



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIOS DE PRECISIÓN EN MODELOS COSMOLÓGICOS  
ESTÁNDAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
FÍSICO

PRESENTA

SANDOVAL OROZCO RODRIGO

DIRECTORA DE TESIS

DRA. CELIA DEL CARMEN ESCAMILLA RIVERA



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2022



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Agradecimientos

- A Papá y Mamá por su apoyo.
- Al Proyecto PAPIIT TA100122 “Confrontación de Observaciones en Cosmología utilizando enfoques de la física fundamental”, del cual la Dra Celia Escamilla Rivera es responsable.
- A CosmoNag (<https://www.nucleares.unam.mx/CosmoNag>).
- A Juan Luciano Díaz González, de la Unidad de Cómputo del ICN UNAM.
- A los compañeros de los *Cosmomeetings* que me dieron valiosos comentarios y a Fernando que me ayudó a destrabar un problema matemático en el que estaba metido.

## Artículo derivado de esta tesis:

- R. Sandoval-Orozco y C. Escamilla-Rivera, *Cosmological piecewise functions to treat the local Hubble tension*. Enviado a *The European Physical Journal*. 2022.

# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introducción</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2. Fundamentos de la Teoría de la Relatividad</b>                     | <b>7</b>  |
| 2.1. Teoría General de la Relatividad . . . . .                          | 7         |
| 2.2. Pruebas actuales . . . . .  | 10        |
| 2.3. Problemas y perspectivas . . . . .                                  | 12        |
| <b>3. Cosmología estándar</b>  | <b>13</b> |
| 3.1. La métrica de FLRW . . . . .  | 13        |
| 3.2. Dinámica de FLRW . . . . .  | 18        |
| 3.3. Ecuaciones de Friedmann . . . . .                                   | 20        |
| 3.4. Parámetros cosmológicos . . . . .                                   | 21        |
| 3.5. Soluciones a las ecuaciones de Friedmann de la literatura . . . . . | 28        |
| 3.5.1. Universos de una sola componente . . . . .                        | 28        |
| 3.5.2. Universos de múltiples componentes . . . . .                      | 31        |
| <b>4. Observaciones Cosmológicas</b>                                     | <b>34</b> |
| 4.1. Pruebas del principio cosmológico . . . . .                         | 34        |
| 4.2. La constante de Hubble . . . . .                                    | 35        |
| 4.3. La radiación cósmica de Fondo . . . . .                             | 36        |
| 4.4. Supernovas Ia . . . . .   | 38        |
| 4.5. Brotes de Rayos Gamma: GRB . . . . .                                | 40        |
| 4.6. Observaciones consideradas . . . . .                                | 41        |
| <b>5. Estadística en Cosmología</b>                                      | <b>42</b> |
| 5.1. Estadística frecuentista y bayesiana . . . . .                      | 42        |
| 5.2. Verosimilitud . . . . .   | 43        |
| 5.3. Prejuicios y posteriores . . . . .                                  | 44        |
| <b>6. Soluciones analíticas de las ecuaciones de Friedmann</b>           | <b>48</b> |
| 6.1. Solución <i>piecewise</i> . . . . .                                 | 48        |
| 6.2. Primera solución propuesta: Sin curvatura . . . . .                 | 52        |
| 6.3. Segunda solución propuesta: Con curvatura . . . . .                 | 55        |
| 6.4. Solución analítica propuesta con funciones especiales . . . . .     | 58        |
| <b>7. Análisis estadístico</b>   | <b>62</b> |
| 7.1. Reconstrucción del parámetro de Hubble . . . . .                    | 62        |
| 7.2. Análisis con Relojes Cósmicos . . . . .                             | 65        |
| 7.3. Reconstrucción del módulo de distancia . . . . .                    | 71        |
| 7.4. Análisis con Supernovas y Brotes de Rayos Gamma . . . . .           | 73        |
| <b>8. Conclusiones</b>   | <b>78</b> |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>A. Notación y unidades</b>  | <b>81</b> |
| <b>B. Formulaciones matemáticas</b>  | <b>81</b> |
| B.1. Notación tensorial . . . . .  | 81        |
| B.2. Símbolos de Christoffel para FRLW . . . . .   | 85        |
| B.3. Primera solución sin curvatura . . . . .  | 87        |
| B.4. Inversión del factor de escala en la primera solución analítica propuesta . . . . . | 89        |
| B.5. Integral con curvatura . . . . .  | 92        |

# 1. Introducción

La Relatividad General es una Teoría fundamental cuyas soluciones analíticas nos sirven para describir la evolución y dinámica del Universo: una cosmología. Esta Teoría fue planteada por Albert Einstein entre 1915 y 1916 y las ecuaciones de campo son un conjunto de ecuaciones diferenciales que logran describir diversos sistemas como las ondas gravitacionales [1], el comportamiento de los púlsares binarios [2], el espectro de potencias de la radiación de fondo de microondas [3] y la predicción de la precesión de la órbita de Mercurio [4]. La Teoría General de la Relatividad está basada, contrario a su predecesora directa como es la mecánica Newtoniana, en la idea de un Universo geométrico que cambia de acuerdo al contenido que se escoge para modelar. Además, esta Teoría está basada en la idea de que la materia y energía contenida en un espacio por explorar, moldea su comportamiento [5] haciendo que sea una herramienta poderosamente útil para tratar de describir al Universo con matemáticas.

Y al querer describir al Universo, el punto de partida nos lleva a un conjunto de ecuaciones diferenciales que toman distintas formas de acuerdo a la dinámica que le estemos imponiendo, información contenida en un elemento geométrico llamado *métrica* que va dentro de las ecuaciones fundamentales de la Teoría, las ecuaciones de campo de Einstein. En estas ecuaciones se hace explícito que el comportamiento dinámico y geométrico del Universo contenido en el *cóctel* de fluidos que se deseen agregar al sistema. Estas ecuaciones están formadas por diversos elementos asociados a la métrica y a los fluidos, cosa que convierte a estos, dos elementos fundamentales para la Teoría General de la Relatividad.

Una métrica es una solución de las ecuaciones de campo y de las soluciones pueden obtenerse nuevos conjuntos de ecuaciones diferenciales que describen un fenómeno. Este elemento, las soluciones analíticas a sus ecuaciones de campo, fue a lo que no pudo llegar Einstein pese a haber planteado el cuerpo teórico fundamental [5]. Las métricas describen el comportamiento de los objetos geoméricamente y por el alto contenido de dificultad de las ecuaciones de campo, suelen ser encontradas al realizar supuestos físicos que nos permitan hacer las matemáticas más sencillas. Las soluciones exactas son contadas [5] y están entre ellas la solución de Schwarzschild (encontrada por Schwarzschild en 1916 [5]) para un espacio con algún contenido de materia que actúe como cuerpo central que modifica el espacio a su alrededor. En 1917, Einstein idealizó al Universo como una esfera [5] con una distribución uniforme de materia, y se dio cuenta que al introducir estas condiciones en las matemáticas de su Teoría esta no podía mantenerse constante [6][7][5] y junto con de Sitter en 1917 al proponer un modelo del Universo compuesto por materia uniforme, las ecuaciones lo obligan a cambiar con el tiempo, cosa que resalta con la idea de Einstein de un Universo estático [5]. En este contexto surge la solución cosmológica: la métrica que lleva el nombre de cuatro autores que llegaron a la misma conclusión de forma separada.

En el caso particular de esta tesis, la métrica usada será la propuesta por Friedmann, Robertson, Walker y Lemaître (por los apellidos de los autores esta es conocida como FRLW), el primero en el año 1922 y los demás a principios de los años 1930 [6]. La métrica FRLW está basada en que el Universo es completamente homogéneo e isotrópico, esto significa que es el mismo en todos lados y en todo el tiempo y que además un observador en no distinguirá una dirección preferencial o que verá distintas condiciones físicas independientemente del lugar en el que se realicen observaciones. Cuando esta solución es propuesta, pese a ser pasada por alto los primeros años [8], con los

descubrimientos de Hubble [9] sobre un Universo dinámico que se aleja de nosotros se empiezan a desarrollar soluciones que si permitan una evolución del contenido que se intenta modelar.

Partiendo de las ecuaciones de campo y usando la métrica de FRLW se pueden llegar a un conjunto de ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones determinan precisamente lo que es una cosmología estándar y se conocen como las *ecuaciones de Friedmann*. Cuando se resuelven, se obtienen modelos que nos permiten entender la dinámica del Universo, las interacciones entre sus elementos y nos permiten dar explicación a diversos fenómenos observados. Esto se descubre en 1935 cuando Robertson y Walker independientemente encuentran que la geometría de FRLW es compatible con homogeneidad e isotropía y permiten una evolución dinámica de los elementos, y que además es poderosa para entender el fenómeno propuesto por Gamow en 1945 sobre una posible radiación proveniente de reacciones termonucleares que formaron a los elementos que hoy conocemos [5]: la radiación de fondo de microondas.

La ventaja que tiene la Teoría General de la Relatividad sobre otras Teorías de la gravedad es que suele ser una aproximación simple y de razonable ajuste a los datos más recientes que tenemos disponibles [10][3]. A un Universo que proviene de las ecuaciones de Friedmann y compuesto de materia y energía oscura es conocido como  $\Lambda$ CDM y es el modelo físico cosmológico estándar por defecto. Justamente la confirmación experimental de la radiación de fondo de microondas llegó en 1965 a manos de Penzias y Wilson [11], confirmando aún más la idea de un sistema dinámico. Y aunque para el modelo  $\Lambda$ CDM la gravedad es el fenómeno dominante, también se tienen que incorporar explicaciones termodinámicas, de física atómica, de física nuclear y de altas energías. Además, el modelo estándar de cosmología depende en el supuesto de que el Universo tuvo un principio donde rápidamente se llegó a un estado de densidad y temperatura constantes [5] [6], además de un componente geométrico que lo defina, ya sea abierto, cerrado o plano. Estos términos se refieren a que al viajar diferentes objetos en trayectorias paralelas, para un Universo plano la trayectoria se mantendrá paralela, mientras que para los otros dos las líneas se cruzarán o se separarán respectivamente [12]. Por las observaciones sabemos que el Universo es plano o con un valor muy cercano a ser plano [3].

El modelo  $\Lambda$ CDM es extremadamente exitoso para explicar los conjuntos de datos de los que disponemos actualmente. Es extremadamente útil para predecir los resultados de la colaboración Planck tanto en el espectro de potencias de temperatura y de los campos eléctrico y magnético del fondo cósmico de microondas [13][3][14], es además la Teoría hasta ahora más eficiente para describir el espectro de potencias de materia, que es la agrupación o *clustering* de materia tomado de forma estadística, comparada con otras Teorías de la gravedad como MOND [15]. Además, es la Teoría más simple que explica la aceleración reportada por la encuesta de supernovas Ia [10] que predice una expansión que se ha ido acelerando en el Universo, y que se ha tratado de refinar para tratar de entender poco a poco la naturaleza de esta aceleración de forma más detallada [14].

Uno de los problemas que tiene  $\Lambda$ CDM es que no explica la naturaleza de la materia oscura ni de la energía oscura (que suele ser denotada con la letra griega Lambda  $\Lambda$  y por ello recibe dicho nombre) ( $\Omega_{tot} = \Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda}$ ) además de que actualmente tenemos discrepancias para determinar las constantes fundamentales como  $H_0$  y  $\sigma_8$  [16] [17] [18], siendo distintas para las observaciones del Universo tardío como son las obtenidas por las observaciones de Supernovas, y las de Universo temprano que son las de la radiación del fondo de microondas. De momento, lo único que se puede decir de  $\Lambda$  es que pese a haber sido propuesta originalmente por Einstein en búsqueda de



un Universo estático en la solución de 1917 [7][5], actualmente sabemos que es la causante de la aceleración del Universo tardío [10] y es modelada por algún tipo de fluido con una presión efectiva negativa (lo que significa que mientras el Universo se expande, se ejerce trabajo sobre este fluido). Algunas propuestas consideran que este es una forma de *energía del vacío* [7] o también se asume que este fluido tiene una ecuación de estado que exhibe variaciones muy lentas con el tiempo [6][7] conocido como *Quintaesencia* [16]. Y con diversas pruebas de estimación de materia [7][3], hemos entendido que la mayor parte del Universo está compuesta por materia oscura. Tenemos entendido que del contenido total del Universo es 4% [3] las formas de materia que podemos observar (también conocido como materia bariónica) y el 96% [3] restante, materia oscura y energía oscura. Esto también está confirmado por estudios de densidad estelar y de gases que han arrojado resultados concordantes [7]. De lo poco que sabemos de la materia oscura es que genera atracción gravitacional que podemos detectar y que cambia las curvas de rotación medidas en las galaxias [19], y que ha sido parte fundamental en la formación de las estructuras (galaxias, cúmulos de galaxias, etc) que observamos en el Universo actualmente.

A futuro esperamos probar  $\Lambda$ CDM con datos que nos permitan tener un poco más de luz, como lo serían las ondas gravitacionales primordiales [20] que nos darían información sobre los momentos más tempranos del Universo revelando zonas que no podemos observar puesto que son opacas para la radiación electromagnética [12], además de pruebas a gran escala de la gravedad y la Teoría General de la Relatividad [21] cuya mayor energía está concentrada en probar si la estructura a gran escala del Universo (o LSS por sus siglas en Inglés) puede predecir una expansión acelerada del Universo que no requiera una componente  $\Lambda$ .

Actualmente, aunque existen diferentes intentos de aproximación para corregir los problemas que tenemos con  $\Lambda$ CDM, las encuestas de datos no nos han permitido discernir significativamente [14] entre el modelo básico de cosmología y las propuestas alternativas. Entre los diferentes intentos de soluciones se encuentran intentar encontrar una nueva física distinta a la Teoría General de la Relatividad que nos permita construir matemáticas usando otro tipo de supuestos como la homogeneidad e isotropía, el usar otro tipo de soluciones a estas mismas ecuaciones de campo, mejorar la toma de datos que nos permita distinguir estos modelos y también estudiar si las técnicas estadísticas usadas y el cómo se usan [14] está influyendo en nuestras formas de contrastar información. Otras formas también incluyen el simular datos futuros con técnicas que no dependan de un modelo y terminar de revisar las consistencias (o inconsistencias) entre dos tipos de datos (como el recién realizado que revela todavía una tensión más grande entre la constante fundamental  $H_0$ , que es el ritmo de expansión actual que observamos del Universo, por ello el subíndice 0; medido por Planck y las supernovas de Pantheon+ [22]).

En esta tesis se explorarán soluciones de combinación de otros fluidos como radiación y el elemento de curvatura ( $\Omega_{tot} = \Omega_k + \Omega_{R,0} + \Omega_{M,0} + \Omega_\Lambda$ ) en las ecuaciones de Friedmann para poder obtener soluciones de precisión que se comparen con las observables cosmológicas y estudiar el problema de  $\Lambda$ CDM. Este modelo estándar de la cosmología además, suele dividir sus soluciones y formas de describir los comportamientos en *épocas* [14] [6] [23] que pese a ser la formas más directa y efectiva de aproximar las observaciones de los fenómenos tiene sus desventajas en perder la capacidad de una descripción global al comportamiento del Universo. Una de las opciones para mejorar el modelo básico es tratar de dividir en menos épocas. Para poder dividirlo en estas épocas,  $\Lambda$ CDM parte de supuestos físicos para hacer más simples a las matemáticas, la aproximación de

[23] y de esta tesis será de realizar el menor número de suposiciones físicas y numéricas con la finalidad de exponer avances en las soluciones analíticas.

En esta tesis, además, se explorarán comportamientos físicos más profundos de diferentes soluciones físicas para las ecuaciones de Friedmann, empezando desde la usual del modelo  $\Lambda$ CDM partiendo en épocas, conocida como *piecewise*, pasando por la solución explorada en [23] que involucra un enfoque más global pero asumiendo  $\Omega_k = 0$  (Universo plano) y una solución más completa que se intentará con  $\Omega_k \neq 0$  con menos supuestos físicos, hasta la más General que pude encontrar basada en resolver las ecuaciones de Friedmann directamente utilizando la solución a la integral elíptica que es la función  $\wp$  de Weierstrass.

Para todas las soluciones se explorará no sólo la solución comparada con las formas numéricas de resolver a las ecuaciones diferenciales, sino también el comportamiento físico detrás de dichas soluciones y su comparación con observaciones del Universo. Es por ello que estas soluciones no sólo obtendrán una expresión  $a(t)$  que complementa a las numéricas, sino que se obtendrá también el parámetro  $H(z)$  para compararse tanto con los datos de Relojes Cósmicos (o *Cosmic Chronometers* en Inglés [24]) y después con la muestra de Pantheon [25] y brotes de rayos gamma [26] calculando para ello una expresión analítica del módulo de distancia  $\mu$  que depende directamente de la distancia lumínica proveniente de  $\int \frac{1}{H(z)}$ , con ello permitiendo constreñir los parámetros básicos de la cosmología como lo son  $H_0$ ,  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_{M,0}$  y  $\Omega_k$ .

Esta tesis está estructurada de la siguiente forma. En el capítulo 2, se explorarán desde los fundamentos históricos de la Relatividad hasta las ecuaciones de campo de Einstein, explorando también las pruebas actuales que tenemos y los problemas que se nos presentan al usar esta Teoría. En el capítulo 3 se explorarán las matemáticas fundamentales para construir desde la Teoría General de la Relatividad las ecuaciones fundamentales para construir la cosmología basada en la métrica FRLW, así como los parámetros cosmológicos y las soluciones comúnmente encontradas en la literatura. En el capítulo 4 se expondrán las diferentes observaciones y pruebas que se utilizan en cosmología para explorar los diferentes modelos además de la evidencia que tenemos para justificar la construcción de expresiones matemáticas. En el capítulo 5 se hablará superficialmente sobre las técnicas estadísticas para constreñir parámetros en la cosmología utilizando algoritmos computacionales. Posteriormente en el capítulo 6, se resolverán las ecuaciones de Friedmann, tanto numéricamente, como analíticamente mediante diferentes métodos, incluyendo a profundidad el realizado en esta tesis, para finalmente explorar el comportamiento físico de estas soluciones con tanto Relojes cósmicos y supernovas, en el capítulo 7.

## 2. Fundamentos de la Teoría de la Relatividad

### 2.1. Teoría General de la Relatividad

La gravedad es una de las fuerzas fundamentales del Universo y da pie a la atracción entre los diferentes objetos, generando una dinámica que hasta el momento de la nueva proposición Newtoniana nunca se había visto (ni siquiera en Galileo, puesto que este es una descripción más local del movimiento), unificando además un conjunto de fenómenos que se creían distintos, justamente recuperando las ideas de Copérnico. Newton, utilizando herramientas matemáticas nuevas se dio cuenta que la Luna girando alrededor de la Tierra es una fuerza en dirección del centro de movimiento [27], además de ser proporcional a las masas de los objetos estudiados. De esta forma llegó a la expresión matemática<sup>1</sup>:

$$F = G \frac{mM}{r^2}, \quad (1)$$

que básicamente resume la descripción de la fuerza como una atracción entre dos masas  $m$  y  $M$  de dos distintos cuerpos que atenúa su intensidad con el cuadrado de las distancias entre ellas  $r^2$ , siendo proporcional al producto de dichas masas y a una constante  $G$ . Combinado con las expresión de la segunda ley de Newton (en forma moderna de cálculo) [27]:

$$\mathbf{F} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (2)$$

podemos entender la dinámica de cuerpos bajo la influencia de la gravedad, entendiendo que la derivada de la cantidad  $v$  es la aceleración o cambio de movimiento de un cuerpo al ser sometido a una fuerza<sup>2</sup>  $F$ . Así, el triunfo más importante de la mecánica newtoniana es que permitió, con el mismo conjunto de ecuaciones describir tanto el movimiento de objetos cayendo en la Tierra, como la dinámica planetaria que ya había sido obtenida previamente por Johannes Kepler. Este marco descriptivo fue el dominante durante siglos hasta que llegó el complemento de Einstein.

Max Born inicia su libro [29] sobre Relatividad con este fragmento en la introducción:

Las puertas en la que la Naturaleza nos revela su presencia a los seres humanos es a través de los sentidos, cuyas propiedades determinan la extensión de la sensibilidad o percepción que tenemos de lo que nos rodea (...) y mientras más retrocedemos en la historia de las ciencias, más encontramos la figura del mundo natural determinando la figura que formamos clasificada por las diferentes calidades de nuestros sentidos. La antigua física estaba dividida en mecánica, acústica, óptica y Teoría del calor. Vemos la evidencia de conexión con los órganos de los sentidos, la percepción del movimiento y la sensación de la luz, el color y la temperatura. [29].

<sup>1</sup>Originalmente, el tratado *Principia Mathematica* [28] no contiene este tipo de expresiones algebraicas que utilizamos hoy, todas son descripciones en texto del proceso matemático, puesto que estas son ya resultados de la notación de cálculo moderno.

<sup>2</sup> Siguiendo con la nota anterior, por ejemplo la segunda ley de Newton se lee: «*El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, y se hace en la dirección de la línea recta en la que se imprime esta fuerza: Si una fuerza cualquiera genera un movimiento, una fuerza doble generará el doble de movimiento (...) tanto si la fuerza es impresa entera y a la vez como si lo es gradual y sucesivamente...*» [28].

El postulado de la universalidad de la velocidad de la luz de Einstein es radical y es el pilar fundamental de la construcción de la Teoría General y de la cosmología. En 1887, Albert Michelson y Edward Morley publicaron el primer acercamiento experimental a lo que después propondría Einstein [30], donde se arrojan resultados mostrando que la velocidad de la luz no se ve influenciada por el movimiento de la Tierra.

La idea de que la velocidad de la luz sea además una constante lleva a un nuevo sistema de transformaciones, que ya habían sido propuestas por Hendrik Lorentz junto con Maxwell y Poincaré aunque para ellos se trataba más de una curiosidad matemática [31]. Las transformaciones para la Relatividad especial son las siguientes:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (3)$$

$$y' = y, \quad (4)$$

$$z' = z, \quad (5)$$

$$t' = \frac{t - V\frac{x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (6)$$

y que justamente nos muestran la característica fundamental de la construcción teórica de la Teoría de la Relatividad: La naturaleza que aprecia un observador depende de las características de su movimiento. Que de nuevo, es parte de la idea de que las características de los sentidos de un observador nos dan el entendimiento de la naturaleza, recuperando la cita de Max Born. Todas las leyes de la Física, tanto la electrodinámica como la física cuántica, cumplen, de hecho, las transformaciones de Lorentz. Aunque las transformaciones llevan a describir eventos matemáticos que parecen contraintuitivos son un esquema básico para construir la Relatividad General y para la física en General.

La Teoría General de la Relatividad fue desarrollada por Albert Einstein entre 1905 y 1915 [32]. El principio fundamental del desarrollo de la gravitación es el *principio de equivalencia*. Según este postulado existe una completa equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitacional. La masa inercial se refiere a la fuerza que necesita un cuerpo para cambiar su estado de movimiento, mientras que la masa gravitacional se refiere a la propiedad que tiene un cuerpo por estar cerca de un cuerpo masivo.

Usando el principio de equivalencia y un espacio con cuatro dimensiones (espacio-tiempo) como en la Relatividad especial, Einstein construyó la Teoría General, con ayuda de que las leyes físicas son iguales ante transformaciones generales de coordenadas, en especial, las de Lorentz. Esto tiene como consecuencia la construcción de un Universo geométrico a partir de las proposiciones fundamentales, permitiendo una descripción más completa que la Newtoniana para describir los fenómenos que le ocurren al Universo a gran escala. Es entonces que podemos construir una cosmología basada en las leyes físicas que usamos para describir lo que observamos.

El entendimiento de la Teoría General de la Relatividad puede resumirse como el conjunto de

ecuaciones diferenciales contenidas en las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (7)$$

que son un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales no lineales, con  $T_{\mu\nu}$  que se refiere al tensor de Energía-momento y describe las propiedades y distribución de la materia y la energía,  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico,  $R_{\mu\nu}$  que es el tensor de curvatura y  $R$  el escalar de curvatura que se deriva del tensor con el mismo nombre. Además, el tensor  $G_{\mu\nu}$  es el llamado tensor de Einstein y simplemente comprime las expresiones dependientes de los tensores de Ricci y la métrica. Las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la geometría del espacio tiempo con la *cosa* que produce una curvatura que es la materia y la energía que existen en el Universo. Una de las formas de resolver estas ecuaciones es utilizando aproximaciones y reducirlas a las expresiones de la dinámica de Newton. Pero antes de seguir avanzando, la pregunta obligada es: ¿qué es solucionar las ecuaciones de campo? Resolver las ecuaciones es obtener algún tipo de expresión que describa la métrica del espacio tiempo asociada a la distribución de materia que hayamos puesto en el tensor de energía-momento. De manera inversa, también sería solucionar las ecuaciones si, partiendo de una métrica, podemos llegar a su contraparte de distribución de materia y energía expresada como tensor. En el caso de la electrodinámica y dinámica Newtoniana clásica las cosas son lineales, pero aquí no. Resolver las ecuaciones de campo es una tarea altamente no trivial y que en vez de tratar de resolverlas analíticamente o en forma General, preferimos plantear casos específicos de diferentes soluciones físicas, ya sea proponiendo algún tensor definido para nuestra distribución de materia y energía deseada o proponiendo alguna métrica e intentando descubrir el proceso físico detrás de esta.

Ejemplos diversos de propuestas de métricas para diferentes situaciones físicas pueden darse. Para un espacio tiempo plano, se utiliza la métrica de Minkowski, que simplemente está dada como:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (8)$$

que en forma matricial justamente termina siendo la misma serie de ecuaciones que fueron mostradas en (6). Esta, como las demás métricas puede ser expresada también en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (9)$$

La métrica de Minkowski es la solución más simple de las ecuaciones de campo, siendo estática.

La métrica de Schwarzschild es otra de las soluciones específicas. Esta se usa para describir un campo gravitacional esférico:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (10)$$

Ahora, ¿cómo se puede construir una métrica que nos describa el comportamiento General del Universo? Para esto necesitamos incidir en el campo de estudio de la Cosmología que es el estudio del sistema del Universo en General.

Casi todas las civilizaciones que han existido en la Tierra, por no decir todas, han tenido algún tipo de cosmología. Y por cosmología nos referimos a una descripción del Universo basados en el

estado del conocimiento en el que se encuentran dichas civilizaciones [8]. Estos grupos de seres humanos como los imperios Mayas, Incas, Egipcios, Axum y demás tenían una forma de ver al mundo basado en Dioses que controlaban de alguna u otra forma el comportamiento de las personas y los objetos [5] [6].

Justamente la Teoría General de la Relatividad cumple un papel fundamental en el entendimiento que tenemos del Universo como un todo. Dentro de las soluciones de las ecuaciones de campo (7) se encuentran las solución propuesta por Alexander Friedmann, Georges Lemaître, Arthur Walker y Howard Robertson conocida como métrica FRLW [7] que predicen un Universo en cambio continuo expandiéndose. De hecho tenemos medianamente claro que a gran escala el Universo es isotrópico y homogéneo, además de estarse expandiendo, razón por la cuál, además de otras, creemos que tuvo un origen donde estaba caliente y muy pequeño y que conocemos como Teoría del *Big Bang* [8].

Estas soluciones a las ecuaciones de campo resultan en un conjunto de ecuaciones diferenciales conocidas como *Ecuaciones de Friedmann*:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (11)$$

Las ecuaciones de Friedmann mostradas anteriormente describen a un Universo dinámico determinado por la *densidad de energía*  $\rho$  que se use para modelar las componentes del Universo que deseamos explorar.

Estas ecuaciones diferenciales están resueltas de forma analítica en la literatura usando diferentes intervalos donde la matemática se hace más sencilla, simplificando de esta forma el problema. El nuevo enfoque que se propone en este trabajo es el de evitar esta separación y simplificación del problema y optar por un ataque más directo a las ecuaciones diferenciales de tal forma que se obtenga soluciones analíticas más Generales para el Universo.

Podemos decir entonces que la cosmología reposa tanto sobre Relatividad General como sobre un conjunto de observaciones que nos han dejado un escenario que parece, hasta hoy, en términos Generales consistente, pero que nos falta recorrer algunos caminos y preguntas que serán tratados más adelante en este trabajo, siendo la *cosmología de precisión* la encargada de ir refinando las respuestas a algunas preguntas fundamentales que este escenario General (conocido como  $\Lambda$ CDM) no nos ha podido contestar, como la naturaleza de la materia y energía oscura, el problema de la medición del parámetro de Hubble y los valores de la cantidad de sustancias que contiene el Universo para describirlo. Es por ello, que este trabajo está escrito en el contexto en que la cosmología, aunque creemos tiene un modelo consistente, necesita refinarse más y puede que, eventualmente, necesite un marco más completo para solucionar problemas que se nos presentan.

## 2.2. Pruebas actuales

La Teoría General de la Relatividad tiene tres pruebas básicas [5], el *redshift* o corrimiento al rojo gravitacional, la desviación de la luz por la acción gravitacional y la precesión del perihelio de Mercurio. La Teoría vino a describir algunos sistemas dinámicos como el sistema solar de forma más precisa de lo que no se había conseguido. Y más allá de eso, vino a describir pulsares, estrellas

de neutrones y agujeros negros, todos cuerpos extremadamente densos con una capacidad gravitacional increíble, confirmando que efectivamente el Universo tiene un comportamiento geométrico para describir la gravedad.

El éxito empírico empezó pronto. En el mismo año de la publicación del primer artículo de Einstein [33] explicando las anomalías de la precesión de la órbita de Mercurio. Conocida desde tiempo antes, 43 arcosegundos por siglo [32] hacían que la descripción de la dinámica Newtoniana fallara al describir de buena forma la órbita del pequeño planeta y por tanto significaba un reto para los astrónomos y físicos de la época. Con las herramientas de la nueva Teoría geométrica de la gravedad, Einstein describió matemáticamente la razón y el cálculo para obtener los 43 arcosegundos faltantes [33]. Con esto, desde muy temprano, la Teoría General de la Relatividad tuvo una de las validaciones empíricas aprobada con éxito. En 1919, Arthur Eddington realizó la segunda prueba, midiendo las posiciones estelares durante un eclipse de total de Sol [34] el 29 de Mayo de ese mismo año. Comparando las mediciones de las posiciones estelares en la misma región del cielo donde ocurriría el eclipse, comparando así, dichas posiciones con las aparentes durante el evento astronómico, permitiendo así las observaciones de objetos más tenues debido a la disminución de la intensidad de la luz solar. Comparando ambas posiciones Eddington concluye que efectivamente la gravedad solar genera una desviación de la luz que se representa como un cambio de la posición de alguna estrella en esa región del cielo. La desviación de la luz, entonces, es propia también de un objeto que genere un campo gravitacional intenso como lo es nuestra estrella. Las mediciones realizadas simultáneamente en la ciudad Sobral en Brasil y la isla Príncipe en África arrojaron desviaciones de  $1.98 \pm 0.16$  arcosegundos, dentro de la zona de  $2\sigma$  de Einstein de 1.74 [32].

Con el paso del tiempo, la Teoría General de la Relatividad se ha ido probando a niveles de mayor precisión que los primeros experimentos, siendo la medición de las telecomunicaciones entre la sonda espacial *Viking* y la Tierra una de las primeras. Midiendo el retraso de la señal a Marte durante 14 meses, el experimento [35] concluye que después de todas las correcciones realizadas que el retraso de la señal al ser afectada por la gravedad solar *está de acuerdo con las predicciones de la Relatividad General en un 0.5 %*. Este, justamente es la última prueba que faltaba mencionar: el corrimiento al rojo gravitacional que ya había sido inicialmente probado por Pound y Snider en 1965 [36].

De hecho estas pruebas más avanzadas de la Teoría vinieron hasta la segunda parte del siglo XIX, donde la comunicación por radio avanzó lo suficiente como para ser sensible a mediciones más precisas. De acuerdo a la dinámica de Einstein, los fotones son desviados y retrasados por la curvatura del espacio tiempo producida por la masa de un objeto, y de hecho esta desviación debe ser proporcional a  $\gamma + 1$  y donde para mediciones de fotones esperaríamos que esta fuera  $\gamma = 1$ . Con las mediciones de la sonda espacial Cassini, por ejemplo, se midió el factor en  $\gamma = 1 + (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$  estando de acuerdo con las predicciones teóricas [37] y además brindando una de las pruebas más exitosas de la Relatividad General en el sistema solar. Actualmente, los efectos gravitacionales en la luz se han convertido en parte de nuestra vida diaria, siendo incorporado en sistemas de localización que utilizan los celulares como el GPS [38].

Más allá de estas pruebas fundamentales de la Teoría, existen más proyectos para realizar experimentos más avanzados y más sensibles que han demostrado comportamientos de acuerdo a las predicciones. Actualmente estamos más concentrados en demostrar las proposiciones más *No-*

*Newtonianas* como son los objetos y fenómenos de alta energía como agujeros negros y ondas gravitacionales. Al tiempo de escritura de este trabajo (2021), la colaboración del Telescopio de Horizonte de Eventos (EHT por sus siglas en Inglés) [39] ya consiguió conjuntos importantes de datos e imágenes del contorno de un agujero negro mientras que la colaboración LIGO [1] ya ha detectado (y varias) ondas gravitacionales de colisiones de agujeros negros.

## 2.3. Problemas y perspectivas

Pese a que la Teoría General de la Relatividad es una de las Teorías más probadas que la humanidad ha construido [5], todavía seguimos buscando opciones alternativas o mejoras a esta construcción. De hecho, de momento no tenemos una Teoría a gran escala que funcione tan bien como esta, pero tiene también sus detalles que la hacen susceptible de poder cambiarse o modificarse.

La idea de desarrollar algo más que la Relatividad es algo que se ha considerado tanto teóricamente y últimamente también de manera experimental por diversos problemas que se tienen como la tensión de  $H_0$  [16] y de  $\sigma_8$  [18] que son constantes fundamentales y deberíamos verlas de la misma manera independientemente del fenómeno físico por el cuál se midieran, cosa que no pasa. Además, sería mucho más adecuado construir un modelo de gravedad que no dependiera de la escala en la cuál se está trabajando, puesto que el entendimiento que tenemos del Universo hasta ahora llega hasta un límite histórico donde era tan pequeño que no podemos describirlo con la Teoría geométrica con la que contamos: esto significa que no tenemos una Teoría cuántica de la gravedad. Lo mismo ocurre cuando queremos explicar el fenómeno fundamental detrás de los colapsos gravitacionales que llevan a agujeros negros [5].

Otras Teorías de la gravedad podrían explicar mejor también cuál es la naturaleza de la parte de materia del Universo que no estamos viendo, además de darnos una perspectiva más amplia sobre la evolución del Universo, sobre la naturaleza de la aceleración que observamos para objetos lejanos, y las etapas muy tempranas de la historia que no podemos describir [40]. Las modificaciones a la Teoría General también podrían describir de mejor manera la tensión de  $H_0$  incluyendo las perturbaciones observadas para el Universo explicando mejor los fenómenos físicos y además arrojando un mejor ajuste para las observaciones actuales [16].

Dentro de las posibles opciones para mejorar la Teoría, se encuentran las Teorías  $f(R)$  que modifican la manera de obtener las Ecuaciones de campo desde la construcción donde se varía una acción para obtener las ecuaciones diferenciales [5], las Teorías  $f(\mathcal{T})$  donde se incorpora un espacio-tiempo no sólo con curvatura sino también con torsión,  $f(\mathcal{T}, \mathcal{B})$  donde además de la torsión se agregan términos extra, el término escalar *Boundary* o de frontera que cuantifica la diferencia entre el término de torsión y del tensor de Ricci; que también son conocidas como Teorías *teleparalelas* [41].

