Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

UN ACERCAMIENTO TOPOLÓGICO A LA CONJETURA DE GRÜNBAUM SOBRE PUNTOS AFÍNMENTE INVARIANTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

ISAAC SÁNCHEZ SIERRA

TUTOR

DRA. NATALIA JONARD PÉREZ

Ciudad Universitaria, CD. MX. 2022

Investigacíon realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyecto de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN-115819 Estructura asimétricas e hiperespacios. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Agradecimientos y dedicatoria

Estas palabras aunque son las primeras en leerse y probablemente las únicas, también son las ultimas en escribirse y a las que más hui durante todo el proyecto, aun así me gustaría dejar un agradecimiento para quienes aportaron e hicieron posible la finalización de este. Primero a mi padre Isaac, a mi madre Soledad y mi hermana Viridiana por ser mi sustento y apoyo durante todos estos años, a mi hermano Samuel por ser una inspiración esperando ser lo mismo para él algún día, a mis abuelos Blanca y Luis, y a mi tía Yessica por abrirme las puertas de su casa dándome la posibilidad de estudiar aquello que en realidad me gusta. A la Dra. Natalia por todo el tiempo prestado y todo el apoyo que recibí para este proyecto. Por ultimo, este proyecto va dedicado a todas las personas que formaron parte de estos años, a quienes sirvieron de apoyo e inspiración para levantarme cada mañana, no podría poner el nombre de todos por que la lista no acabaría… en mi caso la mejor retribución no ha sido la culminación de mis estudios, sino lo satisfactorio que han sido estos años.

Índice general

Introducción.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $\mathrm{Aff}(n)$ al grupo de transformaciones afines de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. El concepto de punto afínmente invariante (funciones continuas del espacio $\mathcal{K}_0^n$ de cuerpos convexos de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ que cumplen ser $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante) fue introducido por B. Grünbaum en el artículo *"Measures of symmetry for convex sets"* [8], en el cual deja una serie de preguntas abiertas, entre las que destaca la tratada en esta tesis sobre los puntos afínmente invariantes de un cuerpo convexo.

Si K es un cuerpo convexo y consideramos el conjunto $\mathfrak{F}_n(K) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid gx = x \quad \text{para toda} \quad g \in \mathrm{Aff}(n) \quad \text{tal que} \quad gK = K\}$, entonces es fácil ver que el conjunto $\mathfrak{P}_n(K) := \{p(K) \mid p \quad \text{un punto afínmente invariante}\}$ esta contenido en $\mathfrak{F}_n(K)$. Grünbaum plantea la pregunta de si estos conjuntos coinciden en general, lo cual se conoce como la conjetura de Grümbaum sobre puntos afínmente invariantes.

Durante más de 50 años se hicieron avances, pero el problema general quedó abierto, hasta que O. Mordhorst prueba la conjetura para el caso general [15]. En este proyecto se pretende dar los resultados necesarios para probar una generalización de la conjetura de Grümbaum, basada en argumentos meramente topológicos, dada por la Dra. Natalia Jonard en [11], y obteniendo en el camino una prueba de la conjetura.

En el primer capítulo se presentan los conceptos generales tratados durante la mayor parte del trabajo, entre los que destacan los conceptos de G-espacio, G-espacio propio y G-espacio de Cartan, además de probar algunos resultados que serán de utilidad más adelante.

Para el segundo capítulo, se introducen los espacios de subconjutos de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{K}^n$ de compactos y convexos y $\mathcal{K}_0^n$ de compactos y convexos con interior no vacío, dotándolos de una topología por medio de la metrica de Hausdorff, y probando algunas de sus propiedades. Más aún, dotaremos a $\mathcal{K}_0^n$ de la acción natural del grupo $\mathrm{Aff}(n)$, probando que $\mathcal{K}_0^n$ es un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio propio.

En el tercer capítulo introducimos el concepto de punto afínmente invariante, presentando algunas de sus propiedades, y probando en la segunda parte del capítulo que el punto de Löwner cumple con la definición de ser punto afínmente invariante.

Por último, en el capítulo 4 damos una generalización de la conjetura, probando con ello la conjentura, además de presentar algunas aplicaciones de esta.

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo se presentarán los conceptos que usaremos durante la mayor parte del trabajo, así como resultados y notación básica. En la primera sección **Topología general**, se inicia recordando los axiomas de separabilidad, el concepto de identificación y de un espacio equiconexo.

Para la sección de **Acciones** y **Grupos topológicos**, se prueba que el conjunto $\text{Aff}(n)$ cumple ser un grupo y actúa en $\mathbb{R}^n$. Además, dotándolo de una topología conveniente, tenemos que cumple ser un grupo topológico.

Para la última sección se introduce el concepto **G-espacio** y se prueban algunas propiedades. Posteriormente se habla de los conceptos de **G-espacio propio**, **G-espacio de Cartan** y se establece la relación que existe entre ellos, además se muestran propiedades que poseen estos espacios, las cuales serán usadas más adelante.

1.1. Topología general.

En esta sección recordaremos algunas definiciones y resultados básicos de topología general, de los cuales se hará uso durante todo el trabajo. En particular haremos constante referencia a $\mathbb{R}^n$ al cual dotaremos con la topología usual, a menos que se especifique lo contrario, es decir la topología definida por la norma $d(a,b) = ||a-b||$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^n$. Además, usaremos la notación de vecindades $B(x,\epsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid ||x-y|| < \epsilon\}$, $B[x,\epsilon] := \{y \in \mathbb{R}^n \mid ||y-x|| \leq \epsilon\}$ y $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$.

Empecemos introduciendo algunos de los axiomas de separación, los cuales tomarán gran relevancia cuando se habla de grupos topológicos y G-espacios.

Definición 1.1.1. *Diremos que un espacio topológico* (X, τ)*, es un espacio* T_1 *si para cualesquiera puntos* $x, y \in X$ *existen subconjuntos abiertos* U *y* V *tales que* $x \in U \setminus V$ *y* $y \in V \setminus U$*.*

Definición 1.1.2. *Un espacio topológico* (X, τ) *es un espacio* ***Hausdorff*** *o* T_2 *si satisface la siguiente condición: para cualesquiera puntos distintos* $x, y \in X$*, existen abiertos* U *y* V *de* X *tales que* $x \in U$*,* $y \in V$ *y* $U \cap V = \emptyset$*.*

Diremos que un espacio (X, τ) es **regular** si para cualquier $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \setminus F$ existen conjuntos abiertos ajenos U y V tales que $F \subseteq U$ y $x \in V$. Así podemos establecer la siguiente definición:

Definición 1.1.3. *Un espacio topologíco* (X, τ) *es un espacio* T_3 *si satisface ser un espacio regular y* T_1*.*

La siguiente proposición nos da dos enunciados equivalentes a la definición de espacio regular, la demostración puede ser consultada en [4] y [5] .

Proposición 1.1.4. *Sea* (X, τ) *un espacio* T_1*, tenemos que las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El espacio* X *es regular.*
2. *Para cualquier punto* $x \in X$*, y cualquier* $U \in \tau$ *tal que* $x \in U$*, existe un abierto* V *tal que* $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$*.*
3. *Cada punto* $x \in X$ *tiene una base local de vecindades formada por subconjuntos cerrados.*

Por último, diremos que un espacio (X, τ) es **completamente regular** si para cualquier conjunto cerrado $F \subseteq X$ y cualquier punto $x \in X \setminus F$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(F) \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$, donde $[0, 1]$ esta dotado con la topología usual.

Definición 1.1.5. *Un espacio topológico* (X, τ) *es* $T_{3\frac{1}{2}}$ *o* ***Tychonoff*** *si satisface ser un espacio completamente regular y* T_1*.*

Otro concepto fundamental es el de **identificación**, por ello recordaremos su definición y algunas de sus propiedades.

Una función suprayectiva $p : X \to Y$, con X un espacio topológico, es una **identificación** o **función cociente** si Y tiene la **topología cociente** inducida por p.

A continuación presentaremos algunas de las propiedades básicas:

1. Toda función suprayectiva, continua y abierta (o cerrada) es una identificación, pero no toda identificación es abierta (o cerrada).
2. La composición de identificaciones es un identificación.
3. Propiedad universal del cociente: Una función continua y suprayectiva $p : X \to Y$ es un identificación si para todo espacio topológico Z una función $f : Y \to Z$, es continua si y sólo si $f \circ p : X \to Z$ lo es.
4. Teorema de transgresión: Sea $p : X \to Y$ un identificación. Toda función continua $f : X \to Z$ que envía a cada fibra $p^{-1}(y)$ en un solo punto de Z, induce una única función continua $\widetilde{f} : Y \to Z$ tal que $\widetilde{f} \circ p = f$.

La prueba de las propiedades anteriores puede ser consultada en [4].

Si X es un espacio topológico, A un subconjunto del espacio producto $X \times X$ y $\pi : A \times [0,1] \to X$ una función continua, diremos que π tiene la **propiedad de conexión** en A si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\pi(x, y, 0) = x$ y $\pi(x, y, 1) = y$ para todo $(x, y) \in A$.
- $\pi(x, x, t) = x$ para todo $(x, x) \in A$ y $t \in [0, 1]$.

En vista de esto, podemos dar la siguiente definición:

Definición 1.1.6. *Un espacio topológico X es* ***equiconexo*** *si existe una función continua $\pi : X \times X \times [0,1] \to X$ que tenga la propiedad de conexión en $X \times X$.*

Ejemplo 1.1.7. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual, definamos la función $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$, de la siguiente forma $h(x, y, t) = (1-t)x + ty$. Es claro que h tiene la propiedad de conexión.*

Por último, introducimos las **operaciones de Minkowski** para $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial:

1. Para A y B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, definimos la **suma de Minkowski** de A y B, como el conjunto:

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

2. Para $A \subset \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$, definimos el **producto de Minkowski** de A por t, como el conjunto:

$$tA := \{ta \mid a \in A\}$$

La siguiente proposición nos muestra que las operaciones de Minskowski son cerradas en conjuntos compactos.

Proposición 1.1.8. *Sean A y B subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces los conjuntos $A + B$ y tA son compactos.*

Demostración. Al ser A y B subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ tenemos que $A \times B$ es un subconjunto compacto, si consideramos la función $f : A \times B \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(a, b) = a + b$, entonces $A + B$ cumple ser la imagen de f, por lo que es un subconjunto compacto.

De manera analoga, si tomamos la función $g : A \to \mathbb{R}^n$ dada por $g(a) = ta$, tenemos que tA es la imagen de A bajo g, por lo que cumple ser un conjunto compacto. □

1.2. Acciones.

La noción de acción toma un rol principal a la hora de estudiar puntos afínmente invariantes, por ello es necesario recordar su definición, así como definir la notación que se usará durante gran parte del trabajo.

Definición 1.2.1. *Sea G un grupo multiplicativo con elemento neutro e. Decimos que G **actúa** en un conjunto X si existe una función $\theta : G \times X \to X$, llamada **acción** de G en X, tal que:*

1. *$\theta(e, x) = x$ para cada $x \in X$.*
2. *$\theta(h, \theta(g, x)) = \theta(hg, x)$, para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.*

Por simplicidad el elemento $\theta(g, x)$ será denotado por gx, cuando no haya posibilidad de confusión alguna. Para cada $g \in G$, la acción θ induce en X la transformación:

$$\theta_g : X \to X,$$

dada por,

$$\theta_g(x) = \theta(g, x) = gx,$$

a la que llamaremos **transición**. Usaremos el término de **grupo de transformaciones** para referirnos a la terna (G, X, θ).

Para un ejemplo de una acción podemos considerar $\mathbb{R}$ como grupo aditivo, actuando en $\mathbb{R}$ bajo la suma. A continuación daremos un ejemplo más interesante, del cual haremos mención durante la mayor parte del trabajo. Para ello es preciso introducir algunos conceptos.

Definición 1.2.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$, el **grupo general lineal** $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ es el grupo formado por todas las transformaciones lineales invertibles de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo. Denotaremos por $\mathrm{Aff}(n)$ al conjunto de **tranformaciones afines** de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Es decir $g \in \mathrm{Aff}(n)$ si y sólo si existe $\sigma \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, y $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $g(x) = v + \sigma(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Dado $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, denotaremos por M_g la matriz asociada a g respecto a la base canónica.

Observación 1.2.3. *Para $n \in \mathbb{N}$ fija, $(\mathrm{Aff}(n), \circ)$ es un grupo, con la operación composición.*

Demostración. Sean $g, h \in \mathrm{Aff}(n)$, entonces existen $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, tales que $g(x) = v_1 + \sigma_1(x)$ y $h(x) = v_2 + \sigma_2(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Notemos que $h \circ g \in \mathrm{Aff}(n)$, ya que $h \circ g(x) = v_2 + \sigma_2(v_1) + \sigma_2 \circ \sigma_1(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$, donde $v_2 + \sigma_2(v_1) \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma_2 \circ \sigma_1 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, por lo que la operación es cerrada. Además, I_n la transformación identidad de $\mathbb{R}^n$, es un elemento de $\mathrm{Aff}(n)$ tal que $g \circ I_n = g = I_n \circ g$. Más aún, como la composición de funciones es asociativa, concluimos que la operación en $\mathrm{Aff}(n)$ lo es. Para completar la prueba basta probar que cada elemento posee un inverso.

Sea g un elemento en $\mathrm{Aff}(n)$. Como $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ es un grupo, existe $\sigma_1^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Afirmamos que $g^{-1}(x) := -\sigma_1^{-1}(v_1) + \sigma_1^{-1}(x)$ define al elemento inverso de g. Efectivamente, si hacemos la composición con g tenemos lo siguiente:

$$g \circ g^{-1}(x) = v_1 + \sigma_1[-\sigma_1^{-1}(v_1) + \sigma_1^{-1}(x)] = v_1 - \sigma_1(\sigma_1^{-1}(v_1)) + \sigma_1(\sigma_1^{-1}(x)) = v_1 - v_1 + x = x.$$

Si ahora hacemos la composición de g con g^{-1}, obtenemos:

$$g^{-1} \circ g(x) = -\sigma_1^{-1}(v_1) + \sigma_1^{-1}[v_1 + \sigma_1(x)] = -\sigma_1^{-1}(v_1) + \sigma_1^{-1}(v_1) + \sigma_1^{-1}(\sigma_1(x)) = x.$$

Lo cual prueba que g^{-1} así definida es el elemento inverso buscado, y así $\mathrm{Aff}(n)$ es un grupo.

$\square$

Ejemplo 1.2.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo,* $\mathrm{Aff}(n)$ *actúa sobre* $\mathbb{R}^n$ *bajo la evaluación.*

Demostración. Definamos la acción de $\theta : \mathrm{Aff}(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\theta(g, x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Dado que la identidad I_n en $\mathbb{R}^n$ es el elemento neutro en $\mathrm{Aff}(n)$, se cumple que $\theta(I_n, x) = I_n(x) = x$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Ahora, sean $g, h \in \mathrm{Aff}(n)$, entonces existen $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma_1, \sigma_2 \in GL(n)$ tales que $g(x) = v_1 + \sigma_1(x)$ y $h(x) = v_2 + \sigma_2(x)$. Así tenemos la siguiente igualdad:

$$\theta(h, \theta(g, x)) = v_2 + \sigma_2[v_1 + \sigma_1(x)] = v_2 + \sigma_2(v_1) + \sigma_2(\sigma_1(x)) = \theta(hg, x).$$

Lo cual prueba que $\theta(h, \theta(g, x)) = \theta(h \circ g, x)$, y así θ cumple ser una acción.

□

En la siguiente definición agrupamos la notación y términos que usaremos.

Definición 1.2.5. *Sea (G, X, θ) un grupo de tranformaciones, $H \leq G$ un subgrupo, $x \in X$ y $A \subseteq X$, tenemos lo siguiente:*

- *$HA := \{ha : h \in H \text{ y } a \in A\}$.*
- *Decimos que A es un* ***conjunto invariante*** *con respecto a la acción de G en X si $GA = A$.*
- *$Gx := \{gx : g \in G\}$ es la* ***órbita*** *de x. Al conjunto de órbitas lo denotaremos por X/G.*
- *Definimos la* ***proyección orbital*** *$\pi : X \to X/G$, como $\pi(x) = Gx$.*
- *$G_A := \{g \in G : gA = A\}$ es el* ***estabilizador*** *de A, y $G_x := \{g \in G : gx = x\}$ es el* ***grupo de isotropía*** *de x.*
- *x es un* ***punto fijo*** *o* ***estacionario*** *si $G_x = G$, y al* ***conjunto de puntos fijos*** *lo denotamos por X^G.*

1.3. Grupos topológicos.

La definición de **Grupo Topológico** nace de estudiar en conjunto las nociones de teoría de grupos y topología, relacionándolas de manera adecuada. En esta sección daremos la definición, algunos resultados e introduciremos ejemplos de grupos topológicos que son de interes para el proyecto.

Definición 1.3.1. *Sea G un grupo, diremos que G es un **grupo topológico**, si está dotado de una topología tal que las operaciones mutiplicación e inversión sean continuas. Es decir que $\mu : G \times G \to G$ dada por $\mu(g,h) = gh$, y $\iota : G \to G$ dada por $\iota(g) = g^{-1}$, son funciones continuas.*

Es fácil probar que $\mathbb{R}^n$ como grupo aditivo y dotado de la topología usual, es un grupo topológico.

Los siguientes dos ejemplos de grupos topológicos son de gran relevancia. Antes de introducirlos hagamos algunas observaciones.

Observación 1.3.2. *Identifiquemos cada elemento $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ con su matriz M_g y consideremos la inyección $f : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$, definida de la siguiente manera, si $M_g = (a_{ij})$ entonces:*

$$f(M_g) := (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}).$$

Así podemos dotar a $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ con la topología de subespacio heredada de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Ejemplo 1.3.3. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *cumple ser un grupo topológico con la topología de subespacio heredada de $\mathbb{R}^{n^2}$.*

Demostración. Veamos que $\mu : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ el producto usual de matrices es continuo. Sean $A, B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ arbitrarias, al estar dotado de la topología de subespacio de un producto topológico basta con probar que la composición $P_{ij} \circ \mu$ es continua, donde $P_{ij} : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ denota la proyección en la entrada ij para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$.

Recordemos que la entrada ij del producto de A con B está dada por:

$$\mu(A,B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

por lo que es una función polinomial y por lo tanto es continua.

Ahora veamos que $\iota : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$, la función que a cada matriz le asocia su matriz inversa es continua, de nuevo, al ser una función que entra a un producto basta con ver que la composición $P_{ij} \circ \iota$ es continua para todo i y j. Recordemos que el elemento $(A^{-1})_{ij}$ es igual al ji-cofactor de la matriz A entre el determinante de la matriz A, lo cual es una función racional, donde el cociente no se anula, por lo cual es continua.

□

Observación 1.3.4. *Podemos dotar a* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *con la norma*

$$||T||_* := \sup_{||x||=1} \{||T(x)||\}.$$

La norma antes definida cumple que la topología inducida en $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *es igual a la inducida por* $\mathbb{R}^{n^2}$. *Además si* $x \neq 0$ *tenemos que* $||\frac{x}{||x||}|| = 1$ *y así* $||T(\frac{x}{||x||})|| \leq ||T||_*$, *por lo que* $||T(x)|| \leq ||T||_*||x||$.

Observación 1.3.5. *La función* $\mathrm{Aff}(n) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n$ *dada por* $g = v+\sigma \to (\sigma, v)$ *es una biyección, notemos que aunque la función tiene grupos tanto en el dominio como en el codominio no es un homomorfismo de grupos. De esta manera podemos inyectar a* $\mathrm{Aff}(n)$ *en* $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n$ *y dotar a las tranformaciones afines de la topología de subespacio heredada del producto* $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n$.

Teniendo en cuenta esta observación, tenemos el siguiente ejemplo.

Proposición 1.3.6. $\mathrm{Aff}(n)$ *es un grupo topológico con la topología heredada de* $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n$.

Demostración. Identifiquemos a cada tranformación afín $g + v \in \mathrm{Aff}(n)$ con el par $(g, v) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n$. Veamos que el producto $\mu : \mathrm{Aff}(n)\times\mathrm{Aff}(n) \to \mathrm{Aff}(n)$ definido de la siguiente forma,

$$\mu((g, v), (h, u)) = (g \circ h, g(u) + v),$$

es continuo. Al entrar a un producto, basta con ver la continuidad en las proyecciones $P_1 : \mathrm{Aff}(n) \to GL(n,\mathbb{R})$ y $P_2 : \mathrm{Aff}(n) \to \mathbb{R}^n$.

Por el ejemplo anterior tenemos que la composición $P_1 \circ \mu$ es continua. Para probar la continuidad de $P_2 \circ \mu$, sea $\epsilon > 0$ y consideremos la vecindad $B(g(u) + v, \epsilon)$ de $g(u) + v$.

