



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Números de Ramsey para
ciclos en dos colores

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

VICENTE JESÚS MOLINA RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ILÁN ABRAHAM GOLDFEDER ORTIZ



2022

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice

1	Introducción	5
1.1	Teoría de gráficas	5
1.2	Teoría de Ramsey	11
2	J. A. Bondy	23
3	J. A. Bondy y P. Erdős	41
4	G. Chartrand y S. Schuster	49
5	R. J. Faudree y R. H. Schelp	85
A	Apéndice	115

Capítulo 1

Introducción

1.1 Teoría de gráficas

Antes que nada, necesitamos algunos conceptos básicos de teoría de gráficas. Las definiciones y teoremas que se presentan en esta sección, así como cualquier concepto en el resto del texto que no aparezca en el mismo se pueden encontrar en [7].

Una *gráfica* G es un conjunto finito no vacío V de elementos llamados *vértices* junto con un conjunto E de subconjuntos de dos elementos de V llamados *aristas*. Escribimos cada arista $\{u, v\}$ como uv . Si $e = uv$, decimos que e *une* a u y v . El número de vértices en una gráfica es su *orden*, mientras que el número de aristas es su *tamaño*. Escribimos $V(G)$ y $E(G)$ cuando queremos enfatizar a qué gráfica pertenece un grupo de vértices o aristas. A una gráfica de un solo vértice le llamamos *trivial*, mientras que a una gráfica cuyo conjunto de aristas es vacío le llamamos *vacía*.

Si uv es una arista de G , se dice que u y v son *adyacentes* en G . También decimos que u y v son *vecinos*. Es por esto que al conjunto de vecinos de u le llamamos la *vecindad* de u , que denotamos por $N(u)$. Si u y v son vértices y uv es una arista de G , decimos que la arista uv *incide* en el vértice u , y en v respectivamente.

El *grado* de un vértice u es el número de vértices que son adyacentes a u . Para esto usamos la notación $d(u)$, es decir $d(u) = |N(u)|$. De aquí tenemos el siguiente teorema, que se conoce como el primer teorema de teoría de gráficas.

Teorema 1.1. *Si G es una gráfica de tamaño m , entonces*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

Demostración. Cuando sumamos los grados de los vértices de G , contamos cada arista de G dos veces, una por cada vértice en el que incide. \square

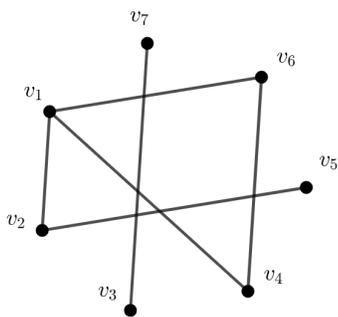


Figura 1.1: En esta imagen, por ejemplo, tenemos una gráfica de orden 7 y tamaño 6. El vértice v_1 es de grado $d(v_1) = 3$ y su vecindad es el conjunto $N(v_1) = \{v_2, v_4, v_6\}$.

Decimos que una gráfica H es una *subgráfica* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Si $V(G) = V(H)$, entonces H es una subgráfica *generadora* de G . Para un subconjunto no vacío S de $V(G)$, la subgráfica $G[S]$ *inducida* en G por el conjunto S es la subgráfica cuyos vértices son los elementos de S y dos vértices son adyacentes en $G[S]$ si y solo si son adyacentes en G . Decimos que una subgráfica H es una *subgráfica inducida* si hay un subconjunto S de $V(G)$ tal que $H = G[S]$. Para un subconjunto no vacío X de $E(G)$, la subgráfica $G[X]$ *inducida* por X es la subgráfica de G cuyo conjunto de aristas es X y un vértice de G es vértice de $G[X]$ si y solo si al menos una de las aristas de X incide en él.

Para un subconjunto propio $U \subset V(G)$, definimos $G - U$ como la subgráfica inducida en G por el conjunto de vértices $V(G) \setminus U$. Si u y v son dos vértices no adyacentes de G , la gráfica $G + uv$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G + uv) = V(G)$ y su conjunto de aristas es $E(G + uv) = E(G) \cup \{uv\}$.

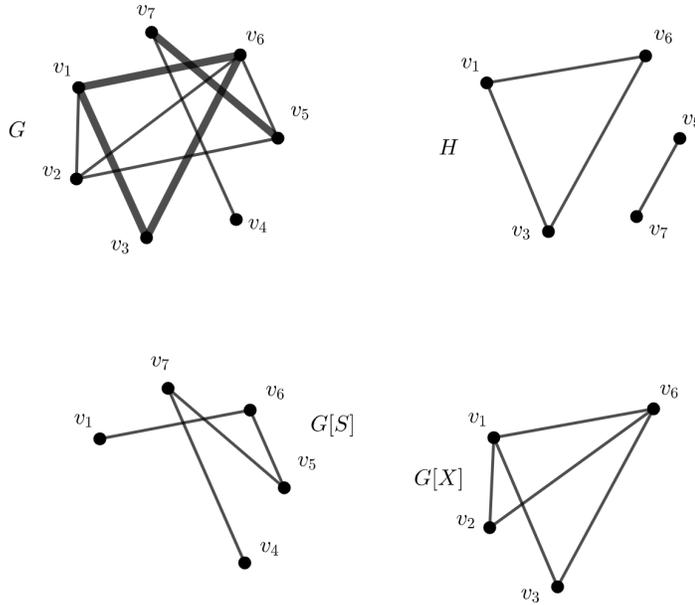


Figura 1.2: En esta imagen, tenemos una gráfica G , una de sus subgráficas H y, si tomamos $S = \{v_1, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ y $X = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$, tenemos la subgráfica inducida por S y la subgráfica inducida por X .

Para dos vértices no necesariamente distintos u y v en una gráfica G , definimos un *camino* de u a v en G , como una sucesión de vértices que comienza en u y termina en v de forma que dos vértices consecutivos en la sucesión son adyacentes en G . Podemos expresar esto como $W = (u_1 = u, u_2, u_3, \dots, u_k = v)$ donde $u_i u_{i+1} \in E(G)$ para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$. El camino se considera que incluye las aristas que unen vértices consecutivos de W , es decir, se puede pensar en el camino como el punto u_1 seguido de la arista $u_1 u_2$ seguido del punto u_2 seguido de la arista $u_2 u_3$ y así sucesivamente hasta llegar a u_k . En este caso, al número k le llamamos la *longitud* de W . A un camino T de u a v en el cual ningún vértice se repite le llamamos una *trayectoria* de u a v , podemos resumir esto llamandola una *uv-trayectoria*. Un camino en el que el vértice inicial y el vértice final son el mismo se conoce como *camino cerrado*. Un camino cerrado con más de un vértice en el que ninguna arista se repite se conoce como *circuito*, mientras que a un circuito en el que ningún vértice, con excepción del primero y el último, se repite se le conoce como *ciclo*. A un ciclo de longitud 3 le llamaremos triángulo. A una

trayectoria o un ciclo lo podemos considerar como la sucesión de vértices y aristas que lo conforman, pero también lo podemos pensar como la subgráfica inducida por sus aristas.

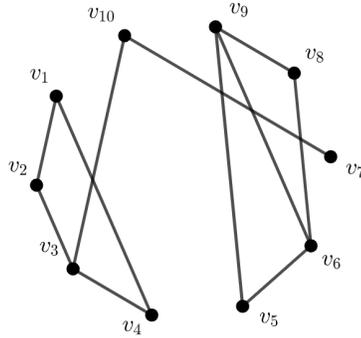


Figura 1.3: En esta imagen, tenemos una gráfica en la que podemos encontrar la sucesión (v_3, v_{10}, v_7) y ver que es una v_3v_7 -trayectoria de longitud 2 y orden 3. También podemos encontrar el camino cerrado $(v_9, v_5, v_6, v_9, v_8, v_6, v_9)$ y el ciclo (v_1, v_2, v_3, v_4) .

Dado que en este texto trabajaremos mucho con ciclos vale la pena introducir un poco más de notación en este tema. A un ciclo, ya sea como subgráfica o como sucesión de vértices, de longitud n , lo denotaremos como C_n . Al orden del ciclo de mayor longitud de G le llamaremos la *circunferencia* de G y la denotamos como $c(G)$. Supongamos que $C = (u_1, u_2, \dots, u_n, u_1)$ es un ciclo en alguna gráfica G . En este texto siempre tomaremos los índices de cada vértice de C en módulo n . Usaremos la notación $[u_i, u_j]$ para denotar a la sucesión $(u_i, u_{i+1}, \dots, u_j)$. Es decir, a una sección que recorre al ciclo C desde u_i hasta u_j . Además escribiremos $L(u_i, u_j)$ para la longitud de esta trayectoria.

Decimos que un ciclo C en G es *hamiltoniano* si $V(C) = V(G)$. Consecuentemente, decimos que una gráfica es *hamiltoniana* si contiene un ciclo hamiltoniano. El teorema más importante que vamos a usar en este texto sobre gráficas hamiltonianas es el siguiente.

Teorema 1.2 (Teorema de Ore). *Sea G una gráfica de orden $n \geq 3$. Si $d(v) + d(u) \geq n$ para cualesquiera vértices no adyacentes de G , entonces G es hamiltoniana.*

Decimos que una gráfica G es *conexa* si para cualesquiera $u, v \in V(G)$ existe una uv -trayectoria en G . Una gráfica que no es conexa es una gráfica *inconexa*. Si G es una gráfica conexa y $u \in V(G)$ es tal que $G - \{u\}$ es inconexa, decimos que G es *separable*. En este caso, al vértice u lo conocemos como *vértice de corte*. Una subgráfica no trivial conexa sin vértices de corte es un *bloque*.

El número de *conexidad* $\kappa(G)$ es el menor número de vértices que es necesario quitar a una gráfica para obtener una gráfica inconexa o una gráfica trivial. En este texto solo nos preocuparemos por distinguir cuando una gráfica sea o no un bloque, es decir, cuando su número de conexidad sea mayor, igual o menor a 2. Para dos vértices u y v de G , decimos que $S \subseteq V(G) \setminus \{u, v\}$ es un *subconjunto separador* de u y v si no existe una uv -trayectoria en $G - S$. Por otro lado, decimos que dos uv -trayectorias son *internamente ajenas* si los únicos vértices que tienen en común son u y v . En este texto usaremos brevemente el siguiente teorema de Karl Menger.

Teorema 1.3 (Teorema de Menger). *Sean u y v dos vértices no adyacentes en G . El menor número en un conjunto separador de u y v es igual al mayor número de uv -trayectorias internamente ajenas que podemos encontrar en G .*

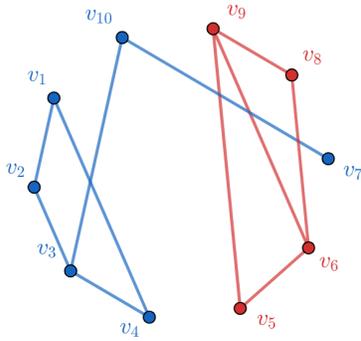


Figura 1.4: Si consideramos de nuevo esta gráfica, podemos ver que no es conexa, pues no existe una trayectoria, por ejemplo, de v_9 a v_1 . Podemos usar colores para distinguir las componentes. También podemos notar que, por ejemplo, v_3 es un vértice de corte de la subgráfica azul y que la subgráfica roja es un bloque.

Decimos que una gráfica es *completa* si todos sus vértices son adyacentes entre sí. Si G es una gráfica completa de orden n la denotamos como K_n . Una gráfica no trivial es *bipartita* si existe una partición de V en dos conjuntos U y W de forma que cada arista de E une a un vértice de U con un vértice de W . Si una gráfica bipartita es tal que todos los vértices de U son adyacentes a todos los vértices de W , entonces le llamaremos una gráfica *bipartita completa*. En este caso, si $|U| = n$ y $|W| = m$, denotamos a esta gráfica como $K_{n,m}$.

El siguiente teorema, aunque sencillo, resulta ser de gran utilidad.

Teorema 1.4. ¹ *Una gráfica con más de un vértice es bipartita si y solo si no contiene ciclos de orden impar.*

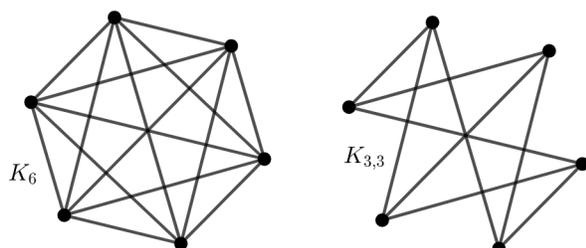


Figura 1.5: En esta imagen, tenemos una gráfica completa, K_6 , y una gráfica bipartita completa, $K_{3,3}$.

Aunque anteriormente usamos colores para distinguir diferentes características de una gráfica, existe una vasta teoría que tiene como su enfoque diferentes formas de asignar color a una gráfica. En este texto, la que nos es relevante es la siguiente. Una *coloración por aristas* de G es una función que asigna a cada arista un color de un conjunto de colores. A una coloración en la que usamos k colores, le llamamos una *k -coloración*. En este texto nos enfocamos a coloraciones de dos colores. Arbitrariamente, elegimos rojo y azul. Llamamos *componente cromática* a la subgráfica inducida por todas las aristas de un color correspondiente. En este texto generalmente escribiremos G_R para referirnos al a componente roja y G_A para referirnos a la componente azul.

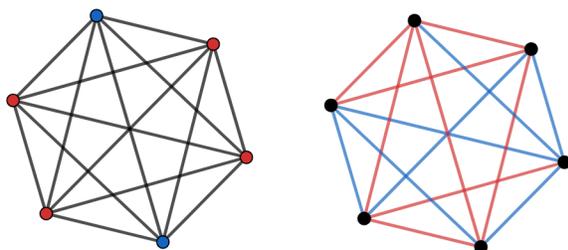


Figura 1.6: En esta imagen, tenemos una coloración por vértices y una coloración por aristas de K_6 . Una *coloración por vértices* es una función que asigna a cada vértice un color de un conjunto de colores.

¹Omitimos la demostración de este teorema pues requiere de algunos conceptos que salen del alcance de este texto.

1.2 Teoría de Ramsey

Ahora que hemos recordado las bases sobre la teoría de gráficas, es momento para comenzar a hablar del tema central de este texto. La teoría de Ramsey se pregunta sobre las condiciones bajo las cuales pequeños lugares de orden deben aparecer en un sistema. Y en teoría de gráficas esto se ve como la pregunta: ¿Cuál es el menor número de vértices que necesito para garantizar la existencia de una subgráfica completa de cierto tamaño o cierto número de vértices independientes²? Un primer ejemplo es el problema de los amigos: ¿cuántas personas necesito invitar a mi fiesta para que haya un grupo de al menos 3 personas que se conozcan entre sí o no se conozcan la una a la otra? El número del millón de dolares es nada menos que 6. Ya conociendo el lenguaje de teoría de gráficas, podemos escribir esta afirmación como:

Teorema 1.5. *En cualquier gráfica de orden 6 existe una subgráfica completa de orden 3 o un conjunto de 3 vértices independientes.*

Escrito de esta forma podemos comenzar a plantear una demostración. Podemos incluso definir r_n como el menor número de vértices necesarios en una gráfica para que exista una subgráfica completa de orden n o un conjunto de n vértices independientes. Sin embargo, esta definición limita nuestra posibilidad de generalizar estos resultados en un futuro. Una solución a este problema, es usar coloraciones de aristas. Podemos pensar en colorear una gráfica completa con dos colores, digamos rojo y azul, y considerar un color como las aristas que existen en la gráfica original y de otro color a las aristas que no. De esta forma convertimos nuestro teorema en el siguiente:

Teorema 1.6. *Para cualquier coloración rojo-azul de K_6 existe una subgráfica completa de orden 3 monocromática roja o monocromática azul.*

Y por qué no ir un paso más allá y darle una definición a este concepto y su correspondiente notación, aplicable a cualquier pareja de números naturales. Para enteros positivos s y t , definimos el número de Ramsey $r(s, t)$ como el menor número de vértices que puede tener una gráfica para garantizar que en cualquier coloración rojo-azul de $K_{r(s,t)}$ exista una subgráfica completa de orden s monocromática roja o una subgráfica completa de orden t monocromática azul. Con esta nueva definición finalmente llegamos a una versión concreta de nuestro teorema y es momento de demostrarlo.

²Una definición de vértices independientes se puede encontrar en el apéndice A

Teorema 1.7. $r(3, 3) = 6$

Demostración. Consideremos una coloración rojo-azul de K_6 y fijemos un vértice v_1 . Si nos fijamos en las 5 aristas que inciden en v_1 , por el principio del palomar, sabemos que deben haber por lo menos 3 aristas del mismo color. Sin pérdida de generalidad, supongamos que estas tres aristas son rojas y digamos que inciden en v_2, v_3 y v_4 , respectivamente (véase figura 1.7). Si alguna de las aristas entre estos 3 vértices es de color rojo tenemos un triángulo rojo. De no ser así, entonces estas tres aristas forman un triángulo azul. De esta forma podemos ver que $r(3, 3) \leq 6$.

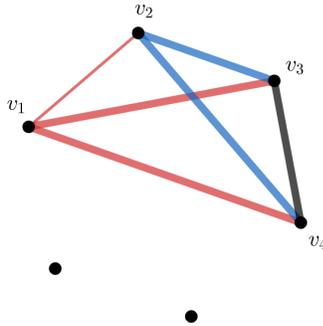


Figura 1.7: En este ejemplo ponemos nuestra atención en v_3v_4 . Podemos notar que si v_3v_4 es roja, entonces (v_1, v_3, v_4, v_1) es un triángulo rojo. Pero si v_3v_4 es azul, al igual que v_2v_3 y v_2v_4 , entonces (v_2, v_3, v_4, v_2) es un triángulo azul.

Ahora, si consideramos la siguiente coloración de K_5 podemos ver que la subgráfica azul y la subgráfica roja son ambas isomorfas³ a C_5 , que claramente no tiene a K_3 como subgráfica. Por lo tanto $r(3, 3) \geq 6$.

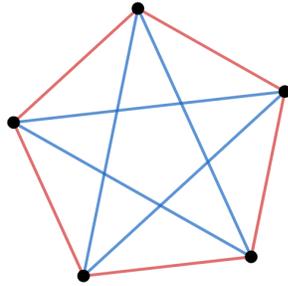


Figura 1.8: En contraste con nuestra demostración de que $r(3, 3) \leq 6$, podemos notar que cada vértice es exactamente adyacente a dos vértices por aristas rojas y a dos vértices por aristas azules.

Podemos concluir que $r(3, 3) = 6$. □

³Una definición de isomorfismo se puede encontrar en el apéndice A.

Cuando s y t son menores a tres no es difícil encontrar el número de Ramsey, pero como veremos más adelante, esto cambia rápidamente conforme estos números crecen. Para un entero s , tenemos que $r(s, 1) = 1$ claramente, pues K_1 es una subgráfica monocromática azul. También tenemos que $r(s, 2) = s$, pues si existe una arista de color azul entonces se tiene una K_2 de ese color, de no ser así es por que toda la gráfica es de color rojo en cuyo caso es una K_s roja.

También resulta evidente que $r(s, t) = r(t, s)$, pues si consideramos la coloración “inversa”, por llamarla de alguna forma, a la coloración donde las aristas azules son las anteriormente rojas y viceversa, sabemos que la condición que debe satisfacer el número de Ramsey debe aplicar a toda coloración y su inversa por igual.

El siguiente teorema nos brinda una cota inicial, pero aun más importante, nos sirve para demostrar que efectivamente $r(s, t)$ existe para cualesquiera s, t enteros positivos.

Teorema 1.8. *Para cualesquiera dos enteros positivos s y t , el número de Ramsey $r(s, t)$ existe y*

$$r(s, t) \leq r(s - 1, t) + r(s, t - 1).$$

Además, si $r(s - 1, t)$ y $r(s, t - 1)$ son pares, entonces

$$r(s, t) \leq r(s - 1, t) + r(s, t - 1) - 1.$$

Demostración. Demostramos por inducción sobre $n = s + t$. Ya notamos que $r(1, t) = 1$ y que $r(2, t) = t$ para cualquier entero positivo t . Es fácil probar que el teorema se sostiene para $n = s + t \leq 5$. Así que podemos suponer que $s \geq 3$ y $t \geq 3$ y por lo tanto $n \geq 6$.

Supongamos que $r(s', t')$ existe para todos los enteros positivos s' y t' tales que $s' + t' < k$ donde $k \geq 6$. Supongamos una coloración rojo-azul de K_n , donde $n = r(s - 1, t) + r(s, t - 1)$. Fijemos un vértice v en K_n . El grado de v debe ser $n - 1 = r(s - 1, t) + r(s, t - 1) - 1$. Tenemos dos casos:

Caso 1: $d_{G_R}(v) \geq r(s - 1, t)$. Sea A la subgráfica completa inducida en K_n por $N_{G_R}(v)$ (con la coloración que se hereda de la coloración de K_n). El orden de esta gráfica debe ser $p = d_{G_R}(v) \geq r(s - 1, t)$. Por lo tanto, A tiene como subgráfica una K_{s-1} roja o una K_t azul. Si A tiene una K_t azul, esta pertenece a su vez a K_n , por lo que ya habremos terminado. Si A tiene una K_{s-1} roja, entonces K_n tiene una K_s roja pues v es adyacente a todos los vértices de esta K_{s-1} por una arista roja.

Caso 2: $d_{G_R}(v) \leq r(s-1, t) - 1$. Entonces, $d_{G_A}(v) \geq r(s, t-1)$. Sea B la subgráfica completa inducida en K_n por $N_{G_A}(v)$ (con la coloración que se hereda de la coloración de K_n). El orden de esta gráfica debe ser $q = d_{G_A}(v) \geq r(s, t-1)$. Por lo tanto, A tiene como subgráfica una K_s roja o una K_{t-1} azul. Si B tiene una K_s roja, esta pertenece a su vez a K_n , por lo que ya habremos terminado. Si B tiene una K_{t-1} , entonces K_n tiene una K_t azul, pues v es adyacente a todos los vértices de esta K_{t-1} por una arista azul. En cualquier caso, K_n tiene K_s rojo o un K_t azul.

Por lo tanto,

$$r(s, t) \leq r(s-1, t) + r(s, t-1).$$

Ahora, supongamos que $r(s-1, t)$ y $r(s, t-1)$ son ambos pares y tomemos una coloración rojo-azul de K_{n-1} . Sea B la subgráfica inducida en K_{n-1} por las aristas rojas y C la inducida por las aristas azules. Como B es de orden impar, algún vértice de B debe ser de grado par. Llamemos v a este vértice. Si $d_B(v) \geq r(s-1, t)$, entonces podemos proceder como en el *caso 1* anterior, y concluimos que K_{n-1} contiene una K_s roja o una K_t azul. De lo contrario, $d_B(v) \leq r(s-1, t) - 2$ y $d_C(v) \geq r(s, t-1)$. Procediendo como en el *caso 2* anterior, podemos concluir que K_{n-1} contiene una K_s roja o una K_t azul.

□

Sin embargo esta cota solo resulta realmente útil para números pequeños, pues requiere de conocer otros números de Ramsey. El siguiente corolario nos brinda una cota que podemos usar con más naturalidad. Primero necesitamos probar una igualdad, llamada la fórmula de Pascal. Esto no requiere más que de un poco de aritmética.

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-1)!k!} \\
&= \frac{n!k!(n-k)! + n!(n-k+1)!(k-1)!}{(n-k+1)!(k-1)!(n-k)!k!} \\
&= \frac{n![k!(n-k)! + (n-k+1)!(k-1)!]}{(n-k+1)!(k-1)!(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!(k-1)!(n-k)!(k+n-k+1)}{(n-k+1)!(k-1)!(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(n-k+1)!k!} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!k!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.8.1. *Para cualesquiera dos enteros positivos s y t se tiene que*

$$r(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}.$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre $n = s + t$. Tenemos nuestra base de inducción en que $r(3, 3) = 6 \leq 6$. Supongamos que el teorema es cierto para cualesquiera s', t' tales que $s' + t' < n$. Entonces,

$$r(s-1, t) \leq \binom{s+t-3}{s-2} \text{ y } r(s, t-1) \leq \binom{s+t-3}{s-1}.$$

Si sumamos estas dos desigualdades, tenemos que

$$r(s-1, t) + r(s, t-1) \leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1}.$$

Si juntamos esta desigualdad con el teorema 1.8 y la desigualdad que demostramos anteriormente obtenemos que

$$r(s, t) \leq r(s-1, t) + r(s, t-1) \leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}.$$

Con lo que concluimos la prueba. □

Aunque el número $r(s, t)$ fue históricamente el primero en ser estudiado, es difícil no ver que este concepto puede ampliarse de forma muy natural. Por ejemplo, si consideramos una coloración con más colores. Si $\{c_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ es un conjunto de colores, podemos definir el número de Ramsey $r(t_1, \dots, t_k)$ como el menor entero n tal que para cualquier k -coloración de K_n , existe una $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que K_n contiene una subgráfica completa de orden t_i monocromática de color c_i .

Lema 1.1. *Si t_1, t_2, \dots, t_k son enteros positivos, entonces*

$$r(t_1, t_2, \dots, t_k) \leq r(t_1, t_2, \dots, t_{k-2}, r(t_{k-1}, t_k)).$$

Demostración. Sea $n = r(t_1, t_2, \dots, t_{k-2}, r(t_{k-1}, t_k))$ y tomemos una k -coloración de K_n . Podemos considerar los colores c_{k-1} y c_k como el mismo color c' , en cuyo caso tenemos una $(k-1)$ -coloración de K_n . Por la definición de n , K_n debe contener una subgráfica completa de orden t_i monocromática de color c_i para alguna $i \in 1, 2, \dots, k-2$ o una subgráfica monocromática completa de orden $r(t_{k-1}, t_k)$ de color c' . En el primero de los casos, esa subgráfica también pertenece a K_n y ya habremos terminado. En el segundo de los casos, podemos volver a considerar a c_{k-1} y c_k como colores distintos. Entonces tenemos una gráfica completa de orden $r(t_{k-1}, t_k)$ con una 2-coloración. Por lo tanto, esta subgráfica debe tener una K_{k-1} monocromática de color c_{k-1} o una K_k monocromática de color c_k . Cualquiera de estas dos gráficas que exista pertenece también a K_n . \square

Esta idea de ver dos colores como el mismo es interesante y nos permite demostrar que $r(t_1, \dots, t_k)$ existe. Sin embargo, hay una versión más general del teorema 1.8 que también pudimos haber usado para demostrar esto.

Teorema 1.9. *Si t_1, \dots, t_k son enteros positivos, entonces el número de Ramsey $r(t_1, \dots, t_k)$ existe y*

$$r(t_1, \dots, t_k) \leq \sum_i^k r(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_k) - k + 2.$$

La demostración procede de la misma forma que para el teorema 1.8, considerando el caso en que existe un vértice, digamos v_i , para el cual en la gráfica de color c_i el grado de v_i es al menos $r(t_1, \dots, t_i - 1, \dots, t_k)$. Y después proceder a demostrar que se trata de todos los casos posibles. Este

procedimiento de demostración esta presente en muchas de las pruebas de este capítulo por lo que la omitiremos en esta ocasión.

El número $r(3, 3, 3)$ no solo es interesante como un caso más complejo del problema de los amigos. Es aún más interesante debido a que es uno de los pocos números de Ramsey de la forma $r(t_1, \dots, t_k)$ con $k \geq 3$ y $t_i \geq 3$ para cada $i \in 1, \dots, k$ que se conoce.

Teorema 1.10. $r(3, 3, 3) = 17$

Demostración. Tomemos una coloración rojo-azul-verde de K_{17} . Si fijamos un vértice arbitrario v , por el principio del palomar generalizado⁴, sabemos que v debe tener al menos 6 aristas adyacentes de un mismo color. Sin pérdida de generalidad supongamos que v es adyacente a v_1, v_2, \dots, v_6 por aristas verdes. Sea $H = K_6$ la gráfica subgráfica inducida por $\{v_1, \dots, v_6\}$. Si H tiene una arista verde, entonces junto con v se forma un triángulo verde en H y en K_{17} . Si todas las aristas de H son rojas o azules, como $r(3, 3) = 6$, entonces H , y K_{17} , contiene triángulo monocromático rojo o triángulo monocromático azul. Por lo tanto, K_{17} tiene un triángulo monocromático y $r(3, 3, 3) \leq 17$.

Para demostrar que $r(3, 3, 3) = 17$, basta que mostremos una coloración por aristas de K_{16} libre de triángulos monocromáticos. De hecho existen 2 coloraciones que sirven para esto (véanse figuras 1.9 y 1.10).

⁵

□

⁴El principio del palomar generalizado se puede encontrar en el apéndice A.

⁵Podemos encontrar una ilustración de la gráfica de Clebsch en el apéndice A.

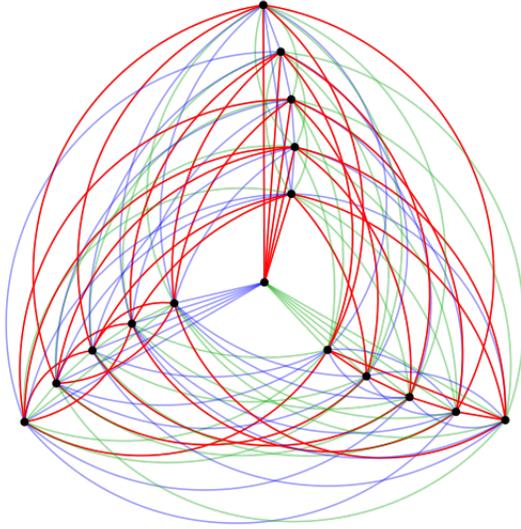


Figura 1.9: Las componentes monocromáticas de cada una de estas gráficas son isomorfas entre sí. Más aun, en ambos casos, cada componente es isomorfa a una gráfica conocida como la gráfica de Clebsch.

El único otro número de esta forma que se conoce es $r(3, 3, 4) = 30$. Fue confirmado computacionalmente recientemente en 2016 por M. Codish, M. Frank, A. Itzhakov y A. Miller. Si consideramos más de 4 colores entonces solo se conocen algunas cotas. Podemos mencionar algunas en las que las entradas son únicamente 3, simplemente como una curiosidad: $51 \leq r(3, 3, 3, 3) \leq 62$, $162 \leq r(3, 3, 3, 3, 3) \leq 307$, $538 \leq r(3, 3, 3, 3, 3, 3) \leq 1538$, $1682 \leq r(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3) \leq 12861$. Ya podemos ver lo rápido que crecen estos valores.

En este texto nos interesa una forma diferente de generalizar la idea del número de Ramsey. Podemos quedarnos con únicamente dos colores pero en lugar de buscar una gráfica completa de uno u otro orden, podemos simplemente fijar dos gráficas y buscar subgráficas monocromáticas isomorfas a alguna de estas gráficas. Para dos gráficas G_1 y G_2 , definimos el número de Ramsey $r(G_1, G_2)$ como el menor entero tal que para toda 2-coloración de $K_{r(G_1, G_2)}$ existe una subgráfica monocromática roja isomorfa a G_1 o una subgráfica monocromática azul isomorfa a G_2 .

