Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

El teorema de Beurling y la hipótesis de Riemann

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Julio César Pardo Dañino

TUTOR

Dr. Pierre Michel Bayard

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2022

Oh matemáticas severas, no os he olvidado desde que vuestras sabias lecciones, más dulces que la miel, se derramaron en mi corazón, como una ola refrescante. Instintivamente, desde la cuna, aspiraba a beber en nuestra fuente, más antigua que el sol, y sigo recorriendo el atrio sagrado de vuestro templo solemne, yo, el más fiel de vuestros iniciados. Había, en mi espíritu, una especie de melancolía, un no sé qué espeso como el humo; pero supe franquear religiosamente los peldaños que llevan a vuestro altar y vosotras alejasteis de mí ese velo obscuro, como el viento aleja a la mariposa. Pusisteis, en su lugar una frialdad excesiva, una consumada prudencia y una lógica implacable. Con la ayuda de vuestra fortificante leche, mi inteligencia se desarrolló rápidamente y tomó proporciones inmensas, en medio de esa arrebatadora claridad que con tanta prodigalidad otorgáis a quienes os aman con amor sincero. ¡Aritmética!, ¡álgebra!, ¡geometría!, ¡trinidad grandiosa!, ¡Iluminoso triángulo!
Isidore Ducasse, Conde de Lautréamont

Cuando oí al docto astrónomo,
cuando me presentaron, ordenadas en columnas, las pruebas y las cifras,
cuando me enseñaron las cartas y los diagramas, para que los sumara, dividiera y midiese,
cuando oí desde mi asiento la conferencia del astrónomo, que suscitaba grandes ovaciones en la sala,
qué pronto me sentí inexplicablemente hastiado,
hasta que me escabullí y me fui a andar solo,
respirando el místico y húmedo aire de la noche, y mirando las estrellas,
de vez en cuando, en perfecto silencio.
Walt Whitman

¡La ciencia, la nueva nobleza! El progreso. ¡El mundo avanza! ¿Por qué no iba a moverse? Es la visión de los números. Vamos hacia el Espíritu. Es muy cierto, es oráculo lo que digo. Comprendo, y no sabiendo explicarme sin palabras paganas, quisiera callarme.
Arthur Rimbaud

Dedicatoria

A mis padres:
Sé indulgente conmigo un momento, y déjame sentarme a tu lado, que luego terminaré lo que estoy haciendo. Mi corazón, si no te ve, no tiene sosiego, y mi trabajo es como un afán infinito en un fatigoso mar sin playas.

Agradecimientos

A mis padres María Dañino y Crispín Pardo, por ser el cimiento de mis metas. Por recibir siempre de ellos el apoyo incondicional que he necesitado. Por toda la sabiduría, compresión y amor que he hallado en sus palabras.

A mi hermana Natalia Pardo, por todos los momentos maravillosos que hemos compartido. Por constantemente alentar mis sueños.

Al Dr. Pierre Michel Bayard, por todas sus valiosas enseñanzas. Por su apoyo y paciencia en la elaboración de este trabajo. Por compartirme su amor por las matemáticas.

A mis sinodales, la Dra. Natalia Jonard, el Dr. Vinicio Gómez, el Dr. Francisco Torres y la Dra. Berenice Zavala, por su tiempo en la revisión de este trabajo, por sus valiosos comentarios.

A mis profesores de la Facultad de Ciencias, que en palabras de Sofia Kovalévskaya me enseñaron que es imposible ser matemático sin tener alma de poeta.

Al Dr. Francisco José Sánchez Sesma, por compartirme su pasión por la ciencia y el arte. Por siempre brindarme su mano. Por sus invaluables consejos.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por seguir respondiendo con afecto maternal mis preguntas de la niñez. Por volverse mi segundo hogar.

A todos mis amigos que he conocido dentro y fuera de las aulas universitarias, con quienes he podido compartir pensamientos, metas y sueños.

Índice general

Introducción

“Los números son una fuente perpetua de reflexiones y descubrimientos.”

Paul Valéry

El estudio de la función ζ, desde los tiempos de Euler, ha demostrado tener una estrecha relación con la teoría de números. El primer indicio de esta conexión se debe al mismo Euler, quien en 1749 muestra como la función ζ se puede expresar como el producto infinito de cierto cociente de números primos.

La correspondencia anterior, encamina a Riemann a estudiar más a fondo la función ζ. En sus memorias de 1859 extiende el dominio de la función ζ y observa que esta guarda una intima relación con el teorema de los números primos. Hace notar que este teorema, está relacionado con los llamados ceros no triviales de la función ζ.

Al final de sus memorias, Riemann conjetura que todos los ceros no triviales de la función ζ cumplen que su parte real es $1/2$. La conjetura anterior es conocida como la hipótesis de Riemann, y es de gran importancia para la teoría de números. De ser cierta dicha hipótesis, se mejoraría la aproximación para el teorema de los números primos. La hipótesis de Riemann es uno de los problemas abiertos más famosos de las matemáticas y forma parte del listado de los problemas de Hilbert.

Una de las formas de estudiar la hipótesis de Riemann es a través de equivalencias analíticas, pues se aprovechan las propiedades de analiticidad de la función ζ. En particular, algunas de estas equivalencias están basadas en los espacios de Hardy y en el teorema de Beurling (ver [10]).

Los espacios de Hardy (definidos en el disco o en algún semiplano) son ciertos subconjuntos de las funciones holomorfas con crecimiento restringido en la frontera de su dominio. El teorema de Beurling aplicado a estos espacios clasifica completamente los subespacios invariantes bajo el llamado “operador de deslizamiento”. Una versión ligeramente modificada a este teorema aplicada a los espacios de Hardy en el semiplano, dada por Lax (ver [13]), es la cual permite generar algunas equivalencias a la hipótesis de Riemann.

El objetivo de este trabajo es dar algunas equivalencias a la hipótesis de Riemann a través de los espacios de Hardy con dominio en el semiplano y el teorema de Beurling. Para esto, seguiremos el siguiente camino:

En el primer capítulo, llamado *Espacios de Hardy*, se presentan las propiedades básicas de estos espacios. Se les dota de una estructura lineal y de una métrica. Se presentan las primeras propiedades de las funciones de estos espacios: el teorema de factorización de Riesz y la existencia de límites radiales en la frontera del dominio.

El segundo capítulo denominado *El teorema de Beurling*, habla sobre la identificación de los espacios de Hardy con ciertos subconjuntos de los espacios L^p con dominio en el círculo unitario. Se presenta el teorema de descomposición canónica de Smirnov, el cual nos dice como es la estructura interna de cualquier función en un espacio de Hardy. Finalmente se demuestra el teorema de Beurling y se dan algunas consecuencias importantes de él.

En el tercer capítulo, titulado *La función* ζ se hace un estudio de las principales propiedades de la función ζ: su extensión analítica y algunos resultados sobre sus ceros. Se finaliza con una breve introducción a la relación de la hipótesis de Riemann con el teorema de los números primos.

En el último capítulo llamado *Espacios de Hardy en el semiplano*, se da la construcción de estos a partir de los espacios de Hardy con dominio en el disco unitario. Se estudian sus propiedades generales, heredadas de los espacios de Hardy en el disco. A través de los teoremas de Paley-Wiener se da una forma de introducir a la función ζ en uno de estos espacios de Hardy. Finalmente utilizando una variante del teorema de Beurling, debida a Lax, se generan algunas equivalencias a la hipótesis de Riemann.

Capítulo 1

Espacios de Hardy

"Las ideas de los matemáticos, como las de los pintores o los poetas deben ser bellas. La belleza es el primer requisito: no hay lugar permanente en el mundo para unas matemáticas feas."

Godfrey Hardy

En este capítulo estudiaremos ciertos subconjuntos de las funciones holomorfas con dominio en el disco unitario con crecimiento restringido en la frontera del dominio, dotándolos de una estructura lineal. Estos espacios, llamados espacios de Hardy tienen un gran número de propiedades relevantes referentes a: factorizaciones, valores en la frontera del dominio y representaciones integrales del tipo de Cauchy.

1.1. Definición y primeras propiedades

En esta sección introducimos una clase importante de funciones que son esenciales para construir los espacios de Hardy. Antes de ello, iniciemos con la notación básica de este trabajo.

Notación 1.1.1. *Denotamos lo siguiente:*

1. $\mathbb{D} := \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$.
2. $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$.
3. $\mathcal{C}(\mathbb{D}) = \{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es continua} \}$.
4. $\mathcal{H}(\mathbb{D}) := \{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa} \}$.

En lo siguiente, haremos dos consideraciones, la primera es que utilizaremos el espacio de medida $\left(\mathbb{T}, \mathscr{B}(\mathbb{T}), \frac{dm}{2\pi}\right)$, donde m es la medida de Lebesgue y $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ dotado de la topología inducida por la topología compacto-abierta de $\mathcal{C}(\mathbb{D})$ (ver apéndice A).

Definición 1.1.2. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto abierto, y sea $v : U \to \mathbb{R}$ una función continua. Decimos que v es subarmónica , si para toda bola $\overline{B}_r(a) \subset U$, se cumple*

$$v(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v\left(a + r\exp(i\theta)\right) d\theta.$$

Observación 1.1.3. *Ya que las funciones armónicas cumplen la propiedad del valor medio, tenemos que toda función armónica es subarmónica; ahora veamos ejemplos no triviales de estas funciones.*

Teorema 1.1.4. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto abierto, $f \in \mathcal{H}(U)$ con f no idénticamente nula, entonces si $p \in (0, \infty)$, las funciones $\left|f\right|^p$ y $\ln^+\left|f\right|$ son funciones subarmónicas.*

Demostración. Es claro que las funciones $\left|f\right|^p, \ln^+\left|f\right| : U \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Ahora sea $\overline{B}_r(a) \subset U$. Basta ver que

$$\ln^+\left|f(a)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+\left|f(a + r\exp(i\theta))\right| d\theta \quad \text{y} \quad \left|f(a)\right|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(a + r\exp(i\theta))\right|^p d\theta$$

Si $f(a) = 0$, las desigualdades se cumplen trivialmente. Por lo cual podemos suponer que $f(a) \neq 0$, utilizamos la fórmula de Jensen (ver Apéndice B) para obtener

$$\ln\left|f(a)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|f(a + r\exp(i\theta))\right| d\theta. \tag{1.1}$$

Del hecho de que $\ln\left|f\right| \leq \ln^+\left|f\right|$ y $\ln^+\left|f(a)\right|$ vale $\ln\left|f(a)\right|$ si $\left|f(a)\right| \geq 1$ y 0 en caso contrario, tenemos que

$$\ln^+\left|f(a)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+\left|f(a + r\exp(i\theta))\right| d\theta$$

por lo que $\ln^+\left|f\right|$ es una función subarmónica. Ahora para la función $\left|f\right|^p$, consideramos la función $\varphi(t) := \exp(pt)$, la cual es una función convexa y creciente, así por la desigualdad de Jensen aplicada a (1.1), tenemos que

$$\left|f(a)\right|^p \leq \varphi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|f(a + r\exp(i\theta))\right| d\theta\right) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(a + r\exp(i\theta))\right|^p d\theta$$

así $\left|f\right|^p$ es subarmónica. ∎

Teorema 1.1.5. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto abierto, $v : U \to \mathbb{R}$ una función subarmónica, $K \subseteq U$ un subconjunto compacto y $h : K \to \mathbb{R}$ una función continua, tal que es armónica en int(K). Si $v \leq h$ en ∂K, entonces $v \leq h$ en K.*

Demostración. Definamos la función $u := v - h : K \to \mathbb{R}$. la cual es claramente continua. Afirmamos que u es subarmónica en $\operatorname{int}(K)$. En efecto pues si $\overline{B}_r(a) \subset \operatorname{int}(K)$, al ser v una función subarmónica y al ser h armónica (por el teorema del valor medio) tenemos

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(a + r\exp(i\theta))\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(a + r\exp(i\theta))\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + r\exp(i\theta))\, d\theta$$

por lo que u es subarmónica en $\operatorname{int}(K)$. Ahora, puesto que u es continua en K, alcanza su máximo, m a saber. Supongamos que existe $\omega \in \operatorname{int}(K)$ tal que $v(\omega) > h(\omega)$, entonces $u(\omega) > 0$, de lo cual $m > 0$ y puesto que $u \leq 0$ en ∂K, tenemos que dicho máximo no se encuentra en la frontera. Definimos $M := \{z \in K \ : \ u(z) = m\}$, el cual es un subconjunto no vacío compacto de $\operatorname{int}(K)$. Tomamos ahora $\xi \in \partial M$, entonces para algún $\rho > 0$ si consideramos la bola $\overline{B}_\rho(\xi) \subset \operatorname{int}(K)$, tenemos que $B_\rho(\xi) \cap M \neq \emptyset$ y $B_\rho(\xi) \cap M^c \neq \emptyset$, por lo cual tenemos que

$$u(\xi) = m > \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\xi + \rho\exp(i\theta))\, d\theta$$

por lo que u no es subarmónica en $\operatorname{int}(K)$ y esto es una contradicción.

∎

Teorema 1.1.6. *Sea $v : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ una función subarmónica, entonces la función definida como*

$$r \in [0,1) \mapsto m(r) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v\left(r \exp(i\theta)\right) d\theta \in \mathbb{R}$$

es creciente.

Demostración. Sean $r_1, r_2 \in [0,1)$ con $r_1 < r_2$; como v es continua, consideramos la circunferencia $\partial B_{r_2}(0)$, y su problema de Dirichlet asociado; por el teorema de Schwarz D.0.8, existe una única función continua $h : \overline{B}_{r_2}(0) \to \mathbb{R}$ tal que es armónica en $B_{r_2}(0)$ y cumple que $v = h$ en $\partial B_{r_2}(0)$. Del teorema 1.1.5 tenemos que $v \leq h$ en $\overline{B}_{r_2}(0)$, y puesto que h es armónica y $v = h$ en $\partial B_{r_2}(0)$ tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v\left(r_1 \exp(i\theta)\right) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h\left(r_1 \exp(i\theta)\right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h\left(r_2 \exp(i\theta)\right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v\left(r_2 \exp(i\theta)\right) d\theta$$

de lo que concluimos que $m(r_1) \leq m(r_2)$ por lo que m es creciente. ■

Teorema 1.1.7 (Teorema de convexidad de Hardy)**.** *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $p \in (0, \infty)$ y sean*

$$\begin{aligned} M_0(f;r) &:= \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+\left|f\left(r \exp(i\theta)\right)\right| d\theta\right), \\ M_p(f;r) &:= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(r \exp(i\theta)\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}, \\ M_\infty(f;r) &:= \sup_{\theta \in [-\pi,\pi]} \left|f\left(r \exp(i\theta)\right)\right|, \end{aligned}$$

entonces M_0, M_p y M_∞ son funciones crecientes de r en $[0,1)$.

Demostración. El teorema 1.1.4 nos dice que $\ln^+\left|f\right|$ y $\left|f\right|^p$ son funciones subarmónicas y el teorema 1.1.6 nos dice que M_0 y M_p son funciones crecientes. Y del principio del módulo máximo, se deduce que M_∞ es creciente. ■

Definición 1.1.8 (Espacios de Hardy y la clase de Nevanlinna)**.** *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $p \in [0, \infty]$, denotamos*

$$\left\|f\right\|_p = \lim_{r \to 1} M_p(f;r)$$

donde $M_p(f;r)$ es como en el teorema 1.1.7.

1. *Sea $p \in (0, \infty]$, definimos el espacio de Hardy*

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \ : \ \left\|f\right\|_p < \infty\right\};$$

2. *Definimos la clase de Nevanlinna como*

$$N(\mathbb{D}) = \left\{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \ : \ \left\|f\right\|_0 < \infty\right\}.$$

Proposición 1.1.9. *Sean $0 < s < p < \infty$, entonces se cumple*

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D}) \subset N(\mathbb{D}).$$

Demostración. Se sigue de la definición 1.1.8, la desigualdad de Hölder y de la fórmula de Jensen. ■

Proposición 1.1.10. *Si $p \in [1,\infty]$ entonces $\left(H^p(\mathbb{D}), \|\cdot\|_p\right)$ es un espacio normado.*

Demostración. Veamos que $H^p(\mathbb{D})$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial respecto a la suma, tomamos $f,g \in H^p(\mathbb{D})$, $\alpha \in \mathbb{C}$; de la igualdad $\left|\alpha f\right| = |\alpha|\left|f\right|$ y de la desigualdad para $a,b \in \mathbb{R}, |a+b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$ tenemos que $\alpha f, f+g \in H^p(\mathbb{D})$. Para ver que es normado, únicamente falta verificar la desigualdad del triángulo, usando la desigualdad de Minkowski a $M_p(f;r)$, obtenemos $M_p(f+g;r) \leq M_p(f;r) + M_p(g;r)$ para todo $r \in [0,1)$ y haciendo $r \to 1$, obtenemos $\left\|f+g\right\|_p \leq \left\|f\right\|_p + \left\|g\right\|_p$. ■

Observación 1.1.11. *Notamos que en particular $H^p(\mathbb{D})$ es un espacio métrico, con la métrica inducida por la norma dada por $d(f,g) = \left\|f-g\right\|_p$ para todo $f,g \in H^p(\mathbb{D})$.*

Veamos que la convergencia en $H^p(\mathbb{D})$ es más fuerte que la convergencia uniforme en compactos de $\mathbb{D}$.

Lema 1.1.12. *Sean $p \geq 1$, $K \subset \mathbb{D}$ un subconjunto compacto, $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H^p(\mathbb{D})$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$ tal que $f_n \to f$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K}\left|f_n(z) - f(z)\right| = 0.$$

Demostración. Sea $f \in H^p(\mathbb{D})$ y $K \subset \mathbb{D}$ un subconjunto compacto, entonces existe $r \in (0,1)$ tal que $K \subset B_r(0)$, tomamos $R \in (r,1)$ y consideramos la circunferencia $\partial B_R(0)$ y una parametrización de ella, dada por $\gamma(\theta) := R\exp(i\theta)$, ahora tomando $z \in K$, por la fórmula de Cauchy, obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(R\exp(i\theta))}{R\exp(i\theta) - z}\exp(i\theta)d\theta;$$

usando que $|z| < r$, $R < 1$, obtenemos

$$\left|f(z)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{R-r}\int_0^{2\pi}\left|f(R\exp(i\theta))\right|d\theta = \frac{M_1(f;R)}{R-r}.$$

Ahora haciendo $R \to 1$ y por la proposición 1.1.9 tenemos que $\left|f(z)\right| \leq \left\|f\right\|_1 /(1-r)$ y usando la desigualdad de Hölder y tomando supremos sobre K, tenemos que

$$\sup_{z\in K}\left|f(z)\right| \leq \frac{\left\|f\right\|_p}{1-r}. \tag{1.2}$$

Finalmente, tomamos $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H^p(\mathbb{D})$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$ tal que $f_n \to f$ y en (1.2), tenemos

$$\sup_{z\in K}\left|f_n(z) - f(z)\right| \leq \frac{\left\|f_n - f\right\|_p}{1-r} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

■

Teorema 1.1.13. *Si $p \in [1,\infty]$, $\left(H^p(\mathbb{D}), \|\cdot\|_p\right)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Consideramos $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset H^p(\mathbb{D})$ una sucesión de Cauchy y $K \subset \mathbb{D}$ un subconjunto compacto arbitrario. De la desigualdad 1.2 tenemos que para $m,n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\sup_{z\in K}\left|f_n(z) - f_m(z)\right| \leq \frac{\left\|f_n - f_m\right\|_p}{1-r},$$

de esto, deducimos que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en la métrica que genera la topología compacto-abierta de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ (ver apéndice A) y puesto que es un espacio métrico completo, entonces existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f_n \to f$ en la topología compacto-abierta. Afirmamos que $f \in H^p(\mathbb{D})$ y que $f_n \to f$ en la métrica inducida por la norma$\|\cdot\|_p$. En efecto, puesto que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $H^p(\mathbb{D})$, tenemos que para $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que$\left\|f_m - f_n\right\|_p < \epsilon$ para todo $m, n \geq N$, de aquí tenemos que para $r \in [0,1)$ se tiene que $M_p(f_m - f_n; r) < \epsilon$. Ahora fijamos n y tomamos el límite cuando $m \to \infty$, como $f_m \to f$ uniformemente en los subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, particularmente en $\partial B_r(0)$, así obtenemos que

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f_m\left(r\exp(i\theta)\right) - f_n\left(r\exp(i\theta)\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(r\exp(i\theta)\right) - f_n\left(r\exp(i\theta)\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}.$$

Por lo que tenemos que $M_p(f - f_n; r) \leq \epsilon$ para todo $r \in [0,1)$ y $n \geq N$, lo cual nos implica que $f - f_n \in H^p(\mathbb{D})$ y al ser espacio vectorial, tenemos que $f \in H^p(\mathbb{D})$; y más aún al hacer que $r \to 1$, tenemos que$\left\|f - f_n\right\|_p \leq \epsilon$ para $n \geq N$, por lo que tenemos que $f_n \to f$ en la métrica inducida por la norma$\|\cdot\|_p$. ■

Observación 1.1.14. *Para $p \in (0,1)$, se cumple que $H^p(\mathbb{D})$ es un espacio vectorial, pero la aplicación $\|\cdot\|_p$ no cumple la desigualdad del triángulo, por lo que no es una norma. Sin embargo la aplicación $d(f,g) = \left\|f - g\right\|_p^p$ es una métrica, por lo que es un espacio métrico. Y más aún puede demostrarse que es completo.*

1.2. Factorización de Riesz

En esta sección estudiaremos una de las principales propiedades de las funciones en los espacios de Hardy, la cual nos dice que podemos "limpiarlas" de sus ceros sin aumentar su norma. Esta propiedad viene enunciada por el teorema de factorización de Riesz.

Recordemos que los automorfismos de $\mathbb{D}$ son las transformaciones de la forma $\exp(i\theta)\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ donde $a \in \mathbb{D}$ y $\theta \in \mathbb{R}$, con esto en mente tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2.1 (Producto de Blaschke finito)**.** *Un producto de Blaschke finito es una función constante $B(z) = \alpha$ donde $\alpha \in \mathbb{T}$ o bien un producto finito de automorfismos del disco, esto es una función de la forma*

$$B(z) = \exp(i\theta)\prod_{k=1}^{n}\frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$.

Observación 1.2.2. *Es evidente que $B \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), |B| < 1$ en $\mathbb{D}$ (en particular $B \in H^\infty(\mathbb{D})$) y sus ceros son exactamente los puntos $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$.*

Para pasar a los productos de Blaschke infinitos, necesitamos condiciones sobre el crecimiento de los ceros a_k y ajustar los coeficientes $\exp(i\theta)$ en cada factor. Para este fin, recordemos el teorema de convergencia de Weierestrass para productos infinitos.

Definición 1.2.3. *Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ y $f_n : A \to \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) una sucesión de funciones. Se dice que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalmente en A si el producto numérico $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \sup_A\left|f_n - 1\right|\right)$ converge (es decir si los productos parciales de este convergen).*

Teorema 1.2.4. *Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ y $f_n : A \to \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) una sucesión de funciones entonces*

1. *El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalmente en A si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\sup_A\left|f_n - 1\right|$ es convergente. Además en este caso los productos parciales $P_n := \prod_{k=1}^{n} f_k$ convergen uniformemente en A a una función $f : A \to \mathbb{C}$. Esta función es denotada por $f := \prod_{n=1}^{\infty} f_n$.*

2. *Si* $U \subseteq \mathbb{C}$ *es un subconjunto abierto,* $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{H}(U)$ *y* $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge normalmente en todo* $K \subset U$ *subconjunto compacto, entonces* $f := \prod_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{H}(U)$. *Además si* $z_0 \in U$ *es un cero de* f, *entonces* $ord(z_0, f) = \sum_{n=1}^{\infty} ord(z_0, f_n)$.

Una demostración de este teorema se puede encontrar en [17].

Teorema 1.2.5 (Producto de Blaschke infinito)**.** *Sea* $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{T}$ *y* $\{a_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$ *una sucesión tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$$

Entonces el producto infinito

$$B(z) := \alpha z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a}_n z} \qquad (z \in \mathbb{D})$$

define una función tal que $B \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $|B| < 1$ *en* $\mathbb{D}$ *(en particular* $B \in H^{\infty}(\mathbb{D})$*) y sus ceros son exactamente los puntos* a_n *(con la multiplicidad dada por el número de veces que cada uno de ellos aparece en la sucesión), más el origen con multiplicidad* k*. Al producto anterior se le denomina producto infinito de Blaschke.*

Demostración. Queremos ver que los productos infinitos convergen normalmente en cualquier $K \subset \mathbb{D}$ subconjunto compacto, para esto usamos el teorema 1.2.4. Sea $r \in (0, 1)$, basta ver que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{z\in B_r(0)} \left| 1 - \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a}_n z} \right|$$

es convergente en $B_r(0)$. Para esto, fijamos $z \in B_r(0)$, y observemos que

$$\left| 1 - \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a}_n z} \right| = \left| \frac{a_n + |a_n| z}{(1 - \overline{a}_n z) a_n} \right| (1 - |a_n|) \leq \frac{1 + r}{1 - r} (1 - |a_n|)$$

por lo que tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{z\in\mathbb{D}} \left| 1 - \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a}_n z} \right| \leq \frac{1 + r}{1 - r} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$$

así el producto B converge normalmente en todo compacto $K \subset \mathbb{D}$. Y puesto que cada factor del producto infinito es una función que pertenece a $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, entonces $B \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Más aún, como cada factor tiene un único cero en a_n, los ceros de B son los puntos a_n (contando la multiplicidad) y el origen con multiplicidad k además como cada factor tiene módulo menor a 1 (pues son automorfimos del disco), entonces $|B| < 1$ en $\mathbb{D}$. ■

Teorema 1.2.6. *Sea* $f \in N(\mathbb{D})$ *donde* f *no es la función idénticamente cero. Sean* $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ *los ceros de* f *enumerados de acuerdo con su multiplicidad, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty$$

(Suponemos tácitamente que f *tiene infinitos ceros en* $\mathbb{D}$*, pues si solo tuviera un número finito, la suma anterior sólo tiene un número finito de sumandos y no habría nada que demostrar).*

Demostración. Sea $f \in N(\mathbb{D})$ con $f \not\equiv 0$, si f tiene un cero de orden m en el origen podemos hacer $f(z) = z^m g(z)$ donde g tiene los mismos ceros que f, salvo en el origen. Es claro que $g \in N(\mathbb{D})$, por lo que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(0) \neq 0$. Ahora, sea $k \in \mathbb{Z}^+$ fijo y tomamos $r \in (0,1)$ de tal forma que $n(r) > k$ donde $n(r)$ es el número de ceros de f dentro de $\overline{B}_r(0)$ (puesto que $\overline{B}_r(0)$ es compacto tenemos que $n(r) < \infty$). Por la fórmula de Jensen (teorema B.0.2), tenemos que

$$\left|f(0)\right| \prod_{n=1}^{n(r)} \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|f\left(r\exp(i\theta)\right)\right| d\theta\right)$$

del hecho que $\ln \leq \ln^+$, obtenemos

$$\left|f(0)\right| \prod_{n=1}^{k} \frac{r}{|\alpha_n|} \leq \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+\left|f\left(r\exp(i\theta)\right)\right| d\theta\right). \tag{1.3}$$

Como $f \in N(\mathbb{D})$, tenemos que $\left\|f\right\|_0 < \infty$ lo que es equivalente a la existencia de $0 < C < \infty$ constante tal que para todo $r \in (0,1)$ se cumple que $M_0(f;r) \leq C$. Usando esto en la desigualdad 1.3 obtenemos

$$\prod_{n=1}^{k} |\alpha_n| \geq \frac{\left|f(0)\right| r^k}{C}.$$

La desigualdad persiste, para todo k, cuando $r \to 1$. Por tanto,

$$\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \geq \frac{\left|f(0)\right|}{C} > 0. \tag{1.4}$$

Sea $N \in \mathbb{Z}^+$, entonces es fácil ver que

$$\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \leq \prod_{n=1}^{N} |\alpha_n| \leq \exp\left(-\sum_{n=1}^{N}(1-|\alpha_n|)\right)$$

si suponemos que $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) = \infty$, tenemos de la desigualdad anterior que $\prod_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| = 0$, lo cual es una contradicción con la desigualdad 1.4. Por lo tanto concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) < \infty.$$

∎

Corolario 1.2.7. *Sea $f \in N(\mathbb{D})$, si existe una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\geq 1} \subset Z(f)$ tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) = \infty$$

entonces $f \equiv 0$.

Teorema 1.2.8 (Teorema de Riesz de factorización en H^p)**.** *Sea $p \in (0,\infty]$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$ (resp. $f \in N(\mathbb{D})$) tal que $f \not\equiv 0$. Sea B el producto de Blaschke formado por los ceros de f. Entonces, existe una única función $g \in H^p(\mathbb{D})$ (resp. $g \in N(\mathbb{D})$), tal que*

1. *g no tiene ceros en $\mathbb{D}$;*

2. $\|g\|_p = \|f\|_p$ (*resp.* $\|g\|_0 = \|f\|_0$);

3. $f = g\,B$.

