UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo
Centro de Ciencias Matemáticas

Indivisibilidad de espacios de Urysohn

Tesis
PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
David Alvarado Cortés

TUTOR: Osvaldo Guzmán González
Centro de Ciencias Matemáticas

Morelia, Michoacán, agosto, 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo
Centro de Ciencias Matemáticas

Indivisibilidad de espacios de Urysohn

Tesis
PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
David Alvarado Cortés

TUTOR: Osvaldo Guzmán González
Centro de Ciencias Matemáticas

Morelia, Michoacán, agosto, 2022

Introducción

En 1924 el matemático ruso Pavel Samuilovich Urysohn (1898-1924), impulsado por el matemático francés Maurice René Fréchet (1878-1973), descubrió la existencia de un espacio completo y ultrahomogéneo que es universal para la clase de espacios métricos separables. Conocido ahora como el espacio métrico universal de Uryshon. Lamentablemente Urysohn nunca pudo publicar este trabajo debido a su trágico fallecimiento a la edad de 26 años[1]. Sin embargo, su compatriota y amigo Pavel Sergeevich Alexandroff (1896-1982), rescataría este trabajo para ser publicado post mortem.

En 1986 el matemático checo Miroslav Katětov (1918-1995) presentó una construcción distinta del espacio universal de Urysohn lo cual le dio nueva relevancia al estudio de este espacio.

Más adelante, derivado del trabajo del matemático ruso Vitali Davidovich Milman, surge en 1971 el problema de distorción en ℓ_2 (donde ℓ_2 denota el espacio de Banach de las sucesiones reales $\{x_n\}_{n\in\omega}$ tales que $\sum_0^\infty |x_n|^2 < \infty$), este problema fue resuelto en 1994 por los matemáticos estadounidenses Edward Wilfred Odell, Jr. (1947-2013) y Thomas Schlumprecht.

En 2005 los matemáticos Alexander Sotirios Kechris (de origen griego), Vladimir Pestov (de origen siberiano) y Stevo Todorčević (de origen serbio) descubrieron una relación entre la teoría estructural de Ramsey, la teoría de Fraïssé y la dinámica topológica de automorfismos de grupos. En [1] es presentada una definición de oscilación estable, en la cual no vamos a profundizar pero gracias a los resultados ahí presentados para espacios métricos ultrahomogeneos podemos enunciar el problema de distorsión para ℓ_2 de la siguiente manera:

Primero definimos $\mathbb{S}^\infty$ como la esfera unitaria en ℓ_2. Si X es un espacio métrico y $\varepsilon \geq 0$, decimos que X es ε-indivisible si para cada $k \in \omega \setminus \{0\}$ y cada $\chi : X \longrightarrow k$

[1]Más sobre la vida de Urysoh puede ser encontrado en [2]

existe $i \in k$ y $Y \leq X$ con $Y \cong X$ tales que $Y \subseteq \{x \in X | \exists y \in \chi^{-1}(i) : d(x,y) \leq \varepsilon\}$. Decimos que X es indivisible si es 0-indivisible y que es indivisible por aproximaciones si para cada $\varepsilon > 0$ es ε-indivisible. De este modo el problema de distorsión para ℓ_2 es la pregunta: ¿Es $\mathbb{S}^\infty$ indivisible por aproximaciones?. La respuesta dada por Odell y Schlumprecht es negativa.

De manera similar al espacio universal de Urysohn. Para la clase de espacios métricos con ciertos conjuntos de distancias S puede definirse su espacio de Urysohn como el espacio ultrahomogeno tal que todo espacio métrico finito con distancias en S puede ser encajado en él, este espacio es único salvo isomorfismos y es denotado por $\mathbb{U}_S$. Con esto en mente, al espacio $\mathbb{U}_{[0,1]}$ se le conoce como la esfera de Urysohn.

La pregunta entonces se tornó en saber si la respuesta para el problema de distorsión en $\mathbb{U}_{[0,1]}$ es la misma que para $\mathbb{S}^\infty$. En ese sentido, en 2008 el matemático español Jorge Lopez-Abad y el matemático francés Lionel Nguyen Van Thé demostraron que tener una respuesta positiva al problema de distorsión en $\mathbb{U}_{[0,1]}$ es equivalente a que para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ se satisfaga que $\mathbb{U}_n$ es indivisible.

Fue entonces que, en 2009, L. Nguyen Van Thé junto con el matemático canadiense Norbert W. Sauer demostraron en [3] que para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, $\mathbb{U}_n$ es indivisible. Dando solución al problema de distorsión en $\mathbb{U}_{[0,1]}$.

En este trabajo se desarrolla la demostración de que para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, $\mathbb{U}_n$ es indivisible, siguiendo la demostración de Sauer en [6]. Pese a lo mencionado con anterioridad, es relevante remarcar que el estudio de los espacios $\mathbb{U}_n$ nos resulta interesante por sí mismo.

En el primer capítulo se presenta una breve introducción a los límites de Fraïssé, enfatizando en el hecho de que esta exposición es breve ya que no es el objetivo realizar un estudio minucioso de estos conceptos, más bien el objetivo de este capítulo es el de dar definiciones necesarias para entender el resto del texto y presentar el teorema de Fraïssé, con ayuda de este último se definen más adelante los espacios de Urysohn.

En el segundo capítulo se introduce el concepto de espacio de Urysohn, para conseguirlo se procede demostrando el teorema de Delhommé-Laflamme-Pouzet-Saver con ayuda del cual se verifica que para ciertos conjuntos de distancias S la clase de espacios métricos finitos con distancias en S es una clase de Fraïssé.

Por último en el tercer capítulo (cuyos resultados son obtenidos de [6]) se comienza definiendo el concepto de funciones tipo, que son funciones que codifican puntos nuevos para un espacio finito en el sentido que son funciones del espacio finito en el conjunto de distancias, por lo que existen puntos en el respectivo espacio de Urysohn cuya distancia al espacio finito es la dictada por la función, al conjunto de puntos que satisface esto se le conoce como la órbita de la función tipo y la primera parte del capítulo se basa en estudiar dichas órbitas. En la segunda sección restringimos el estudio a espacios con distancias en un número natural, se define el concepto de extensibilidad de una función en un conjunto, cuya idea central es que una función es extensible en un conjunto si dicho conjunto constituye una gran parte de su órbita. Más adelante podemos observar la demostración de LNVT y Sauer de que si una función es extensible en un conjunto entonces existe una copia del respectivo espacio de Urysohn donde la órbita de la función se queda contenida en el conjunto donde es extensible. Finalmente se observa la demostración deseada.

Índice general

1 Límites de Fraïssé

En este capítulo se da una introducción a los límite de Fraïssé, las definiciones y notaciones usadas serán empleadas a lo largo del trabajo. La teoría de Fraïssé debe su nombre al matemático francés Ronald Fraïssé quien en 1954 publicó un artículo donde describe una manera de construir los racionales usando la clase de los órdenes lineales finitos como si fuesen aproximaciones. Esta teoría es bastante más extensa de lo aquí expuesto, donde nos centramos en definir las clases de Fraïssé para enunciar el teorema que asegura la existencia de límites de Fraïssé para dichas clases. Enunciamos un lema que, al igual que los comentarios que complementan las definiciones, consideramos folklore.

A lo largo de este capítulo consideraremos $\boldsymbol{L} = \{R_i | i \in I\}$ un lenguaje relacional.

Definición 1.1. *Sean X, Y dos L-estructuras.*

1. *Un **encaje** de X a Y es una función inyectiva $\alpha : X \longrightarrow Y$ de tal modo que para cada $i \in I$ y cada $x_1, \cdots, x_n \in X$ se satisface que:*

$$(x_1, \cdots, x_n) \in R_i^X \text{ si y solo si } (\alpha(x_1), \cdots, \alpha(x_n)) \in R_i^Y.$$

2. *Un **isomorfismo** de X a Y es un encaje sobreyectivo de X a Y.*

Notación 1.2.

- *Si existe un encaje de X a Y denotaremos $\boldsymbol{X \lesssim Y}$, si además $X \subseteq Y$, entonces denotaremos $\boldsymbol{X \leq Y}$.*
- *Si existe un isomorfismo de X a Y diremos que X e Y son isomorfos lo cual denotamos por $\boldsymbol{X \cong Y}$.*
- $\boldsymbol{\mathbb{P}(X)} = \{\overline{X} \subseteq X | \overline{X} \cong X\}$.

$\mathbb{P}(X)$ es usualmente denotado como $\binom{X}{X}$ en la literatura, sin embargo la notación aquí empleada es elegida debido al interés a futuro de trabajar con el orden parcial $(\mathbb{P}(X), \leq)$. Además, a los elementos de $\mathbb{P}(X)$ los llamaremos **copias** de X.

Definición 1.3. *Sea $\mathcal{K}$ una clase de L-estructuras*

1. *$\mathcal{K}$ es **hereditaria** si para toda L-estructura X y cada $Y \in \mathcal{K}$, $X \lesssim Y$ implica que $X \in \mathcal{K}$.*

2. *$\mathcal{K}$ satisface la **propiedad de encaje conjunto** (JEP por sus siglas en ingles "joint embedding property") si para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{K}$, existe $Z \in \mathcal{K}$ tal que $X, Y \lesssim Z$.*

3. *$\mathcal{K}$ satisface la **propiedad de amalgamación** si para cualesquiera $X, Y_0, Y_1 \in \mathcal{K}$ y encajes $\alpha_0 : X \longrightarrow Y_0$ y $\alpha_1 : X \longrightarrow Y_1$, existen $Z \in \mathcal{K}$ y encajes $\beta_0 : Y_0 \longrightarrow Z$, $\beta_1 : Y_1 \longrightarrow Z$ tales que $\beta_0 \circ \alpha_0 = \beta_1 \circ \alpha_1$. En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
& Y_0 \arrow[dr, "\beta_0"] & \\
X \arrow[ur, "\alpha_0"] \arrow[dr, "\alpha_1"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & Z \\
& Y_1 \arrow[ur, "\beta_1"'] &
\end{tikzcd}$$

4. *$\mathcal{K}$ satisface la **propiedad de amalgamación fuerte** si además de satisfacer la propiedad de amalgamación sucede que $\beta_0[\alpha_0[X]] = \beta_0[Y_0] \cap \beta_1[Y_1] = \beta_1[\alpha_1[X]]$.*

La JEP no es un caso particular de la propiedad de amalgamación, podría pensarse que esto es cierto considerando $X = \varnothing$, sin embargo $\varnothing$ no es una L-estructura. Si $W \in \mathcal{K}$ es tal que para todo $X \in \mathcal{K}$ se satisface que $W \lesssim X$, entonces decimos que W es una **estructura inicial débil**. Considerando esta definición tenemos el siguiente lema.

Lema 1.4. *Sea $\mathcal{K}$ una clase de L-estructuras. Si $\mathcal{K}$ tiene una estructura inicial débil y satisface la propiedad de amalgamación, entonces $\mathcal{K}$ satisface la JEP.*

Demostración. Sean $W \in \mathcal{K}$ estructura inicial débil y $X, Y \in \mathcal{K}$, entonces existen encajes $\alpha_0 : W \longrightarrow X$ y $\alpha_1 : W \longrightarrow Y$. Por la propiedad de amalgamación, existen $Z \in \mathcal{K}$ y encajes $\beta_0 : X \longrightarrow Z$ y $\beta_1 : Y \longrightarrow Z$. Es decir $X, Y \lesssim Z$. ■

Definición 1.5. *Una estructura es **ultrahomogénea** si todo isomorfismo entre subestructuras finitas puede extenderse a un automorfismo.*
Es decir, X es ultrahomogénea si para cualesquiera $Y, Z \leq X$ subestructuras finitas y todo isomorfismo $\alpha : Y \longrightarrow Z$, existe $\overline{\alpha} : X \longrightarrow X$ isomorfismo tal que $\overline{\alpha} \restriction_Y = \alpha$.

Definición 1.6. *Sea X una L-estructura,* **Age(X)** *es la clase de las L-estructuras finitas que pueden encajarse en X.*

Si L es un lenguaje numerable y X es una L-estructura numerable, entonces $\mathsf{Age}(X)$ contiene una cantidad numerable de tipos de isomorfía, es decir una cantidad numerable de subclases donde los elementos en cada clase son isomorfos. En este caso diremos que $\mathsf{Age}(X)$ es **numerable**.

Análogamente, una clase $\mathcal{K}$ de L-estructuras es llamada **numerable** si contiene únicamente una cantidad numerable de tipos de isomorfía.

Definición 1.7. *Una clase $\mathcal{K}$ de L-estructuras finitas es una **clase de Fraïssé** si es numerable, es hereditaria, contiene estructuras finitas arbitrariamente grandes, satisface la JEP y satisface la propiedad de amalgamación.*

Si X es una L-estructura numerable y ultrahomogénea, entonces $\mathsf{Age}(X)$ es una clase de Fraïssé.

Teorema 1.8. *(Fraïssé) Sea L un lenguaje constituido solamente de símbolos relacionales y $\mathcal{K}$ una clase de Fraïssé de L-estructuras. Entonces existe una L-estructura F, única salvo isomorfismo, que es numerable, ultrahomogénea y tal que $\mathsf{Age}(F) = \mathcal{K}$.*
F es llamado el límite de Fraïssé de $\mathcal{K}$, denotado $\boldsymbol{F}$ **lím($\boldsymbol{\mathcal{K}}$)**.

2 Espacios de Urysohn

En este capítulo hablaremos de espacios de Urysohn, los cuales son límites de Fraïssé de clases de espacios métricos, su nombre se debe al matemático ruso Pável Samuílovich Urysohn de quien se conoce su trabajo respecto al tema gracias a publicaciones post mortem. Durante el capítulo se enuncian definiciones y notaciones con el objetivo de simplificar la manera de referirnos a nociones de espacios métricos, los resultados están orientados a conocer aquellas clases de espacios métricos que son de Fraïsse.