Ahora, como g es continua, tenemos que existe U_0 vecindad de u tal que $g[U_0] \subseteq B(g(u), \epsilon/3)$. Además, si $z \in B(u, 1)$ tenemos que $||z - u|| < 1$ por lo que $||z|| < 1 + ||u||$. Definimos $M := 1 + ||u||$, y consideramos las siguientes vecindades,

$$U := U_0 \cap B(u, 1),$$

$$V := B\left(v, \frac{\epsilon}{3}\right),$$

$$W := B_*\left(g, \frac{\epsilon}{3M}\right) = \left\{h \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid ||h - g||_* < \frac{\epsilon}{3M}\right\}.$$

Por lo que, si tomamos $((f,w),(l,z)) \in (W \times U) \times (\mathbb{R}^{n^2} \times V)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
d(f(z)+w, g(u)+v) =& ||f(z)+w-g(u)-v|| \\
\leq& ||(f(z)-g(u)|| + ||w-v|| \\
=& ||f(z)-g(z)+g(z)-g(u)|| + ||w-v|| \\
\leq& ||f(z)-g(z)|| + ||g(z)-g(u)|| + ||w-v|| \\
\leq& ||f-g||_* ||z|| + ||g(z)-g(u)|| + ||w-v|| \\
<& \frac{\epsilon}{3M}M + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

Lo cual prueba que $P_2 \circ \mu$ es continua.

Veamos ahora que $\iota : \text{Aff}(n) \to \text{Aff}(n)$ dada por $\iota(g,v) = (g^{-1}, -g^{-1}(v))$ es continua. De nuevo basta con probar la continuidad en las proyecciones. La continuidad de $P_1 \circ \iota$, se sigue del ejemplo 1.3.3.

Para probar la continuidad de $P_2 \circ \iota$, primero definamos $N_0 := 1 + ||g^{-1}||_*$, y observemos que si $u \in B(v,1)$ entonces $||u-v|| < 1$, por lo que $||u|| < 1 + ||v||$, definimos $M_0 := 1 + ||v||$.

Por otro lado, al ser continua la función que a cada transformación lineal le asigna su transformación inversa, existe W_0 vecindad de g tal que si $h \in W_0$, entonces $-h^{-1} \in B(-g^{-1}, \epsilon/2M_0)$. Consideremos la vecindad,

$$U := B\left(v, \frac{\epsilon}{2N_0}\right) \cap B(v,1).$$

Si $(h,u) \in W_0 \times U_0$, entonces,

$$\begin{aligned}
d(-h^{-1}(u), -g^{-1}(v)) =& ||h^{-1}(u) - g^{-1}(v)|| \\
=& ||h^{-1} - g^{-1}(u) + g^{-1}(u) - g^{-1}(v)|| \\
\leq& ||h^{-1}(u) - g^{-1}(u)|| + ||g^{-1}(u) - g^{-1}(v)|| \\
\leq& ||h^{-1} - g^{-1}||_* ||u|| + ||g^{-1}||_* ||u-v|| \\
<& \frac{\epsilon}{2M_0}M_0 + N_0\frac{\epsilon}{2N_0} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Lo cual prueba la continuidad de la proyección $P_2 \circ \iota$, y así ι es continua.

□

Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G, definimos la relación de equivalencia en G como $a \sim b$ si y sólo si $ab^{-1} \in H$. Las clases de equivalencia de esta relación reciben el nombre de clases laterales derechas de H. Denotaremos por G/H al conjunto formado por las clases laterales derechas, es decir, $G/H = \{Ha \mid a \in G\}$. Dotemos a G/H con una topología de la siguiente manera. Sea $\mathcal{B}$ una base para G. Para cada $U \in \mathcal{B}$ definamos $U^* := \{Hx \mid x \in U\}$, entonces $\mathcal{B}^* := \{U^* \mid U \in \mathcal{B}\}$ es una base para G/H.

Si H es un subgrupo normal, es decir es invariante por conjugación, el grupo topológico G/H recibe el nombre de espacio cociente de G entre H, o grupo cociente de G entre H. En la siguiente proposición veremos algunas propiedades que tiene la función canónica $\rho : G \to G/H$, que asigna a cada $x \in G$ la clase lateral Hx.

Proposición 1.3.7. *Sea G un grupo topológico, H un subgrupo normal de G y $\rho : G \to G/H$ la función canónica dada por $\rho(x) = Hx$ para toda $x \in G$. Entonces ρ es continua y abierta.*

Demostración. Sean $x \in G$ y U un abierto en G, tales que $\rho(x) = Hx$ pertenece a $U^* = \{Hy \mid y \in U\}$.

El conjunto $V = HU$ es un abierto en G y $x \in V$. Además, $\rho[V] = \rho[HU] = \rho[U] = U^*$, y por lo tanto ρ es continua.

Veamos que ρ es una función abierta. Sean U un abierto en G y $\mathcal{B}$ una base para la topología de G; entonces $U = \bigcup_{j \in J} B_j$, para ciertas $B_j \in \mathcal{B}$. Así tenemos que

$$\rho(U) = \rho\left(\bigcup_{j \in J}\right) = \bigcup_{j \in J} \rho(B_j) = \bigcup_{j \in J} B_j^*,$$

por lo tanto, $\rho(U)$ es un abierto en G/H.

$\square$

1.4. Acciones en espacios topológicos y G-espacios.

Para terminar el capítulo, en esta sección introduciremos los G-espacios, no se pretende dar una visión global de la teoría de G-espacios, sino dar una referencia a ellos y citar algunos resultados que serán usados en la parte principal del trabajo. Algunas de las pruebas de estos resultados exceden los propósitos del proyecto, por lo que se hace la referencia al artículo [19] de donde fueron tomados. Durante esta parte y en los siguientes capítulos estaremos asumiendo que los espacios considerados son Hausdorff, a menos que se indique lo contrario.

Definición 1.4.1. *Sea X un espacio topológico, G un grupo y $\theta : G \times X \to X$ una acción de G en X. Diremos que la terna (G, X, θ) es un* ***grupo de transformaciones continuas****, si cumple que $\theta_g : X \to X$ es continua para toda $g \in G$.*

En la sección anterior se probó que $\mathrm{Aff}(n)$ es un grupo topológico. Además, si $g \in \mathrm{Aff}(n)$ se tiene que $\theta_g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida como $\theta_g(x) = gx$ es continua, por lo que la terna $(\mathrm{Aff}(n), \mathbb{R}^n, \theta_g)$ es un ejemplo de un grupo de transformaciones continuas.

Definición 1.4.2. *Sea X un espacio topológico, G un grupo topológico y θ una acción de G en X. Diremos que X es un G-**espacio**, si G actua de forma continua, es decir si $\theta : G \times X \to X$ es continua.*

Un ejemplo sencillo de este tipo de espacios es $X = \mathbb{R}$, con la topología usual, y $G = \mathbb{R}$ como grupo aditivo, actuando con la suma sobre $\mathbb{R}$. El espacio $\mathbb{R}^n$ es un ejemplo de un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio más interesante y al que recurriremos más adelante. Por ello es conveniente demostrar que en efecto cumple con la definición.

Ejemplo 1.4.3. *$\mathbb{R}^n$ con la topología usual es un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio.*

Demostración. Veamos que la función $\theta : \mathrm{Aff}(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\theta((g, x)) = gx$ es continua.

Sean $\epsilon > 0$, $g \in \mathrm{Aff}(n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, y consideramos la vecindad $B(gx, \epsilon)$ de gx. Como g es una transformación afín, tenemos que existen $\sigma \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ y $u \in \mathbb{R}^n$ tales que $g = \sigma + u$.

Para u consideramos la vecindad $B(u, \epsilon/2)$ y tomemos $M > ||x||$. Así definimos la vecindad $B_*(\sigma, \epsilon/4M)$ en $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Por otro lado, si $\tau \in B_*(\sigma, 1)$, tenemos que $||\tau - \sigma||_* < 1$ por lo que $||\tau||_* < 1 + ||\sigma||_*$. Definimos $N := 1 + ||\sigma||_*$ y consideramos la vecindad $B(x, \epsilon/4N)$ de x.

Con todo lo anterior podemos definir la siguiente vecindad U de g en $\mathrm{Aff}(n)$.

$$U := B_* \left(\sigma, \frac{\epsilon}{4M}\right) \cap B_*(\sigma, 1) \times B\left(u, \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Así, $(g, x) \in U \times B(x, \epsilon/4N)$, y si $(h, y) \in U \times B(x, \epsilon/4N)$ con $h = \sigma_h + v$ para algún $\sigma_h \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ y $v \in \mathbb{R}^n$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
d(hy, gx) =& ||hy - gx|| = ||\sigma_h y + v - \sigma x - u|| \\
\leq& ||\sigma_h y - \sigma x|| + ||v - u|| \\
\leq& ||\sigma_h y - \sigma_h x + \sigma_h x - \sigma x|| + ||v - u|| \\
\leq& ||\sigma_h (y - x)|| + ||(\sigma_h - \sigma)(x)|| + ||v - u|| \\
\leq& ||\sigma_h||_* ||y - x|| + ||\sigma_h - \sigma||_* ||x|| + ||v - u|| \\
<& N\left(\frac{\epsilon}{4N}\right) + \left(\frac{\epsilon}{4M}\right) M + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Lo cual prueba la continuidad de θ, y así $\mathbb{R}^n$ es un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio.

$\square$

El **espacio orbital**, de un G-espacio X, es el conjunto de órbitas (denotado por X/G) con la topología cociente respecto a **la proyección orbital** $\pi : X \to X/G$.

Lema 1.4.4. *Sea X un G-espacio. Entonces la proyección orbital es una función abierta.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de X, entonces

$$\pi^{-1}(\pi[U]) = GU = \bigcup_{g\in G} gU.$$

Dado que gU es abierto, tenemos que $\pi^{-1}(\pi[U])$ es una unión arbitraria de conjuntos abiertos, por lo que es un conjunto abierto. De la definición de topología cociente, tenemos que $\pi[U]$ es abierto, lo cual prueba que la proyección orbital es una función abierta.

$\square$

Dados dos G-espacios X y Y, diremos que $f : X \to Y$ es una función **equivariante** si cumple que $f(gx) = gf(x)$ para cualesquiera $x \in X$ y $g \in G$. Además, diremos que f es **invariante** o G-**invariante** si se cumple que $f(gx) = f(x)$ para toda $x \in X$ y $g \in G$. La siguiente proposición será usada más adelante.

Proposición 1.4.5. *Sea X un G-espacio, $x \in X$ un elemento arbitrario y $V \subseteq X$ una vecindad G-invariante de Gx.*

1. *Si X/G es regular, entonces podemos encontrar una vecindad G-invariante U de Gx tal que*

$$Gx \subseteq U \subseteq \operatorname{cl} U \subseteq V.$$

2. *Si X/G es Tychonoff, entonces podemos encontrar una función continua e invariante $\lambda : X \to [0,1]$ tal que $\lambda(y) = 1$ y $\lambda(z) = 0$ para toda $y \in Gx$ y $z \in X \setminus V$.*

Demostración. (1) Usando que la proyección orbital es una función abierta tenemos que $\pi[V]$ es una vecindad abierta de $\pi(x)$. Ya que X/G es regular, existe U_1 vecindad abierta de $\pi(x)$, tal que:

$$\pi(x) \in U_1 \subseteq \operatorname{cl} U_1 \subseteq \pi[V]$$

Así:

$$\pi^{-1}(\pi(x)) = Gx \subseteq \pi^{-1}[U_1] \subseteq \pi^{-1}[\mathrm{cl}\, U_1] \subseteq \pi^{-1}(\pi[V]) = V.$$

Notemos que $\pi^{-1}[U_1]$ es abierto y G-invariante. Además, se cumple que

$$\mathrm{cl}\, \pi^{-1}[U_1] \subseteq \pi^{-1}[\mathrm{cl}\, U_1] \subseteq V.$$

Así $U := \pi^{-1}[U_1]$ es la vecindad buscada.

(2) Supongamos ahora que X/G es Tychonoff, entonces existe una función $\widetilde{\lambda} : X/G \to [0,1]$, tal que $\widetilde{\lambda}(\pi(x)) = 1$ y $\widetilde{\lambda}(\pi(z)) = 0$ para todo $\pi(z) \in X/G \setminus \pi[V]$, por lo que basta definir $\lambda = \widetilde{\lambda} \circ \pi$.

□

Recordemos que un espacio X es **localmente compacto**, si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad del punto que cumple ser compacta. Si X es un G-espacio diremos que $U \subseteq X$ es un **conjunto delgado** si $\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$ tiene cerradura compacta en G. Si $V \subset X$, entonces U es **conjunto delgado relativo** a V si el conjunto $\{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\}$ tiene cerradura compacta en G. Para cualesquiera $U, V \subset X$ denotaremos por (U, V) al conjunto $\{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset\}$. Diremos que $S \subset X$ es un **conjunto pequeño** si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad V tal que (S, V) tiene cerradura compacta en G. Con estas definiciones podemos introducir dos tipos de espacios en los cuales centraremos nuestra atención:

Definición 1.4.6. *Sea X un G-espacio:*

1. *Diremos que X es un G**-espacio de Cartan** si cada $x \in X$ tiene una vecindad con la propiedad de ser un conjunto delgado.*

2. *Diremos que X es un G**-espacio propio** (en el sentido de Palais), si tiene una cubierta abierta formada por conjuntos pequeños.*

Es de nuestro interés establecer la relación que tienen los G-espacios de Cartan y los G-espacios propios. Los siguientes resultados nos muestran cómo se relacionan estos espacios.

Teorema 1.4.7. *Sean G un grupo localmente compacto y Hausdorff, y X un G-espacio de Tychonoff. Si X es un G-espacio propio, entonces X es un G-espacio de Cartan.*

Demostración. Supongamos que X es un G-espacio propio. Así, si x es cualquier elemento en X, existe una vecindad pequeña S de x y una vecindad V de x tal que el siguiente conjunto tiene cerradura compacta:

$$(S,V) = \{g \in G \mid gS \cap V \neq \emptyset\}.$$

Es claro que $x \in S \cap V$, $S \cap V \subseteq S$ y $S \cap V \subseteq V$. Así tenemos la contención:

$$\{g \in G \mid g(S \cap V) \cap (S \cap V) \neq \emptyset\} \subseteq \{g \in G \mid gS \cap V \neq \emptyset\}.$$

Y dado que la cerradura es monótona obtenemos:

$$\mathrm{cl}\{g \in G \mid g(S \cap V) \cap (S \cap V) \neq \emptyset\} \subseteq \mathrm{cl}\{g \in G \mid gS \cap V \neq \emptyset\}.$$

Ya que el segundo conjunto es compacto, tenemos la compacidad del primero, lo cual prueba que $S \cap V$ es un vecindad delgada de x.

□

El siguiente resultado nos da condiciones necesarias para que un G-espacio de Cartan sea un G-espacio propio.

Teorema 1.4.8. *Sean G un grupo localmente compacto y Hausdorff, y X un G-espacio de Tychonoff. Si X es un G-espacio de Cartan, tal que el espacio orbital X/G es regular, entonces X es un G-espacio propio.*

Demostración. Supongamos que X es un G-espacio de Cartan y X/G es un espacio regular.

Sea $x \in X$ un elemento arbitrario, y sea U una vecindad delgada de x. Consideremos $\pi : X \to X/G$ la proyección orbital, y dado que π es abierta, tenemos que $\pi(U)$ es una vecindad abierta de $\pi(x)$ en X/G.

Ya que X/G es un espacio regular, existe V_0 una vecindad abierta de $\pi(x)$ tal que:

$$\pi(x) \in V_0 \subset \mathrm{cl}\, V_0 \subset \pi(U).$$

Definamos $V := \pi^{-1}(V_0)$. Entonces V es una vecindad abierta e invariante de Gx en X, y $F := \pi^{-1}(\mathrm{cl}\, V_0)$ es un conjunto cerrado e invariante de Gx en X, tal que:

$$x \in Gx \subset V \subset F \subset \pi^{-1}(\pi(U)) = GU.$$

Definamos $O := V \cap U$ y veamos que O cumple ser una vecindad pequeña para x.

Si $y \in GU$, entonces existe algún $g \in G$ tal que $y \in gU$. Más aún, gU es abierto y gU es delgado relativo a U, y como $O \subseteq U$, se cumple que gU es delgado relativo a O.

Si $y \notin GU$, entonces $X \setminus F$ es un vecindad abierta e invariante de y, tal que $\{g \in G \mid g(X \setminus F) \cap O \neq \emptyset\} = \emptyset$, por lo que es un conjunto delgado relativo a O, lo cual prueba que X es un espacio propio.

□

Los teoremas anteriores nos muestran cómo se relacionan los G-espacios propios y los G-espacios de Cartan. La siguiente proposición nos muestra cómo se comporta el espacio orbital de un G-espacio propio con respecto a los axiomas de separabilidad. La demostración excede los propósitos de esta tesis, pero puede consultarse en [19, Proposición, 1.2.8].

Proposición 1.4.9. *Si X es un G-espacio propio entonces X/G es completamente regular.*

En el caso en que X sea un espacio métrico y G sea un grupo compacto, podemos dotar al espacio orbital X/G con una métrica compatible con la topología cociente, por lo que tendríamos que X/G es métrico y por lo tanto Tychonoff. Diremos que una metrica d en un espacio X es invariante bajo la acción del grupo G, si $d(gx, gy) = d(x, y)$ para cada $x, y \in X$ y $g \in G$.

Teorema 1.4.10. *Sea X un G-espacio métrico con métrica d. Si G es compacto, entonces la función $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ definida en cada $(x, y) \in X \times X$ como*

$$\rho(x, y) := \sup\{d(gx, gy) \mid g \in G\}$$

es una métrica en X, invariante bajo la acción del grupo, y compatible con la topología de X.

Demostración. Al ser G compacto y la función $G \to \mathbb{R}$ dada por $g \to d(gx, gy)$ continua, tenemos que $\rho(x, y)$ existe y es un número finito.

Ya que $d(gx, gy) \geq 0$ para toda $g \in G$, es claro que $\rho(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$. Ahora, si $x = y$, entonces $gx = gy$ para toda $g \in G$ y por lo tanto $\rho(x, y) = 0$. Y recíprocamente, si $\rho(x, y) = 0$, entonces $d(gx, gy) = 0$ para toda $g \in G$, en particular para el neutro e, $d(ex, ey) = d(x, y) = 0$, y como d es una métrica, tenemos que $x = y$. Debido a que $d(gx, gy) = d(gy, gx)$, es claro que $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

Veamos ahora que ρ cumple con la desigualdad triangular. Al ser d una métrica tenemos que

$$d(gx, gy) \leq d(gx, gz) + d(gz, gy) \quad \text{para todo} \quad g \in G \quad \text{y} \quad x, y, z \in X,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\rho(x, y) =& \sup\{d(gx, gy) \mid g \in G\} \\
\leq& \sup\{d(gx, gz) + d(gz, gy) \mid g \in G\} \\
\leq& \sup\{d(gx, gz) \mid g \in G\} + \sup\{d(hz, hy) \mid h \in G\} \\
=& \rho(x, z) + \rho(z, y),
\end{aligned}$$

lo cual prueba que ρ es métrica.

Por otro lado, si $h \in G$

$$\begin{aligned}
\rho(hx, hy) =& \sup\{d(ghx, ghy) \mid g \in G\} \\
=& \sup\{d(ghx, ghy) \mid gh \in G\} \\
=& \sup\{d(g^{'}x, g^{'}y) \mid g^{'} \in G\} \\
=& \rho(x, y).
\end{aligned}$$

Es decir, ρ es G-invariante. Por último, veamos que la topología generada por d es la misma que la topología generada por ρ. Notemos que

$$d(x, y) \leq \rho(x, y) \quad \text{para todo} \quad x, y \in X,$$

por lo que la función identidad de (X, ρ) en (X, d) es continua. Probemos ahora que la función identidad de (X, d) en (X, ρ) también es continua.

Sea $x_0 \in X$. Consideremos la función $\phi : G \times X \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(g, x) = d(gx, gx_0)$, donde X tiene la topología inducida por la métrica d. La continuidad de la acción y la continuidad de la distancia d, nos garantiza que ϕ es una función continua. Además, $\phi(g, x_0) = 0$, para toda $g \in G$.

Así, dados $\epsilon > 0$ y $g \in G$, podemos encontrar una vecindad abierta O_g de g y δ_g tales que para todo $h \in O_g$ y para todo $x \in B_d(x_0, \delta_g)$ se cumple que

$$|\phi(h, x) - \phi(g, x_0)| = \phi(h, x) = d(hx, h_0) < \frac{\epsilon}{2}.$$

La familia $\{O_g \mid g \in G\}$ es una cubierta abierta del espacio compacto G. Entonces existe una subcubierta finita de $\{O_g \mid g \in G\}$, digamos $\{O_{g_1}, \cdots, O_{g_n}\}$. Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_{g_i} \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ y sea $x \in B_d(x_0, \delta)$.