Demostración. Si f no tiene ceros, tomamos $B(z) = 1$ y $g = f$ y terminamos; por lo que vamos a suponer que f tiene infinitos ceros (si f tuviera una cantidad finita de ceros, la demostración es similar pero más sencilla). Enumeramos como $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ los ceros de f considerando su multiplicidad. Notemos que si $f \in N(\mathbb{D})$ o en $H^p(\mathbb{D})$, por el teorema 1.2.6 tenemos que el producto de Blaschke formado por los ceros de f está bien definido y así $B \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Puesto que f y B tienen los mismos ceros, definimos $g := f/B$, la cual no se anula y cumple que $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Como $|B| < 1$ en $\mathbb{D}$ tenemos que

$$\left|f(z)\right| \leq \left|g(z)\right| \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}. \tag{1.5}$$

Veamos que g es la función buscada, primero suponemos que $f \in N(\mathbb{D})$, notemos que si $a, b > 0$, tenemos que $\ln^+(ab) \leq \ln^+(a) + \ln^+(b)$, y si $c \geq 1$ se tiene $\ln^+(c) = \ln(c)$, de lo cual obtenemos

$$\ln^+\left|g\right| \;\leq\; \ln^+\left|f\right| + \ln\left(\frac{1}{|B|}\right).$$

Ahora integrando la desigualdad anterior en $\mathbb{T}$, tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+\left|g\left(r\exp(i\theta)\right)\right| d\theta \;\leq\; \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+\left|f\left(r\exp(i\theta)\right)\right| d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\frac{1}{|B|}\left(r\exp(i\theta)\right)\right) d\theta.$$

Como $\left|B^*(\exp(i\theta))\right| = 1$ en c.t.p., tomando $r \to 1$, nos da que $\|g\|_0 \leq \|f\|_0$, lo que nos dice que $g \in N(\mathbb{D})$ y de (1.5) obtenemos que $\|g\|_0 = \|f\|_0$.

Ahora suponemos que $f \in H^p(\mathbb{D})$, definimos B_n como el producto de Blaschke finito, formado por los primeros n ceros de f tomando en cuenta su multiplicidad. Definimos $g_n := f/B_n$ para toda $n \geq 1$. Fijamos n y notamos que $\lim_{|z|\to 1}\left|B_n(z)\right| = 1$, de lo cual vemos que para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\left|B_n(r\exp(i\theta))\right| \to 1$ cuando $r \to 1$ uniformemente en θ. Así sea $\epsilon \in (0, 1)$ entonces existe $\rho \in (0, 1)$ que depende ϵ tal que

$$\left|B_n(r\exp(i\theta))\right| \; > 1 - \epsilon \quad \text{si} \quad r > \rho \quad \text{para toda} \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Multiplicando por $\left|g_n\right|$ la desigualdad anterior obtenemos

$$M_p(f; r) > (1 - \epsilon)\, M_p(g_n; r) \quad \text{si} \quad r > \rho \quad \text{para toda} \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Haciendo $r \to 1$, tenemos que $\|f\|_p \geq (1 - \epsilon)\|g_n\|_p$ y como $\epsilon \in (0, 1)$, tenemos $\|f\|_p \geq \|g_n\|_p$. Por otro lado, como $|B_n| < 1$ en $\mathbb{D}$ tenemos que $\left|f\right| \leq \left|g_n\right|$ en $\mathbb{D}$, por lo que concluimos que $\|f\|_p = \|g_n\|_p$ para toda $n \geq 1$. Así tenemos una sucesión $\{g_n\} \subset H^p(\mathbb{D})$ la cual claramente cumple que $\left|g_n(z)\right| \nearrow \left|g(z)\right|$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces por el teorema de convergencia monótona tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} M_p(g_n; r) = M_p(g; r) \quad \text{para toda} \quad r \in (0, 1).$$

Como $M_p(g_n; r) \leq \|g_n\|_p$, tenemos que $M_p(g; r) \leq \|f\|_p$ para todo $r \in (0, 1)$, haciendo $r \to 1$ obtenemos que $\|g\|_p \leq \|f\|_p$, de lo cual concluimos que $g \in H^p(\mathbb{D})$ y de la desigualdad (1.5) obtenemos que $\|g\|_p = \|f\|_p$. La unicidad de g es clara.

∎

Veamos una forma de factorizar las funciones en los espacios de Hardy en términos de funciones en $H^2(\mathbb{D})$. Este resultado hace posible en muchos casos aplicar resultados de $H^2(\mathbb{D})$ a funciones de cualquier $H^p(\mathbb{D})$ como se verá más adelante.

Teorema 1.2.9. *Sea $p \in (0, \infty)$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$ tal que $f \not\equiv 0$. Sea B el producto de Blaschke formado por los ceros de f. Entonces existe $h \in H^2(\mathbb{D})$ tal que*

1. *h no tiene ceros en $\mathbb{D}$;*
2. $\|f\|_p^p = \|h\|_2^2$;
3. *$f = B h^{2/p}$.*

Demostración. Sea $f \in H^p(\mathbb{D})$; por el teorema de factorización de Riesz existe $g \in H^p(\mathbb{D})$ tal que no tiene ceros en $\mathbb{D}$, $\|g\|_p = \|f\|_p$ y $f = gB$ (donde B es el producto de Blaschke formado por los ceros de f en $\mathbb{D}$). Como g no se anula en $\mathbb{D}$, entonces existe $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $\exp(\varphi) = g$. Así definimos $h := \exp\left(\frac{p\varphi}{2}\right)$, de lo que tenemos $f = B h^{2/p}$. Es claro que $h \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y no se anula en $\mathbb{D}$ y como $|h|^2 = |g|^p$ tenemos que

$$\|h\|_2^2 = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| h\left(r\exp(i\theta)\right)\right|^2 d\theta = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| g\left(r\exp(i\theta)\right)\right|^p d\theta < \infty.$$

Por lo que $\|g\|_p^p = \|h\|_2^2$ y en consecuencia $h \in H^2(\mathbb{D})$ y $\|h\|_p^p = \|h\|_2^2$. ■

Finalicemos esta sección con otro tipo de descomposición de las funciones de los espacios de Hardy en términos de funciones en $H^\infty(\mathbb{D})$.

Teorema 1.2.10 (de F. y R. Nevanlinna)**.** *Sea $p \in (0, \infty)$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$, entonces existen $\varphi, \psi \in H^\infty(\mathbb{D})$ tales que*

1. *$|\varphi(z)| \leq 1$ y $|\psi(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$;*
2. *ψ no se anula en $\mathbb{D}$;*
3. *$f = \varphi/\psi$.*

Demostración. Si $f \equiv 0$, no hay nada que demostrar. Así, supongamos que $f \not\equiv 0$. Como $f \in H^p(\mathbb{D})$ por la proposición (1.1.9) $f \in N(\mathbb{D})$ y así $\|f\|_0 < \infty$. Tomamos $r \in (0, 1)$ tal que f no se anula en $\partial B_r(0)$. Sean $\{a_k\}_{k=1}^n$ los ceros de f en $B_r(0)$, por la fórmula de Poisson-Jensen (teorema B.0.3) tenemos

$$f(z) = \alpha \prod_{k=1}^{n} \frac{r(a_k - z)}{r^2 - \bar{a}_k z} \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r\exp(i\theta) + z}{r\exp(i\theta) - z} \ln\left| f\left(r\exp(i\theta)\right)\right| d\theta\right) \qquad \forall z \in B_r(0)$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$. Definimos

$$g_r(z) := \prod_{k=1}^{n} \frac{r(a_k - z)}{r^2 - \bar{a}_k z} \qquad \forall z \in B_r(0).$$

Es claro que $g_r \in \mathcal{H}(B_r(0))$ y que $|g_r| < 1$ en $B_r(0)$, con esto definimos las funciones

$$\varphi_r(z) := \alpha g_r(z) \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r\exp(i\theta) + z}{r\exp(i\theta) - z} \ln^-\left| f\left(r\exp(i\theta)\right)\right| d\theta\right) \qquad \forall z \in B_r(0),$$
$$\psi_r(z) := \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r\exp(i\theta) + z}{r\exp(i\theta) - z} \ln^+\left| f\left(r\exp(i\theta)\right)\right| d\theta\right) \qquad \forall z \in B_r(0).$$

Es claro que $\varphi_r/\psi_r = f$ en $B_r(0)$. Ahora, tomamos una sucesión $\{r_k\}_{k\geq 1}$ tal que $r_k \to 1$ y f no se anula en $\partial B_{r_k}(0)$. Definimos para todo $z \in \mathbb{D}$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ las funciones $\Phi_k(z) := \varphi_{r_k}(r_k z)$ y $\Psi_k(z) := \psi_{r_k}(r_k z)$. Es claro que $\Phi_k, \Psi_k \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Como $P_r, \ln^-, \ln^+ \geq 0$, tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple $\left|\Phi_k(z)\right| \leq 1$ y $\left|\Psi_k(z)\right| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, por lo que si consideramos las familias $\mathscr{F} = \{\Phi_k\}_{k\geq 1}$ y $\mathscr{G} = \{\Psi_k\}_{k\geq 1}$ estas son uniformemente acotadas en $\mathbb{D}$ y por ende en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Entonces por el teorema de Montel las familias $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ son relativamente compactas en la topología compacto-abierta de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$; así existen subsucesiones $\{\Phi_{k_j}\}_{j\geq 1} \subset \mathscr{F}$ y $\{\Psi_{k_j}\}_{j\geq 1} \subset \mathscr{G}$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tales que $\Phi_{k_j} \to \varphi$ y $\Psi_{k_j} \to \psi$ convergen uniformemente en los subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Es claro que $\left|\varphi(z)\right| \leq 1$ y $\left|\psi(z)\right| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Por otro lado, tenemos que $f(r_{k_j} z) \to f(z)$ converge uniformemente en los subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Puesto que $f(r_{k_j} z) = \Phi_{k_j}(z)/\Psi_{k_j}(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$, para concluir que $f = \varphi/\psi$ basta ver que ψ no se anula en $\mathbb{D}$. Para esto, observamos que

$$\left|\Psi_k(0)\right| = \left|\psi_{r_k}(0)\right| = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+\left|f\left(r_k \exp(i\theta)\right)\right| d\theta\right) \geq \exp(-M)$$

donde M es una constante. Como $\Psi_{k_j} \to \psi$ resulta que $\left|\psi(0)\right| \geq \exp(-M)$, luego $\psi \not\equiv 0$ (no es la función idénticamente cero) y como Ψ_{k_j} no se anula en $\mathbb{D}$ por el teorema de Hurwitz, tenemos que ψ no se anula en $\mathbb{D}$. ■

1.3. Existencia de límites radiales

Finalmente estudiaremos el comportamiento de las funciones de los espacios de Hardy sobre la frontera del disco. Veremos que los límites radiales de estas existen en casi todas partes de $\mathbb{T}$.

Definición 1.3.1. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, definimos (si es que este existe) para $\theta \in [0, 2\pi]$ su límite radial como*

$$f^*(\exp(i\theta)) := \lim_{r\to 1} f(r\exp(i\theta)).$$

Teorema 1.3.2. *Sea $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ entonces $f^*(\exp(i\theta))$ existe en c.t.p. de $\theta \in [0, 2\pi]$ y además para todo $r \in [0, 1)$ se tiene*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(r\exp(i\theta))\right| d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi}\left|f^*(\exp(i\theta))\right| d\theta.$$

Demostración. Tomamos $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, la cual es de la forma $f = u + iv$, puesto que f es acotada, también lo son u y v; y como $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, entonces u y v son funciones armónicas, por la equivalencia del teorema D.0.10, tenemos que son integrales de Poisson y por el teorema D.0.12 tenemos que $u^*(\exp(i\theta))$ y $v^*(\exp(i\theta))$ existen y son finitos en c.t.p. de $\theta \in [0, 2\pi]$, por lo que concluimos que $f^*(\exp(i\theta))$ existe y es finito en c.t.p. de $\theta \in [0, 2\pi]$. Ahora, como $M_1(f; r)$ es una función creciente de r en $[0, 1)$; entonces para toda $r \in [0, 1)$ se cumple

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(r\exp(i\theta))\right| d\theta \leq \lim_{\rho\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(\rho\exp(i\theta))\right|.$$

Como f es acotada, entonces por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos

$$\lim_{\rho\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(\rho\exp(i\theta))\right| = \int_{-\pi}^{\pi}\left|f^*(\exp(i\theta))\right| d\theta$$

por lo que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(r\exp(i\theta))\right| d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi}\left|f^*(\exp(i\theta))\right| d\theta.$$

■

Teorema 1.3.3. *Sea B un producto de Blaschke como en el teorema 1.2.5, entonces $B^*(\exp(i\theta))$ existe en c.t.p. de $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\left|B^*(\exp(i\theta))\right| = 1$ en c.t.p. de $\theta \in [0, 2\pi]$.*

Demostración. Al ser B acotado, por el teorema anterior se tiene que $B^*(\exp(i\theta))$ existe en c.t.p. de $\theta \in [0, 2\pi]$. Para la siguiente parte, es claro que $\left|B^*(\exp(i\theta))\right| \leq 1$, basta ver que $\left|B^*(\exp(i\theta))\right| \geq 1$ en c.t.p. de $\theta \in [0, 2\pi]$. Consideramos B_n el n-ésimo producto parcial de B y definimos la función $f := B/B_n$. Es evidente que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y es acotada, entonces $f \in H^\infty(\mathbb{D})$; teniendo en cuenta que $\left|B_n^*(\exp(i\theta))\right| = 1$, por el teorema 1.3.2 obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{B(r\exp(i\theta))}{B_n(r\exp(i\theta))}\right| d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi}\left|B^*(\exp(i\theta))\right| d\theta.$$

Como $B_n \to B$ $(n \to \infty)$ uniformemente en $\mathbb{T}$ tenemos que

$$2\pi \leq \int_{-\pi}^{\pi}\left|B^*(\exp(i\theta))\right| d\theta.$$

Ahora procedemos por contradicción, supongamos que existe $A \subset [-\pi, \pi]$ un subconjunto Lebesgue medible con $m(A) > 0$ tal que $\left|B^*(\exp(i\theta))\right| < 1$, entonces

$$2\pi \leq \int_A \left|B^*(\exp(i\theta))\right| d\theta + \int_{[-\pi,\pi]\setminus A}\left|B^*(\exp(i\theta))\right| d\theta < 2\pi$$

lo cual es una contradicción. ■

Teorema 1.3.4 (Fatou, 1906)**.** *Sea $p \in (0, \infty]$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$, entonces el límite radial $f^*(\exp(i\theta))$ existe y es finito en c.t.p. de $\theta \in [0, 2\pi]$.*

Demostración. El caso en que $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ lo demostramos en el teorema 1.3.2. Si $f \equiv 0$, no hay nada que demostrar. Supongamos que $f \not\equiv 0$ y que $f \in H^p(\mathbb{D})$ con $p > 0$ por el teorema 1.2.10 tenemos que existen $\varphi, \psi \in H^\infty(\mathbb{D})$ tales que $|\varphi| \leq 1$, $|\psi| \leq 1$ y ψ no se anula en $\mathbb{D}$ y además $f = \varphi/\psi$. Del teorema 1.3.2 tenemos que $\varphi^*(\exp(i\theta))$ y $\psi^*(\exp(i\theta))$ existen y son finitos en c.t.p. de $\theta \in [0, 2\pi]$. Para que $f^*(\exp(i\theta))$ exista y sea finito en c.t.p. de $\theta \in [0, 2\pi]$ bastaría ver que $\psi^*(\exp(i\theta)) \neq 0$ en c.t.p. de $\theta \in [0, 2\pi]$. Para esto, consideremos el límite $\lim_{r\to 1}\left|\ln\left|\varphi(r\exp(i\theta))\right|\right|$, el cual existe en c.t.p. de $\theta \in [0, 2\pi]$; así por el lema de Fatou tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left|\varphi^*(\exp(i\theta))\right|\right| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\liminf_{r\to 1}\left|\ln\left|\varphi(r\exp(i\theta))\right|\right| d\theta \leq \liminf_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left|\varphi(r\exp(i\theta))\right|\right| d\theta$$

y puesto que $|\varphi| \leq 1$ en $\mathbb{D}$, tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left|\varphi^*(\exp(i\theta))\right|\right| d\theta = \liminf_{r\to 1}\left(-\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|\varphi(r\exp(i\theta))\right| d\theta\right). \tag{1.6}$$

De la fórmula de Jensen (teorema B.0.2) es fácil ver que la función $r \in [0, 1) \mapsto \int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|\varphi(r\exp(i\theta))\right| d\theta$ es creciente, y por lo tanto la función $r \in [0, 1) \mapsto -\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|\varphi(r\exp(i\theta))\right| d\theta$ es decreciente. Así el límite derecho en la igualdad (1.6) es finito, por lo que concluimos que $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left|\varphi^*(\exp(i\theta))\right|\right| d\theta < \infty$ de lo que $\ln|\varphi^*| \in L^1(\mathbb{T})$, análogamente tenemos que $\ln|\psi^*| \in L^1(\mathbb{T})$. En particular tenemos que $\psi^*(\exp(i\theta)) \neq 0$ en c.t.p. de $\theta \in [0, 2\pi]$ y por lo tanto $f^*(\exp(i\theta))$ existe y es finito en c.t.p. de $\theta \in [0, 2\pi]$. ■

Corolario 1.3.5. *Sea $p \in (0,\infty]$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$, entonces*

1. *Si $f \not\equiv 0$, entonces $\ln\left|f^*\right| \in L^1(\mathbb{T})$;*
2. *$f^* \in L^p(\mathbb{T})$ y además $\left\|f^*\right\|_p \leq \left\|f\right\|_p$;*
3. *Si $f^*(\exp(i\theta)) = 0$ en un subconjunto $A \subset [0,2\pi]$ con $m(A) > 0$, entonces $f \equiv 0$. Lo que es equivalente a decir que si $f \not\equiv 0$ entonces $f^*(\exp(i\theta)) \neq 0$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$;*
4. *Si $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ y $f^* = g^*$ en un subconjunto $A \subset [0,2\pi]$ con $m(A) > 0$, entonces $f \equiv g$.*

Demostración. 1. Si $f \not\equiv 0$ del teorema 1.3.4, si $f = \varphi/\psi$, tenemos que $f^* = \varphi^*/\psi^*$ de lo cual tenemos $\ln\left|f^*\right| = \ln\left|\varphi^*\right| - \ln\left|\psi^*\right|$. Como $\ln\left|\varphi^*\right|, \ln\left|\psi^*\right| \in L^1(\mathbb{T})$ (demostración del teorema 1.3.4) entonces $\ln\left|f^*\right| \in L^1(\mathbb{T})$.

2. Aplicando el lema de Fatou, tenemos las desigualdades

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f^*(\exp(i\theta))\right|^p d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\liminf_{r\to 1}\left|f(r\exp(i\theta))\right|^p d\theta \leq \liminf_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(r\exp(i\theta))\right|^p d\theta = 2\pi\left\|f\right\|_p^p < \infty$$

por lo que $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ y $\left\|f^*\right\|_p \leq \left\|f\right\|_p$.

3. Si $f^*(\exp(i\theta)) = 0$ en un subconjunto $A \subset [0,2\pi]$ con $m(A) > 0$ y $f \not\equiv 0$, entonces por el inciso 1. tenemos que $\ln\left|f^*\right| \in L^1(\mathbb{T})$ lo cual es una contradicción.

4. Es inmediato del inciso anterior.

■

Veamos una aplicación de la factorización dada por el teorema 1.2.9, para esto caractericemos las funciones de $H^2(\mathbb{D})$ en términos de su desarrollo en series de potencias.

Teorema 1.3.6. *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ entonces $f \in H^2(\mathbb{D})$ si y solo si $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 < \infty$. Y en este caso se cumple que*

$$\left\|f\right\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Demostración. Tomamos $r \in (0,1)$ y por la fórmula de Parseval, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(r\exp(i\theta))\right|^2 d\theta = M_2(f;r)^2.$$

Esto implica que $\left\|f\right\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2$ y así obtenemos que $f \in H^2(\mathbb{D})$ si y solo si $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 < \infty$. ■

Teorema 1.3.7 (Convergencia en media $H^p(\mathbb{D})$ en límites radiales)**.** *Sea $p \in [1,\infty)$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$, entonces*

1. *$f(r\exp(i\theta)) \to f^*(\exp(i\theta))$ en la norma $L^p(\mathbb{T})$, esto es*

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(r\exp(i\theta)) - f^*(\exp(i\theta))\right|^p d\theta = 0;$$

2. *$\left\|f\right\|_p = \left\|f^*\right\|_p$.*

Demostración. Probaremos primero el teorema para $p = 2$,

1. Sea $f \in H^2(\mathbb{D})$ de la forma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y sea $r \in (0, 1)$ fijo, entonces tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(r\exp(i\theta)) - f^*(\exp(i\theta)) \right|^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{s\to 1} \left| f(r\exp(i\theta)) - f(s\exp(i\theta)) \right|^2 d\theta$$

   y aplicando el lema de Fatou, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(r\exp(i\theta)) - f^*(\exp(i\theta)) \right|^2 d\theta &\leq \liminf_{s\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(r\exp(i\theta)) - f(s\exp(i\theta)) \right|^2 d\theta \\ &= \liminf_{s\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r^n - s^n)\exp(in\theta) \right|^2 d\theta \end{aligned}$$

   Ahora, usando el hecho de que $|z|^2 = z\bar{z}$ y $\int_{-\pi}^{\pi} \exp(ik\theta)d\theta = 2\pi$ o 0 si $k = 0$ o $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ respectivamente, tenemos la siguiente igualdad

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r^n - s^n)\exp(in\theta) \right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (s^n - r^n).$$

   Combinando los resultados anteriores, obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(r\exp(i\theta)) - f^*(\exp(i\theta)) \right|^2 d\theta \leq \liminf_{s\to 1} 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (s^n - r^n)$$

   y como el teorema 1.3.6 nos dice que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, haciendo $r \to 1$, tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(r\exp(i\theta)) - f^*(\exp(i\theta)) \right|^2 d\theta \leq 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (1 - r^n) \xrightarrow[r\to 1]{} 0$$

   de lo que concluimos que

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(r\exp(i\theta)) - f^*(\exp(i\theta)) \right|^2 d\theta = 0.$$

2. Se sigue de 1 y la desigualdad de Minkowski.

Ahora probaremos el teorema para $p \in (0, \infty)$

2. Sea $f \in H^p(\mathbb{D})$, primero probaremos que $\|f\|_p = \|f^*\|_p$. Para ello usamos el teorema 1.2.9 y así tenemos que existe $h \in H^2(\mathbb{D})$ tal que $f = Bh^{2/p}$ donde B es el producto de Blaschke formado por los ceros de f en $\mathbb{D}$ y $\|f\|_p^p = \|h\|_2^2$, usando el caso para $p = 2$, tenemos que $\|h\|_2 = \|h^*\|_2$, de lo cual tenemos que $\|f\|_p^p = \|h^*\|_2^2$. Ahora como $\left|B^*(\exp(i\theta))\right| = 1$ en c.t.p. de $\theta \in [-\pi, \pi]$, tenemos que $\left|f^*(\exp(i\theta))\right|^p = \left|h^*(\exp(i\theta))\right|^2$, de lo cual $\|f^*\|_p^p = \|h^*\|_2^2$ y así concluimos que $\|f\|_p = \|f^*\|_p$.

1. Consideramos $\{r_n\}_{n\geq 1} \subset (0,1)$ sucesión tal que $r_n \to 1$ cuando $n \to \infty$. Definimos la sucesión de funciones para todo $n \in \mathbb{N}$ $f_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ dada por $f_n(\theta) = f(r_n \exp(i\theta))$. Resulta que la sucesión converge puntualmente en c.t.p. al límite radial de f, esto es $f_n(\theta) \to f^*(\exp(i\theta))$ y más aún por el inciso 2 tenemos que $\left\|f_n\right\|_p \to \left\|f^*\right\|_p$. Esto nos implica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(r_n \exp(i\theta)\right) - f^*(\exp(i\theta))\right|^p d\theta = 0.$$

Como esto se cumple para toda sucesión $\{r_n\}_{n\geq 1} \subset (0,1)$ sucesión tal que $r_n \to 1$, concluimos que

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(r \exp(i\theta)\right) - f^*(\exp(i\theta))\right|^p d\theta = 0.$$

∎

Corolario 1.3.8. *Sea $p \in [1,\infty]$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$, entonces*

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(r \exp(i\theta)\right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(\exp(i\theta)) d\theta$$

Demostración. Es inmediato de la proposición 1.1.9 y del teorema 1.3.7 para $p = 1$. ∎

Capítulo 2

El teorema de Beurling

"El camino más corto entre dos verdades en el dominio real pasa por el dominio complejo."

Jacques Hadamard

En este capítulo estudiaremos las representaciones de Poisson y de Cauchy referentes a los espacios de Hardy; estas representaciones permiten identificar el espacio de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ con cierto subconjunto de $L^p(\mathbb{T})$. También daremos otra factorización de las funciones en los espacios de Hardy, la cual es conocida como factorización canónica de Smirnov. Finalizaremos con el teorema de Beurling el cual clasifica los subespacios invariantes respecto al operador desplazamiento en los espacios $H^2(\mathbb{D})$.

2.1. Espacios de límites radiales

En esta sección estudiaremos el subespacio de límites radiales asociados a las funciones de los espacios de Hardy. Veremos que existe una biyección entre ellos dada por integrales de Poisson y finalizaremos dando una clasificación de tipo Fourier a estos espacios.

Definición 2.1.1. *Sea $p \in [1, \infty]$, definimos el espacio de límites radiales asociados al espacio de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ como*

$$H^p(\mathbb{T}) := \{f^* \ : \ f \in H^p(\mathbb{D})\}.$$

Observación 2.1.2. *El teorema 1.3.4 nos dice que $H^p(\mathbb{T})$ está bien definido y el corolario 1.3.5 asegura que $H^p(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ y más aún es un subespacio normado de $L^p(\mathbb{T})$.*

Teorema 2.1.3 (Representación en integrales de Poisson y de Cauchy)**.** *Sea $p \in [1, \infty]$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$, entonces para todo $z \in \mathbb{D}$, se tiene*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(\exp(i\theta))\Re\left(\frac{\exp(i\theta)+z}{\exp(i\theta)-z}\right)d\theta \qquad y \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

donde $\gamma(t) = \exp(it)$.

Demostración. Sea $p \in [1, \infty]$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$, tomamos $s \in (0, 1)$ fijo y definimos para todo $z \in \mathbb{D}$ $f_s(z) := f(sz)$, es claro que $f_s \in \mathcal{H}\left(B_{1/s}(0)\right) \cap C^0\left(\overline{B_{1/s}}(0)\right)$. Usando la fórmula de Poisson y la fórmula integral de Cauchy, tenemos que para todo $z \in \mathbb{D}$

$$f_s(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_s(\exp(i\theta))\Re\left(\frac{\exp(i\theta)+z}{\exp(i\theta)-z}\right)d\theta \qquad \text{y} \qquad f_s(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_s(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

donde $\gamma(t) = \exp(it)$; observamos que la formula integral de Cauchy toma la forma

$$f_s(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_s(\exp(i\theta))}{1-\exp(-i\theta)z}d\theta.$$

Como para todo $z \in \mathbb{D}$ fijo las funciones $\Re\left(\frac{\exp(i\theta)+z}{\exp(i\theta)-z}\right)$ y $\left|1-\exp(-i\theta)z\right|$ son acotadas en $\mathbb{T}$ y puesto que $f_s \in H^p(\mathbb{D})$ para toda $s \in (0,1)$; entonces los integrandos en la fórmula de Poisson y la fórmula integral de Cauchy son elementos de $H^1(\mathbb{D})$. Así por el corolario 1.3.8 tenemos que

$$\lim_{s\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} f_s(\exp(i\theta))\Re\left(\frac{\exp(i\theta)+z}{\exp(i\theta)-z}\right)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(\exp(i\theta))\Re\left(\frac{\exp(i\theta)+z}{\exp(i\theta)-z}\right)d\theta,$$
$$\lim_{s\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_s(\exp(i\theta))}{1-\exp(-i\theta)z}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(\exp(i\theta)}{1-\exp(-i\theta)z}d\theta$$

y como $f(sz) \to f(z)$ cuando $s \to 1$, finalmente obtenemos que para toda $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(\exp(i\theta))\Re\left(\frac{\exp(i\theta)+z}{\exp(i\theta)-z}\right)d\theta \qquad \text{y} \qquad f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(\exp(i\theta)}{1-\exp(-i\theta)z}d\theta.$$

■

Veamos que la representación de $f \in H^p(\mathbb{D})$ como integral de Poisson no es solo una condición necesaria, sino que también suficiente.

Teorema 2.1.4. *Sea $p \in [1,\infty]$ y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Entonces $f \in H^p(\mathbb{D})$ si y solo si existe $g \in L^p(\mathbb{T})$ tal que $f = P[g]$ (ver Apéndice D). En este caso, se verifica que $g = f^*$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Sea $p \in [1,\infty]$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$, por el teorema 1.3.4 sabemos que existe el límite radial f^* y además el corolario 1.3.5 asegura que $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ y por el teorema 2.1.3 tenemos que $f = P[f^*]$.

$\Leftarrow$ Sea $p \in [1,\infty]$ y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, suponemos que existe $g \in L^p(\mathbb{T})$ tal que $f = P[g]$, utilizando la desigualdad de Hölder en la integral de Poisson, obtenemos

$$\left|f(r\exp(i\theta))\right|^p \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\left|g(\exp it)\right|^p dt\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)dt\right)^{p-1}.$$

Del hecho de que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)dt = 1$ (ver proposición D.0.3) e integrando respecto a θ, tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(r\exp(i\theta))\right|^p d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\left|g(\exp it)\right|^p dtd\theta.$$

Usando el teorema de Fubini y de nuevo el hecho de que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)d\theta = 1$, resulta que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(r\exp(i\theta))\right|^p d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi}\left|g(\exp it)\right|^p dt$$

de lo cual concluimos que $M_p(f;r) \le \left\|g\right\|_p$. Haciendo $r \to 1$ y usando que $g \in L^p(\mathbb{T})$, tenemos que $f \in H^p(\mathbb{D})$. Basta ver que $g = f^*$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$; como $f = P[g]$ el corolario D.0.13 nos dice que $\lim_{r\to 1} f(r\exp(i\theta)) = g(\exp it)$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$, por lo que concluimos que $g = f^*$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$. ■

El resultado anterior nos permite ver que existe una isometría entre los espacios de Hardy y el conjunto de los límites radiales asociados a sus funciones.

