Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Estudio sobre la obra "El Libro de los Números Cuadrados" de Leonardo de Pisa (Fibonacci)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICA

PRESENTA:

Cristina Angélica Núñez Rodríguez

TUTOR

Mat. Julio César Guevara Bravo

Ciudad Universitaria, CD. MX. 2022

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

La matemática es
la reina de las ciencias
y la teoría de números es
la reina de las matemáticas.
Gauss

Datos de la alumna
Núñez Rodríguez Cristina Angélica Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 302050220
Datos del tutor
Mat. Julio César Guevara Bravo
Datos del sinodal 1
Dra. Carmen Martínez Adame Isais
Datos del sinodal 2
M. en C. José Rafael Martínez Enríquez
Datos del sinodal 3
Mat. Ernesto Mayorga Saucedo
Datos del sinodal 4
Mat. Gabriela Cervantes Piza
Datos del trabajo escrito
Estudio sobre la obra "El Libro de los Números Cuadrados" de Leonardo de Pisa (Fibonacci) XXX pag 2022

Índice general

Introducción

Cuando pensamos en Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, generalmente nos llega a la memoria el problema de los conejos y los números que llevan su nombre, estos sólo son dos de los problemas, entre muchos, que aparecen en su *Liber Abaci* [22]. Cabe mencionar que esta obra es extensa y contiene una cantidad considerable de proposiciones aritméticas y geométricas de gran utilidad para cierto tipo de educación en la baja Edad Media[1].

Las aportaciones de Fibonacci fueron notables y vastas, y a pesar de que no existía la imprenta en su época, actualmente contamos con cuatro de sus obras[2] que podemos consultar en ediciones de gran calidad. En este trabajo de tesis se realizará el análisis del *Liber Quadratorum*. Antes de entrar al estudio correspondiente consideramos que es adecuado contextualizar a Leonardo en su época.

Leonardo de Pisa o Leonardo Bigollo[3], conocido como Fibonacci[4], nació en la ciudad de Pisa en el año 1180. Su padre, un comerciante italiano que ocupaba un cargo consular lo inició en asuntos del negocio y en la contabilidad mercantil, esto despertó en él un interés por las matemáticas que iba mucho más allá de los usos mercantiles.

El siglo XIII fue un periodo de transformación en el ámbito intelectual. En estos años se produjeron grandes cambios en el crecimiento de las universidades, como las de París, Bolonia, Nápoles, Oxford y otras. Durante la temprana edad media (aprox. siglos V al XI) las ciencias matemáticas atravesaron por una desaceleración. Por un lado, la matemática desarrollada en la Grecia clásica frenó su desarrollo, en este periodo medieval se estudiaba la aritmética y geometría desde entornos místicos, adivinatorios, de la cábala y se dejó de avanzar con las inercias de Diofanto, Apolonio, Teodosio y Euclides, entre otros. Por otro lado, la matemática usada para la construcción y la infraestructura avanzó, se puede ver en los grandes castillos y catedrales. A partir del siglo XII diversos sucesos en Europa impulsaron a grupos de europeos a buscar en el desarrollo intelectual de Oriente. Muchos viajeros pasaron de Italia a Egipto, Asia Menor,

[1] La aritmética y la geometría formaron parte de lo que era el Quadrivium, que fue parte del curruculum educativo que se propuso desde finales del siglo VIII

[2] *Liber Abaci*, *Practica Geometriae*, *Flos super solutionibus quarumdam questionum ad numerum et ad geometriam pertinentium* y *Liber Quadratorum*

[3] Bigollo es probablemente el nombre de pila de Leonardo el cual aparece en un acta de compra de tierras a nombre de su hermano.

[4] A Leonardo lo identificaban de niño como "Filius Bonacci", es decir, "hijo de Bonacci", Bonancci era el apodo de su padre y significa "bien intencionado".

Siria y Bagdad, pero fueron pocos los que se atrevieron a penetrar hasta India y China. Así, Oriente transmitió hacia Occidente, en este periodo, su conocimiento científico, en particular la matemática árabe e hindú.

Fibonacci fue uno de los pioneros en este movimiento, en los últimos años del siglo XII hizo un recorrido por el este, visitó los grandes mercados de Egipto y Asia Menor, fue hasta Siria y regresó a través de Constantinopla y Grecia. Fibonacci, al principio, no estaba cómodo con las extrañas y nuevas visiones, pero estudió cuidadosamente las costumbres de la gente y, especialmente, se adentro en comprender el sistema aritmético oriental, en el que se apoyaron los mercaderes; además, reconoció su superioridad sobre el sistema numérico romano que se usaba en Occidente. Después de conocer este sistema se convirtió en un acérrimo defensor, y llegó tan lejos su interés por este sistema que decidió escribir un libro que explicara a los italianos su uso y aplicaciones. El resultado de los viajes de Fibonacci fue el magnífico *Liber Abaci*[5], la mayor aritmética de la Edad Media, y la primera en mostrar con ejemplos la gran superioridad del sistema numérico hindú-árabe sobre el sistema romano. Contenía aplicaciones a la contabilidad comercial, conversión de pesos y medidas, cálculo de intereses, cambio de monedas, entre otros temas. En un contexto más aritmético describe al cero, la notación posicional, la descomposición en factores primos, los criterios de divisibilidad y mucho más.

El *Liber Abaci*[6] no fue el primer libro escrito en italiano en el que se usó y se explicaron a los números hindú-árabes, pero si se reconoce que fue un trabajo diferente en cuanto al valor añadido a su contenido, es decir, es un texto valioso tanto por la manera como refleja su comprensión de la matemática como por la originalidad que muestra para abordar los temas.

No se sabe si Fibonacci también aprendió la lengua árabe, pero lo que sí se puede suponer es que conoció las traducciones latinas de obras como *Algoritmi de numero Indorum* y *Liber Algorismi de practica arismetica*[7].

Después escribió *Practica Geometriae*[8], un extenso trabajo sobre geometría, el cual no muestra la misma originalidad que su primer libro, pero está excelentemente escrito y el rigor y la elegancia de las pruebas es notable. En él aborda problemas de geometría referente a figuras planas y sólidas.

Otra de sus obras es *Flos super solutionibus quarumdam questionum ad numerum et ad geometriam pertinentium*[9]. Éste es un compendio de 15 problemas de análisis determinado e indeterminado de primer grado. De manera simultánea en 1225 estaba escribiendo la obra *Liber Quadratorum*[10]. Es importante señalar que parte de las motivaciones para escribir ambas obras nacen de los encuentros con el emperador Federico II y con Juan de Palermo.[11] En estas reuniones tanto Teodoro, astrónomo de la Corte, como Palermo, le propusieron algunos

[5] «abaci» en el sentido de aritmética y no del ábaco como instrumento.
[6] Libro de Ábaco, escrito en 1202 y posiblemente aumentado en 1228.
[7] Escritas por Al-Juarismi aproximadamente en el siglo IX
[8] Geometría Práctica, terminada en 1220.
[9] Ramillete de soluciones de ciertas cuestiones relativas al número y a la geometría, 1225.
[10] Libro de los Números Cuadrados, 1225.
[11] Palermo era un notario que actuaba como agente confidencial del emperador en 1240, del cual no sabemos nada de sus gustos científicos más allá de su interés en las matemáticas.

problemas para que exhibiera su sapiencia como matemático. Así, Leonardo se vio comprometido a participar en una especie de torneo matemático, algo muy común en esa época. Varias de las soluciones de los problemas presentados por Leonardo para el Maestro Teodoro están diseñadas para ilustrar el método y no para formar un tratado sistemático que condujera a un gran resultado o que resolviera una cuestión claramente referida en el entonces identificado campo matemático. Algunos de los problemas que le propusieron en estos encuentros y debates serían parte de la plataforma sobre la que se sostendría el *Liber Quadratorum*, me referiré a tres de ellos exhibiendo su contenido.

Problemas asociados con Juan de Palermo y Federico II

a) Encontrar un número cuyo cuadrado, al aumentarle o disminuirle 5 unidades, sea siempre un cuadrado.

b) Con base en lo expuesto en el libro X de la obra de Euclides *Elementos* [10], encontrar una línea cuya longitud satisfaga la condición (expresada con símbolos modernos): $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

c) Tres hombres tienen conjuntamente un capital el cual reparten al azar. A continuación, el primero aporta a un fondo común $\frac{1}{2}$ de su porción, el segundo $\frac{1}{3}$ y el tercero un $\frac{1}{6}$. Después ditribuyen en 3 partes iguales el fondo común. ¿Cuánto tuvo cada hombre en el primer reparto, si la cantidad final fue: para el primero la mitad del capital inicial, para el segundo la tercera parte y para el tercero la sexta parte?

   En el primer problema Leonardo propuso la solución $^{41}/_{12}$, cuyo cuadrado al sumarle o restarle 5 da lugar a los cuadrados de $^{49}/_{12}$ y $^{31}/_{12}$, respectivamente. Esta clase de problemas le dio la posibilidad de estudiar las ecuaciones indeterminadas, donde aparecen cuadrados. Éste es uno de los ejemplos directos que dio lugar al *Liber Quadratorum*. En él se utiliza la propiedad de que la suma de los números impares sucesivos es un cuadrado, y lo hace para obtener varias soluciones particulares y, posteriormente, la general a partir de la ecuación pitagórica, es decir, dados a, b y c tales que $z^2 = x^2 + y^2$, entonces cumplen también $z^2 \pm 2xy = (x \pm y)^2$. Además, calcula la suma de los cuadrados de los números naturales, de los pares, de los impares, así como otras relaciones entre cuadrados.

   El segundo problema condujo a Fibonacci a uno de los primeros análisis de una relación, que ahora llamaríamos ecuación algebraica. Cabe mencionar que pasaron más de trescientos años para que se conociera la fórmula que resuelve la ecuación de tercer grado. En el libro X de Euclides se describe una clasificación de los segmentos que hoy diríamos son de la forma $\sqrt{m}$, $m \pm \sqrt{p}$, $\sqrt{m} \pm \sqrt{p}$, $\sqrt{m \pm \sqrt{p}}$ y $\sqrt{\sqrt{m} \pm \sqrt{p}}$ (con m y p racionales). Estos segmentos corresponden a lo que se reconoce como "números construibles". Así, Fibonacci abordó el problema de un modo geométrico, semejante a como lo hizo Euclides. Hay que tener presente que en esta época aún no se admitía la "existencia", racionalidad o pertinencia de las raíces negativas.

De regreso a la relación que propone de Palermo, en el problema 2, si evaluamos en $x = 1$ obtendremos 13, lo cual es menor al valor deseado, y si se evalúa en $x = 2$, el resultado será 36, más de lo que se solicita. Con esto se concluye que el valor de x no es un valor entero, sino que se encuentra entre 1 y 2. Por lo tanto Fibonacci supone que x es un número racional de la forma $\frac{m}{p}$, con m y p primos entre sí. Al sustituir en la igualdad se obtiene

$$\left(\frac{m}{p}\right)^3 + 2\left(\frac{m}{p}\right)^2 + 10\left(\frac{m}{p}\right) = \frac{m^3 + 2pm^2 + 10p^2m}{p^3} = 20.$$

Para que la fracción sea un número entero, el númerador tiene que ser múltiplo de p^3 y por ende múltiplo de p. Los dos últimos sumandos son múltiplos de p, por lo tanto, m^3 lo tendría que ser. Por la proposición 30 del libro VII de los *Elementos* se tiene que si un número divide a un producto de dos factores y es primo con uno de ellos, entonces debe dividir al otro, lo que nos lleva a que p divide a m y eso contradice la hipótesis de que la solución era un número racional con m y p primos entre sí.

Posteriormente Fibonacci hizo evaluaciones en la ecuación requerida. Inició sus ensayos con soluciones de la foma $\sqrt{m}$, $m \pm \sqrt{p}$, $\sqrt{m} \pm \sqrt{p}$, de donde resultan las siguientes igualdades

$$2m + (m + 10)\sqrt{m} = 20,$$

$$m^3 + 2m^2 + 3mp + 10m + 2p + (3m^2 + 4m + p + 10)\sqrt{p} = 20,$$
$$2m + 2p + (m + 3p + 10)\sqrt{m} + (p + 3m + 10)\sqrt{p} + 4\sqrt{mp} = 20.$$

Consideró que las tres resultaban ser falsas y planteó que lo eran por igualar un número racional con un número irracional. Para el resto de los irracionales $\sqrt{m \pm \sqrt{p}}$ y $\sqrt{\sqrt{m} \pm \sqrt{p}}$, obtendremos lo siguiente

$$\sqrt{m^3 + 3mp + 20m^2 + 100m + (3m^2 + 40m + p + 100)\sqrt{p}}$$
$$+2m + 2\sqrt{p} = 20,$$
$$\sqrt{20m + 20p + (m + 3p + 100)\sqrt{m} + (3m + p + 100)\sqrt{p} + 40\sqrt{mp}}$$
$$+2\sqrt{m} + 2\sqrt{p} = 20.$$

Al igual que con las tres anteriores instancias consideró que no se cumple la igualdad, ya que se iguala un número irracional con un racional. Al quedar convencido de que x no puede ser ni fracción ni irracional cuadrático, entonces encontró una solución aproximada, expresada en términos de fracciones sexagesimales para el valor

$$x = 1.22^{I}7^{II}42^{III}30^{IV}4^{V}40^{VI} = 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{30}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^5},$$

y ésta, transformada como expresión decima $x = 368807874148$ tiene una exactitud de nueve cifras. Fue la mejor aproximación de una raíz irracional. Pero quedó un hueco histórico en este resultado, ya que Fibonacci no dejó ningún indició de cómo llegó a él. Algunos historiadores relacionan el resultado con el método chino del *fan fa*, el cual posiblemente pudo conocer a través de los árabes.

En cuanto al tercer problema, es el análisis de una ecuación indeterminada de primer grado. Fibonacci adopta una incógnita auxiliar u, que equivale a una tercera parte del fondo (la suma de la mitad, de la tercera parte y del sexto de las cantidades tomadas al azar). Si dichas cantidades son representadas por x, y y z, respectivamente, y c es el capital total, tenemos las siguientes ecuaciones

$$u + \left[x - \frac{x}{2}\right] = \frac{c}{2}, \qquad u + \left[y - \frac{y}{3}\right] = \frac{c}{3} \qquad \text{y} \qquad u + \left[z - \frac{z}{6}\right] = \frac{c}{6}.$$

A través de algunas operaciones obtenemos que

$$x = 2\left[\frac{c}{2} - u\right] \qquad y = \frac{3}{2}\left[\frac{c}{3} - u\right] \qquad \text{y} \qquad z = \frac{6}{5}\left[\frac{c}{6} - u\right].$$

Como éstas deben sumar c, se obtiene $7c = 47u$, y tomando $u = 7$, como hace Fibanacci, resulta $c = 47$, de donde las cantidades tomadas al azar son respectivamente $x = 33$, $y = 13$ y $z = 1$.

Fibonacci dedicó el *Liber Quadratorum* al emperador Federico II, en cuya figura reconoció a alguien que a lo largo de toda su vida mostró un gran interés por el arte y la ciencia, y quien además ya conocía el *Liber Abaci*. El método de prueba empleado por Leonardo en el *Liber Quadratorum* sigue la misma ruta que el de la aritmética de los segmentos de corte euclidiano, es decir, considerar a los números de manera general como segmentos de línea. Es importante resaltar que el texto no contiene ningún símbolo que ahora pudieramos decir que es "algebraico", por lo que cada resultado debe representarse mediante líneas.

Leonardo murió en 1250. Poco se sabe de su vida, además de lo mencionado, y las únicas notas que se tienen sobre su personalidad y las circunstancias relacionadas con su vida son las que él mismo ofrece en el prólogo de su primera obra.

Contenido de la tesis

El *Liber Quadratorum* está conformado por 20 proposiciones que se podrían dividir en 3 grandes secciones. La primera (que comprende de la Proposición 1 a la 8 y la 10) comienza con los elementos de lo que se conocía de los números cuadrados desde la antigua Grecia y avanza gradualmente hasta plantear proposiciones que caracterizan más el momento matemático de Fibonacci. La segunda (Proposión 9 y 11) introduce una clase de números que denomina congruentes y da una solución general al problema de análisis indeterminado que le habían propuesto como desafío[12]. La tercera (de la Proposición 12 a la 20) utiliza los

[12]Hasta este momento no en el sentido de congruencia de la aritmética modular.

números cuadrados como herramientas para sus posteriores proposiciones y los hace intervenir en una identidad que es conocida como identidad de Fibonacci, la cual permite pasar de un triángulo rectángulo a otro, es decir, encontrar dos triángulos con la misma hipotenusa y distintos catetos.

Fibonacci utiliza frecuentemente las proposiciones precedentes para construir las que siguen, por lo que el libro plantea un encadenamiento lógico. La mayoría de las proposiciones no están rigurosamente demostradas, en tanto que su argumentación ofrece una especie de inducción incompleta, dando ejemplos prácticos y específicos. Por ejemplo, en la Proposición 1 cuando quiere encontrar dos números cuadrados que sumados den otro número cuadrado, comienza con el 9 que es cuadrado impar y le suma todos los números impares menores a él, obteniendo así el otro cuadrado que sumado a 9 resulta ser cuadrado. De la misma manera, posteriormente toma el 36, un cuadrado par, lo parte en 2 números impares consecutivos y vuelve a obtener una sucesión de impares que sumados resultan ser un número cuadrado. Su dominio algorítmico es excelente y todo lo que afirma puede ser demostrado con las herramientas actuales. No se encuentran errores importantes si no se considera la incompletitud de algunas demostraciones.

El contenido del libro supera de sobremanera al desafío presentado por Federico II y Juan de Palermo y muestra el estado de la aritmética geometrizada de su época.

No hay duda de que las ediciones que se conocen del *Liber Quadratorum* han aportado elementos importantes para entender este trabajo de Fibonacci. Para esta tesis se consultaron principalmente la francesa de Albert Blanchard [19], la inglesa de Academic Press [21] y la argentina de Eudeba [20]. Después de estudiar las ediciones mencionadas, consideramos que las traducciones eran un apoyo de gran valor, pero detectamos que aún había trabajo por desarrollar, y nos referimos a que el estudio de los 20 problemas aún no estaba terminado. Las traducciones si bien son de gran calidad, no analizan las aportaciones matemáticas. La edición inglesa es la que más se acerca a mostrar un estudio matemático, pero pensamos que aún quedaban elementos que añadir.

En la tesis analizamos las 20 proposiciones y están presentadas cada una en un capítulo. Cabe aclarar que al inicio de cada uno de ellos no hacemos una transcripción literal del texto original de Fibonacci, sino una interpretación de los enunciados de cada proposición. La notación que se usa para los análisis matemáticos es la actual, pero tratamos de conservar la manera de exposición de Fibonacci, en la medida de lo posible. A continuación se enumeran las proposiciones identificando de manera abreviada la temática en la que se insertan.

Proposición I: Ternas Pitagóricas,
Proposición II: La suma de números impares genera números cuadrados.
Proposición III: Suma de dos cuadrados y los triángulos rectángulos.
Proposición IV: Producto de suma de cuadrados y su conversión a suma de dos cuadrados.
Proposición V: Un número cuadrado como suma de dos cuadrados.

Proposición VI: Un número no cuadrado como suma de dos cuadrados.
Proposición VII: Suma de n cuadrados.
Proposición VIII: Suma de impares, pares y múltiplos de n al cuadrado.
Proposición IX: Primos relativos cuya suma es par y su venticuatroava parte es entera.
Proposición X: Un número central, una serie de números y el producto entre ellos.
Proposición XI: Los números congruentes.
Proposición XII: Un número congruente por un número cuadrado será congruente.
Proposición XIII: Un número congruente cuya quinta parte es entera y cuadrada.
Proposición XIV: El problema de Juan de Palermo.
Proposición XV: Suma y diferencia entre dos números y la razón que guardan entre ellas.
Proposición XVI: Un número cuadrado y su raíz para generar dos nuevos cuadrados.
Proposición XVII: Ternas de números impares y teoría de diferencias finitas.
Proposición XVIII: Terna de cuadrados cuya diferencia es una razón dada.
Proposición XIX: Terna de cuadrados generada por suma de cuadrados.
Proposición XX: Tres números y sus cuadrados para generar tres nuevos cuadrados.

Capítulo 1

Proposición I

Ternas Pitagóricas.

El objetivo de esta proposición es construir ternas pitagóricas siguiendo diferentes métodos[1]. Algunos de estos son:

1. Partir de un cuadrado impar, es decir, aquel cuya raíz es un número impar.

2. Partir de un cuadrado par, es decir, aquel cuya raíz es un número par.

3. Partir de un cuadrado impar cuya tercera parte sea entera.

4. Generalizar los métodos anteriores.

5. A partir de dos números cuadrados simultáneamente pares o impares.

De igual manera analiza algunas propiedades entre cuadrados como las siguientes:

1. Todo cuadrado excede al cuadrado inmediato anterior en una cantidad igual a la suma de sus raíces. Es decir, $x^2 - y^2 = x + y$, donde $x = y + 1$.

2. Si un número cuadrado x^2 excede al cuadrado z^2 que le precede en dos lugares[2], entonces la diferencia entre ellos es una cantidad igual al cuadruplo de la raíz del cuádrado intermedio.[3] Es decir, $x^2 - z^2 = 4y$, donde $z = y - 1$ y $x = y + 1$.

[1]Cabe señalar, que Fibonacci no muestra en todas las proposiciones un enunciado explícito como punto de partida del problema, esto lo podemos ver en la primera proposión, ahí inicia directamente exponiendo diversos casos para encontrar ternas pitagóricas.

[2]Es decir, existe un cuadrado y^2, tal que $x > y > z$ y además son consecutivos, y como $z = y - 1$, $x = y + 1$, entonces $z = x - 2$.

[3]Como $z = y - 1$, entonces la raíz del cuadrado intermedio es $y = z + 1$.

3. Si dos raíces sucesivas se suman y forman un número cuadrado, entonces, el cuadrado del número mayor es igual a la suma de dos cuadrados, donde uno de ellos es la suma antes mencionada y el otro el cuadrado de la raíz menor. Es decir, si $x + y = w^2$ y $x = y + 1$, entonces $x^2 = w^2 + y^2$. Este es un caso particular de la propiedad 1.

4. Si el cuádruplo de un número es un cuadrado, entonces dicho cuadrado más el cuadrado del número que antecede al número cuadruplicado será igual al cuadrado del número que sucede al número cuadruplicado. Es decir, si $4y = w^2$, donde $z = y - 1$, $x = y + 1$, entonces $x^2 = w^2 + z^2$, caso particular de la propiedad 2.

5. El cuádruplo de un número cuadrado será un cuadrado también. Es decir, si $y = x^2$, entonces $4y$ es un cuadrado.

6. Todo cuadrado excede a cualquier cuadrado menor que él en el producto de la diferencia entre sus raíces y la suma de las mismas. Es decir, $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, para cualesquiera dos cuadrados.

Métodos para construir ternas pitagóricas.

1. *A partir de un cuadrado impar.*

   Este método de Fibonacci inicia con un cuadrado impar. Para este caso tomamos $9 = 3^2$, después vemos la suma de los impares que están por debajo de él hasta llegar a la unidad (Fig. 1.1), es decir, $7+5+3+1 = 16$. Fibonacci sabía que la suma de los n primeros impares es un cuadrado[4], por lo tanto se tendrá que $9 + 16$ es igual a un nuevo cuadrado, esto es, $3^2 + 4^2 = 5^2$, que es lo que se buscaba.

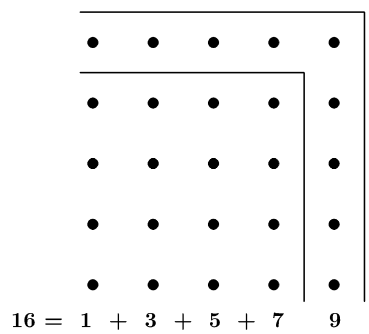


Figura 1.1: A partir de la geometría de los números poligonales lo que nos plantea Fibonacci es la construcción de una terna partiendo de un cuadrado impar.

   De manera general y con una exposición actual, interpretamos que Fibonacci considera un cuadrado impar $(2n-1)^2$, por lo que el cuadrado que se forma dentro de él (Fig. 1.1), es decir, él que es equivalente a la suma de los impares desde la unidad hasta el impar $(2n-1)^2-2$, es de la forma $\left(\frac{(2n-1)^2-1}{2}\right)^2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{(2n-1)^2-1}{2}\right)^2 + (2n-1)^2 &= \left(\frac{4n^2-4n}{2}\right)^2 + (2n-1)^2\\ &= 4n^4 - 8n^3 + 8n^2 - 4n + 1\\ &= \left(\frac{4n^2-4n+2}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{(2n-1)^2+1}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

   Entonces, $\left(\frac{(2n-1)^2-1}{2}\right)^2$, $(2n-1)^2$ y $\left(\frac{(2n-1)^2+1}{2}\right)^2$ son una terna pitagórica. Formar ternas pitagóricas de esta manera sólo depende de seleccionar cualquier cuadrado impar para iniciar.

[4]Pero en el orden de exposición, se demostrará en la Proposición 2.

2. *A partir de un cuadrado par.*

   Para este caso tomamos un cuadrado par, por ejemplo $36 = 6^2$, cuya mitad es 18. Su método requiere encontrar dos impares sucesivos, uno menor y otro mayor a 18. Ellos se obtendrán al restar y sumar una unidad a la mitad. Los números obtenidos son 17 y 19 (Fig. 1.2), respectivamente, y cuya suma es igual a 36. Se puede verificar que la suma de los impares inferiores a 17 es $15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 64$, y por el método anterior sabemos que será un número cuadrado; por lo tanto, tendremos que $36 + 64 = 100$, es decir, $6^2 + 8^2 = 10^2$. Y así se obteniene la terna de cuadrados. La configuración de este método de Fibonacci es la siguiente:

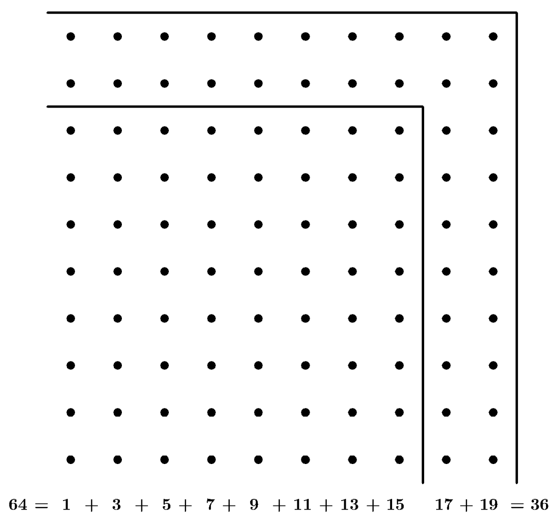


Figura 1.2: Construcción de una terna partiendo de un cuadrado par.

De manera general, con base en el planteamiento de Fibonacci y con notación actual, tenememos que: Sea $(2n)^2$ un cuadrado par cuya mitad es $\frac{4n^2}{2} = 2n^2$. Si a dicha mitad se le resta y suma 1, respectivamente, resultarán los números $2n^2 - 1$ y $2n^2 + 1$, impares sucesivos, cuya suma es $4n^2$. Sabemos por el método anterior que el cuadrado que se forma por debajo del impar menor será equivalente a $\left(\frac{2n^2-1-1}{2}\right)^2 = (n^2 - 1)^2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}(n^2-1)^2 + (2n)^2 &= n^4 - 2n^2 + 1 + 4n^2\\ &= n^4 + 2n^2 + 1\\ &= (n^2+1)^2.\end{aligned}$$

Entonces, $(n^2 - 1)^2$, $(2n)^2$ y $(n^2 + 1)^2$ forman una terna pitagórica, construidos con base en seleccionar dos impares consecutivos que sumen un cuadrado par.

3. *A partir de un cuadrado impar cuya tercera parte es entera.*

   Para este caso se considera el cuadrado $81 = 9^2$ cuya tercera parte es 27, que es un impar. El método requiere encontrar 3 impares sucesivos, incluyendo al 27, por lo tanto sólo resta encontrar el impar menor y el mayor. Estos son 25 y 29 respectivamente, cuya suma es 81 (Fig. 1.3). Calculamos nuevamente la suma de los impares inferiores a 25, es decir, $23+21+19+17+15+13+11+9+7+5+3+1 = 144$; sabemos que dicha suma será un número cuadrado. Por lo tanto obtendremos $81+144 = 225$, es decir, $9^2 + 12^2 = 15^2$. Se exhibe así una terna.

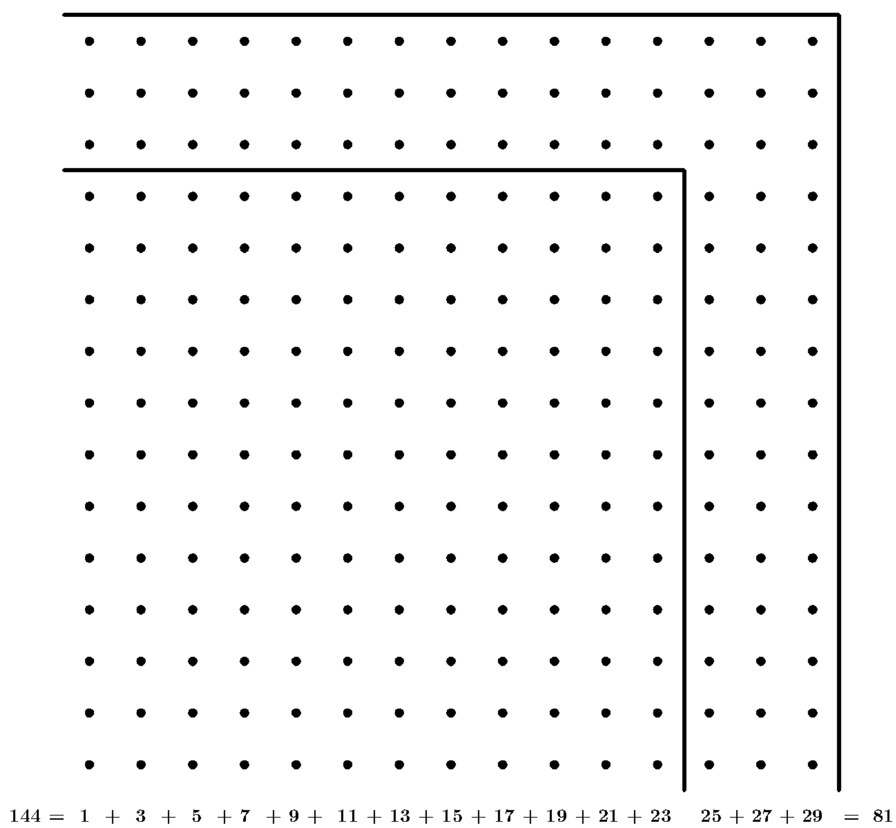


Figura 1.3: Construcción de una terna a partir de un cuadrado impar cuya tercera parte es entera.

De manera general, sea $(2n-1)^2$ un cuadrado impar cuya tercera parte es entera y de la forma $\frac{(2n-1)^2}{3}$. Al restar y sumar 2 unidades a dicha parte entera, obtendremos $\frac{(2n-1)^2}{3} - 2$ y $\frac{(2n-1)^2}{3} + 2$, que son 3 números impares sucesivos cuya suma es $(2n-1)^2$. Sabemos por los métodos anteriores que el cuadrado que se forma por debajo del impar menor es de la forma

$$\left(\frac{\left(\frac{(2n-1)^2}{3}-2\right)-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{(2n-1)^2-9}{6}\right)^2.$$ Por lo tanto

$$\begin{aligned}(2n-1)^2+\left(\frac{(2n-1)^2-9}{6}\right)^2 &= (2n-1)^2+\frac{(2n-1)^4-18(2n-1)^2+81}{36}\\ &= \frac{(2n-1)^4+18(2n-1)^2+81}{36}\\ &= \left(\frac{(2n-1)^2+9}{6}\right)^2.\end{aligned}$$

Entonces, $(2n-1)^2$, $\left(\frac{(2n-1)^2-9}{6}\right)^2$ y $\left(\frac{(2n-1)^2+9}{6}\right)^2$ son una terna pitagórica, que se construye a partir de formar un cuadrado impar cuya tercera parte es un entero.

4. A manera de generalización Fibonacci enuncia que:

   "Se pueden encontrar, de la misma manera, cuatro, o un número mayor, de números impares sucesivos, cuya suma sea un número cuadrado. La suma de los números impares situados por debajo de ellos, hasta la unidad, constituye otro número cuadrado y estos dos números cuadrados forman siempre un número cuadrado."

   Analicemos los dos posibles casos con un ejemplo

   - CUADRADO PAR.

     Consideremos 12^2 que es 144 un cuadrado par. El método nos requiere encontrar 4 impares sucesivos tales que su suma sea 144. Dividamos $\frac{12^2}{4}=36$, constuyamos los 4 impares a partir de 36 de la siguiente manera:

     $$\left.\begin{array}{cccccc} 36 & + & 3 & = & 39 \\ 36 & + & 1 & = & 37 \\ & & cociente & = & 36 \\ 36 & - & 1 & = & 35 \\ 36 & - & 3 & = & 33 \end{array}\right\} 144$$

     por lo tanto, $\underbrace{1+3+...+31}_{16^2}+\overbrace{33+35+37+39}^{12^2}=20^2$,

     es decir, $16^2+12^2=20^2$, que es la terna solicitada.

     Para generalizar este caso, cuando se inicia con un cuadrado par se considera a $(2n)^2$ donde $k=2i$ es el número de impares que se requiere encontrar, por lo tanto la $k-$*ésima parte* será $\frac{2n^2}{i}$. Para poder construir los impares la $k-$ *ésima parte* tiene que ser par también, entonces los impares se construyen al restar y sumar $1,3,5,...,(k-1)$

unidades a la $k-$ *ésima parte*. El impar menor construido será de la forma $\frac{2(n^2-i^2)+i}{i}$ y el cuadrado que queda por debajo de él será $\left(\frac{\frac{2(n^2-i^2)+i}{i}-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2-i^2}{i}\right)^2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\left(\frac{n^2-i^2}{i}\right)^2+(2n)^2 &= \frac{n^4-2n^2i^2+i^4+4n^2i^2}{i^2}\\ &= \frac{n^4+2n^2i^2+i^4}{i^2}\\ &= \left(\frac{n^2+i^2}{i}\right)^2.\end{aligned}$$

Entonces, $\left(\frac{n^2-i^2}{i}\right)^2$, $(2n)^2$ y $\left(\frac{n^2+i^2}{i}\right)^2$ forman la terna pitagórica requerida.

Nótese que se tomó k par y se requería que la $k-$*ésima parte* también lo fuera, ya que si la $k-$ *ésima parte* es impar, y como lo que el método solicita es encontrar k impares sucesivos (entre los cuales debe de estar la $k-$ *ésima parte*) cuya suma sea igual al cuadrado inicial, entonces se llega a algo que no es posible. Se verificará que puede ser menor o mayor pero nunca igual.

Por construcción el cuadrado inicial será igual a $k\left(\frac{2n^2}{i}\right)$. Como se buscan $k-1$ impares sucesivos, entonces existen 2 posiblidades de acomodo:

- Que $\frac{k}{2}$ impares sean anteriores a la $k-$ *ésima parte* y por lo tanto $\frac{k}{2}-1$ serán posteriores. Los impares menores se construirán restando $2, 4, 6, ..., k$ unidades a la $k-$*ésima parte* y los mayores se construirán sumando $2, 4, ..., (k-2)$ unidades a la $k-$ *ésima parte*. Al sumar dichos impares resultará $k\left(\frac{2n^2}{i}\right)-k$ que es menor que $k\left(\frac{2n^2}{i}\right)$.
- Que $\frac{k}{2}-1$ impares sean menores a la $k-$*ésima parte*, por lo tanto $\frac{k}{2}$ serán mayores. Los impares previos se construirán restando $2, 4, 6, ..., (k-2)$ unidades a la $k-$ *ésima parte* y los sucesivos se construirán sumando $2, 4, ..., k$ unidades a la $k-$*ésima parte*. Al hacer la suma de dichos impares resultará $k\left(\frac{2n^2}{i}\right)+k$ que es mayor que $k\left(\frac{2n^2}{i}\right)$.

Con esto queda demostrado que si un cuadrado par es dividido entre un número par k, cuya $k-$*ésima parte* es impar, entonces el método previo no conduce a la construcción de una terna pitagórica.

- CUADRADO IMPAR.

  Consideremos 15^2 que es 225 un cuadrado impar. El método nos requiere encontrar 5 impares sucesivos tales que la suma sea 225. Dividimos $\frac{15^2}{5} = 45$, y construimos los 5 impares a partir de 45 de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{cccc} 45 & + & 4 & = 49 \\ 45 & + & 2 & = 47 \\ & & \textit{cociente} & = 45 \\ 45 & - & 2 & = 43 \\ 45 & - & 4 & = 41 \end{array}\right\} 225$$

por lo tanto, $\underbrace{1+3+...+39}_{20^2} + \overbrace{41+43+45+47+49}^{15^2} = 25^2$.

De esta forma se obtiene la terna solicitada.