Un espacio métrico (X, d^X)[1] puede ser visto como una estructura relacional considerando para cada $\delta \in (0, \infty)$ el símbolo de aridad 2, R_δ interpretado como:

$$(x, y) \in R_\delta^X \text{ si y solo si } d^X(x, y) = \delta.$$

Con esta notación, sea $L = \{R_\delta | \delta \in [0, \infty)\}$ un lenguaje relacional. Una L-estructura X es un espacio métrico si

- $R_0^X = \{(x, x) | x \in X\}$.
- Para cada $\delta \in (0, \infty)$ si $(x, y) \in R_\delta^X$, entonces $(y, x) \in R_\delta^X$.
- Si $(x, y) \in R_{\delta_1}^X$, $(x, z) \in R_{\delta_2}^X$ y $(z, y) \in R_{\delta_3}^X$, entonces $\delta_1 \leq \delta_2 + \delta_3$.

De este modo, en este caso las estructuras son espacios métricos mientras que los encajes son encajes isométricos.

[1] Hacemos notar que no todo espacio métrico puede encajarse en $\mathbb{R}^n$, para verificar esto consideremos al espacio $(X, d\ )$, donde $X = \{a, b, x, y\}$ y

$$d(a, b) = d(x, y) = d(a, x) = d(b, y) = 1,$$

mientras que

$$d(a, y) = d(b, x) = 2,$$

este es un espacio métrico que no puede ser encajado en $\mathbb{R}^n$, ya que de existir el encaje α que lo atestigüe tendríamos que:

$$d(\alpha(a), \alpha(y)) = 2 = 1 + 1 = d(\alpha(a), \alpha(x)) + d(\alpha(x), \alpha(y))$$

y ya que estamos en $\mathbb{R}^n$ esto implica que $\alpha(a), \alpha(x), \alpha(y)$ son colineales, análogamente $\alpha(a), \alpha(b), \alpha(y)$ son colineales de modo que $\alpha(x) = \alpha(b)$, lo cual no puede ocurrir.

Dado un conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^+$, una **$\mathcal{D}$-gráfica** es una estructura G en el lenguaje $\{R_\delta | \delta \in \mathcal{D}\}$ donde cada R_δ^G es binaria, simétrica e irreflexiva. El espacio métrico (X, d^X) también puede ser considerado como una gráfica con peso.

No haremos distinción entre estos dos conceptos y usaremos la notación estándar para hablar de espacios métricos, pero hacemos mención de las estructuras relacionales para hacer uso de lo visto anteriormente acerca de límites de Fraïssé.

Definición 2.1. *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, el triángulo {a,b,c} es métrico si:*

1. $a \leq b + c$,
2. $b \leq a + c$ *y*
3. $c \leq a + b$.

Esto lo denotamos por $\triangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

Notemos que 2. y 3. se pueden abreviar como $|b - c| \leq a$.

Definición 2.2. *Sean (X, d^X) y (Y, d^Y) espacios métricos.*

1. *Una función $\mathfrak{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es de **Katětov** sobre X si para todo $x, y \in X$, $\triangle(d^X(x, y), \mathfrak{f}(x), \mathfrak{f}(y))$.*
2. *Dados $X \leq Y$ y $\mathfrak{f}$ una función de Katětov sobre X. Un punto $y \in Y$ **realiza** a $\mathfrak{f}$ sobre X si para todo $x \in X$*

$$d^Y(x, y) = \mathfrak{f}(x).$$

Dada una función de Katětov $\mathfrak{f}$ sobre un espacio X, si para todo $x \in X$ se tiene que $\mathfrak{f}(x) \neq 0$, identificamos a $\mathfrak{f}$ con un nuevo punto con el cual extender el espacio X, si por otro lado existe $x \in X$ tal que $\mathfrak{f}(x) = 0$ identificamos a $\mathfrak{f}$ con x. En cualquier caso identificamos a las funciones de Katětov con puntos de un espacio métrico, de este modo se justifica definir en $\boldsymbol{X_\mathfrak{f} := (X \cup \{\mathfrak{f}\})}$ una métrica $\overline{d^X}$ de tal modo que:

- Para cada $x, y \in X$, $\overline{d^X}(x, y) = d^X(x, y)$.
- Para cada $x \in X$, $\overline{d^X}(x, \mathfrak{f}) = \mathfrak{f}(x)$.

De este modo podemos pensar que las funciones de Katětov codifican nuevos puntos para el espacio a partir de la distancia que deben de tener con los puntos preexistentes.

Con esta definición se pueden caracterizar los espacios métricos numerables ultrahomogéneos.

Proposición 2.3. *Sea X un espacio métrico numerable. X es ultrahomogéneo si y solo si para todo subespacio finito $Y \subseteq X$ y para toda $\mathfrak{f}$ función de Katětov sobre Y, si $Y_{\mathfrak{f}}$ se encaja en X, entonces existe $x \in X$ que realiza a $\mathfrak{f}$ sobre Y.*

Demostración. Primero supongamos que X es ultrahomogéneo y sean $Y \subseteq X$ un subespacio finito y $\mathfrak{f}$ una función de Katětov sobre Y, tal que $Y_{\mathfrak{f}}$ se encaja en X. Veamos que existe $x \in X$ que realiza a $\mathfrak{f}$ sobre Y.

Sea $\varphi : Y_{\mathfrak{f}} \longrightarrow X$ un encaje isométrico. Sabemos que $\psi := \varphi \upharpoonright_Y : Y \longrightarrow \varphi(Y)$ es una isometría.

Como X es ultrahomogéneo, podemos extender ψ con una isometría $\overline{\psi} : X \longrightarrow X$.

De este modo $\overline{\psi}^{-1}(\varphi(\mathfrak{f}))$ realiza a $\mathfrak{f}$ sobre Y, ya que, para cualquier $y \in Y$:

$$\begin{aligned} d^X\left(y, \overline{\psi}^{-1}(\varphi(\mathfrak{f}))\right) =& d^X(\overline{\psi}(y), \varphi(\mathfrak{f})) \\ =& d^X(\psi(y), \varphi(\mathfrak{f})) \\ =& d^X(\varphi(y), \varphi(\mathfrak{f})) \\ =& d^{Y_{\mathfrak{f}}}(y, \mathfrak{f}) \\ =& \mathfrak{f}(y). \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que para todo subespacio finito $Y \subseteq X$ y para toda $\mathfrak{f}$ función de Katětov sobre Y, si $Y_{\mathfrak{f}}$ se encaja en X, entonces existe $x \in X$ que realiza a $\mathfrak{f}$ sobre Y. Veamos que X es ultrahomogéneo.

Sean $Y, Z \subseteq X$ subespacios finitos de X con $Y = \{y_0, \cdots, y_n\} \cong \{z_0, \cdots .z_n\} = Z$ y $\varphi : Y \longrightarrow Z$ una isometría de tal modo que para cada $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $\varphi(y_k) = z_k$.

Enumeremos a $X = \{x_m | m \in \omega\}$. Continuaremos la demostración usando el método de back and forth.

Para cada $i \leq n$, definimos $\sigma(i) = i$.

(I) Sea $\sigma(n+1) = \text{mín}\{m | x_m \notin Y\}$. Definimos $y_{n+1} = x_{\sigma(n+1)}$ y $Y^{n+1} = Y \cup \{y_{n+1}\}$.

Sea $\mathfrak{f}_{n+1} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ de tal modo que para cada $k \leq n$,

$$\mathfrak{f}_{n+1}(y_k) = d^X(y_k, y_{n+1}),$$

$\mathfrak{f}_{n+1}$ es función de Katětov sobre Y. Ahora definimos $\bar{\mathfrak{f}}_{n+1} = \mathfrak{f}_{n+1} \circ \varphi^{-1}$ la cual es función de Katětov sobre Z.

Sea $\psi_{n+1} : Z \cup \{\bar{\mathfrak{f}}_{n+1}\} \longrightarrow Y^{n+1}$ tal que para cada $k \leq n$, $\psi_{n+1}(z_k) = y_k = \varphi^{-1}(z_k)$ y $\psi_{n+1}(\bar{\mathfrak{f}}_{n+1}) = y_{n+1}$. Tenemos que ψ_{n+1} es un encaje.

Por hipótesis, existe $z_{n+1} \in X$ que realiza a $\bar{\mathfrak{f}}_{n+1}$, es decir, tal que para todo $k \leq n$, $d^Z(z_k, z_{n+1}) = \bar{\mathfrak{f}}_{n+1}(z_k)$.

Sea $Z^{n+1} = Z \cup \{z_{n+1}\}$, definimos $\varphi(y_{n+1}) = z_{n+1}$.

(II) Sea $\sigma(n+2) = \text{mín}\{m | x_m \notin Z^{n+1}\}$. Definimos $z_{n+2} = x_{\sigma(n+2)}$ y también $Z^{n+2} = Z^{n+1} \cup \{z_{n+2}\}$.

Sea $\mathfrak{g}_{n+2} : Z^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ de tal modo que para cada $k \leq n+1$,

$$\mathfrak{g}_{n+2}(z_k) = d^X(z_k, z_{n+2}),$$

$\mathfrak{g}_{n+2}$ es función de Katětov sobre Z^{n+1}. Ahora definimos $\bar{\mathfrak{g}}_{n+2} = \mathfrak{g}_{n+2} \circ \varphi$ la cual es función de Katětov sobre Y^{n+1}.

De manera análoga a como se hizo antes existe un encaje ψ_{n+2} de $Y^{n+1} \cup \{\bar{\mathfrak{g}}_{n+2}\}$ en X.

Por hipótesis, existe $y_{n+2} \in X$ que realiza a $\bar{\mathfrak{g}}_{n+2}$, es decir, tal que para todo $k \leq n+1$, $d^Y(y_k, y_n + 2) = \bar{\mathfrak{g}}_{n+2}(y_k)$.

Sea $Y^{n+2} = Y^{n+1} \cup \{y_{n+2}\}$, definimos $\varphi(y_{n+2}) = z_{n+2}$.

Continuamos este proceso construyendo conjuntos Y^{n+i}, X^{n+i} y extendiendo la función φ para ser una isometría entre estos dos últimos, de modo que cuando i es impar procedemos de manera análoga a como se hizo en (I) y cuando i es par procedemos de manera análoga a como se hizo en (II).

Después de ω pasos, obtenemos $\varphi : \{y_k | k \in \omega\} \longrightarrow \{z_k | k \in \omega\}$ isometría, pero notemos que $\{y_k | k \in \omega\} = X = \{z_k | k \in \omega\}$.

Por tanto X es ultrahomogéneo. ■

Proposición 2.4. *La clase $\mathcal{M}$ de todos los espacios métricos finitos tiene la propiedad de amalgamación fuerte.*

Demostración. Sean $X, Y_0, Y_1 \in \mathcal{M}$, $\alpha_0 : X \longrightarrow Y_0$ y $\alpha_1 : X \longrightarrow Y_1$ encajes isométricos. Deseamos encontrar un $Z \in \mathcal{M}$ y dos encajes $\beta_0 : Y_0 \longrightarrow Z$ y $\beta_1 : Y_1 \longrightarrow Z$ tales que $\beta_0 \circ \alpha_0 = \beta_1 \circ \alpha_1$ y $\beta_0[\alpha_0[X]] = \beta_0[Y_0] \cap \beta_1[Y_1] = \beta_1[\alpha_1[X]]$.

Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $X \subseteq Y_0, Y_1$ y que $Y_0 \cap Y_1 = X$.
De este modo d^{Y_0} y d^{Y_1} coinciden en X, en donde son iguales a d^X. Así, deseamos probar que $d^{Y_0} \cup d^{Y_1}$ puede extenderse a una métrica en $Y_0 \cup Y_1$.

Sea $Z = Y_0 \cup Y_1$, consideramos (Z, λ) como gráfica con peso, donde $\lambda \subseteq Z^2 \times \mathbb{R}$ asigna un peso a las aristas, es decir, $\lambda = d^{Y_0} \cup d^{Y_1}$, de este modo tenemos que $\mathsf{dom}(\lambda) = Y_0^2 \cup Y_1^2$

Para $x, y \in Z$ y $n \in \omega \setminus \{0\}$ definimos un camino de x a y como una sucesión finita $\gamma = (z_i)_{i \leq n}$ tal que $z_0 = x$, $z_n = y$ y para cada $i \leq n$ se satisface que $(z_i, z_{i+1}) \in dom(\lambda)$.
La longitud de γ es definida como

$$\|\gamma\| = \sum_{i<n} \lambda(z_i, z_{i+1}).$$

Ahora, para cada $(x, y) \in Z^2$ denotemos por $P(x, y)$ al conjunto de caminos de x a y, por lo anterior, tenemos que para todo $\gamma \in P(x, y)$, $\lambda(x, y) \leq \|\gamma\|$.

Con esto, para todo $x, y \in Z$ se define

$$d^Z(x, y) = \inf\{\|\gamma\| | \gamma \in \ P(x, y)\}.$$

Veamos que dado $i \in 2$ se satisface que $d^Z \restriction_{Y_i} = d^{Y_i}$. Para esto, sean $a, b \in Y_i$, tenemos que $d^Z(a, b) = \inf\{\|\gamma\| | \gamma \in \ P(a, b)\}$, pero $\overline{\gamma} = (a, b)$ es un camino de a a b para el cual $\|\overline{\gamma}\| = d^{Y_i}(a, b)$, ahora, dado $\gamma \in P(a, b)$ con $\gamma = (z_k)_{k \leq n}$, nombremos $\gamma' = (w_j)_{j \leq m} = (z_k)_{k \leq n} \cap Y_i$, de este modo se satisface la desigualdad $\|\gamma\| \geq \|\gamma'\| = \sum_{j<m} \lambda(w_j, w_{j+1}) = \sum_{j<m} d^{Y_i}(w_j, w_{j+1}) \geq d^{Y_i}(a, b)$. Por tanto concluimos que $d^Z(a, b) = d^{Y_i}(a, b)$.