Notemos que para todo $g \in G$, existe g_i tal que $g \in O_{g_i}$. Además, si $x \in B_d(x_0, \delta) \subseteq B_d(x_0, \delta_{g_i})$, entonces

$$\phi(g, x) = d(gx, gx_0) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Podemos hacer esto para todo $g \in G$, y así obtener que

$$d(gx, gx_0) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo} \quad g \in G,$$

y por lo tanto

$$\rho(x, x_0) = \sup\{d(gx, gx_0) \mid g \in G\} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Lo cual demuestra que la identidad de (X, d) en (X, ρ) es continua.

□

Por otro lado, si (X, ρ) es un G-espacio métrico y ρ es G-invariante, podemos definir la función $q : X/G \times X/G \to [0, \infty)$ de la siguiente forma

$$q(Gx, Gy) := \text{ínf}\{\rho(a, b) \mid a \in Gx, b \in Gy\} = \text{ínf}\{\rho(gx, hy) \mid g, h \in G\}. \tag{1.1}$$

En el siguiente teorema se prueba que la función antes definida es una métrica, para ello recordemos que si (X, d) es un espacio métrico, entonces la distancia de un punto $x \in X$ a un subconjunto A de X esta definida como,

$$d(x, A) := \text{ínf}\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Teorema 1.4.11. *Sea (X, ρ) un G-espacio métrico compacto, con ρ una métrica G-invariante . Entonces la función $q : X/G \times X/G \to [0, \infty)$ definida como en 1.1 es una métrica en X/G. Mas aún, la topología inducida por q es compatible con la topología cociente.*

Demostración. Sean $Gx, Gy \in X/G$, como $\rho(a, b) \geq 0$ para todo $a \in Gx$ y $b \in Gy$, se infiere que $q(Gx, Gy) \geq 0$.

Además, como $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ para toda $a \in Gx$ y $b \in Gy$, tenemos que $q(Gx, Gy)) = q(Gy, Gx)$.

Si $Gx = Gy$, entonces $\rho(a, a) \geq q(Gx, Gy)$ para toda $a \in Gx$, por lo que $q(Gx, Gy) = 0$. Ahora, si $q(Gx, Gy) = 0$, como G es compacto, existe $a \in Gx$ y $b \in Gy$ tal que $\rho(a, b) = 0$. Es decir, $a = b$ y como dos órbitas son ajenas o iguales tenemos que $Gx = Gy$.

Para demostrar la desigualdad del triángulo primero observemos que para cualquiera par de puntos $x, y \in X$, dado que ρ es G-invariante, se cumple que

$$\begin{aligned} q(Gx, Gy) &= \text{ínf}\{\rho(gx, hy) \mid g, h \in G\} \\ &= \text{ínf}\{\rho(g^{-1}gx, g^{-1}hy) \mid g, h \in G\} \\ &= \text{ínf}\{\rho(x, ky) \mid k \in G\} \\ &= \rho(x, Gy) \end{aligned}$$

Sea $x, y, z \in X$, entonces como Gz y Gy son compactos, existen $g_0, h_0 \in G$, tales que

$$q(Gx, Gz) = \rho(x, Gz) = \rho(x, g_0 z)$$

y

$$q(Gz, Gy) = q(Gg_0 z, Gy) = \rho(g_0 z, Gy) = \rho(g_0 z, h_0 y).$$

Así, $q(Gx, Gy) \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, g_0 z) + \rho(g_0 z, h_0 y) = q(Gx, Gz) + q(Gz, Gy)$, lo cual demuestra que q es una métrica,

Por último, ya que $q(Gx, Gy) \leq \rho(x, y)$ para todo $x, y \in X$, tenemos que la proyección orbital $\pi : X \to X/G$ es continua si dotamos a X/G con la métrica q. Y si $\epsilon > 0$ y $x \in X$, entonces tenemos que $\pi[B_\rho(x, \epsilon)] = B_q(Gx, \epsilon)$, por lo que π es continua y abierta. Ya que la topología cociente es la única que hace a π continua y abierta, tenemos que la topología inducida por q es compatible con la topología cociente. □

A continuación presentamos algunas de las propiedades de los G-espacios de Cartan, las cuales serán usadas para la demostración de la conjetura de Grünbaum. Antes de ello introduciremos algunos resultados que serán usados durante la prueba.

Lema 1.4.12. *Sean X un G-espacio, x un elemento en X y K una vecindad de e en G. Entonces $gx \in Kx$ si y sólo si $g \in KG_x$.*

Demostración. Si $gx \in Kx$, entonces $gx = kx$ para algún $k \in K$. Lo anterior sucede si y sólo si $k^{-1}gx = x$, si y sólo si $k^{-1}g \in G_x$, si y sólo si $g \in KG_x$. □

Lema 1.4.13. *Sean X un G-espacio y $x \in X$. Entonces G_x es un subgrupo cerrado en G.*

Demostración. Sea $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una red en G_x que converge a un elemento en $g \in G$. Como $g_\lambda \in G_x$ tenemos que $g_\lambda x = x$. Así,

$$gx = \lim_{\lambda \to \infty} g_\lambda x = x.$$

Por lo que $g \in G_x$, lo cual prueba que G_x es cerrado.

□

Proposición 1.4.14. *Sea X un espacio Tychonoff. Si X es un G-espacio de Cartan, entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Para toda $x \in X$ la función $g \to gx$ es una función abierta de G en Gx.*

2. *Para todo $x \in X$, la órbita Gx es cerrada, el estabilizador G_x es compacto y Gx es G-homeomorfo a G/G_x.*

Demostración. (1) Dado que G es un espacio homogéneo, basta probar que si K es una vecindad de e, entonces Kx es una vecindad de x en Gx. Supongamos por el contrario que esto último no se cumple. Así existe una red $(g_\alpha) \subset G$ tal que $g_\alpha x \notin Kx$ pero $g_\alpha x \to x$.

Ya que $g_\alpha x \in Kx$ si y sólo si $g_\alpha \in KG_x$, podemos inferir que $g_\alpha \notin KG_x$. Y dado que KG_x es una vecindad de G_x, tenemos que g_α no tiene ninguna subred que converja a un elemento de G_x.

Por otro lado, al ser X un G-espacio de Cartan, podemos tomar U una vecindad delgada de x y como $g_\alpha x \to x$, podemos escoger una subred (g_{α_λ}) tal que $g_{\alpha_\lambda} \in \{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$. Como $\{g \in g \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$ tiene cerradura compacta, podemos tomar una nueva subred $g_{\alpha_{\lambda_\mu}}$ tal que $g_{\alpha_{\lambda_\mu}} \to g$ para algún $g \in G$. Así $gx = \lim g_{\alpha_{\lambda_\mu}} x = x$, y como G_x es cerrado, concluimos que $g \in G_x$, lo cual es una contradicción.

(2) Sea $x \in X$. Veamos primero que G_x es compacto. Sea V una vecindad delgada de x. Notemos que si $g \in G_x$, entonces $x \in gV \cap V$, por lo que $G_x \subset \{g \in G \mid gV \cap V \neq \emptyset\}$. Así, al ser G_x cerrado, obtenemos que G_x es compacto.

Ahora veamos que Gx es cerrado en X. Para ello tomemos y un punto de adherencia de Gx y U una vecindad delgada de y. Entonces existe una red $(g_\alpha x)$ en U, tal que $g_\alpha x \to y$. Fijemos α_0 entonces $(g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1}) g_{\alpha_0} x = g_\alpha x$, por lo que:

$$g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1} \in \{g \in G| \quad gU \cap U \neq \emptyset\}$$

Con esto tenemos que $(g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1})$ tiene una subred convergente, y así $(g_\alpha g_{\alpha_0}^{-1} g_{\alpha_0}) = (g_\alpha)$ tiene una subred (g_{α_λ}) convergente a un g. Entonces tenemos $y = \lim g_{\alpha_\lambda} x = gx$, lo cual prueba que Gx es cerrado.

Por último, veamos que Gx es homeomorfo a G/G_x. Para ello probemos que la función $f : G/G_x \to Gx$ dada por $f(gG_x) = gx$ es un homeomorfismo. Dado que tanto función $g \to gx$, como la función $g \to gG_x$, son abiertas, basta con probar que f es biyectiva.

Notemos que si $gx \in Gx$ entonces $f(gG_x) = gx$ por lo que f es suprayectiva. Ahora tomemos g_1G_x y g_2G_x tales que $f(g_1G_x) = f(g_2G)$; es decir $g_1x = g_2x$ y así $g_2^{-1}g_1x = x$. Entonces $g_2^{-1}g_1 \in G_x$, de lo cual obtenemos que $g_1G_x = g_2G_x$ lo que es cual prueba que f es biyectiva y por lo tanto es un homeomorfismo.

□

Otra propiedad de los G-espacios de Cartan, nos dice que toda órbita es un retracto equivariante de una vecindad de la órbita en el caso de que G sea un grupo de Lie[1]. Recordemos que una retracción es una función continua $r : X \to A$, donde X es un espacio topológico y A es un subconjunto de X, tal que $r(a) = a$ para toda $a \in A$. En este caso A se llama retracto de X. Si además r es equivariante, entonces diremos que r es una retracción equivariante y que A es un retracto equivariante de X.

Teorema 1.4.15. *Sean G un grupo de Lie, y X un G-espacio de Cartan. Entonces para toda $x \in X$ existe una vecindad invariante U de Gx, y una retracción equivariante $r : U \to Gx$.*

La prueba de este teorema rebasa los propósitos del proyecto, pero se puede consultar en [19, Corolario 1, p.313].

Dados X y Y dos G-espacios, podemos definir para $x \in X$ y $y \in Y$ la función $f : Gx \to Gy$ de la siguiente forma $f(gx) = gy$. Notemos que si $g \in G_x$, entonces $gy = f(gx) = f(x) = y$, por lo que para que f esté bien definida, g deber ser un elemento de G_y, es decir, se debe de cumplir que $G_x \leq G_y$. Sin embargo, que la función f esté bien definida, no implica que sea continua. Prueba de ello es el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.16. *Sean $\mathbb{R}$ como grupo aditivo, equipado la topología usual actuando en sí mismo con la acción $\theta_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\theta_1(t, x) = t + x$. Por otro lado, consideremos y el toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ con la topología producto y la acción $\theta_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ dada por $\theta_2(t, (z_1, z_2)) = (z_1 \exp(2\pi it), z_2 \exp(2\pi i\alpha t))$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es facil notar que para $x \in \mathbb{R}$ y $(z_1, z_2) \in \mathbb{T}$, se cumple $\mathbb{R}_x = \{0\} = \mathbb{R}_{(z_1,z_2)}$, por lo que la función $f : \mathbb{R}(z_1, z_2) \to \mathbb{R}x$ está bien definida, pero no es continua.*

[1] Un grupo topológico es de Lie, si tiene una estructura de variedad diferenciable en la que los operadores de grupo son difeomorfismos.

El siguiente lema nos da condiciones para que la función entre dos órbitas antes definida sea continua.

Lema 1.4.17. *Sean X y Y G-espacios. Supongamos que $x \in X$ y $y \in Y$ satisfacen que $G_x \leq G_y$, y además se cumple que $\theta_x : G \to Gx$ dada por $\theta_x(g) = gx$ es abierta, entonces la función $f : Gx \to Gy$ dada por $f(gx) = gy$ es continua.*

Demostración. Ya que la acción de G en Y es continua, para $g \in G$ y U una vecindad de gy en Y, podemos encontrar V una vecindad de g en G tal que:

$$Vy := \{hy \in Y \mid h \in V\} \subset U$$

Por otro lado, dado que θ_x es una función abierta, tenemos que $Vx := \{hx \in X \mid h \in V\}$ es una vecindad de gx en Gx. Entonces $f(Vx) = Vy \subset U$, lo cual prueba la continuidad de f. $\square$

Notemos que si X es un G-espacio de Cartan, entonces la función θ_x siempre es abierta (Proposición 1.4.14), en virtud de esto tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.4.18. *Sean X y Y G-espacios, $x \in X$ y $y \in Y$ tales que $G_x \leq G_y$. Sea $f : Gx \to Gy$ dada por $f(gx) = gy$, entonces si X es un G-espacio de Cartan, f es continua. Además, como todos los G-espacios propios son G-espacios de Cartan, tenemos que si X es un G-espacio propio f es continua.*

Por último extenderemos el concepto de espacio equiconexo a G-espacios.

Definición 1.4.19. *Un G-espacio X es G-equiconexo, si existe una función continua $h : X \times X \times [0,1] \to X$ tal que tenga la propiedad de conexión, y se cumpla que:*

- *$h(gx, gy, t) = gh(x, y, t)$ para cada $g \in G$, $(x, y) \in X \times X$ y $t \in [0,1]$.*

En este caso diremos que h cumple la propiedad G-conexión.

Un ejemplo de este tipo de espacios es considerar $\mathbb{R}^n$ como un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio, y la siguiente función $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ dada por:

$$h(x, y, t) = (1-t)x + ty.$$

Por como está definida, es claro que h cumple con la propiedad de conexión. Además, si $g \in \mathrm{Aff}(n)$, tenemos que $g((1-t)x + ty) = (1-t)gx + tgy$, por lo que $gh(x, y, t) = h(gx, gy, t)$, y así es claro que h cumple con la propiedad de $\mathrm{Aff}(n)$-conexión.

Capítulo 2

Hiperespacio de cuerpos convexos.

Este capítulo está dedicado al espacio de cuerpos convexos $\mathcal{K}_0^n$ dotado con la topología inducida por la métrica de Hausdorff. Para la primera sección veremos algunas propiedades topológicas que cumple este espacio. En la segunda sección se dará la prueba de que $\mathcal{K}_0^n$ es un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio propio, y por lo tanto un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio de Cartan. Además veremos que cumple ser un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio equiconexo.

2.1. Hiperespacios.

Empecemos por recordar que un conjunto $A \in \mathbb{R}^n$ es convexo si para cada $a, b \in A$ y cada $t \in [0, 1]$ se cumple que $(1-t)a + tb \in A$. Denotaremos por $\mathcal{K}^n$ a la famlilia de todos los subconjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$, y por $\mathcal{K}_0^n$ a familia de todos los cuerpos convexos; es decir, la familia de todos los subconjuntos compactos y convexos con interior no vacío de $\mathbb{R}^n$. Por último, dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, denotaremos por 2^A al conjunto de todos los subconjuntos compactos y no vacios contenidos en A.

Las familias de conjuntos $\mathcal{K}_0^n$, $\mathcal{K}^n$ y 2^A cumplen ser espacios métricos si los equipamos con la métrica de Hausdorff dada por:

$$d_H(A, B) := \sup\{\sup_{b \in B} d(b, A), \sup_{a \in A} d(a, B)\},$$

donde d es la métrica usual en $\mathbb{R}^n$, y $d(b, A) = \inf\{d(b, a) \mid a \in A\}$ con $b \in \mathbb{R}^n$ y $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Durante el trabajo consideremos a $\mathcal{K}_0^n$, $\mathcal{K}^n$ y 2^A dotados de la metrica de Hausdorff, a menos que se especifique lo contrario. Para $x \in \mathbb{R}^n$, $K \in 2^A$, y $\epsilon > 0$, usaremos la siguiente notación:

$$N(K, \epsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, K) < \epsilon\},$$

$$O(K, \epsilon) := \{B \in 2^A \mid d_H(K, B) < \epsilon\}.$$

Cuando no haya riesgo de confusión, la bolas abiertas en $\mathcal{K}^n$ y $\mathcal{K}_0^n$ serán denotadas al igual que las bolas en $2^{\mathbb{R}^n}$

Observación 2.1.1. *Si $A, B \in 2^A$ y $\epsilon > 0$, entonces $d_H(A, B) < \epsilon$ si y sólo si $B \subset N(A, \epsilon)$ y $A \subset N(B, \epsilon)$.*

En el capítulo anterior se definieron las operaciones de Minkowski para cualesquiera subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Además se probó que ambas mandan compactos en compactos, por lo que $2^{\mathbb{R}^n}$ es cerrado bajo las operaciones de Minkowski.

Más aún, si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos, y $a + b, c + d \in A + B$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$(1 - \lambda)(a + b) + \lambda(c + d) = ((1 - \lambda)a + \lambda c) + ((1 - \lambda)b + \lambda d).$$

Como $(1 - \lambda)a + \lambda c \in A$ y $(1 - \lambda)b + \lambda d \in B$, tenemos que $A + B$ es convexo.

Por otro lado, si $t \in \mathbb{R}$, y $ta, tc \in tA$, entonces $(1 - \lambda)ta + \lambda tc = t((1 - \lambda)a + \lambda c)$. Dado que $(1 - \lambda)a + \lambda c \in A$, tenemos que tA es convexo. Por último, si $A \in \mathcal{K}_0^n$ y $B \in \mathcal{K}^n$ entonces existe $U \subseteq A$ abierto y no vacío. Como $U + b \subset A + B$ para todo $b \in B$, concluímos que $A + B \in \mathcal{K}_0^n$. Así obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.2. *Los espacios $\mathcal{K}_0^n$ y $\mathcal{K}^n$ son cerrados bajo las operaciones de Minkowski.*

Con la ayuda de las operaciones de Minkowski podemos reescribir la observación 2.1.1 de la siguiente manera.

Observación 2.1.3. *Para cualquier $\epsilon > 0$, se cumple que $N(A, \epsilon) = A + \epsilon B(0, 1)$. Así, $d_H(A, B) < \epsilon$ si y sólo si $B \subset A + \epsilon B(0, 1)$ y $A \subset B + \epsilon B(0, 1)$.*

También se introdujo el concepto de espacio equiconexo. El siguiente teorema nos da más ejemplos de estos espacios.

Teorema 2.1.4. *Los espacios $\mathcal{K}^n$ y $\mathcal{K}_0^n$ son equiconexos.*

Demostración. Ya que $\mathcal{K}^n$ es cerrado bajo las operaciones de Minkowski, podemos definir la función

$$\pi : \mathcal{K}^n \times \mathcal{K}^n \times [0, 1] \to \mathcal{K}^n,$$

dada por

$$\pi(K, H, t) = (1-t)K + tH.$$

Notemos que $\pi(K, H, 0) = K$ y $\pi(K, H, 1) = H$. Así basta probar que π es continua. Separemos la prueba en casos.

- Si $t \neq 0, 1$.
  Sea $\epsilon > 0$ y $O((1-t)K + tH, \epsilon)$ una vecindad de $(1-t)K + tH$. Tomemos $O(K, 1)$ la vecindad de radio 1 de K. Para todo $A \in O(K, 1)$ tenemos que $A \subset N(K, 1)$, por lo que para cada $a \in A$ se cumple que $d(K, a) < 1$. Al ser K compacto existe un k tal que

  $$||k - a|| = d(K, a) < 1,$$

  por lo que

  $$||a|| < 1 + ||k||.$$

  Al ser K acotado, existe un $M_1 > 0$ tal que para toda $k \in K$ se cumple que $||k|| < M_1$. Así, para toda $a \in A \in O(K, 1)$, se cumple que $||a|| < M_1 + 1$.

  De igual manera, existe $M_2 > 0$ tal que si $B \in O(H, 1)$, entonces $||b|| < M_2$ para toda $b \in B$.

  Definimos por $M = \max\{M_1+1, M_2\}$, y consideramos las siguientes vecindades:

  $$U := O\left(K, \frac{\epsilon}{8|1-t|}\right) \cap O(K, 1)$$

  $$V := O\left(H, \frac{\epsilon}{8|t|}\right) \cap O(H, 1)$$

  y

  $$W := B\left(t, \frac{\epsilon}{8M}\right).$$

  Sean $(A, B, \lambda) \in U \times V \times W$, por lo que si $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ entonces existen $k_0 \in K$ y $h_0 \in H$ tal que $||k_0 - a_0|| < \epsilon/(8|1-t|)$ y $||h_0 - b_0|| < \epsilon/(8|t|)$, entonces,

$$\begin{aligned}
&\|(1-t)k_0+th_0-(1-\lambda)a_0-\lambda b_0\|\\
\leq&\|(1-t)k_0-(1-\lambda)a_0\|+\|th_0-\lambda b_0\|\\
=&\|(1-t)k_0-(1-t)a_0+(1-t)a_0-(1-\lambda)a_0\|+\|th_0-tb_0+tb_0-\lambda b_0\|\\
\leq&|1-t|\|k_0-a_0\|+|\lambda-t|\|a_0\|+|t|\|h_0-b_0\|+|t-\lambda|\|b\|\\
<&|1-t|\frac{\epsilon}{|1-t|8}+\frac{\epsilon}{8M}M+|t|\frac{\epsilon}{8|t|}+\frac{\epsilon}{8M}M=\frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}$$

por lo que,

$$d((1-\lambda)a_0+\lambda b_0,(1-t)K+tH)<\frac{\epsilon}{2},$$

como a_0 y b_0 fueron tomados de forma arbitraria, tenemos que,

$$\sup_{a\in A,b\in B} d((1-\lambda)a+\lambda b,(1-t)K+tH)\leq\frac{\epsilon}{2}. \tag{2.1}$$

De manera análoga se prueba que,

$$\sup_{k\in K,h\in H} d((1-t)k+th,(1-\lambda)A+\lambda B)\leq\frac{\epsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Juntando 2.1 y 2.2 obtenemos

$$d((1-t)K+tH,(1-\lambda)A+\lambda B)<\epsilon,$$

lo que prueba la continuidad de π.

