



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**TESELACIONES MONOHEDRALES
DEL PLANO POR POLÍGONOS
CONVEXOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

DANIEL GUTIÉRREZ ESPINOZA

DIRECTOR:

DR. VINICIO ANTONIO GÓMEZ GUTIÉRREZ

Ciudad Universitaria, CD. MX. 2022





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Gutiérrez

Espinoza

Daniel

14 55 25 42

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

413002088

2. Datos del tutor

Dr

Vinicio Antonio

Gómez

Gutiérrez

3. Datos del sinodal 1

Dr

Hugo

Villanueva

Méndez

4. Datos del sinodal 2

Dr

Leonardo Ignacio

Martínez

Sandoval

5. Datos del sinodal 3

Dr

Omar

Antolín

Camarena

6. Datos del sinodal 4

Dra

Natalia

Jonard

Pérez

7. Datos del trabajo escrito

Teselaciones monohedrales del plano por polígonos convexos

92 p

2022

Para Carla Hudler

Prefacio

La presente tesis se desarrolló en una época muy complicada, al inició todo parecía que sería una tesis como cualquier otra sin embargo surgió un virus que llevó a cerrar a la universidad por más de dos años. Personalmente nunca creí ver cerradas las puertas de la universidad por tanto tiempo, ahora además de las huelgas también los virus están cerrando a las universidades.

De ese modo, la tesis tuvo que desarrollarse en su totalidad de forma virtual. Originalmente estaba planeada para ser realizada en 4 meses lo cual al final no pudo realizarse por tantos contratiempos, algunos positivos como que entre al posgrado y otros negativos como el virus. Todo tiene ventajas y desventajas, logre adaptarme y aquí está la conclusión de este trabajo.

Esta tesis sobre el problema de clasificar las teselaciones del plano por polígonos convexos reunió dos temas de los que más me gustan en las matemáticas, esto es, la combinatoria y la geometría plana. En el desarrollo de la tesis utilice sólo herramientas elementales con el fin de que este trabajo pueda ser leído y comprendido por cualquier alumno de la carrera de matemáticas o incluso por algún alumno de bachillerato con alguna experiencia previa en leer teoremas y demostraciones ya que como se mencionará en el desarrollo del trabajo, el problema ha sido del interés de muchos aficionados, algunos de los cuales incluso han hecho contribuciones importantes.

Agradecimientos:

Primero me gustaría agradecer al Dr. Vinicio por muchas cosas, pero sobre todo por haber tenido la disposición para dirigir este trabajo, por haber propuesto tan magnífico tema de estudio y por haber estado al pendiente de cuanto ocurría.

A Natalia, a Omar, a Leonardo y a Hugo les agradezco por el tiempo que dedicaron a la revisión tan minuciosa de mi tesis, muchas de sus observaciones no sólo sirvieron para que pudiera mejorar este trabajo, sino que me enseñaron cosas que se deben de hacer que yo ignoraba y estoy seguro de que me serán de utilidad en el futuro. Finalmente les agradezco por ser una inspiración para mí y para muchos otros estudiantes, de verdad son unos matemáticos increíbles.

También quisiera agradecer al Dr. Alejandro Illanes. Fue para mí uno de los mayores honores posibles haber podido asistir a sus cursos, aunque sólo pude tomar cuatro porque después ya se me acabó la carrera. Me quedó con la satisfacción de haber aprendido de uno de los grandes.

Por otro lado, quiero agradecer a mi mamá por su apoyo siempre firme e incondicional. Ha sido el soporte que ha permitido que todo esto sea posible.

A mi tío Israel por apoyarme a mí y en general por apoyar a toda la familia.

A los que ya no están, en particular a mi Tita que aunque ya no está con nosotros la llevo siempre en el corazón.

Los amigos vienen y van... pero hay raras excepciones de amigos que no se van, así que especial reconocimiento debe tener mi amigo José Alberto (Serrano).

A Lizbeth por darme tantos problemas y así tenerme entretenido tanto tiempo.

Índice

Introducción.....	7
1. Nociones Preliminares.....	10
1.1 Definiciones y teoremas básicos.....	10
2. Teselando el plano con triángulos y cuadriláteros.....	14
2.1 Triángulos.....	15
2.2 Cuadriláteros.....	17
2.3 Comentario sobre los polígonos cóncavos de n lados que teselan.....	21
3. Los polígonos convexos con $n \geq 7$ lados.....	24
3.1 Teoremas de polígonos en el plano.....	24
4. Pentágonos y hexágonos que teselan.....	38
4.1 Los grupos de simetría del plano.....	38
4.2 Los hexágonos que teselan.....	46
4.3 Los pentágonos que teselan.....	66
4.4 ¿Serán sólo quince pentágonos?.....	81
Apéndice.....	88
Problemas abiertos.....	88
Referencias bibliográficas.....	89
Bibliografía.....	92

Introducción

El presente trabajo se centrará en estudiar qué polígonos convexos pueden generar una teselación monohedral del plano Euclidiano. Aunque la definición de esos términos se presentará de manera formal más adelante, intuitivamente podemos pensar que teselar el plano es parecido a armar un rompecabezas. Como en todo rompecabezas, queremos poner las piezas de forma que no queden espacios huecos y que no se traslapen las piezas. Por otro lado, una teselación monohedral se puede pensar como un rompecabezas en el que todas las piezas tienen la misma forma.

David Hilbert popularizó el problema de estudiar a estos polígonos y poliedros, nombrándolo como el problema 18 [16]:

[..] Y finalmente Fedorov [...], Schoenflies [...] y más recientemente Rohn [...] han demostrado que sólo hay un número finito (de grupos de simetría) significativamente diferentes en el espacio euclidiano.

Un dominio fundamental de cada grupo de simetría junto con las áreas congruentes que se originan en el grupo obviamente proporcionan una cubierta completa del espacio. Se plantea la pregunta de si también existirán poliedros que no aparecen como dominios fundamentales de los grupos de simetría y que, mediante la yuxtaposición adecuada de piezas congruentes, sea posible llenar completamente todo el espacio. Me gustaría señalar que la pregunta es importante para la teoría de números y quizás también útil para la física y la química.

David Hilbert, 1900.

Hilbert, influenciado por los descubrimientos de aquellos cristalógrafos, creía que aquella conjetura era falsa para el plano, así que decidió plantear el problema para dimensiones mayores a 2 y creyó que el caso del plano se resolvería fácilmente al dar una clasificación de todas las teselaciones monohedrales del plano, que como se verá en este trabajo, no ha resultado un problema sencillo ni siquiera para el caso de las teselaciones con polígonos convexos [2].

Sería un asistente de Hilbert, Karl Reinhardt (motivado por L. Bieberbach que ya había dado una solución parcial al problema en 1911 [37], [38]) quien emprendería la búsqueda de clasificar a todos los polígonos convexos que teselan el plano, lo haría en su tesis doctoral titulada “Über die Zerlegung der Ebene in Polygone” (*Sobre la descomposición del plano en polígonos*) [29].

En su tesis, Reinhardt presentó 3 hexágonos y 5 pentágonos convexos que pueden teselar el plano. Al llegar allí, en palabras de Kershner [18], su técnica o su fortaleza le falló pues se limitó a decir que “en principio sería posible completar la demostración terminando de analizar todas las consideraciones faltantes, pero sería un trabajo muy tedioso y existe la probabilidad de que no emerjan nuevas teselas” [18].

Es probable que Reinhardt y la mayor parte de la comunidad científica creyeran que la prueba estaba completa, sin embargo, 50 años después, un matemático de nombre Richard Brandon Kershner, que estuvo trabajando en el problema por 35 años, encontró 3 nuevos pentágonos convexos capaces de teselar el plano [17], [18]. Además, esos 3 pentágonos son importantes pues son los primeros polígonos convexos que se conocieron que teselan el plano de forma anisoedral. Probablemente Kershner no se dio cuenta de eso. Sin embargo, Heesch en 1935, ya había dado el primer ejemplo de un polígono (cóncavo) anisoedral, lo que prueba la segunda parte del problema 18 de Hilbert (Hilbert creía que la respuesta a ese problema sería que no existirían tales polígonos) [3], [12], [37], [38].

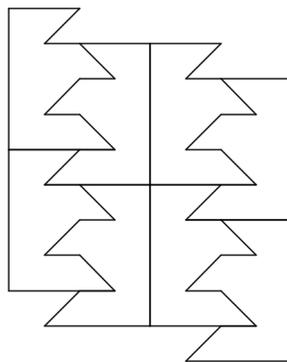


Figura 1

Kershner, al igual que ya habían hecho Reinhardt y Heesch, afirmó que su lista estaba completa. Sin embargo, también se quedó corto a la hora de demostrarlo pues se limitó a decir: “La prueba de que la lista está completa es extremadamente laboriosa y será dada en algún otro lado” [17], [18]. Es por eso que Martin Gardner, un matemático especializado en matemáticas recreativas, publicó el problema en una revista de divulgación científica.

En un hecho insólito, dos aficionados, Marjorie Rice y Richard E. James III descubrieron de forma independiente nuevos tipos de pentágonos convexos capaces de teselar el plano, lo que mostró que el problema continuaba abierto [8], [9], [32], [35].

Hasta ahora se tiene conocimiento de 3 tipos de hexágonos y 15 tipos de pentágonos convexos que pueden teselar el plano [8], [37], [38].

En 2017 Michaël Rao [27] presentó un artículo en el que dijo tener una prueba por computadora que concluiría que los 15 tipos de pentágonos convexos conocidos son todos los pentágonos convexos que teselan el plano y además resolvería una parte de un problema moderno que se pregunta por la existencia de la tesela de Einstein, la cual sería una tesela capaz de teselar el plano pero tal que todas sus teselaciones sean aperiódicas [36].

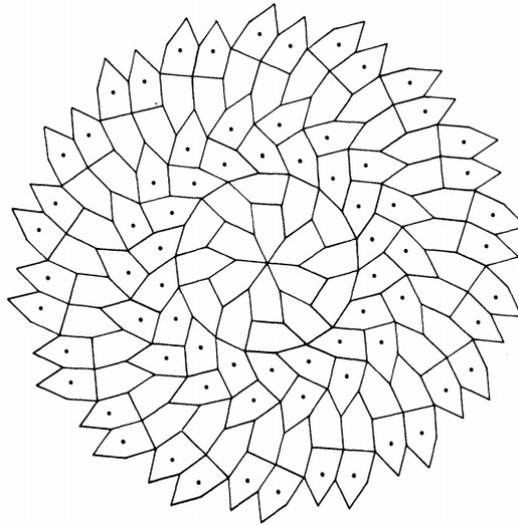


Figura 2, fuente: [31]

El nombre de la tesela de Einstein no tiene relación con el físico Albert Einstein, el nombre surge del juego de palabras *ein Stein* que en alemán significa ‘una piedra’. De ser correcta la prueba de Rao, se concluiría que la tesela de Einstein no existe.

El trabajo de Rao no ha sido revisado en su totalidad [32], en parte debido a que el código que utilizó no está disponible públicamente. No obstante, Thomas Hales reescribiendo el código de forma independiente, revisó la parte correspondiente a la búsqueda del Lema 4 del capítulo 3 del trabajo de Rao sin encontrar errores [13], [36].

En este trabajo pondremos especial énfasis en el caso de las teselaciones monohedrales con hexágonos convexos, pues es un problema muy poco estudiado y quizás olvidado ya que sólo existen dos trabajos que lo abordan (uno tiene más de 50 años y el otro tiene más de 100 años [2], [29]) y como se presentara en este trabajo, es un problema que continua abierto.

Capítulo 1

1. Nociones Preliminares

1.1 Definiciones y teoremas básicos

Definición 1.1: Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ y una función continua y biyectiva $f : A \rightarrow B$, diremos que f es un **homeomorfismo** si f^{-1} también es continua, en cuyo caso diremos que A y B son **homeomorfos**.

Definición 1.2: Dado un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, diremos que A es un **disco topológico**, si A es homeomorfo al disco unitario $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Definición 1.3: Diremos que una familia numerable \mathcal{T} de discos topológicos $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots\}$ es una **teselación del plano** \mathbb{R}^2 , si se satisface que:

$$a) \bigcup_{i=1} T_i = \mathbb{R}^2,$$

$$b) \text{Int}(T_i) \cap \text{Int}(T_j) = \emptyset \text{ cuando } i \neq j.$$

Los elementos T_i son llamados las **teselas** de \mathcal{T} y una teselación del plano también recibe el nombre de **mosaico**.

Por otro lado, diremos que \mathcal{T} es una **teselación de un disco topológico** \mathcal{D} , si se cumple b) y en lugar de a) se cumple:

$$c) \bigcup_{i=1} T_i = \mathcal{D}$$

Muchos autores no requieren que las teselas sean discos topológicos, sólo requieren que sean conjuntos cerrados. En esos casos las teselas no necesitan ser conexas ni mucho menos acotadas y pueden tomar formas muy extrañas. Sin embargo, para el presente trabajo no consideraremos ese tipo de teselas y también restringiremos el estudio a teselaciones en las cuales cada tesela tiene intersección no vacía solamente con un número finito de teselas.

Definición 1.4: Dada una función continua del plano en el plano $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, diremos que es una **transformación del plano** si f es una función biyectiva.

Definición 1.5: Dada una transformación del plano $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, diremos que es una **transformación rígida**, o una **isometría**, si para cualesquiera dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^2$, se cumple que al tomar la distancia euclidiana $d(x, y) = d(L(x), L(y))$. Si dadas dos teselas T_1, T_2 existe una isometría que manda a una en la otra, diremos que las teselas son **congruentes**.

Definición 1.6: Dada una teselación \mathcal{T} y dos teselas $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$, diremos que T_1 y T_2 son **isomorfas** si existe una transformación rígida \mathcal{L} , tal que $\mathcal{L}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ y $T_1 = \mathcal{L}(T_2)$.

Nótese que $\mathcal{L}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ significa que \mathcal{L} lleva teselas en teselas, es decir $\mathcal{L}(\mathcal{T}) = \{\mathcal{L}(T) \mid T \in \mathcal{T}\}$.

Definición 1.7: Dado un conjunto \mathcal{G} con una operación $* : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ y un elemento distinguido $e \in \mathcal{G}$, diremos que es un **grupo** si:

- a) Para todo $a, b, c \in \mathcal{G}$ se cumple que $a * (b * c) = (a * b) * c$, (a esto se le llama **asociatividad**);
- b) $e * a = a * e = a$, para todo $a \in \mathcal{G}$, (el elemento e recibe el nombre de **neutro** del grupo);
- c) Para todo $a \in \mathcal{G}$ existe un $a' \in \mathcal{G}$ tal que $a' * a = a * a' = e$, (el elemento a' recibe el nombre de **inverso** de a).

Dado un conjunto $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, si \mathcal{H} cumple la definición de grupo con la misma operación $*$ de \mathcal{G} (restringida a \mathcal{H}), diremos que \mathcal{H} es un **subgrupo** de \mathcal{G} .

Sabemos que la composición de dos funciones biyectivas genera una función biyectiva, así que la composición de dos transformaciones del plano genera una transformación del plano. También sabemos que la composición de funciones es asociativa. La función identidad $Id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ciertamente es una transformación del plano. Las transformaciones del plano son biyectivas por definición, así que tienen inversa. Por lo tanto, el conjunto de transformaciones del plano con la operación composición de funciones es un grupo.

La definición de orden cíclico puede parecer extraña, sin embargo intuitivamente ayuda pensar en el orden de los numerales en un reloj y en la dirección en la que avanzan las manecillas.

Definición 1.8: Dado un subconjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, diremos que \mathcal{D} tiene un **orden cíclico** $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}^3$ si para todo $a, b, c, d \in \mathcal{D}$ se cumple que:

1. Si $(a, b, c) \in \mathcal{R}$ entonces $(b, c, a) \in \mathcal{R}$.
2. Si $(a, b, c) \in \mathcal{R}$ entonces $(c, b, a) \notin \mathcal{R}$.
3. Si $(a, b, c) \in \mathcal{R}$ y $(a, c, d) \in \mathcal{R}$ entonces $(a, b, d) \in \mathcal{R}$.
4. Si a, b, c son distintos entonces $(a, b, c) \in \mathcal{R}$ o $(c, b, a) \in \mathcal{R}$.

Definición 1.9: Dado un subconjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ con un orden cíclico \mathcal{R} , diremos que $a, b, c \in \mathcal{D}$ son **consecutivos** si no existe $x \in \mathcal{D} - \{a, b, c\}$ tal que $(a, x, b) \in \mathcal{R}$ o $(b, x, c) \in \mathcal{R}$ o $(c, x, a) \in \mathcal{R}$.

Definición 1.10: Dados $n \in \mathbb{N}$ y dos conjuntos $V \subset \mathbb{R}^2$, $L \subset P(\mathbb{R}^2)$ (potencia de \mathbb{R}^2), con $|V| = n = |L|$, diremos que la pareja ordenada $\mathcal{P}' = (V, L)$ es el **contorno** de un polígono si dándole un orden cíclico a V los elementos de L son los segmentos de recta que unen a los elementos consecutivos de V y dichos segmentos sólo pueden intersectarse en los elementos de V . Diremos que el conjunto V es el conjunto de **vértices** de \mathcal{P}' y el conjunto L es el conjunto de lados de \mathcal{P}' . A \mathcal{P}' junto con el conjunto de puntos que quedan dentro de la curva formada por los lados de L le llamaremos el **polígono** \mathcal{P} de n lados y lo denotaremos $\mathcal{P} = \overline{(V, L)}$.

Definición 1.11: Dado un polígono K de n lados con $n \geq 3$, diremos que es convexo si para todo $x, y \in K$, se cumple que el segmento \overline{xy} se queda contenido en K , es decir $\overline{xy} \subseteq K$. En caso contrario, diremos que el polígono es cóncavo.

Definición 1.12: Una **gráfica** finita \mathcal{G} es una pareja de conjuntos disjuntos $\mathcal{G} = (V, E)$, con $V \neq \emptyset$, $|V| < \infty$, V llamado el conjunto de vértices y E llamado el conjunto de aristas, donde los elementos de E son de la forma $\{v_1, v_2\}$ con v_1 y v_2 vértices distintos en V y se suelen escribir como v_1v_2 . A la cardinalidad de E se le llama el **tamaño** de \mathcal{G} .

Nota 1.13: Las gráficas se representan en el plano por medio de puntos que representan a los vértices y las aristas se representan como líneas que unen a los puntos. Cuando sea posible representar una gráfica en el plano sin que sus aristas se crucen, diremos que **la gráfica es plana**.

En este trabajo siempre trabajaremos con gráficas planas y al referirnos a una gráfica estaremos siempre considerando a una de sus representaciones planas.

Definición 1.14: Dada una gráfica \mathcal{G} y un vértice v de \mathcal{G} , diremos que v tiene **grado** n , con $n \in \mathbb{N}$, si exactamente n aristas inciden en v y lo denotamos como $d(v) = n$.

Nota 1.15: Cuando trabajemos con vértices y aristas, no consideraremos aristas cuyos dos extremos sean el mismo vértice (a esto se le llama que no debe haber lazos). Además consideraremos que entre dos vértices sólo puede haber una arista que los une (a esto se le llama que es simple).

Nota 1.16: En el presente trabajo siempre consideraremos polígonos no degenerados, por lo que todo polígono P tendrá un área $A \in \mathbb{R}$ con $0 < A < \infty$. También todo lado l de un polígono y toda arista e de una gráfica tendrán una longitud $d_l, d_e \in \mathbb{R}$ con $0 < d_l < \infty$ y $0 < d_e < \infty$.

Necesitaremos de un teorema que suele darse al inicio de los cursos introductorios de teoría de gráficas [4]:

Teorema 1.17 (Primer teorema de la teoría de gráficas): Dada una gráfica $\mathcal{G} = (V, E)$ de tamaño m , se cumple que:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Definición 1.18: Sea \mathcal{G} un subgrupo del grupo de transformaciones del plano, sea D un disco topológico de \mathbb{R}^2 . Diremos que D es un **dominio fundamental** de \mathcal{G} en \mathbb{R}^2 si:

- a) $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} g(D)$, donde $g(D) = \{g(d) \in \mathbb{R}^2 \mid d \in D\}$;
- b) Si $g \in \mathcal{G}$, entonces $g(D) = D$ o se tiene que $\text{int}(g(D)) \cap \text{int}(D) = \emptyset$.

Capítulo 2

2. Teselando el plano con triángulos y cuadriláteros

Comenzaremos con dos de las definiciones más importante de este trabajo:

Definición 2.1: Dada una teselación \mathcal{T} , un conjunto de prototeselas \mathcal{P} es un subconjunto $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$ tal que cada $T \in \mathcal{T}$ es congruente con una tesela $P \in \mathcal{P}$ y los elementos de \mathcal{P} no son congruentes entre sí.

En el siguiente ejemplo hay 2 prototeselas: el cuadrado y el octágono regular.

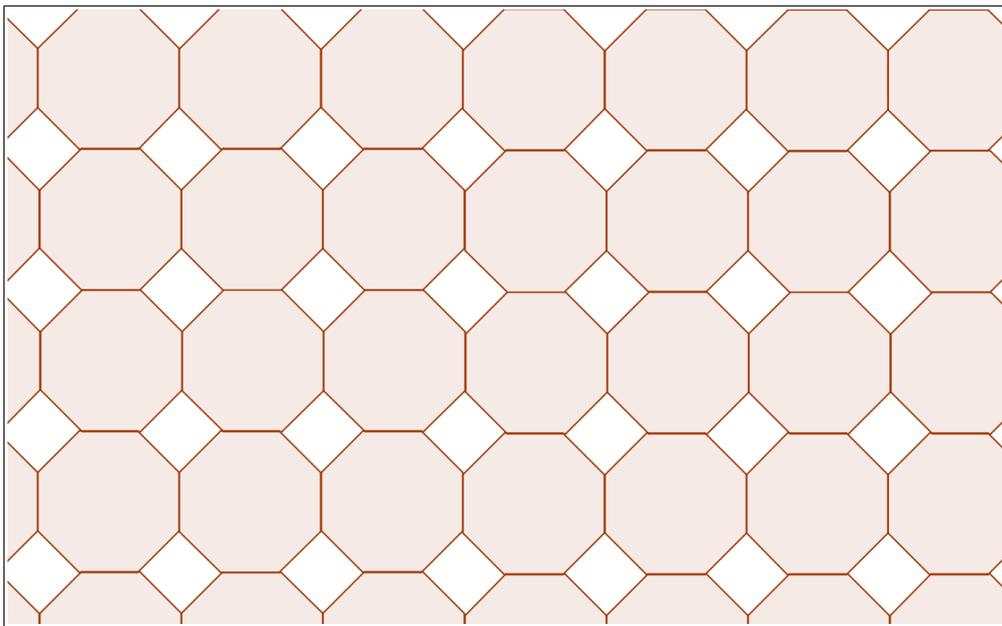


Figura 3

Definición 2.2 Diremos que una teselación \mathcal{T} es **monohedral**, si existe un conjunto de prototeselas \mathcal{P} de \mathcal{T} , tal que $|\mathcal{P}| = 1$. Es decir, si podemos encontrar una tesela $T \in \mathcal{T}$, tal que todas las otras teselas sean congruentes a T y en este caso diremos que la tesela T **tesela el plano**.

A partir de ahora, todas las teselaciones que consideremos serán monohedrales.

El primer polígono con el que trabajaremos es el triángulo por ser el polígono con el menor número de lados posibles.

2.1 Triángulos

Proposición 2.3: Dado un triángulo T , existe una teselación monohedral del plano, que utiliza a T como su única prototesela.

Demostración: Sea T un triángulo con vértices A, B, C :

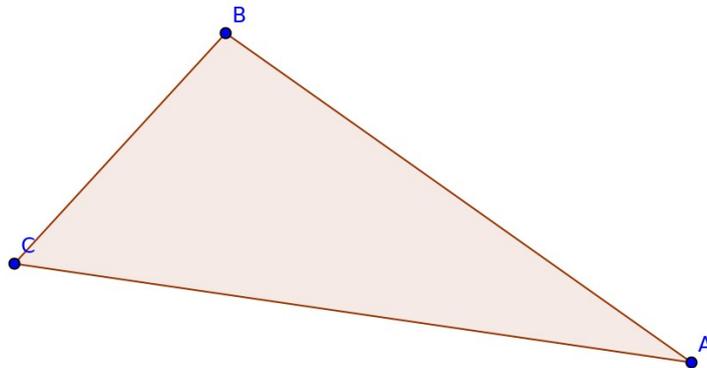


Figura 4

Vamos a construir una teselación utilizando este triángulo como única prototesela, para lo cual consideremos un triángulo congruente $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$, y lo unimos al $\triangle ABC$ haciendo coincidir el lado CA con el lado A_1C_1 , es decir, el triángulo $\triangle A_1B_1C_1$ es el triángulo que surge de rotar al triángulo $\triangle ABC$ sobre el punto medio del lado CA por 180° , como se ve en la figura:

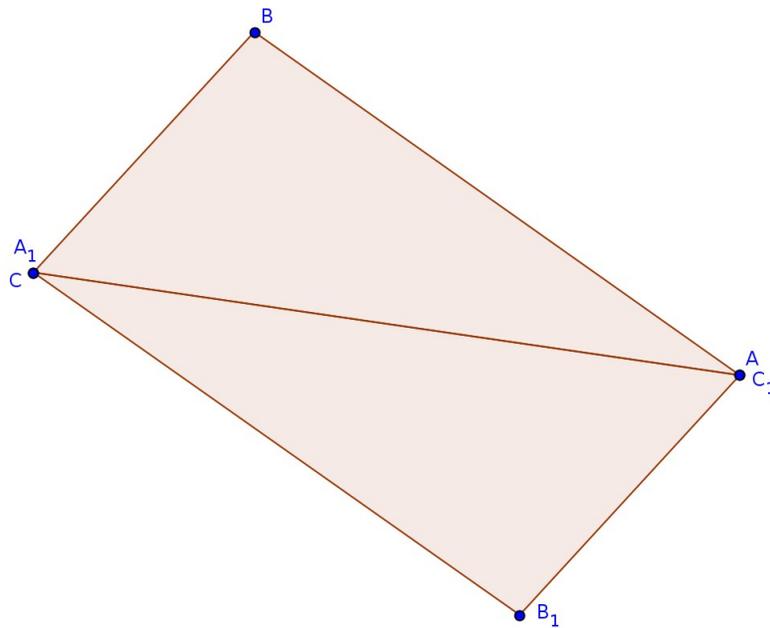


Figura 5

Notemos que $\angle BAC + \angle A_1C_1B_1 + \angle C_1B_1A_1 = 180^\circ$, por lo que el lado AB es paralelo al B_1A_1 . Análogamente tenemos que $BC \parallel C_1B_1$, así que tenemos que el cuadrilátero $ABCB_1$ es un paralelogramo, por lo que hemos reducido el problema de teselar con un triángulo a demostrar que es posible teselar el plano utilizando un paralelogramo cualquiera.