En el caso específico de esta tesis, no se planteará física ni modelos nuevos para la gravedad, sino que el intento de resolver los problemas de la Cosmología usando la misma física pero tratando de que las matemáticas nos den una respuesta más precisa a los problemas que se tienen actualmente tanto la Cosmología como la Teoría General de la Relatividad.



## 3. Cosmología estándar

### 3.1. La métrica de FLRW

La cosmología parte de entender al Universo como algo similar en todos los lugares, entendiendo además que el lugar que ocupa la humanidad en el Universo no es especial. Esto es conocido como *Principio Copernicano* o *Principio Cosmológico*. Y a grandes escalas creemos que el Universo cumple efectivamente dicho principio: es homogéneo e isotrópico [5]. La **isotropía** se refiere a que no importa hacia donde miremos, el Universo se ve de la misma forma. *Es igual en todas las direcciones*. La **homogeneidad** se refiere a la propiedad de que cualquier función escalar es independiente de la posición. Esto podemos hacerlo porque para estudiar al Universo como un todo primero nos concentramos en su primer aproximación y al expandirnos más podemos hacer perturbaciones y empezar a notar las escalas donde el Universo ya no se comporta de forma homogénea.

El principio cosmológico es asumir que el Universo es isotrópico y homogéneo a gran escala, o lo que es lo mismo, que a donde quiera que se realicen mediciones y donde quiera que la se un observador se coloque, el Universo se comportará de la misma forma.

En [5] se realiza una disertación interesante sobre el significado de la homogeneidad e isotropía<sup>3</sup>. Como se definió a la homogeneidad, depende del tiempo. Pero ¿cómo entendemos entonces a ese momento en el tiempo en que las leyes físicas son las mismas? Para la dinámica Newtoniana el tiempo es el mismo en todo el Universo, pero para la Relatividad este no es único y depende de los sistemas de referencia. Pero hay elementos más poderosos en la dinámica relativista: las hipersuperficies, que son el elemento con el que se construye la Teoría y que, para un observador en un lugar dado, verá a su espacio local como una hipersuperficie parecida a un espacio de Minkowski, y si no es así, podría encontrar una superficie plana dentro de su simultaneidad de tipo espacio que si coincide localmente con su hipersuperficie estudiada. Y este marco, que puede parametrizarse por medio de las transformaciones de Lorentz, sería por ejemplo una 4-velocidad  $u_\mu$  ortogonal a su hipersuperficie.

Entonces, en la Relatividad General, en vez de encontrarnos con una parametrización en función del tiempo, la hacemos con base en una hipersuperficie de tipo espacio dada. Entonces, dicen Misner *et al*, la homogeneidad del Universo significa en el contexto de la Relatividad General más bien una condición en la que cada evento en el Universo es *atravesado por una hipersuperficie de igualdad de condiciones físicas, y a cada evento en esa hipersuperficie la densidad, la presión y la curvatura del Universo deben medirse iguales* [5].

Ahora, sobre la isotropía. Para la Relatividad General la isotropía se convierte entonces en la *propiedad de un observador que se mueve con el fluido cosmológico en ser incapaz de distinguir una dirección de las otras por mediciones de variables físicas localmente* [5]. De esta forma, se definen de manera más poderosas las premisas fundamentales con las que se trabaja en cosmología y que, después, servirán para expresar matemáticamente en las ecuaciones de campo de Einstein.

<sup>3</sup>Las observaciones modernas revelan que al menos hasta escalas  $\sim 10^8$  [5] años luz y más. Hablando en el sentido más estricto, a pequeñas escalas el Universo no puede ser homogéneo puesto que las aglomeraciones de estrellas en galaxias, los vacíos y la vida no podría existir, pero tomando la gran escala, sí lo es.

Para ilustrar el punto, podemos recurrir a dos imágenes tomadas de [6]:

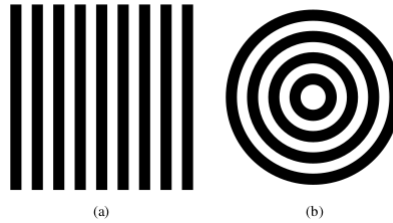


Figura 1: La figura (a) muestra un patrón que no cumple con isotropía pero que si uno la observa desde una distancia mucho más grande que el grosor de las líneas oscuras es homogéneo. En cambio (b) muestra una figura isotrópica alrededor del origen pero que no es homogénea sea vista desde donde sea. Tomada directamente de [6].

Si observamos una figura que cumple con homogeneidad pero no con isotropía podemos darnos una idea más intuitiva del significado de ambos términos. Lo mismo para su viceversa. El que la homogeneidad se cumpla implica que el patrón se comporta igual en cualquier punto de la imagen como en un patrón continuo de rayas, en cambio, la isotropía se refiere más a la propiedad de poder ver el patrón de igual manera a donde quiera que se mire, como en un patrón circular alrededor del centro, pero esto no implica que sea homogéneo puesto que muy lejos del centro el patrón no se verá de igual manera que cerca de este.

¿Cómo traducimos todo lo anterior al lenguaje matemático?

Si elegimos una hipersuperficie  $S_I$  homogénea en donde todos los eventos que ocurren podemos asignarles un tiempo  $t_I$  y asignemos un mallado con el que se parametrizará a la variedad, digamos  $(x^1, x^2, x^3)$ . De modo que si queremos expandir este mallado de la variedad, podemos extenderlo a todo el espacio con esas mismas coordenadas espaciales trazando las líneas de mundo y podemos justamente asignar a la intersección entre una línea de mundo y la intersección con la hipersuperficie las coordenadas espaciales  $(x^1, x^2, x^3)$ , teniendo esto como consecuencia que el fluido está siempre en reposo respecto a las coordenadas espaciales. Esto se conoce como *coordenadas comóviles* [5].

Entonces, para un evento  $\mathcal{P}$  usando el tiempo propio  $\int d\tau$  desde  $\mathcal{P}$  hasta  $S_I$  medido a través de una línea de mundo que pasa a través de  $\mathcal{P}$  más un tiempo  $t_I$  digamos, que es un tiempo medido desde  $S_I$  podemos tener que:

$$t(\mathcal{P}) = t_I + \left( \int_{S_I}^{\mathcal{P}} d\tau \right), \quad (12)$$

y por ello para las superficies de una  $t = cte$  de dicho sistema de coordenadas coincidirán con la superficies de homogeneidad del Universo. Ahora, entendiendo esto, podemos encontrar los vectores denotados como  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  que son tangentes a este sistema de coordenadas con  $t = cte$  y que de hecho forman una base, tangente a la superficie de homogeneidad, y como  $\frac{\partial}{\partial t}$  es tangente a la línea de mundo del fluido. Lo que se termina garantizando es que tanto las derivadas para el tiempo como para las componentes espaciales ocurre que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Ahora, como el tiempo coordenado mide el intervalo de tiempo propio a través de la línea de mundo, y por esto  $\frac{\partial}{\partial t}$  es tangente a la línea de mundo, se puede escribir:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left( \frac{d}{d\tau} \right)_{\text{a lo largo de las líneas de mundo del fluido}} = u^\mu,$$

donde  $u^\mu$  es la 4-velocidad [5] del fluido, y como esta tienen unidades de longitud:

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} = -1.$$

Juntando estas últimas condiciones podemos utilizar entonces una métrica que nos describa a un sistema de referencia comóvil con un tensor  $\gamma_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ :

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (13)$$

Usando entonces esta formalidad tensorial para la métrica podemos avanzar en su interpretación física y en sus implicaciones en la descripción matemática del Universo. Es más fácil deducir lo siguiente si ahora imaginamos galaxias. Si elegimos un tiempo coordenado  $t$  para cada galaxia, el cambio de la variedad o hipersuperficie con forme el tiempo pasa marcará la evolución del Universo. Tomando la parte espacial de la métrica en la hipersuperficie  $S_I$  necesitamos ver la forma que toman los coeficientes de  $\gamma_{ij}$ . Tomando dos líneas de mundo  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  con coordenadas de intersección con la superficie  $S_I$   $(x^1, x^2, x^3)$  y  $(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$  respectivamente, a un tiempo  $t_I$  estarán separadas a una distancia:

$$\Delta\sigma(t_I) = (h_{ij} \Delta x^i \Delta x^j)^{1/2}, \quad (14)$$

donde tomamos la parte espacial de la métrica mostrada en la ecuación (13). Después de el paso del tiempo, esta distancia cambiará si queremos un sistema dinámico. Para garantizar la isotropía, necesitamos que el radio de cambio de las  $\Delta\sigma(t_i)$  sean independientes de la distancia entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Para cualquier dirección el cambio en las pequeñas separaciones garantizará, que por ejemplo, para un tiempo  $t$   $\Delta\sigma(t)/\Delta\sigma(t_I)$  sea independiente de  $\Delta\sigma(t_I)$  y por ello entonces este cociente debe ser el mismo para todos los pares de trayectorias tipo espacio. Con eso se garantiza isotropía.

Ahora, para homogeneidad, necesitamos que este radio escalar no dependa de la posición de las galaxias o de donde se encuentre el observador. Entonces, podemos definir una función que llamaremos  $a(t)$  que sea una constante espacial pero que dependa de la coordenada temporal, de tal manera que tengamos:

$$a(t) \equiv \frac{\Delta\sigma(t)}{\Delta\sigma(t_I)}, \quad (15)$$

y a esta función se le conoce como **factor de escala** o factor de expansión. Despejando el radio para un tiempo  $t$  tendremos:

$$\Delta\sigma(t) = a(t) (h_{ij} \Delta x^i \Delta x^j)^{1/2},$$

que corresponde a la métrica en algún tiempo  $t$ :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)h_{ij}dx^i dx^j. \quad (16)$$

Se puede demostrar que para un sistema [38], donde nos interesa que haya algún tipo de simetría respecto a un origen de coordenadas elegido como sea deseado podemos escribir a la métrica de la forma siguiente:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (17)$$

esta métrica es isotrópica alrededor de un punto. Si necesitamos que sea completamente isotrópica, se le pide al escalar de curvatura de Ricci que tenga el mismo valor para todo punto del espacio. Calculando entonces la parte izquierda de las ecuaciones de campo, podemos obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} G_{11} &= -\frac{1}{r^2}e^{2\Lambda}(1 - e^{-2\Lambda}) \\ G_{22} &= -re^{-2\Lambda}\Lambda' \\ G_{33} &= \sin^2\theta G_{22}, \end{aligned}$$

y como la traza del tensor de Ricci es un escalar, simplemente se requiere que la traza de  $G$  sea una constante y por ello:

$$\begin{aligned} G &= G_{ij}g^{ij} \\ &= -\frac{1}{r^2}e^{2\Lambda}(1 - e^{-2\Lambda})e^{-2\Lambda} - 2re^{-2\Lambda}\Lambda'r^{-2} \\ &= -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}e^{-2\Lambda}(1 - 2r\Lambda') \\ &= -\frac{1}{r^2}[r(1 - e^{-2\Lambda})]', \end{aligned}$$

y si queremos que la métrica también sea homogénea tenemos que poner la traza  $G$  como una constante que llamaremos  $k$ :

$$k = -\frac{1}{r^2}[r(1 - e^{-2\Lambda})]',$$

que integrando el lado derecho nos da:

$$h_{11} = e^{2\Lambda} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}kr^2 - \frac{C}{r^2}},$$

con  $C$  una constante de integración<sup>4</sup>. Si pedimos que la métrica sea plana localmente y dividiendo la constante  $k = k/3$  podemos llegar a:

---

<sup>4</sup>Todo el proceso es medio tedioso, aquí consideré saltar algunos pasos de álgebra, si se quiere alguna integración más completa se puede encontrar en [38] y en [5]

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{1}{1 - kr^2}, \\ h_{22} &= 1, \\ h_{33} &= 1, \end{aligned}$$

donde  $h_{22} = h_{\theta\theta}$  y  $h_{33} = h_{\phi\phi}$  que ya se habían propuesto en la ecuación de la métrica de un objeto esférico simétrico (17). Y por tanto, tenemos finalmente la métrica que nos interesará estudiar:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (18)$$

La métrica mostrada en (18) es la métrica propuesta por Friedmann y Lemaître que actualmente es conocida como Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Dicha métrica deja elegir una coordenada  $r$  sin pérdida de Generalidad, que permita a  $k$  sólo tomar tres valores:  $+1, -1, 0$ . Entonces, queremos caracterizar para la curvatura  $k$  tres tipos de hipersuperficies.

Consideremos el caso, primero, de un Universo con  $k = 0$ . Para cualquier tiempo  $t$ , la métrica se ve de la siguiente forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (19)$$

si acordamos que podemos nombrar  $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 = d\Omega$  podemos reescribirla como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dr^2 r^2 (d\Omega)],$$

y si renormalizamos la ecuación anterior queda finalmente, de forma que nos permite ubicarla más rápidamente como:

$$ds^2 = d(\tilde{r})^2 + (\tilde{r})^2 d\Omega, \quad \text{con } \tilde{r} = a(t)r, \quad (20)$$

claramente (20) es parecida a la métrica de Minkowski y regresamos a un Universo plano, con la diferencia de que aquí está regulado por el factor de escala puesto que Minkowski por sí sólo no expande. En general este universo cumple homogeneidad e isotropía puesto que asumió una curvatura constante.

Para  $k = 1$ , podemos de nuevo definir un sistema de coordenadas tal que:

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2}, \quad (21)$$

y exigiendo que  $\chi = 0$  cuando  $r = 0$  nos da que:

$$r = \sin \chi, \quad (22)$$

entonces para cualquier tiempo  $t$  el elemento espacial de línea de la métrica:

$$d\ell^2 = a^2(t) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (23)$$

Este elemento de línea es el adecuado para una superficie esférica de radio  $a(t)$ , de tal forma que estamos describiendo a una serie de puntos sobre una superficie a distancia  $a$ . Este tipo de curvatura genera un Universo *cerrado* [38]. Esta curvatura también arroja un Universo isotrópico y homogéneo, puesto que no importa donde me pare.

Finalmente, para el caso donde  $k = -1$ , tenemos que, para una transformación semejante que la anterior (ecuación (21)) tendríamos el siguiente elemento de línea:

$$d\ell^2 = a^2(t) (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega). \quad (24)$$

Esta curvatura nos termina dando una superficie hiperbólica o abierta. Mientras  $\chi$  incrementa fuera del origen, las circunferencias de las esferas incrementan en un factor  $\sinh \chi$  y como  $\sinh \chi > \chi$  para todo  $\chi > 0$  entonces las superficies incrementan más rápidamente su radio propio que en un Universo plano, y por esto es que no son superficies que podamos representar en una hipersuperficie tridimensional. Pero, de hecho, si entendemos que la superficie es parte de un Universo de Minkowski y por tanto es isotrópico y homogéneo.

### 3.2. Dinámica de FRLW

Regresando a la métrica, más conocida como FLRW, que nos interesa para describir al Universo está expresada en coordenadas comóviles como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (25)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala adimensional deducido anteriormente y  $r$  es una distancia comóvil teniendo como dimensiones la longitud. La parte espacial de la métrica mide la distancia comóvil entre dos puntos vecinos al mismo valor de  $t$ . La parte radial nos dice el componente geométrico del Universo, representado por el valor de  $k$ , con el agregado del factor  $a(t)$  que nos habla de que el volumen espacial del Universo está cambiando con el tiempo. Ahora, para entender la dinámica de la métrica, necesitamos introducirla en las ecuaciones de campo, calculando el tensor de Ricci (ver Apéndice B.2).

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -3\frac{\dot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-kr^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\frac{1}{k^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\frac{1}{k^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\frac{1}{k^2}) \end{pmatrix}.$$

Para terminar de completar las ecuaciones de campo se necesita el escalar de curvatura de Ricci  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ . Esto significa que:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{k}{a^2} \right].$$

Con esto ya tenemos la parte izquierda de las ecuaciones de campo, la parte geométrica. Ahora, recordando lo que estábamos discutiendo sobre la homogeneidad e isotropía, necesitamos saber

modelar el Universo con esas características. Primero, asumimos un fluido universal para modelar la materia y la energía que existen, tratando a las galaxias y las estrellas como partículas de un gas.

Entonces, caracterizando a un gas con un vector de 4-velocidades  $u_\mu$  asumiendo que un observador que ve a su vecindad sin movimiento, por una densidad de energía  $\rho$  y por una presión del fluido  $p$ . Entonces, para este gas de galaxias podemos definir el tensor de energía-momento como:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (26)$$

tomando en cuenta que si elegimos modelar la materia y energía como este fluido perfecto isotrópico en un sistema de referencia, lo será en algún sistema y por tanto el fluido estará en reposo en un sistema de coordenadas y por tanto la 4-velocidad se verá como:

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (27)$$

y por tanto el tensor de energía momento se convierte en:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (28)$$

que usando coordenadas localmente ortonormales se puede expresar el tensor como:

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, p, p, p), \quad (29)$$

y por tanto la traza del tensor es:

$$T = T_\mu^\mu = -\rho + 3p. \quad (30)$$

Ahora, explorando la evolución del fluido, puesto que consecuencia de las ecuaciones de campo, el tensor es gobernado por la conservación de la energía, podemos obtener algunas conclusiones [42]. La expresión de la conservación se puede expresar para el tensor de energía momento como:

$$\nabla_\mu T_0^\mu = 0, \quad (31)$$

y desarrollando para esto:

$$0 = \partial_\mu T_0^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_0^\lambda - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T_\lambda^\mu \quad (32)$$

$$0 = -\partial_0 \rho - 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p). \quad (33)$$

Para seguir progresando por este camino, se elige una ecuación de estado que relacione la densidad y la presión del fluido. Usualmente, si elegimos  $p = w\rho$  con  $w$  una constante independiente

del tiempo en el caso de  $\Lambda$ CDM, aunque no sirve para describir un gas ideal. Existen además otras formas de parametrizar, pero la ecuación de la energía termina convirtiéndose en:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (34)$$

integrando nos queda finalmente:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}, \quad (35)$$

de donde se pueden obtener conclusiones sobre la dinámica del fluido del Universo. Las diferentes formas en las que se puede escribir la  $w$  parametrizan, también, diferentes formas de energía oscura.

### 3.3. Ecuaciones de Friedmann

Regresando a las ecuaciones de campo, podemos reescribirlas como:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (36)$$

Las ecuaciones de campo sólo darán resultados para las componentes temporales (00) y para las componentes espaciales que tengan elementos en la diagonal. Así, para la parte temporal tendremos:

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p), \quad (37)$$

y para la parte espacial:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p), \quad (38)$$

usando la ecuación (37) podemos introducir una expresión para la doble derivada y de ahí obtener las dos finales ecuaciones diferenciales, que son las ecuaciones de Friedmann.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (39)$$

que son desde ahora el centro de estudio del trabajo. Como podemos observar, la composición de energía en el Universo, su curvatura y su presión son las que determinan el comportamiento dinámico y evolución del Universo. En las próximas secciones se investigará más a fondo como se puede expresar esta densidad de energía y la curvatura para finalmente tener modelos de la evolución del cosmos. Empezamos a hacer cosmología desde las ecuaciones de campo, pero finalmente tenemos ecuaciones diferenciales que podemos intentar resolver.



### 3.4. Parámetros cosmológicos

Antes de tratar de resolver las ecuaciones diferenciales, se pueden explorar algunas características y parámetros cosmológicos de las ecuaciones de Friedmann. Aquí es conveniente introducir el ritmo de expansión caracterizada por el **parámetro de Hubble**.

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (40)$$

que es normalmente evaluado al tiempo de hoy (y que el tiempo se denota como  $t_0$ ) y es escrito como  $H_0 = H(t_0)$ , pero en principio es una función que depende del tiempo. El valor actual de  $H_0$  tiene inconvenientes a la fecha de escritura de este trabajo (2021)[16] conocido como tensión de Hubble pero por el momento podemos considerar un valor aceptable el de la colaboración Planck [3]:

$$H_0 = 67.45 \pm 0.46 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (41)$$

De hecho usualmente el valor de la constante suele ser representado como:

$$H_0 = 3.24h \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}, \quad (42)$$

y que de hecho el inverso de esta cantidad da un aproximado al orden de magnitud de la edad del Universo:

$$\frac{1}{H_0} = 3.09h^{-1} \times 10^{-17} \text{ s} = 9.78h^{-1} \times 10^9 \text{ años}, \quad (43)$$

y que además multiplicado por la velocidad de la luz  $c$  (ya sin asumirla como 1) puede darnos el orden de magnitud del Universo observable:

$$\frac{c}{H_0} = 9.27h^{-1} \times 10^{25} \text{ m} = 3h^{-1} \times 10^9 \text{ pc}. \quad (44)$$

Pero entonces surge el problema del significado de «tiempo actual». Si consideramos que el tiempo es algo que está en constante cambio y no es sólo algo estático pensar en que  $t_0$  pueda ser una constante no completa el significado, pero podemos comparar su valor con el de, por ejemplo, 100 años atrás que es un tiempo exagerado de vida de una persona pero si es un tiempo relativamente aceptable desde que se empezó a hacer cosmología podemos observar que su cambio numérico es de  $10^{-8}$  [43], muy pequeño. Podemos entonces calcular este tiempo como:

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^1 \frac{da}{a} = \int_0^1 \frac{da}{H(a)a}. \quad (45)$$

Además de la tensión de Hubble (y otras cuestiones sin resolver), el problema al que se enfrenta la cosmología es la medición de las distancias, puesto que estas son gigantescas.

Usualmente, al medir distancias dentro del sistema solar, se suele medir con distancias expresadas unidades astronómicas (UA que está definida como más o menos 150 millones de kilómetros), pero para estrellas ya se necesitan unidades más grandes como los pársecs, o múltiples de esta unidad.

Definimos al pársec como la distancia a la cuál vemos a un objeto como un paralaje de un segundo de arco, o dicho de forma más sencilla *la distancia desde la cuál veríamos a la distancia entre la Tierra y el Sol como un segundo de arco en el cielo*. Cuando las distancias crecen a tamaño galáctico, se suelen utilizar unidades más grandes, siendo la más popular el año luz, que es la distancia recorrida por la luz durante un año terrestre. El problema inicia a longitudes cosmológicas, estando fuera de la galaxia, cuando, por la propia expansión del Universo, entendemos que la distancia está cambiando y por ello hablar solamente de una distancia no tiene mucho sentido. Si la separación entre la Tierra y un objeto cosmológico han cambiado respecto al momento en que se emitieron los fotones que nos permiten observarlo y al momento en que nos llegan, esa luz debe haber partido desde una distancia más cercana, así que es importante entender el término de la distancia en el momento *actual*.

Pero, se puede evitar el problema. Así que en vez de distancias utilizamos el efecto que tiene este cambio de lejanía en la luz. Como usualmente al medir la luz que sale de las estrellas que existen en las galaxias, estas usualmente contienen líneas de emisión o de absorción que son propias de las características químicas de todos los objetos. Si sabemos que objetos o elementos químicos generan ciertas líneas de emisión o de absorción medidas aquí en la Tierra ( $\lambda_{em}$ ), podemos comparar en dónde está ubicada esta misma línea del objeto que estamos observando ( $\lambda_{ob}$ ) de forma que definimos el corrimiento al rojo como:

$$z = \frac{\lambda_{ob} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}. \quad (46)$$

Decimos que un objeto, entonces, tiene un corrimiento al rojo  $z$ . Es usual que en la astronomía y cosmología se utilice el corrimiento al rojo como unidad de medida. Esto se puede, porque asumimos que el objeto que está emitiendo la luz sigue algún tipo de cambio en su distancia, y que además está fija en algún tipo de hipersuperficie en el tiempo cosmológico  $t$  en que emite la luz. Si ahora, nombramos que el tiempo en el que recibimos la luz en la Tierra como  $t_0$ , y que la luz viaja hacia nosotros en trayectorias radiales de la métrica de Friedmann, entonces podemos asumir que  $\theta = cte$  y  $\phi = cte$  y al introducirlo en la métrica que asumimos como cantidad conservada:

$$0 = -dt^2 + a^2(t)d\chi^2. \quad (47)$$

Entonces, para un objeto que estamos observando hoy podemos obtener:

$$1 + z = \frac{a_0}{a}, \quad (48)$$

y si por conveniencia (algo de lo que se hablará más adelante) elegimos  $a_0 = 1$  tendremos:

$$1 + z = \frac{1}{a}. \quad (49)$$

Otro parámetro importante, que es el que más se usará, es el densidad.

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_{crit}}, \quad (50)$$

donde la *densidad crítica* está definida como:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (51)$$

y se llama densidad crítica porque podemos escribir la ecuación de Friedmann como:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}, \quad (52)$$

y entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \rho < \rho_c &\leftrightarrow \Omega < 1 \leftrightarrow k < 0 \leftrightarrow \text{Universo abierto,} \\ \rho = \rho_c &\leftrightarrow \Omega = 1 \leftrightarrow k = 0 \leftrightarrow \text{Universo plano,} \\ \rho > \rho_c &\leftrightarrow \Omega > 1 \leftrightarrow k > 0 \leftrightarrow \text{Universo cerrado,} \end{aligned}$$

y de nuevo regresamos a cuestiones ya discutidas sobre la curvatura del Universo. Una de las formas de observar más claramente el efecto de la curvatura en la expansión del factor de escala es simplemente hacer una gráfica de la evolución. Esta suele encontrarse en la literatura, como la que aparece en la figura 2 que nos muestra como para un Universo cerrado, el factor de escala tendería a  $a(t) \rightarrow 0$ , haciendo que el Universo regrese a un estado original, mientras que los otros dos continúan expandiéndose, sólo que a diferente tasa.

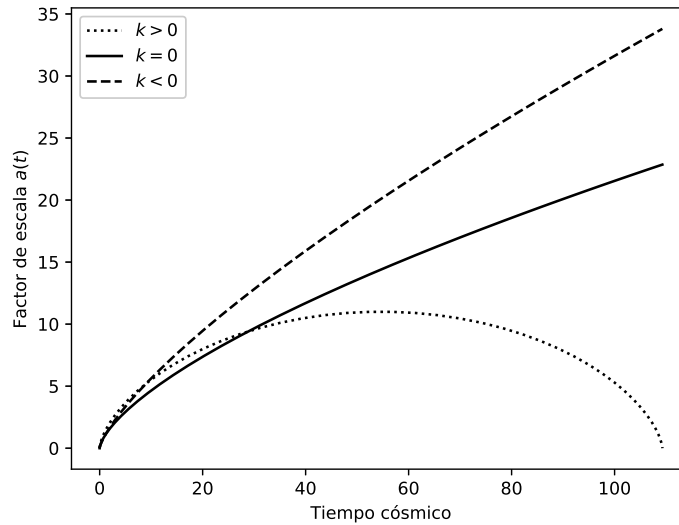


Figura 2: Efectos de la componente de curvatura en el Universo. Igual que a lo largo del texto, el factor de escala se refiere a  $a(t)$ . La línea punteada representa a un universo cerrado con curvatura positiva  $k > 0$ , la línea sólida un universo compuesto por un sólo fluido pero plano  $k = 0$ , mientras que la línea discontinua representa un universo con curvatura espacial negativa  $k < 0$ .

Hablar de la evolución del factor de escala en las ecuaciones de Friedmann que describa la dinámica del Universo no es una tarea trivial puesto que el Universo está compuesto por diferentes tipos de componentes, tanto materia como radiación (que suele considerarse materia *relativista*) y que pueden ser descritas con alguna ecuación de estado.

En General estas ecuaciones de estado suelen ser tan complicadas como uno quiera dependiendo de qué tan específico se necesite el problema. En general, como hablamos de un espacio como el Universo y con lo que observamos esto suele describirse como un gas diluido cuya ecuación de estado es relativamente simple con una forma lineal:

$$p = w\rho.$$

La anterior ecuación es conocida como una ecuación de estado. Este factor  $w$  puede tener un valor acorde al modelo de estudio. El más sencillo es una constante. Para un fluido no relativista las partículas con masa la temperatura está dada por los movimientos colectivos de todas los elementos individuales, que tienen velocidades mucho más pequeñas que la velocidad de la luz. Esto en lenguaje termodinámico puede escribirse como la ley de gas perfecto:

$$p = \frac{\varepsilon}{\mu}kT, \quad (53)$$

donde  $\mu$  es la masa media de las partículas del gas. La densidad de energía de un gas con estas características puede tener la forma  $\rho \sim \varepsilon c^2$  y entonces en términos de  $\rho$  la presión se puede escribir como:

$$p \approx \frac{kT}{\mu c^2} \rho. \quad (54)$$

Entonces para un gas no relativista la temperatura  $T$  y el promedio de la velocidad de cada elemento están relacionadas como:

$$3kT = \mu \langle v^2 \rangle, \quad (55)$$

y entonces la ecuación de estado  $p_{\text{no-rel}} = w\rho_{\text{no-rel}}$  tendrá una forma lineal con:

$$w \approx \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \ll 1. \quad (56)$$

En cambio para un gas de fotones, por ejemplo, de características relativistas podemos escribir su ecuación de estado como:

$$p = \frac{1}{3}\rho. \quad (57)$$

De esta forma se suele elegir  $w = 0$  para *materia* no relativista,  $w = \frac{1}{3}$  para las componentes relativistas, que suelen ser los fotones, o más conocido en la literatura y en este trabajo, como radiación. En el caso de que  $w < -\frac{1}{3}$  este componente hipotético generaría una aceleración del factor de escala y este es usualmente referido como energía oscura y sobre su naturaleza se hablará más adelante.

Entonces, para tratar con elementos que contienen diversas ecuaciones de estado, digamos con  $w = 0$ ,  $w = -1$  y  $w = -\frac{1}{3}$  podemos aprovechar que las componentes diferentes son aditivas en la presión y por tanto la densidad total de energía se puede expresar como:

$$\rho = \sum_w \rho_w, \quad (58)$$

y la ecuación de interacción de cada fluido puede expresarse por separado mientras no haya interacción entre las diferentes componentes.

$$\frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+w) = 0, \quad (59)$$

y que al igual que lo mostrado en (35) esta puede resolverse como:

$$\rho_w = \rho_{w,0} a^{-3(1+w)}, \quad (60)$$

tomando  $a_0 = 1$  en la época actual. De esta solución a la evolución de las densidades de acuerdo al factor de escala, podemos observar que la materia disminuye su aportación al contenido del Universo como la dependencia cúbica de la siguiente forma:

$$\rho_M = \rho_{M,0} a^{-3(1)} = \rho_{M,0} a^{-3}, \quad (61)$$

lo mismo, para la radiación, la densidad de energía decae como:

$$\rho_R = \rho_{R,0} a^{-3(4/3)} = \rho_{R,0} a^{-4}. \quad (62)$$

Actualmente sabemos con una precisión razonable [6] [3] el valor de la densidad de energía del Fondo cósmico de Microondas, con el que podemos inferir la cantidad total de radiación contenida en el Universo usando la estimación de materia que hay en el Universo. Con las primeras mediciones se llegó a que  $\Omega_{M,0} \sim 0.3$  y calculando que la densidad de energía de fotones evoluciona como  $\sim a^{-4}$  según la ecuación (62), podemos hacer un cálculo para  $\rho_{CMB}$  (CMB son las siglas en inglés para la Radiación de Fondo de Microondas):

$$\rho_{CMB} = \alpha T_0^2 \approx 0.260 \text{ MeV m}^{-3}, \quad (63)$$

sabiendo que la temperatura del fondo es de  $T_0 = 2.725 \text{ K}$  [13]. Comparándola entonces con la densidad de energía crítica podemos estimarla para el fondo de microondas:

$$\Omega_{CMB,0} = \frac{\rho_{CMB}}{\rho_c} = \frac{0.260 \text{ MeV m}^{-3}}{5200 \text{ MeV m}^{-3}} = 5.0 \times 10^{-5}, \quad (64)$$

y entonces, sumando con la densidad de los neutrinos podemos obtener la densidad de radiación:

$$\Omega_{R,0} = \Omega_{CMB,0} + \Omega_\nu = 5.0 \times 10^{-5} + 3.4 \times 10^{-5} = 8.4 \times 10^{-5}, \quad (65)$$

Usando el valor de la materia, y asumiendo un Universo plano, podemos inferir el valor de la densidad de energía para la expansión acelerada o energía oscura como:

$$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{M,0} - \Omega_{R,0} \approx 0.7. \quad (66)$$

Estos valores numéricos ensamblan un modelo básico para cosmología que se conoce como *Benchmark Model* en inglés o modelo de *Referencia*, que es el punto de partida de la literatura para hablar sobre cosmologías analíticas y numéricas.

En el tiempo actual del Universo, podemos hacer un pequeño cálculo:

$$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{M,0}} = \frac{0.7}{0.3} \approx 2.3, \quad (67)$$

que en lenguaje de cosmología significa que la energía oscura es *dominante* sobre la materia en el momento actual. Ahora, si el Universo se ha estado expandiendo desde un estado inicial podemos entonces entender que debe haber habido un momento donde la energía oscura y la materia aportan más o menos lo mismo a la componente total del Universo, de esta forma:

$$a_{M\Lambda} = \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \approx \left( \frac{0.3}{0.7} \right)^{1/3} \approx 0.75, \quad (68)$$

que es el momento o la época en el Universo cuando la materia y la energía oscura contribuían de igual forma. Lo mismo se puede hacer para la materia y la radiación. Esto es importante puesto que será utilizado más adelante para resolver las ecuaciones de Friedmann.

Al trabajar en sus ecuaciones de campo, Einstein creía que el Universo era estático [7], y por ello introdujo un factor adicional  $\Lambda$  en sus ecuaciones de campo, puesto que la propia dinámica del factor de escala en una métrica como la de Friedmann no lo permite. Con el objetivo de conseguir el deseado estado estático del Universo introdujo lo que ahora conocemos como *constante cosmológica* y que representa la aceleración del Universo. El factor  $\Lambda$  se puede introducir tanto en las ecuaciones de Friedmann dentro de  $\rho$  en un factor que va como  $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$  o como una corrección extra que se escribe como:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3}. \quad (69)$$

Esto depende de para quién o como se trabaje. Los astrónomos suelen considerar a  $\Lambda$  como un objeto extra y que no es parte de  $\Omega$  del Universo [7][6] mientras que la gente que hace algo más de cosmología o partículas si lo considera como contribución a la densidad total de energía.

Habiendo definido ya el corrimiento al rojo  $z$  es importante hablar de una cantidad que será usada más adelante. La *distancia de luminosidad* es una forma de expresar la cantidad de luz que hemos recibido de un objeto muy lejano [7] y que nos sirve para asignarle una distancia si entendemos que el fenómeno del que proviene dicha luz tiene una forma intrínseca de emitirse. Este es un concepto basado más en la forma que se tienen en astrofísica de cuantificar la distancia a las cosas basada en la cantidad de ondas electromagnéticas que podemos recibir del objeto. Original e históricamente, las estrellas se han clasificado de acuerdo a su brillo aparente en el cielo, y las clasificaciones estaban hechas de esa forma, llevando a diversos problemas puesto que la respuesta

del ojo a la luz no es lineal; por tanto estrellas de 1:10:100 en relación de brillo parecerán la misma diferencia entre ellas para el ojo humano [44]. Esto significa que la respuesta humana al brillo es logarítmica.