Teorema 2.1.5. *Sea $p \in [1, \infty]$, entonces $H^p(\mathbb{T}) \cong H^p(\mathbb{D})$ i.e. son isomorfos como espacios vectoriales e isométricos como espacios métricos.*

Demostración. Definimos la siguiente función

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & H^p(\mathbb{T}) & \longrightarrow & H^p(\mathbb{D}) \\ & & f^* & \longmapsto & P[f^*]. \end{array}$$

Veamos que está bien definida; sea $f^* \in H^p(\mathbb{T})$ por el teorema 2.1.4 tenemos que $P[f^*] = f \in H^p(\mathbb{D})$, por lo tanto Φ está bien definida. Claramente Φ es lineal, el teorema 1.3.7 nos dice que Φ es una isometría, y por ende es inyectiva y finalmente por el teorema 2.1.4 tenemos que Φ es suprayectiva. ■

Corolario 2.1.6. *Sea $p \in [1, \infty]$ entonces $H^p(\mathbb{T})$ es un subespacio normado cerrado de $L^p(\mathbb{T})$.*

Demostración. Puesto que $H^p(\mathbb{D})$ es un espacio de Banach, entonces es completo y por el teorema 2.1.5 tenemos que $H^p(\mathbb{T})$ es un subespacio normado completo de $L^p(\mathbb{T})$, entonces $H^p(\mathbb{T})$ es cerrado. ■

Veamos una primera aplicación de estos resultados.

Definición 2.1.7. *Sea $A \subseteq \mathbb{C}$, definimos el conjunto de polinomios sobre A, como*

$$\mathcal{P}(A) := \left\{ p : A \to \mathbb{C} \ : \ p(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n \quad con \quad (a_n)_{n=0}^{k} \subseteq \mathbb{C} \quad y \quad k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Observación 2.1.8. *Con la definición anterior, si $p \in [1, \infty]$ tenemos que $\mathcal{P}(\mathbb{D}) \subseteq H^p(\mathbb{D})$ y por ende $\mathcal{P}(\mathbb{T}) \subseteq H^p(\mathbb{T})$.*

Teorema 2.1.9. *Sea $p \in [1, \infty)$, entonces*

1. *$H^p(\mathbb{T})$ es la cerradura en $L^p(\mathbb{T})$ del conjunto de polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{T})$;*
2. *$\mathcal{P}(\mathbb{D})$ es denso en $H^p(\mathbb{D})$;*
3. *$H^p(\mathbb{T})$ y $H^p(\mathbb{D})$ son separables.*

Demostración. 1. Queremos ver que $\overline{\mathcal{P}(\mathbb{T})} = H^p(\mathbb{T})$ en $L^p(\mathbb{T})$.

$\subseteq$ Tenemos que $\mathcal{P}(\mathbb{T}) \subseteq H^p(\mathbb{T})$, entonces $\overline{\mathcal{P}(\mathbb{T})} \subseteq \overline{H^p(\mathbb{T})}$, pero por el corolario 2.1.6, $H^p(\mathbb{T})$ es cerrado, entonces $\overline{\mathcal{P}(\mathbb{T})} \subseteq H^p(\mathbb{T})$.

$\supseteq$ Sea $f^* \in H^p(\mathbb{T})$ con $f \in H^p(\mathbb{D})$. Tomemos $\varepsilon > 0$ fijo, por el teorema de convergencia en media 1.3.7 tenemos que existe $r \in (0, 1)$ tal que si $f_r(z) = f(rz)$ para toda $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$\left\| f_r - f^* \right\|_p < \varepsilon/2. \tag{2.1}$$

Ahora, como $f \in H^p(\mathbb{D})$, en particular f es holomorfa; por ende es desarrollable en serie de potencias, así es de la forma $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ para toda $z \in \mathbb{D}$. Definamos la n-ésima suma parcial de su desarrollo en serie de potencias como $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ para toda $z \in \mathbb{D}$; así $S_n(z) \to f(z)$ uniformemente en $\overline{B_r}(0)$ cuando $n \to \infty$. Entonces para n suficientemente grande se cumple

$$\left\| S_{n_r} - f_r \right\|_p < \varepsilon/2. \tag{2.2}$$

Aplicando la desigualdad de Minkowski a $\left\| S_{n_r} - f^* \right\|_p = \left\| (S_{n_r} - f_r) + (f_r - f^*) \right\|_p$ y de las desigualdades (2.1) y (2.2) tenemos que $\left\| S_{n_r} - f^* \right\|_p < \varepsilon$ como $(S_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{T})$, tenemos que $f^* \in \overline{\mathcal{P}(\mathbb{T})}$. Por lo tanto $\overline{\mathcal{P}(\mathbb{T})} = H^p(\mathbb{T})$.

2. Tenemos por el teorema 2.1.5 que $H^p(\mathbb{T}) \cong H^p(\mathbb{D})$ a través del isomorfismo isométrico

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & H^p(\mathbb{T}) & \longrightarrow & H^p(\mathbb{D}) \\ & & f^* & \longmapsto & P[f^*]. \end{array}$$

   Por la fórmula de Poisson D.0.9 tenemos que $\Phi[\mathscr{P}(\mathbb{T})] = \mathscr{P}(\mathbb{D})$; por lo que $\overline{\mathscr{P}(\mathbb{D})} = H^p(\mathbb{D})$, así $\mathscr{P}(\mathbb{D})$ es denso en $H^p(\mathbb{D})$.

3. Basta considerar el subconjunto de $\mathscr{P}(\mathbb{D})$ que consta de polinomios con coeficientes $a_n = u_n + iv_n$ tales que $u_n, v_n \in \mathbb{Q}$.

■

Finalmente caracterizaremos las funciones de $H^p(\mathbb{T})$ mediante sus coeficientes de Fourier. Recordamos la definición de coeficiente de Fourier.

Definición 2.1.10. *Sea $p \in [1, \infty]$ y $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$, definimos su coeficiente de n-ésimo de Fourier como*

$$\widehat{\varphi}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\exp(i\theta))\exp(-in\theta)d\theta \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 2.1.11. *Sea $p \in [1, \infty]$, entonces*

$$H^p(\mathbb{T}) := \left\{g \in L^p(\mathbb{T})\ :\ \widehat{g}(n) = 0\ \forall\ n < 0\right\}.$$

Demostración. $\subseteq$ Sea $f^* \in H^p(\mathbb{T})$, entonces es el límite radial de alguna función $f \in H^p(\mathbb{D})$. Puesto que para toda $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\left|\exp(-in\theta)\right| = 1$; entonces $f(r\exp(i\theta))\exp(-in\theta)$ está en $H^p(\mathbb{D})$ y por el corolario 1.3.8, tenemos que

$$\widehat{f^*}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(\exp(i\theta))\exp(-in\theta)d\theta = \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\exp(i\theta))\exp(-in\theta)d\theta \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ahora, tomando $r \in (0, 1)$ fijo y considerando la curva $\gamma(t) = r\exp(it)$, tenemos que

$$\widehat{f^*}(n) = \lim_{r\to 1}\frac{r^n}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz.$$

Finalmente el teorema de Cauchy nos dice que $\widehat{f^*}(n) = 0$ cuando $n + 1 \leq 0$.

$\supseteq$ Sea $g \in L^p(\mathbb{T})$ tal que $\widehat{g}(n) = 0$ para todo $n < 0$, consideramos $f = P[g]$, veamos que $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$. Como $f = P[g]$, entonces es de la forma

$$f(r\exp(i\theta)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)g(\exp it)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\exp(in(\theta - t))g(\exp it)dt.$$

Tomando $r \in (0, 1)$ y $\theta \in \mathbb{R}$ fijos y usando la convergencia uniforme en t, tenemos

$$f(r\exp(i\theta)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\exp(in\theta)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(-int)g(\exp it)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{g}(n)r^n\exp(in\theta)$$

por lo que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{g}(n)z^n$ y así $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$; como $f = P[g]$ por el teorema 2.1.4 tenemos que $g = f^*$.
■

Corolario 2.1.12. *Sea $p \in [1, \infty]$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$ de la forma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, entonces $a_n = \widehat{f^*}(n)$ para todo $n \geq 0$ i.e. para toda $z \in \mathbb{D}$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f^*}(n) z^n.$$

Demostración. Sea $f \in H^p(\mathbb{D})$ de la forma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, por el teorema 2.1.11 tenemos que $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$ y de nueva cuenta por el teorema 2.1.11 obtenemos que

$$f(z) = P[f^*](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f^*}(n) z^n.$$

■

2.2. Factorización canónica de Smirnov

En el capítulo anterior, demostramos el teorema de factorización de Riesz, el cual nos dice que toda $f \in H^p(\mathbb{D})$ tal que $f \not\equiv 0$ puede factorizarse en un producto de Blaschke formado por sus ceros y una función $g \in H^p(\mathbb{D})$ que no tiene ceros en $\mathbb{D}$. En esta sección demostraremos el teorema de factorización de Smirnov, el cual nos da una factorización para g de naturaleza más sutil, la cual está relacionada con la rapidez con la que g tiende a cero a lo largo de ciertos radios.

Definición 2.2.1 (Función interior)**.** *Decimos que una función $I \in H^\infty(\mathbb{D})$ es interior si $\left|I^*\right| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$.*

Observación 2.2.2. *El teorema 1.3.3 nos dice que todo producto de Blaschke es una función interior; sin embargo existen funciones interiores que no son un producto de Blaschke.*

Definición 2.2.3 (Función interior singular)**.** *Sea μ una medida de Borel finita y positiva sobre $\mathbb{T}$ que es singular con respecto a la medida de Lebesgue m (ver apéndice C), definimos para todo $z \in \mathbb{D}$*

$$S_\mu(z) := \exp\left(-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(it) + z}{\exp(it) - z} d\mu(t)\right); \tag{2.3}$$

la función $S_\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es conocida como función interior singular.

El hecho de que la función S_μ es interior no es una trivialidad, y lo demostramos en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.4. *Sea μ una medida de Borel finita y positiva sobre $\mathbb{T}$ que es singular con respecto a la medida de Lebesgue m, entonces la función S_μ definida como en (2.3) es una función interior.*

Demostración. Tenemos por el teorema D.0.6 que $S_\mu \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, por definición de función interior singular $z \in \mathbb{D}$ tenemos

$$\left|S_\mu(z)\right| = \exp\left(-\int_{-\pi}^{\pi} \Re\left(\frac{\exp(it) + z}{\exp(it) - z}\right) d\mu(t)\right).$$

La función $\ln\left|S_\mu\right|$ es la integral de Poisson de la medida $-\mu$, esto es $\ln\left|S_\mu\right| = P[-d\mu]$. Ahora, puesto que el núcleo de Poisson es una función positiva y la medida μ también, tenemos que $\ln\left|S_\mu(r\exp(i\theta))\right| \leq 0$ para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$ y $r \in [0, 1)$; y así $\left|S_\mu(r\exp(i\theta))\right| \leqslant 1$ para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$ y $r \in [0, 1)$, tomando el supremo sobre $\theta \in [-\pi, \pi]$ y haciendo $r \to 1$, tenemos

$$\lim_{r \to 1} \sup_{\theta \in [-\pi, \pi]} \left|S_\mu(r\exp(i\theta))\right| \leq 1.$$

Así tenemos que $\left\|S_\mu\right\|_\infty \leq 1$ y por lo tanto $S_\mu \in H^\infty(\mathbb{D})$. Puesto que $\ln\left|S_\mu\right| = P[-d\mu]$, el teorema D.0.12 nos dice que los límites radiales de $\ln\left|S_\mu\right|$ existen y son finitos en c.t.p. de $\mathbb{T}$ y cumplen que

$$\lim_{r\to 1} \ln\left|S_\mu(r\exp(i\theta))\right| = (D\mu)(\theta).$$

Ahora, como μ es una medida singular respecto a la medida m de Lebesgue, el corolario C.0.9 afirma que $(D\mu)(\theta) = 0$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$; por lo cual concluimos que $\left|S_\mu^*\right| = 1$. ■

Observación 2.2.5. *El ejemplo más sencillo de una función interior que no es un producto de Blaschke es el siguiente: consideremos $\mu = \delta_0$ la medida de Dirac en $t = 0$, la cual es singular con respecto a la medida m de Lebesgue y cumple las hipótesis del teorema anterior, así la función S_{δ_0} es interior y es de la forma*

$$S_{\delta_0}(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

A continuación veremos como se describen en general las funciones interiores:

Teorema 2.2.6. *Sea $c \in \mathbb{T}$, B un producto de Blaschke y μ una medida de Borel, finita, positiva sobre $\mathbb{T}$ y singular con respecto a la medida m de Lebesgue. Y sea para todo $z \in \mathbb{D}$*

$$I(z) = cB(z)S_\mu(z)$$

entonces, I es una función interior y toda función interior es de esta forma.

Demostración. $\Rightarrow$ Consideramos la función $I(z) = cB(z)S_\mu(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$, como $|I| = |B|\left|S_\mu\right|$ y $B, S_\mu \in H^\infty(\mathbb{D})$, tenemos que $I \in H^\infty(\mathbb{D})$. Como $\left|B^*\right| = 1$ y $\left|S_\mu^*\right| = 1$, obtenemos que $\left|I^*\right| = 1$ y por lo tanto I es una función interior.
$\Leftarrow$ Sea I una función interior, así $I \in H^\infty(\mathbb{D})$ y $\left|I^*\right| = 1$. Sea B el producto de Blaschke formado por sus ceros, por el teorema de factorización de Riesz (teorema 1.2.8) existe $g \in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que no tiene ceros en $\mathbb{D}$, $\left\|g\right\|_\infty = \|I\|_\infty$ e $I = gB$. Lo anterior implica que $\left|g^*\right| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$ y que $\left|g(z)\right| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Puesto que $g \in H^\infty(\mathbb{D})$, en particular $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y como no tiene ceros en $\mathbb{D}$ la función $\ln\left|g\right|$ es armónica y $\ln\left|g(z)\right| \leq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$; por la equivalencia D.0.10 la función $-\ln\left|g\right|$ es la integral de Poisson de alguna medida μ de Borel positiva y finita de la siguiente manera $-\ln\left|g\right| = P[d\mu]$, esto es

$$\ln\left|g(z)\right| = -\int_{-\pi}^{\pi} \Re\left(\frac{\exp(it)+z}{\exp(it)-z}\right) d\mu(t).$$

Ahora, como $\ln\left|g^*\right| = 0$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$, por el teorema D.0.12, tenemos que $(D\mu)(\theta) = 0$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$ y por el corolario C.0.9, la medida μ es singular respecto a la medida m de Lebesgue. Entonces si consideramos la función definida para toda $z \in \mathbb{D}$

$$S_\mu(z) = \exp\left(-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(it)+z}{\exp(it)-z} d\mu(t)\right)$$

es una función interior singular y se cumple que $\left|g\right| = \left|S_\mu\right|$. Por lo cual existe $c \in \mathbb{T}$ una constante, tal que $g = cS_\mu$, de lo que concluimos que $I = cBS_\mu$ lo que concluye la demostración. ■

Corolario 2.2.7. *Sea $S \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. $0 < \left|S(z)\right| \leq 1$ *para toda* $z \in \mathbb{D}$, $S(0) > 0$ *y* $\left|S^*\right| = 1$ *en c.t.p. de* $\mathbb{T}$;

2. S *es una función interior singular.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Como $S \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y $\left|S(z)\right| \leq 1$ para toda $z \in \mathbb{D}$, tenemos que $S \in H^\infty(\mathbb{D})$, y como $\left|S^*\right| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$ tenemos que S es una función interior. Entonces por el teorema 2.2.6 tenemos que existe $c \in \mathbb{T}$ y μ una medida de Borel, finita, positiva sobre $\mathbb{T}$ y singular con respecto a la medida m de Lebesgue tal que $S = cBS_\mu$. Como S no se anula, tenemos que $B = 1$ y así $S = cS_\mu$, como $S(0) > 0$ y $S_\mu > 0$ concluimos que $S = S_\mu$, por lo tanto S es singular.
2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que S es una función interior singular. Por definición tenemos $\left|S(z)\right| > 0$ y $S(0) > 0$; por la demostración del teorema 2.2.4 tenemos $\left|S(z)\right| \leq 1$ para toda $z \in \mathbb{D}$ y $\left|S^*\right| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$. ■

Definición 2.2.8 (Función exterior)**.** *Sea $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ una función medible tal que $\ln(\varphi) \in L^1(\mathbb{T})$ y $c \in \mathbb{T}$ definimos para toda $z \in \mathbb{D}$ la función*

$$O_\varphi(z) := c\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\exp(it)+z}{\exp(it)-z}\ln\varphi(\exp(it))dt\right).$$

La función $O_\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ se le llama función exterior.

Teorema 2.2.9. *Sea $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ una función medible tal que $\ln(\varphi) \in L^1(\mathbb{T})$, y sea O_φ la función exterior como en la definición 2.2.8, entonces*

1. *$O_\varphi(z) \neq 0$ para toda $z \in \mathbb{D}$;*
2. *$\ln\left|O_\varphi\right|$ es la integral de Poisson de $\ln(\varphi)$;*
3. *$\left|O_\varphi^*\right| = \varphi$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$;*
4. *Sea $p \in (0, \infty]$, $O_\varphi \in H^p(\mathbb{D})$ si y solo si $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$ y en este caso $\left\|O_\varphi\right\|_p = \left\|\varphi\right\|_p$;*
5. *Si $\alpha > 0$ entonces $O_{\varphi^\alpha} = O_\varphi^\alpha$;*
6. *Sea $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ una función medible tal que $\ln(\psi) \in L^1(\mathbb{T})$, entonces $O_{\varphi\psi} = O_\varphi O_\psi$ y $O_{\varphi/\psi} = O_\varphi/O_\psi$.*

Demostración. 1. Es inmediato de la definición.

2. Por definición de función exterior tenemos para toda $z \in \mathbb{D}$

$$\left|O_\varphi(z)\right| = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Re\left(\frac{\exp(it)+z}{\exp(it)-z}\right)\ln\varphi(\exp(it))dt\right) \tag{2.4}$$

así por definición de integral de Poisson de una función, tenemos $\ln\left|O_\varphi\right| = P[\ln(\varphi)]$.

3. Del inciso anterior, tenemos que $\ln\left|O_\varphi\right| = P[\ln(\varphi)]$, así por el corolario D.0.13 tenemos que

$$\lim_{r\to 1}\ln\left|O_\varphi(r\exp(i\theta))\right| = \ln\varphi(\exp(i\theta))$$

en c.t.p. de $\mathbb{T}$ y así $\lim_{r\to 1}\left|O_\varphi(r\exp(i\theta))\right| = \varphi(\exp(i\theta))$ por lo tanto $\left|O_\varphi^*\right| = \varphi$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$.

4. $\Rightarrow$ Supongamos que $O_\varphi \in H^p(\mathbb{D})$ con $p \in (0, \infty]$. Por el inciso 2 del corolario 1.3.5 tenemos $\left\|O_\varphi^*\right\|_p \leq \left\|O_\varphi\right\|_p$, pero por el inciso anterior tenemos $\left\|O_\varphi^*\right\|_p = \left\|\varphi\right\|_p$, así $\left\|\varphi\right\|_p \leq \left\|O_\varphi\right\|_p < \infty$ por lo que $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$.
$\Leftarrow$ Tenemos por el teorema D.0.6 que $O_\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Supongamos que $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$ con $p \in (0, \infty)$ de la igualdad (2.4) obtenemos

$$\left|O_\varphi(r\exp(i\theta))\right|^p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Re\left(\frac{\exp(it)+r\exp(i\theta)}{\exp(it)-r\exp(i\theta)}\right)\ln\varphi^p(\exp(it))dt\right);$$

utilizando la desigualdad de Jensen, obtenemos

$$\left|O_\varphi(r\exp(i\theta))\right|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Re\left(\frac{\exp(it)+r\exp(i\theta)}{\exp(it)-r\exp(i\theta)}\right)\varphi^p(\exp(it))dt.$$

Ahora, de la monotonía de la integral e integrando respecto a θ tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|O_\varphi(r\exp(i\theta))\right|^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Re\left(\frac{\exp(it)+r\exp(i\theta)}{\exp(it)-r\exp(i\theta)}\right)\varphi^p(\exp(it))dt\,d\theta.$$

Finalmente utilizando la proposición D.0.3 y el teorema de Fubini, tenemos que $\left\|O_\varphi\right\|_p \leq \left\|\varphi\right\|_p < \infty$, por lo que $O_\varphi \in H^p(\mathbb{D})$ con $p \in (0,\infty)$. El caso $p = \infty$ es trivial.

5. Es inmediato de la definición.

6. Es claro que $\ln(\varphi\psi) \in L^1(\mathbb{T})$ y como $\ln(\psi) \in L^1(\mathbb{T})$, entonces $\psi \not\equiv 0$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$, por lo tanto φ/ψ está bien definido y así claramente $\ln(\varphi/\psi) \in L^1(\mathbb{T})$ por lo que $O_{\varphi\psi}$ y $O_{\varphi/\psi}$ están bien definidos y de la definición es inmediato que $O_{\varphi\psi} = O_\varphi O_\psi$ y $O_{\varphi/\psi} = O_\varphi/O_\psi$.

■

Corolario 2.2.10 (Szego)**.** *Sea $p \in (0,\infty]$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$ tal que $f \not\equiv 0$, entonces la función exterior definida para todo $z \in \mathbb{D}$ como*

$$O_f(z) := \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\exp(it)+z}{\exp(it)-z}\ln\left|f^*(\exp(it))\right|dt\right),$$

cumple:

1. *$O_f(z) \neq 0$ para toda $z \in \mathbb{D}$;*
2. *$\ln\left|O_f\right|$ es la integral de Poisson de $\ln\left|f^*\right|$;*
3. *$\left|O_f^*\right| = \left|f^*\right|$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$;*
4. *$O_f \in H^p(\mathbb{D})$ y $\left\|O_f\right\|_p = \left\|f^*\right\|_p$;*
5. *Si $\alpha > 0$ entonces $O_{|f|^\alpha} = O_f^\alpha$;*
6. *Sea $g \in H^p(\mathbb{D})$ entonces $O_{fg} = O_f O_g$ y si $g \not\equiv 0$ se cumple $O_{f/g} = O_f/O_g$.*

La función O_f es llamada función exterior relativa a f.

Demostración. Veamos que O_f está bien definida: como $f \in H^p(\mathbb{D})$, por el teorema 1.3.4 tenemos que f^* existe y es finito en c.t.p. de $\mathbb{T}$. Como $f \not\equiv 0$, por el inciso 1 del corolario 1.3.5 tenemos que $\ln\left|f^*\right| \in L^1(\mathbb{T})$, por lo que O_f está bien definida y es exterior. Los incisos 1, 2, 3, 5 y 6 son inmediatos del teorema 2.2.9 considerando φ como $\left|f^*\right|$. Para el inciso 4, por el corolario 1.3.5 tenemos $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ y por el teorema 2.2.9 concluimos que $O_f \in H^p(\mathbb{D})$. ■

Observación 2.2.11. *Notemos que la función exterior O_f únicamente depende de los límites radiales de $\left|f\right|$.*

Lema 2.2.12. *Sea $p \in [1, \infty]$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$ tal que no tiene ceros en $\mathbb{D}$, entonces*

$$\left|f(z)\right| \leq \left|O_f(z)\right| \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Demostración. Sea $R \in (0, 1)$ fijo, definimos la función $f_R : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ dada por $f_R(z) := f(Rz)$ para toda $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Es claro que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C^0\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$. Puesto que f no tiene ceros en $\mathbb{D}$, tenemos que la función $\ln\left|f_R\right| : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ es continua y armónica en $\mathbb{D}$. Por la fórmula de Poisson D.0.9 tenemos que para toda $z \in \mathbb{D}$ se cumple $\ln\left|f_R(z)\right| = P\left[\ln\left|f_R\right|\right](z)$ y usando que $\ln = \ln^+ - \ln^-$, tenemos

$$\ln\left|f_R(z)\right| = P\left[\ln^+\left|f_R\right|\right](z) - P\left[\ln^-\left|f_R\right|\right](z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}. \tag{2.5}$$

Ahora, como para toda $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $\left|\ln^+(a) - \ln^+(b)\right| \leq |a - b|$, entonces se tiene

$$\left|\ln^+\left|f_R\right| - \ln^+\left|f^*\right|\right| \leq \left|f_R - f^*\right|.$$

Por el teorema 1.3.7 para $p = 1$, tenemos $\left\|f_R - f^*\right\|_1 \to 0$ cuando $R \to 1$ y así tenemos que $\left\|\ln^+\left|f_R\right| - \ln^+\left|f^*\right|\right\|_1 \to 0$ cuando $R \to 1$, lo que implica

$$P\left[\ln^+\left|f_R\right|\right] \xrightarrow[R \to 1]{} P\left[\ln^+\left|f^*\right|\right] \tag{2.6}$$

puntualmente. Por otro lado del lema de Fatou, tenemos que

$$P\left[\ln^-\left|f^*\right|\right] \leq \liminf_{R \to 1} P\left[\ln^-\left|f_R\right|\right]. \tag{2.7}$$

Haciendo $R \to 1$ en la igualdad (2.5) y usando (2.6) y (2.7) tenemos

$$P\left[\ln^-\left|f^*\right|\right] \leq P\left[\ln^+\left|f^*\right|\right] - \ln\left|f\right|.$$

Puesto que $P\left[\ln\left|f^*\right|\right] = P\left[\ln^+\left|f^*\right|\right] - P\left[\ln^-\left|f^*\right|\right]$, tenemos que $\ln\left|f\right| \leq P\left[\ln\left|f^*\right|\right]$; finalmente por el inciso 2 del corolario 2.2.10 tenemos $\ln\left|f\right| \leq \ln\left|O_f\right|$ y así $\left|f\right| \leq \left|O_f\right|$. ■

Teorema 2.2.13 (Factorización canónica de Smirnov)**.** *Sea $p \in (0, \infty]$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$ tal que $f \not\equiv 0$, entonces existe una única constante $c \in \mathbb{T}$ y una única función interior singular $S_\mu \in H^\infty(\mathbb{D})$ tal que*

$$f = cBS_\mu O_f$$

donde B es el producto de Blaschke formado por los ceros de f y O_f es la función exterior relativa a f como en 2.2.10. Las funciones $I_f = BS_\mu$ y O_f las denominamos el factor interior y exterior de f respectivamente.

Demostración. Tomemos $p \in [1, \infty]$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$, por el teorema de factorización de Riesz (teorema 1.2.8) sabemos que existe $g \in H^p(\mathbb{D})$ que no se anula en $\mathbb{D}$ tal que $\left\|g\right\|_p = \left\|f\right\|_p$ y $f = gB$, así que trabajaremos sobre g. Puesto que $\left|B^*\right| = 1$ en c.t.p de $\mathbb{T}$, tenemos que $\left|f^*\right| = \left|g^*\right|$ en c.t.p de $\mathbb{T}$ y así $O_f = O_g$. Ahora, como O_g no se anula, definimos $I_g = g/O_g$, la cual es una función holomorfa en $\mathbb{D}$ pues $g, O_g \in H^p(\mathbb{D})$ (inciso 4 del corolario 2.2.10), como g no tiene ceros en $\mathbb{D}$ por el lema 2.2.12 tenemos $\left|I_g\right| = \left|g/O_g\right| \leq 1$ por lo que $I_g \in H^\infty(\mathbb{D})$. Por el inciso 3 del corolario 2.2.10 como $\left|O_g^*\right| = \left|g^*\right|$ en c.t.p

de $\mathbb{T}$ tenemos que $\left|I_g^*\right| = 1$ en c.t.p de $\mathbb{T}$, por lo que concluimos que I_g es una función interior. Por el teorema 2.2.6 tenemos que I_g es de la forma $I_g = cB_gS_\mu$, donde $c \in \mathbb{T}$; como I_g no se anula tenemos que su producto de Blaschke asociado es $B_g(z) = \alpha$ para $\alpha \in \mathbb{T}$ por lo tanto tenemos que $I_g = cS_\mu$ y así $g = cS_\mu O_f$, lo que finalmente nos da $f = cBS_\mu O_f$.
Para el caso en que $p \in (0, 1)$ usamos la descomposición dada por el teorema 1.2.9 y un procedimiento análogo. La unicidad de c y S_μ es clara. ■

Observación 2.2.14. *El teorema anterior nos garantiza que toda función $f \in H^p(\mathbb{D})$ con $p \in (0, \infty]$ se puede factorizar en una función interior y en una exterior: en efecto, puesto que $f = I_f O_f$ con $I_f = cBS_\mu$ el teorema 2.2.6 garantiza que I_f es una función interior y puesto que O_f es una función exterior, tenemos el resultado.*

Corolario 2.2.15. *Sea $p \in [1, \infty]$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$ entonces*

1. *f es una función interior si y sólo si $f = I_f$;*

2. *f es una función exterior si y solo si $f = \lambda O_f$ con $\lambda \in \mathbb{T}$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ Supongamos que f es interior, por el teorema 2.2.13 tenemos que $f = I_f O_f$ y como $\left|f^*\right| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$ la función exterior relativa a f es $O_f = 1$ y por lo tanto $f = I_f$.
$\Leftarrow$ Si suponemos que $f = I_f$, por la observación 2.2.14 tenemos que I_f es una función interior y terminamos.