Para generalizar este caso, cuando se inicia con un cuadrado impar de la forma $(2n-1)^2$ y $k = 2i+1$ el número de impares que se requiere encontrar, entonces la $k-$*ésima parte* será impar. Ahora, solo basta encontrar $k-1$ impares, pues ya tenemos uno definido (la $k-$*ésima parte*). Pero si k es impar entonces $k-1$ es par. Por lo tanto resta encontrar $\frac{k-1}{2}$ impares menores y $\frac{k-1}{2}$ impares mayores a la $k-$*ésima parte*, los cuales se contruyen al restar y sumar $2, 4, 6, ..., (k-1)$ unidades a la $k-$*ésima parte*.

De esta forma se observa que el último impar inferior obtenido es $\frac{(2n-1)^2}{k} - (k-1) = \frac{(2n-1)^2 - k(k-1)}{k}$, y sabemos que el cuadrado que se forma por debajo de dicho impar es de la siguiente forma $\left(\frac{\frac{(2n-1)^2-k(k-1)}{k}-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{(2n-1)^2-k^2}{2k}\right)^2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{(2n-1)^2-k^2}{2k}\right)^2 + (2n-1)^2 &= \frac{(2n-1)^4 - 2(k(2n-1))^2 + k^4 + 4(k(2n-1))^2}{4k^2} \\ &= \frac{(2n-1)^4 + 2k^2(2n-1)^2 + k^4}{4k^2} \\ &= \left(\frac{(2n-1)^2+k^2}{2k}\right)^2. \end{aligned}$$

Entonces $\left(\frac{(2n-1)^2-k^2}{2k}\right)^2$, $(2n-1)^2$ y $\left(\frac{(2n-1)^2+k^2}{2k}\right)^2$ forman una terna pitagórica.

Nótese que se tomó k impar y eso implica que la $k-$*ésima parte* también lo sea. Pues si se toma k par, entonces la $k-$*ésima parte* no es entera. Por lo que no se puede aplicar el método.

Después de analizar los casos posibles concluimos que la efectividad del método solo dependerá de la paridad del cuadrado con el que se inicie y el número del impares que se requieran. Se observa que tiene que ser la misma paridad para que se pueda generar la terna.

5. *Fibonacci inicia con dos cuadrados simultáneamente pares o impares*

   Sean AB y BG dos cuadrados (en este caso los números cuadrados están represenrados por segmentos de recta) ambos pares o impares respectivamente, entonces $AG = AB + BG$ es par. Sea AB mayor que BG. Dividamos AG en dos partes iguales en el punto D (Fig. 1.4), como AG es par entonces se puede asegurar que $\frac{AG}{2} = AD = DG = \frac{AB+BG}{2}$ es entero.

   Si restamos del número AB el número AD, obtendremos DB, es decir $AB - AD = AB - \frac{AG}{2} = \frac{2AB-AG}{2} = \frac{2AB-AB-BG}{2} = \frac{AB-BG}{2} = DB$. Así AG está dividido igualmente en D y desigualmente en B. Por lo tanto, tendremos que la multiplicación $(AB)(BG)$ más $(DB)^2$, equivaldrá al cuadrado $(DG)^2$. Pero como AB y BG son cuadrados su multiplicación también lo será y el número $(DB)^2$ lo es también. En consecuencia, se encontrará una terna pitagórica, es decir, $(DG)^2 = (AB)(BG) + (DB)^2$. Este resultado es la Proposición 5 del Libro II de Euclides [10].

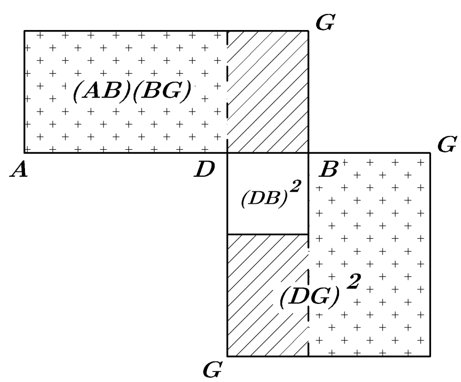


Figura 1.4: $(DG)^2 = (AB)(BG) + (DB)^2$

En un lenguaje actual

Dado $a = x^2$ y $b = y^2$ dos cuadrados, se tendrá $ab + \left((\frac{a+b}{2}) - b\right)^2 = (\frac{a+b}{2})^2$,

$$\begin{aligned} ab + \left(\left(\frac{a+b}{2}\right) - b\right)^2 &= ab + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a+b}{2}\right)b + b^2 \\ &= ab + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab - b^2 + b^2 \\ &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Algunas propiedades entre cuadrados.

1. *Todo cuadrado x^2 excede al cuadrado inmediato anterior y^2 en una cantidad igual a la suma de sus raíces, es decir, $x+y$. En términos actuales $x^2 - y^2 = x + y$, donde $x = y + 1$.*

   Una demostración figurada del entorno de Fibonacci (Fig. 1.5) sería la siguiente:

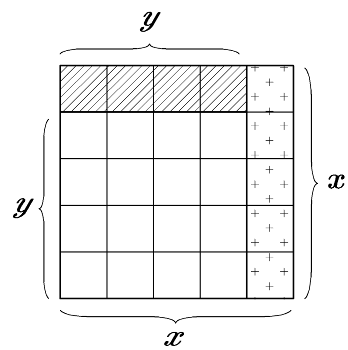
   

   Figura 1.5: $x^2 - y^2 = x + y$

   En un lenguaje más actual procederíamos de la siguiente manera.

   Demostrar: $x^2 - y^2 = x + y$, donde $x = y + 1$.

   $$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x+y)(x-y) \\ &= (x+y)(1) \text{ pues } x \text{ y } y \text{ son sucesivos} \\ &= x + y. \end{aligned}$$

   Entonces, $x^2 - y^2 = x + y$.

   Antes de proceder con la siguiente propiedad analicemos 2 versiones geométricas de la propiedad anterior y observamos su relación con las Proposiciones 4 y 6 del Libro II de Euclides [10].

   - PRIMERA VERSIÓN
     Sean AB y BG raíces sucesivas. Sea BG mayor que AB. Quitemos la unidad DG a BG; quedará BD igual a AB (Fig. 1.6). Por lo tanto BG está dividido en dos cantidades BD y DG.

     Entonces $(BG)^2 = (BD + DG)^2$. Al desarrollar el binomio se tendrá $(BG)^2 = (BD)^2 + (DG)^2 + 2(BD)(DG)$. Como $AB = BD$, podemos cambiar la igualdad anterior $(AB)^2 + (DG)^2 + 2(BD)(DG) = (BG)^2$, entonces $(BG)^2 - (AB)^2 = (DG)^2 + 2(BD)(DG)$, pero recordemos que DG está definida como la unidad, entonces $(DG)^2 = DG = 1$. De igual manera observamos que $2(BD)(DG) = 2(BD)(1) = 2(BD)$, en consecuencia se tendrá que $2(BD) = BD + BD = AB + BD = AD$. Por lo tanto $(BG)^2 - (AB)^2 = AD + DG = AG = AB + BG$.

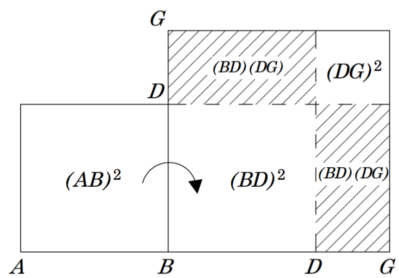


Figura 1.6: $(BD + DG)^2 = (BD)^2 + (DG)^2 + 2(BD)(DG)$
$(AB + DG)^2 = (AB)^2 + (DG)^2 + 2(BD)(DG)$
Versión Fibonacci

En la Proposición 4 del Libro II de Euclides[5] (Fig. 1.7) se presenta un caso similar. En él no requerimos dos raíces sucesivas y partimos de un número cualquiera AB, el cual dividimos con el punto D; por lo tanto AB quedará dividido en dos cantidades AD y DB. Al elevar AB al cuadrado obtenemos cuatro porciones las cuales equivalen a los cuadrados de AD y DG más dos rectágulos formados por $(AD)(DB)$. En comparación con la versión de Fibonacci el segmento DB no necesariamente es la unidad y podríamos decir que la versión de Euclides es una generalización de la de Fibonacci.

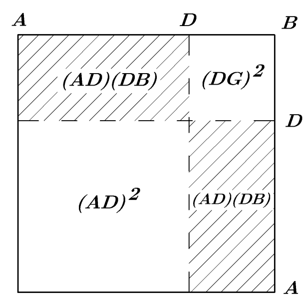


Figura 1.7: $(AD + DB)^2 = (AD)^2 + (DB)^2 + 2(AD)(DB)$
Versión Fibonacci, con base en la de Euclides (proposición 4 libro II)

[5]"Si se corta al azar una recta AB en el punto D, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos AD y DB más dos veces el rectángulo comprendido por los mismos segmentos."

- SEGUNDA VERSIÓN

  Sean AB y BG raíces sucesivas. Sea BG mayor que AB. Tomése (Fig. 1.8) BD sobre BG, de tal forma que $AB = BD$, entonces, se tendrá que $AD = AB+BD$. Si se añade la unidad DG, entonces, $AD+DG = AG$, por lo tanto, $(BG)^2 = (AB)^2 + (AG)(DG)$. Como $DG = 1$, se tendrá $(AG)(DG) = AG$ por lo cual $(BG)^2 = (AB)^2 + AG$, de donde resulta que $(BG)^2 - (AB)^2 = AG = AB + BG$.

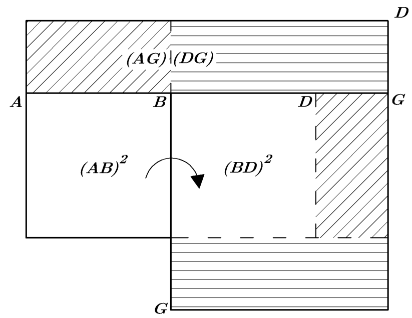


Figura 1.8: $(BD + BG)(DG) + (BD)^2 = (BD + DG)^2$
$(AB + BG)(DG) + (AB)^2 = (BD + DG)^2$
Versión Fibonacci

En la Proposición 6 del Libro II de Euclides[6] nuevamente iniciamos con un segmento AB al que dividimos en dos partes iguales en el punto G. Añadimos a AB el segmento BD, con lo cual obtenemos AD. Calculamos el cuadrado GD sobre AD con lo cual obtenemos 4 porciones, $(GB)^2$ más los rectángulos $(GD)(DB)$ y $(BD)(GB)$, pero $AB = GB$, entonces el rectángulo $(BD)(GB)$ equivale a $(AG)(BD)$, por lo tanto $(GD)^2$ es igual a $(GB)^2$ más los rectángulos $(AG)(BD)$ y $(BD)(GB)$, es decir, $(GB)^2$ más el rectángulo $(AD)(BD)$. Nuevamente la versión de Fibonacci es un caso particular de la versión de Euclides.

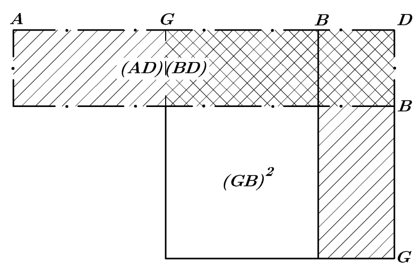


Figura 1.9: $(AD)(BD) + (GB)^2 = (GD)^2$
Versión Fibonacci, con base en la de Euclides (proposición 6 libro II)

[6] "Si se divide en G la recta AB en dos partes iguales y se le añade la recta BD, el rectángulo comprendido por la recta AD y la recta añedida BD más el cuadrado de la mitad AG es igual al cuadrado de la recta compuesta por la mitad GB y la recta añadida BD."

2. *Todo número cuadrado x^2 excede al cuadrado que le precede z^2 en dos lugares en una cantidad igual al cuádruplo de la raíz del cuadrado intermedio, es decir, $4y$. En términos actuales $x^2 - z^2 = 4y$, donde $y = z + 1$ y $x = z + 2$.*

   El contexto geométrico de esta demostración (Fig. 1.10) es el siguente:

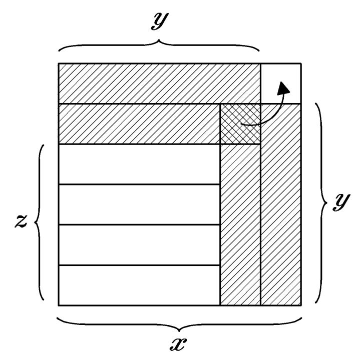


Figura 1.10: $x^2 - z^2 = 4y$, donde $z = y - 1$ y $x = y + 1$

   En el lenguaje algebraico actual, se demostrará que $x^2 - z^2 = 4y$, donde $x = z + 2$ y $y = z + 1$

$$\begin{aligned} x^2 - z^2 &= (x+z)(x-z) \\ &= (z+2+z)(z+2-z) \\ &= (2z+2)(2) \\ &= 2(z+1)(2) \\ &= (2y)(2) \\ &= 4y. \end{aligned}$$

   Entonces, $x^2 - z^2 = 4y$.

3. *Cuando dos raíces sucesivas agregadas forman un número cuadrado z^2, entonces el cuadrado del número mayor x^2 es igual a dos cuadrados, uno de ellos la suma antes mencionada y el otro el cuadrado del número menor y^2. Es decir, si $x + y = z^2$ y $x = y + 1$, entonces $x^2 = y^2 + z^2$.*

   Esta propiedad (Fig. 1.11) tiene una relación directa con la Propiedad 1 (Fig. 1.5), cuando la suma de las raíces es en particular un número cuadrado, se puede generar la terna pitagórica. También se puede ver como un caso particular del Método 1 (Fig. 1.1) dado que la suma de dos números sucesivos siempre formarán un número impar y la hipótesis del Método 1 requiere que dicha suma sea un cuadrado.

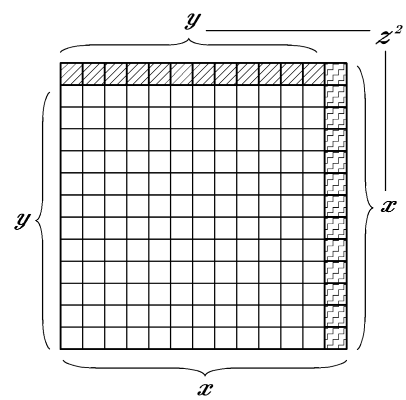


Figura 1.11: Si $x + y = z^2$ y $x = y + 1$, entonces $x^2 = y^2 + z^2$

En lenguaje algebraico actual, se solicita demostrar $x^2 = y^2 + z^2$, donde $x + y = z^2$ y $x = y + 1$

$$\begin{aligned} x^2 &= (y+1)^2 \\ &= y^2 + 2y + 1 \\ &= y^2 + (y+1) + y \\ &= y^2 + (x+y) \\ &= y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Para generalizar las propiedades antes vistas vamos a abordar un problema conocido desde el siglo XV, con este ejemplo nos percatamos de la teoría analítica de los números que se estaba formando en torno a las grandes sumas de números.

El problema por resolver es que la suma de grandes cantidades *"in infinitum"* de cuadrados también es un cuadrado

Al considerar conocidos los métodos para encontrar ternas pitagóricas, pasaremos a exponer la manera de construir tres cuadrados cuya suma sea un cuadrado, posteriormente la suma de cuatro cuadrados y así hasta tener una cantidad indeterminada de cuadrados cuya suma sea un cuadrado.

Este problema fue descrito tanto por Fibonacci como por Pacioli [18] de una manera muy semejante: en ambas muestran que se puede encontrar una cantidad tan grande como se quiera de números cuadrados tales que al sumarlos forman un cuadrado. Otro autor que desarrolla el problema, en nuestro ámbito novohispano, fue Diez Freyle [7], usando el hecho de que la suma de los n primeros números impares es un cuadrado.

Para la construcción de la terna pitagórica Fibonacci y Pacioli parten de una condición inicial que consiste en iniciar siempre con un número cuadrado, ya sea par o impar, como se comprobó en los métodos 1 y 2. En el caso de Diez Freyle, se pide que se tome el primer impar, sin mencionar que esta condición es obligatoria.

Analicemos un caso particular. Éste se centra en un proceso recursivo para obtener cinco cuadrados cuya suma sea un cuadrado. Consideremos 9 que es el primer cuadrado impar (Fig. 1.1). Es importante iniciar con un cuadrado impar pues sabemos que la suma de los impares menores a él hasta llegar a uno será un cuadrado; en este caso $1+3+5+7 = (\frac{9-1}{2})^2 = 16 = 4^2$ es el segundo cuadrado. Después se suman con el primero y obtenemos $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Vemos que $5^2 = 25$ es un cuadrado impar y como el objetivo es obtener cinco cuadrados, entonces volvemos a hacer la suma de los impares anteriores a 25, es decir, $1 + 2 + ... + 23 = (\frac{25-1}{2})^2 = 144 = 12^2$. Tendremos que $5^2+12^2 = 13^2$, y como $3^2+4^2 = 5^2$ se llega a que $3^2+4^2+12^2 = 13^2$.

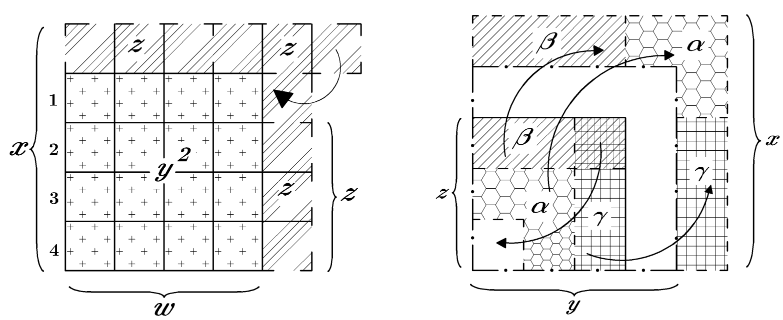
Como $169 = 13^2$ es otro cuadrado impar entonces calculamos la suma de los impares menores, es decir, $1+2+3+...+165+167 = (\frac{169-1}{2})^2 = 7056 = 84^2$. Por lo tanto $13^2 + 84^2 = 85^2$, y con base en lo anterior obtenemos que $3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$.

De igual forma 7225 es un cuadrado impar y al hacer la suma antes mencionada obtenemos que $1+2+3+...+7223+7225 = (\frac{7225-1}{2})^2 = 13046544 = 3612^2$, y se llega a que $3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + 3612^2 = 3613^2$.

Diez Freyle [7] escribió al final del problema cinco: *"y nota que por esta vía lo podrás hacer in infinitum"*.

La interpretación geométrica de este razonamiento se puede ver como sigue:

4. *Cuando el cuádruplo de un número w es un cuadrado y^2 el cuadrado del número sucesor del número cuadruplicado x^2 es igual a la suma de dos cuadrados. Uno será el cuádruplo inicial y el otro el cuadrado cuya raíz es el número antecesor al número cuadruplicado z^2, es decir, si $4w = y^2$ y $z = w - 1$ y $x = w + 1$, entonces, $x^2 = y^2 + z^2$.*



(a) Caso trivial (b) Caso no trivial

Figura 1.12: Si $4w = y^2$, donde $z = w - 1$ y $x = w + 1$, entonces $x^2 = y^2 + z^2$

Esta propiedad, igual que la anterior, es un caso particular de la Propiedad 2 y es al mismo tiempo otro método para obtener una terna.

5. *Dado un cuadrado y, su cuádruplo $4y$ será un cuadrado también. En términos actuales, si $y = x^2$, entonces $4y$ es un cuadrado.*

   De aquí se extrae que la relación entre un número y otro es la misma que la de sus equimúltiplos, y que el cuadrado de un número equivale a multiplicar dicho número por sí mismo. En el enunciado, la relación entre x y su cuadrado y, debe ser la misma que la de $2x$ y $4y$. La demostración de esta propiedad aparece en el Libro VII de Euclides [10].

   Generalizando esta propiedad, se tiene que cualquier multiplicación entre cuadrados resultará ser también un cuadrado, es decir dados $x = w^2$ y $y = v^2$
$$x(y) = w^2(v^2) \quad = \quad (wv)^2 = z^2.$$

6. *Todo cuadrado x^2 excede a cualquier cuadrado y^2 menor que él, en el producto de la diferencia entre sus raíces $x - y$ y la suma de las mismas $x+y$. Es decir, $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, para cualesquiera dos cuadrados.*

   Sea AG y GB raíces de dos cuadrados cualesquiera; consideramos GB mayor que AG, cuya diferencia es DB, es decir $AG = GD$ (Fig 1.13).

   Con base en lo anterior se tendrá que $(AG)^2 + (AB)(DB) = (GB)^2$. En consecuencia $(GB)^2 - (AG)^2 = (AB)(DB)$, pero si analizamos cómo son AB y DB, se tiene que $AB = AG + GB$ y $DB = BG - GD$, pero como $AG = GD$, entonces se tendrá que $DB = BG - AG$ y $(GB)^2 - (AG)^2 = (AG+GB)(GB-AG)$.

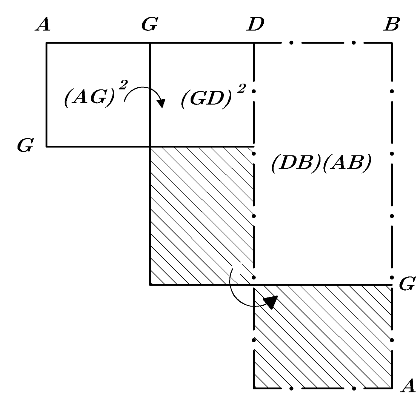


Figura 1.13: $(GB)^2 - (GD)^2 = (AG+GB)(GB-GD)$
$(GB)^2 - (AG)^2 = (AG+GB)(GB-AG)$

Geométricamente (Fig. 1.14) esto significa que dados dos cuadrado cualesquiera si al cuadrado mayor a^2 le restamos el cuadrado menor b^2, lo que obtendremos es equivalente al producto de la suma de las raíces por la diferencia de ellas mismas.

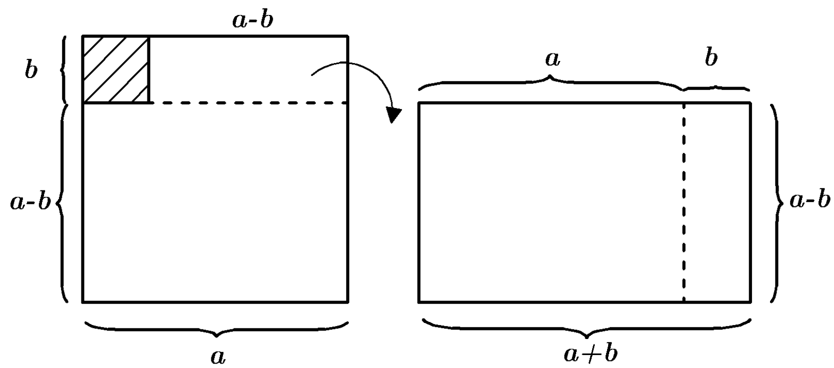


Figura 1.14: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Las ternas pitagóricas aparecieron, si bien esporádicamente, en problemas en las matemáticas de Babilonia y, más tarde, fueron estudiadas en el período griego por los pitagóricos y por Platón, y aparecen explícitamente en el trabajo de Euclides y en los estudios de Diofanto. También fueron estudiadas por algunos matemáticos islámicos y, en este caso, estaban relacionados con el problema de los números congruentes, un problema remontomado por el italiano Leonardo Fibonacci.

Capítulo 2

Proposición II

La suma de números impares genera números cuadrados.

En esta proposición Fibonacci demuestra que los números cuadrados surgen de la suma ordenada del conjunto de números impares sucesivos, con rangos finitos, que inician desde la unidad. Es importante señalar que Fibonacci menciona que el rango es desde la unidad hasta el infinito, y se refiere a que se pueden tomar sucesiones de impares tan grandes como queramos.

Construiremos de una manera muy intuitiva, con base en la aritmetica figurada y de segmentos del entorno de Fibonaci, cómo es que a partir de los números naturales se obtiene la serie de los números impares. Acto seguido, a partir de cualquier número natural se pueden obtener dos impares consecutivos, al sumar y restar una unidad a ese natural designado. Por otro lado, al sumar cualquier natural con su antecedente y con su consecuente se construyen los *gnomons*[1] (Fig. 2.1), es decir, la suma de dos números naturales sucesivos dará como resultado a los números impares necesarios para construir a los cuadrados.

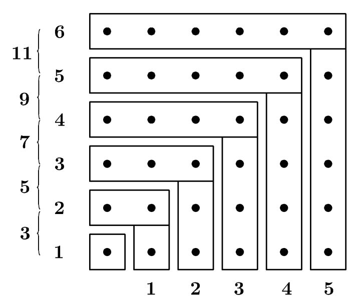


Figura 2.1: Construcción de *gnomons*

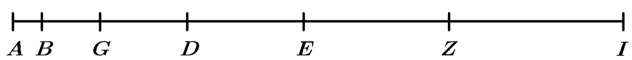
[1] Gnomon fue definido por lo griegos como la figura que queda después de quitar de la esquina de un cuadrado, otro cuadrado de menor tamaño. En el entorno de Aristóteles, gnomon sería la figura que, añadida a un cuadrado, aumenta en este la longitud de sus lados pero no altera su forma.

Es notable que Fibonacci expone una forma estructurada de presentar los resultados. Por un lado construye un algoritmo para generar un conjunto de números; posteriormente demostrará que esos números son impares y consecutivos. Si bien no sigue una presentación axiomática a la manera de Euclides, sí muestra una manera escalonada de construir y justificar los resultados , lo cual para la época sí fue algo novedoso. Ni la exposición de la *Aritmética* de Diofanto [8] se acerca a esta manera de construir los conjuntos. Fibonacci ya no trabaja solo con ejemplos, a la manera de Diofanto.

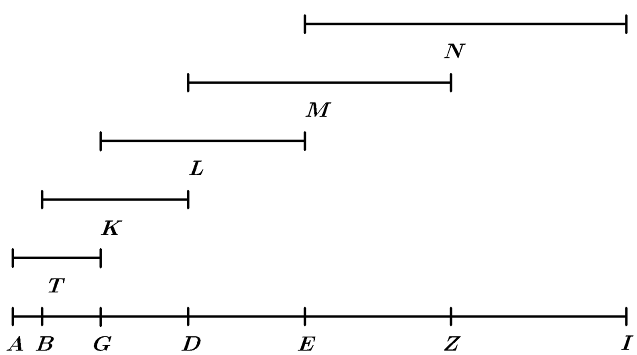
Ahora pasamos a exponer la manera en la que construye la teoría de los cuadrados como suma de números impares.

Se plantea una manera recurrente para generar un conjunto de números

Fibonacci considera un conjunto con una cantidad cualquiera de números consecutivos, AB, BG, GD, DE, EZ y ZI, donde AB es la unidad.



Sumemos BG con la unidad AB para obtener el número T. Compongamos, del mismo modo, cada número con su antecedente y con su consecuente. Sea K el número compuesto por los números BG y GD; L el número formado por GD y DE; M el número compuesto por DE y EZ, y N el número formado por los números EZ y ZI. Afirmamos que los números T, K, L, M y N son impares y consecutivos a partir de la unidad.



Si seguimos con lo que sugiere la construcción obtendremos:

$$
\begin{array}{rcl}
AB + BG & = & T \\
BG + GD & = & K \\
GD + DE & = & L \\
ED + EZ & = & M \\
EZ + ZI & = & N.
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcccr}
AB + BG & = & 1 + 2 & = & 3 \\
BG + GD & = & 2 + 3 & = & 5 \\
GD + DE & = & 3 + 4 & = & 7 \\
ED + EZ & = & 4 + 5 & = & 9 \\
EZ + ZI & = & 5 + 6 & = & 11.
\end{array}
$$

Los elementos del conjunto son números impares

Para demostrar que todos los elementos del conjunto son números impares, se consideran 2 casos para ZI:

- Si ZI es par, entonces EZ es impar, ya que estos números son consecutivos. Por lo tanto N es impar, si nos fijamos en el antecesor del antecesor éste será par, si juntamos el antecesor con el antecesor del antecesor obtendremos un número impar, si seguimos con este proceso se llegará a sumar la unidad con su sucesor lo cual también dará un número impar. De esta forma se demuestra que N, M, L, K y T son impares.
- Si ZI es impar, entonces EZ es par, ya que estos números son consecutivos. Por lo tanto N es impar, si nos fijamos en el antecesor del antecesor éste será impar, si juntamos el antecesor con el antecesor del antecesor obtendremos un número impar, si seguimos con este proceso se llegará a sumar la unidad con su sucesor lo cual también dará un número impar. De esta manera queda demostrado que N, M, L, K y T son impares.

Se demuestra que son números impares sucesivos

Una vez comprobado que los números T, K, L, M y N son impares, se comprobará que son sucesivos; para esto verificaremos que la diferencia entre uno y otro es igual a $2AB$, i.e., 2 unidades.

$$\begin{aligned}
N - M = EZ + ZI - DE - EZ = ZI - DE &= EZ - AB - DE \\
= DE + AB + AB - DE &= 2AB \\
M - L = DE + EZ - GD - DE = EZ - GD &= DE + AB - GD \\
= GD + AB + AB + GD &= 2AB \\
L - K = GD + DE - BG - GD = DE - BG &= GD + AB - BG \\
= BG + AB + AB - BG &= 2AB \\
K - T = BG + GD - A - BG = GD - A &= BG + AB - AB \\
= AB + AB + AB - AB &= 2AB \\
T - A = AB + BG - AB = BG = AB + AB &= 2AB.
\end{aligned}$$

Así queda demostrada la afirmación de que la sucesión construida es una serie de impares consecutivos que parten desde la unidad.

Diferencia de cuadrados para generar gnomons

Ahora sabemos por la Propiedad 1 del Capítulo 1, que el cuadrado formado por el número ZI excede al cuadrado formado por el número EZ en el número formado por la unión de EZ y ZI, es decir, en el número N, y se demostrará de manera análoga que el cuadrado formado por el número

EZ excede al cuadrado formado por el número DE en la unión de los números DE y EZ, es decir, en el número M; que el cuadrado del número DE excede al cuadrado del número GD en el número L; de igual manera el cuadrado del número GD excede en el número K al cuadrado del número BG y, para finalizar, el cuadrado formado por el número BG excede al cuadrado de la unidad en el número T, ya que el número T es ternario (impar) y el número BG es binario (par).

Es decir:

$$\begin{array}{rcccl}
(ZI)^2-(EZ)^2 & = & EZ+ZI & = & N \\
(EZ)^2-(DE)^2 & = & DE+EZ & = & M \\
(DE)^2-(GD)^2 & = & GD+DE & = & L \\
(GD)^2-(BG)^2 & = & BG+GD & = & K \\
(BG)^2-(AB)^2 & = & AB+BG & = & T.
\end{array}$$

Este análisis determina que la diferencia de cuadrados consecutivos arrojan números impares consecutivos.

Por lo tanto, si al cuadrado de la unidad, es decir, a $(AB)^2=1$, se le agrega el número T se obtendrá el cuadrado del número BG. Si a este número se le agrega el número K se obtendrá el cuadrado del número GD. Ahora bien, si a este último número se le agrega el número L se obtendrá el cuadrado del número DE. Si se agrega el número M al último número obtenido se tendrá como resultado el cuadrado del número EZ y si se agrega a éste el número N se obtendrá el cuadrado del número ZI. Aplicando las diferencias de cuadrados se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcccl}
(AB)^2+T & = & (AB)^2+(BG)^2-(AB)^2 & = & (BG)^2 \\
(BG)^2+K & = & (BG)^2+(GD)^2-(BG)^2 & = & (GD)^2 \\
(GD)^2+L & = & (GD)^2+(DE)-(GD)^2 & = & (DE)^2 \\
(DE)^2+M & = & (DE)^2+(EZ)^2-(DE)^2 & = & (EZ)^2 \\
(EZ)^2+N & = & (EZ)^2+(ZI)^2-(EZ)^2 & = & (ZI)^2.
\end{array}$$

Entonces se puede garantizar que cuando se suma un cuadrado y su *gnomon* correspondiente, el resultado será el siguiente cuadrado, y dado que los *gnomons* son equivalentes a los números impares, se tendrá:

$$\begin{array}{rcl}
(AB)^2 & = & A \\
(BG)^2 & = & A+T \\
(GD)^2 & = & A+T+K \\
(DE)^2 & = & A+T+K+L \\
(EZ)^2 & = & A+T+K+L+M \\
(ZI)^2 & = & A+T+K+L+M+N.
\end{array}$$

Por lo tanto la serie ordenada de los números cuadrados surge de la suma de los números impares que van desde la unidad hasta el infinito.

Este resultado actualmente se estudia partiendo de una igualdad ya construida o dada, es decir, ya solo se verifica que se cumpla para toda $n \in \mathbb{N}$, mediante un proceso inductivo[2].

Esto nos lleva a valorar aún más la exposición de Fibonacci, ya que nos enseña a construir y no solo a verificar un resultado ya dado. Esto es lo que hoy en día un matemático debe hacer: modelar, crear y verificar.

[2]Sea $n \in \mathbb{N}$, se busca demostrar que $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$, para toda $n \in \mathbb{N}$:
Base inductiva: $n = 1$

$$1 = 1^2 \quad = \quad 1.$$

Hipótesis inductiva: $n = m$

$$1+3+5+...+2m-1 \quad = \quad m^2.$$

Paso inductivo: $n = m+1$

$$\begin{aligned} 1+3+5+...+2m-1+2(m+1)-1 &= m^2+2(m+1)-1 \\ &= (m+1)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 3

Proposición III

Suma de dos cuadrados y los triángulos rectángulos.

Esta proposición plantea encontrar dos números cuyos cuadrados reunidos sean equivalentes a un número cuadrado, formado por la unión de otros dos cuadrados, es decir, dados A y B, tales que $A^2 + B^2 = I^2$, encontrar dos números distintos de A y B tales que la suma de sus cuadrados sea igual a I^2.

Sean A y B los números que cumplen $A^2 + B^2 = I^2$. Propongamos ED y EZ dos números, distintos a A y B, cuyos cuadrados reunidos forman un número cuadrado, es decir, una terna pitágorica auxiliar.

Representemos ED y EZ mediante 2 rectas (catetos), coloquémoslas en ángulo recto y trazemos la recta DZ (hipotenusa) para formar un triángulo. Por el teorema de Pitágoras sabemos que $(DZ)^2$ es igual a la suma de los cuadrados de ED y EZ.
De esta forma tendremos 2 posibilidades para el valor de DZ:

- Si $DZ = I$, entonces ya se encontraron dos números, ED y EZ, distintos a A y B, tales que la suma de sus cuadrados es igual a I^2.
- Si $DZ \neq I$, procedemos a analizar dos posibles casos:
    - Si $DZ > I$, se construirá un triángulo interno de la siguiente forma, (Fig.3.1)

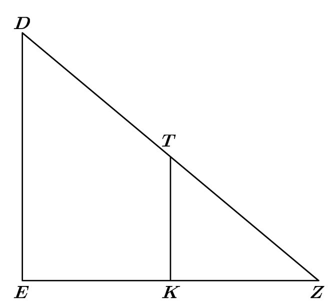


Figura 3.1: Caso 1, cuando $DZ > I$

Como $DZ > I$, restemos del número DZ el número I, obteniendo $TZ = I$. Tracemos desde T la recta TK, de tal forma que sea perpendicular a EZ; en consecuencia el triángulo TKZ es semejante al triángulo DEZ, es decir, TKZ es el triágulo interno que se quería construir y cumple que $\frac{TK}{DE} = \frac{ZT}{ZD}$. Pero se conoce la relación $\frac{ZT}{ZD}$. Luego entonces se conocerá la relación $\frac{TK}{DE}$, pues también se conoce el valor de DE con lo cual se podrá calcular la recta $TK = \frac{(ZT)(DE)}{ZD}$. Del mismo modo se obtendrá la recta ZK puesto que su relación con ZE es como la de $\frac{ZT}{ZD}$, es decir, $ZK = \frac{(ZT)(ZE)}{ZD}$. En consecuencia, TK y KZ, son números distintos de A y B, cuyos cuadrados sumados dan el cuadrado formado por el número TZ, que es igual al cuadrado del número I.

- Si $DZ < I$, se construirá un triángulo externo de la siguiente forma: (Fig. 3.2)

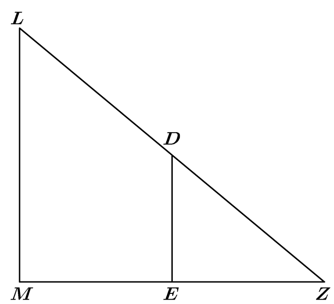


Figura 3.2: Caso 2, cuando $DZ < I$

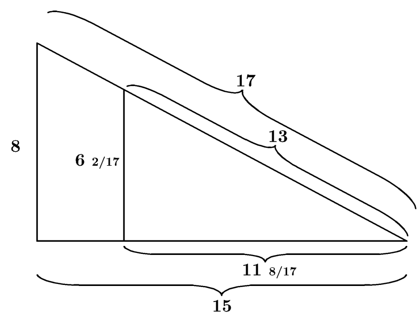
Como $DZ < I$, prolonguemos la recta DZ hasta L, de tal manera que $ZL = I$. Del mismo modo, prolonguemos ZE hasta M, de forma que cuando unamos L y M dicha recta forme un ángulo recto con la recta ZM. Como en el caso anterior, se podrá ver que el triángulo DEZ es semejante al LMZ, pero en este caso LMZ es un triágulo externo con respecto al triángulo DEZ y la relación entre ZD y ZL es conocida, por lo tanto los números $ZM = \frac{(ZL)(ZE)}{ZD}$ y $ML = \frac{(ZL)(DE)}{ZD}$ serán conocidos también. En consecuencia, LM y MZ serán los números distintos de A y B cuyos cuadrados sumados dan el cuadrado formado por el número LZ, que es igual al cuadrado del número I.[1]

[1]El problema se retoma en el siglo XVI, en textos europeos e incluso en textos mexicanos como el *Sumario Compendioso de las cuentas...* de Juan Diez Freyle [7]. Ahí, el problema 8 se plantea encontrar $X^2 + Y^2 = 5^2$, sabiendo que $3^2 + 4^2 = 5^2$, es un caso particular del problema analizado por Fibonacci. Al observar las soluciones nos percatamos que ambas tienen elementos de la teoría de proporciones euclidiana (Fibonacci le llama relación). Diez Freyle no usade manera explícita los triángulos, pero se puede encontrar de manera fácil la equivalencia con la terna pitágorica auxiliar asociada.

