relaciones de conmutación

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (\text{B.3})$$

se satisfacen siempre que se mantengan las siguientes relaciones:

$$|r'| = |r|, \quad |t| = |t'|, \quad |r|^2 + |t|^2 = 1, \quad r^*t' + r't^* = 0, \quad r^*t + r't'^* = 0. \quad (\text{B.4})$$

Estas relaciones se conocen como relaciones de reciprocidad y también se pueden derivar sobre la base de la conservación de energía. Examinemos un par de ejemplos relevantes. Los cambios de fase de los haces reflejados y transmitidos dependen de la construcción del divisor de haz [4]. Si el divisor de haz se construye como una sola capa dieléctrica, los haces reflejados y transmitidos diferirán en fase por un factor de  $\exp(\pm i\pi/2) = \pm i$ . Para un divisor de haz 50:50, tomando en cuenta que el haz reflejado sufre un cambio de fase

$\pi/2$ , los modos de entrada y salida están relacionados de acuerdo con

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_0 + i\hat{a}_1), \quad \hat{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\hat{a}_0 + \hat{a}_1). \quad (\text{B.5})$$

Dado que la transformación entre los modos de entrada y salida debe ser unitaria, podemos escribir la Ecuación (B.2) como

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \hat{U}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix} \hat{U}, \quad (\text{B.6})$$

donde  $\hat{U}$  es un operador unitario. Esta transformación constituye una formulación en imagen de Heisenberg de un divisor de haz. Para la transformación específica representada por la Ecuación (B.5), el operador  $\hat{U}$  tiene la forma

$$\hat{U} = \exp \left[ i \frac{\pi}{4} (\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger) \right], \quad (\text{B.7})$$

se verifica fácilmente usando el lema de Baker-Hausdorff en la Ecuación (B.6).

Por otro lado, podemos adoptar la imagen de Schrödinger y hacer la siguiente pregunta. Para un estado de entrada dado al divisor de haz, ¿cuál es el estado de salida? Recordando que todos los estados de número de fotones  $|n\rangle$ , por lo tanto, cualquier superposición o cualquier mezcla estadística de tales estados, pueden construirse mediante la acción de  $n$  potencias del operador de creación en el vacío, podemos usar las ecuaciones. (B.1) y (B.2) para construir los estados de salida a partir de la acción de los operadores de creación transformados sobre los estados de vacío de los modos de salida, siendo obvio que un vacío de entrada se transforma en un vacío de salida:  $|0\rangle_0|0\rangle_1 \rightarrow |0\rangle_2|0\rangle_3$ . Como ejemplo, considere el estado de entrada de fotón único  $|0\rangle_0|1\rangle_1$  que podemos escribir como  $\hat{a}_1^\dagger|0\rangle_0|0\rangle_1$ . Para el divisor de haz descrito por la Ecuación (B.5) encontramos que  $\hat{a}_1^\dagger = (i\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger)/\sqrt{2}$ . Por lo tanto, podemos escribir, usando que  $|0\rangle_0|0\rangle_1 \xrightarrow{BS} |0\rangle_2|0\rangle_3$ ,

$$\begin{aligned} |0\rangle_0|1\rangle_1 &\xrightarrow{BS} \frac{1}{\sqrt{2}} (i\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger) |0\rangle_2|0\rangle_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (i|1\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|1\rangle_3). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Este es un resultado importante. Dice que fotón incidente único en uno de los puertos de entrada del divisor de haz, el otro puerto que contiene solo el vacío, será transmitido o reflejado con la misma probabilidad. Por supuesto, esto es precisamente como afirmamos anteriormente y explica por qué no se esperan recuentos coincidentes con contadores de fotones colocados en las salidas del divisor de haz, como lo confirma el experimento de

Grangier et al. [3]. En realidad, debido a que se conoce bien el divisor de haz, la falta de recuentos coincidentes en el experimento anterior puede tomarse como una indicación de que la fuente realmente está produciendo estados de fotón único. Es necesario señalar otro punto sobre el estado de salida de la Ecuación (B.8). Es un estado entrelazado: no puede escribirse como un simple producto de los estados de los modos individuales 2 y 3. El operador de densidad [53] para el estado (puro) de la Ecuación (B.8) es