Por como se definió la longitud de un camino es claro que d^Z es métrica y cumple con lo deseado. ■

Notemos que $\mathcal{M}$ no es una clase de Fraïssé ya que no es numerable. Este problema es arreglado al restringir el conjunto de distancias a un subconjunto numerable de $(0,\infty)$, por ejemplo $\mathbb{Q}\cap(0,\infty)$ o en el caso de interés de este trabajo $\omega\cap(0,r]$ para $r\in\omega$. En este último caso la propiedad de amalgamación sigue conservándose pero es necesario realizar un cambio en la demostración de la proposición 2.4 cambiando $\|\gamma\|$ por $\|\gamma\|_{\leq r}=\text{mín}(\|\gamma\|,r)$.

Notación 2.5. *Sea (X,d) un espacio métrico,* $\textbf{dist}(\boldsymbol{X})=\mathsf{Im}(d)$.
Es decir, $\mathsf{dist}(X)$ *es el conjunto de las distancias entre puntos de X.*

De una manera más general, para $S\subseteq[0,\infty)$ consideramos a $\boldsymbol{\mathcal{M}_S}$ como la clase de espacios métricos finitos con distancias en S. Deseamos ver para que conjuntos S se tiene la propiedad de amalgamación.

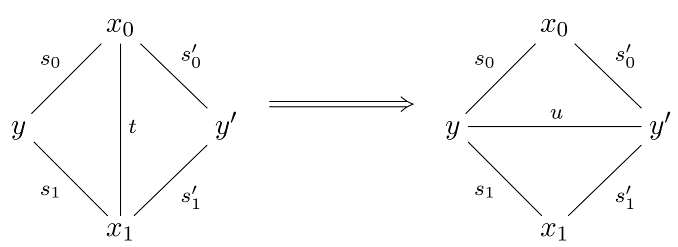
Definición 2.6. *Sea $S\subseteq[0,\infty)$ con $0\in S$. S satisface la* ***propiedad de los 4 valores*** *si para cualesquiera $s_0,s_1,s_0',s_1'\in S$ si existe $t\in S$ tal que*

$$\triangle(t,s_0,s_1)\quad y\quad \triangle(t,s_0',s_1').$$

Entonces existe $u\in S$ tal que

$$\triangle(u,s_0,s_0')\quad y\quad \triangle(u,s_1,s_1').$$

En otras palabras, si la gráfica con peso $(\{x_0,x_1,y,y'\},\delta)$, donde δ toma valores en S, es métrica, entonces δ puede extenderse a una métrica d de tal modo que $d(y,y')=u$, como se muestra en el siguiente diagrama.



Teorema 2.7. *(Delhommé-Laflamme-Pouzet-Saver) Sea $S\subseteq[0,\infty)$ con $0\in S$, los siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{M}_S$ tiene la propiedad de amalgamación fuerte.*

2. *$\mathcal{M}_S$ tiene la propiedad de amalgamación.*

3. *S satisface la condición de los 4 valores*

Demostración. 1. implica 2. es inmediato.

Veamos que 2. implica 3.

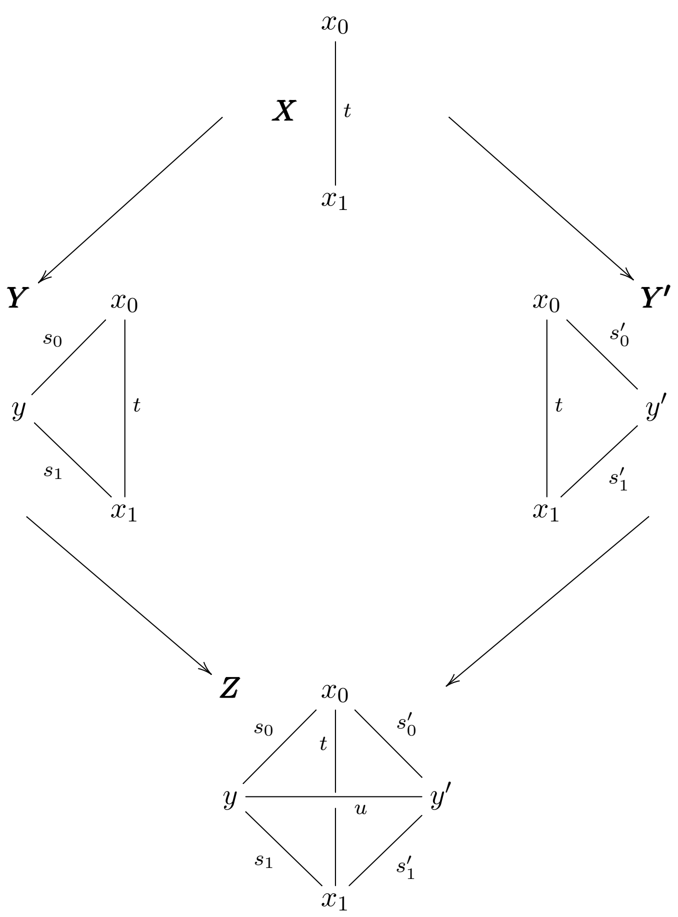
Sean $s_0, s_1, s'_0, s'_1 \in S$ tales que existe $t \in S$ con $\triangle(t, s_0, s_1)$ y $\triangle(t, s'_0, s'_1)$.

Definimos a $Y = \{x_0, x_1, y\}$ y a $Y' = \{x_0, x_1, y'\}$ como espacios métricos con d^Y y $d^{Y'}$ sus respectivas métricas de tal modo que

$$d^Y(x_0, y) = s_0, \quad d^Y(x_1, y) = s_1, \qquad d^Y(x_0, x_1) = t,$$

$$d^{Y'}(x_0, y') = s'_0, \quad d^{Y'}(x_1, y') = s'_1 \quad \text{y} \quad d^{Y'}(x_0, x_1) = t.$$

Por la propiedad de amalgamación obtenemos un espacio métrico Z amalgamando a Y y a Y' alrededor de $\{x_0, x_1\}$, entonces considerando $u = d^Z(y, y')$ se cumple lo deseado.



Veamos ahora que 3. implica 1.

Sean $Y_0, Y_1 \in \mathcal{M}_S$ tales que d^{Y_0} y d^{Y_1} coinciden en $Y_0 \cap Y_1$. Deseamos extender $d^{Y_0} \cup d^{Y_1}$ a una métrica en $Y_0 \cup Y_1$. Supongamos que Y_0, Y_1 no son $\subseteq -$comparables, en caso contrario la demostración es inmediata.

Se procede por inducción sobre $|Y_0 \triangle Y_1|$.

Si $|Y_0 \setminus Y_1| = |Y_1 \setminus Y_0| = 1$, Sean $Y_0 \setminus Y_1 = \{y_0\}$ y $Y_1 \setminus Y_0 = \{y_1\}$, únicamente hay que definir la métrica d en (y_0, y_1). Equivalentemente deseamos encontrar $u \in S$ tal que para cada $y \in Y_0 \cap Y_1$

$$\triangle(u, d^{Y_0}(y_0, y), d^{Y_1}(y, y_1)).$$

Para esto consideremos

$$\begin{aligned} m &= \max\{\, |d^{Y_0}(y_0, y) - d^{Y_1}(y, y_1)| \; |y \in Y_0 \cap Y_1\} \quad \text{y} \\ m' &= \min\{\, d^{Y_0}(y_0, y) + d^{Y_1}(y, y_1) \; |y \in Y_0 \cap Y_1\}. \end{aligned}$$

Los cuales existen ya que Y_0, Y_1 son espacios finitos. Notemos que $m \leq m'$.

Sean y, y' testigos para m y para m' respectivamente, nombremos

$$s_0 = d^{Y_0}(y_0, y), \qquad s_0' = d^{Y_1}(y_1, y),$$

$$s_1 = d^{Y_0}(y_0, y') \quad \text{y} \quad s_1' = d^{Y_1}(y_1, y').$$

Y sea

$$t = d^{Y_0}(y, y') = d^{Y_1}(y, y').$$

Observemos que

$$\triangle(t, s_0, s_1) \quad \text{y} \quad \triangle(t, s_0', s_1').$$

Y por la condición de los 4 valores existe $u \in S$ tal que

$$\triangle(u, s_0, s_0') \quad \text{y} \quad \triangle(u, s_1, s_1').$$

Por como se escogieron s_0, s_0', s_1, s_1' a partir de y e y' entonces para todo $z \in Y_0 \cap Y_1$ se satisface que $|d^{Y_0}(y_0, z) - d^{Y_1}(z, y_1)| \leq u \leq d^{Y_0}(y_0, z) + d^{Y_1}(z, y_1)$.

Para el caso inductivo.
Sea $Y = Y_0 \cup Y_1$. Para $i \in 2$ sean $y_i \in Y_i \setminus Y_{1-i}$. Por hipótesis de inducción aplicada en Y_0 y en $Y_1 \setminus \{y_1\}$ encontramos una extensión común Z_0 de Y_0 y de $Y_1 \setminus \{y_1\}$

alrededor de $Y \setminus \{y_1\}$. Del mismo modo obtenemos una extensión Z_1 de $Z_0 \setminus \{y_0\}$ y de Y_1 al rededor de $Y \setminus \{y_0\}$.

Ahora $Y = Z_0 \cup Z_1$ y $|Z_0 \triangle Z_1| = 2$, con lo cual, usando el caso base obtenemos el resultado. ■

De este modo, si S tiene la propiedad de los 4 valores, $\mathcal{M}_S$ tiene la propiedad de amalgamación, además es una clase numerable, hereditaria, que contiene estructuras finitas arbitrariamente grandes y como todo espacio métrico que conste de un punto es una estructura inicial débil, por el Lema 1.4, $\mathcal{M}_S$ tiene la JEP. Con lo cual $\mathcal{M}_S$ es una clase de Fraïsse.

Sea $\mathcal{K}$ una clase de Fraïssé de espacios métricos, $F\,\text{lím}(\mathcal{K})$ es llamado el **espacio de Urysohn** asociado a $\mathcal{K}$. De este modo, tiene sentido hablar del espacio de Urysohn asociado a $\mathcal{M}_S$.

Notación 2.8. *Para $S \subseteq [0, \infty)$ con $0 \in S$ numerable que satisface la condición de los 4 valores. Al espacio de Uryshon asociado a $\mathcal{M}_S$ lo denotaremos por $\mathbb{U}_{\boldsymbol{S}}$.*

Indivisibilidad

3

El objetivo de este capítulo es observar la demostración de la indivisibilidad de los espacios de Urysohn al considerar clases de espacios métricos con distancias en algún número natural, esto será el enunciado final del capítulo. Para conseguir dicho objetivo en la primera sección se estudia la noción de función tipo, que son un caso particular de funciones de Kătetov, centrándonos en las órbitas de las mismas, en la segunda sección nos restringimos a espacios métricos con distancias en algún número natural para así poder concluir. La demostración de este resultado se debe a los matemáticos Lionel Nguyen Van Thé de origen francés y Norbert W. Sauer de origen canadiense y puede ser vista en [3], pero seguiremos la prueba de Sauer encontrada en [6].

3.1 Funciones tipo

Dado $S \subseteq [0, \infty)$ numerable con $0 \in S$, si S satisface la condición de los 4 valores también lo hace $tS = \{ts | s \in S\}$ para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$. De modo que podemos considerar únicamente $\mathbb{U}_S$ para conjuntos S de tal forma que $\text{mín}(S \setminus \{0\}) = 1$ y tales que S satisface la condición de los 4 valores. En lo que resta de este capítulo consideraremos a S de la manera antes mencionada.

Definición 3.1. *Sean* (X, d) *un espacio métrico con* $\mathsf{dist}(X) \subseteq S$ *y* $A \in [X]^{<\omega}$.

1. *La función* $\mathfrak{p} : A \longrightarrow S \setminus \{0\}$ *es una* ***función tipo de*** X *si es de Katětov.*

2. $\textbf{Sat}(\mathfrak{p}) = \{y \in X \setminus A \mid \forall x \in A : d(y, x) = \mathfrak{p}(x)\}$.

3. $\textbf{rank}(\mathfrak{p}) = \text{mín}(\mathsf{Im}(\mathfrak{p}))$.

4. $\textbf{Type}(A) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}$ *es función tipo de* X *y* $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}) = A\}$.

Notación 3.2. *Si* (X, d) *es un espacio métrico,* $\mathfrak{p}$ *es una función tipo de* X *y* $X^* \in \mathbb{P}(X)$*, entonces* $\textbf{Sat}_{X^*}(\mathfrak{p}) = \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}) \cap X^*$.

Los siguientes son corolarios de la Proposición 2.3.

Corolario 3.3. *Dado $X \subseteq \mathbb{U}_S$. $X \cong \mathbb{U}_S$ si y solo si para toda función tipo $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{U}_S$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}) \subseteq X$ se satisface que $\mathsf{Sat}(\mathfrak{p}) \cap X \neq \varnothing$.*

Demostración. Primero supongamos que $X \cong \mathbb{U}_S$. Si $A \in [X]^{<\omega}$ y $\mathfrak{p} \in \mathsf{Type}(A)$ sabemos que $A_{\mathfrak{p}}$ se encaja en X de modo que por la proposición 2.3, existe $x \in X$ que realiza a $\mathfrak{p}$ sobre A, es decir $\mathsf{Sat}(\mathfrak{p}) \cap X \neq \varnothing$.

Ahora, supongamos que para toda función tipo $\mathfrak{q}$ de $\mathbb{U}_S$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{q}) \subseteq X$ se satisface que $\mathsf{Sat}(\mathfrak{q}) \cap X \neq \varnothing$.