Demos un ejemplo de lo anterior que nos ayudará a comprender mejor. Sean $A = 5$ y $B = 12$, por lo tanto,

$$A^2 + B^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = I^2, \text{entonces} \quad I = 13.$$

- Caso en que $DZ > I$.

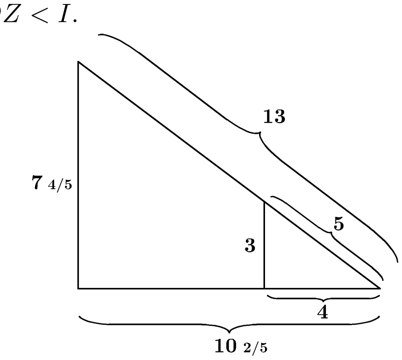


Sean $DE = 8$ y $EZ = 15$. Por lo tanto obtendremos $DZ = 17$; tomamos $ZT = I = 13$ sobre DZ. Trazamos la recta TK paralela a la DE, por lo tanto TK es a DE como ZT es a ZD. Multiplicando ZT por DE, es decir, 13 por 8, y dividiendo en total por ZD, es decir, 17, TK será el número 6 2/17 . De la misma manera si multiplicamos ZT por ZE y dividimos por ZD, KZ representará el número 11 8/17. Por lo tanto $\left(6\frac{2}{17}\right)^2 + \left(11\frac{8}{17}\right)^2 = 169$. Así se han encontrado dos números TK y KZ cuyos cuadrados reunidos dan el número I^2.

Al verificar las operaciones se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{TK}{DE} &= \frac{ZT}{ZD} \\ \Rightarrow \frac{TK}{8} &= \frac{13}{17} \\ \Rightarrow TK &= \frac{13*8}{17} \\ \Rightarrow TK &= 6\frac{2}{17} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{ZK}{ZE} &= \frac{ZT}{ZD} \\ \Rightarrow \frac{ZT}{15} &= \frac{13}{17} \\ \Rightarrow ZT &= \frac{13*15}{17} \\ \Rightarrow ZT &= 11\frac{8}{17}. \end{aligned}$$

- Caso en que $DZ < I$.



Sean $DE = 3$ y $EZ = 4$. Por lo tanto $DZ = 5$. Prolonguemos DZ hasta L y $ZL = I = 13$. Trazamos la recta LM equidistante a la DE y por lo tanto LM es a DE como ZL es a ZD. En consecuencia, multiplicando ZL por DE y dividiendo por ZD, LM representará 7 4/5. De la misma manera, si se divide por ZD el producto de ZL por ZE, es decir, 39 por 5, MZ representa 10 2/5. Entonces $\left(7\frac{4}{5}\right)^2 + \left(10\frac{2}{5}\right)^2 = 169$. Así, se han encontrado otros dos números LM y MZ cuyos cuadrados reunidos dan el número I^2.

Al verificar las operaciones se obtiene que

$$\begin{array}{rcl} \frac{LM}{DE} & = & \frac{ZL}{ZD} \\ \Rightarrow \frac{LM}{3} & = & \frac{13}{5} \\ \Rightarrow LM & = & \frac{13*3}{5} \\ \Rightarrow LM & = & 7\frac{4}{5} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \frac{MZ}{ZE} & = & \frac{ZL}{ZD} \\ \Rightarrow \frac{MZ}{4} & = & \frac{13}{5} \\ \Rightarrow MZ & = & \frac{13*4}{5} \\ \Rightarrow MZ & = & 10\frac{2}{5}. \end{array}$$

En el lenguaje de la geometría antigua (griega), esta proposición plantea, encontrar 2 triángulos rectángulos con la misma hipotenusa, es decir, dado un triángulo se define la hipotenusa y se busca otro triángulo con la misma hipotenusa, modificando "la altura" y "la base". Como ya se mencionó estos triángulos son equivalentes a una terna pitagórica, i.e., dada la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$ y teniendo una terna pitagórica $u^2 + v^2 = t^2$, se demostrará que los números x y y de la forma $x = \frac{cu}{t}$; $y = \frac{cv}{t}$, cumplen la condición $x^2 + y^2 = c^2$.
Se demostrará que $x^2 + y^2 = c^2$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(\frac{cu}{t}\right)^2 + \left(\frac{cv}{t}\right)^2 \\ &= \frac{(cu)^2}{t^2} + \frac{(cv)^2}{t^2} \\ &= \frac{c^2u^2}{t^2} + \frac{c^2v^2}{t^2} \\ &= c^2\left(\frac{u^2}{t^2} + \frac{v^2}{t^2}\right) \\ &= c^2\left(\frac{u^2+v^2}{t^2}\right) \\ &= c^2\left(\frac{t^2}{t^2}\right) \\ &= c^2. \end{aligned}$$

Entonces $x^2 + y^2 = c^2$.
De nueva cuenta, es muy importante recalcar que el método que utiliza Fibonacci en comparación con el método actual es mucho más completo, ya que él comienza con la construcción del problema de una forma muy intuitiva pero encaminada a un propósito y no sólo propone demostrar una igualdad dada.

Capítulo 4

Proposición IV

Producto de suma de cuadrados y su conversión a suma de dos cuadrados.

En este problema se proponen cuatro números no proporcionales tales que el primero es menor que el segundo y el tercero menor que el cuarto; si se suma el primer cuadrado y el segundo, y esto se multiplica por la suma de los cuadrados tercero y cuarto, entonces se presentarán 3 casos posibles para un producto de la forma $(A^2+B^2)(G^2+D^2)$*:*

- *Si ningún factor es un cuadrado, entonces el producto será, de 2 maneras distintas, igual a la suma de dos números cuadrados.*
- *Si uno de los factores es un cuadrado, entonces el producto será, de 3 maneras diferentes, igual a la suma de dos números cuadrados.*
- *Si los dos factores son cuadrados, entonces el producto será, de 4 maneras distintas, igual a la suma de dos números cuadrados.*

Sean A, B, G y D cuatro números no proporcionales, es decir, $\frac{A}{B} \neq \frac{G}{D}$, (parafraseando a Fibonacci consideraremos números no fraccionarios), puesto que se sabe que $A < B$ y $G < D$. Se definen el número $E = A^2 + B^2$ y el número $Z = G^2 + D^2$. Multiplicando E por Z resulta CF[1].

A continuación se construirá a CF como suma de 4 cuadrados. Dicho resultado será de utilidad para el estudio de los casos. Comencemos por obtener algunas multiplicaciones. Sea $TK = (A)(G)$, $KL = (B)(D)$, $MN = (A)(D)$ y $NO = (B)(G)$. Se asegura que $TK \neq KL \neq MN \neq NO$, pues en caso contrario los números de los que partimos serían proporcionales, es decir, podríamos tener:

$$TK = KL \Rightarrow (A)(G) = (B)(D) \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{G}{D}$$
$$MN = NO \Rightarrow (A)(D) = (B)(C) \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{G}{D},$$

contradiciendo una de las hipótesis.

[1]Queremos aclarar que se pudo utilizar $(E)(Z)$ en lugar de CF sin embargo en aras de conservar el espíritu de la exposición de Fibonacci se mantendrá el CF.

Veamos cómo está compuesto el número CF. Por un lado,

$$CF = (E)(Z) = (A^2 + B^2)(Z) = A^2(Z) + B^2(Z),$$

llamemos $CI = A^2(Z)$ y $HF = B^2(Z)$; como $Z = G^2 + D^2$, obtendremos

$$A^2(Z) = A^2(G^2 + D^2) = A^2(G^2) + A^2(D^2).$$

De manera semejante, $CH = A^2(G^2)$ y $HI = A^2(D^2)$, se tendrá que

$$B^2(Z) = B^2(G^2 + D^2) = B^2(G^2) + B^2(D^2),$$

si nombramos $IR = B^2(G^2)$ y $RF = B^2(D^2)$, entonces CF es igual a 4 números cuadrados cuyas raíces son TK, KL, MN y NO respectivamente, es decir,

$$CF = CH + HI + IR + RF = (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2.$$

Para continuar demostremos gráficamente (Fig. 4.1) que $x^2+y^2 = 2xy+(x-y)^2$

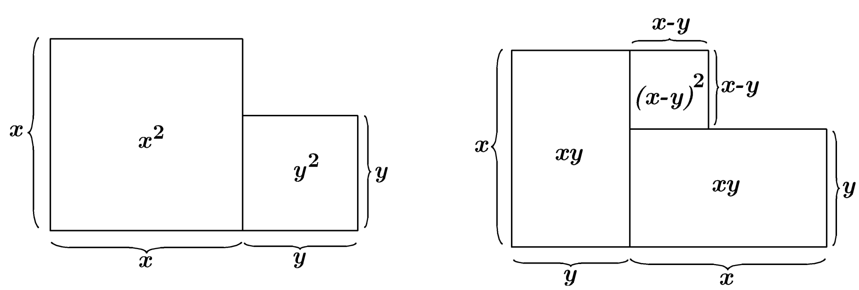


Figura 4.1: $x^2 + y^2 = 2xy + (x - y)^2$

Iniciemos el estudio de los 3 casos:

- Caso en que ni E ni Z son números cuadrados

Se demostrará que CF es igual a la suma de dos cuadrados y esto se hará de 2 maneras distintas. Como $A < B$, se tendrá que $TK < KL$; tomemos $KP = TK$ sobre KL[2].

(a) $MN < NO$ (b) $MN > NO$

Figura 4.2: Subcasos

[2]Una observación pertinente es que en la época de Fibonnacci no se consideraban los números negativos y mucho menos el cuadrado de dichos números; en la actualidad no pondríamos ninguna restricción en cuanto a la comparación de los 4 números.
También es importnate mencionar que en el libro sólo se analiza el subcaso $MN < NO$. Nosotros analizaremos también el subcaso $MN > NO$.

Subcaso 1: Si $MN < NO$, tomemos $NQ = MN$ sobre NO, ver la (Fig.4.2 (a)).

Entonces, proponemos TL y QO como el primer par de números solicitados. Acto seguido veremos a que son equivalentes $(TL)^2$ y $(QO)^2$. Se quiere demostrar que la suma de dichos cuadrados es igual a CF, es decir,

$$(TL)^2 + (QO)^2 = (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2 = CF.$$

Iniciemos con $(TL)^2$

$$(TL)^2 = (TK + KL)^2 = (TK)^2 + 2(TK)(KL) + (KL)^2$$

esto se tiene de la Proposición I (Fig. 1.5) y (Fig. 1.6).

Verifiquemos que $(TK)(K)L = (MN)(NO)$,

$$\begin{aligned} (TK)(KL) &= (AG)(BD) \\ &= (AD)(BG) \\ &= (MN)(NO). \end{aligned}$$

Ahora se demostrará que $(QO)^2 = (MN)^2 + (NO)^2 - 2(TK)(KL)$ que es equivalente a que $(QO)^2 = (MN)^2 + (NO)^2 - 2(MN)(NO)$.

Aplicando el resultado de la (Fig. 4.1) a la (Fig. 4.2 (a)) tenemos que $NO - NQ = QO$, pero $NQ = MN$ por lo tanto, $NO - MN = QO$, entonces, se obtendrá que $(NO)^2 + (MN)^2 = 2(MN)(NO) + (QO)^2$, que es lo que se quería demostrar.

De donde se obtendrá que

$$\begin{aligned} (TL)^2 + (QO)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 + 2TKKL + (MN)^2 - 2MNNO + (NO)^2 \\ (TL)^2 + (QO)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 + 2TKKL + (MN)^2 - 2TKKL + (NO)^2 \\ (TL)^2 + (QO)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2 = CF. \end{aligned}$$

Planteamos ahora MO y PL, el otro par de números solicitados, y demostraremos que

$$(MO)^2 + (PL)^2 = (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2 = CF.$$

Iniciamos con $(MO)^2$

$$(MO)^2 \quad = (MN + NO)^2 = \quad (MN)^2 + 2(MN)(NO) + (NO)^2.$$

Resta demostrar que $(PL)^2 = (TK)^2 + (KL)^2 - 2(MN)(NO)$ que es equivalente a que $(PL)^2 = (TK)^2 + (KL)^2 - 2(TK)(KL)$.

Aplicando nuevamente el resultado de la (Fig. 4.1) a la (Fig. 4.2 (a)) tenemos que $KL - KP = PL$, pero $TK = KP$ por lo tanto, $KL - TK = PL$, entonces, se obtendrá que $(KL)^2 + (TK)^2 = 2(TK)(KL) + (PL)^2$, que es lo que se quería demostrar.

De donde tendremos que

$$\begin{aligned} (MO)^2 + (PL)^2 &= (MN)^2 + 2MNNO + (NO)^2 + (TK)^2 + (KL)^2 - 2TKKL \\ (MO)^2 + (PL)^2 &= (MN)^2 + 2MNNO + (NO)^2 + (TK)^2 + (KL)^2 - 2MNNO \\ (MO)^2 + (PL)^2 &= (MN)^2 + (NO)^2 + (TK)^2 + (KL)^2 = CF. \end{aligned}$$

Subcaso 2: Si $MN > NO$, tomemos $NQ = NO$ sobre MN (Fig. 4.2 (b)).

Proponemos

$$CF = (TL)^2 + (MQ)^2 = (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2.$$

Utilizando lo anterior sólo restaría demostrar que

$$2(TK)(KL) + (MQ)^2 = (MN)^2 + (NO)^2,$$

que es equivalente a

$$2(MN)(NO) + (MQ)^2 = (MN)^2 + (NO)^2.$$

Dado que $NQ = NO$, multiplicamos ambos lados por NO, entonces $(NO)^2 = (NQ)(NO)$.

Ahora examinemos algo más

$$\begin{aligned} MN &= MQ + QN \\ MN(NO) &= MQ(NO) + QN(NO) \\ &= MQ(NO) + (NO)^2, \end{aligned}$$

entonces $(NO)^2 = MNNO - MQNQ$ y

$$\begin{aligned} NO &= NQ \\ MQ + NO &= NQ + MQ \\ MQ + NO &= MN \\ MQ + NQ &= MN \\ (MN)^2 + MQ(NQ) &= (MN)(MQ), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MN &= MQ + QN \\ MN &= MQ + NO \\ (MN)^2 &= (MN)(MQ) + (MN)(NO) \\ (MN)^2 &= (MQ)^2 + (MQ)(NQ) + (MN)(NO), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (MN)^2 + (NO)^2 &= (MQ)^2 + MQNQ + MNNO + MNNO - MQNQ \\ &= (MQ)^2 + 2MNNO, \end{aligned}$$

entonces $(MN)^2 + (NO)^2 = 2MNNO + (MQ)^2$.

$$\begin{aligned} (TL)^2 + (MQ)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 + 2TKKL + (MN)^2 + (NO)^2 - 2TKKL \\ &= (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2 \\ &= CF, \end{aligned}$$

entonces $(TL)^2 + (MQ)^2 = CF$.

Se demuestra que $(MO)^2 + (PL)^2 = CF$ de la misma forma que el subcaso anterior. Así queda demostrado que CF se puede expresar de 2 maneras distintas.

- Caso en que uno de los números E o Z es un número cuadrado

En este caso existe un modo más de expresar CF, además de los 2 anteriores. Como E o Z es un número cuadrado, tomemos sin pérdida de generalidad que si E es el número cuadrado, entonces el otro par de números serán $E(G^2)$ y $E(D^2)$ que son cuadrados pues $E = X^2$, por lo tanto $E(G^2) = X^2G^2 = (XG)^2$ y $E(D^2) = X^2D^2 = (XD)^2$. Por consiguiente $CF = (XG)^2 + (XD)^2$ será el tercer modo de expresar a CF.

- Caso en que E y Z son números cuadrados

En este caso se puede encontrar una forma más que se suma a las anteriores. Como E y Z son un número cuadrado, tomemos sin pérdida de generalidad Z (en el caso anterior tomamos E), entonces los otros dos números serán $(A^2)Z$ y $(B^2)Z$ que son cuadrados pues $Z = W^2$, por lo tando $(A^2)Z = A^2W^2 = (AW)^2$ y $(B^2)Z = B^2W^2 = (BW)^2$. Por lo tanto $CF = (AW)^2 + (BW)^2$ será la cuarta forma de expresar a CF.
Algunos ejemplos:
Sean $A = 5$, $B = 7$, $G = 7$ y $D = 11$, por lo tanto tenemos que $E = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$ y $Z = 9^2 + 11^2 = 81 + 121 = 202$, $(E)(Z) = 14948$.
$TK = 45$, $KL = 77$ y $MN = 55$, $NO = 63$ y $TL = 122$, $QO = 8$ y $MO = 45$, $PL = 32$. Aplicando lo obtenido $(TL)^2 + (QO)^2 = 14884 + 64 = 14948$ y $(MO)^2 + (PL)^2 = 13924 + 1024 = 14948$. Por lo tanto

$$(E)(Z) = (TL)^2 + (QO)^2 = (MO)^2 + (PL)^2 = 14948.$$

Es decir, se tienen las 2 maneras de expresar $(E)(Z)$.
Sean $A = 3$, $B = 4$, $G = 7$ y $D = 5$, por lo tanto tenemos $E = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ y $Z = 7^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74$, $(E)(Z) = 1850$.
$TK = 21$, $KL = 20$ y $MN = 15$, $NO = 28$ y $TL = 41$, $QO = 13$ y $MO = 43$, $PL = 1$. Aplicando lo obtenido $(TL)^2 + (QO)^2 = 1681 + 169 = 1850$ y $(MO)^2 + (PL)^2 = 1849 + 1 = 1850$, el tercer modo lo calculamos así $(E)G^2 + (E)D^2 = (25)(49) + (25)(25) = 1225 + 625 = 1850$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}(E)(Z) = (TL)^2 + (QO)^2 &= (MO)^2 + (PL)^2\\ (E)G^2 + (E)D^2 &= 1850.\end{aligned}$$

Con lo anterior se tienen los 3 modos de expresar $(E)(Z)$.
Sean $A = 8$, $B = 15$, $G = 12$ y $D = 35$. Por lo tanto tenemos que $E = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$ que es cuadrado al igual que $Z = 12^2 + 35^2 = 144 + 1225 = 1369 = 37^2$, $(E)(Z) = 395641$.
$TK = 45$, $KL = 77$ y $MN = 55$, $NO = 63$ y $TL = 122$, $QO = 8$ y $MO = 45$, $PL = 32$, aplicando lo obtenido $(TL)^2 + (QO)^2 = 14884 + 64 = 14948$ y $(MO)^2 + (PL)^2 = 13924 + 1024 = 14948$, la tercer forma la calculamos así $(E)G^2 + (E)D^2 = (289)(144) + (289)(1225) = 41616 + 354025 = 395641$ y la cuarta se deduce aplicando la fórmula anterior pero con el otro cuadrado $A^2(Z) + B^2(Z) = (64)(1369) + (225)(1369) = 87616 + 308025 = 395641$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}(E)(Z) = (TL)^2 + (QO)^2 = (MO)^2 + (PL)^2 &= (E)G^2 + (E)D^2\\ A^2(Z) + B^2(Z) &= 395641.\end{aligned}$$

Se tienen las 4 formas de exprezar $(E)(Z)$.

El producto de las dos sumas de dos cuadrados es también suma de dos cuadrados y lo puede ser de dos maneras distintas. Si $m = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$ o también puede ser igual a $(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$. Al juntar las dos igualdades anteriores obtenemos[3]:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ad \mp bc)^2 + (ac \pm bd)^2 = (bc \mp ad)^2 + (bd \pm ac)^2.$$

Geométricamente se puede analizar en los siguientes 4 casos:

Caso 1. Ver la (Fig. 4.3)

$$\begin{aligned}(ad-bc)^2 + (ac+bd)^2 &= (ad)^2 - 2adbc + (bc)^2 + (ac)^2 + 2acbd + (bd)^2 \\ &= (ad)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + (bd)^2 \\ &= a^2d^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + b^2d^2 \\ &= a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2) \\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2).\end{aligned}$$

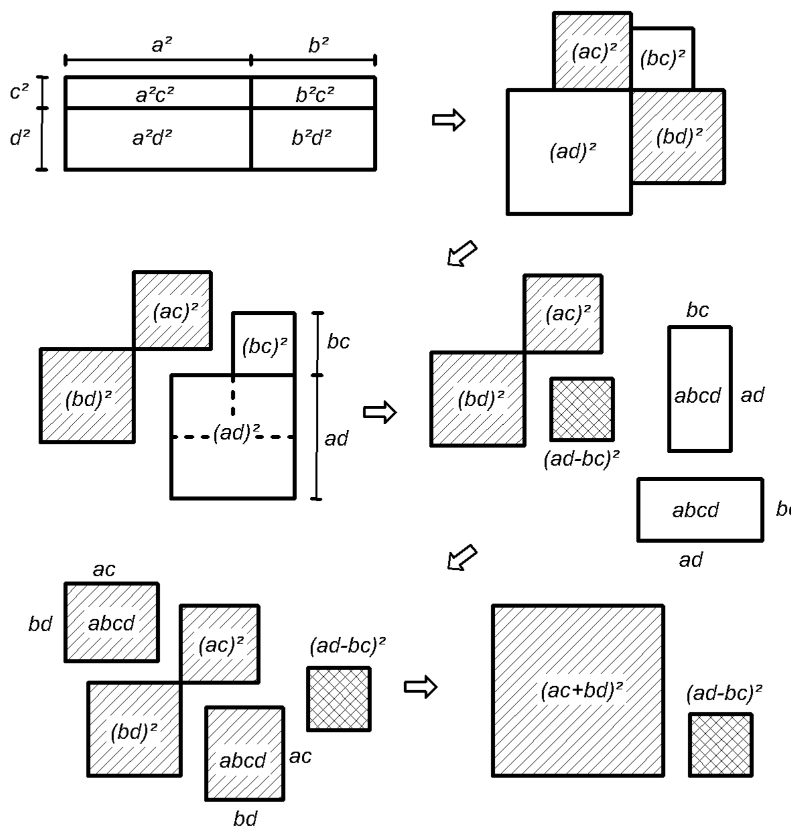


Figura 4.3: $(ad-bc)^2 + (ac+bd)^2$

[3]Esta expresión fue formulada por Al-Khazin en su discusión sobre el problema de Diofanto, una demostración puramente geometríca aparece en [24] y una demostración geométrica de suma de cuadrados a partir de números poligonales (triangulares) se puede consultar en [23].

Caso 2. Ver la (Fig. 4.4)

$$\begin{aligned}(ad+bc)^2+(ac-bd)^2 &= (ad)^2+2adbc+(bc)^2+(ac)^2-2acbd+(bd)^2\\ &= (ad)^2+(bc)^2+(ac)^2+(bd)^2\\ &= a^2d^2+b^2c^2+a^2c^2+b^2d^2\\ &= a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)\\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2).\end{aligned}$$

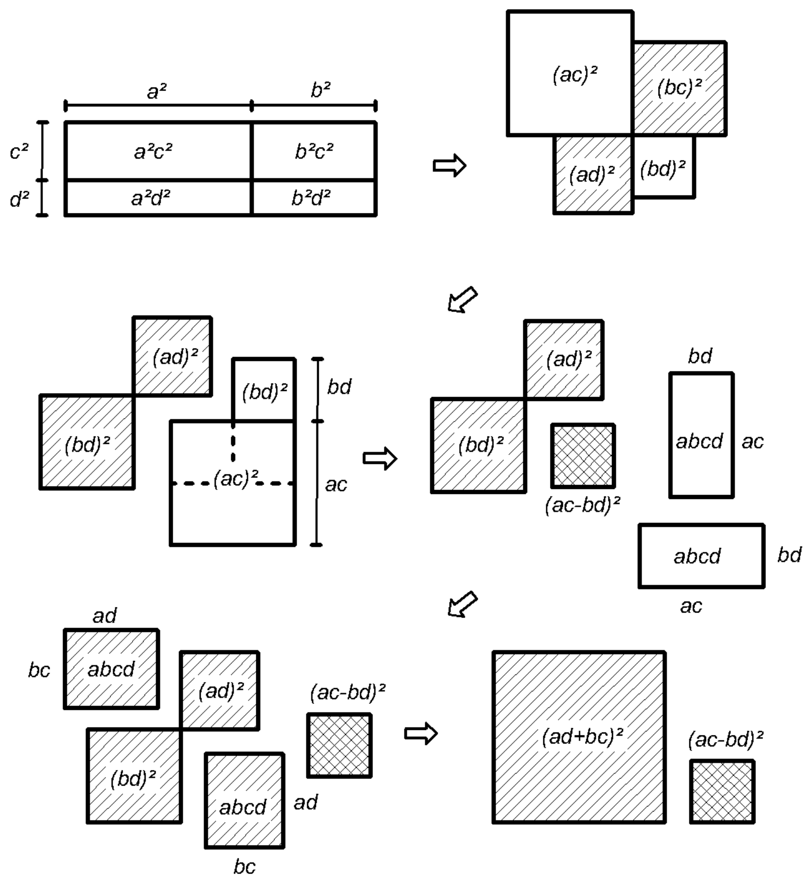


Figura 4.4: $(ad+bc)^2+(ac-bd)^2$

Caso 3. Ver la (Fig. 4.5)

$$\begin{aligned}(bc-ad)^2+(bd+ac)^2 &= (bc)^2-2bcad+(ad)^2+(bd)^2+2bdac+(ac)^2\\ &= (bc)^2+(ad)^2+(bd)^2+(ac)^2\\ &= b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2+a^2c^2\\ &= a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)\\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2).\end{aligned}$$

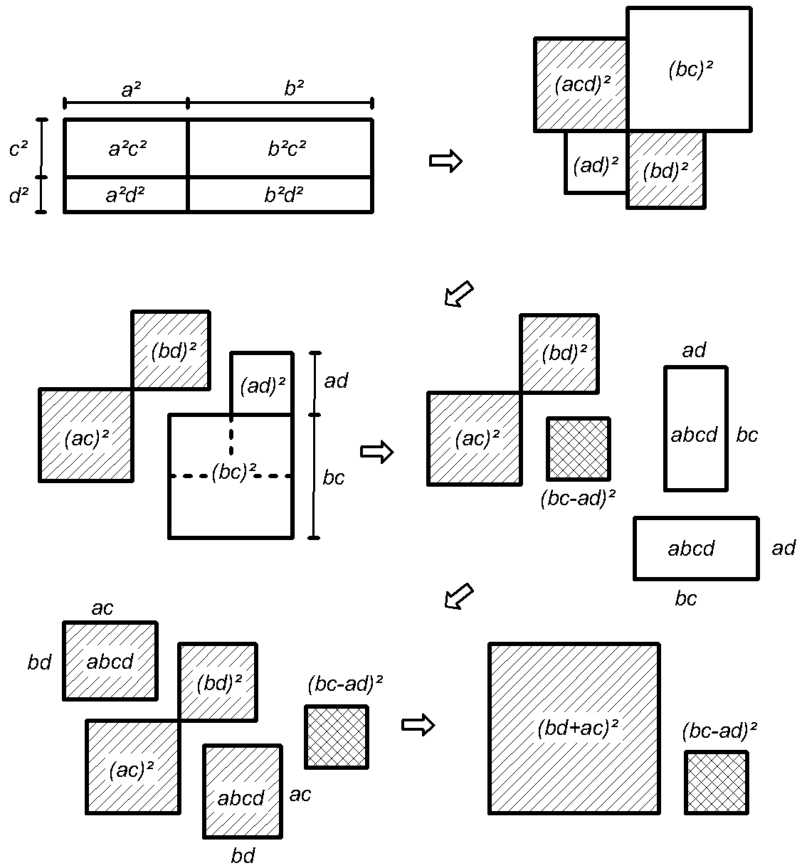


Figura 4.5: $(bc - ad)^2 + (bd + ac)^2$

Caso 4. Ver la (Fig. 4.6)

$$\begin{aligned}
(bc + ad)^2 + (bd - ac)^2 &= (bc)^2 + 2bcad + (ad)^2 + (bd)^2 - 2bdac + (ac)^2 \\
&= (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2 + (ac)^2 \\
&= b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + a^2c^2 \\
&= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) \\
&= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).
\end{aligned}$$

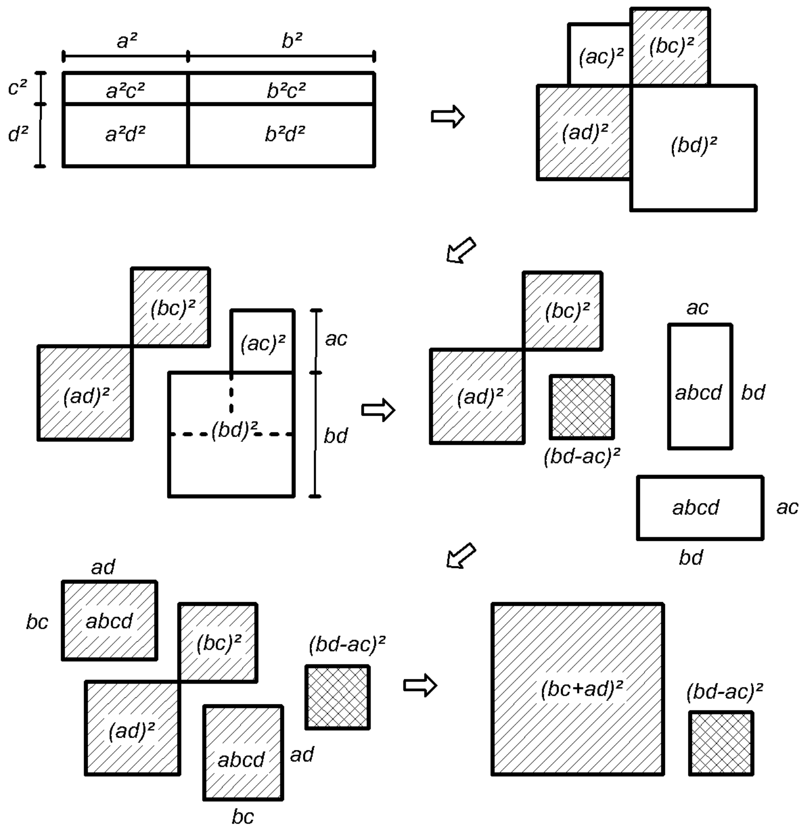


Figura 4.6: $(bc + ad)^2 + (bc - ac)^2$

Una vez demostrado lo anterior se puede definir $J = \{X_1^2 + X_2^2 \ni X_1, X_2 \in \mathbb{Z}\}$. Se afirma entonces que J es cerrado bajo el producto, es decir, dados $n_1, n_2 \in J$ entonces $n_1 \cdot n_2 \in J$ y por es una operación binaria, se puede aplicar en general, es decir $n_1, n_2, n_3 \cdots, n_j \in J$ entonces $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_j \in J$.

$$
\begin{gathered}
n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_j \in J \\
n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_j \in J \\
\underbrace{(m_1^2 + m_2^2)} \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_j \in J \\
n_1{}' \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot \cdots \cdot n_j \in J \\
n_1{}' \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot \cdots \cdot n_j \in J \\
\underbrace{(m_3^2 + m_4^2)} \cdot n_4 \cdot \cdots \cdot n_j \in J \\
n_2{}' \cdot n_4 \cdot n_5 \cdot \cdots \cdot n_j \in J \\
\vdots \\
n_{j-2}{}' \cdot n_j \in J.
\end{gathered}
$$

Capítulo 5

Proposición V

Un número cuadrado como suma de dos cuadrados.

En esta proposión se plantea encontrar de una manera distinta a la expuesta en la Proposición I, un número cuadrado igual a la suma de dos números cuadrados dados.

Se analizarán varias maneras:

- Dados cuatro números proporcionales, si la suma de los cuadrados del primero y el segundo se multiplican por la suma de los cuadrados del tercero y del cuarto, se tendrá que dicha multiplicación es igual a un número cuadrado que a su vez es igual a la suma de dos cuadrados.

  Sean A, B, G y D cuatro números proporcionales. Tales que G es a D como A es a B. Sea el número E la suma de los cuadrados de los números A y B; por otra parte sea Z la suma de los cuadrados de los números G y D. Multipliquemos E por Z, para resultar CF. Se probará que CF es igual a un número cuadrado que a su vez es igual a la suma de dos cuadrados.

  Primero se demostrará que CF es un número cuadrado. Multipliquemos A por G y obtendremos TK. Se obtiene el número KL de la multiplicación de B por D; se obtiene el número MN de la multiplicación de A por D y se obtiene el número NO de la multiplicación de B por G. Dado que A, B, G y D son proporcionales con la relación de A a B, tendremos que $MN = NO$ y por ende la multiplicación de A por D equivale a la multiplicación de B por G.

  Ahora demostraremos que TK y KL son distintos.

  Puesto que G es a D como A es a B, resulta que, por igualdad y la propiedad recíproca, B es a D como A es a G, es decir, si B es mayor que A, D será mayor que G, y si B es menor que A, D será menor que G. Entonces se tendrán 2 opciones, A y C serán ambos menores o bien ambos mayores, ya que no pueden ser iguales, pues de serlo en el inicio no serían 4 números.

Dado que el cuadrado de A es a A por G, es decir, el cuadrado de A es a TK, como A es a G, también B es a D como A a G, de donde se tendrá que el cuadrado del número B es a B por D, es decir, el cuadrado de B es a KL, como B es a D, y por igualdad se obtendrá que el cuadrado de B es a KL como A es a G. Por lo tanto se tendrán las 3 proporciones: A es a G como el cuadrado de A es a TK y como el cuadrado de B es a KL. Por composición y proporcionalidad de la suma resulta que el cuadrado de A más el cuadrado de B es la suma de los números TK y KL, como A es a G, es decir, E es a TL, como A es a G.

Análogamente se tiene que A por G es al cuadrado de G, es decir, TK es al cuadrado de G, como A es a G; también B es a D como A a G, de donde se tendrá que B por D es al cuadrado del número D, es decir, KL es al cuadrado de D como B es a D, y por igualdad se obtendrá que KL es al cuadrado de D, como A es a G. Por lo tanto se tendrán las 3 proporciones A es a G como TK es al cuadrado de G y como KL es al cuadrado de D. Por composición y proporcionalidad de la suma resulta que la suma de los números TK y KL es a la suma del cuadrado de G más el cuadrado de D, como A es a G, es decir, TL es a Z, como A es a G.

En consecuencia E es a TL, como TL es a Z, y dado que TL es la media proporcional de E y Z, de ahí se obtendrá que, el cuadrado de TL es igual a E por Z, es decir, el área del rectángulo formado por E y Z. Ahora bien, el el área del rectángulo formado por E y Z es el número CF. En consecuencia CF es un cuadrado cuya raíz es el número TL. Quedando así establecida la primera parte de la demostración.

De manera análoga, como en la proposición pasada se demostrará que CF es igual a la suma de los cuadrados de los números TK, KL, MN y NO. Partiremos del cuadrado del número TL que es igual a los cuadrados de los números TK y KL más el duplo del área formada TK y KL.

Con anterioridad habíamos demostrado que el área formada TK y KL es igual al área formada MN y NO y también tendremos que el área formada por MN y NO está limitada por números iguales. En consecuencia MN multiplicado por NO es idéntico a MN multiplicado por sí mismo o NO multiplicado por sí mismo, es decir, se tendrá que el duplo del área formada por TK y KL, es equivalente a la suma de los cuadrados de los números MN y NO.

Concluyendo entonces que el cuadrado de TL es igual a la suma de los cuadrados de los números TK, KL, MN y NO, que a su vez es igual a CF.

- Supongamos que A, G sean menores, en consecuencia TK será menor que KL; tómese sobre el número KL el número KP igual al número TK y encontramos, según lo demostrado en la proposición anterior, que los cuadrados formados por los números MO y PL son iguales al número CF.

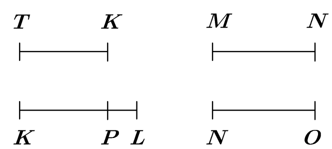


Figura 5.1: $TK < KL$ y $MN = NQ$

- Ahora supongamos que A, G sean mayores, y en consecuencia, TK, será mayor que KL. Sólo falta encontrar los dos números que elevados al cuadrado y sumados resulten igual a CF. Partiendo de la hipótesis que TK es mayor a KL, esto se obtendrá de la misma manera que el caso anterior. Basta con tomar TP igual a KL sobre TK para obtener PK que será la diferencia positiva entre dichos números, es decir, pasará que los cuadrados formados por los números MO y PK son iguales al número CF.