La forma más objetiva de tratar de usar el término de *magnitud aparente* que es el brillo que le asignamos a los objetos en el cielo, es usando su *densidad de flujo*  $F$ :

$$m = -2.5 \log_{10} \left( \frac{F}{F_0} \right). \quad (70)$$

$F_0$  es una magnitud arbitraria 0 que corresponde a un flujo que se seleccionó como punto de partida [44]. Esto hace que para diferentes magnitudes existan diferentes puntos 0. Pero para poder cuantificar distancias, se necesita introducir también la *magnitud absoluta*  $M$  que es la magnitud aparente del objeto a 10 pc de distancia (como una estrella) [44]. Y para establecer una relación entre ambas, podemos usar el flujo de tal manera que:

$$\frac{F(d)}{F(10)} = \left( \frac{10\text{pc}}{d} \right)^2, \quad (71)$$

donde  $d$  es la distancia al objeto y  $F(d)$  su flujo, además de que  $F(10)$  es el flujo a 10 pc. Y entonces la diferencia de magnitudes a 10pc será de:

$$m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{d}{10\text{pc}} \right). \quad (72)$$

En la ecuación anterior,  $m - M$  está definido entonces como el módulo de distancia  $\mu$ . Este se puede reescribir en una forma mucho más usada en cosmología:

$$\mu = 5 \log_{10}(d) - 5, \quad (73)$$

donde  $d$  está medida en pársecs. Como las distancias a objetos que nos interesan cosmológicamente son mucho más grandes que pársecs [44] [6] entonces esta suele reescribirse en su forma final, simplemente usando que 1Mpc son  $1 \times 10^6$  pc. Esto, por tanto nos deja una relación usual:

$$\mu = 5 \log_{10}(d \times 10^6) - 5 = 5 \log_{10} d + 5 \log_{10}(10^6) - 5 = 5 \log_{10} d + 25, \quad (74)$$

donde ahora si  $d$  está en unidades de Mpc. La constante 25 suele dejarse en muchos análisis como una constante a ajustar con las observaciones [45]. Esto, lleva a la expresión más importante en cosmología para el módulo de distancia:

$$\mu = 5 \log_{10} (d/\text{Mpc}) + \mu_0. \quad (75)$$

donde  $\mu_0$  es alrededor de 25 y  $d$  será ahora la distancia que podemos calcular en base al Universo que se esté modelando, de forma que esta distancia depende del modelo cosmológico siendo  $E(z) = H(z)/H_0$ , definida como:

$$d = \frac{c}{H_0} (1+z) \int_0^{z'} \frac{dz'}{E(z')}, \quad (76)$$

y por tanto, el módulo de distancia finalmente se puede escribir como:

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left( \frac{c}{H_0} (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) + \mu_0. \quad (77)$$

Esto debemos hacerlo puesto que medir las distancias en el Universo es una tarea altamente no trivial puesto que el Universo se está expandiendo para objetos que se encuentren muy lejanamente, las distancias se estarán haciendo más largas continuamente y más rápidamente (por la ley de Hubble), es por ello que necesitamos encontrar alguna forma de medir las distancias de tal forma que podamos establecer alguna forma de medir su posición basados en alguna propiedad intrínseca del objeto, que podamos comparar con objetos a la misma distancia o corrimiento al rojo y que por tanto nos permitan hacer alguna calibración para determinar objetos cada vez más lejanos. La forma más fácil de darle la vuelta es simplemente medir los objetos más lejanos no en distancia, sino más bien en términos del corrimiento al rojo cosmológico, generado por la expansión del factor de escala  $a(t)$ .

Esto es conocido como el método de *escalera de distancias*. Para ello simplemente, usamos objetos que sepamos medir para calibrar objetos más lejanos. Una vez calibrado el siguiente paso, se hace lo mismo para objetos a su vez más distantes. Por ejemplo, si sabemos bien medir distancias con el paralaje que ocurre por el cambio de posición de la Tierra respecto al Sol, podemos tomar un objeto que podamos medir en esa distancia, y que tenga una propiedad intrínseca en su brillo. Esto se conoce como *candela estándar* y es fundamental para las observaciones de nuestro Universo. Un ejemplo de una candela estándar son las estreidas cefeidas[6], que son punto de calibración para medir las distancias a galaxias más lejanas.

Entonces, usando la luminosidad de las cefeidas, podemos obtener una relación entre la luminosidad y el módulo de distancia  $\mu$ .

### 3.5. Soluciones a las ecuaciones de Friedmann de la literatura

Recuperando las ecuaciones de Friedmann (ecuación (39)), nos interesa especialmente la que contiene la primera derivada.

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}. \quad (78)$$

Y esta es desde ahora la ecuación a la que se pondrá la mayor atención, puesto que si obtenemos una función para el factor de escala  $a(t)$  estaremos resolviendo las ecuaciones de Friedmann para un Universo con distintos fluidos, contenidos en el parámetro  $\rho$ .

#### 3.5.1. Universos de una sola componente

Tomando la ecuación de Friedmann sólo con curvatura mostrada en la ecuación (78) podemos asumir que el Universo no tiene ningún fluido. Con esto la parte de la densidad de energía del



Universo  $\rho = 0$  y por tanto la ecuación queda como:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2}, \quad (79)$$

que podemos despejar para que quede más claro como:

$$\dot{a} = \sqrt{-k}. \quad (80)$$

La solución trivial de esta ecuación es simplemente  $\dot{a} = 0$  y  $k = 0$  que mansamente regresa al espacio de Minkowski estático y espacialmente plano que mantiene todas las propiedades de la Relatividad especial. Pero, esta misma ecuación (79) también nos dice que tener un Universo vacío con una curvatura espacial postivia es imposible puesto que la raíz del lado derecho sería negativa. En cuanto a la curvatura con valor negativo (-1), tendremos:

$$\frac{da}{dt} = 1 \Rightarrow da = dt \Rightarrow a = t + C, \quad (81)$$

y como queremos, por construcción que  $a(1) = 1$  (queremos que actualmente la ) y  $a(0) = 0$  la constante de integración  $C = 0$ . Entonces:

$$a(t) = t. \quad (82)$$

Graficando esto, podemos simplemente ver que es la identidad para el comportamiento del factor de escala.

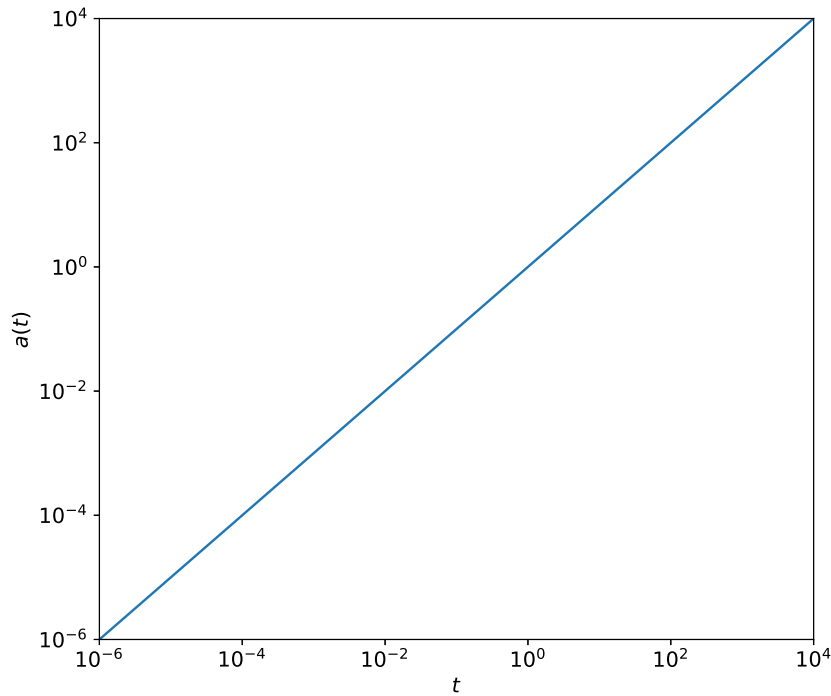


Figura 3: Evolución de un Universo vacío, el factor de escala contra el tiempo con una curvatura negativa.

Ya se exploró en los anteriores párrafos el ejemplo de un Universo vacío (que se muestra en la figura 3) con  $\rho = 0$  y  $k \neq 0$ , ahora exploremos el caso contrario. Supongamos un Universo con algún fluido pero con curvatura espacial  $k = 0$ . En este caso, si la densidad de energía del único fluido es  $\rho_0$  podemos escribir la ecuación de Friedmann de la siguiente forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0, \quad (83)$$

donde ahora se tiene que decidir como será la forma del fluido que describirá a nuestro Universo. Tomemos primero el caso de un Universo con materia sólomente. Como ya vimos, la materia sigue una densidad de energía como:

$$\rho = \frac{\rho_{M,0}}{a^3}, \quad (84)$$

de forma que sustituyendo en la ecuación de Friedmann en (83):

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_{M,0}}{a}, \quad (85)$$

lo que ya nos queda como una ecuación separable y que permite ser integrada. La manera alternativa presentada en la literatura [7] es suponer una ley de potencias para el tiempo  $a \sim t^q$ . Sus-

tituyendo en la ecuación diferencial se tendrá del lado izquierdo  $\dot{a} \sim qt^{q-1}$  y entonces  $\dot{a}^2 \sim t^{2(q-1)}$ . Del lado derecho simplemente queda una dependencia  $t^{-q}$ . De forma que se puede resolver:

$$\begin{aligned} t^{2(q-1)} &= t^{-q}, \\ 2(q-1) &= -q, \\ q &= 2/3, \end{aligned}$$

y por tanto podemos aproximar el factor de escala a un comportamiento del tipo:

$$a \sim t^{2/3}.$$

Y si colocamos las condiciones iniciales  $t = t_0$  actualmente y  $a_0 = 1$  tendremos:

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \quad \rho = \frac{\rho_{M,0}t_0^2}{t^2}. \quad (86)$$

Para el caso de la radiación, el proceso es totalmente análogo:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_{R,0}}{a^2}, \quad (87)$$

y que de nuevo, suponiendo una dependencia  $a \sim t^q$  se puede resolver igualmente para  $q$ :

$$\begin{aligned} t^{2(q-1)} &= t^{-2q}, \\ 2(q-1) &= -2q, \\ q &= 1/2, \end{aligned}$$

y por tanto la solución para  $a$  y  $\rho$  queda de la forma:

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}, \quad \rho = \frac{\rho_{R,0}t_0^2}{t^2}. \quad (88)$$

Usualmente en las soluciones de la literatura no se exploran mucho más los comportamientos cosmológicos acerca de estas soluciones. Se limitan a encontrar este tipo de dependencias de  $a(t)$  [6] [7].

### 3.5.2. Universos de múltiples componentes

Ahora, para explorar mezclas de componentes se parte de nuevo desde la ecuación de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (89)$$

usando la relación de Hubble, podemos sustituir que  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  y por tanto, podemos llegar a la relación:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (90)$$

pero ahora,  $\rho$  contendrá toda la información y las contribuciones de las componentes del Universo, incluyendo si se considera una constante cosmológica. Si se asume un Universo con tres componentes fundamentales, por ejemplo, radiación, materia y energía oscura, la densidad de energía se verá como:

$$\rho = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left( \frac{\Omega_{R,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{M,0}}{a^3} + \Omega_\Lambda \right), \quad (91)$$

y usando ya un universo que deja de ser plano podemos definir en términos de la curvatura a la densidad crítica para la parte geométrica como:

$$k = H_0^2 \Omega_k, \quad (92)$$

y por tanto, sustituyendo en la ecuación de Friedmann tendremos:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \left( \frac{\Omega_{R,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{M,0}}{a^3} + \Omega_\Lambda \right) + H_0^2 \frac{\Omega_k}{a^2}, \quad (93)$$

que entonces se puede contraer como:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \left( \frac{\Omega_{R,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{M,0}}{a^3} + \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_k}{a^2} \right). \quad (94)$$

De la ecuación (94) se puede obtener una expresión para la derivada de  $a$ :

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left( \frac{\Omega_{R,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{M,0}}{a} + \Omega_\Lambda a^2 + \Omega_k \right), \quad (95)$$

y ahora, es común, y más útil graficar el factor de escala respecto al producto  $H_0 t$  y por tanto, solemos expresar la ecuación como una integral dada como:

$$H_0 t = \int_0^{\tilde{a}} d\tilde{a} \left( \frac{\Omega_{R,0}}{\tilde{a}^2} + \frac{\Omega_{M,0}}{\tilde{a}} + \Omega_\Lambda \tilde{a}^2 + \Omega_k \right)^{-1/2}. \quad (96)$$

De esta forma, ya se tiene un primer acercamiento a un modelo dinámico del Universo, que además puede resolverse numéricamente. Pero, ahora el objetivo es resolver esta ecuación de forma analítica, cosa imposible con todas las componentes al mismo tiempo puesto que la integral se convierte en un cambio de variable del que nunca se podrá llegar a nada, y por ello tenemos que recurrir a vueltas matemáticas para llegara a diferentes expresiones. Para ello, utilizaremos primero las técnicas usuales que se encuentran en la literatura, para después considerar por métodos nuevos que requieran menos herramientas matemáticas.

Básicamente este trabajo utilizará dos bloques numéricos de valores: El modelo de *referencia* [6] y los valores numéricos de la colaboración Planck [3].

| Parámetro        | Valor                 |
|------------------|-----------------------|
| $\Omega_\Lambda$ | 0.7                   |
| $\Omega_{M,0}$   | 0.3                   |
| $\Omega_{R,0}$   | $8.45 \times 10^{-5}$ |
| $\Omega_k$       | 0                     |

Tabla 1: Valores numéricos para el modelo de *referencia*

| Parámetro        | Valor |
|------------------|-------|
| $\Omega_\Lambda$ | 0.68  |
| $\Omega_{M,0}$   | 0.31  |
| $\Omega_{R,0}$   | 0.009 |
| $\Omega_k$       | 0.001 |

Tabla 2: Valores numéricos para Planck

Integrando la ecuación (96) mediante métodos numéricos<sup>5</sup> podemos obtener primero la solución numérica de la dinámica del factor de escala que se hace graficando  $a(t)$  contra el producto  $H_0 t$ .

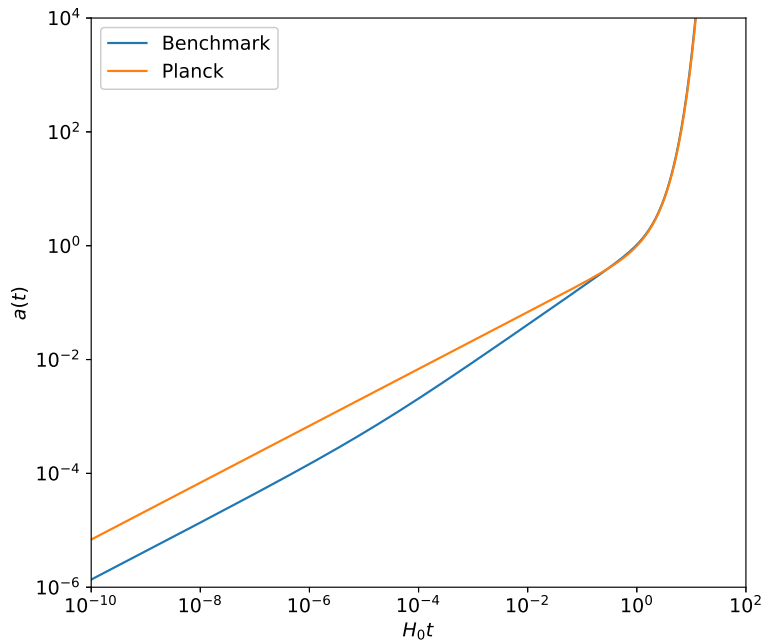


Figura 4: Comparación entre las integraciones numéricas de los valores de Planck y de *referencia* de acuerdo con los valores reportados en las tablas 2 y 1.

<sup>5</sup>en este caso está hecha con el método *quad* contenida en la librería Scipy de Python

## 4. Observaciones Cosmológicas

Otra forma de describir a la cosmología es decir que es el estudio del Universo como un todo [6]. Podemos considerar que el inicio de la cosmología moderna es de principios del siglo XX con la Teoría General de la Relatividad y que fue reforzada con la invención de aparatos cada vez más sofisticados y precisos que nos permiten generar un mapa de las condiciones en las que existimos. Más o menos tenemos un entendimiento y concordancia de los modelos estándar de cosmología resolviendo las ecuaciones diferenciales dadas por la métrica FRLW con los datos cosmológicos, siendo el más usado y más cómodo el marco de  $\Lambda$ CDM. Pero actualmente, con todos los avances tecnológicos, estamos en una nueva etapa de la cosmología que está empezando a recibir datos de alta calidad y precisión de hasta la época oscura del Universo (antes de la formación de las galaxias) y podemos observar con alta precisión el fondo cósmico de microondas. Este siglo ha significado generar un marco más o menos consistente del lugar que ocupamos y la dinámica de la que somos parte. Es bien sabido además en el mundo de la cosmología que todavía tenemos huecos en el entendimiento fundamental de los componentes del Universo, y pese a que  $\Lambda$ CDM es una herramienta que nos ha permitido explicar conjuntos de datos, nos falta entender la naturaleza de la aceleración del Universo [10] y de la tensión de Hubble [16]. Por ello, es importante marcar que aunque tenemos un modelo donde las piezas encajan más o menos bien con las observaciones reportadas, seguimos necesitando y explorando modelos que nos permitan relajar los problemas que todavía encontramos con los modelos cosmológicos estándar cuyos problemas van más allá de la sistematización de los experimentos.

### 4.1. Pruebas del principio cosmológico

Para construir la métrica FRLW se hizo uso de dos suposiciones fundamentales: la isotropía y la homogeneidad del Universo. Esto parece poco intuitivo puesto que el cielo que observamos está lleno de inhomogeneidades como estrellas, galaxias y aglomerados de galaxias. Pero tenemos observaciones de que efectivamente el Universo parece ser homogéneo a muy grandes escalas, como por ejemplo la última toma de muestras de Planck [13] confirma que la temperatura del Universo temprano varía a ritmos muy pequeños a lo largo de todo el cielo. Pero, estos pequeños cambios son los que generaron la formación de la estructura que hoy le observamos al Universo [8]. Además, de acuerdo a las encuestas de datos de supernovas y de galaxias [22] [46] parecen mostrar que la distribución de estas parece ser suave y una constante al menos hasta una escala de unos 10 Mpc. Pero no significa que sea una suposición que no sea explorada para tratar de obtener alguna alternativa a  $\Lambda$ CDM. Algunos estudios [47] [46] sugieren que las asimetrías de las observaciones del proyecto Planck (y detalladas en [13]) son consecuencia de un incumplimiento del principio cosmológico, además de una posible dependencia direccional en las tomas de datos del parámetro  $H_0$  (del que se hablará más adelante) y las diferentes interpretaciones estadísticas para las muestras de supernovas y brotes de rayos gamma, además de cúasares [48].

## 4.2. La constante de Hubble

La Teoría Relatividad General se considera la base teórica de la cosmología moderna. Einstein mismo propuso en 1917 un modelo estacionario del Universo que mantuviera unido a las galaxias y a las estrellas entre ellas, pero rápidamente Lemaitre y Friedmann llegaron a la solución [31] de que el Universo es dinámico y se encuentra en expansión. Esto no fue tan impactante para la época hasta que Hubble en 1929 midió distancias a las galaxias y descubrió en el proceso que el Universo sí se expandía [9]. Es a partir de este momento cuando la cosmología empieza a basarse en observaciones y fundamentación física. La ley de Hubble es de hecho una de las primeras relaciones matemáticas obtenidas a partir de datos y que se lee como:

$$v = H_0 r, \quad (97)$$

donde  $v$  es la velocidad a la que se alejan las galaxias,  $r$  es la distancia y  $H_0$  es la constante de Hubble, que aunque originalmente el propio Edwin propuso un valor más alto [9] que el medido actualmente alrededor de  $70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Y justamente esta es una confirmación experimental de la homogeneidad e isotropía del Universo, puesto que para un Universo con esta propiedad todos los observadores reportarán la misma observación fundamental de que las cosas se alejan de nosotros. Y si el Universo está cambiando, podemos deducir que entonces las cosas que se alejan en algún momento estuvieron juntas en lo que ahora consideramos como condiciones iniciales del Universo, que además tiene una edad finita. Esta edad finita es conocida como el tiempo de Hubble  $H_0^{-1}$ .

La discrepancia entre las diferentes mediciones de  $H_0$  [16], que provienen de las observaciones realizadas al Universo temprano [3] o al fondo cósmico de microondas teniendo como resultado  $H_0 = 67.27 \pm 0.60 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  y las que observan un Universo más cercano a nosotros y por lo tanto más viejo teniendo como resultado un valor más alto como [49]  $H_0 = 74.3 \pm 2.2 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  y para el proyecto SH0ES donde  $H_0 = 73.75 \pm 2.11 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [50] evidencian un problema más allá de  $2\sigma$  (la nueva encuesta de Pantheon+ le da un valor por arriba de  $5\sigma$ ) de incertidumbre en las mediciones[22], algunas de ellas mostradas en la figura 5. Esto es conocido como *tensión de Hubble*.

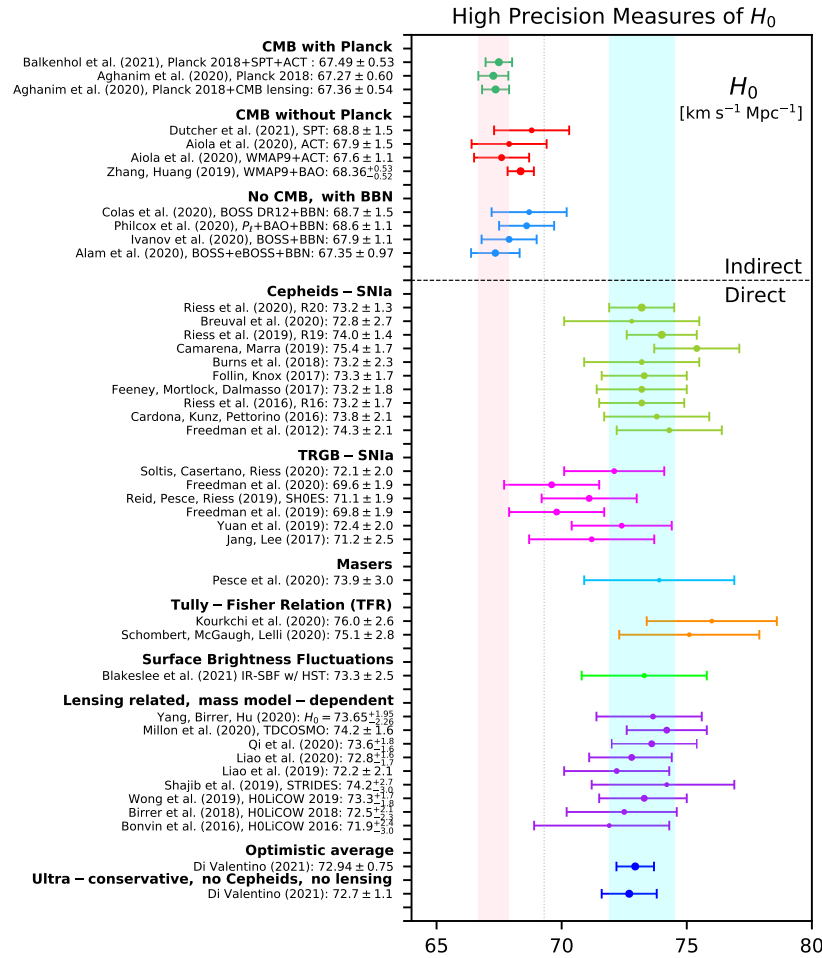


Figura 5: Tensión de Hubble, recopilando diferentes mediciones ya sea directas o indirectas de la constante, siendo la barra azul clara el resultado de la medición del proyecto SHOES [50] y la línea rosa vertical los resultados del proyecto Planck [3]. Tomada directamente de [16].

### 4.3. La radiación cósmica de Fondo

Usando las observaciones del fondo de microondas por el telescopio espacial Planck [13] se puede obtener información cosmológica con lo que se estiman parámetros de utilidad cosmológica. Los resultados de la exploración del Universo temprano de Planck arrojaron ajustes de datos de los modelos usados hasta ahora, aunque no son ni mucho menos el único equipo o los únicos datos obtenidos hasta ahora del fondo de microondas [51].

Siguiendo con la lógica de la sección anterior, el modelo dinámico del Universo también tuvo su confirmación cuando en 1965, Penzias y Wilson [13] descubrieron una señal proveniente de todos los sitios del cielo, que después de calibrar arrojó una temperatura de  $3.5 \pm 1\text{K}$  [11], acorde a los valores predichos anteriormente para un sistema dinámico que tuvo que aumentar su temperatura.



Aunque ahora sabemos que la temperatura es menor [6][3][7] y más o menos constante en todo el cielo [13], sabemos que no es completamente la misma, teniendo pequeñas variaciones conocidas como *anisotropías*. El satélite *Cosmic Background Explorer* (COBE) [52] fue el primero en tratar de medir las anisotropías, que nos permiten explorar nuestros modelos del Universo, consecuencia de que dichas pequeñas variaciones en la temperatura son consecuencia de procesos físicos en el Universo temprano.

Actualmente sabemos que el espectro de radiación del fondo de microondas es una de las mejores fuentes de medición de un cuerpo negro del Universo y cuyos fotones pueden haber sido emitidos no más tarde que  $z \sim 2 \times 10^6$  [53], cuya temperatura es de 2.7K con variaciones del orden de  $10^{-5}$  a lo largo de todo el cielo, o sea una temperatura casi constante. Pero no es sólo la temperatura constante lo que nos interesa, sino las perturbaciones que aparecen en diferentes regiones del cielo, con las que se puede hacer estadística. El *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) [51] fue el segundo proyecto en tratar de medir estas anisotropías. Tanto las mediciones de COBE como de WMAP son concordantes con las obtenidas por el telescopio Planck que fue la tercera generación de proyectos dedicados a medir estas pequeñas diferencias de temperatura, además de las variaciones que también presenta el campo magnético y eléctrico de la misma radiación.

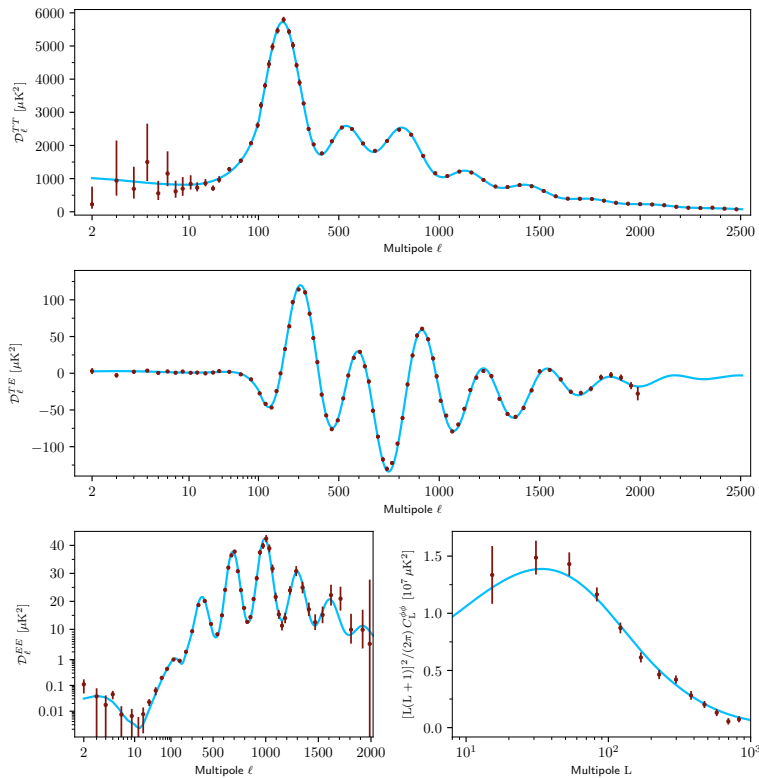


Figura 6: Mediciones de la estadística de las diferencias en temperatura y campos eléctricos y magnéticos en el fondo cósmico de microondas. Tomada directamente de los resultados de Planck 2018 [13]. La línea azul clara es el mejor ajuste o *best fit* de los datos que son el conjunto rojo de puntos.

Usando las mediciones del proyecto Planck, específicamente la liberación de datos del 2018, la línea azul clara de la figura 6 representa el mejor ajuste a los datos. Con este ajuste se obtienen los parámetros cosmológicos como  $H_0$  y  $\Omega_{M,0}$ . Justamente en  $H_0$  es donde tenemos el problema de que las mediciones de Universo temprano, que son todas las que he hablado como Planck, WMAP y COBE no son concordantes estadísticamente con las obtenidas por observaciones de Universo más tardío o de Universo local.

#### 4.4. Supernovas Ia

Usando supernovas, equipos más recientes han dado evidencia de que el Universo no sólo está expandiéndose, sino que se expande cada vez más aceleradamente. Esto fue aportado por Perlmutter, Riess y Filippenko [10] que de hecho les dio el premio Nobel en 2011 quienes construyeron un diagrama con varias fuentes de datos entre la magnitud del fenómeno físico de 10 tipos de supernovas Ia [10] en un rango de corrimientos al rojo  $0.16 \leq z \leq 0.62$  y empleando métodos usuales de curvas de luminosidad se ajustaron los modelos cosmológicos para una densidad de materia  $\Omega_{M,0} = 0.3$  y la comparación para diferentes  $\Omega_\Lambda$  usando los valores 0.7 y 0.0 para observar las diferentes dinámicas del factor de escala que esto genera, y con ello, dar indicios de la existencia de una  $\Omega_\Lambda$  que se puede llamar *energía oscura*.

Medir estas supernovas para poder obtener elementos cosmológicos no es tarea sencilla. Una supernova es una estrella que ha llegado al final de su vida convirtiéndose en una enana blanca y que al absorber material de alguna estrella compañera o del medio en el que se encuentra [44] absorbe tanta cantidad de masa (límite de Chandrasekhar) que se dispara una reacción termoneuclear convirtiéndose en una explosión. La luz que nos llega de esta explosión de una estrella donde hay presencia de silicón [44], carbono y oxígeno [10] se comporta de manera muy regular para irse disipando (ver figura 7), y por eso se conocen como tipo Ia. Otros tipos de supernovas son más irregulares y por ello no tienen el uso cosmológico que las tipo Ia, cuyo espectro y curva de luz pueden ser estudiados para determinar su distancia o corrimiento al rojo. Esto es conocido como una *candela estándar*, puesto que es una manera uniforme de determinar propiedades de un conjunto de objetos que se parecen mucho, y que si sabemos medir su corrimiento al rojo, nos ayudan a generar un patrón uniforme de mediciones.

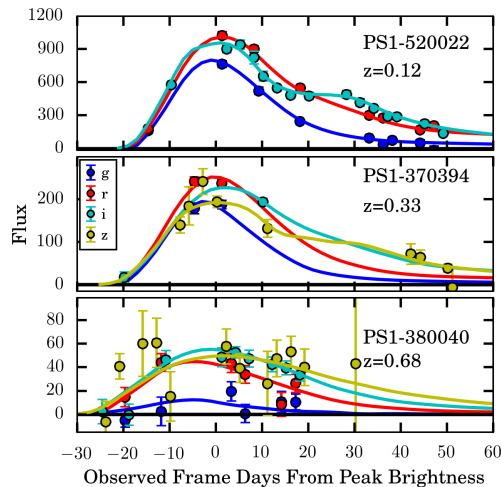


Figura 7: Curva de luz azul de supernovas tipo Ia compuesta de diferentes mediciones del Survey PS1. Tomada directamente de [25]. Las líneas son el mejor ajuste de las muestras de tres diferentes supernovas, representados con puntitos de diferentes colores que representan longitudes de onda de la medición. El punto cero para calibrar estos flujos se tomó de 27.5 de magnitud en cada banda de diferente longitud de onda.

El uniformizar las encuestas de supernovas se hace midiendo el corrimiento al rojo, y ajustando las curvas de luz para obtener un módulo de distancia  $\mu$ . El cálculo para ello, por ejemplo de la muestra de Pantheon [25] está hecho usando:

$$\mu = m_B - M + \alpha x_1 - \beta c + \Delta_M + \Delta_B, \quad (98)$$

donde  $\mu$  es el módulo de distancia,  $\Delta_M$  es la corrección de la distancia basada en la estimación de la galaxia donde fue observada la supernova,  $\Delta_B$  la corrección basada en los posibles prejuicios al momento de simular los datos,  $\alpha$  el coeficiente de relación entre la luminosidad y su tiempo de duración,  $\beta$  el coeficiente de relación entre la luminosidad y el color y  $M$  es la magnitud absoluta en el color azul (B). Además, de las curvas de luminosidad se determinan los valores  $x_i, m_B$  y  $c$  que son la forma de la curva de luz, el logaritmo de la normalización del flujo de luz y el color respectivamente [25]. Todas estas son formas independientes de un modelo cosmológico y que están basadas simplemente en mediciones de las características que consideramos constantes en todas las supernovas del mismo tipo Ia, por ello entendemos que estas son mediciones que no dependen de la física cosmológica que vayamos a probar. Así, estas son mediciones útiles para constreñir parámetros cosmológicos y en las que están basados muchos estudios [45] [10] [22] [54].

El porqué de la aceleración descubierta con estas supernovas no sabemos, así como tampoco sabemos la naturaleza de la sustancia que es causante de dicho efecto, pero por los valores también usados en las tablas modernas como 1 y 2 podemos ver que cerca del 70% de la densidad de energía del Universo está compuesta por este ente que genera la aceleración. Una de las soluciones a este problema es usar la constante cosmológica de Einstein [8], proponer su variación a lo largo del tiempo para que funcione como un fluido y buscarle soluciones como energía del vacío cuántico [14].

Actualmente necesitamos seguir refinando el valor de esta aceleración en la densidad de energía y tratar de avanzar más en su significado físico.

## 4.5. Brotes de Rayos Gamma: GRB

Adicionalmente, también podemos observar otro tipo de fenómenos en el cielo, que nos permiten ver mucho más lejos en distancia: los brotes de rayos gamma. Un brote de rayos gamma es uno de los eventos más energéticos del Universo que se conocen, ocurriendo más o menos a un ritmo de unos cuantos por día [55]. Estos eventos son tan energéticos que sustituyen por completo a las otras fuentes de rayos gamma cercanas, como el Sol, siendo esto un problema para su detección y observación puesto que al momento de apuntar con nuestros observatorios, la cantidad de energía no nos permite ubicar de forma correcta la fuente. Actualmente los GRB nos permiten ver zonas muy alejadas del Universo, siendo por ejemplo, de la muestra [26] el objeto más alejado observado a un corrimiento al rojo  $z = 8.2$ . Después del brote inicial de rayos gamma, suele quedar un remanente de energía que puede observarse en longitudes de onda más bajas durante un tiempo mayor y que también nos permite hacer inferencias acerca de la física y de los datos observados para el máximo de la energía emitida. Esto permite distintas técnicas de calibración para poder obtener justamente un módulo de distancia  $\mu$  y un corrimiento al rojo  $z$ .