Veamos que X es ultrahomogeneo y que dado un espacio métrico finito con distancias en S dicho espacio se encaja en X.

Sea $A \subseteq X$ subespacio finito y $\mathfrak{q}$ una función de Katětov sobre A de tal modo que $A_{\mathfrak{q}}$ se encaja en X, como $\mathsf{dist}(X) \subseteq S$ entonces $\mathfrak{q}$ es una función tipo de A con lo cual es una función tipo de $\mathbb{U}_S$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{q}) = A \subseteq X$, de modo que existe $x \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}) \cap X$, es decir, existe $x \in X$ que realiza a $\mathfrak{q}$ sobre A. De este modo, por la Proposición 2.3 X es ultrahomogéneo.

Sea B un espacio métrico finito con $\mathsf{dist}(B) \subseteq S$, consideremos $B = \{b_i | i \in n\}$ y $x_0 \in X$, definimos recursivamente $\mathfrak{p}_0 : \{x_0\} \longrightarrow S$ tal que $\mathfrak{p}_0(x_0) = d(b_0, b_1)$, por hipótesis existe $x_1 \in X$ tal que $d(x_0, x_1) = d(b_0, b_1)$ con esto $\{x_0, x_1\}$ es isométrico con $\{b_0, b_1\}$.

Si tenemos $\{x_i | i \in k\} \subseteq X$ isométrico a $\{b_i | i \in k\}$ para $k \in n$, entonces definimos $\mathfrak{p}_k : \{x_i | i \in k\} \longrightarrow S$ dada por $\mathfrak{p}_k(x_i) = d(b_i, b_{k+1})$ para $i \in k$, entonces $\mathfrak{p}_k$ es función tipo por lo cual existe $x_{k+1} \in X$ de tal modo que para todo $i \in k$ se cumple que $d(x_i, x_{k+1}) = d(b_i, b_{k+1})$.

Continuando con este proceso obtenemos un conjunto $C = \{x_i | i \in n\} \subseteq X$ tal que $C \cong B$, es decir B se encaja en X. De este modo $X \cong \mathbb{U}_S$. ∎

Corolario 3.4. *Sean $X, Y \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$ y un encaje $\alpha; X \longrightarrow Y$, es decir, α una función parcial finita de X en Y. Existe una isometría $\overline{\alpha} : X \longrightarrow Y$ que extiende a α.*

Lema 3.5. *Sean $\mathfrak{p}$ una función tipo de $\mathbb{U}_S$ con $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}) = r$, $l \leq 2r$ con $l \in S$ y $x \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$. La función $\mathfrak{q}$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{q}) = \mathsf{dom}(\mathfrak{p}) \cup \{x\}$, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ y $\mathfrak{q}(x) = l$ es tipo.*

Demostración. Para verificar que $\mathfrak{q}$ es función tipo resta verificar que para $a \in \mathsf{dom}(\mathfrak{p})$ se satisface $\triangle(d(x,a), \mathfrak{q}(a), \mathfrak{q}(x))$.

Como $x \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$, entonces $d(x,a) = \mathfrak{p}(a)$, por su parte como $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ tenemos que $\mathfrak{q}(a) = \mathfrak{p}(a)$, por último, por como se definió $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}(x) = l$, de modo que deseamos verificar $\triangle(\mathfrak{p}(a), \mathfrak{p}(a), l)$ lo cual se sigue de saber que $l \leq 2r$. ■

Teorema 3.6. *Sea $\mathfrak{p}$ una función tipo de $\mathbb{U}_S$. Si $S_\mathfrak{p} = \{l \in S | l \leq 2 \cdot \mathsf{rank}(\mathfrak{p})\}$, entonces $\mathsf{Sat}(\mathfrak{p}) \cong \mathbb{U}_{S_\mathfrak{p}}$.*

Demostración. Dados $x, y \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$ y $a \in \mathsf{dom}(\mathfrak{p})$ tal que $\mathfrak{p}(a) = \mathsf{rank}(\mathfrak{p})$, tenemos que $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) = \mathsf{rank}(\mathfrak{p}) + \mathsf{rank}(\mathfrak{p}) = 2\mathsf{rank}(\mathfrak{p})$. Por simplicidad diremos que $\mathsf{Sat}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathbb{U}_{S_\mathfrak{p}}$.

Sean $A \in [\mathsf{Sat}(\mathfrak{p})]^{<\omega}$ y $\mathfrak{q} \in \mathsf{Type}(A)$.

Consideremos $\mathfrak{t}$ la función con $\mathsf{dom}(\mathfrak{t}) = A \cup \mathsf{dom}(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{t}$ y $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{t}$. Como $\mathsf{dom}(\mathfrak{q})$ es finito y $\mathsf{dist}(A_\mathfrak{q}) \subseteq \{l \in S | l \leq 2 \cdot \mathsf{rank}(\mathfrak{p})\}$, entonces haciendo uso del Lema 3.5, tenemos que $\mathfrak{t}$ es función tipo.

Por tanto, existe $x \in \mathbb{U}_S$ que realiza a $\mathfrak{t}$, como $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{t}$, entonces $x \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$, por otro lado como $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{t}$, entonces $x \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q})$.

En síntesis, para toda función tipo $\mathfrak{q}$ en $\mathbb{U}_{S_\mathfrak{p}}$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$, tenemos que $\mathsf{Sat}(\mathfrak{q}) \cap \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}) \neq \varnothing$ por tanto, por el Corolario 3.3, tenemos que $\mathsf{Sat}(\mathfrak{p}) \cong \mathbb{U}_{S_\mathfrak{p}}$ ■

Lema 3.7. *Sean $A, B \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$ con $A \cap B = \varnothing$. Entonces existe $\alpha : \mathbb{U}_S \longrightarrow (\mathbb{U}_S \setminus B)$ isomorfismo que fija a A, es decir, α es tal que para todo $a \in A$ se satisface que $\alpha(a) = a$.*

Demostración. Sea $X = \mathbb{U}_S \setminus B$, primero veamos que $X \cong \mathbb{U}_S$, considerando a $\mathfrak{p}$ una función de tipo de X (y por tanto tipo de $\mathbb{U}_S$).

Como $\mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$ es infinito entonces existe $y \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}) \setminus B$. De este modo $\mathfrak{p}$ se puede realizar en X, es decir $\mathsf{Sat}(\mathfrak{p}) \cap X \neq \varnothing$. Por tanto, usando el Corolario 3.3, se tiene que $X \cong \mathbb{U}_S$.

Consideremos la función $\alpha : A \longrightarrow A$ tal que funciona como la identidad en A, es decir, para todo $a \in A$ se satisface que $\alpha(a) = a$, donde $\alpha; \mathbb{U}_S \longrightarrow X$, por el Corolario 3.4, existe una isometría $\alpha' : \mathbb{U}_S \longrightarrow X$ tal que $\alpha' \restriction_A = \alpha$, con lo cual concluimos el resultado. ■

Definición 3.8. *Sean $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ funciones de Katětov de $\mathbb{U}_S$.*

- $\boldsymbol{d(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})} = \{l \in S | \exists x \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})\ \exists y \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}) : d(x, y) = l\}$.
- $\boldsymbol{d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})} = \text{mín}\, d(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$.
- $\boldsymbol{d_{\text{máx}}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})} = \text{máx}\, d(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$.

Notemos que dadas dos funciones de Katětov $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$, si $\mathsf{Sat}(\mathfrak{p}) \cap \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}) \neq \varnothing$, entonces $d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 0$.

Lema 3.9. *Sea $A \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$. Entonces $(\mathsf{Type}(A), d_{\text{mín}})$ es un espacio métrico.*

Demostración. Supongamos $\mathsf{Type}(A)$ no es métrico. Sean $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \mathsf{Type}(A)$ tales que el triángulo $\{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$ no es métrico. Digamos entonces que se cumple lo siguiente $d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1) + d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_2) < d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$.

Sea $x_0 \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_0)$, veamos que para $i \in \{1, 2\}$ existe $x_i \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_i)$ de tal modo que $d(x_0, x_i) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_i)$. Para esto consideremos la función $\mathfrak{q}_i$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{q}_i) = A \cup \{x_0\}$ de tal modo que $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{q}_i$ y $\mathfrak{q}_i(x_0) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_i)$, por el Lema 3.5 tenemos que $\mathfrak{q}_i$ es función tipo, además $\mathsf{Sat}(\mathfrak{q}_i) \subseteq \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_i)$, por tanto existe $x_i \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_i)$ de tal modo que $d(x_0, x_i) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_i)$.

Entonces

$$\begin{aligned} d(x_0, x_1) + d(x_0, x_2) \geq d(x_1, x_2) \geq d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) &> d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1) + d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_2) \\ &= d(x_0, x_1) + d(x_0, x_2). \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción por tanto $(\mathsf{Type}(A), d_{\text{mín}})$ es un espacio métrico. ■

Lema 3.10. *Sean $A \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$, $\tau \subseteq \mathsf{Type}(A)$ y (τ, p) es un espacio métrico tal que para cualesquiera $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \tau$ se cumple que $p(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in d(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$. Entonces $(A \cup \tau, d')$ es un espacio métrico donde:*

1. *$d'(x, y) = d(x, y)$ si $x, y \in A$.*

2. *$d'(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = p(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \tau$.*

3. *$d'(x, \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}(x)$ si $\mathfrak{p} \in \tau$ y $x \in A$.*

Además para $\theta \subseteq \tau$ y cada isometría parcial $\beta : (A \cup \theta, d') \longrightarrow \mathbb{U}_S$ que fija a A, existe una extensión a una isometría $\alpha : (A \cup \tau, d') \longrightarrow \mathbb{U}_S$ con lo cual se tiene que para todo $\mathfrak{p} \in \tau$, $\alpha(\mathfrak{p}) \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$.

Demostración. Como p es métrica en τ, d es métrica en A y cada $\mathfrak{p} \in \tau$ es Katětov, basta ver que los triángulos de la forma $\{x, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}\}$ con $x \in A$ y con $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \tau$ son métricos. Escogemos $y \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$ y $z \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q})$ de tal modo que $d'(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = d(x, y)$, como $\triangle(d(x, y), d(y, z), d(x, z))$ se sigue que d' es métrica.

Por otra parte, para $\theta \subseteq \tau$ y $\beta : (A \cup \theta, d') \longrightarrow \mathbb{U}_S$ que fija a A. Como $(A \cup \tau, d')$ es un espacio métrico con $\mathsf{dist}(A \cup \tau) \subseteq S$, entonces existe un encaje $\gamma : A \cup \tau \longrightarrow \mathbb{U}_S$, definamos $\delta : \gamma(A \cup \theta) \longrightarrow \beta(A \cup \theta)$ de tal modo que para cada $x \in A \cup \theta$, $\delta(\gamma(x)) = \beta(x)$.

Tenemos que δ es un encaje isométrico por tanto, haciendo uso del Corolario 3.4, existe una isometria $\overline{\delta} : \mathbb{U}_S \longrightarrow \mathbb{U}_S$ que extiende a δ.

Sea $\alpha = \overline{\delta} \circ \gamma$. Para $x \in A \cup \theta$ tenemos que $\alpha(x) = \overline{\delta} \circ \gamma(x) = \delta(\gamma(x)) = \beta(x)$, con lo cual α extiende a β.

Para $\mathfrak{p} \in \tau$, sea $x \in A$, por la condición 3 $d(x, \alpha(\mathfrak{p})) = d(x, \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}(x)$, con lo cual $\alpha(\mathfrak{p}) \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$. ■

Notemos que en el lema anterior, si $\tau = \{\mathfrak{p}\}$, entonces el espacio $(A \cup \tau, d')$ en realidad se trata de $A_{\mathfrak{p}}$ y la segunda parte del lema es inmediata de la definición de este espacio.

Corolario 3.11. *Sea $A \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$. $(\mathsf{Type}(A) \cup A, \overline{d_{\text{mín}}})$ es un espacio métrico. Donde $\overline{d_{\text{mín}}}$ se define como en el lema 3.10 usando $d_{\text{mín}}$ por p.*

Corolario 3.12. *Sean $A \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$ y $\tau = \{\mathfrak{p}_i | i \in n\} \subseteq \mathsf{Type}(A)$. Si (τ, p) es un espacio métrico tal que para cualesquiera $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \tau$ se cumple que $p(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \in d(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$.*

Entonces para cada $k \in n$ y $x_k \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_k)$ existe $\{w_i | i \in n\}$ tal que $w_i \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_i)$ con $w_k = x_k$ y $d(w_i, w_j) = p(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)$.

Demostración. Por el Lema 3.10 tenemos que $(A \cup \tau, p)$ es un espacio métrico.

Sea $\beta : A \cup \{\mathfrak{p}_k\} \longrightarrow \mathbb{U}_S$ una función que fija a A y tal que $\beta(\mathfrak{p}_k) = x_k$, por como se definió d', β es un encaje isométrico. Así, por el Lema 3.10 existe $\alpha : A \cup \tau \longrightarrow \mathbb{U}_S$ encaje isométrico que extiende a β y de tal manera que para cada $\mathfrak{p} \in \tau$, se satisface la pertenencia $\alpha(\mathfrak{p}) \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$.

Si para cada $i \in n$ nombramos $\alpha(\mathfrak{p}_i) = w_i$, tenemos que $w_k = x_k$ y para cualesquiera $i, j \in n$, $d(w_i, w_j) = d'(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) = p(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)$. ■

El siguiente lema nos asegura que: al extender una función tipo $\mathfrak{p}$ con una función tipo $\mathfrak{q}$ de tal manera que $S_{\mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{q}}$, entonces podemos mover una cantidad finita predeterminada de elementos de la órbita de $\mathfrak{p}$ para pertenecer a la órbita de $\mathfrak{q}$, vía un encaje isométrico. Así mismo, este lema sirve como punto de apoyo para demostrar el teorema subsecuente el cual es una generalización, donde en lugar de mover una parte finita de la órbita se asegura que se puede mover la órbita completa.