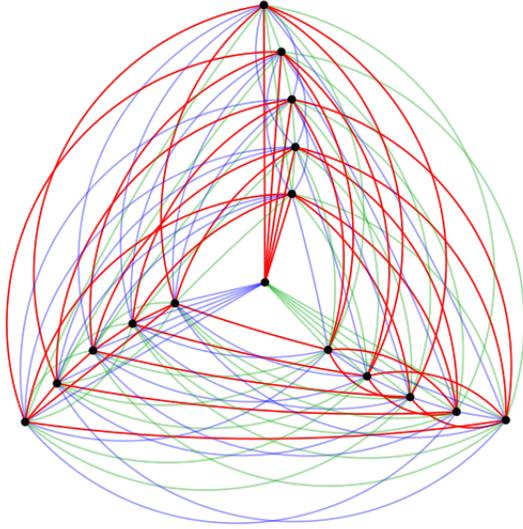


Figura 1.10: La gráfica de Clebch es especial pues tiene muchas propiedades particulares, entre otras, ser libre de triángulos.

Teorema 1.11. *Para las gráficas F y H que aparecen en la figura 1.11, tenemos que $r(F, H) = 7$.*

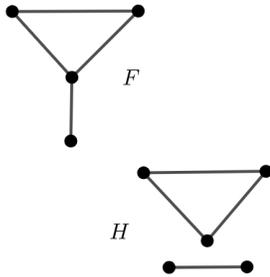


Figura 1.11: F , una gráfica de orden 4 y H , una gráfica de orden 5.

Demostración. Como $r(K_3, K_3) = 6$, sabemos que cualquier coloración rojo-azul de K_7 debe tener un triángulo azul o un triángulo rojo. Llamemos $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ al conjunto de vértices que forman parte de este triángulo monocromático y $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ al conjunto que conforman el resto de los vértices.

Caso 1: Primero supongamos que el triángulo monocromático es azul. Si existe una arista azul entre dos vértices de V , entonces tenemos una

subgráfica H azul. De lo contrario tenemos una K_4 roja y por lo tanto una subgráfica F roja

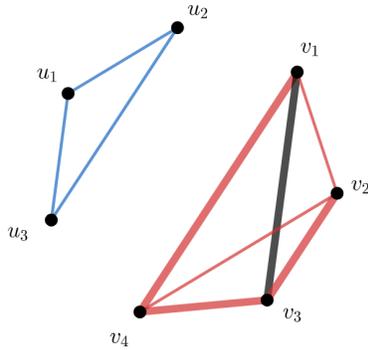


Figura 1.12: En este ejemplo ponemos nuestra atención en la arista v_1v_3 . Veamos que si esta arista es azul, la gráfica contiene una subgráfica H azul y si es roja, justo con las demás aristas de V , la gráfica contiene una subgráfica F roja.

Caso 2: Ahora supongamos que el triángulo monocromático es rojo. Si alguna de las aristas que unen a los vértices de V con los vértices de U es roja, entonces tenemos una subgráfica F roja.

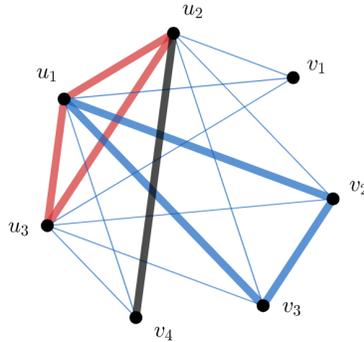


Figura 1.13: En este ejemplo ponemos nuestra atención en la arista u_2v_4 . Si esta arista es roja, entonces H contiene una F roja y si es azul, y otra arista de V es azul, digamos v_2v_3 , entonces H contiene una H azul.

Si todas las aristas que unen a U y V son azules y hay una arista azul que une a dos vértices de V , entonces tenemos una subgráfica H azul. De otro modo, la gráfica generada por V resulta ser una K_4 roja, lo que implica que K_7 contiene una subgráfica F roja (véase figura 1.14).

De esta forma podemos ver que $r(F, H) \leq 7$. Si consideramos la siguiente coloración de K_6 , podemos ver que esta gráfica no tiene una subgráfica F roja ni una subgráfica H azul (véase figura 1.15). Por lo tanto, $r(F, H) = 7$.

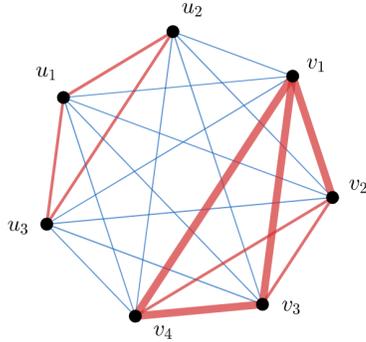


Figura 1.14: En este ejemplo podemos ver que V genera una gráfica completa y por tanto H contiene una F roja.

□

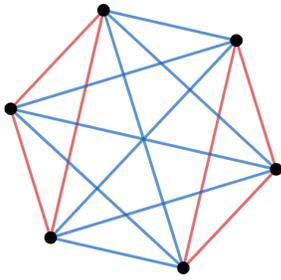


Figura 1.15: Si consideramos esta coloración para K_6 , podemos ver que no contiene una F roja o una H azul.

Como sabemos que el número de Ramsey de la forma $r(K_s, K_t)$ existe para cualesquiera enteros $s, t \in \mathbb{N}$, podemos demostrar $r(F, H)$ existe para cualquier par de gráficas F y H .

Teorema 1.12. *Para cualesquiera gráficas G_1, G_2, \dots, G_k de orden n_1, \dots, n_k , respectivamente, el número $k \geq 2$ de Ramsey $r(G_1, G_2, \dots, G_k)$ existe y*

$$r(G_1, G_2, \dots, G_k) \leq r(K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_k})$$

Demostración. Si la gráfica G_i es de orden n_i para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ entonces $r(G_1, \dots, G_k)$ está acotado superiormente por $r(n_1, \dots, n_k)$. Pues si tenemos una gráfica de ese orden con una subgráfica completa de orden n_j monocromática de color c_j , esta a su vez tiene una subgráfica isomorfa a G_j monocromática de color c_j . □

Ya con esta introducción a la terminología de la teoría de Ramsey, podemos establecer brevemente el objetivo de este texto. La intención de este texto es dar una fórmula para obtener el número de Ramsey para cualquier par de ciclos, es decir, $r(C_n, C_m)$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$. Para estos números usaremos la notación $c(n, m)$ en lugar de $r(C_n, C_m)$.

Para concluir este capítulo, y únicamente como una curiosidad, podemos darle un vistazo a un teorema que involucra gráficas conexas y libres de ciclos, es decir, árboles.

Teorema 1.13. ⁶ *Sea T un árbol de orden $p \geq 2$. Para cada entero $n \geq 2$,*

$$r(T, K_n) = (p - 1)(n - 1) + 1.$$

⁶Omitimos la demostración de este teorema pues requiere de algunos conceptos que salen del alcance de este texto.

Capítulo 2

J. A. Bondy

Para poder abordar los números de Ramsey que nos interesan, $c(n,m)$, necesitaremos algunos resultados preliminares. Los primeros de estos se los atribuimos a John Adrian Bondy.

En *Pancyclic graphs* [2], J. A. Bondy propone y demuestra un teorema que resulta muy familiar a cualquiera que recuerde el teorema de Ore (1.2). En particular, como veremos en este capítulo, J.A. Bondy muestra que la condición del teorema de Ore no solo implica que una gráfica es Hamiltoniana, si no que es pancíclica o $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$, para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, el objetivo de J. A. Bondy en *Large cycles in graphs* [1] es examinar la relación entre la circunferencia de una gráfica con su orden, tamaño y el grado de sus vértices. El teorema más importante que usaremos nosotros plantea cuál es la mayor cantidad de aristas que podemos tener en una gráfica si queremos conservar su circunferencia.

Decimos que una gráfica G de orden n es pancíclica si contiene ciclos de toda longitud l para cada $l \in \{3, \dots, n\}$.

Teorema 2.1. *Si G es una gráfica hamiltoniana de orden n tal que $|E(G)| \geq \frac{n^2}{4}$, entonces G es pancíclica o es la gráfica bipartita $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.*

Demostración. Sea $C = (u_1, u_2, \dots, u_n, u_1)$ un ciclo de longitud n en G . Supongamos que G no es pancíclica. Entonces G no contiene un ciclo de longitud l para alguna $l \in \{1, \dots, n-1\}$. Para vértices adyacentes u_i y u_{i+1} , tomando los índices módulo n , consideremos los siguientes emparejamientos de aristas:

Para $i+l-1 \leq k \leq i-1$, emparejamos $u_i u_k$ con $u_{i+1} u_{k-l+3}$. Podemos notar que ambas aristas no pueden pertenecer simultáneamente a G o, de lo

contrario,

$$(u_i, u_{i+1}, u_{k-l+3}, u_{k-l+4}, \dots, u_k, u_i)$$

es un ciclo de longitud l en G (véase figura 2.1).

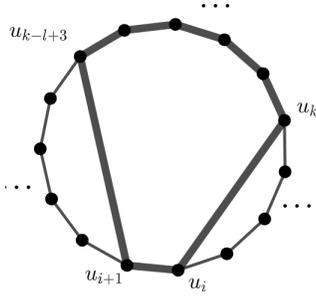


Figura 2.1: En esta gráfica podemos apreciar el ciclo de longitud l que se forma cuando $u_i u_k$ y $u_{i+1} u_{k-l+3}$ son aristas de G simultáneamente. Tomamos $i + l - 1 \leq k \leq i - 1$ para asegurar que $u_i \neq u_k$ y $u_{i+1} \neq u_{k-l+3}$.

Para $i + 2 \leq k \leq i + l - 2$, emparejamos $u_i u_k$ con $u_{i+1} u_{k-1+1}$. De igual forma, podemos notar que ambas aristas no pueden pertenecer simultáneamente a G o, de lo contrario,

$$(u_i, u_k, u_{k-1}, \dots, u_{i+1}, u_{k-l+1}, u_{k-l+2}, \dots, u_i)$$

es un ciclo de longitud l en G (véase figura 2.2).

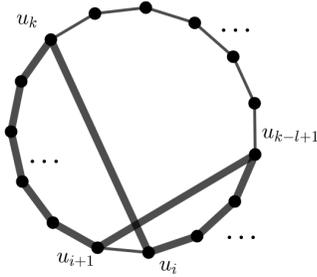


Figura 2.2: En este emparejamiento tomamos $i + 2 \leq k \leq i + l - 2$ para asegurar que $u_{i+1} \neq u_k$ y $u_i \neq u_{k-1+1}$. También podemos notar que en el primero emparejamiento u_{i+1} es emparejado con u_{i-l+2} . Mientras que en el segundo emparejamiento u_{i+2} es emparejado con u_{i-l+3} . De aquí podemos ver que los emparejamientos no repiten ninguna arista.

Como a lo más un elemento de cada pareja puede pertenecer a G , para cada par de vértices adyacentes u_i y u_{i+1} tenemos que $d(u_i) + d(u_{i+1}) \leq n$, donde la igualdad se cumple si y solo si exactamente una arista de cada pareja pertenece a G . Primero veamos que n es par. Supongamos que n es impar. Entonces, por la desigualdad anterior, algún vértice, digamos u_n , debe tener grado a lo más $\frac{n-1}{2}$. Entonces,

$$2|E(G)| = \sum_{j=1}^n d(u_j) \leq \frac{n(n-1)}{2} + d(u_n) \leq \frac{(n-1)(n+1)}{2} < \frac{n^2}{2}.$$

Por lo tanto, G tiene menos de $\frac{n^2}{4}$ aristas, lo que es una contradicción. Tomando n par, se sigue que $|E(G)| \leq \frac{n^2}{4}$. Y por tanto, considerando la hipótesis inicial, $|E(G)| = \frac{n^2}{4}$.

Entonces tenemos que en nuestro emparejamiento de aristas sucede que

- i) $u_i u_k \in E(G) \iff u_{i+1} u_{k-l+3} \notin E(G)$ para $i+l-1 \leq k \leq i-1$
- ii) $u_i u_k \in E(G) \iff u_{i+1} u_{k-l+1} \notin E(G)$ para $i+2 \leq k \leq i+l-2$

Podemos pensar en cada vértice de G como una cuerda de C . Definimos la *longitud de una cuerda* como la distancia entre los extremos, medida a lo largo de C . Supongamos que G no es la gráfica completa bipartita $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$. Entonces alguna arista de G es una cuerda de longitud par. Demostremos que existe una cuerda de longitud 2. Supongamos entonces que existe una cuerda $u_i u_{i+k} \in E(G)$ de longitud $k \geq 4$ par, tal que k es la longitud de cuerda par más corta en G . Tenemos 3 casos:

Caso 1: $4 \leq k \leq n-1$

$u_{i+1} u_{i+k+l-3} \notin E(G)$ pues esta arista junto con $u_i u_{i+k}$ forman un ciclo de longitud l (véase figura 2.3). Por lo tanto, por i), $u_{i+2} u_{i+k} \in E(G)$ y esta cuerda es de longitud $k-2$, lo que contradice que $u_i u_{i+k}$ sea la de menor longitud par.

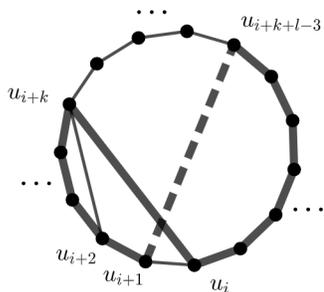


Figura 2.3: En esta gráfica podemos ver el ciclo que se forma cuando $u_{i+1} u_{i+k+l-3}$ y $u_i u_{i+k}$ son ambas aristas de G . Tomando $i' = i+1$ y $k' = i+k+l-3$, podemos usar i) para encontrar una cuerda de longitud $k-2$.

Caso 2: $n-l+2 \leq k \leq 2n-2l$

Por ii), $u_{i-1} u_{i+k+l-1} \notin E(G)$ y por i), $u_{i-2} u_{i+k+2l-4} \in E(G)$ (véase figura 2.4). Pero esta es una cuerda de longitud $2n-k-2l+2 \leq k-2$, así que de nuevo tenemos una contradicción.

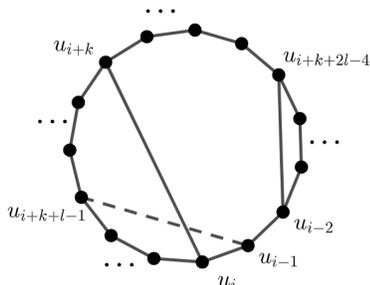


Figura 2.4: Tomando $i' = i - 1$ y $k' = i + k + l - 1$ podemos usar ii) para ver que la arista $u_i u_{i+k}$ no puede estar en G junto con $u_{i-1} u_{i+k+l-1}$. Después, tomando $i' = i - 2$ y $k' = i + k + 2l + 4$ podemos usar i) para encontrar la cuerda que nos lleva a la contradicción.

Caso 3: $2n - 2l + 2 \leq k \leq n - 2$

Por ii), $u_{i-1} u_{i+k+l-1} \notin E(G)$ y de nuevo, por ii), $u_{i-2} u_{i+k+l-2} \in E(G)$ (véase figura 2.5). Esta cuerda es de longitud $k + 2l - 2n \leq k - 2$, lo que también es una contradicción.

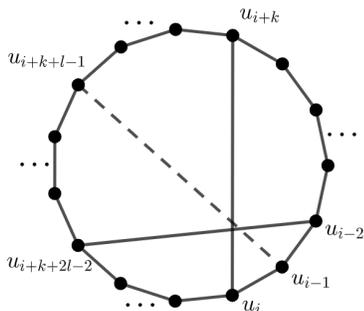


Figura 2.5: Podemos proceder de la misma forma que en el caso anterior para ver que $u_{i-1} u_{i+k+l-1} \notin E(G)$ y después tomar $i'' = i - 2$ y $k'' = i + k + 2l - 2$ para encontrar la cuerda que nos lleva a la contradicción.

Se sigue que $u_i u_{i+2} \in E(G)$ para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$. Pero entonces, $u_i u_{i+l} \notin E(G)$ o de lo contrario

$$(u_i, u_{i+2}, u_{i+3}, \dots, u_{i+l}, u_i)$$

es un ciclo de longitud l en G (véase figura 2.6).

Por i) tenemos que $u_{i+1} u_{i+3} \in E(G)$. Continuando de esta forma, vemos que todas las cuerdas de longitud 2 pertenecen a G . Pero en ese caso,

$$(u_1, u_3, \dots, u_{l-1}, u_l, u_{l-2}, \dots, u_2, u_1)$$

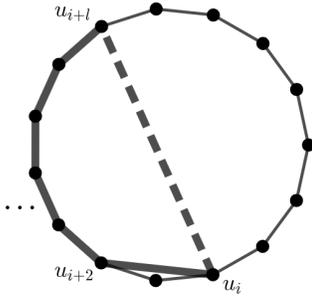


Figura 2.6: En esta imagen podemos ver el ciclo de longitud l que se formaría si $u_i u_{i+2}$ y $u_i u_{i+l}$ pertenecen al mismo tiempo a G .

es un ciclo de longitud l para cada $l \in \{4, \dots, n\}$ par y

$$(u_1, u_3, \dots, u_l, u_{l-1}, u_{l-3}, \dots, u_2, u_1)$$

es un ciclo de longitud l para cada $l \in \{3, \dots, n-1\}$ impar (véase figura 2.7). Es decir, G es pancíclica.

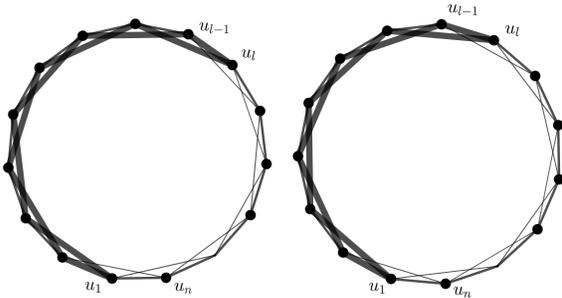


Figura 2.7: En esta imagen podemos ver como encontrar ciclos de todos los ordenes usando las cuerdas de longitud 2. Tomando uno de estos ciclos, de longitud l , podemos sustituir la arista $u_{l-1}u_l$ con la siguiente arista de C y la siguiente cuerda de longitud 2 y así obtener un ciclo de longitud $l+1$.

Esto contradice nuestra suposición, por lo tanto $G = K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

□

Usando este teorema llegamos a la siguiente proposición[2].

Proposición 1. *Sea G una gráfica de orden n tal que $d(u) + d(v) \geq n$ para cualesquiera $u, v \in V(G)$ con $uv \notin E(G)$. Entonces, G es pancíclica o es la gráfica bipartita completa $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.*

Demostración. Considerando el teorema de Ore, basta demostrar que la condición anterior implica que $|E(G)| \geq \frac{n^2}{4}$. Sea k el grado mínimo de G . Supongamos que $k < \frac{n}{2}$, pues de lo contrario el resultado es inmediato. Si hay m vértices de grado k , entonces estos vértices deben ser adyacentes entre sí por la condición sobre los grados. Por lo tanto, $m \leq k + 1$, pero $m \neq k + 1$ pues G es hamiltoniana y por tanto, conexa (La única forma de tener exactamente $k + 1$ vértices de grado k que son adyacentes entre sí, es si G es de la forma $H \cup K_{k+1}$ para alguna gráfica H). Si nos fijamos en un vértice de grado k en G , digamos u , tenemos que este vértice es adyacente a k vértices que deben ser a su vez adyacentes a al menos k vértices. Y al menos uno de estos vértices debe ser adyacente a más de k vértices de G . Además, debe haber al menos $n - k - 1$ vértices de grado al menos $n - k$ en G , en particular, los que no son adyacentes a u . Por tanto,

$$\begin{aligned} |E(G)| &\geq \frac{1}{2}((n - k - 1)(n - k) + k^2 + k + 1) \\ &= \frac{1}{2}(n^2 - n(2k - 1) + 2k^2 + 2k + 1) \\ &\geq \frac{n^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

□

Decimos que una sucesión $\{d_i\}_1^n$, con $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, es *gráfica* si existe una gráfica G , con $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, tal que $d_i = d(v_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. En ese caso, $\{d_i\}_1^n$ es llamada la *sucesión de grados* de G . Si $S = \{d_i\}_1^n$ y $S' = \{d'_i\}_1^n$ son sucesiones de grados de gráficas G y G' respectivamente, decimos que S' *mayoriza* a S si $d_i \leq d'_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Podemos notar por ejemplo, que si G es una subgráfica generadora de G' , y S y S' son las sucesiones de grados de G y G' , respectivamente, entonces S' mayoriza a S . Con esto tenemos el siguiente teorema [8].

Teorema 2.2. *Sea G una gráfica de orden n y sucesión de grados $\{d_i\}_1^n$. Si*

$$d_k \leq k \implies d_{n-k} \geq n - k,$$

para $k < \frac{1}{2}n$, entonces G es hamiltoniana.

Demostración. Primero notemos que si $d_k \leq k$, entonces existen al menos k vértices cuyo grado es a lo más k . Similarmente, si $d_{n-k} \geq n - k$, entonces el número de vértices cuyo grado es al menos $n - k$ es al menos $k + 1$.

Demostremos el teorema por contradicción. Supongamos que existe una gráfica H que satisface las condiciones del teorema, pero no es hamiltoniana. Podemos pensar en H como una subgráfica generadora de una gráfica máxima no hamiltoniana G . Esta gráfica también satisface la condición sobre los grados del teorema, pues su sucesión de grados mayoriza a la de H .

Tomemos dos vértices no adyacentes u y v tales que $d(u) + d(v)$ sea lo más grande posible. Si agregar una arista entre estos vértices resulta en una gráfica hamiltoniana, entonces $G + uv$ tiene un ciclo hamiltoniano C . Como C contiene la arista uv , entonces G contiene una uv -trayectoria hamiltoniana, digamos $(u = v_1, v_2, \dots, v_n = v)$. Sean $S = \{i: uv_{i+1} \in E(G)\}$ y $T = \{i: vv_i \in E(G)\}$. No puede haber $j \in S \cap T$ o de lo contrario

$$(u = v_1, v_2, \dots, v_j, v = v_n, v_{n-1}, \dots, v_{j+1}, u)$$

es un ciclo hamiltoniano en G , lo que no es posible (véase figura 2.8). Como n no está ni en S ni en T , se sigue que $S \cup T \subseteq \{1, \dots, n-1\}$. Por lo tanto, $d(u) + d(v) = |S| + |T| < n$ y podemos suponer que $d(u) < \frac{1}{2}n$.

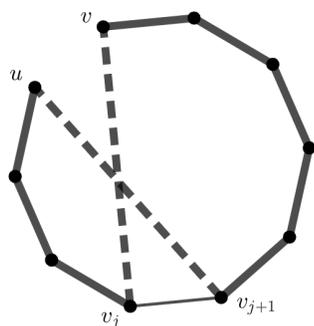


Figura 2.8: En esta imagen, tenemos un ejemplo del ciclo hamiltoniano que se formaría si existiera un vértice v_j en $S \cup T$.

Como $S \cap T = \emptyset$, ningún v_j con $j \in S$ es adyacente a v . Por la elección de $d(u)$ y $d(v)$, sabemos que para $j \in S$, $d_j \leq d(u)$. Por lo tanto, hay al menos $|S|$ vértices cuyo grado es a lo más $d(u)$. Así que si tomamos $k = d(u)$, tenemos que $d_k \leq k < \frac{1}{2}n$, y por lo tanto, tenemos de la hipótesis que $d_{n-k} \geq n - k$. Esto significa que hay al menos $k + 1$ vértices cuyo grado es al menos $n - k$. El vértice u puede ser adyacente a lo más k de estos $k + 1$ vértices. Por tanto, hay un vértice w , con $d(w) \geq n - k$, que no es adyacente a u . Pero entonces $d(u) + d(w) \geq n > d(u) + d(v)$, lo que contradice la elección de u y v .

□

En esta sección del texto trabajaremos frecuentemente con diferentes trayectorias en una gráfica. Para simplificar el trabajo usaremos la siguiente notación. Para una trayectoria T en una gráfica G , denotaremos $f(T)$ como el primer vértice de la trayectoria y $l(T)$ como el último vértice. Para simplificar aun más la notación escribimos únicamente f y l . Siguiendo esta notación, también escribimos f_i y l_i en lugar de $f(T_i)$ y $l(T_i)$, respectivamente. La sucesión de vértices de T en el orden inverso también es una trayectoria que denotamos como \bar{T} . Por tanto, $f = \bar{l}$ y $l = \bar{f}$. Cuando u preceda a v en la trayectoria T escribiremos $u \prec v$. Una sección de T que comienza en un vértice u y termina en un vértice v la denotamos como $[u, v]$; similarmente escribimos $[u, v]_i$ y $[u, v]_i'$ para denotar secciones de T_i y T_i' que comienzan en u y terminan en v . Podemos decir entonces, por ejemplo, que $T_i = [f_i, l_i]_i$. Escribimos $p(v)$ para el predecesor de v en la trayectoria, y $s(v)$ para su sucesor. Si T_i y T_j son trayectorias en G tales que $l_i = f_j$, entonces la composición $T_i \bullet T_j$ denota la sucesión $[f_i, p(l_i)]_i$ seguida de T_j . En el caso en que $V(T_i) \cap V(T_j) = \{l_i = f_j\}$ sabemos que $T_i \bullet T_j$ también es una trayectoria.

Si tenemos trayectorias T, T_i, T_j tales que

$$V(T) \cap V(T_i) = \{f_i, l_i\}$$

$$V(T) \cap V(T_j) = \{f_j, l_j\}$$

$$V(T_i) \cap V(T_j) = \emptyset,$$

entonces decimos que T_i se *superpone* a T_j en T si $f_i \prec f_j \prec l_i \prec l_j$ (véase figura 2.9).

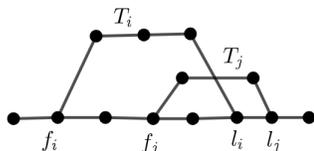


Figura 2.9: En esta imagen tenemos un ejemplo de una trayectoria T_i que se superpone a la trayectoria T_j en T .

Lema 2.1. *Sea G un bloque y T una trayectoria en G . Entonces, para alguna $m \geq 1$, existe una sucesión de m trayectorias ajenas en aristas T_1, \dots, T_m , tales que $f_1 = f$, $l_m = l$, $V(T) \cap V(T_i) = \{f_i, l_i\}$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ y T_j se superpone a T_{j+1} para cada $j \in \{1, \dots, m-1\}$.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre la longitud de T . Para los casos en los que $L(T) = 0$ y $L(T) = 1$, es suficiente considerar $m = 1$ y $T_1 = T$.

Ahora supongamos que el lema es cierto para toda trayectoria de longitud menor a $L(T)$. Sea T una trayectoria de longitud $L(T)$, entonces, si consideramos la trayectoria $[f, p(l)]$ existen una sucesión de trayectorias T_1, \dots, T_m que satisfacen las condiciones del lema. Sea H la subgráfica de G la unión de las trayectorias T, T_1, \dots, T_m . Como G es un bloque entonces $G - \{p(l)\}$ es conexa y entonces existe una trayectoria T' en $G - \{p(l)\}$ de $H - \{p(l)\}$ a l . Podemos elegir T' de forma que $V(T') \cap V(H) = \{f', l' = l\}$. Si $f' \in V(T)$, entonces existe una $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $f_j \prec f' \prec l_j$ y por lo tanto, T_1, \dots, T_j, P' es una sucesión de trayectorias que satisfacen las condiciones del teorema (véase figura 2.10).

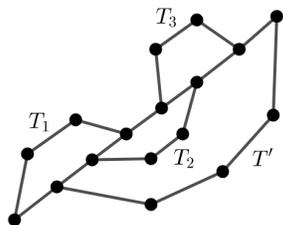


Figura 2.10: En este ejemplo tenemos que $j = 1$, es decir, $f_1 \prec f' \prec l_1$, y en ese caso, T_1, T' es la sucesión que buscamos.

Si $f' \notin V(T)$ y $f' \in V(T_j)$, entonces $T_1, \dots, T_{j-1}, [f_j, f']_j \bullet P'$ es la sucesión que estamos buscando (véase figura 2.11).

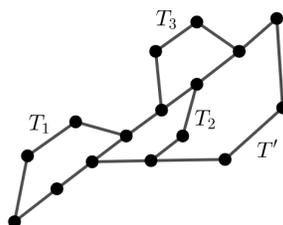


Figura 2.11: En este ejemplo, podemos ver que f' pertenece a T_2 , en ese caso podemos tomar una sección de T_2 para obtener la sucesión $[f_2, f'] \bullet T'$, que satisface las las condiciones del lema.

□

Teorema 2.3. Sea G un bloque de orden n con sucesión de grados $\{d_i\}_1^n$. Si

$$d_i \geq i, d_j \geq j \implies d_i + d_j \geq c,$$

con $i \neq j$, entonces G contiene un ciclo de longitud al menos $\min(c, n)$.

Demostración. Sea T una trayectoria de longitud máxima en G elegida de forma tal que $d(f) + d(l)$ sea lo más grande posible. Digamos que $j = d(f)$ y $k = d(l)$. Además llamemos $J = N(f)$ y $K = N(l)$. Entonces, como T es de longitud máxima, $J \cup K \subseteq V(T)$. Si $v \in J$, entonces $[f, p(v)] \bullet (f, v) \bullet [v, l]$ es una trayectoria T' de longitud $L(T)$ y con $d(f') + d(l') = d(p(v)) + d(l)$ (véase figura 2.12).

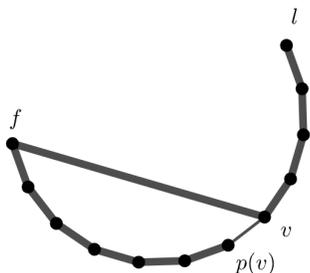


Figura 2.12: En esta imagen podemos ver que usando cualquier vértice adyacente a f podemos encontrar otra trayectoria de longitud T .

Por la elección de T tenemos que $d(p(v)) \leq d(f)$. Como hay $j = |J|$ de estos vértices, se sigue que $d_j \leq j$ y con un argumento semejante se sigue que $d_k \leq k$. Sea $p(J) = \{p(v) : v \in J\}$. Si $j = k$, los $j + 1$ vértices en $p(J) \cup \{l\}$ tienen grado a lo más j . Por lo tanto, $d_j \leq j$ y $d_{j+1} \leq j < j + 1$. Entonces, por la hipótesis del teorema, tenemos que $d(f) + d(l) = 2j \geq d_j + d_{j+1} \geq c$. Si $j \neq k$, entonces de nuevo por la hipótesis tenemos que $d(f) + d(l) = j + k \geq d_j + d_k \geq c$. En ambos casos podemos concluir que $d(f) + d(l) \geq c$.

Si $c \geq n$, el resultado se sigue inmediatamente del teorema 2.2.

