Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Análisis espectral de procesos de nacimiento y muerte bilaterales

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

Nestor Alexis Peña Montes

TUTOR

Dr. Manuel Domínguez de la Iglesia

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021

Agradecimientos

Supongo que todas las personas e instituciones que han formado parte de mi vida me han hecho lo que soy ahora (para bien o para mal), sin embargo aún dentro de esto, algunas merecen mención especial, pues no todas las personas tuvieron el mismo impacto.

Primero que nada agradezco a mi madre Ivette y a mi hermana Katia, por estar conmigo y soportarme a todo momento, tal vez no entendían muchas de las cosas que les platicaba acerca de mi carrera, pero apoyo moral tuve en todo momento y eso es muy valioso.

Un agradecimiento especial lo daré para alguien que ya no se encuentra aquí, mi bisabuela Alicia quien fue una de las personas más buenas que he conocido y que además me apoyó en momentos muy difíciles.

Otras personas que merecen un agradecimiento son mis amigos, Roxana, Ari, Ángel, Luis, Diego(s), Lua, Pao, Fernando, Andoni, Karim, personas de las que aprendí demasiado no solo de la carrera, sino de la vida, que me ayudaron a encontrarme y a tener un panorama de la vida más grande.

Como olvidar a mi tía Rebeca, mi tío Cristopher y Marleem, quienes me apoyaron de forma incondicional para terminar esta carrera.

Mi padrino Alejandro, mi tía Noemí, Papachon, César y Paola, quienes me abrieron las puertas de su hogar y me apoyaron de forma desinteresada para lograr concluir esta etapa.

Bonifacio y Lourdes, con quienes tal vez no convivía demasiado pero eso no dejo de pesar en sus enseñanzas para la vida.

Debo también agradecerle al Dr. Manuel Domínguez de la Iglesia, mi asesor, por darme la oportunidad de trabajar a su lado pues se que no es fácil tratar con una persona como yo, además le agradezco por la beca de Conacyt que me ayudó a obtener, y por la paciencia que tuvo durante este proceso.

La Dra. María Clara Fittipaldi es alguien a quien también debo agradecerle, pues ella me dió mi primera gran oportunidad que yo tanto anhelaba.

Agradezco a Agustin, Esther, Nicolas y Antonio.

Agradezco al CONACYT la beca recibida como asistente de proyecto con número de registro 30200.

Sin duda alguna he aprendido bastante de las personas que me rodean, y estoy seguro que hay nombres que me faltaron en esta lista, les pido una disculpa si es así; pero muchas gracias a todos.

Este trabajo fue apoyado por el proyecto CONACYT de referencia CB-2017-2018/A1-S-16202.

Índice general

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es recopilar los resultados principales sobre el análisis espectral de procesos de nacimiento y muerte bilaterales (con espacio de estados en los enteros) obtenidos mayormente en los trabajos de W. Pruitt [15] y [16]. Estos trabajos son extensiones de los artículos de S. Karlin y J. McGregor [8], [9] y [10], quienes fueron pioneros en el desarrollo del análisis espectral de procesos de nacimiento y muerte con espacio de estados en los enteros no negativos usando polinomios ortogonales. Estos resultados se aplicarán a un par de ejemplos: el proceso con tasas de nacimiento y muerte constantes y el proceso simétrico con tasas constantes.

En el Capítulo 1 se dan conceptos y proposiciones que jugarán un rol más importante en capítulos posteriores. Daremos una breve introducción a la teoría de polinomios ortogonales así como de herramientas como la transformada de Stieltjes o el Teorema espectral. A continuación se describirán los procesos de nacimiento y muerte y la representación integral de las probabilidades de transición mediante la conocida fórmula de Karlin-McGregor. Por último se estudiará en detalle el sistema $M/M/1$ (cola con un servidor actuando en los enteros no negativos) y su correspondiente representación espectral en términos de los polinomios de Chebyshev de segunda especie. Este ejemplo jugará un papel muy importante en los ejemplos estudiados en el Capítulo 4.

En el Capítulo 2 se da un desarrollo más a profundidad de los procesos de nacimiento y muerte bilaterales. La diferencia principal con respecto a los procesos de nacimiento y muerte en los enteros no negativos es que ahora el operador infinitesimal es una matriz doblemente infinita. Para realizar el análisis espectral y llegar al equivalente de la fórmula de Karlin-McGregor, vamos a necesitar dos familias de polinomios linealmente independientes que al escribirlos de manera vectorial van a ser ortogonales con respecto a una matriz espectral de tamaño 2×2. A continuación describiremos los polinomios duales, que van a jugar un papel fundamental en el análisis de la solución mínima de un proceso de nacimiento y muerte bilateral, entre otros resultados. Para estudiar la solución mínima usaremos la transformada de Laplace de la función de transición de probabilidades. Por último se hará un breve compendio de resultados describiendo el comportamiento de las soluciones generales.

El Capítulo 3 usa las herramientas desarrolladas en el Capítulo 2 para obtener propiedades de estos procesos desde una perspectiva probabilística. Comenzaremos con la recurrencia, donde se mostrará una condición necesaria y suficiente en términos de series donde aparecen los coeficientes potenciales y las tasas de nacimiento. Esta condición está relacionada con la divergencia de la integral de la matriz espectral dividida entre x en el soporte de la medida. De igual manera se analizará la ergodicidad y transitoriedad de los procesos de nacimiento y muerte bilaterales usando técnicas espectrales. Por último se estudiarán teoremas límite para estudiar el comportamiento de $P_{i,j}(t)/P_{k,l}(t)$ a medida que $t \to \infty$ en los casos en que el proceso sea transitorio o recurrente nulo.

Por último, en el Capítulo 4, se usan las herramientas que se han desarrollado a lo largo del escrito para analizar espectralmente dos ejemplos. Para ello trataremos de conseguir una fórmula general para la transformada de Stieltjes de la matriz espectral del proceso de nacimiento y muerte bilateral en términos de las medidas $\psi^{\pm}$ correspondientes a los procesos de nacimiento y muerte en $\mathbb{N}_0$ que van a $\pm\infty$, respectivamente. Para llegar a estas fórmulas usaremos un argumento probabilístico parecido al desarrollado en la última sección de [11], pero a tiempo continuo. El primero de los ejemplos que estudiaremos es el proceso de nacimiento y muerte bilateral con tasas constantes, que ya fue analizado en [6] usando herramientas de teoría espectral de operadores. El segundo ejemplo será el proceso de nacimiento y muerte simétrico con tasas constantes, que es una extensión a tiempo continuo de la caminata aleatoria simétrica en los enteros, estudiado en la Sección 6 de [5]. En ambos casos se analiza la recurrencia (o transitoriedad), sus polinomios ortogonales en términos de polinomios de Chebyshev de segunda especie y sus matrices espectrales; y en caso de ser recurrentes positivos, su distribución estacionaria y el tiempo esperado de regreso.

Capítulo 1

Preliminares

A continuación daremos unas definiciones y resultados principales que se usarán a lo largo de la tesis.

1.1. Polinomios Ortogonales

Por intereses del escrito, nos restringimos a medidas de Borel positivas ψ sobre $\mathbb{R}$ con momentos finitos i. e. $\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\psi(x) < \infty$, $n = 0, 1, \ldots$ y soporte infinito. Por el Teorema de descomposición de Lebesgue, podemos descomponer cualquier medida en tres diferentes:

$$\psi = \psi_c + \psi_d + \psi_{cs},$$

donde ψ_c es la parte absolutamente continua, ψ_d es la parte discreta y ψ_{cs} es la parte singularmente continua (en conjuntos que tienen medida cero). En este texto consideraremos solo casos con partes absolutamente continuas y discretas, así como combinaciones de estas dos.

Respecto a esta medida ψ podemos considerar el espacio de Hilbert

$$L^2_\psi(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ medible t.q.} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 d\psi(x) := ||f||^2_\psi < \infty \right\},$$

con producto interior usual, esto es:

$$(f,g)_\psi = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}d\psi(x).$$

Si resulta que el soporte es numerable, por ejemplo $\mathbb{N}_0$, el espacio de Hilbert asociado a la medida $\psi = (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ viene dado por

$$\ell^2_\psi(\mathbb{N}_0) = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ t.q. } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\psi_n < \infty \right\}.$$

Definición 1.1. *Decimos que $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión de polinomios si cada elemento es un polinomio de grado exactamente n en la variable real x. Decimos que es mónico si el coeficiente del mayor exponente de la variable x es 1. Decimos que una sucesión de polinomios es ortogonal con respecto a la medida de Borel ψ si*

$$(p_n, p_m)_\psi = \int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x)d\psi(x) = ||p_n||^2_\psi \delta_{nm}.$$

Si además $||p_n||^2_\psi = 1, \forall n$ se dice que es ortonormal.

Una forma de generar polinomios ortogonales con respecto a una medida ψ es mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

A partir de ahora, si la sucesión de polinomios es ortonormal, se denotará $(P_n)_n$. Si la sucesión de polinomios es mónica y ortogonal se denotará $(\hat{P}_n)_n$.

Toda sucesión de polinomios ortogonales satisface una relación de recurrencia a tres términos, esto porque el término $xP_n(x)$, al ser de grado $n+1$, puede expresarse de la siguiente forma:

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k}P_k(x),$$

con $c_{n,k} = \frac{(P_k(x), xP_n(x))_\psi}{(P_k(x), P_k(x))_\psi}$. Como la familia completa es ortogonal, la familia hasta el término $n+1$ es ortogonal. Ahora

$$(P_k(x), xP_n(x))_\psi = \int_{\mathbb{R}} P_k(x)xP_n(x)d\psi(x) = (xP_k(x), P_n(x))_\psi.$$

Pero

$$(xP_k(x), P_n(x))_\psi = 0 \quad \text{si} \quad k+1 < n,$$

con lo cual

$$xP_n(x) = c_{n,n-1}P_{n-1}(x) + c_{n,n}P_n(x) + c_{n,n+1}P_{n+1}(x).$$

En particular, para la familia mónica $(\hat{P}_n)_n$ se tiene que

$$x\hat{P}_n(x) = \hat{P}_{n+1}(x) + \alpha_n \hat{P}_n(x) + \beta_n \hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{1.1}$$

$$\hat{P}_0(x) = 1, \quad \hat{P}_1(x) = x - \alpha_0,$$

donde

$$\alpha_n = \frac{(x\hat{P}_n, \hat{P}_n)_\psi}{(\hat{P}_n, \hat{P}_n)_\psi} \in \mathbb{R}, \quad n \geq 0, \qquad \beta_n = \frac{||\hat{P}_n||_\psi^2}{||\hat{P}_{n-1}||_\psi^2} \geq 0, \quad n \geq 1.$$

(1.1) se puede escribir de manera matricial de la siguiente manera

$$x \begin{pmatrix} \hat{P}_0 \\ \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & 1 & 0 & \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{P}_0 \\ \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

La relación de recurrencia (1.1) es equivalente a que los polinomios ortogonales $(\hat{P}_n)_n$ son autofunciones de un operador de Jacobi.

Cabe mencionar que, cuando la familia de polinomios es ortonormal, la matriz tridiagonal anterior se puede simetrizar como en la siguiente definición.

Definición 1.2. *Un operador de Jacobi es un operador lineal autoadjunto que con respecto a la base canónica (que es ortonormal)* $\{e_0, e_1, \dots\}$ *tiene una representación* *tridiagonal infinita de la siguiente manera:*

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

donde $b_k \in \mathbb{R}$ *y* $a_k > 0$, $k \geq 0$.

La relación existente entre los coeficientes de la familia mónica y los coeficientes de la familia ortonormal está dada por

$$b_n = \alpha_n, \quad a_n^2 = \beta_{n+1}. \tag{1.3}$$

Definición 1.3. *La fórmula de Christoffel-Darboux para una familia de polinomios ortonormales* $\{P_n(x)\}$ *es*

$$\sum_{j=0}^{n} P_j(x)P_j(y) = a_n \left[\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \right].$$

La fórmula de Christoffel-Darboux confluente es

$$\sum_{j=0}^{n} P_j^2(x) = a_n[P'_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x)],$$

donde las a_n *en ambas fórmulas están definidas en (1.3).*

En términos de la familia mónica $\{\hat{P}_n\}$, la fórmula de Christoffel-Darboux puede ser escrita como

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\hat{P}_j(x)\hat{P}_j(y)}{||\hat{P}_j||_\psi^2} = \frac{\hat{P}_{n+1}(x)\hat{P}_n(y) - \hat{P}_n(x)\hat{P}_{n+1}(y)}{||\hat{P}_n||_\psi^2(x-y)}, \tag{1.4}$$

y la fórmula confluente queda

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\hat{P}_j^2(x)}{||\hat{P}_j||_\psi^2} = \frac{\hat{P'}_{n+1}(x)\hat{P}_n(x) - \hat{P'}_n(x)\hat{P}_{n+1}(x)}{||\hat{P}_n||_\psi^2}. \tag{1.5}$$

Proposición 1.1. *Los ceros o raíces de los polinomios mónicos $\hat{P}_n$ generados por los términos de la relación de recurrencia (1.1) son todos reales y simples. Además los ceros de $\hat{P}_{n+1}$ y $\hat{P}_n$ están entrelazados (intercalados). Si además estos son ortogonales con respecto a alguna medida ψ entonces esos ceros se encuentran en el intervalo cerrado más pequeño que contiene supp(ψ).*

Demostración. Sea u un cero complejo de $\hat{P}_n$. Como los coeficientes de $\hat{P}_n$ son todos reales entonces $\bar{u}$ es también cero de $\hat{P}_n$. Tomando $x = u$ & $y = \bar{u}$ en la fórmula de Christoffel-Darboux (1.4) obtenemos una contradicción, ya que por un lado eso debe ser 0 y por el otro lado debe ser $>$1. Entonces todos los ceros deben ser reales. Por otro lado, si tenemos un cero con multiplicidad, de la fórmula confluente (1.5) obtendremos la misma contradicción.

Si $\hat{P}_{n+1}$ y $\hat{P}_n$ tienen un cero en común, entonces por la fórmula de recursión (1.1) también es cero de $\hat{P}_{n-1}$. Siguiendo este razonamiento, este cero tambien sería cero de $\hat{P}_0 = 1$, lo cual es una contradicción. Con respecto a lo entrelazado, para $n < 2$ no hay nada que probar. Para $n \geq 2$, (1.5) implica que $\hat{P}'_{n+1}(x)\hat{P}_n(x) - \hat{P}'_n(x)\hat{P}_{n+1}(x) > 0$. Supongamos $y_1 < y_2$ dos ceros consecutivos de $\hat{P}_{n+1}$. Entonces la desigualdad previa implica que $\hat{P}'_{n+1}(y_j)\hat{P}_n(y_j) > 0$, $j = 1, 2$. Además $\hat{P}'_{n+1}(y_1)$ y $\hat{P}'_{n+1}(y_2)$ tienen diferente signo. Por el Teorema de Bolzano $\hat{P}_n$ tiene un cero en el intervalo (y_1, y_2).

Finalmente, sea $[a, b]$ el intervalo más pequeño que contiene a *supp*(ψ) y $c_1, \ldots, c_j$ los ceros de $\hat{P}_n$ contenidos en $[a, b]$. Si $j < n$ entonces la ortogonalidad implica que $\int_{\mathbb{R}} \hat{P}_n(x) \prod_{k=1}^{j}(x - c_k)d\psi(x) = 0$. Pero esto es una contradicción, puesto que la integral no cambia de signo en $[a, b]$. Por lo tanto $j = n$.

□

Definición 1.4. *Los polinomios de Chebyshev de primera especie son aquellos que son ortogonales respecto a la medida $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $x \in [-1, 1]$ y definidos mediante* *la relación de recurrencia de tres términos*

$$T_0 = 1, \quad T_1(x) = x, \quad 2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Los polinomios de Chebyshev de segunda especie son aquellos que son ortogonales respecto a la medida $\psi(x) = \sqrt{1-x^2}$ *en* $x \in [-1,1]$ *y definidos mediante la relación de recurrencia de tres términos*

$$U_0 = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad 2xU_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Los polinomios de Chebyshev de **primera especie** satisfacen además, la ecuación diferencial de segundo orden

$$(1-x^2)T_n^{''}(x) - xT_n^{'}(x) + n^2 T_n(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

Así mismo, pueden ser definidos como los únicos polinomios que satisfacen

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta, \quad n \geq 0, \quad x = \cos\theta \in [-1,1]. \tag{1.6}$$

Por ende, tenemos una expresión explícita de los ceros de T_n, dados por

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Los polinomios de Chebyshev de **segunda especie**, por su parte, satisfacen la ecuación diferencial de segundo orden

$$(1-x^2)U_n^{''}(x) - 3xU_n^{'}(x) + n(n+2)U_n(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

Adicionalmente, pueden ser definidos de forma trigonométrica como

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}, \quad n \geq 0, \quad x = \cos\theta \in [-1,1]. \tag{1.7}$$

Por lo tanto, tenemos una expresión de los ceros de U_n, dados por

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Los polinomios de Chebyshev también satisfacen un par de relaciones de recurrencia mutua:

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - (1-x^2)U_{n-1}(x), \quad U_n(x) = xU_{n-1}(x) + T_n(x),$$

y están conectados por la siguiente relación:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(U_n(x) - U_{n-2}(x)).$$

Definición 1.5. *La transformada de Stieltjes de una medida ψ con soporte real es definida como la función de valores complejos:*

$$B(z;\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\psi(x)}{x-z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Proposición 1.2. *(Fórmula de inversión de Perron-Stieltjes) Sea ψ una medida de probabilidad con momentos finitos y $B(z;\psi)$ su transformada de Stieltjes. Entonces*

$$\int_a^b d\psi(x) + \frac{1}{2}\psi(\{a\}) + \frac{1}{2}\psi(\{b\}) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b ImB(x+i\epsilon;\psi)dx.$$

Demostración. Observemos que

$$2i\mathrm{Im}B(z;\psi) = B(z;\psi) - \overline{B(z;\psi)} = B(z;\psi) - B(\overline{z};\psi) = \int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{x-z} - \frac{1}{x-\overline{z}}\right]d\psi(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{z-\overline{z}}{|x-z|^2}d\psi(x) = 2i\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Im}z}{|x-z|^2}d\psi(x).$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Im}B(x+i\epsilon;\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon}{|s-(x+i\epsilon)|^2}d\psi(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon}{(s-x)^2+\epsilon^2}d\psi(s).$$

Integrando y cambiando el orden de las integrales (lo cual se puede ya que el integrando es positivo) tenemos que

$$\int_a^b \mathrm{Im}B(x+i\epsilon;\psi) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_a^b \frac{\epsilon}{(s-x)^2+\epsilon^2}dx\right] d\psi(s).$$

La integral puede ser calculada explícitamente haciendo el cambio de variable $y = (x-s)/\epsilon$:

$$\chi_\epsilon(s) = \int_a^b \frac{\epsilon}{(s-x)^2+\epsilon^2}dx = \int_{(a-s)/\epsilon}^{(b-s)/\epsilon} \frac{1}{1+y^2}dy = \mathrm{arctan} y\Big|_{(a-s)/\epsilon}^{(b-s)/\epsilon}.$$

Tenemos que $0 \leq \chi_\epsilon(s) \leq \pi$ y cuando tomamos el límite (lo cual está permitido usando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue dado que ψ es medida de probabilidad y $\chi_\epsilon(s)$ es acotado y positivo) tenemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \chi_\epsilon(s) = \begin{cases} \pi & si \quad a < s < b, \\ \frac{\pi}{2} & si \quad s = a, b. \end{cases}$$

□

Cuando la medida ψ tiene una parte absolutamente continua y una parte discreta, hay una forma de calcular directamente el tamaño del salto de la parte discreta. Para ello, asumamos que $\psi = \widehat{\psi} + \psi(\{a\})\delta_a(x)$, donde $\delta_a(x) = \delta(x-a)$ es la distribución delta de Dirac, que se define como $\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$. Entonces obtenemos

$$B(z;\psi) = B(z;\widehat{\psi}) + \frac{\psi(\{a\})}{a-z}.$$

Evaluando en $z = a + i\epsilon$ y tomando partes imaginarias obtenemos

$$\mathrm{Im}B(a+i\epsilon;\psi) = \mathrm{Im}B(a+i\epsilon;\widehat{\psi}) + \mathrm{Im}\frac{\psi(\{a\})}{-i\epsilon} = \mathrm{Im}B(a+i\epsilon;\widehat{\psi}) + \frac{\psi(\{a\})}{\epsilon}.$$

Por lo tanto obtenemos

$$\psi(\{a\}) = \epsilon\mathrm{Im}B(a+i\epsilon;\psi) - \epsilon\mathrm{Im}B(a+i\epsilon;\widehat{\psi}).$$

Tomando límite cuando $\epsilon \to 0$ observemos que $B(a+i\epsilon;\widehat{\psi})$ está acotado ya que $\widehat{\psi}$ es absolutamente continuo. Por lo tanto, los puntos aislados significativos (donde $\psi(\{a\})>0$) deben ser los que satisfacen

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Im} B(a+i\epsilon;\psi)=\infty,$$

mientras que el tamaño del salto en $x=a$ viene dado por

$$\psi(\{a\})=\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \mathrm{Im} B(a+i\epsilon;\psi)\geq 0. \tag{1.9}$$

Teorema 1.1. *Sea J la matriz de Jacobi dada como en (1.2) y denotemos por $J^{(0)}$ la matriz de Jacobi construida al eliminar el primer renglón y la primera columna. Entonces tenemos que*

$$(I-zJ)^{-1}_{00}=\frac{1}{1-b_0z-a_0^2z^2(I-zJ^{(0)})^{-1}_{00}},$$

donde $(I-zJ)^{-1}_{00}$ es la entrada $(0,0)$ de la inversa de la matriz $I-zJ$.

Demostración. Podemos reescribir la matriz J de (1.1) como

$$J=\left(\begin{array}{c|ccc} b_0 & a_0 & 0 & \dots \\ \hline a_0 & & & \\ 0 & & J^{(0)} & \\ \vdots & & & \end{array}\right).$$

Usando la conocida fórmula para la inversa de una matriz por bloques 2×2

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

aplicada a la matriz $I-zJ$ obtenemos

$$(I-zJ)^{-1}_{00}=\left[1-zb_0-a_0^2z^2e_0^t(I-zJ^{(0)})^{-1}e_0\right]^{-1}=\frac{1}{1-b_0z-a_0^2z^2(I-zJ^{(0)})^{-1}_{00}},$$

donde e_0 es el vector canónico $e_0 = (1, 0, 0, \dots)^t$. $\square$

Nota. Si asumimos que asociadas a las matrices de Jacobi J y $J^{(0)}$ existen medidas positivas ψ y $\psi^{(0)}$ soportadas en $[-1, 1]$, respectivamente (lo cual siempre va a ser posible como consecuencia del Teorema espectral, que veremos en la siguiente sección), obtenemos

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\psi(x)}{1 - xz} = \frac{1}{1 - b_0 z - a_0^2 z^2 \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{d\psi^{(0)}(x)}{1 - xz}}.$$

Esta fórmula relaciona las transformadas de Stieltjes de las medidas ψ y $\psi^{(0)}$ de la siguiente manera (ver (1.8))

$$B(z; \psi) = -\frac{1}{z - b_0 + a_0^2 B(z; \psi^{(0)})}. \tag{1.10}$$

1.2. Teorema espectral

Esta sección esta basada principalmente en [7], [10] y [12].

Definición 1.6. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con producto interior $(\circ, \circ)$. Denotaremos por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ al conjunto de todos los operadores lineales de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$. Para un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, el operador resolvente es definido por $R(z) = (T - zI)^{-1}$. Los valores de $z \in \mathbb{C}$ para los cuales $R(z)$ es un operador lineal acotado son llamados valores regulares y son denotados por $\rho(T)$. El complemento del conjunto resolvente $\rho(T)$ es llamado el espectro de T y es denotado por $\sigma(T)$.*

Para un operador acotado T, el espectro $\sigma(T)$ es un subconjunto compacto del disco de radio $||T|| = inf_{u \in \mathcal{H}}(||Tu||/||u||)$. Además, si T es autoadjunto, esto es, $(Tu, v) = (u, Tv)$ para todo $u, v \in \mathcal{H}$, entonces $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, así que $\sigma(T) \subset [-||T||, ||T||]$.

Definición 1.7. *Una resolución de la identidad E de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es una función $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que, para todos los conjuntos de Borel $A, B \subset \mathbb{R}$, tenemos:*

1. *$E(A)$ es una proyección autoadjunta, es decir, $E(A)^2 = E(A)$.*

2. *$E(A \cap B) = E(A)E(B)$.*

3. *$E(\emptyset) = 0, \quad E(\mathbb{R}) = I_{\mathcal{H}}$.*

4. *$A \cap B = \emptyset$ implica que $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$.*

5. *Para todos $u, v \in \mathcal{H}$, la función $A \mapsto E_{u,v}(A) = (E(A)u, v)$ es una medida de Borel compleja.*

Teorema 1.2. *(Teorema espectral). Sea $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal autoadjunto acotado. Entonces existe una única resolución de la identidad E de $\mathcal{H}$ tal que $T = \int_{\mathbb{R}} tdE(t)$, es decir*

$$(Tu, v) = \int_{\mathbb{R}} tdE_{u,v}(t).$$

Además, E tiene soporte en el espectro $\sigma(T)$ y cualquiera de las proyecciones espectrales $E(A)$, $A \subset \mathbb{R}$, conmuta con T.