Lema 3.13. *Sean $A, B, R \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$ disjuntos, $\mathfrak{p} \in \mathsf{Type}(A)$ y $\mathfrak{q} \in \mathsf{Type}(A \cup B)$ con $S_{\mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{q}}$ (definidos como en el Teorema 3.6).*

Entonces existe un encaje $\alpha : A \cup R \longrightarrow \mathbb{U}_S$ que fija a A y de tal manera que para todo $x \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}) \cap R$ se satisface que $\alpha(x) \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q})$.

Demostración. Sea $R = \{y_i | i \in n\}$ con $R \cap \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}) = \{y_i | i \in m\}$.

Construiremos una sucesión $(x_k, \mathfrak{t}_k, C_k)_{k \in m}$ de tal forma que para cada $k \in m$:

- $x_k \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q})$,
- $C_k \subset \mathsf{Sat}(\mathfrak{q})$ y
- $\mathfrak{t}_k : A \cup B \cup C_k \longrightarrow S$.

Primero escogemos $x_0 \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q})$ y definimos $C_0 = \{x_0\}$.

Si tenemos C_k con $k < m$ definimos $\mathfrak{t}_k : A \cup B \cup C_k \longrightarrow S$ dada por

1. $\mathfrak{t}_k(a) = \mathfrak{q}(a)$ si $a \in A \cup B$ y

2. $\mathfrak{t}_k(x_i) = d(y_i, y_{k+1})$.

Veamos que $\mathfrak{t}_k$ es una función tipo. Sean $a \in A \cup B$ y $x_i, x_j \in C_k$, primero veamos que $\triangle(d(a, x_i), \mathfrak{t}_k(a), \mathfrak{t}_k(x_i))$, lo cual es equivalente a verificar $\triangle(\mathfrak{q}(a), \mathfrak{q}(a), d(y_i, y_{k+1}))$, como $S_\mathfrak{p} = S_\mathfrak{q}$ tenemos que $d(y_i, y_{k+1}) \leq \mathfrak{q}(a) + \mathfrak{q}(a)$, por tanto se verifica lo deseado. Ahora veamos que $\triangle(d(x_i, x_j), \mathfrak{t}_k(x_i), \mathfrak{t}_k(x_j))$, lo cual es equivalente a verificar $\triangle(d(y_i, y_j), d(y_i, y_{k+1}), d(y_j, y_{k+1}))$ pero esto es cierto, por tanto $\mathfrak{t}_k$ es función tipo.

Elegimos $x_{k+1} \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{t}_k) \subseteq \mathsf{Sat}(\mathfrak{q})$ y definimos $C_{k+1} = C_k \cup \{x_{k+1}\}$.

Si tenemos C_k con $m \leq k < n$ definimos $\mathfrak{t}_k : A \cup C_k \longrightarrow S$ de manera que $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{t}$ y para cada x_i, $\mathfrak{t}(x_i) = d(y_i, y_{k+1})$, de manera análoga al caso anterior comprobamos que $\mathfrak{t}_k$ es función tipo, escogemos $x_{k+1} \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{t})$ y definimos $C_{k+1} = C_k \cup \{x_{k+1}\}$.

Considerando $\alpha : A \cup R \longrightarrow \mathbb{U}_S$ que fija a A y para cada y_i, $\alpha(y_i) = x_i$ tenemos lo deseado. ∎

Corolario 3.14. *Sean $A, B, R \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$ disjuntos, $\tau = \{\mathfrak{p}_i \mid i \in n\} \subseteq \mathsf{Type}(A)$ y $\theta = \{\mathfrak{q}_i | i \in n\} \subseteq \mathsf{Type}(A \cup B)$ tales que para cada $i \in n$, $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{q}_i$ y $S_{\mathfrak{p}_i} = S_{\mathfrak{q}_i}$.*

Entonces existe un encaje $\alpha : A \cup R \longrightarrow \mathbb{U}_S$ que fija a A y de tal manera que para todo $\mathfrak{p}_i \in \tau$ y todo $x \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_i) \cap R$ se satisface que $\alpha(x) \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}_i)$.

Demostración. Por el Lema 3.13 podemos considerar $\alpha_0 : A \cup R \longrightarrow \mathbb{U}_S$ un encaje tal que $\alpha_0(\mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_0) \cap R) \subseteq \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}_0)$.

Si tenemos definido un encaje $\alpha_k : A \cup R \longrightarrow \mathbb{U}_S$ tal que para cada $i \leq k$ se satisface que $\alpha_k(\mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_i) \cap R) \subseteq \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}_i)$. Haciendo uso del Lema 3.13 (considerando $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{k+1}$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{k+1}$ y $R = \alpha_k(R)$ de las hipótesis del Lema) tenemos que existe un encaje $\beta_{k+1} : A \cup \alpha_k(R) \longrightarrow \mathbb{U}_S$ que fija a A y de tal manera que se satisface $\beta_{k+1}(\mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_{k+1}) \cap \alpha_k(R)) \subseteq \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}_{k+1})$. Con esto, definimos $\alpha_{k+1} = \beta_{k+1} \circ \alpha_k$, como ambas funciones son encajes isométricos entonces α_{k+1} también lo es, además para cada $i \leq k+1$ se satisface que $\alpha_{k+1}(\mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_i) \cap R) \subseteq \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}_i)$.

Considerando $\alpha = \alpha_n$ tenemos lo deseado. ∎

Teorema 3.15. *Sean* $A, B \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$ *conjuntos disjuntos,* $\tau = \{\mathfrak{p}_i | i \in n\} \subseteq \mathsf{Type}(A)$ *y* $\theta = \{\mathfrak{q}_i | i \in n\} \subseteq \mathsf{Type}(A \cup B)$*, donde para cada* $i \in n$ *se tiene que* $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{q}_i$ *y* $S_{\mathfrak{p}_i} = S_{\mathfrak{q}_i}$.

Entonces existe un encaje $\alpha : \mathbb{U}_S \longrightarrow \mathbb{U}_S$ *que fija a* A *y de tal manera que para todo* $i \in n$ *y todo* $x \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_\mathrm{i})$ *se cumple que* $\alpha(x) \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}_i)$.

Demostración. Sea $X = \mathbb{U}_S \setminus B$. Por el Lema 3.7 existe un isomorfismo $\gamma : \mathbb{U}_S \longrightarrow X$ que fija a A. Si demostramos que existe $\alpha' : X \longrightarrow X$ que fija a A tal que para cada $i \in n$ y cada $x \in \mathsf{Sat}_X(\mathfrak{p}_i)$ cumple que $\alpha'(x) \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}_i)$, entonces considerando a $\alpha = \alpha' \circ \gamma$ tendremos lo deseado.

Sea $\{x_k | k \in \omega\}$ una enumeración de X de tal modo que si para cada $n \in \omega$ nombramos $X_n = \{x_k | k \in n\}$ entonces para $|A| = m$, $X_m = A$.

Para cada $k \in \omega$ consideremos al conjunto

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_k = \{\beta : X_k \longrightarrow X \mid \beta &\text{ es encaje isométrico que fija a } A \\ &\text{y } \forall i \in n : \forall x \in \mathsf{Sat}_X(\mathfrak{p}_i) \cap X_k : \beta(x) \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}_i)\}.\end{aligned}$$

Por el Lema 3.14 tenemos que para $k \geq m$, $\mathcal{A}_k \neq \varnothing$.

Si definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\infty = \{\beta : X \longrightarrow X \mid \beta &\text{ es isometría que fija a } A \\ &\text{y } \forall i \in n : \forall x \in \mathsf{Sat}_X(\mathfrak{p}_i) : \beta(x) \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}_i)\}.\end{aligned}$$

deseamos mostrar que $\mathcal{A}_\infty \neq \varnothing$.

Sea $\mathcal{A} = \bigcup_{k \in \omega} \mathcal{A}_k$.

Definimos el orden $\preccurlyeq$ en $\mathcal{A}$ de tal modo que para $\beta, \gamma \in \mathcal{A}$, $\beta \preccurlyeq \gamma$ si:

- $\beta \in \mathcal{A}_j, \gamma \in \mathcal{A}_k$ con $j \leq k$ (equivalentemente que $\mathsf{dom}(\beta) \subseteq \mathsf{dom}(\gamma)$) y
- para cada $y \in A$ y cada $x \in \mathsf{dom}(\beta)$ se tiene que $d(y, \beta(x)) = d(y, \gamma(x))$.

Si $\beta \preccurlyeq \gamma$ y $\gamma \preccurlyeq \beta$, denotamos $\beta \sim \gamma$, con lo cual $\sim$ es una relación de equivalencia.

Como S es finito y en X_k hay una cantidad finita de puntos, entonces hay una cantidad finita de combinaciones entre estos puntos con las posibles distancias en S. Con esto, en cada $\mathcal{A}_k$ hay una cantidad finita de clases de equivalencia.

Sea $\mathcal{B} = \mathcal{A}/_{\sim}$ el conjunto de clases de equivalencia de $\mathcal{A}$ con la relación $\sim$, veamos que $(\mathcal{B}, \preccurlyeq)$ es un árbol, donde $[\beta] \preccurlyeq [\gamma]$ si y solamente si $\beta \preccurlyeq \gamma$.

Primero veamos que $\preccurlyeq$ está bien definido en $\mathcal{B}$. Sean $\beta, \beta', \gamma, \gamma' \in \mathcal{A}$ tales que $\beta \preccurlyeq \gamma$, $[\beta] = [\beta']$ y $[\gamma] = [\gamma']$, tenemos que si $\beta \in \mathcal{A}_j$ y $\gamma \in \mathcal{A}_k$ entonces $\beta' \in \mathcal{A}_j$, $\gamma' \in \mathcal{A}_k$ y $j \leq k$, además para cada $y \in A$ y cada $x \in \mathsf{dom}(\beta) = \mathsf{dom}(\beta')$ se tiene que $d(y, \beta'(x)) = d(y, \beta(x)) = d(y, \gamma(x)) = d(y, \gamma'(x))$, de modo que $\beta' \preccurlyeq \gamma'$. Con esto, $\preccurlyeq$ está bien definido en $\mathcal{B}$.

Ahora, si $\beta \in \mathcal{A}_{k+1}$, entonces $\beta \restriction_{X_k} \in \mathcal{A}_k$ y $\beta \restriction_{X_k} \preccurlyeq \beta$. Además, si existe $\gamma \in \mathcal{A}_k$ tal que $\gamma \preccurlyeq \beta$, entonces para cada $y \in A$ y cada $x \in \mathsf{dom}(\gamma) = \mathsf{dom}(\beta \restriction_{X_k})$ se tiene que $d(y, \gamma(x)) = d(y, \beta(x)) = d(y, \beta \restriction_{X_k}(x))$, por tanto $[\beta \restriction_{X_k}] = [\gamma]$.

Con todo esto $(\mathcal{B}, \preccurlyeq)$ es un árbol infinito de ramificación finita. Por el lema de König, existe una rama $(B_k | k \in \omega)$ en $\mathcal{B}$.

Ahora, sean $k \geq m$, $\beta_k \in B_k$ y $\gamma \in B_{k+1}$ consideremos $\lambda : \{\gamma(x_i) | i \in k\} \longrightarrow X$ una isometría que fija a A y que para cada $i \in k$ cumple que $\lambda(\gamma(x_i)) = \beta_k(x_i)$. Como X es ultrahomegéneo existe $\mu : \{\gamma(x_i) | i \in k+1\} \longrightarrow X$ una extensión de λ. Definiendo $\beta_{k+1} = \beta_k \cup \left\{ \Big(x_k, \mu(\gamma(x_k)) \Big) \right\}$ tenemos que $\beta_k \preccurlyeq \beta_{k+1}$.

Veamos que $\beta_{k+1} \in B_{k+1}$. Consideremos a $i \in n$ de tal manera que $x_k \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_i)$, como $\gamma \in B_{k+1} \subseteq \mathcal{A}_k$ tenemos que $\gamma(x_k) \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}_i)$ y, por como se definió μ, para cada $x \in A$ se satisface que $d(x, \gamma(x_k)) = d\Big(\mu(x), \mu(\gamma(x_k))\Big)$. Por tanto se satisface que $\mu(\gamma(x_k)) \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}_i)$, con lo cual $\beta_{k+1} \in \mathcal{A}_{k+1}$.
Dados $i \in k+1$ y $x \in A$, si $i \in k$ entonces $d(x, \beta_{k+1}(x_i)) = d(x, \beta_k(x_i)) = d(x, \gamma(x_i))$, por otro lado $d(x, \beta_{k+1}(x_k)) = d\Big(x, \mu(\gamma(x_k))\Big) = d(x, \gamma(x_k))$. Es decir $\beta_{k+1} \in B_{k+1}$

Con esto, considerando $\alpha' = \bigcup\limits_{k \geq m} \beta_k$ tenemos que $\alpha' \in \mathcal{A}_\infty$. ∎

Notemos que la condición $S_\mathfrak{p} = S_\mathfrak{q}$ es implicada por la condición $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}) = \mathsf{rank}(\mathfrak{q})$, este hecho será utilizado en repetidas ocasiones para asegurar que si extendemos una función tipo con otra que tenga el mismo rango, podemos mover la órbita de la función inicial para pertenecer a la órbita de la extensión.

3.2 Naturales como distancias

A partir de ahora consideraremos $S \in \omega$. Las definiciones y resultados, con sus debidas modificaciones, son válidas en general pero para propósitos de este trabajo restringimos su estudio a este caso.

A continuación enunciaremos un lema que continua con el estudio del conjunto $d(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ para $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ funciones tipo con el mismo dominio.