Tomemos entonces $c < n$. Sea $L(T) = p$. Primero veamos que $p \geq c$. Como $|p(J)| = d(f)$ y $|K| = d(l)$, sabemos que $|p(J) \cap K| = |p(J)| + |K| - |p(J) \cup K| \geq d(f) + d(l) - p \geq c - p$. Supongamos que $p \leq c - 1$, es decir, que $1 \geq c - p$. Entonces existe un vértice $u \in p(J) \cap K$. La sucesión $C = (f, s(u)) \bullet [s(u), l] \bullet (l, u) \bullet [f, u]$ es un ciclo de longitud $p + 1 \leq c < n$ (véase figura 2.13).

Por tanto, existe un vértice $v \in G$ que no pertenece a C . Como G es conexa, existe una trayectoria P' de v a un vértice $w \in V(C)$ tal que $V(P') \cap V(C) = \{w\}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $w \in V([f, u])$. Entonces $P' \bullet [w, u] \bullet (u, l) \bullet [s(u), l] \bullet (s(u), f) \bullet [f, p(w)]$ es una trayectoria de longitud mayor a p (véase figura 2.14). Por tanto, $p \geq c$.

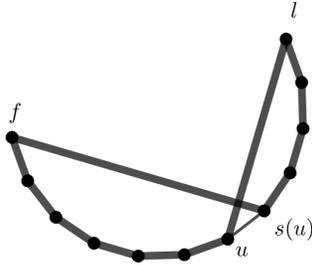


Figura 2.13: En esta imagen tenemos un ejemplo del ciclo que se forma por la existencia de $u \in p(J) \cap K$

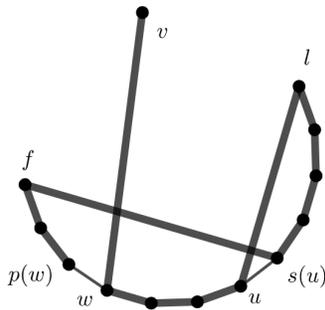


Figura 2.14: En este ejemplo podemos ver una trayectoria que recorre todos los vértices de T y uno más, lo que contradice que T sea de longitud máxima.

Por el lema 2.1, existen trayectorias T_1, \dots, T_m que satisfacen las condiciones del lema. Como T es de longitud máxima, es claro que T_1 y T_m son de longitud 1. Tomemos m de forma que sea la menor posible. Tenemos 3 casos:

Caso 1: Si $m = 1$, entonces $fl \in E(G)$ y en ese caso $P \bullet (f, l)$ es un ciclo de longitud $p \geq c$ en G .

Caso 2: Si $m = 2$, entonces tomemos las trayectorias T_1 y T_2 de forma de que la trayectoria $[f_2, l_1]$ sea lo más corta posible. Supongamos que $L([f_2, l_1]) \geq p - c + 3$, entonces por la elección de T_1 y T_2 , $p(J) \subseteq V([f_1, p(f_2)]) \cup V([p(l_1), p(l_2)])$ y $K \subseteq V([f_1, f_2]) \cup V([l_1, p(l_2)])$ (véase figura 2.15).

Por lo tanto,

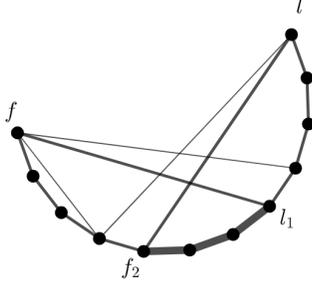


Figura 2.15: En este ejemplo, podemos notar que al pedir que $[f_2, l_1]$ sea lo más corta posible, tenemos que no puede haber aristas de f o l a vértices entre f_2 y l_1 .

$$\begin{aligned}
 |p(J) \cap K| &= |p(J)| + |K| - |p(J) \cup K| \\
 &\geq c - |p(J) \cup K| \\
 &\geq c - |V([f_1, f_2]) \cup V([p(l_1), p(l_2)])| \\
 &\geq c - |V([f_1, f_2]) \cup V([p(l_1), p(l_2)])| \\
 &= c - |V([f_1, p(l_2)])| + |V([s(f_2), p(p(l_1))])| \\
 &\geq c - p + p - c + 1 = 1.
 \end{aligned}$$

Entonces, existe $v \in p(J) \cap K$. Pero entonces, $T'_1 = (f, s(v))$ y $T'_2 = (v, l)$ son trayectorias que satisfacen las condiciones del lema y además $L([f'_2, l'_1]) = 1$, lo que contradice la elección de T_1 y T_2 . Por lo tanto, $L([f_2, l_1]) \leq p - c + 2$. En ese caso, el ciclo $T_1 \bullet [l_1, l_2] \bullet \overline{T_2} \bullet \overline{[f_1, f_2]}$ tiene longitud $|V([l_1, l_2])| + |V([f_1, f_2])| \geq c$ (véase figura 2.16).

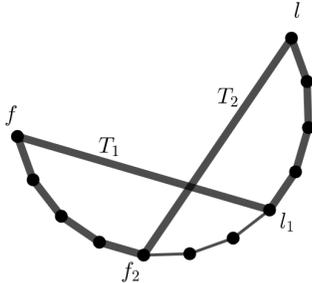


Figura 2.16: En este ejemplo, con $p = 11$, podemos tomar $c = 9$ y en ese caso vemos que si $L([f_2, l_1]) = 3 \leq p - c + 2 = 11 - 9 + 2 = 4$, entonces tenemos un ciclo de longitud $10 > c$.

Caso 3: Si $m \geq 3$, entonces por la elección de m , tenemos que $u \prec s(f_3)$ para cada $u \in J$ y $p(l_{m-2}) \prec v$ para cada $v \in K$ (véase figura 2.17).

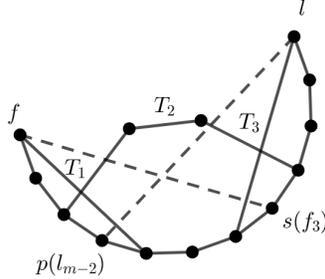


Figura 2.17: En este ejemplo con $m = 3$ podemos ver que las aristas $fs(f_3)$ y $p(l_{m-2})l$ no pueden pertenecer a la gráfica o de lo contrario se contradice la minimalidad de m .

Ahora tomemos T_1, \dots, T_m de forma que $L([f_1, l_1])$ y $L([f_m, l_m])$ sean lo más pequeñas posible. Si m es impar, entonces el ciclo $T_1 \bullet [l_1, f_3] \bullet T_3 \bullet [l_3, f_5] \bullet \dots \bullet [l_{m-2}, f_m] \bullet T_m \bullet [l_{m-1}, l_m] \bullet T_{m-1} \bullet [l_{m-3}, f_{m-1}] \bullet T_{m-3} \bullet \dots \bullet T_2 \bullet [f_1, f_2]$ tiene longitud al menos $c + 1$ (véase figura 2.18).

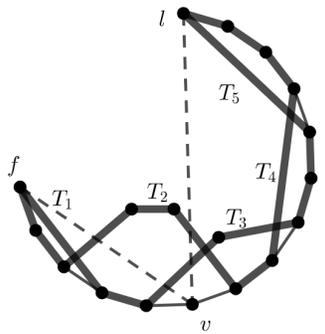


Figura 2.18: En este ejemplo, con $m = 5$, podemos ver el ciclo que se podemos encontrar usando las trayectorias. Si ponemos atención, por ejemplo, en el vértice v que no pertenece al ciclo, podemos notar que la arista fv no puede pertenecer a G o de lo contrario podríamos tomar $[f, v], T_3, T_4, \dots, T_5$ como sucesión, lo que contradiría la minimalidad de m . Por el mismo argumento, vl no puede pertenecer a G .

Si m es par, entonces el ciclo $T_1 \bullet [l_1, f_3] \bullet T_3 \bullet [l_3, f_5] \bullet \dots \bullet T_{m-1} \bullet [l_{m-1}, l_m] \bullet T_m \bullet [l_{m-2}, l_m] \bullet T_{m-2} \bullet \dots \bullet T_2 \bullet [f_1, f_2]$ tiene longitud al menos $c + 1$ (véase figura 2.19).

En ambos casos los ciclos contienen todos los vértices de J y K , además de f y l , como $|J \cap K| \leq 1$ podemos concluir que $|J| + |K| \geq c$.

□

Corolario 2.3.1. *Sea G un bloque de orden n con sucesión de grados $\{d_i\}_1^n$. Si $j \geq c$ siempre que $d_j \geq j$, entonces G contiene un ciclo de longitud al menos $\min(c, n)$.*

Lema 2.2. *Si G es un bloque y $c(G) = c$, entonces entre cada par de vértices en G hay una trayectoria de longitud al menos $\frac{1}{2}c$.*

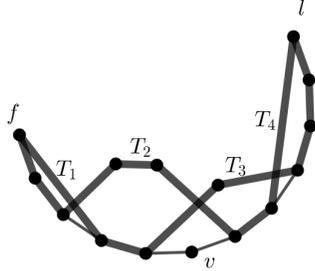


Figura 2.19: Análogamente al caso anterior, en este ejemplo, con $m = 4$, podemos ver el ciclo que se podemos encontrar usando las trayectorias. Con un argumento semejante al de la imagen anterior podemos ver si un vértice no se encuentra en este ciclo, sabemos que las aristas fv y vl no pertenecen a G .

Demostración. Sea $C = (v_1, \dots, v_c)$ un ciclo de longitud c , y u y v dos vértices en G . Como G es un bloque, su conectividad es mayor o igual a dos. Entonces, por el teorema de Menger (1.3), hay dos trayectorias ajenas de $\{u, v\}$ a C en G . Se sigue que hay trayectorias T_u y T_v tales que, para algunas $i \neq j$, $f_u = u$, $l_u = v_i$, $f_v = v_j$, $l_v = v$, $T_u \cap V(C) = v_i$ y $T_v \cap V(C) = v_j$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $L([v_i, v_j]) \geq L([v_j, v_i])$. Tomemos $T = [v_i, v_j]$. Entonces, $L(T) \geq \frac{1}{2}c$ y por lo tanto, $T_u \bullet T \bullet T_v$ es una trayectoria de u a v de longitud al menos $\frac{1}{2}c$ (véase figura 2.20).

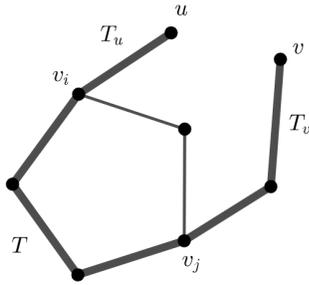


Figura 2.20: En este ejemplo, con $c = 5$, podemos ver que al tomar la trayectoria más larga entre v_i y v_j dentro de C , inevitablemente encontramos una trayectoria de longitud mayor a $\frac{5}{2}$. Esto es independientemente de si u y v pertenecen a C o no.

□

Teorema 2.4. Sea G una gráfica de orden n y sea C un ciclo en G de longitud $c(G)$. Entonces,

- i) el número de aristas de G con a lo más un extremo en C es a lo más $\frac{1}{2}c(n - c)$ y
- ii) el tamaño de G es a lo más $\frac{1}{2}c(n - 1)$.

Demostración. Llamemos $C = \{w_1, \dots, w_c\}$. Primero podemos notar que el inciso i) implica el inciso ii) del teorema, pues el número de aristas en la subgráfica generada por $V(C)$ es a lo más $\frac{1}{2}c(c-1)$ y las aristas que se mencionan en el inciso i) son precisamente el resto de las aristas de G . Es decir, $|E(G)| \leq \frac{1}{2}c(c-1) + \frac{1}{2}c(n-c) = \frac{1}{2}c(n-1)$.

Procedemos por inducción sobre c y $n-c$. El teorema es claramente cierto para $c=3$, pues cada bloque de G puede tener a lo más 3 vértices (véase figura 2.21). Es trivial para $n-c=0$. Cuando $n-c=1$, el vértice que no está en C , tiene grado a lo más $\frac{1}{2}c$ pues no puede ser adyacente a dos vértices consecutivos de C . El teorema se sostiene también en este caso.

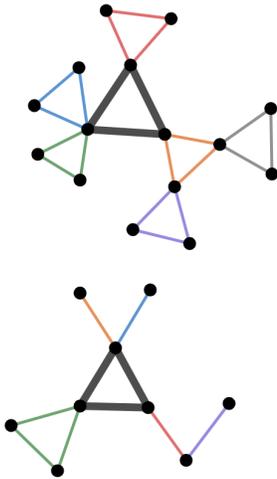


Figura 2.21: En esta imagen podemos ver dos ejemplos para $c=3$. Podemos ver que cada bloque de G puede aportar a lo más 3 aristas. Podemos construir la gráfica de forma que cada dos nuevos vértices aporten a lo más 3 nuevas aristas.

Supongamos que el teorema es cierto para gráficas de circunferencia menor a c y para gráficas de circunferencia c y orden menor a n .

Tomemos entonces una gráfica de orden c y circunferencia n . Si existe algún vértice $v \in V(G) \setminus V(C)$ con grado $d(v) < \frac{1}{2}(c+1)$, entonces por la hipótesis de inducción el número de aristas en $G - \{v\}$ que inciden en a lo más un vértice de C es a lo más $\frac{1}{2}c((n-1)-c)$. Entonces, el número de aristas con esta característica en toda G es menor a $\frac{1}{2}c((n-1)-c) + \frac{1}{2}(c+1) = \frac{1}{2}c(n-c) + \frac{1}{2}$, por lo que ya se tiene el resultado.

Supongamos entonces que todos los vértices de G son de grado al menos $\frac{1}{2}(c+1)$. Supongamos que G es separable y consideremos B un bloque de G con un solo vértice de corte y a lo más un vértice de C . Por el corolario

al teorema 2.3, sabemos que si B es de orden m , entonces existe un ciclo de longitud al menos $\min(c+1, m)$ en B , y por tanto, en G . Como $c = c(G)$, entonces $m \leq c$. Si quitamos de G todos los vértices de B excepto el vértice de corte, quedamos con una gráfica de orden $n - (m - 1)$. Por la hipótesis de inducción, sabemos que el número de aristas de esta nueva gráfica con a lo más un extremo en C es a lo más $\frac{1}{2}c(n - (m - 1) - c)$. También sabemos que B tiene a lo más $\frac{1}{2}c(m - 1)$ aristas. Por tanto, el número de aristas de G con a lo más un extremo en C es a lo más $\frac{1}{2}c(n - (m - 1) - c) + \frac{1}{2}(m - 1) = \frac{1}{2}c(n - c)$.

Podemos asumir entonces que G es un bloque. También podemos suponer que $G' = G - V(C)$ es conexa. De lo contrario basta aplicar la hipótesis de inducción a cada componente.

Primero consideramos el caso en que G' es separable. Sea B' un bloque de G' que contiene un solo vértice de corte de G' . Supongamos que B' tiene circunferencia d y orden $r + 1$, y llamemos v_1, \dots, v_{r+1} a los vértices de B' , con v_{r+1} el vértice de corte. Entonces, por la hipótesis de inducción, sabemos que el tamaño de B' es a lo más $\frac{1}{2}dr$. Si el número de aristas de G que inciden en los vértices v_1, \dots, v_r es menor a $\frac{1}{2}cr$, entonces el número de aristas de G que inciden en a lo más un vértice de C son a lo más $\frac{1}{2}c((n - r) - c) + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}c(n - c)$, donde el primer término es el número de aristas de los otros bloques de G que tienen a lo más un extremo en C . Siendo así, ya tenemos el resultado. Por tanto, podemos suponer que el número de aristas de G que inciden en los vértices v_1, \dots, v_r es mayor a $\frac{1}{2}cr$. Por lo tanto, hay más de $\frac{1}{2}r(c - d)$ aristas que unen a los vértices v_1, \dots, v_r con C .

Caso 1: Supongamos que solo un vértice v_i , con $i \in \{1, \dots, r + 1\}$, es adyacente a C . Entonces v_i es adyacente a al menos $\frac{1}{2}(r(c - d) + 1)$ vértices de C . Como G es un bloque, existe un vértice v en otro bloque de G' tal que v es adyacente a un vértice w_j de C . Por el lema 2.2, sabemos que hay una trayectoria T en G' de longitud mayor a $\frac{1}{2}d$ tal que $f = v_i$ y $l = v$. Como v_i no puede ser adyacente a dos vértices consecutivos de C , se sigue que

$$\max_{w_k \text{ ady. a } v_i} (L[w_k, w_j], L[w_j, w_k]) \geq \frac{1}{2}[c - 1 + r(c - d)]$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $L[w_k, w_j]$ alcanza este máximo (véase figura 2.22).

Como $c \geq d$ tenemos que

$$c(1 + r) + d(1 - r) \geq c(1 + r + 1 - r) = 2c > 2c - 3$$

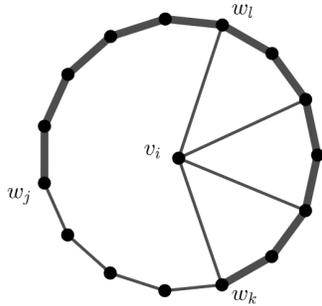


Figura 2.22: En esta imagen tenemos un ejemplo con $c = 15$ y $\frac{1}{2}(r(c-d) + 1) = 4$. Queremos encontrar el vértice de C adyacente a v_i que sea más cercano a w_j para tomar la trayectoria complementaria. En este caso tenemos que $L[w_k, w_l]$ es al menos $6 = 2(4 - 1)$. Por otro lado, $L[w_l, w_j]$ es al menos $5 = \lfloor \frac{1}{2}(15 - 4) \rfloor$. Es decir, $L[w_k, w_j]$ es de longitud al menos $11 > 10 = \frac{1}{2}(c - 1 + r(c - d))$.

$$\implies \frac{1}{2}[c - 1 + r(c - d)] + \frac{1}{2}d + 2 > c$$

Es decir, el ciclo $T \bullet (v, w_j) \bullet [w_j, w_k] \bullet (w_k, v_i)$ tiene longitud mayor a c , lo que es una contradicción.

Caso 2: Supongamos que hay vértices v_i y v_j adyacentes a C . Como hay más de $\frac{1}{2}r(c-d)$ aristas de los vértices v_1, \dots, v_r a los vértices de C , podemos tomar v_i y v_j de forma que las aristas que unen a estos vértices con C sean al menos $c-d+1$. Argumentando como en el caso anterior podemos encontrar vértices $w_k, w_l \in V(C)$ adyacentes a v_i y v_j respectivamente tales que $\max(L[w_k, w_l], L[w_l, w_k]) \geq \frac{1}{2}(3c - 2d - 2)$, digamos que $L[w_l, w_k] \geq \frac{1}{2}(3c - 2d - 2)$ (véase figura 2.23).

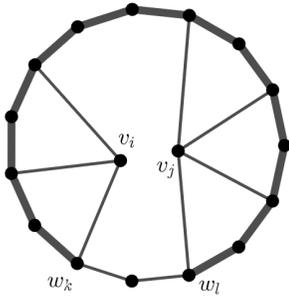


Figura 2.23: En esta imagen tenemos un ejemplo con $c = 15$ y $c - d + 1 = 7$. En este caso queremos encontrar dos vértices en C adyacentes a v_i y v_j que sean lo más cercanos entre sí como sea posible para tomar la trayectoria complementaria. De nuevo podemos considerar el peor escenario, en el que ambas vecindades están alejadas entre sí lo más posible. Semejante al caso anterior, podemos ver que $L[w_l, w_k]$ es al menos $13 = 2(3 - 1) + \lceil \frac{1}{2}(15 - 2(3 - 1) - 2(4 - 1)) \rceil + 2(4 - 1) > \frac{25}{2} = \frac{1}{2}(3c - 2d - 2)$.

Por el lema 2.2, existe una trayectoria T en B' de longitud al menos $\frac{1}{2}d$ tal que $f = v_i$ y $l = v_j$. De nuevo, como $c \geq d$ tenemos que el ciclo

$T \bullet (v_j, w_l) \bullet [w_l, w_k] \bullet (w_k, v_i)$ tiene longitud $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}(3c - 2d - 2) + 2$ que es mayor a c , una contradicción.

La demostración cuando G' es un bloque es esencialmente idéntica a la anterior, tomando $B' = G - V(C)$

□

El inciso *ii)* del teorema anterior nos lleva a la siguiente proposición [1].

Proposición 2. *Si G es una gráfica con $|E(G)| \geq \frac{1}{2}((l-1)(n-1) + 1)$, entonces G contiene un ciclo de orden al menos l .*

Como $|E(K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}})| = \frac{n^2}{4}$, podemos decir usando el teorema 2.1, que si una gráfica hamiltoniana G de orden n es tal que $|E(G)| \geq \frac{n^2+1}{4}$, entonces es pancíclica. Esto nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 2.4.1. *Si G es una gráfica de orden n y tamaño tal que $|E(G)| \geq \frac{1}{2}((c-1)(n-1) + 1)$, con $c \geq \frac{1}{2}(n+3)$, entonces G contiene ciclos de toda longitud l , con $3 \leq l \leq c$.*

Demostración. Por la proposición 2 y porque $\frac{1}{2}((\frac{1}{2}(n+3) - 1)(n-1) + 1) = \frac{1}{4}(n^2 + 1)$, sabemos que G contiene un ciclo de longitud al menos $\frac{1}{2}(n+3)$. Supongamos que $c(G) = d \geq \frac{1}{2}(n+3)$, tomemos C un ciclo de esta longitud y H , la gráfica inducida por $V(C)$.

Por el teorema 2.4, tenemos que el número de aristas en $E(G) - E(H)$ es a lo más $\frac{1}{2}d(n-d)$. Como $|E(G)| \geq \frac{1}{4}(n^2 + 1)$ y $(n-d)^2 \geq 0$, tenemos que $|H| \geq \frac{1}{4}(n^2 + 1) - \frac{1}{2}d(n-d) \geq \frac{1}{4}(d^2 + 1)$. Por el teorema 2.1, H , y por tanto G , contienen ciclos de longitud de toda longitud l , con $3 \leq l \leq d$. Como $c \leq d$, se tiene el resultado

□

El caso particular en que $c = \frac{1}{2}(n+3)$, resulta en la siguiente proposición [1].

Proposición 3. *Si $|E(G)| \geq \frac{1}{4}(n^2 + 1)$, entonces G contiene ciclos de toda longitud l , con $3 \leq l \leq \frac{1}{2}(n+3)$.*

Capítulo 3

J. A. Bondy y P. Erdős

Dos años más tarde, y en conjunto con Paul Erdős, J.A. Bondy publica en *Ramsey numbers for cycles in graphs* [3], algunos resultados para casos particulares de $r(C_n, C_m)$ y $r(C_n, K_m)$. De todos estos, el único resultado que requeriremos en este texto es el siguiente.

Proposición 4. $c(n, n) \leq 2n - 1$ para $n \geq 3$

Demostración. Supongamos una coloración rojo-azul de $G = K_{2n-1}$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|E(G_R)| \geq |E(G_A)|$. Entonces,

$$|E(G_R)| \geq \frac{1}{2} \binom{2n-1}{2} \geq \frac{1}{2} ((n-1)((2n-1)-1) + 1),$$

y por la proposición 2, sabemos que G_R contiene un ciclo de orden mayor o igual a n .

Veamos primero que si G_R o G_A contiene un ciclo de orden $2r+1$, entonces G_R o G_A contiene un ciclo de orden $2r$, para $r \geq 3$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que G_R contiene un ciclo de orden $2r+1$, digamos $C = (u_1, u_2, \dots, u_{2r}, u_{2r+1}, u_1)$, pero ni G_R ni G_A contienen un ciclo de orden $2r$. Tenemos que $u_i u_{i+2} \in E(G_A)$ para $i \in \{1, \dots, 2r+1\}$, o de lo contrario

$$(u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+2}, u_{i+3}, \dots, u_{2r+1}, u_1)$$

es un ciclo de orden $2r$ en G_R (véase figura 3.1).

Además, $u_i u_{i+4} \in E(G_R)$ para $i \in \{1, \dots, 2r+1\}$, o de lo contrario

$$(u_i, u_{i+4}, u_{i+6}, \dots, u_{i-2}, u_i)$$

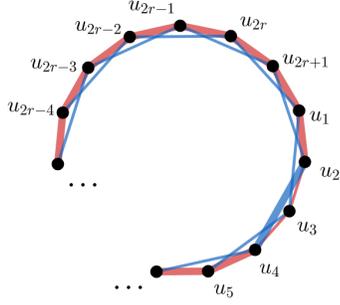


Figura 3.1: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $i = 2$. Vemos que la arista u_2u_4 debe ser azul para no formar un ciclo rojo de longitud $2r$. Esencialmente estaríamos sustituyendo dos aristas, u_2u_3 y u_3u_4 , por una arista, u_2u_4 , y así reduciendo el orden del ciclo en 1.

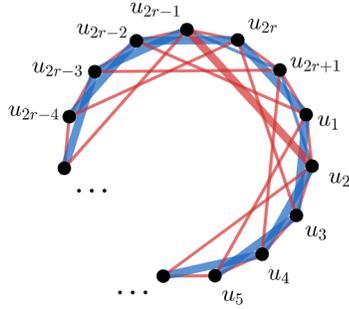


Figura 3.2: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $i = 2r - 1$. Vemos que la arista $u_{2r-1}u_2$ debe ser roja para no formar un ciclo de longitud $2r$. Como el orden del ciclo es impar, si tomamos todas las aristas de la forma u_iu_{i+2} , tenemos un nuevo ciclo de longitud $2r + 1$. Si sustituyéramos dos aristas, por ejemplo $u_{2r-1}u_{2r+1}$ y $u_{2r+1}u_2$, por una arista, $u_{2r-1}u_2$, reduciríamos el orden del ciclo en 1.

es un ciclo de orden $2r$ en G_A (véase figura 3.2).

Y $u_i, u_{i+3} \in E(G_A)$ para $i \in \{1, \dots, 2r + 1\}$, o de lo contrario

$$(u_i, u_{i+3}, u_{i+4}, \dots, u_{i-2}, u_{i+2}, u_{i+1}, u_i)$$

es un ciclo de orden $2r$ en G_R (véase figura 3.3).

Pero entonces, G_A contiene el ciclo

$$(u_{2r-1}, u_1, u_3, \dots, u_{2r-5}, u_{2r-4}, u_{2r-2}, \dots, u_2, u_{2r}, u_{2r-3}, u_{2r-1})$$

de orden $2r$ (véase figura 3.4).

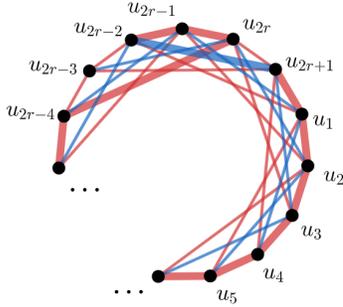


Figura 3.3: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $i = 2r - 2$. Vemos que la arista $u_{2r-2}u_{2r+1}$ debe ser azul para no formar un ciclo de longitud $2r$. Esencialmente estaríamos sustituyendo tres aristas, $u_{2r-4}u_{2r-3}$, $u_{2r-3}u_{2r-2}$ y $u_{2r}u_{2r+1}$, por dos aristas, $u_{2r-4}u_{2r}$ y $u_{2r-2}u_{2r+1}$, y así reduciendo el orden del ciclo en 1.

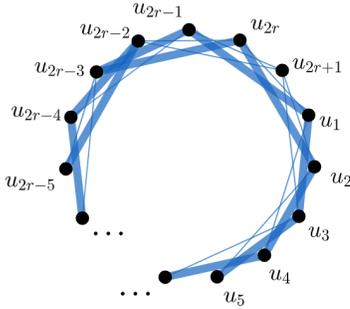


Figura 3.4: Eventualmente vemos que si nuestra gráfica tiene un ciclo rojo de longitud $2r + 1$, en otras palabras, de longitud impar, necesariamente G_R o G_A contienen un ciclo de longitud $2r$. En esta imagen, tenemos el inevitable ciclo en G_A .

Ahora bien, supongamos que G_R o G_A , digamos G_R , contienen un ciclo de orden $2r$, pero ni G_R ni G_A contienen un ciclo de orden $2r - 1$, con $2r > 2$. (Claramente si demostramos que esto nunca sucede, podemos ver que G_R o G_A contienen un ciclo de orden n , pues tenemos un ciclo de longitud al menos n y podemos encontrar ciclos cada vez más pequeños, en G_R o G_A , un paso a la vez.) Sea $C = (u_1, u_2, \dots, u_{2r}, u_1)$ este ciclo en G_R . De nuevo, tenemos que $u_i u_{i+2} \in E(G_A)$ para cada $i \in \{1, \dots, 2r\}$, o de lo contrario

$$(u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+2}, u_{i+3}, \dots, u_{2r}, u_1)$$

es un ciclo de orden $2r - 1$ en G_R (véase figura 3.1).

Supongamos que $u_i u_{i+2k} \in G_R$ para alguna $i \in \{1, \dots, 2r\}$ y $k \in \{1, \dots, r-1\}$. Entonces, $u_{i-1} u_{i+k-2} \in E(G_A)$, o de lo contrario

$$(u_i, u_{i+2k}, u_{i+2k+1}, \dots, u_{i-1}, u_{i+2k-2}, u_{i+2k-3}, \dots, u_{i+1}, u_i)$$

es un ciclo de orden $2r - 1$ en G_R (véase figura 3.5).

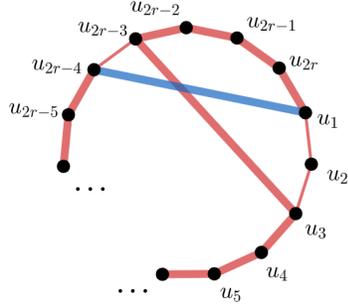


Figura 3.5: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $i = 2r - 2$ y $k = 3$. Vemos que si la arista $u_{2r-3}u_3$ es roja, la arista $u_{2r-4}u_1$ debe ser azul para no formar un ciclo rojo de longitud $2r - 1$. Esencialmente estaríamos sustituyendo tres aristas, $u_{2r-4}u_{2r-3}$, u_1u_2 y u_2u_3 , por dos aristas, $u_{2r-4}u_1$ y $u_{2r-3}u_3$, y así reduciendo el orden del ciclo en 1.

Y también $u_{i+1}u_{i+k+2} \in E(G_A)$, o de lo contrario

$$(u_i, u_{i+2k}, u_{i+2k-1}, \dots, u_{i+1}, u_{i+2k+2}, u_{i+2k+3}, \dots, u_{i-1}, u_i)$$

es un ciclo de orden $2r - 1$ en G_R (véase figura 3.6).

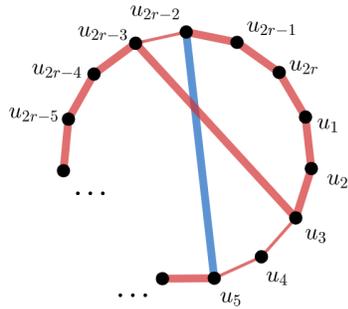


Figura 3.6: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $i = 2r - 3$ y $k = 3$. Vemos que si la arista $u_{2r-3}u_3$ es roja, la arista $u_{2r-2}u_5$ debe ser azul para no formar un ciclo rojo de longitud $2r - 1$. Esencialmente estaríamos sustituyendo tres aristas, $u_{2r-3}u_{2r-2}$, u_3u_4 y u_4u_5 , por dos aristas, $u_{2r-3}u_3$ y $u_{2r-2}u_5$, y así reduciendo el orden del ciclo en 1.