Para más detalles ver [12].

Nota: El siguiente resultado es un caso particular del Teorema Espectral aplicado a $T = J$ y $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}_0)$.

Teorema 1.3. *(Teorema de Favard) Sea J un operador de Jacobi acotado. Entonces existe una única medida de probabilidad ψ con soporte sobre un intervalo real compacto tal que para todo polinomio P, la función $U : P(J)e_0 \mapsto P$ extiende a un operador unitario $\ell^2(\mathbb{N}_0) \to L^2_\psi$ tal que $UJ = MU$, donde $M : L^2_\psi \to L^2_\psi$ es el operador multiplicación $(Mf)(x) = xf(x)$. Además, la sucesión $P_n = Ue_n$ es un conjunto de polinomios ortonormales con respecto a ψ, donde e_n son los vectores canónicos de $\ell^2(\mathbb{N}_0)$. Por lo tanto el operador J puede ser diagonalizado de la siguiente forma:*

$$(UJU^{-1}f)(x) = (Mf)(x) = xf(x), \quad f \in L^2_\psi.$$

Demostración. Tenemos que U manda subconjuntos densos de $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ en subconjuntos densos de L^2_ψ, dado que los polinomios son densos en L^2_ψ, ya que el soporte de la medida

ψ está acotado. Además, se tiene que para todo par de polinomios P y Q,

$$(P(J)e_0, Q(J)e_0) = (\bar{Q}(J)P(J)e_0, e_0) = \int_{\mathbb{R}} \bar{Q}(x)P(x)d\psi(x) = (P, Q)_\psi$$

$$= (UP(J)e_0, UQ(J)e_0)_\psi.$$

Por lo tanto, U es un operador unitario que extiende de manera única al operador unitario por la densidad de ambos espacios. Para ver que $UJ = MU$, lo probaremos para la base canónica, i.e. $UJe_n = MUe_n$, para todo n. Sea $P_n = Ue_n$. Entonces $P_n \in L^2_\psi$ es un polinomio de grado n y son ortogonales respecto a ψ, pues

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(x)P_m(x)d\psi(x) = (Ue_n, Ue_m)_\psi = (e_n, e_m) = \delta_{n,m}.$$

Queda por probar que los coeficientes de la relación de los tres términos de recurrencia para los polinomios P_n coincide con los coeficientes del operador J. Pero esto es cierto por la relación entre estos coeficientes y la medida ψ, usando el Teorema espectral

$$a_n = (Je_n, e_{n+1}) = \int_{\mathbb{R}} x dE_{e_n, e_{n+1}}(x) = \int_{\mathbb{R}} x P_{n+1}(x)P_n(x)d\psi(x),$$

$$b_n = (Je_n, e_n) = \int_{\mathbb{R}} x dE_{e_n, e_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} x(P_n(x))^2 d\psi(x).$$

La unicidad se sigue del hecho de que los momentos de ψ son únicamente determinados dado que P_n es una familia de polinomios ortogonales en L^2_ψ. Como la medida tiene soporte compacto y su transformada de Stieltjes es analítica en una vecindad de ∞, la fórmula de inversión de Perron-Stieltjes da una única medida determinada por sus momentos. $\square$

Cabe mencionar que el teorema previo también es válido para un operador J no acotado (ver más detalles en [12]).

1.3. Cadenas de Markov a tiempo continuo

Esta sección está basada principalmente en el libro de W.J. Anderson [1].

Definición 1.8. *Decimos que* $\{X_t, t \geq 0\}$ *con espacio de estados* $\mathcal{S}$ *(a lo más numerable) es una cadena de Markov a tiempo continuo si cumple la siguiente propiedad (la propiedad de Markov):*

$$\text{Si } i, j \in \mathcal{S}, s, t \geq 0 \ \& \ X(u) \in \mathcal{S}, \forall u < s,$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_u, 0 \leq u < s, X_s = i) = \mathbb{P}(X_t = j | X_s = i).$$

En otras palabras, el comportamiento futuro de la cadena de Markov solo depende del presente.

Cuando $\mathbb{P}(X_{t+s} = j|X_s = i) = \mathbb{P}(X_t = j|X_0 = i)$, se dice que el proceso es homogéneo. Además, se denotará por $P_{i,j}(t) = \mathbb{P}(X_t = j|X_0 = i)$ a la función de transición de probabilidades del estado i al estado j.

Tenemos que con estas transiciones podemos construir una matriz a cada tiempo t, a saber $P(t)$ y esta queda de la siguiente forma (si $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$):

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & P_{02}(t) & \cdots \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) & \cdots \\ P_{20}(t) & P_{21}(t) & P_{22}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Esta matriz $P(t)$ tiene las siguientes propiedades:

1. $P_{ij}(t) \geq 0$ para todo $i, j \in \mathcal{S}$ y $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

2. $\sum_{j \in \mathcal{S}} P_{ij}(t) \leq 1$. Si la suma es 1 $\forall i$ el proceso se dice honesto; es deshonesto en otro caso.

3. La Ecuación de Chapman-Kolmogorov: $P_{i,j}(t+s) = \sum_{k \in \mathcal{S}} P_{i,k}(t) P_{k,j}(s)$.

4. $\lim_{t \to 0^+} P_{ii}(t) = 1$.

Si usamos notación matricial las propiedades anteriores se pueden escribir como:

a) $P(0) = I$ con I la matriz identidad.

b) $P(t+s) = P(t)P(s)$.

Proposición 1.3. *Sea $P_{ij}(t)$ una función de transición que satisface las propiedades 1) a 4). Entonces para $i \in \mathcal{S}$ tenemos que:*

1. $-P'_{ii}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1-P_{ii}(t)}{t} = q_i$ *(podría ser ∞).*

2. *Si $q_i < \infty$ entonces $P'_{ij}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = q_{ij} < \infty$ para todo $i \neq j$.*

Ver prueba en [1, Prop. 1.2.2].

Se dice que el estado $i \in \mathcal{S}$ es estable si $q_i < \infty$ e instantáneo si $q_i = \infty$. El proceso es estable si todos los estados son estables (todos los procesos que estudiaremos en este texto son estables). Un estado i es absorbente si $q_i = 0$. Con esto podemos dar la siguiente definición.

Definición 1.9. *El operador infinitesimal del proceso X_t es una matriz $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$, donde $\mathcal{A}_{ii} = -q_i$ y $\mathcal{A}_{ij} = q_{ij}, i \neq j$, donde q_i y q_{ij} están definidos en la Proposición 1.3.*

Para $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$, el operador corresponde a la siguiente matriz:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{0,1} & q_{0,2} & \cdots \\ q_{1,0} & -q_1 & q_{1,2} & \cdots \\ q_{2,0} & q_{2,1} & -q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Observemos que $\mathcal{A}$ tiene las siguientes propiedades:

1. Si $i \neq j$ entonces $\mathcal{A}_{ij} \geq 0$.

2. $\sum_{j\in\mathcal{S}} \mathcal{A}_{i,j} \leq 0$.

Cuando la matriz $\mathcal{A}$ cumpla la condición 1) y que la suma de cada renglón sea igual a 0 se dice que es conservativa.

Proposición 1.4. *Dada una matriz $\mathcal{A}$ conservativa, existe una única cadena de Markov a tiempo continuo que la tiene como operador infinitesimal.*

Ver demostración en [17, Prop. 5.4].

Definición 1.10. *Sea $\{X_t\}$ cadena de Markov a tiempo continuo y $\mathcal{A}$ su operador infinitesimal; suponga que es conservativa y definimos*

$$J_n = \begin{cases} 0, & si \quad n = 0, \\ \text{ínf}\{t > J_{n-1} | X_t \neq X_{t^-}\}, & si \quad n \geq 1. \end{cases}$$

La cadena de saltos de la cadena de Markov $\{X_t\}$ está dada por $\hat{X}_n = X_{J_n}$.

Se tiene que J_n es el tiempo de la n-ésima transición. El proceso $\hat{X}_n$ es una cadena de Markov a tiempo discreto con probabilidades de transición

$$P_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & si \qquad q_i = 0, \\ 0 & si \quad q_i > 0, \quad i = j, \\ \dfrac{q_{ij}}{q_i} & si \quad q_i > 0, \quad i \neq j. \end{cases}$$

Es claro que la cadena X_t está completamente determinada por J_n y $\hat{X}_n$ y viceversa.

La construcción previa sugiere que $J_\infty = \text{lím}_{n\to\infty} J_n = \infty$. Sin embargo, hay situaciones en las que J_∞ es finito, y es llamado tiempo de la primera explosión. En ese caso, en un intervalo de tiempo finito puede haber un número infinito de saltos. Esa situación no es posible en cadenas de Markov a tiempo discreto.

Existen dos ecuaciones muy importantes para estos procesos, estas son las ecuaciones de retroceso y de evolución (backward y forward), que serán estudiadas a continuación.

Proposición 1.5. *Sea $\mathcal{A}$ estable y q_{ij} introducidos en la Proposición 1.3. Entonces*

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\in\mathcal{S}} q_{ik} P_{kj}(t), \quad t \geq 0, \quad i, j \in \mathcal{S}. \tag{1.11}$$

Además, si $\sum_{k\in\mathcal{S}} P_{ij}(t) = 1$, entonces (1.11) es válida si y solo si $\mathcal{A}$ es conservativa.

Demostración. Usando las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov y la Proposición 1.3

tenemos que

$$P'_{ij}(t) = \lim_{s\to 0^+} \frac{\partial}{\partial s} P_{ij}(s+t) = \lim_{s\to 0^+} \frac{\partial}{\partial s} \sum_{k\in\mathcal{S}} P_{ik}(s)P_{kj}(t) = \lim_{s\to 0^+} \sum_{k\in\mathcal{S}} P'_{ik}(s)P_{kj}(t)$$

$$= \sum_{k\in\mathcal{S}} q_{ik}P_{kj}(t).$$

Por otro lado, si es honesto, tenemos que $\sum_{j\in\mathcal{S}} P'_{i,j}(t) = 0$. Si la ecuación diferencial (1.11) es cierta, entonces

$$0 = \sum_{j\in\mathcal{S}} P'_{i,j}(t) = \sum_{j\in\mathcal{S}} \sum_{k\in\mathcal{S}} q_{ik}P_{kj}(t) = \sum_{k\in\mathcal{S}} q_{ik} \sum_{j\in\mathcal{S}} P_{kj}(t) = \sum_{k\in\mathcal{S}} q_{ik}.$$

Por lo tanto $\mathcal{A}$ es conservativo. Si $\mathcal{A}$ es conservativo, la primera parte de la proposición implica que (1.11) sea cierta. □

La ecuación (1.11) es llamada ecuación de retroceso de Kolmogorov, y describe la evolución del proceso antes del tiempo t.

Así mismo, la ecuación diferencial

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\in\mathcal{S}} P_{ik}(t)q_{kj}, \quad t \geq 0, \quad i,j \in \mathcal{S}, \tag{1.12}$$

es llamada ecuación de evolución de Kolmogorov.

Estas ecuaciones se pueden escribir de forma matricial, y esto queda de la siguiente manera

$$P'(t) = \mathcal{A}P(t), \quad P'(t) = P(t)\mathcal{A}, \quad P(0) = I.$$

Definición 1.11. *Sea $\mathcal{A}$ estable. Una función $P_{ij}(t)$ es llamada una $\mathcal{A}$-función si $\mathcal{A}$ es el operador infinitesimal de una función de probabilidad de transición $P(t)$, esto es $P'(0) = \mathcal{A}$.*

Proposición 1.6. *Sea $\mathcal{A}$ estable pero no necesariamente conservativo.*

1. *Existe una función de transición (puede ser deshonesta) $f_{ij}(t)$ que satisface ambas ecuaciones de Kolmogorov con la característica de ser la más pequeña*

(mínima), es decir, $f_{ij}(t) \leq P_{ij}(t)$ para todo $i, j \in \mathcal{S}$ y $t \geq 0$, donde $P_{ij}(t)$ es cualquier otra función que sea solución no negativa (y puede no ser función de transición) de las ecuaciones de Kolmogorov. Además $f_{ij}(t)$ es mínima como $\mathcal{A}$-función, esto es, $f_{ij}(t) \leq P_{ij}(t)$ para todo $i, j \in \mathcal{S}$ y $t \geq 0$, donde $P_{ij}(t)$ es cualquier otra $\mathcal{A}$-función (no necesariamente solución de las ecuaciones de Kolmogorov).

2. *Sea $f_{ij}(t)$ como en lo anterior. Así si $f_{ij}(t)$ es honesto entonces es la única solución a ambas ecuaciones de Kolmogorov y también es la única $\mathcal{A}$-función. Si $\mathcal{A}$ es conservativo, la mínima solución $f_{ij}(t)$ es única si y solo si es honesta. Si $\mathcal{A}$ no es conservativo entonces $f_{ij}(t)$ nunca puede ser honesto.*

Ver prueba en [1, Teorema 2.2.2].

Definición 1.12. *Se dice que $\mathcal{A}$ es débilmente simétrica si existe un vector $m = (m_i)_i$ tal que $m_i q_{ij} = m_j q_{ji}$, para todo $i, j \in \mathcal{S}$.*

Definición 1.13. *Un vector $\pi = (\pi_i)_i$ se dice invariante o estacionario si cumple*

$$\pi P(t) = \pi, \quad t \geq 0.$$

Si $\sum_i \pi_i < \infty$, entonces podemos obtener un nuevo vector pero con norma 1, el cual es llamado distribución invariante (o estacionaria).

En general no es fácil encontrar estos vectores invariantes, pero se puede tener un candidato si se cumple que $\pi\mathcal{A} = \hat{0}$, donde $\hat{0}$ el vector de todas las entradas cero. Cabe mencionar, que si $\mathcal{S}$ es finito o definido sobre naturales entonces la condición $\pi\mathcal{A} = \hat{0}$ y $\sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j = 1$ implica que π sea invariante.

Para la siguiente definición es necesario dar las siguientes funciones:

$$F_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_\tau = j \text{ para alguna } \tau, 0 \leq \tau \leq t | X_0 = i), \quad i \neq j, \tag{1.13}$$

$$F_{ii}(t) = \mathbb{P}(X_{\tau_1} \neq i, X_{\tau_2} = i \text{ para algunas } \tau_1, \tau_2, 0 < \tau_1 < \tau_2 \leq t | X_0 = i). \tag{1.14}$$

Estas funciones son las distribuciones de los primeros tiempos de llegada, y de aquí podemos dar un concepto intuitivo de recurrencia, el cual sería que partiendo del punto i, vayamos a otros puntos y volvamos a i con probabilidad 1; aún con esto, podríamos tardarnos mucho (una infinidad) en regresar al punto, por esta razón se dice que un estado es recurrente positivo (ergódico) si el tiempo esperado de regreso es finito. Formalmente se da como en la siguiente definición.

Definición 1.14. *Sea $i \in \mathcal{S}$.*

1. *i es recurrente si $\int_0^\infty dF_{ii}(t) = 1$, en caso contrario i es transitorio.*
2. *i es recurrente positivo (ergódico) si es recurrente y $\int_0^\infty t dF_{ii}(t) < \infty$.*

Introducimos ahora la transformada de Laplace de la función de transición $P_{ij}(t)$, dada por

$$\widehat{P}_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{ij}(t) dt.$$

Esta función, en términos de λ, es llamada función resolvente y satisface las siguientes propiedades (ver [1, Sección 1.1.3]):

1. $\widehat{P}_{ij}(\lambda) \geq 0$ para todo $i, j \in \mathcal{S}$ y $\lambda > 0$.
2. $\lambda \sum_{j \in \mathcal{S}} \widehat{P}_{ij}(\lambda) \leq 1$, para toda $i \in \mathcal{S}$ y $\lambda > 0$.
3. $\widehat{P}_{ij}(\lambda) - \widehat{P}_{ij}(\mu) + (\lambda - \mu) \sum_{k \in \mathcal{S}} \widehat{P}_{ik}(\lambda) \widehat{P}_{kj}(\mu) = 0$ para todo $i, j \in \mathcal{S}$ y $\lambda, \mu > 0$.
4. $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \widehat{P}_{ii}(\lambda) = 1$, para toda $i \in \mathcal{S}$ (y por lo tanto $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \widehat{P}_{ij}(\lambda) = \delta_{ij}$).

Además de esto, $P_{ij}(t)$ y $F_{ij}(t)$ están relacionados por las siguientes fórmulas

$$P_{ii}(t) = e^{-q_i t} + \int_0^t P_{ii}(t-s) dF_{ii}(s), \tag{1.15}$$

$$P_{ij}(t) = \int_0^t P_{jj}(t-s) dF_{ij}(s), \quad i \neq j. \tag{1.16}$$

Similarmente, si llamamos $\widehat{F}_{ij}(\lambda)$ a la transformada de Laplace de las distribuciones $F_{ij}(t)$ definidas en (1.13) y (1.14), i.e.

$$\widehat{F}_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF_{ij}(t), \tag{1.17}$$

usando (1.15), (1.16) y la convolución, obtenemos las siguientes relaciones

$$\widehat{P}_{ii}(\lambda) = \frac{1}{\lambda + q_i} + \widehat{P}_{ii}(\lambda)\widehat{F}_{ii}(\lambda),$$

$$\widehat{P}_{ij}(\lambda) = \widehat{P}_{jj}(\lambda)\widehat{F}_{ij}(\lambda), \quad i \neq j.$$

1.4. Procesos de nacimiento y muerte

Uno de los ejemplos más básicos de cadenas de Markov a tiempo continuo son los procesos de nacimiento y muerte con espacio de estados en $\mathbb{N}_0$, que describen sistemas de individuos cuyo estado en cada instante, representa el número de individuos en el mismo. Cuando éste es n, se producen nacimientos con una tasa λ_n y muertes con tasa μ_n. A la pareja $\{(\lambda_n, \mu_n)_n, n \geq 0\}$ con $\lambda_n > 0, n \geq 0$, $\mu_n > 0, n \geq 1$ y $\mu_0 \geq 0$ se le llama par de tasas de nacimiento-muerte. Cabe aclarar que pueden ser finitos o infinitos.

El operador infinitesimal en este caso viene dado por la matriz tridiagonal semi-infinita:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -(\mu_0 + \lambda_0) & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\mu_3 + \lambda_3) & \lambda_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Definición 1.15. *Los coeficientes potenciales del proceso se definen como:*

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}, \quad n \geq 1. \tag{1.19}$$

Estos coeficientes potenciales satisfacen la siguiente simetría:

$$\pi_n\lambda_n = \pi_{n+1}\mu_{n+1}, \quad n \geq 0, \tag{1.20}$$

que es inmediato de comprobar.

Con los coeficientes potenciales y las λ_i, podemos definir las siguientes series:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n\pi_n}, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n, \quad C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n\pi_n} \sum_{m=0}^{n} \pi_m, \quad D = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_m\pi_m}.$$

Se tiene que $CD = A + B$ y también:

1. $C < \infty \Rightarrow A < \infty$ y $A = \infty \Rightarrow C = \infty$.

2. $D < \infty \Rightarrow B < \infty$ y $B = \infty \Rightarrow C = \infty$.

Estas series dan pie a la siguiente clasificación de Feller para el punto ∞ (para más detalles ver [1]).

1. El punto ∞ es llamado regular si $C, D < \infty$ (equivalentemente $A, B < \infty$).

2. El punto ∞ es llamado de salida si $C < \infty$ y $D = \infty$ (equivalentemente $A < \infty$, $B = \infty$ y $C < \infty$).

3. El punto ∞ es llamado de entrada si $C = \infty$ y $D < \infty$ (esto es equivalente a $A = \infty$, $B < \infty$ y $D < \infty$).

4. El punto ∞ es llamado natural si $C, D = \infty$ (esto es equivalente a $A, B = \infty$).

Las series A y B están relacionadas con la recurrencia del proceso, mientras que las series C y D se interpretan como el tiempo esperado en alcanzar el estado ∞ desde el estado 0 y viceversa.

1.5. Fórmula de Karlin-McGregor

Esta representación integral fue derivada por primera vez en [8] y [9] y, también fueron descubiertas por Ledermann y Reuter [14]. Para esta sección se verá la fórmula y su prueba.

Sea $(Q_n)_n$ la familia de polinomios generada por la relación de recurrencia a tres términos, con $\deg Q_n = n$,

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_{-1}(x) = 0. \tag{1.21}$$

$$-xQ_0(x) = \lambda_0 Q_1(x) - (\lambda_0 + \mu_0)Q_0(x),$$

$$-xQ_n(x) = \lambda_n Q_{n+1}(x) - (\lambda_n + \mu_n)Q_n(x) + \mu_n Q_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

donde $\{(\lambda_n, \mu_n), n \geq 0\}$ son los coeficientes del operador infinitesimal $\mathcal{A}$ de (1.18).

En forma de vector, todas las relaciones se pueden escribir como $-xQ(x) = \mathcal{A}Q(x)$ donde $Q(x) = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)^t$.

Consideremos la función vectorial

$$f(x,t) = P(t)Q(x). \tag{1.22}$$

Usando la ecuación de evolución de Kolmogorov $P'(t) = P(t)\mathcal{A}$, esta función satisface

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = P'(t)Q(x) = P(t)\mathcal{A}Q(x) = -xf(x,t), \quad f(x,0) = Q(x).$$

Por lo tanto la solución a la ecuación diferencial previa está dada por

$$f(x,t) = e^{-xt}Q(x). \tag{1.23}$$

Igualando (1.22) y (1.23), obtenemos

$$e^{-xt}Q_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)Q_j(x).$$

El Teorema de Favard (Teorema 1.3) aplicado al operador $\mathcal{A}$ garantiza que existe al menos una medida de probabilidad ψ con soporte en el intervalo $[0, \infty)$ tal que los polinomios definidos en (1.21) son ortogonales con respecto a ψ.

Multiplicando $Q(x)^t$ al lado derecho de $e^{-xt}Q(x) = P(t)Q(x)$ y luego, integrando entrada a entrada con respecto a la medida ψ, podemos observar que la ortogonalidad de estos polinomios hará que sean cero fuera de la diagonal principal, y en la diagonal principal obtendremos la siguiente representación:

$$P_{ij}(t)\int_0^\infty Q_j^2(x)d\psi(x) = \int_0^\infty e^{-xt}Q_i(x)Q_j(x)d\psi(x).$$

Por lo tanto, al despejar

$$P_{ij}(t) = \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}Q_i(x)Q_j(x)d\psi(x)}{\displaystyle\int_0^\infty Q_j^2(x)d\psi(x)}.$$

De (1.21) se tiene que

$$\int_0^\infty Q_j^2(x)d\psi(x) = \frac{\mu_1\mu_2\ldots\mu_j}{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}}.$$

Esto es debido a que si $n = j$, multiplicamos a (1.21) por $Q_{j+1}(x)$, usamos la ortogonalidad e integrando con respecto a ψ obtenemos

$$\int_0^\infty xQ_j(x)Q_{j+1}(x)d\psi(x) = \lambda_j\int_0^\infty Q_{j+1}^2(x)d\psi(x).$$

Si $n = j+1$, hacemos el mismo proceso ahora multiplicando $Q_j(x)$, lo que resulta es

$$\int_0^\infty xQ_{j+1}(x)Q_j(x)d\psi(x) = \mu_{j+1}\int_0^\infty Q_j^2(x)d\psi(x).$$

Igualando, obtenemos

$$\lambda_j\int_0^\infty Q_{j+1}^2(x)d\psi(x) = \mu_{j+1}\int_0^\infty Q_j^2(x)d\psi(x).$$

De (1.19) y (1.20) se sigue lo pedido.

Por lo tanto obtenemos que los coeficientes potenciales se pueden escribir en términos de las normas de los polinomios ortogonales como

$$\pi_j = \left(\int_0^\infty Q_j^2(x) d\psi(x) \right)^{-1}, \tag{1.24}$$

y obtenemos la fórmula de representación integral de Karlin-McGregor

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = \pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x).$$

Esta es una manera informal de llegar a dicha fórmula, ahora se prueba de manera más rigurosa.

Teorema 1.4. *(Teorema de representación de Kendall). Sea $f_{ij}(t)$ la mínima $\mathcal{A}$-función. Entonces, para cada $i, j \in \mathbb{N}_0$ existe una medida signada y finita γ_{ij} (la cual es medida de probabilidad si $i = j$) con soporte en $[0, \infty)$ tal que*

$$f_{ij}(t) = \sqrt{\frac{\pi_j}{\pi_i}} \int_0^\infty e^{-tx} d\gamma_{ij}(x).$$

Demostración. La prueba está basada en análisis espectral y la descomposición espectral truncada de la matriz $\mathcal{A}$ [1]. □

Como consecuencia obtenemos

Teorema 1.5. *Sea $\mathcal{A}$ la matriz del operador infinitesimal de un proceso de nacimiento y muerte y $P_{ij}(t)$ una $\mathcal{A}$-función débilmente simétrica (por ejemplo la mínima) que es solución a ambas ecuaciones de Kolmogorov. Entonces existe una medida de probabilidad ψ con soporte en el intervalo $[0, \infty)$ tal que se tiene la siguiente representación integral*

$$P_{ij}(t) = \pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x), \tag{1.25}$$

donde π_j son los coeficientes potenciales (1.19).