2. $\Rightarrow$ Supongamos que f es exterior. Por el teorema 2.2.13 tenemos que $f = I_f O_f$ con $I_f = cBS_\mu$; como f es exterior, por definición tenemos que $\left|f(z)\right| > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces su producto de Blaschke es constante y así $f = cS_\mu O_f$. Ahora como f no se anula, por la fórmula de Jensen (teorema B.0.2) y de la definición de O_f, tenemos

$$\left|f(0)\right| = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|f^*(\exp(it))\right| dt\right) = O_f(0),$$

por lo que $\left|f(0)\right| = O_f(0)$; esto que implica que $\left|S_\mu(0)\right| = 1$. Por el teorema 2.2.4 tenemos que $\left\|S_\mu\right\|_\infty \leq 1$, por lo tanto $\left|S_\mu(z)\right| \leq \left|S_\mu(0)\right|$ para toda $z \in \mathbb{D}$. Ahora, por el principio del módulo máximo tenemos que $S_\mu = \alpha$ donde $\alpha \in \mathbb{T}$ y así $f = \lambda O_f$ con $\lambda = c\alpha$ con $\lambda \in \mathbb{T}$.
$\Leftarrow$ Si $f = \lambda O_f$, claramente f es una función exterior.

■

Finalicemos con una caracterización de las funciones exteriores.

Teorema 2.2.16. *Sea $p \in (0, \infty]$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$ si existe $q \in (0, \infty]$ tal que $1/f \in H^q(\mathbb{D})$, entonces f es una función exterior.*

Demostración. De la factorización canónica de Smirnov, tenemos que $f = c_1B_1S_{\mu_1}O_f$ y $1/f = c_2B_2\mu_2O_{1/f}$. El corolario 2.2.10 nos dice que $1/f = c_2B_2\mu_2 1/O_f$, por lo que $1 = cBS_\mu$ donde $c = c_1c_2$, $B = B_1B_2$ y $S_\mu = S_{\mu_1}S_{\mu_2}$. Por la unicidad de la descomposición canónica de Smirnov, tenemos que $B = 1$ y $S_\mu = 1$. Ahora como $1/f \in H^q(\mathbb{D})$, entonces $1/f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y por lo tanto f no se anula, así $B_2 = 1$ y por ende $B_1 = 1$. De la equivalencia 2.2.7 tenemos que $\left|S_{\mu_1}\right| \leq 1$ y $\left|S_{\mu_2}\right| \leq 1$ por lo tanto $S_{\mu_1} = \alpha$ y $S_{\mu_2} = 1/\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{T}$ y así tenemos $f = \lambda O_f$ con $\lambda \in \mathbb{T}$. ■

2.3. El teorema de Beurling y sus consecuencias

En esta sección estudiaremos los subespacios invariantes bajo el operador deslizamiento en el espacio $\ell^2(\mathbb{C})$. Dicho operador se traduce en el espacio $H^2(\mathbb{D})$ a un operador de multiplicación que es más fácil de analizar por la estructura más rica de $H^2(\mathbb{D})$ como espacio de funciones holomorfas. La clasificación de todos estos subespacios invariantes bajo dicho operador es conocido como el teorema de Beurling.

Teorema 2.3.1. *$H^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(\exp(i\theta))\,\overline{g^*(\exp(i\theta))}d\theta \tag{2.8}$$

para todo $f, g \in H^2(\mathbb{D})$.

Demostración. Sean $f, g \in H^2(\mathbb{D})$ por la fórmula de Parseval, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(\exp(i\theta))\,\overline{g^*(\exp(i\theta))}d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f^*}(n)\overline{\widehat{g^*}(n)}.$$

Por el teorema 2.1.11, tenemos que para toda $n < 0$ se cumple $\widehat{f^*}(n) = \widehat{g^*}(n) = 0$, así obtenemos que

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f^*}(n)\overline{\widehat{g^*}(n)}$$

el cual claramente es un producto interno y además si $f \in H^2(\mathbb{D})$ por el teorema 1.3.6 y el corolario 2.1.12 se cumple

$$\langle f, f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\widehat{f^*}(n)\right|^2 = \|f\|_2^2.$$

Finalmente por el teorema 1.1.13, $H^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert con el producto interno (2.8). ■

Notación 2.3.2. *Definamos para toda $n \in \mathbb{N}$ la función $q^n(z) := z^n$ con $z \in \mathbb{C}$. En particular haremos $1 := q^0$ donde $q^0(z) = 1$ y $q := q^1$, donde $q^1(z) = z$.*

Definición 2.3.3. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $A \subseteq H$, denotamos por $lin(A)$ al subespacio vectorial de H generado por A, es decir,*

$$lin(A) := \left\{\sum_{i=0}^{m}\alpha_i v_i \;:\; \alpha_i \in K,\ v_i \in A,\ m \in \mathbb{N}\right\},$$

donde $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. También definimos su cerradura como $span(A)$, es decir $span(A) := \overline{lin(A)}$.

Observación 2.3.4. *Notemos que con la definición anterior tenemos que $lin\left((q^n)_{n\geq 0}\right) = \mathcal{P}(\mathbb{D})$*

Teorema 2.3.5. *El conjunto $(q^n)_{n\geq 0}$ es una base de Hilbert para $H^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Del teorema 2.1.9 y de la observación 2.3.4 se tiene que $\operatorname{span}\left((q^n)_{n\geq 0}\right) = H^2(\mathbb{D})$, y un cálculo directo da la ortonormalidad. ■

Definición 2.3.6 (Subespacio invariante)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $T : X \to X$ un operador lineal acotado. Decimos que $Y \subseteq X$ es un subespacio invariante respecto a T si Y es un subespacio cerrado de X tal que $T[Y] \subseteq Y$.*

Observación 2.3.7. *Notemos que los subespacios invariantes respecto a T de X son exactamente los que se transforman en si mismos mediante T. Así el conocimiento de los subespacios invariantes nos ayuda a visualizar su acción.*

Veamos un ejemplo particular de subespacios invariantes, para esto definamos el operador deslizamiento en un espacio de Hilbert.

Definición 2.3.8. *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert separable, sea $(e_n)_{n\geq 0}$ una base de Hilbert ordenada, definimos el operador deslizamiento S en H como el operador lineal que satisface*

$$S(e_n) = e_{n+1} \qquad \forall\ n \geq 0.$$

Proposición 2.3.9. *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert separable, el operador deslizamiento $S : H \to H$ está bien definido, acotado y cumple que$\|S\| = 1$.*

Demostración. Es inmediata de la definición. ∎

En particular si consideramos el espacio de Hilbert:

$$\ell^2(\mathbb{C}) = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ :\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

dotado con el producto interno $\langle a, b\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}$ para todo $a, b \in \ell^2(\mathbb{C})$, el operador deslizamiento se puede ver como

$$\begin{array}{rccl} S & : & \ell^2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{C}) \\ & & a = (a_0, a_1, a_2, \cdots) & \longmapsto & (0, a_0, a_1, a_2, \cdots) \end{array}$$

Veamos algunos ejemplos de subespacios invariantes del operador S. Si consideramos $k \in \mathbb{N}$ y definimos

$$y_k := \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C}) \ :\ a_i = 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \cdots, k\} \right\}$$

tenemos un primer ejemplo de un subespacio invariante bajo el operador deslizamiento, pues es claro que y_k es un subespacio cerrado de $\ell^2(\mathbb{C})$ tal que $S[y_k] \subseteq y_k$.
Ahora nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Podemos describir todos los subespacios invariantes de $\ell^2(\mathbb{C})$ bajo el operador deslizamiento S? Para contestar esta cuestión, traduzcamos todo en términos de espacios de Hardy.

Teorema 2.3.10. *Los espacios $\ell^2(\mathbb{C})$ y $H^2(\mathbb{D})$ son isomorfos como espacios vectoriales e isométricos como espacios métricos.*

Demostración. Definimos la transformación

$$\begin{array}{rccl} T & : & \ell^2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{D}) \\ & & a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & f \end{array}$$

donde $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ para toda $z \in \mathbb{D}$. Veamos que T es el isomorfismo buscado: T está bien definido, pues si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ y así por el teorema 1.3.6 se tiene que $f \in H^2(\mathbb{D})$. El operador T es claramente lineal y conserva el producto interno pues si $a, b \in \ell^2(\mathbb{C})$ y $T(a) = f$ y $T(b) = g$ con $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, por el corolario 2.1.12 y el teorema 2.8 se tiene que $\langle a, b\rangle_{\ell^2(\mathbb{C})} = \langle f, g\rangle_{H^2(\mathbb{D})}$. Lo anterior implica que T es una isometría (pues preserva la norma), entonces T es inyectivo. Finalmente veamos que T es suprayectivo, tomemos $f \in H^2(\mathbb{D})$, así por el corolario 2.1.12

tenemos que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f^*}(n)z^n$, el teorema 1.3.6 garantiza que $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\widehat{f^*}(n)\right|^2 < \infty$, así $(\widehat{f^*}(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$ y cumple que $T(\widehat{f^*}(n)) = f$. ∎

Observación 2.3.11. *El teorema anterior nos permite traducir el operador deslizamiento del espacio $\ell^2(\mathbb{C})$ al espacio $H^2(\mathbb{D})$. Tomamos $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$, así tenemos que $S(a_n) = (b_n)$ donde $b_0 = 0$ y $b_{n+1} = a_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, ahora aplicando el isomorfismo anterior, tenemos que $T(a_n) = f$ y $T(b_n) = g$, donde $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$ para toda $z \in \mathbb{D}$; esto nos da la siguiente relación $g(z) = zf(z)$ para toda $z \in \mathbb{D}$. Así el operador deslizamiento se convierte en un operador de multiplicación en $H^2(\mathbb{D})$ y se puede ver como*

$$\begin{array}{rccc} S & : & H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{D}) \\ & & f & \longmapsto & g \end{array}$$

donde $g(z) = zf(z)$ para toda $z \in \mathbb{D}$. Utilizando la notación 2.3.2 tenemos que $S(f) = qf$.

El isomorfismo dado en el teorema 2.3.10 nos permite estudiar los subespacios invariantes del operador deslizamiento en términos del operador $S : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$. Por ejemplo los subespacios invariantes $y_k \subset \ell^2(\mathbb{C})$ se traducen en $H^2(\mathbb{D})$ como

$$Y_k = \left\{ f \in H^2(\mathbb{D}) \ : \ f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \widehat{f^*}(n)z^n \right\};$$

es decir las funciones de $H^2(\mathbb{D})$ que tienen un cero en el origen de orden k al menos. Podemos generar otro tipo de subespacio invariante, por ejemplo consideremos $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\} \subseteq \mathbb{D}$ una sucesión finita de números complejos y consideramos

$$Y = \left\{ f \in H^2(\mathbb{D}) \ : \ f(\alpha_i) = 0 \ \forall\, i \in \{1, \cdots, k\} \right\}$$

es fácil ver que Y es un subespacio cerrado de $H^2(\mathbb{D})$ tal que $S[Y] \subseteq Y$, por lo que Y es un subespacio invariante. Más aún, si consideramos a B como el producto de Blaschke formado por la sucesión $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\} \subseteq \mathbb{D}$ tenemos que $f \in Y$ si y sólo si $f/B \in H^2(\mathbb{D})$, por lo cual $Y = BH^2(\mathbb{D})$. Esto nos permite inferir que podemos generalizar este resultado a productos de Blaschke infinitos y más aún a funciones interiores. Este es un profundo resultado, el cual probaremos a continuación.

Lema 2.3.12. *Sea $Y \subseteq H^2(\mathbb{D})$ un subespacio invariante respecto a S y sea $f \in Y$, entonces para todo $p \in \mathcal{P}(\mathbb{D})$ se tiene que $pf \in Y$.*

Demostración. Veamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $S^n(f) \in Y$: por inducción, si $n = 0$ se cumple trivialmente, supongamos que $S^n(f) \in Y$, y para el paso inductivo veamos que $S^{n+1}(f) = S(S^n(f))$ y como $S[Y] \subseteq Y$, tenemos que $S^{n+1}(f) \in Y$, lo que concluye la afirmación. Notemos que $S^n(f) = q^n f$: nuevamente por inducción, si $n = 0$ no hay nada que demostrar, supongamos que $S^n(f) = q^n f$, para el paso inductivo tenemos que $S^{n+1}(f) = S(S^n(f)) = S(q^n f)$ donde por definición $S(q^n f)(z) = zq^n(z)f(z) = z^{n+1}f(z)$ por lo que $S^{n+1}(f) = q^{n+1}f$ y concluimos. Finalmente puesto que Y es un subespacio, entonces toda combinación lineal de sus elementos está en el conjunto y como $q^n f \in Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $pf \in Y$ para todo $p \in \mathcal{P}(\mathbb{D})$. ∎

Teorema 2.3.13 (Beurling)**.** *Sea $Y \subseteq H^2(\mathbb{D})$ un subespacio tal que $Y \neq \{0\}$. Entonces Y es un subespacio cerrado invariante bajo S si y solo si existe $I \in H^\infty(\mathbb{D})$ una función interior tal que*

$$Y = I\,H^2(\mathbb{D}) = \left\{ If \ : \ f \in H^2(\mathbb{D}) \right\}.$$

En este caso I es única salvo la multiplicación de una constante $\alpha \in \mathbb{T}$.

Demostración. Iniciemos probando la unicidad: supongamos que existen I_1 e I_2 funciones interiores tales que $I_1 H^2(\mathbb{D}) = I_2 H^2(\mathbb{D})$, de aquí tenemos que $I_1 = I_2 f$ para alguna $f \in H^2(\mathbb{D})$; esto implica que $I_1/I_2 \in H^2(\mathbb{D})$, análogamente tenemos que $I_2/I_1 \in H^2(\mathbb{D})$. Definamos las funciones $I = I_1/I_2$ y $J = I + 1/I$, las cuales cumplen que $I, J \in H^2(\mathbb{D})$. Como I_1 e I_2 son funciones interiores, tenemos que $\left|I^*\right| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$, de aquí que $J^* \in \mathbb{R}$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$. Por el teorema 2.1.5 tenemos que $J = P[J^*]$ y por la fórmula de Poisson obtenemos que $J(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in \mathbb{D}$, pero J es holomorfa y por las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos que J es constante y más aún $J(z) = j \in \mathbb{R}$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Ahora, como $J = I + 1/I$, tenemos que $j = \Re(I(z))\left(1 + 1/\left|I(z)\right|^2\right) + i\Im(I(z))\left(1 - 1/\left|I(z)\right|^2\right)$ de aquí que necesariamente $\left|I(z)\right| = 1$ y $\Re(I(z)) = j/2$, por ende la parte real de I es constante y nuevamente puesto que I es holomorfa de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, concluimos que I es constante. Así $I_1/I_2 = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{T}$, lo que concluye la unicidad.

$\Leftarrow$ Sea I una función interior, queremos demostrar que $Y = I H^2(\mathbb{D})$ es un subespacio invariante bajo S, en efecto: es claro que Y es un subespacio de $H^2(\mathbb{D})$. Veamos que $S[Y] \subseteq Y$, sea $If \in Y$, así $S(If) = g$, donde $g(z) = zI(z)f(z)$ para toda $z \in \mathbb{D}$, pero $g(z) = I(z)zf(z)$ y así $g \in Y$ y por lo tanto $S(If) \in Y$. Basta ver que Y es cerrado, tomamos $(If_n)_{n\geq 0} \subset Y$ una sucesión tal que $If_n \to g$ en $H^2(\mathbb{D})$, por demostrar que $g \in Y$. Consideramos la función:

$$\begin{array}{cccc} T & : & H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{D}) \\ & & f & \longmapsto & If \end{array}$$

la cual está bien definida, pues I es una función interior, es lineal y además una isometría. Puesto que $(If_n)_{n\geq 0}$ es convergente, en particular es de Cauchy, y como $\left\|If_n\right\|_2 = \left\|f_n\right\|_2$ tenemos que $(f_n)_{n\geq 0}$ es de Cauchy y como $H^2(\mathbb{D})$ es completo entonces existe $f \in H^2(\mathbb{D})$ tal que $f_n \to f$ en $H^2(\mathbb{D})$ y como $\left\|If_n - If\right\|_2 = \left\|f_n - f\right\|_2$ tenemos que $If_n \to If$ y de la unicidad de los límites, tenemos que $g = If$ por lo que $g \in Y$.

$\Rightarrow$ (Helson y Lowdenslager) Supongamos que $Y \subseteq H^2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado invariante bajo S tal que $Y \neq \{0\}$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ mínimo tal que Y contiene una función f de la forma

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z_n \qquad \forall z \in \mathbb{D} \qquad \text{con} \quad a_k \neq 0.$$

Definamos el conjunto $zY := \{qf \,:\, f \in Y\}$; como $\left|q^*\right| = 1$ tenemos que $zY \subseteq H^2(\mathbb{D})$ y claramente es un subespacio de $H^2(\mathbb{D})$. Más aún, es un subespacio de Y: basta ver que $zY \subseteq Y$, sea $g \in zY$, entonces es de la forma $g(z) = zh(z)$ con $h \in Y$; utilizando el operador deslizamiento tenemos que $g = S(h)$, pero Y es invariante bajo S, entonces $g \in Y$. También zY es cerrado: como $\left|q^*\right| = 1$ es una función interior, de la condición suficiente tenemos que zY es cerrado. Finalmente notemos que $f \notin zY$ pues si suponemos que sí, entonces f es de la forma $f(z) = zh(z)$ con $h \in Y$; notemos que $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z_n = z \sum_{n=k-1}^{\infty} a_{n+1} z_n$, así tenemos que $h(z) = \sum_{n=k-1}^{\infty} a_{n+1} z_n$, lo cual es una contradicción con la minimalidad de k. En resumen tenemos que zY es un subespacio propio y cerrado de Y. Ahora como Y es cerrado y como $H^2(\mathbb{D})$ es completo, tenemos que Y es un subespacio completo (de Hilbert), utilizando el teorema de la proyección ortogonal, tenemos que

$$Y = zY \oplus zY^{\perp} \quad \text{donde} \quad zY^{\perp} = \{h \in Y \,:\, h \perp g \quad \forall g \in zY\}.$$

Notemos que $zY^{\perp} \neq \{0\}$: en efecto, si esto no sucediera, implicaría que $f \in zY$ lo cual es una contradicción. Tomemos $I \in zY^{\perp}$ tal que $I \not\equiv 0$, por ser subespacio, podemos considerar sin pérdida de generalidad que $\|I\|_2 = 1$. Ahora, definamos para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ la función $I_n := q^n I$, es fácil ver que debido a que Y es invariante bajo S, tenemos que $I_n \in zY$ para toda $n \in \mathbb{Z}^+$; por lo tanto tenemos que $I \perp I_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, esto es $\langle I, I_n \rangle = \langle I_n, I \rangle = 0$. Utilizando el producto interno en $H^2(\mathbb{D})$ dado por (2.8), tenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|I^*(\exp(i\theta))\right|^2 \exp(-in\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|I^*(\exp(i\theta))\right|^2 \exp(in\theta)d\theta = 0 \qquad \forall n \geq 1.$$

Ahora, por el corolario 1.3.5 tenemos que $I^* \in L^2(\mathbb{T})$, y por ende $\left|I^*\right|^2 \in L^1(\mathbb{T})$ y así notamos que sus coeficientes de Fourier cumplen que $\widehat{|I^*|^2}(n) = 0$ si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $\widehat{|I^*|^2}(0) = 1$. Puesto que las funciones en $L^1(\mathbb{T})$ quedan determinadas por sus coeficientes de Fourier, tenemos que $\left|I^*\right| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$. Ahora, como $I \in H^2(\mathbb{D})$, por el teorema 2.1.4 tenemos que $I = P[I^*]$ y por lo tanto $|I| \leq 1$ lo que implica que $I \in H^\infty(\mathbb{D})$. Entonces concluimos que I es una función interior y afirmamos que $Y = I\,H^2(\mathbb{D})$.
Primero probemos que $I\,H^2(\mathbb{D}) \subseteq Y$: como $I \in Y$, por el lema 2.3.12 $Ip \in Y$ para todo $p \in \mathscr{P}(\mathbb{D})$. Ahora tomamos $f \in I\,H^2(\mathbb{D})$ que es de la forma $f = Ig$ con $g \in H^2(\mathbb{D})$; por el teorema 2.1.9 tenemos que existe una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{D})$ tal que $p_n \to g$ en $H^2(\mathbb{D})$, puesto que $\left|I^*\right| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$, tenemos que $Ip_n \to Ig = f$ y como $(Ip_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ y Y es cerrado, concluimos que $f \in Y$.
Ahora, como $I\,H^2(\mathbb{D}) \subseteq Y$, la condición suficiente implica que $I\,H^2(\mathbb{D})$ es cerrado y nuevamente por el teorema de proyección ortogonal tenemos que

$$Y = I\,H^2(\mathbb{D}) \oplus \left(I\,H^2(\mathbb{D})\right)^{\perp} \quad \text{donde} \quad \left(I\,H^2(\mathbb{D})\right)^{\perp} = \left\{h \in Y \ : \ h \perp g \quad \forall g \in I\,H^2(\mathbb{D})\right\}.$$

Para finalizar la demostración, bastaría ver que $\left(I\,H^2(\mathbb{D})\right)^{\perp} = \{0\}$: en efecto tomemos $h \in \left(I\,H^2(\mathbb{D})\right)^{\perp}$ y puesto que para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $q^n \in H^2(\mathbb{D})$, entonces $I_n = Iq^n \in I\,H^2(\mathbb{D})$ y por lo tanto $h \perp I_n$; lo que se expresa como

$$\langle h, I_n \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h^*(\exp(i\theta))\,\overline{I^*(\exp(i\theta))}\exp(-in\theta)d\theta = 0 \qquad \forall n \geq 0.$$

Ahora, como $h \in Y$, si definimos $h_n := q^n h$ para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, nuevamente por ser Y invariante respecto de S, tenemos que $h_n \in zY$ y recordando que $I \perp zY$, tenemos que $I \perp h_n$ para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ lo que implica

$$\langle h_n, I \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h^*(\exp(i\theta))\,\overline{I^*(\exp(i\theta))}\exp(in\theta)d\theta = 0 \qquad \forall n \geq 1.$$

Como $h \in H^2(\mathbb{D})$, tenemos que $h^* \in L^2(\mathbb{T})$ y así $h^* \in L^1(\mathbb{T})$, como $\left|\overline{I^*}\right| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$, tenemos que $h^*\overline{I^*} \in L^1(\mathbb{T})$. Entonces sus coeficientes de Fourier cumplen $\widehat{h^*\overline{I^*}}(n) = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ por lo cual $h^*\overline{I^*} = 0$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$ y como $\left|\overline{I^*}\right| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$, necesariamente $h^* \equiv 0$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$ y por el corolario 1.3.5 concluimos que $h \equiv 0$, lo que finaliza la prueba. ∎

Observación 2.3.14. *Notemos si combinamos los teoremas 1.2.6, 2.2.6 y 2.3.13 tenemos que los subespacios invariantes respecto a S de $H^2(\mathbb{D})$ se caracterizan por lo siguiente*

1. *Una sucesión $(\alpha_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{D}$ (la cual puede ser finita o vacía) tal que $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\alpha_n|) < \infty$,*
2. *μ una medida de Borel, finita, positiva sobre $\mathbb{T}$ y singular con respecto a la medida m de Lebesgue.*

Finalizamos esta sección con un resultado corolario importante del teorema de Beurling

Definición 2.3.15. *Sea H un espacio de Hilbert, y $T : H \to H$ un operador lineal acotado, sea $v \in H$ con $v \neq 0$, definimos el subespacio cerrado generado por v como*

$$T_v = span\left((T^n(v))_{n\geq 0}\right).$$

Proposición 2.3.16. *Sea H un espacio de Hilbert, y $T : H \to H$ un operador lineal acotado, para toda $v \in H \setminus \{0\}$ se tiene que T_v es el subespacio invariante respecto a T más pequeño que contiene a v.*

Demostración. Es claro que es un subespacio cerrado, basta ver que $T[T_v] \subseteq T_v$. Tomamos $w \in T_v$, entonces existe $(w_n)_{n\geq 0} \subseteq \operatorname{lin}\left((T^n(v))_{n\geq 0}\right)$ tal que $w_n \to w$ cuando $n \to \infty$ en la norma inducida por el producto interno de H, como T es continuo entonces $T(w_n) \to T(w)$; es claro que $(T(w_n))_{n\geq 0} \subseteq \operatorname{lin}\left((T^n(v))_{n\geq 0}\right)$, entonces se concluye que $T(w) \in T_v$. Ahora, sea V un subespacio invariante respecto a T que contiene a v, queremos ver que $T_v \subseteq V$. Tomamos $w \in T_v$, entonces existe $(w_n)_{n\geq 0} \subseteq \operatorname{lin}\left((T^n(v))_{n\geq 0}\right)$ tal que $w_n \to w$ cuando $n \to \infty$, pero como $v \in V$, tenemos que $(w_n)_{n\geq 0} \subseteq V$ y el resultado se sigue. ∎

Teorema 2.3.17. *Sea $f \in H^2(\mathbb{D})$ con $f \not\equiv 0$, entonces*

$$S_f = I_f H^2(\mathbb{D}),$$

donde I_f es el factor interior de f como en la factorización canónica de Smirnov (teorema 2.2.13) y S_f es el subespacio cerrado generado por f como en la definición 2.3.15.

Demostración. $\subseteq$ Por la factorización canónica de Smirnov tenemos que $f = I_f O_f$. La observación 2.2.14 garantiza que I_f es una función interior y así por el teorema de Beurling tenemos que $I_f H^2(\mathbb{D})$ es un subespacio invariante respecto a S. Por el corolario 2.2.10 tenemos que $O_f \in H^2(\mathbb{D})$, por lo tanto $f \in I_f H^2(\mathbb{D})$. La proposición 2.3.16 nos dice que S_f es el subespacio más pequeño que contiene a f por lo que $S_f \subseteq I_f H^2(\mathbb{D})$.
$\supseteq$ Como $f \not\equiv 0$ tenemos que $S_f \neq \{0\}$. Puesto que S_f es un subespacio invariante respecto a S (proposición 2.3.16), por el teorema de Beurling tenemos que existe $I \in H^\infty(\mathbb{D})$ función interior tal que $S_f = IH^2(\mathbb{D})$. Como $f \in S_f$, entonces $f = Ih$ para alguna $h \in H^2(\mathbb{D})$, por la factorización canónica de Smirnov tenemos que $h = I_h O_h$ y por lo tanto $f = II_h O_h$. Por otro lado $f = I_f O_f$ de lo que $I_f O_f = II_h O_h$, pero como $\left|I^*\right| = \left|I_f^*\right| = \left|I_h^*\right| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$, entonces $\left|O_h^*\right| = \left|O_f^*\right|$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$. Por el corolario 1.3.5 tenemos que $O_f = O_h$ y así $I_f = II_h$. Como $II_h \in IH^2(\mathbb{D}) = S_f$ esto implica que $I_f \in S_f$ y por el lema 2.3.12 tenemos que $pI_f \in S_f$ para todo $p \in \mathcal{P}(\mathbb{D})$. Finalmente tomamos $g \in I_f H^2(\mathbb{D})$, entonces existe $j \in H^2(\mathbb{D})$ tal que $g = I_f j$; por el teorema 2.1.9 tenemos que existe $(p_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{P}(\mathbb{D})$ tal que $p_n \to j$ en $H^2(\mathbb{D})$ y como $\left|I_f^*\right| = 1$, entonces $I_f p_n \to I_f j = g$. Finalmente como $(I_f p_n)_{n\geq 0} \subseteq S_f$ y al ser S_f cerrado, tenemos que $g \in S_f$.

∎

Corolario 2.3.18. *Sea $f \in H^2(\mathbb{D})$ con $f \not\equiv 0$ entonces $S_f = H^2(\mathbb{D})$ si y solo si f es una función exterior.*

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que $S_f = H^2(\mathbb{D})$. Por la factorización canónica de Smirnov tenemos que $f = I_f O_f$ y por el teorema 2.3.17 tenemos que $S_f = I_f H^2(\mathbb{D})$. Así tenemos que $I_f H^2(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{D})$, pero por la última parte del teorema de Beurling 2.3.13 tenemos que $I_f = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{T}$. Por lo tanto $f = \alpha O_f$ y así f es exterior.
$\Leftarrow$ Si f es exterior, por el corolario 2.2.15 obtenemos que $f = \lambda O_f$ con $\lambda \in \mathbb{T}$. Por la unicidad de la descomposición canónica de Smirnov tenemos que $I_f = 1$ y por el teorema 2.3.17 concluimos que $S_f = H^2(\mathbb{D})$. ∎

Capítulo 3

La función ζ

"Los matemáticos han intentado en vano descubrir algún orden en la secuencia de los números primos, y tenemos razones para creer que es un misterio en el que la mente humana nunca penetrará."

Leonhard Euler

En este capítulo estudiaremos una de las funciones más importantes en la teoría de números, la función ζ. El análisis de esta función tiene consecuencias muy importantes en la distribución de números primos, esta relación está dada por la famosa hipótesis de Riemann, la cual habla sobre la distribución de los ceros de la función ζ.

3.1. Primeras propiedades de la función ζ

En esta sección estudiaremos las propiedades básicas de la función ζ y veremos algunos valores especiales que esta función toma.