Pero entonces,

$$(u_{i+1}, u_{i+3}, u_{i+5}, \dots, u_{i-1}, u_{i+2k-2}, u_{i+2k-4}, \dots, u_{i+2k+2}, u_{i+1})$$

es un ciclo de orden $2r - 1$ en G_A , lo que es una contradicción (véase figura 3.7).

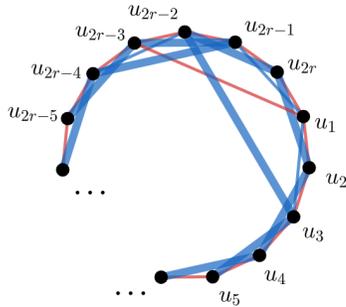


Figura 3.7: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $i = 2r - 3$ y $k = 2$. Vemos que si la arista $u_{2r-3}u_1$ es roja, inevitablemente G_A contiene un ciclo de longitud $2r - 1$. Las aristas $u_{2r-4}u_{2r-1}$ y $u_{2r-2}u_3$ nos permiten conectar los dos ciclos de orden r formados por las aristas de la forma $u_j u_{j+2}$ para formar este ciclo.

Por tanto, tenemos que $u_i u_{i+2k} \in E(G_A)$ para cada $i \in \{1, \dots, \}$ y cada $k \in \{1, \dots, r - 1\}$. En esta situación podemos notar que los conjuntos $S_1 = \{u_1, u_3, \dots, u_{r-1}\}$ y $S_2 = \{u_2, u_4, \dots, u_{2r}\}$ generan cada uno una subgráfica completa de orden r en G_A .

Si tenemos dos aristas en G_A que partan de dos vértices diferentes de S_1 a dos vértices diferentes de S_2 , podemos encontrar fácilmente un ciclo de orden $2r - 1$ en G_A (véase figura 3.8).

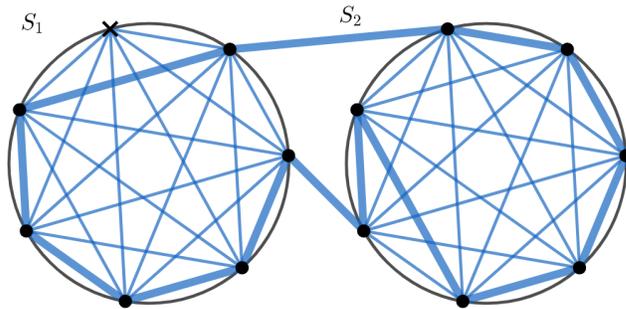


Figura 3.8: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $r = 7$. Podemos ver que fácilmente podríamos recorrer los vértices de S_1 y S_2 para generar ciclos de muchas longitudes. En particular, si ignoramos un vértice de S_1 y tomamos todos los demás, podemos encontrar un ciclo de longitud $2r - 1$ en G_A .

Por lo tanto, todas las aristas azules entre S_1 y S_2 deben incidir en un mismo vértice en S_1 o S_2 . El resto de las aristas deben ser rojas. Si ignoramos este vértice, podemos ver que $K_{r,r-1}$ es una subgráfica de G_R .

Tomemos r de forma que $2r > n$. Si n es par, entonces G_R contiene un ciclo de orden n contenido en la bipartita $K_{r,r-1}$ roja (véase figura 3.9).

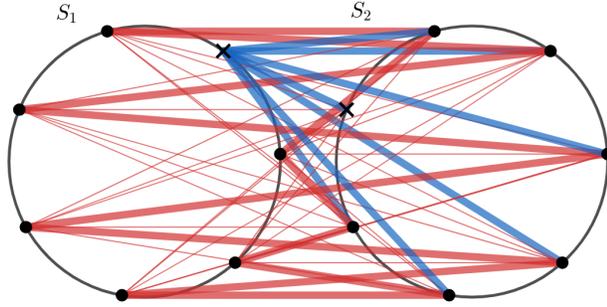


Figura 3.9: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $r = 7$ y, digamos, $n = 12$. Como $K_{6,7}$ es una subgráfica de G_R podemos encontrar un ciclo de longitud 12 en G_R simplemente tomando vértices alternadamente entre cada parte de la particion hasta completar el ciclo.

Consideremos entonces n impar. Podemos ver que ningún vértice de $V(G) \setminus V(C)$ puede ser adyacente en G_R a un vértice de S_1 y a un vértice de S_2 , o G_R contiene un ciclo de orden n (véase figura 3.10).

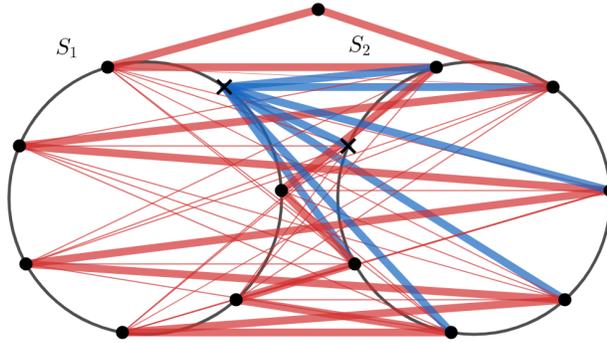


Figura 3.10: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $r = 7$ y $n = 13$. Podemos encontrar un ciclo de longitud 13 en G_R tomando vértices alternadamente entre cada parte de la particion hasta que solo hace falta pasar por el vértice adyacente a S_1 y S_2 .

Se sigue que cada vértice de $V(G) \setminus V(C)$ debe ser adyacente en G_A a todos los vértices de S_1 o a todos los vértices de S_2 . Como hay $(2n - 1) - 2r = 2(n - r) - 1$ vértices en $V(G) \setminus V(C)$, entonces al menos $n - r$ vértices deben ser adyacentes en G_A a S_1 o S_2 , digamos S_2 . Pero en ese caso, G_A contiene un ciclo de orden n , lo que resulta en una contradicción (véase figura 3.11). \square

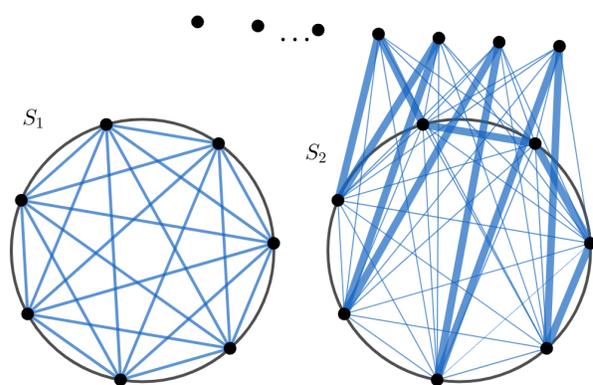


Figura 3.11: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $r = 7$ y $n = 11$. Sabemos que deben haber al menos 4 vértices en $V(G) \setminus V(C)$ adyacentes en G_A a cada vértice de S_2 . Entonces podemos encontrar un ciclo de longitud 11 tomando vértices alternadamente entre S_2 y $V(G) \setminus V(C)$ y completando conforme sea necesario con vértices de S_2 .

Capítulo 4

G. Chartrand y S. Schuster

En *On a variation of the Ramsey number* [4], Gary Chartrand y Seymour Schuster nos dan algunos casos particulares de números de Ramsey para ciclos. En particular, presentan $c(n, m)$ para $n, m \leq 6$ y fórmulas generales para $c(3, n)$, $c(4, n)$ y $c(5, n)$. Usaremos estos resultados principalmente como base de inducción más adelante, por lo que los presentamos a continuación.

Teorema 4.1. $c(3, 4) = 7$

Demostración. Si consideramos una coloración rojo-azul de K_6 tal que $G_R = K_{3,3}$ y $G_A = K_3 \cup K_3$, podemos ver que no contiene triángulos rojos ni ciclos azules de orden 4, por lo tanto $c(3, 4) \geq 7$ (véase figura 4.1).

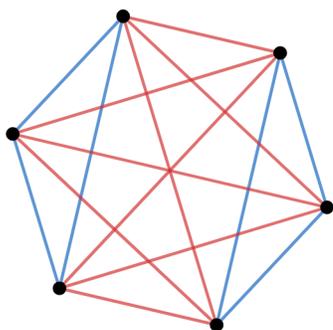


Figura 4.1: Usaremos en repetidas ocasiones el hecho de que una gráfica bipartita no contiene ciclos de orden impar (teorema 1.4). En este caso, basta para saber que $K_{3,3}$ no contiene ciclos de orden 3.

Ahora, supongamos G de orden 7 con una coloración rojo-azul tal que G_R no contiene triángulos. Como $c(3, 3) = 6$, sabemos que G contiene un

triángulo rojo o un triángulo azul. Por lo tanto, G_A contiene un triángulo. Llamemos $C = (u_1, u_2, u_3, u_1)$ al triángulo azul en G y v_1, v_2, v_3, v_4 al resto de los vértices de G . Si algún vértice v_i es adyacente a más de un vértice u_j por aristas azules, entonces G_A contiene un ciclo de longitud 4. Por tanto, cada v_i es adyacente a al menos dos vértices de C por aristas rojas. Como $|C| = 3$, podemos suponer que cualquier par de vértices v_i es adyacente a un vértice común en C por una aristas rojas. Como G_R no contiene triángulos, los vértices v_i son adyacentes entre sí por aristas azules. Entonces, G_A contiene una subgráfica completa de orden 4, y por tanto, un ciclo de orden 4 (véase figura 4.2).

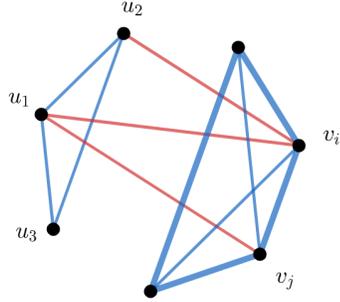


Figura 4.2: En esta figura podemos ver que v_i y v_j son ambas adyacentes a u_1 . Pero entonces $v_i v_j$ debe ser azul para no formar un triángulo rojo. Como sucede similarmente para cada $i, j \in \{1, \dots, 4\}$, podemos encontrar el ciclo azul de orden 4 que estamos buscando.

□

Teorema 4.2. Para $n \geq 4$, $c(3, n) = 2n - 1$

Demostración. Primero, notamos que si consideramos una coloración rojo-azul de $G = K_{2n-2}$ tal que $G_R = K_{n-1, n-1}$ y $G_A = K_{n-1} \cup K_{n-1}$, entonces G no contiene ciclos rojos de orden 3 ni ciclos azules de orden n . Por lo tanto, $c(3, n) \geq 2n - 1$.

Demostramos que $c(3, n) = 2n - 1$ usando inducción. Por el teorema 4.1, sabemos que $c(3, 4) = 7$. Supongamos entonces que $c(3, n) = 2n - 1$ para alguna $n \geq 4$. Se sigue que cualquier coloración rojo-azul de $G = K_{2n-1}$ contiene un ciclo rojo de orden 3 o un ciclo azul de orden n . Queremos demostrar que $c(3, n + 1) = 2n + 1$. Supongamos una gráfica G de orden $2n + 1$ y una coloración rojo-azul para G tal que G_R no contiene ciclos de orden 3. Como $c(3, n + 1) \geq 2n + 1$, basta probar que G_A contiene un ciclo de orden $n + 1$.

Por la hipótesis de inducción, $c(3, n) = 2n - 1$, por lo tanto, G_A contiene un ciclo azul de orden n , digamos $C = (u_1, u_2, \dots, u_n, u_1)$. Llamemos v_1, \dots, v_{n+1} , al resto de los vértices de G . Supongamos que para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$, u_i es adyacente en G_R a cada v_j con $j \in \{1, \dots, n+1\}$. Como G_R no contiene ciclos de orden 3, los vértices v_j son adyacentes entre sí en G_A . Por lo tanto, G_A contiene una subgráfica completa de orden $n+1$ y por tanto, un ciclo de orden $n+1$. Podemos suponer entonces que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe una $j \in \{1, \dots, n+1\}$ tal que u_i es adyacente a v_j en G_A . Tenemos dos casos:

Caso 1: Supongamos que para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$, u_i y u_{i+2} son adyacentes en G_A a dos vértices distintos de $V(G) \setminus V(C)$. Digamos que $u_1v_1, u_3v_3 \in E(G_A)$. Si algún vértice $v_i \in V(G) \setminus V(C)$ es adyacente en G_A a dos vértices consecutivos de C , entonces G_A contiene un ciclo de orden $n+1$. Podemos suponer entonces que $v_1u_2, v_3u_2 \in E(G_R)$, pero en ese caso, $v_1v_3 \in E(G_A)$. Por tanto, G contiene el ciclo azul

$$(u_1, v_1, v_3, u_3, u_4, \dots, u_n, u_1)$$

de orden $n+1$ (véase figura 4.3).

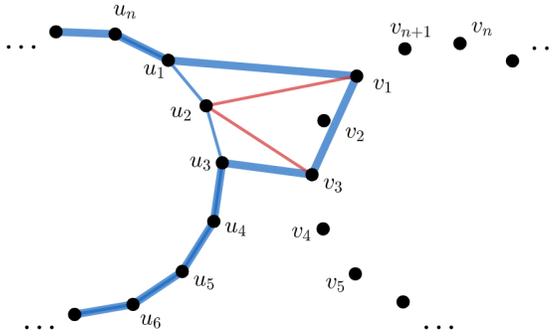


Figura 4.3: En esta figura, con $i = 1$, vemos que si $u_1v_1, u_3v_3 \in E(G_A)$, entonces $u_2v_1, u_2v_3 \in E(G_R)$ o tenemos un ciclo azul de longitud $n+1$. Pero entonces, la arista v_1v_3 debe ser azul también pues sabemos que nuestra gráfica no contiene triángulos rojos. Entonces, inevitablemente tenemos un ciclo azul de orden $n+1$.

Caso 2: Supongamos que para cada i tal que u_i es adyacente en G_A a v_j , u_{i+2} también es adyacente a v_j en G_A . Por tanto, podemos suponer que cada u_i , con i impar, es adyacente a v_1 en G_A . Si n es impar, entonces

u_1 y u_n son adyacentes a v_1 en G_A y, por lo tanto, G_A contiene un ciclo de orden $n + 1$.

Supongamos que n es par. En este caso, cada u_i con i par, es adyacente en G_A al mismo $v_j \neq v_1$, digamos v_2 .

Cada $v_j \in V(G) \setminus V(C)$ con $j \in \{3, \dots, n + 1\}$ debe ser adyacente en G_R a cada vértice en C o de lo contrario regresamos al *caso 1*. Como G_R no contiene triángulos, $v_i v_j \in E(G_A)$ para cada $i, j \in \{3, \dots, n + 1\}$ (véase figura 4.4).

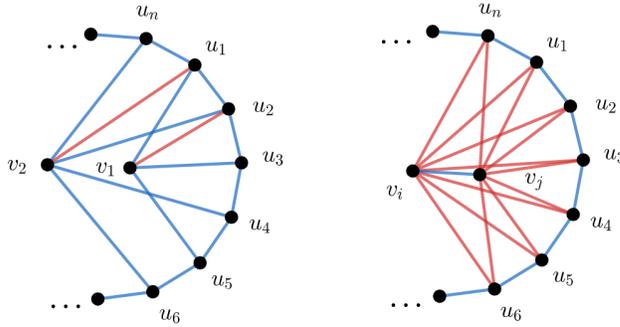


Figura 4.4: En esta imagen, podemos ver que cada arista $v_i v_j$ debe ser roja, con excepción de $v_1 v_2$, pues no tenemos triángulos rojos en G .

Por la misma razón, y por que $u_2 v_1, u_1 v_2 \in E(G_R)$, cada arista $v_1 v_j, v_2 v_j \in E(G_A)$ para cada $j \in \{3, \dots, n + 1\}$. En este caso, G_A contiene el ciclo

$$(v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, \dots, v_{n+1}, v_1)$$

de orden $n + 1$ (véase figura 4.5).

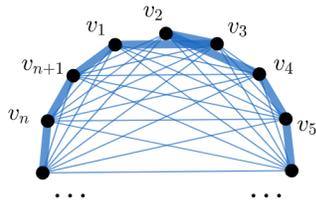


Figura 4.5: En esta imagen, podemos ver con todas estas aristas azules que ignorando la arista $v_1 v_2$, podemos encontrar un ciclo azul de orden $n + 1$ en G .

□

El número $c(4, 3) = 7$ se sigue del hecho que $c(n, m) = c(m, n)$ y del teorema 4.1. Por tanto, podemos investigar $c(4, n)$ para $n \geq 4$. Los números $c(4, 4)$ y $c(4, 5)$ no siguen la fórmula general, así que los consideramos por separado. También consideramos $c(4, 6)$ por separado para utilizarlo como base para inducción.

Teorema 4.3. $c(4, 4) = 6$

Demostración. Si consideramos una coloración rojo-azul de $G = K_5$ tal que $G_R = C_5$ y $G_A = C_5$, vemos que G no contiene ciclos monocromáticos de orden 4 (véase figura 4.6). Por lo tanto, $c(4, 4) \geq 6$.

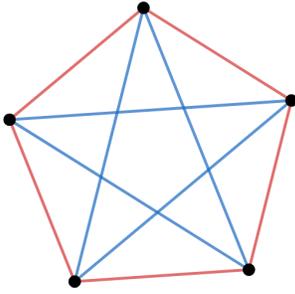


Figura 4.6: En este ejemplo podemos ver que tanto G_R como G_A son isomorfas a C_5 .

Ahora supongamos una coloración rojo-azul de $G = K_6$ tal que G no contiene ciclos monocromáticos de orden 4. Como $c(3, 3) = 6$, sabemos que G contiene un triángulo azul o un triángulo rojo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que G_R contiene un triángulo, digamos $C = (u_1, u_2, u_3, u_1)$. Llamemos v_1, v_2 y v_3 a los otros vértices de G . Ningún vértice en $V(G) \setminus V(C)$ puede ser adyacente en G_R a más de un vértice de C . Por lo tanto, cada vértice en $V(G) \setminus V(C)$ es adyacente en G_A a al menos dos vértices de C . Si existen dos vértices en $V(G) \setminus V(C)$ que sean adyacentes en G_A a los mismos dos vértices de G , entonces G_A contiene un ciclo de orden 4 (véase figura 4.7).

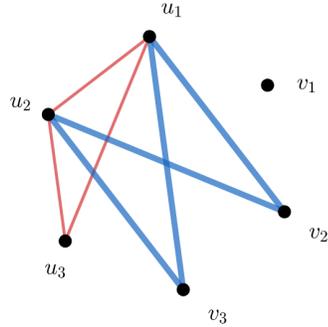


Figura 4.7: En este ejemplo, podemos ver que si suponemos que dos vértices en $V(G) \setminus V(C)$, digamos v_2 y v_3 , son ambos adyacentes a los mismos dos vértices de C , digamos u_1 y u_2 , por aristas azules, entonces encontramos un ciclo azul de longitud 4 en G .

Entonces podemos suponer que $v_1u_1, v_1u_2, v_2u_2, v_2u_3, v_3u_2, v_3u_1 \in E(G_A)$. Además, $v_1u_3, v_2u_1, v_3u_2 \in E(G_R)$. Si dos vértices en $V(G) \setminus V(C)$ son adyacentes en G_R , entonces G_R tiene un ciclo de orden 4 (véase figura 4.8).

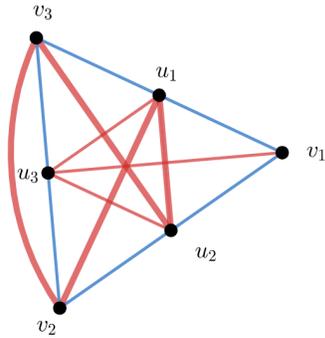


Figura 4.8: En este ejemplo podemos cómo acomodar las aristas azules de $V(G) \setminus V(C)$ a C de forma que dos vértices v_i no sean adyacentes en G_A a los mismos dos vértices de C . Podemos ver que si dos vértices en $V(G) \setminus V(C)$, digamos v_2 y v_3 , son adyacentes en G_R , entonces encontramos un ciclo rojo de orden 4 en G .

Por tanto, $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1 \in E(G_A)$, pero entonces

$$(v_1, u_2, v_2, v_3, v_1)$$

es un ciclo de orden 4 en G_4 , lo que nos lleva a una contradicción (véase figura 4.9).

□

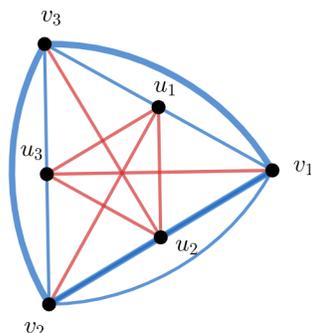


Figura 4.9: En esta imagen, podemos ver uno de los ciclos azules que tenemos en G si las aristas de K_6 están coloreadas de esta forma particular. Podemos notar que hay más de un ciclo azul de orden 4.

Teorema 4.4. $c(4, 5) = 7$

Demostración. Si consideramos una coloración rojo-azul de $G = K_6$ tal que $G_R = K_3 \cup K_3$ y $G_A = K_{3,3}$, podemos ver que G_R no contiene ciclos de orden 4 y G_A no contiene ciclos de orden 5 (véase figura 4.10). Por lo tanto, $c(4, 5) \geq 7$.

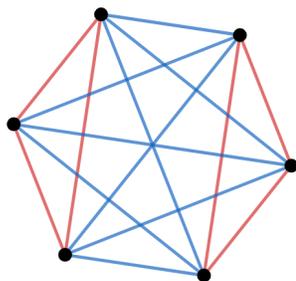


Figura 4.10: De nuevo vemos que una gráfica bipartita y su complemento funcionan para darnos la cota inferior del número que buscamos. Sabemos que con esta coloración de K_6 no tenemos ciclos azules de longitud 5.

Supongamos ahora una coloración rojo-azul de $G = K_7$, tal que G_A no contiene ciclos de orden 4. Como $c(4, 4) = 6$ por el teorema 3, sabemos que G_R debe contener un ciclo de orden 4, digamos $C = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_1)$. Llamemos v_1, v_2, v_3 al resto de los vértices de G . Si cualquiera de estos vértices es adyacente en G_R a dos vértices consecutivos de C , entonces G_R contiene un ciclo de orden 5. Supongamos entonces que ningún vértice de

$V(G) \setminus V(C)$ es adyacente en G_R a dos vértices consecutivos de C . Como cada vértice v_1, v_2 y v_3 es adyacente en G_A a dos vértices opuestos de C , deben haber dos vértices, digamos v_1 y v_2 , que sean adyacentes en G_A a los mismos dos vértices de C , digamos u_1 y u_3 . Por lo tanto, G_A contiene el ciclo

$$(u_1, v_1, u_3, v_2, u_1),$$

lo que nos lleva a una contradicción (véase figura 4.11).

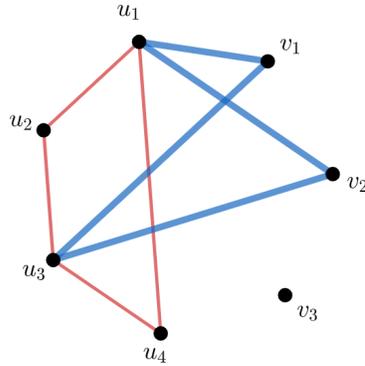


Figura 4.11: Con un razonamiento semejante al que usamos en la figura 4.7, del teorema 4.3, podemos ver el ciclo de azul de orden 4 que se forma si tenemos dos vértices en $V(G) \setminus V(C)$ adyacentes por aristas azules a los mismos dos vértices de C .

□

Teorema 4.5. $c(4, 6) = 7$

Demostración. Si consideramos una coloración rojo-azul de $G = K_6$ tal que $G_R = K_{1,5}$ y $G_A = K_1 \cup K_5$, vemos que G_R no contiene ciclos de orden 4 y G_A no contiene ciclos de orden 6 (véase figura 4.12). Por lo tanto, $c(4, 6) \geq 7$.

Supongamos una coloración rojo-azul de $G = K_7$ tal que G_R no contenga ciclos de orden 4. Como $c(4, 5) = 7$ por el teorema 4.4 y G_R no contiene ciclos de orden 4, sabemos que G_A contiene un ciclo de orden 5, digamos $C = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_1)$. Llamemos v_1 y v_2 al resto de los vértices. Si v_1 o v_2 es adyacente en G_A a dos vértices consecutivos de C , entonces G_A contiene un ciclo de orden 6. Podemos suponer entonces que ni v_1 ni v_2 son adyacentes en G_A a dos vértices consecutivos de C . Por lo tanto, v_1 y v_2 son adyacentes en G_R a al menos tres vértices de C , que no son los tres consecutivos. Supongamos entonces que $v_1u_1, v_1u_2, v_1u_4 \in E(G_R)$. Si existen

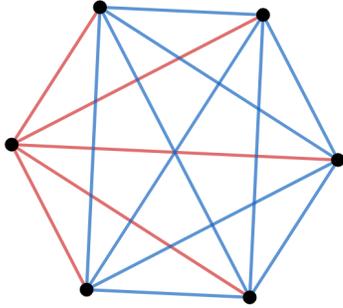


Figura 4.12: En esta gráfica bipartita roja es evidente que no tenemos ciclos. Y las componentes de la subgráfica azul no tienen suficientes vértices para un ciclo de orden 6.

dos vértices de C que sean adyacentes en G_R a ambos v_1 y v_2 , G_R contiene un ciclo de orden 4, lo que es una contradicción (véase figura 4.7).

Sin embargo, debe existir algún vértice en C que sea adyacente en G_R a ambos v_1 y v_2 . Este vértice no puede ser u_4 , o v_2 tendría que ser necesariamente adyacente también a u_1 o u_2 . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que v_2 es adyacente en G_A a u_1 . Se sigue que $v_2u_3, v_2u_5 \in E(G_R)$ y $v_1u_3, v_1u_5, v_2u_2, v_2u_4 \in E(G_A)$. En este caso G_A contiene el ciclo

$$(v_1, u_3, u_2, v_2, u_4, u_5, v_1)$$

de orden 6 (véase figura 4.13).

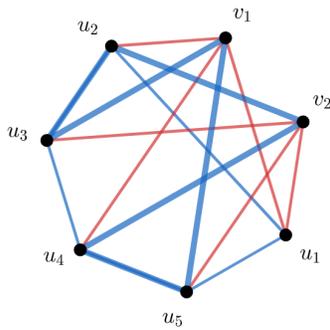


Figura 4.13: En esta imagen, podemos ver la coloración de las aristas de G si suponemos que $v_1u_1, v_1u_2, v_1u_4 \in E(G_R)$ y $v_2u_1 \in E(G_A)$. No podemos acomodar las aristas rojas de v_2 a C de otra forma sin tener ciclos rojos de orden 4. Con esta coloración podemos encontrar un ciclo de orden 6 en G_A .

□

Teorema 4.6. Para $n \geq 6$, $c(4, n) = n + 1$.

Demostración. Si consideramos una coloración rojo-azul de $G = K_n$ tal que $G_R = K_{1,n-1}$ y $G_A = K_1 \cup K_{n-1}$, podemos ver que G_R no contiene ciclos de orden 4 y G_A no contiene ciclos de orden n . Por lo tanto, $c(4, n) \geq n + 1$.

Procedemos por inducción sobre $n \geq 6$. Sabemos por el teorema 4.5 que $c(4, 6) = 7$. Tomemos $n \geq 6$ y supongamos que $c(4, n) = n + 1$. Por tanto, para toda coloración rojo-azul de $G = K_{n+1}$, G contiene un ciclo rojo de orden 4 o un ciclo azul de orden n . Supongamos una coloración rojo-azul de K_{n+2} , tal que G_R no contenga ciclos de orden 4. Como $c(4, n + 1) \geq n + 2$, basta probar que G contiene un ciclo azul de orden $n + 1$. Como $c(4, n) = n + 1$ por hipótesis de inducción, sabemos que G_A contiene un ciclo de orden n , digamos $C = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, u_1)$. Llamemos v_1 y v_2 al resto de los vértices de G .

Si v_1 o v_2 son adyacentes en G_A a dos vértices consecutivos de C , entonces G_A contiene un ciclo de orden $n + 1$ completando la prueba. Supongamos entonces que ni v_1 ni v_2 son adyacentes en G_A a dos vértices consecutivos de C . Se sigue que v_1 y v_2 deben ser cada uno adyacente en G_R a al menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vértices de C de forma que el conjunto contiene al menos un vértice de cada par de vértices consecutivos de C . Si v_1 y v_2 son adyacentes en G_R a los mismos dos, o más, vértices de C , entonces G_R contiene un ciclo de orden 4. Sabemos entonces que v_1 y v_2 son adyacentes en G_R a un vértice en común o ninguno. Tenemos dos casos:

Caso 1: Supongamos que v_1 y v_2 no son simultáneamente adyacentes en G_R a ningún vértice de C . En este caso se sigue que tanto v_1 como v_2 deben ser adyacentes en G_R a exactamente $\frac{n}{2}$ vértices de C , haciendo a n par. Digamos, sin pérdida de generalidad, que v_1 es adyacente en G_R a cada vértice de $S_1 = \{u_i : i \text{ es impar}\}$ y v_2 es adyacente en G_R a cada vértice de $S_2 = \{u_i : i \text{ es par}\}$. En ese caso, también sabemos que v_1 es adyacente en G_A a cada vértice de S_1 y v_2 es adyacente en G_A a cada vértice de S_2 (véase figura 4.14).

Si todas las aristas $u_i u_j$, con i, j impares, son rojas, entonces, como $n \geq 6$, G_R contiene el ciclo

$$(u_1, v_1, u_3, u_5, u_1)$$

de orden 4 (véase figura 4.15).

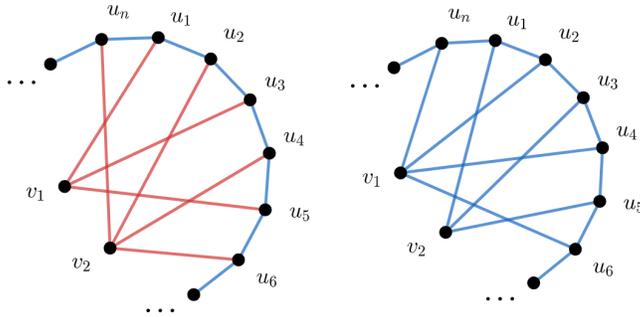


Figura 4.14: En esta imagen, simplemente buscamos ilustrar la forma en que v_1 y v_2 son adyacentes a los vértices de C .

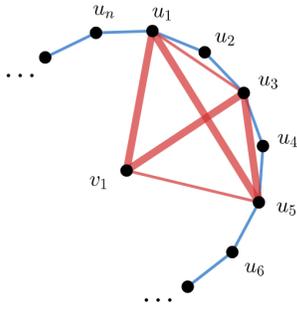


Figura 4.15: En esta imagen, podemos ver el ciclo de longitud 4 que podemos encontrar en G_R cuando hay suficientes aristas rojas de la forma $u_i u_j$, con i, j impares.