Las mediciones de GRB dependen fuertemente en la hipótesis de que las correlaciones entre luminosidades empíricas son universales y son las mismas para todos los corrimientos al rojo. Este tipo de calibraciones se conocen como  $E_p - E_\gamma$  o  $E_{\text{iso}} - E_p$  [56], donde  $E_p$  es el pico de energía observada,  $E_\gamma$  es la energía colimada y corregida del pico observado y  $E_{\text{iso}}$  es la energía isotrópica equivalente del pico. En el caso particular de la muestra [26] se utilizó la relación  $E_{\text{iso}} - E_p$  donde:

$$\log \frac{E_{\text{iso}}}{\text{erg}} = a + b \log \frac{E_p}{\text{keV}}, \quad (99)$$

donde  $a$  y  $b$  son la ordenada al origen y la pendiente. Aquí se suelen hacer correcciones de  $E_p$  para involucrar posibles prejuicios y errores sistemáticos a la hora de medir la energía máxima del evento. Teniendo entonces la relación para las energías se puede hacer ahora, para el módulo de la distancia  $\mu$  la calibración con supernovas[26]. Así como se pueden usar cefeidas para calibrar las muestras de Supernovas, se puede hacer lo mismo para los . Usando muestras de Supernovas se puede usando  $a$  y  $b$  obtener la distancia de luminosidad. Como ya tenemos una forma de medir  $E_{\text{iso}}$  podemos usar las relaciones con la relación con la distancia de luminosidad y otro parámetro medido para los estallidos  $B_{\text{bolo}}$  (que se refiere a la cantidad de rayos gamma emitidos por un estallido como si no estuviéramos metidos en la atmósfera terrestre) haciendo:

$$E_{\text{iso}} = \frac{4\pi d^2}{S_{\text{bolo}}}, \quad (100)$$

donde  $d$  es la distancia de luminosidad que puede ser introducida a la relación del módulo de distancia mostrada en la ecuación (75) [56]. Esto significa que las estimaciones para  $a$  y  $b$  que nos dan una relación para obtener  $E_{\text{iso}}$  involucran un error que depende también del método para ajustar las rectas que se generan al hacer las relaciones  $E_{\text{iso}} - E_p$ . Esto genera que, independientemente del método que se utilice para la calibración de GRB, estos suelen tener un error más grande para

el módulo de la distancia. Es por esto, y por su dependencia con las formas de medir, de calibrar y de comparar con supernovas, que suelen considerarse más como una muestra de datos complementaria a las muestras de Supernovas, y son tomados con el objetivo de mejorar la calibración de los parámetros cosmológicos y poder refinar los resultados teóricos.

## 4.6. Observaciones consideradas

En este trabajo se usarán dos observaciones fundamentales: la muestra de *relojes cósmicos* en términos del parámetro observacional de Hubble (OHD) [57],[24],[58], la muestra de *Pantheon* [25] y una muestra de brotes de rayos gamma [26]. La primera es una serie de datos que consiste en 51 puntos en un rango entre  $0.07 < z < 2.36$  de supernovas Ia tomadas de la colaboraciones SDSS-II y SNLS. Los datos de Pantheon en cambio, provienen de diferentes observaciones del cielo, pasadas por métodos de calibración con el objetivo de obtener un parámetro físico  $\mu$ , que es el módulo de distancia y hace referencia a la cantidad de luz que nos debe de llegar del objeto y el corrimiento al rojo del objeto  $z$  de forma que podamos calibrar parámetros cosmológicos. La colección de Supernovas de Pantheon está entre  $0 < z \leq 2$ . En el caso de la muestra de Brotes de rayos gamma que de igual forma está calibrado por diferentes métodos independientes el parámetro  $\mu$  midiendo además los corrimientos al rojo de los eventos, que es mucho más alto, llegando hasta  $z \sim 10$  son 151 puntos. Los GRB suelen ser datos complementarios a los que ofrecen las Supernovas Ia.

Con estos datos serán calibrados los parámetros cosmológicos, tanto  $H_0$  como  $\Omega_{M,0}$  y  $\Omega_\Lambda$  para las diferentes soluciones a las ecuaciones de Friedmann, tanto analíticas como numéricas.

## 5. Estadística en Cosmología

### 5.1. Estadística frecuentista y bayesiana

En física antes que cualquier otra cosa, se necesita medir. Las mediciones son la base fundamental de cualquier observación repetitiva y continua que componen los fenómenos naturales. Y para medir se involucran errores que provienen de diferentes fuentes ya sea de los aparatos de medición o de las propias formas de realizar la misma observación. Y la estadística la usamos para tratar de obtener la mayor cantidad de información útil tanto de las mediciones como de los errores, e incluso de los problemas que pueda tener un modelo sobre otro al momento de probarlo con diferentes grupos de mediciones. En cosmología, la estadística que se usa actualmente con grandes bases de datos donde acumulamos también el error, es la estadística *bayesiana* [59]. Este enfoque está basado más en el grado de credibilidad de una proposición sobre un fenómeno basado en el conocimiento previo que tiene un observador de dicho suceso. Contrario a la aproximación *frecuentista* que define la probabilidad de un evento como un el número de veces que se repite un suceso dividido entre el número de intentos *en el límite tendiendo a infinito* [60] de repeticiones iguales. Esto es evidentemente un problema puesto que no siempre podemos repetir indefinidamente una medición para observar los cambios, y es por ello tenemos que recurrir a una aproximación diferente.

Entonces, el teorema de Bayes es una consecuencia directamente de la probabilidad. Justamente la ventaja de la aproximación Bayesiana es que no depende de una gran cantidad de repeticiones, sino en la información que tenemos sobre el evento. Podemos entonces, hablar de probabilidad en lenguaje matemático. Si  $P(A)$  es la probabilidad de que ocurra el evento  $A$  entonces la probabilidad *conjunta* de que ocurra  $A$  y  $B$  se escribe como  $P(A, B)$  y la probabilidad *condicional* de que ocurra  $A$  dado que  $B$  ha ocurrido se escribe como  $P(A|B)$ . El teorema de Bayes es entonces en lenguaje matemático:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}. \quad (101)$$

La interpretación de esto es más poderosa que la notación matemática si simplemente reescribimos el teorema de Bayes sustituyendo  $A$  por un conjunto de datos observado  $D$  y  $B$  por la hipótesis que creemos que describe correctamente a esos datos  $H$  de forma que:

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D)}, \quad (102)$$

donde el lado izquierdo,  $P(H|D)$  es conocido como *probabilidad a posterior* o posterior y se refiere a la probabilidad de que ocurra la hipótesis con un conjunto de datos. Esta posterior es proporcional a la *sampling distribution* o probabilidad de muestreo  $P(D|H)$  y a la probabilidad previa o *prior* de la hipótesis  $P(H)$ . La prior resume la información previa que se pueda tener sobre los datos y la probabilidad de que nuestro modelo funcione, mientras que la probabilidad de muestreo o *sampling* contiene la información de como cambia el grado de confianza de nuestro modelo cada que se tienen nuevos datos [60]. El lado derecho de la ecuación de la ecuación anterior, en donde se habla sobre la probabilidad de muestreo suele reescribirse como  $\mathcal{L}(H)$  y se suele llamar como función de verosimilitud.

Las hipótesis  $H$  que solemos colocar en nuestros modelos, sobretudo en cosmología están representadas en la información que contienen los parámetros de dichos modelos, y por ello, es más común representar  $P(H) = P(\theta)$  donde  $\theta$  es el vector de parámetros de un modelo. El denominador  $P(D)$  puede considerarse una constante de normalización y por tanto:

$$P(D) = \int d\theta P(D|\theta)P(\theta). \quad (103)$$

En forma más escrita, el teorema de Bayes nos relaciona la probabilidad posterior de  $\theta$  (lo que sabemos sobre  $\theta$  o sobre el modelo viendo los datos disponibles) con la verosimilitud y la *prior* (o lo que sabemos previamente sobre nuestro modelo) y en computación es fundamental para actualizar el conocimiento que se tienen sobre una cantidad desde la *prior* hasta la posterior.

Dentro de la Verosimilitud está contenida la información que será utilizada para establecer que tan buen ajuste se puede realizar con los datos dados acerca de nuestro modelo a probar. La verosimilitud puede escribirse de forma General, para un conjunto de datos  $\theta$  como:

$$\mathcal{L}(\theta|D) = f(D|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad (104)$$

donde  $f$  es la densidad de probabilidad de medir el valor  $x_i$  al realizar una medición dependiendo de los parámetros  $\theta$  que le fueron colocados al modelo.

Podemos decir que la física experimental justamente es un enfoque Bayesiano, puesto que los físicos encargados de los proyectos al diseñar la forma de tomar las mediciones tienen que tomar en cuenta tanto las limitaciones tecnológicas como las de presupuesto. El usar las técnicas Bayesianas en la ciencia tiene también la ventaja de que si otro investigador no está de acuerdo con la información previa que se le da al modelo, puede cambiarlas libremente y observar como cambian las estimaciones con el distinto supuesto.

## 5.2. Verosimilitud

La *Likelihood* o verosimilitud en la estimación de parámetros es fundamental, puesto que es la expresión que nos determina como se comporta nuestro modelo al momento de compararlo con los datos, y con base en esto se elige cuales son los mejores valores con los que nuestro modelo funciona mejor al contrastarlo. En este sentido, muchas veces se suele hablar de un *best fit* o mejor ajuste de los datos, que es una forma de decir que el modelo que se está probando arroja un valor numérico que es más parecido al dado por los datos utilizados. La función  $\mathcal{L}(\theta)$  termina dando un valor numérico, y es la cantidad que nos permite cuantificar que tanto están cerca los parámetros de aproximar las mediciones [8]. Como este valor numérico tiene que ser el más alto para obtener un valor de  $\theta$  donde se encuentre el mejor ajuste es útil encontrar el máximo de la verosimilitud como objetivo fundamental. En muchos análisis esto suele hacerse sobre un logaritmo, de forma que es más útil ver:

$$\ln \mathcal{L}(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i|\theta), \quad (105)$$

donde de nuevo  $f$  es la densidad de probabilidad del valor  $x_i$ . En este caso, el máximo de la verosimilitud será entonces:

$$\frac{d \ln \mathcal{L}(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{d\mathcal{L}(\theta)}{d\theta} = 0 \text{ en donde } \theta = \theta_0, \quad (106)$$

donde  $\theta_0$  es el valor donde la verosimilitud es máxima. Y es justamente  $\theta_0$  el valor del mejor ajuste de los datos.

A menos de que la verosimilitud tenga una forma definida, el proceso de maximización de la función tiene que hacerse de forma iterativa con algún tipo de algoritmo computacional. Una forma común está basada en la herencia frecuentista a la estadística bayesiana: minimizar la cantidad  $\chi^2$  y que se conoce como *mínimos cuadrados*. Si tenemos un conjunto de datos  $\{x_i, y_i\}$  y queremos probar un modelo de la forma  $f(x, \theta_j)$  donde  $\theta$  son parámetros a determinar, podemos entonces obtener el parámetro  $\chi^2$  de la *bondad* de un ajuste para  $N$  puntos de datos y  $M$  parámetros como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 (y_i - f(x, \theta_1, \dots, \theta_M))^2, \quad (107)$$

donde el factor  $\epsilon_i$  es el peso asociado a cada punto de los datos. Este factor suele escribirse como:

$$\epsilon_i^2 = \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (108)$$

donde cada  $\sigma_i$  es el error asociado a cada una de las mediciones. Este tipo de ajustes con  $\chi^2$  se conocen con el símbolo de la letra griega  $\chi^2$  es porque están contruidos sobre el supuesto de que los errores con los que se encuentra nuestra medición siguen una distribución normal alrededor del valor central donde se ubica cada punto de la medición [8]. Aunque es importante que se agregue aquí que  $\chi^2$  no es la única manera de optimizar una estimación de parámetros, pero si es la que se usará en esta tesis.

El que  $\chi^2$  sea una forma de maximizar la verosimilitud se puede ver si escribimos a  $\chi^2$  usando su definición y la definición de la verosimilitud como:

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\chi^2\right\} = \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{y_i - f(x_i|\theta)}{2\sigma_i^2}\right)^2, \quad (109)$$

y como el producto es proporcional a las probabilidades de obtener datos individuales  $y_i$  entonces simplemente tendremos:

$$\chi^2(\theta) = -2\mathcal{L}(\theta, y) + \text{cte}, \quad (110)$$

y por tanto el mínimo de  $\chi^2$  es el máximo de la verosimilitud.

### 5.3. Prejuicios y posteriores

La inferencia bayesiana, como se vio anteriormente, funciona actualizando constantemente lo que se sabe sobre el modelo partiendo de los datos. La única desventaja es que depende de que



para un punto de inicio, necesitamos decidir una previa para empezar a establecer  $\mathcal{L}$ . Conforme se actualiza el valor, la posterior debería ir convergiendo al valor *real* del parámetro [59]. Aunque no hay una forma correcta o definida de como seleccionar un *prior* [60], se suele seleccionar una distribución plana, definida como:

$$P(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{(\theta_{\max} - \theta_{\min})} & \text{para } \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (111)$$

Este tipo de *prior* plana, se suele considerar cuando no hay una forma clara acerca de como se comportará nuestro intento de obtener un información acerca de los datos. Estas se conocen como *priors* de ignorancia, donde sino sabemos más acerca del comportamiento, se prefiere usar una que no involucra una preferencia por algún valor o distribución [59]. En cambio, se conocen como *priors de referencia* aquellas en las que queremos que la estimación final de los datos esté muy influenciada por la decisión de nuestra distribución previa de modo que se obtengan resultados que dependan fuertemente en lo que sabemos [59]. Dentro de estas *priors* están las distribuciones Gaussianas [60] o de Poisson. Independientemente de la *prior* que se utilice, se suele reportar al momento de escribir un artículo o un trabajo escrito.

Entonces, para obtener el vector de parámetros óptimos se suele usar algún tipo de algoritmo computacional. En General, y con diferentes variaciones individuales (dependiendo de los distintos algoritmos disponibles) los programas y rutinas computacionales que realizan análisis de datos con estadística Bayesiana [59].

Básicamente, se inicia con un modelo y un vector de parámetros que tienen la hipótesis contenidas. Antes de empezar el algoritmo se definen las *priors* que contienen el conocimiento previo sobre el tema y el modelo en cuestión, y una vez definidas se puede avanzar a construir una función de verosimilitud para sus mediciones que suelen reflejar la forma en la que se obtienen los datos (involucrando los errores). La forma más usual es minimizar algún tipo de cantidad matemática que represente la distancia entre todos los puntos de una construcción matemática de un modelo y los datos observados como es  $\chi^2$ . Entonces, los programas suelen obtener las posteriores, que suelen terminar en formas de distribuciones por medio de *marginalización* de los parámetros, es decir, si por ejemplo  $\theta = \{u, v\}$  la posterior para  $u$  será:

$$P(u|D) \sim \int \mathcal{L}(u|v)P(u, v)du. \quad (112)$$

Y de esta forma, lo que nos pueden decir los datos sobre el parámetro  $u$  puede ser expresado mediante una gráfica de la posterior de  $u$ , que será una curva representando los valores más probables donde el valor numérico esté ubicado. Técnicamente la interpretación más correcta de un intervalo se refiere que si el experimento o las mediciones fueran repetidas muchas veces, y siempre se reportara un intervalo de confianza de, por ejemplo 95 %, esto significa que este resultado será correcto el 95 % del tiempo [59].

Para vectores de parámetros donde existen más de un valor por encontrar, se suele además de mostrar la posterior individual de cada parámetro (ver figura 8), una gráfica en dos dimensiones que represente el área de mayor probabilidad donde los parámetros puedan encontrarse simultáneamente (ver figura 9).

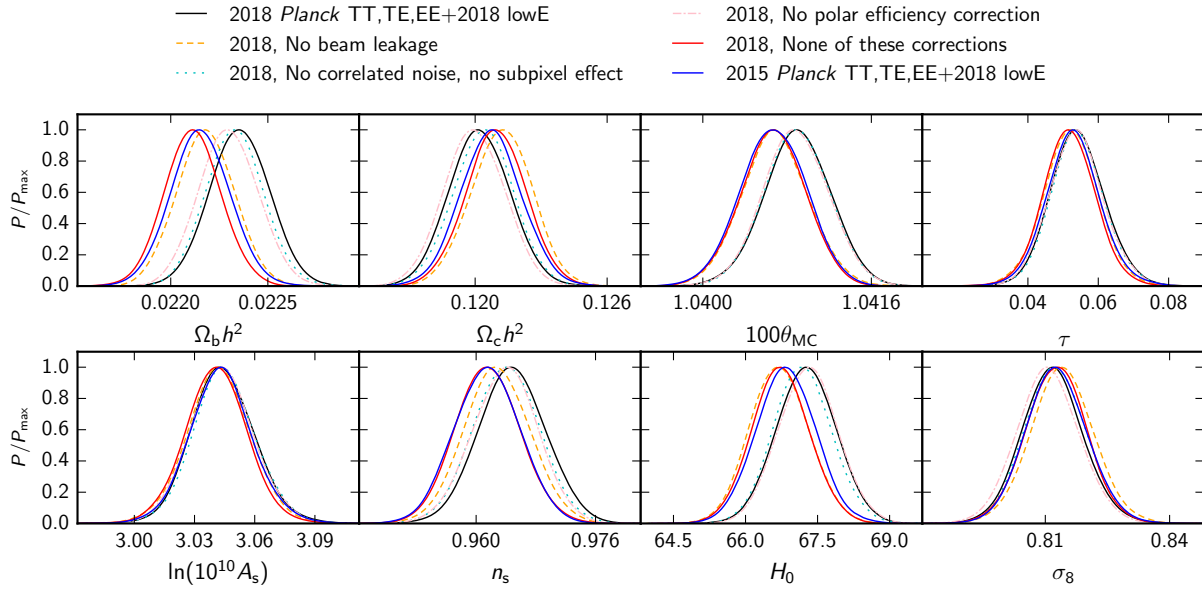


Figura 8: Posteriores en una dimensión de distintos valores cosmológicos obtenidos con distintos grupos de datos del proyecto Planck, siendo las azules las tomadas en la liberación de datos del 2015 y los demás colores de la liberación de datos del 2018. Tomada directamente de [3].

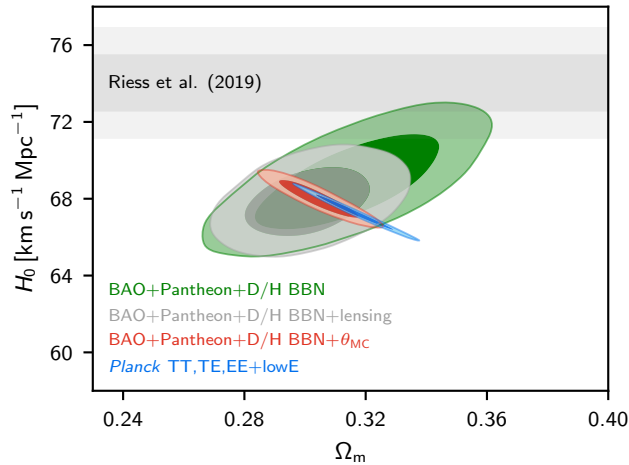


Figura 9: Posteriores para el análisis de datos del proyecto Planck [3]. Esta es una muestra de como se usan las posteriores individuales de  $H_0$  y de  $\Omega_m$  para mostrar en un plano la zona más probable donde la combinación de los valores se encuentre. La banda gris se refiere a las mediciones de Riess [61], y los diferentes colores son diferentes resultados posteriores de análisis con diferentes conjuntos de datos. Tomada directamente de [3].

Las posteriores representan justamente lo que sabemos *posteriormente* a haber analizado el conjunto de datos con las *priors* que fueron alimentadas al algoritmo. De forma que para constreñir

nuestros parámetros suele darse algún tipo de intervalo que es conocido como *intervalo de confianza* donde se suelen graficar los valores donde es 68 % y 95 % probable encontrar un valor. Esta es una región, que en una gráfica de dos dimensiones es un contorno de probabilidad constante donde hay un 68 y 95 % de probabilidad de encontrar el valor de ambos parámetros al mismo tiempo. Ya sea por una curva de densidades de probabilidad resultantes del algoritmo usado o por medio de una área de probabilidad de dos parámetros, estos suelen reportarse así para facilitar la lectura y ante el ojo entrenado una forma sencilla de mostrar los resultados finales de una constricción de parámetros como datos observados.

Las técnicas Bayesianas de estimación de parámetros son usadas en diferentes partes de la física, pero en especial en cosmología y en esta tesis será usada la técnica MCMC, que proviene de las siglas en Inglés *Markov Chain Monte Carlo* que es una forma de implementar una técnica Bayesiana en una computadora. El propósito del algoritmo MCMC es construir una serie de puntos (o *samples*) que viven en el espacio de parámetros (o *chain*). La propiedad crucial de este método es que la cantidad de veces que se repiten valores o densidad de las muestras es proporcional a una posterior, y que nos permite de manera fácil construir una representación de una distribución posterior [59]. Justamente las figuras 8 están obtenidas con un algoritmo MCMC [13].

Una cadena de Markov está definida como un conjunto de números  $x^{(0)}, \dots, x^{(m-1)}$  donde la probabilidad de que el elemento  $t + 1$ -ésimo de la cadena depende del valor del elemento  $t$ -ésimo. Este algoritmo converge a un estado estacionario donde los sucesivos elementos de la cadena no se mueven y las muestras se convierten en la distribución posterior de los parámetros. El proceso por el que los elementos de la cadena se van generando es probabilístico y depende directamente de la probabilidad conocida como transición  $T(\theta^t, \theta^{t+1})$  que nos dice la probabilidad de que un parámetro a ajustar se mueva de un punto  $\theta^t$  a un punto  $\theta^{t+1}$ . Esta probabilidad puede escribirse como:

$$\frac{T(\theta^t, \theta^{t+1})}{T(\theta^{t+1}, \theta^t)} = \frac{p(\theta^{t+1}|D)}{p(\theta^t|D)}, \quad (113)$$

o sea que el ratio de probabilidad de que el parámetro se mueva es inversamente proporcional al ratio de las probabilidades posteriores de los parámetros al compararlos con los datos. De esta manera, las posteriores simplemente se obtienen calculando la integral:

$$\int P(\theta|D)\theta d\theta \equiv \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m-1} \theta^t \quad (114)$$

donde las muestras de MCMC generan las posteriores. Para diversos parámetros esta integral no es numéricamente trivial. Cuando se obtienen una serie de números que son las muestras, simplemente es útil dividir en diferentes fragmentos al conjunto de números y observar la frecuencia con la que aparecen para dibujar un contorno que es la posterior de los parámetros. El paquete usado para esta tesis es Emcee<sup>6</sup> de Python está basado en MCMC específicamente en el algoritmo Metropolis-Hastings [59].

---

<sup>6</sup>Disponible en <https://emcee.readthedocs.io/en/stable/>

## 6. Soluciones analíticas de las ecuaciones de Friedmann

En las secciones anteriores se exploraron algunas soluciones simples a las ecuaciones de Friedmann que pueden ser encontradas en la literatura [6][5][8][42]. Estas parten de supuestos físicos que nos permiten hacer más sencillas la parte matemática puesto que las integrales que se encuentran al momento de separar al Universo en épocas de evolución dependiendo del fluido *dominante* se pueden resolver directamente utilizando métodos matemáticos directos.

La desventaja de este tipo de soluciones es que no permiten describir el comportamiento del Universo de forma global y se pierde precisión al momento de establecer soluciones que solo describan una parte de la evolución de los fluidos. La idea de encontrar soluciones analíticas no sólo es explorar matemáticamente las ecuaciones de Friedmann sino también mejorar la precisión con la que estas funcionan y en esta tesis, de compararlas también estadísticamente con los datos disponibles actualmente.

### 6.1. Solución *piecewise*

De nuevo el punto de partida son las ecuaciones de Friedmann. En especial la mostrada en (94) y la desarrollada en (96). Usando (91) podemos obtener el factor de escala para cuando el Universo tiene dos componentes que contribuyen mayoritariamente y también de igual forma, que puede escribirse como:

$$a_{RM} = a(t_{RM}) = \left( \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_{M,0}} \right), \quad (115)$$

que es el tiempo de equivalencia para la materia y la radiación, que es el momento en que ambas componentes del Universo contribuyen de igual manera a la densidad de energía. Ahora, podemos hacer lo mismo para la materia y la energía oscura:

$$a_{M\Lambda} = a(t_{M\Lambda}) = \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_{\Lambda}} \right)^{1/3}. \quad (116)$$

Entonces, por ejemplo, para un Universo plano con  $k = 0$  podemos proponer la siguiente solución a trozos para describir todo el Universo.

$$a = \begin{cases} K_R t^{1/2} & t \leq t_{RM} \\ K_M t^{2/3} & t_{RM} < t \leq t_{M\Lambda}, \\ K_{\Lambda} \exp\left(\Omega_{\Lambda}^{1/2} H_0 t\right) & t > t_{M\Lambda}, \end{cases} \quad (117)$$

donde las  $K$ 's son constantes de normalización y que pueden ser obtenidas al imponer las condiciones de frontera para el comportamiento del factor de escala.

Para obtener  $K_{\Lambda}$  se impone que  $a = 1$  (como ya se ha hecho anteriormente para las soluciones encontradas en la literatura) y por ello:

$$K_{\Lambda} = \exp\left(-\Omega_{\Lambda}^{1/2} H_0 t_0\right), \quad (118)$$

donde  $t_0$  es el tiempo actual, de nuevo. Las otras dos  $K$ 's necesitan además que se establezcan condiciones de unión suave para las distintas partes de la solución del factor de escala. Ahora, [23] hace un truco para llegar a la solución rápidamente: pedir la continuidad para el tiempo  $t$  y por tanto:

$$t = \begin{cases} K_R^{-2} a^2 & a \leq a_{RM}, \\ K_M^{-3/2} a^{3/2} & a_{RM} < a \leq a_{M\Lambda}, \\ t_0 + \Omega_\Lambda^{-1/2} H_0^{-1} \ln a & a > a_{M\Lambda}, \end{cases} \quad (119)$$

Como se sabe la forma analítica de la solución para Universo tardío, igualamos las últimas dos funciones para obtener:

$$K_M^{-3/2} a_{M\Lambda}^{3/2} = t_0 + \Omega_\Lambda^{-1/2} H_0^{-1} \ln a_{M\Lambda},$$

de donde el objetivo es despejar  $K_M$  así que usando la expresión para el tiempo de equivalencia materia-energía oscura mostrado en la ecuación (116) que sustituyendo:

$$\begin{aligned} K_M^{-3/2} &= \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{-1/2} \left[ t_0 + \Omega_\Lambda^{-1/2} H_0^{-1} \ln \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \right], \\ &= \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{-1/2} \left[ t_0 + \frac{1}{3} \Omega_\Lambda^{-1/2} H_0^{-1} \ln \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right) \right], \\ &= \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{-1/2} \left[ H_0 t_0 + \frac{1}{3} \Omega_\Lambda^{-1/2} \ln \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right) \right] H_0^{-1}, \end{aligned}$$

y que finalmente resulta en:

$$K_M = \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \left[ H_0 t_0 + \frac{1}{3} \Omega_\Lambda^{-1/2} \ln \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right) \right]^{-2/3} H_0^{2/3}. \quad (120)$$

Ya tenemos dos partes de la expresión a pedazos analítica. Igualmente, igualando la primera y la segunda parte tendremos:

$$K_R^{-2} a_{RM}^2 = K_M^{-3/2} a_{RM}^{3/2},$$

que igualmente que en la parte anterior se necesita realizar un poco de álgebra básica y usar el tiempo de equivalencia entre radiación y materia que se encontró en la ecuación (115):

$$\begin{aligned} K_R^{-2} &= K_M^{-3/2} a_{RM}^{-1/2}, \\ &= \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{-1/2} \left[ H_0 t_0 + \frac{1}{3} \Omega_\Lambda^{-1/2} \ln \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right) \right] H_0^{-1} \left( \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_{M,0}} \right)^{-1/2}, \\ &= \left( \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{-1/2} \left[ H_0 t_0 + \frac{1}{3} \Omega_\Lambda^{-1/2} \ln \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right) \right] H_0^{-1}, \end{aligned}$$

y que finalmente completa la solución:

$$K_R = \left( \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/4} \left[ H_0 t_0 + \frac{1}{3} \Omega_\Lambda^{-1/2} \ln \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right) \right]^{-1/2} H_0^{1/2}. \quad (121)$$

Uniendo lo que ya se había calculado para Universo tardío y las nuevas constantes calculadas en (120) y (121) se llega a la solución a trozos que será denotada de forma  $a_{pw}$ :

$$a_{pw} = \begin{cases} \left( \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/4} \left[ H_0 t_0 + \frac{1}{3} \Omega_\Lambda^{-1/2} \ln \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right) \right]^{-1/2} H_0^{1/2} t^{1/2} & t \leq t_{RM}, \\ \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \left[ H_0 t_0 + \frac{1}{3} \Omega_\Lambda^{-1/2} \ln \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right) \right]^{-2/3} H_0^{2/3} t^{2/3} & t_{RM} < t \leq t_{M\Lambda}, \\ \exp(-\Omega_\Lambda^{1/2} H_0 t_0) \exp(\Omega_\Lambda^{1/2} H_0 t) & t > t_{M\Lambda}. \end{cases} \quad (122)$$

Lo que falta calcular solamente son los tiempos de equivalencia ya con todas las constantes completas. Sustituyendo las expresiones para las constantes en (119) y que se convierte:

$$\begin{aligned} t_{RM} &= \left( \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{-1/2} \left[ H_0 t_0 + \frac{1}{3} \Omega_\Lambda^{-1/2} \ln \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right) \right] H_0^{-1} a_{RM}, \\ &= \Omega_{R,0}^{3/2} \Omega_{M,0}^{-2} \Omega_\Lambda^{1/2} \left[ t_0 + \frac{1}{3} \Omega_\Lambda^{-1/2} \ln \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right) \right], \end{aligned}$$

y lo mismo para el tiempo de equivalencia de materia y energía oscura:

$$t_{M\Lambda} = t_0 + \frac{1}{3} \Omega_\Lambda^{-1/2} H_0^{-1} \ln \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right),$$

de forma que cuando se tengan valores numéricos para las componentes del Universo se puede obtener un modelo dinámico del factor de escala para los diferentes Universos. Como para construir la solución a pedazos se asumió un valor de curvatura espacial  $k = 0$  entonces podemos graficar la solución contra la integración numérica.

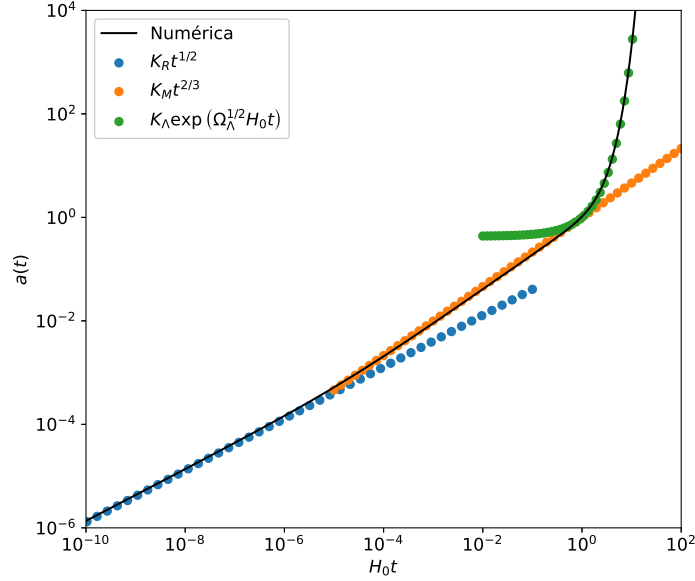


Figura 10: Comparación de la integración numérica contra la solución a pedazos graficada de forma asintótica para observar los límites de cada trozo para describir a la solución entera. La solución en puntos azules representa la solución para tiempos tempranos dominados por la radiación, la línea punteada naranja representa la solución para tiempos de dominio de materia y finalmente la línea punteada verde representa la solución tardía cuando el Universo acelera su expansión.

La comparación de la solución numérica con la solución analítica obtenida a trozos pueden verse en la figura 10, con las soluciones a trozos graficadas de forma asintótica para observar los límites que describen las soluciones a trozos.

Para poder analizar el comportamiento más físico de estas soluciones, es más poderoso calcular no sólo el factor de escala, sino también el parámetro de Hubble, que nos permita comparar con las observaciones cosmológicas disponibles. Para ello, necesitamos primero obtener  $\dot{a}_{pw}(t)$ :

$$\dot{a}_{pw}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/4} \left[ H_0 t_0 + \frac{1}{3} \Omega_\Lambda^{-1/2} \ln \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right) \right]^{-1/2} H_0^{1/2} t^{-1/2} & t \leq \tilde{t}_{RM}, \\ \frac{2}{3} \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \left[ H_0 t_0 + \frac{1}{3} \Omega_\Lambda^{-2/3} \ln \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right) \right]^{-2/3} H_0^{2/3} t^{-1/3} & \tilde{t}_{RM} \leq t \leq \tilde{t}_{M\Lambda}, \\ K_\Lambda \Omega_\Lambda^{1/2} H_0 \exp \left( \Omega_\Lambda^{1/2} H_0 t \right) & t > \tilde{t}_{M\Lambda}, \end{cases} \quad (123)$$

y usando  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  podemos llegar al parámetro de Hubble:

$$H_{pw}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2t} & t \leq \tilde{t}_{RM}, \\ \frac{2}{3t} & \tilde{t}_{RM} \leq t \leq \tilde{t}_{M\Lambda}, \\ \Omega_\Lambda^{1/2} H_0 & t > \tilde{t}_{M\Lambda}, \end{cases} \quad (124)$$

que va a ser utilizada para comparar con datos cosmológicos reales.

## 6.2. Primera solución propuesta: Sin curvatura

En [23], los autores nos presentan un nuevo panorama para resolver las ecuaciones de Friedmann ahora sin separar componente por componente del Universo. Para ello, simplemente utilizan la ecuación (96) (con  $k = 0$ ) con el objetivo de expresar  $a$  como una función del tiempo.

Para no separar componente por componente, se divide, para una mejor solución, la integral en dos partes:

$$H_0 t = \begin{cases} \int_0^{\tilde{a}(t)} d\tilde{a} \left( \frac{\Omega_{R,0}}{\tilde{a}^2} + \frac{\Omega_{M,0}}{\tilde{a}} \right)^{-1/2} & a \leq a_s, \\ H_0 t_s + \int_{a_s}^{a(t)} d\tilde{a} \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\tilde{a}} + \Omega_{\Lambda} \tilde{a}^2 \right)^{-1/2} & a > a_s, \end{cases} \quad (125)$$

donde en vez de separar la solución en tres componentes, simplemente se parten en dos, y si no tomamos en cuenta la inflación<sup>7</sup> podemos decir que el Universo tiene una etapa de dominación de radiación  $0 \leq t \leq t_{RM}$ , de dominación de materia  $t_{RM} < t \leq t_{M\Lambda}$  y de una dominación de energía oscura  $t > t_{M\Lambda}$ . En este contexto, podemos definir un tiempo  $t_s$  de tal forma que  $t_{RM} < t_s < t_{M\Lambda}$  y que esté dentro de la época de dominación de materia en el Universo. Entonces, podemos integrar ya, cada solución por separado de forma analítica<sup>8</sup>.