- Si t=0.
  Entonces $\pi(K,H,0)=K$. Sea $\epsilon>0$ y $O(K,\epsilon)$ una vecindad arbitraria de K. Consideremos las siguientes vecindades de K,H y 0:

$$U_1:=O\left(K,\frac{\epsilon}{6}\right)\cap O(K,1)$$
$$V_1:=O(H,1)$$
$$W_1:=B\left(0,\frac{\epsilon}{6M}\right),$$

con M definida como en el caso anterior. Tomamos $(A, B, \lambda) \in U_1 \times V_1 \times W_1$, si $a_1 \in A$ existe $k_i \in K$ tal que $||k_1 - a_1|| < \epsilon/6$, así se cumple que,

$$\begin{aligned}\|k_1 - (1-\lambda)a_1 - \lambda b\| \leq& \|k_1 - a_1 + a_1 - (1-\lambda)a_1\| + \|\lambda b\| \\ \leq& \|k_1 - a_1\| + |\lambda|\|a_1\| + |\lambda|\|b\| \\ <& \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6M}M + \frac{\epsilon}{6M}M = \frac{\epsilon}{2},\end{aligned}$$

con $b \in B$. Al ser a_1 y b arbitrarios tenemos que,

$$\sup_{a\in A, b\in B} d((1-\lambda)a + \lambda b, K) \leq \frac{\epsilon}{2}, \tag{2.3}$$

De manera análoga,

$$\sup_{k\in K} d(k, (1-\lambda)A + \lambda B) \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Juntando 2.3 y 2.4 obtenemos,

$$d_H(K, (1-\lambda)A + \lambda B) < \epsilon,$$

lo cual prueba la continuidad de π en este caso.

- Si t=1.

En este caso $\pi(K, H, 1) = H$. Sea $\epsilon > 0$ y $O(H, \epsilon)$ una vecindad de H. Tomemos las siguientes vecindades,

$$\begin{aligned}U_2 &:= O(K, 1) \\ V_2 &:= 0\left(H, \frac{\epsilon}{6}\right) \cap O(K, 1) \\ W_2 &:= B\left(1, \frac{\epsilon}{6M}\right),\end{aligned}$$

con M definida como en los casos anteriores. Tomemos $(A, B, \lambda) \in U_2 \times V_2 \times W_2$, si $b_2 \in B$ existe $h_2 \in H$ tal que $||h_2 - b_2|| < \epsilon/6$, así,

$$\begin{aligned}\|h_2 - (1-\lambda)a - \lambda b_2\| \leq& \|h_2 - b_2 + b_2 - \lambda b_2\| + |1-\lambda|\|a\| \\ \leq& \|h_2 - b_2\| + |1-\lambda|\|b_2\| + |1-\lambda|\|a\| \\ <& \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6M}M + \frac{\epsilon}{6M}M = \frac{\epsilon}{2},\end{aligned}$$

con $a \in A$. Al ser b_2 y a arbitrarios tenemos que,

$$\sup_{a \in A, b \in B} d((1-\lambda)a + \lambda b, H) \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.5}$$

De manera análoga,

$$\sup_{h \in H} d(h, (1-\lambda)A + \lambda B) \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.6}$$

Juntando 2.5 y 2.6 obtenemos,

$$d_H(H, (1-\lambda)A + \lambda B) < \epsilon,$$

lo cual prueba la continuidad de π en el caso $t = 1$.

Así tenemos que la función π es continua. La función que hace a $\mathcal{K}_0^n$ un espacio equiconexo es la restricción $\pi|_{\mathcal{K}_0^n} : \mathcal{K}_0^n \times \mathcal{K}_0^n \times [0,1] \to \mathcal{K}_0^n$, y la demostración es análoga. □

A continuación presentamos algunas propiedades de los espacios $2^{\mathbb{R}^n}$, $\mathcal{K}_0^n$ y $\mathcal{K}^n$. El siguiente teorema nos da una caracterización de la convergencia de sucesiones de Cauchy.

Teorema 2.1.5. *Si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy (respecto a la métrica de Hausdorff) en $2^{\mathbb{R}^n}$, entonces (K_n) converge a K_0 con,*

$$K_0 := \bigcap_{i=1}^{\infty} \operatorname{cl}\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} K_j\right).$$

Demostración. Al ser K_0 intersección arbitraria de conjuntos cerrados, K_0 es un conjunto cerrado. Sea $\epsilon > 0$, como (K_n) es una sucesión de Cauchy, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_H(K_i, K_j) < \epsilon$, para toda $i, j \geq N_0$, Es decir, $K_i \subseteq K_j + \epsilon B(0,1)$ y $K_j \subseteq K_i + \epsilon B(0,1)$ para toda $i, j \geq N_0$.

De esto último, si $j \geq i \geq N_0$ tenemos que,

$$\bigcup_{j \geq i} K_j \subseteq K_i + \epsilon B(0,1)$$

y así,

$$K_0 \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{j\geq i} K_j\right) \subseteq K_i + 2\epsilon B(0,1) \quad \text{para todo} \quad i \geq N_0.$$

Por lo que $K_0 \subseteq K_i + 2\epsilon B(0,1)$ para toda $i \geq N_0$ y por lo tanto K_0 es acotado. Además como K_0 es cerrado, inferimos que K_0 es compacto. Más aún, hemos probado que $\mathrm{cl}(\cup_{j\geq i} K_j)$ es compacto, por lo tanto K_0 es una intersección de una familia anidada de subconjuntos compactos. Esto garantiza que K_0 es no vacío.

Ahora, para cada natural m, existe N_m tal que,

$$d_H(K_i, K_j) < 2^{-m}\epsilon \quad \text{con} \quad i, j \geq N_m.$$

Sea $l_0 \geq N_0$ y $x_0 \in K_{l_0}$. Escojamos un natural $l_1 \geq \text{máx}\{l_0, N_1\}$. Como $l_1 \geq l_0, \geq N_0$, $d_H(K_{l_1}, K_{l_0}) < \epsilon$ y por lo tanto existe $x_i \in K_{l_1}$ con $||x_0 - x_1|| < \epsilon$. Supongamos que ya encontramos números naturales $\{l_1, \cdots, l_{q-1}\}$ y puntos $\{x_1, \cdots, x_{q-1}\}$ tales que,

1. $l_r \geq \text{máx}\{N_r, l_{r-1}\}$, para todo $r \in \{1, \cdots, q-1\}$.
2. $x_r \in K_r$ y $||x_r - x_{r-1}|| < 2^{-(r-1)}\epsilon$ para todo $r \in \{1,, \cdots, q-1\}$.

Sea $l_q \geq \{N_q, l_{q-1}\}$. Entonces $d_H(K_{l_q}, K_{l_{q-1}}) < 2^{-(q-1)}\epsilon$ y por lo tanto existe $x_q \in K_{l_q}$ tal que $||x_q - x_{q-1}|| < 2^{-(q-1)}\epsilon$.

De esta manera hemos construido dos sucesiones (l_q) y (x_q), donde (x_q) cumple ser una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$, por lo que converge a un $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Además:

$$||\overline{x} - x_0|| = \lim_{q\to\infty} ||x_q - x_0|| \leq \lim_{q\to\infty} \sum_{k=1}^{q} ||x_k - x_{k-1}|| \leq \lim_{q\to\infty} \sum_{k=1}^{q} 2^{-(k-1)}\epsilon < 2\epsilon.$$

Así, para cada $x_0 \in K_{l_0}$ hemos encontrado un punto $\overline{x}$ en K_0 con $||\overline{x} - x_0|| < 2\epsilon$, por ello $K_{l_0} \subseteq K_0 + 2\epsilon B(0,1)$. Al ser $l_0 \geq N_0$ arbitrario, podemos concluir que para todo $i \geq N_0$,

$$K_i \subseteq K_0 + 2\epsilon B(0,1).$$

Además, ya sabemos que

$$K_0 \subseteq K_i + 2\epsilon B(0,1) \quad \text{para todo} \quad i \geq N_0.$$

Esto prueba que $d_H(K_0, K_1) < 2\epsilon$ para toda $i \geq N_0$ y por lo tanto $d_H(K_i, K_0) \to 0$ si $i \to \infty$.

□

Observación 2.1.6. *Con las condiciones de la proposición anterior, se cumple la siguiente igualdad:*

$$K_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{cl}\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} K_j\right) = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j\geq i} (K_j + \epsilon B(0,1)).$$

Demostración. Sea $x \in \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j\geq i} (K_j + \epsilon B(0,1))$. Para todo $\epsilon > 0$, existe $i(\epsilon)$ tal que $x \in K_j + \epsilon B(0,1)$ para toda $j \geq i(\epsilon)$. Por otro lado, si m es dada, entonces existe n_0 con $n_0 \geq m$ y $n_0 \geq i(\epsilon)$, así

$$x \in K_{n_0} + \epsilon B(0,1) \subseteq \epsilon B(0,1) + \bigcup_{n\geq m} K_n.$$

Al ser ϵ arbitraria, tenemos que $x \in \mathrm{cl}(\cup_{n\geq m} K_n)$, por lo que $x \in K_0$.

Además, ya que (K_n) converge a K_0, si $\epsilon > 0$ existe $i(\epsilon)$ tal que $K_0 \subseteq K_j + \epsilon B(0,1)$ para toda $j \geq i(\epsilon)$, por lo que tenemos la contención

$$K_0 \subseteq \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j\geq i} (K_j + \epsilon B(0,1)).$$

Lo cual prueba la igualdad.

□

La observación anterior nos da como resultado el siguiente teorema.

Teorema 2.1.7. *El espacio $\mathcal{K}^n$ es cerrado en $2^{\mathbb{R}^n}$.*

Demostración. Sea (A_n) una sucesión en $\mathcal{K}^n$ la cual converge a un $A_0 \in 2^{\mathbb{R}^n}$. Por el Teorema 2.1.5 tenemos que A_0 es cerrado y compacto. Más aún, por la observación anterior tenemos que,

$$A_0 = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j\geq i} (A_j + \epsilon B(0,1).$$

Como $A_j + \epsilon B(0,1)$ cumple ser un conjunto convexo, y la unión se hace sobre una familia anidada de conjuntos convexos, tenemos que A_0 es convexo.

□

Ahora probaremos que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es una region acotada, entonces 2^A cumple ser totalmente acotado. Recordemos que un espacio métrico E es totalmente acotado si para toda ϵ existe un numero finito de bolas de radio ϵ que cubran a E. En este caso, diremos que el conjunto formado por los centros de las bolas es ϵ-denso. Es conocido que en $\mathbb{R}^n$ todos los conjuntos acotados y no vacíos son totalmente acotados.

Teorema 2.1.8. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y no vacío. Entonces $(2^A, d_H)$ es totalmente acotado.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como A es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ también es totalmente acotado. Así, existen $x_1, \cdots x_q \in A$ tales que,

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{q} B(x_i, \epsilon).$$

Denotemos por $F := \{x_1, \cdots, x_q\}$ y $J := \{B \subseteq F \mid B \neq \emptyset\}$, por lo que J es un subconjunto finito de 2^A.

Sea $K \in 2^A$ y

$$F_K := \{x_i \in F \mid \exists x \in K \quad \text{con} \quad ||x_i - x|| < \epsilon\}.$$

De la definición de F_K tenemos que $F_K \subseteq K + \epsilon B(0,1)$. Por otro lado, para cada $x \in K$ existe $x_i \in F$ con $||x - x_i|| < \epsilon$, por lo que $x_i \in F_K$ y $x \in F_K + \epsilon B(0,1)$. Esto prueba que $K \subseteq F_K + \epsilon B(0,1)$, y por lo tanto $d_H(K, F_K) \leq \epsilon$.

Por último, simplemente observemos que para todo $K \in 2^A$, $F_K \in J$, lo cual prueba que J es un conjunto finito y ϵ-denso.

□

Juntando los Teoremas 2.1.5 y 2.1.8 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.9. *El espacio $(2^A, d_H)$ es compacto para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto.*

Para cada $K \in \mathcal{K}^n$ definimos el conjunto $cc(K) = 2^K \cap \mathcal{K}^n$; es decir el $cc(K)$ es la familia de todos los subconjuntos compactos y convexos contenidos en K. Veamos ahora que $cc(K)$ es compacto para todo $K \in \mathcal{K}^n$, para ello probemos antes el siguiente lema.

Lema 2.1.10. *Sea (X, d) un espacio métrico y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos compactos y no vacíos de X que converge a un elemento A respecto la métrica de Hausdorff. Entonces A es el conjunto de puntos $x \in X$ para los cuales existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Demostración. Tomemos $x \in A$ arbitrario. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar un $x_n \in A_n$ tal que $d(x, x_n) \leq 2d(x, A_n)$.

Afirmamos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. En efecto, como $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene que $d_H(A, A_n) < \epsilon/2$. En particular $A \subset N(A_n, \epsilon/2)$ lo cual implica que $d(x, A_n) < \epsilon/2$ y así $d(x, x_n) < \epsilon$. Con esto tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y así se cumple la primer contención.

Ahora supongamos que x es un punto para el cual existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in A_n$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sea $\epsilon > 0$, como $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $d_H(A_n, A) < \epsilon$. Así, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y $x_n \in A_n$, tenemos que para n suficientemente grande, se cumple que,

$$\begin{aligned} d(x, A) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, A) \\ &\leq d(x, x_n) + d(A_n, A) < 2\epsilon \end{aligned}$$

Como ϵ fue arbitrario, concluimos que x está en la cerradura de A y al ser A cerrado tenemos que $x \in A$, lo cual prueba la otra contención.

□

Teorema 2.1.11. *Si $K \in \mathcal{K}_0^n$ entonces el conjunto $cc(K)$ es compacto.*

Demostración. Dado que K es compacto tenemos que en particular 2^K es compacto, (por el corolario 2.1.9). De esta manera, basta con probar que $cc(K)$ es cerrado. Para ello supongamos que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $cc(K)$ la cual converge a un $A \in 2^{\mathbb{R}^n}$, por los teoremas 2.1.5 y 2.1.7 sabemos que A es compacto y convexo. Además, por el lema 2.1.10 tenemos que si $x \in A$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \in A_n$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Como $A_n \subset K$ se cumple que $(x_n)_{n\to\infty}$ es una sucesión en K. Al ser este último compacto en particular es cerrado y por lo tanto $x \in K$, como esto es cierto para todo $x \in A$ tenemos que $A \subset K$, lo cual prueba que $cc(K)$ es cerrado en 2^K y por lo tanto es compacto.

□

2.2. K_0^n como un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio.

En el capítulo anterior introducimos los conceptos de G-espacio, G-espacio propio, G-espacio de Cartan, y probamos algunas propiedades que poseen estos espacios. En está sección veremos que tanto el hiperespacio $\mathcal{K}_0^n$, como $\mathcal{K}^n$, cumplen ser un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio. Además, probaremos que $\mathcal{K}_0^n$ es un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio propio, y por lo tanto un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio de Cartan.

Comencemos por definir la acción de $\mathrm{Aff}(n)$. Si $A \subseteq X$ y $g \in \mathrm{Aff}(n)$, definimos el conjunto gA como,

$$gA := \{gx \mid x \in A\}.$$

Notemos que esta regla define una acción de $\mathrm{Aff}(n)$ en los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, y en particular actúa sobre $\mathcal{K}_0^n$ y $\mathcal{K}^n$. De esto último también se tiene el siguiente hecho.

Observación 2.2.1. *La función $\theta_g : \mathcal{K}_0^n \to \mathcal{K}_0^n$ dada por $\theta_g(K) = gK$ es continua.*

Demostración. Si $K \in G$, $g \in G$ y $\epsilon > 0$, sea $M > 1 + ||g||_*$. Tomando la vecindad $O(K, \epsilon/M)$ y un elemento H en ella, existen $k \in K$ y $h \in H$ tales que $d_H(K, H) = d(k, h)$. Así

$$\begin{aligned} d_H(gK, gH) \leq& ||gk - gh|| \\ =& ||g(k - h)|| \\ \leq& ||g||_* ||k - h|| \\ <& M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon. \end{aligned}$$

lo cual prueba la continuidad, y así tenemos que las terna $(\mathrm{Aff}(n), \mathcal{K}_0^n, \theta)$ es un grupo de transformaciones continuas. □

Para probar que $\mathcal{K}_0^n$ es un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio veamos primero la siguiente proposición.

Proposición 2.2.2. *Sea G un grupo topológico y (X, d) un espacio métrico. Consideremos 2^X el hiperespacio de todos los subcojuntos compactos y no vacíos de X equipado con la métrica de Hausdorff. Si G actúa continuamente en X, entonces G actúa continuamente en 2^X de la siguiente forma:*

$$(g, A) \to gA \quad \textit{con} \quad gA := \{ga \mid a \in A\}.$$

Demostración. Sean $A \in 2^X$, $g \in G$ y $\epsilon > 0$. Como G actúa continuamente en X, para cada $a \in A$ existe $U_a \subset G$ vecindad de g y $\delta_a > 0$ tales que:

$$U_a B(a, \delta_a) \subset B(ga, \epsilon/2).$$

Ya que A es compacto y $\{B(a, \delta_a/2)\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta de A, existen $a_1, \cdots, a_k \in A$ tales que:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(a_i, \delta_{a_i}/2).$$

Definimos,

$$N := \bigcup_{i=1}^{k} B(a_i, \delta_{a_i}/2),$$

$$U := \bigcap_{i=1}^{k} U_{a_i}.$$

Como A es compacto, existe $0 < \delta < \text{mín}\{\frac{\delta_{a_i}}{2} \mid i \in \{1, \cdots, k\}\}$ tal que

$$N(A, \delta) \subset N.$$

Si $y \in N(A, \delta)$ y $h \in U$ entonces $y \in B(a_i, \delta_{a_i})$ y $h \in U_{a_i}$ para algún $i \in \{1, \cdots, n\}$, por lo que

$$hy \in B(ga_i, \epsilon/2) \subset N(gA, \epsilon/2). \tag{2.7}$$

Veamos que si $h \in U$ y $B \in O(A, \delta)$ entonces $hB \in O(gA, \epsilon)$.

Notemos que si $B \in O(A, \delta)$ entonces $B \subset N(A, \delta)$, y por (2.7) tenemos que

$$hB \subset N(gA, \epsilon/2).$$

Por otro lado, si $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$. Además existe a_i con $1 \leq i \leq n$ tal que $d(a, a_i) \leq \delta_{a_i}/2$, y así $d(ga, ga_i) < \epsilon/2$. También se cumple que

$$d(b, a_i) \leq \delta + \frac{\delta_{a_i}}{2} < \frac{\delta_{a_i}}{2} + \frac{\delta_{a_i}}{2} = \delta_{a_i},$$

lo cual implica que $d(hb, ga_i) < \epsilon/2$. De esta manera tenemos $d(hb, ga) \leq d(hb, ga_i) + d(ga_i, ga) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$ y por lo tanto $gA \subset N(hB, \epsilon)$.

Así $d_H(hB, gA) < \epsilon$, y por lo tanto la acción de G en 2^X es continua.

$\square$

Como $\mathbb{R}^n$ es un $\text{Aff}(n)$-espacio, por la proposición 2.2.2 la acción de $\text{Aff}(n)$ en $2^{\mathbb{R}^n}$ es continua, y por lo tanto su restricción a $\mathcal{K}^n$ y $\mathcal{K}_0^n$ es continua. Así tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.3. *$\mathcal{K}_0^n$ y $\mathcal{K}^n$ son $\text{Aff}(n)$-espacios.*

Probemos ahora que $\mathcal{K}_0^n$ es un $\text{Aff}(n)$-espacio propio (y por el teorema 1.4.7, tendríamos que $\mathcal{K}_0^n$ también sería un $\text{Aff}(n)$-espacio de Cartan). Antes de dar la prueba veamos los siguientes lemas.