Por tanto, podemos suponer que existe $u_i u_j \in E(G_A)$, con i, j impares de forma que $1 \leq i < j < n$. En este caso, G_A contiene el ciclo

$$(u_i, u_j, u_{j-1}, \dots, u_{i+1}, v_1, u_{j+1}, u_{j+2}, \dots, u_{i-1}, u_i)$$

de orden $n + 1$ (véase figura 4.16).

Caso 2: Supongamos que v_1 y v_2 son ambos adyacentes en G_R a un mismo vértice, digamos u_1 . Solamente uno de v_1 o v_2 debe ser adyacente a u_2 en G_R , o de lo contrario, ambos v_1 y v_2 deben ser adyacentes en G_R a u_3 , lo que contradice que solo coincidan en un solo vértice. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $v_1 u_2 \in E(G_R)$. Necesariamente, $v_2 u_3 \in E(G_R)$ o de lo contrario v_2 es adyacente en G_A a dos vértices consecutivos de C . Siguiendo el mismo razonamiento, podemos ver que $v_1 u_4, v_2 u_5 \in E(G_R)$, etc. Por tanto, si definimos S_1 y S_2 como en el caso anterior, tenemos que v_1 es adyacente en G_R a los vértices de $S_2 \cup \{u_1\}$ y en G_A a los vértices de $S_1 \setminus \{u_1\}$, mientras que v_2 es adyacente en G_R a los vértices de S_1 y en G_A a los vértices de S_2 (véase figura 4.17).

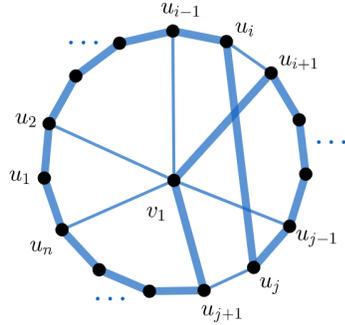


Figura 4.16: En esta imagen, podemos ver que basta con una sola arista $u_i u_j$, con i, j impares, para encontrar un ciclo de longitud $n + 1$ en G_A .

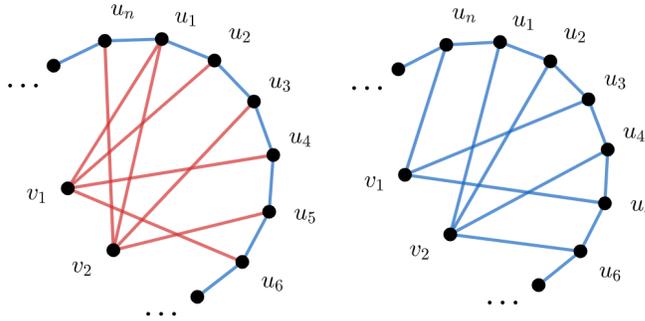


Figura 4.17: En esta imagen, ilustramos el modo en que v_1 y v_2 son adyacentes a C . Podemos notar que este caso es muy similar al primero.

Si G_R contiene todas las aristas de la forma $u_i u_j$ con i, j par, como $n \geq 6$, G_R contiene el ciclo

$$(v_1, u_2, u_4, u_6, v_1)$$

(véase figura 4.18).

Por tanto, G_A debe contener $u_i u_j$ con $i < j$ pares. Entonces G_A contiene el ciclo

$$(u_j, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, v_1, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots, u_{j+1}, u_j)$$

de orden $n + 1$ (véase figura 4.19).

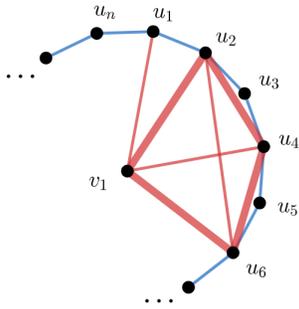


Figura 4.18: Procediendo de manera muy similar al caso anterior, vemos que podemos encontrar un ciclo rojo de longitud 4 cuando hay suficientes aristas rojas de la forma $u_i u_j$, con i, j pares.

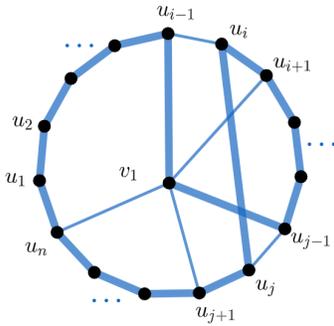


Figura 4.19: Igualmente podemos ver que basta con una sola arista $u_i u_j$, con i, j pares, para encontrar un ciclo de longitud $n + 1$ en G_A .

□

Podemos proceder con $c(5, n)$ a partir de $n = 5$ considerando los resultados anteriores.

Teorema 4.7. $c(5, 5) = 9$

Demostración. Si consideramos una coloración rojo-azul de $G = K_8$ tal que $G_R = K_{4,4}$ y $G_A = K_4 \cup K_4$, podemos ver que G no contiene ciclos monocromáticos de orden 5 (véase figura 4.20). Por lo tanto, $c(5, 5) \geq 9$.

Supongamos una coloración rojo-azul de $G = K_9$ y supongamos que G no contiene ciclos monocromáticos de orden 5. Como $c(4, 4) = 6$, G debe contener un ciclo monocromático de orden 4. Sin pérdida de generalidad, supongamos que G_R contiene un ciclo de orden 4, digamos $C = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_1)$. Llamemos v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 al resto de los vértices de G . Ningún $v_i \in V(G) \setminus V(C)$ puede ser adyacente en G_R a dos vértices consecutivos de C , o de lo contrario G_R contiene un ciclo de orden 5. Entonces, cada $v_i \in V(G) \setminus V(C)$ debe ser adyacente en G_A a dos vértices opuestos de C .

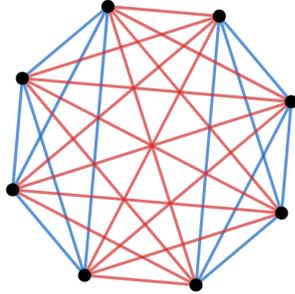


Figura 4.20: Continuamos usando una gráfica bipartita y su complemento para ejemplificar una gráfica que no contiene ninguno de los ciclos monocromáticos que pide nuestro teorema.

Como G_R no contiene ciclos de orden 5, tampoco contiene la gráfica completa K_5 . Entonces debe existir $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ tal que $v_i v_j \in E(G_A)$. Supongamos que $v_1 v_2 \in E(G_A)$. Si existen dos vértices u_i, u_j con $v_1 u_i, v_2 u_j \in E(G_A)$ tales que existe un vértice v_k , con $3 \leq k \leq 5$, tal que $v_k u_i, v_k u_j \in E(G_A)$, entonces G_A contiene un ciclo de orden 5 (véase figura 4.21).

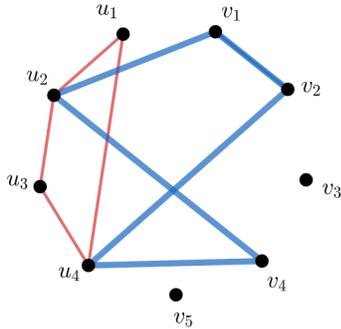


Figura 4.21: La condición descrita en el párrafo anterior y que se ilustra en esta imagen, se usa recurrentemente en este teorema. Vale la pena prestar atención a las condiciones que se le pide a v_k para encontrar un ciclo azul de longitud 5.

Por tanto, podemos suponer que no existen tales vértices u_i, u_j y v_k . Consideremos los siguientes dos casos, suponiendo que $v_1 v_2 \in E(G_A)$.

Caso 1: Supongamos que v_1 y v_2 son adyacentes en G_A al mismo par de vértices opuestos de C , digamos u_1 y u_3 . Ninguno de los vértices v_3, v_4 y v_5 puede ser adyacentes en G_A a u_1 y u_3 , o se produciría un ciclo azul (véase figura 4.21).

Por tanto, v_3, v_4 y v_5 son adyacentes en G_A a u_2 y u_4 . Ahora, $v_3 v_4 \in E(G_R)$ o de lo contrario

$$(v_3, v_4, u_2, v_5, v_4, v_3)$$

es un ciclo en G_A . Similarmente, $v_3v_5, v_4v_5 \in E(G_R)$ (véase figura 4.22).

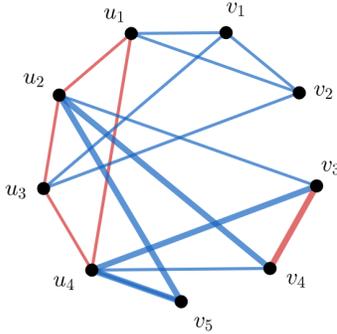


Figura 4.22: En esta imagen, podemos ver el ciclo que se formaría si v_3v_4 fuera azul.

Si v_1 es adyacente en G_A a algún vértice en $\{v_3, v_4, v_5\}$ y v_2 es adyacente en G_A a algún otro vértice del mismo conjunto, entonces G_A contiene un ciclo de orden 5 (véase figura 4.23).

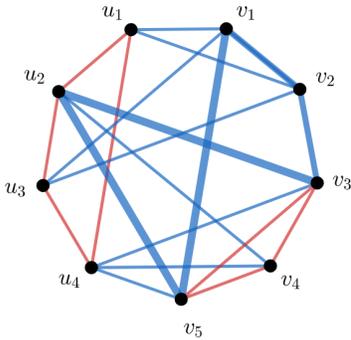


Figura 4.23: En esta imagen, vemos el ciclo que podemos formar si suponemos que v_1 es adyacente a v_5 y v_2 es adyacente a v_3 en G_A .

Por otro lado, si v_1 y v_2 son adyacentes a un mismo vértice en $\{v_3, v_4, v_5\}$, digamos v_5 , entonces $u_1u_3 \in E(G_R)$ o de lo contrario

$$(u_1, u_3, v_2, v_5, v_1, u_1)$$

es un ciclo de orden 5 en G_A (véase figura 4.24).

Ahora, podemos notar que u_1v_3 y u_3v_5 no pueden ser ambas rojas o tenemos un ciclo de orden 5 en G_R (véase figura 4.25).

Sin embargo, si $u_3v_5 \in E(G_A)$, entonces

$$(u_3, v_5, v_2, u_1, v_1, u_3)$$

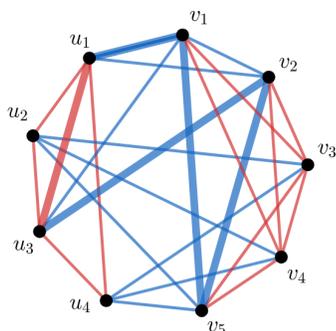


Figura 4.24: En esta imagen, podemos ver el ciclo azul que se formaría si u_1u_3 fuera azul cuando v_1 y v_2 son adyacentes en G_A a un mismo vértice, en este caso v_5 . También suponemos que v_1 y v_2 son adyacentes a v_3 y v_4 por aristas rojas.

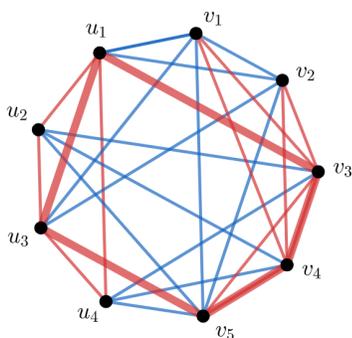


Figura 4.25: En esta imagen, podemos ver el ciclo que se forma si suponemos que u_1v_3 y u_3v_5 son rojas.

es un ciclo de orden 5 en G_A (véase figura 4.26).

Y si $u_1v_3 \in E(G_A)$, entonces

$$(u_1, v_3, u_4, v_5, v_1, u_1)$$

es un ciclo de orden 5 en G_A (véase figura 4.27).

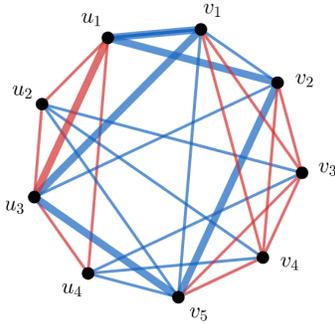


Figura 4.26: En esta imagen, podemos ver el ciclo azul que se forma cuando u_3v_5 es azul.

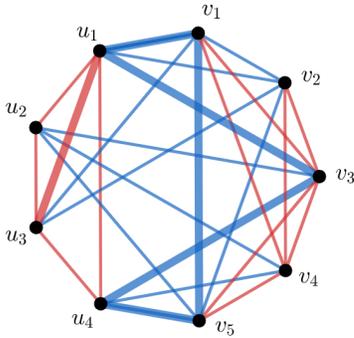


Figura 4.27: En esta imagen, vemos el ciclo azul que se forma cuando u_1v_3 es azul. Estos ciclos aparecen cuando suponemos que v_1 y v_2 son adyacentes en G_A a un vértice en común, en este caso v_5 .

Se sigue que v_1 o v_2 son adyacentes en G_R a todos los vértices de $\{v_3, v_4, v_5\}$, digamos $v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5 \in E(G_R)$. Si hay dos aristas rojas de los vértices de C a dos vértices distintos en $\{v_3, v_4, v_5\}$, entonces G_R contiene un ciclo de orden 5 (véase figura 4.28).

Por lo tanto, debe existir un vértice en $\{v_3, v_4, v_5\}$, digamos v_5 , adyacente en G_A a todos los vértices de C . Por lo tanto, G_A contiene el ciclo

$$(v_5, u_3, v_1, v_2, u_1, v_5)$$

de orden 5, lo que produce una contradicción (véase figura 4.29).

Caso 2: Supongamos que v_1 es adyacente en G_A a u_1 y u_3 , y v_2 es adyacente en G_A a u_2 y u_4 . Ahora supongamos, sin pérdida de generalidad, que v_3 es adyacente en G_A a u_1 y u_3 . Se sigue que v_3 es adyacente en G_R a u_2 y u_4 , pues de lo contrario se satisfacerían las condiciones para producir un ciclo azul de orden 5, como se menciona anteriormente (véase figura 4.21).

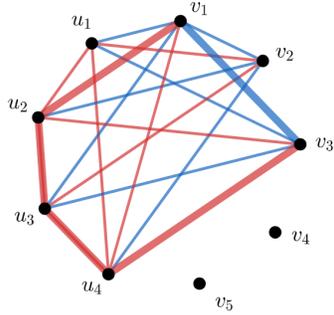


Figura 4.30: En esta imagen, podemos ver el ciclo rojo que se formaría si v_1v_3 fuera roja. Sin embargo, siendo azul, tenemos dos vértices adyacentes en G_A que son adyacentes también a u_1 y u_3 , que es de nuevo el caso 1.

□

Teorema 4.8. Para $n \geq 5$, $c(5, n) = 2n - 1$.

Demostración. Consideremos una coloración rojo-azul de $G = K_{2(n-1)}$, tal que $G_R = K_{n-1, n-1}$ y $G_A = K_{n-1} \cup K_{n-1}$. Entonces la gráfica G no contiene ciclos rojos de orden 5 ni ciclos azules de orden n . Por lo tanto, $c(5, n) \geq 2n - 1$.

Procedemos con la prueba por inducción sobre $n \geq 5$. El teorema 4.7 nos proporciona la base de inducción con $n = 5$. Supongamos entonces que $c(5, n) = 2n - 1$ para alguna $n \geq 5$ y consideremos una coloración rojo-azul de $G = K_{2n+1}$. Como $c(5, n+1) \geq 2n + 1$, basta demostrar que G_R contiene un ciclo de orden 5 o G_A un ciclo de orden $n + 1$. Supongamos que G no contiene ciclos rojos de orden 5. Como $c(5, n) = 2n - 1$, sabemos que G_A debe contener un ciclo de orden n , digamos $C = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Llamemos $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$ al resto de los vértices de G .

Si alguna $v_i \in V(G) \setminus V(C)$ es adyacente en G_A a dos vértices consecutivos de C , entonces G_A contiene un ciclo de orden $n+1$. Supongamos entonces que ningún vértice en $V(G) \setminus V(C)$ es adyacente en G_A a dos vértices consecutivos de C . Esto implica que cada v_i es adyacente en G_R a un conjunto de al menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vértices de C . Además cada par consecutivo de vértices de C debe contener un vértice que pertenece a este conjunto. Si todos los vértices de $V(G) \setminus V(C)$ son adyacentes entre sí en G_A , entonces G_A contiene una gráfica completa de orden $n + 1$ y por lo tanto un ciclo de orden $n + 1$. Supongamos entonces que existen dos vértices distintos en $V(G) \setminus V(C)$, digamos v_1 y v_2 , adyacentes en G_R . Podemos considerar 3 casos.

Caso 1: Supongamos que existe un vértice $v_k \in V(G) \setminus V(C)$, con $1 \neq k \neq 2$, tal que v_k y v_1 son adyacentes en G_R a un vértice u_i en C , y v_2 y v_k son adyacentes en G_R a un vértice u_j en C .

Si podemos elegir u_i y u_j de forma que $u_i \neq u_j$, entonces G_R contiene el ciclo $(v_k, u_i, v_1, v_2, u_j, v_k)$ de orden 5, lo que resulta en una contradicción.

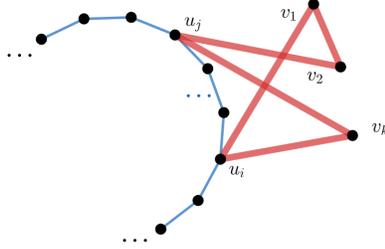


Figura 4.31: En esta imagen, tenemos un ejemplo del ciclo de orden 5 que se forma en G_R cuando tomamos $i \neq j$.

Entonces tenemos que v_1 y v_k son adyacentes en G_R a un único vértice, digamos u_1 de C , y v_2 y v_k son adyacentes en G_R a un único vértice, el mismo u_1 . Como al menos uno de cada par de vértices consecutivos de C es adyacente en G_R a v_1 (respectivamente a v_2 y v_k), cada vértice de C diferente de u_1 debe ser adyacente en G_R a v_1 y v_2 , o a v_k .

Si n es impar, podemos suponer que v_1 y v_2 son adyacentes en G_R a los vértices de $S_1 = \{u_i : i \text{ es impar}\}$ y adyacentes en G_A a los vértices de $S_2 = \{u_i : i \text{ es par}\}$. Por otra parte, v_k es adyacente en G_R a los vértices de $S_2 \cup \{u_1\}$ y adyacente en G_A a los vértices de $S_1 \setminus \{u_1\}$. En ese caso, G_A contiene el ciclo

$$(u_2, u_3, \dots, u_{n-2}, v_k, u_n, u_{n-1}, v_2, u_2)$$

de longitud $n + 1$ (véase figura 4.32).

Si n es par, podemos definir S_1 y S_2 como lo hicimos anteriormente y distinguimos así, dos subcasos:

Subcaso 1: v_1 y v_2 son adyacentes en G_R a $S_2 \cup \{u_1\}$ y en G_A a $S_1 \setminus \{u_1\}$, mientras que v_k es adyacente en G_R a los vértices de S_2 y en G_A a S_1 . Si $v_1 v_k \in E(G_R)$, entonces podemos intercambiar los papeles de v_k y v_2 , y encontrar un ciclo de longitud 5 en G_R (véase figura 4.31). Si $u_2 u_4 \in E(G_R)$, entonces

$$(u_2, u_4, v_1, u_1, v_2, u_2)$$

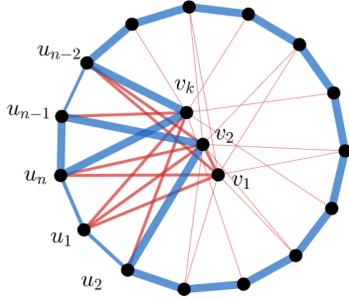


Figura 4.32: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $n = 15$ donde vemos el ciclo de longitud $n + 1$ que se forma en este caso.

es un ciclo de longitud 5 en G_R . Por otro lado, si $u_2u_4 \in E(G_A)$, entonces

$$(u_2, u_4, v_k, v_1, u_5, u_6, \dots, u_2)$$

es un ciclo de longitud $n + 1$ en G_A (véase figura 4.33).

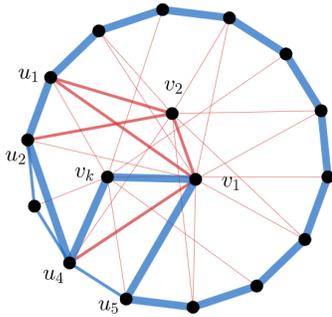


Figura 4.33: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $n = 14$ donde vemos el ciclo de longitud $n + 1$ que se forma en G_A o el ciclo de longitud 5 que se forma en G_R , dependiendo del color de u_2u_4 .

Subcaso 2: v_k es adyacente en G_R a $S_2 \cup \{u_1\}$ y en G_A a $S_1 \setminus \{u_1\}$, mientras que v_1 y v_2 son adyacentes en G_R a los vértices de S_2 y en G_A a S_1 . Al igual que en el subcaso anterior, si $v_1v_k \in E(G_R)$, entonces podemos intercambiar los papeles de v_k y v_2 , y encontrar un ciclo de longitud 5 en G_R (véase figura 4.31). Si $u_3u_5 \in E(G_R)$, entonces

$$(u_3, u_5, v_1, u_1, v_2, u_3)$$

es un ciclo de longitud 5 en G_R . Por otro lado, si $u_3u_5 \in E(G_A)$, entonces

$$(u_3, u_5, v_k, v_1, u_5, u_7, \dots, u_3)$$

es un ciclo de longitud $n + 1$ en G_A (véase figura 4.34).

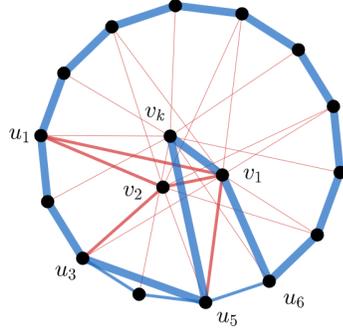


Figura 4.34: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $n = 14$, donde vemos el ciclo de longitud $n+1$ que se forma en G_A o el ciclo de longitud 5 que se forma en G_R , dependiendo del color de u_3u_5 .

Dado que cuando n es impar se tienen las condiciones del caso 1, podemos suponer que n es par en los siguientes casos..

Caso 2: Supongamos que el caso 1 no es posible y que existe un vértice $v_k \in V(G) \setminus V(C)$, con $1 \neq k \neq 2$, que no es adyacente en G_R a ningún vértice de C que sea adyacente a v_1 o v_2 . Esto implica que siempre que $v_1u_i \in E(G_R)$, $v_ku_i \in E(G_A)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, y siempre que $v_2u_j \in E(G_R)$, $v_ku_j \in E(G_A)$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Como v_k es adyacente en G_R a al menos $\frac{n}{2}$ vértices de C y es adyacente en G_A a al menos $\frac{n}{2}$ vértices de C , v_k es adyacente en G_R , y en G_A respectivamente, a exactamente $\frac{n}{2}$ vértices de C . Por lo tanto, podemos suponer que v_1 y v_2 son adyacentes en G_R a los vértices de S_1 y adyacente en G_A a los vértices de S_2 , con S_1 y S_2 definidos como en el caso anterior. Por otra parte, v_k es adyacente en G_R a los vértices de S_2 y adyacente en G_A a los vértices de S_1 .

Si $i \neq j$ son ambos impares, entonces $u_iu_j \in E(G_A)$, o de lo contrario podemos tomar $t \notin \{i, j\}$ (pues $n \geq 6$) para obtener el ciclo rojo

$$(u_i, u_j, v_2, u_t, v_1, u_i)$$

de orden 5, lo que es una contradicción. En este caso G_A contiene el ciclo

$$(v_k, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_5, u_3, u_2, v_1, u_n, u_1, v_k)$$

de orden $n+1$ (véase figura 4.35).

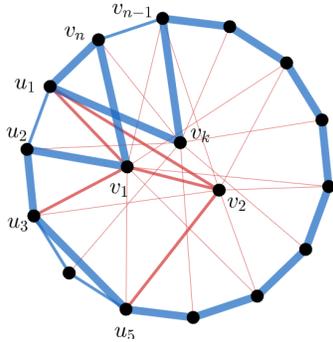


Figura 4.35: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $n = 14$ donde vemos el ciclo de longitud $n + 1$ que podemos encontrar en G_A cuando $u_2u_4 \in G_A$. También podemos ver, con $t = 1$, el ciclo de longitud 5 que se forma en G_R cuando $u_3u_5 \in E(G_R)$.

Caso 3: Supongamos que los casos 1 y 2 no suceden. Por lo tanto, cada v_k , con $k \geq 3$, tiene las propiedades de que cada vez que $v_1u_i, v_ku_i \in E(G_R)$, $v_2u_i \in E(G_A)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, y cada vez que $v_2u_i, v_ku_i \in E(G_R)$, $v_1u_i \in E(G_A)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Definamos S_1 y S_2 como en el caso anterior. Digamos que v_1 y v_3 son adyacentes en G_R a los elementos de S_1 y en G_A a los elementos de S_2 . Mientras que v_2 es adyacente en G_R a los vértices de S_2 y en G_A a los vértices de S_1 .

Si $v_1v_3 \in E(G_R)$, entonces se satisfacen las condiciones para el caso 2 donde v_1 y v_3 cumplen los papeles de v_1 y v_2 respectivamente. Pero si consideramos $v_1v_3 \in E(G_A)$, entonces G_A contiene el ciclo

$$(v_1, v_3, u_2, u_3, \dots, u_n, v_1)$$

de orden $n + 1$ (véase figura 4.36).

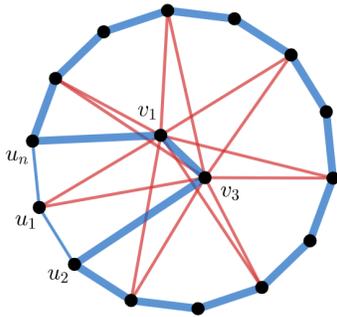


Figura 4.36: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $n = 14$ donde vemos el ciclo de longitud $n + 1$ que podemos encontrar en G_A cuando $v_1v_3 \in G_A$.

□

Teorema 4.9. $c(6, 6) = 8$

Demostración. Si consideramos una coloración rojo-azul de $G = K_7$ tal que $G_R = K_{2,5}$ y $G_A = K_2 \cup K_5$, entonces G no contiene ciclos monocromáticos de orden 6 (véase figura 4.37). Por lo tanto, $c(6, 6) \geq 8$.

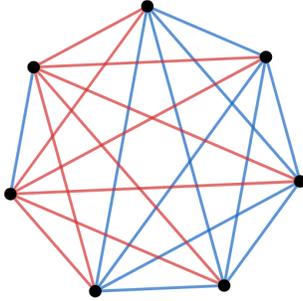


Figura 4.37: Sin ser excepción, tomamos una gráfica bipartita y su complemento para esta parte de nuestro teorema.

Consideremos una coloración rojo-azul de $G = K_8$ y supongamos que G no contiene ciclos monocromáticos de orden 6. Tenemos dos casos:

Caso 1: Supongamos que G no contiene ciclos monocromáticos de orden 5. Como $c(4, 4) = 6$ por el teorema 4.3, sabemos que G contiene un ciclo monocromático de orden 4. Supongamos que G_R contiene un ciclo de orden 4, digamos $C = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_1)$. Llamemos v_1, v_2, v_3 y v_4 al resto de los vértices de G . Como G_R no contiene ciclos de orden 5, ningún vértice de $V(G) \setminus V(C)$ es adyacente en G_R a dos vértices consecutivos de C . Por lo tanto, cada vértice de $V(G) \setminus V(C)$ es adyacente en G_A a dos vértices opuestos de C . Tenemos ahora dos subcasos:

Subcaso 1a: Supongamos que 3 o más vértices de $V(G) \setminus V(C)$ son adyacentes en G_A al mismo par de vértices opuestos de C , digamos que v_1, v_2 y v_3 son adyacentes en G_A a u_1 y u_3 . Los vértices v_1, v_2 y v_3 son adyacentes entre sí en G_R o de lo contrario G_A contiene un ciclo de orden 5 (véase figura 4.38).

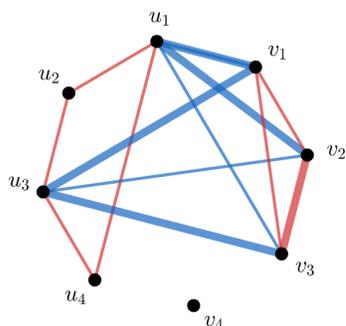


Figura 4.38: En esta imagen, podemos ver el ciclo azul que se formaría si existiera una arista azul, en este caso v_2v_3 , entre los vértices v_1, v_2 y v_3 .

Además, el vértice v_4 no puede ser adyacente en G_A a dos vértices de $\{v_1, v_2, v_3\}$ o de lo contrario G_A contiene un ciclo de orden 6 (véase figura 4.39).

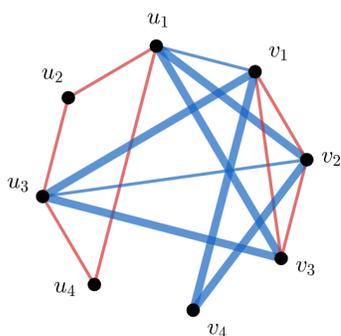


Figura 4.39: En esta imagen, podemos ver el ciclo azul que se formaría si v_4 fuera adyacente en G_A a dos vértices, en este caso v_1 y v_2 , de $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Por tanto, podemos suponer que $v_2v_4, v_3v_4 \in E(G_R)$. Ahora, u_2v_2 y u_4v_3 no pueden ser ambas rojas o de lo contrario G_R contiene un ciclo de orden 6 (véase figura 4.40). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u_2v_2 \in E(G_A)$.

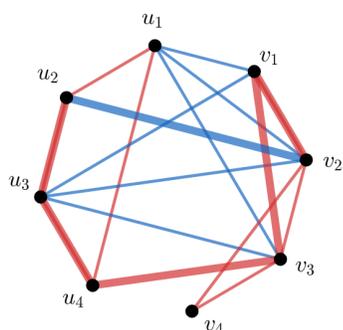


Figura 4.40: En esta imagen, podemos ver el ciclo rojo que se formaría si u_2v_2 y u_4v_3 fueran simultáneamente rojas.

Si u_2v_1 o u_2v_3 son aristas de G_A , entonces G_A contiene un ciclo de orden 6 (véanse figuras 4.41 y 4.42).

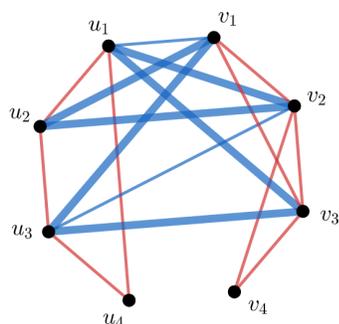


Figura 4.41: En esta imagen, vemos el ciclo azul que tenemos cuando la arista u_2v_1 es azul.