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{23} = & \frac{1}{2}\{|1\rangle_2|0\rangle_{32}\langle 1|_3\langle 0| + |0\rangle_2|1\rangle_{32}\langle 0|_3\langle 1| \\ & + i|1\rangle_2|0\rangle_{32}\langle 0|_3\langle 1| - i|0\rangle_2|1\rangle_{32}\langle 1|_3\langle 0|\}.\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

Al colocar detectores en los dos haces de salida, estamos midiendo la “coherencia” completa como se describe en el vector de estado de la Ecuación (B.8) o equivalentemente el operador de densidad de la Ecuación (B.9). Supongamos, por otro lado, que no hacemos ninguna medición de, digamos, el modo 3. El modo 2 es entonces descrito por el operador de densidad reducido obtenido al hacer la traza sobre los estados del modo no medido:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_2 = & \text{Tr}_3\hat{\rho}_{23} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_3\langle n|\hat{\rho}_{23}|n\rangle_3 \\ = & \frac{1}{2}(|0\rangle_{22}\langle 0| + |1\rangle_{22}\langle 1|).\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

Esto representa simplemente una mezcla estadística, ya que no existen términos de coherencia “fuera de la diagonal” de la forma  $|0\rangle\langle 1|$  o  $|1\rangle\langle 0|$ . Por lo tanto, colocar un detector en solo uno de los haces de salida produce resultados aleatorios, 50 % para 0 y 50 % para 1, tal como cabría esperar.

## Apéndice C

# Interferometría de Mach-Zehnder de un solo fotón

Para obtener efectos de interferencia con fotones individuales, debemos codificar las rutas hacia los detectores, ya que la interferencia ocurre en la falta de información del “which path”. Una forma conveniente de lograr esto es construir un interferómetro Mach-Zehnder (MZI), que consta de dos divisores de haz y un conjunto de espejos, como se ilustra en la Figura C.1. La interferencia se produce porque los detectores  $D_1$  y  $D_2$  no pueden distinguir entre el fotón que toma las trayectorias en sentido horario o antihorario. En la ruta en sentido antihorario se coloca un desfasador, que podría ser simplemente una longitud de fibra óptica, de modo que las longitudes de las rutas alrededor del MZI sean diferentes y ajustables. Este desplazamiento de fase puede estar representado por el operador unitario  $\exp(i\theta\hat{n})$  donde  $\hat{n}$  debe entenderse como el operador de número del campo en esa sección del interferómetro. El ángulo  $\theta$  en realidad representa un cambio de fase relativo entre las dos trayectorias.

$$|0\rangle|1\rangle \xrightarrow{BS_1} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_R|1\rangle_T + i|1\rangle_R|0\rangle_T). \quad (C.1)$$

Los subíndices  $T$  y  $R$  se refiere a transmitido y reflejado, respectivamente. Los espejos aportan un factor de  $e^{i\pi/2}$  a cada término, lo que equivale a una fase irrelevante, que omitimos. El desfasador en el camino en el sentido de las agujas del reloj provoca un cambio de fase en el primer componente;

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle) \xrightarrow{\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\theta}|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle). \quad (C.2)$$