Demostración. Del Teorema 1.3 tenemos la representación

$$P_{00}(t) = \int_0^\infty e^{-xt} d\psi(x), \quad t \geq 0, \tag{1.26}$$

donde ψ es una medida de probabilidad con soporte en $[0, \infty)$. Para probar (1.25) usaremos inducción dos veces. La primera sobre i (cuando $j = 0$) y la segunda en general. Para $i = j = 0$ tenemos el resultado de (1.26). Asumimos cierto para $k \leq i$ con i fijo. Entonces

$$P'_{i,0}(t) = -\int_0^\infty x e^{-tx} Q_i(x) Q_0(x) d\psi(x).$$

Usando la ecuación de retroceso de Kolmogorov para $j = 0$ y la relación de recurrencia (1.21), tenemos que

$$\lambda_i P_{i+1,0}(t) = P'_{i,0}(t) - \mu_i P_{i-1,0}(t) + (\lambda_i + \mu_i) P_{i,0}(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-tx} \left[-x Q_i(x) - \mu_i Q_{i-1}(x) + (\lambda_i + \mu_i) Q_i(x)\right] Q_0(x) d\psi(x)$$

$$= \int_0^\infty e^{-tx} \lambda_i Q_{i+1}(x) Q_0(x) d\psi(x).$$

Por lo tanto, cancelando λ_i de ambos lados, tenemos que

$$P_{i+1,0}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} Q_{i+1}(x) Q_0(x) d\psi(x).$$

Para el caso general, haremos inducción sobre j. Para $j = 0$ es cierto por lo anterior visto. Asumamos (1.25) cierta para toda $k \leq j$ con j fija. Entonces

$$P'_{ij}(t) = -\pi_j \int_0^\infty x e^{-tx} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x).$$

Usando la ecuación de evolución de Kolmogorov, la simetría de la ecuación $\pi_n \lambda_n = \pi_{n+1} \mu_{n+1}$ y la recurrencia de (1.21), tenemos que

$$\mu_{j+1} P_{i,j+1}(t) = P'_{ij}(t) - \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) + (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-tx} Q_i(x)[-xQ_j(x)\pi_j - \lambda_{j-1}\pi_{j-1}Q_{j-1}(x) + (\lambda_j + \mu_j)\pi_j Q_j(x)]d\psi(x)$$

$$= \int_0^\infty e^{-tx} Q_i(x)[-xQ_j(x)\pi_j - \mu_j\pi_j Q_{j-1}(x) + (\lambda_j + \mu_j)\pi_j Q_j(x)]d\psi(x)$$

$$= \int_0^\infty e^{-tx} Q_i(x)\lambda_j\pi_j Q_{j+1}(x)d\psi(x) = \int_0^\infty e^{-tx} Q_i(x)\pi_{j+1}\mu_{j+1}Q_{j+1}(x)d\psi(x).$$

Cancelando μ_{j+1}, obtenemos

$$P_{i,j+1}(t) = \pi_{j+1}\int_0^\infty e^{-tx} Q_i(x)Q_{j+1}(x)d\psi(x),$$

como se requería. □

La representación espectral (1.25) separa claramente las variables i, j y t. También, cuando $t \to \infty$, la integral tiende a 0, excepto posiblemente en el punto $x = 0$, donde puede haber un salto. La existencia de este salto está condicionado a que el proceso sea positivo recurrente y el tamaño del salto está dado como en [9], por

$$\psi(\{0\}) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i Q_i^2(0)\right)^{-1}.$$

1.6. Sistema $M/M/1$

Consideremos el proceso de nacimiento y muerte $\{X_t, t \geq 0\}$ con tasas constantes $\lambda, \mu > 0$ y operador infinitesimal dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda-\mu & \lambda & & & \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & & \\ & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Este proceso de nacimiento y muerte tiene solo un servidor. La gente va llegando a la cola con una distribución Poisson de parámetro λ y el único servidor despacha a la gente con una distribución Poisson de parámetro μ.

Para calcular la transformada de Stieltjes usaremos (1.10), en donde debemos notar que $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(0)}$, entonces $\psi = \psi^{(0)}$, y así

$$B(z;\psi) = \frac{1}{\lambda + \mu - z - \lambda\mu B(z;\psi)}.$$

Por lo tanto

$$\lambda\mu B(z;\psi)^2 - (\lambda + \mu - z)B(z;\psi) + 1 = 0.$$

Resolviendo $B(z;\psi)$, queda de la siguiente manera:

$$B(z;\psi) = \frac{\lambda + \mu - z - \sqrt{(\lambda + \mu - z)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda\mu}. \tag{1.27}$$

La medida espectral solo tiene parte absolutamente continua, y está dada por

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{4\lambda\mu - (\lambda + \mu - x)^2}}{\pi 2\mu\lambda}, \quad |\lambda + \mu - x| \leq 2\sqrt{\lambda\mu}.$$

Si definimos $\sigma_{\pm} = (\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\mu})^2$, el soporte de ortogonalidad de ψ es el intervalo $[\sigma_-, \sigma_+]$, el cual está acotado y contenido en el intervalo $[0, \infty)$. La medida espectral puede ser escrita como

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{(x - \sigma_-)(\sigma_+ - x)}}{2\pi\lambda\mu}, \quad x \in [\sigma_-, \sigma_+].$$

Ahora, usando la recurrencia (1.21) podemos observar que:

$$Q_n(x) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n/2} U_n\left(\frac{\lambda + \mu - x}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right), \quad n \geq 0,$$

donde $(U_n)_n$ son los polinomios de Chebyshev de segunda especie dados en la Definición 1.4. La fórmula de Karlin-McGregor puede ser escrita como

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(t) &= \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right)^{j-i} \int_{(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2}^{(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu})^2} e^{-xt} U_i\left(\frac{\lambda+\mu-x}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) U_j\left(\frac{\lambda+\mu-x}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) \frac{\sqrt{4\lambda\mu-(\lambda+\mu-x)^2}}{2\pi\mu\lambda} dx \\
&= \frac{2\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right)^{j-i}}{\pi} \int_0^\pi e^{-(\lambda+\mu-2\sqrt{\lambda\mu}\cos\theta)t} U_i(\cos\theta) U_j(\cos\theta) \sqrt{1-\cos^2\theta}\sin\theta d\theta \\
&= \frac{2e^{-(\lambda+\mu)t}}{\pi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right)^{i-j}} \int_0^\pi e^{2t\sqrt{\lambda\mu}\cos\theta} \sin((i+1)\theta)\sin((j+1)\theta) d\theta.
\end{aligned}
$$

Hicimos el cambio de variable $x = \lambda + \mu - 2\sqrt{\lambda\mu}\cos\theta$ y usamos la relación de los polinomios de Chebyshev de segunda especie con la función coseno dado en (1.7).

Si estudiamos el caso conservativo, es decir, en la entrada $(0,0)$ de $\mathcal{A}$ solo aparece $-\lambda$ en lugar de $-\lambda-\mu$, entonces, usando (1.10) y la transformada de Stieltjes que obtuvimos previamente tenemos que

$$B(z;\psi) = \frac{-\lambda+\mu+z+\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\lambda\mu}}{2\mu z}.$$

La parte absolutamente continua viene dada por

$$\frac{\sqrt{4\lambda\mu-(\lambda+\mu-x)^2}}{2\mu\pi x}, \quad |\lambda+\mu-x| \leq 2\sqrt{\lambda\mu}.$$

Además, tiene un salto en $x=0$ de tamaño

$$\psi(\{0\}) = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \mathrm{Im} B(0+i\epsilon;\psi) = \frac{1}{2\mu}[(\mu-\lambda)+|\mu-\lambda|] = \begin{cases} 0 & si \quad \mu \leq \lambda, \\ \dfrac{\mu-\lambda}{\mu} & si \quad \mu > \lambda. \end{cases}$$

Por lo tanto, la medida espectral está dada por

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{4\lambda\mu-(\lambda+\mu-x)^2}}{2\mu\pi x} \mathbf{1}_{\{|\lambda+\mu-x|\leq 2\sqrt{\lambda\mu}\}} + \frac{\mu-\lambda}{\mu}\delta_0(x)\mathbf{1}_{\{\mu>\lambda\}}.$$

Es posible ver que los polinomios están dados por

$$Q_n(x) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n/2} \left[U_n \left(\frac{\lambda + \mu - x}{2\sqrt{\lambda\mu}} \right) - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} U_{n-1} \left(\frac{\lambda + \mu - x}{2\sqrt{\lambda\mu}} \right) \right], \quad n \geq 0.$$

Capítulo 2

Procesos de nacimiento y muerte bilaterales

En este capítulo se expondrán los procesos de nacimiento y muerte bilaterales con un enfoque a los polinomios ortogonales que generan, esto es, se enuncian propiedades de estos mismos y se presentan otra clase de polinomios llamados polinomios duales, en donde también se estudian algunas propiedades y sus funciones límite. Con estas herramientas podremos dar paso a la transformada de Laplace de la matriz de transición de estos procesos, donde también se estudiarán propiedades de la misma; en [15] se dan a grandes rasgos las propiedades a considerar para este desarrollo, y en [16] se desarrollan completamente estas propiedades.

Sea $\{X_t, t \geq 0\}$ un proceso de nacimiento y muerte bilateral, es decir con espacio de estados sobre los enteros $\mathbb{Z}$. Denotemos por $\mathcal{A}$ al operador infinitesimal asociado al proceso $\{X_t, t \geq 0\}$ que en este caso viene dado por una matriz tridiagonal y doblemente infinita:

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & \mu_{-1} & -\mu_{-1}-\lambda_{-1} & \lambda_{-1} & & & \\ \hline & & \mu_0 & -\mu_0-\lambda_0 & \lambda_0 & & \\ & & & \mu_1 & -\mu_1-\lambda_1 & \lambda_1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right), \tag{2.1}$$

donde $\lambda_i, \mu_i > 0$. Sea $P(t) = (P_{ij}(t))$ con $P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j|X_0 = i)$. Se asume que estos procesos cumplen las siguientes propiedades:

1. Ecuación de retroceso de Kolmogorov: $P'(t) = \mathcal{A}P(t)$.
2. Ecuación de evolución de Kolmogorov: $P'(t) = P(t)\mathcal{A}$.
3. $P(0) = I$ donde I es la matriz identidad.
4. $P(t) \geq 0$ y $P(t)\hat{1} \leq \hat{1}$ (entrada a entrada) donde $\hat{1}$ es el vector con todas sus componentes 1.
5. Ecuación de Chapman-Kolmogorov: $P(t+s) = P(t)P(s)$.

De igual manera que para procesos de nacimiento y muerte en $\mathbb{N}_0$ definimos los coeficientes potenciales como:

$$\begin{cases} \pi_0 = 1, \\ \pi_n = \dfrac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \dots \mu_n}, \quad n \geq 1, \\ \pi_{-n} = \dfrac{\mu_0\mu_{-1} \dots \mu_{-n+1}}{\lambda_{-1}\lambda_{-2} \dots \lambda_{-n}}, \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Se tiene de nuevo la relación de simetría $\lambda_n\pi_n = \mu_{n+1}\pi_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\mathcal{A}$, como operador en el espacio de Hilbert $\ell^2_\pi(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi_n|a_n|^2 < \infty\}$, va a ser cerrada, esto es $(\forall\{x_n\} \in \ell^2_\pi(\mathbb{Z}), x_n \to x, \mathcal{A}x_n \to y) \Rightarrow (x \in \ell^2_\pi(\mathbb{Z}), y = \mathcal{A}x)$; y negativa, esto es, que sus valores propios (autovalores) son negativos. Cabe mencionar que no es simétrica, pero es posible simetrizarla usando los coeficientes potenciales. Para probar que $\mathcal{A}$ es un operador autoadjunto en $\ell^2_\pi(\mathbb{Z})$ debemos definir el vector $e^{(i)} = \frac{\delta_{ij}}{\pi_j}$ y probar que $(\mathcal{A}e^{(n)}, e^{(m)})_\pi = (e^{(n)}, \mathcal{A}e^{(m)})_\pi, \quad \forall n, m$, donde el producto interior está definido como

$$((a_n)_n, (b_n)_n)_\pi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n \pi_n.$$

Primero notemos que en $\mathcal{A}e^{(n)}$ solo sobreviven los términos ubicados en los renglones $n-1, n, n+1$, y esto quedaría de la siguiente manera

$$\mathcal{A}e^{(n)} = \left(\ldots, 0, \frac{\lambda_{n-1}}{\pi_n}, \frac{-(\lambda_n + \mu_n)}{\pi_n}, \frac{\mu_{n+1}}{\pi_n}, 0, \ldots\right)^t.$$

Lo mismo para $\mathcal{A}e^{(m)}$. Ahora, el producto interior de estos dos vectores resultará cero en todas las entradas que no sean iguales, esto por como están definidos les vectores $e^{(i)}$, por lo tanto, consideremos solo tres casos $m = n-1$, $m = n$ y $m = n+1$ (pues son los únicos valores que sobreviven a la multiplicación $\mathcal{A}e^{(n)}$). Se hará el caso $n = m$, los otros casos resultan análogos,

$$(\mathcal{A}e^{(n)}, e^{(m)})_\pi = \frac{-(\lambda_n + \mu_n)}{\pi_n}\frac{1}{\pi_n}\pi_n = \frac{-(\lambda_n + \mu_n)}{\pi_n} = (e^{(n)}, \mathcal{A}e^{(m)})_\pi.$$

Otra forma de comprobar que $\mathcal{A}$ es negativa, es calcular los determinantes principales de esta matriz, y ver la alternancia de signos de estos determinantes.

2.1. Fórmula de Karlin-McGregor

Como vimos en el Capítulo 1, vamos a construir un sistema de polinomios ortogonales, la diferencia es que ahora estará construida sobre los enteros $\mathbb{Z}$. Esto quedará de manera matricial de la siguiente manera:

$$-xQ^\alpha(x) = \mathcal{A}Q^\alpha(x), \quad Q^\alpha = (\ldots, Q^\alpha_{-1}, Q^\alpha_0, Q^\alpha_1, \ldots)^t, \tag{2.3}$$

con $\alpha = 1, 2$. Dependiendo de los valores iniciales de $Q^\alpha_{-1}(x)$, $Q^\alpha_0(x)$ se pueden generar dos familias de polinomios linealmente independientes. Estas condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} Q^1_0(x) &= 1, \quad Q^1_{-1}(x) = 0. \\ Q^2_0(x) &= 0, \quad Q^2_{-1}(x) = 1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Desarrollando (2.3) obtenemos el sistema fundamental de polinomios de la siguiente manera

$$-xQ_n^\alpha(x) = \mu_n Q_{n-1}^\alpha(x) - (\lambda_n + \mu_n) Q_n^\alpha(x) + \lambda_n Q_{n+1}^\alpha(x), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.5}$$

Si $R(x)$ y $S(x)$ están dados, esto determina una solución general de (2.3), que denotaremos por $Q_n(x)$

$$Q_n(x) = R(x) Q_n^1(x) + S(x) Q_n^2(x). \tag{2.6}$$

Despejando (2.5) podemos obtener de manera recurrente los polinomios $(Q_n^\alpha)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} Q_{n+1}^\alpha(x) &= \tfrac{1}{\lambda_n}((-x + \lambda_n + \mu_n) Q_n^\alpha(x) - \mu_n Q_{n-1}^\alpha(x)), \quad \text{si } n \geq 0, \\ Q_{-n-1}^\alpha(x) &= \tfrac{1}{\mu_{-n}}((-x + \lambda_{-n} + \mu_{-n}) Q_{-n}^\alpha(x) - \lambda_{-n} Q_{-n+1}^\alpha(x)), \quad \text{si } n \geq 1. \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned} \deg(Q_n^1) = n,\ n \geq 0; &\quad \deg(Q_n^2) = n-1,\ n \geq 1; \\ \deg(Q_{-n-1}^1) = n-1,\ n \geq 1; &\quad \deg(Q_{-n-1}^2) = n,\ n \geq 0. \end{aligned}$$

Usando la recurrencia de los polinomios y el vector $e^{(i)} = \frac{\delta_{ij}}{\pi_j}$, con π_j los coeficientes potenciales definidos en (2.2), se puede ver la siguiente proposición:

Proposición 2.1. $Q_n^1(-\mathcal{A})e^{(0)} + Q_n^2(-\mathcal{A})e^{(-1)} = e^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Se hará por inducción (se probará para $n \geq 0$, para $n < 0$ es análogo). Para $n = 0$ esto es trivial por (2.4). Asumimos cierta la afirmación para $k \leq n$.

Veamos que pasa con $n+1$:

$$Q_{n+1}^1(-\mathcal{A})e^{(0)} + Q_{n+1}^2(-\mathcal{A})e^{(-1)} = \frac{1}{\lambda_n}((\mathcal{A} + \lambda_n + \mu_n) Q_n^1(-\mathcal{A}) - \mu_n Q_{n-1}^1(-\mathcal{A}))e^{(0)}$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}((\mathcal{A} + \lambda_n + \mu_n) Q_n^2(-\mathcal{A}) - \mu_n Q_{n-1}^2(-\mathcal{A}))e^{(-1)}.$$

Asociando y aplicando hipótesis de inducción,

$$Q_{n+1}^1(-\mathcal{A})e^{(0)} + Q_{n+1}^2(-\mathcal{A})e^{(-1)} = \frac{1}{\lambda_n}((\mathcal{A} + \lambda_n + \mu_n)e^{(n)} - \mu_n e^{(n-1)}).$$

Notemos que en $\mathcal{A}e^{(n)}$ solo sobreviven los términos ubicados en los renglones $n-1, n, n+1$, y esto quedaría de la siguiente manera

$$\mathcal{A}e^{(n)} = \left(\ldots, 0, \frac{\lambda_{n-1}}{\pi_n}, \frac{-(\lambda_n+\mu_n)}{\pi_n}, \frac{\mu_{n+1}}{\pi_n}, 0, \ldots\right)^t.$$

Por lo tanto, distribuyendo el primer término y reduciéndolo a su mínima expresión resulta

$$(\mathcal{A}+\lambda_n+\mu_n)e^{(n)} = \left(\ldots, 0, \frac{\lambda_{n-1}}{\pi_n}, 0, \frac{\mu_{n+1}}{\pi_n}, 0, \ldots\right)^t.$$

Además de esto, observemos que en el renglón $n-1$ ocurre que

$$\mu_n e^{(n-1)} = \left(\ldots, 0, \frac{\mu_n}{\pi_{n-1}}, 0, \ldots\right)^t \quad \& \quad \frac{\mu_n}{\pi_{n-1}} = \frac{\lambda_{n-1}}{\pi_n}.$$

Así, solo sobrevive lo que ocupa el renglón $n+1$ y esto es

$$(\mathcal{A}+\lambda_n+\mu_n)e^{(n)} - \mu_n e^{(n-1)} = \left(\ldots, 0, \frac{\mu_{n+1}}{\pi_n}, 0, \ldots\right)^t.$$

Por último, vemos que la expresión faltante es

$$\frac{1}{\lambda_n}\frac{\mu_{n+1}}{\pi_n} = \frac{1}{\pi_{n+1}},$$

pues $\pi_n\lambda_n = \pi_{n+1}\mu_{n+1}$ y esto corresponde a la entrada $n+1$ del vector $e^{(n+1)}$, lo que culmina la prueba. □

Otro resultado relevante es el siguiente:

Proposición 2.2. *$Q_n^1(0) + Q_n^2(0) = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. El resultado se demuestra por inducción matemática (se hará la prueba para $n \geq 0$, para $n < 0$ es análogo). Para $n = 0$ es trivial por (2.4). Supongamos cierta la afirmación para n.

Veamos que pasa con $n+1$. Como

$$Q_{n+1}^\alpha(0) = \frac{1}{\lambda_n}((\lambda_n+\mu_n)Q_n^\alpha(0) - \mu_n Q_{n-1}^\alpha(0)), \quad \alpha = 1, 2,$$

se tiene que

$$Q^1_{n+1}(0) + Q^2_{n+1}(0) = \frac{1}{\lambda_n}((\lambda_n + \mu_n)(Q^1_n(0) + Q^2_n(0)) - \mu_n(Q^1_{n-1}(0) + Q^2_{n-1}(0))).$$

Aplicando hipotesis de inducción

$$Q^1_{n+1}(0) + Q^2_{n+1}(0) = \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_n + \mu_n - \mu_n) = 1.$$

□

Asumamos por un momento que, usando la ecuación de retroceso de Kolmogorov $P'(t) = \mathcal{A}P(t)$, la solución viene dada formalmente por $P(t) = e^{\mathcal{A}t}$. Entonces

$$(e^{t\mathcal{A}}e^{(j)}, e^{(i)})_\pi = \frac{1}{\pi_j}([\dots, (e^{t\mathcal{A}})_{-1,j}, (e^{t\mathcal{A}})_{0,j}, \dots], e^{(i)})_\pi = \frac{1}{\pi_j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(e^{t\mathcal{A}})_{k,j}\frac{\delta_{ik}}{\pi_i}\pi_k$$

$$= \frac{1}{\pi_j}(e^{t\mathcal{A}})_{i,j} = \frac{P_{ij}(t)}{\pi_j}.$$

Usando esto y la Proposición 2.1, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
P_{ij}(t) &= \pi_j(e^{t\mathcal{A}}e^{(j)}, e^{(i)})_\pi \\
&= \pi_j(e^{t\mathcal{A}}[Q^1_j(-\mathcal{A})e^{(0)} + Q^2_j(-\mathcal{A})e^{(-1)}], Q^1_i(-\mathcal{A})e^{(0)} + Q^2_i(-\mathcal{A})e^{(-1)})_\pi \\
&= \pi_j\left[(e^{t\mathcal{A}}Q^1_j(-\mathcal{A})e^{(0)}, Q^1_i(-\mathcal{A})e^{(0)})_\pi + (e^{t\mathcal{A}}Q^1_j(-\mathcal{A})e^{(0)}, Q^2_i(-\mathcal{A})e^{(-1)})_\pi\right] \\
&+ \pi_j[(e^{t\mathcal{A}}Q^2_j(-\mathcal{A})e^{(-1)}, Q^1_i(-\mathcal{A})e^{(0)})_\pi + (e^{t\mathcal{A}}Q^2_j(-\mathcal{A})e^{(-1)}, Q^1_i(-\mathcal{A})e^{(-1)})_\pi].
\end{aligned}$$

Recordemos que la matriz $\mathcal{A}$ es débilmente simétrica (que se puede hacer auto-adjunta), así por el Teorema Espectral, existen tres medidas $\psi_{11}(x)$, $\psi_{22}(x)$ y $\psi_{12}(x)$, que tienen soporte en $[0,\infty)$ (la razón por la cual son tres, es por las posibles combinaciones de la fórmula previa, además de que $\psi_{12}(x) = \psi_{21}(x)$) que cumplen

$$\int_0^\infty f(x)d\psi_{11}(x) = (f(-\mathcal{A})e^{(0)}, e^{(0)})_\pi,$$
$$\int_0^\infty f(x)d\psi_{12}(x) = (f(-\mathcal{A})e^{(0)}, e^{(-1)})_\pi,$$

$$\int_0^\infty f(x)d\psi_{22}(x) = (f(-\mathcal{A})e^{(-1)}, e^{(-1)})_\pi,$$

donde f es cualquier función real acotada definida sobre $[0,\infty)$. Así la fórmula de Karlin-McGregor queda

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = \pi_j \int_0^\infty e^{-xt} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} Q_i^\alpha(x) Q_j^\beta(x) d\psi_{\alpha\beta}(x).$$

Es posible acomodar estas medidas en una matriz 2×2

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(x) & \psi_{12}(x) \\ \psi_{12}(x) & \psi_{22}(x) \end{pmatrix},$$

la cual es llamada matriz espectral.

Proposición 2.3. *Si $x_2 > x_1$, entonces $\Psi(x_2) > \Psi(x_1)$(entrada a entrada).*

Demostración. Tenemos que

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} c_\alpha(\psi_{\alpha\beta}(x_2) - \psi_{\alpha\beta}(x_1))\bar{c_\beta} = ((E(x_2) - E(x_1))f, f) \geq 0,$$

donde E es la resolución de la identidad, $f = c_1 e^{(0)} + c_2 e^{(-1)}$ y c_1, c_2 son números complejos arbitrarios. □

Esto tiene como consecuencia directa que la función $\psi_{11}(x) + \psi_{22}(x) + 2\psi_{12}(x)$ es creciente.

Los polinomios Q_n^α también los podemos agrupar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{Q}_n(x) = \begin{pmatrix} Q_n^1(x) & Q_n^2(x) \\ Q_{-n-1}^1(x) & Q_{-n-1}^2(x) \end{pmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Haciendo una reasignación de estados de la siguiente forma

$$\{0, 1, 2, \dots\} \to \{0, 2, 4, \dots\}, \quad \{-1, -2, -3, \dots\} \to \{1, 3, 5, \dots\},$$

se tiene que la matriz $\mathcal{A}$ de (2.1) es equivalente a una matriz semi-infinita $\hat{\mathcal{A}}$ por bloques de 2×2 dada por

$$\hat{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & C_2 & B_2 & A_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

donde

$$B_0 = \begin{pmatrix} -\lambda_0 - \mu_0 & \mu_0 \\ \lambda_{-1} & -\lambda_{-1} - \mu_{-1} \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} -\lambda_n - \mu_n & 0 \\ 0 & -\lambda_{-n-1} - \mu_{-n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \mu_{-n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 0, \quad C_n = \begin{pmatrix} \mu_n & 0 \\ 0 & \lambda_{-n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

La matriz $\hat{\mathcal{A}}$ puede ser interpretada como un proceso que toma valores en el espacio de dos dimensiones $\mathbb{N}_0 \times \{1, 2\}$. Este tipo de procesos son llamados *quasi-birth-and-death processes* (procesos cuasi de nacimiento y muerte). La primera componente es usualmente llamada nivel, y la segunda componente (que en general puede ser cualquier conjunto de la forma $\{1, 2, \ldots, N\}$) es llamada fase. Para más información véase [13].