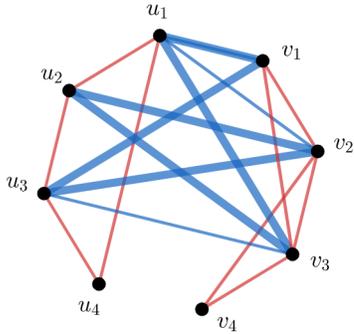


Figura 4.42: En esta imagen, vemos el ciclo azul que tenemos cuando la arista v_2v_3 es azul.

Por lo tanto, $u_2v_1, u_2v_3 \in E(G_R)$ y G_R contiene el ciclo

$$(u_2, v_1, v_2, v_4, v_3, u_2)$$

de orden 5, lo que produce una contradicción (véase figura 4.43).

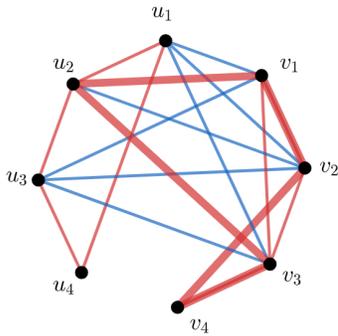


Figura 4.43: En esta imagen, vemos el ciclo rojo que nos lleva a una contradicción en este subcaso.

Subcaso 1b: Supongamos que exactamente dos vértices de $V(G) \setminus V(C)$ son adyacentes en G_A a los mismos vértices de C . Digamos que v_1 y v_2 son adyacentes en G_A a u_2 y u_4 , mientras que v_3 y v_4 son adyacentes en G_A a u_1 y u_3 . Supongamos además que $v_1v_3 \in E(G_A)$. Ahora, $v_3u_2 \in E(G_R)$ o de lo contrario

$$(v_3, u_2, v_2, u_4, v_1, v_4)$$

es un ciclo en G_A de orden 5 (véase figura 4.44).

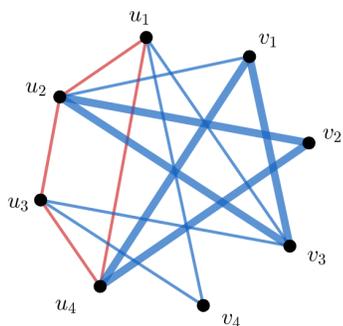


Figura 4.44: En esta imagen, podemos ver el ciclo azul que se forma cuando $v_3u_2 \in E(G_A)$.

Semejantemente, $v_4u_2, v_4u_4 \in E(G_R)$ o de lo contrario G_A contiene un ciclo de longitud 5 (véanse figuras 4.45 y 4.46).

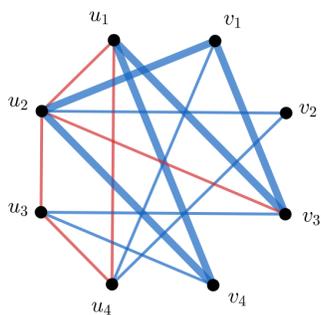


Figura 4.45: En esta imagen, podemos ver el ciclo azul que se forma cuando $v_4u_2 \in E(G_A)$.

También tenemos que $v_4v_3 \in E(G_A)$, o de lo contrario

$$(v_4, v_3, u_2, u_3, u_4, v_4)$$

es un ciclo rojo de orden 5 (véase figura 4.47).

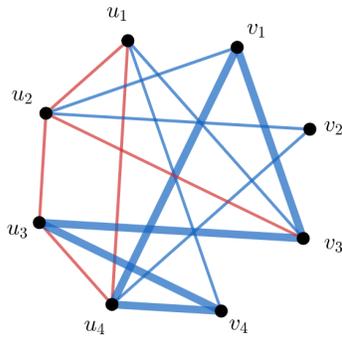


Figura 4.46: En esta imagen, podemos ver el ciclo azul que se forma cuando v_4u_4 es azul.

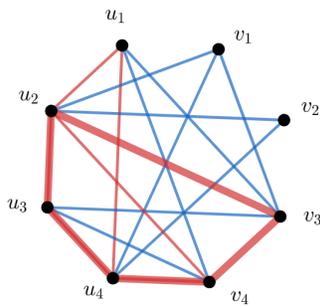


Figura 4.47: En esta imagen, tenemos el ciclo rojo que se forma cuando v_4v_3 es roja.

Similarmente se sigue que $v_2u_1 \in E(G_R)$ y $v_2u_3 \in E(G_A)$ (véanse figuras 4.48 y 4.49).

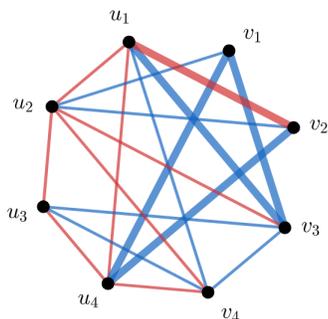


Figura 4.48: En esta imagen, vemos el ciclo que se formaría si v_2u_1 fuera azul.

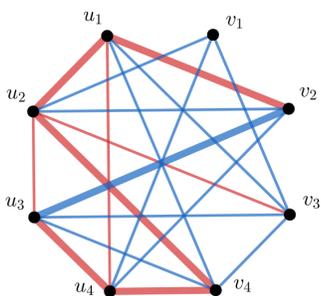


Figura 4.49: En esta imagen, vemos el ciclo que se formaría si v_2u_3 fuera roja.

Sin embargo, después de lo anterior, encontramos en G_A el ciclo

$$(v_2, u_3, v_4, v_3, v_1, u_4, v_2)$$

de orden 6, lo que es una contradicción (véase figura 4.50). Por lo tanto, tenemos que $v_1v_3 \in E(G_R)$. Por simetría, podemos decir que $v_2v_3, v_1v_4, v_2v_4 \in E(G_R)$.

Podemos observar que u_1v_2 y u_3v_1 no pueden ser ambas rojas o de lo contrario

$$(u_1, v_2, v_4, v_1, u_3, u_4, u_1)$$

es un ciclo rojo de orden 6 en G (véase figura 4.51).

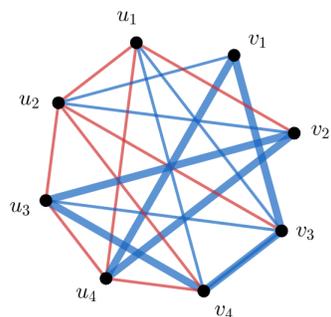


Figura 4.50: En esta imagen, vemos el ciclo azul que obtenemos inevitablemente al suponer que v_1v_3 es azul.

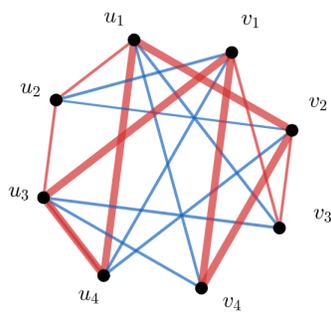


Figura 4.51: En esta imagen, podemos ver el ciclo rojo que se forma cuando suponemos que u_1v_2 y u_3v_1 son simultáneamente rojas.

Sin embargo, u_1v_2 y u_3v_1 no pueden ser ambas azules tampoco, o de lo contrario

$$(u_1, v_2, u_4, v_1, u_3, v_4, u_1)$$

es un ciclo azul de orden 6 en G (véase figura 4.52).

Podemos suponer que $u_1v_2 \in E(G_A)$ y $u_3v_1 \in E(G_R)$. Si $u_4v_4 \in E(G_R)$, entonces

$$(u_4, v_4, v_2, v_3, v_1, u_3, u_4)$$

es un ciclo rojo de orden 6 en G . Pero si $u_4v_4 \in E(G_A)$, entonces

$$(u_4, v_4, u_3, v_3, u_1, v_2, u_4)$$

es un ciclo azul de orden 6 en G (véase figura 4.53).

Podemos suponer entonces que $u_1v_2 \in E(G_R)$ y $u_3v_1 \in E(G_A)$. Si $u_4v_4 \in E(G_R)$, entonces

$$(u_4, v_4, v_1, v_3, v_2, u_1, u_4)$$

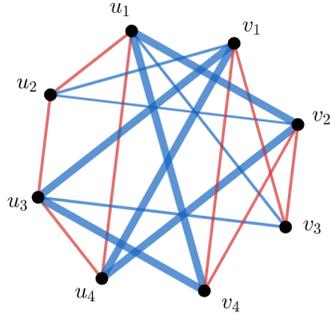


Figura 4.52: En esta imagen, podemos ver el ciclo rojo que se forma cuando suponemos que u_1v_2 y u_3v_1 son simultáneamente azules.

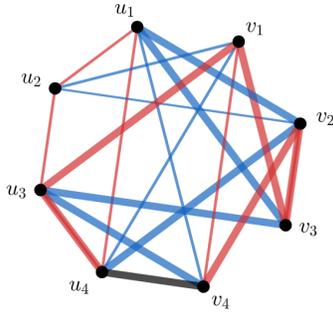


Figura 4.53: En esta imagen, podemos ver que suponer $u_1v_2 \in E(G_A)$ y $u_3v_1 \in E(G_R)$ nos lleva a que la arista v_4u_4 forma un ciclo monocromático de orden 6 ya sea roja o azul.

es un ciclo rojo de orden 6 en G . Pero si $u_4v_4 \in E(G_A)$, entonces

$$(u_4, v_4, u_3, v_1, u_2, v_2, u_4)$$

es un ciclo azul de orden 6 en G (véase figura 4.54).

De cualquier manera, tenemos una contradicción en este caso.

Caso 2: Supongamos que G contiene un ciclo monocromático de orden 5. Sin pérdida de generalidad supongamos que G_R contiene el ciclo $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_1)$ y llamemos v_1, v_2 y v_3 al resto de los vértices de G . Como G_R no contiene ciclos de orden 6, sabemos que ningún vértice en $V(G) \setminus V(C)$ es adyacente en G_R a dos vértices consecutivos de C . Por lo tanto cada vértice en $V(G) \setminus V(C)$ es adyacente en G_A a 3 vértices, no todos consecutivos, de C .

Ahora usamos el hecho de que si S_1, S_2 y S_3 son subconjuntos de 3 elementos de un conjunto de 5 elementos, entonces existen $i \neq j$ tales que $|S_i \cap S_j| \geq 2$. Por tanto, si tomamos S_i como un conjunto de 3 vértices no consecutivos adyacentes en G_A a v_i , deben existir dos

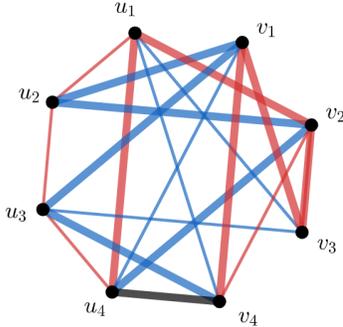


Figura 4.54: En esta imagen, podemos ver que suponer $u_1v_2 \in E(G_A)$ y $u_3v_1 \in E(G_R)$ nos lleva a que la arista v_4u_4 forma un ciclo monocromático de orden 6 dependiendo de su color.

vértices, digamos v_1 y v_2 , que son adyacentes en G_A a al menos dos vértices de C . Tenemos entonces dos subcasos:

Subcaso 2a: Supongamos que v_1 y v_2 son adyacentes en G_A a los mismos tres vértices no consecutivos de C , digamos que v_1 y v_2 son adyacentes en G_A a u_1, u_3 y u_4 . Si v_3 es adyacente en G_A a dos vértices en $\{u_1, u_3, u_4\}$, entonces G_A contiene un ciclo de orden 6 (véase figura 4.55).

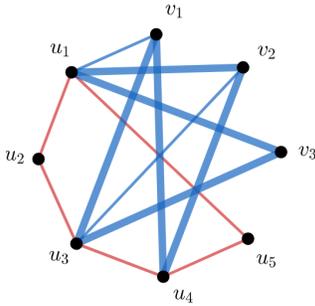


Figura 4.55: En este ejemplo podemos ver el ciclo azul que encontramos cuando v_3 es adyacente en G_A a dos de los vértices a los que v_1 y v_2 son adyacentes. Entonces, como v_3 debe ser adyacente en G_A a tres vértices de C , sabemos que debe ser adyacente a u_2 y u_5 .

Por tanto, podemos asumir que v_3 es adyacente en G_A a exactamente un vértice en $\{u_1, u_3, u_4\}$. Este vértice no puede ser u_1 por que si $v_3u_1 \in E(G_A)$, entonces v_3u_3 o v_3u_4 también debe pertenecer a $E(G_A)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $v_3u_4 \in E(G_A)$. Esto implica que $v_3u_2, v_3u_5 \in E(G_A)$ y $v_3u_1, v_3u_3 \in E(G_R)$. La arista $v_2u_5 \in E(G_R)$ o de lo contrario

$$(v_2, u_5, v_3, u_4, v_1, u_3, v_2)$$

es un ciclo de orden 6 en G_R (véase figura 4.56). Análogamente se sigue que $v_2u_2, v_1u_5, v_1u_2 \in E(G_R)$. Pero en ese caso,

$$(v_2, u_2, u_3, v_3, u_1, u_5, v_2)$$

es un ciclo de orden 6 en G_R , lo que produce una contradicción (véase figura 4.57).

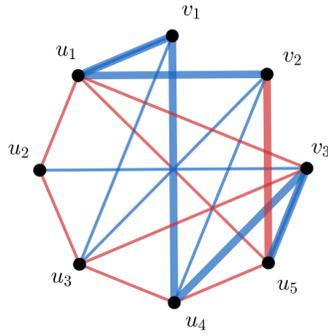


Figura 4.56: En esta imagen, podemos ver el ciclo azul que se formaría si la arista v_2u_5 fuera azul.

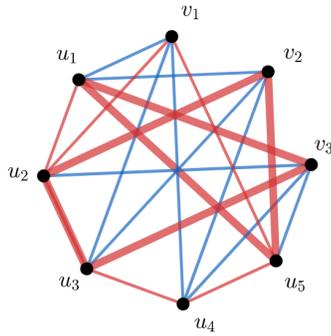


Figura 4.57: En esta imagen, podemos ver el ciclo rojo de orden 6 que nos lleva a una contradicción en este caso.

Subcaso 2b: Ningún par de vértices de $V(G) \setminus V(C)$ son adyacentes a los mismos tres vértices de C , pero v_1 y v_2 son adyacentes a dos vértices de C . Supongamos que v_1 es adyacente en G_A a u_1, u_3 y u_4 , entonces v_2 es adyacente en G_A a exactamente dos vértices de esos tres vértices. Aquí, v_2 no puede ser adyacente en G_A a u_3 y u_4 o necesariamente debería ser adyacente en G_A a u_1 . Por tanto, podemos asumir sin pérdida de generalidad que v_2 es adyacente en G_A a u_1 y u_4 . Se sigue que $v_2u_2 \in E(G_A)$. Ahora consideremos la coloración de las aristas v_3u_1 y v_3u_4 , observando que no pueden ser ambas azules pues esto nos regresaría al subcaso 2a.

- i) Si v_3 no es adyacente en G_A a u_1 ni u_4 , entonces v_3 es adyacente en G_A a u_2, u_3, u_5 . Pero entonces

$$(v_1, u_3, v_3, u_2, v_2, u_4, v_1)$$

es un ciclo de orden 6 en G_A , lo que es una contradicción (véase figura 4.58).

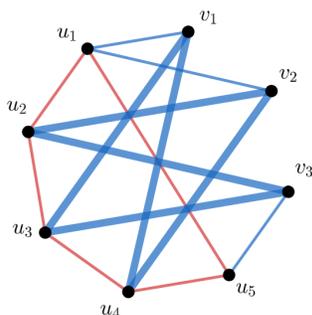


Figura 4.58: En esta imagen, podemos ver el ciclo azul que inevitablemente encontramos cuando suponemos que las aristas azules de $\{v_1, v_2, v_3\}$ a C están acomodadas de esta forma.

- ii) Supongamos, sin pérdida de generalidad, que v_3 es adyacente en G_A a u_1 . A menos de que $v_3u_3, v_3u_5 \in E(G_A)$, regresamos al caso anterior. Sin embargo,

$$(v_1, u_3, v_3, u_1, v_2, u_4, v_1)$$

es un ciclo de orden 6 en G_A , lo que también es una contradicción (véase figura 4.59).

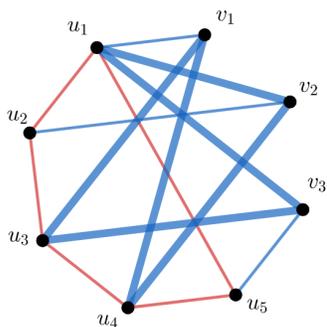


Figura 4.59: En esta imagen, vemos el ciclo azul que encontramos cuando suponemos que v_3u_3 es azul.

En ambas situaciones encontramos un ciclo de longitud 6 en este subcaso.

□

Resumiendo todo lo anterior, tenemos la siguiente proposición [4].

Proposición 5. $c(3, 3) = 6$, $c(4, 4) = 6$, $c(5, 4) = 7$, $c(6, 6) = 8$, $c(n, 3) = 2n - 1$ para $n > 3$, $c(n, 4) = n + 1$ para $n > 5$ y $c(n, 5) = 2n - 1$ para $n \geq 5$.

Capítulo 5

R. J. Faudree y R. H. Schelp

Finalmente, Ralph Jasper Faudree y Richard H. Schelp extienden, en *All Ramsey numbers for cycles in graphs* [6], los resultados obtenidos por J. A. Bondy, P. Erdős, T. Gallai, G. Chartrand y S. Schuster a cualquier pareja de ciclos. Y de esta forma completan el problema de los números de Ramsey para ciclos. Tibor Gallai aparece aquí mencionado pues la proposición 2 aparece en *On maximal paths and circuits of graphs*, un artículo que publica con P. Erdős. Este resultado aparece posteriormente en *Large cycles in graphs* redactado por J. A. Bondy, y es por eso que se incluye en el capítulo uno. Sin embargo, R. J. Faudree y R. H. Schelp reconocen el crédito de este resultado como labor de T. Gallai y P. Erdős.

Si $A \subseteq V(G)$ y $u \in V(G) \setminus A$, decimos que u es *dominante sobre A* en G si $|N_A(u)| \geq \frac{1}{2}|A|$. Y decimos que es *fuertemente dominante* si $|N_A(u)| > \frac{1}{2}|A|$.

Lema 5.1. *Si C es un ciclo de longitud l y $u \in V(G) \setminus V(C)$ es fuertemente dominante sobre C , entonces G contiene un ciclo de longitud j para cada $j \in \{3, \dots, l+1\}$.*

Demostración. Sea $C = (v_1, \dots, v_l, v_1)$ un ciclo de longitud l y tomemos $j \in \{3, \dots, l+1\}$. Como u es fuertemente dominante sobre C , entonces el conjunto de vértices $\{v_i : uv_i \in E(G)\}$ tiene más de $\frac{l}{2}$ elementos. Similarmente, el conjunto $\{v_{i+j-2} : uv_i \in E(G)\}$ tiene el mismo número de elementos. Entonces, debe haber un vértice de este segundo conjunto que sea adyacente a u . Así que existe una i tal que uv_i y uv_{i+j-2} son aristas de G . Por lo tanto, G contiene al ciclo

$$(u, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+j-2}, u)$$

de longitud j (véase figura 5.1).

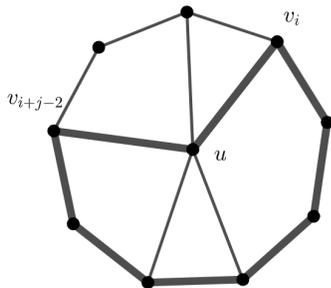


Figura 5.1: En este ejemplo, tomamos $l = 9$ y $j = 8$.

□

Lema 5.2. Sean C_1 y C_2 ciclos ajenos de longitud l y m respectivamente, y $u, v \in V(G) \setminus (V(C_1) \cup V(C_2))$. Si tanto u como v son dominantes sobre C_1 y sobre C_2 , y u es fuertemente dominante sobre C_1 , entonces G contiene un ciclo de orden j para cada $j \in \{3, \dots, l + m + 1\}$.

Demostración. Sean $C_1 = (u_1, u_2, \dots, u_l, u_1)$ y $C_2 = (v_1, v_2, \dots, v_m, v_1)$. Por el lema 5.1, G contiene un ciclo de longitud j para cada $j \in \{3, \dots, l + 1\}$. Esto resuelve los casos para $j = 3$ y $j = 4$. Así que podemos considerar $j \geq 5$. Entonces existen r y s con $0 \leq r \leq l - 1$ y $1 \leq s \leq m$ tales que $j = r + s + 4$.

Como u es fuertemente dominante sobre C_1 y v es dominante sobre C_1 , los conjuntos $\{u_i : uu_i \in E(G)\}$ y $\{u_i : vu_{i+r} \in E(G)\}$ deben coincidir en algún elemento u_q , por lo tanto $uu_q, vu_{q+r} \in E(G)$. Por el mismo argumento, podemos encontrar un vértice u_p tal que $uu_p, vu_{p+r+1} \in E(G)$.

Como u y v son dominantes sobre C_2 , los conjuntos $X = \{v_i : uv_i \in E(G)\}$ y $Y = \{v_i : vv_{i+s} \in E(G)\}$ tienen al menos $\frac{m}{2}$ elementos. Por lo que, o bien coinciden en algún elemento o son complementarios en $V(C_2)$ con exactamente $\frac{m}{2}$ elementos cada uno. Si coinciden en alguna v_i , entonces $uv_i, vv_{i+s} \in E(G)$ (véase figura 5.2). Si son complementarios, entonces podemos considerar el conjunto $\{v_i : vv_{i+s-1} \in E(G)\}$. Este conjunto no puede coincidir con Y , pues si para cada i tal que $vv_{i+s} \in E(G)$ también $vv_{i+s-1} \in E(G)$, podríamos ver que cada $vv_i \in E(G)$. Pero habíamos supuesto que Y tenía únicamente $\frac{m}{2}$ elementos. Por lo tanto, debe existir una v_i en este conjunto tal que

$v_i \notin Y$, entonces $v_i \in X$. En este caso, podemos tomar tal i y tenemos que $uv_i, vv_{i+s-1} \in E(G)$ (véase figura 5.3). Dependiendo del caso, tenemos que

$$(u, u_q, \dots, u_{q+r}, v, v_{i+s}, v_{i+s-1}, \dots, v_i, x)$$

o

$$(u, u_p, \dots, u_{p+r+1}, v, v_{i+s-1}, v_{i+s-2}, \dots, v_i, x)$$

es un ciclo de longitud l en G .

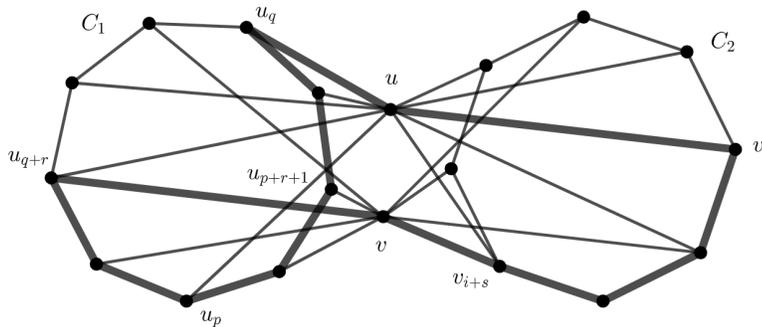


Figura 5.2: En esta imagen, tenemos un ejemplo con donde $l = 9$, $m = 8$ y $j = 13$. Por elegir algunos, tomamos $r = 6$ y $s = 3$. En esta figura en particular tomamos el vértice v_i de forma que v_{i+s} también sea adyacente a v . Aquí tomamos la trayectoria de u_q a u_{q+r} para construir el ciclo de longitud 13.

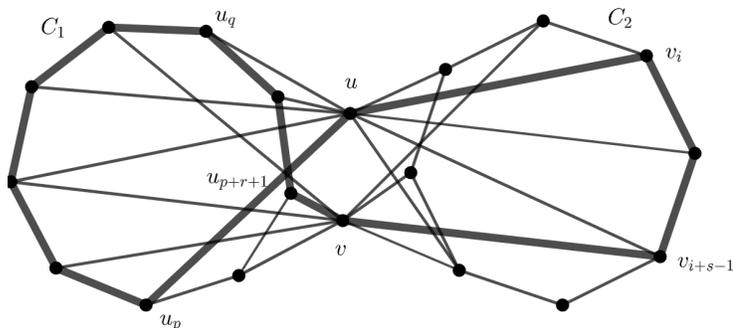


Figura 5.3: En esta imagen, tenemos un ejemplo con los mismos valores para l, m, j, r y s , sin embargo en este elegimos v_i de forma que v_{i+s-1} sea adyacente a v en lugar de v_{i+s} . Aquí tomamos la trayectoria de u_p a u_{p+r+1} dentro del ciclo para construir el ciclo de longitud 13.

□

Lema 5.3. *Supongamos que el conjunto de vértices $V(G)$ es la unión ajena de tres subconjuntos A, B y C . Si existe $A_1 \subseteq A$ tal que*

- i) $|B \cup C| = r \geq 2$,*
- ii) $|B| \geq |C|$,*
- iii) $A_1 \subseteq N_A(b)$ para toda $b \in B$,*
- iv) $|A_1| \geq r$ y*
- v) $|N_C(c) \cap A_1| \geq 2|C|$ para cada $c \in C$,*

entonces G tiene un ciclo de longitud $2r$.

Demostración. Sean $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{|C|}\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{|B|}\}$. Por la condición v) sabemos que existe un conjunto de vértices $\{a_i: 1 \leq i \leq 2|C|\} \subseteq A_1$ tal que $a_{2i-1}c_i, a_{2i}c_i \in E(G)$ para cada $i \in \{1, \dots, |C|\}$. Por lo tanto, por las condiciones i), ii), iii) y iv), tenemos que

$$(b_1, a_1, c_1, a_2, b_2, a_3, c_2, a_4, b_3, a_5, \dots, b_{|C|}, a_{2|C|-1}, \\ c_{|C|}, a_{2|C|}, \dots, b_{|C|+1}, a_{2|C|+1}, \dots, b_{|B|}, a_r, b_1)$$

es un ciclo de longitud $2r$ en G (véase figura 5.4).

□

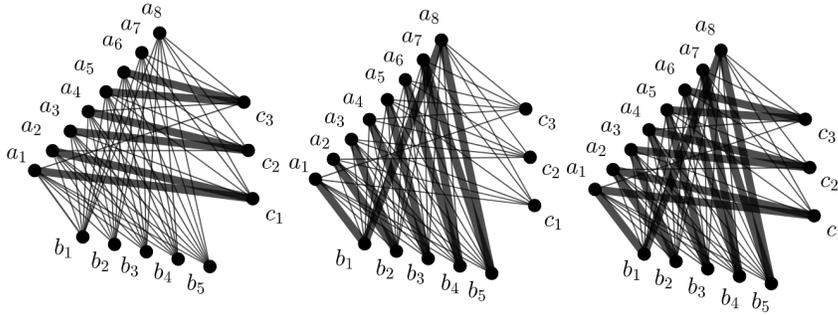


Figura 5.4: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $r = 8$. Podemos ver la forma de construir el ciclo que buscamos. La condición $v)$ nos permite tomar primero vértices de C y unirlos con A . Las condiciones $ii)$ y $iii)$ nos permiten tomar vértices de B cuando terminamos con C . Finalmente, las condiciones $i)$ y $iv)$ nos aseguran que la longitud de nuestro ciclo será la que buscamos.

En el resto del capítulo consideramos G con una coloración rojo-azul.

Lema 5.4. Si G_R contiene un ciclo de longitud l y para alguna r , con $4 \leq r \leq m \leq l$, G_A no tiene un ciclo de longitud r , entonces G_R contiene un ciclo de longitud m o $m + 1$.

Demostración. Sea $C = (v_1, \dots, v_l, v_1)$ un ciclo de longitud $l > m + 1$ en G_R . Para demostrar este teorema basta probar que G_R contiene un ciclo de longitud $l - 1$ o $l - 2$. Para los demás casos basta tomar $l' = l - 1$ o $l' = l - 2$ y proceder por inducción. Si tal ciclo no existe, entonces $v_i v_{i+2}, v_i v_{i+3}$ es azul para cada $i \in \{1, \dots, l\}$. Tenemos dos casos:

Caso 1: Si r es par, es decir, si $r = 2j$ para alguna $j \in \mathbb{N}$, entonces

$$(v_1, v_4, v_6, \dots, v_{2j+2}, v_{2j-1}, v_{2j-3}, v_3, v_1)$$

es un ciclo de longitud r en G_A (véase figura 5.5).

Caso 2: Si r es impar, es decir, si $r = 2j + 1$ para alguna $j \in \mathbb{N}$, entonces

$$(v_1, v_4, v_6, \dots, v_{2j}, v_{2j+3}, v_{2j+1}, v_3, v_1)$$

es un ciclo de longitud r en G_A (véase figura 5.6).

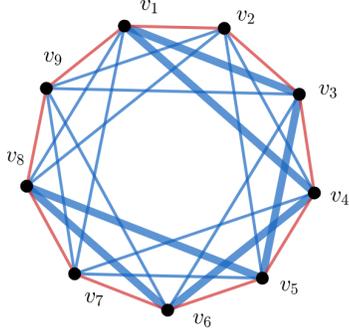


Figura 5.5: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $l = 9$. En este primer caso, con r par, tomamos $r = 6$ y, por lo tanto, $j = 3$.

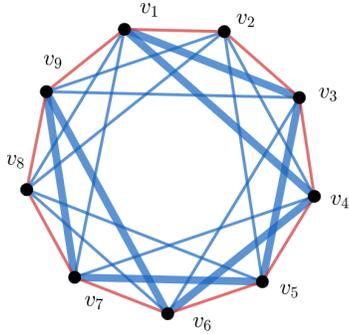


Figura 5.6: En esta imagen, tenemos un ejemplo para el otro caso. Con r impar, tomamos $r = 7$. De nuevo tenemos que $j = 3$.

En ambos casos, tenemos una arista roja de la forma $v_i v_{i+2}$ o $v_i v_{i+3}$ y se tiene el resultado. \square

Lema 5.5. Si G_R contiene un ciclo $C = (v_1, \dots, v_{m+1}, v_1)$ de longitud $m+1$, con $m \geq 7$, pero no contiene ningún ciclo de orden m y para alguna $r \in \{5, \dots, m\}$, G_A no contiene ciclos azules de orden r , entonces

$$i) |\{i \in \{1, \dots, m+1\} : v_i v_{i+3} \text{ es de color rojo}\}| \geq \frac{1}{2}(m+1)$$

ii) Para cualquier $v \in V(G) \setminus V(C)$, si m es par, v es fuertemente dominante sobre C en G_A .

iii) Para cualquier $v \in V(G) \setminus V(C)$, si m es impar, v es dominante sobre C y fuertemente dominante sobre uno de $C_1 = (v_1, v_3, \dots, v_m)$ o $C_2 = (v_2, v_4, \dots, v_{m+1})$ en G_A .

iv) Para cualesquiera $v, u \in V(G) \setminus V(C)$ tales que uv es roja, solo uno de v y u puede ser fuertemente dominante sobre C_1 (o C_2) en G_R .