Notación 3.1.1. *En lo siguiente consideraremos la siguiente notación:*

1. *Denotamos los siguientes semiplanos del plano complejo como*

$$\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Im(z) > 0\}, \qquad \mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re(z) > 0\}.$$

2. *Si consideramos $A \subseteq \mathbb{C}$ y $\omega \in \mathbb{C}$, denotamos*

$$\omega + A = \{\omega + z \ : \ z \in A\}, \qquad \omega A = \{\omega z \ : \ z \in A\}.$$

3. *Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces denotamos*

$$a + i\mathbb{R} := \{s \in \mathbb{C} \ : \ \Re(s) = a\}, \qquad \mathbb{R} + ia := \{s \in \mathbb{C} \ : \ \Im(s) = a\}.$$

Observación 3.1.2. *Consideremos $s \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces*

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{\Re(s)}}.$$

Notemos que si $\Re(s) > 1$, la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge absolutamente. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.1.3 (Euler)**.** *Para todo $s \in 1 + \mathbb{C}_+$ (i.e. $\Re(s) > 1$), definimos la función ζ como*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Teorema 3.1.4. *La función ζ dada en la definición 3.1.3, es una función holomorfa y se cumple que*

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s}.$$

Demostración. Sea $r > 0$ y $z_0 \in 1 + \mathbb{C}_+$ tal que $\overline{B}_r(z_0) \subseteq 1 + \mathbb{C}_+$. Definimos para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ la función $f_n : \overline{B}_r(z_0) \to \mathbb{C}$ como $f_n(s) = n^{-s}$, la cual claramente es una función holomorfa. Sea δ la distancia de $\overline{B}_r(z_0)$ a la línea $1 + i\mathbb{R}$, así tenemos que para todo $s \in \overline{B}_r(z_0)$ se cumple que $\Re(s) \geq \delta + 1$. Si consideramos $M_n = n^{-(\delta+1)}$, tenemos que $\left|f_n(s)\right| = n^{-\Re(s)} \leq M_n$ y además $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Entonces por el criterio M de Weierstrass tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente sobre $\overline{B}_r(z_0)$, y por el teorema de convergencia analítica tenemos que $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ es holomorfa en $1 + \mathbb{C}_+$ y más aún se cumple que

$$f'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s}$$

la cual converge en $1 + \mathbb{C}_+$ y uniformemente en los discos cerrados de $1 + \mathbb{C}_+$. ∎

Veamos ahora como la función ζ guarda una estrecha relación con la sucesión de números primos. La cual denotamos como $(p_n)_{n\geq 1}$, donde $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.

Teorema 3.1.5 (Producto de Euler)**.** *Para todo $s \in 1 + \mathbb{C}_+$ se cumple que*

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}}.$$

Demostración. Veamos primero que los productos convergen sobre $1 + \mathbb{C}_+$. Para esto bastaría ver que lo hacen los productos $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - p_n^{-s}\right)$; en efecto notemos que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que $n < p_n$, tomando $s \in 1 + \mathbb{C}_+$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|-p_n^{-s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-\Re(s)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\Re(s)} < \infty.$$

Entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - p_n^{-s}\right)$ converge en $1+\mathbb{C}_+$ y por ende también lo hace el producto $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - p_n^{-s}\right)^{-1}$. Ahora, para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos el conjunto

$$P(n) := \left\{ \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k} \ : \ \alpha_k \in \mathbb{N} \text{ para todo } 1 \leq k \leq n \right\};$$

esto es el conjunto de todos los enteros que tienen un divisor primo entre $p_1, \ldots, p_n$. Puesto que el teorema fundamental de la aritmética establece que la descomposición de un número entero en productos de primos es única (salvo el orden), tenemos que

$$\zeta(s) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n\in P(k)} \frac{1}{n^s}.$$

Por otro lado para $n \in \mathbb{Z}^+$ fijo, obtenemos que

$$\sum_{n\in P(k)} \frac{1}{n^s} = \sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_k\geq 0} \frac{1}{p_1^{s\alpha_1}\cdots p_k^{s\alpha_k}}.$$

Notemos que la suma anterior la podemos factorizar de la siguiente manera

$$\sum_{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_k\geq 0} \frac{1}{p_1^{s\alpha_1}\cdots p_k^{s\alpha_k}} = \left(\sum_{\alpha_1\geq 0} \frac{1}{p_1^{s\alpha_1}}\right)\left(\sum_{\alpha_2\geq 0,\ldots,\alpha_k\geq 0} \frac{1}{p_2^{s\alpha_1}\cdots p_k^{s\alpha_k}}\right) = \cdots = \left(\sum_{\alpha_1\geq 0} \frac{1}{p_1^{s\alpha_1}}\right)\cdots\left(\sum_{\alpha_k\geq 0} \frac{1}{p_k^{s\alpha_k}}\right)$$

y puesto que las sumas anteriores son geométricas, entonces el resultado se sigue

$$\zeta(s) = \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} \frac{1}{1-p_n^{-s}}.$$

■

Finalizamos esta sección calculando algunos valores especiales de la función ζ. Sea $r > 0$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ denotamos el disco agujerado con centro en z_0 y de radio r como $B_r(z_0)^o := \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z - z_0| < r\}$.

Observación 3.1.6. *Consideremos la función $f(z) = \frac{z}{\exp(z)-1}$ la cual es una función meromorfa con polos simples en $z = 2\pi ki$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Entonces dicha función tiene una expansión en series de potencias en la vecindad $B_{2\pi}(0)$ de $z = 0$. Así tenemos la siguiente definición.*

Definición 3.1.7 (Números de Bernoulli)**.** *Definimos el n-ésimo número de Bernoulli B_n como el n-ésimo coeficiente de la serie de Taylor de la función $\frac{z}{\exp(z)-1}$ en la vecindad $B_{2\pi}(0)$ de $z = 0$, esto es*

$$\frac{z}{\exp(z)-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \qquad \forall\ |z| < 2\pi.$$

Los números de Bernoulli no siguen un patrón general, la única forma de calcularlos es a través del desarrollo de Taylor de la función $f(z) = \frac{z}{\exp(z)-1}$, es decir $B_n = f^{(n)}(0)$; los primeros dieciséis valores son:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2739}$	0	$\frac{7}{6}$	0

Cuadro 3.1: Primeros dieciséis números de Bernoulli.

Lema 3.1.8. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que $B_{2n+1} = 0$.*

Demostración. Consideremos la función coth, la cual es una función meromorfa con polos simples en $z = \pi ki$ con $k \in \mathbb{Z}$, tomamos $z \in B_\pi(0)^o$, y así obtenemos

$$\coth(z) - 1 = \frac{2}{\exp(2z) - 1}. \tag{3.1}$$

Ahora, si tomamos $z \in B_{2\pi}(0)$, de la definición de números de Bernoulli tenemos que

$$\frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Dado que las funciones $\frac{z}{2}$ y $\coth\left(\frac{z}{2}\right)$ son impares, su producto es una función par, por lo que se cumple que $\frac{-z}{2}\coth\left(-\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right)$. Así los valores de la serie de Taylor se relacionan como $B_n = (-1)^n B_n$ para todo $n \geq 2$, de lo cual necesariamente tenemos que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple $B_{2n+1} = 0$. ■

Lema 3.1.9. *Para todo $z \in B_\pi(0)^o$, tenemos que*

$$\coth(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}2^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}.$$

Demostración. Tomamos $z \in B_\pi(0)^o$. De la igualdad (3.1) y de la definición 3.1.7 obtenemos la siguiente identidad

$$z\coth(z) - z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2z)^n.$$

Por el lema 3.1.8 tenemos que

$$\coth(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}2^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}.$$

■

Para probar el siguiente lema usaremos la siguiente identidad:

Teorema 3.1.10 (Euler)**.** *Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces se cumple que*

$$\frac{\sinh(z)}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right). \tag{3.2}$$

Donde $\sinh(z) := (\exp(z) - \exp(z))/2$.

Una prueba de este teorema se puede ver en [14].

Lema 3.1.11. *Para todo $z \in B_\pi(0)^o$, tenemos que*

$$\coth(z) = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{\pi^{2n}}\zeta(2n). \tag{3.3}$$

Demostración. Definimos para toda $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ la función

$$f(z) = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

Esta función es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y tiene una singularidad removible en $z = 0$, por lo cual se puede extender a una función holomorfa en $\mathbb{C}$ de la siguiente manera

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\sinh(z)}{z} & z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ 1 & z = 0 \end{cases}.$$

Ahora, notemos que los ceros de g son de la forma $z = ik\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Entonces, restringiendo g a la bola $B_\pi(0)$, tenemos que $\mathrm{Log}(g) \in \mathcal{H}\left(B_\pi(0)\right)$ (donde Log es una determinación adecuada del logaritmo complejo); así tomando $z \in B_\pi(0)^o$, de la identidad (3.2) obtenemos

$$\mathrm{Log}\left(\frac{\sinh(z)}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}\left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right) + c,$$

en donde c es una constante múltiplo $2i\pi$. Ahora, derivando la igualdad anterior, tenemos

$$\coth(z) = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 + \pi^2 n^2}. \tag{3.4}$$

Consideramos para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ las funciones $f_n(z) = \frac{z}{z^2+\pi^2 n^2}$, notemos que estas funciones son meromorfas con singularidades en $z = \pm i\pi n$ respectivamente. Si calculamos su desarrollo en serie de Taylor en la vecindad $B_{\pi n}(0)$ de $z = 0$ tenemos

$$f_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{z^{2m-1}}{\pi^{2m} n^{2m}} \qquad \forall\ |z| < \pi n.$$

Así, para todo $z \in B_\pi(0)^o$, reescribimos (3.4) como

$$\coth(z) - \frac{1}{z} = 2\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

Puesto que la serie anterior converge normalmente en $B_\pi(0)^o$, por el teorema de la doble suma de Weierstrass, tenemos que

$$\coth(z) - \frac{1}{z} = 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{z^{2m-1}}{\pi^{2m} n^{2m}}\right) = 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{z^{2m-1}}{\pi^{2m}} \zeta(2m)$$

lo que buscábamos demostrar.

■

Teorema 3.1.12 (Euler)**.** *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple*

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}\,(2\pi)^{2n}\,B_{2n}}{2\,(2n)!}.$$

Demostración. Del los lemas 3.1.9, 3.1.11 y considerando que la serie de Laurent es única, tenemos que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple

$$\frac{B_{2n} 2^{2n}}{(2n)!} = 2\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{2n}} \zeta(2n)$$

y el resultado se sigue.

■

3.2. La extensión analítica

En esta sección extenderemos el dominio de la función ζ a todo el plano complejo a excepción de un punto $s = 1$, además veremos que esta extensión hace de la función ζ una función meromorfa con un polo simple en $s = 1$.

Definición 3.2.1 (Parte fraccionaria)**.** *Sea $x \in \mathbb{R}$ definimos su parte fraccionaria como*

$$\rho(x) := x - \lfloor x \rfloor$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la parte entera.

Observación 3.2.2. *La función parte fraccionaria $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es positiva y está acotada, esto es para todo $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \rho(x) < 1$ y además es 1-periódica, $\rho(x+1) = \rho(x)$.*

Teorema 3.2.3. *La función ζ se puede extender a una función meromorfa en $\mathbb{C}_+$ con un único polo simple en $s = 1$ con $Res(\zeta, 1) = 1$ y la representación integral*

$$\frac{\zeta(s)}{s} = \frac{1}{s-1} - \int_1^\infty \rho(x) x^{-s-1} dx \qquad \forall\ s \in \mathbb{C}_+ \setminus \{1\}.$$

Demostración. Sea $s \in 1 + \mathbb{C}_+$ fija. Es claro que la función x^{-s-1} es integrable en $(1, \infty)$ y puesto que ρ es acotada, entonces $\rho(x)x^{-s-1}$ es integrable y su integral se puede ver como

$$\int_1^\infty \rho(x) x^{-s-1} dx = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \rho(x) x^{-s-1} dx = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^{s+1}} dx.$$

Ahora, integrando por partes obtenemos

$$\int_1^\infty \rho(x) x^{-s-1} dx = \sum_{n=1}^\infty \left(-\frac{1}{s(n+1)^s} + \frac{1}{s} \int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx \right) = -\frac{1}{s} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)^s} + \frac{1}{s} \frac{1}{s-1}.$$

Del hecho de que $\zeta(s) = 1 + \sum_{n=1}^\infty (n+1)^{-s}$, concluimos que

$$\frac{\zeta(s)}{s} = \frac{1}{s-1} - \int_1^\infty \rho(x) x^{-s-1} dx. \tag{3.5}$$

Si denotamos $F(s) = \int_1^\infty \rho(x) x^{-s-1} dx$, tenemos que dicha función está definida para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(s) > 0$; por ende tenemos que la fórmula 3.5 extiende a la función ζ en $\mathbb{C}_+$ a excepción de $s = 1$. Veamos que dicha extensión es analítica en $\mathbb{C}_+ \setminus \{1\}$: consideremos la función $f(x, s) = \rho(x) x^{-s-1}$ definida en $(1, \infty) \times \mathbb{C}_+$. Para cada $x \in \mathbb{C}_+$, tenemos que f es holomorfa en $\mathbb{C}_+$. Ahora tomamos $K \subseteq \mathbb{C}_+$ un subconjunto compacto y sea $s \in K$; entonces existe $a > 0$ tal que $a < \Re(s)$ y así tenemos la siguiente cota

$$\left| f(x, s) \right| \leq \frac{1}{x^{\Re(s)+1}} < \frac{1}{x^{a+1}}.$$

Puesto que la función $h(x) = x^{-a-1}$ cumple que $h \in L^1(1, \infty)$, por el teorema de integrales que dependen de un parámetro complejo, tenemos que la función $F(s) = \int_1^\infty f(x, s) dx$ es holomorfa en $\mathbb{C}_+$. Como la función $G(s) = (s-1)^{-1}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ a excepción de $s = 1$, tenemos que la extensión 3.5 es analítica en $\mathbb{C}_+ \setminus \{1\}$, donde el residuo está dado por la función G, el cual se calcula como

$$\mathrm{Res}(\zeta, 1) = \mathrm{Res}(G, 1) = \lim_{s \to 1} (s-1) \frac{1}{s-1} = 1.$$

■

Lema 3.2.4. *La función definida para toda $x \in (1,\infty)$ por*

$$R(x) := \int_1^x \left(\rho(y) - \frac{1}{2}\right) dy$$

es acotada.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces notemos que

$$\int_n^{n+1} \left(\rho(y) - \frac{1}{2}\right) dy = \int_n^{n+1} \left(y - n - \frac{1}{2}\right) dy = 0.$$

Ahora, tomamos $x \in (1,\infty)$, así tenemos que

$$R(x) = \int_1^{\lfloor x \rfloor} \left(\rho(y) - \frac{1}{2}\right) dy + \int_{\lfloor x \rfloor}^x \left(\rho(y) - \frac{1}{2}\right) dy = \int_{\lfloor x \rfloor}^x \left(\rho(y) - \frac{1}{2}\right) dy$$

de lo cual concluimos que

$$\left|R(x)\right| \leq \int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{3}{2} dy = \frac{3}{2}\rho(x) < \frac{3}{2}.$$

∎

Teorema 3.2.5. *La función ζ se puede extender a una función meromorfa en $-1 + \mathbb{C}_+$ con un único polo simple en $s = 1$ con $Res(\zeta, 1) = 1$ y cumple la representación integral*

$$\frac{\zeta(s)}{s} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} - \int_1^\infty \left(\rho(x) - \frac{1}{2}\right) x^{-s-1} dx.$$

Demostración. Definamos la función $f(x,s) = \left(\rho(x) - \frac{1}{2}\right) x^{-s-1}$ para toda $(x,s) \in (1,\infty) \times (-1 + \mathbb{C}_+)$. Es claro que para cada $x \in (1,\infty)$ fija, la función f es holomorfa en $-1 + \mathbb{C}_+$. Veamos que la integral $\int_1^\infty f(x,s)dx$ converge uniformemente en todo subconjunto compacto de $-1+\mathbb{C}_+$: tomamos $K \subsetneq -1+\mathbb{C}_+$ un subconjunto compacto, consideramos $s \in K$ y $a_1, a_2 \in (1,\infty)$ con $a_2 > a_1$ fijas; entonces al integrar por partes tenemos

$$\int_{a_1}^{a_2} \left(\rho(x) - \frac{1}{2}\right) x^{-s-1} dx = \frac{R(x)}{x^{s+1}}\bigg|_{a_1}^{a_2} - (s+1) \int_{a_1}^{a_2} \frac{R(x)}{x^{s+2}} dx,$$

donde R es como en el lema 3.2.4. Ahora, como R es acotada por $C = 3/2$, tenemos

$$\left|\int_{a_1}^{a_2} \left(\rho(x) - \frac{1}{2}\right) x^{-s-1} dx\right| \leq C \left(\frac{1}{a_2^{\Re(s)+1}} + \frac{1}{a_1^{\Re(s)+1}}\right) + |s+1|\, C \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{x^{\Re(s)+2}} dx.$$

Al ser K compacto, existen $L \in \mathbb{R}^+$ tal que $|s+1| \leq L$ y $\delta > -1$ tal que $\delta < \Re(s)$, así obtenemos

$$\left|\int_{a_1}^{a_2} \left(\rho(x) - \frac{1}{2}\right) x^{-s-1} dx\right| \leq C \left(\frac{1}{a_2^{\delta+1}} + \frac{1}{a_1^{\delta+1}}\right) + M \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{x^{\delta+2}} dx,$$

donde $M = LC$. Haciendo $a_2, a_1 \to \infty$, tenemos que el lado derecho de la desigualdad anterior tiende a cero y así por el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme, tenemos que la integral $\int_1^\infty f(x,s)dx$ converge uniformemente en K. Por el teorema de convergencia analítica, obtenemos que la función $F(s) =$

$\int_1^\infty f(x,s)dx$ define una función holomorfa en $1-\mathbb{C}_+$. Ahora, tomando $s\in\mathbb{C}_+$, un cálculo directo nos da que

$$\int_1^\infty \rho(x)x^{-s-1}dx = \int_1^\infty \left(\rho(x)-\frac{1}{2}\right)x^{-s-1}dx + \frac{1}{2s}$$

y de la extensión dada por el teorema 3.2.3, tenemos que

$$\frac{\zeta(s)}{s} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} - \int_1^\infty \left(\rho(x)-\frac{1}{2}\right)x^{-s-1}dx;$$

la cual es la extensión analítica buscada para la función ζ en $(-1+\mathbb{C}_+)\setminus\{1\}$ con polo y residuo dado por el teorema 3.2.3. ■

Corolario 3.2.6. *En la región $-1+\mathbb{C}_+\cap-\mathbb{C}_+$ la función ζ cumple la representación integral*

$$\frac{\zeta(s)}{s} = -\int_0^\infty \left(\rho(x)-\frac{1}{2}\right)x^{-s-1}dx.$$

Demostración. Sea $s\in-\mathbb{C}_+$ fija. Tenemos que la función x^{-s-1} es integrable en $(0,1)$; al ser la función $\rho(x)-1/2$ acotada, entonces la función $\left(\rho(x)-\frac{1}{2}\right)x^{-s-1}$ es integrable y así tenemos

$$\int_0^1 \left(\rho(x)-\frac{1}{2}\right)x^{-s-1}dx = -\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2s}. \tag{3.6}$$

Finalmente, si consideramos $s\in-1+\mathbb{C}_+\cap-\mathbb{C}_+$, del teorema 3.2.5 y de la igualdad (3.6), concluimos que

$$\frac{\zeta(s)}{s} = -\int_0^\infty \left(\rho(x)-\frac{1}{2}\right)x^{-s-1}dx.$$

■

Lema 3.2.7. *Para todo $x\in\mathbb{R}\setminus(2\pi\mathbb{Z})$ se cumple que*

$$\rho\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.$$

Demostración. Es claro que la función $\rho_{2\pi}(x)=\rho\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ es 2π-periódica y más aún $\rho_{2\pi}\in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$. Entonces, calculamos sus coeficientes de Fourier como

$$\widehat{\rho_{2\pi}}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho_{2\pi}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{t}{2\pi}dt = \frac{1}{2}$$
$$\widehat{\rho_{2\pi}}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho_{2\pi}(t)\exp(-int)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{t}{2\pi}\exp(-int)dt = -\frac{1}{\pi n} \qquad \forall\, n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

donde la última integral se obtiene de un cálculo directo al integrar por partes. Ahora, si consideramos los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier dados por $a_n=\widehat{\rho_{2\pi}}(n)+\widehat{\rho_{2\pi}}(-n)$ para $n\geq 0$ y $b_n=i\left(\widehat{\rho_{2\pi}}(n)-\widehat{\rho_{2\pi}}(-n)\right)$ para $n\geq 1$, obtenemos

$$S\left(\rho_{2\pi}\right)(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.$$

Puesto que $\rho_{2\pi}$ es $\mathbf{C}^1$ por trozos, tenemos la convergencia puntual

$$S\left(\rho_{2\pi}\right)(x) = \frac{\rho_{2\pi}(x^-) + \rho_{2\pi}(x^+)}{2} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

donde $f(x^-) = \text{lím}_{y \to_< x} f(y)$ y $f(x^-) = \text{lím}_{y \to_> x} f(y)$. Como la función $\rho_{2\pi}$ es continua en $\mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$, concluimos que

$$\rho_{2\pi}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})\,.$$

■

Lema 3.2.8. *Las sumas parciales de la serie*

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$$

están uniformemente acotadas.

Demostración. Puesto que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ la función $\sin(nx)/n$ es $2\pi/n$-periódica e impar, basta analizar el intervalo $0 \leq x < \pi$. Notamos que si $x = 0$, cualquier cota funcionaría, entonces sin pérdida de generalidad tomamos $0 < x < \pi$. Definimos para toda $0 < x < \pi$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ las funciones $a_n(x) = 1/n$ y $b_n(x) = sin(nx)$. Sea $N \in \mathbb{Z}^+$ fija, utilizamos la transformación de Abel obtenemos

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{N-1}(a_n(x) - a_{n-1}(x))B_n(x) + a_N(x)B_N(x)$$

donde $B_m(x) = \sum_{n=1}^{m} b_n(x)$ con $m \in \mathbb{Z}^+$. Notemos que $\left|B_N(x)\right| \leq N$, entonces tenemos

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(nx)}{n}\right| \leq \sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left|B_n(x)\right| + 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left|B_n(x)\right| + 1,$$

lo que podemos reescribir como

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(nx)}{n}\right| - 1 \leq \sum_{n \leq 1/x}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left|B_n(x)\right| + \sum_{n > 1/x}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left|B_n(x)\right| \tag{3.7}$$

donde la primer suma podría no contener elementos. Ahora, un cálculo directo nos da

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{n=1}^{N}\sin(nx) = \sum_{n=1}^{N}\left(\cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right) = 2\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{N}{2}x\right).$$

Como $0 < x/2 < \pi/2$, tenemos que $x/\pi < \sin(x/2)$ y así generamos las siguientes cotas $\left|B_N(x)\right| \leq \pi(N+1)Nx/4$ y $\left|B_N(x)\right| \leq \pi/x$; usándolas en la desigualdad (3.7), obtenemos

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(nx)}{n}\right| - 1 \leq \sum_{n \leq 1/x}\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{x}\sum_{n > 1/x}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{\pi}{4} + \pi, \tag{3.8}$$

por lo tanto las sumas parciales están uniformemente acotadas.

■

Teorema 3.2.9 (Riemann). *La función ζ se puede extender analíticamente en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ con la excepción de $s = 1$, donde tiene un polo simple y satisface la ecuación funcional de Euler-Riemann*

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s}{\pi} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Γ de Euler (ver Apéndice E).

Demostración. (Hardy) Sea $s \in -1 + \mathbb{C}_+ \cap -\mathbb{C}_+$ y $a \in (0, \infty)$, entonces por el teorema 3.2.6 tenemos

$$\frac{\zeta(s)}{s} = -\int_0^\infty \left(\rho(x) - \frac{1}{2}\right) x^{-s-1} dx = -\lim_{a\to\infty} \int_0^a \left(\rho(x) - \frac{1}{2}\right) x^{-s-1} dx.$$

Por los lemas 3.2.7 y 3.2.8 tenemos respectivamente las igualdades

$$\frac{\zeta(s)}{s} = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}\right) x^{-s-1} dx = \lim_{a\to\infty} \sum_{n=1}^\infty \int_0^a \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n} x^{-s-1} dx. \tag{3.9}$$

Queremos intercambiar el límite con la suma, para eso notemos lo siguiente: sea la misma a tomada anteriormente y $n \in \mathbb{Z}^+$ fijo, un cálculo directo (integración por partes) nos da

$$\int_a^\infty \frac{\sin(2\pi nx)}{x^{s+1}} dx = \frac{\cos(2\pi na)}{2\pi na^{s+1}} - \frac{s+1}{2\pi n} \int_a^\infty \frac{\cos(2\pi nx)}{x^{s+2}} dx,$$

de lo cual obtenemos

$$\left|\int_a^\infty \frac{\sin(2\pi nx)}{x^{s+1}} dx\right| \le \frac{1}{2\pi na^{\Re(s)+1}} + \frac{|s+1|}{2\pi n} \int_a^\infty \frac{1}{x^{\Re(s)+2}} dx = \left(\frac{1}{2\pi n} + \frac{|s+1|}{2\pi n(\Re(s)+1)}\right) \frac{1}{a^{\Re(s)+1}};$$

lo que nos implica

$$\left|\sum_{n=1}^\infty \int_a^\infty \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n} x^{-s-1} dx\right| \le \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{2\pi^2 n^2} + \frac{|s+1|}{2\pi^2 n^2(\Re(s)+1)}\right) \frac{1}{a^{\Re(s)+1}} \xrightarrow{a\to\infty} 0.$$

Por lo tanto podemos intercambiar el límite con la suma en la ecuación (3.9):

$$\frac{\zeta(s)}{s} = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n} x^{-s-1} dx.$$

Ahora, haciendo el cambio de variable $y = 2\pi nx$ tenemos

$$\frac{\zeta(s)}{s} = \frac{(2\pi)^s}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1-s}} \int_0^\infty \sin(y) y^{-s-1} dy.$$

Puesto que $s \in -1 + \mathbb{C}_+ \cap -\mathbb{C}_+$, tenemos que $-1 < \Re(s) < 0$, así del teorema E.0.6 reescribimos la igualdad anterior como

$$\zeta(s) = s\frac{(2\pi)^s}{\pi}\zeta(1-s)\sin\left(-\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(-s) = \frac{(2\pi)^s}{\pi}\zeta(1-s)\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(1-s). \tag{3.10}$$

Si tomamos $s \in -\mathbb{C}_+$, notamos que $\zeta(1-s)$ está dada por la definición 3.1.3 y puesto que en este caso la función $\Gamma(1-s)$ está libre de polos, entonces la ecuación (3.10) extiende analíticamente a la función ζ en todo $\mathbb{C}_+$. Por lo tanto concluimos que la función ζ se extiende a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un único polo en $s = 1$. ∎

3.3. Los ceros de la función ζ y la hipótesis de Riemann

En esta sección estudiaremos algunas consecuencias de la ecuación funcional de la función ζ, como el cálculo de algunos valores especiales y el estudio de los ceros en algunas regiones específicas de la función ζ.

Teorema 3.3.1. *Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que*

$$\zeta(1-n) = (-1)^{n-1}\frac{B_n}{n}.$$

Demostración. Tomemos $n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \neq 1$, entonces haciendo $s = 1-n$ en la ecuación funcional 3.2.9 tenemos

$$\zeta(1-n) = -\frac{2}{(2\pi)^n}\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)(n-1)!\zeta(n). \tag{3.11}$$

Si consideramos que n es impar, entonces la función sin se anula y por lo tanto se tendría que $\zeta(1-n) = 0$; por el lema 3.1.8 tenemos que $B_n = 0$ (pues n es impar) y en este caso el resultado se sigue. Ahora, si consideramos que n es un número par de la forma $n = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces de la ecuación 3.11 y del teorema 3.1.12 obtenemos

$$\zeta(1-2k) = -\frac{2}{(2\pi)^{2k}}\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right)(2k-1)!\zeta(2k) = (-1)^{2k-1}\frac{B_{2k}}{2k};$$

por lo que en este caso el resultado se cumple. Falta ver el caso en que $n = 1$, para esto tomamos $s \neq 1$; de la ecuación funcional 3.2.9 tenemos

$$(s-1)\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s}{\pi}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)(s-1)\zeta(1-s).$$

Sabemos que la función ζ tiene un polo simple en $s = 1$ de residuo 1, el cual es removido al multiplicar por $s-1$; así al hacer $s \to 1$, el lado derecho de la igualdad anterior tiende a 1. Ahora, como la función Γ tiene un polo simple en $s = 0$ de residuo 1 (teorema E.0.4), este se puede remover al hacer $s \to 1$ en el producto $\Gamma(1-s)(1-s)$. Por lo tanto concluimos que $\zeta(1) = -1/2$; por otro lado como $B_1 = -1/2$, concluimos la demostración. ∎

A continuación veamos en que regiones del dominio de la función ζ conocemos la distribución de sus ceros.

Proposición 3.3.2. *En la región $1+\mathbb{C}_+$ la función ζ no se anula. Esto es si $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 1$, entonces $\zeta(s) \neq 0$.*

Demostración. En esta región la función ζ se expresa como el producto de Euler (teorema 3.1.5) y como cada elemento del producto es diferente de cero, se concluye que la función ζ no se puede anular. ∎

Proposición 3.3.3 (Ceros triviales)**.** *En la región $-\mathbb{C}_+$ los únicos ceros de la función ζ son de la forma $s = -2n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Estos valores son llamados los ceros triviales de la función ζ.*

Demostración. Tomamos $s \in -\mathbb{C}_+$, entonces la ecuación funcional 3.2.9 toma la forma

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s}{\pi}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Notemos que en este caso la función $\zeta(1-s)$ toma valores en la región $1+\mathbb{C}_+$; por la proposición 3.3.2 tenemos $\zeta(1-s) \neq 0$. Por el teorema E.0.5, tenemos que la función Γ no se anula en todo $\mathbb{C}$; entonces la única forma de obtener un valor nulo en la ecuación funcional es a través de $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$, el cual claramente se anula cuando $s = -2n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$. ■

A continuación, veamos que podemos decir sobre los ceros de la función ζ en su dominio restante. Para esto hagamos la siguiente definición.