Lema 2.2.4. *Sea $A \in \mathcal{K}_0^n$ y $x_0 \in A$ tal que $\operatorname{cl} N(x_0, 2\epsilon) \subset A$ para cierta $\epsilon > 0$. Si $C \in \mathcal{K}^n$ y $d_H(A, C)\epsilon$, entonces $N(x_0, \epsilon) \subset C$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que existe $C \in \mathcal{K}^n$ tal que $N(x_0, \epsilon) \not\subset C$, pero con $d_H(A, C) < \epsilon$

Tomemos $x \in N(x_0\epsilon) \setminus C$. Dado que C es compacto, existe $z \in C$ con $d(x, z) = d(x, C)$. Sea $\mathcal{H}$ el hiperplano que pasa por z, ortogonal al rayo $\overrightarrow{xz} := \{(1-t)z + tx \mid t \in [0, \infty)\}$. Como C es un conjunto convexo, se queda contenido en el semiespacio determinado por $\mathcal{H}$ que no contiene a x.

Sea a la intersección de $\overrightarrow{zx} \setminus [z; x]$ con $\partial(\operatorname{cl} N(x_0, 2\epsilon)) \subset A$. Es claro que $d(a, x_0) = 2\epsilon$ y que,

$$d(a, z) = d(a, \mathcal{H}) \leq d(a, C) \leq d_H(A, C) < \epsilon.$$

Dado que $d(x_0, x) < \epsilon$, también tenemos que,

$$\epsilon > d(a, z) > d(a, x) \geq d(a, x_0) - d(x_0, x) \geq 2\epsilon - \epsilon = \epsilon,$$

lo cual es una contradicción. Así $N(x_0, \epsilon) \subset C$ para todo $C \in K$ con $d_H(A, C) < \epsilon$, como se quería probar.

$\square$

Lema 2.2.5. *Sea $A \in \mathcal{K}_0^n$ y $x_0 \in A$ tal que $\operatorname{cl} N(x_0, 2\epsilon) \subset A$ para cierto $\epsilon > 0$. Entonces $\operatorname{cl} O(A, \epsilon)$, la cerradura de $O(A, \epsilon)$ en $\mathcal{K}^n$, es compacta y se queda contenida en $\mathcal{K}_0^n$.*

Demostración. Sea $K = \{x \mid d(x, A) \leq 2\epsilon\} \subseteq \mathbb{R}^n$, al ser K cerrado y acotado, tenemos que K es compacto y $A \subseteq K$. Además K es convexo ya que $K = A + 2\epsilon B^n$.

Notemos que si $B \in O(A, \epsilon)$, entonces $B \subset N(A, \epsilon) \subseteq K$. Supongamos que $P \in \operatorname{cl} O(A, \epsilon)$. Así existe una sucesión $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a P, y $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_H(P_N, P) < \epsilon/2$. Por lo que

$$d_H(P, A) \leq d_H(P, P_N) + d_H(P_N, A) < \frac{\epsilon}{2} + \epsilon.$$

Así $P \subseteq N(A, 3\epsilon/2) \subseteq K$, y por lo tanto $\operatorname{cl} O(A, \epsilon) \subseteq cc(K)$. Esto prueba que $\operatorname{cl} O(A, \epsilon)$ es compacto. Falta probar que $\operatorname{cl} O(A, C) \subseteq \mathcal{K}_0^n$

Consideremos $(D_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset O(A, \epsilon)$ una sucesión de cuerpos convexos que convergen a algún $D \in cc(K)$. Por el Lema 2.2.4 tenemos que $N(x_0, \epsilon) \subset D_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $N(x_0, \epsilon) \not\subset D$, tomamos $x \in N(x_0, \epsilon) \setminus D$ y definimos $\eta = d(x, D) > 0$. Como $x \in D_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $d_H(D_m, D) \geq d(x, D) = \eta$.

Esto significa que $(D_m)_{m\in\mathbb{N}}$ no puede converger a D. De esta contradicción obtenemos que $N(x_0, \epsilon)$ debe estar contenido en D, y por lo tanto $D \in \mathcal{K}_0^n$, lo cual prueba que $\operatorname{cl} O(A, \epsilon)$ se queda contenida en $\mathcal{K}_0^n$.

□

Proposición 2.2.6. $\operatorname{Aff}(n)$ *actúa propiamente en* $\mathcal{K}_0^n$*; es decir* $\mathcal{K}_0^n$ *es un* $\operatorname{Aff}(n)$*-espacio propio.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{K}_0^n$, $x_0 \in A$ y ϵ tal que $\operatorname{cl} N(x_o, 2\epsilon) \subset A$. Veamos que $O(A, \epsilon)$ es una vecindad pequeña de A.

Sea $B \in \mathcal{K}$, $z_0 \in B$ y $\delta > 0$ tal que $\operatorname{cl} N(z_o, 2\delta) \subset B$.

Probemos que el conjunto,

$$\Gamma := \{g \in \operatorname{Aff}(n) \mid gO(A, \epsilon) \cap O(B, \delta) \neq \emptyset\},$$

tiene cerradura compacta en $\operatorname{Aff}(n)$. Dado que $\operatorname{Aff}(n) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$ basta con probar que Γ es acotado y su cerradura en $\operatorname{Aff}(n)$ coincide con la dada en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$.

Escojamos $M > 0$ tal que si $C \in O(A, \epsilon) \cup O(B, \delta)$ entonces,

$$||c||_* \leq M \quad \text{para todo} \quad c \in C.$$

En particular, se cumple que

$$\operatorname{diam} C = \sup_{c,c' \in C} ||c - c'||_* \leq 2M.$$

Por otro lado, si $\mu \in \Gamma$, existe un $A' \in O(A, \epsilon)$ y $B' \in O(B, \delta)$ con $\mu A' = B'$. Dado que $\mu \in \operatorname{Aff}(n)$, existen $u \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma \in GL(n)$ tal que $\mu x = u + \sigma x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Ya que $\mu A' = B'$ entonces $\operatorname{diam} \mu A' \leq 2M$. Más aún, como $\mu A' = u + \sigma A'$, tenemos que:

$$\operatorname{diam} \sigma A' = \operatorname{diam} \mu A' \leq 2M.$$

Ahora, sea $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Entonces $x_0 + \frac{\epsilon}{2}x \in B(x_0, \epsilon) \subseteq A$ y $x_0 - \frac{\epsilon}{2}x \in B(x_0, \epsilon) \subseteq A$. Así,

$$
\begin{aligned}
\epsilon||\sigma(x)|| &= \left|\left|2\frac{\epsilon}{2}\sigma(x)\right|\right| \\
&= \left|\left|2\sigma\left(\frac{\epsilon}{2}x\right)\right|\right| \\
&= \left|\left|\sigma\left(\frac{\epsilon}{2}x + x_0\right) - \sigma\left(x_0 - \frac{\epsilon}{2}x\right)\right|\right| \\
&< 2M.
\end{aligned}
$$

Por lo que, $||\sigma(x)|| < 2\frac{M}{\epsilon}$ para toda $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, y por lo tanto $||\sigma||_* \leq 2\frac{M}{\epsilon}$.

Por otro lado, dado $a \in A$, como $\mu(a) \in B'$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
M \geq ||\mu(a)||_* &= ||u + \sigma(a)|| = ||u - (-\sigma(a))|| \\
&\geq ||u|| - || - \sigma(a)|| \geq ||u|| - ||\sigma||_* M \\
&\geq ||u|| - \frac{2M}{\epsilon}M = ||u|| - \frac{2M^2}{\epsilon}
\end{aligned}
$$

Lo cual implica que $||u||_* \leq M + \frac{2M^2}{\epsilon}$ y así Γ es acotado.

Veamos ahora que la cerradura de Γ coincide con su cerradura en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n^2}$. Para ello recordemos que si $\lambda \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n^2}$, λ será una transformación afín si y sólo si λ es suprayectiva.

Supongamos que $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$ es una sucesión que converge a $\lambda \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n^2}$. Como $\lambda_m \in \Gamma$, existen $A_m \in O(A,\epsilon)$ y $B_m \in O(B,\delta)$ tales que $\lambda_m A_m = B_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.2.5 tenemos que $\mathrm{cl}\, O(A,\epsilon)$ y $\mathrm{cl}\, O(B,\delta)$ son compactos, y así podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ y $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergen a $A_0 \in \mathrm{cl}\, O(A,\epsilon)$ y $B_0 \in \mathrm{cl}\, O(B,\delta)$, respectivamente. Entonces de la igualdad $\lambda_m A_m = B_m$ obtenemos que $\lambda A_0 = B_0$.

Ahora, ya que B_0 tiene interior no vacío, tenemos que la dimensión de B_0 es igual a n, por lo que la dimensión de $\lambda(\mathbb{R}^n)$ es n, y por lo tanto es un hiperplano n-dimensional en $\mathbb{R}^n$, lo cual sólo es posible si $\lambda(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Así, λ es suprayectiva como se quería.

$\square$

También se ha probado que $\mathcal{K}_0^n$ y $\mathcal{K}^n$ son espacios equiconexos con la función definida en el teorema 2.1.4. Si consideramos $g \in \mathrm{Aff}(n)$, $K, H \in \mathcal{K}_0^n$ y $t \in [0,1]$, tenemos que

$$\pi(gK, gH, t) = (1-t)gK + tgH = g((1-t)K + tH) = g\pi(K, H, t).$$

Así, $\mathcal{K}_0^n$ es un espacio $\mathrm{Aff}(n)$-equiconexo. De igual manera tenemos que $\mathcal{K}^n$ es un espacio $\mathrm{Aff}(n)$-equiconexo.

Capítulo 3

Puntos afínmente invariantes.

En este capítulo introduciremos el concepto de **punto afínmente invariante** introducido por B. Grümbaum en su célebre artículo "*Measures of Symmetry for Convex Sets*" [8], en el cual deja una serie de preguntas abiertas relacionadas con este concepto. También veremos algunas propiedades básicas sobre estos puntos, y se hará mención de resultados que los engloban como los dados en [14].

Para la segunda sección se dará la prueba de que el **punto de Löwner**, definido como el centro del elipsoide de volumen menor que contiene al cuerpo convexo, cumple ser un **punto afínmente invariante**.

3.1. Puntos afínmente invariantes.

El estudio sistemático de las simetrías de los cuerpos convexos fue iniciado por B. Grünbaum en su artículo [8], donde se resalta la relación que tiene la estructura afín de un cuerpo convexo con sus simetrías. Prueba de ello es la definición de **punto afínmente invariante**.

En [8], Grünbaum da la siguiente definición

Definición 3.1.1. *Un* ***punto afínmente invariante*** *es una función* $p : \mathcal{K}_0^n \to \mathbb{R}^n$ *tal que* p *cumpla ser continua y para toda transformación afín* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *y* $K \in \mathcal{K}_0^n$ *se cumple que:*

$$p(gK) = gp(K). \tag{3.1}$$

Es decir, p *es* $\mathrm{Aff}(n)$*-equivariante. Denotaremos por* $\mathfrak{B}_n$ *al conjunto de todos los puntos afínmente invariantes de* $\mathbb{R}^n$*,*

$$\mathfrak{B}_n := \{p : \mathcal{K}_0^n \to \mathbb{R}^n \mid p \quad \textit{es un punto afínmente invariante}\}.$$

Para un cuerpo K *fijo, denotaremos por* $\mathfrak{B}_n(K) := \{p(K) \mid p \in \mathfrak{B}_n\}$.

Además diremos que un punto afínmente invariante $p \in \mathfrak{B}_n$ *es propio, si para todo* $K \in \mathcal{K}_0^n$ *se tiene que*

$$p(K) \in \mathrm{int}(K).$$

El número de ejemplos de puntos afínmente invariante ha crecido con los años. A continuación enunciaremos algunos de los más conocidos, dejando para la siguiente sección la prueba de que el punto de Löwner cumple con la definición.

Ejemplo 3.1.2. *Sea* K *un cuerpo convexo de* $\mathbb{R}^n$ *tenemos que los siguientes ejemplos son puntos afínmente invariantes:*

- *El Centroide* $g(K)$ *definido como,*

$$g(K) := \frac{\int_K x dx}{Vol(K)}.$$

- *El Punto de John* $j(K)$*, es el centro del elipsoide de volumen máximo contenido en* K*.*
- *El Punto de Löwner* $l(K)$*, es el centro del elipsoide de volumen minímo que contiene a* K*.*

La prueba de que el punto de Löwner es un punto afínmente invariante se dará en la siguiente sección, en [8] se puede consultar más información sobre los otros puntos.

Una relación interesante es la que mantienen los puntos afínmente invariantes con las simetrías de un cuerpo convexo. Para cada $K \in \mathcal{K}_0^n$ consideremos el conjunto $\mathfrak{F}_n(K)$ definido como:

$$\mathfrak{F}_n(K) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid gx = x \quad \text{para toda} \quad g \in \mathrm{Aff}(n) \quad \text{tal que} \quad gK = K\}.$$

Observemos que para cada $x \in \mathfrak{B}_n(K)$, existe algún $p \in \mathfrak{B}_n$ tal que $p(K) = x$. Así, si $g \in \mathrm{Aff}(n)$ es tal que $gK = K$, entonces se cumple lo siguiente:

$$x = p(K) = p(gK) = gp(K) = gx$$

Por lo que $gx = x$, y así $x \in \mathfrak{F}_n(K)$. Dado que x fue tomado arbitrariamente en $\mathfrak{B}_n(K)$ tenemos la siguiente contención:

$$\mathfrak{B}_n(K) \subset \mathfrak{F}_n(K).$$

Branko Grünbaum en [8], deja abierta la pregunta sobre los casos en que se cumple la igualdad $\mathfrak{B}_n(K) = \mathfrak{F}_n(K)$, lo cual se conoce como la conjetura de Grünbaum sobre puntos afínmente invariantes. Esta pregunta quedó abierta hasta que O. Mordhorst en [15] nos presenta la primera prueba de la igualdad. En el tercer capítulo se dará una prueba alterna a la dada por Mordhorst. Por ahora nos basta la contención $\mathfrak{B}_n(K) \subset \mathfrak{F}_n(K)$ para mostrar la relación que tienen los puntos afínmente invariantes con las simetrías de un cuerpo convexo, y es que entre más puntos afínmente invariantes tenga un cuerpo convexo, menos simetrías tiene (e inversamente).

Ejemplo 3.1.3. *Consideremos la bola unitaria $B^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| \leq 1\}$. Ahora, el subconjunto de $\mathrm{Aff}(2)$ que deja fijo a la bola unitaria es el grupo ortogonal $O(2)$. Y a su vez, el conjunto de puntos que deja fijo el grupo ortogonal es el singulete formado por el origen: es decir $\mathfrak{F}_2(B^2) = \{0\}$. Por la contención anterior tenemos que $\mathfrak{B}_2(B^2) \subseteq \{0\}$.*

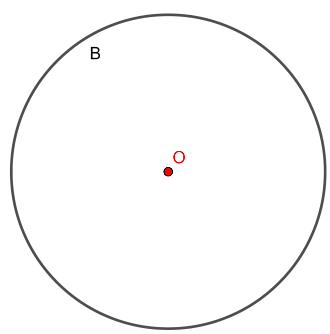

Figura 3.1: Bola unitaria

Llamemos A al cuadrilátero de la Figura 3.2 y sea l el único eje simetría de A. Notemos que las únicas transformaciones afínes que dejan fijo al cuadrilátero son la identidad y la reflexión a través de l. Los puntos que quedan fijos por estas dos transformaciones son los que componen a la linea l, es decir $\mathfrak{F}_2(A) = l$. Así tenemos que $\mathfrak{B}_2(A) \subseteq l$.

Por último si consideramos un cuerpo convexo M que no tenga ninguna simetría (como la figura 3.3), la única tranformación afín que deja fijo a M es la identidad, y

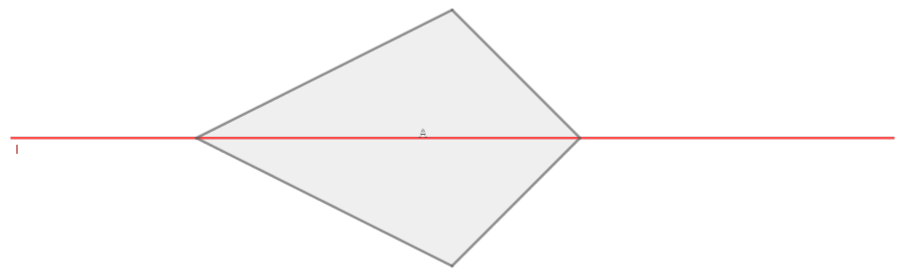

Figura 3.2: Cuadrilatero con una simetria.

los puntos que la identidad deja fijos son todos los puntos de $\mathbb{R}^2$*, por lo que* $\mathfrak{B}_2(M) \subset \mathbb{R}^2$.

En los tres ejemplos anteriores vemos la relación que mantienen los puntos afínmente invariantes con respecto a las simetrías de un cuerpo convexo.

Definición 3.1.4. *Una función* $A : \mathcal{K}_0^n \to \mathcal{K}_0^n$ *es llamada una función de conjuntos afínmente equivariante, si* A *cumple ser continua, y si para toda transformación afín* g *de* $\mathbb{R}^n$ *en si mismo, se tiene que:*

$$A(gK) = gA(K).$$

Denotamos por $\mathfrak{G}_n$ *el conjunto de las funciones de conjuntos afínmente equivariantes.*

$$\mathfrak{G}_n := \{A : \mathcal{K}_0^n \to \mathcal{K}_0^n \mid A \quad \textit{es afínmente equivariante y continua}\ \}.$$

Diremos que $A \in \mathfrak{G}_n$ *es propio si* $A(K) \subset \operatorname{int}(K)$ *para todo* $K \in \mathcal{K}_0^n$.

Algunos ejemplos de la definición anterior son $J : \mathcal{K}_0^n \to \mathcal{K}_0^n$ y $L : \mathcal{K}_0^n \to \mathcal{K}_0^n$ tal que a cada $K \in \mathcal{K}_0^n$ se le asigne su elipsoide de John, y su elipsoide de Löwner,

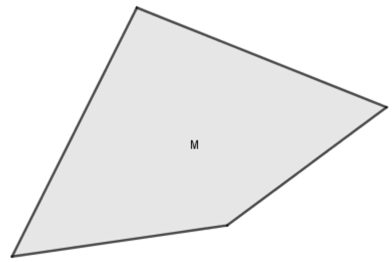

Figura 3.3: Cuerpo convexo sin simetrías distintas de la identidad.

respectivamente. En el siguiente capítulo se prueba que L es una función de conjuntos afínmente invariante. Más sobre estas funciones puede ser consultado en [8] y [14]. Veamos algunas observaciones con respecto a los puntos afínmente invariantes y funciones de conjuntos afínmente equivariantes.

Observación 3.1.5. *Sean $A \in \mathfrak{G}_n$ y $p, q \in \mathfrak{B}_n$.*

1. *Dada la continuidad de A y p, tenemos que $p \circ A : \mathcal{K}_0^n \to \mathbb{R}^n$ es continua. Ademas si $K \in \mathcal{K}_0^n$ y $T \in \mathrm{Aff}(n)$, tenemos que:*

$$p \circ A(TK) = p(A(TK)) = p(TA(K)) = Tp(A(K)) = T(p \circ A(K)).$$

Por lo que $p \circ A \in \mathfrak{B}_n$.

Ahora si $\lambda \in \mathbb{R}$, afirmamos que $(1-\lambda)p+\lambda q \in \mathfrak{B}_n$. En efecto, primero notemos que los casos $\lambda = 1$ y $\lambda = 0$ son triviales. Supongamos que $\lambda \neq 1, 0$, al ser p y q continuas, y ya que la suma de funciones continuas es continua, tenemos que $(1-\lambda)p + \lambda q$ cumple ser continua.

Por último veamos que $(1-\lambda)p + \lambda q$ es $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante. Para ello, sea $T \in \mathrm{Aff}(n)$ y $K \in \mathcal{K}_0^n$. Recordemos que $T(x) = v + \sigma(x)$ para algún $v \in \mathbb{R}^n$ y $\sigma \in GL(n, \mathbb{R})$. Así,

$$
\begin{aligned}
&((1-\lambda)p+\lambda q)(TK) = (1-\lambda)p(TK)+\lambda q(TK)\\
=&(1-\lambda)(Tp(K))+\lambda(Tq(K)) = (1-\lambda)v+(1-\lambda)\sigma p(K)+\lambda v+\lambda\sigma q(K)\\
=&v+\sigma((1-\lambda)p(K))+\sigma(\lambda q(K)) = v+\sigma((1-\lambda)p(K)+\lambda q(K))\\
=&T((1-\lambda)p(K)+\lambda q(K)) \qquad .
\end{aligned}
$$

Lo cual prueba que $(1-\lambda)p+\lambda q$ *es* $\mathrm{Aff}(n)$*-equivariante y, así pertenece a* $\mathfrak{B}_n$
Por otro lado, si además $B \in \mathfrak{G}_n$*, de manera análoga se prueba que* $A\circ B \in \mathfrak{G}_n$ *y que* $(1-\lambda)A+\lambda B \in \mathfrak{G}_n$.