Demostración. Si G_R no tiene ciclos de orden m , entonces para cada $i \in \{1, \dots, m+1\}$, la arista $v_i v_{i+2}$ es de color azul.

Para el inciso *i*), primero consideramos el caso en que $r < m$. Si r es impar de la forma $r = 2j + 1$ y $v_i v_{i+3}$ es azul, entonces $v_{i+2j-1} v_{i+2j+2}$ es roja o de lo contrario

$$(v_i, v_{i+3}, v_{i+5}, \dots, v_{i+2j-1}, v_{i+2j+2}, v_{i+2j}, \dots, v_{i+2}, v_i)$$

es un ciclo de orden r en G_A (véase figura 5.7).

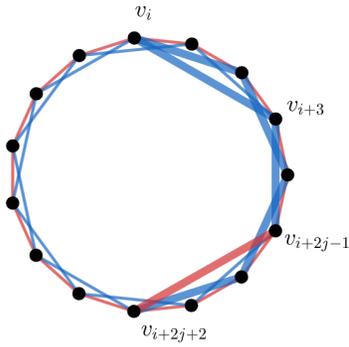


Figura 5.7: En esta figura tenemos un ejemplo para $m = 15$ y $r < m$ impar. En este caso, con $r = 7$, vemos que si $v_{i+2j-1} v_{i+2j+2}$ fuese azul, tendríamos un ciclo azul de longitud r en G .

Del mismo modo, si r es par de la forma $r = 2j$ y $v_i v_{i+3}$ es azul, entonces $v_{i+2j+1} v_{i+2j-2}$ es roja o de lo contrario

$$(v_i, v_{i+3}, v_{i+5}, \dots, v_{i+2j+1}, v_{i+2j-2}, v_{i+2j-4}, \dots, v_{i+2}, v_i)$$

es un ciclo de color azul y orden r en G (véase figura 5.8).

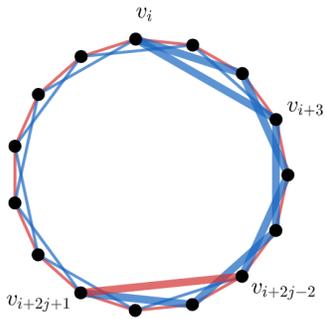


Figura 5.8: En esta figura tenemos un ejemplo con $r < m$, r impar. Si tomamos $r = 8$, podemos ver que si $v_{i+2j+1} v_{i+2j-2}$ fuese azul tendríamos un ciclo azul de longitud r en G .

Por lo anterior, por cada arista en G_A de la forma $v_i v_{i+3}$, existe una arista de la misma forma, pero en G_R .

Ahora, si $r = m$ y r es par, supongamos que $v_i v_{i+3}, v_{i-2} v_{i+1} \in E(G_R)$. Entonces

$$(v_i, v_{i+2}, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i-2}, v_{i-4}, \dots, v_{i+3}, v_i)$$

es un ciclo azul de orden $r + 1$ (véase figura 5.9).

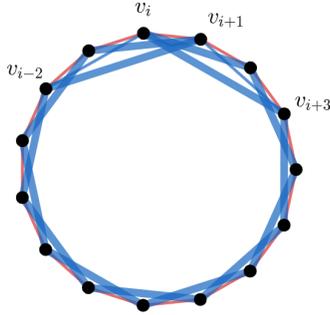


Figura 5.9: En esta figura tenemos un ejemplo con $r = m = 14$. Podemos ver el ciclo azul de longitud $r + 1$ que encontramos cuando $v_i v_{i+3}$ y $v_{i-2} v_{i+1}$ son azules.

Como no hay ciclos azules de longitud r , tenemos que $v_{i-3} v_{i+1}$ y $v_{i+2} v_{i+6}$ son rojas o de lo contrario tenemos un ciclo en G_A de esa longitud (véanse figuras 5.10 y 5.11).

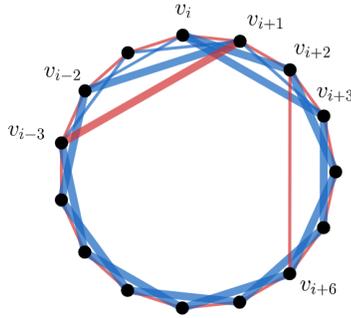


Figura 5.10: En esta figura tenemos un ejemplo, con $r = m = 14$, donde vemos el ciclo de longitud r que se formaría si $v_{i-3} v_{i+1} \in E(G_A)$.

Por lo tanto, $v_{i-1} v_{i-4} \in E(G_A)$, o de lo contrario,

$$(v_{i-1}, v_{i-4}, v_{i-5}, \dots, v_{i+1}, v_{i-3}, v_{i-2}, v_{i-1})$$

sería un ciclo de orden m en G_R (véase figura 5.12). Del mismo modo, $v_{i+1} v_{i+4}$ debe ser azul (véase figura 5.13).

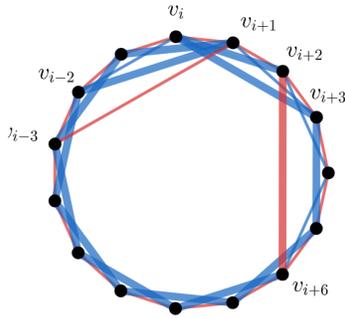


Figura 5.11: En esta figura tenemos un ejemplo, con $r = m = 14$, donde vemos el ciclo de longitud r que se formaría si $v_{i+2}v_{i+6}$ fuera azul.

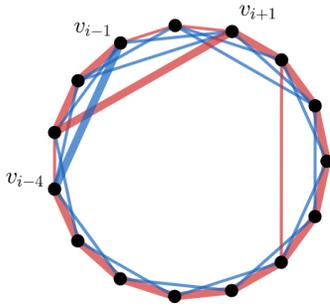


Figura 5.12: En esta figura, tenemos un ejemplo, con $r = m = 14$, donde vemos el ciclo de longitud r que se formaría si $v_{i-1}v_{i-4} \in E(G_R)$.

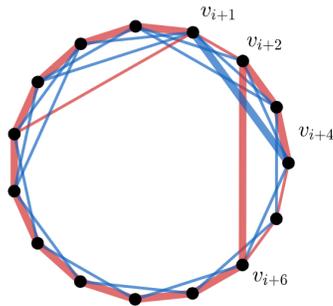


Figura 5.13: En esta figura, tenemos un ejemplo, con $r = m = 14$, donde vemos el ciclo de longitud r que se formaría si $v_{i+1}v_{i+4}$ fuera roja.

Sin embargo, esto implica que

$$(v_i, v_{i+3}, v_{i+5}, \dots, v_{i-4}, v_{i-1}, v_{i-3}, \dots, v_{i+4}, v_{i+1}, v_{i-2}, v_i)$$

es un ciclo azul de orden r (véase figura 5.14).

Esto es una contradicción con nuestra suposición de que $v_i v_{i+3}$ y $v_{i-2} v_{i+1}$ son ambas de color azul. Es decir, al menos una de las dos aristas debe estar en $E(G_R)$. De nuevo, esto implica que por cada arista azul de la forma $v_i v_{i+3}$,

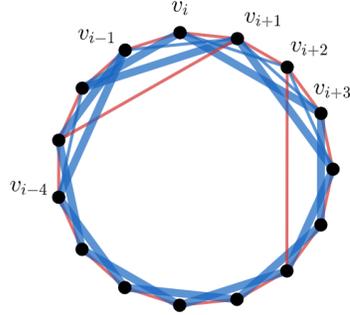


Figura 5.14: En esta imagen, podemos ver el ciclo azul de orden $r = m$ que inevitablemente encontramos al suponer que $v_i v_{i+3}$ y $v_{i-2} v_{i+1}$ son simultáneamente azules.

existe una arista de la misma forma pero de color rojo y se tiene el resultado. El caso impar es análogo con únicamente una diferencia en los subíndices.

Para los incisos *ii*) y *iii*) tenemos que por el inciso anterior y como $m \geq 7$, para cada $k \in \{1, \dots, m + 1\}$ existe una j tal que $v_j v_{j+3}$ es roja y $v_k, v_{k+1} \notin \{v_{j+1}, v_{j+2}\}$, pues solo pueden haber tres j tales que v_k o $v_{k+1} \in \{v_{j+1}, v_{j+2}\}$ y deben existir por lo menos 4 aristas rojas de la forma $v_j v_{j+3}$. Ahora, si tomamos j de esta forma, tenemos que si vv_j es roja, entonces vv_{j+1} debe ser azul o de lo contrario

$$(v, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j, v_{j+3}, \dots, v_i, v)$$

es un ciclo rojo de orden m en G (véase figura 5.15).

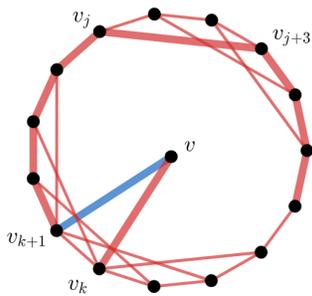


Figura 5.15: En esta figura tenemos un ejemplo con $m = 14$. Por el inciso *i*), sabemos que debe haber al menos 8 aristas rojas de la forma $v_i v_{i+3}$. Por lo tanto, existe j tal que $v_k v_{k+1}$ no forma parte de $[v_j, v_{j+3}]$. Tomando esta arista podemos ver que si $vv_k \in E(G_R)$, entonces $vv_{k+1} \in E(G_A)$.

Como por cada arista roja de v a C , debe haber otra arista azul, podemos concluir que $|N_{C_R}(v)| \leq \frac{1}{2}(m + 1)$, es decir, $|N_{C_A}(v)| \geq \frac{1}{2}(m + 1)$. Si m es par, entonces $|N_{C_A}(v)| \geq \frac{1}{2}(m + 1)$ implica $|N_{C_A}(v)| \geq \lfloor \frac{1}{2}(m + 1) \rfloor + 1 > \frac{1}{2}(m + 1)$, por lo que v es fuertemente dominante sobre C en G_A . Si m es impar y

$|N_{C_R}(v)| = \frac{1}{2}(m+1)$, entonces las aristas de v a C deben alternarse una azul y una roja sobre los vértices de C . Esto pues si tenemos dos aristas azules consecutivas en algún lugar, entonces en algún lugar deben haber dos aristas rojas consecutivas y esto, como acabamos de ver, no es posible. Por lo tanto, $|N_{C_R}(v)| = \frac{1}{2}(m+1)$ si y solo si $N_{C_A}(v) = V(C_1)$ o $N_{C_A}(v) = V(C_2)$. En este caso, v es fuertemente dominante sobre este ciclo en G_A .

Finalmente, para el inciso *iv)*, supongamos que tanto u como v son fuertemente dominantes sobre C_1 en G_R . Entonces, $|N_{C_1}(u)| > \frac{1}{2}|V(C_1)|$ y $|N_{C_1}(v)| > \frac{1}{2}|V(C_1)|$. Tomemos alguna i impar, tal que uv_i sea roja. Como $m \geq 7$, por el inciso *i)* de este lema sabemos que debe existir alguna $j \in \{1, \dots, m+1\}$ tal que $v_j v_{j+3}$ sea roja y $v_{j+1}, v_{j+2} \notin \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$, pues deben existir por lo menos 4 aristas rojas de esta forma (por lo menos 5 si $m > 7$) y las únicas 4 aristas que no cumplen esta condición serían $v_{i-2}v_{i+1}, v_{i-1}v_{i+2}, v_i v_{i+3}$ y $v_{i+1}v_{i+4}$ (véase figura 5.16). Si $m = 7$ y esas 4 aristas son las únicas 4 aristas rojas de esta forma, entonces podemos tomar otra i impar tal que uv_i sea roja y proceder del mismo modo.

Si esta j existe, entonces vv_{i+2} debe ser azul o, de lo contrario,

$$(u, v, v_{i+2}, v_{i+3}, \dots, v_j, v_{j+3}, v_{j+4}, \dots, v_i, u)$$

es un ciclo rojo de longitud m en G (véase figura 5.16).

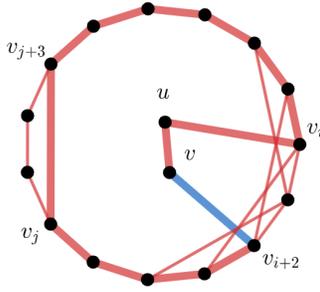


Figura 5.16: En esta imagen, podemos ver un ejemplo con $m = 14$. Podemos ver que vv_{i+2} no puede ser roja o de lo contrario tendríamos un ciclo de orden $m+1$.

Por cada arista roja de u a C_1 , tenemos que una de las aristas de v a C_1 debe ser azul. Pero estamos suponiendo que más de la mitad de las aristas de ambos vértices a C_1 son rojas. Esto es una contradicción.

□

Lema 5.6. Si G_R contiene un ciclo $C = (v_1, \dots, v_{m+1}, v_1)$ de longitud $m+1$ con $m \geq 7$ pero ningún ciclo de longitud m , entonces G_A contiene un ciclo de orden r con $r \in \{5, \dots, m\}$ si

i) m es par y $|V(G) \setminus V(C)| \geq 1$, o

ii) m es impar y $|V(G) \setminus V(C)| \geq \max\{1, 2r - m - 2\}$.

Demostración. Supongamos que para alguna $r \in \{5, \dots, m\}$, G_A no tiene ciclos de longitud r . Como G_R no tiene ciclos de longitud m , entonces $v_i v_{i+2}$ es azul para cada $i \in \{1, \dots, m+1\}$. Por lo tanto, si m es par, entonces

$$(v_1, v_3, \dots, v_{m+1}, v_2, v_4, \dots, v_m, v_1)$$

es un ciclo en G_A que denotaremos como C' . Si m es impar, entonces

$$(v_1, v_3, \dots, v_m, v_1)$$

y

$$(v_2, v_4, \dots, v_{m+1}, v_2)$$

son ciclos en G_A que denotaremos como C_1 y C_2 , respectivamente.

Supongamos que m es par. Si $v \in V(G) \setminus V(C)$, entonces v es fuertemente dominante sobre C' en G_A por el lema 5.5. Por el lema 5.1, tenemos que G contiene ciclos azules de cada longitud $r \in \{3, \dots, m\}$, lo que es una contradicción.

Supongamos entonces que m es impar. Por el lema 5.5, cualquier $v \in V(G) \setminus V(C)$ es fuertemente dominante sobre C_1 o C_2 en G_A y dominante sobre $C_1 \cup C_2$ en G_A . Para cada $j \in \{1, 2\}$ sea

$$R_j = \{v \in V(G) \setminus V(C) : v \text{ es dominante sobre } C_i \text{ si y solo si } i = j\}$$

$$S = \{v \in V(G) \setminus V(C) : v \text{ es dominante sobre ambos } C_1 \text{ y } C_2\}$$

Por el lema 5.5, cada $v \in R_j$ es fuertemente dominante sobre C_j en G_A . Ahora, cualquier vértice en R_j no puede ser dominante sobre C_i ($i \neq j$) en G_A , pero esto implica que es fuertemente dominante sobre C_i en G_R . De nuevo, por el lema 5.5, tenemos que cualesquiera dos vértices de R_j deben ser adyacentes por una arista azul pues ambos son dominantes sobre el mismo ciclo en G_R .

Supongamos que $r \leq \frac{1}{2}(m+1)$. Cualquier $v \in V(G) \setminus V(C)$ es fuertemente dominante sobre C_1 o C_2 en G_A , que son ciclos de orden $\frac{1}{2}(m+1)$, por lo que debe existir un ciclo azul de longitud r en G por el lema 5.1. Por tanto, podemos suponer que $r > \frac{1}{2}(m+3)$.

Si $|S| \geq 2$, entonces, por el lema 5.2, G_A tiene un ciclo de longitud r pues $2(\frac{1}{2}(m+1))+1 \geq r$. Por otro lado, si para $j \in \{1, 2\}$, $|R_j| \geq r - \frac{1}{2}(m+1) = r_1$, entonces existen $u_1, u_2, \dots, u_{r_1} \in R_j$ adyacentes entre sí en G_A . Como u_1 y u_{r_1} son fuertemente dominantes sobre C_j en G_A , existe i tal que $u_1 v_i$ y $u_{r_1} v_{i+2}$ son azules con $v_i, v_{i+2} \in C_j$. Por tanto,

$$(u_1, u_2, \dots, u_{r_1}, v_{i+2}, v_{i+4}, \dots, v_i, u_1)$$

es un ciclo azul de longitud r en G (véase figura 5.17). Por lo tanto, podemos suponer que $|S| < 2$ y $|R_j| < r - \frac{1}{2}(m+1)$ para $j \in \{1, 2\}$.

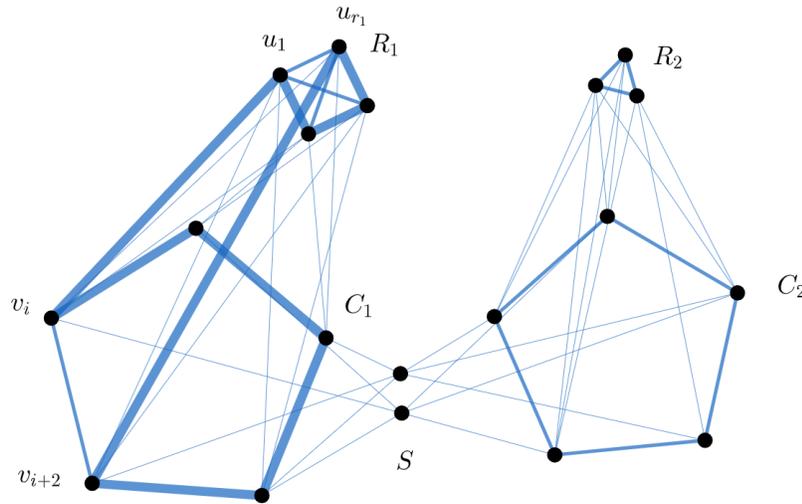


Figura 5.17: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $m = 9$ y $r = 9$. Podemos ver que si R_1 tiene más de $r - \frac{1}{2}(m+1) = 4$ vértices, entonces tenemos un ciclo azul de longitud 9.

Tenemos que $|V(G) \setminus V(C)| = |R_1| + |R_2| + |S| \geq 2r - m - 2$. Si suponemos que $|S| = 0$, entonces $|R_1| + |R_2| \geq 2r - m - 2 = 2(r - \frac{1}{2}(m+2))$. No puede suceder que ambos $|R_1|$ y $|R_2|$ sean menores a $r - \frac{1}{2}(m+2)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $|R_2| \geq r - \frac{1}{2}(m+2)$. Entonces, $r - \frac{1}{2}(m+1) > |R_2| \geq r - \frac{1}{2}(m+2) = r - \frac{1}{2}(m+1) - \frac{1}{2}$. Esto no es posible, pues R_1 es un entero. Por lo tanto, $|S| = 1$. Y en este caso, tenemos que $|R_1| + |R_2| \geq 2r - m - 3$. Como $|R_j| < r - \frac{1}{2}(m+1)$ para $j \in \{1, 2\}$, tenemos

que $|R_j| < r - \frac{1}{2}(m+1) - 1 = r - \frac{1}{2}(m+3)$ para $j \in \{1, 2\}$. Esto solo puede suceder si $|R_1| = |R_2| = r - \frac{1}{2}(m+3)$.

Sea $S = \{u\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que u es fuertemente dominante sobre C_1 en G_A . Sea $R_1 = \{u_1, \dots, u_{|R_1|}\}$. Tenemos dos casos.

Caso 1: Supongamos que u_1v_{2j} es azul para algún $u_{2j} \in C_2$. Como u es dominante sobre C_2 en G_A , existe alguna l , con $0 \leq l \leq \frac{1}{4}(m+1)$, tal que $uv_{2(j+l)}$ es azul. Además, para cualesquiera $k \in \{0, \dots, \frac{1}{2}(m+1)\}$ y $t \in \{1, \dots, |R_1|\}$, existe i tal que uv_{2i+1} y $u_tv_{2(i+k)+1}$ son azules pues $R_1 \cup S$ es fuertemente dominante sobre C_1 en G_A . Por lo tanto,

$$(u_1, v_{2j}, v_{2j+1}, \dots, v_{2(j+l)}, u, v_{2i+1}, \dots, v_{2(i+k)+1}, u_t, \dots, u_1)$$

es un ciclo azul de longitud $l+k+t+3$ en G . Podemos tomar k y t de forma que $l+k+t+3 = r$. Por lo tanto, G_A tiene un ciclo de longitud r , lo que es una contradicción (véase figura 5.18).

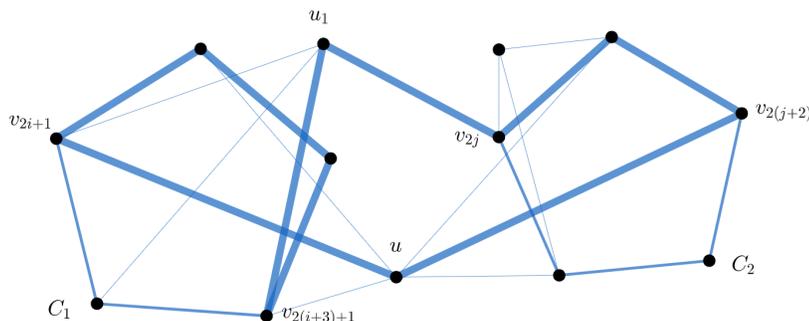


Figura 5.18: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $m = 9$ y $r = 9$. Podemos ver que si $u_1v_{2j} \in E(G_A)$, entonces al tomar $l = 2$, $t = 1$ y $k = 3$ encontramos un ciclo de longitud 9 en G_A .

Caso 2: Supongamos que ningún vértice de R_1 es adyacente a C_2 por una arista azul. Como cada vértice de R_1 es dominante sobre $C_1 \cup C_2$ en G_A , cada vértice de R_1 es adyacente a cada vértice de C_1 por una arista azul. Existe una i tal que uv_{2i+1} , uv_{2i+3} son azules pues u es dominante sobre C_1 en G_A . Por lo tanto,

$$(u, v_{2i+3}, v_{2i+5}, \dots, v_{2i-1}, u_1, u_2, \dots, u_{|R_1|}, u_{2i+1}, u)$$

es un ciclo azul de orden r en G_A (véase figura 5.19).

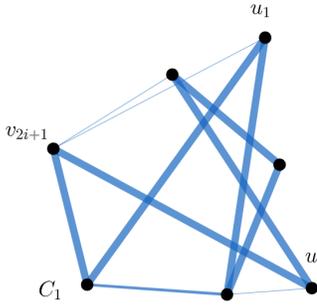


Figura 5.19: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $m = 9$ y $r = 7$, podemos ver que si R_1 es adyacente a cada vértice de C_1 , podemos fácilmente encontrar un ciclo de longitud r en G_A .

□

Lema 5.7. Si $n = 2m - 1$, $|E(G_R)| = (m - 1)^2$, $E(G_A) = m(m - 1)$ y G_A no contiene ningún ciclo de longitud r para alguna $r \in \{3, \dots, m\}$, entonces G_R contiene un ciclo de orden m .

Demostración. Para cualquier $v \in V(G)$, sea $G' = G - \{v\}$. La gráfica G' no contiene ciclos azules de longitud r para alguna $r \in \{3, \dots, m\}$ pues G no contiene tal ciclo. Por lo tanto, por la proposición 3, tenemos que

$$|E(G'_A)| < \frac{1}{4}((2m - 2)^2 + 1) = (m - 1)^2 + \frac{1}{4}.$$

Esto implica que $|E(G'_A)| \leq (m - 1)^2$, y por lo tanto

$$d_{G_A}(v) = d_{G'}(v) = |E(G_A)| - |E(G'_A)| \geq m(m - 1) - (m - 1)^2 = m - 1.$$

Al menos m vértices de G tienen grado exactamente $m - 1$ en G_A o de lo contrario,

$$\sum_{v \in V(G)} d_{G_A}(v) \geq (m - 1)(m - 1) + m \cdot m > 2m(m - 1) = 2|E(G_A)|,$$

que es una contradicción. Para algún par de vértices $v_1, v_2 \in G_A$, sea $G'' = G - \{v_1, v_2\}$. La gráfica G''_A no tiene ciclos azules de longitud r , con $r \in \{3, \dots, m\}$, pues G_A no contiene tal ciclo. Por la proposición 3, tenemos que

$$|E(G'')| < \frac{1}{4}((2m - 3)^2 + 1) = m^2 - 3m + 2 + \frac{1}{2}$$

Si $d_{G_A}(v_1) = d_{G_A}(v_2) = m - 1$, entonces $v_1 v_2$ es roja o de lo contrario,

$$|E(G_A)| = |E(G'')| + 2(m - 1) - 1 \leq m^2 - m - 1$$

que es una contradicción.

Por lo tanto, existe un subconjunto de $V(G_A)$ que contiene m vértices de grado $m - 1$, entre los cuales solo hay aristas rojas. Por tanto, G contiene un ciclo rojo de orden m . \square

Teorema 5.1. *Para $m \geq r \geq 3$ y $(m, n) \neq (3, 3)$, $c(m, r) \leq 2m - 1$.*

Demostración. Por las proposiciones 4 y 5, basta considerar solamente $m \geq r \leq 6$ y $m \leq 7$.

Sea $n = 2m - 1$, y supongamos una coloración de G tal que no se cumpla el teorema. Como G_A no contiene ciclos de orden r , por la proposición 3 tenemos que

$$|E(G_A)| < \frac{1}{4}((2m - 1)^2 + 1) = m(m - 1) + \frac{1}{2}.$$

Si $|E(G_A)| = m(m - 1)$, entonces

$$|E(G_R)| = \binom{2m - 1}{2} - |E(G_A)| = \frac{1}{2}(2m - 1)(2m - 2) - |E(G_A)| = (m - 1)^2$$

y G_R contiene un ciclo de longitud m por el lema 5.7. Esto es una contradicción.

Por lo tanto, $|E(G_A)| < m(m - 1)$ y $|E(G_R)| > (m - 1)^2$. Como

$$|E(G_R)| \geq (m - 1)^2 + 1 > (m - 1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}((m - 1)((2m - 1) - 1) + 1),$$

G_R contiene un ciclo de longitud al menos m por la proposición 2. Supusimos que G_R no contiene ciclos de longitud m , entonces, por el lema 5.4, G_R contiene un ciclo C de longitud $m + 1$. Como

$$|V(G) \setminus V(C)| = 2m - 1 - (m + 1) = m - 2 \geq \max\{1, 2r - m - 2\},$$

G_A contiene un ciclo de longitud r por el lema 5.6. Esto también es una contradicción, por lo que podemos concluir que el teorema se sostiene. \square

Corolario 5.1.1. *Para $3 \leq r \leq m$, $m > 3$ y r impar, $c(m, r) = 2m - 1$.*

Demostración. Tomemos una coloración de K_{2m-2} de forma que $G_R = K_{m-1} \cup K_{m-1}$. Como G_R no contiene ciclos de longitud m y G_A no contiene ciclos de longitud impar, tenemos que $c(m, r) > 2m - 2$ y el resultado se sigue del teorema 5.1. \square

Corolario 5.1.2. *Si $n = 2m - 1$ y $m > 3$, entonces G_R o G_A contiene ciclos de todas las longitudes l con $l \in \{3, \dots, m\}$.*

Demostración. Sea $k \leq m$ el mayor entero tal que G no contiene ciclos rojos o azules de longitud k . Si tal k no existe, se tiene el resultado. Por conveniencia, supongamos que G_A no contiene ciclos de longitud k . Como $2k - 1 \leq 2m - 1$, G contiene un ciclo rojo de longitud $i \in \{3, \dots, k\}$ por el teorema 5.1. \square

Supongamos que G no contiene ciclos rojos de orden p para alguna $p \in \mathbb{N}$. Sea $G' = G$ pero con una nueva coloración rojo-azul de forma que $E(G_R) \subseteq E(G'_R)$, $E(G'_A) \subseteq E(G_A)$ y G' no contiene ciclos rojos de orden p , pero cambiar el color de cualquier arista de azul a rojo produciría un ciclo rojo de longitud p . Bajo estas circunstancias llamaremos a G'_A un núcleo de G_A relativo a p .

Lema 5.8. *Sea $n = 2m + r - 1$, con $m \geq r$, y supongamos que G no tiene ciclos rojos de orden $2m$ ni ciclos azules de orden $2r \geq 6$. Si G'_A es un núcleo de G_A relativo a $2m$, entonces $d_{G'_A}(u) + d_{G'_A}(v) \geq n - 1$ para cualesquiera $u, v \in V(G)$ tales que $uv \in G'_A$.*

Demostración. Como G'_A es un núcleo de G_A relativo a $2m$ y uv es azul en G' , existe una trayectoria $T = (v = v_1, v_2, \dots, v_{2m-1}, u = v_{2m})$ roja de orden $2m$ de v a u en G' .

Si $v_i \in V(T)$ y vv_i es roja en G' , entonces uv_{i-1} es azul en G' o de lo contrario

$$(v, v_i, v_{i+1}, \dots, u, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_2, u)$$

es un ciclo rojo de longitud $2m$ en G' (véase figura 5.20). Como por cada arista roja de v a T hay una arista azul de u a T , entre ambos vértices no pueden superar $2m - 1$ aristas rojas hacia T . Por lo tanto, $d_{T_R}(u) + d_{T_R}(v) \leq 2m - 1$. Sea $Q = V(G') \setminus V(T)$. Si $w \in Q$ y vw es roja en G' , entonces uw es azul en G' o de lo contrario

$$(w, v, v_2, \dots, v_{2m-1}, u, w)$$

es un ciclo rojo de longitud $2m + 1$ (véase figura 5.20), y por el lema 5.6, G' tiene un ciclo rojo de longitud $2m$.

Se sigue entonces que $d_{Q_R}(u) + d_{Q_R}(v) \leq |Q_R| = r - 1$. Sumando ambas desigualdades tenemos que $d_{G'_R}(u) + d_{G'_R}(v) \leq n - 1$ y $d_{G'_A}(u) + d_{G'_A}(v) \geq n - 1$. \square

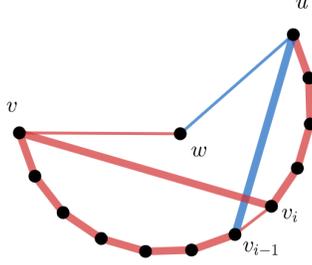


Figura 5.20: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $2m = 12$. Podemos ver que si $v_{i-1}u, vv_i \in E(G'_R)$ simultáneamente, entonces G' tiene un ciclo rojo de longitud $2m$. Por otro lado, si $vw, vu \in E(G'_A)$ simultáneamente, entonces G' contiene un ciclo rojo de orden $2m + 1$.

Lema 5.9. Sea $n = 3m - 1$, $m \geq 3$, y supongamos que G no contiene ciclos rojos de longitud $2m$ y contiene un ciclo azul C de longitud l con $l \in \{2m - 2, 2m - 1\}$. Sea G'_A un núcleo de G_A relativo a $2m$. Si $V(G) \setminus V(C)$ es una gráfica completa en G'_R , entonces G_A contiene un ciclo de longitud $l + 1$ o un ciclo de orden $2m$.