Definición 3.3.4. *Definimos el subconjunto del plano complejo*

$$\mathcal{F} := 1 - \mathbb{C}_+ \cap \mathbb{C}_+,$$

i.e. los que números complejos que cumplen $0 < \Re(s) < 1$. *Dicha región es conocida como la franja crítica de la función* ζ. *A la recta* $1/2 + i\mathbb{R}$*, se le llama línea crítica de la función* ζ.

Proposición 3.3.5. *Los ceros de la función* ζ *en la región* $\overline{\mathcal{F}}$ *son simétricos respecto a la recta* $1/2 + i\mathbb{R}$.

Demostración. Sea $s \in \overline{\mathcal{F}}$ un cero de la función ζ con $s \neq 0, 1$. Entonces de la ecuación funcional 3.2.9 se tiene

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s}{\pi} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Puesto que $0 \leq \Re(s) \leq 1$ y $s \neq 0$, entonces la función sin no se anula, por el teorema E.0.5 tenemos que la función Γ no se anula, de lo cual $\zeta(s) = 0$ si y solo si $\zeta(1-s) = 0$. En el caso en que $s = 0$ por el teorema 3.3.1 tenemos $\zeta(0) = -1/2$ y como $s = 1$ es el polo de la función ζ, entonces ninguno es cero y se concluye la simetría. ■

Lema 3.3.6. *Sea* $s \in 1 + \mathbb{C}_+$*, entonces se cumple que*

$$\operatorname{Log}(\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_n^{-sm}}{m}.$$

Donde Log *es la determinación principal del logaritmo complejo.*

Demostración. Por la proposición 3.3.2 tenemos que la función ζ no se anula en $1 + \mathbb{C}_+$; por lo tanto la función $\operatorname{Log}(\zeta)$ está bien definida y es holomorfa en $1 + \mathbb{C}_+$ (siendo Log una determinación adecuada del logaritmo complejo, determinada módulo adición de un múltiplo de $2i\pi$). Ahora, sea $s \in 1 + \mathbb{C}_+$, por el teorema 3.1.5 tenemos

$$\operatorname{Log}(\zeta(s)) = \operatorname{Log}\left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - p_n^{-s}\right) + c,$$

en donde c es un múltiplo de $2i\pi$. Ahora puesto que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que $\left|p_n^{-s}\right| < 1$; utilizando el desarrollo de Taylor de la función $\operatorname{Log}(1-z)$ en la vecindad $|z| < 1$, tenemos que

$$\operatorname{Log}(\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_n^{-sm}}{m} + c.$$

Notemos que $c = 0$, en efecto si tomamos $s \in 1 + \mathbb{C}_+$ tal que $\Im(s) = 0$, tenemos que los dos miembros de la igualdad anterior son números reales y Log es la determinación principal del logaritmo. ■

Lema 3.3.7. *Sea* $s \in 1 + \mathbb{C}_+$ *con* $s = \sigma + it$*, entonces se cumple la desigualdad*

$$\zeta^3(\sigma)\left|\zeta(\sigma + it)\right|^4\left|\zeta(\sigma + 2it)\right| \geq 1.$$

Demostración. Tomamos $s \in 1 + \mathbb{C}_+$ de la forma $s = \sigma + it$. Del lema 3.3.6 tenemos

$$\zeta(\sigma + it) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{p_n^{-\sigma m}p_n^{-itm}}{m}\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-itm\ln(p_n)\right)}{m\ p_n^{\sigma m}}\right); \tag{3.12}$$

tomando el valor absoluto a la igualdad anterior obtenemos

$$\left|\zeta(\sigma + it)\right| = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(tm\ln(p_n)\right)}{m\ p_n^{\sigma m}}\right). \tag{3.13}$$

Puesto que $\sigma, \sigma + 2it \in 1 + \mathbb{C}_+$, aplicando las igualdades (3.12) y (3.13) respectivamente, tenemos

$$\zeta^3(\sigma)\left|\zeta(\sigma + it)\right|^4\left|\zeta(\sigma + 2it)\right| = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{3 + 4\cos\left(tm\ln(p_n)\right) + +\cos\left(2tm\ln(p_n)\right)}{m\ p_n^{\sigma m}}\right).$$

Finalmente, aplicando la identidad trigonométrica $2(1 + \cos(\theta))^2 = 3 + 4cos(\theta) + \cos(2\theta) \geq 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$ a la igualdad anterior, el resultado se sigue.

■

Teorema 3.3.8 (Hadamard-de la Vallée-Poussin)**.** *La función ζ no se anula en las rectas $i\mathbb{R}$ y $1 + i\mathbb{R}$.*

Demostración. Por la proposición 3.3.5 basta ver que la función ζ no se anula en $i\mathbb{R} + 1$. Supongamos que existe $\rho \in 1 + i\mathbb{R}$ un cero de la función ζ de la forma $\rho = 1 + it$ (*i.e.* $\zeta(1 + it) = 0$). Observemos que necesariamente $t \neq 0$, pues $s = 1$ es el polo de la función ζ. Ahora, tomamos $\sigma > 0$, entonces podemos reescribir la desigualdad del lema 3.3.7 como

$$((\sigma - 1)\zeta(\sigma))^3\left|\frac{\zeta(\sigma + it) - \zeta(1 + it)}{\sigma - 1}\right|^4\left|\zeta(\sigma + 2it)\right| \geq \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Si hacemos $\sigma \to 1^+$ notemos lo siguiente: el primer miembro del lado izquierdo tiende a 1, pues se está cancelando el polo $s = 1$ de la función ζ cuyo residuo es 1, el segundo miembro es la derivada de la función ζ en ρ, la cual existe por ser una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y el tercer miembro tiende claramente a $\zeta(1 + 2it)$, entonces tenemos que

$$\left|\zeta'(1 + it)\right|^4\left|\zeta(1 + 2it)\right| \geq \infty.$$

Lo anterior es una contradicción, pues las cantidades del lado izquierdo son finitas. Por lo tanto no existen ceros en $1 + i\mathbb{R}$.

■

Notemos que si hay ceros distintos de los triviales, estos se deben encontrar en la región $\mathcal{F}$. Dichos ceros son llamados los *ceros no triviales* de la función ζ. Analizar el comportamiento de los ceros en la región $\mathcal{F}$ es actualmente un problema abierto en matemáticas. El teorema siguiente, debido a Hardy, nos habla un poco sobre su distribución.

Teorema 3.3.9 (Hardy)**.** *Existen una infinidad de ceros de la función ζ en la recta $1/2 + i\mathbb{R}$.*

Una prueba a este teorema se encuentra en [24]

El estudio de los ceros de la función ζ en la línea crítica $1/2 + i\mathbb{R}$ es de gran importancia en la matemática y es de ahí donde surge la famosa conjetura de Riemann.

Hipótesis (Riemann)**.** *Todos los ceros no triviales de la función ζ se encuentran en la recta* $1/2 + i\mathbb{R}$.

Veamos una primera equivalencia a la hipótesis de Riemann.

Proposición 3.3.10. *La hipótesis de Riemann es cierta si y sólo si* $1/\zeta \in \mathcal{H}\left(1/2 + \mathbb{C}_+\right)$.

Demostración. Si la hipótesis Riemann es cierta, la función ζ es libre de ceros en $1/2 + \mathbb{C}_+$, entonces la función $1/\zeta$ es holomorfa en $(1/2 + \mathbb{C}_+) \setminus \{1\}$; al ser continua en todo $1/2 + \mathbb{C}_+$, por el lema de Goursat, tenemos que es holomorfa en todo $1/2 + \mathbb{C}_+$. Ahora, si $1/\zeta \in \mathcal{H}\left(1/2 + \mathbb{C}_+\right)$, es claro que ζ no puede anularse en $1/2 + \mathbb{C}_+$. ∎

La hipótesis de Riemann es de gran importancia para la teoría de números, en particular para la distribución de los números primos. Dicha conexión, viene a través del teorema de los números primos. Para ver esta relación, notemos primero como la función ζ interacciona con el teorema de los números primos; para esto hagamos la siguiente definición.

Notación 3.3.11 (Notación de Landau)**.** *Sea $g(x)$ una función positiva, definida para todo x real. Sea $f(x)$ una función real o compleja.*

1. *Decimos que $f(x) = O\left(g(x)\right)$, si existen $x_0, C > 0$ tales que*
$$\left|f(x)\right| \leq Cg(x) \qquad \forall x \geq x_0.$$
2. *Decimos que $f(x) = o\left(g(x)\right)$, si*
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
3. *Decimos que $f(x) \sim g(x)$, si*
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Teorema 3.3.12 (Teorema de los números primos)**.** *Sea $\pi(x)$ el número de primos no mayores que x. Entonces se cumple la siguiente relación asintótica*
$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}.$$
Una demostración a este teorema se puede encontrar en [1].

La prueba a dicho teorema, se basa fuertemente en el teorema 3.3.8, esto nos muestra la relación que existe entre la distribución de los ceros de la función ζ y la distribución de números primos. Una versión mejorada del teorema de los números primos nos dice que existe $c > 0$ tal que
$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x \exp\left(-c\sqrt{\ln(x)}\right)\right) \qquad x \geq 2$$
donde la función li es conocida como logaritmo integral y se define como
$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \qquad x \geq 2.$$

La importancia de la hipótesis de Riemann radica en mejorar la aproximación anterior, esto se refiere a que se puede encontrar un término de error mucho mejor al teorema de los números primos. Este resultado se debe Koch:

Teorema 3.3.13 (Koch)**.** *La hipótesis de Riemann es cierta si y solo si*

$$\pi(x) = \operatorname{li}(x) + O\left(\sqrt{x}\ln(x)\right) \qquad x \geq 2.$$

Una demostración a este teorema se puede encontrar en [5]. Donde la constante en la aproximación anterior es absoluta.

Capítulo 4

Espacios de Hardy en el semiplano

“Si me despertara después de haber dormido durante mil años, mi primera pregunta sería: ¿Se ha probado la hipótesis de Riemann?”

David Hilbert

En este capítulo estudiaremos los espacios de Hardy definidos en algunos semiplanos complejos; veremos que existe una isometría entre estos y los espacios de Hardy definidos en el disco unitario. Notaremos que de cierta forma podemos ver a la función ζ como elemento de estos espacios. Finalmente, veremos como se traduce de manera natural el teorema de Beurling en estos espacios y como esto se relaciona con la hipótesis de Riemann.

4.1. Construcción y propiedades generales

En esta sección estudiaremos los espacios de Hardy cuyo dominio son los semiplanos $\mathbb{C}^+$ y $\mathbb{C}_+$. Veremos como se relacionan con los espacios de Hardy $H^2(\mathbb{D})$. Iniciemos recordando un par de mapeos conformes que nos ayudarán a definir dichos espacios.

Teorema 4.1.1. *Consideremos los siguiente mapeos del disco a los semiplanos $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^+$ y $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_+$ tales que*

$$\omega(z) = i\frac{1+z}{1-z}, \qquad \psi(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

Entonces ω y ψ son mapeos conformes.

Una prueba de este teorema se puede encontrar en [14].

Observación 4.1.2. *Notemos lo siguiente:*

1. *Los mapeos inversos de ω y ψ, están dados por $\omega^{-1} : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{D}$ y $\psi^{-1} : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{D}$ con*

$$\omega^{-1}(s) = \frac{s-i}{s+i}, \qquad \psi^{-1}(s) = \frac{s-1}{s+1}.$$

2. *Si extendemos estos mapeos a las fronteras, tenemos una biyección entre los conjuntos $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ y $\mathbb{R}$, $i\mathbb{R}$. Esta biyección está dada por las funciones $\Omega : \mathbb{R} \to \mathbb{D} \setminus \{1\}$ y $\Psi : i\mathbb{R} \to \mathbb{D} \setminus \{1\}$ dadas por*

$$\Omega(x) = \frac{x-i}{x+i}, \qquad \Psi(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

3. *Existe una relación entre dichos mapeos: si consideramos la función $\rho : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}_+$ dada por $\rho(z) = -iz$ (rotar por $-\pi/2$) la cual es claramente un mapeo conforme, se tiene que $\psi = \rho \circ \omega$.*

Teorema 4.1.3. *Los espacios $L^2(\mathbb{T})$ y $L^2(\mathbb{R})$ son isomorfos como espacios vectoriales e isométricos como espacios métricos.*

Demostración. Definimos la siguiente función $U : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{R})$ dada de la siguiente manera: sea $f \in L^2(\mathbb{T})$ entonces para toda $x \in \mathbb{R}$

$$U(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)} f \circ \Omega(x).$$

Notemos que debido a la observación 4.1.2 la función $U(f)$ está bien definida en $\mathbb{R}$. Es claro que la función U es lineal. Veamos que está bien definida en su imagen: si consideramos el cambio de variable dado por el difeomorfismo $\Omega : \mathbb{R} \to \mathbb{D} \setminus \{1\}$, tenemos que $\left|J(x)\right| = \frac{2}{x^2+1}$ y así

$$\int_{\mathbb{R}} \left|U(f)(x)\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left|J(x)\right| \left|f \circ \Omega(x)\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f(\exp(i\theta))\right|^2 d\theta < \infty;$$

por lo tanto tenemos que $U(f) \in L^2(\mathbb{R})$. La igualdad anterior nos dice que $\left\|U(f)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{T})}$, por lo que U es una isometría y por ende es inyectiva. Basta ver que es suprayectiva; tomamos $g \in L^2(\mathbb{R})$ y consideramos la función

$$f(z) = \frac{2i\sqrt{\pi}}{1-z} g \circ \Omega^{-1}(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{T};$$

notemos que esta función está bien definida salvo un conjunto de medida cero y que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f(\exp(i\theta))\right|^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left|J^{-1}(\exp(i\theta))\right| \left|g \circ \Omega^{-1}(\exp(i\theta))\right|^2 d\theta = \int_{\mathbb{R}} \left|f(x)\right|^2 dx < \infty,$$

por lo tanto $f \in L^2(\mathbb{T})$ y claramente $U(f) = g$.

■

Observación 4.1.4. *Definamos las funciones $u : H^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ y $v : H^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$ dadas de la siguiente manera: sea $f \in H^2(\mathbb{D})$, entonces para toda $s \in \mathbb{C}^+$*

$$u(f)(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(s+i)} f \circ \omega^{-1}(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(s+i)} f\left(\frac{s-i}{s+i}\right),$$

y para toda $s \in \mathbb{C}_+$

$$v(f)(s) = u(f) \circ \rho^{-1}(s) = \frac{1}{i\sqrt{\pi}(s+1)} f \circ \psi^{-1}(s) = \frac{1}{i\sqrt{\pi}(s+1)} f\left(\frac{s-1}{s+1}\right).$$

El teorema 4.1.1 implica que $u(f) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ y que $v(f) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$; por lo tanto están bien definidas. Más aún, los teoremas 2.1.5, 4.1.3 y la observación 4.1.2 implican que u y v son biyecciones sobre su imagen. Así podemos hacer la siguiente definición.

Definición 4.1.5. *Definimos los espacios de Hardy sobre los semiplanos $\mathbb{C}^+$ y $\mathbb{C}_+$ como*

$$H^2(\mathbb{C}^+) := u\left[H^2(\mathbb{D})\right], \qquad H^2(\mathbb{C}_+) := v\left[H^2(\mathbb{D})\right].$$

Observación 4.1.6. *Notemos que podemos relacionar los espacios de Hardy del semiplano a través del mapeo ρ dado en la observación 4.1.2 de la siguiente manera*

$$H^2(\mathbb{C}_+) = \left\{ f \circ \rho^{-1} \ : \ f \in H^2(\mathbb{C}^+) \right\} = \left\{ g \ : \ g \circ \rho \in H^2(\mathbb{C}^+) \right\}.$$

Intuitivamente, el teorema 4.1.3 y la observación 4.1.4 nos dicen que las funciones de los espacios $H^2(\mathbb{C}^+)$ y $H^2(\mathbb{C}_+)$ son funciones holomorfas en sus respectivos dominios las cuales son cuadrado integrables en $\mathbb{R}$ y en $i\mathbb{R}$ respectivamente; esto es si tomamos $f \in H^2(\mathbb{C}^+)$ y $g \in H^2(\mathbb{C}_+)$, entonces

$$\lim_{y\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x+iy) \right|^2 dx < \infty, \qquad \lim_{x\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| g(x+iy) \right|^2 dy < \infty. \tag{4.1}$$

La teoría desarrollada en los capítulos 1 y 2 se puede imitar para estos espacios de Hardy; sin embargo en este capítulo todos los resultados que necesitaremos de la teoría en $H^2(\mathbb{D})$ para los espacios $H^2(\mathbb{C}^+)$ y $H^2(\mathbb{C}_+)$ los heredaremos a través de los mapeos dados en la observación 4.1.4. Uno de estos resultados es el teorema de factorización de Smirnov, para lo cual hacemos la siguiente definición.

Definición 4.1.7 (Función interior)**.** *Decimos que una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ (resp. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$) es interior en $H^2(\mathbb{C}^+)$ (resp. $H^2(\mathbb{C}_+)$) si la función $f \circ \omega$ (resp. $f \circ \psi$) es interior en $H^2(\mathbb{D})$.*

Proposición 4.1.8. *Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ (resp. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$) una función interior en $H^2(\mathbb{C}^+)$ (resp. $H^2(\mathbb{C}_+)$), entonces se cumple en c.t.p. de $\mathbb{R}$ (resp. $i\mathbb{R}$) que*

$$\lim_{y\to 0} \left| f(x+iy) \right| = 1 \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x\to 0} \left| f(x+iy) \right| = 1 \right).$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ una función interior en $H^2(\mathbb{C}^+)$, entonces por definición la función $f \circ \omega$ es interior en $H^2(\mathbb{D})$, por lo que en c.t.p. de $[-\pi, \pi]$ se tiene $\left| (f \circ \omega)^*(\exp(i\theta)) \right| = 1$; de la observación 4.1.2 tenemos que en c.t.p. de $\mathbb{R}$ se cumple

$$\lim_{y\to 0} \left| f(x+iy) \right| = 1.$$

Análogamente se prueba para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$ función interior en $H^2(\mathbb{C}_+)$. ∎

Observación 4.1.9. *Notemos que una función interior en $H^2(\mathbb{C}^+)$, no necesariamente cumple que $f \in H^2(\mathbb{C}^+)$. En efecto, consideramos la función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ tal que $f(s) = \exp(is)$. Es una función interior en $H^2(\mathbb{C}^+)$, pues la función*

$$f \circ \omega(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1} \right),$$

es la función interior singular S_{δ_0} dada en la observación 2.2.5. Notemos que $S_{\delta_0} \in H^2(\mathbb{D})$, en cambio la función $f \notin H^2(\mathbb{C}^+)$, pues no es cuadrado integrable en $\partial\mathbb{C}^+$. Esta diferencia entre los espacios de Hardy en el disco y en el semiplano se debe a que en $L^2(\mathbb{T})$ la medida es finita pero en $L^2(\mathbb{R})$ no lo es.

Definición 4.1.10 (Función exterior)**.** *Decimos que una función $f \in H^2(\mathbb{C}^+)$ (resp. $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$) es exterior, si la función $u^{-1}(f)$ (resp. $v^{-1}(f)$) es exterior en $H^2(\mathbb{D})$.*

Con estas definiciones, podemos probar la descomposición canónica de Smirnov para funciones en los espacios $H^2(\mathbb{C}^+)$ y $H^2(\mathbb{C}_+)$. Pero antes veamos la siguiente observación.

Observación 4.1.11. *Sea $f \in H^2(\mathbb{C}^+)$ y $b \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ una función interior en $H^2(\mathbb{C}^+)$. Aplicando el mapeo u, tenemos que $g := u^{-1}(f) \in H^2(\mathbb{D})$ y que $B := b \circ \omega \in H^2(\mathbb{D})$ es una función interior. Puesto que $\left| B^* \right| = 1$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$, tenemos $Bg \in H^2(\mathbb{D})$; al aplicar de nueva cuenta u concluimos que $bf \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$. Más aún tenemos que $u^{-1}(bf) = Bg = b \circ \omega\, u^{-1}(f)$. En $H^2(\mathbb{C}_+)$ se tiene un resultado análogo.*

Teorema 4.1.12 (Descomposición canónica de Smirnov)**.** *Sea $f \in H^2(\mathbb{C}^+)$ (resp. $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$), entonces existen únicas $I_f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ (resp. $I_f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$) función interior en $H^2(\mathbb{C}^+)$ (resp. $H^2(\mathbb{C}_+)$) y $O_f \in H^2(\mathbb{C}^+)$ (resp. $O_f \in H^2(\mathbb{C}_+)$) función exterior tales que $f = I_f O_f$.*

Demostración. Tomamos $f \in H^2(\mathbb{C}^+)$, entonces por la biyección dada en la observación 4.1.4, tenemos que existe $g \in H^2(\mathbb{D})$ tal que $f = u(g)$. Por el teorema de descomposición canónica de Smirnov en $H^2(\mathbb{D})$, tenemos que existe $I_g \in H^2(\mathbb{D})$ función interior y $O_g \in H^2(\mathbb{D})$ función exterior tales que $g = I_g O_g$, por lo que $f = u(g) = I_g \circ \omega^{-1} u(O_g)$ (observación 4.1.11). Así, tomando $I_f = I_g \circ \omega^{-1}$ y $O_f = u(O_g)$ el resultado se sigue. La unicidad se hereda del teorema en $H^2(\mathbb{D})$ y la biyectividad de u. El caso $H^2(\mathbb{C}^+)$ es análogo. ■

Finalmente veremos como heredar el teorema de Beurling a los espacios del Hardy $H^2(\mathbb{C}^+)$ y $H^2(\mathbb{C}_+)$. Aunque podemos estudiar los subespacios invariantes bajo el operador deslizamiento S (observación 2.3.11) en ellos, notaremos que los espacios se adaptan naturalmente a este teorema son los invariantes bajo la multiplicación de cierta exponencial.

Notación 4.1.13. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, sea $Y \subseteq \mathcal{H}(U)$ y $f \in \mathcal{H}(U)$, entonces definimos*

$$fY := \{fg \ : \ g \in Y\};$$

en particular si $q(z) = z$, haremos $qY = zY$.

Lema 4.1.14. *Sea $f \in H^2(\mathbb{D})$ entonces se tiene que $fH^\infty(\mathbb{D}) \subset S_f$ donde $S_f = span\left((S^n(f))_{n\geq 0}\right)$ (S denota el operador deslizamiento dado en la observación 2.3.11).*

Demostración. Notemos que con la notación 2.3.2, tenemos que $S_f = \operatorname{span}\left((q^n f)_{n\geq 0}\right)$ y así $S_f = \overline{f\mathcal{P}(\mathbb{D})}$. Entonces basta ver que $(f\mathcal{P}(\mathbb{D}))^\perp \subset (fH^\infty(\mathbb{D}))^\perp$. Tomamos $g \in (f\mathcal{P}(\mathbb{D}))^\perp$, entonces $\langle g, fp\rangle = 0$ para todo $p \in \mathcal{P}(\mathbb{D})$ que por definición es

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overline{g^*(\exp(i\theta))} f^*(\exp(i\theta))\, p(\exp(i\theta))\, d\theta = 0 \qquad \forall\ p \in \mathcal{P}(\mathbb{D}). \tag{4.2}$$

Es claro que $\overline{g} \in H^2(\mathbb{D})$, entonces por la desigualdad de Hölder tenemos que $\overline{g}f \in H^1(\mathbb{D})$. Luego, sea $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ y sean $(\sigma_n(h^*))_{n\geq 0}$ las sumas de Féjer de $h^* \in L^\infty(\mathbb{T})$. Como la serie de Féjer de h^* converge a h^* en $L^\infty(\mathbb{T})$, tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(h)(\exp(i\theta))\, v^*(\exp(i\theta))\, d\theta \to \int_{-\pi}^{\pi} h^*(\exp(i\theta))\, v^*(\exp(i\theta))\, d\theta \qquad \forall\ v \in H^1(\mathbb{D}); \tag{4.3}$$

en particular para $\overline{g}f$. Así de la ecuación (4.2) y del límite (4.3) se sigue que $\langle g, fh\rangle = 0$ para toda $h \in H^\infty(\mathbb{D})$, entonces $g \in (fH^\infty(\mathbb{D}))^\perp$ y el resultado se sigue. ■

Lema 4.1.15. *Sea $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, definimos la función $s_t : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ como*

$$s_t = \exp\left(t\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Sea $F \subseteq H^2(\mathbb{D})$ un subespacio cerrado, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *$zF \subset F$;*

2. *$s_t F \subset F$ para todo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Notamos que la condición 1) *nos dice que F es un subespacio invariante respecto a S.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Si consideramos $\mu = t\delta_0$, de la observación 2.2.5 tenemos que s_t es una función interior singular y así en particular $s_t \in H^\infty(\mathbb{D})$. Ahora tomando $f \in F$ por el lema 4.1.14 tenemos que $s_t f \in S_f$. Por hipótesis F es un subespacio invariante respecto a S y como $f \in F$, entonces $S_f \subseteq F$ (pues es el subespacio invariante a S más pequeño que contiene a f) y se sigue que $s_t f \in F$.
2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que $s_t F \subset F$ para todo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Un cálculo directo nos da que $r_t F \subset F$ para todo $t \in \mathbb{R}_{>0}$, donde

$$r_t(z) = \frac{s_t(z) - 1 + t}{s_t(z) - 1 - t} \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Ahora, notemos que para todo $\xi \in \mathbb{T}$ se cumple que $(\xi+1)/(\xi-1) \in i\mathbb{R}$ (usando el mapeo ψ); así tenemos que $\Re(1 - s_t(\xi)) \geq 0$ y más aún (de nueva cuenta utilizando el mapeo ψ) que $r_t(\xi) \in \mathbb{D}$, por lo cual $\left|r_t(\xi)\right| \leq 1$. Utilizando el desarrollo de Taylor de exp, es fácil ver que para t suficientemente pequeña se tiene que $\exp(t\omega) - 1 = t\omega + o(t)$ para toda $\omega \in \mathbb{C}$ (ver notación 3.3.11). Utilizando lo anterior en r_t, obtenemos que para t suficientemente pequeña se cumple que $r_t(\xi) = \xi + o(1)$ para casi toda $\xi \in \mathbb{T}$. Finalmente, considerando la sucesión $(r_t)_{t\in\mathbb{R}_{>0}} \subset F$ tenemos que esta cumple: $r_t(\xi) \to \xi$ cuando $t \to 0$ y que $\left|r_t(\xi)\right| \leq 1$ para casi toda $\xi \in \mathbb{T}$; entonces por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue para toda $f \in F$ se cumple que $\left\|r_t f - qf\right\|_2 \to 0$ cuando $t \to 0$, por lo cual concluimos que $qf \in F$, y así $zF \subset F$. ■

Corolario 4.1.16. *Sea $f \in H^2(\mathbb{D})$, si definimos $B_f = span\left((s_t f)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}\right)$, entonces $B_f = S_f$.*

Demostración. Basta hacer notar que B_f cumple $s_t B_f \subset B_f$ para todo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y el resultado es inmediato del lema 4.1.15. ■

Finalmente veremos cual es la forma más natural de traducir el teorema de Beurling a los espacios de Hardy en el semiplano.