Todo el razonamiento anterior prueba que $\mathfrak{B}_n$ *es un subespacio afín de* $C(\mathcal{K}_0^n,\mathbb{R}^n)$*, donde* $C(\mathcal{K}_0^n,\mathbb{R}^n)$ *es el conjunto de funciones continuas de* $\mathcal{K}_0^n$ *en* $\mathbb{R}^n$.

2. *Sea* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *fijo, entonces la traslación por el punto* x_0 *es una transformación afín. Así, para todo* $p \in \mathfrak{B}_n$ *y* $A \in \mathfrak{G}_n$*, se tienen las siguientes igualdades:*

$$p(K+x_0) = p(K)+x_0 \text{ para todo } K \in \mathcal{K}_0^n,$$

$$A(K+x_0) = A(K)+x_0 \text{ para todo } K \in \mathcal{K}_0^n.$$

3. *Si* p *y* q *son dos puntos afínmente invariantes tales que* $p \neq q$*, entonces no es posible dar una constante* $c>0$ *tal que:*

$$||p(K)-p(L)|| \geq c||q(K)-q(L)|| \quad \text{para todo} \quad K,L \in \mathcal{K}_0^n. \tag{3.2}$$

En efecto, por 2 *tenemos que* $p(K-p(K))=0$ *y* $q(L-q(L))=0$*. Si suponemos que se cumple 3.2 para* $c>0$*, entonces:*

$$
\begin{aligned}
0 =&||p(K-p(K))-p(L-p(L))||\\
\geq& c||q(K-p(K))-q(L-p(L))||\\
=&||q(K)-p(K)-q(L)+p(L)||.
\end{aligned}
$$

Si escogemos $L=B^n$*, por el Ejemplo 3.1.3,* $q(L)=p(L)=0$*, y obtenemos* $||q(K)-p(K)||=0$ *por lo que* $p(K)=q(K)$*, para cualquier* $K \in \mathcal{K}_0^n$*, lo cual contradice* $p \neq q$.

En el artículo "*Affine invariant points* "[14], se resuelven algunas cuestiones importantes acerca de los puntos afínmente invariantes. La demostración de ellas excede los propósitos de este trabajo por lo que solo se hará mención. Para más detalles se puede consultar [14].

Recordemos que $\mathfrak{B}_n$ cumple ser un subespacio afín. Denotaremos por $V\mathfrak{B}_n$ el subespacio paralelo a $\mathfrak{B}_n$ dado por:

$$V\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_n - g,$$

donde g representa el centroide.

B. Grünbaum plantea la pregunta sobre si existe una base finita de puntos afínmente invariantes que genere a $\mathfrak{B}_n$. Es decir, si existen $p_i \in \mathfrak{B}_n$ con $1 \leq i \leq L$ tal que cada $p \in \mathfrak{B}_n$ pueda ser escrito como una combinación afín,

$$p = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i p_i \quad \text{con} \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{L} \alpha_i = 1.$$

La respuesta a esta pregunta es negativa como consecuencia de el siguiente resultado.

Teorema 3.1.6. *$V\mathfrak{B}_n$ es de dimensión infinita para todo $n \geq 2$.*

Otra cuestión resuelta en [14] es la que habla acerca de los cuerpos convexos K tales que $\mathfrak{B}_n(K) = \mathbb{R}^n$ y su comportamiento en $(\mathcal{K}_0^n, d_H)$.

Teorema 3.1.7. *El conjunto de todos los puntos $K \in \mathcal{K}_0^n$ tales que $\mathfrak{B}_n(K) = \mathbb{R}^n$ es abierto y denso en $(\mathcal{K}_0^n, d_H)$.*

Por último enunciamos la conjetura de Grünbaum sobre puntos afínmente invariantes, resuelta por O. Mordhorst en [15]. Posteriormente N. Jonard-Pérez da una prueba concisa basada en argumentos meramente topológicos en [10].

Teorema 3.1.8. *Para cada $K \in \mathcal{K}_0^n$ se cumple la siguiente igualdad:*

$$\mathfrak{B}_n(K) = \mathfrak{F}_n(K).$$

Dada la contención $\mathfrak{B}_n(K) \subset \mathfrak{F}_n(K)$, para probar el Teorema 3.1.8 basta con probar que si $x \in \mathfrak{F}_n(K)$ entonces existe un punto afínmente invariante $p \in \mathfrak{B}_n$ tal que $p(K) = x$. Además, notemos que un punto afínmente invariante es una función continua $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante de $\mathcal{K}_0^n$ a $\mathbb{R}^n$.

Si denotamos por $\mathrm{Aff}(n)_K$ al estabilizador de K, tenemos que $\mathfrak{F}_n(K)$ se ve como el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ que quedan fijos por $\mathrm{Aff}(n)_K$. Es decir $x \in \mathbb{R}^n$

pertenece a $\mathfrak{F}_n(K)$ si y sólo si $\mathrm{Aff}(n)_K \leq \mathrm{Aff}(n)_x$. Así podemos reescribir la conjetura de Grünbaum de la siguiente forma:

Teorema 3.1.9. *Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ con $\mathrm{Aff}(n)_K \leq \mathrm{Aff}(n)_x$, entonces existe una función continua y $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante $p : \mathcal{K}_0^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $p(K) = x$.*

El Teorema 3.1.9 será probado en el siguiente capítulo, en la Sección 4.1, y su prueba será consecuencia de un resultado más general, Teorema 4.1.1.

3.2. Ejemplo de un punto afínmente invariante: El punto de Löwner.

En esta sección se dará la prueba de que el punto de Löwner cumple con la Definición 3.1.1 de punto afínmente invariante. Para ello primero se probará que el elipsoide de Löwner existe y es único. Con ello se definirá la función que asigna a cada cuerpo convexo su elipsoide de Löwner la cual resulta ser continua y $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante. Por último se probará que la función que a cada elipsoide le asigna su centro es continua y $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante.

Empecemos por introducir el concepto de elipsoide:

Definición 3.2.1. *Un elipsoide n-dimensional E es la imagen de B^n bajo una transfomación afín no-singular. Es decir, $E \subset \mathbb{R}^n$ es un elipsoide si existe $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ y $v \in \mathbb{R}^n$ tal que:*

$$\begin{aligned} E = v + TB^n =& \{v + Ty \mid y \in B^n\} \\ =& \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||T^{-1}(x - v)|| \leq 1\} \\ =& \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - v)(TT^\top)^{-1}(x - v)^\top \leq 1\}. \end{aligned}$$

Recordemos que por el teorema de descomposición polar, existe una matriz ortogonal Q y una matriz simétrica definida positiva P tal que $T = PQ$.

Como $QB^n = B^n$, concluimos que $TB^n = P(QB^n) = PB^n$. Así, podemos suponer sin perder la generalidad, que T es definida positiva.

De esta manera, el elipsoide E puede ser descrito como el conjunto

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - v)B(x - v)^\top \leq\}$$

donde $B = (TT^\top)^{-1}$ es una matriz simétrica definida positiva.

Además, si $v \in \mathbb{R}^n$ y $I_{n\times n}$ es la matriz identidad, el elipsoide $E = v + I_{n\times n}B^n$ tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} E =& \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x-v)(I_{n\times n}I_{n\times n}^t)^{-1}(x-v)^\top \leq 1\} \\ =& \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x-v)I_{n\times n}(x-v)^\top \leq 1\} \\ =& \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n}(x_i - v_i)^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

De manera similar, si D es una matriz diagonal, el eliposide $E^{'} = v + DB^n$ se puede ver de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E^{'} =& \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x-v)(DD^t)^{-1}(x-v)^\top \leq 1\} \\ =& \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x-v)(DD)^{-1}(x-v)^\top \leq 1\} \\ =& \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} d_i^{-2}(x_i - v_i)^2 \leq 1\}, \end{aligned}$$

donde d_i son los elementos en la diagonal de D, y $v = (v_1, \cdots, v_n)$.

Ahora que ya tenemos una descripción de los elipsoides, veamos como trabajar con sus volumenes. Recordemos que si $S \subset \mathbb{R}^n$ tiene volumen finito y $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, aplicando el teorema de cambio de variable, tenemos que $Vol(TS) = |\det(T)|Vol(S)$. Teniendo en cuenta lo último y que el volumen es invariante por traslaciones, tenemos la siguiente expresión del volumen de un elipsoide.

Proposición 3.2.2. *El volumen de un elipsoide $E = v+TB^n$ está dado por $Vol(E) = |\det(T)|Vol(B^n)$.*

El elipsoide de Löwner de un cuerpo convexo, nombrado así por el matemático Karel Löwner (1873-1968) que trabajó principalmente en teoría de funciones geométricas, dinámica de fluidos, ecuaciones diferenciales parciales y semigrupos [9], es el elipsoide único con volumen mínimo que contiene al cuerpo convexo. Antes de ver que el elipsoide de Löwner existe y es único probemos unos resultados previos:

Proposición 3.2.3. *Si K es un cuerpo convexo fijo y si (T_i) es una sucesión de transformaciones lineales tales que la sucesión de cuerpos convexos $K_i := T_iK$ converge a un cuerpo convexo $\hat{K}$, entonces $\hat{K} = TK$ para alguna transformación lineal invertible T.*

Demostración. Dado que K es un cuerpo convexo y $\hat{K}$ es compacto, existen $r_1, r_2 \geq 0$ tales que:

$$r_1 B^n \subseteq K \quad \text{y} \quad \hat{K} \subseteq r_2 B^n.$$

Como (K_i) converge a $\hat{K}$, si $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se cumple lo siguiente:

$$K_n \subseteq \hat{K} + \epsilon B^n \subseteq (r_2 + \epsilon) B^n$$

y

$$T_n(r_1 B^n) = r_1 T_n B^n \subseteq T_n K = K_n \subseteq (r_2 + \epsilon) B^n.$$

Así, $||T_n(x)|| \leq \frac{r_2+\epsilon}{r_1}$ para todo $x \in B^n$ y por lo tanto $||T_n||_* \leq \frac{r_2+\epsilon}{r_1}$. Esto implica que (T_n) es uniformemente acotada, por lo que tiene una subsucesión que converge a un T. Se sigue que $T_i K$ converge a TK y con esto obtenemos que $TK = \hat{K}$.

Por último, como $\hat{K}$ es un cuerpo convexo, existen $s_1, s_2 > 0$ tales que

$$s_1 B^n \subseteq \hat{K} \quad \text{y} \quad K \subseteq s_2 B^n.$$

Entonces,

$$s_1 B^n \subseteq \hat{K} = TK \subseteq T(s_2 B^n) = s_2 T(B^n).$$

De esta manera concluimos que $T(B^n)$ es un cuerpo convexo y por lo tanto T es no singular. □

Como un elipsoide es la imagen de la bola unitaria bajo una transformación afín, si (K_i) es una sucesión de elipsoides que converge a un $\hat{K}$, entonces $K_i = T_i(B^n) + u_i$ con $T_i \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ y $u_i \in \mathbb{R}^n$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Así, la sucesión (u_i) es acotada y por lo tanto tiene una subsucesión (u_{i_j}) convergente, por lo que aplicando la Proposición 3.2.3 a la sucesión $(T_{i_j}(B^n))$ obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.4. *Si (K_i) es una sucesión de elipsoides en $\mathbb{R}^n$ que converge a $K \in \mathcal{K}_0^n$, entonces K es un elipsoide.*

Ahora probemos que el elipsoide de Löwner existe y es único.

Teorema 3.2.5. *Si A es un cuerpo convexo, entonces existe único elipsoide de volumen mínimo que contiene a A.*

Demostración. Ya que A es acotado, podemos definir el conjunto,

$$\mathcal{V} := \{Vol(E) \mid E \quad \text{es un elipsoide y} \quad A \subseteq E\}.$$

Como $Vol(E) \geq Vol(A) > 0$ para todo $E \in \mathcal{V}$, existe $V = \inf \mathcal{V}$. De esta manera podemos encontrar una sucesión (E_i) de elipsoides, tales que

$$\lim_{n\to\infty} vol(E_i) = V.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que para todo $i \in \mathbb{N}$, $E_i \subseteq B[0, M] = E_0$ para algún $M > 0$. Dada la compacidad de $cc(E_0)$, (E_n) tiene una subsucesión convergente y por el Corolario 3.2.4, ésta converge a un elipsoide $E^{'}$ que contiene a A y que cumple que $Vol(E^{'}) = V$, lo cual prueba la existencia.

Veamos ahora que dicho elipsoide es único.

Supongamos que E y $E^{'}$ son dos elipsoides que contienen a A, ambos con volumen igual a V. Elegimos un sistema de cordenadas en $\mathbb{R}^n$, de manera que E y $E^{'}$ esten dados por las siguientes ecuaciones (revisar apéndice A):

$$E = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2 \leq 1\},$$

$$E^{'} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{-2} x_i^2 \leq 1\},$$

donde $\alpha_i > 0$ para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Observemos que en este sistema cordenado, $VolE^{'} = VolE = VolB^n := \epsilon_n$. Aplicando la fórmula para el volumen de un elipsoide dada en la Proposición 3.2.2, tenemos $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Definamos el conjunto $E^{''}$ de la siguiente manera,

$$E^{''} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \quad \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} [(x_i - \xi_i)^2 + \alpha_i^{-2} x_i^2\right] \leq 1\}.$$

Ya que todo punto de A esta tanto en E como en $E^{'}$, tenemos la contención $A \subseteq E^{''}$. Además, si definimos β_i^{-2}, η_i y γ como:

$$\beta_i^{-2} = \frac{1 + \alpha_i^{-2}}{2}$$

$$\eta_i = \frac{\beta_i^2 \xi_i}{2} = \frac{\alpha_i^2 \xi_i}{1 + \alpha_i^2}$$

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i^2}{1+\alpha_i^2},$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2+\alpha_i^{-2}x_i^2\right] =& \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2x_i\xi_i+\xi_i^2+\alpha_i^{-2}x_i^2\right]\\
=&\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i^{-2})x_i^2-2x_i\xi_i+\xi_i^2\frac{1+\alpha_i^2}{1+\alpha_i^2}\right]\\
=&\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}(1+\alpha_i^{-2})x_i^2-x_i\xi_i+\xi_i^2\frac{1+\alpha_i^2}{2(1+\alpha_i^2)}\right]\\
=&\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(1+\alpha_i^{-2})x_i^2-x_i\xi_i+\frac{\xi_i^2\alpha_i^2}{2(1+\alpha_i^2)}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i^2}{1+\alpha_i^2}\\
=&\sum_{i=1}^{n}\beta_i^{-2}x_i^2-2\beta_i^{-2}x_i\eta_i+\beta_i^{-2}\eta_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i^2}{1+\alpha_i^2}\\
=&\sum_{i=1}^{n}\beta_i^{-2}(x_i^2-2x_i\eta_i+\eta_i^2)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i^2}{1+\alpha_i^2}\\
=&\sum_{i=1}^{n}\beta_i^{-2}(x_i-\eta_i)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i^2}{1+\alpha_i^2}.
\end{aligned}$$

Así tenemos que E'' es un eliposide y lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$E''\{(x_1,\cdots,x_n)\mid \sum_{i=1}^{n}\beta_i^{-2}(x_i-\eta_i)^2\leq\gamma\}.$$

Notemos que $\gamma\leq 1$, y se da la igualdad si y sólo si cada $\xi_i=0$. Más aún, aplicando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, tenemos que $\beta_i^{-2}\geq\alpha_i^{-1}$, entonces $\beta_i\leq\sqrt{\alpha_i}$ y son iguales si y solo si $\alpha_i=1$.

Aplicando la fórmula de volumen de un elipsoide a E'', tenemos que

$$Vol(E'')=\epsilon_n\gamma^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\beta_i\leq\epsilon_n\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\alpha_i}\leq\epsilon_n,$$

donde cada una de estas desigualdades es estricta a menos que $\xi_i = 0$ y $\alpha_i = 1$. Lo cual no sucede ya que E y $E^{'}$ son distintos. Por lo que $Vol(E) = Vol(E^{'}) > Vol(E^{''})$, lo cual es una contradicción a que E y $E^{'}$ son los elipsoides de volumen mínimo que contienen a A.

Por lo tanto E y $E^{'}$ deben coincidir y así el elipsoide de Löwner es único.

□

El resultado del teorema 3.2.5 nos deja introducir la siguiente notación: si A es un cuerpo convexo denotaremos por $L(A)$ al elipsoide de Löwner de A, entonces se cumple que:

$$A \subseteq L(A) \quad \text{y} \quad Vol(L(A)) \leq Vol(E) \quad \text{para todo elipsoide tal que} \quad A \subseteq E.$$

Además, denotaremos por $\mathcal{E}(n)$ al conjunto de elipsoides de $\mathbb{R}^n$. Con esto podemos definir la función que a todo cuerpo convexo le asigna su elipsoide de Löwner:

$$L : \mathcal{K}_0^n \to \mathcal{E}(n)$$

$$A \to L(A)$$

Teorema 3.2.6. *La función L que a cada cuerpo convexo le asigna su elipsoide de Löwner es* $\mathrm{Aff}(n)$*-equivariante. Es decir para todo $A \in \mathcal{K}_0^n$ y $g \in \mathrm{Aff}(n)$ se cumple la igualdad:*

$$L(gA) = gL(A).$$

Demostración. Supongamos que no es cierto. Entonces existe $A \in \mathcal{K}_0^n$ y $g \in \mathrm{Aff}(n)$ tal que $gL(A) \neq L(gA)$. Claramente $gL(A)$ es un elipsoide que contiene a gA. Dado que el elipsoide de volumen mínimo que contiene a gA es único, tendríamos que,

$$Vol(gL(A)) > Vol(L(gA)).$$

De manera similar obtenemos,

$$Vol(g^{-1}L(gA)) > Vol(L(A)).$$

Aplicando el hecho de que una transfomación afín preserva la razón del volumen de un par de cuerpos convexos, obtenemos que

$$\frac{Vol(L(A))}{Vol(A)} = \frac{Vol(gL(A))}{Vol(gA)} > \frac{Vol(L(gA))}{Vol(gA)} = \frac{Vol(g^{-1}L(gA))}{Vol(A)} > \frac{Vol(L(A))}{Vol(A)},$$

lo cual es una contradicción, y así $gL(A) = L(gA)$ para todo $g \in \mathrm{Aff}(n)$ y $A \in \mathcal{K}_0^n$. $\square$

Antes de probar que la función L es continua, probaremos algunas propiedades que serán de utilidad.

Proposición 3.2.7. *Denotaremos por $\mathcal{L}(n)$ el subespacio de $\mathcal{K}_0^n$ que consiste de todos los cuerpos convexos para los cuales la bola unitaria B^n es su elipsoide de Löwner. $\mathcal{L}(n)$ tiene las siguientes propiedades.*

1. *$\mathcal{L}(n)$ es $O(n)$-invariante.*
2. *La saturación $\mathrm{Aff}(n)(\mathcal{L}(n))$ coincide con $\mathcal{K}_0^n$.*
3. *Si $g\mathcal{L}(n) \cap \mathcal{L}(n) \neq \emptyset$ para algún $g \in \mathrm{Aff}(n)$, entonces $g \in O(n)$.*
4. *$\mathcal{L}(n)$ es compacto.*

Demostración. 1. Sea $A \in \mathcal{L}(n)$ y $g \in O(n)$. Así $L(A) = B^n$ y dada la $\mathrm{Aff}(n)$-equivariancia de L,

$$L(gA) = gL(A) = gB^n = B^n,$$

por lo que $gA \in \mathcal{L}(n)$, lo cual prueba que $\mathcal{L}(n)$ es $O(n)$-invariante.

2. Sea $A \in \mathcal{K}_0^n$, entonces existe $g \in \mathrm{Aff}(n)$ tal que $L(A) = gB^n$. Así,

$$B^n = g^{-1}L(A) = L(g^{-1}A),$$

Entonces $g^{-1}A \in \mathcal{L}(n)$ y $A = g(g^{-1}A)$, lo cual prueba que $\mathrm{Aff}(n)(\mathcal{L}(n)) = \mathcal{K}_0^n$.

3. Si existe $g \in \mathrm{Aff}(n)$ y $A \in \mathcal{L}(n)$ tal que $gA \in \mathcal{L}(n)$, entonces

$$B^n = L(gA) = gL(A) = gB^n,$$

y así $g \in O(n)$.

4. Es claro que $\mathcal{L}(n) \subseteq cc(B^n)$ y dado que $cc(B^n)$ es compacto basta con probar que $\mathcal{L}(n)$ es cerrado en $cc(B^n)$.

   Sea $(A_m) \subseteq \mathcal{L}(n)$ una sucesión convergente a cierto $A \in cc(B^n)$. Queremos probar que $A \in \mathcal{L}(n)$, para ello primero veamos que A tiene interior no vacío. Supongamos que no es así, entonces existe $\mathcal{H}$ un hiperplano $(n-1)$-dimensional tal que $A \subset \mathcal{H}$. Sea $E' \subset \mathcal{H}$ un elipsoide $(n-1)$-dimensional que contenga a A en su interior relativo a $\mathcal{H}$.