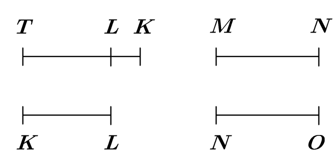


Figura 5.2: $TK > KL$ y $MN = NQ$

Por lo tanto queda demostrada esta proposición, pues se encontraron dos números tales que elevados al cuadrado y sumados seán iguales a un cuadrado que a su vez es igual al producto de las sumas antes descritas.

- Otra manera.

  Ahora se demostrará esta proposición con un lenguaje más actual: sean A, B, G y D cuatro números proporcionales, i.e. $\frac{A}{B}=\frac{G}{D}$. Sea $E = A^2+B^2$, $Z = G^2 + D^2$ y $CF = (E)(Z)$ y $TK = (A)(G)$, $KL = (B)(D)$, $MN = (A)(D)$ y $NO = (B)(G)$. Dado que A, B, G y D son números proporcionales, entonces sabremos que $MN = NO$. Pues $AD = MN = NO = BG$. Ahora falta demostrar que $TK \neq KL$.

  Como $\frac{A}{B} = \frac{G}{D}$, entonces por propiedades de proporcionalidad $\frac{B}{D} = \frac{A}{G}$, resulta que si $B > A$, entonces $D > G$, y si $B < A$ entonces $D < G$, i.e. A,G serán ambos menores o ambos mayores que B y D, pero nunca iguales, ya que si lo fueran, no estaríamos trabajando con 4 números.

Partiendo de $\frac{A}{G} = \frac{B}{D}$, obtendremos

$$\frac{A^2}{AG} = \frac{A^2}{TK} = \frac{A}{G} \quad = \quad \frac{B}{D} = \frac{B^2}{KL} = \frac{B^2}{DB},$$

a partir de propiedades de la suma en la proporciones $\frac{A^2+B^2}{TK+KL} = \frac{A^2+B^2}{TL} = \frac{E}{TL}$.

Analógamente

$$\frac{AG}{G^2} = \frac{TK}{G^2} = \frac{A}{G} \quad = \quad \frac{B}{D} = \frac{KL}{D^2} = \frac{BD}{D^2},$$

por la propiedad antes mencionada $\frac{TK+KL}{G^2+D^2} = \frac{TL}{G^2+D^2} = \frac{TL}{Z}$.

De donde se tendrá que $\frac{E}{TL} = \frac{TL}{Z}$, y dado que TL es la media proporcional de E y Z, se obtendrá $(TL)^2 = (E)(Z) = CF$, es decir, CF es un número cuadrado, quedando así demostrada una parte de la proposición.

Antes de continuar con la otra parte de la demostración verifiquemos que $CF = (TL)^2 = (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2$. Si se considera que $TKKL = MNNO$ y que $MN = NO$

$$\begin{aligned} (TL)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 + 2TKKL \\ &= (TK)^2 + (KL)^2 + 2MNNO \\ &= (TK)^2 + (KL)^2 + MNNO + MNNO \\ &= (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2 \end{aligned}$$

entoces $CF = (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2$.

- Se parte de que $A,G < B,D$ y se tiene que $TK < KL$. Ahora procedamos a demostrar que $CF = (MO)^2 + (PL)^2$, con $KL - TK = PL$ y recordando la igualdad $2xy + (x-y)^2 = x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned} 2TKKL + (KL - TL)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 \\ 2TKKL + (PL)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 \\ (MN)^2 + (NO)^2 + 2TKKL + (PL)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2 \\ (MN)^2 + (NO)^2 + 2MNNO + (PL)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2 \\ (MO)^2 + (PL)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2 \\ &= CF. \end{aligned}$$

entonces $(MO)^2 + (PL)^2 = CF$.

- Verifiquemos con la hipótesis de que A, G son mayores, entonces $TK > KL$, $TK - KL = PK$. Por lo tanto se demostrará que $CF = (MO)^2 + (PK)^2$

$$\begin{aligned}
2TKKL + (TK - KL)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 \\
2TKKL + (PK)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 \\
(MN)^2 + (NO)^2 + 2TKKL + (PK)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2 \\
(MN)^2 + (NO)^2 + 2MNNO + (PK)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2 \\
(MO)^2 + (PK)^2 &= (TK)^2 + (KL)^2 + (MN)^2 + (NO)^2 \\
&= CF
\end{aligned}$$

entonces $(MO)^2 + (PK)^2 = CF$.

Ejemplos:

Analizemos el caso cuando A, G son menores.

Sean $A = 3$, $B = 4$, $G = 9$, $D = 12$, $E = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ que es cuadrado. Por otro lado tenemos $Z = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$, que también es cuadrado. Entonces, $(E)(Z) = 5625$.

$TK = 27$, $KL = 48$ y $MN = 36$, $NO = 36$ y $TL = 75$, $MO = 72$, $PL = 21$, aplicando lo obtenido

$$(MO)^2 + (PL)^2 = 5184 + 441 \quad = \quad 5625 = 75^2 = (TL)^2$$

entonces $(E)(Z) = (MO)^2 + (PL)^2 = (TL)^2 = 5625$.

Ahora veamos el caso en que A y G son mayores.

Sean $A = 32$, $B = 24$, $G = 16$ y $D = 12$. Por lo tanto tenemos, $E = 32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ que es cuadrado; por otro lado tenemos $Z = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400 = 20^2$, que también es cuadrado; entonces $(E)(Z) = 640000$.

$TK = 512$, $KL = 288$ y $MN = 384$, $NO = 384$ y $TL = 800$, $MO = 768$, $PK = 224$, se obtendrá entonces

$$(MO)^2 + (PL)^2 = 589824 + 50176 \quad = \quad 640000 = 800^2 = (TL)^2$$

entonces $(E)(Z) = (MO)^2 + (PL)^2 = (TL)^2 = 640000$.

Capítulo 6

Proposición VI

Un número no cuadrado como suma de dos cuadrados.

En esta proposición se resolverá un problema que requiere encontrar dos números cuyos cuadrados unidos formen un número no cuadrado, determinado por la suma de los cuadrados de dos números dados.

Sean G y D números cuyos cuadrados reunidos forman al número Z, el cual no es cuadrado. El problema requiere encontrar otros dos números que cumplan la misma condición. Consideremos A y B, cuyos cuadrados sumados forman al número cuadrado E y cumplen no ser proporcionales con G y D.

Ahora multipliquemos E y Z para obtener I. Encontremos dos números que al sumar sus cuadrados se obtenga I. Llamémoslos P y Q y podemos asegurar la existencia de dichos números gracias a la Propiedad IV. Representemos a dichos números con las rectas KL y LM respectivamente y coloquénse dichas rectas en ángulo recto para formar la (Fig. 6.1)

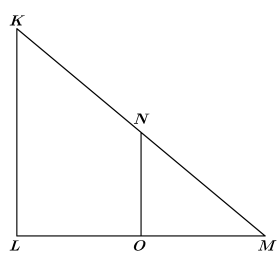


Figura 6.1: $P^2 + Q^2 = I = (KM)^2$

La recta KM será la raíz del número I. Ahora se toma sobre la recta KM el segmento MN, de la misma longitud que la raíz del número Z. Después tracemos la recta NO perpendicular a la recta LM, obteniendo el segmento OM, sobre LM. De esta manera obtenemos los segmentos NO y OM, los cuales cumplen con la condición solicitada.

Dada la construcción de los números, se tiene que el cuadrado de KM es igual al número I, y el número I es a su vez el producto de E por Z, por lo tanto sus correspondientes raíces generarán la raíz del número I, es decir, KM. Tenemos que MN es la raíz de Z y llamemos F a la raíz de E, y como E es un cuadrado su raíz F será racional.

Entonces el cuadrado de KM será igual al producto del cuadrado de F por el cuadrado MN, es decir, MN estará tantas veces en KM como tantas unidades tiene F. Obtendremos que MN es a MK como la unidad es a F y NO es a KL como OM es a ML y como MN es a MK.

Por lo tanto, NO es a KL y MO es a ML como la unidad es a F, por tal razón si dividimos KL por F, obtendremos NO racional. Y de la misma manera si se divide ML por F se obtiene OM. Finalizando así.

Esta proposición es una variante de la Proposición III y se apoya en la Proposición IV como ya se había mencionado. En un lenguaje más actual, la proposición inicia con la igualdad $a^2 + b^2 = c$, con c no cuadrado, y se busca otra descomposición, es decir, $x^2 + y^2 = c$. Se inicia como antes, con una terna que cumple $u^2 + v^2 = t^2$; se toma el primer caso de la Proposición IV, sabemos que se pueden generar dos maneras distintas de expresar

$$(a^2 + b^2)(u^2 + v^2) \quad = \quad p^2 + q^2 = r^2 + s^2$$

de ahí se obtiene

$$\begin{aligned} x = r/t \quad &; \quad y = s/t \\ x = p/t \quad &; \quad y = q/t \end{aligned}$$

estas parejas cumplen la condición $x^2 + y^2 = c$.
En el *Sumario Compendioso de las cuentas...* de Juan Diez Freyle [7] el Problema 7 solicita encontrar dos números X y Y, tales que, $X^2 + Y^2 = 13$. Conociendo la igualdad $2^2 + 3^2 = 13$, cabe aclarar que X y Y serán números fraccionarios.

La solución involucra la terna pitagórica auxiliar $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Se tomarán los números no elevados al cuadrado de la terna original y se sumarán, es decir, 2+3=5, 5 será el denomidador de X y Y. El numerador de X será igual a la suma de los productos cruzados de los números de las dos ternas, el primer número de la terna original por el segundo número de la terna auxiliar más el segundo número de la terna original por el primer número de la terna auxiliar, es decir,2(4)+3(3)=17. El numerador de Y será igual a la diferencia de los productos directos de los números de las dos ternas, el segundo número de la terna original por el segundo número de la terna auxiliar menos el primer número de la terna original por el primer número de la terna auxiliar, es decir, 3(4)-2(3)=6.

Al aplicar el proceso descrito obtenemos,

$$X = \frac{17}{5} \quad , \quad Y = \frac{6}{5}$$

Se proponen X y Y como los valores buscados, comprobando que cumplan con lo solicitado

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= \left(3\frac{2}{5}\right)^2 + \left(1\frac{1}{5}\right)^2 \\ &= 11\frac{14}{25} + 1\frac{11}{25} \\ &= 13. \end{aligned}$$

Esta proposición es un caso particular de la Proposición IV, como ya se había mencionado, es un producto de una suma de cuadrados de la forma.

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \quad = \quad (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$$

partiendo de que uno de los factores es la terna pitagórica, dando como resultado un cuadrado perfecto, y el otro dará el cuadrado con raíz discreta.

$$\begin{aligned} (4^2 + 3^2)(3^2 + 2^2) &= (12 - 6)^2 + (8 + 9)^2 \\ (5^2)(13) &= (6)^2 + (17)^2 \\ 13 &= \frac{6^2}{5^2} + \frac{17^2}{5^2} \\ 13 &= \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{17}{5}\right)^2, \end{aligned}$$

la otra opción quedaría

$$\begin{aligned} (4^2 + 3^2)(3^2 + 2^2) &= (12 + 6)^2 + (8 - 9)^2 \\ (5^2)(13) &= (18)^2 + (-1)^2 \\ 13 &= \frac{18^2}{5^2} + \frac{-1^2}{5^2} \\ 13 &= \left(\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{5}\right)^2 \\ 13 &= \left(\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2. \end{aligned}$$

Pacioli [18] trabajó con la terna $2^2 + 4^2 = 20$. Se puede trabajar con la misma terna pitagórica, pero observamos que si aplicamos literalmente el proceso, obtendermos en uno de los casos los mismos números dados.

$$\begin{aligned} (4^2 + 3^2)(2^2 + 4^2) &= (8 + 12)^2 + (16 - 6)^2 \\ (5^2)(20) &= (20)^2 + (10)^2 \\ 20 &= \frac{20^2}{5^2} + \frac{10^2}{5^2} \\ 20 &= \left(\frac{20}{5}\right)^2 + \left(\frac{10}{5}\right)^2 \\ 20 &= 4^2 + 2^2, \end{aligned}$$

la otra opción quedaría

$$\begin{aligned}
(4^2+3^2)(2^2+4^2) &= (8-12)^2+(16+6)^2 \\
(5^2)(20) &= (-4)^2+(22)^2 \\
20 &= \frac{-4^2}{5^2}+\frac{22^2}{5^2} \\
20 &= \left(\frac{-4}{5}\right)^2+\left(\frac{22}{5}\right)^2 \\
20 &= \left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{22}{5}\right)^2.
\end{aligned}$$

Capítulo 7

Proposición VII

Suma de n cuadrados.

En esta proposición se demostrará que la suma de los n primeros cuadrados es igual al séxtuplo de un producto de la forma (n)(n+1)(2n + 1)

Partamos de una cantidad cualquiera de números sucesivos a partir de la unidad AB, BG, GD, DE, EZ y ZI (Fig. 7.1).

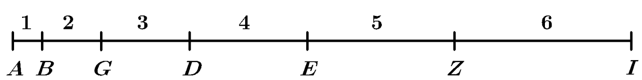


Figura 7.1

Fibonacci quiere demostrar que se cumple

$$(EZ)(ZI)(EI) = 6[(AB)^2 + (BG)^2 + (GD)^2 + (DE)^2 + (EZ)^2],$$

para lo cual coloca sobre la recta a los números AB, BG, GD, DE, EZ y ZI, (Fig. 7.1). Tomemos $EZ = ZT$ sobre ZI, entonces $TI = 1$, de igual forma si $ZK = DE$, entonces $KT = 1$, por lo tanto $KI = 2$ (Fig. 7.2). Por lo tanto $(EZ)(ZK)(EK) = (EZ)(DE)(DZ)$.

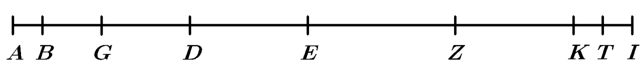


Figura 7.2

Ahora verifiquemos que

$$(EZ)(ZK)(EK) + (EZ)(ZK)(KI) + (EZ)(KI)(EI) = (EZ)(ZI)(EI).$$

Antes demostremos que $(EZ)(ZK)(KI) + (EZ)(KI)(EI) = 6(EZ)^2$.

Se parte de $ZK = EZ - 1$ y $EI = 2EZ + 1$.

$$\begin{aligned}(EZ)(ZK) &= (EZ)(EZ-1)\\ (EZ)(ZK) &= (EZ)^2 - EZ\\ (EZ)(ZK)(KI) &= 2(EZ)^2 - 2(EZ).\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(EZ)(KI) &= 2(EZ)\\ (EZ)(KI)(EI) &= 2(EZ)(2EZ+1)\\ (EZ)(KI)(EI) &= 4(EZ)^2 + 2(EZ).\end{aligned}$$

Entonces

$$(EZ)(ZK)(KI)+(EZ)(KI)(EI) = 2(EZ)^2-2(EZ)+4(EZ)^2+2(EZ) = 6(EZ)^2$$

que es lo que se quería demostrar.

Habiendo demostrado lo anterior tendríamos que

$$(EZ)(ZI)(EI) = (EZ)(ZK)(EK) + 6(EZ)^2$$

pero $(EZ)(ZK)(EK) = (EZ)(DE)(DZ)$, entonces

$$(EZ)(ZI)(EI) = (DE)(EZ)(DZ) + 6(EZ)^2.$$

Analógamente $(DE)(EZ)(DZ) = (GD)(DE)(GE) + 6(DE)^2$, entonces

$$(EZ)(ZI)(EI) = (GD)(DE)(GE) + 6[(EZ)^2 + (DE)^2]$$

y $(GD)(DE)(GE) = (BG)(GD)(BD) + 6(GD)^2$, entonces

$$(EZ)(ZI)(EI) = (BG)(GD)(BD) + 6[(EZ)^2 + (DE)^2 + (GD)^2]$$

y $(BG)(GD)(BD) = (AB)(BG)(AG) + 6(BG)^2$, entonces

$$(EZ)(ZI)(EI) = (AB)(BG)(AG) + 6[(EZ)^2 + (DE)^2 + (GD)^2 + (BG)^2]$$

y $(AB)(BG)(AG) = (AB)(2)(3) = 6(AB) = 6(AB)^2$, entonces

$$(EZ)(ZI)(EI) = 6[(EZ)^2 + (DE)^2 + (GD)^2 + (BG)^2 + (AB)^2]$$

que es lo que queríamos demostrar.

Vale la pena señalar que Fibonacci presenta un desarrollo de carácter recursivo similar al que utiliza en la construcción de los ahora llamados números de Fibonacci. Sin embargo en esta ocasión el proceso es inverso, es decir, toma el último número y lo relaciona con los dos que le anteceden. Podemos tener otras formas de desarrollar el mismo resultado, las presentamos para complementar el trabajo de Fibonacci.

La primera de ellas es usando el método de Gauss[1]. Antes de pasar a la suma de los cuadrados a la cual denotaremos por S recordemos que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3(a^2)(b) + 3(a)(b^2) + b^3.$$

Entonces si representamos cada natural con un binomio, no cualquier binomio, sino aquél formado por su antecesor y la unidad, tendremos que

$$\begin{array}{rcl} 1^3 & = & (1+0)^3 = 1 + 0^3 + 3\times + 3\times^2 \\ 2^3 & = & (1+1)^3 = 1 + 1^3 + 3\times + 3\times^2 \\ 3^3 & = & (1+2)^3 = 1 + 2^3 + 3\times + 3\times^2 \\ \vdots & = & \vdots \\ (n+1)^3 & = & (1+n)^3 = 1 + n^3 + 3\times n + 3\times n^2. \end{array}$$

Al hacer la suma

$$1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3 = (n+1)+(1^3+2^3+\cdots+n^3)+3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)$$

[1]Método utilizado por Gauss para calcular la suma de los primeros 100 números. Observemos que

$$\begin{array}{rcl} 1+100 & = & 101 \\ 2+99 & = & 101 \\ 3+98 & = & 101 \\ \vdots & = & \vdots \\ 50+51 & = & 101 \end{array}$$

como son 50 parejas, entonces $1+2+3+...+100 = 101 * 50 = 5050$.
Generalizando

$$\begin{array}{rcl} S' & = & 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n \\ S' & = & n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1 \\ 2S' & = & (n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1) \\ 2S' & = & n(n+1) \\ S' & = & \dfrac{n(n+1)}{2} \end{array}$$

simplificando

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 &= (n+1) + 3S + 3S' \\
(n+1)^3 &= (n+1) + 3S + 3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
2(n+1)^3 &= 2(n+1) + 6S + 3(n)(n+1) \\
6S &= 2(n+1)^3 - 2(n+1) - 3(n)(n+1) \\
6S &= (n+1)(2(n+1)^2 - 2 - 3n) \\
6S &= (n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n) \\
6S &= (n+1)(2n^2 + n) \\
6S &= n(n+1)(2n+1) \\
6(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) &= n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}
$$

La segunda de ellas mediante inducción matemática.
Base inductiva: $n = 1$

$$(1)(2)(3) = 6(1^2).$$

Hipótesis inductiva: $n = m$

$$(m)(m+1)(2m+1) = 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + m^2).$$

Paso inductivo: $n = m + 1$

$$
\begin{aligned}
(m+1)(m+2)(2m+3) &= 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (m+1)^2) \\
&= 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + m^2) + 6((m+1)^2) \\
&= (m)(m+1)(2m+1) + 6((m+1)^2) \\
&= (m+1)((m)(2m+1) + 6(m+1)) \\
&= (m+1)(m+2)(2m+3).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(m+1)(m+2)(2m+3) = 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (m+1)^2)$, para toda $m \in \mathbb{N}$.

Hacemos notar que la suma de los n primeros cuadrados naturales, denotada por S en este caso, figuraba desde los tiempos de Arquímedes, como un resultado conocido. Se puede expresar de la forma $6S = n(n+1)(2n+1)$.

Capítulo 8

Proposición VIII

Suma de impares, pares y múltiplos de n al cuadrado.

En esta proposición se analizan dos casos particulares de la proposición anterior y se obtienen resultados para las operaciones siguientes:

a) la suma de los n primeros impares al cuadrado

b) la suma de los n primeros pares al cuadrado

c) la generalización para la suma de los primeros n múltiplos al cuadrado de 3, 4, ...

Iniciemos con la suma de los n primeros impares al cuadrado.

Dispongamos de una cantidad cualquiera de números impares a partir de la unidad, (Fig 8.1). Sean AB, BG, GD, DE y EZ, dichos impares.

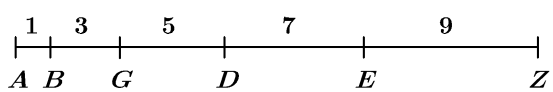


Figura 8.1

Se va a demostrar la siguiente igualdad

$$(DE)(EZ)(DZ) = 12[(AB)^2 + (BG)^2 + (GD)^2 + (DE)^2].$$

Tomemos $DE = EI$ sobre EZ, y se tendrá que $IZ = 2$, (Fig. 8.2),

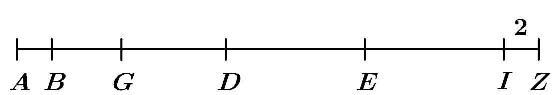


Figura 8.2

Se verificará que $(GD)(DE)(GE) + 12(DE)^2 = (DE)(EZ)(DZ)$, y como DE es una raíz, entonces $GD = DE - 2$ y $GE = 2DE - 2$,

$$\begin{aligned}
(GD)(DE) &= (DE-2)(DE) = (DE)^2 - 2DE \\
(GD)(DE)(GE) &= [(DE)^2 - 2DE](2DE - 2) \\
&= 2(DE)^3 - 2(DE)^2 - 4(DE)^2 + 4DE \\
&= 2(DE)^3 - 6(DE)^2 + 4DE \\
(GD)(DE)(GE) + 12((DE)^2) &= 2(DE)^3 - 6(DE)^2 + 4DE + 12(DE)^2 \\
&= 2(DE)^3 + 6(DE)^2 + 4DE.
\end{aligned}$$

De igual forma, como $DE = EI$, entonces EI es raíz; $EZ = DE + 2$ que es $IZ = 2$, entonces $DZ = 2DE + 2$.

$$\begin{aligned}
(DE)(EZ) &= (DE)(DE+2) = (DE)^2 + 2DE \\
(DE)(EZ)(DZ) &= [(DE)^2 + 2DE](2DE + 2) \\
&= 2(DE)^3 + 4(DE)^2 + 2(DE)^2 + 4DE \\
&= 2(DE)^3 + 6(DE)^2 + 4DE.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(DE)(GE) + 12(DE)^2 = (DE)(EZ)(DZ)$.

Análogamente se demuestra que

$$(GD)(DE)(GE) = (BG)(GD)(BD) + 12(GD^2)$$

entonces

$$\begin{aligned}
(DE)(EZ)(DZ) &= (BG)(GD)(BD) + 12(GD)^2 + 12(DE)^2 \\
&= (BG)(GD)(BD) + 12[(GD)^2 + (DE)^2].
\end{aligned}$$

Siguiendo las mismas bases

$$\begin{aligned}
(BG)(GD)(BD) &= (AB)(BG)(AG) + 12(BG)^2 \\
&= (AB)(3)(4) + 12(BG)^2 \\
&= 12(AB) + 12(BG)^2 \\
&= 12(AB)^2 + 12(BG)^2
\end{aligned}$$

ya que $BG = 3$ y $AG = 4$, entonces

$$\begin{aligned}
(DE)(EZ)(DZ) &= 12(AB)^2 + 12(BG)^2 + 12(GD)^2 + 12(DE)^2 \\
&= 12[(AB)^2 + (BG)^2 + (GD)^2 + (DE)^2].
\end{aligned}$$

Este resultado se puede generalizar para múltiplos de 2, 3, etc, partiendo de dos y tres respectivamente.

Para los múltiplos de 2 (pares) se dispone de una cantidad cualquiera de múltiplos de dos a partir de dos (Fig. 8.3).

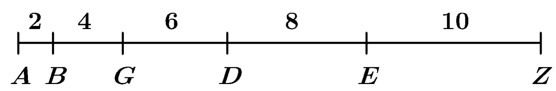


Figura 8.3

Sean $AB = 2$, BG, GD, DE y EZ el par que le sigue al último par tomado. Se va a demostrar que el producto de

$$(DE)(EZ)(DZ) = 12(AB^2 + BG^2 + GD^2 + DE^2).$$

Tomemos que $DE = EI$ sobre EZ, de donde se tendrá que $IZ = 2$, (Fig. 8.4).

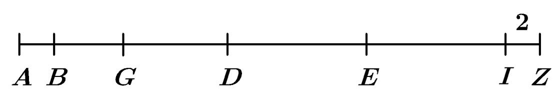


Figura 8.4

$$(GD)(DE)(GE) + 12(DE^2) = (DE)(EZ)(DZ)$$

Sea DE una raíz, entonces $GD = DE - 2$ y $GE = 2DE - 2$

$$\begin{aligned}
(GD)(DE) &= (DE-2)(DE) = DE^2 - 2DE \\
(GD)(DE)(GE) &= (DE^2 - 2DE)(2DE - 2) \\
&= 2DE^3 - 2DE^2 - 4DE^2 + 4DE \\
&= 2DE^3 - 6DE^2 + 4DE \\
(GD)(DE)(GE) + 12(DE^2) &= 2DE^3 - 6DE^2 + 4DE + 12DE^2 \\
&= 2DE^3 + 6DE^2 + 4DE.
\end{aligned}$$

Como $DE = EI$ entonces EI es raíz, $EZ = DE + 2$ que es $IZ = 2$, entonces $DZ = 2DE + 2$

$$\begin{aligned}
(DE)(EZ) &= (DE)(DE+2) = DE^2 + 2DE \\
(DE)(EZ)(DZ) &= (DE^2 + 2DE)(2DE + 2) \\
&= 2DE^3 + 4DE^2 + 2DE^2 + 4DE \\
&= 2DE^3 + 6DE^2 + 4DE.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(GD)(DE)(GE) + 12(DE^2) = (DE)(EZ)(DZ)$.

Análogamente se demuestra que

$$(GD)(DE)(GE) = (BG)(GD)(BD) + 12(GD^2)$$

entonces

$$\begin{aligned}
(DE)(EZ)(DZ) &= = (BG)(GD)(BD) + 12(GD^2) + 12(DE^2)\\
&= (BG)(GD)(BD) + 12(GD^2 + DE^2).
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta lo anterior

$$\begin{aligned}
(BG)(GD)(BD) &= (AB)(BG)(AG) + 12(BG^2)\\
&= (AB)(2AB)(3AB) + 12(BG^2)\\
&= (AB)(2AB)(3)(2) + 12(BG^2)\\
&= (AB)(2AB)(6) + 12(BG^2)\\
&= 12(AB^2) + 12(BG^2)
\end{aligned}$$

ya que $BG = 2AB$ y $AG = 3AB$, entonces

$$\begin{aligned}
(DE)(EZ)(DZ) &= 12(AB^2) + 12(BG^2) + 12(GD^2) + 12(DE^2)\\
&= 12(AB^2 + BG^2 + GD^2 + DE^2).
\end{aligned}$$

Para los múltiplos de 3 se sigue el mismo método. Disponemos de una cantidad cualquiera de múltiplos de tres a partir de tres. Sean $AB = 3$, BG, GD, DE y EZ el número que le sigue al úlitimo múltiplo tomado. Se va a demostrar la validez de la siguiente igualdad de

$$(DE)(EZ)(DZ) = 18(AB^2 + BG^2 + GD^2 + DE^2).$$

Tomemos que $DE = EI$ sobre EZ, de donde se tendrá que $IZ = 3$

$$(GD)(DE)(GE) + 18(DE^2) = (DE)(EZ)(DZ).$$

Sea DE una raíz, entonces $GD = DE - 3$ y $GE = 2DE - 3$

$$\begin{aligned}
(GD)(DE) &= (DE - 3)(DE) = DE^2 - 3DE\\
(GD)(DE)(GE) &= (DE^2 - 3DE)(2DE - 3)\\
&= 2DE^3 - 3DE^2 - 6DE^2 + 9DE\\
&= 2DE^3 - 9DE^2 + 9DE\\
(GD)(DE)(GE) + 18(DE^2) &= 2DE^3 - 9DE^2 + 9DE + 18DE^2\\
&= 2DE^3 + 9DE^2 + 9DE.
\end{aligned}$$

Como $DE = EI$ entonces EI es raíz, $EZ = DE + 3$ que es $IZ = 3$, entonces $DZ = 2DE + 3$

$$\begin{aligned}
(DE)(EZ) &= (DE)(DE + 3) = DE^2 + 3DE\\
(DE)(EZ)(DZ) &= (DE^2 + 3DE)(2DE + 3)\\
&= 2DE^3 + 3DE^2 + 6DE^2 + 9DE\\
&= 2DE^3 + 9DE^2 + 9DE
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(GD)(DE)(GE) + 12(DE^2) = (DE)(EZ)(DZ)$.

Análogamente se demuestra que

$$(GD)(DE)(GE) = (BG)(GD)(BD) + 18(GD^2)$$

entonces

$$\begin{aligned}(DE)(EZ)(DZ) &= = (BG)(GD)(BD) + 18(GD^2) + 18(DE^2)\\ &= (BG)(GD)(BD) + 18(GD^2 + DE^2).\end{aligned}$$

Luego, al continuar con la idea anterior

$$\begin{aligned}(BG)(GD)(BD) &= (AB)(BG)(AG) + 18(BG^2)\\ &= (AB)(2AB)(3AB) + 18(BG^2)\\ &= (AB)(2AB)(3)(3) + 18(BG^2)\\ &= (AB)(2AB)(9) + 18(BG^2)\\ &= 18(AB^2) + 18(BG^2).\end{aligned}$$

Ya que $BG = 2AB$ y $AG = 3AB$, entonces

$$\begin{aligned}(DE)(EZ)(DZ) &= 18(AB^2) + 18(BG^2) + 18(GD^2) + 18(DE^2)\\ &= 18(AB^2 + BG^2 + GD^2 + DE^2).\end{aligned}$$

Es importante hacer notar que los resultados obtenidos están fuertemente relacionados con la Proposición VII. Para el caso de los impares y pares, la diferencia entre los números tomados es 2, por los cual el séxtuplo que aparece en la suma de los n primeros cuadrados se multiplica por dos y se obtiene el 12. En el caso de los múltiplos de 3, el séxtuplo de la suma se multiplica por tres y se obtiene el 18, mientras que el producto se toma igual, es decir, el último número por el penúltimo número por la suma de ambos (respetando la forma de cada múltiplo).

Como siempre, se puede plantear el resultado con el lenguaje actual.

- Proposición VII... $(m)(m+1)(2m+1) = 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + m^2)$
- Impares... $(2m-1)(2m+1)(4m) = 2(6(1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (m-1)^2))$
- Pares... $(2m)(2(m+1))(4m+2) = 2(6(2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (m)^2))$
- Múltiplos de 3... $(3m)(3m+3)(6m+3) = 3(6(3^2+6^2+9^2+...+(3m+3)^2))$

Capítulo 9

Proposición X

Un número central, una serie de números y el producto entre ellos.

Dado un número, si se coloca a ambos lados de él una serie de números mayores y menores que él, con la condición de que cada número mayor exceda al número dado en la misma cantidad que éste excede a uno de los menores, entonces se tendrá que la suma de los números que conforman la serie es igual al producto del número dado por el número de elementos de la serie.[1]

Antes de pasar a la demostración de esta proposición, cabe mencionar que podría parecer un resultado que no está relacionado con números cuadrados, o con números congruentes; pero resulta que sí lo está, pues la serie que se genera puede estar conformada solamente por números impares, y recordando que la suma de números impares a partir de la unidad generan números cuadrados, tiene mucho sentido poder visualizar a los cuadrados como producto de otros números. Esta proposición se utilizará de manera recurrente en el siguiente capítulo.

Sea D el número "*central*". Usamos la notación de A, B, C, E, Z e I para los números que conforman la serie de los menores y mayores, donde A, B, C son los menores a D y E, Z, I los mayores.

Cumpliendo la condición solicitada, I excede a D, en la misma cantidad que D excede a A; Z excede a D en la misma cantidad que D excede a B y E excede a D en la misma cantidad que D excede a G (Fig. 9.1).

[1] Demos un ejemplo para que quede más claro el enunciado. Tomemos el número 7, coloquemos del lado izquierdo de él los números 4,5 y 6 y al lado derecho a 8,9 y 10, obteniendo una serie de 6 números los cuales al ser sumados dan como resultado 42, que es equivalente a multiplicar 6(7). Observemos que en ninguna parte se dice que la diferencia entre los números de la progresión debe ser la misma, es decir, podemos tener distintas diferencias. Por ejemplo, si tomamos nuevamente a 7 como el número central podemos considerar a 5 y 9, 2 y 12, 1 y 13 como los números de la progresión y el resultado se cumple, pues $1+2+5+9+12+13 = 42 = 7(6)$.

Antes de analizar la suma nos fijamos en lo siguiente:

$$\begin{array}{lcl} I - D = R = D - A & & A + I = D - R + D + R = D + D \\ Z - D = S = D - B & y & B + E = D - S + D + S = D + D \\ E - D = T = D - G & & G + E = D - T + D + T = D + D. \end{array}$$

Entonces

$$\underbrace{A + B + C + E + Z + I}_{\text{k-elementos de la serie}} = \underbrace{D + D + D + D + D + D}_{\text{k-veces}} = D(K).$$

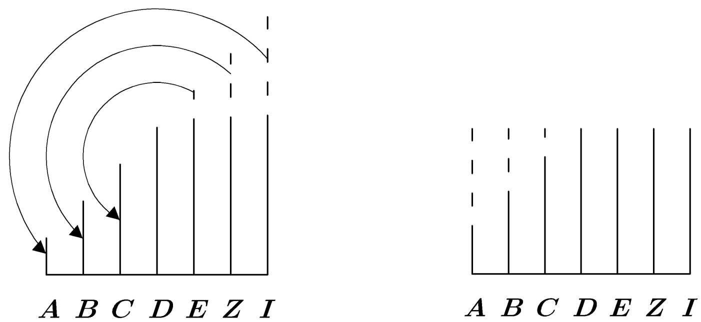


Figura 9.1: Colocamos los excedentes a D recorriendo de los números mayores a los números menores a D para completar números iguales a D.

Es importante hacer la observación de que en la demostración anterior no se señaló sobre la paridad de los números involucrados, pero queda implícito que uno de los dos grupos de números debe ser de cardinalidad par; esto para que se puedan repartir de manera equitativa los números en ambos lados del número central.

Analicemos algunos casos particulares para que quede más claro el resultado.

a) Números con distinta paridad. Sean 7 y 8, entonces su producto es 56. Ponemos como central al 7 que es el número impar nos resta repartir 8 números (4 menores y 4 mayores), es decir, la serie obtenida sería $3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11$, cuya suma resulta ser 56. Se pueden generar series formadas por impares solamente $-1, 1, 3, 5, 9, 11, 13, 15$, cuya suma vuelve a ser 56. Notemos que en la actualidad podemos manejar sin problemas los números negativos, pues el resultado nunca coloca alguna restricción con respecto a que los números tiene que ser positivos.

b) Ambos números son pares. Sean 12 y 14, entonces su producto es 168. Si ponemos como central al 14 nos resta repartir 12 números (6 menores y 6 mayores), es decir, la serie obtenida sería $8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20$, cuya suma resulta ser 168. De igual forma se puede generar la serie de impares que en este caso serán solamente $3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25$, cuya suma vuelve a ser 168.

Cabe mencionar que para quitar dicha restricción sobre la cantidad de elementos de la serie, se tendría que modificar el resultado, es decir, dados un número "*central*" y una serie de números con una cantidad impar de elementos, supongamos que sea $2m+1$, entonces la multiplicación de dichos números será igual a la suma del número central más m números menores y m números mayores a él, que guarden la misma diferencia entre ellos.

Este resultado se demuestra como sigue. Dados dos números impares $(2n+1)$ y $(2m+1)$, la multiplicación de ellos es igual a

$$4mn+2n+2m+1=(2n+1)+4mn+2n=(2n+1)+\underbrace{2m(2n+1)}_{\text{primer resultado}}.$$

Veamos un ejemplo para que el resultado quede más claro. Dados $9=(2(4)+1)$ y $5=(2(2)+1)$, entonces su producto será 45; la suma que da como resultado 45 será 9 más 4 números menores y 4 números mayores a él, es decir,

$$9+\underbrace{5+6+7+8}_{\text{menores}}+\underbrace{10,11,12,13}_{\text{mayores}}=45.$$

Este resultado está estrechamente ligado con una proposición hecha por Diofanto [9], la cual enuncia lo que sigue:

Proposición 3. *Dados cuantos números se quiera en progresión aritmética, la suma del mayor y el menor, multiplicada por la cantidad de los números, es igual al doble de la suma de todos los números dados.*

Dada $P_n=a_1,a_1,...,a_n$, una progresión aritmética, entonces, $(a_1+a_n)n=2S_n$, donde $S_n=a_1+a_1+...+a_n$.
Sean $a_1=r+dt, a_2=r+d(t+1), a_3=r+d(t+2),\cdots,a_n=r+d(t+(n-1))$

$$\begin{aligned}\text{Entonces }\ S_n&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\&=(r+dt)+(r+d(t+1))\cdots+(r+d(t+(n-1))\\&=nr+ndt+d(1+2+\cdots+(n-1))=S_n\\&=nr+ndt+d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Por lo tanto }\ 2S_n&=2n(r+dt)+d(n(n-1))\\&=n[2(r+dt)+d(n-1)].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Pero }\ a_1+a_n&=(r+dt)+(r+d(t+(n-1)))\\&=(r+dt)+(r+dt+d(n-1))\\&=2(r+dt)+d(n-1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Por lo cual }\ 2Sn&=n[2(r+dt)+d(n-1)]\\&=n(a_1+a_n)\quad\text{entonces}\\S_n&=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.\end{aligned}$$

Aplicando un proceso similar al que utilizó Diofanto en la proposición de Fibonacci, tendríamos dos opciones para la progresión, misma que puede ser aritmética o no.