Usando $\mathbf{Q}_n(x)$ y $\hat{\mathcal{A}}$, podemos escribir las relaciones de recurrencia en forma matricial, esto es

$$-x\mathbf{Q}_0(x) = A_0\mathbf{Q}_1(x) + B_0\mathbf{Q}_0(x), \quad \mathbf{Q}_0(x) = I_{2\times 2},$$

$$-x\mathbf{Q}_n(x) = A_n\mathbf{Q}_{n+1}(x) + B_n\mathbf{Q}_n(x) + C_n\mathbf{Q}_{n-1}(x).$$

Usando (1.24) podemos ver que:

$$\int_0^\infty \mathbf{Q}_n(x) d\Psi(x) \mathbf{Q}_m^t(x) = \begin{pmatrix} 1/\pi_n & 0 \\ 0 & 1/\pi_{-n-1} \end{pmatrix} \delta_{nm},$$

donde $(\pi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ son los coeficientes potenciales. La fórmula de Karlin-McGregor aplicada a la matriz $\hat{\mathcal{A}}$ está dada por

$$\mathbf{P}_{ij}(t) = \left(\int_0^\infty \mathbf{Q}_i(x)d\Psi(x)\mathbf{Q}_j^t(x)\right)\begin{pmatrix}\pi_j & 0\\ 0 & \pi_{-j-1}\end{pmatrix}, \quad i,j\in\mathbb{N}_0.$$

La relación de $\mathbf{P}_{ij}(t)$ con las probabilidades de transición $P_{ij}(t)$ está dada por

$$\mathbf{P}_{ij}(t) = \begin{pmatrix}P_{ij}(t) & P_{i,-j-1}(t)\\ P_{-i-1,j}(t) & P_{-i-1,-j-1}(t)\end{pmatrix}, \quad i,j\in\mathbb{N}_0.$$

2.2. Polinomios duales

Definamos ahora una nueva sucesión de polinomios, llamados polinomios duales, que juegan un papel importante en resultados posteriores. Estos polinomios están dados por:

$$H_{n+1}^\alpha(x) = \lambda_n\pi_n[Q_{n+1}^\alpha(x) - Q_n^\alpha(x)], \quad \alpha = 1,2, \quad n\in\mathbb{Z}, \tag{2.7}$$

donde

$$H_0^\alpha(x) = \lambda_{-1}\pi_{-1}[Q_0^\alpha(x) - Q_{-1}^\alpha(x)], \quad H_0^1(x) = \mu_0, \quad H_0^2(x) = -\mu_0.$$

Usando la relación de recurrencia (2.5) podemos obtener

$$-xQ_n^\alpha(x)\pi_n = H_{n+1}^\alpha(x) - H_n^\alpha(x). \tag{2.8}$$

En consecuencia

$$-x\sum_{k=m}^n Q_k^\alpha(x)\pi_k = H_{n+1}^\alpha(x) - H_m^\alpha(x). \tag{2.9}$$

En particular se obtiene

$$-x\sum_{k=0}^n Q_k^1(x)\pi_k = \lambda_n\pi_n(Q_{n+1}^1(x) - Q_n^1(x)) - \mu_0.$$

Además de esto, podemos obtener la siguiente relación

$$-xH_{n+1}^{\alpha}(x) = \mu_{n+1}H_{n+2}^{\alpha}(x) - (\mu_{n+1} + \lambda_n)H_{n+1}^{\alpha}(x) + \lambda_n H_n^{\alpha}(x), \quad \alpha = 1, 2,$$

lo cual surge de multiplicar a (2.7) por $-x$, esto queda de la siguiente manera

$$-xH_{n+1}^{\alpha}(x) = \lambda_n \pi_n [(-x)Q_{n+1}^{\alpha}(x) - (-x)Q_n^{\alpha}(x)]$$

$$= \lambda_n \pi_n (-x)Q_{n+1}^{\alpha}(x) - \lambda_n \pi_n (-x)Q_n^{\alpha}(x).$$

Sustituyendo (2.8) en nuestra ecuación, da como resultado

$$= \lambda_n \pi_n (-x)Q_{n+1}^{\alpha}(x) - \lambda_n [H_{n+1}^{\alpha}(x) - H_n^{\alpha}(x)].$$

La parte de la izquierda corresponde, usando las ecuaciones de simetría y (2.8), a

$$\lambda_n \pi_n (-x)Q_{n+1}^{\alpha}(x) = \mu_{n+1}\pi_{n+1}(-x)Q_{n+1}^{\alpha}(x) = \mu_{n+1}[H_{n+2}^{\alpha}(x) - H_{n+1}^{\alpha}(x)].$$

Con lo cual, culmina la identidad.

La matriz de Jacobi de estos polinomios es la siguiente

$$\hat{\mathcal{J}} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & \mu_0 & -\mu_0 - \lambda_{-1} & \lambda_{-1} & & & \\ \hline & & \mu_1 & -\mu_1 - \lambda_0 & \lambda_0 & & \\ & & & \mu_2 & -\mu_2 - \lambda_1 & \lambda_1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right).$$

Obsérvese que $\hat{\mathcal{J}}$ es el operador infinitesimal de un proceso de nacimiento y muerte bilateral, cuyos eigenvectores vienen dados por los polinomios duales H_n^{α}.

Por inducción vemos que, para $x < 0$

$$1 = Q_0^1(x) < Q_1^1(x) < \cdots < Q_n^1(x) < \cdots \tag{2.10}$$

y además

$$Q_n^1(0) = \begin{cases} 1 + \mu_0 \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} & si \quad n \geq 0, \\ \\ -\mu_0 \displaystyle\sum_{k=n}^{-2} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} & si \quad n \leq -1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Similarmente, para $x < 0$

$$0 = Q_{-1}^1(x) > Q_{-2}^1(x) > \cdots > Q_{-n}^1(x) > \cdots \tag{2.12}$$

Así mismo

$$Q_n^2(0) = \begin{cases} -\mu_0 \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} & si \quad n \geq 0, \\ \\ 1 + \mu_0 \displaystyle\sum_{k=n}^{-2} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} & si \quad n \leq -1. \end{cases} \tag{2.13}$$

Por (2.10) y (2.12) podemos ver que $Q_n^1(x)$, $x < 0$ es una sucesión creciente. En consecuencia $H_n^1(x) > 0$ para todo n y $x < 0$. De la misma forma se puede obtener que el otro sistema $Q_n^2(x)$, $x < 0$, es una sucesión decreciente y $H_n^2(x) < 0$, así que $-H_n^2(x)$ es una sucesión decreciente. Observemos que la naturaleza monótona de las sucesiones $(Q_n^\alpha)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $(H_n^\alpha)_{n\in\mathbb{Z}}$ las hará convergentes o tender a infinito. Por considerar la sucesión como polinomios, es posible aplicar el siguiente resultado de Stieltjes para obtener un criterio para cuando la convergencia tiene lugar (véanse más detalles en [9]).

Proposición 2.4. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Cuando $n \to \infty$, $Q_n^\alpha(s)$ converge para cada complejo s, uniformemente en cada círculo $|s| \leq R$.*

2. *$Q_n^\alpha(s)$ está acotado cuando $n \to \infty$ para al menos un $s < 0$.*

3. *La serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} \sum_{i=0}^{n} \pi_i \tag{2.14}$$

es convergente.

Para $(H_n^\alpha(s))$ cuando $n \longrightarrow \infty$ la serie (2.14) debe ser reemplazada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i \pi_i}. \tag{2.15}$$

De nueva cuenta, cuando hacemos tender a $n \to -\infty$ en el sistema $(Q_n^\alpha(s))$ cambia para el criterio de convergencia a

$$\sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} \sum_{i=n+1}^{-2} \pi_i. \tag{2.16}$$

Y para $(H_n^\alpha(s))$ cuando $n \to -\infty$, la serie es

$$\sum_{n=-\infty}^{-2} \pi_n \sum_{i=n}^{-2} \frac{1}{\lambda_i \pi_i}. \tag{2.17}$$

Cuando los límites de las funciones existan se denotarán por $Q_\infty^\alpha(s)$, $H_\infty^\alpha(s)$, $Q_{-\infty}^\alpha(s)$ y $H_{-\infty}^\alpha(s)$. Debido a que $Q_\infty^1 \to \infty$ cuando esta no converge, la expresión $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{Q_n^1}$ podrá ser escrita como $\dfrac{1}{Q_\infty^\alpha}$ con la interpretación de ser cero cuando esta serie diverja. Análogamente se aplica esta pequeña nota a los otros sistemas cuando $n \to -\infty$.

Con el fin de ser capaz de describir fácilmente las varias posibilidades que se plantean con respecto a los puntos ∞ y $-\infty$ se tomará la siguiente terminología (perteneciente a Feller [4]); el límite en el infinito se llamará:

1. Regular si (2.14) y (2.15) convergen.

2. de Salida si (2.14) converge y (2.15) diverge.

3. de Entrada si (2.14) diverge y (2.15) converge.

4. Natural si (2.14) y (2.15) divergen.

Las correspondientes definiciones aplican también al punto frontera $-\infty$ con (2.14), (2.15) reemplazados por (2.16), (2.17) respectivamente.

Si Q_n está definida como (2.6) y usando (2.9) obtenemos

$$-x\sum_{k=m}^{n} Q_k(x)\pi_k = H_{n+1}(x) - H_m(x), \tag{2.18}$$

donde $H_n(x) = RH_n^1(x) + SH_n^2(x)$. Más aún se puede ver que

$$(y-x)\sum_{k=m}^{n} Q_k^\alpha(x)Q_k^\beta(y) = H_{n+1}^\beta(y)Q_n^\alpha(x) - H_{n+1}^\alpha(x)Q_n^\beta(y) - H_m^\beta(y)Q_{m-1}^\alpha(x) + H_m^\alpha(x)Q_{m-1}^\beta(y), \tag{2.19}$$

para $\alpha,\beta = 1,2$. Por lo tanto, si llamamos

$$f_n^\alpha(x) = f_0^\alpha(x)Q_n^1(x) + f_{-1}^\alpha(x)Q_n^2(x), \quad \alpha = 1,2,$$

$$g_n^\alpha(x) = f_0^\alpha(x)H_n^1(x) + f_{-1}^\alpha(x)H_n^2(x), \quad \alpha = 1,2,$$

entonces

$$(y-x)\sum_{k=m}^{n} f_k^1(x)f_k^2(y)\pi_k = g_{n+1}^2(y)f_n^1(x) - g_{n+1}^1(x)f_n^2(y) - g_m^2(y)f_{m-1}^1(x) + g_m^1(x)f_{m-1}^2(y).$$

Para agilizar la notación se omitirá el uso de evaluación en los polinomios, pero si el polinomio está evaluado en "x"(o "s"según sea el caso) todo deberá tener "x".

Algunas otras identidades son:

$$\lambda_n\pi_n(Q_{n+1}^1(x)Q_n^2(x) - Q_{n+1}^2(x)Q_n^1(x)) = H_{n+1}^1(x)Q_n^2(x) - H_{n+1}^2(x)Q_n^1(x) = \mu_0, \tag{2.20}$$

$$H_{n+1}^2(x)H_n^1(x) - H_{n+1}^1(x)H_n^2(x) = \mu_0 x\pi_n,$$

$$\mu_0\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k\pi_k Q_k^1 Q_{k+1}^1} = -\frac{Q_{n+1}^2}{Q_{n+1}^1}, \tag{2.21}$$

$$\mu_0\sum_{k=m}^{-2}\frac{1}{\lambda_k\pi_k Q_k^2 Q_{k+1}^2} = -\frac{Q_m^1}{Q_m^2}, \tag{2.22}$$

$$-\mu_0 x\sum_{k=0}^{n}\frac{\pi_k}{H_k^1 H_{k+1}^1} = 1 + \frac{H_{n+1}^2}{H_{n+1}^1}, \tag{2.23}$$

$$-\mu_0 x \sum_{k=m}^{-1} \frac{\pi_k}{H_k^2 H_{k+1}^2} = 1 + \frac{H_m^1}{H_m^2}. \tag{2.24}$$

Las series en (2.21) y (2.22) convergen, debido a que

$$\mu_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_k \pi_k Q_k^1 Q_{k+1}^1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{H_0^1}{H_{k+1}^1} \left(\frac{1}{Q_k^1} - \frac{1}{Q_{k+1}^1} \right) \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{Q_k^1} - \frac{1}{Q_{k+1}^1} \right) = 1 - \frac{1}{Q_{k+1}^1} \leq 1.$$

Para la otra es

$$\mu_0 \sum_{k=m}^{-2} \frac{1}{\lambda_k \pi_k Q_k^2 Q_{k+1}^2} = \mu_0 \sum_{k=m}^{-2} \frac{1}{\lambda_k \pi_k [Q_{k+1}^2 - Q_k^2]} \left(\frac{1}{Q_k^2} - \frac{1}{Q_{k+1}^2} \right) = \sum_{k=m}^{-2} \frac{-H_0^2}{-H_{k+1}^2} \left(\frac{1}{Q_{k+1}^2} - \frac{1}{Q_k^2} \right)$$

$$\leq \sum_{k=m}^{-2} \left(\frac{1}{Q_{k+1}^2} - \frac{1}{Q_k^2} \right) = 1 - \frac{1}{Q_m^2} \leq 1.$$

Para las otras series se aplica un argumento similar. Por lo tanto, para $s \geq 0$ sea

$$U_1(s) = \mu_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \pi_k Q_k^1(-s) Q_{k+1}^1(-s)} = - \lim_{n \to \infty} \frac{Q_n^2(-s)}{Q_n^1(-s)},$$

$$U_2(s) = \mu_0 \sum_{k=-\infty}^{-2} \frac{1}{\lambda_k \pi_k Q_k^2(-s) Q_{k+1}^2(-s)} = - \lim_{n \to -\infty} \frac{Q_n^1(-s)}{Q_n^2(-s)}.$$

Es importante observar que no se hizo ninguna suposición sobre el comportamiento de las sucesiones $\{Q_n^\alpha\}$ de modo que las funciones U_1 y U_2 siempre existen.

De los argumentos para ver la convergencia de las series se puede ver que

$$U_1(s) < 1 - \frac{1}{Q_\infty^1(-s)}, \tag{2.25}$$

$$U_2(s) < 1 - \frac{1}{Q_{-\infty}^2(-s)}. \tag{2.26}$$

En particular, esto implica la positividad de la función $U(s) = 1 - U_1(s)U_2(s)$ para $s > 0$ y donde $U(0) = 0$ si y solo si $Q_n^1(-s)$ y $Q_n^2(-s)$ divergen.

La convergencia de las series en (2.23) y (2.24) se usa, por ende

$$1-\mu_0 s\sum_{k=0}^{n}\frac{\pi_k}{H_k^1(-s)H_{k+1}^1(-s)}=-\frac{H_{n+1}^2(-s)}{H_{n+1}^1(-s)}=\frac{\mu_0}{H_{n+1}^1(-s)Q_n^1(-s)}-\frac{Q_n^2(-s)}{Q_n^1(-s)}. \quad (2.27)$$

Al tomar límites cuando $n\to\infty$ obtenemos

$$1-\mu_0 s\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi_k}{H_k^1(-s)H_{k+1}^1(-s)}=\lim_{n\to\infty}-\frac{H_n^2(-s)}{H_n^1(-s)}=\frac{\mu_0}{H_\infty^1(-s)Q_\infty^1(-s)}+U_1(s). \quad (2.28)$$

De manera análoga se puede obtener

$$1-\mu_0 s\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{\pi_k}{H_k^2(-s)H_{k+1}^2(-s)}=-\lim_{n\to-\infty}\frac{H_n^1(-s)}{H_n^2(-s)}=-\frac{\mu_0}{H_{-\infty}^2(-s)Q_{-\infty}^2(-s)}+U_2(s). \quad (2.29)$$

El siguiente lema nos será útil al probar ciertos resultados.

Lema 2.1. *Para $s>0$. Sea $f_n(s)=f_0(s)Q_n^1(-s)+f_{-1}(s)Q_n^2(-s)$. Entonces $f_n(s)\geq 0$ para todo n si y solo si $f_0(s)-U_1(s)f_{-1}(s)\geq 0$ y $f_{-1}(s)-U_2(s)f_0(s)\geq 0$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos $f_n\geq 0$. Entonces, para $n\geq 0$,

$$f_0+f_{-1}\frac{Q_n^2}{Q_n^1}=\frac{f_n}{Q_n^1}\geq 0.$$

El resultado en cuestión sale al tomar $n\to\infty$. Similarmente la otra parte se sigue al tomar $n\to-\infty$ en

$$f_{-1}+f_0\frac{Q_n^1}{Q_n^2}=\frac{f_n}{Q_n^2}\geq 0,$$

para n negativa.

$\Leftarrow$ Suponga ambas desigualdades válidas.

Entonces $f_0\geq U_1f_{-1}\geq U_1U_2f_0$, o $f_0U\geq 0$, y por lo tanto $f_0\geq 0$ ya que $U>0$, y entonces $f_{-1}\geq U_2f_0\geq 0$. Para $n\geq 1$, $f_n=Q_n^1(f_0+f_{-1}\frac{Q_n^2}{Q_n^1})\geq 0$; para $n\leq -2$ se tiene que $f_n=Q_n^2(f_{-1}+f_0\frac{Q_n^1}{Q_n^2})\geq 0$.

□

Las funciones

$$F_n^1(s) = U_1(s)Q_n^1(-s) + Q_n^2(-s), \tag{2.30}$$

$$F_n^2(s) = Q_n^1(-s) + U_2(s)Q_n^2(-s),$$

son no negativas como consecuencia del Lema 2.1, ya que $f_0 - U_1 f_{-1} \geq 0$ si y solo si $U_1 - U_1 = 0$; y $f_{-1} - U_2 f_0 \geq 0$ si y solo si $1 - U_2 U_1 \geq 0$, además, si

$$G_n^1(s) = U_1(s)H_n^1(-s) + H_n^2(-s),$$

$$G_n^2(s) = U_2(s)H_n^2(-s) + H_n^1(-s),$$

entonces por (2.18) y (2.19)

$$s\sum_{k=m}^{n} F_k^\alpha(s)\pi_k = G_{n+1}^\alpha(s) - G_m^\alpha(s), \tag{2.31}$$

$$(v-u)\sum_{k=m}^{n} F_k^\alpha(u)F_k^\beta(v)\pi_k = G_{n+1}^\beta(v)F_n^\alpha(u) - G_{n+1}^\alpha(u)F_n^\beta(v) \tag{2.32}$$

$$-G_m^\beta(v)F_{m-1}^\alpha(u) + G_m^\alpha(u)F_{m-1}^\beta(v).$$

Se sigue de (2.20) que

$$G_{n+1}^1(s)F_n^2(s) - G_{n+1}^2(s)F_n^1(s) = U(s)(H_{n+1}^2(-s)Q_n^1(-s) - H_{n+1}^1(-s)Q_n^2(-s)) \tag{2.33}$$

$$= -\mu_0 U(s).$$

Algunas propiedades de la convergencia de $\{F_n^\alpha\}$, $\{G_n^\alpha\}$ serán el objeto de los dos siguientes lemas.

Lema 2.2.

$$\lim_{n\to\infty} F_n^1(s) = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad (2.14) \textit{ converge}, \\ \\ \dfrac{\mu_0}{H_\infty^1(-s)} & \textit{si} \quad (2.14) \textit{ diverge}. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to-\infty} F_n^2(s) = \begin{cases} 0 & si \quad (2.16)\ converge, \\ \\ -\dfrac{\mu_0}{H_{-\infty}^2(-s)} & si \quad (2.16)\ diverge. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} G_n^1(s) = -\mu_0/Q_\infty^1(-s),$$

$$\lim_{n\to-\infty} G_n^2(s) = \mu_0/Q_{-\infty}^2(-s).$$

Demostración. Se dará prueba para F_n^1 y G_n^1, pero para los otros dos se usa un argumento similar.

$$F_n^1(s) = Q_n^1(-s)\left(U_1(s) + \frac{Q_n^2(-s)}{Q_n^1(-s)}\right) = \mu_0 Q_n^1(-s)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{H_{k+1}^1(-s)}\left(\frac{1}{Q_k^1(-s)} - \frac{1}{Q_{k+1}^1(-s)}\right)$$

$$\le \mu_0\frac{Q_n^1(-s)}{H_{n+1}^1(-s)}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_k^1(-s)} - \frac{1}{Q_{k+1}^1(-s)}\right) = \frac{\mu_0}{H_{n+1}^1(-s)} - \frac{\mu_0 Q_n^1(-s)}{H_{n+1}^1(-s)Q_\infty^1(-s)}.$$

Y por (2.27) y (2.28)

$$F_n^1(s) = Q_n^1(-s)\left(-\mu_0 s\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\pi_k}{H_k^1(-s)H_{k+1}^1(-s)} - \frac{\mu_0}{H_\infty^1(-s)Q_\infty^1(-s)} + \frac{\mu_0}{Q_n^1(-s)H_{n+1}^1(-s)}\right)$$

$$\ge -\mu_0 s\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\pi_k Q_k^1(-s)}{sQ_k^1(-s)\pi_k}\left(\frac{1}{H_k^1(-s)} - \frac{1}{H_{k+1}^1(-s)}\right) - \frac{\mu_0 Q_n^1(-s)}{H_\infty^1(-s)Q_\infty^1(-s)} + \frac{\mu_0}{H_{n+1}^1(-s)}$$

$$= \frac{\mu_0}{H_\infty^1(-s)} - \frac{\mu_0 Q_n^1(-s)}{H_\infty^1(-s)Q_\infty^1(-s)}.$$

Tomando $n\to\infty$ y usando principio de intercalación tanto la cota superior como la inferior convergen a lo buscado. Se sigue de (2.20) que para $n\ge 1$,

$$G_{n+1}^1(s) = \frac{H_{n+1}^1(-s)}{Q_n^1(-s)}F_n^1(s) - \frac{\mu_0}{Q_n^1(-s)} \ge -\frac{\mu_0}{Q_n^1(-s)}.$$

Usando la cota superior de $F_n^1(s)$ obtenida en la parte anterior

$$G_{n+1}^1(s) \le \frac{H_{n+1}^1(-s)}{Q_n^1(-s)}\left(\frac{\mu_0}{H_{n+1}^1(-s)} - \frac{\mu_0 Q_n^1(-s)}{H_{n+1}^1(-s)Q_\infty^1(-s)}\right) - \frac{\mu_0}{Q_n^1(-s)} \le -\frac{\mu_0}{Q_\infty^1(-s)}.$$

Por ende, esta función converge a lo establecido. □

Una importante consecuencia de este lema es que $F_n^1(u)G_n^1(v) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y que $F_n^2(u)G_n^2(v) \to 0$ cuando $n \to -\infty$. Los otros límites de la sucesiones $\{F_n^\alpha\}$ existirán solo en ciertos casos. Si $Q_\infty^1(-s)$ existe, entonces $\lim_{n\to\infty} F_n^2 = Q_\infty^1 U$. Y si $Q_{-\infty}^2$ existe, entonces $\lim_{n\to-\infty} F_n^1(s) = Q_{-\infty}^2(-s)U(s)$.

Lema 2.3. *Si ∞ es un punto frontera de entrada, entonces $\lim_{n\to\infty} G_{n+1}^1(v)Q_n^1(-u) = 0$; si ∞ es un punto frontera de salida, entonces $\lim_{n\to\infty} H_{n+1}^1(-v)F_n^1(u) = 0$. Las correspondientes relaciones de límites son ciertas para $-\infty$, los correspondientes superíndices son ahora dos.*

Ver demostración en [16].

Cuando existen varios límites involucrados, las siguientes funciones serán bastante útiles, esto para no confundir y usar más eficientemente los límites.

$$
\begin{aligned}
A_1(s) &= Q_\infty^1(-s)Q_{-\infty}^2(-s) - Q_\infty^2(-s)Q_{-\infty}^1(-s),\\
A_2(s) &= H_{-\infty}^1(-s)Q_\infty^2(-s) - Q_\infty^1(-s)H_{-\infty}^2(-s),\\
A_3(s) &= H_\infty^1(-s)Q_{-\infty}^2(-s) - Q_{-\infty}^1(-s)H_\infty^2(-s),\\
A_4(s) &= H_{-\infty}^1(-s)H_\infty^2(-s) - H_\infty^1(-s)H_{-\infty}^2(-s).
\end{aligned}
$$

Lema 2.4. *Para toda $s > 0$, $A_1(s) > 0$, $A_2(s) > \mu_0$, $A_3(s) > \mu_0$ y $A_4(s) > 0$.*

Demostración.

$$
A_1(s) = Q_\infty^1(-s)Q_{-\infty}^2(-s)\left(1 - \frac{Q_\infty^2(-s)}{Q_\infty^1(-s)}\frac{Q_{-\infty}^1(-s)}{Q_{-\infty}^2(-s)}\right)
$$

$$
= Q_\infty^1(-s)Q_{-\infty}^2(-s)U(s).
$$

La positividad sigue siendo verdad para $s = 0$ porque $U(0) = 0$ si y solo si las Q's divergen y aquí se asume que los límites existen.