Esto es claramente cierto, como exhibimos en la siguiente figura:

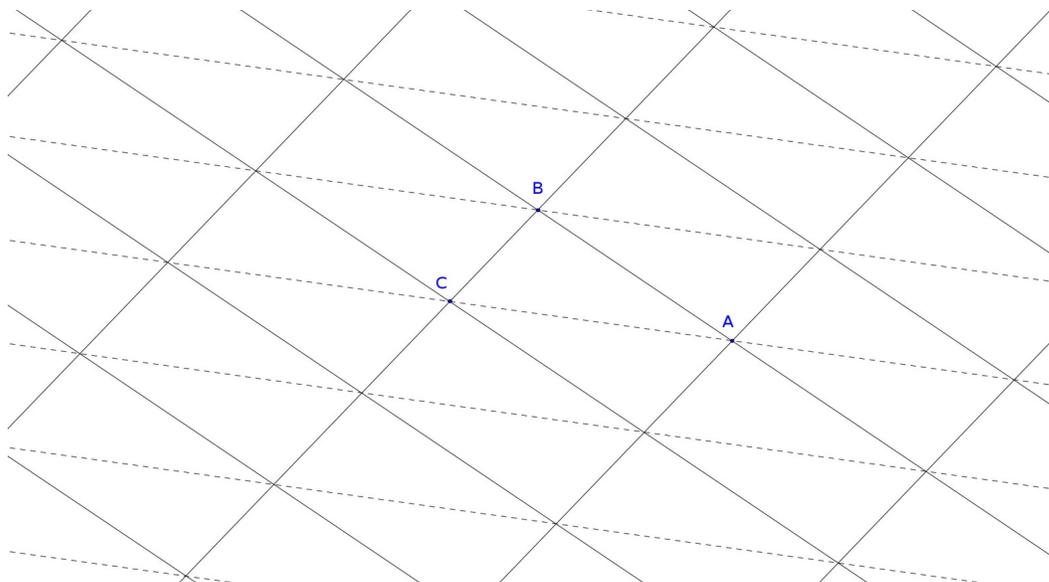


Figura 6

Pasaremos ahora al caso de 4 lados.

2.2 Cuadriláteros

Proposición 2.4: Dado un cuadrilátero Q , existe una teselación monohedral del plano que utiliza a Q , como su única prototesela.

Demostración: Sea Q un cuadrilátero $ABCD$:

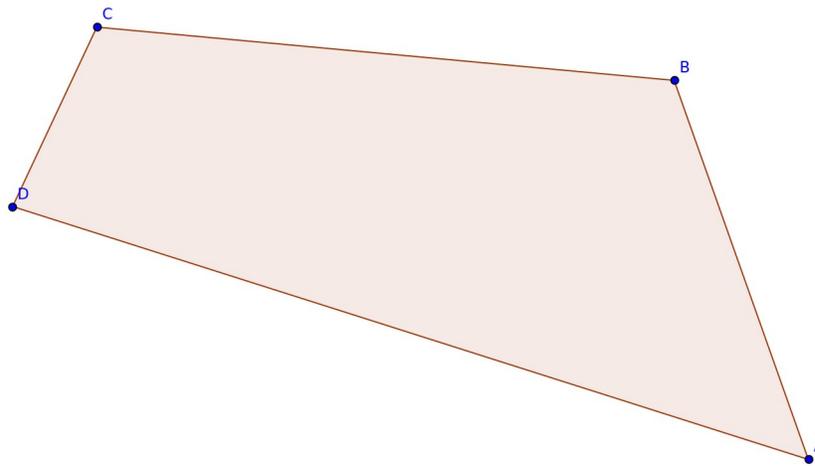


Figura 7

Procederemos a dar una teselación del plano utilizando como única tesela al cuadrilátero $ABCD$. La estrategia será la misma que en el caso anterior, consideremos el cuadrilátero congruente $A_1B_1C_1D_1 \cong ABCD$ que surge de rotar el cuadrilátero $ABCD$ por el punto medio del lado BA por 180° , quedando pegados los lados BA y A_1B_1 :

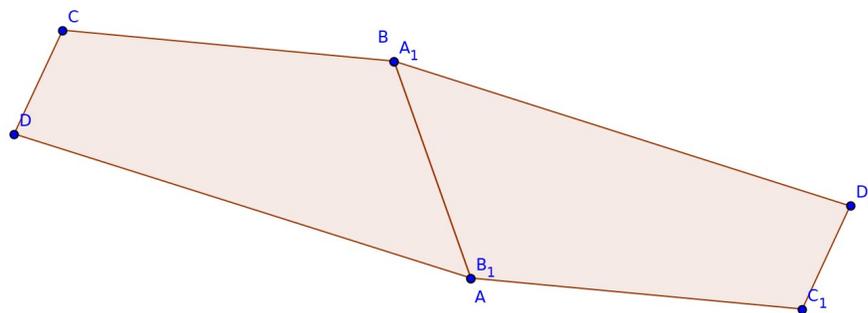


Figura 8

Continuamos este procedimiento ahora para los lados CD, D_1C_1 y análogamente para los cuadriláteros surgidos:

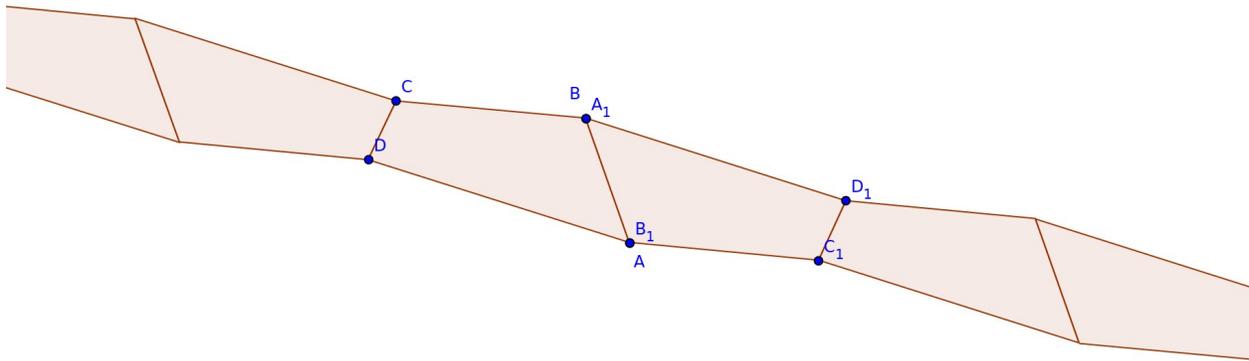


Figura 9

Después aplicamos el mismo procedimiento para los lados BC y DA , es decir, construimos cuadriláteros congruentes rotando por el punto medio de BC y por el punto medio de DA :

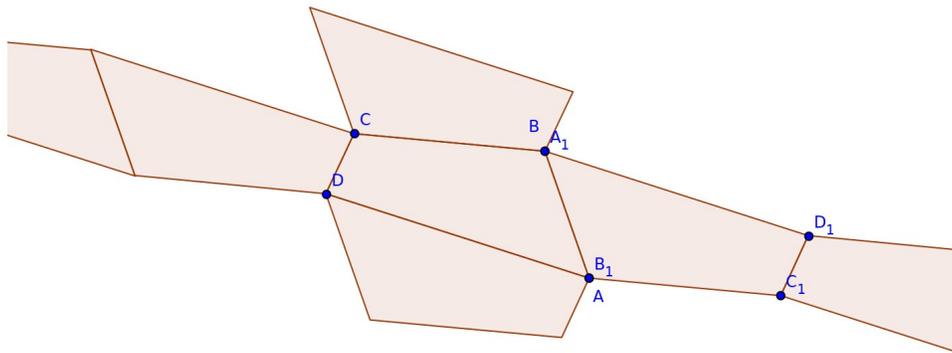


Figura 10

Puesto que sólo los estamos tomando puntos medios y rotando 180° es claro que los lados se están uniendo de forma correcta. Sólo resta ver que sucede con los ángulos.

Notemos que en cada vértice de la teselación inciden cuatro cuadriláteros, cada uno de ellos incidiendo con un representante distinto de los equivalentes a A, B, C y D . Por ejemplo si consideramos al cuadrilátero $ABCD$ y queremos ver que pasa con el vértice B , utilizando el procedimiento anteriormente descrito, construimos sobre los lados AB y BC a los cuadriláteros $A'B'C'D'$ y $A''B''C''D''$ de forma única.

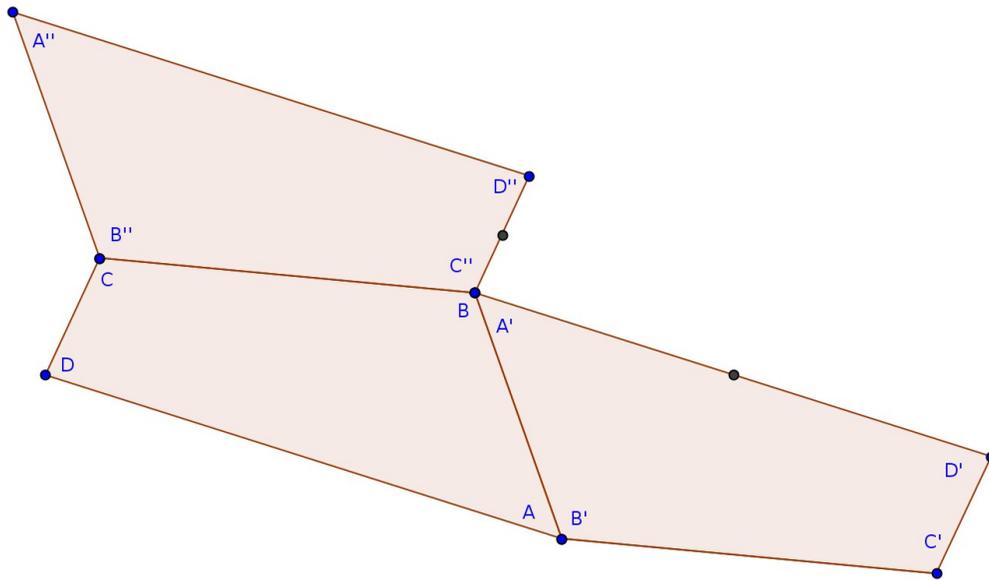


Figura 11

Para el siguiente paso podríamos tomar el punto medio del lado $A'D'$ o al punto medio del lado $C''D''$. En ambos casos lo que quedara adyacente al vértice B será un representante del vértice D ya sea porque copiamos a D' o a D'' .

Entonces en todo vértice de la teselación inciden representantes de los cuatro vértices A, B, C y D cuya suma es 360° . Así que también los vértices se unen de forma adecuada.

Es así que con esta construcción de rotar los cuadriláteros por 180° sobre los puntos medios de los lados, lo cual se hace en una cantidad numerable de pasos, obtenemos la teselación del plano buscada.

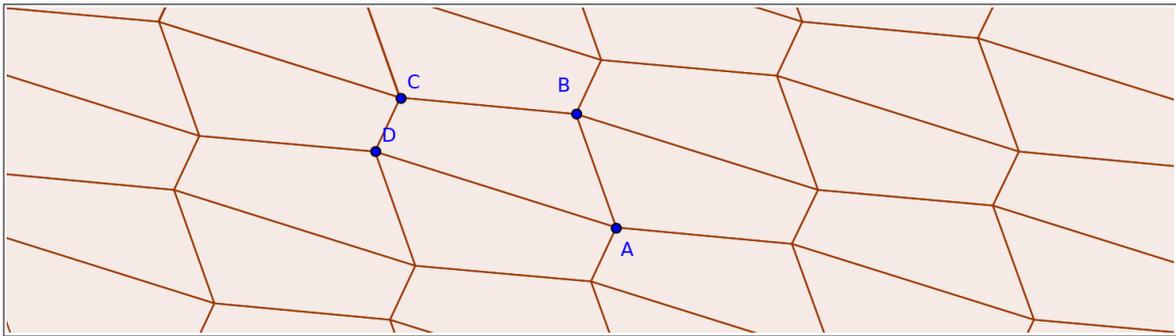


Figura 12

Es importante destacar, que en la construcción nunca se utilizó el hecho de que los cuadriláteros sean convexos, esto se debe a que la construcción también es válida para cuadriláteros cóncavos, por lo que el resultado es válido para los cuadriláteros en general.

Por ejemplo, tomamos un cuadrilátero cóncavo y construimos la teselación con el mismo procedimiento:

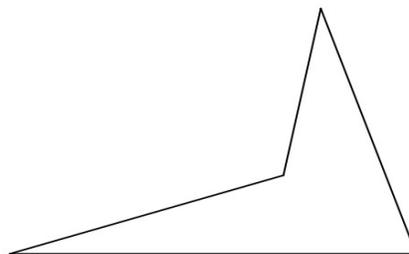


Figura 13

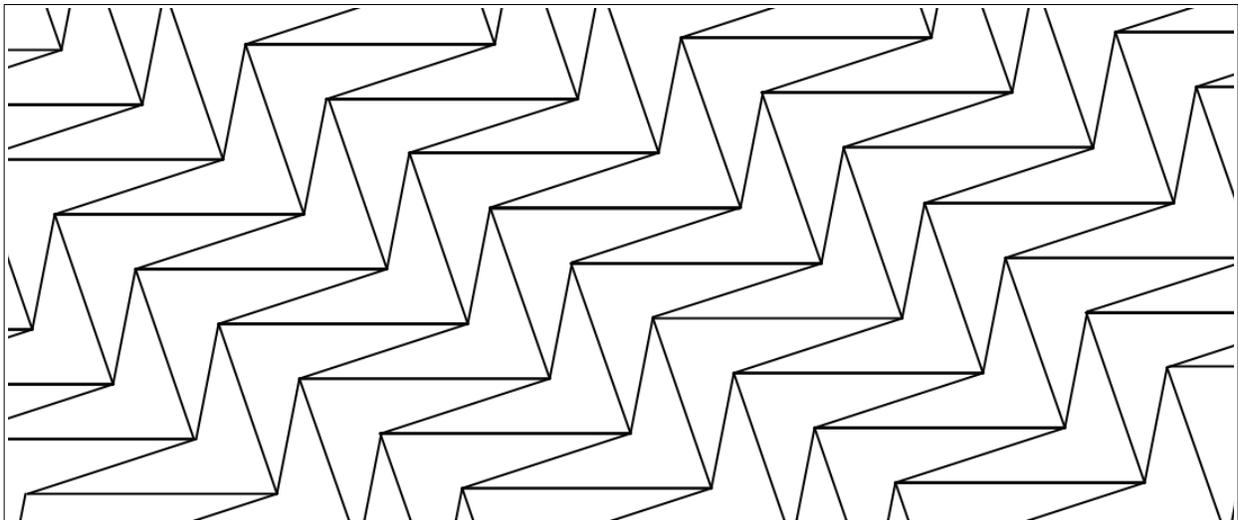


Figura 14

Y aquí vale la pena detenernos para realizar una pequeña discusión sobre la clasificación de los polígonos cóncavos de n lados que teselan.

2.3 Comentario sobre los polígonos cóncavos de n lados que teselan

Pareciera natural hacer la pregunta de enumerar a todos los polígonos de n lados en general que teselan, esto es, considerando tanto a los cóncavos como a los convexos.

Para $n < 4$ el único polígono es el triángulo que siempre es convexo, para $n = 4$ tenemos el cuadrilátero y como ya se mencionó, todo cuadrilátero tesela el plano sin importar si es convexo o cóncavo.

Y lo que sucede si permitimos polígonos cóncavos es que para todo $n \geq 4$ podemos encontrar un polígono de n lados que tesele el plano, el cual puede tener formas muy diversas como podemos ver con estos ejemplos:

Un hexadecágono cóncavo:

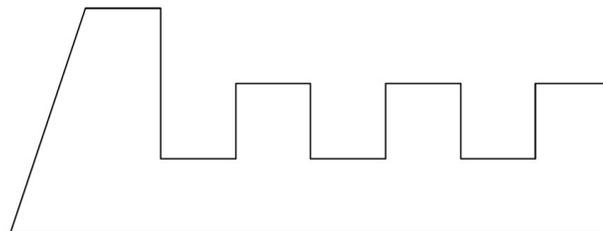


Figura 15

Una teselación generada con el hexadecágono cóncavo

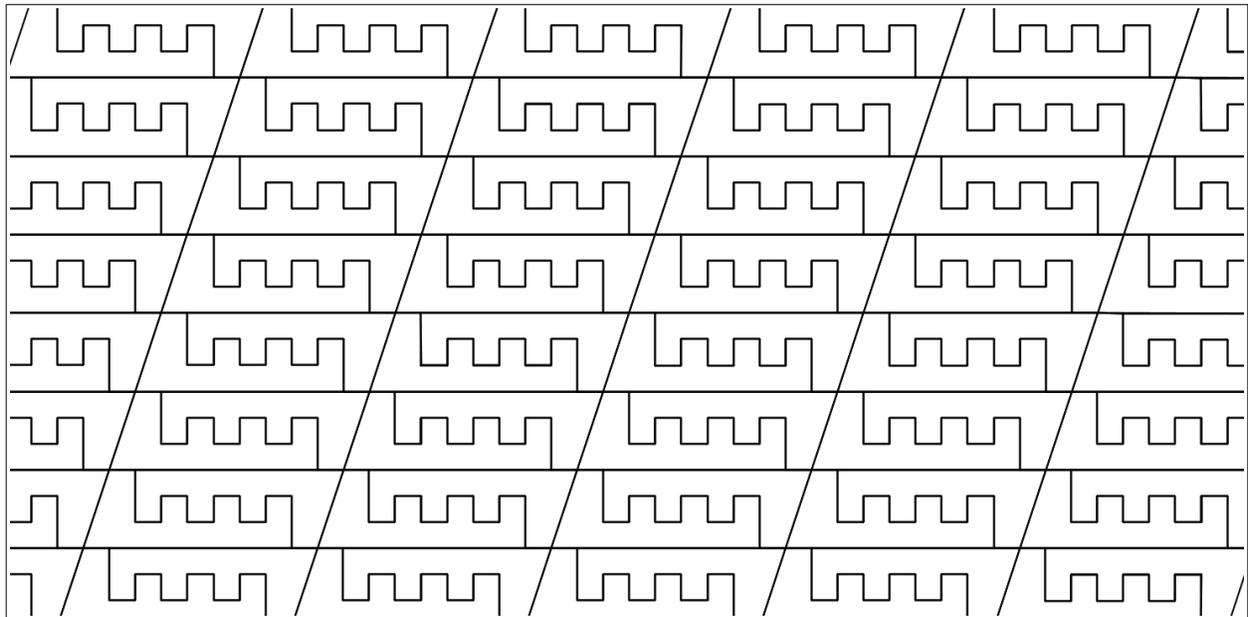


Figura 16

Ahora consideremos el ejemplo de un heptágono:

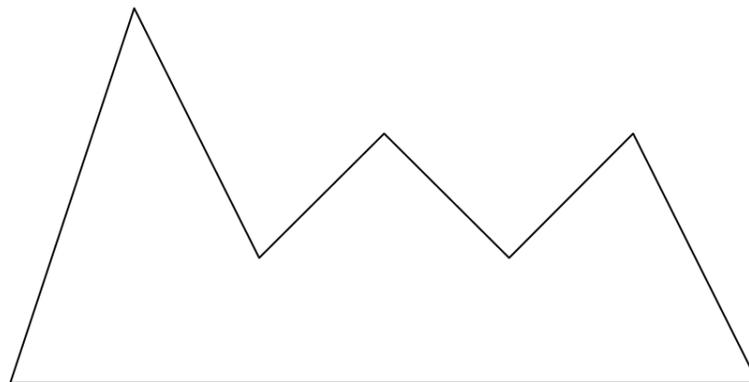


Figura 17

Y una teselación generada con dicho heptágono:

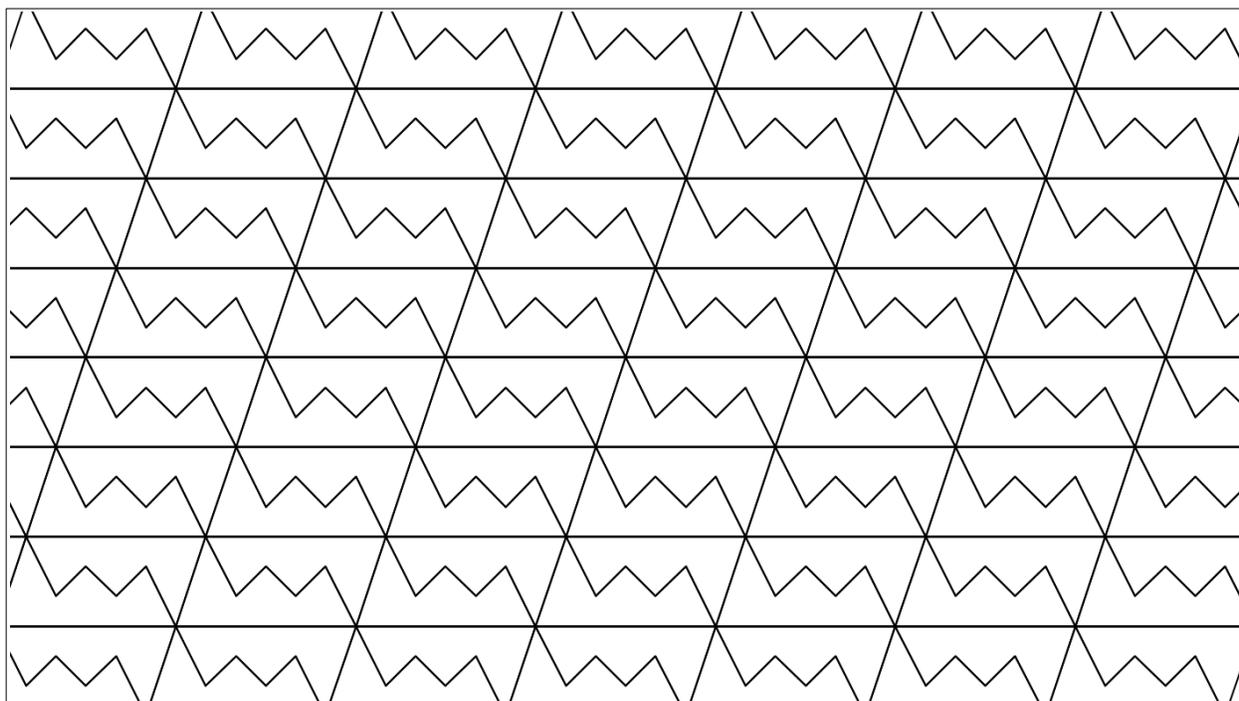


Figura 18

Por medio de construcciones similares, es claro que siempre es posible construir un polígono cóncavo de n lados para $n \geq 4$ que tesele el plano, por lo que la tarea de enumerarlos a todos sería una tarea más complicada, en caso de que fuera posible, pues tendríamos una cantidad infinita por cada $n \geq 4$ tan sólo utilizando construcciones como las de los ejemplos anteriores al alargar o encoger los lados. Por esta razón, las investigaciones recientes se han reducido sólo al caso de polígonos convexos, lo cual ha resultado ser un problema bastante difícil por sí mismo como lo muestran más de 100 años de constantes investigaciones de diversos matemáticos.

Antes de continuar con nuestro análisis de polígonos convexos que teselan el plano y abordar los pentágonos y hexágonos, lo cual será el plato fuerte del presente trabajo, primero veremos qué pasa con los polígonos convexos de $n \geq 7$ lados.

Capítulo 3

3. Los polígonos convexos con $n \geq 7$ lados

3.1 Teoremas de polígonos en el plano

Vamos a demostrar que los polígonos convexos de $n \geq 7$ lados no pueden teselar el plano, para lo cual necesitaremos de varios resultados preliminares. Comenzaremos con la fórmula de Euler para el plano [5], [9], [24].

Definición 3.1: Dada una teselación del plano \mathcal{T} por polígonos, diremos que \mathcal{T} es una teselación **lado-lado** (también llamada **regular**), si para cualesquiera dos teselas distintas $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ se cumple que si AB es un lado de T_1 con vértices A, B y existe un vértice $x \in AB$ tal que $x \in T_1 \cap T_2$, entonces se cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. $x = A$ y A también es el vértice de un lado de T_2
2. $x = B$ y B también es el vértice de un lado de T_2
3. $AB \subseteq T_1 \cap T_2$ y AB es un lado de T_2 .

El presente resultado será general y admitirá polígonos cóncavos o convexos y la teselación no necesita ser lado-lado, pues no se trabajara con los vértices ni los lados de los polígonos sino que se trabajara con vértices y aristas de una gráfica.

Teorema 3.2 (Fórmula de Euler): Sea \mathcal{T} una teselación de un disco topológico, cuyas teselas sean todas polígonos. Sea V el número de vértices en dicha teselación, E el número de aristas y F el número de teselas, entonces se cumple que $V - E + F = 1$.

Demostración: Por inducción sobre el número de polígonos.

Base de Inducción: Sea $F = 1$.

Entonces la teselación consta de una única tesela P_1 . Sea n el número de aristas de la tesela para algún $n \in \mathbb{N}$. Como la teselación está formada por una única tesela cuyas aristas forman un ciclo y todo ciclo de n aristas tiene exactamente n vértices, se tiene que $n = E = V$ por lo que $V - E + F = n - n + 1 = 1$, así que se cumple en este caso.

Hipótesis de Inducción: Supongamos que el resultado es válido para $F, k \in \mathbb{N}$ con $F < k$ y $k > 2$ fijo.

Paso Inductivo: Demostraremos que el resultado es válido para $F = k + 1$.

Como estamos suponiendo $k \geq 1$, entonces $F = k + 1 \geq 2$, así que la teselación tiene al menos dos teselas P_1 y P_2 . Además, la teselación es de un disco topológico; por lo tanto, es de una superficie conexa, así que podemos tomar a P_1 y P_2 de forma que tengan un punto en común.

Más aún, podemos tomarlos de forma que compartan una arista $e \subseteq P_1 \cap P_2$ o de lo contrario existiría una tesela P_j sin aristas adyacentes a alguna otra tesela pero la superficie es conexa por lo que P_j tendría que estar conectada a las otras teselas sólo por puntos, es decir, por vértices. Por la Definición 1.12 las gráficas tienen un número finito de vértices así que P_j debe tener un número finito m de vértices para algún $m \in \mathbb{N}$.

Notemos que si quitamos los m vértices de P_j , entonces estaríamos desconectando a P_j y nos quedaría una figura desconexa lo cual es imposible pues estamos trabajando con un disco topológico y es imposible desconectar a un disco topológico quitando un número finito de puntos, por lo tanto no puede existir una tesela P_j que sea de esa forma, es decir, sin aristas adyacentes.

Es así, que podemos tomar a P_1 y a P_2 de forma que sean adyacentes en una arista e (no necesariamente todo un lado) que pertenezca a ambas teselas como en la figura siguiente:

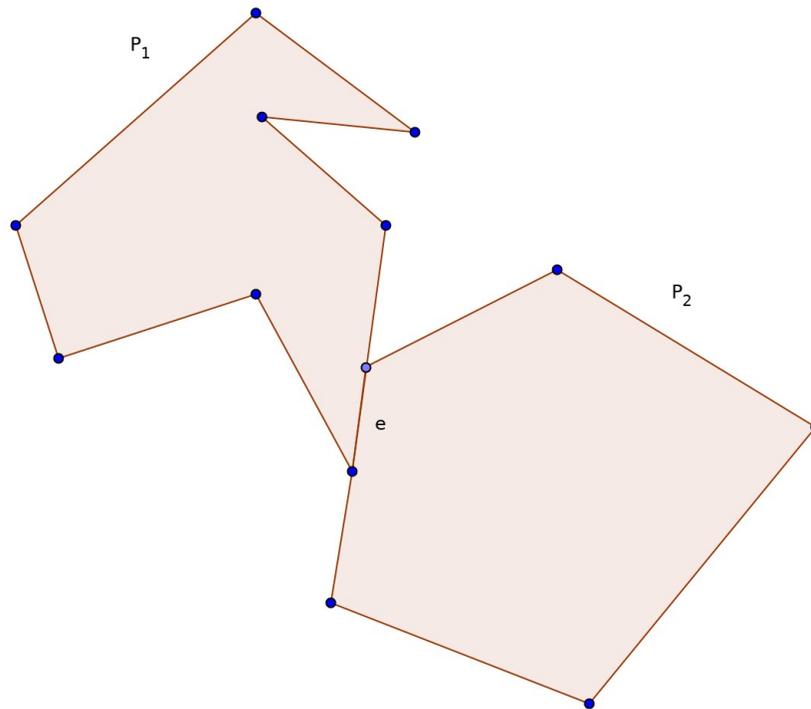


Figura 19

Notemos que al quitar la arista e de la teselación, las teselas P_1 y P_2 se fusionan para convertirse en una única tesela P' , es decir, queda una nueva teselación \mathcal{T}' de E' aristas, V' vértices y F' polígonos que tiene una tesela y una arista menos que la teselación original pero el mismo número de vértices, esto es $E' = E - 1$, $F' = F - 1$ y $V' = V$.