Esta integración analítica nos da como resultado una solución General de la forma:

$$H_0 t = \begin{cases} \frac{2(\Omega_{M,0}a - 2\Omega_{M,0})\sqrt{\Omega_{M,0}a + \Omega_{R,0}}}{3\Omega_{M,0}^2} & a \leq a_s, \\ H_0 t_s + \frac{2}{3\Omega_{\Lambda}^{1/2}} \ln \left( \frac{\Omega_{\Lambda}a^{3/2} + \Omega_{\Lambda}^{1/2}(\Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda}a^3)^{1/2}}{\Omega_{\Lambda}a_s^{3/2} + \Omega_{\Lambda}^{1/2}(\Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda}a_s^3)^{1/2}} \right) & a > a_s, \end{cases} \quad (126)$$

Graficando el resultado intermedio de las dos soluciones a las integrales nos da muestra de como describen las integrales a este modelo dinámico.

<sup>7</sup>Esta es una fuerte aseveración en la referencia [23] puesto que las soluciones están describiendo al Universo temprano.

<sup>8</sup>El procedimiento para realizar las integrales está descrito en el apéndice B.3.



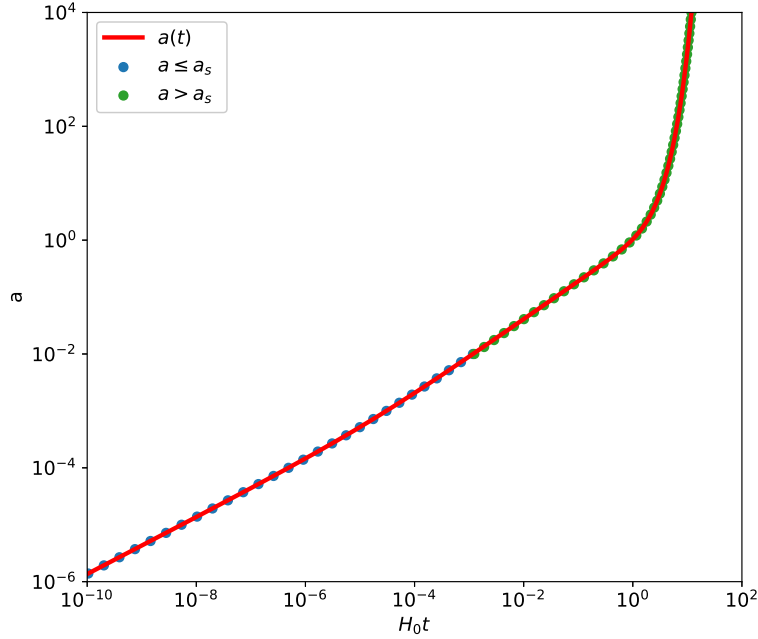


Figura 11: Gráfica de las soluciones a las integrales de forma asintótica. La línea continua roja representa la integración numérica completa mientras que las líneas punteadas, tanto azul como verde son las soluciones numéricas partidas, seleccionando materia y radiación y materia y energía oscura.

El objetivo final es escribir una función  $a(t)$  explícitamente, así que el siguiente paso es despejar el factor de escala de (126). El procedimiento es trivial para la primera parte de la solución, pero para las siguientes partes de la expresión, es un poco menos directo e involucra herramientas menos evidentes<sup>9</sup>.

$$a(t) = \begin{cases} \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_{M,0}} \left\{ 1 - 2 \sin \left[ \frac{1}{3} \arcsin (X(t)) \right] \right\} & 0 \leq t \leq t_*, \\ \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_{M,0}} \left\{ 1 + 2 \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos (X(t)) \right] \right\} & t_* < t \leq t_s, \\ \left\{ a_s^{3/2} \cosh \left[ \frac{3}{2} \Omega_\Lambda^{1/2} H_0 (t - t_s) \right] + \left( a_s^3 + \frac{\Omega_{M,0}^2}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/2} \sinh \left[ \frac{3}{2} \Omega_\Lambda^{1/2} H_0 (t - t_s) \right] \right\}^{2/3} & t > t_s, \end{cases} \quad (127)$$

donde:

$$X(t) = 1 - 3 \frac{\Omega_{M,0}^2}{\Omega_{R,0}^{3/2}} H_0 t + \frac{9 \Omega_{M,0}^4}{8 \Omega_{R,0}^3} H_0^2 t^2; \quad (128)$$

<sup>9</sup>El procedimiento detallado para realizar la inversión para expresar  $a(t)$  se encuentra en el apéndice B.4.

y donde además el tiempo  $t_*$  será:

$$t_* = \frac{4\Omega_{R,0}^{3/2}}{3\Omega_{M,0}^2 H_0}. \quad (129)$$

Como ya tenemos una solución analítica y podemos integrar para la solución numérica, podemos utilizar los valores del modelo de *referencia* mostrados en la tabla 1 y nos debe de mostrar el comportamiento de estas soluciones.

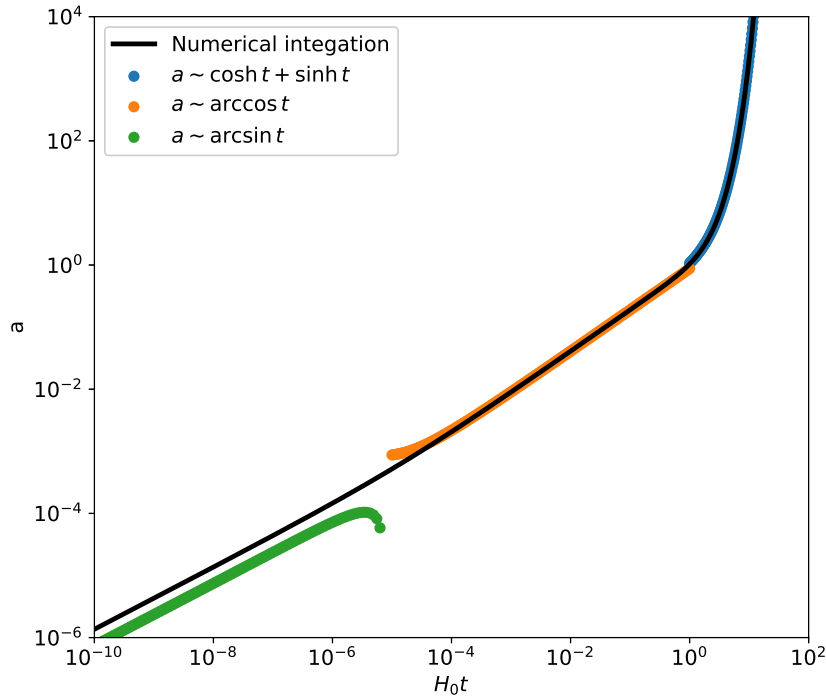


Figura 12: Comparación de las soluciones analíticas de (127) con la solución numérica. La línea negra continua representa la solución numérica, mientras que las líneas punteadas la solución analítica, siendo las verde y azul las solución temprana e intermedia que dependen de la densidad de radiación y materia y la azul es la solución tardía que involucra densidad de materia y constante cosmológica.

La figura 12 nos muestra la comparación de las soluciones numéricas y analítica. Es claro que para el Universo tardío, tanto la solución para dominación temporal de materia y energía oscura, la solución analítica funciona de manera muy satisfactoria. El problema es para Universo temprano donde la solución analítica no parece tener un comportamiento como la solución numérica, y termina siendo discontinua alrededor del tiempo  $t_*$  que es lo contrario a lo que se quería con el procedimiento para determinar la solución analítica.

En cualquier caso, con (??) se obtuvo ya una expresión analítica para el factor de escala que depende del tiempo y además de los componentes del Universo. De nuevo, exploraremos una parte más observacional del comportamiento de las soluciones, haciendo  $\dot{a}(t)$  y obteniendo el parámetro de Hubble:

$$\dot{a}(t) = \begin{cases} -\frac{2\Omega_{R,0}}{3\Omega_{M,0}} \left( \frac{\cos\left[\frac{1}{3}\arcsin(X(t))\right]\dot{X}(t)}{\sqrt{1-X^2(t)}} \right) & 0 \leq t \leq t_* \\ \frac{2\Omega_{R,0}}{3\Omega_{M,0}} \left( \frac{\sin\left[\frac{1}{3}\arccos(X(t))\right]\dot{X}(t)}{\sqrt{1-X^2(t)}} \right) & t_* < t \leq t_s \\ \frac{\Omega_\Lambda^{1/2} H_0 \left( a_s^{3/2} \sinh\left[\frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t-t_s)\right] + \left(a_s^3 + \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/2} \cosh\left[\frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t-t_s)\right] \right)}{\left( a_s^{3/2} \cosh\left[\frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t-t_s)\right] + \left(a_s^3 + \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/2} \sinh\left[\frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t-t_s)\right] \right)^{1/3}} & t > t_s; \end{cases} \quad (130)$$

y también:

$$H(t) = \begin{cases} \frac{2\dot{X}(t)}{3\sqrt{1-X^2(t)}} \frac{\sin\left[\frac{1}{3}\arccos(X(t))\right]}{1-2\sin\left[\frac{1}{3}\arcsin(X(t))\right]} & 0 \leq t \leq t_* \\ \frac{2\dot{X}(t)}{3\sqrt{1-X^2(t)}} \frac{\cos\left[\frac{1}{3}\arcsin(X(t))\right]}{1+2\cos\left[\frac{1}{3}\arccos(X(t))\right]} & t_* < t \leq t_s \\ \Omega_\Lambda^{1/2} H_0 \frac{a_s^{3/2} \sinh\left[\frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t-t_s)\right] + \left(a_s^3 + \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/2} \cosh\left[\frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t-t_s)\right]}{a_s^{3/2} \cosh\left[\frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t-t_s)\right] + \left(a_s^3 + \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/2} \sinh\left[\frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t-t_s)\right]} & t > t_s. \end{cases} \quad (131)$$

Que es una reconstrucción analítica del factor de Hubble.

### 6.3. Segunda solución propuesta: Con curvatura

Si tomamos  $\Omega_k \neq 0$  para la integral que queremos resolver de la dinámica de Friedmann queda en forma completa igual a la ecuación (96).

$$H_0 t = \int_0^{\tilde{a}} d\tilde{a} \left( \frac{\Omega_{R,0}}{\tilde{a}^2} + \frac{\Omega_{M,0}}{\tilde{a}} + \Omega_\Lambda \tilde{a}^2 + \Omega_k \right)^{-1/2}, \quad (132)$$

que esta integral, como ya se ha mencionado no tiene soluciones analíticas completas. Es por eso, que igual que hacen en [23] en la ecuación (18), los autores, se parte la integral para poder resolverse. Con los mismos argumentos, podemos definir las dos siguientes integrales para resolver las ecuaciones de Friedmann.

$$H_0 t = \begin{cases} \int_0^{\tilde{a}(t)} d\tilde{a} \left( \frac{\Omega_{R,0}}{\tilde{a}^2} + \frac{\Omega_{M,0}}{\tilde{a}} + \Omega_k \right)^{-1/2} & a \leq a_{RM}, \\ H_0 t_s + \int_{a_s}^{a(t)} d\tilde{a} \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\tilde{a}} + \Omega_\Lambda \tilde{a}^2 + \Omega_k \right)^{-1/2} & a > a_{RM}, \end{cases} \quad (133)$$

En este caso particular, la integral está partida de un tiempo de equivalencia entre la radiación y la materia para facilitar el entendimiento de las soluciones en cuanto a las épocas del Universo. De aquí es más evidente que el término extra no hará que la integral sea trivial de resolver, todo lo contrario, puesto que dicho término extra añade un grado de dificultad a la capacidad de

resolver la integral con expresiones matemáticas simples. Al primer término de la integral puede tratársela directamente usando técnicas usuales de integración<sup>10</sup>. En cambio, para la segunda parte de la ecuación (133) no tiene ningún tipo de solución analítica escrita tal y como está. De esta forma, se tiene que dividir esta integral en dos partes diferentes. Una comprendiendo una época de dominación de materia en el fluido cosmológico, y la otra en cuanto la energía oscura es dominante. Algo mucho más parecido a las soluciones a trozos tratadas anteriormente que suelen hacerse en la literatura. Así, la integral queda partida como:

$$H_0 t = \begin{cases} H_0 t_{RM} + \int^{a(t)} d\tilde{a} \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\tilde{a}} + \Omega_k \right)^{-1/2} & , \quad a_0 \geq a \geq a_{RM}, \\ H_0 t_0 + \int_{a_0}^{a_{RM}} d\tilde{a} (\Omega_\Lambda \tilde{a}^2 + \Omega_k)^{-1/2} & , \quad a \geq a_0, \end{cases} \quad (134)$$

Por esto, el obtener una solución analítica completa para esta combinación de fluidos implica que en vez de resolver dos integrales, se tienen que resolver tres. De la primera parte, el resultado nos da:

$$H_0 t = \frac{\sqrt{a^2 |\Omega_k| + a \Omega_{M,0} + \Omega_{R,0}}}{|\Omega_k|} - \frac{\Omega_{M,0}}{2 |\Omega_k|^{3/2}} \ln \left( 2 \sqrt{\frac{|\Omega_k| (a^2 |\Omega_k| + a \Omega_{M,0} + \Omega_{R,0})}{4 |\Omega_k| \Omega_{R,0} - \Omega_{M,0}}} + \frac{2a |\Omega_k| + \Omega_{M,0}}{\sqrt{4 \Omega_{R,0} |\Omega_k| - \Omega_{M,0}^2}} \right) \quad (135)$$

que es una expresión simplificada del resultado gigante que se obtiene directamente por integración. Para las otras dos partes de la integración, entonces termina siendo:

$$H_0 t = \begin{cases} H_0 t_{RM} + \frac{a \sqrt{\Omega_k + \frac{\Omega_{M,0}}{a}} - a_{RM} \sqrt{\Omega_k + \frac{\Omega_{M,0}}{a_{RM}}}}{\Omega_k} + \frac{\Omega_{M,0}}{|\Omega_k|^{3/2}} \left[ \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{\frac{\Omega_k + \frac{\Omega_{M,0}}{a}}{|\Omega_k|}} \right) - \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{\frac{\Omega_k + \frac{\Omega_{M,0}}{a_{RM}}}{|\Omega_k|}} \right) \right] & , \quad a_{RM} < a \leq a_0, \\ H_0 t_0 + \frac{1}{\Omega_\Lambda^{1/2}} \ln \left( \frac{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{|\Omega_k|} a^2 + 1} + \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{|\Omega_k|} a}}{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{|\Omega_k|} a_0^2 + 1} + \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{|\Omega_k|} a_0}} \right) & , \quad a > a_0; \end{cases} \quad (136)$$

De nuevo, la integración de las expresiones nos arroja los siguientes resultados:

<sup>10</sup>Los detalles sobre esta integral se encuentran en el apéndice (B.3).

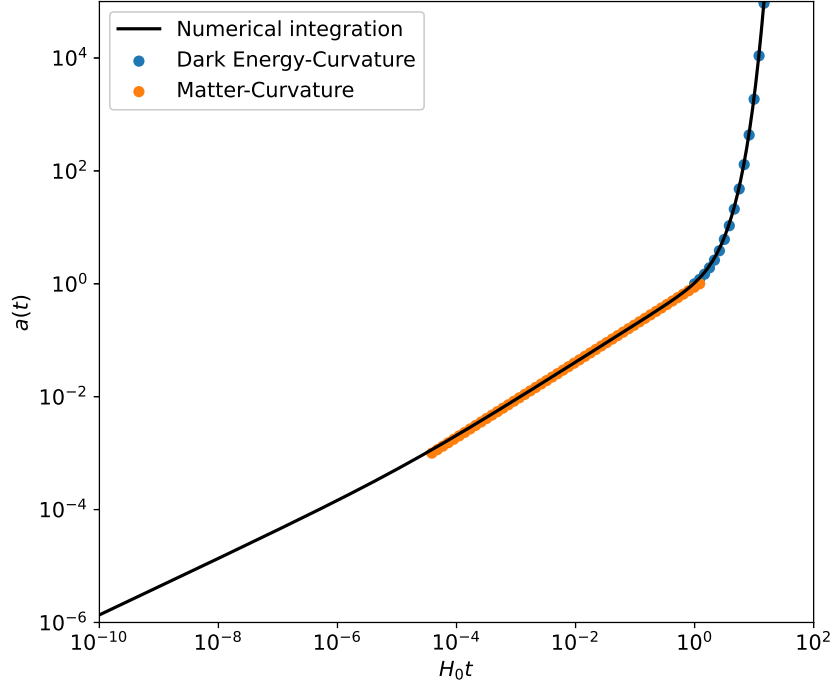


Figura 13: Paso intermedio de la integración. Podemos ver el comportamiento tardío para los puntos azules (dominación de energía oscura) y una solución más temprana para la dominación de materia.

Entonces, igual que en las soluciones anteriores, necesitamos expresar  $a(t)$  analíticamente mediante una inversión de las expresiones anteriores. En la segunda expresión, es relativamente sencillo realizar la inversión. La parte no trivial es la primera expresión para la dominación de materia. Los resultados de estas inversiones son:

$$a(t) = \begin{cases} \frac{\sinh(F+G)}{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{|\Omega_k|}}} & , \quad t_{RM} < t \leq t_0, \\ \frac{\sqrt{4D^2(t)(\Omega_k - \beta) + (2\beta D^2(t) + \Omega_{M,0})^2 - 2\beta D(t) - \Omega_{M,0}}}{2(\Omega_k - \beta)} & , \quad t > t_0; \end{cases} \quad (137)$$

que son soluciones analíticas completas para  $a(t)$  en las ecuaciones de Friedmann. En este caso,  $G = \ln\left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{|\Omega_k|}a_0^2 + 1} + \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{|\Omega_k|}a_0}\right)$  y  $F = \sqrt{\Omega_\Lambda}H_0(t - t_0)$  para la primera expresión, mientras que para la segunda expresión:

$$D(t) = a\sqrt{\Omega_k + \frac{\Omega_{M,0}}{a}} + a\frac{\Omega_{M,0}}{2(\Omega_k a_{RM} + \Omega_{M,0})}\sqrt{\Omega_k + \frac{\Omega_{M,0}}{a_{RM}}}; \quad (138)$$

además de:

$$\beta := \frac{\Omega_{M,0}}{2(\Omega_k a_{RM} + \Omega_{M,0})} \sqrt{\Omega_k + \frac{\Omega_{M,0}}{a_{RM}}}. \quad (139)$$

Ahora, de nuevo, para explorar el comportamiento cosmológico con observables, necesitamos obtener expresiones para  $\dot{a}(t)$  y  $H(t)$ .

Derivar es un proceso relativamente más sencillo. Como  $\dot{D}(t) = H_0$  y  $\dot{F}(t) = H_0$ , con las demás siendo constantes que no dependen del tiempo, entonces podemos tener expresiones directas para las derivadas temporales:

$$\dot{a}(t) = \begin{cases} \frac{\cosh(F+G)}{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{|\Omega_k|}}}, & t_{RM} < t \leq t_0, \\ \dot{a}(t) = \frac{\left(\beta + \frac{\Omega_k + (\Omega_{M,0} - 1)\beta + 2\beta^2 D(t)}{\sqrt{4(\Omega_k - \beta)D(t) + (\Omega_{M,0} + 2\beta D(t))^2}}\right) H_0}{\Omega_k - \beta}, & t > t_0; \end{cases} \quad (140)$$

Y una vez calculado eso, podemos llegar directamente al parámetro de Hubble:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \begin{cases} \frac{H_0 \left( \sqrt{4(\Omega_k - \beta)D(t) + (\Omega_{M,0} + 2\beta D(t))^2} + 2\beta D(t) \right)}{2D(t) \sqrt{4(\Omega_k - \beta)D(t) + (\Omega_{M,0} + 2\beta D(t))^2}} & a_{RM} < a < a_0 \\ \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 \coth(F + G) & , a > a_0 \end{cases} \quad (141)$$

y ya tenemos una expresión de  $H(t)$  para explorar el comportamiento cosmológico de la solución y reconstrucción analítica. Esta es una solución producto de este trabajo.

## 6.4. Solución analítica propuesta con funciones especiales

De forma más General, podemos expresar (94) como una mezcla de todos los fluidos que puede tener el Universo en nuestros modelos:

$$\dot{a}^2(t) = H_0^2 \sum_{i=0}^4 \Omega_i a^{4-i}(t), \quad (142)$$

donde  $i = 4$  es la constante cosmológica asociada a la energía oscura,  $i = 3$  es un fluido extra que no será usado en este trabajo llamado «quintaescencia»,  $i = 2$  es la parte geométrica de la curvatura,  $i = 1$  es la materia incluyendo tanto la parte bariónica como la de oscura y  $i = 0$  es la radiación. Con esta forma, podemos expresar de forma General la integral para resolver  $a$  como:

$$H_0 t = \int_0^{a(t)} \frac{d\tilde{a}}{\left(\sum_{i=1}^4 \Omega_i a^{4-i}\right)^{1/2}}. \quad (143)$$

En [62] se propone un método puramente matemático para encontrar las soluciones analíticas a esta integral. Si decimos que  $H_0 t = F(a(H_0 t))$ , donde  $F(z)$  es una integral elíptica, entonces es requerido que la función inversa  $a(t) = F^{-1}(H_0 t)$  lo que nos lleva a una función elíptica. Y esta

función nos lleva a una solución exacta en términos de la función elíptica  $\wp$  de Weierstrass definida de la siguiente forma:

$$\wp(z) = \wp(z|g_1, g_2) := \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n} \left[ \frac{1}{(z - \Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right], \quad (144)$$

donde  $\Omega_{mn} = 2mg_1 + 2ng_2$  cuyas  $g_1$  y  $g_2$  son invariantes [62] dadas como:

$$g_2 := \frac{\Omega_k^2}{12} + 4C - 2AB + D(3D - \Omega_k), \quad (145)$$

$$g_3 := \frac{\Omega_k}{216} - \frac{8\Omega_k C + A^2 \Omega_\Lambda}{12} - \frac{\Omega_k AB}{6} - A^2 B^2 E^2 + D \left( AB - \frac{\Omega_k^2}{12} + \frac{\Omega_k D}{2} - D^2 + 4C \right) \quad (146)$$

y las constantes están definidas en términos de los parámetros cosmológicos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \Omega_{M,0} a_0^3, \\ B &= \frac{1}{4} \Omega_\phi a_0, \\ C &= \frac{1}{12} A^2 E^2 \Omega_\Lambda, \\ D &= \frac{1}{6} \Omega_s a_0^2, \\ E &= 2 \frac{\sqrt{\Omega_{R,0}}}{\Omega_{M,0}} a_0^{-1}. \end{aligned} \quad (147)$$

Las funciones elípticas en general son funciones especiales que cuentan de dos polos, o zonas donde la función no está definida [63]. Además, las funciones elípticas de Weierstrass son soluciones de una curva elíptica, que son las soluciones confinadas a una región del espacio que es topológicamente equivalente a un toro, y suelen estar construidas para obtener soluciones de integrales del tipo *elípticas* que describen la longitud de arco de una curva de una elipse. En el caso particular de este trabajo, se utilizan estas soluciones puesto que las ecuaciones de Friedmann pueden ser escritas en forma de integrales elípticas como se muestra en la ecuación (142).

Entonces, para un Universo compuesto en su totalidad por:

$$\Omega_{tot} = \Omega_{R,0} + \Omega_{M,0} + \Omega_\Lambda + \Omega_s + \Omega_\phi + \Omega_k; \quad (148)$$

la solución General a la ecuación de Friedmann para el factor de escala se escribe como:

$$a(t) = \frac{A \wp(t) - E \wp'(t) + (ABE^2 + \Omega_k/12 - D/2)}{2 \left( (\wp(t) + \Omega_k/12 - D/2)^2 - C \right)}, \quad (149)$$

de donde, por motivos de este trabajo, tanto  $\Omega_s$  que representan fluidos extra en el universo pertenecientes a otros elementos como «cuerdas cósmicas» y  $\Omega_\phi$  de «quitaescencia» pueden ser

omitidos y asumidos como cero. Esto simplifica la solución a algo mucho más directo:

$$a(t) = \frac{A \wp(t) - E\wp'(t) + \left(\frac{\Omega_k}{12}\right)}{2 \left(\wp(t) + \frac{\Omega_k}{12}\right)^2 - C}, \quad (150)$$

y las invariantes  $g_2$  y  $g_3$  también son modificadas. Para un manejo matemático más fácil es mucho más eficiente utilizar la expansión en series de  $\wp(z)$ :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{i=2}^{\infty} c_i z^{2i-2}, \quad (151)$$

que tienen dentro de la expansión a los dos primeros términos:

$$c_2 = \frac{g_2}{20}, \quad (152)$$

$$c_3 = \frac{g_3}{28}, \quad (153)$$

y el resto de las constantes dadas como:

$$c_\ell = \frac{3}{(2\ell + 1)(\ell - 3)} \sum_{\mu=0}^{\ell-2} c_\mu c_{\mu-\ell}. \quad (154)$$

De esta forma, digamos una expansión razonable de la función  $\wp(z)$  tendrá la forma:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \dots, \quad (155)$$

y la primera derivada se puede calcular como:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2}{10} z + \frac{g_3}{7} z^3 + \dots, \quad (156)$$

Ahora, para explorar el comportamiento cosmológico de esta solución, es útil de nuevo obtener el parámetro de Hubble en función del tiempo. Para ello, necesitamos calcular la derivada de  $a(t)$ :

$$\dot{a}(t) = \frac{A}{2} \frac{\wp'(t) - E\wp''(t)}{\left(\wp(t) + \frac{\Omega_k}{12}\right)^2 - C} - \frac{A\left(\wp(t) + \frac{\Omega_k}{12}\right)\wp'(t) \left(\wp(t) - E\wp'(t) + \frac{\Omega_k}{12}\right)}{\left[\left(\wp(t) + \frac{\Omega_k}{12}\right)^2 - C\right]^2}, \quad (157)$$

y entonces,  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ :

$$H(t) = \frac{2 \left[ \left(\wp(t) - \frac{\Omega_k}{12}\right)^2 - C \right] \left( -\frac{A\left(\wp(t) + \frac{\Omega_k}{12}\right)\wp'(t) \left(\wp(t) - E\wp'(t) + \frac{\Omega_k}{12}\right)}{\left[\left(\wp(t) + \frac{\Omega_k}{12}\right)^2 - C\right]^2} + \frac{A}{2} \frac{\wp'(t) - E\wp''(t)}{\left(\wp(t) + \frac{\Omega_k}{12}\right)^2 - C} \right)}{A \left(\wp(t) - E\wp'(t) + \frac{\Omega_k}{12}\right)}. \quad (158)$$



La anterior expresión es una reconstrucción analítica completa del factor de escala y del parámetro de Hubble usando solamente herramientas matemáticas. Esto es diferente a la exploración realizada en [62] puesto que se limita a solucionar las ecuaciones de Friedmann y no se explora el comportamiento físico de las soluciones.

## 7. Análisis estadístico

### 7.1. Reconstrucción del parámetro de Hubble

Ya tenemos hasta ahora varias expresiones para el factor de Hubble que depende del tiempo. Ahora, el reto es transformar estos cálculos a expresiones dependientes de  $z$ , el corrimiento al rojo del que se habló anteriormente en la ecuación (46), que es como se toman las observaciones sobre las que serán probadas las diferentes soluciones. Para esto, se puede recurrir, como en [64] a utilizar transformaciones de coordenadas para obtener  $t$  en términos de  $z$  y con las expresiones necesarias para el funcionamiento de  $H(t(z))$  con observaciones cosmológicas. Como ya vimos, la ley de Hubble puede escribirse como  $v = H_0 r$  y si consideramos que  $\tau = H_0^{-1}$  [65] entonces las transformaciones de coordenadas cosmológicas pueden escribirse como:

$$x' = \frac{x - vt}{\left(1 - \frac{t^2}{\tau^2}\right)^{1/2}}, \quad (159)$$

$$v' = \frac{v - x \frac{t}{\tau^2}}{\left(1 - \frac{t^2}{\tau^2}\right)^{1/2}}, \quad (160)$$

donde justamente  $t$  es el tiempo cósmico tratado de forma igual a lo que está haciendo este trabajo. Esta transformación es simplemente una nueva y reescrita versión de las transformaciones de Lorentz mostradas en (6) cambiando  $v/c$  por  $t/\tau$ . Entonces, explorando un rayo de luz emitido por algún objeto moviéndose a velocidad  $v$  entonces un observador en reposo verá un cambio de frecuencia dado como:

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}, \quad (161)$$

y por tanto el corrimiento el rojo puede verse como:

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}, \quad (162)$$

y como se mencionó anteriormente, para transformar a una relación cosmológica podemos simplemente aplicar las transformaciones o sustituir  $c \rightarrow \tau$  y  $v \rightarrow t$  llegando a la relación [64]:

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + t/\tau}{1 - t/\tau}}, \quad (163)$$

que reordenada nos debe de resultar en:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{(1 + z)^2 - 1}{(1 + z)^2 + 1} \quad (164)$$

y para que el tiempo sea medido hacia adelante desde el Big Bang, cosa que ocurre en nuestros cálculos, tenemos que hacer la transformada [64]  $t \rightarrow \tau - t$  y obtenemos entonces:

$$t = \frac{2\tau}{(1+z)^2 + 1}. \quad (165)$$

Este cálculo está hecho para un Universo plano tardío, cosa que es suficiente puesto que las tomas de datos son de un Universo más cercano a nuestro tiempo cósmico. Finalmente, la relación que se va a utilizar es, ya usando que  $\tau = H_0^{-1}$ :

$$t = \frac{2}{H_0(1 + (1+z)^2)}. \quad (166)$$

Entonces, tenemos diferentes expresiones para el parámetro de Hubble. Estas son:

|  |   |
|--|---|
| Expresión directa                        | $H(t) = H_0 \sqrt{\Omega_{R,0}/a(t)^4 + \Omega_{M,0}/a(t)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k/a(t)^2}$  |
| Reconstrucción <i>piecewise</i>          | $H_{pw}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2t} & t \leq \tilde{t}_{RM}, \\ \frac{2}{3t} & \tilde{t}_{RM} \leq t \leq \tilde{t}_{MA}, \\ \Omega_\Lambda^{1/2} H_0 & t > \tilde{t}_{MA}, \end{cases}$  |
| Reconstrucción <i>Galanti-Roncadelli</i> | $H_g(t) = \begin{cases} \frac{2\dot{X}(t)}{3\sqrt{1-X^2(t)}} \frac{\sin\left[\frac{1}{3}\arccos(X(t))\right]}{1-2\sin\left[\frac{1}{3}\arcsin(X(t))\right]} & 0 \leq t \leq t_*, \\ \frac{2\dot{X}(t)}{3\sqrt{1-X^2(t)}} \frac{\cos\left[\frac{1}{3}\arcsin(X(t))\right]}{1+2\cos\left[\frac{1}{3}\arccos(X(t))\right]} & t_* < t \leq t_s, \\ \Omega_\Lambda^{1/2} H_0 \frac{a_s^{3/2} \sinh\left[\frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t-t_s)\right] + \left(a_s^3 + \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/2} \cosh\left[\frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t-t_s)\right]}{a_s^{3/2} \cosh\left[\frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t-t_s)\right] + \left(a_s^3 + \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/2} \sinh\left[\frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t-t_s)\right]} & t > t_s. \end{cases}$ |
| Este trabajo                             | $H_o(t) = \begin{cases} \frac{H_0 \left( \sqrt{4(\Omega_k - \beta)D(t) + (\Omega_{M,0} + 2\beta D(t))^2 + 2\beta D(t)} \right)}{2D(t) \sqrt{4(\Omega_k - \beta)D(t) + (\Omega_{M,0} + 2\beta D(t))^2}} & t_{RM} < t < t_0 \\ \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 \coth(F + G) & , t > t_0 \end{cases}$  |
| Reconstrucción $\wp$ Weierstrass         | $H_\wp(t) = \frac{2 \left[ \left( \wp(t) - \frac{\Omega_k}{12} \right)^2 - C \right] \left( -\frac{A(\wp(t) + \frac{\Omega_k}{12})\wp'(t) \left( \wp(t) - E\wp'(t) + \frac{\Omega_k}{12} \right)}{\left[ \left( \wp(t) + \frac{\Omega_k}{12} \right)^2 - C \right]^2} + \frac{A}{2} \frac{\wp'(t) - E\wp''(t)}{\left( \wp(t) + \frac{\Omega_k}{12} \right)^2 - C} \right)}{A \left( \wp(t) - E\wp'(t) + \frac{\Omega_k}{12} \right)}$   |

Tabla 3: Resumen de las reconstrucciones del factor de Hubble a partir de Friedmann.