Para las otras se usa (2.28) y (2.29) además de (2.25) y (2.26). Por ejemplo

$$
A_2(s) = -Q_\infty^1(-s)H_{-\infty}^2(-s)\left(1 - \frac{H_{-\infty}^1(-s)}{H_{-\infty}^2(-s)}\frac{Q_\infty^2(-s)}{Q_\infty^1(-s)}\right)
$$

$$= -Q^1_\infty(-s)H^2_{-\infty}(-s)\left[1-\left(U_2(s)-\frac{\mu_0}{H^2_{-\infty}(-s)Q^2_{-\infty}(-s)}\right)U_1(s)\right].$$

La naturaleza decreciente de la sucesión $\{-H^2_n\}$ implica que $A_2 > -H^2_\infty > \mu_0$.

La prueba completa se encuentra en [16]. □

Lema 2.5. *Siempre que existan las funciones indicadas se tiene que;* $\lim_{s\to\infty}\mu_0/A_j(s) = 0$ *con* $j = 1,2,3,4$*;* $\lim_{s\to\infty} A_1(s)/A_i(s) = 0$ *y* $\lim_{s\to\infty} A_i(s)/A_4(s) = 0$ *para* $i = 2,3$.

En el siguiente capítulo veremos como aplicar estos resultados para estudiar propiedades probabilístico de estos procesos.

2.3. La solución mínima

Sea $P(t)$ la matriz de transición de probabilidades que cumpla las propiedades de los procesos de nacimiento y muerte bilaterales 1) a 5), y sea

$$R(s) = \int_0^\infty e^{-st}P(t)dt \tag{2.34}$$

la transformada de Laplace.

Teorema 2.1. *La transformada de Laplace (2.34) establece una correspondencia* $1-1$ *entre el conjunto de las matrices* $P(t)$ *que cumplen 1) a 5) y el conjunto de todas las matrices que satisfacen*

$$-I + sR(s) = \mathcal{A}R(s) = R(s)\mathcal{A}, \tag{2.35}$$

$$R(s) \geq 0, \quad sR(s)\hat{1} \leq \hat{1}, \tag{2.36}$$

$$(v-u)R(u)R(v) = R(u) - R(v). \tag{2.37}$$

La primera parte de la prueba está relacionada con propiedades de la transformada de Laplace, el otro lado está relacionado con el Teorema de Hille-Yosida (aunque se puede probar sin ese resultado), véase [16].

La sucesión $\{\pi_i\}$ fue definida de tal manera que si Π denota la matriz diagonal con elementos en la diagonal $\Pi_{ii} = \pi_i$ entonces la matriz $\Pi\mathcal{A}$ es simétrica. La segunda ecuación en (2.35) puede ser escrita como $-I+sR = R\Pi^{-1}\Pi\mathcal{A}$. Como $\Pi\mathcal{A}$ es simétrica, entonces $-I+sR^T = \Pi\mathcal{A}\Pi^{-1}R^T$, y finalmente $-\Pi^{-1}+s\Pi^{-1}R^T = \mathcal{A}\Pi^{-1}R^T$. Así $R\Pi^{-1}$ y su adjunto satisfacen la misma ecuación. Esto sugiere la introducción de una función de Green simétrica como solución a (2.35) para $R\Pi^{-1}$ y conduce al siguiente resultado:

Teorema 2.2. *La solución general de (2.35) está dada por*

$$R_{ij}(s) = \begin{cases} \pi_j \left(\dfrac{1}{\mu_0} Q_i^2(-s) Q_j^1(-s) + \displaystyle\sum_{\alpha,\beta=-1}^{0} \dfrac{R_{\alpha\beta}(s)}{\pi_\beta} Q_i^{|\alpha|+1}(-s) Q_j^{|\beta|+1}(-s) \right) & j \le i, \\ \\ \pi_j \left(\dfrac{1}{\mu_0} Q_i^1(-s) Q_j^2(-s) + \displaystyle\sum_{\alpha,\beta=-1}^{0} \dfrac{R_{\alpha\beta}(s)}{\pi_\beta} Q_i^{|\alpha|+1}(-s) Q_j^{|\beta|+1}(-s) \right) & i \le j. \end{cases}$$

Demostración. Una prueba más detallada se da en [16].

Si definimos un sistema de polinomios $\{Q_n^{(i)}(x)\}$ como

$$-\delta^{(i)} - xQ^{(i)}(x) = \mathcal{A}Q^{(i)}(x), \quad Q_0^{(i)} = Q_{-1}^{(i)} = 0, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

donde $\delta^{(i)} = \delta_n^i$ es la delta de Kronecker y n corresponde al polinomio ortogonal n-ésimo.

Una de las relaciones que se pueden obtener es

$$Q_n^2(x) = \mu_0 Q_n^{(0)}(x). \tag{2.38}$$

Otra propiedad de este sistema es

$$Q_j^{(i)}(x) = 0 \ para \begin{cases} j \le i & si \quad i \ge 0, \\ j \ge i & si \quad i \le -1. \end{cases} \tag{2.39}$$

Es inmediato que una solución particular de (2.35) es

$$R_{ij}(s) = Q_i^{(j)}(-s),$$

y la solución general de (2.35) es

$$R_{ij}(s) = Q_i^{(j)}(-s) + R_{0,j}(s)Q_i^1(-s) + R_{-1,j}(s)Q_i^2(-s). \tag{2.40}$$

También podemos obtener la siguiente expresión

$$R_{ij}(s) = \frac{\pi_j}{\pi_i}Q_j^{(i)}(-s) + \pi_j R_{i,0}(s)Q_j^1(-s) + \pi_j \frac{R_{i,-1}(s)}{\pi_{-1}}Q_j^2(-s). \tag{2.41}$$

Tomando $i = 0$ e $i = -1$, independientemente en (2.41) y sustituyendo en (2.40) obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} R_{ij}(s) = Q_i^{(j)} + \pi_j \Bigg\{ & Q_i^1(-s)Q_j^{(0)}(-s) + R_{0,0}(s)Q_i^1(-s)Q_j^1(-s) + \frac{R_{0,-1}(s)}{\pi_{-1}}Q_i^1(-s)Q_j^2(-s) \\ & + Q_i^2(-s)\frac{Q_j^{(-1)}(-s)}{\pi_{-1}} + R_{-1,0}(s)Q_i^2(-s)Q_j^1(-s) + \frac{R_{-1,-1}(s)}{\pi_{-1}}Q_i^2(-s)Q_j^2(-s) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Otra expresión puede ser obtenida, ahora tomando $j = 0, -1$ en (2.40) y sustituyendo en (2.41). Esto nos da

$$\begin{aligned} R_{ij}(s) = \frac{\pi_j}{\pi_i}Q_j^{(i)}(-s) + \pi_j \Bigg\{ & Q_i^{(0)}(-s)Q_j^1(-s) + R_{0,0}(s)Q_i^1(-s)Q_j^1(-s) \\ & + R_{-1,0}(s)Q_i^2(-s)Q_j^1(-s) + \frac{1}{\pi_{-1}}Q_i^{(-1)}(-s)Q_j^2(-s) + \frac{R_{0,-1}(s)}{\pi_{-1}}Q_i^1(-s)Q_j^2(-s) \\ & + \frac{R_{-1,-1}(s)}{\pi_{-1}}Q_i^2(-s)Q_j^2(-s) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Combinando (2.38), (2.39), (2.42) y (2.43) obtenemos lo solicitado. □

Suponga U, U_1, U_2 definidas como en el análisis previo de (2.25) y sea $R_{ij}(s)$ solución de (2.35)-(2.37); entonces para $i \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq R_{i,0}(s) &= \frac{1}{\mu_0}Q_i^2(-s) + R_{00}(s)Q_i^1(-s) + R_{-1,0}(s)Q_i^2(-s) \\ &= Q_i^1(-s)\left[R_{00}(s) + \frac{Q_i^2(-s)}{Q_i^1(-s)}\left[\frac{1}{\mu_0} + R_{-1,0}(s)\right]\right]. \end{aligned}$$

Dividiendo por $Q_i^1(-s)$ y tomando $i \to \infty$,

$$R_{00}(s) \geq U_1(s)\left(\frac{1}{\mu_0} + R_{-1,0}(s)\right). \tag{2.44}$$

Si $Q_n^1(-s)$ diverge cuando $n \to \infty$, entonces se obtiene la igualdad en (2.44); además, $R_{i,0}(s) \leq \frac{1}{s}$ para todo i. Similarmente, para $i \geq 0$,

$$0 \leq R_{i,-1}(s) = R_{0,-1}(s)Q_i^1(-s) + R_{-1,-1}(s)Q_i^2(-s),$$

y por lo tanto

$$R_{0,-1}(s) \geq U_1(s)R_{-1,-1}(s); \tag{2.45}$$

para $i \leq -1$,

$$0 \leq R_{i,0}(s) = R_{00}(s)Q_i^1(-s) + R_{-1,0}(s)Q_i^2(-s),$$

y entonces

$$R_{-1,0}(s) \geq U_2(s)R_{00}(s). \tag{2.46}$$

Finalmente, para $i \leq -1$,

$$0 \leq R_{i,-1}(s) = \pi_{-1}\frac{1}{\mu_0}Q_i^1(-s) + R_{0,-1}(s)Q_i^1(-s) + R_{-1,-1}(s)Q_i^2(-s),$$

así que

$$R_{-1,-1}(s) \geq U_2(s)\left(\frac{1}{\lambda_{-1}} + R_{0,-1}(s)\right). \tag{2.47}$$

Si $Q_n^1(-s)$ y $Q_n^2(-s)$ divergen cuando $n \to \infty$ y $n \to -\infty$ respectivamente, entonces la igualdad se obtiene en (2.44)-(2.47), y

$$R_{00}(s) = \frac{U_1(s)}{\mu_0 U(s)}, \quad R_{-1,0}(s) = \frac{U_1(s)U_2(s)}{\mu_0 U(s)}, \tag{2.48}$$

$$R_{0,-1}(s) = \frac{U_1(s)U_2(s)}{\lambda_{-1}U(s)}, \quad R_{-1,-1}(s) = \frac{U_2(s)}{\lambda_{-1}U(s)}.$$

Una de las relaciones que se pueden observar es que,

$$R_{00}(s) = \frac{U_1(s)}{\mu_0 U(s)}, \quad \& \quad R_{00}(s) = \int \frac{d\psi_{11}(x)}{x+s} \doteq B(-s;\psi_{11}),$$

$$R_{0,-1}(s) = \frac{U_1(s)U_2(s)}{\lambda_{-1} U(s)}, \quad \& \quad R_{0,-1}(s) = \int \frac{d\psi_{12}(x)}{x+s} \doteq B(-s;\psi_{12}),$$

$$R_{-1,0}(s) = \frac{U_1(s)U_2(s)}{\mu_0 U(s)}, \quad \& \quad R_{-1,0}(s) = \int \frac{d\psi_{21}(x)}{x+s} \doteq B(-s;\psi_{21}),$$

$$R_{-1,-1}(s) = \frac{U_2(s)}{\lambda_{-1} U(s)}, \quad \& \quad R_{-1,-1}(s) = \int \frac{d\psi_{22}(x)}{x+s} \doteq B(-s;\psi_{22}),$$

donde $B(-s;\psi)$ es la transformada de Stieltjes definido en la Definición 1.5. Entonces, podemos calcular las transformadas de Stieltjes solo sabiendo la convergencia de los polinomios Q_n^α.

Si sustituimos estos valores en (2.35) dados por el Teorema 2.2 obtenemos una solución la cual ahora será estudiada más cuidadosamente.

Teorema 2.3. *La matriz $R(s)$ con*

$$R_{ij}(s) = \begin{cases} \frac{\pi_j}{\mu_0 U(s)} F_i^1(s) F_j^2(s) & j \le i, \\ \\ \frac{\pi_j}{\mu_0 U(s)} F_i^2(s) F_j^1(s) & i \le j, \end{cases}$$

es una solución de (2.35)-(2.37), donde $F_i^1(s) = U_1(s)Q_i^1(-s) + Q_i^2(-s)$ y $F_i^2(s) = Q_i^1(-s) + U_2(s)Q_i^2(-s)$.

Demostración. Anteriormente se probó que $R(s)$ cumple (2.35), y es claro que $R(s) \ge 0$. Sea $m < i < n$, entonces por (2.31) y (2.33)

$$s \sum_{j=m}^{n} R_{ij} = 1 - \frac{1}{\mu_0 U}[F_i^1 G_m^2 - F_i^2 G_{n+1}^1],$$

donde $G_{n+1}^1(s) = U_1(s)H_{n+1}^1(-s) + H_{n+1}^2(-s)$ y $G_m^2(s) = U_2(s)H_m^2(-s) + H_m^1(-s)$.

Tomando $m \to -\infty$ y $n \to \infty$ y aplicando el Lema 2.2.

$$s \sum_{j=-\infty}^{\infty} R_{ij} = 1 - \frac{F^1}{UQ^2_{-\infty}} - \frac{F^2}{UQ^1_{\infty}} \leq 1. \tag{2.49}$$

Ahora

$$(v-u) \sum_{k=m}^{n} R_{ik}(u)R_{kj}(v) = \frac{\pi_j F_i^1(u)F_j^1(v)}{\mu_0^2 U(u)U(v)}(v-u) \sum_{k=m}^{i} \pi_k F_k^2(u)F_k^2(v)$$

$$+\frac{\pi_j F_i^2(u)F_j^1(v)}{\mu_0^2 U(u)U(v)}(v-u) \sum_{k=i+1}^{j} \pi_k F_k^1(u)F_k^2(v) + \frac{\pi_j F_i^2(u)F_j^2(v)}{\mu_0^2 U(u)U(v)}(v-u) \sum_{k=j+1}^{n} \pi_k F_k^1(u)F_k^1(v)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\pi_j}{\mu_0 U(v)} F_i^2(v)F_j^1(v) + \frac{\pi_j}{\mu_0 U(u)} F_i^2(u)F_j^1(u) \\ &-\frac{\pi_j F_i^1(u)F_j^1(v)}{\mu_0^2 U(u)U(v)}[G_m^2(v)F_{m-1}^2(u) - G_m^2(u)F_{m-1}^2(v)] \\ &+\frac{\pi_j F_i^2(u)F_j^2(v)}{\mu_0^2 U(u)U(v)}[G_{n+1}^1(v)F_n^1(u) - G_{n+1}^1(u)F_n^1(v)], \end{aligned}$$

donde fue usado (2.32) y (2.33). Tomando $m \to -\infty$ y $n \to \infty$ y aplicando el Lema 2.2.

$$(v-u) \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{ik}(u)R_{kj}(v) = R_{ij}(u) - R_{ij}(v), \quad i < j.$$

En caso de que $i = j$ todo será lo mismo con la excepción del segundo término en las tres sumas deberá ser omitido, pues en ese caso esa suma da como resultado 0.

La prueba para $i > j$ se desarrolla de manera similar. $\square$

Debemos hacer un pequeño paréntesis en lo siguiente: cuando usemos $R(s)$ nos referiremos a la matriz del Teorema 2.3. Cuando nos refiramos a la solución arbitraria de (2.35), usaremos $R^*(s)$. Será conveniente escribir

$$R^*(s) = R(s) + D(s)\Pi, \tag{2.50}$$

donde $D\Pi$ debe satisfacer la versión homogénea de (2.35), así que

$$D_{i,j}(s) = \sum_{\alpha,\beta=-1}^{0} D_{\alpha,\beta}(s) Q_i^{|\alpha|+1}(-s) Q_j^{|\beta|+1}(-s). \tag{2.51}$$

Ahora, sean

$$B_{i,j}(s) = \sum_{\alpha=-1}^{0} D_{i,\alpha}(s) H_j^{|\alpha|+1}(-s),$$

$$C_{i,j}(s) = \sum_{\alpha=-1}^{0} H_i^{|\alpha|+1}(-s) D_{\alpha,j}(s),$$

donde los $H_i^{\alpha}(x)$ son los polinomios duales.

Cuando R^* satisface (2.36) la sucesión $\{D_{ij}\}$ está acotada en i para j fijo, y la sucesión $\{B_{ij}\}$ está acotada en j para i fijo ya que es esencialmente la suma de $D_{ik}\pi_k$.

Lema 2.6. *Para que $R^*_{i,j}(s)$ satisfaga (2.36) es necesario y suficiente que $D_{i,j}(s) \geq 0$ y*

$$\frac{F_i^1(s)}{U(s)Q^2_{-\infty}(-s)} + \frac{F_i^2(s)}{U(s)Q^1_{\infty}(-s)} - \lim_{n\to\infty} B_{in}(s) + \lim_{n\to-\infty} B_{in}(s) \geq 0.$$

Demostración. Es claro que $D_{i,j}(s) \geq 0$ implica que $R^*_{i,j}(s) \geq 0$.

Si $R^*_{i,j}(s) \geq 0$ entonces para $i \geq j$, $i \geq 0$,

$$0 \leq R^*_{i,j}(s) = \pi_j Q_i^1(-s) \left(\frac{F_i^1(s) F_j^2(s)}{\mu_0 U(s) Q_i^1(-s)} + D_{0j}(s) + \frac{Q_i^2(-s)}{Q_i^1(-s)} D_{-1j}(s) \right).$$

Dividiendo por $\pi_j Q_i^1(-s)$ y tomando $i \to \infty$ tenemos $D_{0,j}(s) - U_1(s) D_{-1,j}(s) \geq 0$. Procediendo análogamente y haciendo tender $i \to -\infty$, se obtiene la expresión $-U_2(s) D_{0,j}(s) + D_{-1,j}(s) \geq 0$. Una aplicación del Lema 2.1 prueba que $D_{ij}(s) \geq 0$. Ahora si $R^*_{i,j}(s)$ satisface (2.36) entonces para $m < n$

$$B_{in}(s) - B_{im}(s) = s \sum_{k=m}^{n-1} D_{ik}(s) \pi_k \geq 0.$$

Así que $\{B_{ij}\}$ es una sucesión no decreciente en j, además esta sucesión es acotada para i fijo (anteriormente visto), por ende $\lim_{n\to\infty} B_{in}(s)$ y $\lim_{n\to-\infty} B_{in}(s)$ existen.

Por la prueba del Teorema 2.3.

$$s\sum_{j=-\infty}^{\infty} R^*_{ij}(s) = 1 - \frac{F_i^1(s)}{U(s)Q^2_{-\infty}(-s)} - \frac{F_i^2(s)}{U(s)Q^1_{\infty}(-s)} + \lim_{n\to\infty} B_{i,n}(s) - \lim_{n\to-\infty} B_{i,n}(s).$$

□

Teorema 2.4. *Si $P^*(t)$ satisface 1) a 5) (procesos bilaterales) entonces $P^*(t) \geq P(t)$ donde $P(t)$ es la matriz cuya transformada de Laplace es $R(s)$.*

Demostración. Sea $R^*(s)$ la transformada de Laplace de $P^*(t)$. Por el Lema 2.1. $R^* \geq R$ y por inducción $R^{*n} \geq R^n$.

Por otro lado, una consecuencia de (2.37) es que

$$\frac{R_{i,j}(u+h) - R_{i,j}(u)}{h} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{i,k}(u)R_{k,j}(u+h),$$

por lo tanto

$$R'_{i,j}(u) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{i,k}(u)R_{k,j}(u) = -R^{(2)}_{i,j}(u).$$

Procediendo inductivamente

$$\frac{d^n}{ds^n}[R^*_{i,j}(s) - R_{i,j}(s)] = (-1)^n n![R^{*(n+1)}_{i,j}(s) - R^{(n+1)}_{i,j}(s)].$$

Así $R^*(s) - R(s)$ es una función monótona. Por lo tanto $P^*(t) \geq P(t)$. □

La propiedad mínima nos dice que la solución de 1) a 5) será única siempre que la solución mínima sea honesta. (2.49) prueba que este es el caso siempre que cada límite es de entrada o natural. Sin embargo la solución mínima será la única solución en otros casos.

Teorema 2.5. *Para que haya una y solo una solución de 1) a 5) es necesario y suficiente que una de las siguientes condiciones se satisfaga:*

1. *Un punto límite es natural y el otro es no regular.*

2. *Ambos puntos límite son de salida.*

3. Ambos puntos límite son de entrada.

La necesidad se sigue de la construcción de la solución general. Para la suficiencia hay que notar que cuando es válido 1, 2 o 3 entonces $\{Q_n^\alpha\}$ diverge tanto en ∞ como en $-\infty$ o si no $\{H_n^\alpha\}$ es la divergente. Supongamos que $\{Q_n^\alpha\}$ es la que diverge, entonces R^* está dado por (2.50) con D_{ij} acotado en i para j fijo,

$$\left| D_{0,j}(s) + \frac{Q_1^2(-s)}{Q_1^1(-s)} D_{-1,j}(s) \right| = \left| \frac{D_{ij}(s)}{Q_1^1(-s)} \right| \leq \frac{M}{Q_1^1(-s)}.$$

Tomando $i \to \infty$, $D_{0,j}(s) = U_1(s)D_{-1,j}(s)$; un argumento similar se toma para $-\infty$ y esta da la relación $D_{-1,j}(s) = U_2(s)D_{0,j}(s)$. Combinando estos resultados obtenemos $D_{0,j}(s)U(s) = 0$, por ende $D_{0,j}(s) = 0$, $D_{-1,j}(s) = 0$ y, finalmente $D_{i,j}(s) = 0$. Pero esto implica que $R^*(s) = R(s)$ y $P^*(t) = P(t)$. Si ahora lo que diverge es $\{H_n^\alpha\}$ entonces lo acotado de B_{ij} en j implica que $D_{i,0}(s) = U_1(s)D_{i,-1}(s)$ y $D_{i,-1}(s) = U_2(s)D_{i,0}(s)$ y de aquí se procede de igual manera.

2.4. Las soluciones generales

En el evento que $Q_\infty^\alpha(-s)$ y $Q_{-\infty}^\alpha(-s)$ existan y $D_{ij}(s)$ esté bien definido para $i, j = \pm\infty$ y si además, los límites $H_\infty^\alpha(-s)$ y $H_{-\infty}^\alpha(-s)$ también existen, entonces las funciones $C_{ij}(s)$, $B_{ij}(s)$ también están definidas para $i, j = \pm\infty$.

Siempre que existan las funciones involucradas, se tienen las siguientes identidades:

$$A_1(s)D_{0,j}(s) = Q_{-\infty}^2(-s)D_{\infty,j}(s) - Q_\infty^2(-s)D_{-\infty,j}(s), \tag{2.52}$$

$$A_1(s)D_{-1,j}(s) = Q_\infty^1(-s)D_{-\infty,j}(s) - Q_{-\infty}^1(-s)D_{\infty,j}(s),$$

$$A_1(s)D_{i,0}(s) = Q_{-\infty}^2(-s)D_{i,\infty}(s) - Q_\infty^2(-s)D_{i,-\infty}(s),$$

$$A_1(s)D_{i,-1}(s) = Q_\infty^1(-s)D_{i,-\infty}(s) - Q_{-\infty}^1(-s)D_{i,\infty}(s).$$

Ahora, de las definiciones de B_{ij} y C_{ij}, podemos sustituir en (2.52)

$$A_1(s)C_{\infty,j}(s) = A_3(s)D_{\infty,j}(s) - \mu_0 D_{-\infty,j}(s), \tag{2.53}$$

$$A_1(s)C_{-\infty,j}(s) = \mu_0 D_{\infty,j}(s) - A_2(s)D_{-\infty,j}(s),$$

$$A_1(s)B_{i,\infty}(s) = A_3(s)D_{i,\infty}(s) - \mu_0 D_{i,-\infty}(s),$$

$$A_1(s)B_{i,-\infty}(s) = \mu_0 D_{i,\infty}(s) - A_2(s)D_{i,-\infty}(s).$$

Sea

$$M_{ijn}^{\alpha\beta}(u,v) = \left(C_{n+1,j}(v) + \frac{F_j^\alpha(v)G_{n+1}^\beta(v)}{\mu_0 U(v)}\right)\left(D_{i,n}(u) + \frac{F_i^\alpha(u)F_n^\beta(u)}{\mu_0 U(u)}\right)$$

$$-\left(D_{n,j}(v) + \frac{F_j^\alpha(v)F_n^\beta(v)}{\mu_0 U(v)}\right)\left(B_{i,n+1}(u) + \frac{F_i^\alpha(u)G_{n+1}^\beta(u)}{\mu_0 U(u)}\right),$$

y $M_{ij}(u,v) = \lim_{n\to\infty} M_{ijn}^{21}(u,v) - \lim_{n\to-\infty} M_{ijn}^{12}(u,v)$ siempre que los límites existan.

Lema 2.7. *Para que la ecuación (2.37) se satisfaga por una matriz $R^*(s)$ que tiene la forma (2.50) es necesario y suficiente que $M_{ij}(u,v) = 0$.*

Ver prueba en [16].