Dado que

$$F' = F - 1 = (k + 1) - 1 = k$$

podemos aplicar la hipótesis de inducción y obtenemos

$$V' - E' + F = 1$$

sustituyendo los valores V' , E' y F' llegamos a:

$$1 = V' - E' + F = V - (E - 1) + (F - 1)$$

es decir,

$$V - E + F = 1. \blacksquare$$

Observación 3.3: Cuando se tenga una representación de una teselación en el plano y dicha teselación no sea lado-lado, la estrategia será trabajar con la gráfica representada por los vértices y aristas de la teselación. En ese caso una arista de la gráfica no necesariamente será equivalente al lado de un polígono como es el caso de la arista e de la figura anterior. Lo mismo ocurrirá con los vértices, el vértice de una gráfica no necesariamente será el vértice de algún polígono de la teselación. Sin embargo, el reverso siempre será cierto; el vértice de un polígono siempre será el vértice de una gráfica. Así que es importante prestar atención a si se está trabajando con los polígonos de la teselación, es decir con las teselas, o si se está trabajando con la gráfica representada por el conjunto de todos los vértices y aristas en la representación de la teselación en el plano.

Para continuar, se podría utilizar el teorema isoperimétrico que dice que dada una curva cerrada de perímetro L que encierra una región de área A , se cumple que $L^2 \geq 4\pi A$. Sin embargo, todas las pruebas modernas requieren calcular integrales o emplear alguna otra herramienta del análisis mientras que las pruebas antiguas de dicho teorema realizan muchas suposiciones (implícitas) que no necesariamente tendrían que cumplirse (como suponer que la curva es suave) [1], [15], [24]. Dado que la intención en este trabajo es sólo emplear herramientas elementales mejor se presentará una versión débil de dicho teorema, como la que puede encontrarse en [6], que sólo se cumplirá para el caso que necesitamos, es decir, para los polígonos.

Lema 3.4: Sea \mathcal{P} un polígono convexo con perímetro menor que β , $\beta \in \mathbb{R}^+$, entonces se cumple que $\text{área}(\mathcal{P}) < \beta^2$.

Demostración: Sea k el número de lados de \mathcal{P} y sean v_1, v_2, \dots, v_k sus vértices en orden cíclico. Sea \mathcal{C} una circunferencia con centro en v_1 y radio $\frac{\beta}{2}$.

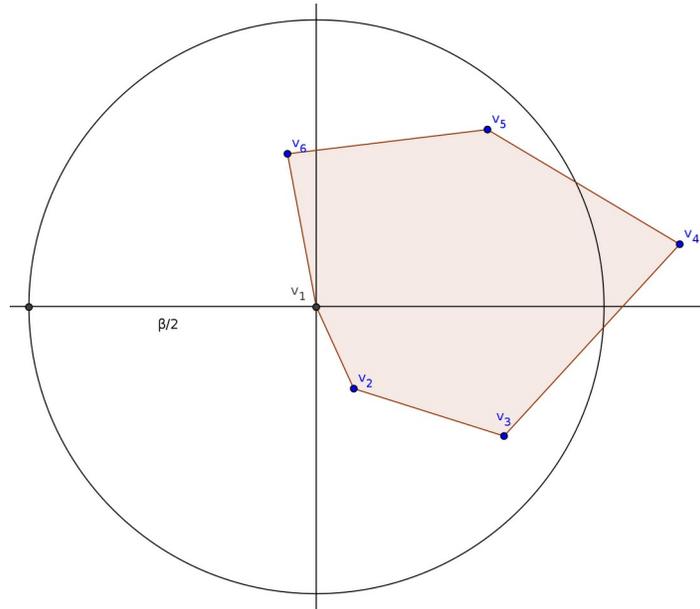


Figura 20

Si existiera un índice $i \in \{2, 3, \dots, k\}$ tal que v_i está fuera de \mathcal{C} tendríamos que $\frac{\beta}{2} < d(v_1, v_i)$, además, por la desigualdad del triángulo, se cumpliría que:

$$\frac{\beta}{2} < d(v_1, v_i) \leq d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3) + \dots + d(v_{i-1}, v_i) \quad (1)$$

análogamente:

$$\frac{\beta}{2} < d(v_i, v_1) < d(v_i, v_{i+1}) + d(v_{i+1}, v_{i+2}) + \dots + d(v_6, v_1) \quad (2)$$

por lo que

$$\beta = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} < d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3) + \dots + d(v_6, v_1)$$

así que

$$\beta < d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3) + \dots + d(v_6, v_1) = \text{perímetro}(\mathcal{P})$$

lo cual es una contradicción pues por hipótesis el perímetro de \mathcal{P} es menor a β . La contradicción surgió de suponer que existía un v_i fuera de \mathcal{C} . Entonces $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}$, por lo tanto

$$\text{área}(\mathcal{P}) \leq \text{área}(\mathcal{D}) = \frac{\pi\beta^2}{4} < \beta^2. \blacksquare$$

De la definición de convexo, un polígono convexo puede tener vértices con ángulos internos de 180° , así que introducimos los siguientes conceptos:

Definición 3.5: Sea $\mathcal{P} = \overline{(V, L)}$ un polígono convexo de n lados con $n \in \mathbb{N}$, $W \subseteq V$ y $F \subset P(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de los segmentos de recta que unen a los elementos consecutivos de W con el orden de V . Diremos que el conjunto W es el conjunto de **flancos** de \mathcal{P} si $\bigcup L = \bigcup F$ y en W no hay 3 elementos consecutivos que sean colineales. A los elementos de W les llamaremos las **esquinas** de \mathcal{P} .

Observación 3.6: Por la definición anterior, al trabajar con flancos y esquinas, no existirán tres esquinas consecutivas colineales en el contorno de un polígono. La definición anterior tiene su motivación en forzar a que los polígonos no tengan ángulos internos de 180° , es decir, buscamos suprimir los vértices con ángulos de 180° pues esos ángulos generarían figuras que no son de interés, por ejemplo, un octágono convexo podría tener la forma de un cuadrilátero al suprimir sus vértices de 180° y ya sabemos que todos los cuadriláteros teselan el plano. Por lo que demostrar que un polígono con vértices con ángulos internos de 180° tesela el plano se reduce a demostrar que el polígono que resulta de suprimir dichos vértices tesela el plano. Por lo tanto podemos considerar a ángulos internos de 180° como triviales.

Con las definiciones y teoremas anteriores estamos listos para dar una prueba de que los polígonos convexos de más de seis lados no pueden generar una teselación monohedral del plano. La primera mención de este hecho la presentó Reinhardt en la pág. 26 de su tesis doctoral [29]. Acertó en pensar que la fórmula de Euler sería útil, pero en general es una prueba informal como muchas que se pueden encontrar en la literatura más reciente [8], [18], [20] (en esta última referencia se mencionan los pormenores de ese tipo de demostraciones).

La primera prueba formal la presenta Ivan Niven [24] donde el resultado surge como un corolario de un resultado mucho más fuerte. A pesar de que actualmente se han publicado otras dos demostraciones igualmente formales y mucho más cortas que fueron revisadas a detalle para la realización de este trabajo [7], [19], presentaremos la prueba de Niven por ser la más intuitiva.

Teorema 3.7: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, entonces no es posible dar una teselación del plano utilizando sólo polígonos convexos, cada uno con más de 6 lados, área mayor que α y perímetro menor a β .

Demostración: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, supongamos que \mathcal{T} es una teselación del plano que utiliza sólo polígonos convexos, cada uno con más de 6 lados, área mayor que α y perímetro menor a β .

Notemos que no estamos suponiendo que la teselación \mathcal{T} sea lado-lado. Como se mencionó en la Observación 3.3 es importante distinguir cuando se este trabajando con los vértices y lados de los polígonos y cuando se este trabajando con los vértices y aristas de las gráficas. Para facilitar esta tarea nos referiremos a los vértices de los polígonos como esquinas tal como se definió en la Definición 3.5 dado a que como ya se mencionó en la Observación 3.6 los vértices con ángulos internos de 180° pueden ser despreciados. El término de lado no se confunde con el de arista por lo que no será necesario referirnos a ellos como flancos.

Si consideramos la gráfica \mathcal{G} formada por las esquinas y los lados de un polígono de n lados, \mathcal{G} se puede transformar en una gráfica \mathcal{G}' que contenga una mayor cantidad de aristas y vértices que \mathcal{G} como se hizo en la Figura 19. Esta es la misma estrategia empleada en [19], [21], [24], aquí presentamos un ejemplo que lo ilustra:

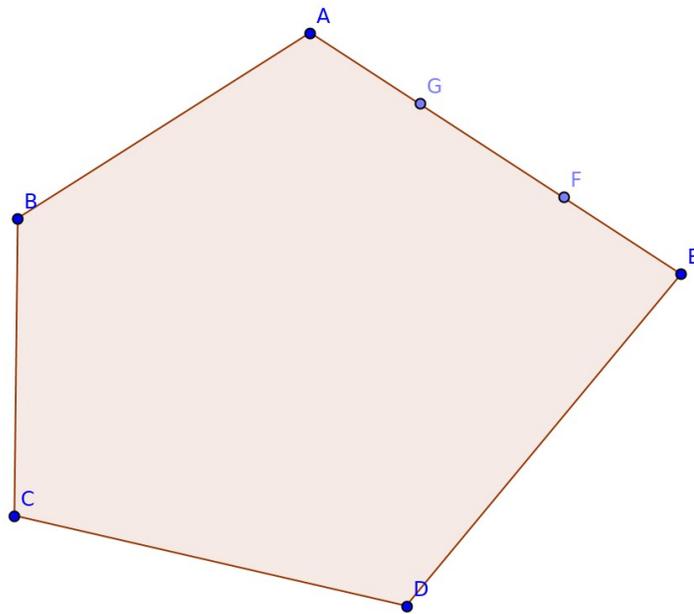


Figura 21

El polígono de la Figura 21 es un pentágono debido a que estamos despreciando los vértices con ángulos internos de 180° así que G y F no pueden ser esquinas de ese polígono, pero si podrán ser vértices de la gráfica formada al tomar los puntos A, B, C, D, E, F, G como vértices y las aristas respectivas $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA$. Para referirnos a esta tesela que sustituye

las esquinas y los lados de un polígono por vértices y aristas de una gráfica utilizaremos el término de **circuito lineal**. En la demostración veremos a las teselas de ambas formas, es decir, como polígonos convexos y como circuitos lineales. Lo anterior será para forzar a que una teselación que no es lado-lado lo sea de algún modo si lo vemos como una teselación de circuitos lineales como en el siguiente ejemplo:

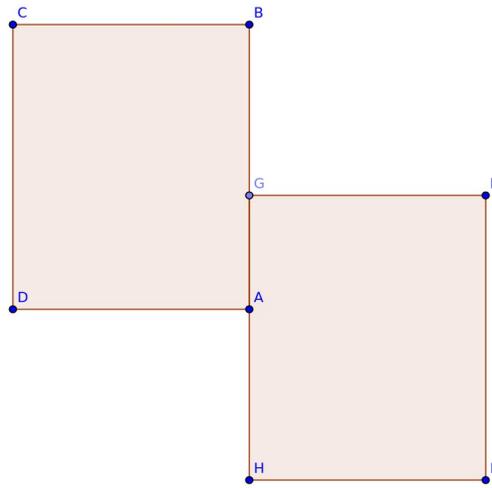


Figura 22

En la Figura 22 si los cuadriláteros $ABCD$ y $FEHG$ son dos teselas de una teselación \mathcal{T} del plano, es claro que \mathcal{T} no es una teselación lado-lado, pero podemos forzarla a que lo sea si al cuadrilátero $ABCD$ lo transformamos en el circuito lineal de 5 vértices $AGBCD$ y al cuadrilátero $FEHG$ lo transformamos en el circuito lineal de 5 vértices $EFGAH$, es decir, aunque \mathcal{T} no es lado-lado la hemos forzado a serlo si vemos a cada tesela como un circuito lineal. Con estas distinciones haremos un abuso de notación al considerar a las teselas $ABCD$ y $FEHG$ como cuadriláteros y pentágonos al mismo tiempo. Haremos la distinción en cada tesela cuando la consideremos como el polígono convexo original de n lados y cuando la consideremos como un circuito lineal de m aristas. Evidentemente se tendrá que $n \leq m$.

Es importante observar que así como un polígono de n esquinas tiene n lados, un circuito lineal de m vértices tendrá m aristas. Además, es fácil probar que la suma de ángulos internos de un polígono convexo de n lados es $180(n - 2)^\circ$ (la demostración se hace tomando un punto en el interior del polígono, trazando los segmentos de recta desde ese punto a cada esquina y recordando que la suma de ángulos internos de un triángulo es 180°). Por el mismo argumento, la

suma de ángulos internos de un circuito lineal de m vértices será $180(m - 2)^\circ$. En particular, como trabajamos con polígonos de al menos 7 lados, la suma de ángulos internos de un polígono de la teselación \mathcal{T} será al menos de $5 \times 180^\circ = 900^\circ$ (y lo mismo para un circuito lineal). Para realizar las cuentas será conveniente trabajar con radianes en lugar de grados por lo que hablaremos de 5π radianes en lugar de 900° . (1)

Consideremos al plano con su sistema de coordenadas. Sea $r \in \mathbb{R}^+$, $r > \beta$ (por el momento con esto será suficiente, después pediremos que r sea aún más grande para generar una contradicción). Sean $s(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r, |y| \leq r\}$ y $N_0 \subset \mathcal{T}$ de forma que dada una tesela $T \in \mathcal{T}$, se cumple que $T \in N_0 \iff T \cap s(r) \neq \emptyset$

Notemos que $\bigcup N_0$ podría tener hoyos como la siguiente figura:

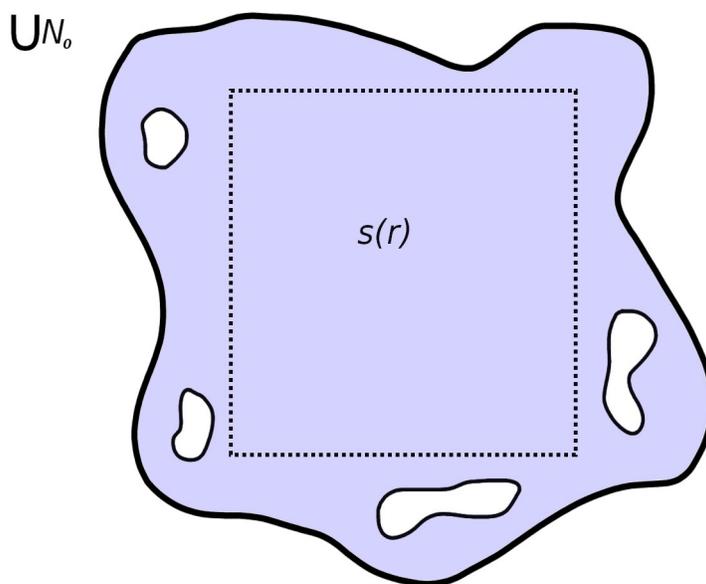


Figura 23

$\bigcup N_0$ es conexo pues toda tesela en $\bigcup N_0$ intersecta a $s(r)$, así que podemos considerar a \mathcal{F} la curva formada por la frontera exterior de $\bigcup N_0$. Los hoyos están formados por teselas que no intersectan a $s(r)$ pero que están dentro de la curva \mathcal{F} . Sea $N_1 \subset \mathcal{T}$ de forma que dada una tesela $T \in \mathcal{T}$ se cumpla que $T \in N_1 \iff T \subseteq \text{int}(\mathcal{F}) \cup \mathcal{F}$. Con esta nueva construcción, las teselas que formaban los hoyos si estarán en N_1 , así para $\bigcup N_1$ queda la siguiente figura (un disco topológico):

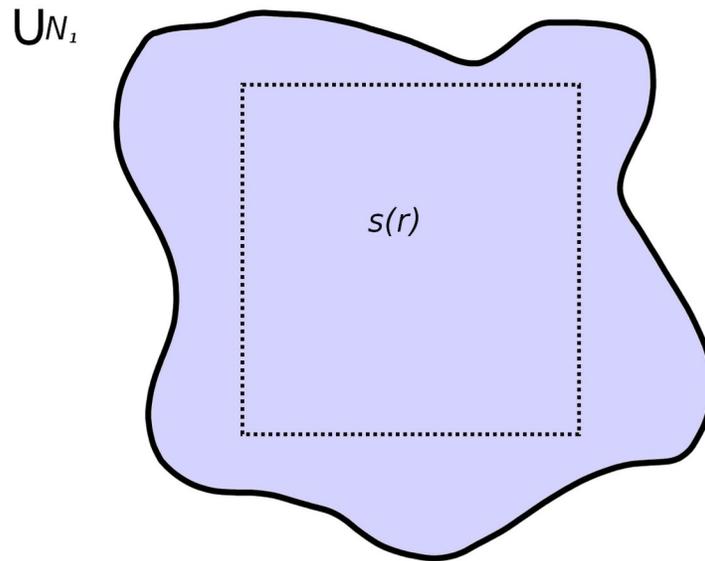


Figura 24

Por construcción, el área de $S(r) = 4r^2 < \infty$, además cada tesela de \mathcal{T} tiene área mayor que α , así que N_1 no puede tener una infinidad de teselas. Sea f_1 el número de teselas en N_1 , es decir, $f_1 = |N_1|$.

Sea $s(r + \beta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r + \beta, |y| \leq r + \beta\}$. Por hipótesis cada tesela de \mathcal{T} tiene perímetro menor que β así que $\bigcup N_1 \subset s(r + \beta)$ (contención estricta). Sea $N' \subset \mathcal{T}$ de forma que dada una tesela $T \in \mathcal{T}$ se cumpla que $T \in N' \iff T \cap s(r + \beta) \neq \emptyset$ y sea N para $s(r + \beta)$ como N_1 para $s(r)$.

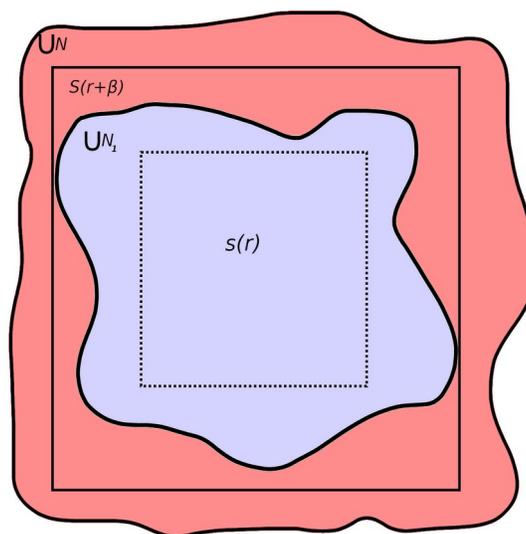


Figura 25

Sean v, v_1 el número de vértices, e, e_1 el número de aristas y f, f_1 el número de teselas en $\bigcup N$ y $\bigcup N_1$ respectivamente considerando a las teselas como circuitos lineales. Entonces, por el Teorema 3.2 se tiene que

$$v - e + f = 1$$

o equivalentemente

$$v + f = e + 1$$

y sustituyendo la igualdad por una desigualdad

$$v + f > e \tag{2}$$

Consideremos ahora la suma de ángulos internos de los circuitos lineales de N_1 . Como hay f_1 circuitos lineales y por (1) sabemos que la suma de ángulos internos de cada circuito lineal es al menos 5π , además si K es la suma de ángulos de las teselas vistas como circuitos lineales en N_1 entonces $K \geq 5\pi f_1$.

Por otro lado hay v_1 vértices en $\bigcup N_1$ y dichos vértices no están en la frontera de $\bigcup N$ por lo que al sumar todos los ángulos internos que inciden en dichos vértices sumarán exactamente 2π cada uno en $\bigcup N$ mientras que los que están en la frontera de $\bigcup N$ sumarán menos de 2π , así

$$2\pi v_1 \geq K \geq 5\pi f_1$$

es decir,

$$2v_1 \geq 5f_1 \tag{3}$$

Ahora trabajemos con $\bigcup N$ que sabemos que tiene v vértices. Por el Teorema 1.17 tenemos que $2e = \sum_{u \in \bigcup N} d(u)$, por otro lado, notemos que $d(u) \geq 3$ para todo vértice u en el interior de $\bigcup N$ pues los ángulos internos del circuito lineal miden a lo mas 180° y cuando un ángulo es de 180° ese vértice tendrá que ser adyacente a al menos otras dos teselas como en el caso de los vértices A y G de la Figura 22 y para los demás vértices z se cumplirá al menos que $d(z) \geq 2$.

Así, si a_0 es el número de vértices en el interior de $\bigcup N$ y a_1 el número de vértices en la frontera de $\bigcup N$, tenemos que $a_0 + a_1 = v$,

y por lo anterior tenemos que:

$$2e = \sum_{u \in \cup N} d(u) \geq 3a_0 + 2a_1 \quad (4)$$

En particular, los vértices de $\cup N_1$ son vértices internos de $\cup N$, así que

$$a_0 \geq v_1$$

sumando $2v$ de ambos lados

$$a_0 + 2v \geq v_1 + 2v$$

sustituyendo v

$$a_0 + 2(a_0 + a_1) \geq v_1 + 2v$$

simplificando

$$3a_0 + 2a_1 \geq 2v + v_1$$

sustituyendo (4)

$$2e \geq 3a_0 + 2a_1 \geq 2v + v_1$$

por lo que

$$2e \geq 2v + v_1 \quad (5)$$

Por (2) tenemos

$$2v + 2f > 2e \geq 2v + v_1$$

así que

$$2f > v_1$$

multiplicando por 2

$$4f > 2v_1$$

utilizando (3):

$$4f > 2v_1 \geq 5f_1 \quad (6)$$

Sea f_2 la cantidad de teselas que están en N pero no están en N_1 , es decir, $f_2 = f - f_1$

Entonces tenemos por (6) que:

$$4f_1 + 4f_2 = 4f > 5f_1$$

así que

$$4f_2 > f_1 \quad (7)$$

Por hipótesis inicial, cada tesela de \mathcal{T} tiene perímetro menor que β , así, por el Lema 3.4, cada tesela tendrá área menor que β^2 . Así, si γ es la suma de áreas de las teselas de N_1 tenemos que $\beta^2 f_1 > \gamma$, en particular el área de N_1 es mayor o igual que el área de $s(r)$ que es $4r^2$ por lo que

$$\beta^2 f_1 > \gamma \geq 4r^2$$

así que

$$\beta^2 f_1 > 4r^2 \quad (8)$$

Consideremos a $s(r + 2\beta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r + 2\beta, |y| \leq r + 2\beta\}$

Como $\beta > 0$ por hipótesis, es claro que $s(r + \beta) \subset s(r + 2\beta)$.

Dado que por hipótesis todas las teselas tienen perímetro menor que β se tiene que si $T \in N$ entonces $T \subset s(r + 2\beta)$, así que $\bigcup N \subset s(r + 2\beta)$.

Consideremos las f_2 teselas que están en N pero no están en N_1 . Sea δ el área total de las f_2 teselas. Por hipótesis cada tesela tiene área mayor que α , es decir

$$\delta > \alpha f_2 \quad (9)$$

Por otro lado, las f_2 teselas están contenidas en $s(r + 2\beta)$ pero su intersección con $s(r)$ es nula, donde $s(r) \subset s(r + 2\beta)$, así que podemos acotar superiormente a δ :

$$\begin{aligned} \delta &< \text{área}[s(r + 2\beta)] - \text{área}[s(r)] \\ &= [2(r + 2\beta)]^2 - [2r]^2 \\ &= 4r^2 + 16r\beta + 16\beta^2 - 4r^2 \\ &= 16\beta(r + \beta) \end{aligned}$$

por lo que

$$16\beta(r + \beta) > \delta$$

sustituyendo (9)

$$16\beta(r + \beta) > \delta > \alpha f_2$$

multiplicando por $4\beta^2$

$$64\beta^3(r + \beta) > 4\beta^2\alpha f_2$$

por (7) tenemos

$$64\beta^3(r + \beta) > 4\beta^2\alpha f_2 > \beta^2\alpha f_1$$

sustituyendo (8)

$$64\beta^3(r + \beta) > 4\beta^2\alpha f_2 > \beta^2\alpha f_1 > 4\alpha r^2$$

dividimos entre 4

$$16\beta^3(r + \beta) > \alpha r^2$$

dividiendo entre αr

$$16\beta^3\alpha^{-1} \left(1 + \frac{\beta}{r}\right) > r$$

Aquí α y β son números fijos, pero a r lo construimos y sólo le pedimos como condición que fuera mayor que β , así que podemos pedirle más. Podemos pedir $r > 16\beta^3\alpha^{-1} + \beta$, lo cual no afectará los resultados anteriores pues claramente sigue siendo un número mayor que β , entonces tenemos:

$$16\beta^3\alpha^{-1} \left(1 + \frac{\beta}{r}\right) > r > 16\beta^3\alpha^{-1} + \beta$$

restando los términos comunes

$$\frac{16\beta^4\alpha^{-1}}{r} > \beta$$

despejando a r

$$16\beta^3\alpha^{-1} > r$$

estamos suponiendo $r > 16\beta^3\alpha^{-1} + \beta$, por lo que

$$16\beta^3\alpha^{-1} > 16\beta^3\alpha^{-1} + \beta$$

con lo que llegamos a que $0 > \beta$ lo cual contradice la hipótesis de que $\beta > 0$.

Así que es falsa la existencia de una teselación \mathcal{T} del plano que utiliza sólo polígonos convexos, cada uno con más de 6 lados, área mayor que α , perímetro menor a β con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. ■

Y finalmente, uno de los resultados más fuertes de este trabajo:

Corolario 3.8: No es posible dar una teselación monohedral del plano utilizando como prototipo a un polígono convexo de más de seis lados.

Demostración: Supongamos que fuera posible teselar el plano de forma monohedral con un polígono convexo \mathcal{P} de más de 6 lados.

Sea α' el área de \mathcal{P} y sea β' el perímetro de \mathcal{P} .

Sea $\alpha = \frac{\alpha'}{2}$ y sea $\beta = 2\beta'$.

Por el Teorema 3.7 no es posible teselar el plano con polígonos de más de seis lados, cada uno con área mayor a α y perímetro menor a β . En este caso, por ser una teselación monohedral, todos los polígonos serían congruentes a \mathcal{P} que tiene más de seis lados, área mayor a α y perímetro menor a β lo cual contradice el teorema. Por lo tanto no existe tal teselación. ■

Capítulo 4

4. Pentágonos y hexágonos que teselan

4.1 Los grupos de simetría del plano

El grupo \mathcal{G} de simetrías de una teselación \mathcal{T} en el plano es el grupo de todas las isometrías que dejan invariante a \mathcal{T} y se clasifican de la siguiente manera: Si $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$ es el subgrupo de todas las traslaciones de \mathcal{G} diremos que:

- \mathcal{G} es un **grupo de roseta** si $\mathcal{H} = \mathbb{I}$.
- \mathcal{G} es un **grupo de friso** si \mathcal{H} es un grupo cíclico infinito generado por un sólo elemento.
- \mathcal{G} es un **grupo de mosaico** si \mathcal{H} es un grupo infinito generado por dos traslaciones cuyos vectores de traslación son linealmente independientes.