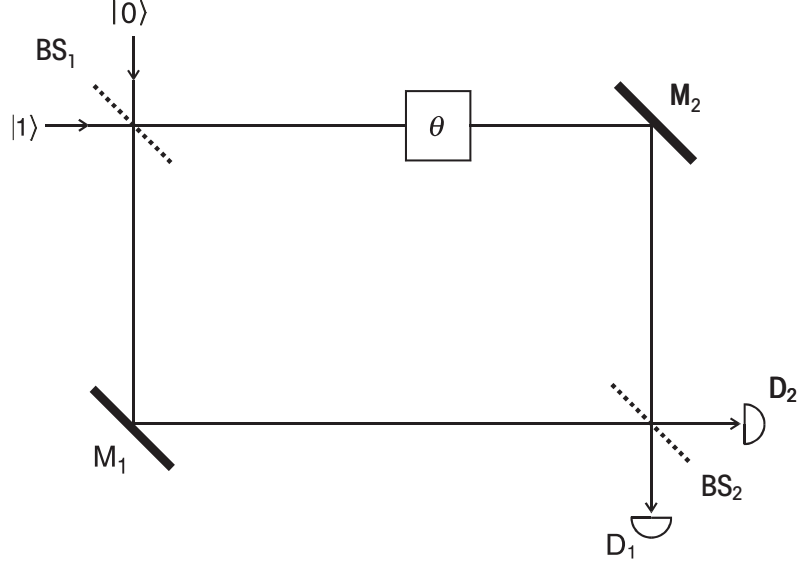


Figura C.1: Un interferómetro Mach-Zehnder con un solo fotón entrante. Los divisores de haz  $BS_1$  y  $BS_2$  son 50:50,  $M_1$  y  $M_2$  son espejos, y la caja etiquetada por  $\theta$  representa el cambio de fase relativa a los brazos. Tomada de [50].

En el segundo divisor de haz ( $BS_2$ ) tenemos las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} |0\rangle|1\rangle &\xrightarrow{BS_2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle), \\ |1\rangle|0\rangle &\xrightarrow{BS_2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle|0\rangle + i|0\rangle|1\rangle), \end{aligned} \quad (C.3)$$

donde (teniendo en cuenta la convención de dirección de propagación) en el lado derecho, el primer estado en cada uno de los estados del producto se refiere al haz dirigido hacia el detector  $D_1$  mientras que el segundo es hacia  $D_2$ . Por lo tanto, la transformación en el estado total debido al segundo divisor de haz es

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\theta}|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle) \xrightarrow{BS_2} \frac{1}{2} [(e^{i\theta} - 1)|0\rangle|1\rangle + i(e^{i\theta} + 1)|1\rangle|0\rangle]. \quad (C.4)$$

La probabilidad de que se detecte el estado  $|0\rangle|1\rangle$  (que solo se dispare  $D_2$ ) es

$$P_{01} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta), \quad (C.5)$$

mientras que la probabilidad de que se detecte el estado  $|1\rangle|0\rangle$  (que solo  $D_1$  dispare) es

$$P_{10} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta). \quad (C.6)$$



Obviamente, a medida que cambia la longitud del camino, por lo tanto  $\theta$ , estas probabilidades exhiben oscilaciones, que, por supuesto, son las franjas de interferencia indicativas de la interferencia de un solo fotón. Son precisamente estas franjas las que se han observado en los experimentos de Grangier et al. [3].

## Apéndice D

# Compuerta Hadamard

Vale la pena discutir algunos aspectos de la computación cuántica, en particular, la noción de registros cuánticos y compuertas cuánticas y sus realizaciones ópticas cuánticas. Comenzamos con una discusión sobre los registros cuánticos. Los qubits los representamos en la base genérica  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , también conocida como base computacional. El estado puro más general para un solo qubit es el estado de superposición

$$|\psi_1\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle, \quad |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1. \quad (\text{D.1})$$

Un registro cuántico es una colección de qubits, digamos  $N$  qubits. Por ejemplo, el registro de 3 qubit en el estado

$$|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \equiv |101\rangle = |5\rangle \quad (\text{D.2})$$

proporciona una representación binaria del número decimal 5,  $(5)_{10} = (101)_2$ , como se indica en el lado derecho. Pero ahora suponga que el primer qubit del registro está en el estado de superposición balanceada  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ . El estado del registro es entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle + |101\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |5\rangle) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Esto significa que el registro cuántico de 3 qubits representa simultáneamente los números decimales 1 y 5. Si los tres qubits están en estados de superposición balanceada, entonces el registro está en el estado