- Si es aritmética llamemos c al número "*central*"; definamos $c = r + dt$. Entonces los números que conformarán la progresión serán de la forma $r + d(t - (\frac{n}{2})), \cdots, r + d(t-3), r + d(t-2), r + d(t-1)$ los menores a c, y $r + d(t+1), r + d(t+2), r + d(t+3), \cdots, r + d(t + (\frac{n}{2}))$ los mayores.

Cabe destacar que n, el número de términos de la progresión debe ser par, para poder tener simetría en ambos lados de c. Entonces al sumar los términos de la progresión obtendríamos

$$r + d\left(t - \left(\frac{n}{2}\right)\right) \cdots + r + d(t-3) + r + d(t-2) + r + d(t-1) +$$
$$r + d(t+1) + r + d(t+2) r + d(t+3) + \cdots + r + d\left(t + \left(\frac{n}{2}\right)\right)$$
$$= nr + n(dt) - d\left(1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{n}{2}\right) + d\left(1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{n}{2}\right)$$
$$= n(r + dt) = nc.$$

Así queda demostrada la proposición para el caso de una progresión aritmética

- Si no es aritmética llamemos c al número "*central*". Entonces los números que formarán la progresión serán de la forma $\underbrace{c - \alpha, c - \beta, c - \gamma, \cdots, c - \psi}_{\frac{n}{2}\text{-términos}}$ los menores a c, y $\underbrace{c + \alpha, c + \beta, c + \gamma, \cdots, c + \psi}_{\frac{n}{2}\text{-términos}}$ los mayores.

En este caso haremos la misma observación sobre n, que es el número de elementos, y observamos que la suma de dichos términos será

$$c - \alpha + c - \beta + c - \gamma + \cdots c - \psi + c - \alpha + c - \beta + c - \gamma + \cdots + c - \psi$$
$$= nc - (\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \psi) + (\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \psi) = nc.$$

Nuevamente queda demostrada la proposición.

Los números congruentes y los congruos.

Preámbulo a los números congruentes y los congruos.

Con esta breve introducción sobre el problema de los números congruentes y los congruos comenzamos la segunda parte de la tesis, dicho problema tiene un origen diverso y multicultural. Analicemos algunas definiciones:

- La primera manera de definir un número congruente es: *número entero positivo que pueda representarse por el área de un triángulo rectángulo cuyos lados son números racionales.*

Esto apareció por primera vez en manuscritos árabes, alrededor del 900 a. C. Algunos textos del islam medieval contienen sucesiones de enteros congruentes 5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, ... Por ejemplo, 5 es un número congruente porque representa el área de un triángulo rectángulo con lados $\frac{20}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{41}{6}$. Del mismo modo, 6 es un número congruente, ya que representa el área de un triángulo de lados 3, 4, 5.

Esto planteó la siguiente pregunta: ¿Es posible que cada número natural pueda representarse como el área de un triángulo rectángulo cuyos lados son números racionales? Hace 350 años Fermat demostró que la respuesta es negativa para $n = 1$, 2 ó 3 (y por lo tanto para $n = 4$). Fibonacci ya había encontrado el número congruente más pequeño bajo esta primera definición, es decir, un número natural que es el área de un triángulo rectángulo racional. Hoy sabemos que 6 es el número natural más pequeño que es el área de un triángulo rectángulo cuyas longitudes en los lados son enteros y que el triángulo rectángulo 3, 4 y 5 es el único triángulo cuya área es 6[1].

[1] En el texto de Keith Conrad [5] se puede ver las demostraciones hechas por Fermat.

Es conveniente aclarar que Fibonacci no es el primero en introducir el concepto, dado que desde tiempos de Diofanto[2], y en algunos textos árabes antiguos, en particular de Mohammed Ben Alhocain[3] y Al-Karaji[4] el concepto ya era abordado, y más recientemente Keith Conrad [5] también parte de esta definición para el desarrollo de su trabajo.

- La segunda manera aparece en el Libro de los números cuadrados de Fibonacci, donde se define número congruente como: *aquel número de la forma* $mn(m^2 - n^2)$ *para* m *y* n *primos relativos e impares y* $m > n$*, y cuando* m *y* n *son primos relativos de paridad opuesta y* $m > n$*, entonces el número congruente tendrá la forma* $4mn(m^2 - n^2)$.

En 1225 la corte de Federico II se reunió en Pisa y Fibonacci fue invitado a demostrar sus conocimientos en matemáticas. No se sabe exactamente cuándo fue que Juan de Palermo publicó sus problemas, pero Juan entregó 3 problemas a Fibonacci y en uno de ellos Juan le plantea el siguiente problema

> *Encontrar un cuadrado tal que si se le suman o se le restan 5 unidades, dé por resultado otro número cuadrado.*

Fibonacci da como resultado el cuadrado $\left(\frac{41}{12}\right)^2$, él cual al ser disminuido o aumentado en 5 unidades dará como resultado $\left(\frac{31}{12}\right)^2$ y $\left(\frac{49}{12}\right)^2$ respectivamente.

- La tercera y última manera que expondremos antes de continuar aparece en el libro de la *Aritmética especulativa y practiva* [25] Capítulo X, Libro IV. La definición de número congruo se ofrece en el siguiente párrafo. En él se abordan los conceptos de números congruos y congruentes. Se menciona que son números que están estrechamente relacionados (emparejados), pues a cada congruente le corresponde un único congruo y viceversa. Dado un congruo si se le resta o suma su congruente correspondiente siempre se obtendrá un número cuadrado y se hace notar que los números congruos siempre son cuadrados y los congruentes no.

---

[2]Diofanto, encontró soluciones a ecuaciones de la forma $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \pm x_i = \square$ y $x_i^2 \pm (x_1 + x_2 + x_3) \pm = \square$, en cada caso usó el hecho de que en cualquier $\triangle$ rectángulo con hipotenusa h y lados a,b se cumple que $h^2 \pm ab$ son cuadrados [6].

[3]Se plantea un problema, dado un entero k, encontrar un cuadrado x^2 tal que $x^2 \pm k$ sean cuadrados. Abu Djafar Mohammed Ben Alhocain, declaró que la teoría de los $\triangle$ rectángulos racionales es encontrar un cuadrado que cuando se aumente o se disminuya en un cierto número k, se convierta en un número cuadrado. Hizo una demostración geométrica del resultado de Diofanto si $x^2 + y^2 = z^2$, entonces $z^2 \pm 2xy = (x \pm y)^2$, siendo entonces z^2 el cuadrado requerido, Abu Bekr Muhammad ibn al-Hasan al-Karaji, hizó $\xi + \xi^2$ y $\xi - \xi^2$ cuadrados, comenzó resolviendo el sistema $y + x^2 = \square$ y $y - x^2 = \square$, fijando $y = 2x + 1$ y tal que $y + x^2 = \square$, entonces, $y - x^2 = 2x + 1 - x^2 = (1 - x)^2$, si $x = 2$, $y = 5$ y $\xi = \frac{4}{5}$.

[4]Al-Karají plantea el problema de hallar números naturales n tales que existan ternas de cuadrados racionales en progresión aritmética de razón n ; es decir, tales que existan racionales $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ y que cumplan $\alpha^2 = \beta^2 - n$, $\gamma^2 = \beta^2 + n$. En tal caso decimos que n es un número congruente.

Estas definiciones se pueden reescribir de la siguiente manera: *número congruo es aquel número cuadrado que es apto para dar y recibir a otro número llamado congruente de tal forma que su suma o su diferencia sea siempre un número cuadrado*[5].

Esta definición está estrechamente ligada con el problema de encontrar números congruentes. Esto también fue abordado por Luca Paccioli[18] en la foja 15. Luca reproduce el trabajo de Fibonacci, haciendo una marcada diferencia entre "*número congruo*" como aquél cuadrado que se deriva de un número congruente, es decir, si n y $n+1$ generan el "*número congruente*" $2n(n+1)2(2n+1)$, su correspondiente "*número congruo*" será $[n^2+(n+1)^2]^2$.

En muchas investigaciones alrededor de las ternas Pitagóricas y de los números congruentes destaca la idea de que hay varias maneras de probar algo. Basta con ver las 3 distintas formas de definir un número congruente.

Varios matemáticos han intentado encontrar una solución general a este problema, y en la mayoría de los casos han llegado a soluciones parciales. Una solución general implicaría encontrar un algoritmo que permita determinar si un número natural es congruente o no.

Una forma de demostrar que un número natural es congruente es a través de generar un triángulo racional con área igual al natural dado. Pero encontrar ese triángulo es una tarea aún más difícil.

[5]En el mismo capítulo, se exponen 2 reglas para generar números congruentes y su correspondientes congruos.

REGLA 1. A partir de la progresión de los números naturales, tomaremos los 2 primeros números, es decir, 1 y 2. Para obtener el primer congruo pide cuadrar (elevar al cuadrado) cada uno de ellos y sumar dichos cuadrados, obteniendo así 5, después. Pide cuadrar el resultado obteniendo así el 25, primer congruo. Ahora bien para obtener su respectivo congruente, se sumarán los dos números iniciales 1+2=3; luego multiplicarlos obteniendo 2; luego pide multiplicar los 2 resultado por 2 y nuevamente por 2, quedando así 3(2)(2)(2) =24, el primer congruente. Siguiendo este procedimiento se pueden obtener tantos congruos como congruentes se deseen. Hagamos otro ejemplo, ahora tomando 2 y 3, para obtener el segundo congruo, cuadremos al 2 y al 3, $2^2=4$ y $3^2=9$, al hacer la suma resulta 4+9=13, y $13^2=169$. Para obtener el segundo congruente, sumamos los números 2+3=5, 2(3)=6, entonces, 5(6)(2)(2)=120. De esta manera, se tiene que otra forma de definir a los números congruos es que un número congruo es aquel que es apto para recibir o disminuirse en un mismo número y obtener siempre un número cuadrado. Cabe resaltar que en la actualidad sabemos que 100 es un número congruo y 96 es su respectivo congruente, sin embargo, siguiendo el procedimiento del libro, no se obtendrían estos números pues provienen de 1 y 3, pero depende mucho del método con el que se trabajen dichos números, pues con la identidad de Fibonacci, 1 y 3, generan al congruo 25.

REGLA 2. Para obtener números congruos y congruentes, sin que se parta de números sucesivos, por ejemplo 5 y 7, nuevamente pide cuadrar los números, obteniendo 25 y 49, y sumar los cuadrados, resultando así, 74, al cuadrar el resultado se obtiene 5476, para obtener el congruente correspondiente, pide sumar 5 y 7, será 12, dobla al 12 y obtendrás 24, ahora multiplica $5(7)=35$, multiplica $24(35)=840$, dobla el 840 y obtendrás 1680, calcula la diferencia entre 5 y 7, la cual será 2, multiplica 2 por 1680 y obtendrás 3360, para comprobar que estos números son congruente y congruo respectivos, verifiquemos, $5476+3360=8836=94^2$ y $5476\text{-}3360=2116=46^2$, cumpliendo así con la condición requerida. Notamos que en la segunda regla se pide calcular la diferencia entre los números iniciales, cuestión que en la primera regla no se pide, pero la razón es que en la primera regla la diferencia entre los números es 1, cantidad que no modifica el producto, pero en la segunda regla la diferencia es 2, cantidad que sí modifica el producto.

Una vez analizadas las definiciones podemos ver geométricamente su relación:

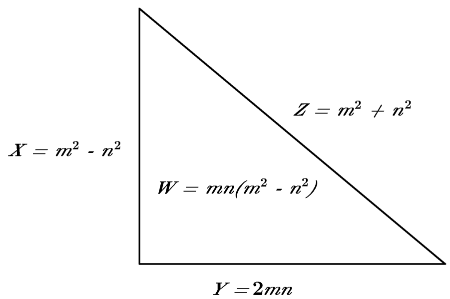


Figura 9.2: Triángulo asociado al número congruente W

Analicemos la relación entre la primera y la segunda definición:

- Partamos de la primera definición y lleguemos a la segunda. Tenemos que un número W será congruente si W representa el área de un triángulo rectángulo con lados racionales (Fig. 9.2) X, Y y Z, de donde $W = \frac{XY}{2}$, pero al ser un triángulo rectángulo cumple con el teorema de Pitágoras, es decir, $X^2 + Y^2 = Z^2$, que a su vez tiene soluciones de la forma $Y = 2rs$, $X = r^2 - s^2$ y $Z = r^2 + s^2$, con lo cual $W = \frac{XY}{2} = \frac{2rs(r^2-s^2)}{2} = rs(r^2 - s^2)$. Por lo tanto W cumple con la segunda definición.

- Partamos de la segunda definición y lleguemos a la primera. Tenemos que un número W será congruente si es de la forma $rs(r^2 - s^2)$, para r y s primos relativos e impares y $r > s$. Definamos $Y = 2rs$, $X = r^2 - s^2$ y $Z = r^2 + s^2$, resta comprobar que dichos X, Y y Z forman un triángulo rectángulo cuya área es igual a W. Lo primero se demostrará probando que dichos números cumplen el teorema de Pitágoras, lo cual es cierto, puess$X^2 + Y^2 = (r^2 - s^2)^2 + (2rs)^2 = r^4 - 2r^2s^2 + s^4 + 4r^2s^2 = r^4 + 2r^2s^2 + s^4 = [(r^2 + s^2)]^2 = Z^2$. Para demostrar que W es igual al área del triángulo rectángulo que forman X, Y y Z , basta con tomar los lados que forman el ángulo recto, es decir, los catetos, y dividir entre 2, lo cual lleva a $\frac{XY}{2} = \frac{2rs(r^2-s^2)}{2} = W$.

Presente y futuro de los números congruentes.

La teoría de los números congruentes evolucionó con el tiempo y se interrelacionó con las aportaciones de las ecuaciones diofantinas hasta llegar al siglo XX. Para terminar esta introducción de los números congruentes mostraremos algunos de los resultados que aún se estudian y también proporcionaremos algunos datos de investigadores que se han adentrado en el tema durante las últimas décadas.

El entero a es llamado congruente si y sólo si existen racionales diferentes de cero x, y, z, y t tal que

$$x^2 + ay^2 = z^2 \quad \text{y} \quad x^2 - ay^2 = t^2.$$

Se puede probar que ay^2 es un número congruente si y sólo si a es un número congruente[6]. Podemos además ver la clara relación con los sistemas diofantinos, pues si $y = 1$ es el tipo de sistemas con los cuales trabajó Diofanto [1].

En este contexto se tiene que recordar que este perfil del problema ya estaba tratado en textos árabes en el siglo X, pero Fibonacci no aborda así el tema de los congruentes [6].

Muchos autores han dedicado tiempo al estudio del tema, entre ellos están Fermat, Euler, Genocchi, Pisanus, Cunningham. Más recientemente están Uspensky y Heaslet [30], Sierpinski [28] y Mordell [14].

Roberts [26] a finales del siglo XIX demostró que todo número congruente a que satisface a las ecuaciones anteriores también satisface la ecuación

$$uv(u^2 - v^2) = (aw)^2$$

y a su vez satisface la ecuación

$$y^2 = x^3 - a^2x, \quad \text{con} \quad y \neq 0.$$

Actualmente podemos afirmar que los números congruentes serán de las siguientes formas

$$x^4 + y^4, \qquad 2x^2 + 2y^4, \qquad x^4 - y^4.$$

Y si x y y tienen paridad opuesta, entonces

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4, \qquad x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$

también serán números congruentes.

Godwin [11] generó un método que dio lugar a 19 números primos de la forma $8k + 7$ que no eran conocidos en estos años. En 1972 se planteó la conjetura que enuncia lo siguiente:

[6] En la Proposición XII

Conjetura:

Si $n \equiv 5, 6$ ó 7 (mod 8) entonces n es un número congruente.

En 1975 Stephens N. M. [29] demostró que la conjetura mencionada es un caso especial de la conjetura de Selmer para curvas elípticas. Con base en lo señalado se establece el teorema que sigue.

Teorema:

Si n es un primo congruente a 5 ó 7 (mod 8) o $n = 2p$ donde p es un primo congruente a 3 (mod 4), entonces n es un número congruente.

Comentamos que la conjetura de Ernest S. Selmer relacionada con puntos racionales de curvas elípticas se puede consultar directamente en [27]. En 1984 J. W. S. Cassels y A. Schinzel mostraron que la conjetura de Selmer implica que para todo racional r la curva

$$B_r : y^2 = x(x^2 - (7 + 7y^4)^2)$$

tiene una infinidad de puntos racionales. Sobra decir la similitud de esta curva con la diofantina de Fibonacci para los números congruentes. Las curvas elípticas son ecuaciones cúbicas y son importantes, especialmente en criptografía, ya que el conjunto de puntos tiene una estructura algebraica (grupo abeliano).

Nos gustaría destacar que el estudio de números congruentes y curvas elípticas es extremadamente significativo para muchos investigadores, simplemente porque entorno del tema quedan varias preguntas aún sin respuesta. Comienza con un problema inocente sobre áreas de triángulos rectángulos con lados racionales y luego las curvas elípticas aparecen naturalmente en el estudio de números congruentes. Además, se observa que la determinación de un número congruente se reduce a determinar la cardinalidad de un conjunto finito, un problema de conteo (conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer).

Mostraremos algunas tablas tomadas de [13] que resumen lo expuesto hasta aquí. En ellas p denota un número primo y (a/b) es el símbolo de Legendre:

Autor	Números Congruentes
Al-Karají (1000)	5,6,14,15,. . . ,7854,10374 (29 casos)
Fibonacci (1225)	5,. . . (52 casos)
Euler (1730)	7
Heegner (1952), Birch (1968) Stephens (1975)	p con $p \equiv 5, 7(\text{mód } 8)$ $2p$ con $p \equiv 3(\text{mód } 4)$
Gross (1985)	$n = p^u q^v \equiv 5, 6, 7(\text{mód } 8)$, $0 \leq u, v \leq 1$ $n = 2p_3p_5, 2p_5p_7$, $p_i \equiv i(\text{mód } 8)$
Monsky (1990)	$n = 2p_1p_7$ con $(p_1/p_3) = -1$ $n = 2p_1p_3$ con $(p_1/p_7) = -1$
Tian Ye (2014)	Para cada $k \geq 1$ existen infinitos $n \equiv 5, 6, 7(\text{mód}8)$ congruentes con k factores primos.

Tabla 9.1: Números congruentes

Autor	Números No Congruentes
Fibonacci (1225)	10
Fermat (1650)	1,2,3
Genocchi (1874)	p con $p \equiv 3 (\text{mód } 8)$
Nagell (1929), Razar (1974)	$2p$ con $p \equiv 5 (\text{mód } 8)$

Tabla 9.2: Números no congruentes

Antes de continuar con las demostraciones de las proposiciones de Fibonacci es importante mencionar que se ha modificado el orden de aparición de 2 proposiciones, la Proposición 9 aparecerá después de la Proposición 11. En ella Fibonacci define el concepto de "*número congruente*", como aquel de la forma $mn(m+n)(m-n) = mn(m^2-n^2)$ con m y n primos relativos, impares y $m > n$. Hemos decidido cambiar el orden debido a que en la Proposición 11 se construye el "*número congruente*" y en la Proposición 9 se demuestra una característica de dichos números. Desconocemos el motivo por el cual Fibonacci decide primero definir y después construir los números congruentes.

Cabe destacar que este sentido de congruencia hasta este momento no tenía que ver con la definición de congruencia propuesta por Gauss, pero Cassels y Schinzel [3] demuestran que si tiene relación.

Capítulo 10

Proposición XI

Los números congruentes.

En esta proposición se pretende encontrar un número tal que sumado a un número cuadrado o restado de él resulte siempre un número cuadrado.

Lo que se tiene que encontrar es c, tal que $y^2 + c = z^2$ y $y^2 - c = x^2$. De la segunda igualdad se tiene que $x^2+c = y^2$, por lo tanto el problema es equivalente a resolver $y^2 + c = z^2$ y $x^2 + c = y^2$, es decir, determinar tres cuadrados en progresión aritmética de razón indeterminada c.

Dado que el tercer cuadrado es igual a la suma de una cierta cantidad de impares, entonces dicho cuadrado se dividirá en 3 partes, la cantidad que forma el primer cuadrado, la cantidad que forma al número c (por primera vez) y la cantidad que forma al número c (por segunda ocasión). Dichas cantidades guardan cierta relación.

Veamos un ejemplo con interpretación geométrica para entender l1 que Fibonacci desarrolló.

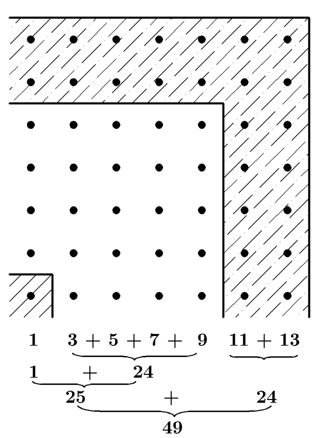


Figura 10.1: Los cuadrados $1^2, 5^2, 7^2$ en progresión aritmética con razón 24.

Ya sabemos que se piden tres números cuadrados x^2, y^2, z^2 y un número c que cumplan[1]

$$x^2 + c = y^2, \quad y^2 + c = z^2.$$

Como ya se mencionó cada uno de los cuadrados puede ser visto como la suma de una cierta cantidad de números impares a partir de la unidad. Definamos las igualdades anteriores en términos de sumas de impares

$$[1 + 3 + \cdots + (2x - 1)] + c = [1 + 3 + \cdots + (2y - 1)]$$

$$[1 + 3 + \cdots + (2y - 1)] + c = [1 + 3 + \cdots + (2z - 1)].$$

De las dos igualdades anteriores podemos definir a c como dos sumas diferentes de números impares

$$c = (2x + 1) + (2x + 3) + \cdots + (2y - 1) = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$$

$$c = (2y + 1) + (2y + 3) + \cdots + (2z - 1) = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y).$$

Si se aplica la Proposición 10 a la primera definición de c afirmamos que c es equivalente a colocar $y-x$ números impares, repartidos en ambos lados de $y+x$. En el ejemplo podemos ver que $c = 24 = (5-1)(5+1) = 4(6) = 3+5+7+9$, es decir, 24 se puede generar como la sucesión de 4 impares sucesivos, colocados en ambos lados de 6. De la misma forma se obtiene de la segunda igualdad que c está formada por $z-y$ números impares repartidos en ambos lados de $z+y$. En el ejemplo mencionado podemos ver que $c = 24 = (7-5)(7+5) = 2(12) = 11+13$, es decir, se obtiene nuevamente 24 al colocar 2 números impares en ambos lados de 12.

Las cantidades de números impares que conforman el número congruente guardan una razón entre sí, $(y-x)/(z-y)$. Se afirma que la segunda cantidad de números impares siempre es menor que la primera, pues los impares que forman la primera cantidad son menores que los que forman la segunda; entonces, $(y - x) > (z - y)$ y en el ejemplo 24 está formado por los impares $3, 5, 7$ y 9, la primera vez, y la segunda sólo por 11 y 13 por lo tanto $4 > 2$.

Al inicio del problema se dijo que estos tres cuadrados estaban en progresión aritmética de razón indeterminada. Para determinar dicha razón sumamos las igualdades propuestas y obtenemos que $2c = z^2 - x^2$, por lo tanto, $c = \frac{z^2-x^2}{2}$. Aplicando este resultado a nuestro ejemplo obtenemos que $c = 24$, es decir, el número congruente será la razón con la cual se construye la progresión.

Otra manera de abordar el problema es partir de las dos ecuaciones iniciales

$$y^2 + c = z^2 \qquad y^2 - c = x^2,$$

pero este análisis ya está desarollado en el Apéndice B.

[1] Al número y^2 posteriormente lo llamaremos número congruo y al número c número congruente. En el ejemplo $x = 1$, $y = 5$, $z = 7$ y $c = 24$.

Capítulo 11

Proposición IX

Primos relativos cuya suma es par y su venticuatroava parte es entera.

Dados AB y BG, dos números primos entre sí (primos relativos), si su suma es par, se demostrará que el producto de dichos números multiplicado por su suma y por su diferencia, generará un número cuya veinticuatroava parte es entera.

Antes de demostrar el enunciado anterior cabe destacar que esta proposición es muy importante pues es en ella donde Fibonacci define el concepto de "*número congruente*" como aquel de la forma $mn(m+n)(m-n) = mn(m^2 - n^2)$ con m y n primos relativos, impares y $m > n$, como ya se mencionó en la introducción para los números congruentes.

Para la demostración primero se consideran AB y BG dos primos relativos. Notemos que deben ser ambos impares, pues de no ser así, y si ambos son pares, entonces no cumplirían con ser primos relativos; lo mismo pasa si uno es impar y el otro par pues entonces no se cumpliría que su suma será par.

Se demostrará que dados AB y BG, tales que $(AB, BG) = 1$ y $AB + BG = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, entonces $(AB)(BG)(AB + BG)(AG - BG) = (AB)(BG)((AB)^2 - ((BG)^2) = 24w$, $w \in \mathbb{Z}$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $AB < BG$. Por lo tanto, si tomamos $BD = AB$ sobre BG tendremos que $BG - AB = BG - BD = DG$ será par.

Como DG es par entonces existen 2 posibilidades para su mitad.

- Sea $\frac{DG}{2}$ impar. En tal caso verifiquemos que la mitad de AG es par. AG puede se visto como $AD + DG$, donde $AD = 2AB$. Por lo tanto, como la mitad de AD, es decir, AB, es impar, y estamos en el caso de que la mitad de DG es impar, entonces se tendrá que la mitad de AG es par. Por lo tanto su cuarta parte es entera. Esto nos lleva a que $(AG)(DG)$ será un número cuya octava parte es entera, pues el otro 2 lo aportará el hecho de que DG es par.

- Sea $\frac{DG}{2}$ par. Entonces la cuarta parte de DG es entera, por lo tanto $(AG)(DG)$ tendrá su octava parte entera, dado que AG es par esté, aportará un número 2 como factor en el producto.

Con lo anterior queda demostrado que la multiplicación $(AB)(BG)(AG)(DG)$, siempre tendrá su octava parte entera.

Sean AB y BG números impares, entonces la tercera parte de alguno de ellos puede o no ser entera.

- **Si es entera.** Supongamos sin pérdida de generalidad que AB es quien tiene su tercera parte entera, entonces $(AB)(BG)(AG)(DG)$, tendrá a la vez una octava y una tercera parte entera, por lo tanto tendrá una veinticuatroava parte entera.

- **Si no es entera.** Entonces si dividimos entre 3 a AB y BG, tendremos 2 posibles casos para sus residuos, que pueden ser iguales o desiguales:

  - **Si son iguales.** Entonces el número DG será divisible por 3, pues si $AB = 3\alpha + \beta$ y $BG = 3\gamma + \beta$, se tendrá que

    $$BG - AB = DG = 3\gamma + \beta - (3\alpha - \beta) = 3\gamma + \beta - 3\alpha - \beta = 3(\gamma - \alpha).$$

    Por lo tanto el número $(AB)(BG)(AG)(DG)$ tendrá a la vez su octava y su tercera parte entera, por lo tanto tendrá una veinticuatroava parte entera.

  - **Si son desiguales.** Entonces el número AG será divisible por 3, pues si AB y BG tienen residuo distinto, significa que uno tiene residuo 1 y el otro residuo 2; sin pérdida de generalidad $AB = 3\alpha + 1$ y $BG = 3\beta + 2$, y se tendrá que

    $$AB + BG = AG = 3\alpha + 1 + (3\beta + 2) = 3(\alpha + \beta) + 3 = 3(\alpha + \beta + 1).$$

    Por lo tanto el número $(AB)(BG)(AG)(DG)$ tendrá a la vez una octava y una tercera parte entera, por lo tanto tendrá una veinticuatroava parte entera.

Con esto queda demostrada la proposición.

Observaciones:

- En las hipótesis del problema se pedía que los 2 números fueran impares y primos relativos, pero la condición de ser ambos impares no es necesaria.

- Debilitando la hipótesis de que ambos sean impares, si se toma un número par y uno impar, entonces la multiplicación del doble del primero por el doble del segundo y a la vez por su suma y por su diferencia, es decir $(2AB)(2BG)(AG)(DG)$, dará lugar a un número que tendrá su veinticuatroava parte entera. Como ya se demostró que $(AB)(BG)(AG)(DG)$ tendrá su veinticuatroava parte entera, entonces $(2AB)(2BG)(AG)(DG) = 4(AB)(BG)(AG)(DG)$ tendrá su veinticuatroava parte entera.

Veamos el problema en un contexto y notación más actuales. Sean m y n los números impares y primos relativos dados con $n < m$, que al cumplir las condiciones anteriores, entonces $m+n$ y $m-n$ serán pares.

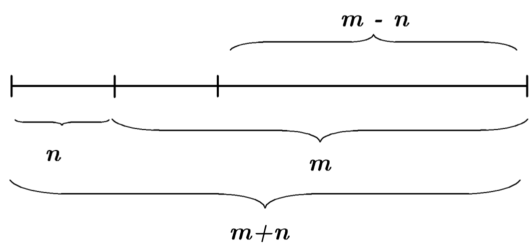


Figura 11.1

Analicemos las implicaciones sobre los posibles casos para $\frac{m-n}{2}$.

* Si $\frac{m-n}{2}$ es impar, entonces $n + \frac{m-n}{2} = \frac{m+n}{2}$ es par y $[\frac{m+n}{2}][\frac{m-n}{2}] = \frac{(m+n)(m-n)}{4}$ es par, por lo tanto $(m+n)(m-n)$ es mútiplo de 8.

* Si $\frac{m-n}{2}$ es par, entonces $[\frac{m+n}{2}][\frac{m-n}{2}] = \frac{(m+n)(m-n)}{4}$ es par, por lo tanto $(m+n)(m-n)$ es múltiplo de 8.

Observamos que sin importar el caso, $mn(m+n)(m-n)$ será múltiplo de 8.

Ahora veamos las implicaciones de dividir a m y n entre 3. Recordemos que $(m,n) = 1$; así, existen varios casos: que uno de ellos sea múltiplo de 3; y que ambos tengan el mismo residuo o con distintos residuos (los posibles residuos al dividir entre 3 son 1 o 2).

* Si alguno es múltiplo de 3, entonces $mn(m+n)(m-n)$ será múltiplo de 3.

* Si $m = 3p+1$ y $n = 3q+1$, entonces $m-n = 3(p-q)$, es decir, $m-n$ es múltiplo de 3, y por lo tanto $mn(m+n)(m-n)$ también lo es. De igual forma, si $m = 3p+2$ y $n = 3q+2$, entonces $m-n = 3(p-q)$, es decir, $m-n$ es múltiplo de 3, y por lo tanto $mn(m+n)(m-n)$ también lo es.

* Si $m = 3p+1$ y $n = 3q+2$ entonces $m+n = 3(p+q+1)$, es decir, $m+n$ es múltiplo de 3, y por lo tanto $mn(m+n)(m-n)$ también lo es. De igual forma, si $m = 3p+2$ y $n = 3q+1$, entonces $m+n = 3(p+q+1)$, es decir, $m+n$ es múltiplo de 3 y por lo tanto $mn(m+n)(m-n)$ también lo es.

Nuevamente, sin importar el caso, $mn(m+n)(m-n)$ será mútiplo de 3, lo cual implica que $mn(m+n)(m-n)$ será a su vez múltiplo de 8 y de 3, por lo tanto lo será de 24.

Cuando se cambia la hipótesis de que ambos números sean impares, tomamos $2m$ y $2n$, donde uno de ellos es par y por lo tanto $(2m)(2n)$ es múltiplo de 8, pues o bien $2m$ es múltiplo de 4 o bien $2n$ es múltiplo de 4. Resta verificar que $mn(m+n)(m-n)$ sea múltiplo de 3. Si m o n es múltiplo de 3, la implicación es inmediata; si ninguno de los 2 es múltiplo de 3, ya se concluyó anteriormente que $m+n$ o $m-n$ es múltiplo de 3, por lo tanto $mn(m+n)(m-n)$ es múltiplo de 3 y de 8, lo cual implica que es múltiplo de 24.

Debilitando la hipótesis de que sean primos relativos los números dados, tendremos que si $(m,n)=k$, entonces, $m=kp$ y $n=kq$ con $(p,q)=1$. Si ambos son impares $pq(p+q)(p-q)$ será múltiplo de 24. Entonces

$$mn(m+n)(m-n)=(kp)(kq)(kp+kq)(kp-kq)=k^4pq(p+q)(p-q)$$

es múltiplo de 24. En caso de que p o q sea par, entonces,

$$2m2n(m+n)(m-n)=(2kp)(2kq)(kp+kq)(kp-kq)=4k^4pq(p+q)(p-q)$$

será múltiplo de 24.

Antes de continuar analicemos la relación que existe entre los números que forman al número congruente, es decir, m, n, $(m+n)$, $(m-n)$, $n>m>0$. Revisemos 2 casos, $\frac{m}{n}<\frac{(m+n)}{m-n}$ y $\frac{m}{n}>\frac{(m+n)}{m-n}$, con sus respectivos subcasos, en que m y n tengan la misma paridad o que sea distinta.

1. Iniciamos con m y n de la misma paridad, $0<m<n$ y $\frac{n}{m}<\frac{(n+m)}{(n-m)}$, lo cual implica que $0<m(n+m)-n(n-m)$. Tomemos al número par $m(n+m)$ como un número central, coloquemos $n(n-m)$ números impares consecutivos en ambos lados de él. La suma de dichos impares por la Proposición 10 será igual a $m(n+m)n(n-m)$. Ahora tomemos como número central a $n(n+m)$ y procedamos de la misma manera pero con $m(n-m)$ números impares. La suma de dichos impares será $m(n-m)n(n+m)$, (este producto es el número congruente). Por lo tanto la razón entre los números impares en la primera colección y la segunda colección será

   $$\frac{n(n-m)}{m(n-m)}=\frac{m}{n}.$$

   Los impares del primer conjunto son

   $$m(n+m)-n(n-m)+1,...,m(n+m)-1,m(n+m)+1,$$

   $$n(n+m)+3,...,m(n+m)+n(n-m)-1.$$

   Este conjunto puede reescribirse como

   $$\frac{2[m(n+m)-n(n-m)+2]}{2}-1,...,\frac{2[m(n+m)]}{2}-1,\frac{2[m(n+m)+2]}{2}-1,$$

   $$\frac{2[m(n+m)+4]}{2}-1,...,\frac{2[m(n+m)+n(n-m)]}{2}-1.$$

Los impares del segundo conjunto son

$$\frac{2[n(n+m)-m(n-m)]}{2}+1, \frac{2[n(n+m)-m(n-m)+2]}{2}+1,$$

$$\frac{2[n(n+m)-m(n-m)+4]}{2}+1, ..., \frac{2[n(n+m)+m(n-m)]}{2}-1.$$

Recordemos que la suma de impares en ambos conjuntos es igual a

$$mn(n+m)(n-m).$$

La suma de los impares desde 1 hasta $\frac{2[m(n+m)-n(n-m)]}{2}-1$ es igual a $\left(\frac{[m(n+m)-n(n-m)]}{2}\right)^2$, es decir, el primer cuadrado.

La suma de los impares desde 1 hasta $\frac{2[m(n+m)+n(n-m)]}{2}-1$ es igual a $\left(\frac{[m(n+m)+n(n-m)]}{2}\right)^2$, es decir, el segundo cuadrado.

La suma de los impares desde 1 hasta $\frac{2[n(n+m)+m(n-m)]}{2}-1$ es igual a $\left(\frac{[n(n+m)+m(n-m)]}{2}\right)^2$, es decir, el tercer cuadrado.

Lo anterior es equivalente a

$$\left(\frac{[m(n+m)-n(n-m)]}{2}\right)^2+mn(n+m)(n-m)=\left(\frac{[m(n+m)+n(n-m)]}{2}\right)^2.$$

Veamos que $m(n+m)+n(n-m)=m^2+n^2=n(n-m)-m(n+m)$, entonces

$$\left(\frac{[n(n-m)-m(n+m)]}{2}\right)^2+mn(n+m)(n-m)=\left(\frac{[n(n+m)+m(n-m)]}{2}\right)^2.$$

Esto demuestra que los dos conjuntos de impares son adyacentes y que el primer cuadrado más el número congruente da como resultado el segundo cuadrado; si se suma el congruente nuevamente se obtendrá el tercer cuadrado.