Como se mencionó en la cita de David Hilbert en la introducción de este trabajo, uno de los resultados más importantes en la clasificación de teselaciones fue descubierto por Fedorov en 1891 cuando demostró que sólo existen 17 grupos de mosaico distintos en el plano.

Notemos que es incorrecto pensar en la existencia de una teselación sin grupo de simetrías pues la identidad es una isometría que deja invariante a cualquier teselación, así en caso de que la identidad sea la única isometría presente, el grupo de simetrías de esa teselación correspondería al grupo cíclico trivial C_1 . Es así que dada una teselación del plano \mathcal{T} siempre podremos hablar de su grupo de simetrías.

A continuación, presentaremos los cuatro teoremas más importantes relacionados a la clasificación de los grupos de simetrías del plano. Omitiremos las demostraciones debido a que son bastante extensas y en realidad ninguno de estos teoremas será utilizado para el desarrollo del presente trabajo pues su campo de aplicación está más relacionado con la cristalografía y la química [22], [30]. Sus demostraciones se pueden encontrar en [11], [22] y [25].

Teorema 4.1 (Clasificación de las isometrías del plano): Toda isometría del plano, distinta a la identidad, es exactamente una traslación o una rotación o una reflexión o una traslación con reflexión (a esta última la llamaremos *deslizamiento*).

Definición 4.2: Dado un grupo \mathcal{G} diremos que es **cíclico** de orden n , y lo denotaremos por C_n , si $n = |\mathcal{G}|$ y existe un elemento $a \in \mathcal{G}$ tal que todo elemento $b \in \mathcal{G}$ puede ser expresado de la forma $b = a^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

Definición 4.3: Dado un polígono P_n regular de n lados, nombraremos como grupo **diédrico** de orden $2n$ al grupo de isometrías de P_n y lo denotaremos por D_n .

Teorema 4.4 (Leonardo): Un grupo de simetrías en el plano es finito si y sólo si es un grupo cíclico C_n o un grupo diédrico D_n .

Definición 4.5: Diremos que un punto P es un **n -centro** de rotación para $n \in \mathbb{N}$ de una teselación \mathcal{T} si n es el máximo número para el que se cumple que existe una rotación en el grupo de simetrías de \mathcal{T} de orden n con centro en P .

Definición 4.6: Diremos que una teselación es **periódica** si su grupo de simetrías es un grupo de tipo mosaico.

Teorema 4.7: (Restricción cristalográfica): Si un punto P es un n -centro de rotación de una teselación (periódica) \mathcal{T} , entonces n es 2, 3, 4 o 6.

El siguiente teorema de clasificación fue descubierto inicialmente por Evgraf Fedorov en 1891, redescubierto en 1897 por Fricke y Klein y nuevamente redescubierto en 1924 por Pólya y Niggli [22].

Teorema 4.8 (Fedorov): Existen exactamente 17 grupos distintos de mosaicos en el plano.

A continuación, presentaremos una tabla con los 17 grupos distintos de mosaicos en el plano lo que será de utilidad para la clasificación de las teselaciones que se verán en las secciones siguientes. La notación empleada para identificar a cada uno de los 17 grupos cambia dependiendo del autor lo que puede generar contradicciones si no se revisa previamente a que se refiere cada autor con su notación [11], [30]. Aquí presentaremos la tabla de Grünbaum [11] (aunque sólo para mosaicos) pero con la notación de Schattschneider [30].

Los 17 grupos de mosaicos en el plano

Tipo	Notación internacional	Número de clases de transitividad					
		Reflexiones	Deslizamientos con reflexiones no triviales	Rotaciones de período			
				6	4	3	2
$p111$	$p1$	0	0	0	0	0	0
$p1g1$	pg	0	2	0	0	0	0
$p1m1$	pm	2	0	0	0	0	0
$c1m1$	cm	1	1	0	0	0	0
$p211$	$p2$	0	0	0	0	0	4
$p2gg$	pgg	0	2	0	0	0	2
$p2mg$	pmg	1	2	0	0	0	2
$p2mm$	pmm	4	0	0	0	0	4
$c2mm$	cmm	2	2	0	0	0	4
$p311$	$p3$	0	0	0	0	3	0
$p31m$	$p31m$	1	1	0	0	2	0
$p3m1$	$p3m1$	1	1	0	0	3	0
$p411$	$p4$	0	0	0	2	0	1
$p4gm$	$p4g$	1	2	0	1	0	1
$p4mm$	$p4m$	3	1	0	2	0	1
$p611$	$p6$	0	0	1	0	1	1
$p6mm$	$p6m$	2	2	1	0	1	1

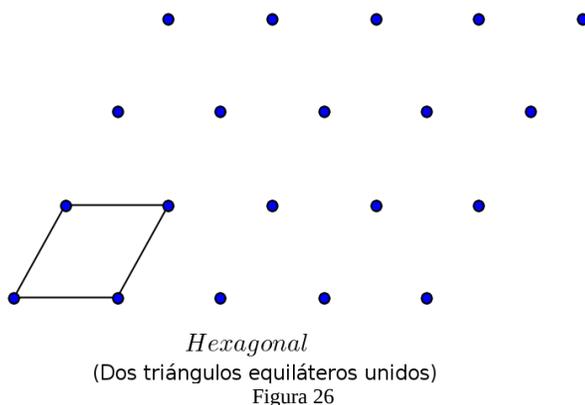
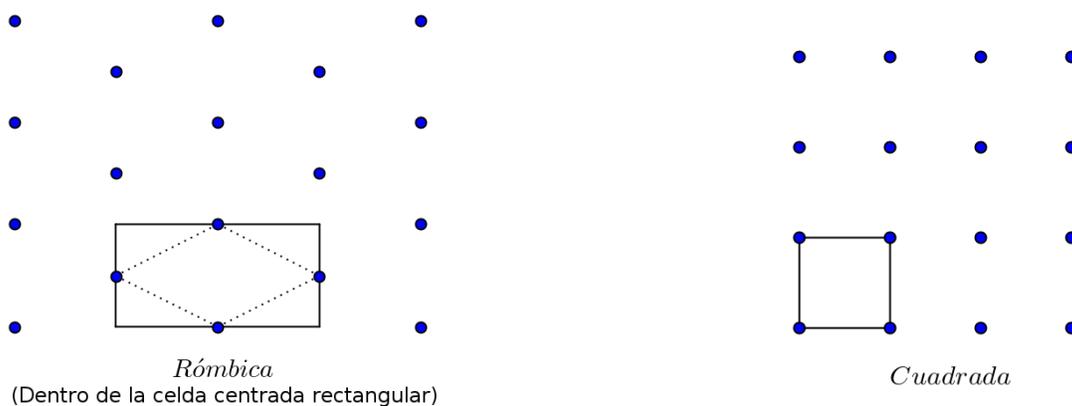
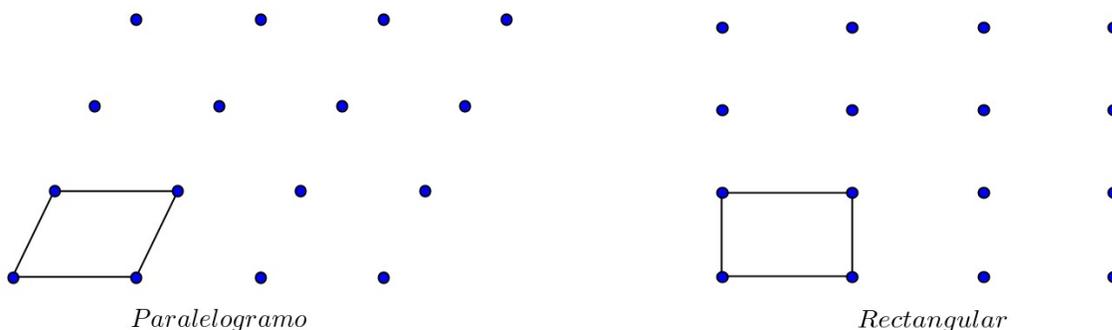
Tabla 1

Antes de explicar el significado de la notación, es necesario explicar que son las **celdas**. Dada una teselación \mathcal{T} (de tipo mosaico) con v_1 y v_2 dos de sus vectores de traslación de tamaño mínimo y linealmente independientes, tomaremos una tesela $T \in \mathcal{T}$ y dibujaremos un punto en cada centro de rotación de orden máximo de \mathcal{T} contenido en T . Le aplicaremos todas las transformaciones lineales posibles con coeficientes enteros a v_1 y a v_2 desde los puntos recién construidos lo que generara un subconjunto numerable de puntos en el plano y diremos que es una **retícula** de \mathcal{T} .

Podemos construir paralelogramos que tengan como vértices a los puntos de la retícula o que los puntos medios de sus lados sean los puntos de la retícula. Si el paralelogramo formado tiene como sus vértices a puntos de la retícula y es de área mínima con esa propiedad diremos que

dicho paralelogramo es una **celda unitaria**. Por otro lado, si construimos a un paralelogramo tal que los puntos medios de sus lados sean puntos de la retícula y que esos puntos formen a una celda unitaria con al menos una de las diagonales de esa celda unitaria un eje de simetría del paralelogramo, diremos que dicho paralelogramo es una **celda centrada**. Nótese que una celda centrada tiene el doble de área de una celda unitaria.

Tipos de retículas



Estos conceptos son casi exclusivos del área de la cristalografía por lo que generalmente no se definen en los textos de matemáticas y su uso es poco frecuente pero se presentan aquí para poder explicar cómo se lee la notación de los grupos de simetría.

Lo primero que se tiene que hacer es seleccionar a un eje principal. El eje principal puede ser cualquier recta que contenga un lado de una celda unitaria y en caso de existir ejes de reflexión o de deslizamiento con reflexión perpendiculares a esas rectas será una de esas rectas perpendicular a un eje de reflexión o deslizamiento con reflexión. Una vez seleccionado el eje principal escribimos la notación del grupo de la siguiente forma:

1. En la primera posición se pone una letra p si las celdas en la retícula formada por las traslaciones son unitarias (también conocidas como primitivas) o una letra c si las celdas son centradas.
2. En la segunda posición se pone el orden máximo de rotación del grupo de simetrías que por el Teorema 4.7 puede tomar valores 6, 4, 3, 2 o el valor 1 en caso de no tener rotaciones.
3. En la tercera posición se pone la letra m en caso de que el grupo de simetrías tenga reflexiones con ejes de reflexión perpendiculares al eje principal o bien la letra g en caso de que el grupo no tenga reflexiones pero sí tenga deslizamientos con reflexiones con ejes de simetría perpendiculares al eje principal. En caso de que el grupo no tenga ninguno de esos dos tipos de isometrías se pone el número 1.
4. En la cuarta posición se pone la letra m en caso de que el grupo de simetrías tenga reflexiones con ejes de reflexión a un ángulo de:
 - 180° si el máximo orden de rotación es 1 o 2
 - 45° si el máximo orden de rotación es 4
 - 60° si el máximo orden de rotación es 3 o 6

Todos estos ángulos respecto al eje principal. De manera análoga se pone una g si el grupo no tiene ese tipo de reflexiones, pero sí tiene deslizamientos con reflexiones con ejes de simetría

bajo las mismas condiciones respecto a ángulos y máximos ordenes de rotación. Finalmente, si el grupo no tiene ninguno de estos tipos de isometrías se pone un 1.

Diremos que un deslizamiento con reflexión es no trivial si la rotación y traslación que la componen no están ambas en el grupo de simetría de la teselación.

Dado que por el Teorema 4.8, se sabe que esos 17 grupos son todos los grupos de mosaicos en el plano, la notación se suele abreviar tal como aparece en la columna de notación internacional de la Tabla 1. La notación para los grupos de mosaicos que estudiamos es una adaptación de la notación usada por los cristalógrafos en las tablas internacionales de rayos X [30].

Debido a las diferentes notaciones utilizadas por cada autor, los grupos podrían confundirse si no se pone especial atención en la notación que se está utilizando en cada texto, en particular los grupos $p31m$ y $p3m1$ suelen ser empleados de forma distinta si se estudian textos de autores distintos. Schattschneider [30] desarrolló una tabla que simplifica el proceso de reconocer al grupo de simetría dado un mosaico arbitrario:

Tabla de reconocimiento de grupos de simetría para mosaicos

Grupo	Tipo de retícula	Máximo orden de rotación	Reflexiones	Deslizamientos con reflexiones (no triviales)	Otras características
p1	paralelogramo	1	no	no	
p2	paralelogramo	2	no	no	
pm	rectangular	1	sí	no	
pg	rectangular	1	no	sí	
cm	rómbica	1	sí	sí	
pmm	rectangular	2	sí	no	
pmg	rectangular	2	sí	sí	Ejes de reflexión paralelos
pgg	rectangular	2	no	sí	
cmm	rómbica	2	sí	sí	Ejes de reflexión perpendiculares
p4	cuadrada	4	no	no	
p4m	cuadrada	4	sí	sí	Los centros de rotación de orden 4 en los ejes de reflexión
p4g	cuadrada	4	sí	sí	Los centros de rotación de orden 4 no están en los ejes de reflexión
p3	hexagonal	3	no	no	
p3m1	hexagonal	3	sí	sí	Todos los centros de rotación de orden 3 en los ejes de reflexión
p31m	hexagonal	3	sí	sí	No todos los centros de rotación de orden 3 en los ejes de reflexión
p6	hexagonal	6	no	no	
p6m	hexagonal	6	sí	sí	

Tabla 2

De ese modo, dado un mosaico no es necesario verificar que se cumplan todas las condiciones de la Tabla 1 para encontrar su grupo de simetría, sino que podemos ir descartando posibles grupos utilizando la información de la Tabla 2 hasta que quede uno y por el Teorema 4.8 ese sería el grupo correspondiente.

Así, el procedimiento que propone Schattschneider para la identificación del grupo de mosaico es el siguiente:

1. Identificar a un centro de rotación de máximo orden de rotación posible.
2. Identificar a los dos vectores de traslación que generan al mosaico.
3. Generar una retícula aplicando los vectores de traslación al centro de rotación previamente identificado.
4. Utilizando la Tabla 2 descartar a los posibles grupos de simetría hasta que sólo quede un posible grupo
5. El grupo restante es el grupo de simetría buscado (por el Teorema 4.8).

De igual forma, Kristopher Tapp presentó un diagrama de decisión, hecho por Brian Sanderson, que resume la tabla anterior [34]:

orange: ● What is the maximum Orders of a rotation symmetry?
 purple: ● Does it have any Reflection symmetries?
 green: ● Does it have any indecomposable Glide-reflection symmetries?
ON – Does it have any rotations centered ON reflection lines?
OFF – Does it have any rotations centered OFF reflection lines?

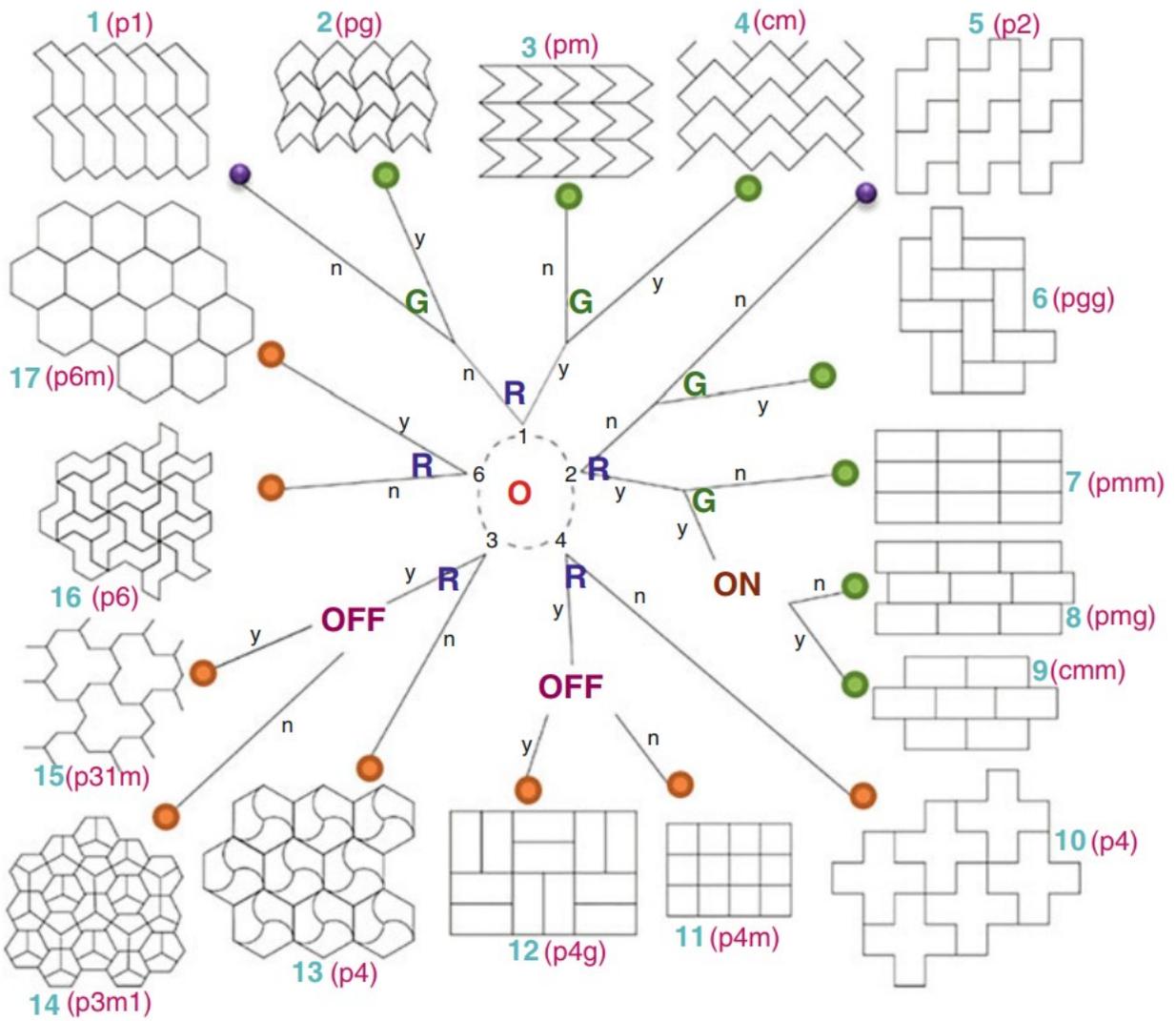


Figura 27, fuente: [34]

Mediante la tabla de Schattschneider (o el diagrama anterior) identificaremos a los grupos de simetría de las teselaciones de pentágonos y hexágonos que se mostrarán más adelante.

4.2 Los hexágonos que teselan

Desde los antiguos griegos era conocido que los hexágonos regulares teselan el plano [9], este es un hecho incluso conocido por las abejas al construir sus panales [37]. Sin embargo, el primero en intentar clasificar a todos los hexágonos que teselan el plano sería Reinhardt [29], en la pág. 66 de su tesis menciona haber considerado todos los casos para los hexágonos y en gran medida para los pentágonos:

“Verfasser hat diese Diskussion für Sechsecke vollständig und für Fünfecke zum größeren Teil durchgeführt, da diese Untersuchungen jedoch sehr umfangreich sind, so sollen sie hier nicht vollständig aufgenommen”

“El autor llevó a cabo esta discusión en su totalidad para hexágonos y en gran medida para pentágonos, pero dado que estas investigaciones son muy extensas, no son incluidas aquí en su totalidad”

En esa misma página menciona que sus suposiciones son:

1. Las teselaciones son lado-lado
2. Cada vértice tiene grado 3 exactamente

Reinhardt hace esas suposiciones debido a que en la pág. 60 de su tesis presenta una proposición equivalente al siguiente teorema:

Teorema 4.9 (Bollobás): Sea \mathcal{T} una teselación monohedral del plano que tiene como prototesela a un hexágono convexo H_1 . Entonces existen cuadrados de áreas arbitrariamente grandes dentro de los cuales la teselación es lado-lado y cada vértice de la teselación es de grado 3.

Aunque la demostración de Reinhardt es difícil de seguir, como descubrió Zong [37], [38], Bollobás presentó el resultado posteriormente con una prueba más clara (aunque con algunas erratas que se mencionaran más adelante) [2].

Antes de pasar a la demostración del teorema, enunciaremos y demostraremos un pequeño lema:

Lema 4.10: Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$ siempre existe un número $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m^2 \leq 2n$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 5$. Sea $m = \max\{r \in \mathbb{N} \mid m^2 < n\}$ y existe pues al menos 2 esta en el conjunto anterior.

Supongamos que no se cumple el enunciado del lema, entonces se tendría que cumplir que $2n < (m+1)^2$ y por la construcción de m tenemos que $2m^2 < 2n < (m+1)^2$.

Además m y n son números naturales, así que podemos intercambiar la segunda desigualdad por $2n+1 \leq (m+1)^2$. Sumando 1 de ambos lados a la primera desigualdad nos da $2m^2+1 < 2n+1$ y quitando la desigualdad estricta tenemos que $2m^2+2 \leq 2n+1$.

Por lo tanto $2m^2+2 \leq 2n+1 \leq (m+1)^2$, en particular tenemos que $2m^2+2 \leq (m+1)^2$.

Resolvemos la desigualdad para m :

$$0 \leq (m+1)^2 - 2m^2 - 2$$

$$0 \leq -m^2 + 2m - 1$$

podemos factorizar

$$0 \leq -(m-1)^2$$

Que el negativo de un número cuadrado sea mayor o igual a cero sólo ocurrirá cuando el número es cero, es decir cuando $m = 1$. Pero por la construcción de m y dado que por hipótesis $n \geq 5$ se debe cumplir que $m \geq 2$ por lo que el caso $m = 1$ no tiene sentido, por lo tanto se sigue el lema. ■

Demostración del Teorema 4.9 (Bollobás):

Sea \mathcal{H} un hexágono convexo que tesela el plano, sea \mathcal{T} una teselación generada por \mathcal{H} , sea a el área de \mathcal{H} . Sea H_0 una tesela de \mathcal{T} y sea $\frac{d}{2}$ el diámetro de un círculo \mathcal{C} que tiene a H_0 en su interior.

Sea S un cuadrado que tiene a \mathcal{C} en su interior tal que los lados de S midan s con $s \geq 3d$, dibujamos rectas paralelas a los lados de S que estén a distancia $\frac{d}{2}$ tanto hacia adentro de S como hacia afuera de S obteniendo dos nuevos cuadrados S_1 y S_2 con S_1 dentro de S de lados de longitud $s-d$, S dentro de S_2 que tiene lados de longitud $s+d$ y \mathcal{C} en el interior de S_1 .

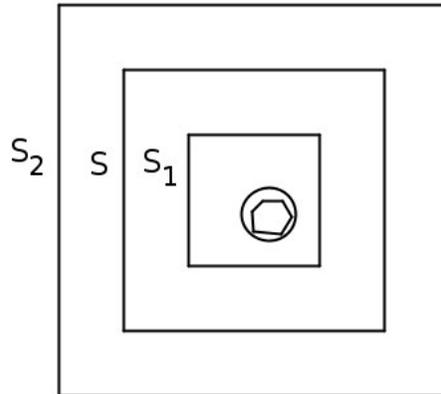


Figura 28

Como no estamos suponiendo que la teselación sea lado-lado, puede existir un vértice que esté en el interior del lado de algún hexágono. Llamaremos a estos vértices como vértices de **primera clase**. Por ejemplo, en los rectángulos de la Figura 22 los vértices A y G serían de primera clase, a los demás vértices los llamaremos de **segunda clase**.

Sea n_1 el número de vértices de primera clase en S , n_2 el número de vértices de segunda clase de grado 3 en S y n_3 el número de vértices de segunda clase de grado mayor que 3 en S .

Sea L el número de hexágonos que tienen algún punto en el interior de S y sea K el número de hexágonos contenidos en el interior de S .

Como los hexágonos tienen diámetro menor a $\frac{d}{2}$ y la distancia entre los lados de S_2 y S es $\frac{d}{2}$ tenemos que los L hexágonos con algún punto en el interior de S estarán contenidos en el interior de S_2 , por lo que

$$L < \frac{(s+d)^2}{a}. \quad (1)$$

Y por el argumento anterior, es claro que los K hexágonos son una cubierta de S_1 , así

$$K > \frac{(s-d)^2}{a}. \quad (2)$$

Sea $e = n_1 + n_3$. Si $e < 5$ para cualquier cuadrado S entonces el problema es trivial pues bastaría construir un cuadrado N' tan grande que contenga a un cuadrado de la longitud buscada que no contenga a ninguno de los 1, 2, 3 o 4 vértices de primera clase o de segunda clase de grado mayor que 3, lo cual siempre se puede hacer pues esos vértices están fijos.

Así que supondremos que $e \geq 5$.

A continuación, Bollobás divide el problema en dos partes. En la primera parte muestra que si pudiera probar que para cualquier $N \in \mathbb{R}^+$ existe algún cuadrado S donde se cumple que $\frac{n_2}{n_1 + n_3} > N$ entonces se acabaría el problema y en la segunda parte de la prueba demuestra que esa desigualdad siempre ocurre.

Primera parte:

Sea $N \in \mathbb{R}^+$ y supongamos que existe un cuadrado S para el que $\frac{n_2}{n_1 + n_3} > N$, entonces

$$n_2 > (n_1 + n_3)N = eN \quad (3)$$

También estamos suponiendo que $e \geq 5$, así que por el Lema 4.10 podemos tomar a un número $f \in \mathbb{N}$ tal que

$$e < f^2 \leq 2e. \quad (4)$$

A continuación, dividimos a S en f^2 cuadrados, cada uno de longitud $\frac{s}{f}$. Como $f^2 > e$, alguno de los f cuadrados sólo tendrá vértices de segunda clase y de grado 3. Es así que basta con demostrar que la longitud de este cuadrado (que es $\frac{s}{f}$) puede ser tan grande como se quiera si N es lo suficientemente grande.

De (4) tenemos que:

$$\frac{s^2}{f^2} \geq \frac{s^2}{2e} \quad (5)$$

Por construcción, el cuadrado S tiene n_2 vértices de grado 3 y cada uno de esos vértices de la teselación es la esquina de 3 hexágonos que lo están compartiendo por lo que habrá $3n_2$ esquinas de hexágonos y esas $3n_2$ esquinas serán menor o igual cantidad que las esquinas de los L hexágonos que tienen al menos un punto en S y que obviamente son $6L$, entonces tenemos:

$$3n_2 \leq 6L. \quad (6)$$

sustituyendo de (1)

$$3n_2 \leq 6 \frac{(s+d)^2}{a}$$

dividiendo entre 3

$$n_2 \leq 2 \frac{(s+d)^2}{a}$$

sustituyendo de (3)

$$eN < 2 \frac{(s+d)^2}{a}$$

así que

$$\frac{eNa}{2} < (s+d)^2 \quad (7)$$

como $s \geq 3d$ por construcción

$$d \leq \frac{s}{3}$$

por lo que

$$s+d \leq s + \frac{s}{3} = \frac{4s}{3}$$

elevando al cuadrado

$$(s+d)^2 \leq \left(\frac{4s}{3}\right)^2 = \left(\frac{16s^2}{9}\right) < 2s^2$$

Sustituyendo en (7)

$$\frac{eNa}{4} < s^2$$

así que

$$\frac{Na}{8} < \frac{s^2}{2e}$$

Sustituyendo en (5)

$$\frac{s^2}{f^2} \geq \frac{s^2}{2e} > \frac{Na}{8}$$

por lo tanto

$$\frac{s}{f} > \sqrt{\frac{Na}{8}}$$

Donde a es un número fijo (el área de \mathcal{H}). Por lo tanto, para que $\frac{s}{f}$ sea tan grande como se quiera basta con hacer a N lo suficientemente grande. Esto termina la primera parte de la demostración por lo que sólo falta demostrar que siempre se cumple que $\frac{n_2}{n_1 + n_3} > N$.