   Para cualquier r consideremos el segmento de recta T_r de longitud r, tal que T_r es ortogonal a $\mathcal{H}$ y pasa por el centro de E'.

   Sea $r > 0$ suficientemente pequeño para que el elipsoide n-dimensional E, generado por E' y T_r, tenga volumen menor que $Vol(B^n)$.

   Dado que A se encuentra en el interior de E, existe $\delta > 0$ tal que $N(A, \delta) \subset E$.

   Por otro lado, ya que $A_m \to A$, podemos encontrar $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_{m_0} \subset N(A, \delta) \subset E$. Así, E es un elipsoide que contiene a A_{m_0} por lo que,

   $$Vol(B^n) = Vol(L(A_{m_0})) < Vol(E) < Vol(B^n),$$

   lo cual es una contradicción. Por lo tanto A tiene interior distinto del vacío.

   Ahora supongamos que $L(A) \neq B^n$. Como $A \subset B^n$, por la unicidad de $L(A)$ se tiene que $Vol(L(A)) < Vol(B^n)$.

   Sea J un elipsoide concéntrico y homotético a $L(A)$, con razón de homotecia mayor que 1 y tal que $Vol(J) < Vol(B^n)$.

   Como $L(A)$ está contenido en el interior de J, existe $\epsilon > 0$ tal que $N(L(A), \epsilon) \subseteq J$. Además, como $A \subseteq L(A)$, entonces tambien se tiene que $N(A, \epsilon) \subseteq J$.

   Por otro lado, ya que (A_m) converge a A, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_{N_0} \subseteq N(A, \epsilon) \subseteq J$. Así

   $$Vol(L(A_{N_0})) \leq Vol(J) < Vol(B^n) = Vol(L(A_{N_0})),$$

   lo cual es una contradicción. De aquí concluimos que $A \in \mathcal{L}(n)$, lo que a su vez implica que $\mathcal{L}(n)$ es cerrado en $cc(B^n)$, como se quería probar.

$\square$

Utilizando la proposición anterior, probaremos el siguiente teorema, en el cual se establece la continuidad de L.

Teorema 3.2.8. *La función $L : (\mathcal{K}_0^n, d_H) \to (\mathcal{E}(n), d_H)$, que a cada cuerpo convexo A le asigna su elipsoide de Löwner $L(A)$, es continua. Además $\mathcal{L}(n) = L^{-1}(B^n)$.*

Demostración. Sea $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un sucesión en $\mathcal{K}_0^n$ que converge a algún $A \in \mathcal{K}_0^n$. Supongamos que $L(X_k)$ no converge a $L(A)$. Entonces existe $\epsilon > 0$ y una subsucesión (A_k) de (X_k) tal que $d_H(L(A_k), L(A)) \geq \epsilon$ para toda $k = 1, 2, \cdots$.

Por la Proposición 3.2.7-2 existen $g, g_k \in \mathrm{Aff}(n)$ tales que $A_k = g_k S_k$ y $A = gP$ para ciertos $P, S_k \in \mathcal{L}(n)$.

Dado que $\mathcal{L}(n)$ es compacto, podemos suponer sin perder la generalidad que $S_k \to S$ para algún $S \in \mathcal{L}(n)$. Como $\mathrm{Aff}(n)$ actúa propiamente en $\mathcal{K}_0^n$, entonces S y P tienen vecindades U_S y U_P, respectivamente, tales que (U_S, U_P) tiene cerradura compacta.

Ahora, debido a que $S_k \to S$ y $g^{-1}g_kS_k \to P$, se sigue que existe un número natural k_0 tal que $g^{-1}g_k \in (U_S, U_p)$ para toda $k \geq k_0$.

Así, $g^{-1}g_k$ tiene una subsucesión convergente. Sin pérdida de generalidad, $g^{-1}g_k \to h$ para algún $h \in \mathrm{Aff}(n)$. Esto implica que $g^{-1}g_kS_k \to hS$ y $g^{-1}g_kS_k \to P$, por lo que $hS = P$. Dado que S y P pertenecen a $\mathcal{L}(n)$, por la Proposición 3.2.7-3 se tiene que $h \in O(n)$. Y como $g_k = gg^{-1}g_k \to gh$,

$$L(A_k) = L(g_kS_k) = g_kL(S_k) = g_kB^n \to ghB^n$$

$$= ghL(S) = gL(hS) = gL(P) = L(gP) = L(A).$$

Lo cual contradice que $d_H(L(A_k), L(A)) > \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $L(X_k)$ converge a $L(A)$, lo cual prueba que L es continua. $\square$

De los teoremas 3.2.6 y 3.2.8, tenemos que la función $L : \mathcal{K}_0^n \to \mathcal{E}(n)$ cumple con la Definición 3.1.4. Es decir, cúmple ser continua y $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante. Definamos la función $C : \mathcal{E}(n) \to \mathbb{R}^n$ tal que a cada elipsoide le asigna su centro. Si C resulta ser continua y $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante, tendríamos que la función,

$$l := C \circ L : \mathcal{K}_0^n \to \mathbb{R}^n,$$

es continua y $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante, lo cual probaría que el punto de Löwner es un punto afínmente invariante. A continuación probaremos este hecho.

Recordemos que si $E \in \mathcal{E}(n)$ entonces existe un $h \in \mathrm{Aff}(n)$ tal que $E = hB^n$ por lo que el centro de E queda determinado por $h\overline{0}$. Así,

$$C(E) = C(hB^n) = h\overline{0}.$$

Además, ya que el estabilizador de B^n, $\mathrm{Aff}(n)_{B^n}$ es $O(n)$, tenemos que

$$\mathrm{Aff}(n)_{B^n} < \mathrm{Aff}(n)_{\overline{0}}.$$

Dado que $\mathcal{E}(n) = \mathrm{Aff}(n)(B^n)$ y $\mathbb{R}^n = \mathrm{Aff}(n)(\overline{0})$, podemos aplicar el resultado del Lema 1.4.17, para concluir que la función C es continua y además es $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante. Con esto obtenemos que la función $l := C \circ L$, que a cada cuerpo convexo le asigna su punto de Löwner es continua y $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante, por lo que es un punto afínmente invariante.

Por último, probaremos que $\mathcal{L}(n)/O(n)$ es homeomorfo a $\mathcal{K}_0^n/\,\mathrm{Aff}(n)$, para ello primero veamos un resultado previo. Si X es un G-espacio y H es un subgrupo cerrado de G, un subconjunto H-invariante $S \subset X$ es llamado una H-rebanada en X, si GS es abierto en X y existe una función G-equivariante $f : GS \to G/H$ tal que $S = f^{-1}(eH)$. Si además $GS = X$, entonces diremos que S es una H-rebanada global. Así, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.9. *$\mathcal{L}(n)$ es una $O(n)$-rebanada global compacta de $\mathcal{K}_0^n$.*

Demostración. Tenemos por la Proposición 3.2.7 que $\mathcal{L}(n)$ es compacto.

Por otro lado, $\mathcal{E}(n)$ es la $\mathrm{Aff}(n)$-órbita de $B^n \in \mathcal{K}_0^n$ y $O(n)$ es el estabilizador de $B^n \in \mathcal{K}_0^n$. Aplicando la Proposición 1.4.14, tenemos que $\mathcal{E}(n)$ es homeomorfo a $\mathrm{Aff}(n)/O(n)$.

Esto, junto con el Teorema 3.2.8, implica que existe una función $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante $f : \mathcal{K}_0^n \to \mathrm{Aff}(n)/O(n)$ tal que $\mathcal{L}(n) = f^{-1}(O(n))$. Entonces $\mathcal{L}(n)$ es una $O(n)$-rebanada global de $\mathcal{K}_0^n$. □

Corolario 3.2.10. *El espacio orbital $\mathcal{K}_0^n/\,\mathrm{Aff}(n)$ es compacto. Además, el espacio orbital $\mathcal{L}(n)/O(n)$ y $\mathcal{K}_0^n/\,\mathrm{Aff}(n)$ son homeomorfos. Más aún, $\mathcal{L}(n)/O(n)$ y $\mathcal{K}_0^n/\,\mathrm{Aff}(n)$ son metrizables.*

Demostración. Sea $\Pi : \mathcal{L}(n) \to \mathcal{K}_0^n/\,\mathrm{Aff}(n)$ la restricción de la proyección orbital $\pi : \mathcal{K}_0^n \to \mathcal{K}_0^n/\,\mathrm{Aff}(n)$. Entonces, Π es continua, y por la Proposición 3.2.7-2, tenemos que Π es sobreyectiva. Ahora, ya que $\mathcal{L}(n)$ es compacto, y Π es continua. $\Pi(\mathcal{L}(n)) = \mathcal{K}_0^n/\,\mathrm{Aff}(n)$ es compacto lo cual prueba la primer afirmación.

Más aún, por la Proposición 3.2.7-3, si $A, B \in \mathcal{L}(n)$, entonces $\Pi(A) = \Pi(B)$ si y sólo si A y B tienen la misma $O(n)$-órbita.

Así, Π induce una función continua y biyectiva $p : \mathcal{L}(n)/O(n) \to \mathcal{K}_0^n/\,\mathrm{Aff}(n)$. Ya que $\mathcal{L}(n)/O(n)$ es compacto concluimos que p es un homeomorfismo.

Por el Teorema 1.4.11, tenemos que el espacio $\mathcal{L}(n)/O(n)$ es métrico, y dado el homeomorfismo entre $\mathcal{L}(n)/O(n)$ y $\mathcal{K}_0^n/\,\mathrm{Aff}(n)$, tambien tenemos que $\mathcal{K}_0^n/\,\mathrm{Aff}(n)$ es un espacio métrico.

□

Capítulo 4

La conjetura de Grünbaum.

Durante los capítulos anteriores se desarrolló la teoría necesaria para presentar una prueba alterna de la conjetura de Grünbaum, a la dada por O. Mordhorst en [15], y basada en conceptos topológicos. Para ello se dará primero una generalización de la conjetura, presentada en el articulo *"Some generalizations on affine invariant points"* [11], y su prueba. Así obtendremos como consecuencia directa la demostración de la conjetura como un caso particular.

En la última sección se presentarán algunas aplicaciones de la conjetura (y de la generelalización de esta), obteniendo resultados en distintos espacios.

4.1. Prueba de la conjetura de Grünbaum y una generalización

A lo largo de todo el proyecto hemos presentado los resultados necesarios para probar una generalización de la conjetura de Grünbaum sobre puntos afínmente invariantes presentada en el artículo [11]. De esta manera obtenemos una prueba de la conjetura de Grünbaum (Teorema 3.1.8).

Recordemos que en el Teorema 3.1.9 se reescribe la conjetura tomando en cuenta la contención $\mathfrak{B}_n(K) \subset \mathfrak{F}_n(K)$ y, en un lenguaje de G-espacios, el problema se reduce a encontrar una función $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante de el $\mathrm{Aff}(n)$-espacio $\mathcal{K}_0^n$ en el $\mathrm{Aff}(n)$-espacio $\mathbb{R}^n$ que mande un elemento dado $K \in \mathcal{K}_0^n$ en un elemento dado $x \in \mathfrak{F}^n(K)$. Si denotamos por $C_G(X, Y)$ el conjunto de funciones continuas y G-equivariantes de X en Y (para X y Y G-espacios topológicos), entonces tenemos que encontrar una función $\psi \in C_{\mathrm{Aff}(n)}(\mathcal{K}_0^n, \mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(K) = x$. El siguiente resultado nos da las condiciones necesarias entre dos G-espacios para la construcción de una función G-equivariante como la que buscamos.

Teorema 4.1.1. *Sean X y Y G-espacios. Supongamos que $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset X$ y $\{y_1, \cdots, y_n\} \subset Y$ son conjuntos finitos, tales que para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *La función $\theta_{x_i} : G \to Gx_i$ dada por $\theta_{x_i}(g) = gx_i$ es abierta.*
2. *Existe una vecindad abierta e invariante $U_i \subset X$ de Gx_i y una retracción G-equivariante $r_i : U_i \to Gx_i$.*
3. *$G_{x_i} \leq G_{y_i}$.*
4. *$Gx_i \cap Gx_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$.*

Y si Y cumple ser G-equiconexo, X/G es Tychonoff, y $C_G(X,Y)$ es no vacío, entonces existe $\psi \in C_G(X,Y)$ tal que $\psi(x_i) = y_i$ para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Demostración. Ya que X/G es Tychonoff y las orbitas $\{Gx_1, \cdots, Gx_n\}$ son disjuntas, existen $W_1, \cdots, W_n \subset X$ subconjuntos abiertos, disjuntos e invariantes tales que $Gx_i \subset W_i$ con $i = 1, \cdots, n$.

Sean $U_1, \cdots, U_n$ y $r_1, \cdots, r_n$ la vecindades y las funciones de la condición 2. Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ definimos el conjunto $O_i = U_i \cap W_i$. Claramente cada O_i es una vecindad abierta e invariante de Gx_i y la restricción $q_i := r_i|_{O_i} : O_i \to Gx_i$ es una retracción equivariante.

Por el Lema 1.4.17, para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$ la función $f_i : Gx_i \to Gy_i$ dada por $f_i(gx_i) = gy_i$ es continua y G-equivariante, entonces la función $\widetilde{f_i} : O_i \to Gy_i$ definida por $\widetilde{f_i} := f_i \circ q_i$ es continua y G-equivariante.

Debido a que $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$, la función $f : \bigcup_{i=1}^n O_i \to Y$ dada por,

$$f(z) = \widetilde{f_i}(z), \quad \text{si} \quad z \in O_i,$$

está bien definida, es continua y G-equivariante.

De nuevo, usando el hecho de que X/G es Tychonoff, por el proposición 1.4.5 para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ podemos encontrar una vecindad invariante $V_i \subset X$ y una función continua $\lambda_i : X \to [0,1]$ tal que:

1. $Gx_i \subset V_i \subset \operatorname{cl} V_i \subset O_i$.
2. $\lambda_i(Gx_i) = \{1\}$.

3. $\lambda_i(X \setminus V_i) = \{0\}$.

Definimos $\lambda : X \to [0,1]$ por $\lambda(z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(z)$ para cada $z \in X$. Claramente λ es continua e invariante. Además, ya que todas las vecindades $V_1, \cdots, V_n$ son disjuntas, la función λ satisface que:

1. $\lambda(z) \in [0,1]$ para toda $z \in X$.
2. $\lambda(Gx_i) = \lambda_i(Gx_i) = \{1\}$ para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$.
3. $\lambda(z) = 0$ si $z \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_i$.

Ahora, ya que el conjunto $C_G(X,Y)$ es no vacío, podemos tomar $\varphi \in C_G(X,Y)$, y dado que Y es G-equiconexo, existe una función $h : Y \times Y \times [0,1] \to Y$, con la propiedad de conexión, y tal que:

- $h(gx, gy, t) = gh(x, y, t)$ para cada $g \in G$, $(x, y) \in Y \times Y$ y $t \in [0,1]$.

Definimos ψ por la siguiente fórmula.

$$\psi(z) = \begin{cases} \varphi(z) & \text{si} \quad z \in X \setminus \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{cl} V_i \\ h(\varphi(z), f(z), \lambda(z)) & \text{si} \quad z \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} O_i \end{cases}$$

Observemos que si $z \in (X \setminus \cup_{i=1}^{n} \operatorname{cl} V_i) \cap (\cup_{i=1}^{n} O_i)$, entonces $\lambda(z) = 0$ y por lo tanto $h(\varphi(z), f(z), \lambda(z)) = \varphi(z)$, lo cual prueba que ψ está bien definida y además es continua. Veamos que ψ es G-equivariante.

Recordemos que $X \setminus \cup_{i=1}^{n} \operatorname{cl} V_i$ y $\cup_{i=1}^{n} O_i$ son conjuntos invariantes, entonces para toda $g \in G$ y $z \in X \setminus \cup_{i=1}^{n} \operatorname{cl} V_i$ se cumple que $gz \in X \setminus \cup_{i=1}^{n} \operatorname{cl} V_i$, así

$$\psi(gz) = \varphi(gz) = g\varphi(z) = g\psi(z).$$

Por otro lado, si $z \in \cup_{i=1}^{n} O_i$, entonces $gz \in \cup_{i=1}^{n} O_i$, por lo que

$$\begin{aligned} \psi(gz) &= h(\varphi(gz), f(gz), \lambda(gz)) \\ &= h(g\varphi(z), gf(z), \lambda(z)) \\ &= gh(\varphi(z), f(z), \lambda(z)) \\ &= g\psi(z), \end{aligned}$$

lo cual completa la prueba.

$\square$

Notemos que si se cumplen las condiciones 2. y 3. del Teorema, siempre podemos construir una funcion entre la unión de los Gx_i y la unión de los Gy_i, por lo que las demas hipótesis sirven para extender esta función. Dado lo anterior surge la siguiente noción:

Definición 4.1.2. *Sean X y Y G-espacios. Diremos que el par (X, Y) tiene la propiedad de extensión G-finita, si para todos los conjuntos finitos $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset X$ y $\{y_1, \cdots, y_n\} \subset Y$ que satisfacen:*

1. $G_{x_i} \leq G_{y_i}$ *para toda* $i \in \{1, \cdots, n\}$.
2. $Gx_i \cap Gx_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$.

Existe una función G-equivariante $\psi : X \to Y$ tal que $\psi(x_i) = y_i$ para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$.

En [15, Corolario 4.1] se prueba el siguiente resultado:

Teorema 4.1.3. *Sean $K_1, \cdots, K_n \in \mathcal{K}_0^n$ tales que $\mathrm{Aff}(n)(K_i) \cap \mathrm{Aff}(n)(K_j) = \emptyset$ si $i \neq j$, y $x_i \in \mathfrak{F}_n(K_i)$ para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$, entonces existe un punto afínmente invariante $p \in \mathfrak{B}_n$ tal que $p(K_i) = x_i$ para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$.*

El teorema anterior nos dice que $(\mathcal{K}_0^n, \mathbb{R}^n)$ tiene la propiedad de extensión G-finita, el caso $i = 1$ implica la conjetura de Grünbaum, generealizando así la conjetura. A continuación daremos una demostración de el Teorema 4.1.3, usando nuestras técnicas.

Notemos que si G es un grupo de Lie y X un G-espacio propio Tychonoff, por la Propoisición 1.4.14 y el Teorema 1.4.15, se cumplen las condiciones 1. y 2. del Teorema 4.1.1. Además el espacio orbital X/G es Tychonoff, por lo que estamos en las condiciones del teorema 4.1.1, y así obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1.4. *Sea G un grupo de Lie y X un G-espacio propio. Supongamos que Y es un espacio G-equiconexo con el conjunto $C_G(X, Y)$ no vacío, entonces el par (X, Y) tiene la propiedad de extensión G-finita.*

De este corolario obtenemos el siguiente resultado que generaliza la conjetura de Grunbaum.

Teorema 4.1.5. *Sea G un grupo de Lie, supongamos que X es un G-espacio propio y Y un G-espacio G-equiconexo, tal que el conjunto de las funciones G-equivariantes de X a Y es no vacío. Si además $x \in X$ y $y \in Y$ satisfacen $G_x \leq G_y$ entonces existe una función G-equivariante $\psi : X \to Y$ tal que $\psi(x) = y$.*

Hemos probado que $\mathcal{K}_0^n$ es un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio propio, y que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathrm{Aff}(n)$-espacio $\mathrm{Aff}(n)$-equiconexo. Además, se probo que el punto de Löwner es un punto afínmente invariante, por lo que el conjunto $C_{\mathrm{Aff}(n)}(\mathcal{K}_0^n, \mathbb{R}^n)$ es distinto del vacío. Así, estamos en las condiciones del teorema anterior, por lo que obtenemos una la prueba de la conjetura de Grünbaum 3.1.9 como corolario de este.

Corolario 4.1.6. *Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ con $\mathrm{Aff}(n)_K \leq \mathrm{Aff}(n)_x$, entonces existe una función continua y $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante $p : \mathcal{K}_0^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $p(K) = x$.*

De la misma manera, podemos obtener la demostración del Teorema 4.1.3 como consecuencia del corolario 4.1.4.

La siguiente proposición nos muestra una versión de la conjetura de Grünbaum para el caso de un punto afínmente invariante propio.

Proposición 4.1.7. *Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$ y $x \in \mathfrak{F}_n(K)$. Si $x \in \mathrm{int}(K)$, entonces podemos encontrar un punto afínmente invariante propio $p \in \mathfrak{B}_n$ tal que $p(K) = x$.*

Demostración. Si $K \in \mathcal{K}_0^n$ y $x \in \mathfrak{F}_n(K)$ tales que $x \in \mathrm{int}(K)$, sea $\overline{f} : \mathrm{Aff}(n)K \to \mathrm{Aff}(n)x$ dada por $f(gK) = gx$, entonces,

$$gx \in g\,\mathrm{int}(K) = \mathrm{int}(gK).$$

Por el Teorema 1.4.15 podemos tomar una vecindad U $\mathrm{Aff}(n)$-invariante de GK y una retracción $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante $\overline{r} : U \to GK$.