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{3/2}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) \\
&= \frac{1}{2^{3/2}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle + |5\rangle + |6\rangle + |7\rangle) \tag{D.4}
\end{aligned}$$

y así un registro de 3 qubit puede representar los ocho números decimales 0–7 simultáneamente. Para cualquier número decimal  $a$  dado por  $a = a_02^0 + a_12^1 + \dots + a_{N-1}2^{N-1}$ , donde los coeficientes  $a_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , están restringidos a 0 o 1, podemos escribir

$$|a\rangle = |a_{N-1}\rangle \otimes |a_{N-2}\rangle \otimes \dots \otimes |a_1\rangle \otimes |a_0\rangle = |a_{N-1}a_{N-2} \dots a_0\rangle. \tag{D.5}$$

El estado de registro cuántico de N-qubit más general es

$$|\psi_N\rangle = \sum_{a=0}^{2^N-1} c_a |a\rangle \tag{D.6}$$

con un registro de N-qubit, todos los números decimales de 0 a  $2^N - 1$ , un total de  $2^N$  números, se pueden representar simultáneamente en un estado de la forma de la Ecuación (D.6). Para realizar cualquier tipo de procesamiento, necesitamos compuertas lógicas como en una computadora clásica. La diferencia importante entre las compuertas lógicas cuánticas y las clásicas es que las primeras son siempre reversibles, ya que las salidas dependen únicamente de las entradas, lo que no es válido para las compuertas clásicas. Se aplica a las compuertas cuánticas porque se implementan mediante transformaciones unitarias. Comenzamos con compuertas de un solo qubit. La primera compuerta que consideramos

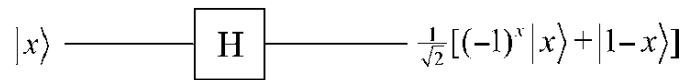


Figura D.1: Circuito simbólico de una compuerta Hadamard.  $x$  toma valores de 0 y 1. Tomada de [50].

es la compuerta de Hadamard. Esta es una compuerta que crea superposiciones balanceadas de los estados base  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  y está representada por la letra H. Con  $x \in \{0, 1\}$ , la compuerta de Hadamard, descrita por el operador unitario  $\hat{U}_H$ , efectúa la transformación

$$\hat{U}_H|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[(-1)^x|x\rangle + |1-x\rangle]. \tag{D.7}$$

Así  $\hat{U}_H|0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  y  $\hat{U}_H|1\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ . Note que el lado izquierdo de la Ecuación (D.4) puede obtenerse a partir de transformaciones de Hadamard en tres bits cada uno en un estado  $|0\rangle$ . Si los qubits son realizados por los estados base y excitado de

un átomo de dos niveles, entonces la transformación de Hadamard es solo un pulso  $\pi/2$ . El símbolo del circuito de la compuerta Hadamard se muestra en la Figura D.1. Una segunda compuerta de qubit-singlete es la compuerta de fase representada por  $\hat{U}_{PG}(\phi)$ , la manera en que opera es

$$\hat{U}_{PG}(\phi)|x\rangle = e^{ix\phi}|x\rangle \quad (\text{D.8})$$

y así  $\hat{U}_{PG}(\phi)|0\rangle = |0\rangle$  y  $\hat{U}_{PG}(\phi)|1\rangle = e^{i\phi}|1\rangle$ . El símbolo del circuito para esta compuerta se da en la Figura D.2.

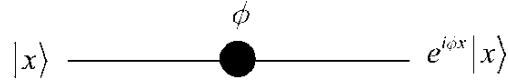


Figura D.2: Circuito simbólico de una compuerta de fase de 1-qubit. Tomada de [50].

Resulta que una combinación de las compuertas Hadamard y la de fase pueden producir varios estados de superposición de un qubit-singlete. La secuencia

$$\hat{U}_{PG}\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\hat{U}_H\hat{U}_{PG}(2\theta)\hat{U}_H|0\rangle = \cos\theta + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle, \quad (\text{D.9})$$

como se muestra en la Figura D.3, conlleva al estado puro más general.

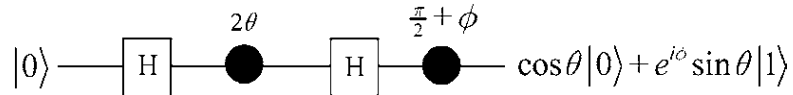


Figura D.3: Circuito para la generación de los estados de la ecuación D.9. Tomada de [50].