Segunda parte:

Los vértices de la primera clase de la teselación son al menos de grado 2 (como en el vértice A de la Figura 22 si completáramos esa teselación con rectángulos congruentes), mientras que un vértice w de segunda clase será de grado k si exactamente k hexágonos tienen a w como una de sus esquinas. Por lo tanto, el cuadrado S contiene al menos a $2n_1 + 3n_2 + 4n_3$ esquinas que serán menor o igual cantidad que las esquinas de la cubierta de L hexágonos de S , así que

$$2n_1 + 3n_2 + 4n_3 \leq 6L$$

Sustituyendo de (1)

$$2n_1 + 3n_2 + 4n_3 < 6 \frac{(s+d)^2}{a} \quad (8)$$

La suma de los ángulos de las esquinas de un vértice de primera clase será π (pues este vértice está en el interior de un lado), mientras que la suma de los ángulos de las esquinas de los vértices de segunda clase será 2π .

Si consideramos la suma $n_1\pi + n_22\pi + n_32\pi$ estamos considerando la suma de todos los ángulos de las esquinas de los vértices en S , donde muchos de estos vértices serán esquinas de hexágonos que no están contenidos completamente en S por lo que esa suma será mayor que la suma de sólo los ángulos internos de los hexágonos que están contenidos en S que, recordando que la suma de ángulos internos de un hexágono es 4π , claramente es $4K\pi$, así:

$$n_1\pi + 2n_2\pi + 2n_3\pi > 4K\pi$$

dividiendo entre π

$$n_1 + 2n_2 + 2n_3 > 4K$$

sustituyendo en (2)

$$n_1 + 2n_2 + 2n_3 > 4 \frac{(s-d)^2}{a} \quad (9)$$

(Aquí el artículo de Bollobás tiene una errata, pues en lugar de eso, escribe $n_1 + 2n_2 + 3n_3$).

Multiplicando (9) por $-\frac{3}{2}$ obtenemos

$$-\frac{3}{2}n_1 - 3n_2 - 3n_3 < -6 \frac{(s-d)^2}{a} \quad (10)$$

La multiplicación por $-\frac{3}{2}$ fue con el objetivo de que al sumar (8) y (10) se elimine n_2 pues de la suma obtenemos

$$\frac{n_1}{2} + n_3 < \frac{24sd}{a} \quad (11)$$

Al despejar n_2 de (9) se obtiene

$$2n_2 > 4 \frac{(s-d)^2}{a} - n_1 - 2n_3$$

dividiendo entre 2

$$n_2 > 2 \frac{(s-d)^2}{a} - \frac{n_1}{2} - n_3$$

utilizando (11)

$$n_2 > 2 \frac{(s-d)^2}{a} - \frac{24sd}{a} = \frac{2s^2 - 28sd + 2d^2}{a}$$

multiplicando por el inverso de (11)

$$\frac{n_2}{\frac{n_1}{2} + n_3} > \frac{2s^2 - 28sd + 2d^2}{24sd} = \frac{s}{12d} - \frac{7}{6} + \frac{d}{12s}$$

(Aquí otra errata en el artículo de Bollobás pues escribe $-2sd$ en lugar de $-28sd$)

Multiplicando por $\frac{1}{2}$

$$\frac{n_2}{n_1 + 2n_3} > \frac{s}{24d} - \frac{7}{12} + \frac{d}{24s}$$

Claramente $n_1 + n_3 \leq n_1 + 2n_3$, por lo que:

$$\frac{n_2}{n_1 + n_3} \geq \frac{n_2}{n_1 + 2n_3} > \frac{s}{24d} - \frac{7}{12} + \frac{d}{24s}$$

así que

$$\frac{n_2}{n_1 + n_3} > \frac{s}{24d} - \frac{7}{12} + \frac{d}{24s}$$

donde d es un número fijo por lo que basta tomar a s lo suficientemente grande para que

$\frac{n_2}{n_1 + n_3} > N$ para cualquier $N \in \mathbb{R}^+$ dado. ■

Bollobás [2] menciona que de este teorema se sigue que para determinar si un hexágono convexo puede teselar el plano es suficiente con buscar una teselación que sea lado-lado y con cada vértice de grado 3.

Sin embargo, eso no implica que todas las teselaciones del plano que pueda generar un hexágono convexo vayan a ser lado-lado y con vértices de grado 3. En la escasa literatura sobre teselaciones monohedrales de hexágonos convexos no hay ejemplos de teselaciones que no sean lado-lado pero sí podemos mostrar dos teselaciones descubiertas por Bollobás [2] en las que los vértices A y B son de grado 4:

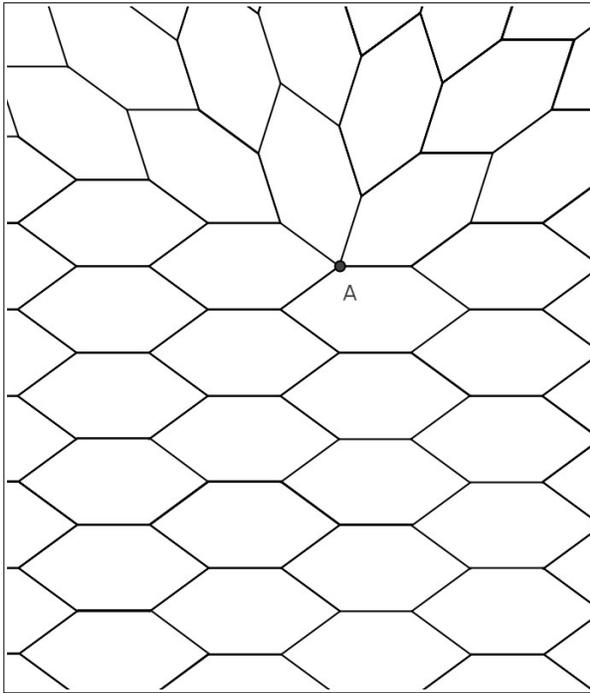


Figura 29

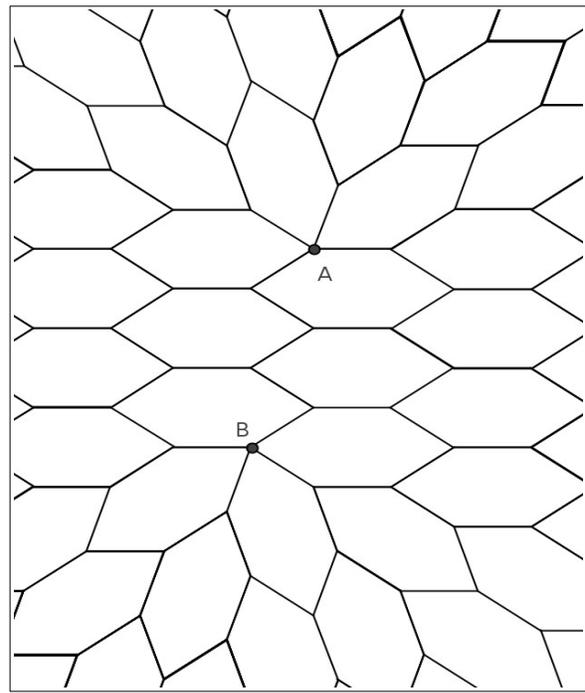


Figura 30

Lo que nos garantiza el Teorema 4.9 es que en ambas teselaciones existen cuadrados tan grandes como se quiera en donde las teselaciones si serán lado-lado y cada vértice de grado 3. En el caso de la teselación de la Figura 30 bastaría tomar el cuadrado por abajo de B o que estuviera por arriba de A , mientras que en el caso de la teselación de la Figura 29 es todavía más fácil ver que si tomamos un cuadrado por debajo de A se cumplirá.

Por su parte, Reinhardt divide el problema en 6 clases que dependen de los lados del hexágono, lo que genera 11 casos:

Dado un hexágono convexo, tiene una y sólo una de las siguientes condiciones:

I. 6 lados distintos **1-1-1-1-1-1**

II. 2 lados iguales y 4 lados distintos **2-1-1-1-1**

*III*₁. 3 lados iguales entre ellos y 3 lados distintos **3-1-1-1**

*III*₂. 2 parejas de lados, los lados dentro de cada pareja son iguales, pero son distintos si son de parejas diferentes y 2 lados distintos **2-2-1-1**

*IV*₁. 4 lados iguales entre ellos y 2 lados distintos **4-1-1**

IV_2 . 1 terna y 1 pareja de lados, los lados dentro de la terna son iguales, al igual que los lados dentro de la pareja, pero los lados de la terna son distintos a los de la pareja y 1 lado distinto

3-2-1

IV_3 . 3 parejas de lados, los lados dentro de cada pareja son iguales, pero son distintos si son de parejas diferentes **2-2-2**

V_1 . 5 lados iguales entre ellos y 1 lado distinto **5-1**

V_2 . 1 cuádrupla y 1 pareja de lados, los lados dentro de la cuádrupla son iguales, al igual que los lados dentro de la pareja, pero los lados de la cuádrupla son distintos a los de la pareja **4-2**

V_3 . 2 ternas de lados, los lados dentro de cada terna son iguales, pero son distintos si son de ternas diferentes **3-3**

VI . 6 lados iguales entre ellos **6**

Considerando esas clases de hexágonos, Reinhardt concluyó que un hexágono $ABCDEF$ puede teselar el plano si y solo si es de alguno de los tres tipos siguientes:

Tipo 1:

- $BC = EF$
- $\angle F + \angle A + \angle B = 2\pi$
- $\angle C + \angle D + \angle E = 2\pi$

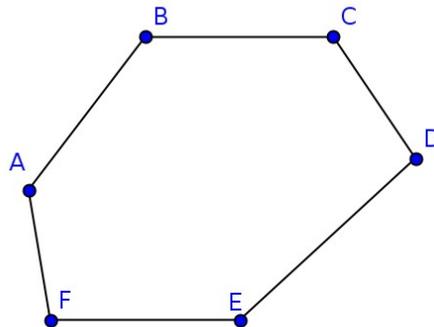


Figura 31

Tipo 2:

- $BC = EF$
- $AB = CD$
- $\angle F + \angle A + \angle C = 2\pi$
- $\angle D + \angle E + \angle B = 2\pi$

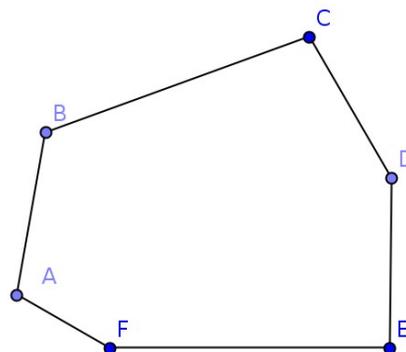


Figura 32

Tipo 3:

- $AB = BC$
- $CD = DE$
- $EF = FA$
- $\angle B = \angle D = \angle F = \frac{2\pi}{3}$
- $\angle A + \angle C + \angle E = 2\pi$

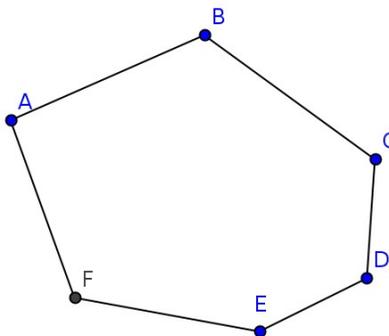


Figura 33

Posteriormente Kershner [17], [18], se dio cuenta que al considerar que la suma de ángulos internos de un hexágono convexo de n lados es 4π se pueden reducir las condiciones de los tres tipos de los hexágonos encontrados por Reinhardt, resumiéndolos a los siguientes tres tipos:

Tipo 1:

- $BC = EF$
- $\angle F + \angle A + \angle B = 2\pi$

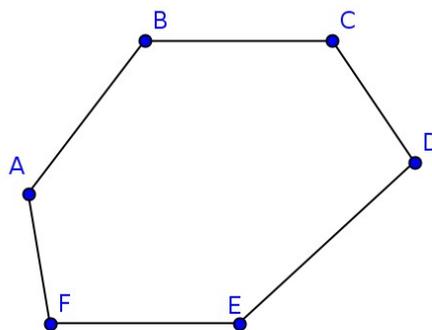


Figura 34

Tipo 2:

- $BC = EF$
- $AB = CD$
- $\angle F + \angle A + \angle C = 2\pi$

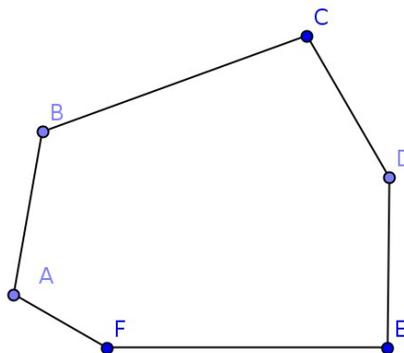


Figura 35

Tipo 3:

- $AB = BC$
- $CD = DE$
- $EF = FA$
- $\angle B = \angle D = \angle F = \frac{2\pi}{3}$

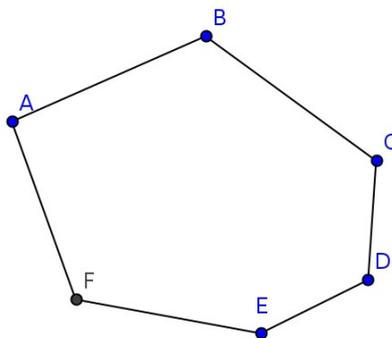


Figura 36

Kershner, al igual que Reinhardt, propuso como teorema que un hexágono convexo puede teselar el plano si y sólo si pertenece a uno de esos tres tipos. Para probar que esos tres tipos de hexágonos teselan presentaron las teselaciones respectivas que veremos a continuación.

Para identificar a los grupos de simetría de las teselaciones que se mostraran se utilizó la Tabla 2 junto con la siguiente notación:

Notación: Los vectores de traslación se señalarán con flechas, mientras que los ejes de rotación y reflexión se indicarán con los siguientes símbolos:



Eje de rotación de orden 2



Eje de rotación de orden 3



Eje de rotación de orden 4



Eje de rotación de orden 6



Eje de deslizamiento con reflexión



Eje de reflexión

Así, tenemos que las teselaciones son:

Tipo 1:

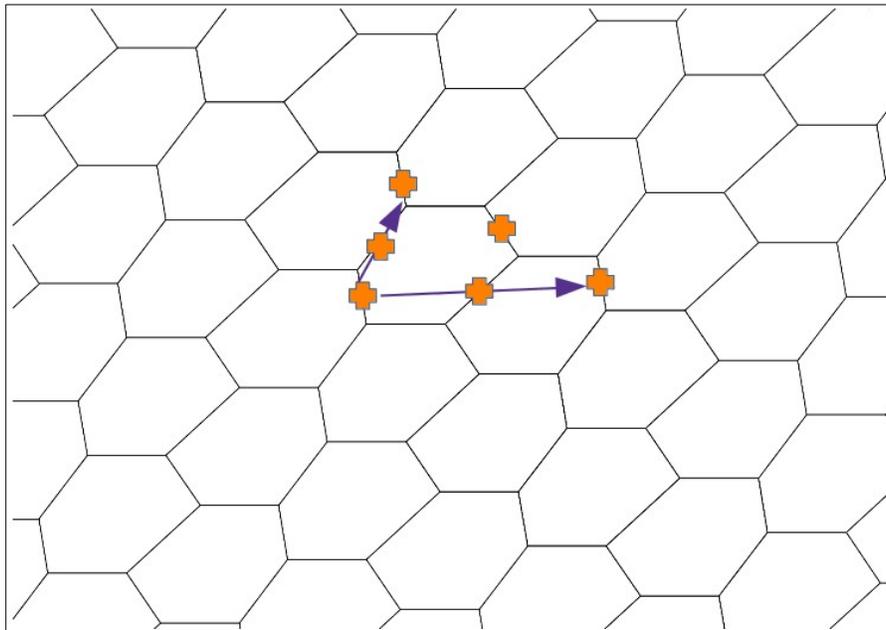


Figura 37
p2

Tipo 2:

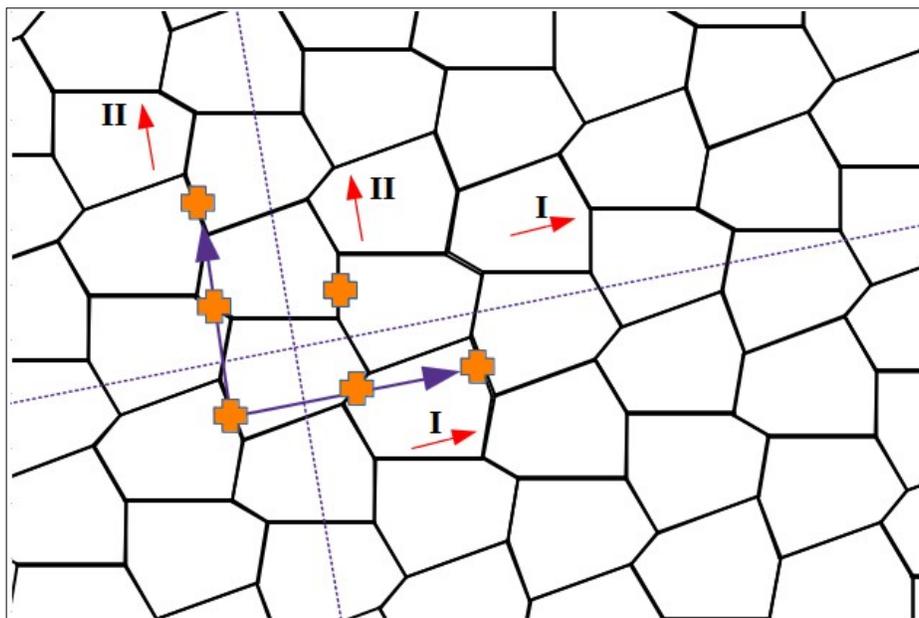


Figura 38
pgg

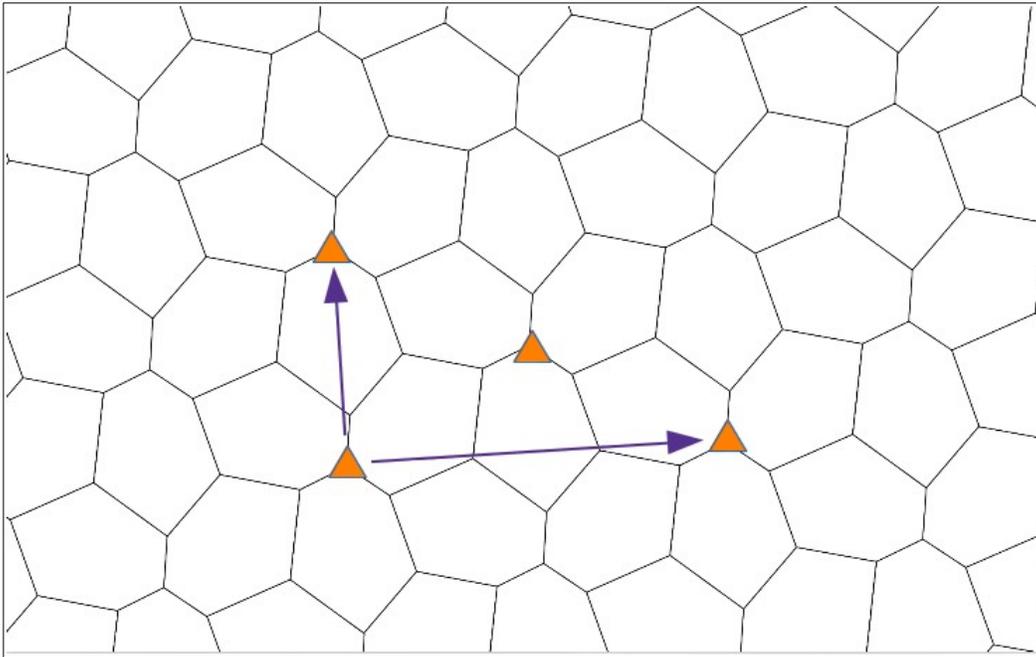
Tipo 3:

Figura 39
p3

El problema surge al demostrar que son los únicos tipos de hexágonos que teselan.

En el caso de Kershner [17], [18], él se limitó a decir que “La prueba de que la lista [...] está completa es extremadamente laboriosa y será dada en algún otro lado”.

Por su parte Reinhardt [29] menciona en la pág. 70:

“Es muß also nun gezeigt werden, daß eine Bedeckung der Ebene mit kongruenten Sechsecken, die keinem der drei in Satz 1 auftretenden Typen angehören, unmöglich ist. Dieser Nachweis soll, wie oben erwähnt, hier nur an einigen Beispielen erläutert werden.”

“Ahora debe demostrarse que es imposible cubrir el plano con hexágonos congruentes que no pertenecen a ninguno de los tres tipos que aparecen en el Teorema 1. Como se mencionó anteriormente, esta prueba sólo se explicará aquí utilizando algunos ejemplos.”

Posteriormente presenta algunos casos (ejemplos) sin mucho detalle, y finaliza en la página 76 con el siguiente enunciado:

“Diese Beispiele mögen genügen. Auf ähnliche Weise lassen sich alle anderen Fälle leicht erledigen, wenn auch die Diskussion eines einzelnen Typs mitunter ziemlich umfangreich wird.”

“Estos ejemplos deberían ser suficientes, de manera similar, todos los demás casos pueden manejarse con facilidad, aunque la discusión de cada tipo puede ser bastante extensa.”

Dado que la prueba de Reinhardt es sólo un bosquejo de ideas incompletas (como él mismo lo reconoció) y que hasta la fecha no se ha presentado ninguna otra prueba podemos concluir, al igual que ya lo había hecho Bollobás [2], Grünbaum y Shepard [11], que el problema de determinar todos los tipos de hexágonos convexos capaces de generar una teselación monohedral del plano sigue siendo un problema abierto.

Hasta el momento, los resultados más importantes que se tienen sobre teselaciones monohedrales de hexágonos convexos serían los que presentó Bollobás en 1963 [2]. Presentaremos los teoremas y sus respectivas demostraciones.

Teorema 4.11: Si \mathcal{H} es un hexágono convexo que tesela el plano, entonces \mathcal{H} tiene al menos dos lados que tienen la misma longitud.

Demostración: Supongamos que es falso. Sea \mathcal{H} un hexágono convexo $A'B'C'D'E'F'$ que tesela el plano y no tiene dos lados iguales. Utilizando el Teorema 4.9, podemos considerar una teselación \mathcal{T} , en un cuadrado arbitrariamente grande, generada por \mathcal{H} . \mathcal{T} lado-lado con cada vértice de grado 3 exactamente. Sea I el hexágono correspondiente a una tesela T_0 de \mathcal{T} con sus esquinas A, B, C, D, E, F correspondientes a A', B', C', D', E', F' de \mathcal{H} . Sea II el hexágono correspondiente a la tesela adyacente a T_0 por AB y III el hexágono correspondiente a la tesela adyacente a T_0 por el lado BC :

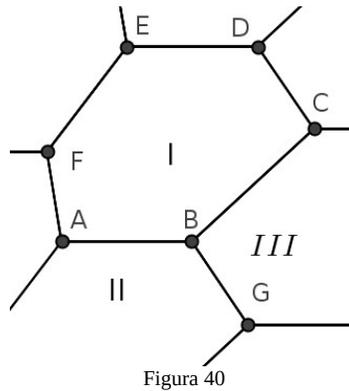


Figura 40

Como \mathcal{H} no tiene dos lados iguales, I, II, III que son congruentes a \mathcal{H} tampoco tendrán lados iguales. Eso implica que el lado AB de II corresponderá al lado $A'B'$ o al lado $B'A'$ de \mathcal{H} .

En el primer caso el lado BG de II correspondería al lado $B'C'$ de \mathcal{H} lo que implicaría que en el hexágono III se tiene que $|BG| = |BC|$ lo que contradice la hipótesis de no existir lados de la misma longitud. Por lo tanto el lado AB de II debe corresponder al lado $B'A'$ de \mathcal{H} , así el lado BG de II corresponderá al lado $A'F'$ de \mathcal{H} . (1)

así que

$$\angle FAB = \angle GBA$$

por ángulos alternos internos

$$FA \parallel BG \quad (2)$$

Por el mismo razonamiento, el lado BC de III corresponderá al lado $B'C'$ o al lado $C'B'$ de \mathcal{H} , en el primer caso el lado BG de III tendría que corresponder al lado $B'A'$ de \mathcal{H} , pero eso implicaría que en el hexágono II se tenga $|AB| = |BG|$ lo que contradice la hipótesis, así que el lado BC de III tendrá que ser forzosamente el lado correspondiente a $C'B'$ de \mathcal{H} , así que el lado BG de III corresponderá al lado $C'D'$ de \mathcal{H} . (3)

lo que implica que

$$\angle GBC = \angle DCB$$

por ángulos alternos internos

$$BG \parallel CD \quad (4)$$

Por (1) y (3) tenemos que

$$|A'F'| = |C'D'| \quad (5)$$

Lo que contradice que \mathcal{H} no tenía lados iguales. Por lo tanto, la suposición es falsa y deben de existir dos lados iguales. ■

Teorema 4.12: Si un hexágono convexo \mathcal{H} tiene exactamente dos lados de igual longitud entonces \mathcal{H} tesela el plano si y sólo si los lados de igual longitud son opuestos y paralelos.

Demostración:

Sea \mathcal{H} un hexágono convexo que tesela el plano con exactamente 2 lados de igual longitud que tesela el plano. Vamos a probar que los lados de igual longitud son opuestos y paralelos.

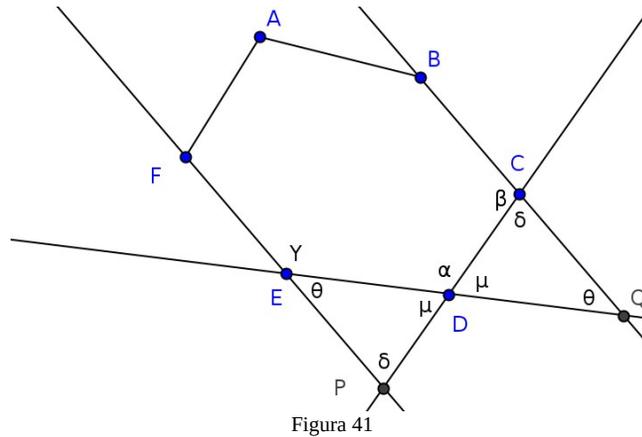
Utilizando la misma notación que en el teorema pasado sea $\mathcal{H} = A'B'C'D'E'F'$ y sea \mathcal{T} una teselación generada por \mathcal{H} , en un cuadrado de tamaño arbitrario, que es lado-lado con cada vértice de grado 3 tal como el Teorema 4.9 nos garantiza que podemos tomar.

Como \mathcal{H} sólo tiene 2 lados iguales podemos considerar a otros dos lados de \mathcal{H} que sean adyacentes y que no sean ninguno de los dos lados iguales. Podemos suponer que son $A'B'$ y $B'C'$ (en caso de que estos lados no cumplan bastaría renombrar a los vértices).

Al igual que en la demostración del teorema pasado sea I el hexágono correspondiente a una tesela T_0 de \mathcal{T} con sus esquinas A, B, C, D, E, F las esquinas correspondientes a A', B', C', D', E', F' de \mathcal{H} . Sea II el hexágono correspondiente a la tesela adyacente a T_0 por AB y III el hexágono correspondiente a la tesela adyacente a T_0 por el lado BC tal como se muestra en la Figura 40.

Como se vio en (5) de la demostración pasada, se tiene que $|A'F'| = |C'D'|$ que efectivamente son lados opuestos. Sólo falta probar que son paralelos lo cual se da por la transitividad de (2) con (4). Por lo tanto $FA \parallel CD$ lo que prueba la primera parte del teorema.