Teorema 4.1.17 (Lax)**.** *Sea $E \subseteq H^2(\mathbb{C}^+)$ (resp. $E \subseteq H^2(\mathbb{C}_+)$) un subespacio cerrado, definamos para toda $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ la función $e_t(s) := \exp(its)$ (resp. $e_t(s) := \exp(-ts)$) para toda $s \in \mathbb{C}^+$ (resp. $s \in \mathbb{C}_+$), entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$e_t E \subset E$ para todo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;*
2. *Existe $\theta \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ (resp. $\theta \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_+)$) función interior en $H^2(\mathbb{C}^+)$ (resp. $H^2(\mathbb{C}_+)$) tal que $E = \theta H^2(\mathbb{C}^+)$ (resp. $E = \theta H^2(\mathbb{C}_+)$).*

Demostración. Basta probar el teorema para el caso $H^2(\mathbb{C}^+)$, el caso $H^2(\mathbb{C}_+)$ es análogo.
1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $e_t E \subset E$ para toda $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, entonces del mapeo $u : H^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ tenemos que $u^{-1}[e_t E] \subset u^{-1}[E]$. Notemos que para toda $f \in E$ se tiene que

$$u^{-1}(e_t f)(z) = \frac{2i\sqrt{\pi}}{1-z} e_t\left(i\frac{1+z}{1-z}\right) f\left(i\frac{1+z}{1-z}\right) = s_t(z) u^{-1}(f)(z) \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Así, tenemos que $s_t u^{-1}[E] \subset u^{-1}[E]$ para toda $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y por el lema 4.1.15 obtenemos que $u^{-1}[E]$ es un subespacio invariante respecto a S. Ahora, por el teorema de Beurling, existe $I \in H^2(\mathbb{D})$ función interior tal que $u^{-1}[E] = I H^2(\mathbb{D})$; finalmente al aplicar el mapeo u y la observación 4.1.11 tenemos que $E = \theta H^2(\mathbb{C}^+)$ donde $\theta = I \circ \omega^{-1}$ (la función interior buscada).
2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que $E = \theta H^2(\mathbb{C}^+)$ para alguna $\theta \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ función interior en $H^2(\mathbb{C}^+)$. Aplicando el mapeo u y la observación 4.1.11 obtenemos que $u^{-1}[E] = IH^2(\mathbb{D})$ con $I = \theta \circ \omega$ función interior en $H^2(\mathbb{D})$. Por el teorema de Beurling, tenemos que $u^{-1}[E]$ es un subespacio invariante respecto a S. Ahora,

por el lema 4.1.15 tenemos que $s_t u^{-1}[E] \subset u^{-1}[E]$ para toda $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$; aplicando u de nueva cuenta y considerando que $st = e_t \circ \omega$ tenemos que $e_t E \subset E$ para toda $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. ■

Teorema 4.1.18. *Sea $f \in H^2(\mathbb{C}^+)$ (resp. $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$) con $f = I_f O_f$ la descomposición canónica de Smirnov como en el teorema 4.1.12. Definamos $E_f = span\left((e_t f)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}\right)$ donde $e_t(s) := \exp(its)$ (resp. $e_t(s) := \exp(-ts)$) para toda $s \in \mathbb{C}^+$ (resp. $s \in \mathbb{C}_+$). Entonces $E_f = I_f H^2(\mathbb{C}^+)$ (resp. $E_f = I_f H^2(\mathbb{C}_+)$).*

Demostración. Sea $f \in H^2(\mathbb{C}^+)$ con $f = I_f O_f$. Aplicando el mapeo u, tenemos que $g := u^{-1}(f) = (I_f \circ \omega) u^{-1}(O_f)$; entonces como $g \in H^2(\mathbb{D})$, de la unicidad de la descomposición canónica de Smirnov y del teorema 2.3.17 obtenemos que $S_g = I H^2(\mathbb{D})$ donde $I = I_f \circ \omega$. Ahora, del corolario 4.1.16 tenemos que $B_g = I H^2(\mathbb{D})$; aplicando u de nueva cuenta y notando que $u(s_t g) = e_t f$ para toda $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tenemos $E_f = I_f H^2(\mathbb{C}^+)$. El caso $H^2(\mathbb{C}_+)$ es análogo. ■

Corolario 4.1.19. *Sea $f \in H^2(\mathbb{C}^+)$ (resp. $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$) entonces f es una función exterior si y solo si $E_f = H^2(\mathbb{C}^+)$ (resp. $E_f = H^2(\mathbb{C}_+)$). Donde E_f es como en el teorema 4.1.18.*

Demostración. Basta probarlo para $H^2(\mathbb{C}^+)$, el caso $H^2(\mathbb{C}_+)$ es análogo.
$\Rightarrow$ Sea $f \in H^2(\mathbb{C}^+)$ una función exterior. Por definición, $g := u^{-1}(f) \in H^2(\mathbb{D})$ es una función exterior; por el corolario 2.3.18 tenemos que $S_g = H^2(\mathbb{D})$ y del corolario 4.1.16 obtenemos que $B_g = H^2(\mathbb{D})$. Finalmente aplicando el mapeo u, se obtiene que $E_f = H^2(\mathbb{C}^+)$.
$\Leftarrow$ Supongamos que $E_f = H^2(\mathbb{C}^+)$. Aplicando el mapeo u y el corolario 4.1.16, tenemos que $S_g = H^2(\mathbb{D})$ con $g = u^{-1}(f)$. Ahora, por el corolario 2.3.18 tenemos que g es una función exterior, por lo cual f es una función exterior en $H^2(\mathbb{C}^+)$. ■

4.2. Los teoremas de Paley-Wiener

En esta sección estudiaremos la relación que existe entre los espacios de Hardy en el semiplano $H^2(\mathbb{C}^+)$ y $H^2(\mathbb{C}_+)$ y los espacios $L^2(\mathbb{R}^+)$ y $L^2\left((0,1), \frac{dy}{y}\right)$, esta relación está dada por la transformada de Fourier y de Mellin respectivamente, a estos resultados se les conoce como los teoremas de Paley-Wiener.

Lema 4.2.1. *Sea $\lambda \in \mathbb{D}$, definimos la función $f_\lambda : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ como $f_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}$, entonces*

$$H^2(\mathbb{D}) = span_{L^2(\mathbb{T})}\left(f_\lambda \ : \lambda \in \mathbb{D}\right).$$

Demostración. Notemos que el resultado tiene sentido por el teorema 2.1.5. Es claro que $f_\lambda \in L^2(\mathbb{T})$ para toda $\lambda \in \mathbb{D}$.
$\supseteq$ Basta ver que las funciones generadoras f_λ están en $H^2(\mathbb{D})$ para toda $\lambda \in \mathbb{D}$. Por el teorema 2.1.11 basta ver que los coeficientes de Fourier negativos de f_λ se anulan. Así para todo $n \in \mathbb{Z}$ un cálculo directo nos da

$$\widehat{f_\lambda}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(-in\theta)}{1-\overline{\lambda}\exp(i\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^{-n-1}}{1-\overline{\lambda}z} dz$$

donde $\gamma(\theta) = \exp(i\theta)$. Puesto que para $n \in \mathbb{Z}^-$ el último integrando es una función holomorfa en $\overline{\mathbb{D}}$, por el teorema de Cauchy tenemos que $\widehat{f_\lambda}(n) = 0$; por lo que $f_\lambda \in H^2(\mathbb{D})$.
$\subseteq$ Basta ver que si $\langle f, f_\lambda \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 0$ para toda $\lambda \in \mathbb{D}$ necesariamente $f \equiv 0$. Un cálculo directo nos da

$$\langle f, f_\lambda \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\exp(i\theta))}{1-\lambda\exp(-i\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\lambda} dz$$

donde $\gamma(\theta) = \exp(i\theta)$. Como $\lambda \notin \gamma[-\pi,\pi]$, por la fórmula de Cauchy tenemos que $\langle f, f_\lambda\rangle_{L^2(\mathbb{T})} = f(\lambda)$. Ahora, si suponemos que para toda $\lambda \in \mathbb{D}$ se cumple que $\langle f, f_\lambda\rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 0$ entonces $f \equiv 0$. ∎

Lema 4.2.2. *Sea $\mu \in \mathbb{C}^+$, definimos la función $g_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como $g_\mu(x) = \frac{1}{x-\overline{\mu}}$, entonces*

$$H^2(\mathbb{C}^+) = span_{L^2(\mathbb{R})}\left(g_\mu \ : \mu \in \mathbb{C}^+\right).$$

Demostración. El resultado tiene sentido por el teorema 4.1.3. Ahora, si tomamos $\mu \in \mathbb{C}^+$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \left|g_\mu(x)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x+\Re(\mu))^2 + \Im(\mu)^2} < \infty,$$

por lo que $g_\mu \in L^2(\mathbb{R})$. Por el lema 4.2.1 y por el teorema 4.1.3 basta ver que pasa con los generadores f_λ bajo el mapeo $U : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{R})$. Tomamos $\lambda \in \mathbb{D}$, calculando la imagen de f_λ bajo U obtenemos que para toda $x \in \mathbb{R}$

$$U(f_\lambda)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)}\frac{1}{1-\overline{\lambda}(x-i)(x+i)^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-\overline{\lambda})}\frac{1}{x+i(1+\overline{\lambda})(1-\overline{\lambda})^{-1}}.$$

Haciendo $c_\lambda = \sqrt{\pi}(1-\overline{\lambda})$ y considerando el mapeo $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^+$ dado en 4.1.1, tenemos que

$$U(f_\lambda)(x) = \frac{1}{c_\lambda}\frac{1}{x-\overline{\omega(\lambda)}}.$$

Por lo tanto $U(f_\lambda) \in \operatorname{span}_{L^2(\mathbb{R})}\left(g_\mu \ : \mu \in \mathbb{C}^+\right)$ y el resultado se sigue. ∎

Lema 4.2.3. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}^+$, definimos la función $e_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como $e_\lambda(x) = \exp(i\lambda x)$, entonces*

$$L^2(\mathbb{R}^+) = span_{L^2(\mathbb{R})}\left(e_\lambda\chi_{\mathbb{R}^+} \ : \lambda \in \mathbb{C}^+\right).$$

Demostración. $\supseteq$ Sea $\lambda \in \mathbb{C}^+$, notemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \left|e_\lambda(x)\chi_{\mathbb{R}^+}(x)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^+} \exp\left(-2\Im(\lambda)x\right) dx < \infty;$$

entonces $e_\lambda\chi_{\mathbb{R}^+} \in L^2(\mathbb{R})$ y así $e_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^+)$.
$\subseteq$ Basta ver que si para toda $\lambda \in \mathbb{C}^+$ se cumple que $\langle f, e_\lambda\chi_{\mathbb{R}^+}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ entonces $f \equiv 0$. Así calculando dicho producto interno tenemos

$$\langle f, e_\lambda\chi_{\mathbb{R}^+}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{e_\lambda}(x)\chi_{\mathbb{R}^+}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\exp\left(-x\Im(\lambda)\right)\chi_{\mathbb{R}^+}(x)\exp\left(-ix\Re(\lambda)\right)dx.$$

Definimos para toda $x \in \mathbb{R}$ la función $g(x) = f(x)\exp\left(-x\Im(\lambda)\right)\chi_{\mathbb{R}^+}(x)$; dicha función cumple que $g \in L^2(\mathbb{R})$. Por la definición de transformada de Fourier (ver apéndice F) tenemos

$$\langle f, e_\lambda\chi_{\mathbb{R}^+}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{(2\pi)}\mathscr{F}(g)\left(\Im(\lambda)\right).$$

Ahora, si suponemos que para toda $\lambda \in \mathbb{C}^+$ se cumple que $\langle f, e_\lambda\chi_{\mathbb{R}^+}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 0$, entonces $\mathscr{F}(g)\left(\Im(\lambda)\right) = 0$. Entonces tenemos que $\mathscr{F}(g)(y) = 0$ para toda $y \in \mathbb{R}$; de lo cual tenemos que $g \equiv 0$ y así concluimos que $f \equiv 0$. ∎

Teorema 4.2.4 (Paley-Wiener)**.** *Se cumple que*

$$H^2(\mathbb{C}^+) = \mathscr{F}^{-1}\left[L^2(\mathbb{R}^+)\right].$$

Donde $\mathscr{F}$ denota la transformada de Fourier (ver apéndice F).

Demostración. El resultado tiene sentido por la definición 4.1.5. Ahora por los lemas 4.2.2 y 4.2.3 basta ver que

$$\operatorname{span}_{L^2(\mathbb{R})}\left(g_\mu \ : \mu \in \mathbb{C}^+\right) = \mathscr{F}^{-1}\left[\operatorname{span}_{L^2(\mathbb{R})}\left(e_\lambda \chi_{\mathbb{R}^+} \ : \lambda \in \mathbb{C}^+\right)\right].$$

Para esto, basta ver que sucede con los generadores; tomamos $\lambda \in \mathbb{C}^+$ y calculamos la transformada inversa de Fourier (ver apéndice F) de $e_\lambda \chi_{\mathbb{R}^+}$, así para todo $t \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\mathscr{F}^{-1}\left(e_\lambda \chi_{\mathbb{R}^+}\right)(t) = \int_{\mathbb{R}^+} \exp\left(i(\lambda + t)x\right) dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t+\lambda}. \tag{4.4}$$

Ahora, definimos $\mu := -\Re(\lambda) + i\Im(\lambda)$, es claro que $\mu \in \mathbb{C}^+$ y que $\overline{\mu} = -\lambda$; así reescribimos la igualdad (4.4) como

$$\mathscr{F}^{-1}\left(e_\lambda \chi_{\mathbb{R}^+}\right)(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t-\overline{\mu}}.$$

Así, tenemos que $\mathscr{F}^{-1}\left(e_\lambda \chi_{\mathbb{R}^+}\right) \in \operatorname{span}_{L^2(\mathbb{R})}\left(g_\mu \ : \mu \in \mathbb{C}^+\right)$. Como la transformada de Fourier es un isomorfismo isométrico (teorema de Plancherel F.0.5), el resultado se sigue.

■

Para el siguiente lema, vamos a considerar la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $\varphi(x) = \exp(-x)$, la cual claramente es un difeomorfismo. Y llamamos a su restricción $\varphi^+ := \varphi \restriction_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to (0,1)$.

Lema 4.2.5. *Se cumple que*

$$L^2(\mathbb{R}^+) = \left\{ g \circ \varphi^+ \ : \ g \in L^2\left((0,1), \frac{dy}{y}\right)\right\}.$$

Demostración. $\subseteq$ Tomamos $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ y hacemos $g = f \circ (\varphi^+)^{-1}$. Ahora por el teorema de cambio de variable para $(\varphi^+)^{-1}(y) = \ln(1/y)$, tenemos que

$$\int_{(0,1)} \left|g(y)\right|^2 \frac{dy}{y} = \int_{(0,1)} \left|f \circ \left(\varphi^+\right)^{-1}(y)\right|^2 \frac{dy}{y} = \int_{\mathbb{R}^+} \left|f(x)\right|^2 dx < \infty.$$

De lo anterior se sigue que $g \in L^2\left((0,1), \frac{dy}{y}\right)$ y así $g \circ \varphi^+ = f \in \left\{ g \circ \varphi^+ \ : \ g \in L^2\left((0,1), \frac{dy}{y}\right)\right\}$.

$\supseteq$ Sea $g \in L^2\left((0,1), \frac{dy}{y}\right)$, análogamente por el teorema de cambio de variable para $\varphi^+(x) = \exp(-x)$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \left|g \circ \varphi^+(x)\right|^2 dx = \int_{(0,1)} \left|g(y)\right|^2 \frac{dy}{y} < \infty$$

por lo que $g \circ \varphi^+ \in L^2(\mathbb{R}^+)$. ■

Notación 4.2.6. *Para el siguiente teorema haremos la siguiente convención. Consideraremos que*

$$L^2\left((0,1), \frac{dy}{y}\right) \subset L^2\left(\mathbb{R}^+, \frac{dy}{y}\right),$$

de la siguiente manera:

$$L^2\left((0,1), \frac{dy}{y}\right) = \left\{ f \in L^2\left(\mathbb{R}^+, \frac{dy}{y}\right) \quad : \quad supp(f) \subseteq [0,1]\right\}.$$

Teorema 4.2.7 (Paley-Wiener)**.** *Se cumple que*

$$H^2(\mathbb{C}_+) = \mathscr{M}\left[L^2\left((0,1), \frac{dy}{y}\right)\right].$$

Donde $\mathscr{M}$ es la transformada de Mellin dada por

$$\mathscr{M}(f)(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^+} f(y) y^z \frac{dy}{y} \qquad \forall\, z \in i\mathbb{R},$$

para toda $f \in L^1\left(\mathbb{R}^+, \frac{dy}{y}\right)$ (ver apéndice F).

Demostración. $\subseteq$ Sea $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$; por la observación 4.1.6 tenemos que $f \circ \rho \in H^2(\mathbb{C}^+)$. Por el teorema de Paley-Wiener 4.2.4, existe $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$ tal que $\mathscr{F}^{-1}(g) = f \circ \rho$; por otro lado el lema 4.2.5 garantiza que existe $h \in L^2\left((0,1), \frac{dy}{y}\right)$ tal que $g = h \circ \varphi^+$. Por lo tanto tenemos que $\mathscr{F}^{-1}(h \circ \varphi^+) = f \circ \rho$. Por otro lado, del teorema F.0.10 tenemos que para toda $f \in L^1\left(\mathbb{R}^+, \frac{dy}{y}\right)$, se cumple que

$$\mathscr{M}(f)(-it) = \mathscr{F}^{-1}(f \circ \varphi)(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Así obtenemos que $\mathscr{M}(h) \circ \rho = f \circ \rho$ y concluimos que $f = \mathscr{M}(h) \in \mathscr{M}\left[L^2\left((0,1), \frac{dy}{y}\right)\right]$.

$\supseteq$ Tomamos $f \in L^2\left((0,1), \frac{dy}{y}\right)$. Por el lema 4.2.5 tenemos que $f \circ \varphi^+ \in L^2(\mathbb{R}^+)$ y así por el teorema de Paley-Wiener 4.2.4 obtenemos que $\mathscr{F}^{-1}(f \circ \varphi^+) \in H^2(\mathbb{C}^+)$. Por otro lado del teorema F.0.10, se cumple que $\mathscr{F}^{-1}(f \circ \varphi^+) = \mathscr{M}(f) \circ \rho$. Finalmente de la observación 4.1.6 concluimos que $\mathscr{M}(f) \in H^2(\mathbb{C}_+)$. ∎

4.3. Algunas equivalencias a la hipótesis de Riemann

En esta sección se dará una interesante aplicación de los espacios de Hardy y del teorema de Beurling; dicha aplicación tiene que ver con dar algunas equivalencias a la hipótesis de Riemann. Para esto presentaremos los espacios de Hardy en el semiplano $1/2 + \mathbb{C}_+$, los cuales heredaran las propiedades ya estudiadas en la sección 1.

Definición 4.3.1. *Consideremos la función $\tau : \mathbb{C}_+ \to 1/2 + \mathbb{C}_+$ dada por $\tau(s) = 1/2 + s$.Entonces definimos el espacio de Hardy en el semiplano $1/2 + \mathbb{C}_+$ como*

$$H^2(1/2 + \mathbb{C}_+) := \left\{ f \circ \tau^{-1} \ : \ f \in H^2(\mathbb{C}_+) \right\}.$$

Observación 4.3.2. *Notemos lo siguiente:*

1. *Puesto que τ es una función entera se sigue que $H^2(1/2 + \mathbb{C}_+) \subset \mathscr{H}(1/2 + \mathbb{C}_+)$.*

2. *Al ser τ una transformación rígida, todos los resultados aplicables al espacio de Hardy $H^2(\mathbb{C}_+)$ se heredan al espacio de Hardy $H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$.*

3. *Equivalentemente podemos definir el espacio de Hardy en el semiplano $1/2 + \mathbb{C}_+$ como*

$$H^2(1/2 + \mathbb{C}_+) = \left\{ g \ : \ g \circ \tau \in H^2(\mathbb{C}_+) \right\}.$$

Es claro que el traslado del semiplano $\mathbb{C}_+$ sobre $1/2$ tiene que ver con la hipótesis Riemann, pues recordemos que esta establece que todos los ceros no triviales de la función ζ se encuentran en $1/2 + i\mathbb{R}$.

Observación 4.3.3. *Veamos como relacionar el espacios de Hardy en el disco $H^2(\mathbb{D})$ con el espacio de Hardy $H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$. Tomemos $f \in H^2(\mathbb{D})$; entonces por la observación 4.1.4 tenemos que $v(f) \in H^2(\mathbb{C}_+)$ y de la definición 4.3.1 se sigue que $v(f) \circ \tau^{-1} \in H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$. Explícitamente podemos ver esta relación como el mapeo $w : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$ tal que para toda $s \in 1/2 + \mathbb{C}_+$*

$$w(f)(s) = \frac{1}{i\sqrt{\pi}} \frac{1}{s + 1/2} f\left(\frac{s - 3/2}{s + 1/2}\right);$$

y el mapeo inverso $w^{-1} : H^2(1/2 + \mathbb{C}_+) \to H^2(\mathbb{D})$ tal que para toda $z \in \mathbb{D}$

$$w^{-1}(g)(z) = \frac{2\sqrt{\pi}i}{1 - z} g\left(\frac{1 + z}{1 - z} + \frac{1}{2}\right).$$

Definición 4.3.4. *Decimos que una función es interior (resp. exterior) en $H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$ si esta es interior (resp. exterior) en $H^2(\mathbb{C}_+)$.*

La definición anterior nos permite traducir los teoremas 4.1.12, 4.1.17, 4.1.18 y el corolario 4.1.19 al espacio de Hardy $H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$ de la siguiente manera:

Teorema 4.3.5 (Descomposición canónica de Smirnov)**.** *Sea $f \in H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$. Existen únicas $I_f \in \mathcal{H}(1/2 + \mathbb{C}_+)$ función interior en $H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$ y $O_f \in (1/2 + \mathbb{C}_+)$ función exterior tales que $f = I_f O_f$.*

Teorema 4.3.6 (Lax)**.** *Sea $E \subseteq H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$ un subespacio cerrado. Sea $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, definimos la función $e_t(s) := \exp\left(-(ts - t/2)\right)$ para toda $s \in 1/2 + \mathbb{C}_+$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$e_t E \subset E$ para todo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,*
2. *Existe $\theta \in \mathcal{H}(1/2 + \mathbb{C}_+)$ función interior en $H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$ tal que $E = \theta H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$.*

Las propiedades métricas se consideran respecto al espacio $L^2(1/2 + i\mathbb{R})$.

Teorema 4.3.7. *Sea $f \in H^2(1/2 + \mathbb{C}_+))$ y $f = I_f O_f$ la descomposición canónica de Smirnov como en el teorema 4.3.5. Definamos*

$$E_f := span_{L^2(1/2+i\mathbb{R})}\left((e_t f)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}\right).$$

Entonces $E_f = I_f H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$.

Corolario 4.3.8. *Sea $f \in H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$, entonces f es una función exterior si y solo si $E_f = H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$.*

La demostración a estos resultados es análoga a las pruebas de la sección 1, basta utilizar el mapeo τ. Notemos que en todos los casos la función e_t se puede tomar únicamente como $e_t(s) = \exp(-ts)$ para toda $s \in 1/2 + \mathbb{C}_+$, esto debido a que los los espacios donde los teoremas se aplican son subespacios vectoriales. A continuación veremos como introducir la función ζ en el espacio de Hardy $H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$; para esto estudiaremos un par de funciones auxiliares.

Proposición 4.3.9. *La función $a : 1/2 + \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ dada por $a(s) = 1/s$ es exterior en $H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$.*

Demostración. Consideramos la función $f(y) = \sqrt{2\pi y}$ con $y \in (0, 1)$. Puesto que

$$\int_0^1 \left|f(y)\right|^2 \frac{dy}{y} = 2\pi$$

tenemos que $f \in L^2\left((0,1), \frac{dy}{y}\right)$. Ahora, calculando su transformada de Mellin, obtenemos para toda $s \in i\mathbb{R}$ que

$$\mathscr{M}(f)(s) = \int_0^1 y^{s+1/2}\frac{dy}{y} = \frac{1}{s+1/2}.$$

Por el teorema de Paley-Wiener 4.2.7 tenemos que $\mathscr{M}(f) \in H^2(\mathbb{C}_+)$; como $a \circ \tau = \mathscr{M}(f)$, por la observación 4.3.2 se sigue que $a \in H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$. Ahora veamos que es exterior: por el mapeo dado en la observación 4.3.3 tenemos que para toda $z \in \mathbb{D}$

$$A(z) := w^{-1}(a)(z) = \frac{2\sqrt{\pi}i}{1-z}a\left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2}\right) = \frac{4\sqrt{\pi}i}{z+3},$$

donde $A \in H^2(\mathbb{D})$. Si consideramos su función recíproca

$$\left(\frac{1}{A}\right)(z) = \frac{z+3}{4\sqrt{\pi}i},$$

tenemos que claramente cumple que $1/A \in H^2(\mathbb{D})$; entonces por el teorema 2.2.16 tenemos que A es una función exterior en $H^2(\mathbb{D})$, lo que implica que a es una función exterior en $H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$. ■

Proposición 4.3.10. *La función $b : 1/2 + \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ dada por $b(s) = (s-1)/s$ es interior en $H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$.*

Demostración. La función b claramente cumple que $b \in \mathscr{H}(1/2 + \mathbb{C}_+)$. Basta ver que $b \circ \tau \circ \psi$ es una función interior en $H^2(\mathbb{D})$. Tomando $z \in \mathbb{D}$, un cálculo directo nos da

$$B(z) := (b \circ \tau \circ \psi)(z) = b\left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3z+1}{z+3}.$$

Si tomamos $\xi \in \mathbb{T}$, tenemos que

$$B(\xi) = \frac{3\xi + \xi\overline{\xi}}{\xi + 3} = \xi\frac{3+\overline{\xi}}{\xi+3};$$

de lo cual tenemos que para toda $\xi \in \mathbb{T}$ se cumple que $\left|B(\xi)\right| = 1$. Por lo tanto B es una función interior en $H^2(\mathbb{D})$ y por ende b es una función interior en $\mathscr{H}(1/2 + \mathbb{C}_+)$. ■

Teorema 4.3.11. *La función $\eta : 1/2 + \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ definida como*

$$\eta(s) = a(s)\,b(s)\,\zeta(s) = \frac{s-1}{s^2}\,\zeta(s),$$

(donde a y b son las funciones de las proposiciones 4.3.9 y 4.3.10 respectivamente) cumple que $\eta \in H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$.

Demostración. Sea $s \in \mathbb{C}_+$, entonces la función y^{s-1} es integrable en $(0,1)$; al ser ρ una función acotada, tenemos que la función $\rho(1/y)y^{s-1}$ es integrable en $(0,1)$. Ahora consideramos el difeomorfismo $\sigma : (0,1) \to \mathbb{R}^+$ dado por $\sigma(y) = 1/y$, así tenemos que $\left|J(y)\right| = 1/y^2$. Utilizando el teorema de cambio de variable obtenemos

$$\int_0^1 \rho\left(\frac{1}{y}\right)y^s\frac{dy}{y} = \int_1^\infty \rho(x)x^{-s-1}dx.$$

Usando lo anterior en el teorema 3.2.3 tenemos que

$$\frac{\zeta(s)}{s} = \frac{1}{s-1} - \int_0^1 \rho\left(\frac{1}{y}\right)y^s\frac{dy}{y} \qquad \forall\ s \in \mathbb{C}_+ \setminus \{1\}. \tag{4.5}$$

Ahora, si hacemos $r(y) := \sqrt{2\pi y}\rho(1/y)$, tenemos que $\sqrt{2\pi y}$ está en $L^2\left((0,1), \frac{dy}{y}\right)$ (ver demostración de la proposición 4.3.9); como para toda $y \in (0,1)$ se tiene $\left|\rho(1/y)\right| \leq 1$ tenemos que $r \in L^2\left((0,1), \frac{dy}{y}\right)$. Ahora, calculando su transformada de Mellin, obtenemos para toda $s \in i\mathbb{R}$

$$\mathscr{M}(r)(s) = \int_0^1 \rho\left(\frac{1}{y}\right) y^{s+1/2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{s - 1/2} - \frac{\zeta(s+1/2)}{s+1/2}.$$

Si hacemos $f(s) = 1/(s-1) + \zeta(s)/s$ tenemos que $\mathscr{M}(r) = f \circ \tau$; entonces por el teorema de Paley-Wiener 4.2.7 tenemos que $f \circ \tau \in H^2(\mathbb{C}_+)$ y por la observación 4.3.2 tenemos que $f \in H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$. Usando el mapeo $w : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$ dado en la observación 4.3.3 tenemos para toda $z \in \mathbb{D}$

$$w^{-1}(f)(z) = \frac{2\sqrt{\pi}i}{1-z} f\left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2}\right) = \frac{4\sqrt{\pi}i}{3z+1} - \frac{4\sqrt{\pi}i}{z+3}\zeta\left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2}\right),$$

donde $w^{-1}(f) \in H^2(\mathbb{D})$. Como la función $B(z) = (3z+1)/(z+3)$ es interior en $H^2(\mathbb{D})$ (proposición 4.3.10), tenemos que $Bw^{-1}(f) \in H^2(\mathbb{D})$ y es de la forma

$$Bw^{-1}(f)(z) = \frac{4\sqrt{\pi}i}{z+3} - 4\sqrt{\pi}i \frac{3z+1}{(z+3)^2}\zeta\left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2}\right).$$

Como la función $A(z) = (4\sqrt{\pi}i)/(z+3)$ está en $H^2(\mathbb{D})$ (proposición 4.3.9) si hacemos

$$g(z) = 4\sqrt{\pi}i \frac{3z+1}{(z+3)^2}\zeta\left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2}\right),$$

tenemos que $g \in H^2(\mathbb{D})$ (pues $H^2(\mathbb{D})$ es un espacio vectorial). Finalmente, utilizando nuevamente el mapeo w, un cálculo directo nos da para toda $s \in 1/2 + \mathbb{C}_+$

$$w(g)(s) = \frac{s-1}{s^2}\zeta(s);$$

de lo cual concluimos que $\eta = w(g) \in H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$.