Nótese que $m(n+m)-n(n-m)=m^2+2mn-n^2$ es un número par positivo ya que estamos en el caso $\frac{n}{m}<\frac{(n+m)}{(n-m)}$, lo cual implica que $0<m(n+m)-n(n-m)$.

También se tiene que $m(n+m)+n(n-m)=m^2+n^2=n(n+m)+m(n-m)$, es positivo y par, pues es la suma de dos cuadrados con la misma paridad, y finalmente $n(n+m)+m(n-m)=n^2+2mn-m^2$ también será un número par positivo.

Hagamos un ejemplo númerico para dejar más claro este caso. Sean $m=3$, $n=5$, $n+m=8$, $n-m=2$, $\frac{n}{m}=\frac{5}{3}<\frac{8}{4}=\frac{(n+m)}{(n-m)}$, $n(n-m)=10$, $n(n+m)=40$, $m(n-m)=6$, $m(n+m)=24$ y $n(n-m)m(n+m)=240$.

Según el proceso se colocarán de manera simétrica 10 números impares en ambos lados de 24 los cuales sumarán 240; dichos impares son 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31 y 33. De la misma forma alrededor de 40 se colocarán 6 impares consecutivos, los cuales de nuevo sumarán 240; estos son 35, 37,39,41,43 y 45.

Para calcular los respectivos cuadrados usemos las fórmulas obtenidas

$$\left(\frac{(m(n+m)-n(n-m)}{2}\right)^2=\left(\frac{14}{2}\right)^2=7^2$$

$$\left(\frac{(m(n+m)+n(n-m)}{2}\right)^2=\left(\frac{34}{2}\right)^2=17^2$$

$$\left(\frac{n(n+m)+m(n-m)}{2}\right)^2=\left(\frac{46}{2}\right)^2=23^2$$

$$7^2+240=17^2 \qquad 17^2+240=23^2.$$

2. Ahora consideremos el caso m y n de la misma paridad, $0<m<n$ y $\frac{n}{m}>\frac{(n+m)}{(n-m)}$, lo cual implica $0<n(n-m)-m(n+m)$. De nuevo tendremos dos conjuntos de impares sucesivos alrededor de dos números pares.

   Sea el primer par el número $n(n-m)$ y $m(n+m)$ la cantidad de impares colocados a sus lados:

   $$\frac{2[n(n-m)-m(n+m)]}{2}+1,...,\frac{2[n(n-m)+m(n+m)]}{2}-1.$$

   Sea el segundo par el número $n(n+m)$ y $m(n-m)$ la cantidad de impares puestos a sus lados:

   $$\frac{2[n(n+m)-m(n-m)]}{2}+1,...,\frac{2[n(n+m)+m(n-m)]}{2}-1.$$

   En este caso la razón entre la cantidad de impares del primer conjunto y el segundo está dada por $\frac{m(n+m)}{m(n-m)}=\frac{(n+m)}{(n-m)}$.

   La suma de los impares en ambos conjuntos es $n(n-m)m(n+m)$. Recordemos que este producto representa el número congruente.

   Al igual que el caso anterior se tendrán dos ecuaciones que resuelven el problema original

$$\left(\frac{[n(n-m)-m(n+m)]}{2}\right)^2+mn(n+m)(n-m)=\left(\frac{[n(n-m)+m(n+m)]}{2}\right)^2.$$

Veamos que $n(n-m)+m(n+m)=n(n+m)-m(n-m)$, entonces

$$\left(\frac{[n(n+m)-m(n-m)]}{2}\right)^2+mn(n+m)(n-m)=\left(\frac{[n(n+m)+m(n-m)]}{2}\right)^2.$$

De la misma forma se observa que $n(n-m)-m(n+m)=n^2-2mn-m^2>0$ pues estamos en el caso $\frac{n}{m}>\frac{(n+m)}{(n-m)}$, lo cual implica $0<n(n-m)-m(n+m)$.

Finalmente $n(n+m)+m(n-m) = n^2+2mn-m^2$ también será un número par positivo.

Como en el caso anterior, a contituación presentamos un ejemplo. Sean $m = 1$, $n = 3$, $n+m = 4$, $n-m = 2$, $\frac{n}{m} = \frac{3}{1} < \frac{4}{2} = \frac{(n+m)}{(n-m)}$, $n(n-m) = 6$, $n(n+m) = 12$, $m(n-m) = 2$, $m(n+m) = 4$ y $n(n-m)m(n+m) = 24$.

Según el proceso se colocarán de manera simétrica 4 números impares en ambos lados de 6 los cuales sumarán 24; dichos impares son 3,5,7 y 9. De la misma forma alrededor de 12 se colocarán 2 impares consecutivos, los cuales de nuevo sumarán 24; estos son 11 y 13.

Para calcular los respectivos cuadrados usemos las fórmulas ya obtenidas

$$\left(\frac{(n(n-m)-m(n+m)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1^2$$

$$\left(\frac{(n(n-m)+m(n+m)}{2}\right)^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 5^2$$

$$\left(\frac{n(n+m)+m(n-m)}{2}\right)^2 = \left(\frac{14}{2}\right)^2 = 7^2$$

$$1^2+24 = 5^2 \qquad 5^2+24 = 7^2.$$

3. Ahora analicemos el caso m y n de paridad distinta y primos relativos, y donde además $0 < m < n$ y $\frac{n}{m} < \frac{(n+m)}{(n-m)}$. Como m y n tienen paridad distinta, $(n+m)$ y $(n-m)$ serán números impares; del mismo modo los número que intervienen en nuestro proceso será impares, es decir, $m(n+m)-n(n-m)$, $m(n+m)+n(n-m)$, $n(n+m)-m(n-m)$ y $n(n+m)+m(n-m)$.

   En este caso tomaremos como primer número central a $2m(n+m)$. Dado que tanto el número central como el número de impares sucesivos por colocar deben ser pares, el número de impares a repartir será $2n(n-m)$, por lo tanto el primer conjunto de impares está dado por

$$2[m(n+m)-n(n-m)]+1, ..., 2[m(n+m)+n(n-m)]-1.$$

   El segundo número central por tomar es $2n(n+m)$ y se colocarán $2m(n-m)$ impares sucesivos, obteniendo el segundo conjunto de ellos

$$2[n(n+m)-m(n-m)]+1, ..., 2[n(n+m)+m(n-m)]-1.$$

   Recordemos que la suma de los impares en cada uno de los conjuntos anteriores es igual a $2m(n+m)2n(n+m)$ por la Proposición X y también representa al número congruente.

   La razón entre la cantidad de impares en el primer conjunto y el segundo conjunto está dada por $\frac{2n(n-m)}{2m(n-m)} = \frac{n}{m}$.

Las ecuaciones que resuelven el problema inicial con las condiciones del caso 3 serán

$$[m(n+m)-n(n-m)]^2+4mn(n+m)(n-m)=[m(n+m)+n(n-m)]^2.$$

Vemos que $m(n+m)+n(n-m)=n(n+m)-m(n-m)$, entonces

$$[n(n+m)-m(n-m)]^2+4mn(n+m)(n-m)=[n(n+m)+m(n-m)]^2.$$

Damos un ejemplo:

Sean $m=1$, $n=2$, $n+m=3$, $n-m=1$, $\frac{n}{m}=\frac{2}{1}<\frac{3}{1}=\frac{(n+m)}{(n-m)}$, $2n(n-m)=4$, $2n(n+m)=12$, $2m(n-m)=2$, $2m(n+m)=6$ y $4n(n-m)m(n+m)=24$.

Ahora se colocarán de manera simétrica 4 números impares en ambos lados de 6 los cuales sumarán 24; dichos impares son 3,5,7 y 9. De la misma forma alrededor de 12 se colocarán 2 impares consecutivos, los cuales de nuevo sumarán 24; estos son 11 y 13.

Para calcular los respectivos cuadrados usemos las fórmulas obtenidas previamente.

$$\left(\frac{(2m(n+m)-2n(n+m)}{2}\right)^2=\left(\frac{2}{2}\right)^2=1^2$$

$$\left(\frac{(2m(n+m)+2n(n-m)}{2}\right)^2=\left(\frac{10}{2}\right)^2=5^2$$

$$\left(\frac{2n(n+m)+2m(n-m)}{2}\right)^2=\left(\frac{14}{2}\right)^2=7^2$$

$$1^2+24=5^2 \qquad 5^2+24=7^2.$$

4. Para el último caso analicemos m y n, $0<m<n$, $\frac{n}{m}>\frac{(n+m)}{(n-m)}$, y se debe elegir el primer número de modo que $(n(n-m)-m(n+m)>0$, es decir, $n(n-m)-m(n+m)$, $n(n-m)+m(n+m)$, $n(n+m)+m(n-m)$ y $n(n+m)-m(n-m)$.

   Para $n(n-m)-m(n+m)$, el primer conjunto correrá de $2[n(n-m)-m(n+m)]+1$ a $2[n(n-m)+m(n+m)]-1$. Hay $2m(n+m)$ números impares colocados alrededor de $2n(n-m)$. La segunda colección estará formada por los impares desde $2[m(n+m)-n(n-m)]+1$ hasta $2[m(n+m)+n(n-m)]-1$. Hay $2m(n-m)$ impares alrededor de $2n(n+m)$. Por lo tanto el número congruente, es decir, la suma de los impares en cada conjunto será $4nm(n-m)(n+m)$.

   La razón que existe entre la cantidad de impares en el primer y el segundo conjunto será $\frac{2m(n+m)}{2m(n-m)}=\frac{(n+m)}{(n-m)}$.

Por ende, las 2 ecuaciones que resuelven el problema inicial con las condiciones del caso 4 serán

$$[n(n-m)-m(n+m)]^2+4mn(n+m)(n-m)=[n(n-m)+m(n+m)]^2.$$

Vemos que $n(n-m)+m(n+m)=n(n+m)-m(n-m)$, entonces

$$[n(n+m)-m(n-m)]^2+4mn(n+m)(n-m)=[n(n+m)+m(n-m)]^2.$$

El ejemplo correspondiente será, $m=2$, $n=5$, $n+m=7$, $n-m=3$, $\frac{n}{m}=\frac{5}{2}>\frac{7}{3}=\frac{(n+m)}{(n-m)}$, $2n(n-m)=30$, $2n(n+m)=70$, $2m(n-m)=12$, $2m(n+m)=14$ y $4n(n-m)m(n+m)=840$.

Es decir, se colocarán de manera simétrica 28 números impares en ambos lados de 30 los cuales sumarán 840; dichos impares son 3,5,...55 y 57. De la misma forma, alrededor de 70 se colocarán 12 impares consecutivos, los cuales de nuevo sumarán 840; y serán 59,61, ... 79 y 81.

Para calcular los respectivos cuadrados usemos las fórmulas obtenidas previamente.

$$\left(\frac{(2n(n-m)-2m(n+m)}{2}\right)^2=\left(\frac{2}{2}\right)^2=1^2$$

$$\left(\frac{(2n(n-m)+2m(n+m)}{2}\right)^2=\left(\frac{58}{2}\right)^2=29^2$$

$$\left(\frac{2n(n+m)+2m(n-m)}{2}\right)^2=\left(\frac{82}{2}\right)^2=41^2$$

$$1^2+840=29^2 \qquad 29^2+840=41^2.$$

De esta manera concluimos con el análisis y al mismo tiempo indicamos el proceso que se debe seguir para generar los cuadrados en progresión aritmética asociados con cada número congruente.

La solución general está dada en la llamada identidad de Fibonacci .

$$\left[\frac{1}{2}(m^2+n^2)\right]^2 \pm mn(m^2-n^2)=\left[\frac{1}{2}(m^2-n^2)\pm mn\right]^2,$$

la razón de la progresión es un múltiplo de 24 si m y n son primos relativos, como se puede observar en los siguientes ejemplos planteados por Fibonacci.

1. Si $m=3$; $n=1$, entonces $5^2+24=7^2$ y $5^2-24=1^2$.
2. Si $m=5$; $n=3$, entonces $17^2+240=23^2$ y $17^2-240=7^2$.
3. Si $m=7$; $n=5$, entonces $29^2+840=41^2$ y $29^2-840=1^2$.

Capítulo 12

Proposición XII

Un número congruente por un número cuadrado será congruente.

Si un número congruente[1] *y sus cuadrados se multiplican por cualquier cuadrado, el producto formado con el número congruente y el cuadrado también será congruente, y los otros cuadrados estarán en progresión aritmética con el producto como razón.*

Fibonacci parte de la solución obtenida en la Proposición XI. Esta demostración parte del hecho de que el cuadrado mayor se puede dividir en tres partes, es decir, "contiene" al cuadrado menor y al número congruente dos veces. Dado el congruente BG y sus cuadrados AB, AG y AD, al multiplicarlos por el número cuadrado E, se obtendrá $E(BG)$, $E(AB)$, $E(AG)$ y $E(AD)$. Para verificar que $E(AB)$, $E(AG)$ y $E(AD)$ son cuadrados recordamos que la multiplicación de dos cuadrados es un cuadrado. Por lo tanto, $E(AB)$ es cuadrado, al igual que $E(AG)$ y que $E(AD)$. Sean $ZI = E(AB)$, $ZT = E(AG)$ y $ZK = E(AD)$; como $AG = AB + BG$ y $AD = AG + GD$, donde $BG = GD$, se tendrá que

$$ZT = E(AG) = E(AB + BG) = E(AB) + E(BG).$$

Llamemos $IT = E(BG)$, entonces $ZT = ZI + IT$

$$ZK = E(AD) = E(AG + GD) = E(AG) + E(GD),$$

llamemos $TK = E(GD)$, entonces $ZK = ZT + TK$.

Resta demostrar que $E(BG)$ es un número congruente. Dado que $BG = GD$, entonces $E(BG) = E(GD)$, de donde se sigue que $IT = TK$; por lo tanto, se puede verificar que $ZT - IT = ZI$, es decir, si al cuadrado ZT se le resta el número IT se obtendrá el cuadrado ZI, y también se tendrá que $ZT + IT = ZT + TK = ZK$, es decir, si al cuadrado ZT se le suma el número $IT = TK$

[1] Cuando Fibonacci habla de un número congruente y sus cuadrados, lo hace según el planteamiento hecho en la demostración de la Proposición XI, es decir, c es el congruente y x^2, y^2 y z^2 sus cuadrados, tales que $x^2 + c = y^2$, $y^2 + c = z^2$.

se obtiene el cuadrado ZK, con lo anterior se comprueba que $IT = TK$ cumple con la definición de ser un número congruente. Con lo anterior se cumple lo que se quería demostrar.

En un contexto actual, sea un número congruente c y los cuadrados con los que se verifica que dicho número es congruente, x^2, y^2 y z^2. Si estos números se multiplican por cualquier número cuadrado r^2, el producto $(r^2)c$ formará un número congruente y los otros productos formarán cuadrados con los que se verifica que dicho congruente lo es. Para comprobarlo sean

$$x^2 + c = y^2$$

$$y^2 + c = z^2,$$

si se multiplican por cualquier número cuadrado r^2, se obtienen

$$r^2(x^2 + c = y^2) \quad \text{entonces} \quad r^2x^2 + (r^2)c = r^2y^2$$

$$r^2(y^2 + c = z^2) \quad \text{entonces} \quad r^2y^2 + (r^2)c = r^2z^2,$$

lo que da como resultado un número congruente y sus respectivos cuadrados, es decir,

$$(rx)^2 + (r^2)c = (ry)^2$$

$$(ry)^2 + (r^2)c = (rz)^2.$$

Fibonacci termina la demostración mencionando que esto también se cumple si en lugar de multiplicar por un número cuadrado se divide por él, es decir, dado un número congruente c y sus cuadrados, x^2, y^2 y z^2, si estos números se dividen entre cualquier número cuadrado r^2, el cociente $\frac{c}{r^2}$ formará un número congruente y los otros cocientes formarán cuadrados con los que se verifica que dicho congruente lo es. Para demostrarlo sean

$$x^2 + c = y^2$$

$$y^2 + c = z^2,$$

si se dividen por cualquier número cuadrado r^2, se obtienen

$$\frac{x^2 + c = y^2}{r^2} \quad \text{entonces} \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{c}{r^2} = \frac{y^2}{r^2}$$

$$\frac{y^2 + c = z^2}{r^2} \quad \text{entonces} \quad \frac{y^2}{r^2} + \frac{c}{r^2} = \frac{z^2}{r^2},$$

lo que da como resultado un número congruente y sus respectivos cuadrados, es decir,

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{c}{r^2} = \left(\frac{y}{r}\right)^2$$

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \frac{c}{r^2} = \left(\frac{z}{r}\right)^2.$$

Ilustremos este resultado con un ejemplo numérico para cada caso:

Dados $AB = 1^2$, $BG = 24$, $AG = 5^2$, $AD = 7^2$ y $E = 2^2$, entonces se tendrá que $ZI = 22$, $ZT = 102$, $ZK = 142$ y $IT = 96$

$$4(1^2 + 24 = 5^2) \quad \text{entonces} \quad 2^2 + 96 = 10^2$$
$$4(5^2 + 24 = 7^2) \quad \text{entonces} \quad 10^2 + 96 = 14^2,$$

donde 96 y 24 son números congruentes y como se mencionó antes, son múltiplos de 24, $96 = 24(4)$, $100 = 10^2$, $4 = 2^2$ y $196 = 14^2$.

Dados $AB = 4^2$, $BG = 384$, $AG = 400$, $AD = 784$ y $E = 2^2$, entonces se tendrá que, $ZI = 4$, $ZT = 102$, $ZK = 142$ y $IT = 96$

$$\frac{4^2 + 384}{2^2} = \frac{20^4}{2^2} \quad \text{entonces} \quad 2^2 + 96 = 10^2,$$
$$\frac{20^2 + 384}{2^2} = \frac{28^2}{2^2} \quad \text{entonces} \quad 10^2 + 96 = 14^2,$$

donde 384 y 96 son números congruentes y como se mencionó antes, múltiplos de 24, $384 = 24(16)$ y $96 = 24(4)$.

Si pensamos en la interpretación geométrica analizada en la Proposición XI, la Proposición XII nos indica que podemos obtener números congruentes tan grandes o pequeños como lo deseemos apoyados siempre en un número cuadrado (Fig. 12.1).

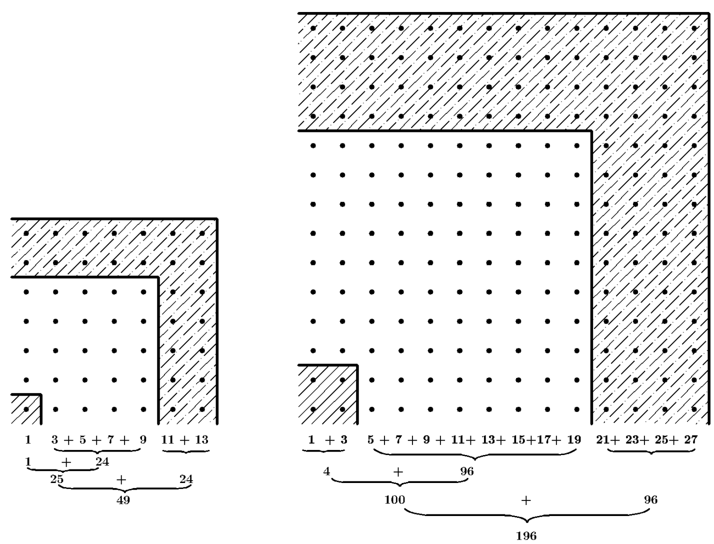


Figura 12.1

Capítulo 13

Proposición XIII

Un número congruente cuya quinta parte es entera y cuadrada.

En esta proposición se solicita encontrar un número congruente cuya quinta parte sea entera y cuadrada.[1]

Por el capítulo anterior (Proposición XII) sabemos que cualquier número congruente y sus cuadrados (los cuadrados con los que se verifica que es congruente) multiplicados por un número cuadrado, generarán un nuevo número congruente y sus respectivos cuadrados. De lo anterior, si se parte de una cuaterna (los tres cuadrados y el congruente) conocida podemos generar una cuaterna que cumpla lo solicitado.

Tomemos 5 como uno de los números de la cuaterna. Le sumamos y restamos un número cuadrado, de tal manera que el resultado en ambas operaciones sea un número cuadrado, dicho cuadrado; será 4 y obtendremos así 9 y 1, esto es

$$\begin{aligned} 5-4 &= 1 \\ 5+4 &= 9. \end{aligned}$$

Probaremos que el número congruente buscado surge de números consecutivos, aplicando una de las definiciones vistas en la sección previa al capítulo XI, la cual nos indica que dados dos números m, n, primos relativos y $m > n$, entonces $c = (2m)(2n)(m+n)(m-n)$ será un número congruente. Notemos que si m y n son consecutivos entonces son primos relativos y $m - n = 1$.

Generemos el número solicitado de la siguiente manera, multiplicando 1 por el doble de 5, por el doble de 4, y el total por 9, es decir,(1)(2(5))(2(4))(9); esto es equivalente a multiplicar dos productos, el generado por 1(2)(5) y el generado por 2(4)(9), es decir, 1(10) por 8(9), en otras palabras, 10 por 72, pero antes de continuar observamos que 4(9)=36, que un número cuadrado es

[1] Encontrar un número congruente C que cumpla que $X^2 + C = Y^2$ y $X^2 - C = Z^2$, y además $\frac{D}{5} \in \mathbb{Z}$ y también $\frac{D}{5} = R^2$. Esto es equivalente a pedir que $Z^2 + D = X^2$ y $X^2 + D = Y^2$, con $\frac{D}{5} \in \mathbb{Z}$ y también $\frac{D}{5} = R^2$.

un producto de dos números cuadrados. Por lo tanto 72 será el doble de este número cuadrado 36, y al multiplicar 72 por el doble de 5 se obtiene el cuádruplo de dicho cuadrado multiplicado por 5. Pero este cuádruplo es en particular un número cuadrado, pues es 2(36)(2)=4(36)=144, nuevamente un producto de cuadrados. Al multiplicar por 5 forma el quíntuplo de un número cuadrado, y si éste se multiplica por 1 se obtendrá el quíntuplo del número cuadrado, es decir, 720.

De esta forma hemos obtenido un número congruente, el 720, cuya quinta parte es cuadrada y entera. Para demostrar que 720 es un congruente, obtendremos sus respectivos cuadrados, llamemos $m = 4$ y $n = 5$. Para formar los cuadrados usamos las fórmulas vistas en el Capítulo XII

$$\begin{aligned}
(1/2)[2m(n+m) - 2n(n-m)] &= (1/2)(62) = 31 \\
(1/2)[2m(n+m) + 2n(n-m)] &= (1/2)(82) = 41 \\
(1/2)[2n(n+m) - 2m(n-m)] &= (1/2)(98) = 49
\end{aligned}$$

por lo tanto, $31^2 + 720 = 41^2$ y $41^2 + 720 = 49^2$. Queda así demostrado que 720 tiene su quinta parte entera y cuadrada por construcción y que efectivamente es un número congruente.

Otra forma de abordar este problema es buscar un número que sea múltiplo de 24, (sabemos que los números congruente son múltiplos de 24 según se establecio en el Capítulo IX), pero que también se puede ver como un producto de 5 por algún cuadrado, es decir, $c = 24k = 5r^2$.

Múltplos de 24	5 por un número cuadrado
24(30)=720	$5\left(12^2\right) = 720$
24(120)=2880	$5\left(24^2\right) = 2880$
24(270)=1296	$5\left(36^2\right) = 1296$
24(480)=11520	$5\left(48^2\right) = 11520$
24(750)=18000	$5\left(60^2\right) = 18000$
24(1080)=25920	$5\left(72^2\right) = 25920$

Tabla 13.1: Congruentes con su quinta parte entera.

Después de observar la tabla anterior podemos llegar a la conclusión expuesta en la siguiente tabla.

720 =	24(30)	24(5*6)	24(1*6)5	$5\left(12^2\right)$	$5\left(2*1*6\right)^2$
2880 =	24(120)	24(5*24)	24(4*6)5	$5\left(24^2\right)$	$5\left(2*2*6\right)^2$
6480 =	24(270)	24(5*54)	24(9*6)5	$5\left(36^2\right)$	$5\left(2*3*6\right)^2$
11520 =	24(480)	24(5*96)	24(16*6)5	$5\left(48^2\right)$	$5\left(2*4*6\right)^2$
18000 =	24(750)	24(5*150)	24(25*6)5	$5\left(60^2\right)$	$5\left(2*5*6\right)^2$
25920 =	24(1080)	24(5*216)	24(36*6)5	$5\left(72^2\right)$	$5\left(2*6*6\right)^2$

Tabla 13.2: Congruentes con su quinta parte entera.

Capítulo 14

Proposición XIV

El problema de Juan de Palermo.

En esta proposición se pide encontrar un número cuadrado que aumentado o disminuido en cinco de un número cuadrado.[1]

La proposición requiere encontrar un número y^2 tal que

$$y^2 - 5 = x^2$$

$$y^2 + 5 = z^2.$$

Para abordar esta proposición es conveniente apoyarse en las Proposiciones 12 y 13. En primera instancia tomamos un número congruente cuya quinta parte sea entera y cuadrada junto con sus respectivos cuadrados. Después utilizaremos el resultado visto en el Capítulo 11, que nos enuncia que dado un congruente y sus cuadrados, si se multiplican o dividen por un número cuadrado, el resultado será un nuevo número congruente y sus cuadrados

Entonces, consideremos al número 720 –el congruente- y los cuadrados 49^2, 31^2 y 41^2, entonces

$$41^2 - 720 = 31^2$$

$$41^2 + 720 = 49^2.$$

Al aplicar el resultado del Capítulo 11 y dividir las dos igualdades entre la quinta parte entera y cuadrada de 720, es decir, 144, cuya raíz es 12, se obtendrá

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - \frac{720}{144} = \left(\frac{31}{12}\right)^2$$

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + \frac{720}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2$$

[1] En esta proposición se aborda el problema que Juan de Palermo le propone a Leonardo. Este problema fue uno de los motivos por los que Fibonacci inició su estudio sobre números cuadrados, y que daría origen al *Liber quadratorum*, escrito en 1225.

y da como resultado

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2$$

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2$$

de donde $\left(\frac{41}{12}\right)^2$ es el cuadrado buscado.

Cabe destacar con este resultado que 5 podría ser considerado como un número congruente ya que cumple con una de las definiciones vistas en el Capítulo 10, es decir, existen cuadrados fraccionarios que verificarían su viabilidad. Pero varios textos no consideran al 5 como número congruente, ya que los cuadrados que verifican su congruencia no son enteros sino fracciones.

Recordemos que la proposición solicita encontrar y^2 tal que,

$$y^2 - 5 = x^2$$

$$y^2 + 5 = z^2.$$

Otra manera de abordar este problema es al utilizar la identidad de Fibonacci[2]:

$$(m^2 + n^2)^2 \pm 4mn(m^2 - n^2) = (m^2 - n^2 \pm 2mn)^2$$

dicha identidad se probó en el Capítulo 10 y se puede apreciar que tiene precisamente la forma $a^2 \pm 5 = b^2$. Entonces buscaremos que $x^2 \pm 5$ sea siempre un cuadrado, y para esto se esperaría encontrar dos enteros m y n tal que $5 = 4mn(m^2 - n^2)$. Esto no tiene soluciones enteras, pero sí admite una solución fraccionaria $\frac{p}{q}$. Para encontrar la solución racional se retoma la igualdad

$$(m^2 + n^2)^2 \pm 4mn(m^2 - n^2) = (m^2 - n^2 \pm 2mn)^2$$

y se divide entre p^2, entonces

$$\left(\frac{m^2}{p} + \frac{n^2}{p}\right)^2 \pm \frac{4mn(m^2 - n^2)}{p^2} = \left(\frac{m^2}{p} - \frac{n^2}{p} \pm \frac{2mn}{p}\right)^2,$$

para encontrar p y q se considera que $4mn(m^2 - n^2) = 5p^2$, y será necesario que p^2 sea un múltiplo de cuatro. Entonces se tendrá que $p = 2q$ y por lo tanto $mn(m^2 - n^2) = 5q^2$. De la última igualdad necesariamente uno de los factores tiene que ser múltiplo de 5. Supongamos $m = 5$ y por lo tanto $n(25 - n^2) = q^2$. Ahora, el menor de los enteros positivos n que cumplen con que $n(25 - n^2)$ sea un cuadrado es $n = 4$, por lo tanto $q = 6$, y como $p = 2q$ entonces $p = 12$. Por lo tanto el valor que buscamos $\frac{m^2}{p} + \frac{n^2}{p}$ es igual a $\frac{25}{12} + \frac{16}{12} = \frac{41}{12}$. Por lo tanto

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2 \text{ y } \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2.$$

[2]La identidad es consecuencia de la solución de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ que da lugar a las conocidas ternas pitagóricas. Diofanto en el problema 8 del libro II de la *Aritmética* presenta elementos particulares de la solución general $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ y $z = m^2 + n^2$ con $m > n$, primos entre sí y de diferente paridad.

Otro ejemplo lo podemos encontrar en la obra de Diez Feyle [7]. En esta obra se analiza el caso para 6, es decir,

$$y^2 - 6 = x^2$$

$$y^2 + 6 = z^2,$$

si se hace el cambio de variable, $x = \frac{u}{a}$, $y = \frac{v}{a}$ y $z = \frac{w}{a}$ entonces de las dos ecuaciones anteriores se obtiene,

$$v^2 - 6a^2 = u^2$$

$$v^2 + 6a^2 = w^2.$$

Al tomar $t = 6a^2$ se tendrían dos nuevas ecuaciones

$$v^2 - t = u^2$$

$$v^2 + t = w^2,$$

donde t es un número congruente que debe tener como factor a 6 y a un número cuadrado a^2. Lo mencionado se cumple para $t = 24$, pues $24 = 6 * 4 = 6 * 2^2$, y dado el número congruente, entonces se puede generar su respectivo congruo (como ya se explicó en el Capítulo 9), que en este caso $25 = 5^2$ es el congruo de 24, pues

$$5^2 - 24 = 1^2$$

$$5^2 + 24 = 7^2.$$

Si regresamos el cambio de variable se tendrá que

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{24}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{24}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2,$$

por lo tanto

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

Otra manera de encontrar a los cuadrados es al operar con los valores conocidos.

Por ejemplo, sabemos que 720 es un congruente cuya quinta parte es entera y cuadrada, pero si queremos generar un congruente cuya treintava parte sea entera y cuadrada, operaremos de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} 5 &\leq 20 \\ 5(6) &\leq 20(6) \\ 30 &\leq 120 \\ 30 &\leq 30\left(2^2\right). \end{aligned}$$

Por lo anterior encontramos a 120, un congruente cuya treintava parte es entera y cuadrada, y sabemos que los cuadrados que verifican a 120 son 49, 169, 289, con raíces 7,13 y 17. Así, se tendrá que

$$13^2 - 120 = 7^2$$

$$13^2 + 120 = 17^2,$$

y al dividir entre la parte entera cuadrada,

$$\left(\frac{13}{4}\right)^2 - \frac{120}{4} = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{13}{4}\right)^2 + \frac{120}{4} = \left(\frac{17}{2}\right)^2,$$

por lo tanto

$$\left(\frac{13}{4}\right)^2 - 30 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{13}{4}\right)^2 + 30 = \left(\frac{17}{2}\right)^2.$$

Capítulo 15

Proposición XV

Suma y diferencia entre dos números y la razón que guardan entre ellas.

En esta proposición se demostrará que si se suman dos números y la suma resulta ser un número par, entonces, la razón entre dicha suma y la diferencia entre el número mayor y el menor no será la misma que la razón entre el número mayor y el menor.

Dicho de otra manera, dados los números a,b, y suponemos sin pérdida de generalidad que $b > a$. Si $a+b$ es par, entonces, la razón entre la suma y la diferencia es distinta a la razón entre el mayor y el menor, es decir,

$$\frac{(a+b)}{(b-a)} \neq \frac{b}{a}.$$

La demostración será por reducción al absurdo. Supondremos que las dos razones son iguales y veremos que eso nos lleva a una contradicción.

De manera general tomemos $0 < n < m$, y suponemos como cierto que $\frac{(m+n)}{(m-n)} = \frac{m}{n}$, entonces

$$n(m+n) = m(m-n),$$

por lo tanto $n^2 + 2mn = m^2$, y al sumar m^2 quedaría

$$(n+m)^2 = 2m^2,$$

pero esto implicaría que $\sqrt{2}$ es un racional, lo cual es una contradicción.

Con esta proposición obtenemos, de manera indirecta, que ningún número congruente de la forma $mn(m+n)(m-n)$ o $4mn(m+n)(m-n)$ puede ser cuadrado, y en este contexto veamos nuevamente la proposición. Sean m y n tales que $m > n$ y cuya *suma es par*, entonces la proposición enuncia que $\frac{m+n}{m-n} \neq \frac{m}{n}$, de ser igual, se tendría que $n(m+n) = (m-n)m$ y por lo tanto $n(m+n)(m-n)m$ resultaría ser el cuadrado $[m(m-n)]^2$, que puede ser expresado como la suma de los impares desde la unidad hasta el número $2[m(m-n)] - 1$.

Desarrollemos el último impar de la sucesión que generaría al cuadrado obtenido

$$\begin{aligned} 2[m(m-n)]-1 &= m(m-n)+m(m-n)-1 \\ &= n(m+n)+m(m-n)-1 \\ &= m(m+n)-n(m-n)-1, \end{aligned}$$

es decir, se tendrá que $[m(m-n)]^2$ es igual a la suma de los impares desde la unidad hasta $m(m+n)-n(m-n)-1$.

Por otro lado, sabemos por la Proposición 10, que $n(m+n)(m-n)m$ es equivalente a sumar $n(m-n)$ números impares colocados de manera simétrica en ambos lados de $m(m+n)$, es decir, será igual a la suma de los impares comprendidos desde $[m(m+n)-n(m-n)+1]$ hasta $[m(m+n)+n(m-n)-1]$.

Por lo tanto, si llamamos $O = [m(m-n)]^2$ y $P = n(m+n)(m-n)m$, tenemos que

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+[m(m+n)-n(m-n)-1]}_{O}+$$

$$\underbrace{[m(m+n)-n(m-n)+1]+\cdots+[m(m+n)+n(m-n)-1]}_{P},$$

es decir, $O+P=Q^2$, cuya raíz es $\frac{[m(m+n)+m(m-n)]}{2}$ y a la vez es igual al doble de un número cuadrado, es decir, $2R^2=Q^2$, lo cual nos lleva a una contradicción pues tendíamos que $2=\frac{Q^2}{R^2}=\left(\frac{Q}{R}\right)^2$, es decir, 2 es un número cuadrado. Con esto se demuestra que ningún número congruente de la forma $mn(m+n)(m-n)$ puede ser cuadrado.

Sean m y n dos números, $m>n$ y cuya suma es impar. Entonces la proposición dice que $\frac{m+n}{m-n}\neq\frac{m}{n}$, pues de ser igual se tendría que $2n(m+n)=2(m-n)m$ y por lo tanto $4n(m+n)(m-n)m$ resultaría ser un cuadrado. Sea $[2m(m-n)]^2$ dicho cuadrado, el cual puede ser expresado como la suma de los impares desde la unidad hasta el número $2[2m(m-n)]-1$.

Al desarrollar el ultimo impar de la sucesión que generaría al cuadrado obtenido

$$\begin{aligned} 4(m(m-n))-1 &= 2m(m-n)+2m(m-n)-1 \\ &= 2n(m+n)+2m(m-n)-1 \\ &= 2m(m+n)-2n(m-n)-1, \end{aligned}$$

es decir, se tendrá que $[2m(m-n)]^2$ es igual a la suma de los impares desde la unidad hasta $2m(m+n)-2n(m-n)-1$.

Por otro lado, sabemos por la Proposición 10 que $2n(m+n)2(m-n)m$ es equivalente a sumar la sucesión de $2n(m-n)$ números impares colocados de manera simétrica en ambos lados de $2m(m+n)$, es decir, será igual a la suma de los impares desde $[2m(m+n)-2n(m-n)+1]$ hasta $[2m(m+n)+2n(m-n)-1]$.

Por lo tanto si llamamos $O = [2m(m-n)]^2$ y $P = 2n(m+n)(m-n)2m$, tenemos por un lado que

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+[2m(m+n)-2n(m-n)-1]}_{O}+$$

$$\underbrace{[2m(m+n)-2n(m-n)+1]+\cdots+[2m(m+n)+2m(m-n)-1]}_{P},$$

es decir, $O + P = Q^2$, cuya raíz es $[m(m+n)+m(m-n)]$ y a la vez es el doble de un número cuadrado, es decir, $2R^2 = Q^2$, lo cual nos lleva a una contradicción pues tendíamos que $2 = \frac{Q^2}{R^2} = \left(\frac{Q}{R}\right)^2$, es decir, 2 es un número cuadrado. Con esto se demuestra que ningún número congruente de la forma $4mn(m+n)(m-n)$ es cuadrado.

Ahora analicemos la manera en la que resuelve la proposición Fibonacci. Sean AB y BG los números dados,y sin pérdida de generalidad supongamos que $BG > AB$, además sea AG su suma y DG su diferencia.