Ahora sea $ABCDEF$ un hexágono convexo con dos lados iguales y paralelos, sin pérdida de generalidad, $|BC| = |EF|$ y $BC \parallel EF$ como en la siguiente figura:



Demostraremos que $ABCDEF$ tesela el plano.

Sea $P = \overline{CD} \cap \overline{FE}$, $Q = \overline{ED} \cap \overline{BC}$, $\gamma = \angle FED$, $\alpha = \angle EDC$, $\beta = \angle DCB$

entonces

$$\angle EDP = \mu = \angle CDQ$$

por ser $BC \parallel EF$ tenemos

$$\angle DEP = \theta = \angle DQC$$

por ser $BC \parallel EF$ se tiene

$$\angle DPE = \delta = \angle DCQ$$

Entonces al considerar los vértices E, D, C tenemos las siguientes ecuaciones:

$$(1) \gamma + \theta = \pi$$

$$(2) \alpha + \mu = \pi$$

$$(3) \beta + \delta = \pi$$

al sumar las 3 ecuaciones tenemos

$$(\gamma + \alpha + \beta) + (\theta + \mu + \delta) = 3\pi$$

Pero al considerar el triángulo $\triangle CDQ$ es claro que $\theta + \mu + \delta = \pi$, sustituyendo:

$$(\gamma + \alpha + \beta) + (\pi) = 3\pi$$

restando π

$$\gamma + \alpha + \beta = 2\pi$$

Por lo tanto, en el hexágono $ABCDEF$ tenemos que $|BC| = |EF|$, $\angle C + \angle D + \angle E = 2\pi$

y como la suma de ángulos internos de un hexágono es 4π , tenemos que $\angle F + \angle A + \angle B = 2\pi$.

Es decir, $ABCDEF$ es un hexágono de Tipo 1 de la lista de Reinhardt y ya sabemos que esos hexágonos teselan el plano como se exhibió en la Figura 37. ■

Teorema 4.13: Si \mathcal{H} es un hexágono convexo que tesela el plano, entonces \mathcal{H} tiene tres ángulos internos distintos cuya suma es 2π .

Demostración: Supongamos que el teorema es falso, que existe \mathcal{H} un hexágono convexo que tesela el plano con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ sus ángulos internos tal que para cualesquiera $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se tiene que $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k \neq 2\pi$ donde i, j, k son distintos entre sí.

Utilizando el Teorema 4.9 podemos considerar una teselación \mathcal{T} , en un cuadrado arbitrariamente grande, generada por \mathcal{H} tal que \mathcal{T} es lado-lado y cada vértice de la teselación es de grado 3. Sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$\left| \alpha_1 - \frac{2\pi}{3} \right| \geq \left| \alpha_2 - \frac{2\pi}{3} \right| \geq \left| \alpha_3 - \frac{2\pi}{3} \right| \geq \left| \alpha_4 - \frac{2\pi}{3} \right| \geq \left| \alpha_5 - \frac{2\pi}{3} \right| \geq \left| \alpha_6 - \frac{2\pi}{3} \right| \quad (1)$$

Evidentemente si no se cumplieran estas desigualdades bastaría renombrar a los α'_i s para que se cumplieran.

Si $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}$ eso implicaría que todos los demás ángulos también son iguales a $\frac{2\pi}{3}$ lo que contradiría la hipótesis de que no existen tres de ellos que sumados den 2π .

Por lo tanto

$$\alpha_1 \neq \frac{2\pi}{3}. \quad (2)$$

Al igual que en las demostraciones pasadas vamos a considerar una tesela T_0 de \mathcal{T} y sea I el hexágono correspondiente a dicha tesela, es decir, la prototesela. Sea B una esquina de I que corresponda a la esquina de ángulo α_1 de \mathcal{H} . Por el Teorema 4.9 B será vértice de otras dos teselas T_1 y T_2 . Sean II y III los hexágonos correspondientes a dichas teselas como en la Figura 40. Sea α_r el ángulo interno correspondiente a B en el hexágono II y α_s el ángulo interno correspondiente a B en el hexágono III . Claramente

$$\alpha_1 + \alpha_r + \alpha_s = 2\pi \quad (3)$$

Y por ser \mathcal{T} monohedral tenemos que $r, s \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Si $\alpha_1 = \alpha_r = \alpha_s$ entonces (2) y (3) se contradirían. De igual forma no es posible que los tres sean distintos entre sí pues eso contradiría la hipótesis de que \mathcal{H} no tiene tres ángulos internos distintos que sumen 2π . Por lo tanto, exactamente dos de ellos deben ser iguales, es decir, tendríamos alguno de los siguientes casos:

1. $\alpha_1 = \alpha_r$ y $\alpha_1 \neq \alpha_s$.
2. $\alpha_1 = \alpha_s$ y $\alpha_1 \neq \alpha_r$.
3. $\alpha_1 \neq \alpha_r$ y $\alpha_r = \alpha_s$.

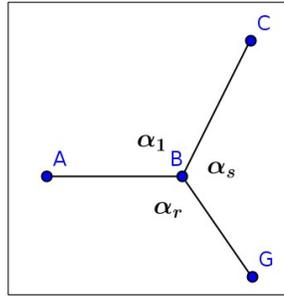


Figura 42

Caso 1: $\alpha_1 = \alpha_r$ y $\alpha_1 \neq \alpha_s$.

Sustituyendo en (3) tenemos que $2\alpha_1 + \alpha_s = 2\pi$ y por lo tanto

$$2\alpha_1 - 2\pi = -\alpha_s$$

sustituyendo 2π

$$2\alpha_1 - \frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\alpha_s$$

factorizando

$$2\left(\alpha_1 - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} - \alpha_s$$

tomando valores absolutos

$$2\left|\alpha_1 - \frac{2\pi}{3}\right| = \left|\alpha_s - \frac{2\pi}{3}\right|$$

convirtiendo la igualdad en desigualdad y por (2)

$$\left|\alpha_s - \frac{2\pi}{3}\right| \geq 2\left|\alpha_1 - \frac{2\pi}{3}\right| > \left|\alpha_1 - \frac{2\pi}{3}\right| \text{ lo que contradice (1).}$$

Es evidente que el **Caso 2** genera la misma contradicción por lo que sólo resta ver el caso 3:

Caso 3: $\alpha_1 \neq \alpha_r$ y $\alpha_r = \alpha_s$.

Notemos que si \mathcal{H} tiene dos ángulos internos de medida α_s entonces por (3) se contradice la hipótesis de que \mathcal{H} no tiene tres vértices cuya suma sea 2π . Por lo tanto \mathcal{H} sólo tiene una

esquina con el ángulo de medida α_s , sea G dicho vértice. Así que en los hexágonos *II* y *III* el vértice B corresponderá al vértice G de \mathcal{H} en ambos casos.

Concluimos que si M es un vértice de \mathcal{H} de medida α_1 cada vez que en la teselación aparezca un vértice correspondiente a M aparecerán dos vértices correspondientes a G lo cual es imposible pues estamos trabajando con teselaciones monohedrales por lo que cada vértice de \mathcal{H} estará representado sólo una vez por cada hexágono de la teselación. Por lo tanto, tendría que haber el mismo número de cada tipo de vértices. Por supuesto que en la teselación de todo el plano hay una infinidad de cada tipo pero al estar considerando la teselación sólo dentro de un cuadrado queda un número finito de hexágonos y allí ocurre la contradicción. ■

Definición 4.14: Dada una teselación \mathcal{T} si se cumple que todo par de teselas $T_i, T_j \in \mathcal{T}$ son isomorfas diremos que la teselación es **isoedral**. Por otro lado, diremos que una tesela T_k es **anisoedral** si T_k tesela el plano pero no existe una teselación isoedral que tenga a T_k como prototesela.

Finalmente, un resultado que ciertamente era conocido por Reinhardt [31], aunque tampoco presentó prueba. En la pág. 495 de [11] se menciona, sin dar detalles, que se podría demostrar a partir de los trabajos de Heesch & Kienzle y Bollobás [14], [2]. De ese modo, debido a la falta de una demostración formal, el siguiente resultado es un problema abierto:

Conjetura 4.15: Todo hexágono convexo que tesela el plano puede hacerlo con una teselación isoedral.

Se desconoce si alguno de los teoremas anteriores podría ser de utilidad para resolver el problema que realmente nos interesa que es encontrar a todos los hexágonos convexos que teselan el plano y demostrar que esa lista esté completa.

Mientras tanto, los trabajos de Reinhardt y Bollobás siguen siendo los que han abordado con mayor profundidad el tema de las teselaciones monohedrales de hexágonos convexos. En los últimos 50 años no se han presentado avances recientes quizás debido a que gran parte de la comunidad matemática supone que es un problema cerrado, limitándose a citar fuentes y generando una cadena de referencias que siempre termina en la tesis de Reinhardt.

4.3 Los pentágonos que teselan

Comenzaremos ahora el estudio del problema en el que más se ha trabajado y del que más resultados han surgido: determinar todos los pentágonos convexos capaces de teselar el plano.

Si bien la existencia de pentágonos convexos capaces de teselar el plano de forma monohedral era conocida desde la antigüedad como se puede apreciar en las calles del Cairo [8], [31]:



Figura 43, fuente: [8]

El primer intento sistemático por clasificar a todos estos pentágonos también lo realizaría Reinhardt en 1918 [29]. No obstante, cometió una serie de omisiones como fue restringir su búsqueda sólo a teselaciones isoedrales. Probablemente tuvo fe en que si eso se cumplía para los hexágonos entonces también se cumpliría para el caso de los pentágonos y aunque fue una omisión grave, lo cierto es que esos cinco pentágonos de Reinhardt son los únicos pentágonos capaces de generar teselaciones isoedrales [21], [31]. Por mucho tiempo se pensó que la lista estaría completa hasta que en 1968 Richard Brandon Kershner decidió trabajar con teselaciones no isoedrales y encontró tres nuevos pentágonos capaces de teselar el plano e informó, de forma anticipada, que sus nuevos pentágonos completarían la lista [9].

Kershner también cometió omisiones, la más importante fue su consideración de que las teselaciones son siempre lado-lado o que en caso de no ocurrir se cumpliría que cada pentágono

sería adyacente a exactamente 6 lados. Esta consideración resultó ser falsa como se puede observar en la teselación descubierta por Richard E. James III en 1975 [10].

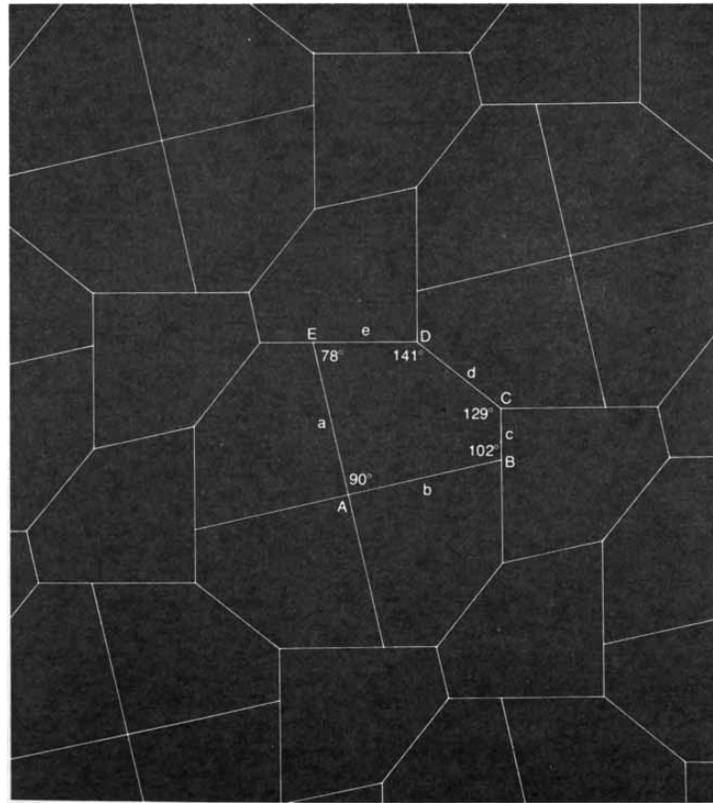


Figura 44, fuente: [10]

En 1976 Marjorie Rice descubrió una nueva teselación lado-lado que no estaba en la lista de Kershner lo que mostró que el análisis de Kershner fue incompleto incluso para las teselaciones lado-lado . Este hecho llamo tanto la atención que la Asociación Matemática de América (MAA) decidió adornar el piso del vestíbulo de sus oficinas centrales de con la teselación de Rice.



Figura 45, fuente: [32]

Esos descubrimientos pudieron realizarse gracias a que en 1975 [9] Martin Gardner publicó un artículo en la revista de divulgación científica *Scientific American* preguntando a sus lectores si la lista de Kershner estaría completa, eso generó que matemáticos aficionados se involucraran en el problema como fue el caso de Richard E. James III y Marjorie Rice.

De acuerdo con Gardner [10], Kershner recibió la noticia de que su lista estaba incompleta con mucha gracia y humor. Respondió con una cita suya de 1950 que dice:

“Ahora debe decirse que no hay una simple prueba que pueda utilizarse para determinar la validez de una demostración, esto es, para determinar si la supuesta demostración realmente es una prueba. La historia de las matemáticas tiene casos insólitos de argumentos que fueron aceptados como demostraciones por cientos de años, antes de ser desafiados por algún matemático muy ingenioso que develó alguna posibilidad que había sido pasada por alto en la supuesta demostración. Y recientemente, cada año aparecen en las revistas de matemáticas del mundo, un cierto número de publicaciones que muestran que algún enunciado supuestamente demostrado anteriormente, no sólo estaba erróneamente demostrado (esto es, no demostrado) sino

que de hecho era incorrecto. Estos hechos son mencionados para el beneficio de aquellos que sienten que existe alguna fórmula mágica para una demostración que la vuelve inmutable e indiscutible de allí en adelante y para siempre.”

Dado que ese pentágono descubierto por Rice es muy parecido al pentágono 8 de Kershner se le nombro con el número 9 y al de James con el número 10 [32]. Además, de este modo es más fácil recordar que a partir de la teselación 10 las teselaciones no siempre se pueden hacer lado-lado.

Aun así, los tres pentágonos descubiertos por Kershner tienen una propiedad muy importante ya que los tres son contraejemplos a la segunda parte del problema 18 de Hilbert, es decir, son capaces de teselar el plano pero no son el dominio fundamental de ningún grupo de simetría. Esos pentágonos fueron los primeros polígonos convexos que se conocieron con esa propiedad. A pesar de la importancia de ese descubrimiento es probable que Kershner no se diera cuenta de ello [37].

Años más tarde, en 1985 Rolf Stein descubriría un nuevo pentágono [33] y finalmente en 2015 Mann, McLoud y Von Derau descubrirían el último que se conoce hasta ahora [21], formando así la lista actual de 15 pentágonos [32].

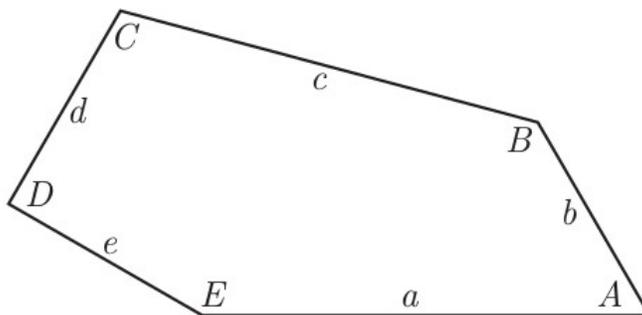


Figura 46, fuente: [21]

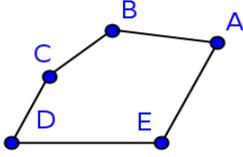
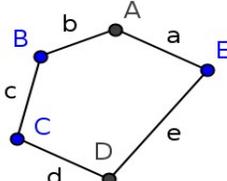
Antes de presentar la lista de los 15 pentágonos convexos que teselan el plano, demostraremos que los pentágonos regulares no teselan el plano. Este hecho es muy sencillo pero muy importante y es conocido desde la antigua Grecia [9], [37].

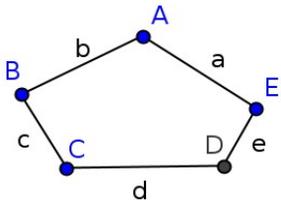
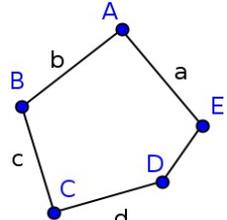
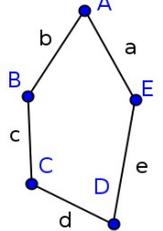
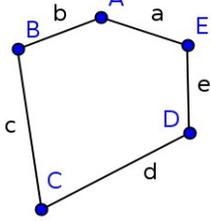
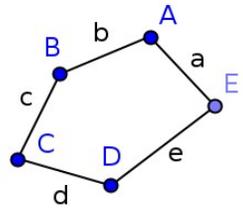
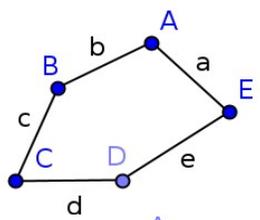
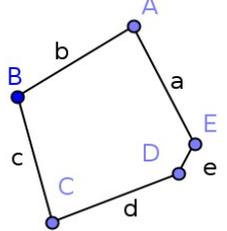
Teorema 4.16: No es posible dar una teselación monohedral del plano que tenga como prototesela a un pentágono regular.

Demostración: Sea \mathcal{T} una teselación del plano que tiene como única prototesela a un pentágono regular. Notemos que la suma de ángulos internos de un pentágono es $3(180)^\circ = 540^\circ$, por lo que cada ángulo interno debe medir 108° . Si la teselación es lado-lado, entonces al tomar un vértice cualquiera de la teselación en ese vértice deben incidir al menos 3 pentágonos lo que cubriría sólo $3(108)^\circ = 324^\circ < 360^\circ$ por lo que no alcanzarían a cubrir. Y si incidieran 4 pentágonos se traslaparían $4(108)^\circ = 432^\circ > 360^\circ$. Por otro lado, si la teselación no es lado-lado, entonces dentro del lado de un pentágono incide el vértice de otro pentágono con lo que estarían cubriendo $180^\circ + 108^\circ = 288^\circ$, es decir no alcanzan a cubrir y si incidiera el vértice de otro pentágono entonces cubrirían $288^\circ + 108^\circ = 396^\circ$ por lo que se traslaparían.

Así, en todos los casos tal teselación es imposible. ■

A continuación, presentaremos la lista de los 15 tipos de pentágonos convexos $ABCDE$ que se conoce que teselan el plano:

Tipo	Autor	Caracterización	Tesela
1	Reinhardt, 1918 [29]	$D + E = 180^\circ$	
2	Reinhardt, 1918 [29]	$C + E = 180^\circ$ $a = d$	

3	Reinhardt, 1918 [29]	$A = C = D = 120^\circ$ $a = b$ $d = c + e$	
4	Reinhardt, 1918 [29]	$A = C = 90^\circ$ $a = b$ $c = d$	
5	Reinhardt, 1918 [29]	$A = 60^\circ$ $C = 120^\circ$ $a = b$ $c = d$	
6	Kershner, 1968 [17]	$C + E = 180^\circ$ $A = 2C$ $a = b = e$ $c = d$	
7	Kershner, 1968 [17]	$2B + C = 360^\circ$ $2D + A = 360^\circ$ $a = b = c = d$	
8	Kershner, 1968 [17]	$2A + B = 360^\circ$ $2D + C = 360^\circ$ $a = b = c = d$	
9	Rice, 1976 [31]	$2E + B = 360^\circ$ $2D + C = 360^\circ$ $a = b = c = d$	

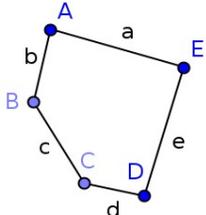
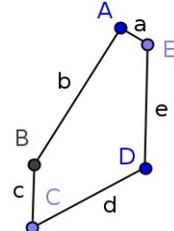
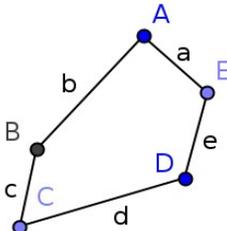
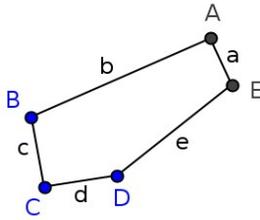
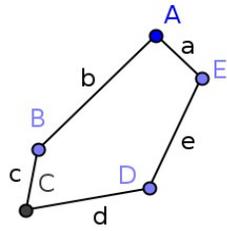
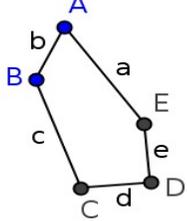
10	James, 1975 [10]	$E = 90^\circ$ $A + D = 180^\circ$ $A + 2B = 360^\circ$ $a = e = b + d$	
11	Rice, 1976 [31]	$A = 90^\circ$ $C + E = 180^\circ$ $2B + C = 360^\circ$ $2a + c = d = e$	
12	Rice, 1976 [31]	$A = 90^\circ$ $C + E = 180^\circ$ $2B + C = 360^\circ$ $2a = d = c + e$	
13	Rice, 1976 [31]	$A = C = 90^\circ$ $2B + D = 360^\circ$ $e = 2c = 2d$	
14	Stein, 1985 [33]	$A = 90^\circ$ $C + E = 180^\circ$ $2B + C = 360^\circ$ $d = e = 2a = 2c$	
15	Mann/McLoud/Von Derau, 2015 [21]	$A = 60^\circ, B = 135^\circ$ $C = 105^\circ, D = 90^\circ, E = 150^\circ$ $a = 2b = 2d = 2e$	

Tabla 3

Al igual que con las teselaciones de hexágonos, se utilizó la Tabla 2 para identificar a los grupos de simetría y las teselaciones se mostraron con la misma Notación que fue indicada anteriormente.