## Apéndice E

# Factor de Fano

En esta sección revisamos la referencia [7]. La ionización producida por partículas cargadas rápidas individuales se usa con frecuencia como una medida de su energía inicial; los efectos de fluctuación establecen un límite teórico a la precisión de este método. Se deriva una fórmula para estimar las fluctuaciones estadísticas del número de iones producidos por cantidades constantes de energía de radiación.

El número de pares de iones  $J$  producidos en un volumen de gas después de la absorción de radiación ionizante es proporcional a la cantidad  $V$  de energía absorbida. La relación  $V/J$  es generalmente del orden de magnitud de 30 a 35 eV; depende muy poco de la calidad de la radiación ionizante y comparativamente poco de la naturaleza del gas.

Con frecuencia se confía en la constancia de la relación  $V/J$  para obtener una estimación experimental de  $V$  midiendo  $J$  y multiplicándolo por un factor  $\epsilon$ . Este factor es igual a la relación de los valores medios de  $V$  y  $J$  obtenidos de un gran número de experimentos realizados en condiciones comparables.

Incluso cuando todos los factores físicos pertinentes, incluido  $V$ , se mantienen constantes, el número  $J$  está sujeto a fluctuaciones estadísticas. Es interesante conocer el alcance de estas fluctuaciones, que establecen un límite superior a la precisión de las técnicas experimentales, por ejemplo, cuando la ionización producida por partículas individuales sirve como medida de su energía inicial. Se deriva una estimación teórica aproximada de este efecto. En concreto, se propone estimar la varianza de  $J$  bajo la condición de que la pérdida de energía  $V$  tenga un valor fijo  $V_0$ , es decir, calcular el valor esperado de  $(J - J_0)^2$ , donde  $J_0 = V_0/\epsilon$  es el valor esperado de  $J$  bajo la condición declarada ( $V_0$  fijo).

Lo que se propone es un tratamiento estadístico. La producción de un número medible de ionizaciones involucra una gran cantidad de procesos elementales. Por lo tanto, el primer objetivo es expresar la varianza de  $J$  en términos de cantidades pertenecientes a procesos elementales individuales. Por ejemplo, se puede considerar como un proceso elemental el

impacto de una partícula cargada rápida contra una molécula de gas.

La probabilidad de que  $J$  asuma cualquier valor dado después de que haya tenido lugar un número fijo de impactos, o después de que una partícula haya recorrido una longitud fija de trayectoria, se puede obtener fácilmente; bajo estas condiciones, la pérdida de energía total  $V$  estaría sujeta a fluctuaciones, al igual que  $J$ . Sin embargo, lo que interesa es qué pasa en el caso opuesto de una pérdida de energía fija  $V = V_0$ , con longitud de vía y número de impactos fluctuantes; en este caso, la distribución de probabilidad de  $J$  requiere mayor investigación.

Este problema es análogo al de la dispersión en el rango de las partículas alfa, que se resuelve mediante la siguiente consideración: si una partícula pierde una cantidad de energía  $V$  a lo largo de la pista  $L$ , se espera que pierda la cantidad  $V_0$  a lo largo de una longitud de  $L + \Delta L$ , donde  $\Delta L = L(V_0 - V)/V_0$ . Aquí se ignora la fluctuación de la pérdida de energía a lo largo del  $\Delta L$ , pero esta fluctuación tiende a promediarse ya que el  $\Delta L$  puede ser positivo o negativo. De manera similar, si la partícula ha producido  $J$  ionizaciones a lo largo de  $L$  mientras pierde la energía  $V$ , producirá  $\Delta J = (V_0 - V)/\epsilon$  ionizaciones a lo largo de  $\Delta L$ . Así, la eventual fluctuación de  $J$  para  $V_0$  fija, es decir,  $(J + \Delta J) - J_0$  resulta ser igual, al menos aproximadamente, a la fluctuación  $J - V/\epsilon$  para  $L$  fijo. El punto esencial es que la cantidad  $J - V/\epsilon$ :

- coincide con  $J - J_0$  cuando  $V = V_0$ ,
- tiene el valor medio cero y, por lo tanto, su variación en tramos cortos de vía puede despreciarse, de modo que su cuadrado medio debería tener, al menos aproximadamente, el mismo valor para  $L$  fijo (o para un número fijo de impactos) como para  $V = V_0$  fijo.