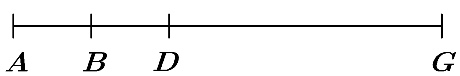


Figura 15.1

La proposición plantea que si AG es par, entonces

$$\frac{AG}{DG} \neq \frac{BG}{AB}.$$

Supongamos que sí son iguales, es decir,

$$\frac{AG}{DG} = \frac{BG}{AB},$$

se tendrá que $AG(AB) = BG(DG)$. Llamemos $EZ = BG(DG)$ y $KL = AG(AB)$, por lo tanto, $EZ = KL$. Sea $OP = (ZE)(KL)$, entonces, $OP = BG(DG)(AG)(AB) = AB(DG)(AG)(BG)$. Sea $ZI = AB(DG)$ y $KM = AG(BG)$.

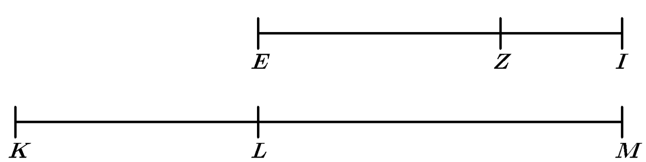


Figura 15.2

Se tiene que KM es mayor que KL, pues $BG > AB$. Sea $PQ = ZI(KM)$, entonces, $OP = PQ$, ya que los dos números provienen del mismo producto, es decir, los dos son iguales a $AB(BG)(AG)(DG)$. Pero por construcción OP es un cuadrado pues $EZ = KL$. En consecuencia PQ lo tendría que ser.

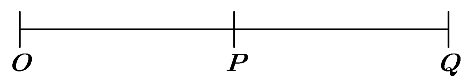


Figura 15.3

Veamos que $LM = EI$, pues $LM = KM - KL = AG(AB) - AG(BG) = AG(BG - AB) = AG(DG)$ y $EI = EZ + ZI = BG(DG) + AB(DG) = (AB + BG)(DG) = AG(DG)$, $EI > EZ$, ya que $BG > AB$, entonces $LM > EZ$. Tomemos sobre LM el número $LN = EZ = KL$, de donde el resto $NM = ZI$. Sumemos a KM el número $MC = MN$, y se obtiene así el número KC. Dado que $KN = 2KL$ se puede afirmar que KN es par.

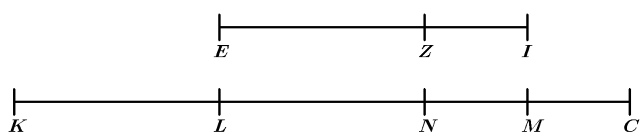


Figura 15.4

Por otro lado como OP es un número cuadrado, entonces proviene de la suma de los impares que van desde la unidad hasta KN, pues entre la unidad y KN hay KL números impares que están colocados a ambos lados de KL. Por la Proposición 10 sabemos que la suma de estos impares equivale a multiplicar KL por EZ, es decir, $KL(EZ) = OP$, con lo cual se tendrá que KL o EZ es la raíz de OP.

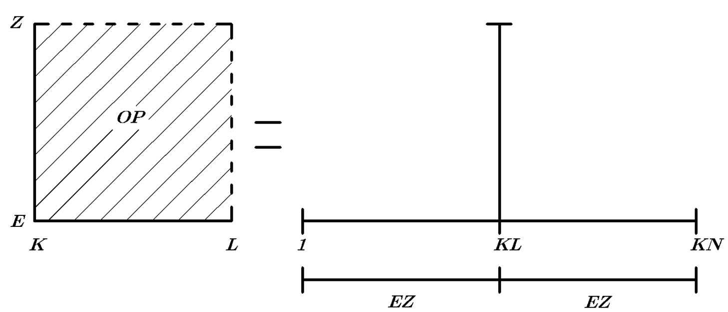


Figura 15.5

Pero el cuadrado PQ es igual al producto de ZI por KM, entonces, por la Proposición 10, sabemos que en PQ hay tantos impares como unidades en ZI, los cuales están repartidos hacia ambos lados de KM, es decir, los impares entre KN y KC, pues NC es el doble de ZI, y en NC hay ZI impares, y estos están colocados en ambos lados de KM.

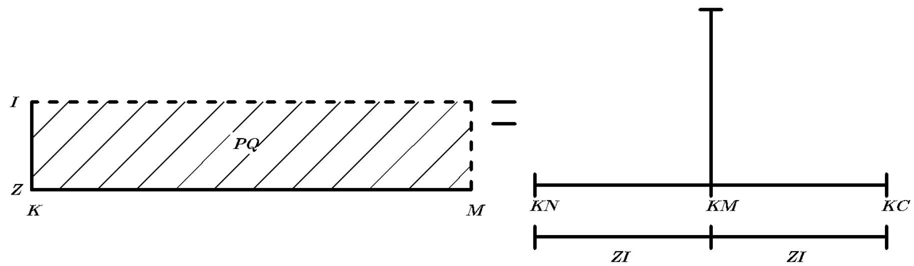


Figura 15.6

Con lo anterior tenemos que el número compuesto $OQ = OP + PQ$ está determinado por la suma de los impares que van desde la unidad hasta KC, en otras palabras, es un cuadrado y a la vez es el doble del número OP. Por lo tanto se tendrá que la razón que existe entre el cuadrado OQ y el cuadrado OP es la razón que hay entre 2 y 1, lo cual no es posible, pues sería igual a la razón que existe entre un no cuadrado y un cuadrado.

En consecuencia, la razón que existe entre AG y DG no puede ser igual a la razón entre BG y AB.

De la misma manera se mostrará que si el número AG es impar, entonces, la razón entre dos veces BG y dos veces AB, no puede ser igual a la razón que existe entre AG y DG, es decir,

$$\frac{AG}{DG} \neq \frac{2BG}{2AB}.$$

Supongamos lo contrario se tendría que

$$\frac{AG}{DG} = \frac{2BG}{2AB},$$

entonces $AG(2AB) = 2BG(DG)$, es decir, $2EZ = 2KL$. Y usando EZ y KL de la misma forma que arriba se sigue que $EZ = KL$, y de aquí lo que resta de la demostración es igual a la demostración anterior.

Con lo anterior se concluye que ningún número cuadrado puede ser congruente. También se entiende porqué muchos números no pueden ser congruentes, pero que sí se puede hacer congruente todo número. Las opciones son: si este número proviene de la división de un número congruente y un cuadrado o si éste es uno de los cuatro números involucrados en la formación de un número congruente, y los otros tres números sean cuadrados.

En la proposición anterior se expuso el caso de un número que proviene de la división de un congruente entre un cuadrado. Por ejemplo, el número 5, proviene de dividir 720 (número congruente) entre 144 (número cuadrado o congruo), y teniendo la terna de cuadrados que hace congruente a 720, es decir, 31^2, 41^2 y 49^2 se puede generar la terna que hace congruente a 5, es decir, $(31/12)^2$,$(41/12)^2$ y $(49/12)^2$.

Para el caso de un número que es parte de los cuatro números que generan un número congruente , tomemos como ejemplo al 7. Si se consideran a 9, 16, 25 y 7, y se hace el producto 4(9)(16)(25)(7), se obtendrá 100800 (número congruente), y de igual forma teniendo la terna de cuadrados que hace congruente a 100800, es decir, 113^2, 337^2 y 443^2 se puede generar la terna que hace congruente a 7, es decir, $(113/120)^2$, $(337/120)^2$ y $(443/120)^2$.

Capítulo 16

Proposición XVI

Un número cuadrado y su raíz para generar dos nuevos cuadrados.

En esta proposición se pide encontrar un número cuadrado tal que al sumarle su raíz se obtenga un número cuadrado, y de la misma forma si se le resta la misma raíz se debe obtener otro cuadrado, entendiendo que ambos cuadrados serán diferentes[1].

Como se requiere encontrar tres cuadrados entonces se puede partir de un número congruente y de sus respectivos cuadrados, posteriormente se genera un nuevo número congruente a partir de la división de los cuadrados y del número congruente. El nuevo congruente será la raíz del cuadrado, que es el que se pide encontrar.

Para explicar este problema primero lo haremos en su interpretación y notación actual. La solución parte de un congruente y sus respectivos cuadrados. Sean x^2, y^2, z^2 los cuadrados y c el congruente, los cuales tienen esta característica

$$y^2 - c = x^2 \qquad\qquad y^2 + c = z^2.$$

Al dividir entre el congruente c, obtenemos

$$\frac{y^2}{c} - \frac{c}{c} = \frac{x^2}{c} \qquad \text{y} \qquad \frac{y^2}{c} + \frac{c}{c} = \frac{z^2}{c}$$

$$\frac{y^2}{c} - 1 = \frac{x^2}{c} \qquad \text{y} \qquad \frac{y^2}{c} + 1 = \frac{z^2}{c},$$

Posteriormente multiplicando por $\frac{y^2}{c}$

$$\left(\frac{y^2}{c}\right)^2 - \left(\frac{y^2}{c}\right) = \left(\frac{xy}{c}\right)^2 \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{y^2}{c}\right)^2 + \left(\frac{y^2}{c}\right) = \left(\frac{zy}{c}\right)^2$$

[1] El problema plantea encontrar tres números A, B y C que cumplan lo siguiente

$$\begin{aligned} B^2 - B &= A^2 \\ B^2 + B &= C^2 \end{aligned}$$

obteniendo así la solución buscada, cuando se renombra $A = \frac{xy}{c}$, $B = \frac{y^2}{c}$ y $C = \frac{zy}{c}$.

En el caso de que se requiera sumar y restar 2 veces la raíz, la solución parte nuevamente de la cuaterna formada por el congruente c y x^2, y^2, z^2, sus cuadrados respectivos, los cuales cumplen que $y^2 - c = x^2 \quad$ y $\quad y^2 + c = z^2$. Al dividir entre la mitad del congruente c obtenemos

$$\frac{2y^2}{c} - \frac{2c}{c} = \frac{2x^2}{c} \qquad \text{y} \qquad \frac{2y^2}{c} + \frac{2c}{c} = \frac{2z^2}{c}$$

$$\frac{2y^2}{c} - 2 = \frac{2x^2}{c} \qquad \text{y} \qquad \frac{2y^2}{c} + 2 = \frac{2z^2}{c},$$

multiplicando por $\frac{2y^2}{c}$

$$\left(\frac{2y^2}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{2y^2}{c}\right) = \left(\frac{2xy}{c}\right)^2 \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{2y^2}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{2y^2}{c}\right) = \left(\frac{2zy}{c}\right)^2$$

y así se obtiene la solución buscada, bajo las siguientes etiquetas $A = \frac{2xy}{c}$, $B = \frac{2y^2}{c}$ y $C = \frac{2zy}{c}$. Este resultado se puede generalizar para el caso que se solicite sumar o restar n veces la raíz; ésta tarea se apoya de nuevo en un congruente c y sus respectivos cuadrados x^2, y^2, z^2, los cuales cumplen $y^2 - c = x^2 \quad$ y $\quad y^2 + c = z^2$.

Si se divide entre la $n - esima$ parte del congruente c, obtenemos

$$\frac{ny^2}{c} - \frac{nc}{c} = \frac{nx^2}{c} \qquad \text{y} \qquad \frac{ny^2}{c} + \frac{nc}{c} = \frac{nz^2}{c}$$

$$\frac{ny^2}{c} - n = \frac{nx^2}{c} \qquad \text{y} \qquad \frac{ny^2}{c} + n = \frac{nz^2}{c},$$

multiplicando por $\frac{ny^2}{c}$

$$\left(\frac{ny^2}{c}\right)^2 - n\left(\frac{ny^2}{c}\right) = \left(\frac{nxy}{c}\right)^2 \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{ny^2}{c}\right)^2 + n\left(\frac{ny^2}{c}\right) = \left(\frac{nzy}{c}\right)^2$$

y obtenemos la solución buscada cuando se renombra $A = \frac{nxy}{c}$, $B = \frac{ny^2}{c}$ y $C = \frac{nzy}{c}$.

La versión original de Fibonacci que encontramos en el *Liber Quadratorum* se expone de esta manera:

Consideremos el número congruente $BG = GD$, y sus cuadrados correspondientes AB, AG y AD, es decir, se toman las siguientes igualdades

$$AG - BG = AB \qquad \text{y} \qquad AG + GD = AD.$$

Dividamos las dos igualdades anteriores entre el número congruente, obteniendo lo siguiente

$$\frac{AG}{BG} - \frac{BG}{BG} = \frac{AB}{BG} \qquad \text{y} \qquad \frac{AG}{BG} + \frac{GD}{BG} = \frac{AD}{BG}.$$

Ahora llamemos $EZ = \frac{AB}{BG}$, $EI = \frac{AG}{BG}$, $EH = \frac{AD}{BG}$, $ZI = \frac{BG}{BG}$, $IH = \frac{GD}{BG}$ y generemos el tetrágono[2] EK, sobre EI, es decir, $EK = (EI)^2$ (Fig16.1).

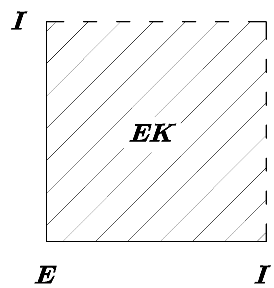


Figura 16.1

Como $BG = GD$, entonces $\frac{BG}{BG} = 1 = \frac{GD}{BG}$, por lo tanto $ZI = IH = 1$; si le sumamos a EI el número IH obtenemos el número EH.

Dado que $EH = EZ + ZH$, tracemos las líneas EL, ZT, IK y HF, de la misma longitud que EI, obteniendo la figura (Fig. 16.2)

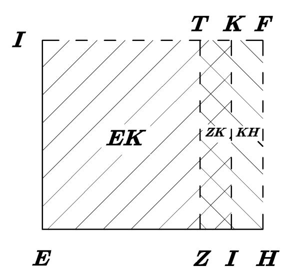


Figura 16.2

Como $ZI = 1$, entonces, la superficie ZK generada por la multiplicación $ZI(ZT) = ZT = EI$, y del mismo modo como $IH = 1$, entonces, la superficie KH generada por la multiplicación $IH(IK) = IK = EI$. Ahora observemos que si al cuadrado EK le restamos la superficie ZK, es decir, al cuadrado de EI le restamos su raíz EI, obtendremos la superficie LZ, que es un cuadrado pues proviene de la multiplicación de dos cuadrados EZ y $EL = EI$. Por otro lado, si al cuadrado EK le sumamos la superficie KH obtendremos la superficie LH, que de nuevo resulta ser un cuadrado pues proviene de la multiplicación de los cuadrados EH y $EL = EI$.

Entonces se ha encontrado el cuadrado $EK = (EI)^2$, tal que al sumarle su raíz EI se obtiene el cuadrado LH y al restarle su raíz EI se obtiene el cuadrado LZ, que es lo que se solicitaba.

[2]Fibonacci llama tetrágono a un cuadrado, lo cual es correcto pues un cuadrado también es un tetrágono. En este caso definiremos al cuadrado $(EI)^2$ como el tetrágono $EHIK$

Ejemplo numérico en el contexto de Fibonacci. Sea $AB = 1$, $AG = 25$, y $AD = 49$, con el congruente $BG = DG = 24$. Si se divide cada uno de los números AB, AG y AD entre el congruente se obtienen los números $EZ = \frac{1}{24}$, $EI = \frac{25}{24}$ y $EH = \frac{49}{24}$. Por lo anterior $EK = (EI)^2 = (25/24)^2 = \frac{625}{576}$, $IK = EI = \frac{25}{24}$ y $ZK = EI = \frac{25}{24}$, y haciendo las operaciones solicitadas $EK - EI = \frac{625}{576} - \frac{25}{24} = \frac{25}{576} = \left(\frac{5}{24}\right)^2 = LZ$ y $EK + EI = \frac{625}{576} + \frac{25}{24} = \frac{1225}{576} = \left(\frac{35}{24}\right)^2 = LH$.

Se procede de manera similar si en lugar de sumar o restar una raíz se solicita hacerlo dos o más veces con la raíz; para dicho caso se dividirán las dos igualdades iniciales entre la mitad del número congruente o entre su $n-\acute{e}sima$ parte. De la misma forma se generarán los números EZ, EI, EH, ZI y IH, pero en este caso $ZI = IH = 2$, teniendo como consecuencia que las superficies $ZK = 2EI = KH$, es decir, serán iguales a dos veces la raíz del cuadrado EK, y nuevamente las superficies LZ y LH serán cuadrados pues provienen de la multiplicación de dos números cuadrados. Quedando así construidos los cuadrados[3].

Veamos un ejemplo numérico para el caso de dos raíces. Sean $AB = 1$, $AG = 25$ y $AD = 49$, con el congruente $BG = DG = 24$. Si se dividen cada uno de los números AB, AG y AD entre la mitad del congruente se obtienen los números $EZ = \frac{1}{12}$, $EI = \frac{25}{12}$ y $EH = \frac{49}{12}$.

Por lo anterior $EK = (EI)^2 = \left(\frac{25}{12}\right)^2 = \frac{625}{144}$, $IK = 2EI = 2\left(\frac{25}{12}\right) = \frac{50}{12}$ y $ZK = 2EI = 2\left(\frac{25}{12}\right) = \frac{50}{12}$. Haciendo las operaciones se obtiene $EK - 2EI = \frac{625}{144} - \frac{50}{12} = \frac{25}{144} = \left(\frac{5}{12}\right)^2 = LZ$ y $E + EI = \frac{625}{144} + \frac{50}{12} = \frac{1225}{144} = \left(\frac{35}{12}\right)^2 = LH$.

[3]Esta proposición es un caso particular de la Proposición 11, fijando la condición de que el número a sumar o restar sea la raíz del cuadrado mencionado.

Capítulo 17

Proposición XVII

Ternas de números impares y teoría de diferencias finitas.

En esta proposición se demuestra que en toda triada de números cuadrados impares consecutivos sucede que el cuadrado mayor supera al cuadrado mediano en ocho unidades más que las que el cuadrado mediano supera al menor.

En términos más actuales se presenta así. Sean tres cuadrados impares consecutivos, a la diferencia entre el mayor y el mediano se le denota con A; a la diferencia entre el mediano y el menor con B, entonces se demuestra que la diferencia de las diferencias es 8, es decir, $A - B = 8$. Presentado algebraicamente: sean $2n + 1$, $2n + 3$ y $2n + 5$ tres impares consecutivos, las diferencias de los cuadrados son

$$(2n + 5)^2 - (2n + 3)^2 = 4n^2 + 20n + 25 - 4n^2 - 12n - 9 = 8n + 16$$

$$(2n + 3)^2 - (2n + 1)^2 = 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 4n - 1 = 8n + 8$$

entonces la diferencia de las diferencias es

$$8n + 16 - 8n - 8 = 8.$$

El cálculo de las diferencias finitas es una teoría que inició con Diofanto tomó una forma como paradigma propio a partir del siglo XVIII con Jacob Stirling y algunos años después con Leonhard Euler. Más adelante ahondaremos en el perfil moderno. Por lo pronto analizaremos lo que desarrolló Fibonacci en esta proposición.

Se parte de las raíces de los cuadrados y las diferencias entre ellos, para demostrar que en efecto la diferencia de las diferencias entre ellos es igual a 8. Recordamos que si tres cuadrados son impares y consecutivos sus raíces también serán impares y consecutivas. Sean los números AB, BG y GD las raíces. Supongamos sin pérdida de generalidad que $AB < BG$ y $BG < GD$, (Fig.17.1).

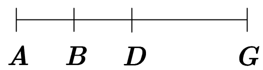


Figura 17.1

Dado que las raíces son números impares, sabemos que BG es mayor que AB en dos unidades, y GD excede en la misma cantidad al número BG. Sean $CD = EG = 2$ y $GF = AB$. Restemos del número BG el número EG, obteniendo $BE = AB$; del número CD en GD, se obtiene que $GC = BG$ y al restar GF de GC queda FC. En consecuencia $FD = FC + CD = 2 + 2 = 4$. Ahora veamos a que son equivalentes los cuadrados de BG y GD

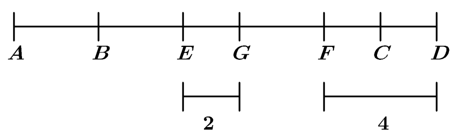


Figura 17.2

$$(BG)^2 = (BE + EG)^2 = (AB + 2)^2 = (AB)^2 + 4AB + 4 = (AB)^2 + 2(2AB + 2)$$

$$= (AB)^2 + 2(AB + (AB + 2)) = (AB)^2 + 2(AB + BG) = (AB)^2 + 2AB + 2BG$$

$$(GD)^2 = (GC + CD)^2 = (BG + 2)^2 = (BG)^2 + 4BG + 4 = (BG)^2 + 2(2BG + 2)$$

$$= (BG)^2 + 2(BG + (BG + 2)) = (BG)^2 + 2(BG + GD) = (BG)^2 + 2BG + 2GD$$

por lo tanto

$$(GD)^2 - (BG)^2 = 2BG + 2GD$$
$$(BG)^2 - (AB)^2 = 2AB + 2BG,$$

y con esto se obtiene que

$$(GD)^2 - (BG)^2) - (BG)^2 - (AB)^2) = 2BG + 2GD - 2BG - 2AB$$

$$= 2GD - 2GF = 2DF = 2(4) = 8,$$

con lo cual queda demostrado que $(GD)^2 - (BG)^2 = 8 + (BG)^2 - (AB)^2$ que es lo que se solicitaba probar.

Otra forma de probarlo sería la siguiente

$$(GD)^2 - (BG)^2 = (GD + BG)(GD - BG) = BD(2)$$

$$(BG)^2 - (AB)^2 = (BG + AB)(BG - AB) = AG(2),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} BD(2) - AG(2) &= 2(BG + GD) - 2(AB + BG) = 2(GD) - 2(AB) \\ &= 2(GD - AB) = 2FD = 2(4) = 8 \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

Verifiquemos esta proposición con un caso numérico. Sean 1^2, 3^2 y 5^2 los tres cuadrados impares consecutivos. De las diferencias $5^2 - 3^2 = 16$ y $3^2 - 1^2 = 8$, se obtiene que $16 - 8 = 8$, cumpliéndose así la proposición. De la obra original de Fibonacci se puede extraer el siguiente patrón para representar a los cuadrados de los impares como una combinación del ocho. Enseguida presentamos lo propuesto por Fibonacci en notación actual:

$$\begin{array}{rcl} (2(1)-1)^2 &=& 1 \\ (2(2)-1)^2 &=& 1+8(1) \\ (2(3)-1)^2 &=& 1+8(1)+2(8) \\ (2(4)-1)^2 &=& 1+8(1)+2(8)+3(8) \\ &\vdots& \\ (2(n)-1)^2 &=& 1+1(8)+2(8)+3(8)+\cdots+(n-1)(8), \end{array}$$

se percibe, que si partimos del primer cuadrado impar, que es el uno, el siguiente cuadrado impar se obtendrá sumando el primer término de la progresión de los múltiplos de ocho, es decir, ocho, dando como resultado nueve (que es el segundo cuadrado impar); para obtener el tercer cuadrado se sumará nueve más dieciséis (segundo múltiplo de ocho) y así sucesivamente. Algo similar sucede si se analiza la progresión ordenada de los cuadrados pares. Analicemos los cuadrados pares bajo un razonamiento semejante al de Fibonacci, si bien aclarando que de aquí en adelante lo que se presenta no es realizado por Fibonacci, sino que es algo derivado del trabajo propio de esta tesis. Entonces, para los cuadrados pares se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (2(1))^2 &=& 4 = 1(4) \\ (2(2))^2 &=& 4+12 = 1(4)+3(4) \\ (2(3))^2 &=& 4+12+20 = 1(4)+3(4)+5(4) \\ (2(4))^2 &=& 4+12+20+28 = 1(4)+3(4)+5(4)+7(4) \\ &\vdots& \\ (2(n))^2 &=& 1(4)+3(4)+5(4)+7(4)+\cdots+(2n-1)(4), \end{array}$$

con estos desarrollos podemos afirmar que la progresión de los cuadrados pares surge sumando los términos impares de la progresión de los múltiplos de cuatro. La progresión de los cuadrados pares se obtiene del producto de la suma de los impares y cuatro, como en

$$(2(n))^2 = 1(4)+3(4)+5(4)+7(4)+\cdots+(2n-1)(4) = (1+3+5+7+\cdots+(2n-1))(4).$$

Por lo tanto, la diferencia de diferencias entre tres cuadrados pares sucesivos también será igual a ocho, como sucede con los cuadrados impares[1].

De la misma forma se encontrará que si tomamos cuadrados que crecen de tres en tres, es decir los cuadrados de los múltiplos de tres (números terciarios), la diferencia de las diferencias también presentará un patrón de construcción. Ahora analicemos los cuadrados ternarios.

$$\begin{aligned}
(3(1))^2 &= 9 = 1(9)\\
(3(2))^2 &= 9 + 27 = 1(9) + 3(9)\\
(3(3))^2 &= 9 + 27 + 45 = 1(9) + 3(9) + 5(9)\\
(3(4))^2 &= 9 + 27 + 45 + 63 = 1(9) + 3(9) + 5(9) + 7(9)\\
&\vdots\\
(3(n))^2 &= 1(9) + 3(9) + 5(9) + 7(9) + \cdots + (2n-1)(9)
\end{aligned}$$

Con lo anterior podemos decir que los cuadrados terciarios surgen de la suma de los números impares multiplicados por nueve. Por ejemplo $(3(4))^2 = (1+3+5+7)(9)$.

Con lo anterior se puede afirmar que la diferencia de las diferencias entre tres cuadrados terciarios sucesivos es igual a dieciocho, es decir, el doble del cuadrado de la razón de crecimiento de los números terciarios[2].

De forma similar se mostrará que si tomamos cuadrados que crecen de cuatro en cuatro, es decir, los cuadrados de los múltiplos de cuatro (números cuaternos), en la diferencia de las diferencias también se puede exhibir un patrón de construcción.

---

[1]Sean $2n$, $2n+2$ y $2n+4$ las raíces de los cuadrados. Calculemos las diferencias de los cuadrados obtenemos lo siguiente:

$$(2n+4)^2 - (2n+2)^2 = 4n^2 + 16n + 14 - 4n^2 - 8n - 4 = 8n + 12$$

$$(2n+2)^2 - (2n)^2 = 4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 = 8n + 4$$

calculando ahora la diferencia de las diferencias

$$8n + 12 - 8n - 4 = 8 = 2(4) = 2(2^2)$$

quedando así demostrado lo que se solicitaba.

[2]Sean $3n$, $3n+3$ y $3n+6$ las raíces de los cuadrados. Ahora calculemos las diferencias de los cuadrados y obtenemos lo siguiente:

$$(3n+6)^2 - (3n+3)^2 = 9n^2 + 36n + 36 - 9n^2 - 18n - 9 = 18n + 27$$

$$(3n+3)^2 - (3n)^2 = 9n^2 + 18n + 9 - 9n^2 = 18n + 9,$$

y calculando la diferencia de las diferencias se tiene que

$$18n + 27 - 18n - 9 = 18 = 2(9) = 2(3^2)$$

y así queda demostrado lo que se requería.

Analicemos los cuadrados cuaternos:

$$\begin{aligned}(4(1))^2 &= 16 = 1(16)\\(4(2))^2 &= 16+48 = 1(16)+3(16)\\(4(3))^2 &= 16+48+80 = 1(16)+3(16)+5(16)\\(4(4))^2 &= 16+48+80+112 = 1(16)+3(16)+5(16)+7(16)\\&\vdots\\(4(n))^2 &= 1(16)+3(16)+5(16)+7(16)+\cdots+(2n-1)(16).\end{aligned}$$

Podemos afirmar que los cuadrados cuaternos surgen de la suma de los números impares multiplicados por dieciséis, por ejemplo,

$$(4(n))^2 = (1+3+5+7+\cdots+(2n-1))(16)$$

de aquí garantizamos que la diferencia de diferencias entre tres cuadrados cuaternarios sucesivos es igual a 32, es decir, el doble del cuadrado de la razón de crecimiento de los números cuaternos[3].

Con los ejemplos analizados podemos concluir que la progresión de los múltiplos de cualquier número n elevados al cuadrado se genera a partir de la suma de los términos impares de dicha progresión, es decir, el primer cuadrado será igual a n^2, el segundo cuadrado será igual a la suma de n^2 más $3n^2$, y el tercer cuadrado corresponderá a n^2 más $3n^2$ más $5n^2$ y así sucesivamente. Por lo cual dados 3 cuadrados sucesivos múltiplos de n la diferencia de las diferencias del mayor con el medio y el medio con el menor, será igual al doble de n^2. Veamos esto en el lenguaje actual

$$\begin{aligned}(n(1))^2 &= (n)^2 = n^2\\(n(2))^2 &= (2n)^2 = n^2+3n^2\\(n(3))^2 &= (3n)^2 = n^2+3n^2+5n^2\\&\vdots\\(n(n))^2 &= (n^2)^2 = n^2+3n^2+5n^2+\cdots+(2n-1)n^2\end{aligned}$$

[3]Sean $4n$, $4n+4$ y $4n+8$ las raíces de los cuadrados; calculamos las diferencias de los cuadrados y obtenemos lo siguiente:

$$(4n+8)^2-(4n+4)^2 = 16n^2+64n+64-16n^2-32n-16 = 32n+48$$

$$(4n+4)^2-(4n)^2 = 16n^2+32n+16-16n^2 = 32n+16,$$

y al calcular la diferencia de las diferencias se obtiene

$$32n+48-32n-18 = 32 = 2(16) = 2(4^2)$$

y así queda demostrado lo que se solicitaba.

Para verificar la diferencia de las diferencias, sean $n(n)$, $n(n+1)$ y $n(n+2)$ las raíces de los cuadrados, entonces de las diferencias de los cuadrados obtenemos lo siguiente:

$$(n^2+2n)^2-(n^2+n)^2 = n^4+4n^3+4n^2-n^4-2n^3-n^2 = 2n^3+3n^2$$

$$(n^2+n)^2-(n^2)^2 = n^4+2n^3+n^2-n^4 = 2n^3-n^2$$

al calcular la diferencia de las diferencias queda

$$2n^3+3n^2-2n^3-n^2 = 2n^2$$

queda así demostrado lo que se pedía.

Teoría de las diferencias finitas

Fibonacci debió haber obtenido lo antes expuesto mediante auscultación y se percató de que las diferencias de las diferencias siempre terminaban en una constante, y por lo mismo trató de expresar a los cuadrados correspondientes en términos de combinaciones de dichas constantes. El tema de las diferencias se estudia en la actualidad y no sólo se restringe a ternas de números, ni a calcular sólo un par de diferencias. En realidad es una teoría, importante por sí misma, la cual se puede examinar con más detalle en [4]

Se mencionó al inicio de esta proposición que el cálculo de las diferencias finitas se desarrolló desde el siglo XVIII con Jacob Stirling, y después con Leonhard Euler quien nos presenta sus resultados en un artículo de 1755.

En el contexto del problema XVIII de Fibonacci, donde expone una sucesión de 3 cuadrados impares cuya diferencia ya señalada es 8, podríamos proponer extender la sucesión a más cuadrados, pero consideramos que es mejor plantear cualquier sucesión y presentar lo siguiente en un contexto de la teoría moderna.

Sea U_n, U_{n+1}, ... ,U_{n+m} cualquier sucesión con $m+1$ elementos y definimos ΔU_n como la diferencia de dos términos consecutivos de esta forma: $\Delta U_n = U_{n+1} - U_n$.

De esta manera definimos los Δ_i así:

$$\begin{array}{rcl}
\Delta U_n & = & U_{n+1} - U_n \\
\Delta U_{n+1} & = & U_{n+2} - U_{n+1} \\
\Delta U_{n+2} & = & U_{n+3} - U_{n+2} \\
\vdots & & \\
\Delta U_{n+m-1} & = & U_{n+m} - U_{n+m-1}.
\end{array}$$

El segundo nivel de las diferencias es:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 U_n &= \Delta U_{n+1} - \Delta U_n \\
\Delta^2 U_{n+1} &= \Delta U_{n+2} - \Delta U_{n+1} \\
\Delta^2 U_{n+2} &= \Delta U_{n+3} - \Delta U_{n+2} \\
&\vdots \\
\Delta^2 U_{n+m-1} &= \Delta U_{n+m} - \Delta U_{n+m-1}.
\end{aligned}$$

El tercer nivel es :

$$\begin{aligned}
\Delta^3 U_n &= \Delta^2 U_{n+1} - \Delta^2 U_n \\
\Delta^3 U_{n+1} &= \Delta^2 U_{n+2} - \Delta^2 U_{n+1} \\
\Delta^3 U_{n+2} &= \Delta^2 U_{n+3} - \Delta^2 U_{n+2} \\
&\vdots \\
\Delta^3 U_{n+m-1} &= \Delta^2 U_{n+m} - \Delta^2 U_{n+m-1}.
\end{aligned}$$

Si tomamos el término $\Delta^3 U_n = \Delta^2 U_{n+1} - \Delta^2 U_n$, y como

$$\begin{aligned}
\Delta^2 U_{n+1} &= \Delta U_{n+2} - \Delta U_{n+1} = (U_{n+3} - U_{n+2}) - (U_{n+2} - U_{n+1}) \\
&= U_{n+3} - 2U_{n+2} + U_{n+1} \\
\Delta^2 U_n &= U_{n+2} - 2U_{n+1} - U_n,
\end{aligned}$$

entonces

$$\Delta^3 U_n = (U_{n+3} - 2U_{n+2} + U_{n+1}) - (U_{n+2} - 2U_{n+1} - U_n)$$

$$= U_{n+3} - 3U_{n+2} + 3U_{n+1} - U_n = U_{n+3} - \binom{3}{1} U_{n+2} + \binom{3}{2} U_{n+1} - U_n,$$

donde $\binom{3}{1}$ representa un coeficiente binomial. Podemos apreciar que $\Delta^3 U_n$ quedó representado sólo con elementos directos de la sucesión y no de la diferencias Δ^i. Para encontrar cualquier elemento de las diferencias se puede enunciar el siguiente teorema.

Teorema

Sea U_n, U_{n+1}, ... , U_{n+m} una sucesión, entonces

$$\Delta^m U_n = U_{n+m} - \binom{m}{1} U_{n+m-1} + \binom{m}{2} U_{n+m-2} + \cdots + (-)^m U_n.$$

La demostración y más sobre este teorema se puede consultar en [4].

Es adecuado señalar que la sucesión U_n, U_{n+1}, ... , U_{n+m} no requiere ser aritmética, geométrica o que sean las imágenes de una función $f(x)$. Por ejemplo, para $U_1 = 5$, $U_2 = 7$, $U_3 = 9$, $U_4 = 14$, $U_5 = 17$, $U_6 = 18$, $U_7 = 26$, $U_8 = 30$ y se tiene que

$$
\begin{aligned}
U_i &= 5 \quad 7 \quad 9 \quad 14 \quad 17 \quad 18 \quad 26 \quad 30\\
\Delta U_i &= 2 \quad 2 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \quad 8 \quad 4\\
\Delta^2 U_i &= 0 \quad 3 \quad -2 \quad -2 \quad 7 \quad -4\\
\Delta^3 U_i &= 3 \quad -5 \quad 0 \quad 9 \quad -11\\
\Delta^4 U_i &= -8 \quad 5 \quad 9 \quad -20\\
\Delta^5 U_i &= 13 \quad 4 \quad -29\\
\Delta^6 U_i &= -11 \quad -33\\
\Delta^7 U_i &= -22
\end{aligned}
$$

Si usamos el teorema que se enunció para $\Delta^3 U_1$ y $\Delta^3 U_2$ se tiene que

$$\Delta^3 U_1 = U_4 - 3U_3 + 3U_2 - U_1 = 14 - 3 * 9 + 3 * 7 - 5 = 3$$

$$\Delta^3 U_2 = U_5 - 3U_4 + 3U_3 - U_2 = 17 - 3 * 14 + 3 * 9 - 7 = -5,$$

que es igual que lo presentado en las tablas pero sin tener que hacer todo el desarrollo tabular.

Para el caso del problema XVII del *Liber Quadratorum*, sí se tiene la sucesión de cuadrados impares $(2n+(2k+1))^2$, $k \in \mathbb{N}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ fijo. Por ejemplo $U_1 = (2n+1)^2$, $U_2 = (2n+3)^2$, $U_3 = (2n+5)^2$, $U_5 = (2n+7)^2$,.... Entonces al aplicar el teorema se tendrá que los ΔU_i son todos iguales a 8, que es la generalización del planteamiento de Fibonacci.

Es importante que todos los ΔU_i son 8 ya que los cuadrados se generan por la suma de impares que son los elementos de la progresión aritmética $2\Gamma + 1$, y esto lleva a que se conserven regularidades para obtener que todos los ΔU_i son 8.

Si se tiene el caso de los cuadrados $(2k)^2$, $(2(k+1))^2$, $(2(k+2))^2$,... entonces se tiene que el siguiente nivel de las diferencias será 8, es decir, todas las $\Delta^2 U_i$ son 8.

Lo mismo pasa con cualquier sucesión de cuadrados cuyas raíces son múltiplos consecutivos de un entero q. Por ejemplo, si $q = 3$, entonces los múltiplos son qk, $q(k+1)$, $q(k+2)$, $q(k+3)$, $\ldots$, entonces, en algún nivel de las diferencias todas tendrán el mismo valor, es decir, todas las $\Delta^m U_i$ serán iguales para algún m.