Tipo 1

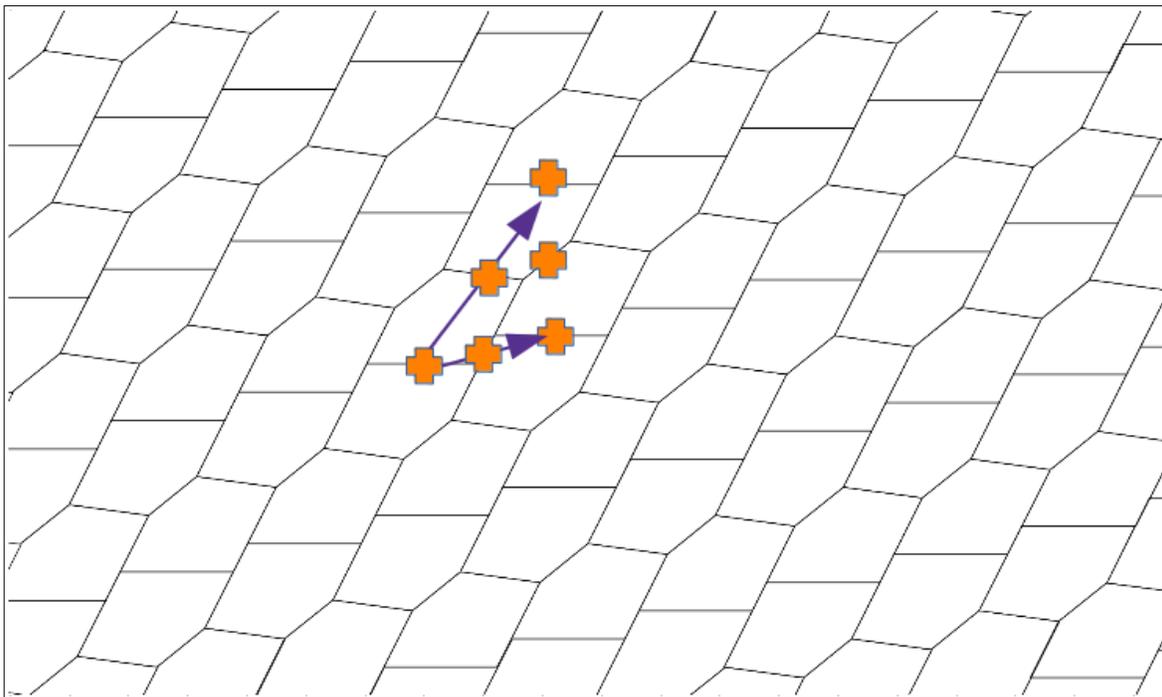


Figura 47
p2

Tipo 2

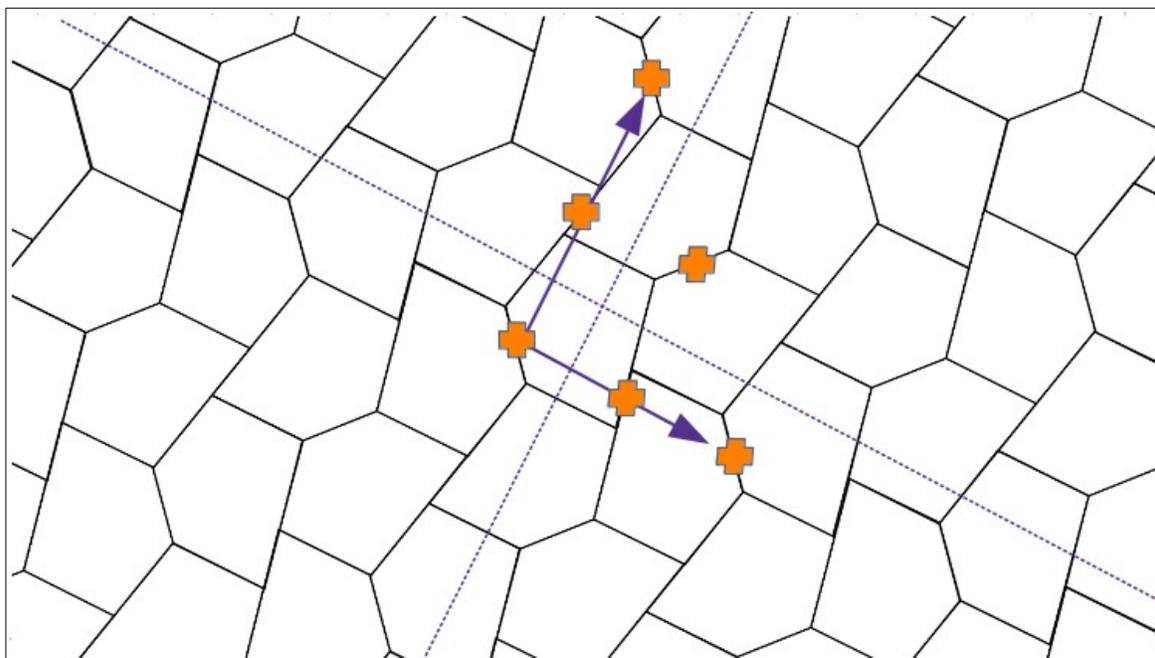


Figura 48
pgg

Tipo 3

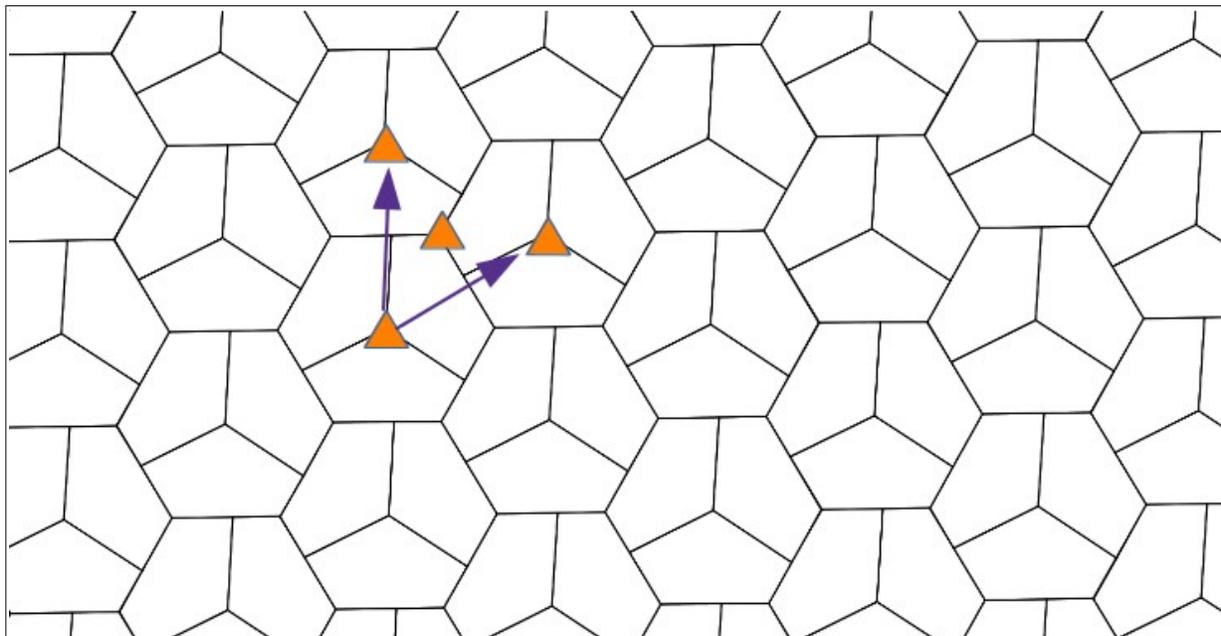


Figura 49
p3

Tipo 4

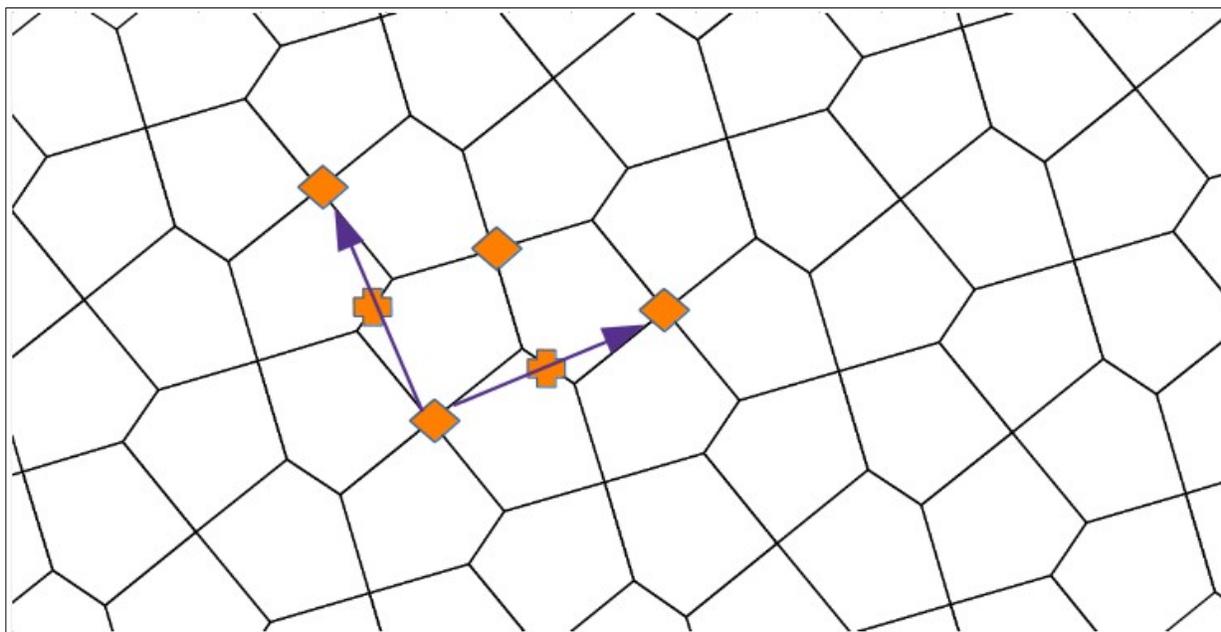


Figura 50
p4

Tipo 5

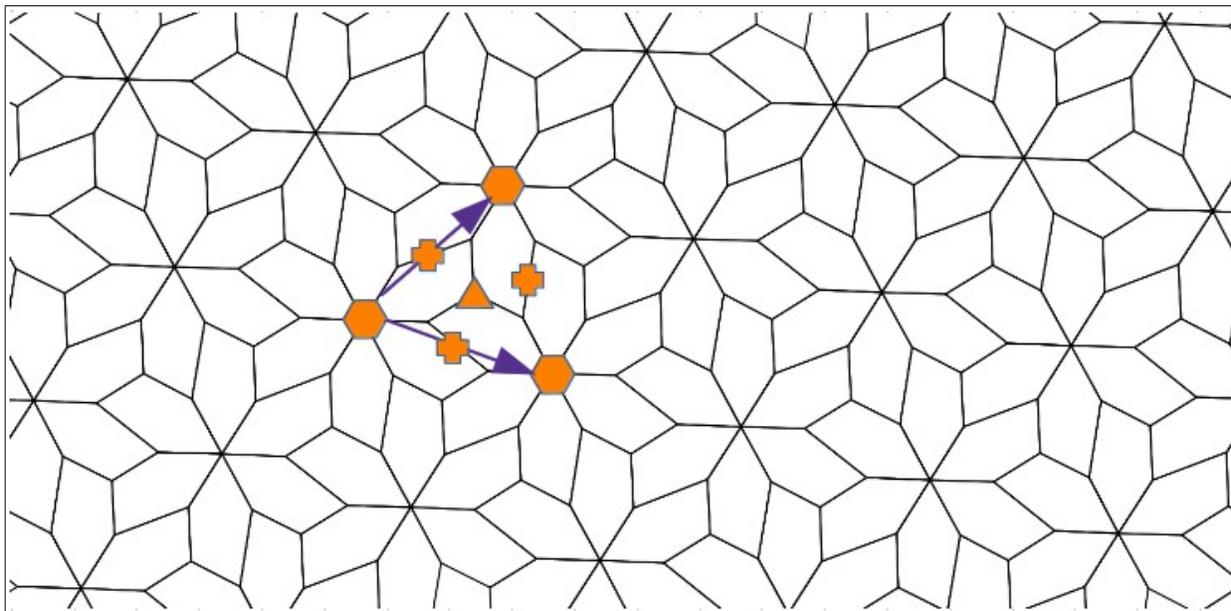


Figura 51
p6

Tipo 6

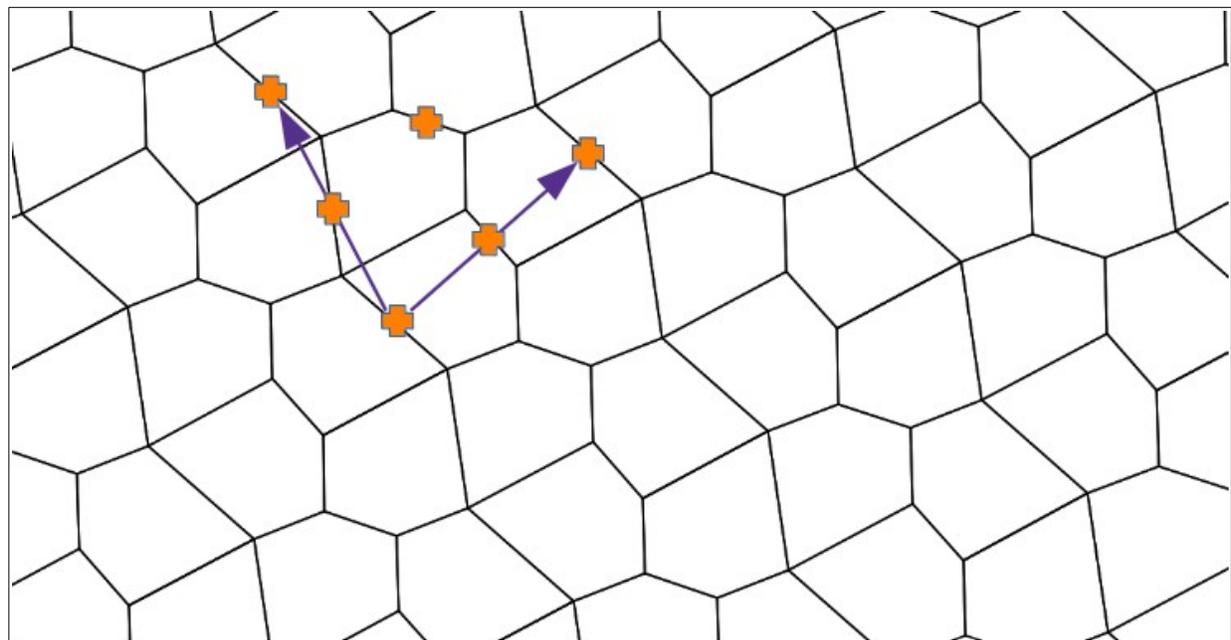


Figura 52
p2

Tipo 7

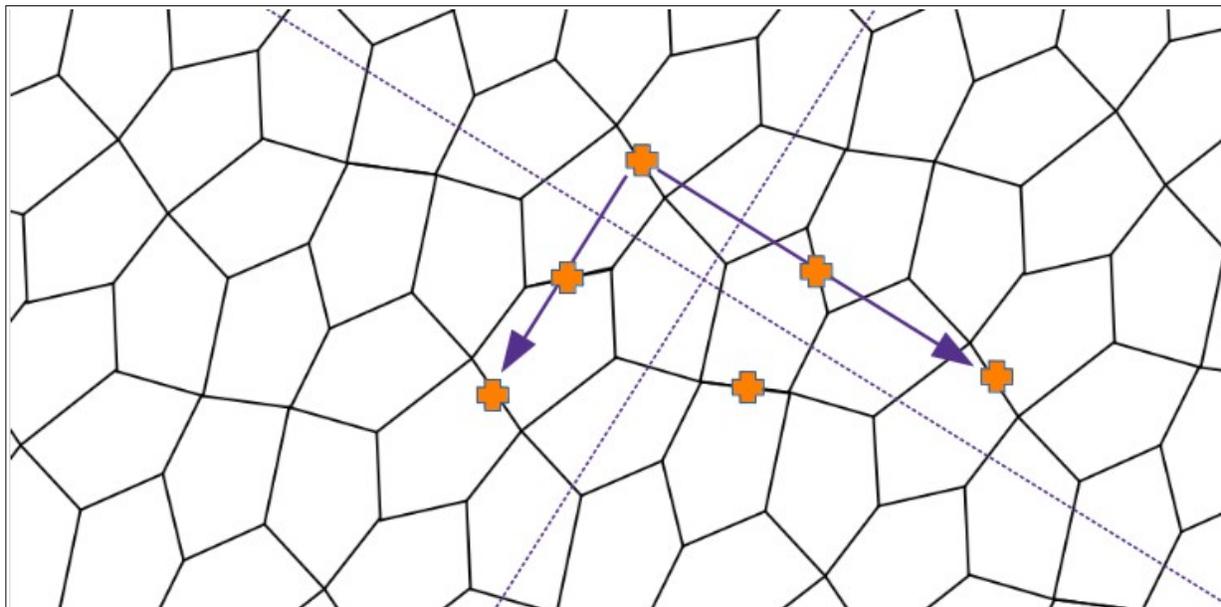


Figura 53
pgg

Tipo 8

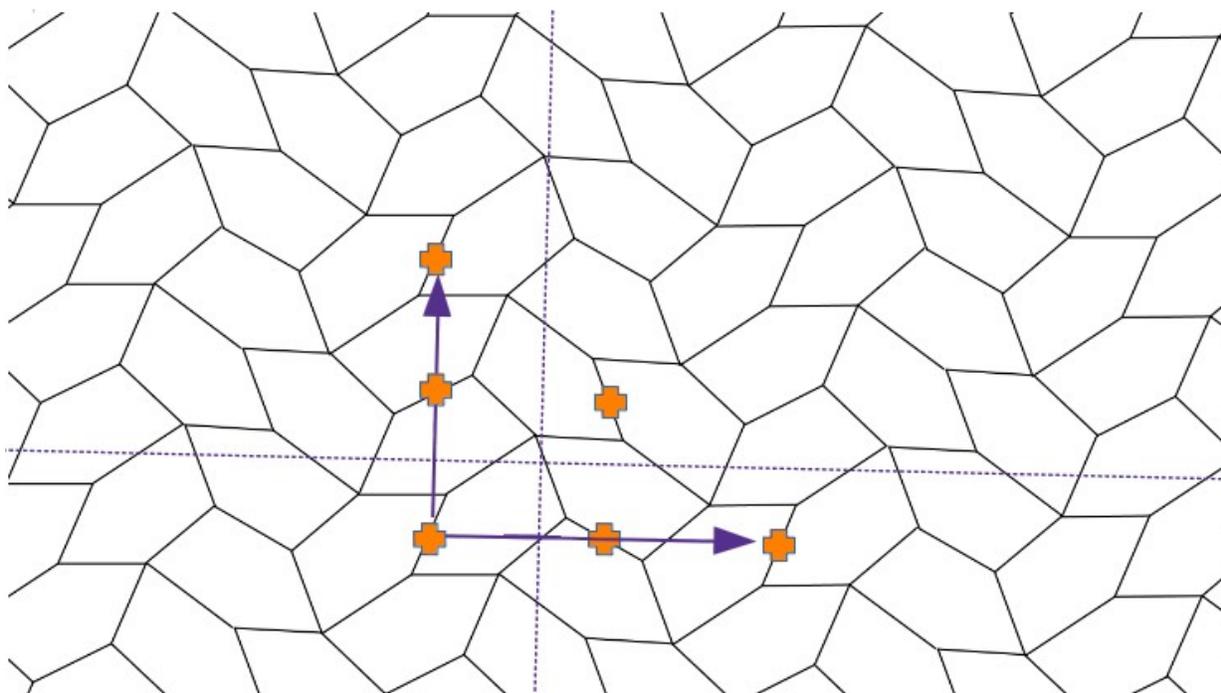


Figura 54
pgg

Tipo 9

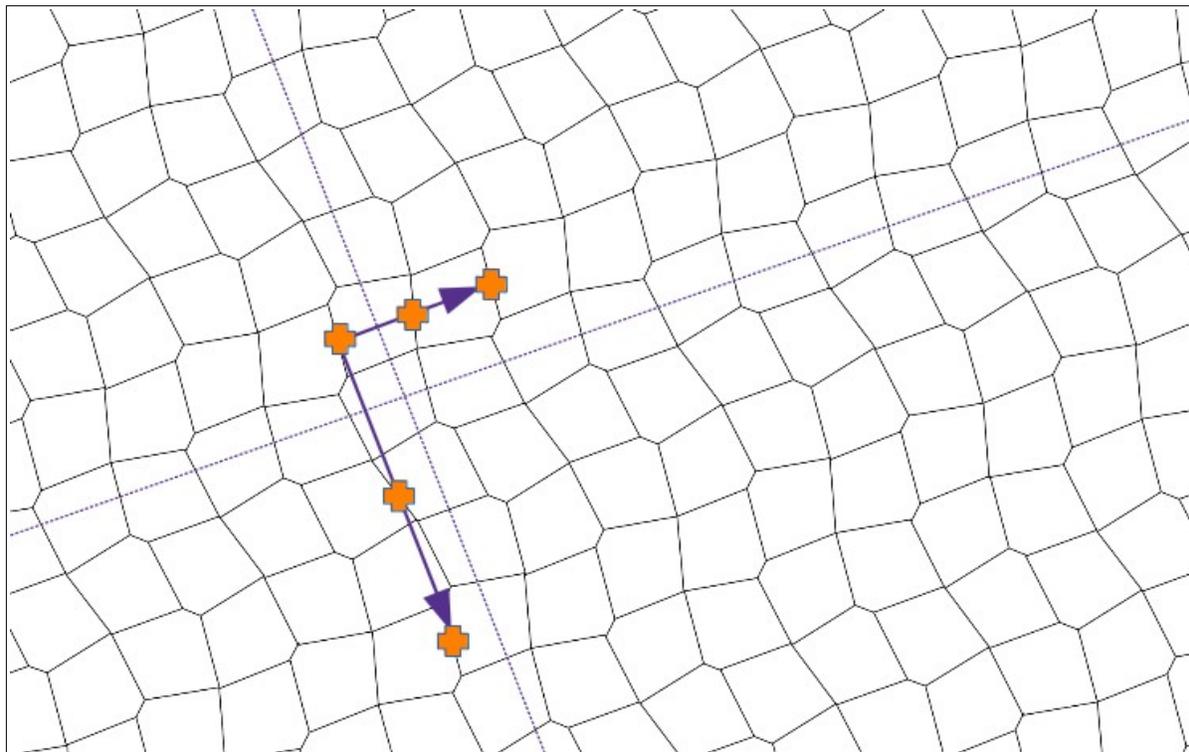


Figura 55
pgg

Tipo 10

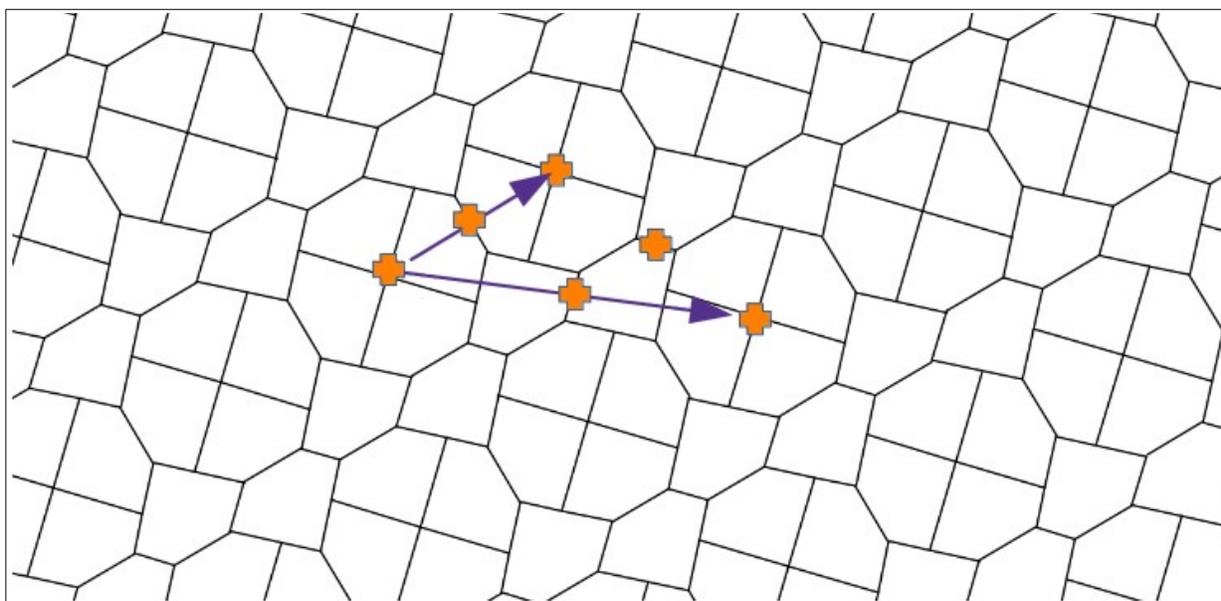


Figura 56
p2

Tipo 11

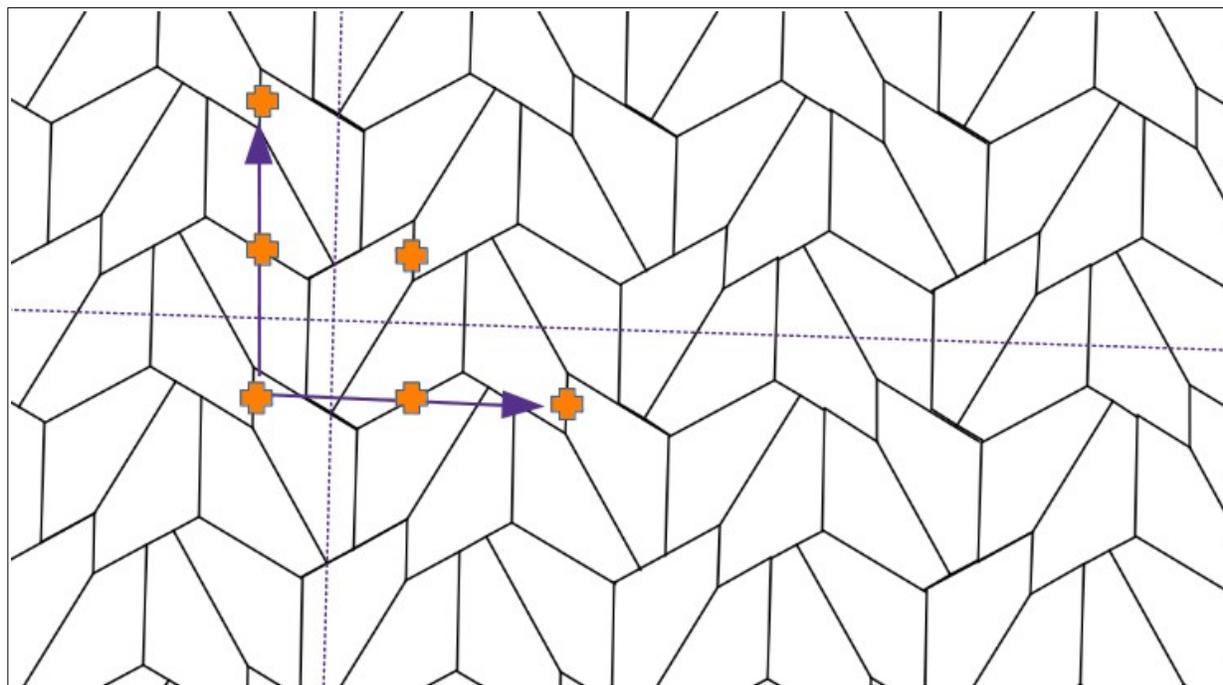


Figura 57
pgg

Tipo 12

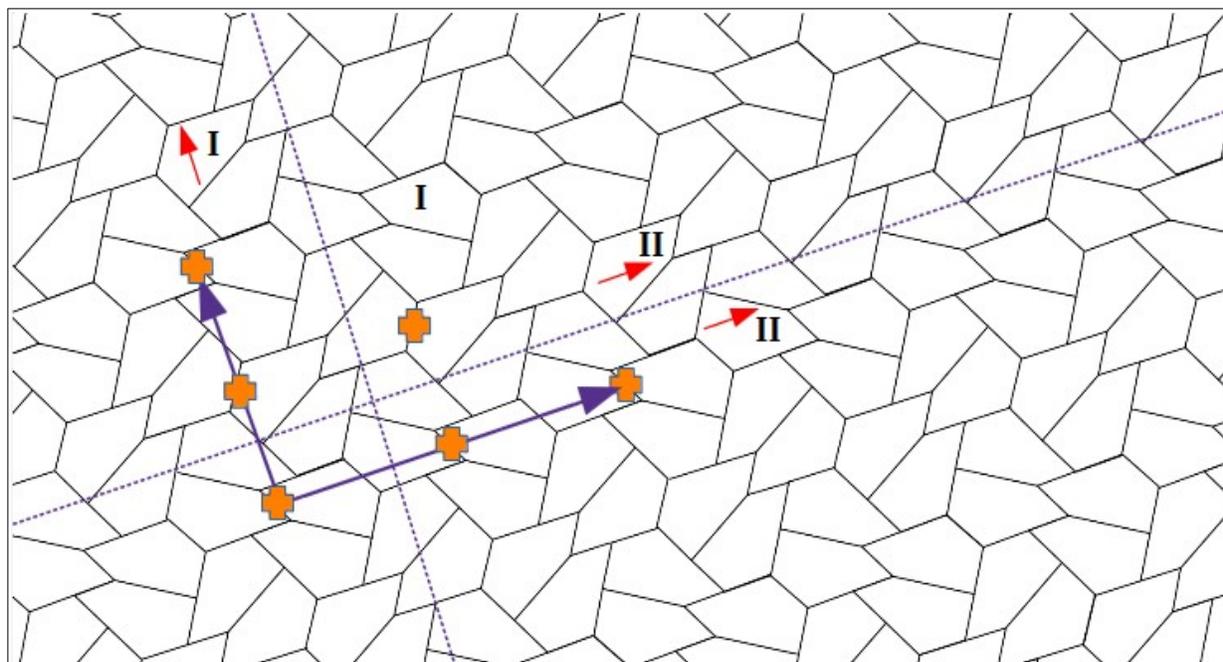


Figura 58
pgg

Tipo 13

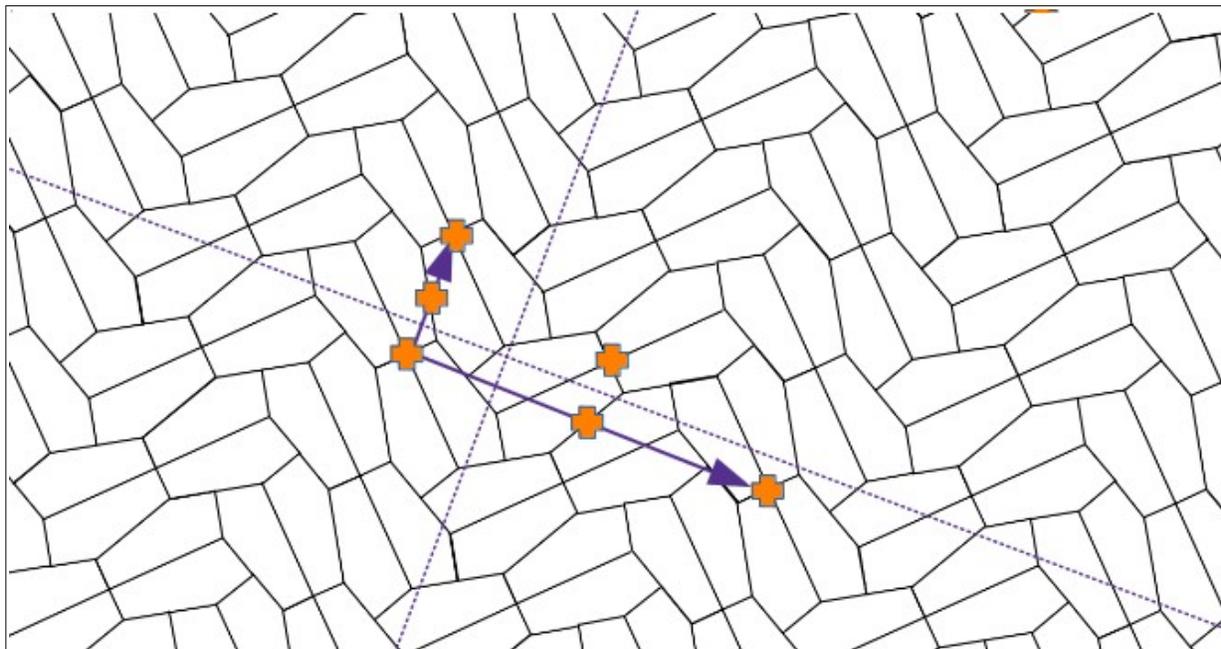


Figura 59
p_{gg}

Tipo 14

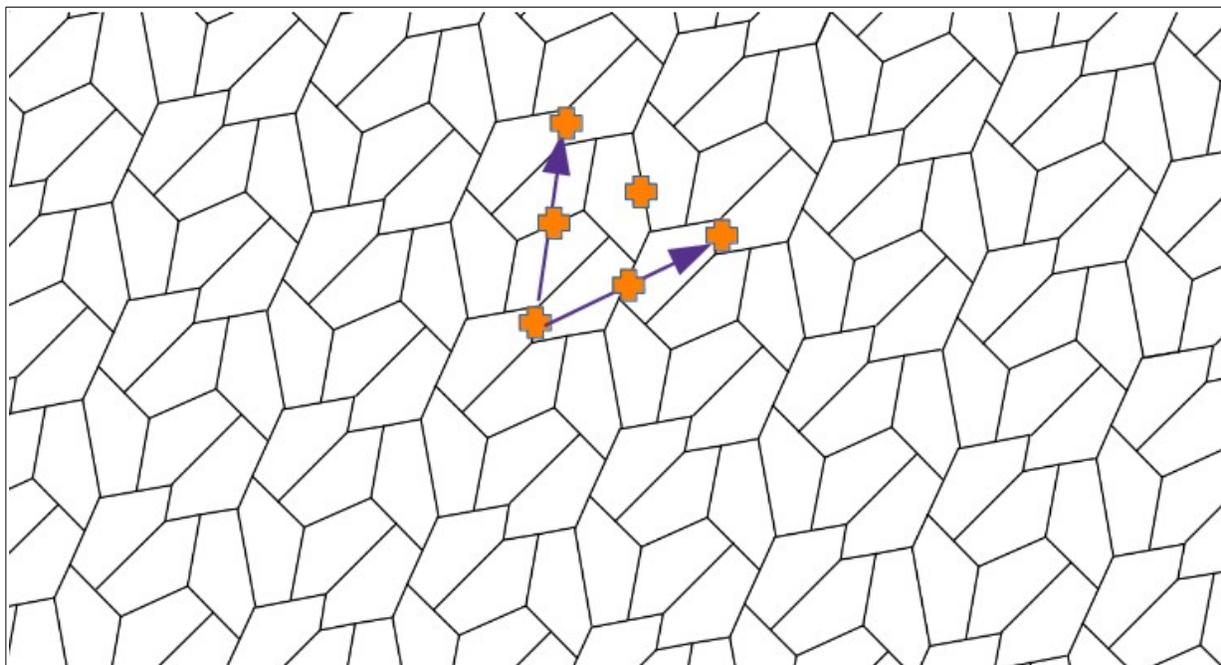


Figura 60
p₂

Tipo 15

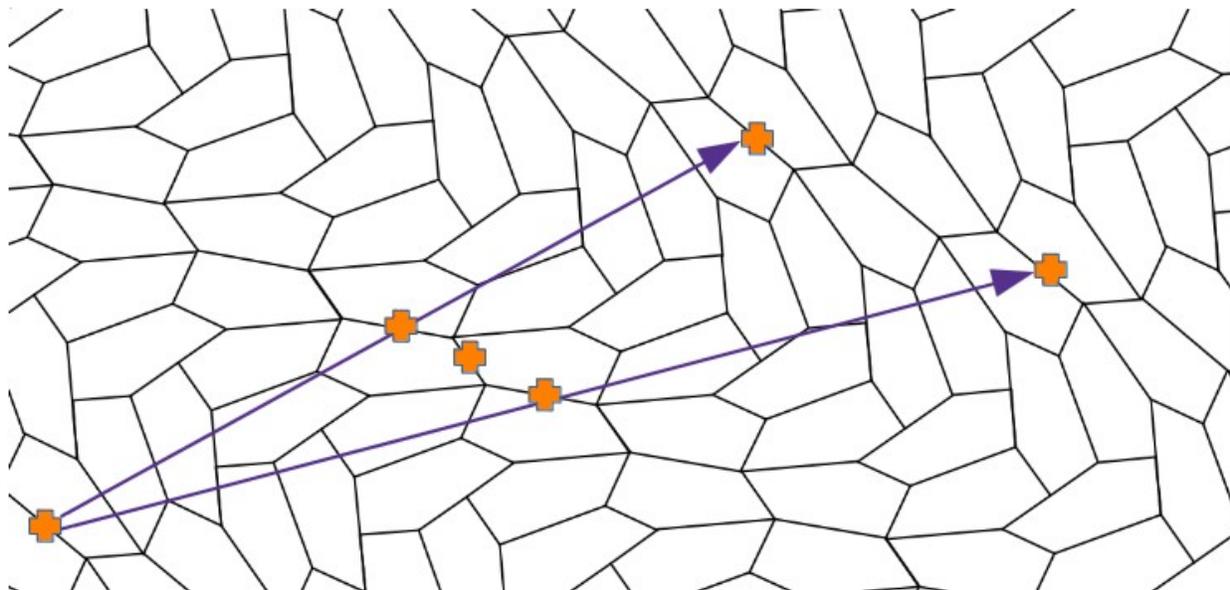


Figura 61
p2

4.4 ¿Serán sólo quince pentágonos?

Entre el descubrimiento del pentágono número catorce en 1985 (ver [33]) y el número quince en 2015 (ver [21]) pasaron treinta años. En esas tres décadas se puede decir que prácticamente no hubo nuevos avances en el problema de encontrar a todos estos tipos de pentágonos. Lo que generó un cambio en 2015 no fue que un matemático con una pluma y un par de hojas encontrara un nuevo pentágono por medio de técnicas tradicionales sino que Mann, McLoud y Von Derau [21] por medio de algoritmos computacionales realizaron búsquedas para clasificar a los pentágonos en lo que llamaron *teselaciones i-bloque transitivas*.

Como ya se ha mencionado, sólo los primeros cinco tipos de pentágonos pueden generar teselaciones isoedrales. Mann, McLoud y Von Derau se preguntaron qué pasaría con las teselaciones de los otros pentágonos si se construyeran nuevas teselaciones a partir de *parches* que fueran la unión de dos o más teselas (pentágonos) adyacentes, es decir, en lugar de un pentágono sea la prototesela, las nuevas teselaciones tendrán como prototesela a la unión de 2 o más pentágonos adyacentes.

Definición 4.17: Dada una teselación monohedral \mathcal{T} por un pentágono convexo κ , diremos que su **teselación i-bloque transitiva** \mathcal{L} es una teselación formada por un parche \mathcal{B} que consiste en la unión de i pentágonos de \mathcal{T} de forma que:

1. \mathcal{B} es conexo
2. \mathcal{T} está compuesta de imágenes congruentes de \mathcal{B}
3. \mathcal{L} tiene como prototesela a \mathcal{B} y es isoedral
4. i es el número mínimo para el cuál el parche \mathcal{B} existe

Al parche \mathcal{B} se le llama el **i-bloque**.

La teselación i-bloque transitiva no necesariamente tendría que existir. Por ejemplo, en una teselación aperiódica no existiría. Lo que Mann, McLoud y Von Derau conjeturaron es que todo pentágono convexo admite una teselación i-bloque transitiva, es decir, conjeturaron que ningún pentágono convexo puede ser una tesela de Einstein. Y aunque su búsqueda no fue exhaustiva, si

lograron mostrar que los 15 pentágonos convexos conocidos hasta ahora sí admiten una teselación 1, 2 o 3-bloque transitiva.

Es así como el trabajo de Mann, McLoud y Von Derau, además de reactivar el problema, dio inicio a la búsqueda de resolverlo mediante el uso de herramientas computacionales.

En agosto de 2017 Michaël Rao publicó un artículo en el que argumenta, también utilizando algoritmos computacionales, que los 15 tipos de pentágonos convexos conocidos hasta ahora son los únicos que pueden teselar al plano. Aunque han pasado más de cinco años, este artículo continúa sin haber sido revisado.

Rao divide su artículo en cuatro partes. La primera parte es una breve introducción al problema de las teselaciones monohedrales por polígonos convexos, en la segunda parte presenta las siguientes definiciones:

Definición 4.18: Dado un vértice v de una teselación monohedral \mathcal{T} , que tiene como prototesela a un pentágono convexo \mathcal{P} , diremos que v es **completo** si v es un vértice de cada pentágono adyacente a v . En caso contrario, es decir, si v está en uno de los lados de un pentágono \mathcal{Q} pero no es un vértice de \mathcal{Q} diremos que v es **medio**.

v es completo

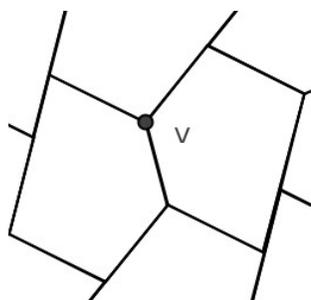


Figura 62

v es medio

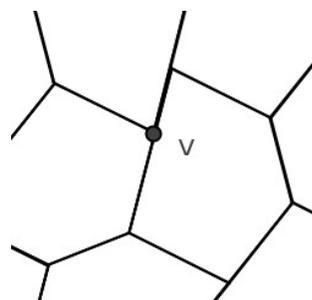


Figura 63

Definición 4.19: Dado un vértice v de una teselación monohedral que tiene como prototesela a un pentágono convexo \mathcal{P} de vértices s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 , ordenados de esa forma en sentido horario, llamaremos **vector de teselas** de v a $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) \in \mathbb{N}^5$ y lo denotaremos por $V(v)$ donde c_i es el número de teselas que tienen a v como vértice y corresponde al vértice s_i de \mathcal{P} .

El **vector de teselas corregido** de v , denotado como $V^c(v)$, será:

- $V(v)$ si v es un vértice completo.
- $2V(v)$ si v es un vértice medio.

Continuando con la notación anterior, si denotamos a los ángulos internos de \mathcal{P} correspondientes a s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 como $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \alpha_3\pi, \alpha_4\pi, \alpha_5\pi$ respectivamente y debido a que la suma de ángulos internos de un pentágono es igual a 3π tenemos que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 3$. De manera análoga tenemos que si v es un vértice de la teselación que es completo entonces la suma de todos los ángulos adyacentes a v deberán sumar 2π y si v es un vértice medio entonces deberán sumar π . En cualquier caso, por las observaciones anteriores, si denotamos como α al vector $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ tenemos que $\alpha \cdot V^c(v) = 2$.

Definición 4.20: Dada una teselación monohedral \mathcal{T} , que tiene como prototesela a un pentágono convexo \mathcal{P} , definimos al **conjunto de vectores de teselas** $W(\mathcal{T})$ como $W(\mathcal{T}) = \{V(s) \mid s \in V(\mathcal{T})\}$ y a $W^c(\mathcal{T})$ como $W^c(\mathcal{T}) = \{V^c(s) \mid s \in V(\mathcal{T})\}$.

Posteriormente Rao realiza la observación de que $W(\mathcal{T})$ y $W^c(\mathcal{T})$ siempre son finitos. Para llegar a esa conclusión Rao está considerando que un vértice v de la teselación \mathcal{T} es compartido por a lo más por tres teselas y por ello deduce que 4^5 y 8^5 son cotas para $W(\mathcal{T})$ y $W^c(\mathcal{T})$ respectivamente. Podemos considerar a α como el menor ángulo interno de la prototesela \mathcal{P} de \mathcal{T} y sea $n = \left\lfloor \frac{360^\circ}{\alpha} \right\rfloor$, entonces podemos asegurar que $(n+1)^5$ y $[2(n+1)]^5$ son cotas para $W(\mathcal{T})$ y $W^c(\mathcal{T})$ respectivamente. Ciertamente estas cotas podrían reducirse pero en realidad lo único que nos importa es que los conjuntos sean finitos.

Después Rao presenta dos definiciones preliminares para poder dar la definición de densidad positiva. Antes se debe de hablar de qué es la densidad [28]. La siguiente definición sólo tendrá sentido al principio para teselaciones con un número finito de vértices y eso se debe que Rao

considera la definición inicialmente sólo para teselaciones de discos topológicos $\mathcal{T}_{o,r}$ que define como $\mathcal{T}_{o,r} = \{P \in \mathcal{T} \mid P \cap D(o,r) \neq \emptyset\}$ donde $D(o,r)$ es el disco con centro en $o \in \mathbb{R}^2$ y radio $r \in \mathbb{R}^+$.

Definición 4.21: Dada una teselación \mathcal{T} en un disco topológico sea $w \in W(\mathcal{T})$, se define a la densidad de w como:

$$\text{density}(w) = \frac{\text{número de vértices } s \text{ con } V(s) = w}{\text{número de teselas en } \mathcal{T}}$$

Definición 4.22: Sea v un vértice de $\mathcal{T}_{o,r}$, diremos que v es un **vértice interior** si para toda tesela $P \in \mathcal{T}$ tal que v es un vértice de P se cumple que $P \in \mathcal{T}_{o,r}$. Dado un conjunto H de vértices de $\mathcal{T}_{o,r}$ denotamos por $IV(H)$ al subconjunto de H de vértices interiores. Utilizando la misma notación $IV(\mathcal{T}_{o,r})$ nos referiremos al conjunto de vértices interiores de la teselación $\mathcal{T}_{o,r}$.

Y finalmente la definición de densidad positiva:

Definición 4.23: Diremos que una teselación monohedral \mathcal{T} que tiene como prototesela a un pentágono convexo \mathcal{P} tiene **densidad positiva** si para cualesquiera $v \in W(\mathcal{T})$ y $o \in \mathbb{R}^2$ se cumple que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\{s \in IV(\mathcal{T}_{o,r}) : V(s) = v\}|}{|\mathcal{T}_{o,r}|} > 0$$

Definición 4.24: Dado $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}^5$ se dice que \mathcal{X} es **bueno** si para todo $u \in \mathbb{R}^5$ tal que $\sum u = 0$ se cumple que $u \cdot v = 0$ para todo $v \in \mathcal{X}$ o bien existen $v, v' \in \mathcal{X}$ tales que $u \cdot v < 0 < u \cdot v'$.

Lo siguiente que indica Rao es que si un pentágono convexo tesela al plano entonces puede hacerlo en una teselación que tenga densidad positiva y que si una teselación \mathcal{T} tiene densidad positiva entonces $W^c(\mathcal{T})$ será bueno por lo que para terminar basta con encontrar a todos los conjuntos buenos.

Por último, la última definición de este trabajo:

Definición 4.25: Dado $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}^5$ construimos al conjunto $\mathfrak{B}_{\mathcal{X}} \subseteq \mathbb{R}^5$ de forma que un elemento $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ está en $\mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$ si y sólo si para todo $i \in \{1, \dots, 5\}$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $0 \leq \alpha_i \leq 1$
2. $\sum_{i=1}^5 \alpha_i = 3$
3. Para todo $v \in \mathcal{X}, \alpha \cdot v = 2$.

Una vez armado con esas definiciones Rao inicia la sección tres de su trabajo buscando a todos los conjuntos \mathcal{X} buenos tales que $\mathfrak{B}_{\mathcal{X}} \cap (0, 1)^5 \neq \emptyset$.

A partir de aquí el trabajo se vuelve computacional:

Rao indica que al correr sus programas obtiene 193 conjuntos \mathcal{X} buenos maximales no vacíos que tienen a los elementos de $\mathfrak{B}_{\mathcal{X}}$ ordenados por lo que toma todas las permutaciones y genera 3,495 conjuntos \mathcal{X} buenos maximales tales que $\mathfrak{B}_{\mathcal{X}} \cap (0, 1)^5 \neq \emptyset$ y al tomar sólo un representante de cada clase por rotaciones y reflexiones le restan 371 conjuntos.