Finalmente, usando la expresión (166) para las expresiones dependientes del tiempo y  $a = (1+z)^{-1}$  podemos llegar a las reconstrucciones independientes de  $H(z)$ . Esto nos queda finalmente como:

|  |   |
|--|---|
| Expresión directa                        | $H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{R,0}(1+z)^4 + \Omega_{M,0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2}$  |
| Reconstrucción <i>piecewise</i>          | $H_{pw}(z) = \begin{cases} \frac{H_0(1+(1+z)^2)}{4} & \tilde{z}_s \leq z \\ \frac{H_0(1+(1+z)^2)}{3} & \tilde{z}_{M\Lambda} \leq z \leq \tilde{z}_{MR} \\ \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 & z < \tilde{z}_{M\Lambda} \end{cases}$   |
| Reconstrucción <i>Galanti-Roncadelli</i> | $H_g(z) = \begin{cases} \frac{2\dot{X}(z)}{3\sqrt{1-X^2(z)}} \frac{\sin\left[\frac{1}{3}\arccos(X(z))\right]}{1-2\sin\left[\frac{1}{3}\arcsin(X(z))\right]} & z > z_* \\ \frac{2\dot{X}(z)}{3\sqrt{1-X^2(z)}} \frac{\cos\left[\frac{1}{3}\arcsin(X(z))\right]}{1+2\cos\left[\frac{1}{3}\arccos(X(z))\right]} & z_s < z \leq z_* \\ \Omega_\Lambda^{1/2} H_0 \frac{a_s^{3/2} \sinh\left[\frac{3\Omega_\Lambda^{-1/2}}{1+(1+z)^2} - \frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0 t_s\right] + \left(a_s^3 + \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/2} \cosh\left[\frac{3\Omega_\Lambda^{-1/2}}{1+(1+z)^2} - \frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0 t_s\right]}{a_s^{3/2} \cosh\left[\frac{3\Omega_\Lambda^{-1/2}}{1+(1+z)^2} - \frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0 t_s\right] + \left(a_s^3 + \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/2} \sinh\left[\frac{3\Omega_\Lambda^{-1/2}}{1+(1+z)^2} - \frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0 t_s\right]} & z < z_s; \end{cases}$ |
| Este trabajo                             | $H_o(z) = \begin{cases} \frac{H_0 \left( \sqrt{4(\Omega_k - \beta)D(z) + (\Omega_{M,0} + 2\beta D(z))^2} + 2\beta D(z) \right)}{2D(z) \sqrt{4(\Omega_k - \beta)D(z) + (\Omega_{M,0} + 2\beta D^2(z))}} & z_{RM} > z > z_0 \\ \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 \coth(F + G) & z < z_0; \end{cases}$   |
| Reconstrucción $\wp$ Weierstrass         | $H_\wp(z) = \frac{2 \left[ \left( \wp(z) - \frac{\Omega_k}{12} \right)^2 - C \right] \left( -\frac{A(\wp(z) + \frac{\Omega_k}{12}) \wp'(z) (\wp(z) - E\wp'(z) + \frac{\Omega_k}{12})}{\left[ \left( \wp(z) + \frac{\Omega_k}{12} \right)^2 - C \right]^2} + \frac{A}{2} \frac{\wp'(z) - E\wp''(z)}{\left( \wp(z) + \frac{\Omega_k}{12} \right)^2 - C} \right)}{A \left( \wp(z) - E\wp'(z) + \frac{\Omega_k}{12} \right)}$   |

Tabla 4: Reconstrucciones completas de  $H(z)$ 

donde, para la reconstrucción basada en el trabajo [23], escrita en la tabla como *Galanti-Roncadelli*, se utilizaron las expresiones de  $\dot{X}(z)$  y  $X(z)$  dadas como:

$$X(z) = 1 - 3 \frac{\Omega_{M,0}^2}{\Omega_{R,0}^{3/2}} \left( \frac{2}{1+(1+z)^2} \right) + \frac{9 \Omega_{M,0}^4}{8 \Omega_{R,0}^3} \left( \frac{2}{1+(1+z)^2} \right)^2, \quad (167)$$

y

$$\dot{X}(z) = -3 \frac{\Omega_{M,0}^2}{\Omega_{R,0}^{3/2}} H_0 + \frac{9 \Omega_{M,0}^4}{8 \Omega_{R,0}^3} H_0 \left( \frac{2}{1+(1+z)^2} \right). \quad (168)$$

En el caso de la solución encontrada en este trabajo, se usaron las ya mencionadas definiciones de las constantes  $\beta$  y  $G$ , mientras que se reescribieron con la nueva dependencia  $F(z)$  y  $D(z)$ .

$$D(z) = \left( \frac{2}{1+(1+z)^2} - H_0 t_{RM} \right) + \left( 1 + \frac{\Omega_{M,0}}{2(\Omega_k a_{RM} + \Omega_{M,0})} \right) a_{RM} \sqrt{\Omega_k + \frac{\Omega_{M,0}}{a_{RM}}}, \quad (169)$$

y para  $F(z)$ :

$$F(z) = \sqrt{\Omega_\Lambda} \frac{2}{1+(1+z)} - H_0 t_0. \quad (170)$$

Finalmente, para la reconstrucción realizada con las soluciones vía la función  $\wp$  de Weierstrass, se usaron las expansiones de la función  $\wp$  para reescribirse en términos de  $z$ , explícitamente estas nuevas relaciones son:

$$\wp(z) = \frac{H_0^2(1+(1+z)^2)^2}{4} + \frac{g_2}{5H_0^2(1+(1+z)^2)^2} + \frac{3g_3}{4H_0^4(1+(1+z)^2)^4} + \dots \quad (171)$$

para la derivada:

$$\phi'(z) = H_0^3(1 + (1+z)^2)^3 + \frac{g_2}{5H_0(1 + (1+z)^2)} + \frac{8g_3}{7H_0^3(1 + (1+z)^2)^3} + \dots \quad (172)$$

y para la segunda derivada:

$$\phi''(z) = \frac{3H_0^4(1 + (1+z)^2)^4}{8} + \frac{g_2}{10} + \frac{12g_3}{7H_0^2(1 + (1+z)^2)^2} + \dots \quad (173)$$

con lo que ya tenemos reconstrucciones de varias formas para el parámetro de Hubble  $H(z)$ .

## 7.2. Análisis con Relojes Cósmicos

Como se mencionó al principio de este trabajo, para esta parte se utilizarán mediciones observacionales del parámetro de Hubble (OHD por sus siglas en Inglés)[58]. Estos datos están obtenidos basados en una técnica propuesta en [66] como método independiente del modelo para constreñir la expansión del Universo basado en la construcción y estudio del corrimiento al rojo como *Relojes cósmicos* (o *Cosmic Chronometers* en inglés). Para esta forma de ver las cosas, la edad relativa de las galaxias  $dz/dt$  puede usarse como una parte de la escalera de distancias y por tanto  $H(z) = -1/(1+z)dz/dt$ . Las técnicas modernas para medir este parámetro usando galaxias usan el espectro de las galaxias en una aglomeración grande o cúmulo usando las características de metalicidad para determinar su edad. Esta forma nos permite obtener mediciones del factor de Hubble que no dependan de algún modelo específico. La muestra usada consta de 51 puntos que se encuentran como archivo público<sup>11</sup>. Ahora, el que los 51 puntos se encuentren en  $z$  cercanos a 0, implica que están observando un Universo tardío en el que, por simplificación de los procesos computacionales haremos algunas aseveraciones respecto a las reconstrucciones de  $H(z)$  obtenidas teóricamente.

Sabemos que en el Universo tardío, el contenido de radiación es bajo. Por ejemplo el ya usado modelo de *referencia* usa un valor del orden de  $10^{-5}$  [6], mientras que para la estimación de Planck, para el Universo tardío el contenido de esto en el Universo es bajo, de alrededor de  $10^{-3}$  [3]. Lo mismo ocurre para el valor de la curvatura, que la colaboración Planck estima un valor de alrededor de  $\Omega_k \sim 0.001$  [3] mientras que el de *referencia* simplemente la ignora para su construcción. Es por ello, que para facilitar el cálculo a la programación, asumiremos que para la expresión directa  $\Omega_{R,0} = \Omega_k = 0$ . En el caso de la reconstrucción a trozos, haremos una simplificación distinta.

En (68) se hizo un cálculo de  $a_{MA} = 0.75$  obteniendo el factor de escala para la época de equivalencia entre materia y la energía oscura. Usando eso podemos llegar a que  $z_{MA} = 0.33$  y que  $a_{RM} = \Omega_{R,0}/\Omega_{M,0} \sim 0.0002$  y por ello  $z_{RM} \sim 5000$ . Entonces, como nuestras épocas de corrimiento al rojo obtenidas en la muestra de relojes cósmicos, podemos despreciar las soluciones encontradas para  $z$  muy grandes y podemos quedarnos simplemente con las partes más tardías. En la reconstrucción *Piecewise* se tomarán en cuenta las últimas dos partes de la solución, para la reconstrucción basada en las soluciones de *Galanti-Roncadelli* se usará la última parte de la

<sup>11</sup>Los datos se encuentran recopilados aquí <https://github.com/rodrigo1889/cosmology/blob/main/TypeIaSupernovae.csv>

solución, y para la solución obtenida en este trabajo se utilizará la solución que mezcla tanto  $\Omega_{M,0}$ ,  $\Omega_k$  y  $H_0$ , lo que nos permite un mejor análisis. Finalmente en el caso de la reconstrucción obtenida vía la función  $\wp$  de Weistrass podemos tomar en cuenta que como el componente de radiación y de curvatura pueden despreciarse en un Universo tardío, podemos hacer  $D = E = B = C = 0$  y por tanto, las invariantes quedarían como  $g_2 = 0$  y  $g_3 = -\frac{A^2\Omega_\Lambda}{12}$  y también  $H = \wp'(z)/\wp(z)$  y por tanto:

$$H_\wp(z) \cong \frac{H_0\Omega_\Lambda}{2}(1 + (1+z)^2) + \frac{(1 - \Omega_\Lambda)^2\Omega_\Lambda}{56} \frac{1}{H_0(1 + (1+z)^2)}, \quad (174)$$

de donde podemos quedarnos sólo con el primer término de la suma, puesto que el segundo será muy pequeño y no afectará en lo General a la primera parte. Por tanto, el análisis con datos será realizado usando las siguientes expresiones:

|  |   |   |  |  |
|--|---|---|--|--|
| Expresión directa                        | $H(z) = H_0\sqrt{\Omega_{M,0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}$   |   |  |  |
| Reconstrucción <i>piecewise</i>          | $H_{pw}(z) = \begin{cases} \frac{H_0(1+(1+z)^2)}{3} & \tilde{z}_{M\Lambda} \leq z \\ \sqrt{\Omega_\Lambda}H_0 & z < \tilde{z}_{M\Lambda} \end{cases}$                   |   |  |  |
| Reconstrucción <i>Galanti-Roncadelli</i> | $H_g(z) = \Omega_\Lambda^{1/2}H_0$  | $\frac{a_s^{3/2} \sinh}{a_s^{3/2} \cosh}$ | $\frac{3\Omega_\Lambda^{-1/2}}{1+(1+z)^2} - \frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2}H_0t_s$ | $+ \left(a_s^3 + \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/2} \frac{\cosh}{\sinh}$ |
| Este trabajo                             | $H_o(z) = \frac{H_0\left(\sqrt{4(\Omega_k-\beta)D(z)+(\Omega_{M,0}+2\beta D(z))^2+2\beta D(z)}\right)}{2D(z)\sqrt{4(\Omega_k-\beta)D(z)+(\Omega_{M,0}+2\beta D(z))^2}}$ |   |  |  |
| Reconstrucción $\wp$ Weierstrass         | $H_\wp(z) \cong \frac{H_0\Omega_\Lambda}{2}(1 + (1+z)^2)$   |   |  |  |

Tabla 5: Reconstrucciones a probar de  $H(z)$  con los datos de relojes cósicos

Usando  $\Omega_\Lambda = 0.68$  y  $\Omega_{M,0} = 0.28$ , además de  $H_0 = 68$  km/s/Mpc que son valores consistentes a nivel de  $2\sigma$  con los obtenidos por la colaboración Planck [3], se pueden graficar las reconstrucciones, que dan lo siguiente:

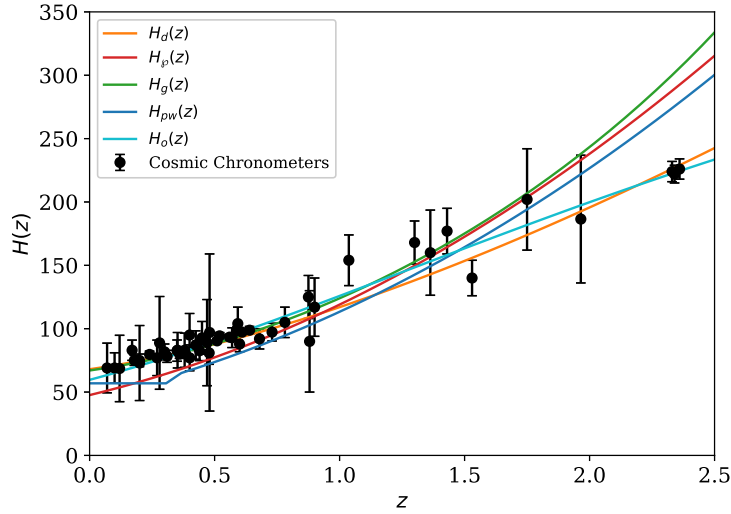


Figura 14: Reconstrucciones de  $H(z)$ . La línea naranja es la expresión directa, la línea roja es la reconstrucción basada en la función  $\wp$  de Weierstrass, el esquema de Galanti y Roncaddelli está graficado en la línea verde, la solución a trozos está representada en azul y la línea azul clara es la obtenida en este trabajo.

En la figura 14 se puede observar que las reconstrucciones son exitosas para reproducir el parámetro de Hubble. En el caso de la solución  $H_{pw}(z)$  se usó  $z = 0.3$ , mientras que para la solución obtenida en este trabajo  $\Omega_k = 0.001$ .

Usando la técnica bayesiana de MCMC, podemos tener una forma de ajustar los parámetros, usando los cálculos teóricos del parámetro de Hubble, explícitamente podemos escribir entonces que los cálculos teóricos dependerán de:

$$H_{\text{teor}}(z) = H_{\text{teor}}(z; \Omega_\Lambda, H_0), \quad (175)$$

donde  $\Omega_\Lambda$  y  $H_0$  serán los parámetros libres de la simulación y por tanto la cantidad que se minimizará para obtener los mejores valores del ajuste será:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_{\text{OHD}}} \frac{[H_{\text{teor}}(z_i) - H_{\text{obs}}(z_i)]^2}{\sigma^2}, \quad (176)$$

para esto, en las reconstrucciones donde aparezca explícitamente  $\Omega_{M,0}$ , simplemente se usará que  $\Omega_{\text{tot}} = \Omega_{M,0} + \Omega_\Lambda$ . Además  $\sigma$  se refiere a los errores de las mediciones, información que ya se encuentra en el conjunto de datos. Como sabemos, además,  $N_{\text{OHD}} = 51$  que es el número de datos contenidos en el conjunto de mediciones del parámetro de Hubble.

Haciendo 3000 pasos y las distribuciones a *Priori* como no informativas en  $H_0$  entre 60 y 80 y para  $\Omega_\Lambda$  entre 0.6 y 0.9 recordando que en este primer paso sólo se probarán esos dos parámetros. Para ello usando el paquete Emcee de Python se pueden obtener regiones de confianza para los parámetros mostrando las zonas de mayor probabilidad donde se encontrará el valor numérico.

En el caso de  $H_0$  todas las reconstrucciones generan posteriores satisfactorias exceptuando por  $H_\wp(z)$  que presenta una posterior degenerada, producto de que el valor de  $H_0$  depende fuertemente del valor de la Energía oscura y viceversa. Esto genera que la posterior en vez de parecerse más a una Gaussiana, genera una distribución más continua (ver figura 15) que indica justamente la degeneración.

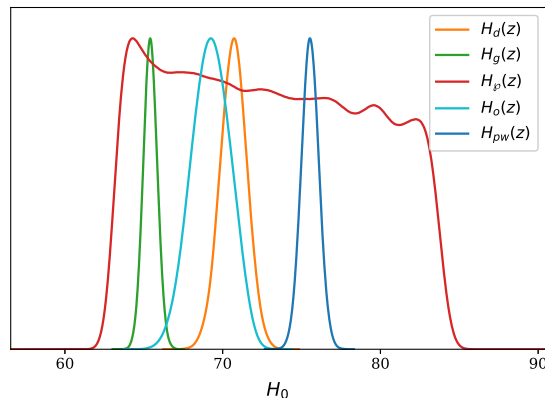


Figura 15: Posteriores para  $H_0$  de todas las reconstrucciones.  $H_\wp(z)$  (línea roja) observa una degeneración del parámetro  $H_0$  con la densidad de energía oscura.

Y por el contrario, las posteriores para el parámetro de densidad de la energía oscura  $\Omega_\Lambda$  presentan otros problemas. En el caso de la reconstrucción con la función  $\wp$  de Weierstrass se muestra de nuevo una degeneración con el valor de  $H_0$ , pero también aparecen problemas con la solución de la función *piecewise* usual. Aquí, es claro que la rutina tiene tres valores preferidos para la densidad de energía oscura. La explicación de porqué ocurre esto puede deberse a diversos factores entre ellos a la parte donde la función es calculada por partes usando la función *piecewise* de numpy en Python (Ver figura 16).

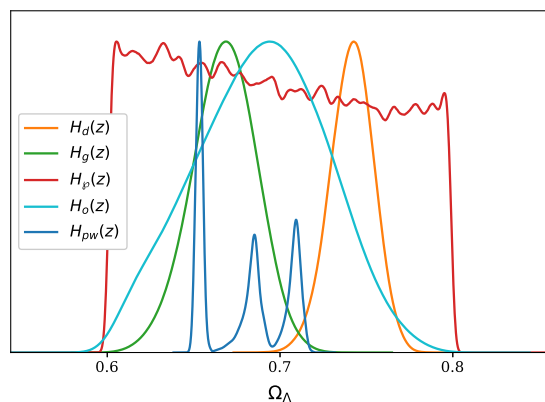


Figura 16: Posteriores para  $\Omega_\Lambda$ . Se observan la degeneración para  $H_\wp(z)$  (en rojo) y las diversas posteriores que genera  $H_{pw}(z)$ .



Es por la falta de la precisión que se necesita y el costo computacional que se decide no enfatizar de momento más con la solución a trozos  $H_{pw}(z)$ .

Mostrando finalmente todos los contornos aceptables, tenemos:

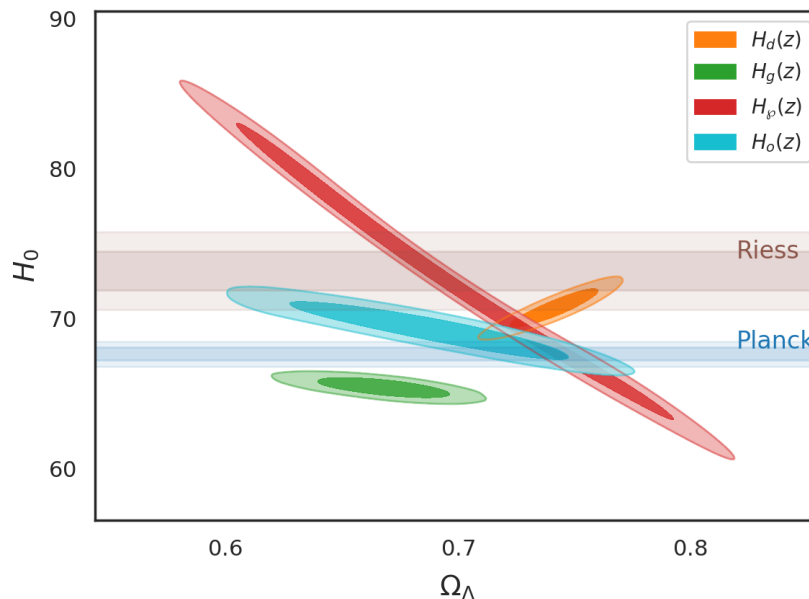


Figura 17: Bandas de confianza de las diferentes reconstrucciones. La banda café corresponde al intervalo de confianza obtenido por Riess [10] y la banda azul al proyecto Planck [3].

que nos permite tener en cuenta el error al realizar las observaciones del parámetro de Hubble. Las bandas azul y café en la figura 17 son los resultados de Riess [10] y el proyecto Planck [3] que muestran la tensión de la constante de Hubble. En las áreas de confianza se decidió omitir la obtenida para  $H_{pw}(z)$  debido a los problemas en la convergencia a un valor aceptable. Se observa además más claramente la degeneración de la reconstrucción  $H_\phi(z)$  y como la banda con los intervalos mejor definidos es la expresión directa de  $H_d(z)$  que corresponde al modelo más sencillo. Pese a las reconstrucciones, las técnicas siguen prefiriendo la expresión directa de  $H(z)$ , cosa que tampoco es sorprendente puesto que el hacer matemáticas para solucionar las ecuaciones de Friedmann involucró hacer supuestos que cambian la precisión de lo que eventualmente regresa a ser  $H(z)$ . Pese a esto, la labor de reconstruir no es algo que se incluya en la mayor parte de la literatura, puesto que esta se limita a resolver las ecuaciones de Friedmann y no a explorar un poco más el comportamiento de dicha solución con datos o con algún tipo de información adicional. Finalmente, para resumir los resultados anteriores, podemos colocar los parámetros resultantes de la constricción realizada con los Relojes cósmicos.

| Reconstrucción                     | $\Omega_\Lambda \pm 2\sigma$ | $H_0 \pm 2\sigma$       | $\chi^2$ |
|------------------------------------|------------------------------|-------------------------|----------|
| Expresión directa $H_d(z)$         | $0.74^{+0.02}_{-0.03}$       | $70.7^{+1.7}_{-1.7}$    | 27.46    |
| <i>Piecewise</i> $H_{pw}(z)$       | -                            | $75.5^{+1.1}_{-1.1}$    | 556.79   |
| <i>Galanti-Roncadelli</i> $H_g(z)$ | $0.69^{+0.04}_{-0.04}$       | $65.41^{+0.88}_{-0.87}$ | 309.21   |
| Este trabajo $H_o(z)$              | $0.69^{+0.07}_{-0.08}$       | $69.30^{+2.30}_{-2.41}$ | 30.51    |
| $\wp$ -Weierstrass $H_\wp(z)$      | $0.70^{+0.1}_{-0.1}$         | $73.01^{+10}_{-10}$     | 556.98   |

Tabla 6: Valores medios finales para el ajuste realizado sobre los datos de Relojes cósmicos [24]. Todos los intervalos de confianza son  $2\sigma$ . Además usando los mejores valores del ajuste se calcula el valor de  $\chi^2$ . Para calcular  $\chi^2$  de  $H_{pw}(z)$  se usó el valor de  $\Omega_\Lambda = 0.678$  que es el punto de mayor densidad de la posterior mostrada anteriormente para dicha reconstrucción.

Ampliando dicho análisis, podemos utilizar las dos reconstrucciones de  $H(z)$  que permiten un universo con contenido de curvatura  $\Omega_k$ , utilizando entonces  $H_d(z)$  y  $H_o(z)$ , ambos que se habían asumido con  $\Omega_k = 0$  y  $\Omega_k = 0.001$  respectivamente para el ajuste anterior. Si dejamos ambas componentes de curvatura libres, con una *prior* Gaussiana con centro en  $\Omega_k = 0.05$  y una desviación de 0.01, además de  $\Omega_{M,0}$  y  $H_0$  con *priors* planos entre 0.1 y 0.5 para la materia y entre 50 y 100 para  $H_0$  podemos de nuevo volver a correr el algoritmo computacional para constreñirlos.

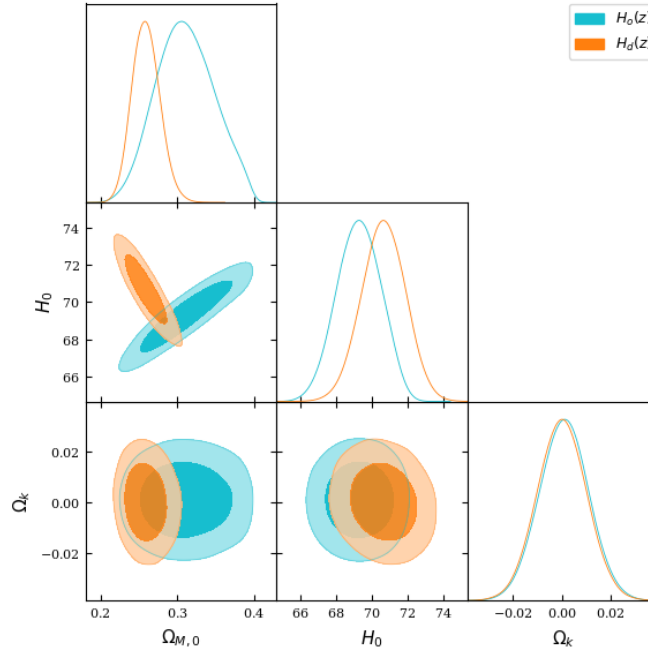


Figura 18: Posteriores para las dos expresiones que permiten calibrar la curvatura del Universo, siendo la expresión directa de  $H_d(z)$  (naranja) y nuestra expresión  $H_o(z)$  (azul clara).

En la figura 18 se pueden ver las posteriores de la calibración de parámetros con Relojes cósmicos [24]. Es claro que ambas expresiones prefieren un valor de curvatura muy cercano al cero, prefiriendo

un universo plano, aunque este resultado puede estar sesgado puesto que dicho resultado también está modificado por la *prior* elegida para  $\Omega_k$ . Los resultados de la constricción también puede ser resumida en forma de tabla:

| Reconstrucción             | $\Omega_{M,0} \pm 2\sigma$ | $H_0 \pm 2\sigma$    | $\Omega_k \pm 2\sigma$    | $\chi^2$ |
|----------------------------|----------------------------|----------------------|---------------------------|----------|
| Expresión directa $H_d(z)$ | $0.259^{+0.037}_{-0.034}$  | $70.6^{+2.4}_{-2.4}$ | $0.000^{+0.020}_{-0.019}$ | 27.46    |
| Este trabajo $H_o(z)$      | $0.311^{+0.074}_{-0.071}$  | $69.3^{+2.3}_{-2.4}$ | $0.001^{+0.020}_{-0.020}$ | 30.51    |

Tabla 7: Valores medios finales para el ajuste realizado sobre los datos de Relojes cósmicos [24]. Todos los intervalos de confianza son  $2\sigma$ . Además usando los mejores valores del ajuste se calcula el valor de  $\chi^2$ .

### 7.3. Reconstrucción del módulo de distancia

Como vimos anteriormente, tomando como base la cosmología sobre la que se esté trabajando, podemos reconstruir el módulo de distancia  $\mu$  que depende de la distancia de luminosidad. Esto se puede ver explícitamente en (75). Como ya tenemos distintas expresiones para  $H(z)$ , simplemente podemos usar la relación con  $E(z)$  para obtener una  $d_L$  que podamos usar dentro de  $\mu$ , y como los datos disponibles de muestras de supernovas están midiendo este parámetro podemos establecer de nuevo una forma de constreñir los parámetros cosmológicos.

Entonces, del cuadro 5 podemos obtener directamente la función  $E(z) = H(z)/H_0$  para poder calcular el módulo de distancia. Esto se puede ver como:

|  |   |
|--|---|
| Expresión directa                        | $E(z) = \sqrt{\Omega_{M,0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}$  |
| Reconstrucción <i>piecewise</i>          | $E_{pw}(z) = \begin{cases} \frac{(1+(1+z)^2)}{3} & \tilde{z}_{M\Lambda} \leq z \\ \sqrt{\Omega_\Lambda} & z < \tilde{z}_{M\Lambda} \end{cases}$   |
| Reconstrucción <i>Galanti-Roncadelli</i> | $E_g(z) = \Omega_\Lambda^{1/2} \frac{a_s^{3/2} \sinh \left[ \frac{3\Omega_\Lambda^{-1/2}}{1+(1+z)^2} - \frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0 t_s \right] + \left( a_s^3 + \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/2} \cosh \left[ \frac{3\Omega_\Lambda^{-1/2}}{1+(1+z)^2} - \frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0 t_s \right]}{a_s^{3/2} \cosh \left[ \frac{3\Omega_\Lambda^{-1/2}}{1+(1+z)^2} - \frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0 t_s \right] + \left( a_s^3 + \frac{\Omega_{M,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/2} \sinh \left[ \frac{3\Omega_\Lambda^{-1/2}}{1+(1+z)^2} - \frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0 t_s \right]}$ |
| Este trabajo                             | $E_o(z) = \frac{\left( \sqrt{4(\Omega_k - \beta)D(z) + (\Omega_{M,0} + 2\beta D(z))^2 + 2\beta D(z)} \right)}{2D(z)\sqrt{4(\Omega_k - \beta)D(z) + (\Omega_{M,0} + 2\beta D(z))^2}}$  |
| Reconstrucción $\wp$ Weierstrass         | $E_\wp(z) \cong \frac{\Omega_\Lambda}{2} (1 + (1+z)^2)$   |

Tabla 8: Reconstrucciones de  $E(z)$  para calcular el módulo de distancia  $\mu$ .

y entonces, para calcular  $\mu$  tendremos que usar la expresión completa dada como:

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left( (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) + \mu_0, \quad (177)$$

donde  $E_i(z)$  son las reconstrucciones individuales del parámetro de Hubble normalizado. Para mantener la correcta utilización de unidades podemos utilizar que  $c/H_0 = D_H$  (la distancia de Hubble) es justamente:

$$D_H = \frac{c}{H_0} = 2997.7 \frac{1}{h} \text{ Mpc}, \quad (178)$$

y por tanto ya tenemos las unidades que son concordantes con (75). Además  $100h = H_0$ . Ahora, el problema es que justamente no todas las reconstrucciones tienen soluciones analíticas, exceptuando: la expresión directa  $H_d(z)$ , la expresión de la reconstrucción *piecewise* y la expresión de la reconstrucción basada en la función  $\wp$  de Weierstrass. De esta forma, individualmente, las soluciones para el parámetro  $\mu$  de estos casos pueden ser construidas. En el caso de la reconstrucción *piecewise*:

$$\mu_{pw}(z) = \begin{cases} 5 \log_{10} \left( 3(1+z) \frac{c}{H_0} \arctan(1+z) \right) + \mu_0 & \tilde{z}_{M\Lambda} \leq z, \\ 5 \log_{10} \left( (1+z) \frac{c}{H_0} \frac{z}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \right) + \mu_0 & z < \tilde{z}_{M\Lambda}, \end{cases} \quad (179)$$

En el caso de la reconstrucción de Weierstrass  $\mu$  se expresa como:

$$\mu_\wp(z) = 5 \log_{10} \left( (1+z) \frac{c}{H_0} \frac{2 \arctan(1+z)}{\Omega_\Lambda} \right) + \mu_0. \quad (180)$$

Finalmente para la expresión directa, podemos recurrir a una técnica matemática desarrollada en [67] donde se encuentra una expresión analítica para la distancia lumínica usando la función hipergeométrica donde tenemos que:

$$I_z(z; \Omega_{M,0}, \Omega_\Lambda) = \int \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_{M,0}(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}}, \quad (181)$$

que es todavía la integral indefinida del inverso de  $E(z)$ , que además con los cambios de variable adecuados se tiene finalmente que la integral es analíticamente:

$$I_z(z; \Omega_{M,0}, \Omega_\Lambda) = \frac{-2 {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{M,0}} \frac{1}{-z^3+3z^2+3z+1} \right)}{\sqrt{\Omega_{M,0}} \sqrt{z^3+3z^2+3z+1}}, \quad (182)$$

donde  ${}_2F_1(a, b, c; z)$  es la función hipergeométrica 2-1 [68]. Esta función puede aproximarse por las series de Gauss como:

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s (b)_s}{(c)_s s!} z^s = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} z^2 + \dots, \quad (183)$$

donde además  $(a)_s$  es el símbolo de Pochhammer que está definido como:

$$(a)_s = a(a+1) \dots (a+s-1). \quad (184)$$

Usando entonces esta función hipergeométrica, podemos definir ahora sí la integral definida como:

$$F_z(z; \Omega_{M,0}, \Omega_\Lambda) = I_z(z; \Omega_{M,0}, \Omega_\Lambda) - I_z(0; \Omega_{M,0}, \Omega_\Lambda), \quad (185)$$

donde simplemente se evalúa  $I_z$  en cero. Entonces, incorporando esto al módulo de distancia tenemos finalmente:

$$\mu_d = 5 \log_{10} \left( (1+z) \frac{c}{H_0} F(z; \Omega_{M,0}, \Omega_\Lambda) \right) + \mu_0. \quad (186)$$

El resto de las expresiones, que no pueden ser obtenidas de forma analítica, podemos utilizar un integrador numérico. También las expresiones de  $E_d(z)$ ,  $E_{pw}(z)$  y  $E_\varphi(z)$  serán integradas numéricamente como punto de comparación entre los resultados analíticos y los resultados numéricos. Todas las expresiones, usarán directamente  $\mu_0 = 25$  para su representación y para el cálculo de la densidad de energía oscura  $\Omega_\Lambda$ .

## 7.4. Análisis con Supernovas y Brotes de Rayos Gamma

Para calibrar los parámetros cosmológicos de los resultados de estas reconstrucciones del módulo de distancia, podemos utilizar los datos de la muestra de Pantheon [25]<sup>12</sup> y la muestra de Brotes de rayos gamma contenida en la tabla 4 de [26]<sup>13</sup>.

La muestra de Pantheon es una colección de más de 300 puntos correspondientes a eventos de supernovas tipo Ia descubiertas por el supervey Pan-STARRS1 (PS1) [25], para ello mejorando la forma de analizar los espectros de las observaciones la encuesta<sup>14</sup>. Como mencioné en la sección (4.6) y en toda la introducción, para poder medir estos fenómenos, se utilizan curvas de luz provenientes de los espectros, de forma que ajustadas de manera correcta, podemos estimar la distancia hasta donde ocurrió la supernova, permitiéndonos medir tanto el módulo de distancia  $\mu$  que se refiere a la cantidad de luz que hemos recibido, y el corrimiento al rojo  $z$ . Todos los objetos de Pantheon se encuentran en un corrimiento al rojo de  $z \leq 2$ . En cambio, las Explosiones de Rayos Gamma es algo distinta. Para esta muestra en particular, en [26] se utilizan dos métodos completamente independientes para calibrar la energía equivalente, que se refiere al pico máximo de energía que se observa en el espectro de un estallido. Esta muestra tiene el módulo de distancia calculado para eventos de entre  $1 \lesssim z \leq 8.2$ .

Al obtener todos los diferentes  $\mu$ , podemos entonces compararlos con las observaciones de Pantheon y de GRB. En todos los casos, se utilizarán de nuevo los valores  $\Omega_\Lambda = 0.69$ ,  $H_0 = 69$  y  $\mu_0 = 25$ , todos valores compatibles con  $2\sigma$  con Planck [3].

<sup>12</sup>Esta muestra es de libre acceso en el repositorio del proyecto, disponible en <https://github.com/dscolnic/Pantheon>

<sup>13</sup>Además esta muestra está contenida de forma pública en <https://github.com/rodrigo1889/cosmology/blob/main/GRB.csv>

<sup>14</sup>La página de la encuesta es <https://panstarrs.stsci.edu/>

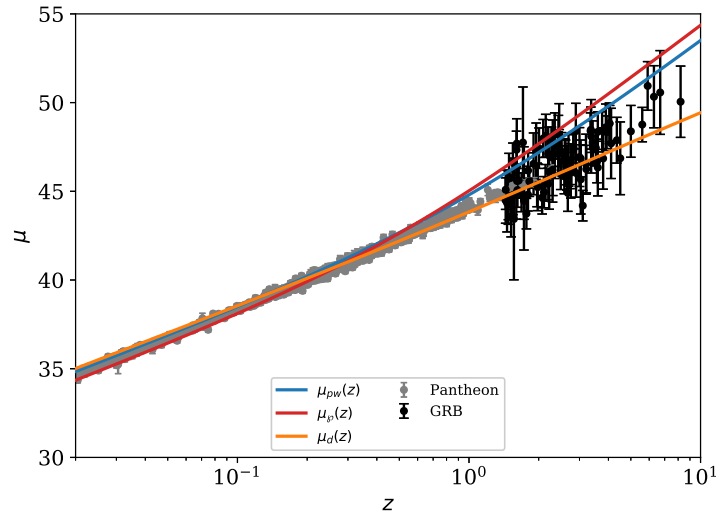


Figura 19: Módulo de distancia para las tres expresiones de  $E(z)$  que pudieron hacerse analíticamente, comparados con los datos de Pantheon y GRB. La línea roja es la basada en la reconstrucción  $\varphi$  de Weierstrass, mientras que la línea azul está basada en la solución *piecewise*. La línea naranja muestra también la reconstrucción analítica de la expresión directa de  $E_d(z)$ .

Las dos expresiones parecen funcionar adecuadamente según la figura 19. Podemos hacer lo mismo para las expresiones numéricas, que en este caso se estará usando la rutina *quad* contenida en la paquetería Scipy de Python.

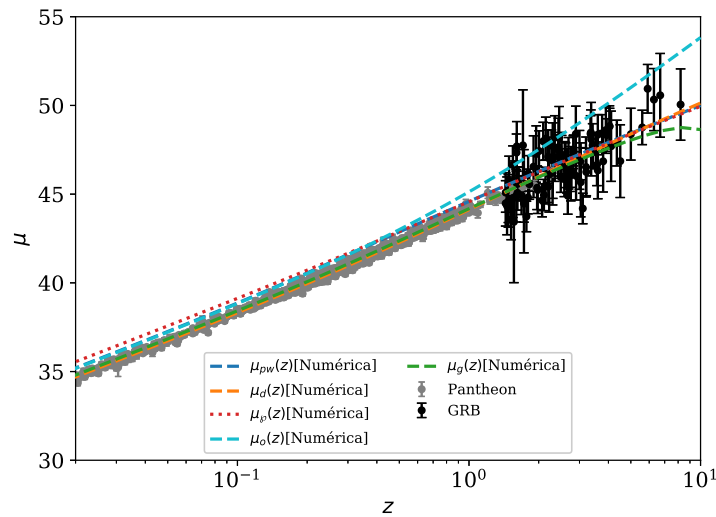


Figura 20: Módulos de distancia comparados numéricamente con las observaciones de Pantheon y GRB. Todas las expresiones de  $E(z)$  de la tabla 8 están incluidas.