Si  $n_p$  y  $E_p$ , son el número de ionizaciones y la pérdida de energía resultante del impacto  $p$ -ésimo dentro de un grupo de  $N$  impactos que ocurren en las mismas condiciones, entonces los valores medios  $\bar{n}_p = \bar{n}$  y  $\bar{E}_p = \bar{E}$  son independientes de  $p$  y

$$J = \sum_{p=1}^N n_p, \quad V = \sum_{p=1}^N E_p, \quad \epsilon = \bar{E}/\bar{n}. \quad (\text{E.1})$$

Como los resultados de los impactos sucesivos son independientes entre sí, el promedio de  $(J - V/\epsilon)^2 = [\sum_p (n_p - E_p/\epsilon)]^2$  se obtiene al sumar el promedio de  $(n_p - E_p/\epsilon)^2$  en cada impacto, y esto también es independiente de  $p$ . De aquí, para  $N = V_0/\bar{E} = J_0/\bar{n}$  fijo, la varianza deseada esta dada por

$$\langle (J - V/\epsilon)^2 \rangle_{Av} = N \langle (n - E/\epsilon)^2 \rangle_{Av} = F J_0, \quad (\text{E.2})$$

donde

$$F = \langle (n - E/\epsilon)^2 \rangle_{Av} / \bar{n}, \quad (\text{E.3})$$

al considerar que  $\bar{n} = E/\epsilon$ , ver ecuación E.1, el factor de Fano queda como

$$F = \frac{\langle (n - \bar{n})^2 \rangle_{Av}}{\bar{n}}. \quad (\text{E.4})$$

Esta expresión es la que nosotros ocupamos en nuestra series de fotones.

# Bibliografía

- [1] Wheeler, J. A. *Mathematical Foundations of Quantum Theory*; Marlow, A. R., Ed.; Academic Press: Cambridge, MA, USA, 1978; pp. 9–48.
- [2] Jacques, V.; Wu, E.; Grosshans, F.; Treussart, F.; Grangier, P.; Aspect, A.; Roch, J. F. Experimental Realization of Wheeler’s Delayed-Choice Gedanken Experiment. *Science* 2012, 315, 966–968.
- [3] Ionicioiu, R.; Terno, D. R. Proposal for a Quantum Delayed-Choice Experiment. *Phys. Rev. Lett.* 2011, 107, 230406.
- [4] Tang, J.-S.; Li, Y.-L.; Xu, X.-Y.; Xiang, G.-Y.; Li, C.-F.; Guo, G.-C. Realization of quantum Wheeler’s delayed-choice experiment. *Nat. Photonics* 2012, 6, 600–604.
- [5] Bohigas, O.; Giannoni, M.-J.; Schmit, C. Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws. *Phys. Rev. Lett.* 52, 1 (1984).
- [6] Nikolai Chernov and Roberto Markarian. (2006). *Chaotic Billiards*. American Mathematical Society.
- [7] Fano, U.; Ionization Yield of Radiations. II. The Fluctuations of the Number of Ions. *Phys. Rev.* 1947, 72, 26–29.
- [8] Relaño, A.; Gómez, J. M. G.; Molina, R. A.; Retamosa, J.; Faleiro, E. Quantum Chaos and  $1/f$  Noise. *Phys. Rev. Lett.* 2002, 89, 244102.
- [9] Mendoza, B. D.; Lara, D. A.; López-Aparicio, J.; Armendáriz, G.; López-Hernández, L.; Velázquez, V.; Hernández, E. M.; Grether, M.; López-Moreno, E.; Frank, A.; Quantum Chaos in Time Series of Single Photons as a Superposition of Wave and Particle States. *Photonic* 8, 826 (2021).
- [10] Beck, M. Comparing measurements of  $g^{(2)}(0)$  performed with different coincidence detection techniques. *J. Opt. Soc. Am. B* 2007, 24, 2972–2978.