Lema 3.16. *Sean* $A \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$, $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathsf{Type}(A)$. *Entonces*

$$d(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = \{l \in S \mid \forall x \in A : \triangle(\mathfrak{p}(x), \mathfrak{q}(x), l)\}.$$

Demostración. Sea $l \in d(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$, existen $y \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$ y $z \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q})$ de tal manera que $d(y, z) = l$, sabemos que para cada $x \in A$ se satisface $\triangle(d(x, y), d(x, z), d(y, z))$ o equivalentemente $\triangle(\mathfrak{p}(x), \mathfrak{q}(x), l)$.

Ahora, sean $l \in \{l \in S \mid \forall x \in A : \triangle(\mathfrak{p}(x), \mathfrak{q}(x), l)\}$, $y \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$ y la función $\mathfrak{q}'$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{q}') = A \cup \{y\}$, $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$ y $\mathfrak{q}'(y) = l$.

Veamos que $\mathfrak{q}'$ es Katětov. Para ello basta verificar que cada triángulo de la forma $\{x, y, \mathfrak{q}'\}$ con $x \in A$ es métrico, es decir que

$$\triangle(d(x, \mathfrak{q}'), d(x, y), d(y, \mathfrak{q}')),$$

equivalentemente

$$\triangle(\mathfrak{q}(x), \mathfrak{p}(x), l).$$

Lo cual sucede para toda $x \in A$.

Como $\mathfrak{q}'$ es Katětov la realizamos con $z \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}') \subseteq \mathsf{Sat}(\mathfrak{q})$, de este modo $d(z, y) = l$ como $y \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$ entonces $l \in d(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$. ■

Corolario 3.17. *Sean* $A \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$, $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathsf{Type}(A)$. *Entonces para* $r > 1$ *con* $r \in S$ *y* $r - 1 \leq \mathsf{rank}(\mathfrak{p})$ *se satisface que:*

1. $d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = \text{mín}\{l \in S | l \geq \text{máx}\{|\mathfrak{p}(x) - \mathfrak{q}(x)| : x \in A\}\}$,

2. $d_{\text{máx}}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = \text{máx}\{l \in S | l \leq \text{mín}\{\mathfrak{p}(x) + \mathfrak{q}(x) : x \in A\}\}$ *y*

3. $d_{\text{máx}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) \geq r$.

Demostración. Por el Lema 3.16 tenemos que $l \in d(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$ si y solamente si para cada $x \in A$ se tiene que $\triangle(\mathfrak{p}(x),\mathfrak{q},l)$, de este modo tenemos que $l \in d(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$ si y solamente si $\text{máx}\{|\mathfrak{p}(x) - \mathfrak{q}(x)| : x \in A\} \leq l \leq \text{mín}\{\mathfrak{p}(x) + \mathfrak{q}(x) : x \in A\}$. Por tanto concluimos 1. y 2.

Veamos 3. Si $r \leq \mathsf{rank}(\mathfrak{p})$, entonces notemos que para cada $x \in A$, se satisface que $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}) \leq \mathfrak{p}(x)$, con lo cual $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}) < \mathfrak{p}(x) + \mathfrak{q}(x)$, de este modo, por 2. tenemos que $d_{\text{máx}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) > \mathsf{rank}(\mathfrak{p})$, lo que implica que $d_{\text{máx}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) > r$.

De otro modo, si $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}) = r - 1$, entonces para cada $x \in A$, tenemos que se cumple $\mathfrak{p}(x) + \mathfrak{q}(x) \geq \mathsf{rank}(\mathfrak{p}) + 1 \geq (r-1) + 1 = r$. ■

Definición 3.18. *Sea $A \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$, $\tau \subseteq \mathsf{Type}(A)$. Sea $r \in S$ con $r > 1$.*

Sea (τ, d') espacio métrico. Si d' cumple que:

$$d'(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \\ d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) & \textit{si} \quad d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) \geq r \\ a \in \{r-1, r\} & \quad\;\; \textit{en otro caso} \end{cases}$$

*entonces decimos que d' es una función **r-levelling** de distancias en τ.*

Notemos que si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, entonces $r - 1 \leq d'(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$.

Lema 3.19. *Sean $A \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$, $\tau \subseteq \mathsf{Type}(A)$ y $r > 1$ con $r \in S$. Entonces cada función r-levelling d' en τ es tal que para $\mathfrak{p},\mathfrak{q},\mathfrak{t} \in \tau$ con $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q} \neq \mathfrak{t} \neq \mathfrak{p}$ se satisface que $\triangle(d'(\mathfrak{q},\mathfrak{p}), d'(\mathfrak{q},\mathfrak{t}), d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{t}))$.*

Demostración. Primero notemos que como d' es una función r-levelling entonces $d'(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) \geq d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$ y $d'(\mathfrak{q},\mathfrak{t}) \geq d_{\text{mín}}(\mathfrak{q},\mathfrak{t})$, de modo que gracias al Lema 3.9 $d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{t}) \leq d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) + d_{\text{mín}}(\mathfrak{q},\mathfrak{t}) \leq d'(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) + d'(\mathfrak{q},\mathfrak{t})$.

Ahora. Si $d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}), d_{\text{mín}}(\mathfrak{q},\mathfrak{t}) < r$ entonces

$$|d'(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) - d'(\mathfrak{q},\mathfrak{t})| \leq |r - (r-1)| \leq 1 \leq d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{t}).$$

Si $d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}), d_{\text{mín}}(\mathfrak{q},\mathfrak{t}) \geq r$, entonces

$$|d'(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) - d'(\mathfrak{q},\mathfrak{t})| = |d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) - d_{\text{mín}}(\mathfrak{q},\mathfrak{t})| \leq d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{t}).$$

Si $d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) \geq r$ y $d_{\text{mín}}(\mathfrak{q},\mathfrak{t}) < r$, entonces

$$|d'(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) - d'(\mathfrak{q},\mathfrak{t})| \leq |d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) - (r-1)| \leq |d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) - d_{\text{mín}}(\mathfrak{q},\mathfrak{t})| \leq d_{\text{mín}}(\mathfrak{p},\mathfrak{t}).$$

Con lo cual concluimos. ■

El siguiente es un corolario del Lema 3.10.

Corolario 3.20. *Sean $A \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$, $r > 1$ con $r \in S$, $\tau = \{\mathfrak{p}_i | i \in n\} \subseteq \mathsf{Type}(A)$, $m \in n$, $x \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_m)$ y tal que para cada $1 \leq i < n$, $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}_i) \in \{r-1, r\}$. Entonces para cada función d' que sea r-levelling en τ existe $\{w_i \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_i) | i \in n\}$ con $w_m = x$ y que para cada $i, j, k \in n$, se satisface que $d(w_i, w_j) = d'(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)$.*

Demostración. Veamos que para todo $i, j \in n$ si $i \neq j$ entonces $d'(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) \in d(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)$.

Si $d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) \geq r$, entonces $d'(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) \in d(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)$.

Si $d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) < r$, como; o bien $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}_i) \in \{r-1, r\}$ o $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}_j) \in \{r-1, r\}$, entonces por el Corolario 3.17 tenemos que $d_{\text{máx}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) \geq r$, juntando estos hechos tenemos que se satisface $d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) < r \leq d_{\text{máx}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)$ con lo cual por el Lema 3.16 tenemos que $r-1, r \in d(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$, como $d'(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) \in \{r-1, r\}$ entonces $d'(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) \in d(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)$.

De este modo se cumplen las hipótesis del Corolario 3.12 (considerando a d' como p) obtenemos al conjunto $\{w_i \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_i) | i \in n\}$ que cumple lo deseado. ■

Definición 3.21. *Sean $X \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$, $H \subseteq X$ y $r > 1$ con $r \in S$. Una función tipo $\mathfrak{p}$ de X con $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}) = r$ es **extensible dentro de H en X** si para toda $Y \leq X$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}) \subseteq Y$ y toda función tipo $\mathfrak{p}'$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}') \subseteq Y$, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ y $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}') = r$, existe $Z \leq Y$ tal que $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}') \subseteq Z$ y existe una función tipo $\mathfrak{q}$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{q}) \subseteq Z$, $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{q}$ y $\mathsf{rank}(\mathfrak{q}) = r-1$ de tal modo que $\mathsf{Sat}_Z(\mathfrak{q}) \subseteq H$.*

Notemos que si existe $Y \leq X$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}) \subseteq Y$ tal que $H \cap Y = \varnothing$ entonces $\mathfrak{p}$ no es extensible dentro de H en X. Así, esta noción solo es interesante cuando H es "muy grande".

Intuitivamente pensamos que $\mathfrak{p}$ es extensible dentro de H en X si una gran parte de $\mathsf{Sat}_X(\mathfrak{p})$ pertenece a H, esta intuición será corroborada más adelante cuando observemos la demostración de que ser extensible implica la existencia de una copia de $\mathbb{U}_S$ donde toda la órbita se queda contenida en H. Para conseguir ese objetivo necesitamos los siguientes lemas.

Lema 3.22. *Sean $r > 1$ con $r \in S$, $A \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$, $H \subseteq \mathbb{U}_S$, $\tau = \{p_i | i < n\} \subseteq \mathsf{Type}(A)$ y $k < n$ de tal forma que:*

- $\forall 1 \leq i \leq k : \mathsf{rank}(\mathfrak{p}_i) = r$,
- $\forall i > k : \mathsf{rank}(\mathfrak{p}_i) = r - 1$,
- $\forall 1 \leq i \leq k : \mathfrak{p}_i$ *es extensible dentro de H y*
- *Si $k = 0$, $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}_0) = r$ y $\mathfrak{p}_0$ es extensible dentro de H.*

Entonces existen: un encaje $\alpha : \mathbb{U}_S \longrightarrow \mathbb{U}_S$ que fija a A, tal que si $\mathsf{Im}(\alpha) = X$, existen $v \in X$ y para cada $i \in n$ una función tipo $\mathfrak{p}'_i$ tales que:

1. $\mathfrak{p}'_i \in \mathsf{Type}(A \cup \{v\})$,
2. $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}'_i$,
3. $\forall 1 \leq i < n : i \neq k \Rightarrow \mathsf{rank}(\mathfrak{p}'_i) = \mathsf{rank}(\mathfrak{p}_i)$,
4. $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}'_k) = r - 1$,
5. $\mathsf{Sat}_X(\mathfrak{p}'_k) \subseteq H$,
6. $\forall i, j \in n : i \neq j \Rightarrow d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}'_i, \mathfrak{p}'_j) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_\mathrm{i}, \mathfrak{p}_j)$,
7. $\forall 1 \leq i < k : \mathfrak{p}'_i$ *es extensible dentro de H y*
8. *Si $\mathfrak{p}_0$ es extensible en H, entonces $\mathfrak{p}'_0$ es extensible dentro de H.*

Demostración. Como $\mathfrak{p}_k$ es extensible dentro de H (considerando $Y = X = \mathbb{U}_S$ y $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_k$ en la definición de extensibilidad), existe $Z \leq \mathbb{U}_S$ con $A \subseteq Z$ y existe una función tipo $\mathfrak{q}$ con $\mathfrak{p}_k \subseteq \mathfrak{q}$, $\mathsf{rank}(\mathfrak{q}) = r - 1$ y $\mathsf{Sat}_Z(\mathfrak{q}) \subseteq H$.

Sea $y \in \mathsf{Sat}_Z(\mathfrak{q})$ y $\mathfrak{t}$ función con $\mathsf{dom}(\mathfrak{t}) = \mathsf{dom}(\mathfrak{q}) \cup \{y\}$, $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{t}$ y $\mathfrak{t}(y) = r - 1$, por el Lema 3.5 tenemos que $\mathfrak{t}$ es función tipo.

Sea $\mathfrak{q}' = \mathfrak{t} \restriction_{A \cup \{y\}}$ (notemos que $\mathfrak{q}'$ es función tipo con $\mathsf{rank}(\mathfrak{q}') = r - 1$). Usando el Teorema 3.15 (considerando $A = A \cup \{y\}$, $B = \mathsf{dom}(\mathfrak{q}) \setminus A$, $\tau = \{\mathfrak{q}'\}$ y $\theta = \{\mathfrak{t}\}$ de las hipótesis del teorema), existe una isometría $\gamma : Z \longrightarrow Z$ que fija a A y que para todo $x \in \mathsf{Sat}_Z(\mathfrak{q}')$ satisface que $\gamma(x) \in \mathsf{Sat}_Z(\mathfrak{t}) \subseteq \mathsf{Sat}_Z(\mathfrak{q})$.

Sean $X = \mathsf{Im}(\alpha)$, $\beta : \mathbb{U}_S \longrightarrow Z$ isometría que fija a A y $\alpha = \gamma \circ \beta$, tenemos que $\mathsf{Sat}_X(\mathfrak{q}') \subseteq \mathsf{Sat}_Z(\mathfrak{q}) \subseteq H$ y $y \in X$. Definamos $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_k$ y $d' : (n+1)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

1. $d'(i,i) = 0$.

2. $d'(n,k) = r - 1$.

3. Para $i, j \in n+1$, si $i \neq j$ y además $\{i,j\} \neq \{k,n\}$, entonces definimos $d'(i,j) = \text{máx}\{r, d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)\}$.

Veamos que d' es métrica. Para esto resta verificar la desigualdad triangular. Para cualesquiera $i, j, m \in n+1$ tales que $[\{i,j,m\}]^2 \cap \{\{n,k\}\} = \varnothing$ deseamos ver que $d'(i,j) \leq d'(i,m) + d'(m,j)$ para lo cual verificamos caso por caso:

- si $d'(i,j) = d'(i,m) = d'(j,m) = r$ claramente se cumple lo deseado,

- si $d'(i,j) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)$, $d'(i,m) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m)$ y $d'(m,j) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_j)$ entonces por el Lema 3.9 se cumple lo deseado,

- si $d'(i,m) = r$, $d'(i,j) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)$ y $d'(j,m) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_j, \mathfrak{p}_m)$ entonces por la definición de d' tenemos que $d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m) < r$, de este modo se satisface que $d_{min}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) \leq d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m) + d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_j) \leq r + d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_j)$, con lo cual tenemos lo deseado,

- por último si $d'(i,j) = r$, $d'(i,m) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m)$ y $d'(j,m) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_j, \mathfrak{p}_m)$ entonces como $r \leq d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_m), d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_j)$, como $r \leq r + r$ tenemos lo deseado.