Teorema 2.6. *Si tanto ∞ como $-\infty$ son límites regulares, entonces $R^*(s)$ es una solución de (2.35)-(2.37) si y solo si está dada por (2.50) y (2.51) con*

$$D_{\alpha\beta}(s) = \frac{(-1)^{|\alpha|+|\beta|}}{D(s)A_1(s)}[\gamma_2 Q_\infty^{\alpha+2}(-s)Q_\infty^{\beta+2}(-s) + \gamma_3 Q_{-\infty}^{\alpha+2}(-s)Q_{-\infty}^{\beta+2}(-s)$$

$$+\gamma_4(Q_\infty^{\alpha+2}(-s)H_\infty^{\beta+2}(-s) - Q_{-\infty}^{\alpha+2}(-s)H_{-\infty}^{\beta+2}(-s))$$

$$-\gamma_5 Q_{-\infty}^{\alpha+2}(-s)Q_\infty^{\beta+2}(-s) - \gamma_6 Q_\infty^{\alpha+2}(-s)Q_{-\infty}^{\beta+2}(-s)],$$

para $\alpha,\beta = 0,-1,$ donde

$$D(s) = \sum_{k=1}^{4}\gamma_k A_k(s) - (\gamma_5+\gamma_6)\mu_0,$$

y las γ_i satisfacen

$$\gamma_2\gamma_3 = \gamma_1\gamma_4 + \gamma_5\gamma_6;\ \sum_{k=1}^{6}\gamma_k = 1,$$
$$\gamma_k \geq 0,\ k = 1,4,5,6,$$
$$\gamma_2 \geq \gamma_5,\ \gamma_3 \geq \gamma_6.$$

Demostración. Para la misma prueba se usarán las siguientes funciones, las cuales se obtienen de las establecidas en el teorema usando (2.51), cuando (2.52) garantiza que también determinan la D_{ij}

$$D_{\infty,\infty} = \frac{\gamma_3 A_1 + \gamma_4 A_2}{D}, \quad D_{\infty,-\infty} = \frac{\gamma_5 A_1 + \gamma_4\lambda_0}{D},$$
$$D_{-\infty,\infty} = \frac{\gamma_6 A_1 + \gamma_4\lambda_0}{D}, \quad D_{-\infty,-\infty} = \frac{\gamma_2 A_1 + \gamma_4 A_3}{D}.$$

Se ha visto que (2.50) y (2.51) es la solución general de (2.35). Una aplicación del Lema 2.1 a la condición del Lema 2.6, prueba que (2.36) es equivalente a

$$D_{\alpha,\beta} \geq 0; \quad \alpha,\beta = \pm\infty, \tag{2.54}$$

$$1 - B_{\alpha,\infty} + B_{\alpha,-\infty}; \quad \alpha = \pm\infty.$$

De la misma forma, el Lema 2.1 da la equivalencia entre (2.37) y $M_{\alpha\beta}(u,v) = 0$ para $\alpha,\beta = \pm\infty$. Ahora, sea $R^*(s)$ que satisface (2.35)-(2.37). La solución $R(s)$ está dada por $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_k = 0$ para $k \neq 1$, por lo que se asumirá que $R^*(s) \neq R(s)$. Entonces para algunos i,j,s_0, se tiene que $D_{i,j}(s_0) > 0$ por lo que al menos uno de los $D_{\alpha,\beta}(s_0) > 0$, $\alpha,\beta = \pm\infty$ debe ser positivo. Sea $d_{\alpha,\beta} = D_{\alpha,\beta}(s_0)$ para $\alpha,\beta = \pm\infty$; $c_{\infty,\beta} = C_{\infty,\beta}(s_0) - \delta_{\infty,\beta}$ y $c_{-\infty,\beta} = C_{-\infty,\beta}(s_0) - \delta_{-\infty,\beta}$ para $\beta = \pm\infty$. Entonces $M_{\alpha\beta}(s,s_0) = 0$ es

$$c_{\infty,\beta}D_{\alpha,\infty} - d_{\infty,\beta}(B_{\alpha,\infty} - \delta_{\alpha,\infty}) - c_{-\infty,\beta}D_{\alpha,-\infty} + d_{-\infty,\beta}(B_{\alpha,-\infty} - \delta_{\alpha,-\infty}) = 0,$$

para $\alpha,\beta = \pm\infty$. Sustituyendo los valores de $B_{i,j}$ dados en (2.53) el sistema se convierte en

$$(c_{\infty,\beta} - d_{\infty,\beta}\frac{A_3}{A_1} + d_{-\infty,\beta}\frac{\mu_0}{A_1})D_{\alpha,\infty} + (d_{\infty,\beta}\frac{\mu_0}{A_1} - c_{-\infty,\beta} - d_{-\infty,\beta}\frac{A_2}{A_1})D_{\alpha,-\infty}$$

$$= -\delta_{\alpha,\infty}d_{\infty,\beta} - \delta_{\alpha,-\infty}d_{-\infty,\beta}.$$

Si

$$\gamma_1 = c_{\infty,-\infty}c_{-\infty,\infty} - c_{\infty,\infty}c_{-\infty,-\infty}, \quad \gamma_4 = d_{\infty,\infty}d_{-\infty,-\infty} - d_{\infty,-\infty}d_{-\infty,\infty},$$
$$\gamma_2 = c_{\infty,-\infty}d_{-\infty,\infty} - c_{\infty,\infty}d_{-\infty,-\infty}, \quad \gamma_5 = c_{\infty,-\infty}d_{\infty,\infty} - c_{\infty,\infty}d_{\infty,-\infty},$$
$$\gamma_3 = c_{-\infty,-\infty}d_{\infty,\infty} - c_{-\infty,\infty}d_{\infty,-\infty}, \quad \gamma_6 = c_{-\infty,-\infty}d_{-\infty,\infty} - c_{-\infty,\infty}d_{-\infty,-\infty},$$

entonces estas ecuaciones se convierten en

$$DD_{\infty,\infty} = \gamma_3 A_1 + \gamma_4 A_2, \tag{2.55}$$

$$DD_{\infty,-\infty} = \gamma_5 A_1 + \gamma_4 \lambda_0,$$

$$DD_{-\infty,\infty} = \gamma_6 A_1 + \gamma_4 \lambda_0,$$

$$DD_{-\infty,-\infty} = \gamma_2 A_1 + \gamma_4 A_3,$$

con D como en el enunciado del teorema. La identidad $A_2A_3 - \mu_0^2 = A_1A_4$ ha sido usada para simplificar la expresión para D.

Suponga que $\gamma_4 \neq 0$. Dado que la multiplicación de todas las γ_i por una constante no altera (2.55), γ_4 puede ser tomada positiva. Entonces el lado izquierdo de cada ecuación en (2.55) es no negativa para s suficientemente grande por el Lema 2.5. Pero $\gamma_5 A_1 + \gamma_4 \mu_0$ es no negativa para s grande solo si $\gamma_5 \geq 0$ y esto implica que $\gamma_5 A_1 + \gamma_4 \mu_0$ nunca desaparece. Por lo tanto D no desaparece y solo queda checar las condiciones de las γ_i. Como antes, la no negatividad de $D_{\alpha\beta}$ implica que $\gamma_5, \gamma_6 \geq 0$. Usando las relaciones en (2.53),

$$1 - B_{\infty,\infty} + B_{\infty,-\infty} = \frac{(\gamma_3 - \gamma_6)\mu_0 + \gamma_1 A_1 + (\gamma_2 - \gamma_5)A_2}{D}, \tag{2.56}$$

$$1 - B_{-\infty,\infty} + B_{-\infty,-\infty} \frac{(\gamma_2 - \gamma_5)\mu_0 + \gamma_1 A_1 + (\gamma_3 - \gamma_6)A_3}{D},$$

$$M_{\infty\infty}(u,v) = \frac{1}{D(u)D(v)}[A_1(u)A_2(v) - A_2(u)A_1(v)](\gamma_1\gamma_4\gamma_5\gamma_6 - \gamma_2\gamma_3).$$

Una aplicación del Lema 2.5 se emplea aquí, recordando que las primeras dos expresiones son no negativas y la tercera es cero, tenemos así $\gamma_2 - \gamma_5 \geq 0$, $\gamma_3 - \gamma_6 \geq 0$ y $\gamma_2\gamma_3 = \gamma_1\gamma_4 + \gamma_5\gamma_6$. Escribiendo la última igualdad como $\gamma_2\gamma_3 - \gamma_5\gamma_6 = \gamma_1\gamma_4$ prueba que $\gamma_1 \geq 0$ puesto que $\gamma_4 > 0$. Finalmente, la suma de las γ_i es positiva y puede ser tomada como 1 después de multiplicarle una constante positiva a todas las γ_i. Si $\gamma_4 = 0$ y $D(s)$ desaparece para alguna $s > 0$, entonces de (2.55), $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0$. Pero, si las $c_{\alpha\beta}$ son expresadas en términos de las $d_{\alpha\beta}$, usando (2.53) en las definiciones de las γ_i,

$$\gamma_2 = -\frac{A_3(s_0)}{A_1(s_0)}\gamma_4 + d_{-\infty,-\infty}; \quad \gamma_3 = -\frac{A_2(s_0)}{A_1(s_0)}\gamma_4 + d_{\infty,\infty};$$
$$\gamma_5 = -\frac{\mu_0}{A_1(s_0)}\gamma_4 + d_{\infty,-\infty}; \quad \gamma_6 = -\frac{\mu_0}{A_1(s_0)}\gamma_4 + d_{-\infty,\infty}.$$

Pero esto resulta en la contradicción de que todas las $d_{\alpha\beta}$ son cero. Así $D(s)$ no tiene ceros y el resto del argumento es como lo anterior visto, con la excepción de que ahora γ_4 es cero, la no negatividad de las γ_i debe ser obtenida de una manera diferente. En el presente caso

$$0 = \gamma_2\gamma_3 - \gamma_5\gamma_6 = (\gamma_2 - \gamma_5)(\gamma_3 - \gamma_6) + \gamma_5(\gamma_3 - \gamma_6) + \gamma_6(\gamma_2 - \gamma_5)$$

$$\geq (\gamma_2 - \gamma_5)(\gamma_3 - \gamma_6) \geq 0.$$

Así que $(\gamma_2 - \gamma_5)(\gamma_3 - \gamma_6) = 0$. Si $\gamma_2 - \gamma_5 = 0$, la primera expresión en (2.56) será negativa para s suficientemente grande a no ser que $\gamma_1 \geq 0$, mientras que si $\gamma_3 - \gamma_6 = 0$, se aplica un argumento similar.

Suponga que $R^*(s)$ está dada como en el teorema. Entonces

$$D = [(\gamma_2 - \gamma_5) + (\gamma_3 - \gamma_6)]\mu_0 + \gamma_1 A_1 + \gamma_2(A_2 - \mu_0) + \gamma_3(A_3 - \mu_0) + \gamma_4 A_4.$$

Así D es positivo para toda $s > 0$. $D_{\alpha\beta}$ y las dos primeras funciones de (2.56) son no negativas y las $M_{\alpha\beta}(u,v)$ desparecen de forma idéntica para $\alpha,\beta=\pm\infty$ ya que cada uno contiene como factor a $\gamma_1\gamma_4+\gamma_5\gamma_6-\gamma_2\gamma_3$. Estas condiciones implican que $R^*(s)$ satifacen (2.35)-(2.37). □

Los teoremas que dan la solución general a otras posibles combinaciones de límites se darán sin prueba. La prueba, en cada caso, es una combinación del tipo de prueba usada en el Teorema de unicidad con el tipo usado en el Teorema 2.6. También el Lema 2.3 juega un papel importante cuando los límites de entrada o de salida están presentes.

Las pruebas a estos teoremas están dados en [16, Sección 4].

Teorema 2.7. *Si ∞ es punto límite de salida y $-\infty$ es punto límite regular, entonces $R^*(s)$ es una solución de (2.35)-(2.37) si y solo si está dada por (2.50) y (2.51) con*

$$D_{\alpha,\beta}(s)=\frac{(-1)^{|\alpha|+|\beta|}}{D(s)A_1(s)}[\gamma_2Q_{\infty}^{\alpha+2}(-s)Q_{\infty}^{\beta+2}(-s)-\gamma_5Q_{-\infty}^{\alpha+2}(-s)Q_{\infty}^{\beta+2}(-s)],$$

para $\alpha,\beta=0,-1,$ donde

$$D(s)=\sum_{k=1}^{2}\gamma_kA_k(s)-\gamma_5\mu_0,$$

y las γ_i satisfacen

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_5=1,$$
$$\gamma_k\geq 0,\ k=1,5,$$
$$\gamma_2\geq\gamma_5.$$

Teorema 2.8. *Si ∞ es un punto límite de entrada y $-\infty$ en un punto límite regular, entonces $R^*(s)$ es una solución de (2.35)-(2.37) si y solo si esta dada por (2.50) y (2.51) con*

$$D_{\alpha,\beta}(s)=\frac{(-1)^{|\alpha|+|\beta|}}{D(s)A_3(s)}[\gamma_4H_{\infty}^{\alpha+2}(-s)H_{\infty}^{\beta+2}(-s)-\gamma_6H_{\infty}^{\alpha+2}(-s)H_{-\infty}^{\beta+2}(-s)],$$

para $\alpha, \beta = 0, -1,$ *donde*

$$D(s) = \sum_{k=3}^{4} \gamma_k A_k(s) - \gamma_6 \mu_0,$$

y las γ_i *satisfacen*

$$\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_6 = 1,$$
$$\gamma_k \geq 0,\ k = 4, 6,$$
$$\gamma_3 \geq \gamma_6.$$

Teorema 2.9. *Si* ∞ *es un punto límite natural y* $-\infty$ *es un punto límite regular, entonces* $R^*(s)$ *es una solución de (2.35)-(2.37) si y solo si está dada por (2.50) y (2.51) con*

$$D_{\alpha\beta}(s) = \frac{\gamma_2}{D(s)} U_1^{\alpha+\beta+2}(s),$$

para $\alpha, \beta = 0, -1,$ *donde*

$$D(s) = U(s) Q^2_{-\infty}(-s)(\gamma_1 U(s) Q^2_{-\infty}(-s) - \gamma_2 G_{-\infty}(s)),$$

y las γ_i *satisfacen*

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1,$$
$$\gamma_k \geq 0,\ k = 1, 2.$$

Teorema 2.10. *Si* ∞ *es un punto límite de salida y* $-\infty$ *es un punto límite de entrada,entonces* $R^*(s)$ *es una solución de (2.35)-(2.37) si y solo si está dada por (2.50) y (2.51) con*

$$D_{\alpha,\beta}(s) = \frac{\gamma_5}{D(s)} U_1^{\beta+1}(s) U_2^{|\alpha|}(s),$$

para $\alpha, \beta = 0, -1,$ *donde*

$$D(s) = U(s)(-\gamma_5 \mu_0 + \gamma_2 A_2(s)),$$

y las γ_i *satisfacen*

$$\gamma_2 + \gamma_5 = 1,$$
$$\gamma_5 \geq 0,$$
$$\gamma_2 \geq \gamma_5.$$

Capítulo 3

Aplicaciones a aspectos probabilísticos

El objetivo de este capítulo es usar las herramientas introducidas en el capítulo anterior para resaltar algunos aspectos importantes dentro de los procesos de nacimiento y muerte bilaterales como lo son la recurrencia (o transitoriedad) de sus estados y, en caso de ser recurrentes, su ergodicidad o recurrencia nula. También estudiaremos teoremas límite cuando el proceso es transitorio o recurrente nulo. En particular nos centraremos en el estudio de $P_{ij}(t)/P_{kl}(t)$ a medida que $t \to \infty$.

3.1. Recurrencia

Como se definió en el Capítulo 1, las funciones de probabilidad $F_{ii}(t)$ pueden extenderse de manera intuitiva a procesos de nacimiento y muerte bilaterales (con espacio de estados en $\mathbb{Z}$) y vienen dados por:

$$F_{ii}(t) = \mathbb{P}(X_{\tau_1} \neq i, X_{\tau_2} = i,\ \tau_1, \tau_2 \text{ con } 0 < \tau_1 < \tau_2 \leq t | X_0 = i), \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

Así $F_{ii}(t)$ es la probabilidad de que una partícula que inicia en i al tiempo 0, abandona i, y regresa por primera vez a i antes de un tiempo t. Una discusión rigurosa fue dada por Chung en [2].

Definición 3.1. *El i-ésimo estado es llamado recurrente si* $\int_0^\infty dF_{ii}(t) = 1$ *y transitorio si* $\int_0^\infty dF_{ii}(t) < 1$.

Un estado recurrente es llamado ergódico si $\int_0^\infty t dF_{ii}(t) < \infty$ *y es recurrente nulo en otro caso.*

Para hacer el análisis espectral, es necesario suponer que la cadena es irreducible, entonces los términos recurrente, ergódico, recurrente nulo y transitorio aplican a todo el proceso si los estados del proceso poseen la propiedad correspondiente, aunque no necesariamente se comuniquen.

Ya que

$$\mathbb{P}(X_\tau = i \; \forall \tau : 0 \leq \tau \leq t | X_0 = i) = e^{-(\lambda_i+\mu_i)t},$$

resulta que

$$P_{ii}(t) = e^{-(\lambda_i+\mu_i)t} + \int_0^t P_{ii}(t-s)dF_{ii}(s). \tag{3.1}$$

Introduciendo la transformada de Laplace

$$G_{ii}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF_{ii}(t), \tag{3.2}$$

la relación (3.1) se convierte, usando propiedades de convolución, en

$$R_{ii}(s) = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i + s} + R_{ii}(s)G_{ii}(s),$$

con $R_{ii}(s)$ dada en el Teorema 2.3. Así

$$R_{ii}(s) = \frac{1}{(\lambda_i + \mu_i + s)(1 - G_{ii}(s))}. \tag{3.3}$$

De (3.2) y (3.3) tenemos que el i-ésimo estado es recurrente si y solo si $\lim_{s\to 0} R_{ii}(s) = \infty$. Este criterio guía al siguiente Teorema.

Teorema 3.1. *La solución mínima $P(t)$ es recurrente si y solo si las series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}, \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}, \tag{3.4}$$

divergen, y es transitorio de cualquier otra forma.

Demostración. Se sigue de (2.25) y (2.26) que

$$F_n^1(0) = U_1(0)Q_n^1(0) + Q_n^2(0) = [U_1(0) - 1]Q_n^1(0) + 1 = \left(-\frac{Q_\infty^2(0)}{Q_\infty^1(0)} - 1\right) Q_n^1(0) + 1$$

$$= (-Q_\infty^2(0) - Q_\infty^1(0))\frac{Q_n^1(0)}{Q_\infty^1(0)} + 1 = -\frac{Q_n^1(0)}{Q_\infty^1(0)} + 1 > 0,$$

para toda n, y

$$F_n^2(0) = Q_n^1(0) + U_2(0)Q_n^2(0) = 1 + [U_2(0) - 1]Q_n^2(0)$$

$$= 1 - \frac{Q_n^2(0)}{Q_{-\infty}^2(0)} > 0,$$

para toda n, con $F_n^\alpha(s)$ definidas en (2.30). Entonces, por el Teorema 2.3,

$$R_{ii}(s) = \frac{\pi_i}{\mu_0 U(s)} F_i^1(s) F_i^2(s).$$

Entonces el estado i es recurrente si y solo si $U(0) = 0$.

Pero, como $U(s) = 1 - U_1(s)U_2(s)$ entonces

$$U(0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{Q_\infty^1(0)}\right)\left(1 - \frac{1}{Q_{-\infty}^2(0)}\right),$$

esto es equivalente a la divergencia de $Q_n^1(0)$, $Q_{-n}^2(0)$ cuando $n \to \infty$, que a su vez es equivalente a la divergencia de las series en (3.4) por (2.11) y (2.13) [16, pp. 114].

□

Antes de considerar la ergodicidad de la solución mínima, será conveniente examinar las funciones $U_1(s)$ y $U_2(s)$ más a detalle.

Karlin y McGregor [9, pp. 527] probaron que $\dfrac{U_1(s)}{\mu_0}$ es la transformada de Laplace de la probabilidad de transición $P_{00}^+(t)$ para los procesos de absorción unilaterales con parámetros λ_i, μ_i; $i \geq 0$, y entonces

$$\frac{1}{\mu_0}U_1(s) = \int_0^\infty \frac{d\psi^+(x)}{x+s},$$

donde $\psi^+(x)$ es la medida espectral del proceso unilateral $\mathcal{A}^+$, es decir

$$\mathcal{A}^+ = \begin{pmatrix} -\mu_0 - \lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -\mu_1 - \lambda_1 & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -\mu_2 - \lambda_2 & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

y

$$P_{00}^+(t) = \mathbb{P}(X_t = 0 | X_0 = 0).$$

Por lo tanto

$$U_1'(s) = -\mu_0 \int_0^\infty \frac{d\psi^+(x)}{(x+s)^2}.$$

Si

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty, \quad \sum_{n=0}^\infty \pi_n < \infty, \tag{3.5}$$

ellos obtuvieron [10, pp. 399] la expresión

$$\int_0^\infty \frac{d\psi^+(x)}{x^2} = \frac{1}{\mu_0^2} \sum_{n=0}^\infty \pi_n.$$

Así, la condición (3.5) implica que

$$U_1'(0) = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{n=0}^\infty \pi_n.$$

Similarmente si

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} \pi_n < \infty,$$

entonces

$$U_2'(0) = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{n=-\infty}^{-1} \pi_n.$$

Teorema 3.2. *a) La solución mínima es ergódica si y solo si*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi_n < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \infty. \tag{3.6}$$

En este caso,

$$\int_0^\infty t dF_{ii}(t) = \frac{1}{(\lambda_i + \mu_i)\pi_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi_n.$$

b) El proceso es recurrente nulo si y solo si las series

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}, \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n},$$

divergen.

Demostración. Supongamos (3.6) cierta. De (3.3) y del Teorema 2.3 se sigue que

$$1 - G_{ii}(s) = \frac{1}{(\lambda_i + \mu_i + s)R_{ii}(s)} = \frac{\mu_0 U(s)}{(\lambda_i + \mu_i + s)\pi_i F_i^1(s) F_i^2(s)}.$$

Las observaciones previas al teorema muestran la existencia de $U_1'(0)$, $U_2'(0)$, y como $U(0) = 0$ en este caso,

$$\int_0^\infty t dF_{ii}(t) = \lim_{s \to 0} \{-G_{ii}(s)\} = \frac{\mu_0 U'(0)}{(\lambda_i + \mu_i)\pi_i F_i^1(0) F_i^2(0)} \tag{3.7}$$

$$= \frac{-\mu_0 (U_1'(0) + U_2'(0))}{(\lambda_i + \mu_i)\pi_i} = \frac{1}{(\lambda_i + \mu_i)\pi_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi_n,$$

puesto que $Q_i^1(0)$ y $Q_{-i}^2(0)$ divergen cuando $i \to \infty$. Entonces $F_i^\alpha(0) = 1$, $\alpha = 1, 2$; así, el proceso es ergódico.

Si el proceso es ergódico, considera los dos procesos unilaterales con parámetros $\lambda_0^1 = \lambda_0 + \mu_0$, $\mu_0^1 = 0$, $\lambda_i^1 = \lambda_i$, $\mu_i^1 = \mu_i$ para $i \geq 1$, y $\lambda_0^2 = 0$, $\mu_0^2 = \lambda_0 + \mu_0$, $\lambda_i^2 = \lambda_i$, $\mu_i^2 = \mu_i$ para $i \leq -1$. Entonces, si T es el tiempo de recurrencia a cero del proceso bilateral, T^+ es el tiempo de recurrencia a cero del proceso unilateral sobre los enteros no negativos, y T^- el tiempo de recurrencia a cero para el proceso sobre los enteros no positivos, así

$$\mathbb{E}(T) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \mu_0}\mathbb{E}(T^+) + \frac{\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0}\mathbb{E}(T^-),$$

y T tendrá esperanza finita solo si T^+ y T^- la tienen.

Pero la finitud de $\mathbb{E}(T^+)$ y $\mathbb{E}(T^-)$ implica (3.6) por la condición ergódica obtenida para procesos unilaterales por Karlin y McGregor [10, pp. 370].

La parte b) del teorema es consecuencia de a).

□

Se sigue de la representación integral, y por el Teorema de la convergencia dominada, que

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \pi_j \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} Q_i^{\alpha}(0)Q_j^{\beta}(0)\rho_{\alpha\beta},$$

donde $\rho_{\alpha\beta}$ es la masa de $\psi_{\alpha\beta}$ en cero. Las $\rho_{\alpha\beta}$ pueden ser obtenidas como límites, y

$$\begin{aligned}\rho_{11} = \lim_{s\to 0} s\int_0^{\infty}\frac{d\psi(x)}{x+s} &= \lim_{s\to 0} sR_{00}(s)\\ = \lim_{s\to 0}\frac{sU_1(s)}{\mu_0 U(s)} &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{\mu_0\frac{U(s)}{s}}\\ = \frac{1}{\mu_0 U'(0)} &= \frac{1}{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\pi_n},\end{aligned}$$

si el proceso es ergódico. Si el proceso es recurrente nulo, entonces $U'(0)$ debe ser infinito por (3.7), así que $\rho_{11} = 0$. Si el proceso es transitorio, $\lim_{s\to 0} R_{00}(s) = R_{00}(0) < \infty$, así $\rho_{11} = 0$. Las otras $\rho_{\alpha\beta}$ pueden ser obtenidas de manera similar, y todas tienen el mismo valor. Entonces, como $Q_n^1(0) + Q_n^2(0) = 1$,

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \rho\pi_j,$$

donde $\rho = 0$ a menos que el proceso sea ergódico, y

$$\rho = \frac{1}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi_n},$$

en ese caso. Así el teorema ergódico clásico se sigue de la representación integral.