Además, del Lema 2.2.4 podemos encontrar una $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset \mathrm{int}(A)$ para toda $A \in O(K, \epsilon)$ y que cumpla $O(K, \epsilon) \subset U$.

Por otro lado, por la continuidad de $\overline{f} \circ \overline{r}$ podemos tomar $0 < \delta \leq \epsilon$ tal que si $A \in O(K, \delta)$ entonces:

$$\overline{f} \circ \overline{r}(A) \in B(x, \epsilon) \subset \mathrm{int}(A).$$

Definimos $U' := \mathrm{Aff}(n)(O(K, \delta))$, la cual es una vecindad de $\mathrm{Aff}(n)K$ que además cumple con $U' \subset U$. Sea r la restricción de $\overline{r}$ a U'. Así, para toda $A \in U'$ existe $g \in \mathrm{Aff}(n)$ y $A' \in O(K, \delta)$ con $gA' = A$. Así definimos $f : \overline{f} \circ r : U' \to Gx$, la cual cumple que,

$$f(A) = \overline{f} \circ r(A) = \overline{f} \circ \overline{r}(gA') = g\overline{f} \circ \overline{r}(A') \in g\,\mathrm{int}(A') = \mathrm{int}(gA') = \mathrm{int}(A).$$

Si tomamos ψ un punto afínmente invariante propio (como el punto de Löwner), al ser K un conjunto convexo se cumple que $h(f(K), \psi(K), \lambda(K)) \in \mathrm{int}(K)$, con h :

$\mathcal{K}_0^n \times \mathcal{K}_0^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ dada por $h(x,y,t) = tx+(1-t)y$, $\lambda : \mathcal{K}_0^n \to [0,1]$ la función y V la vecindad de GK obtenidas de la proposición 1.4.5 tales que $GK \subset V \subset \operatorname{cl} V \subset U'$ y $\lambda(gK) = 1$ y $\lambda(A) = 0$ para toda $g \in G$ y $A \in \mathcal{K}_0^n \setminus V$, por lo que si continuamos la demostración como en el Teorema 4.1.1, obtenemos un punto afínmente invariante y propio.

□

4.2. Ejemplos y aplicaciones.

En esta última sección veremos algunos ejemplos de espacios en donde se generaliza la conjetura de Grünbaum. Recordemos primero que $\mathcal{K}^n$ es la familia de subconjuntos compactos y convexos de $\mathbb{R}^n$, con ello podemos definir los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{K}_{j^-}^n := \{K \in \mathcal{K}^n | \quad \dim(K) \leq j\}$$

$$\mathcal{K}_{j^+}^n := \{K \in \mathcal{K}^n | \quad \dim(K) \geq j\},$$

donde $j \in \{0, \cdots, n\}$. Notemos que $\mathcal{K}_0^n = \mathcal{K}_{n^+}^n$ y $\mathcal{K}^n = \mathcal{K}_{0^+}^n = \mathcal{K}_{n^-}^n$.

Ejemplo 4.2.1. *Sea $\mathcal{K}_{1^-}^n$ la famila de todos los segmentos de $\mathbb{R}^n$ equipado con la acción del grupo $\operatorname{Aff}(n)$. Como el grupo del isotropía del origen es $\operatorname{GL}(n,\mathbb{R})$, la acción del grupo $\operatorname{Aff}(n)$ no es propia.*

Además, $\mathcal{K}_{1^-}^n / \operatorname{Aff}(n)$ es homeomorfo al espacio de Sierpiński (recordemos que el espacio de Sierpiński es el conjunto $Z = \{0,1\}$ con la topología $\tau = \{Z, \emptyset, \{0\}\}$) bajo el homeomorfismo $\eta : Z \to \mathcal{K}_{1^-}^n / \operatorname{Aff}(n)$ que envía al 0 a la órbita de los segmentos no degenerados y a 1 a la órbita de los singuletes.

Sin embargo, para cada segmento no trivial $[a,b] \in \mathcal{K}_{1^-}^n$ y cada punto $y \in \mathbb{R}^n$ tal que el $\operatorname{Aff}(n)$-estabilizador de $[a,b]$ esté contenido en el $\operatorname{Aff}(n)$-estabilizador de y, existe una función $\operatorname{Aff}(n)$-equivariante $\psi : \mathcal{K}_{1^-}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\psi([a,b]) = y$.

Demostración. Sea $F = (\mathbb{R}^n)^{\operatorname{Aff}(n)_{[a,b]}}$ el conjunto de todos los puntos que quedan fijos bajo todas las transformaciones que dejan fijo al segmento $[a,b]$, entonces $y \in F$.

Denotemos por m al punto medio de $[a,b]$ y sea H el hiperplano de $\mathbb{R}^n$ ortogonal a $[a,b]$ que pasa por m. Si $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la reflexión sobre H entonces p pertenece al estabilizador de $[a,b]$, por lo que $F \subset H$.

Por otro lado, si l es la línea que pasa por a y b, y $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una rotación alrededor de l tenemos que σ pertenece al estabilizador de $[a,b]$, y así $F \subset l$, por lo que $y \in F \subset H \cap l = \{m\}$.

Podemos definir $\psi : \mathcal{K}_{1^-}^n \to \mathbb{R}^n$ como,

$$\psi([c,d]) = \frac{1}{2}(c+d).$$

Notemos que ψ es $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante y $\psi([a,b]) = y$. Además, por lo explicado anteriormente, ψ es única.

$\square$

El siguiente ejemplo nos muestra que la condición de que la acción sea propia es esencial.

Ejemplo 4.2.2. *Sea T el triángulo formado por los puntos $(0,0),(1,0),(0,1) \in \mathbb{R}^2$ y sea $b = (1/3, 1/3)$ su centroide.*

En [16] se prueba que el centroide es una función $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante de $\mathcal{K}_0^n$ a $\mathbb{R}^n$, por lo que el $\mathrm{Aff}(2)$-estabilizador de T está contenido en el $\mathrm{Aff}(2)$-estabilizador de b. Sin embargo, no hay ninguna función $\mathrm{Aff}(2)$-equivariante y continua $\psi : \mathcal{K}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\psi(T) = b$.

Demostración. Supongamos por el contrario que existe una función ψ tal que $\psi(T) = b$. Por el ejemplo anterior $\psi(I) = (0, 1/2)$ donde $I = \{0\} \times [0,1]$.

Consideremos la sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de triangulos dados por el cuerpo convexo de $\{(0,0),(1/n,0),(0,1)\}$. Notemos que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a I. Ya que T_n vive en la $\mathrm{Aff}(2)$ órbita de T, y ψ es equivariante, $\psi(T_n)$ es el centroide de T_n, es decir $\psi(T_n) = (1/3n, 1/3)$.

Por la continuidad de ψ tendríamos que:

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) = \psi(I) = \lim_{n\to\infty} \psi(T_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3n}, \frac{1}{3}\right) = \left(0, \frac{1}{3}\right),$$

lo cual es una contradicción.

$\square$

En este ejemplo la acción del grupo $\mathrm{Aff}(2)$ en $\mathcal{K}^2$ no es propia, ya que el estabilizador del origen es $\mathrm{GL}(2)$, el cual no es compacto. Por otro lado, la acción en $\mathcal{K}^n$ del grupo de similitudes de $\mathbb{R}^n$, $S(n)$, tampoco es propia. Sin embargo, en [16] se prueba que el punto de Chebyshev (el centro de la bola con volumen mínimo que contiene a un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$), pertenece a $C_{S(n)}(\mathcal{K}^n, \mathbb{R}^n)$, por lo que este espacio es distinto del vacío.

Además, en [3] se prueba que para un espacio métrico conexo y localmente compacto X, el grupo de isometrías de X actúa propiamente en X. Así, el grupo $\mathrm{E}(n)$ de todas las isometrías de $\mathbb{R}^n$ actúa propiamente en $\mathcal{K}^n$.

Y dado que $\mathrm{E}(n) \subset S(n)$ tenemos que toda función $S(n)$-equivariante también es $\mathrm{E}(n)$-equivariante, por lo que el conjunto $C_{\mathrm{E}(n)}(\mathcal{K}^n, \mathbb{R}^n)$ es no vacío. Juntando todo lo anterior con el Corolario 4.1.4 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.2.3. *El par* $(\mathcal{K}^n, \mathbb{R}^n)$ *tiene la propiedad de extensión* $\mathrm{E}(n)$*-finita.*

Notemos que la función identidad en $\mathcal{K}^n_0$, $I_{\mathcal{K}^n_0} : \mathcal{K}^n_0 \to \mathcal{K}^n_0$, es $\mathrm{Aff}(n)$-equivariante, por lo que $C_{\mathrm{Aff}(n)}(\mathcal{K}^n_0, \mathcal{K}^n_0)$ es distinto del vacío y ya que $\mathrm{Aff}(n)$ actúa propiamente en $\mathcal{K}^n_0$, aplicando de nuevo el Corolario 4.1.4 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.4. *El par* $(\mathcal{K}^n_0, \mathcal{K}^n_0)$ *tiene la propiedad de extensión* $\mathrm{Aff}(n)$*-finita.*

Recordemos que para toda similitud $g \in S(n)$ existen $u \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ y $\sigma \in O(n)$, donde $O(n)$ es el grupo de transformaciones ortogonales, tales que $g(x) = u + \lambda\sigma(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$, por lo que podemos dotar a $S(n)$ con la topología heredada de $\mathbb{R}^n \times (0, \infty) \times O(n)$.

Lema 4.2.5. *Para cada* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *la acción del grupo* $S(n)$ *en* $\mathcal{K}^n_{i+}$ *es propia.*

Demostración. Notemos primero que $\mathcal{K}^n_{i+}$ es un subespacio $S(n)$-invariante de $\mathcal{K}^n_{1+}$, por lo que es suficiente con probar que la acción en $\mathcal{K}^n_{1+}$ es propia.

En [7, Corolario 4.7] se prueba que el espacio orbital $\mathcal{K}_{1+}/S(n)$ es homeomorfo al compacto de Banach-Mazur, por lo que es metrizable.

Por el Teorema 1.4.7 basta con probar que $\mathcal{K}_{1+}$ es un $S(n)$-espacio de Cartan.

Sea $A \in \mathcal{K}^n_{1+}$ arbitrario, ya que $\dim(A) \geq 1$, se infiere que $m := diam(A) > 0$. Tomamos $\delta > 0$ tal que $m - 2\delta > 0$ y definimos $O(A, \delta)$ la δ-bola alrededor de A en $\mathcal{K}^n_{1+}$.

Notemos que si $B \in O(A, \delta)$, existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $||b_1 - b_2|| = diam(B)$, y ya que $d_H(B, A) < \delta$ podemos tomar puntos $a_1, a_2 \in A$ tales que $||a_j - b_j|| < \delta$ para $j = 1, 2$. Así:

$$diam(B) = ||b_1 - b_2|| \leq ||b_1 - a_1|| + ||a_1 - a_2|| + ||a_2 - b_2|| < diam(A) + 2\delta.$$

Análogamente se pruea que $diam(A) < diam(B) + 2\delta$, y así obtenemos que,

$$m - 2\delta = diam(A) - 2\delta < diam(B) < diam(A) + 2\delta = m + 2\delta.$$

Veamos que el conjunto,

$$\Gamma := \{g \in S(n) \mid gO(A, \delta) \cap O(A, \delta) \neq \emptyset\},$$

tiene cerradura compacta en $S(n)$. Sea $M > 0$ tal que para toda $C \in O(A, \delta)$ y $x \in C$ se cumpla que $||x|| < M$.

Sea $g \in \Gamma$ y $B \in O(A,\delta)$ tal que $gB \in O(A,\delta)$. Supongamos además que $g(x) = u + \lambda\sigma(x)$ con $u \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ y $\sigma \in O(n)$. Así identificamos a g con $(u,\lambda,\sigma) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \times O(n)$.

Notemos que $diam(gB) = \lambda diam(B)$ y ya que $gB \in O(A,\delta)$, obtenemos que:

$$m - 2\delta < \lambda diam(B) < m + 2\delta.$$

Usando el hecho de que $B \in O(A,\delta)$ se cumple tambien que:

$$m - 2\delta < diam(B) < m + 2\delta,$$

así

$$\frac{m-2\delta}{m+2\delta} < \lambda < \frac{m+2\delta}{m-2\delta}$$

Entonces λ vive en el segmento compacto,

$$I := \left[\frac{m-2\delta}{m+2\delta}, \frac{m+2\delta}{m-2\delta}\right].$$

Por otro lado, para cada $b \in B$ tenemos que $M \geq ||b||$ y $M \geq ||g(b)||$, entonces,

$$M \geq ||g(b)|| = ||u + \lambda\sigma(x)|| \geq ||u|| - ||\lambda\sigma(b)|| = ||u|| - \lambda||\sigma(b)||,$$

Por lo que

$$||u|| \leq M + \lambda||\sigma(b)|| \leq M + \lambda M = M(1+\lambda) \leq M\left(1 + \frac{m+2\delta}{m-2\delta}\right).$$

Definimos,

$$K := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq M\left(1 + \frac{m+2\delta}{m-2\delta}\right)\right\},$$

y así $(u,\lambda,\sigma) \in K \times I \times O(n)$, con este último compacto. Esto prueba que $\Gamma \subset K \times I \times O(n)$, por lo que $\overline{\Gamma}$ es compacto.

$\square$

Con este lema hemos probado que la acción de $S(n)$ en $\mathcal{K}^n_{i+}$ es propia. Además el punto de Chebyshev es una función $S(n)$-equivariante de $\mathcal{K}^n_{i+}$ en $\mathbb{R}^n$, por lo que $C_{S(n)}(\mathcal{K}^n_{i+}, \mathbb{R}^n)$ es no vacío y $\mathbb{R}^n$ es equiconexo. Aplicando de nuevo el Corolario 4.1.4 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.6. *El par $(\mathcal{K}^n_{i+}, \mathbb{R}^n)$ tiene la propiedad de extensión $S(n)$-finita.*

Para $m \in \{0, \cdots, n\}$ el espacio $\mathcal{K}^n_{m^+}$ es Aff(n)-equiconexo, por lo que es $S(n)$-equiconexo. Más aún, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$ la función de $\mathcal{K}^n_{i^+}$ a $\mathcal{K}^n_{m^+}$, que asigna a cada subconjunto compacto y convexo su circumbola, está bien definida, es continua y equivariante, por lo que el conjunto $C_{S(n)}(\mathcal{K}_{i^+}, \mathcal{K}^n_{m^+})$ es no vacío. Aplicando de nueva cuenta el Corolario 4.1.4, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.7. *Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ y $m \in \{0, \cdots, n\}$ el par $(\mathcal{K}^n_{i^+}, \mathcal{K}^n_{m^+})$ tiene la propiedad de extensión $S(n)$- finita.*

Apéndice A

Algunos recordatorios de álgebra lineal.

Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, denotaremos por $A^\top$ a la matriz transpuesta de A. Diremos que una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es simétrica si $A = A^\top$ y diremos que A es definida postiva si $x^\top Ax > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Además, una matriz A es diagonzalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal P ($P^\top = P^{-1}$) y una matriz diagonal D tales que:

$$P^\top AP = D.$$

El teorema de descomposición espectral, nos muestra la relación que tienen las matrices simétricas reales con la diagonalización. La prueba de este puede ser consultada en [20, Theorem 5.14]

Teorema A.0.1. *Toda matriz simétrica real es diagonalizable ortogonalmente.*

Si A es una matriz real simétrica definida positiva, aplicando el teorema de descomposición espectral, tenemos que existe K una matriz no singular, tal que $A = K^\top K$. Usaremos este hecho y el Teorema de descomposición espectral para probar la siguiente propiedad.

Teorema A.0.2. *Sean $A, M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrices simétricas, con M definida positiva. Entonces existe una matriz no singular C tal que*

$$C^t MC = I_{n\times n}, \tag{A.1}$$

y

$$C^t AC = \Lambda. \tag{A.2}$$

con Λ una matriz diagonal.

Demostración. Ya que M es una matriz simétrica y definida positiva, tenemos la siguiente factorización,

$$M = R^t R,$$

con R una matriz no singular. Entonces la matriz

$$(R^{-1})^\top A R^{-1}$$

es simétrica, ya que $[(R^{-1})^\top A R^{-1}]^\top = (R^{-1})^\top A^\top [(R^{-1})^\top]^\top = (R^{-1})^\top A R^{-1}$. Aplicando el Teorema de descomposición espectral, tenemos que existe una matriz ortogonal B tal que

$$B^{-1}(R^{-1})^\top A R^{-1} B = \Lambda,$$

con Λ una matriz diagonal. Definimos

$$C = R^{-1}B.$$

Entonces $C^\top = B^\top (R^{-1})^\top = B^{-1}(R^{-1})^\top$, ya que B es ortogonal, por lo que se cumple (A.2). Además, usando que $B^\top = B^{-1}$ y $(R^{-1})^\top = (R^\top)^{-1}$, obtenemos

$$C^\top M C = B^{-1}(R^\top)^{-1} R^\top R R^{-1} B = I_{n\times n},$$

así, C cumple (A.1), esto prueba el teorema. □

Por último, recordemos el teorema de descomposición polar [6, Theorem 6.28]:

Teorema A.0.3. *Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces existe U una matriz ortogonal y S un matriz simétrica definida positiva tales que:*

$$A = US.$$

Por el teorema anterior $A^\top = US$, con U una matriz ortogonal y S un matriz simétrica definida positiva, entonces:

$$A = S^\top U^\top.$$

Con $U^\top$ una matriz ortogonal y $S^\top$ una matriz simetrica definida positiva, así tenemos el siguiente corolario.

Teorema A.0.4. *Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces existe W una matriz ortogonal y P una matriz simétrica definida positiva tales que:*

$$A = PW.$$

Bibliografía

[1] S. A. Antonyan and N. Jonard-Pérez, *Affine group acting on hyperspaces of compact convex subsets of* $\mathbb{R}^n$, Fund. Math. 223 (2013) 99-136.

[2] G. E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York, 1972.

[3] D. v. Dantzig and B. L. van der Waerden, *Über metrisch homogene Räume* (German), Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 6 (1928), no. 1, 367–376.

[4] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Inc., Boston, Mass., 1966.

[5] R. Engelking, *General Topology*, Helderman Verlag, Berlin, 1989.

[6] S. H. Friedberg, A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra*, 4th ed., Pearson Education, California, 2003.

[7] B. González and N. Jonard-Pérez, *A pseudometric invariant under similarities in the hyperspace of non-degenerated compact convex sets of* $\mathbb{R}^n$, Topology Appl. 194 (2015), 125–143.

[8] B. Grünbaum, *Measures of Symmetry for convex sets*, Proc. Sympos. Pure Math. 7 (1963), 233-270.

[9] M. Henk, *Löwner-John ellipsoids*, Documenta Mathematica, Extra Volume ISMP (2012) 95-106.

[10] N. Jonard-Pérez, *A short proof of Grünbaum's conjecture about affine invariant points*, Topology Appl. 204 (2016), 240–245.

[11] N. Jonard-Pérez, *Some generalizations on affine invariant points*, Proceedings of the American Mathematical Society, 148 (2020), 5299-5311.

[12] P. A. Kučment, On the question of the affine-invariant points of convex bodies (Russian), Optimizacija 8(25) (1972), 48–51, 127.

[13] P. Kuchment, On a problem concerning affine-invariant points of convex bodies, (English translation of [12]), arXiv:1602.04377, 2016.

[14] M. Meyer, C. Schütt and E. Werner, *Affine invariant points*, Israel J. Math. Vol. 208, Issue 1 (2015), 163-192.

[15] O. Mordhorst, *New results on affine invariant points*, Israel J. Math. 219 (2017), no. 2, 529–548.

[16] M. Moszyńska, *Selected Topics in convex Geometry*, translated and revised from the 2001 Polish original, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006.

[17] S. de Neymet, *Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones*, Sociedad Matemática Mexicana, 2005.

[18] R. Palais, *The Classification of G-spaces*, Memoirs of the American Mathematical Society, vol 36, American Mathematical Society, Providence, RI, (1960).

[19] R. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math 73 (1961), 295-323.

[20] T. S. Shores, *Applied Linear Algebra and Matrix Analysis*, Springer, 2007.

[21] J. E. Spingarn, *An inequality for sections and projections of a convex set*, Proceedings of the American Mathematical Society, 118, No. 4, (1993), 1219-1224.

[22] A. C. Thompson. *Minkowski Geometry*, Cambridge University Press, 1996.