Con las construcciones analíticas del módulo de distancia podemos entonces obtener una calibración de  $\Omega_\Lambda$  usando los valores anteriormente obtenidos para  $H_0$  en cada reconstrucción probada con Relojes cósmicos. Para las expresiones analíticas directas del módulo de distancia se obtuvieron diferentes posteriores para la densidad de energía oscura. En todos los casos la distribución a priori fue plana con un intervalo  $\Omega_\Lambda \in [0.1, 0.9]$ . Los resultados para las expresiones analíticas que pueden obtenerse de las expresiones de  $H(z)$  pueden ser vistos en la tabla 9. En las figuras 21, 22 y 23 se pueden observar además las posteriores obtenidas.

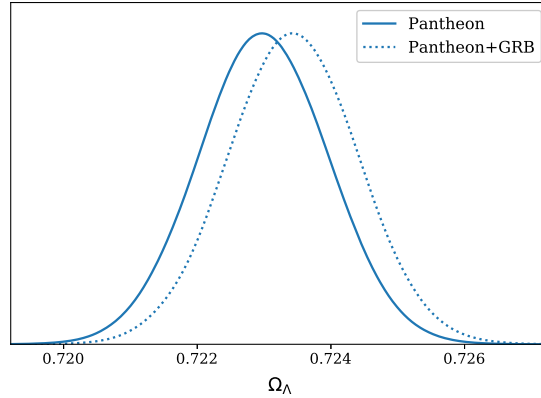


Figura 21: Posteriores de  $\Omega_\Lambda$  para la reconstrucción  $H_{pw}(z)$  del módulo de distancia. Está siendo usado el valor  $H_0 = 75$  que es el obtenido en la sección anterior del análisis con Relojes Cósmicos. La posterior mostrada en una línea sólida representa sólo la muestra de Pantheon [25], la posterior con línea punteada representa la combinación de los datos de Pantheon y de brotes de rayos gamma [26].

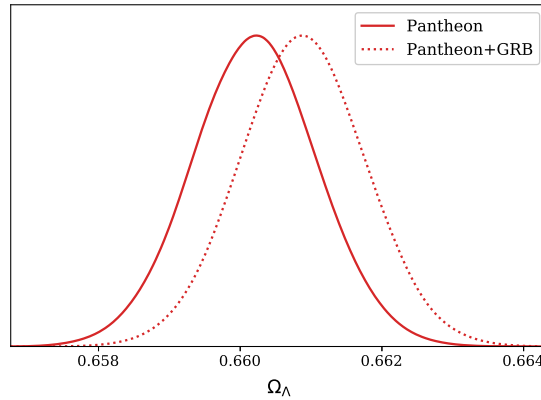


Figura 22: Posteriores de  $\Omega_\Lambda$  para la reconstrucción  $H_\varphi(z)$  del módulo de distancia. Está siendo usado el valor  $H_0 = 73$  que es el obtenido en la sección anterior del análisis con Relojes Cósmicos. La posterior mostrada en una línea sólida representa sólo la muestra de Pantheon [25], la posterior con línea punteada representa la combinación de los datos de Pantheon y de brotes de rayos gamma [26].

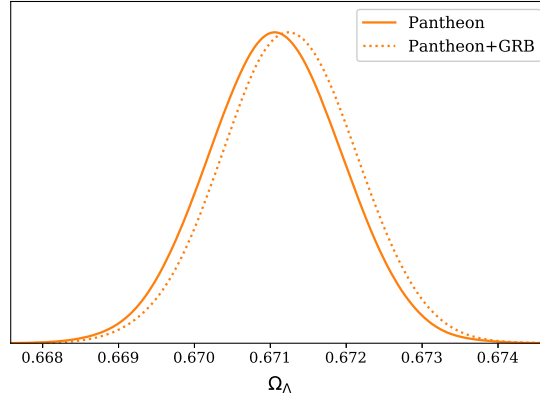


Figura 23: Posteriores de  $\Omega_\Lambda$  para la reconstrucción  $H_d(z)$  del módulo de distancia. Está siendo usado el valor  $H_0 = 70.7$  que es el obtenido en la sección anterior del análisis con Relojes Cósmicos. La posterior mostrada en una línea sólida representa sólo la muestra de Pantheon [25], la posterior con línea punteada representa la combinación de los datos de Pantheon y de brotes de rayos gamma [26].

| Reconstrucción                           | $H_0$ | Datos          | $\Omega_\Lambda \pm 3\sigma$ | $\chi^2$ | SSR    |
|--|-------|----------------|------------------------------|----------|--------|
| Expresión <i>piecewise</i> $\mu_{pw}(z)$ | 75.5  | Pantheon       | $0.723 \pm 0.002$            | 722.45   | 98.91  |
|  | 75.5  | Pantheon + GRB | $0.723 \pm 0.002$            | 871.56   | 280.16 |
| $\wp$ -Weierstrass $\mu_\wp(z)$          | 73.01 | Pantheon       | $0.660^{+0.002}_{-0.001}$    | 2164.28  | 354.05 |
|  | 73.01 | Pantheon + GRB | $0.661 \pm 0.002$            | 2332.90  | 660.75 |
| Expresión directa $\mu_d(z)$             | 70.7  | Pantheon       | $0.671 \pm 0.001$            | 154.15   | 22.67  |
|  | 70.7  | Pantheon + GRB | $0.671 \pm 0.002$            | 236.22   | 125.04 |

Tabla 9: Valores medios finales para el ajuste realizado de las expresiones analíticas sobre los datos de Pantheon [25] y de GRB [26]. Todos los intervalos de confianza son  $3\sigma$ . Además usando los mejores valores del ajuste se calcula el valor de  $\chi^2$  y el valor SSR que es simplemente la suma de las diferencias entre el modelo y los datos.

De la tabla 9 se puede observar que la menor  $\chi^2$  es la que se obtiene para la expresión analítica de  $\Lambda$ CDM dada en la expresión directa para  $H(z)$  con un valor de  $\Omega_\Lambda = 0.671 \pm 0.002$  en el caso de la muestra de Pantheon + GRB.

Usando las mismas condiciones para la integración numérica podemos obtener resultados parecidos.



| Reconstrucción                           | $H_0$ | Datos          | $\Omega_\Lambda \pm 3\sigma$ | $\chi^2$ | SSR    |
|--|-------|----------------|------------------------------|----------|--------|
| Expresión directa $\mu_d(z)$             | 70.7  | Pantheon       | $0.710^{+0.011}_{-0.012}$    | 154.15   | 22.67  |
|  | 70.7  | Pantheon + GRB | $0.709^{+0.011}_{-0.012}$    | 236.22   | 125.04 |
| Expresión <i>piecewise</i> $\mu_{pw}(z)$ | 75.5  | Pantheon       | $0.698^{+0.016}_{-0.013}$    | 246.01   | 35.49  |
|  | 75.5  | Pantheon + GRB | $0.696^{+0.012}_{-0.011}$    | 342.88   | 159.49 |
| Expresión <i>Galanti</i> $\mu_g(z)$      | 65.41 | Pantheon       | $0.729^{+0.051}_{-0.051}$    | 212.39   | 33.71  |
|  | 65.41 | Pantheon + GRB | $0.728^{+0.043}_{-0.042}$    | 305.73   | 144.55 |
| Expresión de este trabajo $\mu_o(z)$     | 69.3  | Pantheon       | $0.681^{+0.052}_{-0.063}$    | 213.49   | 59.76  |
|  | 69.3  | Pantheon + GRB | $0.679^{+0.074}_{-0.091}$    | 585.32   | 303.41 |
| $\wp$ -Weierstrass $\mu_\wp(z)$          | 73.01 | Pantheon       | $0.731^{+0.013}_{-0.011}$    | 306.19   | 42.76  |
|  | 73.01 | Pantheon + GRB | $0.723^{+0.049}_{-0.049}$    | 404.97   | 169.62 |

Tabla 10: Valores medios finales para el ajuste realizado de las expresiones numéricas sobre los datos de Pantheon [25] y de GRB [26]. Todos los intervalos de confianza son  $3\sigma$ . Además usando los mejores valores del ajuste se calcula el valor de  $\chi^2$  y SSR que es la suma de las distancias cuadradas entre el modelo y los datos.

De la tabla 10 también se observa que sin duda el modelo preferido por ambos conjuntos de datos es la expresión directa  $\mu_d(z)$  que es simplemente  $\Lambda$ CDM. Para ambos conjuntos, el valor de  $\chi^2$  es el más pequeño. Cerca en segundo lugar, la expresión basada en Galanti también se encuentra cercana en cuanto a la bondad del ajuste. En este caso, contrario a la expresión directa de  $H(z)$ , la expresión trabajada en esta tesis tiene un peor desempeño comparado con las dos mencionadas anteriormente.

## 8. Conclusiones

El propósito central de este trabajo fue realizar un estudio estricto de algunas de las formas que tenemos para resolver las ecuaciones de Friedmann de forma analítica. Puesto que las ecuaciones diferenciales que las componen no son triviales y posibles de resolver de forma completa, es decir, sin tener que hacer supuestos físicos que nos ayuden a avanzar; necesitamos separar los fluidos que componen al Universo en épocas donde entendemos que uno fue dominante sobre los otros, para ello pasando por una separación completa que es la solución *piecewise* de [6], la solución que involucra una mezcla de fluidos en diferentes épocas del Universo; tanto para un Universo con curvatura como sin curvatura (que son la solución de [23] y la encontrada en la tesis respectivamente) y finalmente como complemento se exploró también una solución completamente analítica basada en las propiedades de las integrales elípticas. Los diferentes enfoques para aproximar las ecuaciones diferenciales de Friedmann tienen sus respectivas ventajas y desventajas. La ventaja de una solución completamente particionada es que permite explorar al Universo por medio de épocas es que su estudio se convierte en algo relativamente sencillo e ilustrativo [6] [8] y es por ello que los diversos libros suelen usar este enfoque.

La ventaja de usar una solución que mezcle fluidos para las diferentes épocas del Universo tiene la ventaja de usar menos postulados físicos y de permitir un comportamiento más General para una función  $a(t)$ . La solución que se realizó en este trabajo, con el objetivo de aportar una mayor generalidad a la propuesta de Galanti et al. [23] fue involucrar también la componente de curvatura en el Universo. Lo nuevo de este tipo de exploraciones es tratar de realizar menos aseveraciones físicas y atacar más directamente las matemáticas antes de llegar a un lugar donde si se tenga que usar física de nuevo, el problema es que tanto la solución con  $\Omega_k \neq 0$  como la que si es plana, presentan problemas para representar las épocas tempranas del Universo, específicamente desde que la radiación domina. Esto significa un problema para obtener una solución general, pero no para seguir explorando el comportamiento físico con datos que se tienen disponibles de un Universo tardío. Esta solución General analítica de las ecuaciones de Friedmann, da para  $a \rightarrow 1$  dos soluciones para diferentes épocas mostradas en la figura 13 que contrastan con la falta de precisión en el universo temprano.

Además, se exploró la solución basada en integrales elípticas que da una función que depende de las funciones especiales  $\wp$  de Weierstrass. Esta solución es un intento General de solución completamente analítica para resolver las ecuaciones de Friedmann, y que pese a que el autor no exploró más en su comportamiento y propiedades físicas, en este trabajo se exploró también el comportamiento de la reconstrucción del parámetro  $H(z)$ .

Al reconstruir el parámetro de Hubble  $H(z)$  con las distintas aproximaciones y enfoques, se llega a la tabla de los resultados más importantes. Estos fueron encontrados con el paquete *emcee* de Python y que permitió obtener los resultados para los parámetros cosmológicos constreñidos con los datos de Relojes cósmicos y mostrada en la tabla 6, que muestra además el valor  $\chi^2$  que nos habla de que tan eficiente es el ajuste contra los datos. Para un menor valor de  $\chi^2$  es mejor el ajuste con la muestra de datos.

De la tabla 6 se puede ver que el conjunto de datos sigue prefiriendo a la expresión directa  $H_d(z)$  que es el caso especial del modelo  $\Lambda$ CDM donde tenemos las componentes de materia y energía oscura constreñidas. Pero no todo es pérdida, puesto que la reconstrucción que se consiguió en esta

tesis tiene también un  $\chi^2$  en ese mismo orden de magnitud y tiene la gran ventaja de que no es una reconstrucción basada únicamente en un universo plano, sino que permite una componente de curvatura. De todas las reconstrucciones de  $H(z)$  que fueron probadas con Relojes cósmicos, tanto la expresión que se trabajó en esta tesis  $H_o(z)$  como la expresión de  $\Lambda$ CDM son las que mejor desempeño tienen para  $\chi^2$ . La ventaja que tiene además la expresión obtenida en este trabajo es que permite calibrar también la componente de curvatura, cosa que las demás no permiten puesto que las construcciones de las soluciones parten de un universo plano (exceptuando por la solución analítica completa de Weierstrass).

De la tabla 7 se puede ver, de igual forma, que ambas reconstrucciones del parámetro de Hubble prefieren un valor muy cercano a la planitud  $\Omega_k \sim 0$  para una *prior* Gaussiana cercana al cero. Esto podría significar algún tipo de sesgo, ya que sin la *prior* el valor no se restringe lo suficiente en diferentes intervalos de valores para la componente de curvatura. En cambio, pese al punto de inicio de una distribución Gaussiana, ambos modelos prefieren un valor muy cercano a la planitud.

Además, la ventaja de la aproximación realizada en esta tesis para reconstruir  $H(z)$  es que no necesita los supuestos presentados al principio para la construcción de un modelo como  $\Lambda$ CDM que requiere un Universo plano. En cambio, en la reconstrucción realizada en este trabajo se analiza el comportamiento por épocas de una mezcla de componentes que permite reconstruir el comportamiento de  $a(t)$  de forma escalonada y finalmente también el de  $H(z)$ . Esto termina resultando en que la aproximación de  $H_o(z)$  permita la incorporación del parámetro de curvatura. Ambas reconstrucciones son aceptables a la hora de la comparación con datos, pero el conjunto sigue arrojando un mejor resultado (que también se esperaba puesto que el hacer procesos matemáticos involucró en algunas partes pérdidas de precisión y aunque no se quiera también el hacer supuestos físicos que terminan mermando el resultado final) para el modelo  $\Lambda$ CDM. Tanto a la expresión directa de  $\Lambda$ CDM como a la reconstrucción realizada en la tesis el valor preferido para la densidad de materia es de  $\Omega_{M,0} \sim 0.3$ , siendo  $\Omega_{M,0}^{\Lambda\text{CDM}} = 0.259 \pm 0.032$  y  $\Omega_{M,0}^{H_o(z)} = 0.311^{+0.074}_{-0.071}$ .

En cuanto al análisis de las reconstrucciones del módulo de distancia  $\mu$ , en este caso es claro que todas las reconstrucciones analíticas son menos eficientes para reproducir los datos de Supernovas y brotes de rayos gamma, cosa que puede verse en las distintas  $\chi^2$  mostradas en la tabla 9, donde la obtenida para  $\Lambda$ CDM y su expresión analítica de  $\mu$  construida sobre la función hipergeométrica es sin duda la que tiene por varios órdenes de magnitud la menor  $\chi^2$ . Para todas estos módulos de distancia se utilizaron valores ya fijos de  $H_0$  puesto que sin ellos el programa no converge en un valor de  $\Omega_\Lambda$  y termina siendo un ajuste bastante malo. Para todas las expresiones además, se utilizó que  $\mu_0 = 25$ . De nuevo, para las expresiones del módulo de distancia, la más eficiente y con el ajuste con un menor  $\chi^2$  es la expresión obtenida de la integración directa de  $\mu_d(z)$ . Y aunque todos los ajustes coinciden con un valor de energía oscura de  $\Omega_\Lambda \sim 0.7$  es claro que el ajuste más eficaz es el de la expresión directa, cosa que también se esperaba porque no se necesitan supuestos ni construcción para utilizarla. En el caso de los datos de Pantheon solos, la bondad del ajuste suele ser más baja, comparada con los datos combinados de Pantheon y de brotes de rayos gamma. Para las reconstrucciones numéricas es importante señalar, que al contrario de la expresión para  $H(z)$ , aquí el segundo mejor ajuste es la expresión obtenida de la reconstrucción basada en la solución de Galanti et al. [23]. En General, podemos decir que es superior la construcción directa de integrar la expresión tanto analíticamente como numéricamente.

Resaltando finalmente, este trabajo generó una expresión analítica para el factor de escala  $a(t)$

a tiempos cercanos al nuestro, con problemas en el universo temprano, debidos a la integración y a probablemente que las integrales definitivamente no son analíticas para puntos cercanos a  $t \rightarrow 0$ , pese a ser integrables ya que no pueden ser reducidas a expresiones analíticas ni pueden ser llevadas a formas más compactas. De esta expresión para  $a(t)$  se obtuvo  $\dot{a}(t)$  y con ello  $H(t)$  que fue transformada a  $H(z)$  usando las transformaciones de Lorentz para el caso cosmológico. Finalmente, esta expresión de  $H(z)$  fue probada con Relojes Cósmicos, Supernovas y brotes de rayos gamma, para todos obteniendo resultados concordantes con Riess et al. [10] pero sin ser capaz de aliviar la tensión para  $H_0$ , puesto que nos da un valor más cercano a Planck [3] de  $H_0 = 69.3 \pm 2.4$ .

Esta tesis no propone ninguna física nueva, sino que se limita a explorar las formas de construir cosmologías resolviendo las ecuaciones de Friedmann, y probando estas diferentes soluciones con los datos cosmológicos de Universo tardío. Este enfoque de intentar cosmología de precisión no es nuevo, pero si relativamente complicado en términos matemáticos puesto que las integrales terminan teniendo expresiones que no son analíticas. Y aunque la solución no resuelve el problema de la tensión de  $H_0$  si mejora los ajustes que se pueden realizar con soluciones que se encuentran en la literatura como la expresión *piecewise* de [6] y la expresión de Galanti et al. [23].

Como perspectiva de este trabajo, el buscar funciones analíticas que resuelvan las integrales para el universo temprano, usar algún otro tipo de supuestos físicos que permitan una mejor aproximación y explorar de forma más profunda las obtenidas con funciones especiales como la de  $\wp$  de Weierstrass. Además, se pueden intentar también encontrar soluciones de precisión para diferentes modelos alternativos de energía oscura e incluso de modificaciones de la gravedad.

## A. Notación y unidades

Antes de avanzar al lenguaje matemático es importante hacer la aclaración de signatura. A menos que se especifique lo contrario, la métricas usadas tendrán la signatura  $(-, +, +, +)$  y usualmente las letras griegas de los superíndices y subíndices ocuparán todo el espacio tiempo mientras que los índices griegos serán para las coordenadas espaciales.

La velocidad de la luz es fundamental para la construcción del mundo con la Teoría de la Relatividad, así que podemos adoptar un nuevo sistema de unidades en que dicha velocidad denotada como  $c$  tenga el valor 1. Esto evitará tener que usar una cantidad tan grande como 299 792 458 m/s. Podemos hacer un bonito razonamiento [38]:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\text{distancia que viaja la luz en un intervalo de tiempo}}{\text{intervalo de tiempo}} \\ &= \frac{1\text{m}}{\text{el tiempo que le toma a la luz viajar un metro}} \\ &= \frac{1\text{m}}{1\text{m}} = 1 \end{aligned}$$

de esta forma si medimos consistentemente el tiempo en metros entonces la velocidad de la luz puede ser igual a 1 y sin dimensiones y así para convertir de esta nueva convención que son las *unidades naturales* a las unidades del sistema internacional podemos usar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} 1 \text{ m} &\cong \frac{1}{3 \times 10^8} \text{ s} \\ 1 \text{ s} &\cong 3 \times 10^8 \text{ m} \end{aligned}$$

de esta forma en todo el trabajo, a menos que aparezca explícitamente la  $c$  se utilizarán unidades naturales para las expresiones matemáticas.

## B. Formulaciones matemáticas

### B.1. Notación tensorial

Un sistema de  $N$  dimensiones se puede describir con un sistema de coordenadas  $x^i$  que se pueden escribir explícitamente como:

$$x^i = (x^1, x^2, x^3, \dots, x^N). \quad (187)$$

Para calcular el elemento diferencial de longitud (o cualquier distancia) en un sistema de coordenadas, este puede escribirse como:

$$ds^2 = g_{ij} x^i x^j, \quad (188)$$

que es una Generalización del teorema de pitágoras para distancias muy pequeñas. El elemento  $g_{ij}$  es el que se conoce como tensor métrico.

En General, para cambiar de un sistema de coordenadas a otro se tienen que usar una matriz de transformación que en lenguaje matemático se le conoce como transformación jacobiana y se puede escribir como:

$$dx^k \rightarrow dx'^k = \left( \frac{\partial dx'^k}{\partial x^n} \right) dx^n, \quad (189)$$

donde justamente la matriz jacobiana es el paréntesis de las derivadas parciales. Usando la matriz jacobiana, definimos a un vector contravariante en  $N$  dimensiones como *el conjunto de funciones  $A^\mu$  que ante un cambio General de coordenadas se transforman como las componentes anteriores de  $dx^k$* [31]. Y se define a un vector covariante como *un conjunto de  $N$  funciones  $A_\mu$  que ante un cambio de coordenadas se transforman de acuerdo a la regla:*

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu} A_\mu. \quad (190)$$

Si queremos una formalidad más clara, necesitamos herramientas más poderosas de geometría diferencial, que no es el propósito de este trabajo y por ello como revisión rápida de las herramientas que se usarán más adelante no se usarán las definiciones más formales.

Antes de seguir avanzando podemos definir a un campo escalar como una distribución en algún espacio de  $N$  dimensiones de una magnitud y por tanto lo podemos escribir como  $\phi$ . Esto se define ahora porque más adelante será de utilidad.

En el mismo sentido puramente físico podemos definir a un tensor de 2x2 como un objeto que cumple el cambio de coordenadas:

$$T_{\alpha\beta} \rightarrow T'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} T_{\mu\nu}, \quad (191)$$

usando un tensor de 2x2 como el tensor métrico podemos establecer:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad \text{y} \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad (192)$$

y de hecho el tensor métrico cumple que:

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta_\mu^\nu, \quad (193)$$

lo que significa que ambas expresiones son el inverso el uno de la otra y que la operación lleva a la identidad. Además el producto de los vectores se puede escribir como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu. \quad (194)$$

Ahora, derivando la transformación de un tensor se puede obtener:

$$dA'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dA^\nu + d \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) A^\nu, \quad (195)$$

y con este término extra vemos que la derivada no se transforma con las reglas impuestas anteriormente salvo que se trate de una transformación lineal en cuyo caso el segundo término sería nulo. Regresando a los fundamentos, hablando de una derivada implica regresar al caso de una función, que usualmente entendemos que tan rápido está cambiando sobre un intervalo y para usar un encuadre similar usualmente en tensores decimos que queremos ver el cambio entre un intervalo infinitesimal el cambio de coordenadas  $x^\mu$  y  $x^\mu + dx^\mu$ . Para poder entonces entender este proceso en tensores se utiliza una nueva herramienta matemática conocida como la *derivada covariante* que nos define el cambio entre un tensor  $A^\mu(x^i)$  y  $A^\mu(x^i + dx^i)$  que se puede escribir como:

$$DA^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^j} dx^j + \Gamma_{ji}^\mu A^j dx^i, \quad (196)$$

donde el elemento  $\Gamma_{jk}^i$  se le conoce como símbolo de Christoffel. En notación más usual para Relatividad General, la derivada covariante se suele escribir como:

$$A^\mu_{;\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\beta\nu}^\mu A^\beta, \quad (197)$$

y lo mismo para un vector covariante:

$$A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta A_\beta. \quad (198)$$

Es importante notar, antes de seguir, que muchas veces se suele denotar también a la derivada usual como:

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = A^\mu_{,\nu}, \quad (199)$$

para facilitar la escritura cuentas más largas. Si queremos expresar la métrica de un sistema de coordenadas dependiendo del símbolo nuevo que se acaba de introducir podemos tomar la derivada covariante de la métrica como:

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu g_{\nu\beta} - \Gamma_{\beta\mu}^\nu g_{\alpha\nu}. \quad (200)$$

Ahora, aunque pareciera simplemente trucos matemáticos, si calculamos la derivada de un campo escalar:

$$\phi_{,\beta} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta},$$

y al calcular la segunda derivada tenemos que:

$$\phi_{,\beta,\alpha} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta},$$

y por tanto la derivada es simétrica en los índices, así que conmutan y por ello, podemos escribir<sup>15</sup>:

---

<sup>15</sup>Aquí parece apresurado pero la justificación detrás de esto es la simetría en las bases coordenadas sobre las que se construyeron estos campos escalares usados

$$\phi_{,\beta;\alpha} = \phi_{,\beta,\alpha} - \phi_{,\mu}\Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} = \phi_{,\alpha,\beta} - \phi_{,\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \phi_{,\alpha;\beta},$$

y usando la simetría de las derivadas podemos simplemente llegar a que:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}, \quad (201)$$

para cualquier sistema coordenado. Usando esto, y diferentes permutaciones de índices para un tensor métrico:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\mu} &= \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}g_{\nu\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^{\nu}g_{\alpha\nu} \\ g_{\alpha\mu,\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}g_{\nu\mu} + \Gamma_{\mu\beta}^{\nu}g_{\alpha\nu} \\ -g_{\beta\mu,\alpha} &= -\Gamma_{\beta\alpha}^{\nu}g_{\nu\beta} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu}g_{\beta\nu}, \end{aligned}$$

y uniendo con álgebra y usando la simetría de la métrica  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  se puede llegar a expresar los símbolos de Christoffel a partir de cualquier métrica como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}). \quad (202)$$

Los símbolos de Christoffel son una herramienta que ayuda a expresar el cambio que tienen los objetos matemáticos al vivir en superficies Generalizadas pero no son tensores.

Con estos elementos ya podemos hablar de superficies curvas.

Podemos definir al tensor de curvatura de Riemann como:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}, \quad (203)$$

que puede también convertirse en:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda}R_{\beta\mu\nu}^{\lambda}, \quad (204)$$

y que se pueden verificar las siguientes identidades:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (205)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \quad (206)$$

Esto significa que el tensor de Riemann es antisimétrico en el primero y segundo par de índices. El tensor de Riemann caracteriza la curvatura en forma de segundas derivadas del tensor métrico (puesto que los símbolos de Christoffel ya tienen dentro primeras derivadas). Esto se ve más claramente cuando ocurre que:

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = 0 \leftrightarrow \text{Superficie plana.} \quad (207)$$

Se puede definir además el tensor de Ricci como la contracción del tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu} = R_{\beta\alpha\mu\nu}^{\alpha} = R_{\nu\mu}, \quad (208)$$



y similarmente podemos definir al escalar de curvatura de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (209)$$

Ahora, la última herramienta que nos hace falta es trabajar con el tensor de Riemann. Si derivamos el tensor de Riemann tendremos:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu;\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu;\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu;\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu;\alpha\mu\lambda}), \quad (210)$$

usando de nuevo la simetría del tensor métrico y de las derivadas podemos llegar a que:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0, \quad (211)$$

y si elegimos un sistema de coordenadas apropiado se puede expresar:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (212)$$

Esta ecuación (212) es una identidad de Bianchi. Aplicándole la contracción con la métrica podemos obtener:

$$g^{\alpha\mu} [R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}] = 0, \quad (213)$$

o lo que equivale a:

$$R_{\beta\nu;\lambda} + (-R_{\beta\lambda;\nu}) + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^{\mu} = 0, \quad (214)$$

y de esta nueva ecuación podemos obtener la identidad contraída de Bianchi:

$$g^{\beta\nu} [R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R_{\beta\nu\lambda;\nu}^{\mu}] = 0, \quad (215)$$

y que usando simetrías esto se puede escribir más fácilmente como:

$$(2R_{\lambda}^{\mu} - \delta_{\lambda}^{\mu} R)_{;\mu} = 0. \quad (216)$$

Con estas identidades podemos definir el tensor:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = G_{\nu\mu}, \quad (217)$$

que es el Tensor de Einstein, por su importancia para la descripción de la gravedad y que se usará en las siguientes secciones del texto principal.

## B.2. Símbolos de Christoffel para FRLW

Partiendo de la ecuación de la métrica de FRLW (25) se pueden obtener los símbolos de Christoffel sobre los que está construido el tensor de Ricci. Condensando la métrica con los índices compactos se puede escribir como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (218)$$

usando que  $\mu, \nu = 1, 2, 3$  y por tanto los Christoffel son:

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = a\dot{a}g_{\mu\nu}, \quad \Gamma_{0\nu}^\mu = \frac{\dot{a}}{a}\delta_\nu^\mu, \quad \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\beta}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}),$$

que abriendo todos los términos, estos se leen:

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, \quad \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2, \quad \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta,$$

$$\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{20}^0 = \Gamma_{02}^0 = \Gamma_{30}^0 = \Gamma_{03}^0 = \Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 = \Gamma_{13}^0 = \Gamma_{31}^0 = \Gamma_{23}^0 = \Gamma_{32}^0 = 0;$$

$$\Gamma_{00}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{kr^2}{1-kr^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2), \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1-kr^2)\sin^2 \theta;$$

$$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{30}^3 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a};$$

$$\Gamma_{20}^1 = \Gamma_{02}^1 = \Gamma_{30}^1 = \Gamma_{03}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = 0;$$

$$\Gamma_{00}^2 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta;$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r};$$

$$\Gamma_{10}^2 = \Gamma_{01}^2 = \Gamma_{30}^2 = \Gamma_{03}^2 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = 0;$$

$$\Gamma_{00}^3 = 0, \quad \Gamma_{11}^3 = 0, \quad \Gamma_{22}^3 = 0, \quad \Gamma_{33}^3 = 0;$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r};$$

$$\Gamma_{10}^3 = \Gamma_{01}^3 = \Gamma_{20}^3 = \Gamma_{02}^3 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = 0,$$

y con esto podemos calcular los elementos del tensor de curvatura de Ricci, encontrado dentro del texto.

### B.3. Primera solución sin curvatura

Por completez, podemos describir el proceso de integración analítica realizada para obtener las integrales de la ecuación (125). Tomando entonces la primera parte:

$$H_0 t = \int_0^{a(t)} d\tilde{a} \left( \frac{\Omega_{R,0}}{\tilde{a}^2} + \frac{\Omega_{M,0}}{\tilde{a}} \right)^{-1/2}; \quad (219)$$

Primero, reescribiendo la expresión de la raíz podemos reescribir toda la integral como:

$$H_0 t = \int_0^{\tilde{a}} \frac{\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_{M,0}\tilde{a} + \Omega_{R,0}}} d\tilde{a},$$

y ahora haciendo un cambio de variable con  $u = \Omega_{M,0}\tilde{a} + \Omega_{R,0}$ :

$$\frac{du}{d\tilde{a}} = \Omega_{M,0} \Rightarrow d\tilde{a} = \frac{1}{\Omega_{M,0}} du,$$

y entonces sustituyendo en la integral de la ecuación (B.3) (omitiendo por el momento los límites de integración, al regresar los cambios de variable también se evaluarán) que nos da:

$$H_0 t = \int \frac{1}{\Omega_{M,0}^2} \frac{u - \Omega_{R,0}}{\sqrt{\Omega_{R,0}}} du = \frac{1}{\Omega_{M,0}^2} \int \left( \sqrt{u} - \frac{\Omega_{R,0}}{\sqrt{u}} \right) du,$$

de donde las integrales son relativamente rápidos:

$$\int \sqrt{u} du = \frac{2u^{3/2}}{3},$$

y

$$\int u^{-1/2} du = 2\sqrt{u},$$

Sustituyendo estos resultados nos termina dando:

$$H_0 t = \frac{1}{\Omega_{M,0}^2} \left( \frac{2u^{3/2}}{3} + 2\Omega_{R,0}\sqrt{u} \right),$$

y regresando el cambio de variable y los límites de integración:

$$H_0 t = \left( \frac{2(\Omega_{M,0}a + \Omega_{R,0})^{3/2}}{3\Omega_{M,0}^2} - \frac{2\Omega_{R,0}\sqrt{\Omega_{M,0}a + \Omega_{R,0}}}{\Omega_{M,0}} \right) \Big|_0^a,$$

finalmente simplificando y sustituyendo los límites esto queda como:

$$H_0 t = \frac{2(\Omega_{M,0}a - 2\Omega_{M,0})\sqrt{\Omega_{M,0}a + \Omega_{R,0}}}{3\Omega_{M,0}^2}. \quad (220)$$

Ahora, concentrémonos en la segunda de las integrales que se partieron:

$$H_0(t - t_s) = \int_{a_s}^{\tilde{a}(t)} d\tilde{a} \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\tilde{a}} + \Omega_\Lambda \tilde{a}^2 \right)^{-1/2}. \quad (221)$$

Multiplicando la integral por  $a$  para que nos quede un denominador más sencillo de manejar:

$$H_0(t - t_s) = \int_{a_s}^{\tilde{a}(t)} d\tilde{a} \left( \frac{\Omega_{M,0}}{\tilde{a}} + \Omega_\Lambda \tilde{a}^2 \right)^{-1/2} = \int_{a_s}^{\tilde{a}} d\tilde{a} \frac{\sqrt{\tilde{a}}}{\sqrt{\Omega_\Lambda \tilde{a}^3 + \Omega_{M,0}}}.$$

Usando el cambio de variable  $u = \frac{\sqrt{\Omega_\Lambda \tilde{a}^{3/2}}}{\sqrt{\Omega_{M,0}}}$ :

$$\frac{du}{d\tilde{a}} = \frac{3\sqrt{\Omega_\Lambda} \sqrt{\tilde{a}}}{2\sqrt{\Omega_{M,0}}} \Rightarrow d\tilde{a} = \frac{2\sqrt{\Omega_{M,0}}}{3\sqrt{\Omega_\Lambda} \sqrt{\tilde{a}}},$$

que sustituyendo en la ecuación y olvidándonos por el momento de los límites de integración igual que en la integral anterior podemos llegar a que:

$$H_0(t - t_s) = \int \frac{2\sqrt{\Omega_{M,0}}}{3\sqrt{\Omega_\Lambda} \sqrt{\Omega_{M,0} u^2 + \Omega_{M,0}}} du = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}},$$

de donde la integral se puede resolver más o menos de forma sencilla:

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} du = \ln(\sqrt{u^2 + 1} + u),$$

y juntando los resultados:

$$H_0(t - t_s) = \frac{2 \ln(\sqrt{u^2 + 1} + u)}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}},$$

que regresando el cambio de variable nos deja la expresión:

$$H_0(t - t_s) = \frac{2 \ln \left( \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda \tilde{a}}{\Omega_{M,0}} + 1} + \frac{\sqrt{\Omega_\Lambda \tilde{a}^{3/2}}}{\sqrt{\Omega_{M,0}}} \right)}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}},$$

que reescrita y simplificada nos deja como:

$$H_0(t - t_s) = \frac{2 \ln \left( \sqrt{\Omega_\Lambda \tilde{a}^3 + \Omega_{M,0}} + \sqrt{\Omega_\Lambda \tilde{a}^{3/2}} \right)}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \Bigg|_{a_s}^a,$$

y que evaluando los límites de integración nos queda la expresión:

$$H_0(t - t_s) = \frac{2}{3\Omega_\Lambda^{1/2}} \ln \left( \frac{\Omega_\Lambda a^{3/2} + \Omega_\Lambda^{1/2} (\Omega_{M,0} + \Omega_\Lambda a^3)^{1/2}}{\Omega_\Lambda a_s^{3/2} + \Omega_\Lambda^{1/2} (\Omega_{M,0} + \Omega_\Lambda a_s^3)^{1/2}} \right). \quad (222)$$

Uniendo las ecuaciones (220) y (222) llegamos a la expresión analítica para la integral que se tiene como:

$$H_0 t = \begin{cases} \frac{2(\Omega_{M,0}a - 2\Omega_{M,0})\sqrt{\Omega_{M,0}a + \Omega_{R,0}}}{3\Omega_{M,0}^2} & a \leq a_s \\ H_0 t_s + \frac{2}{3\Omega_{\Lambda}^{1/2}} \ln \left( \frac{\Omega_{\Lambda}a^{3/2} + \Omega_{\Lambda}^{1/2}(\Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda}a^3)^{1/2}}{\Omega_{\Lambda}a_s^{3/2} + \Omega_{\Lambda}^{1/2}(\Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda}a_s^{3/2})^{1/2}} \right) & a > a_s \end{cases} \quad (223)$$

#### B.4. Inversión del factor de escala en la primera solución analítica propuesta

Si uno se concentra primero en la primera parte de la ecuación, podemos reescribirla para facilidad de lectura.

$$H_0 t = \frac{2(\Omega_{M,0}a - 2\Omega_{M,0})\sqrt{\Omega_{M,0}a + \Omega_{R,0}}}{3\Omega_{M,0}^2} \quad a \leq a_s. \quad (224)$$

Para despejar  $a$  de aquí se necesitan hacer trucos matemáticos no triviales. Galanti y Rocandelli [23] proponen tratar con algún tipo de función que nos hable de como se comporta la función para averiguar su comportamiento y por tanto, obtener soluciones concordantes físicamente, y esto se consigue proponiendo el siguiente polinomio:

$$P(a, t) \equiv 4\Omega_{M,0}^3 a^3 - 12\Omega_{M,0}^2 \Omega_{R,0} a^2 - 9\Omega_{M,0}^4 H_0^2 t^2 + 24\Omega_{M,0}^2 \Omega_{R,0}^{3/2} H_0 t, \quad (225)$$

que, igualando a cero  $P(a, t) = 0$  nos regresa la función que queremos despejar en la ecuación (224). Además, calculando la derivada podemos observar:

$$\frac{dP(a, t)}{da} = 12\Omega_{M,0}^3 a^2 - 24\Omega_{M,0}^2 \Omega_{R,0} a. \quad (226)$$

Este polinomio corresponde a una ecuación de tercer orden algebraica, y por teorema fundamental del álgebra para cada valor de  $t$  debe haber tres raíces para  $P(a, t) = 0$  con al menos una real puesto que el polinomio tiene coeficientes reales siendo  $\Omega_{R,0} > 0$ . Ahora, para el polinomio, como tenemos que  $t \geq 0$  para que la solución sea física en el esquema que estamos trabajo, tenemos tres raíces para el polinomio:

$$a(t) = \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_{M,0}} \left[ 1 - 2 \sin \left( \frac{1}{3} \arcsin X(t) \right) \right], \quad (227)$$

$$a(t) = \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_{M,0}} \left[ 1 + 2 \cos \left( \frac{1}{3} \arccos X(t) \right) \right], \quad (228)$$

$$a(t) = \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_{M,0}} \left\{ 1 + 2 \cos \left[ \frac{1}{3} (2\pi + \arccos X(t)) \right] \right\}, \quad (229)$$

donde:

$$X(t) = 1 - 3 \frac{\Omega_{M,0}^2}{\Omega_{R,0}^{3/2}} H_0 t + \frac{9 \Omega_{M,0}^4}{8 \Omega_{R,0}^3} H_0^2 t^2, \quad (230)$$

de donde tenemos que entender que soluciones son físicamente aceptables. Lo primero que se tiene que hacer con las soluciones es explorar el comportamiento de las funciones trigonométricas, que explícitamente se puede escribir como:

$$\arcsin X(t) = -i \ln \left( iX(t) + \sqrt{1 - X^2(t)} \right), \quad (231)$$

$$\arccos X(t) = -i \ln \left( X(t) + \sqrt{X^2(t) - 1} \right). \quad (232)$$

De donde entendemos que para que las funciones tengan valores reales se necesita que  $-1 \leq X(t) \leq 1$ . Como las densidades utilizadas para la materia, la radiación y  $H_0$  son positivas, podemos dedicarnos a la parte matemática.