Ahora, resta verificar que $\triangle(d'(n,k), d'(n,i), d'(i,k))$, para ello primero notemos que $d'(n,k) = r - 1$ y

$$d'(n,i) = \text{máx}\{r, d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_i)\} = \text{máx}\{r, d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_i)\} = d'(k,i),$$

así, lo que deseamos demostrar es equivalente a verificar $\triangle(r-1, d'(n,i), d'(n,i))$, pero esta aseveración es verdadera, por tanto d' es métrica.

Con esto d' es un r-levelling en $n+1$. Así, haciendo uso del Corolario 3.20, existe un conjunto $\{w_i \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}_i) | i \in n+1\}$ con $w_n = y$ y tal que para cualesquiera $i, j \in n+1$, $d(w_i, w_j) = d'(i,j)$.

Para $i \in n$, sea $\mathfrak{p}'_i$ la función tal que $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}'_i) = A \cup \{y\}$, $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}'_i$ y $\mathfrak{p}'_i(y) = d(w_i, y)$. Por construcción tenemos que $w_i \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}'_i)$, de modo que $\mathfrak{p}'_i$ es función tipo.

Como para $i \in n \setminus \{k\}$ se tiene que $\mathfrak{p}'_i(y) \geq r \geq \mathsf{rank}(\mathfrak{p}_i)$ y $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}'_i$, entonces para todo $i \in n \setminus \{k\}$ se tiene que $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}'_i) = \mathsf{rank}(\mathfrak{p}_i)$.

Ahora, si $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}_0) = r$ y $k \neq 0$, entonces $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}'_0) = \mathsf{rank}(\mathfrak{p}_0) = r$.

Como $\mathfrak{p}_k \subseteq \mathfrak{p}'_k$, $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}'_k) = \mathsf{dom}(\mathfrak{p}_k) \cup \{y\}$, $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}_k) = r$ y $\mathfrak{p}'_k(y) = r - 1$ tenemos que $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}'_k) = r - 1$.

Recordemos que $\mathfrak{p}_k \subseteq \mathfrak{q}'$, así, $\mathfrak{p}'_k = \mathfrak{q}'$, de modo que $\mathsf{Sat}_X(\mathfrak{p}'_k) \subseteq H$. Por el Corolario 3.20 y el Lema 3.19 podemos asegurar que se satisfacen las siguientes igualdades: $d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}'_i, \mathfrak{p}'_j) = \text{máx}\{d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j), |d(w_n, w_i) - d(w_n, w_j)|\} = d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)$.

Como para todo $1 \leq i < k$, $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}'_i$, tenemos que $\mathfrak{p}'_i$ es extensible en H. ■

Corolario 3.23. *Sean $r > 1$ con $r \in S$, $A \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$, $\tau = \{\mathfrak{p}_i | i < n\} \subseteq \mathsf{Type}(A)$ y $H \subseteq \mathbb{U}_S$ de tal forma que para $1 \leq i < n$:*

- $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}_i) = r$ *y*
- $\mathfrak{p}_i$ *es extensible dentro de* H.

Entonces existe un encaje $\alpha : \mathbb{U}_S \longrightarrow \mathbb{U}_S$ que fija a A y de tal manera que si nombramos $X = \mathsf{Im}(\alpha)$, también existen $B \in [X]^{<\omega}$ con $A \cap B = \varnothing$ y para cada $i \in n$ existen funciones tipo $\mathfrak{p}'_i$ de tal modo que para cada $i, j \in n$:

1. $\mathfrak{p}'_i \in \mathsf{Type}(A \cup B)$,
2. $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}'_i$,
3. $i \geq 1 \Rightarrow \mathsf{rank}(\mathfrak{p}'_i) = r - 1$,
4. $i \geq 1 \Rightarrow \mathsf{Sat}_X(\mathfrak{p}'_i) \subseteq H$,
5. $d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}'_i, \mathfrak{p}'_j) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)$ *y*
6. *Si $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}_0) = r$ y $\mathfrak{p}_0$ es extensible dentro de H, entonces B puede elegirse de tal modo que además de lo ya mencionado:*

    a) $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}'_0) = r - 1$ *y*

    b) $\mathsf{Sat}_X(\mathfrak{p}'_0) \subseteq H$.

Lema 3.24. *Sean $r > 1$ con $r \in S$, $X \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$, $A \in [X]^{<\omega}$, $H \subseteq X$, $\mathfrak{p} \in \mathsf{Type}(A)$ y*

$$\mathcal{B} \subseteq \{\mathfrak{q} \in \mathsf{Type}(A) | \mathsf{rank}(\mathfrak{q}) = r,\ \mathfrak{q} \text{ es extensible dentro de } H, d_{\text{mín}}(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) < r\}.$$

Entonces existen un encaje $\gamma : X \longrightarrow X$ que fija a A, $u \in \mathsf{Sat}_{\gamma(X)}(\mathfrak{p})$ tales que para toda $\mathfrak{q}' \in \mathsf{Type}(A \cup \{u\})$ con $\mathfrak{q}'(u) < r$ y $\mathfrak{q}' \restriction_A \in \mathcal{B}$ se satisface que $\mathsf{Sat}_{\gamma(X)}(\mathfrak{q}') \subseteq H$. Además, si $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}$, entonces podemos escoger $u \in H$.

Demostración. Consideremos $\{\mathfrak{q}_i | i \in m\} = \mathcal{B} \cup \{\mathfrak{p}\}$ con $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_0$.

Tenemos que $\{\mathfrak{q}_i | i \in m\}$ satisface las hipótesis del Corolario 3.23, por tanto existe un encaje $\alpha : X \longrightarrow X$ tal que si nombramos $\mathsf{Im}(\alpha) = Y$, existe $B \in [Y]^{<\omega}$ con $A \cap B = \varnothing$ y para cada $i \in m$ existen funciones tipo $\mathfrak{q}'_i$ tales que:

1. $\mathfrak{q}'_i \in \mathsf{Type}(A \cup B)$,
2. $\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{q}'_i$,
3. $i \geq 1 \Rightarrow \mathsf{rank}(\mathfrak{q}'_i) = r - 1$,
4. $i \geq 1 \Rightarrow \mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{q}'_i) \subseteq H$,
5. $d_{\text{mín}}(\mathfrak{q}'_i, \mathfrak{q}'_j) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_j)$ y
6. Si $\mathsf{rank}(\mathfrak{q}_0) = r$ y $\mathfrak{q}_0$ es extensible dentro de H, entonces B puede elegirse de tal modo que además de lo ya mencionado:
   a) $\mathsf{rank}(\mathfrak{q}'_0) = r - 1$ y
   b) $\mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{q}'_0) \subseteq H$.

Ahora ,escojamos $u \in \mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{q}'_0)$. Si $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}$ entonces $\mathfrak{p}$ es extensible dentro de H, de este modo tenemos que $\mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{q}'_0) \cap H \neq \varnothing$. En este caso tomamos a $u \in \mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{q}'_0) \cap H$.

Para $i \in m$, sea $N_i = \{n \geq 1 | d_{\text{mín}}(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}) \leq n \leq r - 1\}$. Para cada $n \in N_i$ tenemos que $d_{\text{mín}}(\mathfrak{q}'_i, \mathfrak{q}'_0) = d_{\text{mín}}(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}) \leq n \leq r - 1$, con lo cual, usando el Corolario 3.17, existe $\mathfrak{t}_{i,n} \in \mathsf{Type}(A \cup B \cup \{u\})$ de tal modo que $\mathfrak{q}'_i \subseteq \mathfrak{t}_{i,n}$ y $\mathfrak{t}_{i,n}(u) = n$ de modo que $\mathsf{rank}(\mathfrak{t}_{i,n}) = n$.

Como $\mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{q}'_i) \subseteq H$, entonces $\mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{t}_{i,n}) \subseteq H$.

Para cada $i \in m$ y cada $n \in N_i$ definamos $\mathfrak{s}_{i,n} = \mathfrak{t}_{i,n} \upharpoonright_{A\cup\{u\}}$, de este modo $\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{s}_{i,n}$ y $\mathsf{rank}(\mathfrak{s}_{i,n}) = n$. Tenemos que $S_{\mathfrak{s}_{i,n}} = S_{\mathfrak{t}_{i,n}}$.

Así, por el Teorema 3.15 podemos obtener un encaje $\beta : Y \longrightarrow Y$ que fija a $A \cup \{u\}$ y de tal manera que para todo $i \in m$ y todo $n \in N_i$ se cumplen las siguientes contenciones $\mathsf{Sat}_{\beta(Y)}(\mathfrak{s}_{i,n}) \subseteq \mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{t}_{i,n}) \subseteq H$.

Considerando $\gamma = \beta \circ \alpha$, γ cumple con lo deseado. ■

Corolario 3.25. *Sean $A \in [\mathbb{U}_S]^{<\omega}$, $r > 1$ con $r \in S$, $H \subset \mathbb{U}_S$, $X \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$, $B \in [X]^{<\omega}$ con $A \subseteq B$, $\mathfrak{p} \in \mathsf{Type}(A)$ con $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}) = r$ con $\mathfrak{p}$ extensible dentro de H en X, tales que:*

1. $\{x \in \mathsf{Sat}_X(\mathfrak{p}) | \exists y \in B : d(x,y) < r\} \subseteq H$ *y*
2. *Para cada $\mathfrak{q} \in \mathsf{Type}(B)$ con $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ se satisface que $\mathfrak{q}$ es extensible dentro de H en X.*

Entonces para cada $\mathfrak{t} \in \mathsf{Type}(B)$ existe $Y \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$ con $Y \leq X$, $B \subset Y$ y existe $u \in \mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{t})$ tales que:

- $\{x \in \mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{p}) | \exists y \in B \cup \{u\} : d(x,y) < r\} \subseteq H$ *y*
- *Para cada $\mathfrak{q} \in \mathsf{Type}(B \cup \{u\})$ con $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ se satisface que $\mathfrak{q}$ es extensible dentro de H en Y.*

Demostración. Sea $\mathfrak{t} \in \mathsf{Type}(B)$, consideremos

$$\mathcal{B} = \{\mathfrak{q} \in \mathsf{Type}(B) | \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}, \mathsf{rank}(\mathfrak{q}) = r, d_{\text{mín}}(\mathfrak{q}, \mathfrak{t}) < r\}.$$

Usando el Lema 3.24 existe $Y \leq X$ con $B \subset Y$ y existe $u \in \mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{t})$ de tal modo que para cada $\mathfrak{q}' \in \mathsf{Type}(B \cup \{u\})$ con $\mathfrak{q}'(u) < r$ y $\mathfrak{q}' \upharpoonright_B \in \mathcal{B}$, se cumple que $\mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{q}') \subseteq H$, si $\mathfrak{t} \in \mathcal{B}$ podemos escoger $u \in H$.

Veamos que $\{x \in \mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{p}) | \exists y \in B \cup \{u\} : d(x,y) < r\} \subseteq H$. Para esto consideremos $x \in \{x \in \mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{p}) | \exists y \in B \cup \{u\} : d(x,y) < r\}$, si existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < r$ entonces $x \in \{x \in \mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{p}) | \exists y \in B : d(x,y) < r\} \subseteq H$.

Si para cada $y \in B$ se cumple que $d(y,x) \geq r$, entonces $d(u,x) < r$. Consideremos la función $\mathfrak{q}' : B \cup \{u\} \longrightarrow S$ dada por $\mathfrak{q}'(y) = d(y,x)$ para $y \in B \cup \{u\}$, con lo cual $\mathfrak{q}'$ es tipo. Como $x \in \mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{p})$ entonces $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}'$, además tenemos que $\mathsf{rank}(\mathfrak{q}' \upharpoonright_B) = r$

y $x \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}') \subseteq \mathsf{Sat}(\mathfrak{q}' \upharpoonright_B)$ de modo que $d_{\text{mín}}(\mathfrak{t}, \mathfrak{q}' \upharpoonright_B) < r$, entonces $\mathfrak{q}' \upharpoonright_B \in \mathcal{B}$, como $\mathfrak{q}'(u) < r$ entonces tenemos que $x \in \mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{q}') \subseteq H$.

Por último veamos que para $\mathfrak{q} \in \mathsf{Type}(B \cup \{u\})$ con $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ se satisface que $\mathfrak{q}$ es extensible dentro de H en Y.

Si $\mathsf{rank}(\mathfrak{q}) = r$ entonces $\mathfrak{q}$ es extensible dentro de H en Y.

Si $\mathsf{rank}(\mathfrak{q}) < r$ entonces $\mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{q}) \subseteq \{x \in \mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{p}) | \exists y \in B \cup \{u\} : d(x,y) < r\} \subseteq H$ con lo cual concluimos. ■

Teorema 3.26. *Sea $\mathfrak{p}$ función tipo de $\mathbb{U}_S$ y $H \subseteq \mathbb{U}_S$ tal que $\mathfrak{p}$ es extensible dentro de H. Existe $X \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}) \subseteq X$ y $\mathsf{Sat}_X(\mathfrak{p}) \subseteq H$.*

Demostración. Sea $\{y_i | i \in \omega\}$ una enumeración de $\mathbb{U}_S$ tal que $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}) = \{y_i | i \leq n\}$.

Definiendo $B_0 = \{x_i | i \leq n\}$ donde para cada $i \leq n$, $x_i = y_i$ y $X_0 = \mathbb{U}_S$, tenemos que para B_0 y X_0 se satisfacen las hipótesis del Corolario 3.25.