- [11] Grangier, P.; Roger, G.; Aspect, A. Experimental Evidence for a Photon Anticorrelation Effect on a Beam Splitter: A New Light on Single-Photon Interferences. *EPL Europhys. Lett.* 1986, 1, 173–179.
- [12] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko. (Tercera edición). (2001). *Classical Mechanics*, Addison Wesley.
- [13] J. Ishiwara, *Tokyo Sugaku Buturigakkawi Kizi*, 8, 106 (1915). A. Sommerfeld, *Ann. Phys. (Leipzig)*, 51, 125 (1916). W. Wilson, *Phil. Mag.*, 29, 795 (1915).
- [14] Relaño Pérez, A.; Tesis Doctoral (2004). *Caracterización del caos cuántico mediante series temporales*. Universidad Complutense de Madrid, España.
- [15] Fernández, G.; Hernández, E.; Hautefeuille, M.; Landa, E.; Morales, I. O.; Velázquez, V.; Fossion, R.; Vargas, C.E.; Frank, A. Quantum interference vs. quantum chaos in the nuclear shell model. *J. Phys. Conf. Ser.* 2015, 578, 012014.
- [16] Oberholzer, S.; Sukhorukov, E.V.; Schönenberger, C.; Crossover between classical and quantum shot noise in chaotic cavities. *Nature* 2002, 415, 765–767.
- [17] Ullmo, D.; Tomsovic, S.; Introduction to Quantum Chaos. 5(7): 1035–1048, 2014.
- [18] Casati, G.; Prosen, T. Quantum chaos and the double-slit experiment. *Phys. Rev. A* 2005, 72, 032111.
- [19] López-Ruiz, R.; Mancini, H.L.; Calbet, X. A statistical measure of complexity. *Phys. Lett. A* 1995, 209, 321–326.
- [20] Pineda, O. K.; Kim, H.; Gershenson, C. A Novel Antifragility Measure Based on Satisfaction and Its Application to Random and Biological Boolean Networks. *Complexity* 2019, 2019, 372862.
- [21] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Nature*, 177 (1956), 27. For a complete and historical account of intensity interferometry, see R. Hanbury Brown, *The Intensity Interferometer* (London: Taylor and Francis, 1974).
- [22] R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **130** (1963), 2529; *Phys. Rev.*, **131** (1963), 2766; U. M. Titulaer and R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **140** (1965), B676. See also C. L. Mehta and E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev.*, **138** (1965), B274.
- [23] Shih, Yanhua. (2011). *An Introduction to Quantum Optics Photon and Biphoton Physics*. CRC Press.

- [24] Van der Pol, B., “On relaxation-oscillations”, *The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. & J. of Sci.*, 2(7), 978-992 (1927).
- [25] FitzHugh, R., “Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes”, *Biophysics J*, 1, 445-466, (1961).
- [26] Nagumo, J., Arimoto, S. and Yoshizawa, S. “An active pulse transmission line simulating nerve axon”, *Proc. IRE*, 50, 2061-2070, (1962).
- [27] Colaboradores de Wikipedia. Wikipedia: Atractor de Lorentz [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2022 [consulta: 15 de junio de 2022]. Disponible en “[https://es.wikipedia.org/wiki/Atractor\\_de\\_Lorenz](https://es.wikipedia.org/wiki/Atractor_de_Lorenz)”.
- [28] M. V. Berry and M. Tabor, *Proc. R. Soc. Lond. A* 356, 375 (1977).
- [29] Ya. G. Sinái, “Dynamical Systems with Elastic Reflections”, *Russian Math. Surveys*, 25, (1970) pp. 137-191.
- [30] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Academic, New York, 1991).
- [31] Birkhoff, G. D. “Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom.” *Trans. Amer. Math. Soc.* 18, 199-300, 1917.
- [32] Birkhoff, G. D. and Langer R. E. “The Boundary Problems and Developments Associated with a System of Ordinary Differential Equations of First Order.” *Proc. Amer. Acad. Arts and Sci.* 58, 49-128, 1923.
- [33] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, *J. Physique Lett.* 45 pp 1015-1022 (1984).
- [34] Carlo Beenakker and Christian Schönberger, “Quantum Shot Noise”, *Physics Today* 56, 5, 37 (2003).
- [35] Kobayashi, K.; Hashisaka, M.; Shot Noise in Mesoscopic Systems: From Single Particles to Quantum Liquids. *J. Phys. Soc. Jpn.* 90, 102001 (2021).
- [36] J. A. Wheeler, in *Quantum Theory and Measurement*, J. A. Wheeler, W. H. Zurek, Eds. (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1984), pp. 182–213.
- [37] N. Bohr, in *Quantum Theory and Measurement*, J. A. Wheeler, W. H. Zurek, Eds. (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1984), pp. 9–49.
- [38] A. Beveratos et al., *Eur. Phys. J. D* 18, 191 (2002).
- [39] C. E. Shannon and W. Weaver, *The mathematical theory of communication* (University of Illinois Press, Urbana, IL, 1949).