Si nos fijamos en  $P(a, t)$  podemos demostrar que  $P$  es una función creciente para  $a > \frac{2\Omega_{R,0}}{\Omega_{M,0}}$ , y que por tanto, para  $a \rightarrow \infty$  el polinomio  $P \rightarrow +\infty$  y usando que  $P(0, t) < 0$  se cumple la condición  $t > t_1$  con  $t_1$  definido como:

$$t_1 \equiv \frac{8\Omega_{R,0}^{3/2}}{3\Omega_{M,0}^2 H_0}, \quad (233)$$

si asumimos las condiciones anteriores para el tiempo y el polinomio vemos que  $P(a, t)$  obedece el teorema de Bolzano[23] y que nos dice que  $P(a, t)$  tiene al menos una raíz en el rango  $0 \leq a < \infty$ . Usando todo esto, implicaría que  $X(t) > 1$  y por tanto el valor de arccos es complejo y por tanto su coseno es real puesto que  $\cos ix = \cosh x$  para todo  $x$ , y por ello la expresión para  $a(t) \sim 2 \cos$  es la expresión real y físicamente aceptable (porque el  $2\pi$  de la última expresión hace que el coseno siga siendo imaginario) para este segmento.

El siguiente caso es análogo. Para un tiempo  $0 \leq t < t_1$  el polinomio  $P(a, t) > 0$  y para  $a \rightarrow -\infty$  el polinomio  $P \rightarrow -\infty$ . De nuevo el teorema de Bolzano asegura que se tiene una raíz en el intervalo. Ahora, la condición que se necesita cumplir es que  $-1 \leq X(t) \leq 1$  y de donde tenemos que  $0 \leq \arccos X(t) \leq \pi$  por ello  $\frac{2\pi}{3} \leq (2\pi + \arccos X(t)) / 3 \leq \pi$  lo que significa que  $-0.5 \leq \cos [2\pi + \arccos X(t)] / 3 \leq -1$ . Con esto, podemos entender que la última solución para  $a(t)$  en la ecuación (229) no es físicamente válida. Para decidir entre las otras dos se toma  $t \rightarrow 0$  en ambas y por tanto, para cumplir las condiciones de frontera que se acordaron donde  $a(t) \rightarrow 0$  mientras  $t \rightarrow 0$  nos deja con la primera solución mostrada en la ecuación (227).

Ahora, para unir de forma suave<sup>16</sup> las funciones (227) y (228) necesitamos encontrar un tiempo  $t_*$  tal que:

$$\sin \left( -\frac{1}{3} \arcsin X(t_*) \right) = \cos \left( \frac{1}{3} \arccos X(t_*) \right). \quad (234)$$

<sup>16</sup>Se verá que esto no ocurre, y todavía no hemos averiguado cuál es la razón, probablemente algún problema de interabilidad en un intervalo que seguiré investigando.

Usando la relación trigonométrica  $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$  podemos obtener:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \arcsin X(t_*)\right) = \cos\left(\frac{1}{3} \arccos X(t_*)\right),$$

de donde se eliminan los cosenos. Multiplicando por 3 ambos lados quedamos con una relación:

$$\frac{3\pi}{2} + \arcsin X(t_*) = \arccos X(t_*),$$

simplificando:

$$\arcsin X(t_*) = -\frac{\pi}{2},$$

y usando la relación trigonométrica  $\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$  y por tanto la condición de la ecuación (B.4) se cumple cuando  $X(t_*) = -1$  y finalmente:

$$t_* = \frac{4\Omega_{R,0}^{3/2}}{3\Omega_{M,0}^2 H_0}. \quad (235)$$

Sólo falta el caso cuando  $t = t_1$ , pero este es más sencillo, puesto que  $P(a, t_1) = 0$  tiene dos raíces  $a(t_1) = 0$  y  $a(t_1) = 3\Omega_{M,0}/\Omega_{R,0}$ . Para el caso cero, la solución no es aceptable porque la función completa no sería continua y monótona creciente y para la otra, ya se exploró el comportamiento y se llegó a que la solución físicamente aceptable es la ecuación (228).

Y por tanto, para la primera integral podemos expresar la solución analítica se tiene:

$$a(t) = \begin{cases} \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_{M,0}} \left\{ 1 - 2 \sin \left[ \frac{1}{3} \arcsin (X(t)) \right] \right\} & 0 \leq t \leq t_*, \\ \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_{M,0}} \left\{ 1 + 2 \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos (X(t)) \right] \right\} & t_* < t \leq t_s. \end{cases} \quad (236)$$

Ahora, concentrándonos en la segunda parte de la integral, más explícitamente:

$$H_0(t - t_s) = \frac{2}{3\Omega_\Lambda^{1/2}} \ln \left( \frac{\Omega_\Lambda a^{3/2} + \Omega_\Lambda^{1/2} (\Omega_{M,0} + \Omega_\Lambda a^3)^{1/2}}{\Omega_\Lambda a_s^{3/2} + \Omega_\Lambda^{1/2} (\Omega_{M,0} + \Omega_\Lambda a_s^3)^{1/2}} \right) \quad a > a_s, \quad (237)$$

se puede ver que este es un despeje más sencillo.

$$\frac{\Omega_\Lambda a^{3/2} + \Omega_\Lambda^{1/2} (\Omega_{M,0} + \Omega_\Lambda a^3)^{1/2}}{\Omega_\Lambda a_s^{3/2} + \Omega_\Lambda^{1/2} (\Omega_{M,0} + \Omega_\Lambda a_s^3)^{1/2}} = \exp\left(\frac{2}{3}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t - t_s)\right),$$

y usando la identidad  $e^x = \cosh x + \sinh x$  podemos llegar a la solución analítica para  $a$ :

$$a(t) = \left\{ a_s^{3/2} \cosh \left[ \frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t - t_s) \right] + \left( a_s^3 + \frac{\Omega_{M,0}^2}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/2} \sinh \left[ \frac{3}{2}\Omega_\Lambda^{1/2} H_0(t - t_s) \right] \right\}^{2/3} \quad t > t_s, \quad (238)$$

, así que finalmente, la solución analítica completa se lee como:

$$a(t) = \begin{cases} \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_{M,0}} \left\{ 1 - 2 \sin \left[ \frac{1}{3} \arcsin (X(t)) \right] \right\} & 0 \leq t \leq t_*, \\ \frac{\Omega_{R,0}}{\Omega_{M,0}} \left\{ 1 + 2 \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos (X(t)) \right] \right\} & t_* < t \leq t_s, \\ \left\{ a_s^{3/2} \cosh \left[ \frac{3}{2} \Omega_\Lambda^{1/2} H_0 (t - t_s) \right] + \left( a_s^3 + \frac{\Omega_{M,0}^2}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/2} \sinh \left[ \frac{3}{2} \Omega_\Lambda^{1/2} H_0 (t - t_s) \right] \right\}^{2/3} & t > t_s. \end{cases},$$

que es justamente la ecuación (127).

## B.5. Integral con curvatura

Concentrémonos en la primera integral de la ecuación (133):

$$H_0 t = \int_0^{\tilde{a}(t)} d\tilde{a} \left( \frac{\Omega_{R,0}}{\tilde{a}^2} + \frac{\Omega_{M,0}}{\tilde{a}} + \Omega_k \right)^{-1/2} \quad a \leq a_s. \quad (239)$$

Para poder resolverla, necesitamos primero reescribirla.

$$H_0 t = \int_0^{\tilde{a}(t)} \frac{\tilde{a}}{\sqrt{\tilde{a}^2 \Omega_k + \tilde{a} \Omega_{M,0} + \Omega_{R,0}}} d\tilde{a}.$$

Esta integral puede resolverse por métodos comunes<sup>17</sup> completando los cuadrados:

$$H_0 t = \int_0^{\tilde{a}(t)} \tilde{a} \left[ \sqrt{\left( \tilde{a}^2 \sqrt{|\Omega_k|} + \frac{\Omega_{M,0}}{2\sqrt{|\Omega_k|}} \right)^2 - \frac{\Omega_{M,0}^2}{4|\Omega_k|} + \Omega_{R,0}} \right]^{-1/2} d\tilde{a}.$$

Tomando el cambio de variable  $u = \tilde{a} \sqrt{|\Omega_k|} + \frac{\Omega_{M,0}}{2\sqrt{|\Omega_k|}}$  con  $du = \sqrt{|\Omega_k|}$  y olvidándonos por el momento de los límites de integración hasta que regrese la integral podremos expresar la integral como:

$$H_0 t = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \int \frac{2\sqrt{|\Omega_k|} u - \Omega_{M,0}}{2|\Omega_k| \sqrt{\Omega_{R,0} + u^2 - \frac{\Omega_{M,0}^2}{4|\Omega_k|}}} du.$$

Haciendo ahora el cambio de variable  $v = \Omega_{R,0} + u^2 - \frac{\Omega_{M,0}^2}{4\Omega_k}$  con  $dv = 2udu$  y separando la fracción tendremos un paso más cerca del resultado:

<sup>17</sup>para resolver la raíz se completan los cuadrados y por ello, necesitamos asegurar que todos los elementos sean positivos. Como  $\Omega_{M,0}$  y  $\Omega_{R,0}$  sabemos que lo son (puesto que físicamente tiene sentido) no tenemos problema. Con la parte de la curvatura, se le puede dar la vuelta si asumimos que la solución es válida para  $\Omega_k \neq 0$  y además para su propio valor absoluto. En caso de que nuestra curvatura sea cero, el caso se reduce simplemente a la integral de la sección anterior, donde la curvatura era cero desde la construcción.



$$H_0 t = \frac{1}{2|\Omega_k|} \int \frac{1}{\sqrt{v}} dv - \frac{\Omega_{M,0}}{2|\Omega_k|^{3/2}} \int \left( \Omega_{R,0} + u^2 - \frac{\Omega_{M,0}^2}{4|\Omega_k|} \right)^{-1/2} du,$$

que integrando para  $v$  nos queda:

$$H_0 t = \frac{\sqrt{v}}{|\Omega_k|} - \frac{\Omega_{M,0}}{2|\Omega_k|^{3/2}} \int \left( \Omega_{R,0} + u^2 - \frac{\Omega_{M,0}^2}{4|\Omega_k|} \right)^{-1/2} du,$$

volviendo hacer un cambio de variable para la integral, tomando  $w = u/\sqrt{\Omega_{R,0} - \frac{\Omega_{M,0}}{4|\Omega_k|}}$  con  $dw = 1/\sqrt{\Omega_{R,0} - \frac{\Omega_{M,0}}{4|\Omega_k|}}$  que sustituido en la integral nos queda algo de la forma:

$$H_0 t = \frac{\sqrt{v}}{|\Omega_k|} - \frac{\Omega_{M,0}}{2|\Omega_k|^{3/2}} \int (w^2 - 1)^{-1/2} dw,$$

integral que puede resolverse por sustitución trigonométrica dejándonos una solución de la forma:

$$H_0 t = \frac{\sqrt{v}}{|\Omega_k|} - \frac{\Omega_{M,0} \ln(\tan(\arctan(w))) + \sec(\arctan(w))}{2|\Omega_k|^{3/2}}.$$

Si usamos la identidad trigonométrica dada como  $\sec(\arctanh(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$  llegaremos a la expresión final, de la que sólo nos hará falta regresar el cambio de variable a su límite original.

$$H_0 t = \frac{\sqrt{v} - \frac{\Omega_{M,0}}{2|\Omega_k|^{1/2}} \ln(\sqrt{w^2 + 1} + w)}{|\Omega_k|},$$

regresando los cambios de variable para  $v$  y  $w$ , convirtiéndose estos en  $u$  y finalmente en términos de  $\tilde{a}$  queda la expresión:

$$H_0 t = \frac{\sqrt{\tilde{a}^2|\Omega_k| + \tilde{a}\Omega_{M,0} + \Omega_{R,0}}}{|\Omega_k|} - \frac{\Omega_{M,0}}{2|\Omega_k|^{3/2}} \ln \left( 2\sqrt{\frac{|\Omega_k|(\tilde{a}^2|\Omega_k| + \tilde{a}\Omega_{M,0} + \Omega_{R,0})}{4|\Omega_k|\Omega_{R,0} - \Omega_{M,0}}} + \frac{2\tilde{a}|\Omega_k| + \Omega_{M,0}}{\sqrt{4\Omega_{R,0}|\Omega_k| - \Omega_{M,0}^2}} \right) \Big|_0^a,$$

que evaluando los límites de integración nos queda:

$$H_0 t = \frac{\sqrt{a^2|\Omega_k| + a\Omega_{M,0} + \Omega_{R,0}}}{|\Omega_k|} - \frac{\Omega_{M,0}}{2|\Omega_k|^{3/2}} \ln \left( 2\sqrt{\frac{|\Omega_k|(a^2|\Omega_k| + a\Omega_{M,0} + \Omega_{R,0})}{4|\Omega_k|\Omega_{R,0} - \Omega_{M,0}}} + \frac{2a|\Omega_k| + \Omega_{M,0}}{\sqrt{4\Omega_{R,0}|\Omega_k| - \Omega_{M,0}^2}} \right). \quad (240)$$

## Referencias

- [1] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, and et al Abernathy. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, Feb 2016. doi:[10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061104>.
- [2] J. M. Weisberg and J. H. Taylor. Relativistic binary pulsar b1913+16: Thirty years of observations and analysis, 2004.
- [3] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, and et al. Planck 2018 results. *Astronomy & Astrophysics*, 641: A6, Sep 2020. ISSN 1432-0746. doi:[10.1051/0004-6361/201833910](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910). URL <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>.
- [4] G. M. Clemence. The relativity effect in planetary motions. *Rev. Mod. Phys.*, 19:361–364, Oct 1947. doi:[10.1103/RevModPhys.19.361](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.19.361). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.19.361>.
- [5] Charles W Misner, Kip S Thorne, John Archibald Wheeler, and David I Kaiser. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.
- [6] Barbara Sue Ryden. *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 2017.
- [7] Andrew Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, 2nd ed edition, 2003. ISBN 9780470848340,9780470848357,9780470864531,0470848340,0470848359.
- [8] B J T Jones. *Precision cosmology : the first half million years*. Cambridge University Press, 2017.
- [9] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15(3):168–173, 1929. ISSN 0027-8424. doi:[10.1073/pnas.15.3.168](https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168). URL <https://www.pnas.org/content/15/3/168>.
- [10] Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Ron L. Gilliland, Craig J. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, and et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009–1038, Sep 1998. ISSN 0004-6256. doi:[10.1086/300499](https://doi.org/10.1086/300499). URL <http://dx.doi.org/10.1086/300499>.
- [11] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *apj*, 142:419–421, July 1965. doi:[10.1086/148307](https://doi.org/10.1086/148307).
- [12] Scott Dodelson. *Modern cosmology: anisotropies and inhomogeneities in the universe*. Academic, 2002.

- [13] N. Aghanim, Y. Akrami, F. Arroja, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, and et al. Planck2018 results i. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A1, Sep 2020. ISSN 1432-0746. doi:[10.1051/0004-6361/201833880](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833880). URL <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201833880>.
- [14] Philip Bull, Yashar Akrami, Julian Adamek, Tessa Baker, Emilio Bellini, Jose Beltrán Jiménez, Eloisa Bentivegna, Stefano Camera, Sébastien Clesse, Jonathan H. Davis, Enea Di Dio, Jonas Enander, Alan Heavens, Lavinia Heisenberg, Bin Hu, Claudio Llinares, Roy Maartens, Edvard Mörtsell, Seshadri Nadathur, Johannes Noller, Roman Pasechnik, Marcel S. Pawłowski, Thiago S. Pereira, Miguel Quartín, Angelo Ricciardone, Signe Riemer-Sørensen, Massimiliano Rinaldi, Jeremy Sakstein, Ippocratis D. Saltas, Vincenzo Salzano, Ignacy Sawicki, Adam R. Solomon, Douglas Spolyar, Glenn D. Starkman, Danièle Steer, Ismael Tereno, Licia Verde, Francisco Villaescusa-Navarro, Mikael von Strauss, and Hans A. Winther. Beyond  $\lambda$ cdm: Problems, solutions, and the road ahead. *Physics of the Dark Universe*, 12:56–99, 2016. ISSN 2212-6864. doi:<https://doi.org/10.1016/j.dark.2016.02.001>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212686416300097>.
- [15] Scott Dodelson. The Real Problem with MOND. *Int. J. Mod. Phys. D*, 20:2749–2753, 2011. doi:[10.1142/S0218271811020561](https://doi.org/10.1142/S0218271811020561).
- [16] Eleonora Di Valentino, Olga Mena, Supriya Pan, Luca Visinelli, Weiqiang Yang, Alessandro Melchiorri, David F Mota, Adam G Riess, and Joseph Silk. In the realm of the hubble tension—a review of solutions \*. *Classical and Quantum Gravity*, 38(15):153001, Jul 2021. ISSN 1361-6382. doi:[10.1088/1361-6382/ac086d](https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac086d). URL <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ac086d>.
- [17] Adam G. Riess, Stefano Casertano, Wenlong Yuan, J. Bradley Bowers, Lucas Macri, Joel C. Zinn, and Dan Scolnic. Cosmic distances calibrated to 1 % precision with gaia edr3 parallaxes and hubble space telescope photometry of 75 milky way cepheids confirm tension with  $\lambda$ cdm. *The Astrophysical Journal*, 908(1):L6, Feb 2021. ISSN 2041-8213. doi:[10.3847/2041-8213/abdbaf](https://doi.org/10.3847/2041-8213/abdbaf). URL <http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/abdbaf>.
- [18] Eleonora Di Valentino, Luis A. Anchordoqui, Özgür Akarsu, Yacine Ali-Haïmoud, Luca Amendola, Nikki Arendse, Marika Asgari, Mario Ballardini, Spyros Basilakos, Elia Battistelli, and et al. Cosmology intertwined iii:  $f\sigma_8$  and  $s_8$ . *Astroparticle Physics*, 131:102604, Sep 2021. ISSN 0927-6505. doi:[10.1016/j.astropartphys.2021.102604](https://doi.org/10.1016/j.astropartphys.2021.102604). URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.astropartphys.2021.102604>.
- [19] Yoshiaki Sofue and Vera Rubin. Rotation curves of spiral galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 39(1):137–174, Sep 2001. ISSN 1545-4282. doi:[10.1146/annurev.astro.39.1.137](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.39.1.137). URL <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.astro.39.1.137>.
- [20] Lawrence M. Krauss, Scott Dodelson, and Stephan Meyer. Primordial gravitational waves and cosmology. *Science*, 328(5981):989–992, May 2010. ISSN 1095-9203. doi:[10.1126/science.1179541](https://doi.org/10.1126/science.1179541). URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.1179541>.

- [21] Tessa Baker and Philip Bull. Observational signatures of modified gravity on ultra-large scales. *The Astrophysical Journal*, 811(2):116, Sep 2015. ISSN 1538-4357. doi:10.1088/0004-637x/811/2/116. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637x/811/2/116>.
- [22] Adam G. Riess, Wenlong Yuan, Lucas M. Macri, Dan Scolnic, Dillon Brout, Stefano Casertano, David O. Jones, Yukei Murakami, Louise Breuval, Thomas G. Brink, Alexei V. Filippenko, Samantha Hoffmann, Saurabh W. Jha, W. D'arcy Kenworthy, John Mackenty, Benjamin E. Stahl, and Weikang Zheng. A comprehensive measurement of the local value of the hubble constant with 1 km/s/mpc uncertainty from the hubble space telescope and the sh0es team, 2021.
- [23] Giorgio Galanti and Marco Roncadelli. Precision cosmology made more precise, 2021.
- [24] Juan Magaña, Mario H Amante, Miguel A Garcia-Aspeitia, and V Motta. The cardassian expansion revisited: constraints from updated hubble parameter measurements and type ia supernova data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476(1):1036–1049, Feb 2018. ISSN 1365-2966. doi:10.1093/mnras/sty260. URL <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/sty260>.
- [25] D. M. Scolnic, D. O. Jones, A. Rest, Y. C. Pan, R. Chornock, R. J. Foley, M. E. Huber, R. Kessler, G. Narayan, A. G. Riess, and et al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed sne ia from pan-starrs1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. *The Astrophysical Journal*, 859(2):101, May 2018. ISSN 1538-4357. doi:10.3847/1538-4357/aab9bb. URL <http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aab9bb>.
- [26] Wang, J. S., Wang, F. Y., Cheng, K. S., and Dai, Z. G. Measuring dark energy with the iso - ep correlation of gamma-ray bursts using model-independent methods. *A&A*, 585:A68, 2016. doi:10.1051/0004-6361/201526485. URL <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201526485>.
- [27] Peter Coles. Einstein, eddington and the 1919 eclipse. *ASP Conf. Ser.*, 252:21, 2001.
- [28] Isaac Newton. *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Watchmaker, 2010.
- [29] Max Born. *Einsteins theory of relativity*. Forgotten Books, 2010.
- [30] A. A. Michelson and E. W. Morley. On the relative motion of the earth and the luminiferous ether. *American Journal of Science*, s3-34(203):333–345, 1887. ISSN 0002-9599. doi:10.2475/ajs.s3-34.203.333. URL <https://www.ajsonline.org/content/s3-34/203/333>.
- [31] Shahen Hacyan. *Relatividad para estudiantes de física*. Fondo De Cultura Económica, 2013.
- [32] Slava G. Turyshev. Experimental tests of general relativity. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 58(1):207–248, Nov 2008. ISSN 1545-4134. doi:10.1146/annurev.nucl.58.020807.111839. URL <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.nucl.58.020807.111839>.

- [33] A. Einstein. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7):769–822, 1916. doi:<https://doi.org/10.1002/andp.19163540702>. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19163540702>.
- [34] Frank Watson Dyson, Arthur Stanley Eddington, and C. Davidson. Ix. a determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 220(571-581):291–333, 1920. doi:[10.1098/rsta.1920.0009](https://doi.org/10.1098/rsta.1920.0009). URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsta.1920.0009>.
- [35] I. I. Shapiro, R. D. Reasenber, P. E. MacNeil, R. B. Goldstein, J. P. Brenkle, D. L. Cain, T. Komarek, A. I. Zygielbaum, W. F. Cuddihy, and W. H. Michael Jr. The viking relativity experiment. *Journal of Geophysical Research (1896-1977)*, 82(28):4329–4334, 1977. doi:<https://doi.org/10.1029/JS082i028p04329>. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/JS082i028p04329>.
- [36] R. V. Pound and J. L. Snider. Effect of gravity on gamma radiation. *Phys. Rev.*, 140: B788–B803, Nov 1965. doi:[10.1103/PhysRev.140.B788](https://doi.org/10.1103/PhysRev.140.B788). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.140.B788>.
- [37] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, 425:374–376, 2003. doi:[10.1038/nature01997](https://doi.org/10.1038/nature01997).
- [38] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [39] Maciek Wielgus et al. Monitoring the Morphology of M87\* in 2009-2017 with the Event Horizon Telescope. *Astrophys. J.*, 901(1):67, 2020. doi:[10.3847/1538-4357/abac0d](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abac0d).
- [40] Ivan Debono and George Smoot. General relativity and cosmology: Unsolved questions and future directions. *Universe*, 2(4):23, Sep 2016. ISSN 2218-1997. doi:[10.3390/universe2040023](https://doi.org/10.3390/universe2040023). URL <http://dx.doi.org/10.3390/universe2040023>.
- [41] Sebastian Bahamonde, Konstantinos F. Dialektopoulos, Celia Escamilla-Rivera, Gabriel Farrugia, Viktor Gakis, Martin Hendry, Manuel Hohmann, Jackson Levi Said, Jurgen Mifsud, and Eleonora Di Valentino. Teleparallel gravity: From theory to cosmology, 2021.
- [42] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry : an introduction to general relativity*. Cambridge Cambridge University Press, 2019.
- [43] Oliver Piattella. Lecture notes in cosmology. *UNITEXT for Physics*, 2018. ISSN 2198-7890. doi:[10.1007/978-3-319-95570-4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-95570-4). URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-95570-4>.
- [44] Hannu Karttunen. *Fundamental astronomy*. Springer, 5 edition, 2007.
- [45] Celia Escamilla-Rivera. Status on bidimensional dark energy parameterizations using sne ia jla and bao datasets. *Galaxies*, 4(3):8, Jul 2016. ISSN 2075-4434. doi:[10.3390/galaxies4030008](https://doi.org/10.3390/galaxies4030008). URL <http://dx.doi.org/10.3390/galaxies4030008>.

- [46] Nathan J. Secrest, Sebastian von Hausegger, Mohamed Rameez, Roya Mohayaee, Subir Sarkar, and Jacques Colin. A test of the cosmological principle with quasars. *The Astrophysical Journal Letters*, 908(2):L51, Feb 2021. ISSN 2041-8213. doi:[10.3847/2041-8213/abdd40](https://doi.org/10.3847/2041-8213/abdd40). URL <http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/abdd40>.
- [47] Koki Yamashita, Yue Nan, Yuuki Sugiyama, and Kazuhiro Yamamoto. Large-scale structure with superhorizon isocurvature dark energy, 2021.
- [48] Orlando Luongo, Marco Muccino, Eoin Ó Colgáin, M. M. Sheikh-Jabbari, and Lu Yin. On larger  $h_0$  values in the cmb dipole direction, 2021.
- [49] Wendy L. Freedman, Barry F. Madore, Victoria Scowcroft, Chris Burns, Andy Monson, S. Eric Persson, Mark Seibert, and Jane Rigby. CARNEGIE HUBBLE PROGRAM: A MID-INFRARED CALIBRATION OF THE HUBBLE CONSTANT. *The Astrophysical Journal*, 758(1):24, sep 2012. doi:[10.1088/0004-637x/758/1/24](https://doi.org/10.1088/0004-637x/758/1/24). URL <https://doi.org/10.1088/0004-637x/758/1/24>.
- [50] David Camarena and Valerio Marra. Local determination of the hubble constant and the deceleration parameter. *Physical Review Research*, 2(1), Jan 2020. ISSN 2643-1564. doi:[10.1103/physrevresearch.2.013028](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.013028). URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.013028>.
- [51] C. L. Bennett, D. Larson, J. L. Weiland, N. Jarosik, G. Hinshaw, N. Odegard, K. M. Smith, R. S. Hill, B. Gold, M. Halpern, and et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe ( wmap ) observations: Final maps and results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2):20, Sep 2013. ISSN 1538-4365. doi:[10.1088/0067-0049/208/2/20](https://doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/20). URL <http://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/20>.
- [52] George F. Smoot. Cobe observations and results. *Conference on 3K cosmology*, 1999. doi:[10.1063/1.59326](https://doi.org/10.1063/1.59326). URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.59326>.
- [53] J. Chluba and R. A. Sunyaev. The evolution of cmb spectral distortions in the early universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 419(2):1294–1314, Nov 2011. ISSN 0035-8711. doi:[10.1111/j.1365-2966.2011.19786.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19786.x). URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19786.x>.
- [54] J. B. Doggett and D. Branch. A comparative study of supernova light curves. *aj*, 90:2303–2311, November 1985. doi:[10.1086/113934](https://doi.org/10.1086/113934).
- [55] P. Mészáros. Gamma-ray bursts. *Reports on Progress in Physics*, 69(8):2259–2321, August 2006. doi:[10.1088/0034-4885/69/8/R01](https://doi.org/10.1088/0034-4885/69/8/R01).
- [56] Hai-Nan Lin, Xin Li, and Zhe Chang. Model-independent distance calibration of high-redshift gamma-ray bursts and constrain on the  $\Lambda$ CDM model. *mnras*, 455(2):2131–2138, January 2016. doi:[10.1093/mnras/stv2471](https://doi.org/10.1093/mnras/stv2471).

- [57] M. Betoule, R. Kessler, J. Guy, J. Mosher, D. Hardin, R. Biswas, P. Astier, P. El-Hage, M. Konig, S. Kuhlmann, and et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the sdss-ii and snls supernova samples. *Astronomy & Astrophysics*, 568:A22, Aug 2014. ISSN 1432-0746. doi:[10.1051/0004-6361/201423413](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201423413). URL <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201423413>.
- [58] Michele Moresco. Raising the bar: new constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at  $z \sim 2$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 450(1): L16–L20, 04 2015. ISSN 1745-3925. doi:[10.1093/mnrasl/slv037](https://doi.org/10.1093/mnrasl/slv037). URL <https://doi.org/10.1093/mnrasl/slv037>.
- [59] Roberto Trotta. Bayesian methods in cosmology, 2017.
- [60] Roberto Trotta. Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology. *Contemporary Physics*, 49(2):71–104, Mar 2008. ISSN 1366-5812. doi:[10.1080/00107510802066753](https://doi.org/10.1080/00107510802066753). URL <http://dx.doi.org/10.1080/00107510802066753>.
- [61] Adam G. Riess, Stefano Casertano, Wenlong Yuan, Lucas M. Macri, and Dan Scolnic. Large magellanic cloud cepheid standards provide a 1% foundation for the determination of the hubble constant and stronger evidence for physics beyond  $\lambda$ cdm. *The Astrophysical Journal*, 876(1):85, May 2019. ISSN 1538-4357. doi:[10.3847/1538-4357/ab1422](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab1422). URL <http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab1422>.
- [62] Frank Steiner. Solution of the friedmann equation determining the time evolution, acceleration and the age of the univers. Ulm University, Dec 2007.
- [63] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Martino Publishing, 2014.
- [64] Moshe Carmeli, John G. Hartnett, and Firmin J. Oliveira. The cosmic time in terms of the redshift. *Foundations of Physics Letters*, 19(3):277–283, Apr 2006. ISSN 1572-9524. doi:[10.1007/s10702-006-0518-3](https://doi.org/10.1007/s10702-006-0518-3). URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10702-006-0518-3>.
- [65] Moshe Carmeli. Aspects of cosmological relativity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:1993, 1999. doi:[10.1023/A:1026697517814](https://doi.org/10.1023/A:1026697517814).
- [66] Raul Jimenez and Abraham Loeb. Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages. *The Astrophysical Journal*, 573(1):37–42, Jul 2002. ISSN 1538-4357. doi:[10.1086/340549](https://doi.org/10.1086/340549). URL <http://dx.doi.org/10.1086/340549>.
- [67] Lorenzo Zaninetti. The distance modulus in dark energy and cardassian cosmologies via the hypergeometric function. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, 09(03): 231–246, 2019. ISSN 2161-4725. doi:[10.4236/ijaa.2019.93017](https://doi.org/10.4236/ijaa.2019.93017). URL <http://dx.doi.org/10.4236/ijaa.2019.93017>.
- [68] George Arfken, Hans Jurgen Weber, and Frank E. Harris. *Mathematical methods for physicists*. Elsevier Academic Press, 6 edition, 2005.