Si tenemos B_k y $X_k \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$ que satisfacen las condiciones del Corolario 3.25. Sea $\mathfrak{t}_{k+1} : B_K \longrightarrow S$ dada por $\mathfrak{t}_{k+1}(x_i) = d(x_i, y_{n+k+1})$, tenemos que $\mathfrak{t}_{k+1}$ es función tipo, así, por el Corolario 3.25 existen $X_{k+1} \leq X_k$ y $u_{k+1} \in \mathsf{Sat}_{X_{k+1}}(\mathfrak{t}_{k+1})$ tales que

- $\{x \in \mathsf{Sat}_{X_{k+1}}(\mathfrak{p}) | \exists y \in B_k \cup \{u_{k+1}\} : d(x,y) < r\} \subseteq H$ y
- para cada $\mathfrak{q} \in \mathsf{Type}(B_k \cup \{u_{k+1}\})$ con $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ se satisface que $\mathfrak{q}$ es extensible dentro de H en X_{k+1}.

Sea $x_{n+k+1} = u_{k+1}$ y $B_{k+1} = B_k \cup \{x_{n+k+1}\}$. Notemos que B_{k+1} y X_{k+1} satisfacen las condiciones del corolario 3.25.

Considerando $X = \bigcup_{k \in \omega} B_k$ y $\alpha : \mathbb{U}_S \longrightarrow X$ dada por $\alpha(y_i) = x_i$, por construcción tenemos que α es una isometría por tanto X cumple lo deseado. ■

Definición 3.27. *Sea (X,d) un espacio métrico. X es **indivisible** si para cualquier coloración $\chi : X \longrightarrow 2$, existen $i \in 2$ y $X^* \in \mathbb{P}(X)$ tales que $\chi \upharpoonright_{X^*} = i$.*

En lo subsecuente consideraremos una coloración de $\mathbb{U}_S$, $\chi : \mathbb{U}_S \longrightarrow 2$.

Definición 3.28. *Sean $X \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$ y $A \in [X]^{<\omega}$. Sea $\mathfrak{p}$ una función tipo de X e $i \in 2$, $\mathfrak{p}$ es **monocromática de color i en X** si $\chi[\mathsf{Sat}_X(\mathfrak{p})] = \{i\}$.*

*Diremos simplemente que $\mathfrak{p}$ es **monocromática** si es monocromática de algún color.*

Definición 3.29. *Sea $r \in S$ por $p(r)$ entenderemos la siguiente proposición;*

***p(r)**: Para cada $X \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$ y cada $A \in [X]^{<\omega}$, existe $Y \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$ con $Y \leq X$ y $A \subseteq Y$ tal que para cada $\mathfrak{p} \in \mathsf{Type}(A)$ con $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}) = r$, se tiene que $\mathfrak{p}$ es monocromático en Y.*

En síntesis, la proposición $p(r)$ asegura que para toda función tipo de rango r existe una copia de $\mathbb{U}_S$ donde la función es monocromática.

Lema 3.30. *$p(1)$ se satisface.*

Demostración. Sean $X \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$ y $A \in [X]^{<\omega}$. Veamos que existe $Y \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$ con $Y \leq X$ y $A \subseteq Y$ tal que para cada $\mathfrak{p} \in \mathsf{Type}(A)$ con $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}) = 1$, se tiene que $\mathfrak{p}$ es monocromático en Y.

Sea $\mathfrak{p} \in \mathsf{Type}(A)$ con $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}) = 1$.

Caso 1. Existe una función tipo $\mathfrak{q}$ monocromática en X de color 0 con $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$.
De este modo, $\mathsf{rank}(\mathfrak{q}) = \mathsf{rank}(\mathfrak{p}) = 1$. Así, tenemos que $S_\mathfrak{p} = S_\mathfrak{q}$ por lo que podemos hacer uso del Teorema 3.15 (con $A = A$, $B = \mathsf{dom}(\mathfrak{q}) \setminus A$, $\tau = \{\mathfrak{p}\}$ y $\theta = \{\mathfrak{q}\}$ de las hpótesis del teorema), de este modo existe una isometría $\alpha : X \longrightarrow X$ que fija a A y de tal modo que para cada $x \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$ se satisface que $\alpha(x) \in \mathsf{Sat}_X(\mathfrak{q})$. Entonces $\mathsf{Sat}_{\alpha(X)}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathsf{Sat}_X(\mathfrak{q})$ con lo cual $\chi[\mathsf{Sat}_{\alpha(X)}(\mathfrak{p})] = 0$. Considerando $Y = \alpha(X)$, tenemos lo deseado.

Caso 2. Para cada función tipo $\mathfrak{q}$ con $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, existe un punto $x \in \mathsf{Sat}_X(\mathfrak{q})$ con $\chi(x) = 1$.

Sea $A_0 = A$ definimos la función $\mathfrak{t}_0 : A \longrightarrow S$ dada por $\mathfrak{t}_0(x) = d(x, x_n)$, tenemos que $\mathfrak{t}_0 \in \mathsf{Type}(A_0)$. Si $\mathfrak{t}_0 \neq \mathfrak{p}$ entonces como $\mathsf{Sat}(\mathfrak{t}_0) \cap \mathsf{Sat}(\mathfrak{p}) = \varnothing$ consideramos $x'_n \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{t}_0)$. Si $\mathfrak{t} = \mathfrak{p}$ consideramos $x'_n \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$ de tal modo que $\chi(x'_n) = 1$. Por último definimos $A_1 = A_0 \cup \{x'_n\}$.

Si tenemos $A_{m+1} = A_m \cup \{x'_{n+m}\}$, definimos a la función $\mathfrak{t}_m : A_m \longrightarrow S$ dada por $\mathfrak{t}_m(x) = d(x, x_{n+m+1})$, tenemos que $\mathfrak{t}_m \in \mathsf{Type}(A_m)$, sabemos que existe $\mathfrak{f} \in \mathsf{Sat}(X_n)$ de tal manera que $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{t}_m$. Si $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{p}$ consideramos $x'_{n+m+1} \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{t}_m)$. Si $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}$ consideramos $x'_{n+m+1} \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$ de tal modo que $\chi(x'_{n+m+1}) = 1$.

Siguiendo el proceso anterior de manera recursiva podemos definir $\alpha : X \longrightarrow X$ dada por:

- $\alpha(x_i) = x'_i$ para cada $i \geq n$ y
- $\alpha(x_i) = x_i$ para cada $i < n$.

Por construcción $\mathfrak{p}$ es monocromático en color 1 en $\alpha(X)$. ■

Lema 3.31. *Sean $X \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$ y $\mathfrak{p}$ una función tipo de X con* $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}) = r > 1$. *Si se satisface $p(r-1)$, entonces o bien $\mathfrak{p}$ es extensible dentro de $\chi^{-1}(0)$ en X o existe $Y \leq X$ con* $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}) \subseteq Y$ *tal que $\mathfrak{p}$ es monocromática en color 1 en Y.*

Demostración. Si tenemos que $\mathfrak{p}$ no es extensible dentro de $\chi^{-1}(0)$ en X, entonces existe $Z \leq X$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}) \subseteq Z$ y una función tipo $\mathfrak{p}'$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}') \subseteq Z$, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ y $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}') = r$ de tal manera que para cada $C \leq Z$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}') \subseteq C$ y toda función tipo $\mathfrak{q}$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{q}) \subseteq C$ y $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{q}$ y $\mathsf{rank}(\mathfrak{q}) = r - 1$ se satisface que $\mathsf{Sat}_C(q) \not\subseteq \chi^{-1}(0)$.

Veamos que $\mathfrak{p}'$ es extensible dentro de $\chi^{-1}(1)$ en Z. Para esto consideremos $M \leq Z$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}') \subseteq M$. Sean $\mathfrak{t}$ una función tipo con $\mathsf{dom}(\mathfrak{t}) \subseteq M$, $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{t}$ y $\mathsf{rank}(\mathfrak{t}) = r$ y consideremos $x \in \mathsf{Sat}_M(\mathfrak{t})$. Sea $\mathfrak{q}$ la función tal que $\mathsf{dom}(\mathfrak{q}) = \mathsf{dom}(t) \cup \{x\}$, $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{q}$ y $\mathfrak{q}(x) = r - 1$.

Como se satisface $p(r-1)$ entonces existe $N \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$ con $N \leq M$ y $\mathsf{dom}(\mathfrak{q}) \subseteq N$ de tal modo que para cada $\mathfrak{t} \in \mathsf{Type}(\mathsf{dom}(\mathfrak{q}))$ con $\mathsf{rank}(\mathfrak{t}) = r - 1$, se tiene que $\mathfrak{t}$ es monocromático en N. Entonces considerando $\gamma : Z \longrightarrow M$ isometría que fija a $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}')$, $\beta : M \longrightarrow N$ isometría que fija a $\mathsf{dom}(\mathfrak{q})$ y $\alpha = \beta \circ \gamma$ tenemos que $\mathfrak{q}$ es monocromática en $\alpha(Z)$, así, o bien $\mathsf{Sat}_{\alpha(Z)}(\mathfrak{q}) \subseteq \chi^{-1}(0)$ o $\mathsf{Sat}_{\alpha(Z)}(\mathfrak{q}) \subseteq \chi^{-1}(1)$. Además se cumple que: α fija a $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}')$, $\mathsf{dom}(\mathfrak{q}) \subseteq \alpha(Z)$, $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{q}$ y $\mathsf{rank}(\mathfrak{q}) = r - 1$, de modo que $\mathsf{Sat}_{\alpha(Z)}(\mathfrak{q}) \not\subseteq \chi^{-1}(0)$, por lo cual $\mathsf{Sat}_{\alpha(Z)}(\mathfrak{q}) \subseteq \chi^{-1}(1)$.

De este modo tenemos que $\mathfrak{p}'$ es extensible dentro de $\chi^{-1}(1)$ en Z, por tanto usando el Teorema 3.26, existe $L \leq Z$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}') \subseteq L$ y $\mathsf{Sat}_L(\mathfrak{p}') \subseteq \chi^{-1}(1)$. Haciendo uso del Teorema 3.15 existe un encaje $\delta : L \longrightarrow L$ que fija $\mathsf{dom}(\mathfrak{p})$ y para cada $y \in \mathsf{Sat}(\mathfrak{p})$ se cumple que $\delta(y) \in \mathsf{Sat}_L(\mathfrak{p}') \subseteq \chi^{-1}(1)$. Considerando $Y = \delta(L)$ concluimos. ■

Lema 3.32. *Sean $X \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$, $\mathfrak{p}$ una función tipo de X con $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}) = r > 1$ y supongamos que se satisface $p(r-1)$. Entonces existe $Y \leq X$ con $\mathsf{dom}(\mathfrak{p}) \subseteq Y$ y $\mathfrak{p}$ es monocromática en Y.*

Demostración. Si $\mathfrak{p}$ no es extensible dentro de $\chi^{-1}(0)$ en X el resultado se sigue por el Lema 3.31.

Si $\mathfrak{p}$ es extensible dentro de $\chi^{-1}(0)$ en X el lema se sigue por el Teorema 3.26. ■

Corolario 3.33. *Sea $r > 1$ con $r \in S$ si se satisface $p(r-1)$ entonces se satisface $p(r)$.*

Este hecho en conjunto al Lema 3.30 nos dice que para cada $r \in S$ se satisface $p(r)$. Podemos resumir estos resultados en el siguiente corolario.

Corolario 3.34. *Sea $S \in \omega$, $X \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$, $A \in [X]^{<\omega}$ y $\chi : X \longrightarrow 2$. Entonces existe $Y \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$ con $Y \leq X$ y $A \subseteq Y$ tal que para cada $\mathfrak{p} \in \mathsf{Type}(A)$ y $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}) = \max S$ existe $i \in 2$ con $\chi[\mathsf{Sat}_Y(\mathfrak{p})] = i$.*

De este modo concluimos:

Teorema 3.35. *(L. Nguyen Van Thé - N. W. Sauer) Sea $S \in \omega$. $\mathbb{U}_S$ es indivisible.*

Demostración. Sea $\mathfrak{p}$ una función tipo con $\mathsf{rank}(\mathfrak{p}) = \max S$, por el Corolario 3.34 existe $X \in \mathbb{P}(\mathbb{U}_S)$ tal que $\mathfrak{p}$ es monocromática en X.

Además, por el Teorema 3.6 tenemos que $\mathsf{Sat}(\mathfrak{p}) \cong \mathbb{U}_S$ ya que

$$S_{\mathfrak{p}} = \{n \in S | n \leq 2 \cdot \max S\} = S.$$

■

El resultado anterior puede ser demostrado de manera más general para conjuntos $S \in [\omega]^{<\omega}$ que cumple la condición de los 4-valores, este hecho puede ser visto en [6].

Bibliografía

[1] A. S. Kechris, V. G. Pestov, y S. Todorcevic. Fraïssé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups. Geometric and Functional Analysis, volumen 15, número 1, paginas 106–189, 2004.

[2] D.E. Cameron. The birth of soviet topology. Topology Proceedings, volumen 7, paginas 329–378, 1982.

[3] L. Nguyen Van Thé, N.W. Sauer. The Urysohn Sphere Is Oscillation Stable. Geometric and Functional Analysis, volumen 19, número 2, paginas 536-557, 2007.

[4] L. Nguyen Van Thé. Structural Ramsey theory of metric spaces and topological dynamics of isometry groups. Memories of the American Mathematical Society, volumen 206, número 968, 2010.

[5] M. Hušek. Urysohn universal space, its development and Hausdorff's approach. Topology and its Applications, volumen 155, paginas 1493–1501, 2008.

[6] N.W. Sauer. Vertex partitions of metric spaces with finite distance sets. Discrete Mathematics, volumen 312, número 1, paginas 119-128, 2012.

[7] W. Hodges. Model Theory. Cambridge University Press, 1993.