Para cualquier solución mínima transitoria, la partícula debe tender a $\pm\infty$ cuando $t \to \infty$. Para ver esto, fijemos un estado inicial i, y sea E_j el conjunto de todas las trayectorias para las cuales la partícula visita el estado j infinitas veces o gasta una cantidad infinita de tiempo en el estado j, o ambas. La probabilidad de visitar j infinitas veces es cero dado que la probabilidad de regresar es menor que uno, y con probabilidad 1 la partícula se va después de una estadía finita cada vez que visita el estado j. Por lo tanto $\mathbb{P}(E_j) = 0$. Ahora, si

$$E = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} E_j,$$

entonces $\mathbb{P}(E) = 0$, y para cualquier trayectoria que no esté en E, se tiene que $X_t \to \infty$ o $X_t \to -\infty$. Por lo tanto

$$\mathbb{P}(X_t \to \infty \text{ o } X_t \to -\infty | X_0 = i) = 1,$$

para cualquier proceso transitorio. Esto sugiere determinar la probabilidad de que la partícula tenderá a infinito. En consecuencia, sea

$$P_i(\infty) = \mathbb{P}(X_t \to \infty | X_0 = i),$$

y

$$P_i(-\infty) = \mathbb{P}(X_t \to -\infty | X_0 = i).$$

Teorema 3.3. *Para cualquier solución mínima transitoria,*

$$P_i(\infty) = \begin{cases} 1 & si \quad \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} \ diverge, \\ \\ \dfrac{\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{i-1} \frac{1}{\pi_n \lambda_n}}{\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi_n \lambda_n}} & si \quad \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi_n \lambda_n} \ converge, \\ \\ 0 & si \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} \ diverge. \end{cases}$$

y $P_i(-\infty) = 1 - P_i(\infty)$.

Demostración. $P_i(\infty)$ debe satisfacer la relación de recurrencia

$$P_i(\infty) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} P_{i+1}(\infty) + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} P_{i-1}(\infty), \tag{3.8}$$

ya que la primera transición de la partícula la lleva a $i+1$ con probabilidad $\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$ y a $i-1$ con probabilidad $\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}$.

Pero (3.8) puede ser escrita como

$$0 = \mu_i P_{i-1}(\infty) - (\lambda_i + \mu_i) P_i(\infty) + \lambda_i P_{i+1}(\infty),$$

así que

$$\begin{aligned} P_i(\infty) &= \gamma Q_i^1(0) + \delta Q_i^2(0) \qquad (3.9) \\ &= (\gamma - \delta) Q_i^1(0) + \delta \\ &= \gamma + (\delta - \gamma) Q_i^2(0). \end{aligned}$$

Si alguna de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}, \tag{3.10}$$

divergen, entonces $Q_n^1(0) \to \infty$ cuando $n \to \infty$ o $Q_n^2(0) \to \infty$ cuando $n \to -\infty$. Así en (3.9) $\gamma = \delta$ para que $P_i(\infty)$ sea acotado y $P_i(\infty) = \gamma$ para toda i en tal caso. Para determinar γ, consideremos $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}_{ij}$ con $i, j \geq 0$. Sea $P_i^+(\infty)$ la probabilidad de que la partícula en este proceso tienda a infinito habiendo iniciado en el estado i. Entonces como esta partícula es absorbida siempre que llegue a -1, $P_i(\infty) \geq P_i^+(\infty)$, y por [10, pp. 380],

$$P_i^+(\infty) = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\sum_{n=-1}^{i-1} \frac{1}{\pi_n \lambda_n}}{\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{\pi_n \lambda_n}} & si \quad \displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{\pi_n \lambda_n} \; converge, \\ \\ 0 & si \quad \displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} \; diverge. \end{cases}$$

Por lo tanto, si la segunda serie en (3.10) diverge, la primera debe converger, y

$$1 \geq \gamma = \lim_{i \to \infty} P_i(\infty) \geq \lim_{i \to \infty} P_i^+(\infty) = 1,$$

así $P_i(\infty) = 1$ para todo i. Si la primera serie en (3.10) diverge, entonces $P_i(-\infty) = 1$ por la simetría, además $P_i(\infty) = 0$. Cuando ambas series en (3.10) convergen, los argumentos anteriores muestran que $\lim_{i \to \infty} P_i(\infty) = 1$, $\lim_{i \to -\infty} P_i(\infty) = 0$. Sustituyendo esto en (3.9)

$$(\gamma - \delta)\mu_0 \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} + \delta = 1,$$

$$\gamma + (\delta - \gamma)\mu_0 \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = 0.$$

Sustrayendo

$$-(\gamma - \delta) + (\gamma - \delta)\mu_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} + (\gamma - \delta) = 1,$$

así que

$$\gamma - \delta = \frac{1}{\mu_0 \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}}, \quad \gamma = \frac{\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}}{\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}}, \quad \delta = \frac{\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}}{\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}}.$$

El resultado en cuestión se sigue de sustituir estos valores en (3.9) □

3.2. Teoremas límite

El comportamiento límite de $P_{ij}(t)$ cuando $t \to \infty$ para procesos transitorios y recurrentes nulos sugieren estudiar los límites de la proporción de las probabilidades de transición. El Teorema clásico de proporción de Doeblin asegura que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t P_{ij}(u)du}{\displaystyle\int_0^t P_{kl}(u)du},$$

es finito y positivo. Karlin y McGregor [10] probaron que para procesos de nacimiento y muerte unilaterales se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P_{ij}(t)}{P_{kl}(t)},$$

existe, es finito y positivo.

El correspondiente Teorema resulta más difícil en procesos bilaterales que en unilaterales, ya que en procesos sobre $\mathbb{N}_0$ solo se necesita trabajar con $P_{0,0}(t)$ y aquí debemos trabajar con cuatro términos, los cuales son $P_{-1,0}(t)$, $P_{0,0}(t)$, $P_{0,-1}(t)$ y $P_{-1,-1}(t)$. Se tiene que $P_{-1,0}(t)$ y $P_{0,-1}(t)$ son la misma salvo por el factor π_{-1}, pero la existencia de los límites

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P_{-1,0}(t)}{P_{0,0}(t)}, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{P_{0,-1}(t)}{P_{-1,-1}(t)},$$

debe obtenerse antes de poder utilizar la representación integral. La existencia de estos límites es el tema de los siguientes lemas.

Lema 3.1. *Si $P(t)$ es una solución mínima recurrente, entonces*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{P_{-1,0}(t)}{P_{0,0}(t)} \geq 1, \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{P_{0,-1}(t)}{P_{-1,-1}(t)} \geq 1.$$

Demostración. Por el Teorema 2.3, $R_{-1,0}(s) = U_2(s)R_{0,0}(s)$. Como se señaló anteriormente, $U_2(s)$ es la transformada de Laplace de una probabilidad de transición unilateral, $\lambda_{-1}P^{-}_{-1,-1}(t)$. Así

$$P_{-1,0}(t) = \int_0^t P_{0,0}(t-x)\lambda_{-1}P^{-}_{-1,-1}(x)dx \geq P_{0,0}(t)\int_0^t \lambda_{-1}P^{-}_{-1,-1}(x)dx,$$

ya que $P_{00}(t)$ es monótona. Se tiene entonces que

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{P_{-1,0}(t)}{P_{0,0}(t)} \geq \int_0^\infty \lambda_{-1}P^{-}_{-1,-1}(x)dx = U_2(0) = 1.$$

La otra parte es similar con el hecho de $R_{0,-1}(s) = U_1(s)R_{-1,-1}(s)$. □

Lema 3.2. *Sea $f(x)$ una función continua que se anula en $x = 0$, y $\eta(x)$ una medida no negativa sobre $0 \leq x < \infty$ con $0 \in supp(\eta)$. Suponga*

$$\int_0^\infty |f(x)|d\eta(x) < \infty,$$

y sea

$$g(t) = \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}f(x)d\eta(x)}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}d\eta(x)}.$$

Entonces $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, escogemos δ tal que $|f(x)| \leq \epsilon$ para $0 \leq x \leq \delta$ ya que $f(0) = 0$. Entonces

$$|g(t)| \leq \frac{\displaystyle\int_0^\delta e^{-xt}|f(x)|d\eta(x)}{\displaystyle\int_0^\delta e^{-xt}d\eta(x)} + \frac{\displaystyle\int_\delta^\infty e^{-xt}|f(x)|d\eta(x)}{\displaystyle\int_0^{\delta/2} e^{-xt}d\eta(x)}$$

$$\leq \epsilon + \frac{1}{\eta(\delta/2)} e^{-t\frac{\delta}{2}} \int_{\delta}^{\infty} |f(x)| d\eta(x),$$

así que $\limsup_{t\to\infty} |g(t)| \leq \epsilon$ y $g(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. □

Dado que

$$\int_0^{\infty} \frac{d\psi_{11}(x)}{x} = \lim_{s\to 0} R_{00}(s) = \infty,$$

el soporte de $\psi_{11}(x)$ alcanza el valor 0, y similarmente para $\psi_{22}(x)$. Así, el Lema anterior se puede aplicar a $\psi_{11}(x)$ y $\psi_{22}(x)$, pero será necesario tener otro Lema para $\psi_{12}(x)$ dado que es no decreciente.

Lema 3.3. *Sean $f(x)$ y $g(t)$ como en el Lema 3.2 con $\eta(x)$ reemplazado por $\psi_{12}(x)$, y suponga que*

$$\int_0^{\infty} |f(x)| d\psi_{\alpha\beta}(x) < \infty,$$

para $\alpha, \beta = 1, 2$. Entonces $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$.

Demostración. Por la Proposición 2.3, $\psi_{11}(x) + \psi_{22}(x) + 2\psi_{12}(x)$ es no decreciente. Entonces

$$2\left|\int_0^{\infty} e^{-xt} f(x) d\psi_{12}(x)\right| = \left|\int_0^{\infty} e^{-xt} f(x) d(\psi_{11}(x) + \psi_{22}(x) + 2\psi_{12}(x))\right.$$

$$\left.- \int_0^{\infty} e^{-xt} f(x) d(\psi_{11}(x) + \psi_{22}(x))\right| \leq 2\int_0^{\infty} e^{-xt} |f(x)| d(\psi_{11}(x) + \psi_{22}(x) + \psi_{12}(x)).$$

Tomando $\eta(x) = \psi_{11}(x) + \psi_{22}(x) + \psi_{12}(x)$, entonces $\eta(x)$ es no decreciente y el soporte de $\eta(x)$ alcanza el 0 dado que $\dfrac{\psi_{11}(x) + \psi_{22}(x) + 2\psi_{12}(x)}{2}$ es no decreciente y el soporte de $\dfrac{\psi_{11}(x) + \psi_{22}(x)}{2}$ alcanza el 0.

Ahora,

$$|g(t)| \leq \frac{\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xt} |f(x)| d\eta(x)}{\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xt} d\eta(x)} \frac{\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xt} d\eta(x)}{\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xt} d\psi_{12}(x)},$$

y el primer término en el producto tiende a cero por el Lema 3.2.

Además

$$\frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}d\eta(x)}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}d\psi_{12}(x)} = 1 + \frac{P_{0,0}(t)}{P_{-1,0}(t)} + \frac{P_{-1,-1}(t)}{P_{0,-1}(t)},$$

así que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}d\eta(x)}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}d\psi_{12}(x)} \leq 3,$$

por el Lema 3.1. Así $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$. □

Lema 3.4. *Si $P(t)$ es una solución mínima recurrente, entonces*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{P'_{-1,0}(t)}{P_{-1,0}(t)} \leq 0.$$

Demostración. Por la fórmula de Karlin-Mcgregor

$$P_{-2,0}(t) = \int_0^\infty e^{-xt}Q^1_{-2}(x)d\psi_{11}(x) + \int_0^\infty e^{-xt}Q^2_{-2}(x)d\psi_{12}(x).$$

Entonces

$$\frac{P_{-2,0}(t)}{P_{-1,0}(t)} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}Q^1_{-2}(x)d\psi_{11}(x)}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}d\psi_{11}(x)}\frac{P_{00}(t)}{P_{-1,0}(t)} + \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}Q^2_{-2}(x)d\psi_{12}(x)}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}d\psi_{12}(x)}$$

$$= Q^1_{-2}(0)\frac{P_{00}(t)}{P_{-1,0}(t)} + Q^2_{-2}(0) + \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}[Q^1_{-2}(x) - Q^1_{-2}(0)]d\psi_{11}(x)}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}d\psi_{11}(x)}\frac{P_{00}(t)}{P_{-1,0}(t)}$$

$$+\frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}[Q^2_{-2}(x) - Q^2_{-2}(0)]d\psi_{12}(x)}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}d\psi_{12}(x)}.$$

Por los Lemas 3.1, 3.2 y 3.3,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{P_{-2,0}(t)}{P_{-1,0}(t)} \leq Q^1_{-2}(0) + Q^2_{-2}(0) = 1.$$

Como
$$\frac{P'_{-1,0}(t)}{P_{-1,0}(t)} = \mu_{-1}\frac{P_{-2,0}(t)}{P_{-1,0}(t)} - (\lambda_{-1}+\mu_{-1}) + \lambda_{-1}\frac{P_{00}(t)}{P_{-1,0}(t)},$$
de donde se sigue que

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{P'_{-1,0}(t)}{P_{-1,0}(t)} \leq \mu_{-1} - (\lambda_{-1}+\mu_{-1}) + \lambda_{-1} = 0.$$

□

Lema 3.5. *Sea $P(t)$ una solución mínima recurrente. Entonces para cualquier valor fijo t_1,*
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\min_{t-t_1\leq x\leq t} P_{-1,0}(x)}{P_{-1,0}(t)} = 1.$$

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, escogemos t_0 tal que

$$\frac{P'_{-1,0}(t)}{P_{-1,0}(t)} \leq \frac{\epsilon}{t_1},$$

para toda $t \geq t_0 - t_1$. Ahora fijemos $t \geq t_0$, y sea x_1 un punto en el intervalo $[t-t_1, t]$ tal que $P_{-1,0}(x_1) = \min_{t-t_1\leq x\leq t} P_{-1,0}(x)$, y x_2 un punto en $[x_1, t]$ tal que $P_{-1,0}(x_2) = \max_{x_1\leq x\leq t} P_{-1,0}(x)$.

Entonces, para algún x_3 en el intervalo $[x_1, x_2]$,

$$P_{-1,0}(x_2) = P_{-1,0}(x_1) + (x_2 - x_1)P'_{-1,0}(x_3)$$

$$\leq P_{-1,0}(x_1) + t_1\frac{\epsilon}{t_1}P_{-1,0}(x_3) \leq P_{-1,0}(x_1) + \epsilon P_{-1,0}(x_2),$$

y así
$$1 \geq \frac{P_{-1,0}(x_1)}{P_{-1,0}(t)} \geq \frac{P_{-1,0}(x_1)}{P_{-1,0}(x_2)} \geq 1-\epsilon,$$

o
$$1 \geq \frac{\min_{t-t_1\leq x\leq t} P_{-1,0}(x)}{P_{-1,0}(t)} \geq 1-\epsilon,$$

para toda $t \geq t_0$. □

Lema 3.6. *Si $P(t)$ es una solución mínima recurrente, entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P_{-1,0}(t)}{P_{0,0}(t)} = 1, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{P_{0,-1}(t)}{P_{-1,-1}(t)} = 1.$$

Demostración. Por el Teorema 2.3, $R_{00}(s) = U_1(s)R_{-1,0}(s) + U_1(s)/\mu_0$, así

$$P_{00}(t) = \int_0^t P_{-1,0}(t-x)\mu_0 P_{00}^+(x)dx + P_{00}^+(t).$$

Ahora, dado $\epsilon > 0$, se toma t_1 suficientemente grande para que

$$\int_0^{t_1} \mu_0 P_{00}^+(x)dx \geq 1-\epsilon.$$

Entonces, para $t \geq t_1$,

$$P_{00}(t) \geq \int_0^{t_1} P_{-1,0}(t-x)\mu_0 P_{00}^+(x)dx \geq \min_{t-t_1\leq x\leq t} P_{-1,0}(x)\int_0^{t_1} \mu_0 P_{00}^+(u)du$$

$$\geq \min_{t-t_1\leq x\leq t} P_{-1,0}(x)(1-\epsilon),$$

y, consecuentemente,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{P_{00}(t)}{P_{-1,0}(t)} \geq \lim_{t\infty} \frac{\min_{t-t_1\leq x\leq t} P_{-1,0}(x)}{P_{-1,0}(t)}(1-\epsilon) = 1-\epsilon.$$

Combinándolo con el Lema 3.1,

$$1 \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{P_{-1,0}(t)}{P_{00}(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{P_{-1,0}(t)}{P_{00}(t)} \leq 1,$$

y la primera parte se sigue. Como $R_{-1,-1}(s) = U_2(s)R_{0,-1}(s) + U_2(s)/\lambda_{-1}$, la otra parte de la prueba es análoga. □

Teorema 3.4. *Si $P(t)$ es una solución mínima recurrente, entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P_{ij}(t)}{P_{kl}(t)} = \frac{\pi_j}{\pi_l}.$$

Demostración. Por el Lema 3.2 y 3.3,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt} Q_i^\alpha(x) Q_j^\beta(x) d\psi_{\alpha\beta}(x)}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt} d\psi_{\alpha\beta}(x)} = Q_i^\alpha(0) Q_j^\beta(0)$$

$$+ \lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt} [Q_i^\alpha(x) Q_j^\beta(x) - Q_i^\alpha(0) Q_j^\beta(0)] d\psi_{\alpha\beta}(x)}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt} d\psi_{\alpha\beta}(x)} = Q_i^\alpha(0) Q_j^\beta(0).$$

Ahora, por la fórmula de Karlin-McGregor,

$$\frac{P_{ij}(t)}{P_{00}(t)} = \pi_j \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} \left(\frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt} Q_i^\alpha(x) Q_j^\beta(x) d\psi_{\alpha\beta}(x)}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt} d\psi_{\alpha\beta}(x)} \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt} d\psi_{\alpha\beta}(x)}{P_{00}(t)} \right),$$

así que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P_{ij}(t)}{P_{00}(t)} = \pi_j \left(Q_i^1(0) Q_j^1(0) + [Q_i^1(0) Q_j^2(0) + Q_i^2(0) Q_j^1(0)] \lim_{t\to\infty} \frac{P_{-1,0}(t)}{P_{0,0}(t)} \right) +$$

$$\pi_j \left(Q_i^2(0) Q_j^2(0) \lim_{t\to\infty} \frac{P_{-1,-1}(t)}{\pi_{-1} P_{0,0}(t)} \right)$$

$$= \pi_j \left(Q_i^1(0) + Q_i^2(0) Q_j^1(0) + Q_i^2(0) Q_j^2(0) \lim_{t\to\infty} \frac{P_{-1,-1}(t)}{P_{0,-1}(t)} \frac{P_{-1,0}(t)}{P_{0,0}(t)} \right)$$

$$= \pi_j,$$

y el resultado se sigue. □

Capítulo 4

Ejemplos

Actualmente en la literatura solo hay un ejemplo en el que se calcula explícitamente la matriz espectral de un proceso de nacimiento y muerte bilateral. Este ejemplo corresponde al proceso con tasas de nacimiento y muerte constantes y fue estudiado en la última sección de [6]. La matriz espectral se calculó usando herramientas de análisis espectral de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert. En este capítulo veremos una manera diferente de calcular la matriz espectral usando argumentos probabilísticos, en la misma línea que el método usado en la última sección de [11] para cadenas de nacimiento y muerte en $\mathbb{Z}$ a tiempo discreto. Otra manera alternativa de calcular la matriz espectral sería usando las fórmulas (2.48), pero para ello necesitaríamos información del análisis asintótico de las familias Q_i^α, $\alpha = 1, 2$, a medida que $n \to \pm\infty$, cosa que en general no es sencillo de obtener.

Adicionalmente a este ejemplo estudiaremos otro denominado el proceso simétrico de nacimiento y muerte con tasas constantes, cuyo proceso a tiempo discreto ya fue establecido en la Sección 6 de [5].

Pasemos pues a exponer un método probabilístico para calcular la matriz espectral de un proceso de nacimiento y muerte bilateral.

Para calcular las medidas $\psi_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, podemos partir a la matriz $\mathcal{A}$ en (2.1) en dos procesos de nacimiento y muerte con espacio de estados $\{0, 1, \dots\}$, donde los operadores infinitesimales están dados por $\mathcal{A}^+_{ij} = \mathcal{A}_{ij}$, $i, j \geq 0$ y $\mathcal{A}^-_{ij} = \mathcal{A}_{ij}$, $i, j < 0$, es decir

$$\mathcal{A}^+ = \begin{pmatrix} -\mu_0-\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -\mu_1-\lambda_1 & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -\mu_2-\lambda_2 & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

y

$$\mathcal{A}^- = \begin{pmatrix} -\mu_{-1}-\lambda_{-1} & \mu_{-1} & & & \\ \lambda_{-2} & -\mu_{-2}-\lambda_{-2} & \mu_{-2} & & \\ & \lambda_{-3} & -\mu_{-3}-\lambda_{-3} & \mu_{-3} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si denotamos por $\psi^{\pm}$ a las medidas espectrales asociadas a las matrices $\mathcal{A}^{\pm}$(como consecuencia de Teorema Espectral estudiado en la Subsección 1.2), se pueden obtener las transformadas de Stieltjes de las medidas $\psi_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, con ayuda de las siguientes fórmulas:

$$R_{ii}(s) = \frac{1}{s+\lambda_i+\mu_i} + R_{ii}(s)G_{ii}(s),$$

$$R_{ij}(s) = R_{jj}(s)G_{ij}(s), \quad i \neq j.$$

$$R^{\pm}_{ij}(s) = \pi_j \int_0^{\infty} \frac{Q^{\pm}_i(x)Q^{\pm}_j(x)}{x+s} d\psi^{\pm}(x) = \pi_j B(-s; Q^{\pm}_i Q^{\pm}_j d\psi^{\pm}). \tag{4.1}$$

$$R_{ij}(s) = \pi_j \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \int_0^{\infty} \frac{Q^{\alpha}_i(x)Q^{\beta}_j(x)}{x+s} d\psi_{\alpha\beta}(x) = \pi_j B\left(-s; \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} Q^{\alpha}_i Q^{\beta}_j \psi_{\alpha\beta}\right),$$

donde $R_{ij}(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}P_{ij}(t)dt$, $G_{ij}(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}dF_{ij}(t)$ y $Q^{\pm}_i$ son las familias de polinomios que corresponden a $\mathcal{A}^{\pm}$ respectivamente.

Para el **caso** $i = j = 0$, además de las fórmulas anteriores, usaremos las siguientes

$$G_{00}(s) = G^{+}_{00}(s) + \frac{\mu_0}{s+\lambda_0+\mu_0} G_{-1,0}(s), \tag{4.2}$$

$$G_{-1,0}(s) = \lambda_{-1} R^{-}_{-1,-1}(s), \tag{4.3}$$

$$G^{+}_{00}(s) = 1 - \frac{1}{(s+\lambda_0+\mu_0)R^{+}_{00}(s)}. \tag{4.4}$$

Ahora, (4.2) proviene del hecho de

$$F_{00}(t) = F_{00}^{+}(t) + \mu_0 \int_0^t e^{-(\lambda_0+\mu_0)(t-s)} dF_{-1,0}(s),$$

donde $e^{-(\lambda_0+\mu_0)(t-s)} = \mathbb{P}(X_{t-s} = -1 \text{ por primera vez}|X_0 = 0)$, tomando la transformada de Laplace y usando la propiedad de convolución se obtiene.

Además, (4.3) es consecuencia de

$$P_{-1,0}(t) = \int_0^t P_{00}(t-x)\lambda_{-1} P_{-1,-1}^{-}(x)dx.$$

Tomando la transformada de Laplace y usando $R_{-1,0}(s) = R_{00}(s)G_{-1,0}(s)$ se obtiene que $R_{00}(s)G_{-1,0}(s) = \lambda_{-1}R_{00}(s)R_{-1,-1}^{-}(s)$.

Por ultimo, (4.4) es la misma fórmula que $R_{ii}(s) = \frac{1}{s+\lambda_i+\mu_i} + R_{ii}(s)G_{ii}(s)$ pero aplicada a $\mathcal{A}^{+}$.

Entonces

$$R_{00}(s) = \frac{1}{(s+\lambda_0+\mu_0)(1-G_{00}(s))} = \frac{1}{(s+\lambda_0+\mu_0)(1-G_{00}^{+}(s) - \frac{\mu_0}{s+\lambda_0+\mu_0}G_{-1,0}(s))}$$

$$= \frac{1}{(s+\lambda_0+\mu_0)\left[\frac{1}{(s+\lambda_0+\mu_0)R_{00}^{+}(s)} - \frac{\mu_0\lambda_{-1}R_{-1,-1}^{-}(s)}{s+\lambda_0+\mu_0}\right]} = \frac{R_{00}^{+}(s)}{1-\mu_0\lambda_{-1}R_{00}^{+}(s)R_{-1,-1}^{-}(s)}.$$

Usando (4.1) para $i = j = 0$ obtenemos

$$B(z;\psi_{11}) = \frac{B(z;\psi^{+})}{1-\lambda_{-1}\mu_0 B(z;\psi^{+})B(z;\psi^{-})}.$$

Así como esta, se obtienen las otras relaciones para $i = 0$, $j = -1$ & $i = j = -1$. De donde se obtienen todas las transformadas de Stieltjes:

$$B(z;\psi_{11}) = \frac{B(z;\psi^{+})}{1-\lambda_{-1}\mu_0 B(z;\psi^{+})B(z;\psi^{-})}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\mu_0}{\lambda_{-1}}B(z;\psi_{22}) = \frac{B(z;\psi^{-})}{1-\lambda_{-1}\mu_0 B(z;\psi^{+})B(z;\psi^{-})},$$

$$B(z;\psi_{12}) = \frac{\lambda_{-1}B(z;\psi^+)B(z;\psi^-)}{1-\lambda_{-1}\mu_0 B(z;\psi^+)B(z;\psi^-)}.$$

Ahora que incluimos estas nuevas fórmulas, podemos empezar con los ejemplos.