Aunque el código de Rao no está publicado, lo que dificulta la revisión de su trabajo, el profesor de la universidad de Pittsburgh Thomas Hales realizó de forma independiente un programa que realiza la misma búsqueda de los 193 conjuntos utilizando el lenguaje de programación Mathematica en 137 líneas. El código de Hales sí está publicado en Github [13] e indica haber llegado a los mismos 193 conjuntos que Rao.

A partir de esos 193 conjuntos, todo lo que sigue del artículo de Rao no ha sido revisado y mucho de esto se debe a que no está publicado el código fuente de los programas que utilizó y a que en general Rao omite muchas demostraciones de los resultados que utiliza.

En términos generales, para cada uno de los 371 conjuntos buenos \mathcal{X} (cuyos elementos son condiciones de ángulos en vértices) realiza una **búsqueda exhaustiva** para tratar de encontrar teselaciones que sólo admitan vértices con alguna de las condiciones (elementos) de \mathcal{X} . Al ejecutar sus algoritmos indica que obtiene 24 tipos de pentágonos convexos capaces de teselar el plano y al analizar los 24 tipos resultan ser alguno de los 15 tipos ya conocidos o algún caso degenerado por lo que al no encontrar nuevos pentágonos indica que el problema está resuelto.

Rao no publicó el código que utilizó para realizar la búsqueda exhaustiva de todos esos tipos de pentágonos, simplemente se limita a decir que le llevó 5,000 líneas de código en el lenguaje de programación C++ [28] y tarda 40 segundos en ejecutarse [26].

Rao finaliza su artículo [27] diciendo que:

“Estas observaciones se pueden realizar utilizando un sistema algebraico computacional, imponiendo condiciones lineales a ángulos, a longitudes y [...] con un sistema de ecuaciones polinomiales.”

Es así que debido a la falta de demostraciones en el trabajo de Rao, a que el código que utilizó no está disponible para su consulta y a que Rao mismo reconoce que en el futuro sería conveniente dar una prueba formal para el algoritmo de la búsqueda exhaustiva (indica que quizás se podría realizar con el asistente de pruebas Coq [28]), en el presente trabajo consideraremos su prueba sobre la sola existencia de 15 pentágonos convexos capaces de teselar el plano como incompleta.

Concluiremos el presente trabajo indicando los problemas más importantes que permanecen abiertos relacionados con las teselaciones monoedrales por polígonos convexos.

Quizás la más grande aportación del presente trabajo es el descubrimiento de la falta de demostración de que los 3 tipos de hexágonos convexos conocidos son los únicos que teselan el plano. Es un resultado que gran parte de la comunidad matemática supone cierto y que al realizar un rastreo de la gran cantidad de citas a ese resultado tarde o temprano siempre llegan al trabajo de Reinhardt [29]. Más aún, hace preguntarse si de verdad será cierto el resultado o

acaso existirán otros tipos de hexágonos convexos que teselen el plano y aún estén pendientes de ser descubiertos.

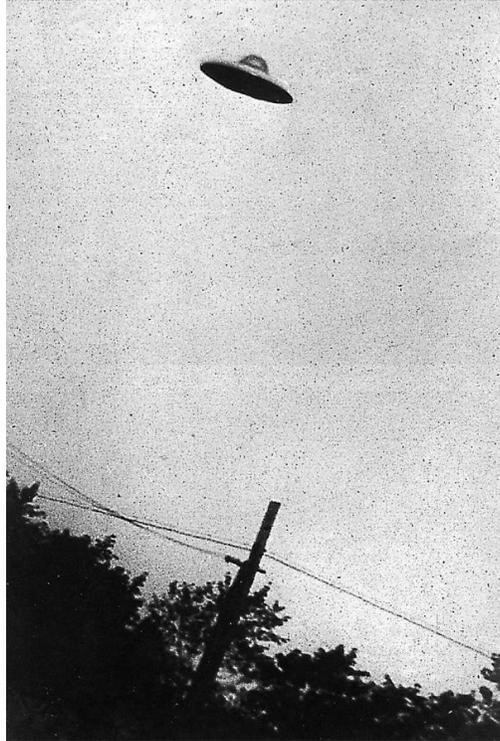


Figura 64

Apéndice

Problemas abiertos

Este es el resumen de los problemas que quedaron abiertos tal como se vio en las secciones 4.2, 4.3 y 4.4:

1. Demostrar que todo hexágono convexo que tesela el plano puede hacerlo con una teselación isoedra. [11]
2. Demostrar que la lista de los 3 hexágonos convexos que teselan el plano está completa. [29]
3. Demostrar que la lista de los 15 pentágonos convexos que teselan el plano está completa. [29]
4. Demostrar que no existe un polígono convexo que tesele el plano tal que todas sus teselaciones sean aperiódicas (es decir que ningún polígono convexo puede ser una tesela de Einstein). [36]

Referencias bibliográficas

- [1] Blåsjö, Viktor. "The isoperimetric problem". *The Evolution of*, June-July, 2005., pp. 526-566. MAA. maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/blasjo526.pdf
- [2] Bollobás, Béla. "Filling the plane with congruent convex hexagons without overlapping". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica*, Vol. 6. 1963. pp. 117-124, annales-math.elte.hu/archive.html
- [3] Brass, Peter, William OJ Moser y János Pach. *Research Problems in Discrete Geometry*. USA: Springer, 2006. pp 161-162,170 doi.org/10.1007/0-387-29929-7_5
- [4] Chartrand, Gary y Ping Zhang. *Chromatic Graph Theory*. Florida: CRC Press. 2009.
- [5] Courant, Richard y Herbert Robbins. *¿Qué son las Matemáticas?*. México: Fondo de Cultura Económica, 2002. pp. 270-274.
- [6] de Fátima Corrêa Ruiz Castro, Rosiene. "Pavimentações no plano euclidiano". *Tesis*. Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, 2008, clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2015/10/monografia1.pdf
- [7] Fulton, Chandler. "Tessellations." *The American Mathematical Monthly*, vol. 99, no. 5, 1992, pp. 442–445. JSTOR, [jstor.org/stable/2325088](https://www.jstor.org/stable/2325088)
- [8] Fischer, Maria. "Tiling the plane with equilateral convex pentagons". *Parabola*, Volume 52, Issue 3, 2016. parabola.unsw.edu.au
- [9] Gardner, Martin. "Mathematical games." *Scientific American*, vol. 233, no. 1, 1975, pp. 112–116, [jstor.org/stable/24949848](https://www.jstor.org/stable/24949848)
- [10] Gardner, Martin. "Mathematical games." *Scientific American*, vol. 233, no. 6, 1975, pp. 117–118. JSTOR, [jstor.org/stable/24949967](https://www.jstor.org/stable/24949967)
- [11] Grünbaum, Branko y G.C. Shephard. *Tilings & Patterns*. New York: Dover, 2016.
- [12] Grünbaum, Branko, and Geoffrey C. Shephard. "Tilings with congruent tiles." *Bulletin of the AMS* 3.3 (1980): 951-973.
- [13] Hales, Thomas. "Mathematica code verifying Rao-convex-pentagon-tiling classification". *Github*, 2017. github.com/flyspeck/publications-of-thomas-hales/blob/master/projects_discrete_geom/rao-pentagon-tilings/rao-convex-pentagon.m
- [14] Heesch, Heinrich y Otto Kienzle. *Flächenschluß*. Berlin: Springer-Verlag, 1963, pp. 79-109.
- [15] Hehl, Andreas. "The isoperimetric inequality". *GeometrieWerkstatt, University of Tübingen*, 2013. math.uni-tuebingen.de/ab/GeometrieWerkstatt/IsoperimetricInequality.pdf

- [16] Hilbert, David. "Mathematische probleme: vortrag, gehalten auf dem internationalen mathematiker-kongreß zu Paris". 1900. *Internet Archive*
web.archive.org/web/20150206103639/http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~kersten/hilbert/rede.html
- [17] Kershner, Richard B. "On paving the plane." *The American Mathematical Monthly*, vol. 75, no. 8, 1968, pp. 839–844. JSTOR, jstor.org/stable/2314332
- [18] Kershner, Richard Brandon. "On paving the plane". *APL Technical Digest*. July-August 1969. pp. 4-10. jhuapl.edu/TechDigest
- [19] Klamkin, M. S. y A. Liu. "Note on a result of Niven on impossible tessellations." *The American Mathematical Monthly*, vol. 87, no. 8, 1980, pp. 651–653. JSTOR, jstor.org/stable/2320954
- [20] Lahtonen, Jyrki. "Why a tessellation of the plane by a convex polygon of 7 or more sides is not possible?" *Mathematics Stack Exchange*. 2016. math.stackexchange.com/q/91765
- [21] Mann, Casey, Jennifer McCloud-Mann y David Von Derau. "Convex pentagons that admit i-block transitive tilings" arXiv:1510.01186 [math.MG], Oct. 2015. arxiv.org/abs/1510.01186
- [22] Martin, George. *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*. New York: Springer, 1996.
- [23] Matt "Is fractal perimeter always infinite?" *Mathematics Stack Exchange*. 2020. math.stackexchange.com/q/3618756
- [24] Niven, Ivan. "Convex polygons that cannot tile the plane." *The American Mathematical Monthly*, vol. 85, no. 10, 1978, pp. 785–792. JSTOR, jstor.org/stable/2320624
- [25] Ramírez, Ana Irene y José Seade. *Introducción a la Geometría Avanzada*. México: Facultad de Ciencias, UNAM, 2016.
- [26] Rao, Michael. "Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane." *ENS de Lyon*. 2017. perso.ens-lyon.fr/michael.rao/publi/penta.pdf
- [27] Rao, Michael. "Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane." ArXiv:1708.00274 [Math], Aug. 2017. arXiv.org, arxiv.org/abs/1708.00274
- [28] Rao, Michael. "Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane." *Ecole Normale Supérieure de Lyon, CNRS*, 2017. indico.math.cnrs.fr/event/3369/attachments/2198/2569/pres_pentagones.pdf
- [29] Reinhardt, Karl. "Über die zerlegung der ebene in polygone". *Tesis*. Borna-Leipzig: Noske. 1918, pp. 56–76. resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN316479497
- [30] Schattschneider, Doris. "The plane symmetry groups: their recognition and notation." *The American Mathematical Monthly*, vol. 85, no. 6, 1978, pp. 439–450. JSTOR, jstor.org/stable/2320063

- [31] Schattschneider, Doris. "Tiling the plane with congruent pentagons." *Mathematics Magazine*, vol. 51, no. 1, 1978, pp. 29–39. JSTOR, [jstor.org/stable/2689644](https://www.jstor.org/stable/2689644)
- [32] Schattschneider, Doris. "Marjorie Rice and the MAA tiling." *Journal of Mathematics and the Arts* 12:2-3, 2018, pp. 114-127 doi.org/10.1080/17513472.2018.1453740
- [33] Singmaster, David y Joel Zeitlin. "News and letters." *Mathematics Magazine*, vol. 58, no. 5, 1985, pp. 308. JSTOR, [jstor.org/stable/2690183](https://www.jstor.org/stable/2690183)
- [34] Tapp, Kristopher. *Symmetry: A Mathematical Exploration*. Switzerland: Springer, 2021.
- [35] Whittaker, Sharon. "Marjorie Rice's secret pentagons." *Quanta Magazine*, Abstractions Blog 2017. quantamagazine.org/marjorie-rices-secret-pentagons-20170711/
- [36] Wolchover, Natalie. "Pentagon tiling proof solves century-old math problem" *Quanta*, 2017. quantamagazine.org/pentagon-tiling-proof-solves-century-old-math-problem-20170711/
- [37] Zong, Chuanming. "Can you pave the plane nicely with identical tiles." ArXiv:1803.06610 [Math], Mar. 2018. arXiv.org, arxiv.org/abs/1803.06610
- [38] Zong, Chuanming. "Can you pave the plane with identical tiles?." *Notices of the American Mathematical Society* 67.5 (2020). doi.org/10.1090/noti2075

Bibliografía

- [1] Agarwal, Pawan. "Basic crystal concepts". *Indian Institute of Technology*. 2001. home.iitk.ac.in/~sangals/crystosim/crystaltut.html
- [2] Edwards, Steve. "Primitive and centered cells". *Kennesaw State University, Marietta GA*. 2015. ksuweb.kennesaw.edu/~sedwar77/tile/defs/centered.htm
- [3] Hidalgo, Laura. *Mosaicos*. México: Instituto de Matemáticas, UNAM, 2007.
- [4] Klaassen, Bernhard. "Rotationally symmetric tilings with convex pentagons and hexagons" arXiv:1509.06297 [Math.MG], Sep. 2015. arXiv.org, arxiv.org/abs/1509.06297
- [5] Wang, David. "On universal tilers" arXiv:1109.0813 [Math], Sep. 2011. arxiv.org, arxiv.org/abs/1109.0813