- [40] Jacques, V.; Wu, E.; Grosshans, F.; Treussart, F.; Grangier, P.; Aspect, A.; Roch, J.F. Delayed-choice test of quantum complementarity with interfering single photons. *Phys. Rev. Lett.* 2008, 100, 220402.
- [41] Lawson-Daku, B. J.; Asimov, R.; Gorceix, O.; Miniatura, C.; Robert, J.; Baudon, J. Delayed choices in atom Stern–Gerlach interferometry. *Phys. Rev. A* 1996, 54, 5042–5047.
- [42] Kim, Y. H.; Yu, R.; Kulik, S. P.; Shih, Y.; Scully, M. O. Delayed choice quantum eraser. *Phys. Rev. Lett.* 2000, 84, 1–5.
- [43] Hellmut, T.; Walther, H.; Zajonc, A. G.; Schleich, W. Delayed-choice experiments in quantum interference. *Phys. Rev. A* 1987, 35, 2532–2541.
- [44] Yan, H.; Liao, K.; Deng, Z.; He, J.; Xue, Z.-Y.; Zhang, Z.-M.; Zhu, S.-L. Experimental observation of simultaneous wave and particle behavior in a narrowband single-photon wave packet. *Phys. Rev. A* 2015, 91, 042132.
- [45] Agam, O.; Aleiner, I.; Larkin, A. Shot Noise in Chaotic Systems: Classical to Quantum Crossover. *Phys. Rev. Lett.* 2000, 85, 3153–3156.
- [46] Kryuchkian, G. Y.; Manvelyan, S.B. Quantum Dissipative Chaos in the Statistics of Excitation Numbers. *Phys. Rev. Lett.* 2002, 88, 094101.
- [47] Bustillos, D. A. L.; López-Hernández, L.; Ramírez-Cruz, N.; Hernández, E. M.; Fossion, R.; López-Moreno, E.; Vargas, C. E.; Velázquez, V. Nuclear energy level complexity: Fano factor signature of chaotic behavior of nearest-neighbor time-series analysis. *Phys. Rev. C* 2020, 102, 044301.
- [48] Landa, E.; Morales, I. O.; Fossion, R.; Stránský, P.; Velázquez, V.; López Vieyra, J. C.; Frank, A. Criticality and long-range correlations in time series in classical and quantum systems. *Phys. Rev. E* 2011, 84, 016224.
- [49] Li, P.-B.; Li, F.-L. Proposal for a quantum delayed-choice experiment with a spin-mechanical setup. *Phys. Rev. A* 2016, 94, 042130.
- [50] Gerry, C.; Night, C. *Introductory Quantum Optics*; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2005.
- [51] Rajdl, K.; Lansky, P. Shot-noise Fano factor. *Phys. Rev. E* 2015, 92, 052135.
- [52] Caudillo Viurquez, Raúl. Tesis de licenciatura (2013). Experimento cuántico de Young. UNAM-Facultad de ciencias, México.

[53] Sakurai, J. J.; Napolitano, J. (Segunda edición). (2011). Modern Quantum Mechanics. Addison-Wesley.