4.1. Proceso de nacimiento y muerte bilateral con tasas constantes

En este caso las tasas de nacimiento y muerte vienen dadas por

$$\mu_n = \mu, \quad \lambda_n = \lambda, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La matriz $\mathcal{A}^+$ es la misma que la del sistema $M/M/1$ que se encuentra en la Sección 1.6. Como $\mathcal{A}^-$ es la matriz simétrica de $\mathcal{A}^+$, entonces ambos procesos generan la misma transformada de Stieltjes. Usando (4.5), para $B(z;\psi_{11})$ y $B(z;\psi_{12})$ obtenemos

$$B(z;\psi_{11}) = \frac{B(z;\psi^+)}{1-\lambda\mu B(z;\psi^+)^2} = \frac{B(z;\psi^+)}{2-(\lambda+\mu-z)B(z;\psi^+)}$$

$$= \frac{(\lambda+\mu-z)-\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}}{4\mu\lambda-(\lambda+\mu-z)[(\lambda+\mu-z)-\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}]}$$

$$= \frac{(\lambda+\mu-z)^2-[(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda]}{4\mu\lambda[(\lambda+\mu-z)+\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}]-(\lambda+\mu-z)(4\mu\lambda)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}},$$

de manera similar procedemos

$$B(z;\psi_{12}) = \frac{\lambda B(z;\psi^+)^2}{1-\lambda\mu B(z;\psi^+)^2} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{(\lambda+\mu-z)B(z;\psi^+)-1}{2-(\lambda+\mu-z)B(z;\psi^+)}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu}\left(\frac{(\lambda+\mu-z)[(\lambda+\mu-z)-\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}]-2\mu\lambda}{4\mu\lambda-(\lambda+\mu-z)[(\lambda+\mu-z)-\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}]}\right)$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{(\lambda+\mu-z)-\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}}{\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left(-1 + \frac{\lambda+\mu-z}{\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}}\right).$$

Donde $B(z;\psi^+)$ es la transformada de Stieltjes (1.27) del sistema $M/M/1$ de la Sección 1.6.

Como $\psi^+ = \psi^-$, entonces $\mu\psi_{22} = \lambda\psi_{11}$. Observemos que los saltos, si los hay, deben estar localizados en $x = (\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\mu})^2$. Sin embargo, usando la Fórmula de inversión de Perron-Stieltjes (Proposición 1.2), podemos ver que el tamaño de los saltos debe ser 0. En efecto, para $B(z;\psi_{11})$ en el punto $(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu})^2$ (análogo para $(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2$) usando (1.9) se tiene:

$$B((\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu})^2 + i\epsilon;\psi_{11}) = \frac{1}{\sqrt{[\lambda+\mu-(\lambda+\mu+2\sqrt{\mu\lambda}+i\epsilon)]^2-4\mu\lambda}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\lambda\mu-\epsilon^2+4i\epsilon\sqrt{\mu\lambda}-4\mu\lambda}},$$

por lo tanto

$$\psi(\{(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu})^2\}) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{\mathrm{Im}(\sqrt{4i\epsilon\sqrt{\mu\lambda}-\epsilon^2})} = 0.$$

La matriz espectral es entonces

$$d\Psi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{4\mu\lambda-(\lambda+\mu-x)^2}}\begin{pmatrix} 1 & (\lambda+\mu-x)/2\mu \\ (\lambda+\mu-x)/2\mu & \lambda/\mu \end{pmatrix} dx,$$

definida sobre el intervalo $[(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2, (\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu})^2]$.

Usando la recurrencia (2.5) y (2.4) podemos obtener que

$$Q_n^1(x) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n/2} U_n\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right), \quad n \geq 0,$$

$$Q_{-n-1}^1(x) = -\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{(n+1)/2} U_{n-1}\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right), \quad n \geq 0,$$

$$Q_n^2(x) = -\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(n+1)/2} U_{n-1}\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right), \quad n \geq 0,$$

$$Q^2_{-n-1}(x) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n/2} U_n\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right), \quad n \geq 0,$$

donde $(U_n)_n$ son los polinomios de Chebyshev de segunda especie dados en la Deficnión 1.4. Por lo tanto la matriz de polinomios ortogonales está dada de la siguiente manera

$$\mathbf{Q}_n(x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n/2} U_n\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) & -\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(n+1)/2} U_{n-1}\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) \\ -\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{(n+1)/2} U_{n-1}\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) & \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n/2} U_n\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) \end{pmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Ahora, los coeficientes potenciales de este proceso vienen dados por

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad \pi_{-n} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Para estudiar la recurrencia nos apoyaremos del Teorema 3.1, y para eso, veremos como se comportan las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}, \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}.$$

Si $\lambda < \mu$, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\lambda}{\mu} - 1}\right) = \frac{1}{\mu - \lambda} < \infty.$$

Así, por el Teorema 3.1, el proceso es transitorio.

Si ahora suponemos que $\lambda > \mu$, entonces procediendo de manera similar, ahora usando la otra serie tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{1 - \frac{\mu}{\lambda}}\right) = \frac{1}{\lambda - \mu} < \infty.$$

Así, por el Teorema 3.1, el proceso también es transitorio.

Por último, si $\lambda = \mu$ entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=-\infty}^{-1} 1 = \infty,$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty.$$

Así, por el Teorema 3.1, el proceso es recurrente. Para saber si es ergódico o recurrente nulo usaremos el Teorema 3.2.

Como $\pi_n = 1$, entonces $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi_n = \infty$, en consecuencia por el Teorema 3.2, la solución es recurrente nula.

Ahora que conocemos como se comporta el proceso respecto a su recurrencia o transitoriedad, veamos como se comportan los casos transitorios al tender a ∞ (y $-\infty$), para esto nos apoyaremos del Teorema 3.3.

Recordemos que $P_i(\infty) = \mathbb{P}(X_t \to \infty | X_0 = i)$ y $P_i(-\infty) = \mathbb{P}(X_t \to -\infty | X_0 = i)$. Como se ha estado tratando, primero trabajaremos con el supuesto de $\lambda < \mu$. En ese caso se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n = \infty.$$

Por el Teorema 3.3, $P_i(\infty) = 0$ y $P_i(-\infty) = 1$.

Si ahora suponemos que $\lambda > \mu$, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \infty.$$

Por el Teorema 3.3, $P_i(\infty) = 1$ y $P_i(-\infty) = 0$.

Por último, para $\lambda = \mu$, el cual es el único caso donde hay recurrencia, vemos que por el Teorema 3.4,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P_{ij}(t)}{P_{kl}(t)} = \frac{\pi_j}{\pi_l} = \frac{1}{1} = 1.$$

4.2. Proceso simétrico de nacimiento y muerte bilateral con tasas constantes

En este caso las tasas de nacimiento y muerte vienen dadas por

$$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = \mu, \quad n \geq 0, \quad \lambda_{-n} = \mu, \quad \mu_{-n} = \lambda, \quad n \geq 1.$$

Por otro lado, tenemos que $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^-$, que resulta ser la misma que la del sistema $M/M/1$ que se encuentra en la Sección 1.6. Aunado a esto, generan la misma transformada de Stieltjes. Usando (4.5), para $B(z;\psi_{11})$ y $B(z;\psi_{12})$ obtenemos

$$B(z;\psi_{11}) = \frac{B(z;\psi^+)}{1-\mu^2 B(z;\psi^+)^2} = \frac{B(z;\psi^+)}{1-\frac{\mu}{\lambda}[(\lambda+\mu-z)B(z;\psi^+)-1]}$$

$$= \frac{\frac{(\lambda+\mu-z)-\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}}{2\mu}}{(\lambda+\mu)-(\lambda+\mu-z)\frac{(\lambda+\mu-z)-\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}}{2\lambda}}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{(\lambda+\mu-z)-\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}}{2\lambda(\lambda+\mu)-(\lambda+\mu-z)[(\lambda+\mu-z)-\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}]}\right)$$

$$= \frac{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu-z)-(\mu+\lambda)\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}}{2z\mu(2\lambda+2\mu-z)}.$$

De manera similar obtenemos

$$B(z;\psi_{12}) = \frac{\mu B(z;\psi^+)^2}{1-\mu^2 B(z;\psi^+)^2} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{(\lambda+\mu-z)B(z;\psi^+)-1}{1-\frac{\mu}{\lambda}[(\lambda+\mu-z)B(z;\psi^+)-1]}\right)$$

$$= \frac{(\lambda+\mu-z)\frac{(\lambda+\mu-z)-\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}}{2\lambda\mu}-1}{(\lambda+\mu)-(\lambda+\mu-z)\frac{(\lambda+\mu-z)-\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}}{2\lambda}}$$

$$= \frac{1}{\mu}\left(\frac{(\lambda+\mu-z)[(\lambda+\mu-z)-\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}]-2\mu\lambda}{2\lambda(\lambda+\mu)-(\lambda+\mu-z)[(\lambda+\mu-z)-\sqrt{(\lambda+\mu-z)^2-4\mu\lambda}]}\right)$$

$$= \frac{(\lambda - z)^2 - \mu(\mu + 2z) - (\mu + \lambda - z)\sqrt{(\lambda + \mu - z)^2 - 4\mu\lambda}}{2z\mu(2\lambda + 2\mu - z)}.$$

En este caso tenemos que $\psi_{11} = \psi_{22}$.

La parte absolutamente continua de las medidas ψ_{11} y ψ_{12} va a estar soportada en el intervalo $[(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2, (\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu})^2]$, mientras que la parte discreta viene dada por los valores en los cuales $2x\mu(2\lambda + 2\mu - x) = 0$, que resultan ser $x = 2(\lambda + \mu)$ y $x = 0$. Ahora falta ver el tamaño de los saltos en estos puntos, para lo cual usaremos la fórmula (1.9).

Para $x = 0$ tenemos, por un lado,

$$\psi_{11}(\{0\}) = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \mathrm{Im} B(i\epsilon; \psi_{11})$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \mathrm{Im} \left[\frac{(\lambda - \mu)(\lambda + \mu - i\epsilon) - (\mu + \lambda)\sqrt{(\lambda + \mu - i\epsilon)^2 - 4\mu\lambda}}{2i\epsilon\mu(2\lambda + 2\mu - i\epsilon)} \right]$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{Im} \left[\frac{(\lambda - \mu)(\lambda + \mu - i\epsilon) - (\mu + \lambda)\sqrt{(\lambda + \mu - i\epsilon)^2 - 4\mu\lambda}}{2i\mu(2\lambda + 2\mu - i\epsilon)} \right]$$

$$= \mathrm{Im} \left[\frac{(\lambda - \mu)(\lambda + \mu) - (\mu + \lambda)\sqrt{(\lambda + \mu)^2 - 4\mu\lambda}}{2i\mu(2\lambda + 2\mu)} \right]$$

$$= \mathrm{Im} \left[\frac{(\lambda - \mu) - \sqrt{(\lambda + \mu)^2 - 4\mu\lambda}}{4i\mu} \right] = \mathrm{Im} \left[\frac{(\lambda - \mu) - \sqrt{(\lambda - \mu)^2}}{4i\mu} \right]$$

$$= -\frac{\lambda - \mu - |\lambda - \mu|}{4\mu} = \begin{cases} 0 & si \quad \lambda \geq \mu, \\ \dfrac{\mu - \lambda}{2\mu} & si \quad \lambda < \mu. \end{cases}$$

Y por otro lado

$$\psi_{12}(\{0\}) = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \mathrm{Im} B(i\epsilon; \psi_{12})$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \mathrm{Im} \left[\frac{(\lambda - i\epsilon)^2 - \mu(\mu + 2i\epsilon) - (\mu + \lambda - i\epsilon)\sqrt{(\lambda + \mu - i\epsilon)^2 - 4\mu\lambda}}{2i\epsilon\mu(2\lambda + 2\mu - i\epsilon)} \right]$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{Im} \left[\frac{(\lambda - i\epsilon)^2 - \mu(\mu + 2i\epsilon) - (\mu + \lambda - i\epsilon)\sqrt{(\lambda + \mu - i\epsilon)^2 - 4\mu\lambda}}{2i\mu(2\lambda + 2\mu - i\epsilon)} \right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{(\lambda+\mu)(\lambda-\mu)-(\mu+\lambda)\sqrt{(\lambda+\mu)^2-4\mu\lambda}}{2i\mu(2\lambda+2\mu)}\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{(\lambda-\mu)-\sqrt{(\lambda+\mu)^2-4\mu\lambda}}{4i\mu}\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{(\lambda-\mu)-\sqrt{(\lambda-\mu)^2}}{4i\mu}\right]$$

$$= -\frac{\lambda-\mu-|\lambda-\mu|}{4\mu} = \begin{cases} 0 & si \quad \lambda \geq \mu, \\ \dfrac{\mu-\lambda}{2\mu} & si \quad \lambda < \mu. \end{cases}$$

Para $x = 2(\lambda+\mu)$ tenemos, por un lado

$$\psi_{11}(\{2(\lambda+\mu)\}) = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \mathrm{Im} B(2(\lambda+\mu)+i\epsilon;\psi_{11})$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \mathrm{Im}\left[\frac{(\lambda-\mu)(-(\lambda+\mu)-i\epsilon)-(\mu+\lambda)\sqrt{(-(\lambda+\mu)-i\epsilon)^2-4\mu\lambda}}{-2i\epsilon\mu(2\lambda+2\mu+i\epsilon)}\right]$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Im}\left[\frac{(\lambda-\mu)(-(\lambda+\mu)-i\epsilon)-(\mu+\lambda)\sqrt{(-(\lambda+\mu)-i\epsilon)^2-4\mu\lambda}}{-2i\mu(2\lambda+2\mu+i\epsilon)}\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{(\lambda-\mu)(-(\lambda+\mu))-(\mu+\lambda)\sqrt{(-(\lambda+\mu))^2-4\mu\lambda}}{-2i\mu(2\lambda+2\mu)}\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)+(\mu+\lambda)\sqrt{(\lambda+\mu)^2-4\mu\lambda}}{2i\mu(2\lambda+2\mu)}\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{(\lambda-\mu)+\sqrt{(\lambda+\mu)^2-4\mu\lambda}}{4i\mu}\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{(\lambda-\mu)-\sqrt{(\lambda-\mu)^2}}{4i\mu}\right]$$

$$= -\frac{\lambda-\mu-|\lambda-\mu|}{4\mu} = \begin{cases} 0 & si \quad \lambda \geq \mu, \\ \dfrac{\mu-\lambda}{2\mu} & si \quad \lambda < \mu. \end{cases}$$

Y por otro lado

$$\psi_{12}(\{2(\lambda+\mu)\}) = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \mathrm{Im} B(2(\lambda+\mu)+i\epsilon;\psi_{12})$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Im}\left[\frac{(-\lambda-2\mu-i\epsilon)^2-(\mu^2+2\mu(2(\lambda+\mu)+i\epsilon))}{-2i\mu(2\lambda+2\mu+i\epsilon)}\right.$$

$$+\frac{(\mu+\lambda+i\epsilon)\sqrt{(-(\lambda+\mu)-i\epsilon)^2-4\mu\lambda}}{-2i\mu(2\lambda+2\mu+i\epsilon)}\Bigg]$$

$$=\operatorname{Im}\left[\frac{(-\lambda-2\mu)^2-(\mu^2+4\mu(\lambda+\mu))+(\mu+\lambda)\sqrt{(-(\lambda+\mu))^2-4\mu\lambda}}{-2i\mu(2\lambda+2\mu)}\right]$$

$$=\operatorname{Im}\left[\frac{(\lambda-\mu)(\lambda+\mu)+(\mu+\lambda)\sqrt{(\lambda+\mu)^2-4\mu\lambda}}{-2i\mu(2\lambda+2\mu)}\right]$$

$$=\operatorname{Im}\left[\frac{(\lambda-\mu)+\sqrt{(\lambda+\mu)^2-4\mu\lambda}}{-4i\mu}\right]=\operatorname{Im}\left[\frac{(\lambda-\mu)-\sqrt{(\lambda-\mu)^2}}{-4i\mu}\right]$$

$$=\frac{\lambda-\mu-|\lambda-\mu|}{4\mu}=\begin{cases}0 & si \quad \lambda\geq\mu,\\ -\dfrac{\mu-\lambda}{2\mu} & si \quad \lambda<\mu.\end{cases}$$

En resumen, la matriz espectral resulta ser

$$d\Psi(x)=\frac{\sqrt{4\mu\lambda-(\lambda+\mu-x)^2}}{2\pi\mu x(2\lambda+2\mu-x)}\mathbf{1}_{[(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2,(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu})^2]}\begin{pmatrix}\mu+\lambda & \mu+\lambda-x\\ \mu+\lambda-x & \mu+\lambda\end{pmatrix}dx$$

$$+\frac{\mu-\lambda}{2\mu}\left[\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\delta_0(x)+\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\delta_{2(\lambda+\mu)}(x)\right]\mathbf{1}_{\{\lambda<\mu\}}.$$

Usando la recurrencia (2.5) y (2.4) podemos obtener que

$$Q_n^1(x)=\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n/2}U_n\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right),\quad n\geq 0,$$

$$Q_{-n-1}^1(x)=-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(n+1)/2}U_{n-1}\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right),\quad n\geq 0,$$

$$Q_n^2(x)=-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(n+1)/2}U_{n-1}\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right),\quad n\geq 0,$$

$$Q_{-n-1}^2(x)=\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n/2}U_n\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right),\quad n\geq 0,$$

donde $(U_n)_n$ son los polinomios de Chebyshev de segunda especie dados en la Definición 1.4 y tomando la convención de $U_{-1}=0$. Por lo tanto la matriz de polinomios ortogonales está dada de la siguiente manera

$$\mathbf{Q}_n(x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n/2} U_n\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) & -\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(n+1)/2} U_{n-1}\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) \\ -\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{(n+1)/2} U_{n-1}\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) & \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n/2} U_n\left(\frac{-x+\lambda+\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}\right) \end{pmatrix}.$$

Ahora, los coeficientes potenciales de este proceso vienen dados por

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad \pi_{-n-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad n \geq 0.$$

Para la recurrencia, si $\lambda \leq \mu$, entonces se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n = \infty,$$

y

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n = \infty.$$

Por el Teorema 3.1, el proceso es recurrente.

Si $\lambda > \mu$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{1-\frac{\mu}{\lambda}}\right) < \infty,$$

y

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n} = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{1-\frac{\mu}{\lambda}}\right) < \infty.$$

Por el Teorema 3.1, el proceso es transitorio.

Para el caso en el que el proceso es recurrente ($\mu \geq \lambda$), si $\lambda = \mu$ entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \infty.$$

Por el Teorema 3.2, el proceso es recurrente nulo, y por el Teorema 3.4,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P_{ij}(t)}{P_{kl}(t)} = \frac{\pi_j}{\pi_l} = \frac{1}{1} = 1.$$

Si $\mu > \lambda$ entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi_n = 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 2\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{2\mu}{\mu-\lambda} < \infty.$$

Por el Teorema 3.2, el proceso es ergódico y la distribución invariante viene dada por

$$v = (\ldots, v_{-1}, v_0, v_1, \ldots),$$

donde

$$v_n = \frac{\mu-\lambda}{2\mu}\pi_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

con π_n los coeficientes potenciales del proceso.

También podemos calcular el tiempo esperado de regreso al estado i, dado por

$$\int_0^{\infty} tdF_{ii}(t) = \frac{1}{(\lambda_i+\mu_i)\pi_i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\pi_n = \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\frac{1}{\pi_i}\right)\left(\frac{2\mu}{\mu-\lambda}\right) = \left(\frac{1}{\pi_i}\right)\left(\frac{2\mu}{\mu^2-\lambda^2}\right),$$

si $i \geq 0$,

$$\left(\frac{1}{\pi_i}\right)\left(\frac{2\mu}{\mu^2-\lambda^2}\right) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i\left(\frac{2\mu}{\mu^2-\lambda^2}\right),$$

si $i < 0$,

$$\left(\frac{1}{\pi_i}\right)\left(\frac{2\mu}{\mu^2-\lambda^2}\right) = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{|i+1|}\left(\frac{2\mu}{\mu^2-\lambda^2}\right).$$

Por último, por el Teorema 3.4 se tiene que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{P_{ij}(t)}{P_{kl}(t)} = \frac{\pi_j}{\pi_l},$$

si $j \geq 0$ y $l \geq 0$,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{P_{ij}(t)}{P_{kl}(t)} = \frac{\pi_j}{\pi_l} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^l} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-l},$$

si $j \geq 0$ y $l < 0$,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{P_{ij}(t)}{P_{kl}(t)} = \frac{\pi_j}{\pi_l} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{|l+1|}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-|l+1|},$$

si $j < 0$ y $l \geq 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P_{ij}(t)}{P_{kl}(t)} = \frac{\pi_j}{\pi_l} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{|j+1|}}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{l}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{|j+1|-l},$$

si $j < 0$ y $l < 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P_{ij}(t)}{P_{kl}(t)} = \frac{\pi_j}{\pi_l} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{|j+1|}}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{|l+1|}} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{|j+1|-|l+1|}.$$

Para el caso en el que el proceso es transitorio ($\lambda > \mu$), veamos como se comporta el proceso en ∞ y $-\infty$, esto es, calcular $P_i(\infty) = \mathbb{P}(X_t \to \infty | X_0 = i)$ y $P_i(-\infty) = \mathbb{P}(X_t \to -\infty | X_0 = i)$.

Como $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}$ y $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}$ convergen, entonces, por el Teorema 3.3, tenemos que

$$P_i(\infty) = \frac{\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{i-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}}{\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}} = \frac{\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{i-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}}{\displaystyle\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n + \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n}$$

$$= \frac{\mu(\lambda-\mu)}{\lambda+\mu} \sum_{n=-\infty}^{i-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n},$$

además $P_i(-\infty) = 1 - \dfrac{\mu(\lambda-\mu)}{\lambda+\mu} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{i-1} \frac{1}{\lambda_n \pi_n}$.

Bibliografía

[1] Anderson, W.J., Continuous-time Markov chains. An applications-oriented approach, Springer series in Statistics, NY, 1991.

[2] Chung, K. L., Foundations of the Theory of Continuous Parameter Markoff Chains, Proceedings of the Third Berkeley Symposium, Vol 2 (1956), pp. 29-40.

[3] Domínguez de la Iglesia, M., Orthogonal polynomials in the spectral analysis of Markov processes. Birth-death models and diffusion, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 181. Cambridge University Press, 2021.

[4] Feller, W., On Boundaries and Lateral Conditions for the Kolmogorov Differential Equations, Ann. of Math., Vol. 65, 1957, 527-570.

[5] Grünbaum, F.A., QBD processes and matrix orthogonal polynomials: some new explicit examples, Numerical Methods for Structured Markov Chains, eds. D. Bini, B. Meini, V. Ra- maswami, M.A. Remiche y P. Taylor, Dagstuhl Seminar Proceedings, 2008.

[6] Ismail, M.E.H., Letessier, J., Masson, D. y Valent, G., Birth and death processes and orthogonal polynomials, in Orthogonal Polynomials, P. Nevai (editor) Kluwer Acad. Publishers, 1990, 229–255.

[7] Ismail, M.E.H., Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable, con dos capítulos por Walter Van Assche. Con prefacio por Richard A. Askey. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 98. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[8] Karlin, S. y McGregor, J., Representation of a class of stochastic processes, Proc. Nat. Acad. Sci. 41 (1955), 387–391.

[9] Karlin, S. y McGregor, J., The differential equations of birth and death processes and the Stieltjes moment problem, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 489–546.

[10] Karlin, S. y McGregor, J. L., The classification of birth and death processes, Trans. Amer. Math. Soc., Vol 86 (1957), pp. 366-400.

[11] Karlin, S. y McGregor, J., Random walks, IIlinois J. Math. 3 (1959), 66–81.

[12] Koelink, E., Spectral theory and special functions, Summer School, Laredo, España, Julio 24–28, 2000, ver http://arxiv.org/abs/math/0107036v1.

[13] Latouche, G. y Ramaswami, V., Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling, ASA-SIAM Series on Statistics and Applied Probability, 1999.

[14] Ledermann, W. y Reuter, G.E., Spectral theory for the differential equations of simple birth and death processes, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 246 (1954), 321–369.

[15] Pruitt, W., Bilateral birth and death processes, Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1962).

[16] Pruitt, W., Bilateral birth and death processes. Technical report, Applied Mathematics and Statistics Laboratories, Stanford University (1960) California.

[17] Rincón, L., Introducción a los procesos estocásticos, 1^{ra} edición, México, UNAM, Facultad de Ciencias, 2012., pp.322.