Demostración. Supongamos que G_A no contiene ciclos de longitud $l + 1$ o $2m$. Sea $C = (v_1, v_2, \dots, v_l, v_1)$ y $Q = G - V(C)$. Para $u \in V(Q)$, sea

$$C_u = \{v_i \in V(C) : uv_i \text{ es azul en } G'\},$$

$$C'_u = \{v_{j-1} \in V(C) : v_j \in C_u\}$$

y

$$t_u = d_{G'_A}(u) = |C_u|.$$

Como G_A no contiene ciclos de longitud $l + 1$, uv es roja en G y G' para cada $v \in C'_u$. Además, la subgráfica inducida en G' por $C'_u \cup \{u\}$ es una subgráfica completa monocromática roja en G' . De lo contrario, $v_{i-1}v_{j-1}$ es azul en G para dos vértices $v_i, v_j \in V(C_u)$ y $(u, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_j, u)$ es un ciclo de longitud $l + 1$ en G_A , lo que resulta en una contradicción (véase figura 5.21).

Sean $u, v \in Q$ con $u \neq v$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $t_u \geq t_v$. Supongamos $v_j \in C'_u \cap C'_v$, es decir, supongamos que $vv_j, uv_{j-1} \in E(G'_A)$ para alguna $v_j \in V(C)$. Como Q es una subgráfica completa monocromática roja en G' , tenemos que $d_{G'_A}(v) \leq t_v$. Además, $d_{G'_A}(v_{j-1}) \leq n - 1 - t_u$ pues $v_{j-1} \in C'_u$ y $C'_u \cup \{u\}$ es una subgráfica completa monocromática roja en G' . Entonces, $d_{G'_A}(v_{j-1}) + d_{G'_A}(v) \leq n - 1 - t_u + t_v$. Si $t_v > t_u$, entonces $d_{G'_A}(v) + d_{G'_A}(v_{j-1}) < n - 1$, lo que es una contradicción con el lema 5.8. Supongamos que $t_u = t_v$. Como $|V(Q)| = 3m - 1 - l \in \{m, m + 1\}$ y

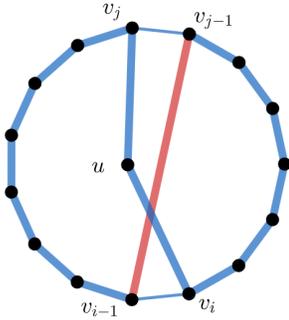


Figura 5.21: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $l = 15$. Podemos ver que si dos vértices en C'_u son adyacentes en G' entonces G_A tiene un ciclo de longitud $l + 1$.

$m \geq 3$, existe $w \in Q - \{u, v\}$. Tenemos que wv_j o wv_{j-1} debe ser roja en G' . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $wv_{j-1} \in E(G'_R)$. Por lo tanto, $d_{G'_A}(v_{j-1}) \leq n - 1 - t_u$ y otra vez $d_{G'_A}(v_{j-1}) + d_{G'_A}(u) < n - 1$, que es nuevamente una contradicción. Por lo tanto, tenemos que $C'_u \cap C_v = \emptyset$.

Como $C'_u \cap C_v = \emptyset$ para cualesquiera $u \neq v \in V(Q)$ y $|V(Q)| \geq 2$, $v_i \in \cup_{u \in V(Q)} C_u$ implica que $v_{i-1} \notin \cup_{u \in Q} C_u$. Por lo tanto $|\cup_{u \in Q} C_u| \leq \frac{1}{2}l$. Sea $D = V(C) - \cup_{u \in Q} C_u$. En resumen, tenemos que Q es monocromática roja, rs es roja en G' para cada $r \in Q$, $s \in D$, y $D \cap Q = \emptyset$, $|D \cup Q| \geq 3m - 1 - \frac{1}{2}l = 2m$ y $|V(Q)| \geq m$. Por lo tanto, podemos encontrar un ciclo de longitud $2m$ en G'_R , lo que contradice que G'_A sea un núcleo de G_A relativo a $2m$ (véase figura 5.22).

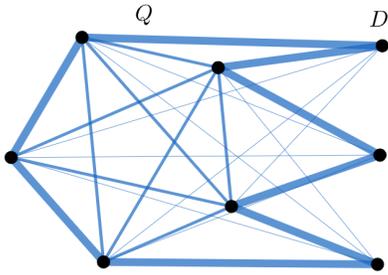


Figura 5.22: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $2m = 8$. Con estos dos conjuntos podemos trazar un ciclo de longitud $2m$ tomando vértices alternando entre cada conjunto. Si $|D| < m$, como es en este caso, podemos tomar el resto de los vértices en Q .

□

Lema 5.10. Sea $n = k + r - 1$, con $6 \leq 2r \leq k$, y supongamos que G_R contiene un ciclo de longitud $l \in \{k - 2, k - 1\}$ pero ningún ciclo de longitud

mayor a l . Si existen $u, v \in V(G) \setminus V(C)$ tales que uv es roja y $d_{G_R}(u) + d_{G_R}(v) \geq n - 1$, entonces G_A contiene un ciclo de longitud $2r$.

Demostración. Sea $C = (v_1, v_2, \dots, v_l, v_1)$ y $Q = G - (V(C) \cup \{u, v\})$. Por lo tanto, $|V(Q)| = k + r - l - 3$. Si uv_i es roja, entonces uv_{i+1} , uv_{i-1} , vv_{i+1} , vv_{i+2} , vv_{i-1} y vv_{i-2} son azules o de lo contrario G contiene un ciclo rojo de longitud mayor a l (véase figura 5.23). También podemos asegurar que lo anterior es cierto si intercambiamos u y v . Por lo tanto, $d_{C_R}(u) + d_{C_R}(v) \leq \frac{2}{3}l$.

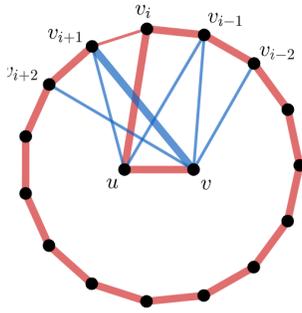


Figura 5.23: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $l = 15$. Podemos ver todas las aristas que deben ser azules cuando uv_i es roja, así como un ejemplo del ciclo rojo de longitud $l + 2$ que se formaría cuando $vv_{i+1} \in E(G_R)$.

Esto implica que

$$\begin{aligned} d_{Q_R}(u) + d_{Q_R}(v) &\geq k + r - 4 - (d_{C_R}(u) + d_{C_R}(v)) \\ &\geq k + r - \frac{2}{3}l - 4 > |V(Q)|, \end{aligned}$$

pues $l \geq 4$ y por lo tanto existe $w \in V(Q)$ tal que uw y vw son rojas. Por lo tanto, tenemos que además uv_i implica que vv_{i+3} y vv_{i-3} son azules o G_R contiene un ciclo de longitud mayor a l (véase figura 5.24).

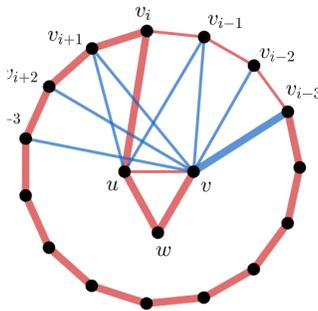


Figura 5.24: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $l = 15$. Podemos ver todas las aristas que deben ser azules cuando uv_i es roja. Esta vez incluimos vv_{i-3} y v_{i+3} y un ejemplo del ciclo rojo de longitud $l + 2$ que se forma cuando $vv_{i-3} \in E(G_R)$.

Lo que nos lleva a mejorar nuestras desigualdades: $d_{C_R}(u) + d_{C_R}(v) \leq \frac{1}{2}l$ y $d_{Q_R}(u) + d_{Q_R}(v) \geq k + r - \frac{1}{2}l - 4$.

Tenemos entonces que

$$k + r - \frac{1}{2}l - 4 \leq d_{Q_R}(u) + d_{Q_R}(v) \leq 2|Q| = 2(k + r - l - 3)$$

Por tanto, $k + r - \frac{3}{2}l - 2 \geq 0$. Si $l = k - 1$, la desigualdad implica que $2r \geq k + 1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $l = k - 2$, $|V(Q)| = r - 1$ y $d_{Q_R}(u) + d_{Q_R}(v) \geq 2r - 3$. Además, todos los vértices de Q son adyacentes por una arista roja a u o v , de hecho todos, excepto uno quizá, son adyacentes a ambos por una arista roja.

Como G no contiene ciclos rojos de longitud mayor a l , uv_i roja implica que yv_{i+1} , yv_{i+2} , yv_{i-1} y yv_{i-2} son azules para cada $y \in Q \cup \{v\}$. Supongamos que $d_{C_R}(u) \geq \frac{1}{2}r - 1$, entonces por lo anterior y porque $l \geq 2r - 2 \geq 4$, existen al menos r elementos de C que son adyacentes por aristas azules a cada elemento de $Q \cup \{v\}$. Como $|Q \cup \{v\}| = r$, G contiene un ciclo azul de longitud $2r$ (véase figura 5.25).

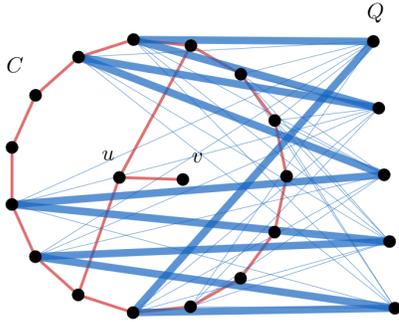


Figura 5.25: En esta imagen, tenemos un ejemplo con $n = 22$ y $r = 5$. Como tenemos al menos $2d_{C_R}(u) + 2 \geq r$ vértices en C adyacentes a cada vértice de Q por aristas azules, podemos encontrar un ciclo de longitud $2r$ en G_A alternando los vértices de C y Q de esta forma.

Entonces tenemos que $d_{C_R}(u) < \frac{1}{2}r - 1$ y $d_{C_R}(v) < \frac{1}{2}r - 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d_{G_R}(u) + d_{G_R}(v) &= d_{C_R}(u) + d_{C_R}(v) + 2 + d_{Q_R}(u) + d_{Q_R}(v) \\ &< 2\left(\frac{1}{2}r - 1\right) + 2 + 2(r - 1) \\ &= 3r - 2 \leq n - 1 \end{aligned}$$

Esto es una contradicción, con lo que completamos la prueba. \square

Lema 5.11. *Sea $n = k + r - 1$, con $6 \leq 2r \leq k - 2$, y supongamos que G contiene un ciclo rojo C de longitud $k - 2$ pero ningún ciclo rojo de longitud mayor que $k - 1$. Si existen $u, v \in V(G) \setminus V(C)$ tales que uv sea roja y $d_{G_R}(u) + d_{G_R}(v) \geq n - 1$, entonces G_A contiene un ciclo azul de longitud $2r$.*

Demostración. Sean $C = (v_1, v_2, \dots, v_{k-2}, v_1)$, $Q = V(G) \setminus (V(C) \cup \{u, v\})$, $Q_1 = \{w \in Q : uw \text{ o } vw \text{ son rojas en } G\}$ y $Q_2 = Q \setminus Q_1$.

Si wv_i y wv_{i+1} son rojas para alguna $w \in Q$, entonces G contiene un ciclo rojo de longitud $k-1$ ajeno a $\{u, v\}$ y, por el lema 5.10, G contiene un ciclo azul de longitud $2r$. Por lo tanto, podemos suponer que no existen tales v_i y v_{i+1} . Entonces, tenemos que $d_{C_R}(w) \leq \frac{1}{2}(k-2)$ y $d_{C_A}(w) \geq \frac{1}{2}(k-2)$ para cada $w \in Q$.

Si existen i, j tales que $uv_i, uv_{i+1}, vv_j, vv_{j+1} \in E(G_R)$, entonces G_R contendría un ciclo de longitud k (si $i = j$, usamos uv para completar el ciclo). Por lo tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que u no es adyacente por aristas rojas a 2 vértices consecutivos de C . Por la misma razón, si uv_i es roja, entonces vv_{i+1} debe ser azul. Tenemos entonces que $d_{C_R}(u) + d_{C_R}(v) \leq k-2$.

Digamos que $d_{C_R}(u) + d_{C_R}(v) = k-2-s$ con $s \geq 0$, entonces

$$d_{Q_R}(u) + d_{Q_R}(v) \geq n-1-2-(d_{C_R}(u) + d_{C_R}(v)) \geq r+s-2.$$

Podemos notar que $2(r-1) = 2|Q| \geq d_{Q_R}(u) + d_{Q_R}(v)$ implica que $s \leq r$. Tenemos que si uv_i o vv_i son rojas, entonces wv_{i+1} debe ser azul para $w \in Q_1$, y si uv_i y vv_i son ambas rojas, entonces wv_{i+2} debe ser azul para $w \in Q_1$ o de lo contrario G contiene un ciclo rojo de longitud mayor a $k-1$.

Sea

$$D = \{v_j : uv_{j-1} \text{ o } vv_{j-1} \text{ es roja, o } uv_{j-2} \text{ y } vv_{j-2} \text{ son ambas rojas}\}.$$

Por las afirmaciones anteriores, sabemos que por cada vértice de C adyacente a u o v en G_R , tenemos un vértice en D . Así que $|D| \geq d_{C_R}(u) + d_{C_R}(v) = k-2-s$. Además, $wd \in E(G_A)$ para cada $d \in D$ y $w \in Q_1$. Si para $z \in Q_1 \cup \{u\}$ consideramos $N_{C_A}(z) = \{v_j \in V(C) : zv_j \in G_A\}$, entonces

$$|D \cap N_{C_A}(z)| \geq k-2-s - \frac{1}{2}(k-2) = \frac{1}{2}(k-2) - s,$$

pues $d_{C_R}(z) \leq \frac{1}{2}(k-2)$.

Caso 1: No existe ninguna $w \in Q_1$ tal que uw y vw son rojas en G . En este caso, al contar las aristas rojas de Q a $\{u, v\}$ solo contamos una vez por vértice. Es decir, como $d_{Q_R}(u) + d_{Q_R}(v) \geq r+s-2$, tenemos que

$$\begin{aligned} |Q_1| &\geq r+s-2, \\ |Q_2| &= r-1-|Q_1| \leq 1-s, \end{aligned}$$

y $s \in \{0, 1\}$. Supongamos primero que $r \neq 3$ o $s \neq 0$. En ese caso, tenemos que

$$\begin{aligned} |D| &\geq k - 2 - s \geq r, \\ |Q_1| &\geq r + s - 2 \geq 2 - s \geq |Q_2 \cup \{v\}| \\ &\text{y} \\ |D \cap N_{C_A}(z)| &\geq \frac{1}{2}(k - 2) - s \geq 2(2 - s) \geq 2|Q_2 \cup \{u\}| \\ &\text{para cada } z \in Q_2 \cup \{u\}. \end{aligned}$$

Por el lema 10, G tiene un ciclo azul de longitud $2r$.

Ahora bien, si $r = 3$ y $s = 0$ tenemos que $d_{C_R}(u) + d_{C_R}(v) = k - 2$. Como u no puede ser adyacente a dos vértices consecutivos de C , tenemos al menos una arista de v a algún vértice v_i de C . Se sigue que $uv_{i+1}, vv_{i+1} \in E(G_A)$. Por otro lado, como $|D| \geq k - 2$, sabemos que $D = V(C)$ y cada vértice de Q_1 , digamos $Q_1 = \{w, z\}$, es adyacente a cada vértice de C por una arista azul. Entonces, $(u, v_{i+1}, w, v_i, z, v_{i-1}, u)$ es un ciclo de longitud 6 en G_A (véase figura 5.26).

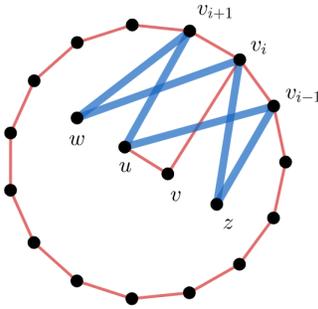


Figura 5.26: En esta imagen, podemos ver el ciclo que encontramos en el caso específico en que $r = 3$ y $s = 0$.

Caso 2: Existe una $w \in Q_1$ tal que uw y vw son rojas en G . Esto implica que si vv_i es roja, entonces uv_{i+2} es azul o G tiene un ciclo rojo de longitud k . Como u no es adyacente por aristas rojas a dos vértices consecutivos de C , esto implica que ud es azul para cada $d \in D$. En este caso,

$$\begin{aligned} |Q_1| &\geq \frac{1}{2}(r + s - 2), \\ |Q_2| &\leq \frac{1}{2}(r - s) \\ &\text{y} \\ s &\leq r \end{aligned}$$

Podemos aplicar el lema 10 para obtener un ciclo azul de longitud $2r$ en G , pues

$$\begin{aligned} |D| &\geq k - 2 - s \geq r, \\ |Q_1 \cup \{u\}| &\geq \frac{1}{2}(r + s) \geq \frac{1}{2}(r - s) \geq |Q_2| \\ &\text{y} \\ |D \cap N_{G_A}(z)| &\geq \frac{1}{2}(k - 2) - s \geq r - s \geq 2|Q_2|. \end{aligned}$$

Lo que completa la prueba. □

Lema 5.12. *Sea $n = k + r$ con k par, $3r - 1 \leq k \leq 3r$, $r \geq 3$ y supongamos que G contiene un ciclo rojo C de longitud k pero ningún ciclo de longitud mayor a k . Si existe $u \in V(G) \setminus V(C)$ tal que $d_{G_R}(u) \geq \frac{1}{2}(n - 1)$, entonces G contiene un ciclo azul de longitud $2r$.*

Demostración. Sea $C = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $Q = V(G) \setminus (V(C) \cup \{u\})$, $Q_1 = \{w \in Q : uw \text{ es roja en } G\}$ y $Q_2 = Q \setminus Q_1$. Como G no contiene ciclos rojos de longitud mayor a k , si wv_i es roja, entonces wv_{i+1} es azul para toda $w \in Q \cup \{u\}$ y si wv_i es roja, entonces wv_{i+1} y wv_{i+2} es roja para toda w en Q_1 . Por lo tanto, $d_{G_R}(u) \leq \frac{1}{2}k$, así que supongamos que $d_{G_R}(u) = \frac{1}{2}k - s$ con $s \geq 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |Q_1| &\geq \frac{1}{2}(n - 1) - d_{G_R}(u) = \frac{1}{2}(r - 1) + s, \\ |Q_2| &= |Q| - |Q_1| \leq \frac{1}{2}(r - 1) - s, \\ &\text{y} \\ s &\leq \frac{1}{2}(r - 1) \end{aligned}$$

Si $s = 0$, entonces u es adyacente en G a exactamente la mitad de los vértices en C , así que podemos suponer que uv_{2i} es roja para cada $i \in \{1, 2, \dots, \frac{1}{2}\}$. Por lo tanto, $v_{2i-1}v_{2j-1}$ es azul para cada $i \in \{1, 2, \dots, \frac{1}{2}\}$ o de lo contrario,

$$(u, v_{2i}, v_{2i+1}, \dots, v_{2j-1}, \dots, v_{2i-1}, v_{2i-2}, \dots, v_{2j}, u)$$

es un ciclo rojo de longitud $k + 1$ en G . Por lo tanto, la gráfica azul inducida por $T = \{v_1, v_3, \dots, v_{k-1}\}$ es una subgráfica completa. Además, cada vértice de $Q_1 \cup \{u\}$ es adyacente en G_A a cada vértice de T .

Como $|T| = \frac{1}{2}k > r \geq |Q_1 \cup \{u\}| \geq \frac{1}{2}(r+1)$ y $|T \cup Q_1 \cup \{u\}| \geq \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}(r+1) \geq 2r$, existe un ciclo azul de longitud $2r$ en G .

Ahora supongamos que $s \geq 1$. Sea $D = \{v_i \in V(C) | wv_i \text{ es azul en } G \text{ para toda } w \in Q_1\}$. Sabemos entonces que $|D| \geq 2d_{C_R}(u) = k - 2s \geq r$ y

$$|D \cap N_{C_A}(z)| \geq |D| - d_{C_R}(z) \geq k - 2s - \frac{1}{2}k \geq |Q \cup \{u\}|$$

Para cada $z \in Q_2 \cup \{u\}$. Como $s \geq 1$, $|Q_1| \geq \frac{1}{2}(r+1) \geq |Q_2 \cup \{u\}|$ y G_A contiene un ciclo de longitud $2r$ por el lema 5.3. \square

Teorema 5.2. $c(2m, 2m) \leq 3m - 1$ para $m \geq 3$.

Demostración. Sea $n = 3m - 1$ y tomemos G una gráfica del menor orden para el cual el teorema sea falso. Por la proposición 5, podemos suponer $m \geq 4$. Por la elección de m , tenemos que G_R o G_A tiene un ciclo de longitud $2(m-1)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que G_A contiene este ciclo C . Tomemos un ciclo D de longitud $s = c(G_A)$ en G_A . Si $s \geq 2m$, entonces G_A contiene un ciclo de longitud $2m$ por los lemas 5.4 y 5.6. Entonces, supongamos que $s = 2m - 1$ o $s = 2m - 2$.

Sea G'_A un núcleo de G_A relativo a $2m$. Si no existen $u, v \in V(G)$ tales que $uv \in E(G'_A)$, entonces por el lema 5.9 G_A contiene un ciclo de longitud $s+1$, lo que es una contradicción. Podemos suponer que existe $uv \in E(G'_A)$. Entonces $n - 1 \leq d_{G'_A}(u) + d_{G'_A}(v) \leq d_{G_A}(u) + d_{G_A}(v)$ por el lema 5.8. Luego, el lema 5.10 implica que G_R contiene un ciclo de longitud $2m$, una contradicción que completa la prueba. \square

Teorema 5.3. $c(2m, 2r) \leq 2m + r - 1$ para $2m \geq 2r \geq 6$.

Demostración. Supongamos que el teorema es falso. Sea $n = 2m + r - 1$ y tomemos G un contraejemplo del menor orden posible. Por el teorema 5.2, podemos tomar $m > 2$. Si $d_{G_A}(u) + d_{G_A}(v) \geq n$ para cada $u, v \in V(G)$ tales que $uv \in E(G_R)$, entonces, por la proposición 1, G_A contiene un ciclo de longitud $2r$. Por lo tanto, podemos suponer que existen $u, v \in V(G)$ tales que $uv \in E(G_R)$, $d_{G_A}(u) + d_{G_A}(v) \leq n - 1$ y $d_{G_R}(u) + d_{G_R}(v) \geq n - 1$.

Consideremos la gráfica $G' = G - \{u, v\}$. Por la elección de G , G'_A o G'_R contiene un ciclo de longitud $2r$. Si este ciclo es azul, esto es inmediatamente una contradicción. Si este ciclo existe en G_R , entonces G_R contiene un ciclo de longitud mayor a $2m - 1$ por el lema 5.11. Entonces, por los lemas 5.4 y 5.6, G_A contiene un ciclo de longitud $2r$. Esto es una contradicción que completa el teorema. \square

Corolario 5.3.1. $c(2m, 2r) = 2m + r - 1$ para $2m \geq 2r \geq 6$.

Demostración. Si consideramos una coloración rojo-azul de K_{2m+r-2} tal que $G_R = K_{2m-1} \cup K_{r-1}$, podemos ver que G_R no contiene ciclos de orden $2m$ y G_A no contiene ciclos de orden $2r$. \square

Teorema 5.4. $c(2m + 1, 2r) \leq \begin{cases} 2m + r & \text{para } 2m + 1 \geq 3r \\ 4r - 1 & \text{para } 2r \leq 2m + 1 \leq 3r - 1, \end{cases}$
con $r \geq 3$.

Demostración. Primero consideramos el caso $2r \leq 2m + 1 \leq 3r - 1$. Sea G una gráfica de orden $n = 4r - 1$. Como $2m + 2 + r - 1 \leq 4r - 1$, sabemos que G_R tiene un ciclo de longitud $2m + 2$ o G_A tiene un ciclo de longitud $2r$ por el teorema 5.3. Si G_R contiene un ciclo de longitud $2m + 2$, entonces, por el lema 5.6, G_R contiene un ciclo de longitud $2m + 1$ o G_A contiene un ciclo de longitud $2r$. Esto completa la prueba en este caso.

Ahora consideremos el caso en que $3r \leq 2m + 1$. Supongamos que el teorema es falso. Sea $n = 2m + r$ y tomemos G del menor orden que sea contraejemplo al teorema. Si $d_{G_A}(u) + d_{G_A}(v) \geq n$ para cada $u, v \in V(G)$ tales que $uv \in E(G_R)$, entonces, por la proposición 1, G_A contiene un ciclo de longitud $2r$. Por lo tanto, podemos suponer que existen $u, v \in V(G)$ tales que $uv \in E(G_R)$, $d_{G_A}(u) + d_{G_A}(v) \leq n - 1$ y $d_{G_R}(u) + d_{G_R}(v) \geq n - 1$. También podemos suponer que $d_{G_R}(u) \geq \frac{1}{2}(n - 1)$.

Si $3r \leq 2m + 1 \leq 3r + 1$, tomemos $G' = G - \{u\}$. Por el teorema 5.3, G'_R o G'_A contiene un ciclo de longitud $2m$ y por tanto, G_R o G_A contiene un ciclo de longitud $2r$. Supongamos que G_A no contiene ciclos de longitud $2r$. El lema 5.12 implica que G_R contiene un ciclo de longitud mayor a $2m$ y por tanto G_R tiene un ciclo de longitud $2m + 1$ por los lemas 5.4 y 5.6.

Si $2m + 1 \geq 3r + 2$, sea $G' = G - \{u, v\}$. Supongamos que G_A no contiene ciclos de longitud $2r$. Por la elección de G , sabemos que G'_R , y por lo tanto, G_R contiene un ciclo de longitud $2m - 1$. El lema 5.11 implica que G_R contiene un ciclo de longitud mayor a $2m$ y por tanto G_R contiene un ciclo de longitud $2m + 1$ por los lemas 5.4 y 5.6. \square

Corolario 5.4.1. $c(2m + 1, 2r) = \begin{cases} 2m + r & \text{para } 2m + 1 \geq 3r \\ 4r - 1 & \text{para } 2r \leq 2m + 1 \leq 3r - 1, \end{cases}$
con $r \geq 3$.

Demostración. Para $2m + 1 \geq 3r$, $G_R = K_{2m} \cup K_{r-1}$ implica que $c(2m + 1, 2r) \geq 2m + r$. Por otro lado, $G_A = K_{2r-1} \cup K_{2r-1}$ implica que $c(2m + 1, 2r) \geq 4r - 1$ para $2r \leq 2m + 1 \leq 3r - 1$. \square

Finalmente, podemos resumir lo visto en este capítulo en el siguiente teorema [6]. Tenemos, entonces, el número de Ramsey para cualquier par de ciclos.

Teorema 5.5.

- i)* $c(3, 3) = 6$ $c(4, 4) = 6$
- ii)* $3 \leq r \leq s$ s impar $c(r, s) \neq c(3, 3)$ $c(r, s) = 2r - 1$
- iii)* $4 \leq s \leq r$ s y r pares $c(r, s) \neq c(4, 4)$ $c(r, s) = r + \frac{1}{2}s - 1$
- iv)* $4 \leq s < r$ s par y r impar $c(r, s) = \max(r + \frac{1}{2}s - 1, 2s - 1)$

Bibliografía

- [1] J.A. Bondy, Large cycles in graphs, *Discrete Math.* 1 (1971) 121-132.
- [2] J.A. Bondy, Pancyclic graphs I, *J. Combin Theory* 11 (1971) 80-84.
- [3] J.A. Bondy and P Erdős, Ramsey numbers for cycles in graphs, *J. Combin. Theory* 11 (1973) 46-54.
- [4] G. Chartrand and S. Shuster, On the existance of specified cycles in complementary graphs, *Bull. Am. Math. Soc.* 77 (1971) 995-998.
- [5] P. Erdős and T. Galla, On maximal paths and circuits of graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar* 10 (1959) 337-356.
- [6] R.J. Faudree and R.H. Schelp, All Ramsey numbers for cycles in graphs, *Discrete Math.* 8 (1974) 313-329.
- [7] Gary Chartrand and Ping Zhang, *Chromatic graph theory*
- [8] K. Thulasiraman and M.N.S.Swamy, *Graphs: Theory and Algorithms*

Appendix A

Apéndice

En este apéndice se pueden encontrar algunas de las definiciones que se ocupan en el texto principal de forma superficial y que no se incluyen para no interrumpir el flujo del mismo o que pertenecen a partes de la teoría de gráficas que solo se ocupan periféricamente.

Teorema A.1 (Principio del palomar generalizado). *Si distribuimos $km + n$ palomas en m nidos, y $n \geq 1$, entonces algún nido tiene al menos $k + 1$ palomas.*

Se sigue de la definición de gráfica bipartita que una gráfica k -partita G es una gráfica tal que $V(G)$ se puede partir en subconjuntos ajenos dos a dos U_1, U_2, \dots, U_K de forma que para cada arista $uv \in E(G)$ existen $i, j \in \{1, \dots, k\}$, tales que $u \in U_i, v \in U_j$ y $i \neq j$.

Decimos que un subconjunto $S \subseteq (G)$ es un *conjunto independiente* en G cuando la subgráfica inducida por S en G es vacía.

Decimos que dos gráficas F y H son *isomorfas* si existe una función biyectiva $\Phi : F \rightarrow H$ tal que para cualesquiera $u, v \in V(F)$, u y v son adyacentes en F si y solo si $\Phi(u)$ y $\Phi(v)$ son adyacentes en H . A la función Φ se le llama *isomorfismo*.

Para dos gráficas ajenas F y H , definimos la *union* $F \cup H$ como la gráfica tal que $V(F \cup H) = V(F) \cup V(H)$ y $E(F \cup H) = E(F) \cup E(H)$. Cuando H es una gráfica isomorfa a F , escribimos $2F$ en lugar de $F \cup F$. Podemos extender esta notación a nF cuando tenemos una gráfica formada por n "copias" de F .

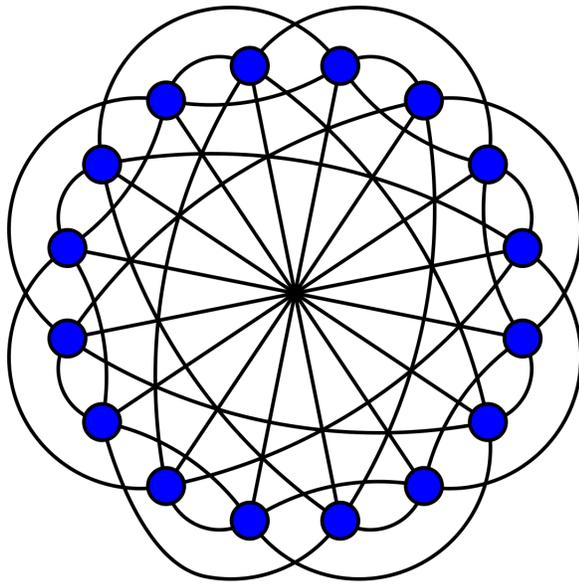


Figura A.1: Gráfica de Clebsch.