$\blacksquare$

Observación 4.3.12. *Veamos intuitivamente la estructura de la función η:*

1. *La función ζ por si sola no puede estar en $H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$ por dos motivos, el primero se debe a que no es holomorfa en todo $1/2 + \mathbb{C}_+$, pues tiene un polo en $s = 1$ y la segunda es que se puede demostrar que no es cuadrado integrable en $1/2 + i\mathbb{R}$.*

2. *Para volverla cuadrado integrable, se elige una función exterior a tal que $a\zeta \in L^2(1/2 + i\mathbb{R})$. Usualmente se elige la función $a(s) = 1/s$.*

3. *Para volverla holomorfa se elige una función interior b que tenga la propiedad de remover su polo y así hacer que $b\zeta \in \mathscr{H}(1/2 + \mathbb{C}_+)$. Se elige que la función sea interior por el hecho de que al multiplicarla por una función cuadrado integrable, este producto vuelve a ser cuadrado integrable.*

4. *Estas funciones se eligen de tal forma que no aporten ceros. En nuestra elección particular es claro que la función a no tiene ceros, y el único cero de la función b remueve el polo de la función ζ. Entonces los ceros de la función ζ son los mismos de la función η.*

Estos resultados nos permiten reformular la hipótesis de Riemann de la siguiente manera:

Teorema 4.3.13. *La hipótesis de Riemann es cierta si y solo si la función $\eta \in H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$ es exterior.*

Demostración. $\Leftarrow$ Supongamos que η es una función exterior en $H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$ y que la hipótesis de Riemann no se cumple. Entonces existe $s_0 \in 1/2 + \mathbb{C}_+$ (específicamente en $-1 - \mathbb{C}_+ \cap 1/2 + \mathbb{C}_+$) tal que $\zeta(s_0) = 0$. En el teorema 4.3.11 mostramos que utilizando el mapeo $w : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$ tenemos que $w^{-1}(\eta) = g$ donde para toda $z \in \mathbb{D}$

$$g(z) = 4\sqrt{\pi}i\frac{3z+1}{(z+3)^2}\,\zeta\left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{\pi}i\frac{3z+1}{(z+3)^2}\,\zeta \circ \tau \circ \psi(z). \tag{4.6}$$

Como supusimos que η es una función exterior, por definición g es una función exterior en $H^2(\mathbb{D})$. Ahora, puesto que $\tau \circ \psi$ es un mapeo conforme entre $\mathbb{D}$ y $1/2 + \mathbb{C}_+$; existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $\tau \circ \psi(z_0) = s_0$, así tenemos

$$g(z_0) = 4\sqrt{\pi}i\frac{3z_0+1}{(z_0+3)^2}\,\zeta(s_0) = 0.$$

Lo anterior es una contradicción, pues al ser g una función exterior, esta no se puede anular en $\mathbb{D}$.
$\Rightarrow$ Supongamos que la hipótesis de Riemann se cumple. Queremos ver que la función η es exterior en $H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$; esto es ver que g es exterior en $H^2(\mathbb{D})$. Al considerar que la hipótesis de Riemann es cierta, tenemos que la función ζ no se anula en $1/2 + \mathbb{C}_+$; debido al mapeo conforme $\tau \circ \psi$ concluimos que $\zeta \circ \tau \circ \psi$ no se anula en $\mathbb{D}$. Para concluir que g no se anula en el disco basta revisar el punto $z = -1/3$; este cero dado por $3z + 1$ cancela al polo $z = 1$ de la función ζ, por lo tanto concluimos que g no se anula en $\mathbb{D}$. Ahora, por el teorema de descomposición canónica de Smirnov, tenemos que existe $c \in \mathbb{T}$ y una función interior singular $S_\mu \in H^2(\mathbb{D})$ tal que $g = cS_\mu O_g$. Notemos que $\zeta \circ \tau \circ \psi$ es holomorfa en $\mathbb{T} \setminus \{1\}$; entonces si S_μ no es trivial, necesariamente la medida singular μ de g debe estar situada en $\{1\}$. Así μ es de la forma $\mu = \alpha\delta_0$ para alguna $\alpha > 0$ y entonces

$$g(z) = c\exp\left(\alpha\frac{z+1}{z-1}\right)O_g(z). \tag{4.7}$$

Por un lado si en la ecuación (4.6) hacemos $z \to 1$, obtenemos que $g(1) = \sqrt{\pi}i$, y más aún como $\left|g^*\right| = \left|O_g^*\right|$ en c.t.p. de $\mathbb{T}$, tenemos que $O_g^*(1) < \infty$. Por otro lado si hacemos $z \to 1$ en la ecuación (4.7) tenemos que $g(z) \to \infty$, lo cual es una contradicción. Entonces necesariamente S_μ es trivial; por lo tanto $g = cO_g$, lo que implica que g es exterior (corolario 2.2.15). ■

Corolario 4.3.14. *La hipótesis de Riemann es cierta si y solo si $E_\eta = H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$.*

Demostración. Por el teorema 4.3.13 tenemos que la hipótesis de Riemann es cierta si y solo si la función $\eta \in H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$ es exterior y por el corolario 4.3.8 tenemos que esto pasa si y solo si $E_\eta = H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$.
■

Teorema 4.3.15. *Definamos $\sigma := a\,\zeta$. La hipótesis de Riemann es cierta si y solo si $a \in E_\sigma$.*

Demostración. La observación 4.3.12 nos dice que $\sigma = a\,\zeta \in L^2(1/2+i\mathbb{R})$, por lo cual $E_\sigma \subset L^2(1/2+i\mathbb{R})$ está bien definido (no se puede considerar como subconjunto de $H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$ puesto que σ tiene un polo en $s = 1$ heredado de la función ζ). Recordemos que definimos $\eta = a\,b\,\zeta$, así tenemos que $\eta = b\sigma$.
$\Rightarrow$ Supongamos que la hipótesis de Riemann se cumple. Por el corolario 4.3.14 tenemos que $E_\eta = H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$. Por la proposición 4.3.9 tenemos que $a \in H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$ y por la proposición 4.3.10 que $b \in \mathcal{H}(1/2 + \mathbb{C}_+)$ y es una función interior. La observación 4.1.11 afirma que $a\,b \in H^2(1/2 + \mathbb{C}_+)$, de lo cual $a\,b \in E_\eta$. Entonces existe una sucesión $(e_n)_{n\geq 0} \subset \operatorname{lin}\left((e_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}\right)$ tal que $e_n\eta \to a\,b$ cuando $n \to \infty$ en la norma de $L^2(1/2 + i\mathbb{R})$. Ahora como $|b| = 1$ en c.t.p. de $1/2 + i\mathbb{R}$, se sigue que $e_n\sigma \to a$ por lo tanto

$a \in E_\sigma$.
$\Leftarrow$ Supongamos que $a \in E_\sigma$. Queremos ver que la hipótesis de Riemann es cierta; por el corolario 4.3.14 basta ver que $E_\eta = H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$. Por la proposición 4.3.9 tenemos que $a \in H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$ es una función exterior, entonces por el corolario 4.3.8 obtenemos que $E_a = H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$. Es claro que E_σ cumple que $e_t E_\sigma \subset E_\sigma$ para toda $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Luego como E_a es el mínimo subespacio invariante bajo la multiplicación de e_t para toda $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ que contiene a a, se sigue que $E_a \subseteq E_\sigma$ (como subconjuntos de $L^2(1/2 + i\mathbb{R})$); así concluimos que $H^2(1/2+\mathbb{C}_+) \subseteq E_\sigma$. Puesto que $b \in \mathcal{H}(1/2+\mathbb{C}_+)$ es una función interior, por la observación 4.1.11 podemos hacer $b\,H^2(1/2+\mathbb{C}_+) \subseteq E_\eta$. Entonces notemos que $b\,H^2(1/2+\mathbb{C}_+) \subseteq H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$ es un subespacio de codimensión 1 que contiene a todos los elementos de $H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$ que tienen un cero en $s = 1$. Como $\eta \in E_\eta \subseteq H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$ y puesto η no se anula en $s = 1$, necesariamente $E_\eta = H^2(1/2+\mathbb{C}_+)$.
■

Apéndice A

Topología compacto-abierta

Veremos las principales propiedades de la topología-compacto abierta en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Definición A.0.1 (Topología compacto-abierta)**.** *Para todo $K \subseteq \mathbb{D}$ y $U \subseteq \mathbb{C}$, definimos los siguientes conjuntos,*

$$O(K, U) = \{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{D}) \, : \, f[K] \subset U \} .$$

Y la familia,

$$\mathcal{S} = \{ O(K, U) \, : \, K \subseteq \mathbb{D} \text{ es un subconjunto compacto y } U \in \tau_{\mathbb{C}} \} .$$

Definimos la topología compacto abierta τ_{ca} en $\mathcal{C}(\mathbb{D})$ como la topología generada por la subbase $\mathcal{S}$.

Una propiedad importante en la topología compacto-abierta es la que nos dice que las sucesiones convergentes en dicha topología son exactamente las sucesiones que convergen uniformemente en los subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.

Teorema A.0.2. *Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(\mathbb{D})$ y $f \in \mathcal{C}(\mathbb{D})$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$f_n \xrightarrow{\tau_{ca}} f$, esto es en la topología compacto-abierta,*

2. *Para todo $K \subset \mathbb{D}$ subconjunto compacto, $f_n \xrightarrow{u} f$ converge uniformemente en K.*

Veamos una de las propiedades más importantes del espacio de funciones continuas con dominio en el disco unitario.

Definición A.0.3. *Sea (V, τ) un espacio topológico vectorial. Decimos que es de Fréchet si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Es localmente convexo i.e. el origen (el neutro aditivo de V) posee una base local formada de conjuntos convexos,*

2. *Es completamente metrizable.*

Teorema A.0.4. *El espacio $(\mathcal{C}(\mathbb{D}), \tau_{ca})$ es un espacio de Fréchet. Y la topología inducida por su métrica coincide con la topología compacto-abierta τ_{ca}.*

Veamos que estas mismas propiedades las cumple el espacio de funciones holomorfas con dominio en el disco unitario.

Teorema A.0.5. *El subespacio $\mathcal{H}(\mathbb{D}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{D})$, es cerrado con la topología compacto-abierta y por ende es un espacio de Fréchet.*

Algunas pruebas a estos teoremas se pueden encontrar en [20].

Apéndice B

Fórmula de Jensen

Presentaremos la fórmula de Jensen, la cual ayuda a estudiar el comportamiento de los ceros de ciertas clases de funciones holomorfas.

Teorema B.0.1 (Desigualdad de Jensen)**.** *Sea μ una medida positiva sobre el espacio medible $(X, \mathscr{A})$ tal que $\mu(X) = 1$. Si f es una función real en $L^1(\mu)$, si $a < f(x) < b$ para todo $x \in X$ y si φ es una función convexa en (a, b), entonces*

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_x (\varphi \circ f)\, d\mu.$$

En la desigualdad de Jensen los casos $a = -\infty$ y $b = \infty$ no están excluidos.

Teorema B.0.2 (Fórmula de Jensen)**.** *Sea $R > 0$ y $f \in \mathscr{H}(B_R(0))$ con $f(0) \neq 0$ y sea $0 < r < R$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ los ceros de f en $\overline{B}_r(0)$ enumerados tomando en cuenta su multiplicidad, entonces*

$$\left|f(0)\right| \prod_{k=1}^{n} \frac{r}{|\alpha_k|} = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|f(r\exp(i\theta))\right| d\theta\right).$$

El siguiente resultado, caracteriza las funciones holomorfas en el disco de radio r que son continuas en su frontera y que no se anulan en ella a través de sus ceros.

Teorema B.0.3 (Fórmula de Poisson-Jensen)**.** *Sea $r > 0$, $f \in \mathscr{H}(B_r(0)) \cap \mathcal{C}^0\left(\overline{B}_r(0)\right)$, tal que f no se anula en $\partial B_r(0)$ y sean $\{a_k\}_{k=1}^n$ sus ceros en $B_r(0)$. Entonces*

$$f(z) = \alpha \prod_{k=1}^{n} \frac{r(a_k - z)}{r^2 - \overline{a}_k z} \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r\exp(i\theta) + z}{r\exp(i\theta) - z} \ln\left|f\left(r\exp(i\theta)\right)\right| d\theta\right) \qquad \forall z \in B_r(0);$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$.

Algunas pruebas a estos teoremas se pueden encontrar en [17] y en [19].

Apéndice C

Derivada de medidas

Veremos la definición de la derivada de medidas y algunas de sus propiedades elementales.

Definición C.0.1. *Sea μ una medida positiva y λ una medida compleja o positiva sobre el espacio medible $(X, \mathscr{A})$. Se dice que λ es absolutamente continua con respecto a μ ($\lambda << \mu$) si para toda $E \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(E) = 0$, entonces $\lambda(E) = 0$.*

Definición C.0.2. *Sea λ una medida compleja o positiva sobre el espacio medible $(X, \mathscr{A})$. Se dice que λ está concentrada en $A \in \mathscr{A}$, si para toda $E \in \mathscr{A}$ se tiene que $\lambda(E) = \lambda(E \cap A)$, o equivalentemente si para toda $E \in \mathscr{A}$ tal que $E \cap A = \emptyset$ se tiene que $\lambda(E) = 0$.*

Definición C.0.3. *Sean λ_1, λ_2 medidas complejas o positivas sobre el espacio medible $(X, \mathscr{A})$. Se dicen que son mutuamente singulares ($\lambda_1 \perp \lambda_2$) si existen $A, B \in \mathscr{A}$ tales que $A \cap B = \emptyset$, λ_1 está concentrada en A y λ_2 está concentrada en B.*

Teorema C.0.4 (Radon-Nikodym)**.** *Sea μ una medida positiva σ-finita y λ una medida compleja, ambas sobre el espacio medible $(X, \mathscr{A})$, entonces*

1. *Existe un único par de medidas complejas (λ_a, λ_s) tal que: $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a << \mu$, $\lambda_s \perp \mu$ y $\lambda_a \perp \lambda_s$ (Si λ es positiva y finita, entonces λ_a y λ_s son también positivas y finitas);*

2. *Existe una única función $h \in L^1(\mu)$ tal que para toda $E \in \mathscr{A}$ se cumple*
$$\lambda_a(E) = \int_E h \, d\mu. \tag{C.1}$$

Notación C.0.5. 1. *El par (λ_a, λ_s) se llama la descomposición de Lebesgue de λ respecto a μ.*

2. *La relación (C.1) se escribe como*
$$h = \frac{d\lambda_a}{d\mu}. \tag{C.2}$$

La función h se le llama la derivada de Radon-Nikodym de λ_a con respecto a μ.

Definición C.0.6. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Una sucesión $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ se dice que se contrae aceptablemente a x si existen $r_i > 0$ tales que $E_i \subseteq B_{r_i}(x)$ con la propiedad $r_i \to 0$ cuando $i \to \infty$ y $C > 0$ tal que*
$$m(E_i) \geq C\, m\left(B_{r_i}(x)\right) \qquad \forall\ i \in \mathbb{N}.$$

Definición C.0.7. *Sea μ una medida de Borel compleja sobre $\mathbb{R}^n$, si $x \in \mathbb{R}^n$, si $\alpha \in \mathbb{C}$ y si*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mu(E_i)}{m(E_i)} = \alpha$$

para toda $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ sucesión que se contrae aceptablemente a x, entonces llamamos a α la derivada de μ en x respecto a la medida de Lebesgue m. La denotaremos como

$$(D\mu)(x) = \alpha$$

Teorema C.0.8. *Sea μ una medida de Borel compleja sobre $\mathbb{R}^n$, entonces*

1. *$(D\mu)(x)$ existe en c.t.p. $[m]$;*
2. *$D\mu \in L^1(\mathbb{R}^n)$;*
3. *Para todo $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ se cumple*

$$\mu(E) = \mu_s(E) + \int_E (D\mu)(x)dx,$$

donde $\mu_s \perp m$ y $(D\mu_s)(x) = 0$ en c.t.p. $[m]$ (μ_s está dado por la descomposición de Lebesgue).

Corolario C.0.9. *Sea μ una medida de Borel compleja sobre $\mathbb{R}^n$, entonces*

1. *$\mu \perp m$ si, y solo si, $(D\mu)(x) = 0$ en c.t.p. $[m]$;*
2. *$\mu << m$ si, y solo si, para todo $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$*

$$\mu(E) = \int_E (D\mu)(x)dx.$$

En este caso la derivada $D\mu$ coincide en c.t.p. $[m]$ con la derivada de Radon-Nikodym $d\mu/dm$.

Algunas pruebas a estos teoremas se pueden encontrar en [17].

Apéndice D

Integral de Poisson

Recordemos la definición de la integral de Poisson sobre $\mathbb{D}$ y algunas de sus propiedades.

Definición D.0.1 (Núcleo de Poisson)**.** *Sea $r \in [0,1)$ definimos el núcleo de Poisson como*

$$P_r(\theta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \exp(in\theta) \qquad \forall\ \theta \in \mathbb{R}.$$

En la siguiente proposición se recuerdan algunas propiedades elementales del núcleo de Poisson.

Proposición D.0.2. *Sea $r \in [0,1)$ y $\theta \in \mathbb{R}$, entonces*

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta)} = \Re\left(\frac{1+r\exp(i\theta)}{1-r\exp(i\theta)}\right).$$

Proposición D.0.3. *Sea $r \in (0,1)$, entonces la función P_r es positiva, par y 2π - periódica en $\mathbb{R}$. Además es estrictamente decreciente en $[0,\pi]$ y cumple*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 1.$$

Definición D.0.4 (Integral de Poisson de una medida)**.** *Sea μ una medida de Borel compleja sobre $\mathbb{T}$ definimos su integral de Poisson como la función $P[d\mu] : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$P[d\mu](r\exp(i\theta)) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t).$$

En particular tenemos la siguiente definición:

Definición D.0.5 (Integral de Poisson de una función)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ definimos su integral de Poisson como la función $P[f] : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$P[f](r\exp(i\theta)) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(\exp it) dt.$$

Teorema D.0.6. *Sea μ una medida de Borel compleja sobre $\mathbb{T}$, entonces la función definida para todo $z \in \mathbb{D}$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(i\theta)+z}{\exp(i\theta)-z} d\mu(t),$$

cumple que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Este teorema nos da como resultado lo siguiente:

Teorema D.0.7. *Sea μ una medida de Borel compleja sobre $\mathbb{T}$ entonces $P[d\mu]$ es una función armónica en $\mathbb{D}$. En consecuencia $P[f]$ es armónica para toda $f \in L^1(\mathbb{T})$.*

Veamos a continuación una aplicación de la integral de Poisson al llamado problema de contorno de Dirichlet en $\mathbb{D}$.

Teorema D.0.8 (de Schwarz)**.** *Sea $f \in \mathcal{C}\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$, entonces existe $F \in Arm\,(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$ tal que $F\mid_{\mathbb{T}} = f$ dada por*

$$F(z) = \begin{cases} P[f](z) & si \quad z \in \mathbb{D} \\ f(z) & z \in \mathbb{T} \end{cases}.$$

La unicidad al problema de contorno de Dirichlet viene dada por el siguiente teorema.

Teorema D.0.9 (Fórmula de Poisson)**.** *Sea $u \in Arm\,(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$, entonces la función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(i\theta) + z}{\exp(i\theta) - z} u\left(\exp(i\theta)\right) d\theta,$$

cumple que $f \in \mathcal{H}\,(\mathbb{D})$ y $u = \Re(f)$; esto es $u = P[u\mid_{\mathbb{T}}]$.

Existe una equivalencia importante entre las integrales de Poisson y cierta clase de funciones armónicas.

Teorema D.0.10 (Herglotz)**.** *Sea $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ una función. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *u es una integral de Poisson de alguna medida de Borel compleja sobre $\mathbb{T}$, $u = P[d\mu]$,*
2. *u es una función armónica que cumple*

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| u\left(r\exp(i\theta)\right)\right| d\theta < \infty.$$

Más aún, tenemos también la siguiente equivalencia:

1. *u es una integral de Poisson de alguna medida de Borel positiva finita sobre $\mathbb{T}$, $u = P[d\mu]$,*
2. *u es una función armónica positiva.*

Definición D.0.11. *Sea μ una medida de Borel real sobre $\mathbb{T}$, para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$ fijo definimos el arco circular abierto de longitud $2s$ con centro en $\exp(i\theta)$ como*

$$J(\theta; s) = \{\exp(it) \;:\; t \in (\theta - s, \theta + s)\}$$

y la derivada simétrica de μ respecto a θ como

$$(D\mu)(\theta) = \lim_{s\to 0} \frac{\mu\left(J(\theta; s)\right)}{2s}.$$

Teorema D.0.12. *Sea μ una medida de Borel real sobre $\mathbb{T}$ y $F = P[d\mu]$, entonces para casi todo $\theta \in \mathbb{R}$ el límite*

$$\lim_{r\to 1} F(r\exp(i\theta)) = (D\mu)(\theta)$$

(donde $(D\mu)(\theta)$ es como en la definición D.0.11), existe y es finito.

Un corolario importante de este resultado es el siguiente:

Corolario D.0.13. *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $F = P[f]$ entonces para casi todo $\theta \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{r \to 1} F(r \exp(i\theta)) = f(\exp(i\theta)).$$

Algunas pruebas a estos teoremas se pueden encontrar en [17].

Apéndice E

Función Γ

Veremos la definición de la función Γ y algunas de sus propiedades.

Definición E.0.1 (Euler). *Para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(s) > 0$, definimos la función Γ de Euler como*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \exp(-x)x^{s-1}dx.$$

Proposición E.0.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\Gamma(n+1) = n!$.*

Teorema E.0.3. *La función Γ de Euler es holomorfa en $\mathbb{C}_+$.*

Teorema E.0.4. *La función Γ se puede extender a todo el plano complejo $\mathbb{C}$ como una función meromorfa y sus únicos polos simples son $s = -n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con residuos*

$$Res(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Teorema E.0.5. *La función Γ de Euler no se anula en $\mathbb{C}$.*

Teorema E.0.6. *La función Γ de Euler satisface las siguientes ecuaciones funcionales*

1. $$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),$$

2. *Si $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,*
$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)},$$

3. $$\Gamma(2s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right),$$

4. *Si $0 < \Re(s) < 1$,*
$$\Gamma(s)\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) = \int_0^\infty x^{s-1}\sin(x)dx.$$

Algunas pruebas a estos teoremas se pueden ver en [24] y en [8].

Apéndice F

Transformada de Fourier

Recordaremos la definición de la transformada de Fourier y sus principales propiedades. También definiremos la transformada de Mellin y veremos como esta se relaciona con la transformada de Fourier.

Definición F.0.1. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ definimos su trasformada de Fourier como*

$$\mathscr{F}(f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-ixt) dx.$$

Observación F.0.2. *La transformada de Fourier $\mathscr{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ está bien definida para toda $t \in \mathbb{R}$.*

Veamos a continuación algunas de sus propiedades básicas.

Teorema F.0.3. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces*

1. *Si $g(x) = f(x) \exp(i\alpha x)$, entonces $\mathscr{F}(g)(t) = \mathscr{F}(f)(t - \alpha)$,*
2. *Si $g(x) = f(x - \alpha)$, entonces $\mathscr{F}(g)(t) = \mathscr{F}(f)(t) \exp(i\alpha t)$,*
3. *Si $h \in L^1(\mathbb{R})$ y $g = f * h$, entonces $\mathscr{F}(g)(t) = \mathscr{F}(f)(t)\mathscr{F}(h)(t)$,*
4. *Si $g(x) = \overline{f(-x)}$, entonces $\mathscr{F}(g)(t) = \overline{\mathscr{F}(f)(t)}$,*
5. *Si $g(x) = f(x/\lambda)$ con $\lambda > 0$, entonces $\mathscr{F}(g)(t) = \lambda\mathscr{F}(f)(\lambda t)$,*
6. *Si $g(x) = -ixf(x)$ y $g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\mathscr{F}(f)(t)$ es diferenciable y $\mathscr{F}(g)(t) = \mathscr{F}(f)'(t)$.*

Vimos que ciertas operaciones con funciones se corresponden agradablemente con las operaciones de sus transformadas de Fourier. La utilidad de esto aumentará si existe una forma de volver a sus transformadas, esto es si hay una fórmula de inversión. Este resultado se conoce como el teorema de inversión.

Teorema F.0.4 (Teorema de inversión)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\mathscr{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ y sea*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}(f)(t) \exp(ixt) dx;$$

entonces $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (donde $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ representa el conjunto de funciones continuas en $\mathbb{R}$ que se anulan en el infinito) y $f = g$ en c.t.p. de $\mathbb{R}$.

Como la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es infinita, no podemos ver a $L^2(\mathbb{R})$ como un subconjunto de $L^1(\mathbb{R})$ y la definición de transformada de Fourier no es aplicable para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo, resulta que la transformada de Fourier se puede generalizar para toda función en $L^2(\mathbb{R})$, dando lugar a un isomorfismo entre espacios de Hilbert. Este resultado, de gran importancia, es conocido como el teorema de Plancherel.

Teorema F.0.5 (Plancherel). *A cada función $f \in L^2(\mathbb{R})$ se le puede asociar una función $\mathscr{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ tal que se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces $\mathscr{F}(f)$ está dada como en la definición F.0.1,*
2. *Para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene que $\|f\|_2 = \|\mathscr{F}(f)\|_2$,*
3. *La aplicación*
$$\begin{array}{cccc} \mathscr{F} : & L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \mathscr{F}(f) \end{array},$$
es un isomorfismo de espacios de Hilbert,
4. *Sea $a > 0$, definimos las funciones*
$$\phi_a(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(x) \exp(-ixt) dx, \qquad \psi_a(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \mathscr{F}(f)(t) \exp(ixt) dt;$$
entonces $\|\phi_a - \mathscr{F}(f)\|_2 \to 0$ y $\|\psi_a - f\|_2 \to 0$ cuando $a \to \infty$.

Observación F.0.6. *Como $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$, tenemos que 1 y 2 implican que la aplicación $f \to \mathscr{F}(f)$ está definida de forma única. La propiedad 4 se suele llamar teorema de inversión en $L^2(\mathbb{R})$.*

Corolario F.0.7. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Si $\mathscr{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, entonces*
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}(f)(t) \exp(ixt) dx \qquad \text{en c.t.p. de } \mathbb{R}.$$

A continuación veamos un caso particular de la transformada de Fourier: la llamada transformada de Mellin. Esta es la transformada de Fourier en el grupo multiplicativo $R^+ = (0, \infty)$.

Definición F.0.8. *Sea $f \in L^1\left(\mathbb{R}^+, \frac{dy}{y}\right)$, entonces para todo $z \in i\mathbb{R}$ definimos su trasformada de Mellin como*
$$\mathscr{M}(f)(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^+} f(y) y^z \frac{dy}{y}.$$

Observación F.0.9. *La transformada de Mellin $\mathscr{M}(f) : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ está bien definida para toda $z \in i\mathbb{R}$.*

La siguiente proposición nos dice en que sentido están relacionadas la transformada de Mellin y la transformada de Fourier, para esto definamos la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $\varphi(x) = \exp(-x)$.

Teorema F.0.10. *Sea $f \in L^1\left(\mathbb{R}^+, \frac{dy}{y}\right)$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ se tienen las siguientes relaciones:*

1. *$\mathscr{M}(f)(it) = \mathscr{F}(f \circ \varphi)(t)$,*
2. *$\mathscr{M}(f)(-it) = \mathscr{F}^{-1}(f \circ \varphi)(t)$.*

El siguiente resultado se sigue del teorema de Plancherel (teorema F.0.5).

Teorema F.0.11 (Plancherel). *A cada función $f \in L^2\left(\mathbb{R}^+, \frac{dy}{y}\right)$ se le puede asociar una función $\mathscr{M}(f) \in L^2(i\mathbb{R})$ tal que*

1. *Si $f \in L^1\left(\mathbb{R}^+, \frac{dy}{y}\right) \cap L^2\left(\mathbb{R}^+, \frac{dy}{y}\right)$, entonces $\mathscr{M}(f)$ está dada como en la definición F.0.8,*
2. *Para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene que $\left\|f\right\|_2 = \left\|\mathscr{M}(f)\right\|_2$ (en sus respectivas normas),*
3. *La aplicación*

$$\begin{array}{cccc} \mathscr{M} & : & L^2\left(\mathbb{R}^+, \frac{dy}{y}\right) & \longrightarrow & L^2(i\mathbb{R}) \\ & & f & \longmapsto & \mathscr{M}(f) \end{array},$$

   es un isomorfismo de espacios de Hilbert.

Algunas pruebas a estos teoremas se pueden ver en [17] y en [16].

Bibliografía

[1] Apostol, T. M. *Analytic Number Theory*. Springer, 1976.

[2] Beurling, A. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. *Acta Mathematica 81*, 1 (1949), 239–255.

[3] Beurling, A. A closure problem related to the Riemann zeta-function. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 41*, 5 (1955), 312.

[4] Broughan, K. A. *Equivalents of the Riemann Hypothesis: Analytic Equivalents*, vol. 2. Cambridge University Press, 2017.

[5] Broughan, K. A. *Equivalents of the Riemann Hypothesis: Arithmetic Equivalents*, vol. 1. Cambridge University Press, 2017.

[6] Cima, J. A., and Ross, W. T. *The Backward Shift on the Hardy Space*. American Mathematical Society, 2000.

[7] Duren, P. L. *Theory of Hp Spaces*. Academic Press, 1970.

[8] Edwards, H. M. *Riemann's Zeta Function*. Academic Press, 1974.

[9] Halmos, P. R. Shifts on Hilbert spaces. *Journal für die reine und angewandte Mathematik 1961*, 208 (1961), 102–112.

[10] Kapustin, V. Beurling's theorem, Davenport's formula, and the Riemann hypothesis. *St. Petersburg Mathematical Journal 30*, 6 (2019), 917–932.

[11] Katznelson, Y. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Cambridge University Press, 2004.

[12] Lang, S. *Complex Analysis*, vol. 103. Springer, 2013.

[13] Lax, P. D. Translation invariant spaces. *Selected Papers Volume II* (2005), 478–493.

[14] Marsden, J. E., Hoffman, J, M., and Marsden. *Basic Complex Analysis*. Macmillan, 1999.

[15] Mashreghi, J. *Representation Theorems in Hardy Spaces*, vol. 74. Cambridge University Press, 2009.

[16] Nikolski, N. *Hardy Spaces*, vol. 179. Cambridge University Press, 2019.

[17] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. McGraw-hill, 2006.

[18] Salamon, D. *Measure and integration*. EMS Textbooks in Mathematics, 2016.

[19] Simon, B. *Advanced Complex Analysis*. American Mathematical Society, 2015.

[20] Simon, B. *Basic Complex Analysis*. American Mathematical Society, 2015.

[21] Simon, B. *Harmonic Analysis*. American Mathematical Society, 2015.

[22] Simon, B. *Real Analysis*. American Mathematical Society, 2015.

[23] Tao, T. *An Introduction to Measure Theory*, vol. 126. American Mathematical Society Providence, 2011.

[24] Titchmarsh, E. C. *The Theory of the Riemann Zeta-Function*. Oxford University Press, 1986.