Capítulo 18

Proposición XVIII

Terna de cuadrados cuya diferencia es una razón dada.

En esta proposición se solicita encontrar tres cuadrados cuyas diferencias están en una razón dada.

En una interpretación más actual, pero sin alterar el sentido de Fibonacci, lo que se pide es encontrar tres cuadrados no necesariamente sucesivos x^2, y^2, z^2 tal que $x^2 < y^2 < z^2$ y, cuya razón de la diferencia del número intermedio con el menor, y la diferencia entre el mayor y el intermedio sea igual a una razón dada $\frac{A}{B}$. Es decir, que los tres cuadrados que se encuentren y la razón dada cumplan lo siguiente:

$$\frac{y^2 - x^2}{z^2 - y^2} = \frac{A}{B}.$$

Fibonacci presenta varios casos para la solución de este problema. Proporciona además el proceso para encontrarlos de manera general y prueba dicho procedimiento con un ejemplo particular. La razón dada es la de los números A y B que a la vez son primos relativos entre sí.

Caso 1 A y B son sucesivos.

Sin pérdida de generalidad Fibonacci supone que B es mayor y considera a C como la unidad. Dispone de una cantidad B de números impares a partir de la unidad C. Sean D, E, F, G estos impares y toma a H, I, K, como los cuadrados de E, F, G respectivamente. Afirma que la razón entre la diferencia de I y H y la diferencia de K y H, es la misma que la existente entre A y B, lo cual se demuestra a continuación.

Dado que C es la unidad y los números D, E, F, y G son impares, entonces a partir de ella -la unidad- tendremos que D es 3, E es 5, F es 7 y G será 9, por lo cual H será 25, I es 49 y K será 81, y como se consideraron B impares a partir de la unidad y son 4 impares, entonces se puede decir que B es 4, y dado que A y B son sucesivos y B es mayor, tendremos que A es 3, por lo tanto resta demostrar que la razón entre las diferencias es igual a la razón entre 3 y 4.

De la proposición anterior sabemos que los cuadrados impares sucesivos crecen ordenadamente en múltiplos de 8. Por ejemplo, el cuadrado de D, es decir, el cuadrado de 3 (nueve), es mayor que el cuadrado de la unidad C (uno), en ocho unidades; a su vez el cuadrado H es mayor que el cuadrado de D, en dieciséis unidades, es decir, el doble de ocho; por lo tanto el cuadrado I será mayor que el cuadrado H en el triple de ocho, es decir, tantas veces ocho como unidades en A; por último, el cuadrado K es mayor que el cuadrado I, en el cuádruplo de ocho, es decir, tantas veces ocho como unidades en B. Entonces se tendrá que la razón entre la diferencia de los cuadrados I y H, y la diferencia de los cuadrados K y H, es la misma que la que hay entre A y B, es decir, dado que tomamos cuatro impares tendremos que $A = 3$ y $B = 4$, entonces,

$$\begin{array}{rcccl} & & D^2 & = & C^2 + 8 \\ H & = & E^2 & = & C^2 + 8 + 2(8) \\ I & = & F^2 & = & C^2 + 8 + 2(8) + 3(8) = C^2 + 8 + 2(8) + A(8) \\ K & = & G^2 & = & C^2 + 8 + 2(8) + 3(8) + 4(8) = C^2 + 8 + 2(8) + A(8) + B(8) \end{array}$$

por lo tanto

$$\frac{I-H}{K-I} = \frac{C^2 + 8 + 2(8) + A(8) - C^2 - 8 - 2(8)}{C^2 + 8 + 2(8) + A(8) + B(8) - C^2 - 8 - 2(8) - A(8)} = \frac{A(8)}{B(8)} = \frac{A}{B}$$

que es lo que se pedía.

Analicemos otro caso expuesto por Fibonacci. Sean $A = 10$ y $B = 11$ nuevamente dos números sucesivos, C la unidad. Dado que $B = 11$ entonces se tomarán once impares sucesivos a partir de C. Para determinar quiénes serán E, F y G, sumemos A y B para obtener F, y así quedarán definidos E y G, pues E corresponde al impar que precede a F y G es el impar que sucede a F. Por lo tanto, $F = 21$, $E = 19$ y $G = 23$, lo cual también coincide con tomar tantos impares ordenados a partir de la unidad como unidades en B, pues veintitrés corresponde al undécimo impar a partir de C. Por lo tanto solo resta calcular la razón de las diferencias, de los respectivos cuadrados H, I y K, donde $H = 361$, $I = 441$ y $K = 529$, para verificar que es igual a la razón entre A y B.

$$\frac{I-H}{K-I} = \frac{21^2 - 19^2}{23^2 - 21^2} = \frac{441 - 361}{529 - 441} = \frac{80}{88} = \frac{10(8)}{11(8)} = \frac{10}{11} = \frac{A}{B}.$$

Así muestra que los cuadrados solicitados son H, I y K[1].

[1]Sean $A = n$ y $B = n + 1$, dos números sucesivos. Obtenemos F sumando A y B, por lo tanto, $F = 2n + 1$,$E = 2n - 1$ y $G = 2n + 3$, de donde los cuadrados H, I, K serán $H = n^2 - 4n + 1$, $I = n^2 + 4n + 1$ y $K = n^2 + 12n + 9$. Calculando la razón de las diferencias obtenemos

$$\frac{I-H}{K-I} = \frac{n^2 + 4n + 1 - n^2 + 4n - 1}{n^2 + 12n + 9 - n^2 - 4n - 1} = \frac{8n}{8n+8} = \frac{8(n)}{8(n+1)} = \frac{n}{n+1} = \frac{A}{B}.$$

Por lo tanto H, I y K, son los cuadrados que cumplen con la condición solicitada.

Caso 2 A y B colaterales[2].

Fibonacci expone el caso de impares sucesivos. Recordemos de la Proposición 17 que los cuadrados pares se pueden expresar en términos de una progresión cuadruplicada de los números impares, es decir,

$$\begin{aligned} 4 &= 4(1) \\ 16 &= 4+12 = 4(1)+4(3) = 4(1+3) \\ 36 &= 4+12+20 = 4(1)+4(3)+4(5) = 4(1+3+5) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Con base en lo anterior afirmamos que la diferencia entre dos cuadrados pares sucesivos siempre será igual a un número impar de cuaternos. Dada la razón tenemos que encontrar los 3 cuadrados pares sucesivos, y para esto partamos del cuadrado intermedio el cual es igual el cuadrado cuya raíz es igual a la suma de los dos impares, dividida entre cuatro y multiplicada por dos, lo que es equivalente a dividir la suma entre dos. El cuadrado pequeño será aquél cuya raíz sea el número par que antecede a la raíz del intermedio y el cuadrado grande será el que tenga por raíz al par que sigue de la raíz del cuadrado intermedio.

Para un ejemplo numérico de este caso, sean $A = 11$ y $B = 13$ los impares para la razón dada; el número F será 12 (pues resulta de $11 + 13 = \frac{24}{2} = 128$; el número E será 10 (el par que antecede a 12) y el número G será 14 (el par que sigue de 12). Por lo tanto los cuadrados que resultan de estos números serán $I = 144$, que es igual a $4(1 + 3 + \cdots + 9 + 11)$; $H = 100$, que es igual a $4(1 + 3 + \cdots + 7 + 9)$ y por último $K = 196$, que es $4(1 + 3 + \cdots + 11 + 13)$.

Por lo tanto, la razón de la diferencia será:

$$\begin{aligned} \frac{I-H}{K-I} &= \frac{12^2-10^2}{14^2-12^2} = \frac{4(1+3+\cdots+9+11)-4(1+3+\cdots+7+9)}{4(1+3+\cdots+11+13)-4(1+3+\cdots+9+11)} \\ &= \frac{44}{52} = \frac{4(11)}{4(13)} = \frac{11}{13}. \end{aligned}$$

Así, se muestra que los cuadrados solicitados son H, I y K[3].

[2]Fibonacci, utiliza la palabra colaterales para referirse a impares o pares sucesivos, por ejemplo, 9 y 11 ó 10 y 12.

[3]Sean $A = 4n + 1$ y $B = 4n + 3$, dos números impares sucesivos. Obtenemos F sumando A y B y dividiendo entre 2. Por lo tanto $F = 4n + 2$, $E = 4n$ y $G = 4n + 4$, de donde los cuadrados H, I, K serán $H = 16n^2$, $I = 16n^2 + 16n + 4$ y $K = 16n^2 + 32n + 16$. De la razón de las diferencias obtenemos:

$$\frac{I-H}{K-I} = \frac{16n^2+16n+4-16n^2}{16n^2+32n+16-16n^2-16n-4} = \frac{16n+4}{16n+12} = \frac{4(4n+1)}{4(4n+3)} = \frac{4n+1}{4n+3} = \frac{A}{B}.$$

Por lo tanto H, I y K, son los cuadrados que cumplen con la condición solicitada.

Cuando se toman números pares sucesivos y la diferencia entre las raíces de los cuadrados es de dos:

Sean $A = 4n$ y $B = 4n + 2$, dos pares sucesivos. Obtenemos F al sumar A y B y dividiendo entre 2; por lo tanto $F = 4n + 1$, $E = 4n - 1$ y $G = 4n + 3$, de donde los cuadrados H, I, K serán $H = 16n^2 - 8n + 1$, $I = 16n^2 + 8n + 1$ y $K = 16n^2 + 24n + 9$. Entonces la razón de las diferencias es

$$\begin{aligned}\frac{I-H}{K-I} &= \frac{16n^2 + 8n + 1 - 16n^2 + 8n - 1}{16n^2 + 24n + 9 - 16n^2 - 8n - 1} = \frac{16n}{16n+8} = \frac{4(4n)}{4(4n+2)} \\ &= \frac{4n}{4n+2} = \frac{A}{B}.\end{aligned}$$

Por lo tanto H, I y K son los cuadrados que cumplen con la condición solicitada.

Pero si se busca que la diferencia entre las raíces de los cuadrados sea tres, entonces se tendrán que tomar pares sucesivos que pertenezcan a la misma clase residual en $\mathbb{Z}_4$.

Sean $A = 4n$ y $B = 4(n + 1)$, dos pares sucesivos bajo las condiciones indicadas, obtenemos F sumando A y B y dividiendo entre 4 y multiplicando por 3, por lo tanto, $F = 6n+3$, $E = 2n-1$ y $G = 2n+3$, de donde los cuadrados H, I, K serán $H = 4n^2-4n+1$, $I = 4n^2+4n+1$ y $K = 4n^2+12n+9$. Calculando la razón de las diferencias obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{I-H}{K-I} &= \frac{4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 + 4n - 1}{4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 4n - 1} = \frac{8n}{8n+8} = \frac{4(2n)}{4(2n+2)} \\ &= \frac{2n}{2(n+1)} = \frac{A}{B}.\end{aligned}$$

Por lo tanto H, I y K, son los cuadrados que cumplen con la condición solicitada.

Fibonacci analiza otro caso más con números colaterales impares, pero en este caso busca que las raíces de los cuadrados buscados crezcan o decrezcan por tercetos[4]. El proceso de búsqueda es similar al anterior donde las raíces crecían de dos en dos, pero en este caso el cuadrado intermedio será aquél cuya raíz es igual a la suma de los dos números que forman la razón, dividida entre cuatro y multiplicada por tres. El cuadrado pequeño tendrá por raíz al número que resulta de restar tres unidades a la raíz intermedia y el cuadrado grande tendrá por raíz al número que resulta de sumar tres unidades a la raíz mediana.

Veamos un ejemplo numérico de este caso. Sean $A = 19$ y $B = 21$ los impares que forman la razón, el número F será 10 (resulta de $19+21 = \frac{40}{4} = 10(3) = 30$), el número E será 27 y el número G será 33. Por lo tanto los cuadrados que resultan de estos números serán $I = 900$, que es igual a $9(1 + 3 + \cdots + 17 + 19)$, $H = 729$, que es $9(1 + 3 + \cdots + 15 + 17)$ y por último $K = 1089$ igual a $9(1 + 3 + \cdots + 19 + 21)$.

[4]Fibonacci utiliza la palabra tercetos para referirse a números que ascienden de tres en tres, por ejemplo 27 y 30 ó 18 y 21.

Por lo tanto la razón de la diferencia será:

$$\begin{aligned}\frac{I-H}{K-I} &= \frac{30^2-27^2}{33^2-30^2} = \frac{9(1+3+\cdots+17+19)-9(1+3+\cdots+15+17}{9(1+3+\cdots+19+21)-9(1+3+\cdots+17+19)} \\ &= \frac{171}{189} = \frac{9(19)}{9(21)} = \frac{19}{21}.\end{aligned}$$

Así se muestra que los cuadrados solicitados son H, I y K[5].

Se pueden generar los tres cuadrados bajo la condición de que sus raíces asciendan por cuaternos, por quinarios o cualquier número, es decir, que sus diferencias sean de cuatro o cinco o cualquier número.

Para el caso cuando las diferencias entre las raíces es cuatro, sean $A = 4n+1$ y $B = 4n+3$, dos números impares sucesivos. Obtenemos F sumando A y B y dividiendo entre 4 y multiplicando por 4, por lo tanto, $F = 8n+4$, $E = 8n$ y $G = 8n+8$, de donde los cuadrados H, I, K serán $H = 64n^2$, $I = 64n^2+64n+16$ y $K = 64n^2+128n+64$. Calculando la razón de las diferencias obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{I-H}{K-I} &= \frac{64n^2+64n+16-64n^2}{64n^2+128n+64-64n^2-64n-16} = \frac{64n+16}{64n+48} = \frac{16(4n+1)}{16(4n+3)} \\ &= \frac{4n+1}{4n+3} = \frac{A}{B}.\end{aligned}$$

Por lo tanto H, I y K, son los cuadrados que cumplen con la condición solicitada.

Para el caso cuando las diferencias entre las raíces es cualquier número, sean $A = 4n+1$ y $B = 4n+3$, dos números impares sucesivos, obtenemos F sumando A y B y dividiendo entre 4 y multiplicando por k; por lo tanto, $F = 2kn+k$, $E = 2kn$ y $G = 2kn+2k$, de donde los cuadrados H, I, K serán $H = 4k^2n^2$, $I = 4k^2n^2+4k^2n+k^2$ y $K = 4k^2n^2+8k^2n+4k^2$. La razón de las diferencias es:

$$\begin{aligned}\frac{I-H}{K-I} &= \frac{4k^2n^2+4k^2n+k^2-4k^2n^2}{4k^2n^2+8k^2n+4k^2-4k^2n^2-4k^2n-k^2} = \frac{4k^2n+k^2}{4k^2n+3k^2} \\ &= \frac{k^2(4n+1)}{k^2(4n+3)} = \frac{4n+1}{4n+3} = \frac{A}{B}.\end{aligned}$$

Por lo tanto H, I y K, son los cuadrados que cumplen con la condición solicitada.

[5]Sean $A = 4n+1$ y $B = 4n+3$, dos números impares sucesivos. Obtenemos F al sumar A y B, dividir entre 4 y multiplicar por 3. Por lo tanto, $F = 6n+3$, $E = 6n$ y $G = 6n+6$, de donde los cuadrados H, I, K serán $H = 36n^2$, $I = 36n^2+36n+9$ y $K = 36n^2+72n+36$. Calculando la razón de las diferencias obtenemos:

$$\frac{I-H}{K-I} = \frac{36n^2+36n+9-36n^2}{36n^2+72n+36-36n^2-36n-9} = \frac{36n+9}{36n+27} = \frac{9(4n+1)}{9(4n+3)} = \frac{4n+1}{4n+3} = \frac{A}{B}.$$

Por lo tanto H, I y K, son los cuadrados que cumplen con la condición solicitada.

Caso 3 A y B son cuadrados.

Fibonacci se auxilia de un número C que corresponde a la media proporcional[6] continua entre A y B. Por lo tanto C es igual al producto de las raíces de los números que forman la razón. Entonces C cumple con que $\frac{C}{B} = \frac{A}{C}$. Sea D otro número tal que $\frac{B}{D} = \frac{C}{B}$, en consecuencia $\frac{B}{D} = \frac{A}{C}$; por lo tanto, $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$, es decir, A, B, C y D están en proporción continua.

Sean $EF = A^2$, $EG = C^2$ y $EH = B^2$ se afirma que dichos cuadrados cumplen lo solicitado en la proposición, es decir, las diferencias entre ellos están en la razón buscada. En otras palabras, $EG - EF = FG$ y $EH - EG = GH$ están entre sí en la misma razón que A con B.

Partiendo de que A, B, y C están en proporción continua, es decir, $\frac{A}{C} = \frac{C}{B}$, se tendrá que $\frac{A^2}{C^2} = \frac{A(A)}{A(B)} = \frac{A}{B}$. Como $\frac{A^2}{C^2} = \frac{EF}{EG}$, entonces $\frac{EF}{EG} = \frac{A}{B}$. De forma análoga B, C y D están en proporción continua y por lo tanto $\frac{EG}{EH} = \frac{C}{D}$. Pero como se citó con anterioridad $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$; en consecuencia $\frac{EG}{EH} = \frac{A}{B}$. Así pues, $\frac{EF}{EG} = \frac{EG}{EH}$, de donde podemos concluir que EF, EG y EH, están en proporción continua.

De que $\frac{EF}{EG} = \frac{EG}{EH}$ podemos concluir que $\frac{EF}{FG} = \frac{EG}{GH}$, pues $EH = EG + GH$ y $EG = EF + GH$, por lo cual

$1 + \frac{EF}{FG} = \frac{EF}{EF} + \frac{EF}{FG} = \frac{EF}{EF+FG} = \frac{EF}{EG} = \frac{EG}{EH} = \frac{EG}{EG+GH} = \frac{EG}{EG} + \frac{EG}{GH} = 1 + \frac{EG}{GH}$

por tanto

$$\frac{EF}{FG} = \frac{EG}{GH}$$

de donde

$$\frac{GH}{FG} = \frac{EG}{EF}$$

y

$$\frac{FG}{GH} = \frac{EF}{EG}$$

y como

$$\frac{EF}{EG} = \frac{A}{B}$$

entonces

$$\frac{FG}{GH} = \frac{EG - EF}{EH - EG} = \frac{A}{B}$$

que es lo que se quería demostrar.

De forma general, sean $A = n^2$ y $B = m^2$ dos números cuadrados. Obtenemos $C = nm$ y por lo tanto $H = ((n)^2)^2 = A^2$, $I = C^2 = (nm)^2 = n^2m^2 = AB$ y $K = ((m)^2)^2 = B^2$. Calculando la razón de las diferencias obtenemos

$$\frac{I - H}{K - I} = \frac{C^2 - A^2}{B^2 - C^2} = \frac{AB - A^2}{B^2 - AB} = \frac{A(B - A)}{B(B - A)} = \frac{A}{B}$$

[6]Recordemos que la media proporcional continua entre dos números A y B cumple $\frac{X}{B} = \frac{A}{X}$, entonces $X^2 = A(B)$, por lo tanto $X = \sqrt{A(B))} = \sqrt{A}\sqrt{B}$

Por lo tanto H, I y K, son los cuadrados que cumplen con la condición solicitada.

Para un ejemplo numérico de este caso sean $A = 4^2$ y $B = 5^2$ los cuadrados que forman la razón, el número C será 20 –pues resulta del producto $4(5) = 20$-, por lo tanto los cuadrados serán $I = 400$, $H = 256$, y $K = 625$. Entonces, la razón de la diferencia será igual a

$$\frac{I - H}{K - I} = \frac{20^2 - 16^2}{25^2 - 20^2} = \frac{400 - 256}{625 - 400} = \frac{144}{225} = \frac{9(16)}{9(25)} = \frac{16}{25} = \frac{4^2}{5^2},$$

y así queda demostrado que los cuadrados solicitados son H, I y K.

Caso 4. A y B no sucesivos, no colaterales y no cuadrados.

Para poder resolver este caso tenemos que analizar dos subcasos en los cuales se deben cumplir a su vez dos condiciones:

Subcaso 1

a) Que la razón dada sea la misma que existe entre dos números pertenecientes a la sucesión de ocho.[7]

b) Los cuadrados buscados sean impares.

Subcaso 2

a) Que la razón dada sea la misma que existe entre dos números pertenecientes a la progresión de los cuaternos.[8]

b) Los cuadrados buscados sean pares.

Comencemos con el análisis del Subcaso 1. Recordemos que los cuadrados buscados deben ser impares, por lo tanto su raíz será impar. Si tomamos la razón dada como la que hay entre 2 y 9, entonces tomemos el cuadrado de cinco, pues éste es mayor que el cuadrado impar que le precede en dos veces ocho, $5^2 = 3^2 + 2(8)$.

Verifiquemos cómo obtener el otro número de la razón. Si tomamos el siguiente cuadrado impar, es decir, 7^2 es mayor que 5^2 en 3 veces 8, por lo tanto la razón obtenida por las diferencias de 3, 5 y 7 al cuadrado sería 2 es a 3, lo cual es distinto de 2 es a 9, por lo cual 7^2 queda descartado. Probemos con el siguiente impar, es decir, con 9^2, de donde se obtendrá la razón 2 es a 7, la cual es mayor que la razón dada. Si ahora se intenta con el siguiente cuadrado impar, es decir, 11^2, la razón obtenida será 2 es a 12, la cual es menor que la razón dada, por lo tanto se puede concluir que de esta manera no se encontrarán los cuadrados solicitados. En consecuencia, se trabajará con una razón equivalente, por ejemplo, 4 es a 18. Ahora bien, se iniciará con 9^2, pues este es mayor en 4 veces 8 al cuadrado que le precede, es decir, $9^2 = 7^2 + 4(8)$. De nueva cuenta

[7]Es decir, que los números que forman la razón sean de la forma $n = 1 + 8(1 + 2 + \cdots + k)$

[8]Que los números que forman la razón sean de la forma $n = 4(1 + 3 + \cdots + k)$

se probará con el siguiente cuadrado impar, es decir, con 11^2. Pero al calcular las diferencias se obtendrá que la razón es 4 a 5, lo cual no es igual a la razón propuesta. Probemos con el siguiente impar, es decir, 13^2, pero nuevamente obtenemos una razón distinta a la dada, pues 4 es a 11 no es igual a 4 es a 18. El siguiente impar a probar es 15^2, con el cual se obtiene la razón solicitada, pues

$$\frac{9^2 - 7^2}{15^2 - 9^2} = \frac{4(8}{18(8)} = \frac{4}{18} = \frac{2(2)}{9(2)} = \frac{2}{9},$$

de esta manera se concluye que 7^2, 9^2 y 15^2 son los cuadrados solicitados[9].

Si a la terna $(7, 9, 15)$ la multiplicamos por 2, 3 o cualquier otro número, sus respectivos cuadrados seguirán cumpliendo la razón dada[10].

Analicemos un caso más, cuando las razón dada es 11 a 43. De la misma forma que el caso anterior iniciamos con 23^2 pues éste es mayor que 21^2 en 11 veces 8, pero al buscar el tercer cuadrado se obtendrá que no es posible encontrar un cuadrado que sea mayor que 23^2 en 43 veces 8. Por lo tanto procederemos a buscar una razón equivalente hasta llegar a que 88 es a 344 como 11 es a 43, es decir, hemos octuplicado la razón original.

Al usar una variante de la Proposición 10[11], vemos que 88 es equivalente a colocar 10 números de manera simétrica a ambos lados de 8 y sumar todos los números involucrados en esta sucesión, es decir $3 + \cdots + 7 + 8 + 9 + \cdots + 13 = 88 = 8(11)$

Ahora sabemos por la Proposición 17 que 27^2 es mayor en 13 veces 8 que 25^2, y éste a su vez es 12 veces 8 mayor que 23^2, al continuar el proceso llegamos a que 27^2 es mayor en 88 veces 8 que el 5^2. Para encontrar el tercer cuadrado buscado comencemos sumando los número sucesivos a 13 hasta que la suma sea igual a 344. Esto ocurrirá cuando el último sumando sea el número 29, es decir, $14 + 15 + \cdots + 28 + 29 = 344$. De nuevo por la Proposición 17 sabemos que el 59^2 es mayor en 29 veces 8 que 57^2, y éste a su vez es 27 veces 8 mayor que 55^2. Al continuar el proceso llegamos a que 59^2 es mayor en 344 veces 8 que el 27^2, de esta manera concluimos que los cuadrados buscados son 5^2, 27^2 y 59^2, pues

$$\frac{7^2 - 5^2}{57^2 - 27^2} = \frac{88(8)}{344(8)} = \frac{11(8^2)}{43(8^2)} = \frac{11}{43}.$$

Al expresar lo solicitado por Fibonacci en un contexto más actual, lo que solicita es: dada la razón $\frac{a}{b}$, encontrar x, y y z tal que $x^2+ta = y^2$ y $y^2+tb = z^2$, por lo tanto $\frac{y^2-x^2}{z^2-y^2} = \frac{ta}{tb} = \frac{a}{b}$.

[9] En la condición a) del subcaso 1, se obtendrán de manera indirecta dos números que pertenecen a la sucesión $1 + \sum_{j=1}^{k} 8(i)$; lo interesante en este caso es encontrar de manera directa la razón dada entre los números de dicha sucesión o en su defecto encontrar una razón equivalente como se hizo en el caso analizado.

[10] Por ejemplo, obtuvimos 7, 9 y 15, para el último caso. Por lo tanto se puede verificar que 14, 18 y 30 cumplen con la condición solicitada, es decir, $\frac{18^2-14^2}{30^2-18^2} = \frac{16(8)}{72(8)} = \frac{16}{72} = \frac{2(8)}{9(8)} = \frac{2}{9}$. Lo mismo sucederá para el triple de los números $\frac{27^2-21^2}{45^2-27^2} = \frac{36(8)}{162(8)} = \frac{36}{162} = \frac{2(18)}{9(18)} = \frac{2}{9}$.

[11] Es una variante de la Proposición 10, pues en el proceso original no se suma el número central y en este caso particular sí.

Analicemos los casos que aborda Fibonacci.

La razón es la que existe entre dos números sucesivos

Sean a y $b = a+1$. Por la Proposición 17 tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{[(a+1)-1]^2-(2a-1)^2}{[2(a+2)-1]^2-[2(a+1)-1]^2} &= \frac{[1+8+\cdots+a8]-[1+8+\cdots+(a-1)8]}{[1+8+\cdots+(a+1)8]-[1+8+\cdots+a8]}\\ &= \frac{a8}{(a+1)8} = \frac{a}{(a+1)}.\end{aligned}$$

La razón es la que existe entre dos números impares sucesivos

Sean $a = 2s-1$ y $b = 2s+1$. Por la Proposición 17 tenemos que

$$[2p]^2 = (1)4 + (3)4 + \cdots + (2p-1)4,$$

entonces $(2s-1)4 = [2s]^2 - [2(s-1)]^2$ y $(2s+1)4 = [2s]^2 - [2(s+1)]^2$.

Por lo tanto, la razón será $\frac{[2s]^2-[2(s-1)]^2}{[2s]^2-[2(s+1)]^2} = \frac{(2s-1)4}{(2s+1)4} = \frac{2s-1}{2s+1} = \frac{a}{b}$.

La razón es la que existe entre dos números cuadrados

Sean $a = s^2$ y $b = t^2$. En esta parte de la proposición Fibonacci trabaja con la media proporcional continua entre dos números, a la cual llama c, y está formado por el producto de las raíces de a y b, es decir, $c = s \times t$. Dicha media cumple $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$; entonces tomemos los cuadrados de a, b y c. Estos serán cuadrados por construcción y cumplen con la razón dada, pues $\frac{c^2-a^2}{b^2-c^2} = \frac{s^2(t^2-s^2)}{t^2(t^2-s^2)} = \frac{a}{b}$.

La razón no es ninguna de las anteriores

Fibonacci desarrolla un proceso bastante eleborado para encontrar los cuadrados vinculados a la razón $\frac{2}{9}$, obteniendo una razón equivalente para resolver el problema. Dicha razón es $\frac{4}{18}$, pero es importante hacer notar que el proceso que llevo a cabo Fibonacci no da solución a razones como $\frac{5}{29}$ y sus respectivas equivalencias $\frac{10}{58}, \frac{15}{87}, \ldots$, por esta razón analizamos el caso general.

Dada la razón $\frac{a}{b}$ con a y b primos relativos y $a < b$, existen u, v y w enteros no negativos tales que

$$\frac{a}{b} = \frac{(u+1)+(u+2)+\cdots+(u+v)}{(u+v+1)+(u+v+2)+\cdots+(u+v+w).}$$

La ecuación tiene solución para u en términos de v y w, esto es,

$$u = \frac{avw + \frac{aw(w+1)}{2} - \frac{bv(v+1)}{2}}{bv - aw}.$$

Al elegir enteros positivos v y w tales que $bv - aw = 1$ y a través del Algoritmo de Euclides resulta que avw, $\frac{aw(w+1)}{2}$ y $\frac{bv(v+1)}{2}$ serán todos enteros; por lo tanto u también lo será y además es no negativo pues

$$\begin{aligned}2u = 2avw + aww + aw - bvv - bv &= v(aw-bv) + (aw-bv) + avw + aww\\ &= v - 1 + avw + aww\\ &= v(aw-1) + (aww-1).\end{aligned}$$

$v(aw-1)$ y $(aww-1)$ son ambos positivos salvo el caso $a=1$ y $w=1$, el cual se resuelve fácilmente pues u resulta ser igual a cero.

Dando como resultado los cuadrados

$$\begin{aligned} x^2 &= [1+8+2(8)+\cdots+u(8)] \\ y^2 &= [1+8+2(8)+\cdots+(u+v)(8)] \\ z^2 &= [1+8+2(8)+\cdots+(u+v+w)(8)]. \end{aligned}$$

Apliquemos el algoritmo anterior para encontrar los cuadrados correspondientes a la razón $\frac{a}{b}=\frac{5}{29}$. Primero encontremos las soluciones de $29v-5w=1$ mediante el algoritmo de Euclides. Estas son $v=4$ y $w=23$, por lo tanto $u=1550$ y se tendrá que $\frac{5}{29}=\frac{1551+\cdots+1554}{1555+\cdots+1577}$, y los respectivos cuadrados

$$\begin{aligned} x^2 &= [1+8+2(8)+\cdots+1550(8)] = 3101^2 \\ y^2 &= [1+8+2(8)+\cdots+1554(8)] = 3109^2 \\ z^2 &= [1+8+2(8)+\cdots+1577(8)] = 3155^2. \end{aligned}$$

Después de analizar los diferentes casos se puede concluir que esta proposición es equivalente a resolver una ecuación cuadrática indeterminada con tres incógnitas que hoy se escribiría como

$$b(y^2-x^2) = a(z^2-y^2)$$

siendo a y b números conocidos. La solución general puede darse en la forma

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{k}(2ah+abh^2-1) \\ y &= \frac{1}{k}(abh^2+1) \\ x &= \frac{1}{z}(2bh-abh^2+1). \end{aligned}$$

Al expresar los ejemplos analizados por Fibonacci mediante la solución general resulta lo siguiente:

- $a=10$, $b=11$, entonces $h=2$, $k=21$ y la terna de raíces es (23,21,19)
- $a=11$, $b=13$, entonces $h=1$, $k=12$ y la terna de raíces es (33,30,27)
- $a=2$, $b=9$, entonces $h=\frac{4}{3}$, $k=\frac{11}{3}$ y la terna de raíces es (15,9,7)
- $a=11$, $b=43$, entonces $h=\frac{1}{16}$, $k=\frac{27}{256}$ y la terna de raíces es (59,27,5)

Para el caso particular donde a y b son dos número cuadrados $a=p^2$, $b=q^2$ y entonces $h=\frac{1}{pq}$, $k=\frac{2}{pq}$ y la terna de raíces es (p^2,pq,q^2).

- $a=16$, $b=25$, entonces $h=\frac{1}{20}$, $k=\frac{1}{10}$ y la terna de raíces es (25,20,16).

Diofanto

Cabe en este contexto señalar que esta clase de problemas ya era abordada por Diofanto, en su *Aritmética* [8], en el libro II, problema 19. Ahí pide encontrar los tres cuadrados y se tiene una razón dada, es decir,

$$\frac{y^2 - x^2}{z^2 - y^2} = r$$

Diofanto propone una solución al suponer que $y = x + 1$ y $z = x + e$ con $e > 1$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
(x+1)^2 - x^2 &= r[(x+e)^2 - (x+1)^2] \\
2x + 1 &= r[2ex + e^2 - 2x - 1] \\
x &= \frac{e^2 - \frac{(r+1)}{r}}{2\left[\frac{(r+1)}{r} - e\right]}
\end{aligned}$$

Hay soluciones para x si e está entre $\sqrt{\frac{r+1}{r}}$ y $\frac{r+1}{r}$. Veamos algunos ejemplos:

- Si $r = 1$, tomemos $e = \frac{9}{5}$. Dicho número está entre $\sqrt{2}$ y 2, por lo tanto $\left(\frac{31}{10}\right)^2 + \frac{36}{5} = \left(\frac{41}{10}\right)^2$ y $\left(\frac{41}{10}\right)^2 + \frac{36}{5} = \left(\frac{49}{19}\right)^2$. Al eliminar las fracciones tenemos que
$$31^2 + 720 = 41^2 \quad \text{y} \quad 41^2 + 720 = 49^2.$$

- Si $r = \frac{1}{3}$, tomemos $e = \frac{5}{2}$. Dicho número está entre 2 y 4. Por lo tanto $\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$ y $\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 6 = \left(\frac{11}{2}\right)^2$; al eliminar las fracciones tenemos que
$$5^2 + 24 = 7^2 \quad \text{y} \quad 7^2 + 24 = 11^2.$$

Capítulo 19

Proposición XIX

Terna de cuadrados generada por suma de cuadrados.

En esta proposición se requiere encontrar tres cuadrados tales que al sumar el primero y el segundo dé como resultado un número cuadrado, y a la vez al sumar el tercer cuadrado se obtenga como resultado nuevamente un número cuadrado.

En términos actuales se refiere a lo siguiente:

Encontrar tres cuadrados x^2, y^2 y z^2 tales que $x^2 + y^2 = w^2$ y $w^2 + z^2 = v^2$. Esto es equivalente a pedir tres cuadrados cuya suma sea un cuadrado, es decir, $x^2 + y^2 + z^2 = v^2$.

Fibonacci parte de la terna pitagórica $(3, 4, 5)$, es decir, $3^2 + 4^2 = 5^2$. El tercer cuadrado -nos referimos a z^2- se obtendrá como resultado de sumar todos los números impares menores que 25, es decir, $1 + 3 + 5 + ... + 19 + 21 + 23$, y sabemos que dicha suma será un número cuadrado cuya raíz es $12 = \frac{(25-1)}{2}$.

Al sumar $5^2 + 12^2$ se obtiene 13^2, que es igual a la suma de los impares desde la unidad hasta 25. Por lo tanto se han encontrado los números solicitados, 3^2,4^2 y 12^2.

Este proceso se puede extender si se parte del último cuadrado obtenido (13^2) que es resultado de la suma de dos cuadrados $(5^2 + 12^2 = 13^2)$, y el tercer cuadrado será igual a la suma de los impares menores a 169 desde la unidad, es decir, $1 + 3 + 5 + ... + 163 + 165 + 167 = 7056 = 84^2 = \left(\frac{(13^2-1)}{2}\right)^2$. Por lo tanto $13^2 + 84^2 = 85^2 = \left(\frac{(13^2+1)}{2}\right)^2$.

A su vez, el 85^2 puede volver a ser tomado como el primer cuadrado mediante el mismo proceso, y se obtendrán los otros 2 cuadrados, los cuales son $3612^2 = \left(\frac{(7225-1)}{2}\right)^2$ y $36123^2 = \left(\frac{(7225+1)}{2}\right)^2$.

Cabe mencionar que el primer y tercer cuadrado siempre serán impares y el segundo cuadrado siempre será par.

Fibonacci da otras dos soluciones para este problema tomando como primer cuadrado $7225 = 85^2$,

- En la primera solución extra, el segundo cuadrado es aquel que tiene como raíz a 720, el cual surge de la suma de los impares menores que la quinta parte de 7225, habiéndole restado 4 unidades, es decir, $\frac{7225}{5} = 1445$. La sucesión que se obtendrá será $1 + 3 + 5 + \cdots + 1435 + 1437 + 1439 = \left(\frac{(1441-1)}{2}\right)^2 = 720^2$ y el tercer cuadrado es aquel que tiene como raíz 725, el cual surge de la suma de los impares menores que la quinta parte de 7225, habiéndole sumado 6 unidades, es decir, la sucesión que se obtendrá será $1+3+5+\cdots+1445+1447+1449 = \left(\frac{(1451-1)}{2}\right)^2 = 725^2$.

- En la segunda solución extra, el segundo cuadrado es aquel que tiene como raíz a 132, el cual surge de la suma de los impares menores que la veinticincoava parte de 7225 habiéndole restado 24 unidades, es decir, $\frac{7225}{25} = 289$. La sucesión que se obtendrá será $1+3+5+\cdots+259+261+263 = \left(\frac{(265-1)}{2}\right)^2 = 132^2$, y el tercer cuadrado es aquel que tiene como raíz a 221, el cual surge de la suma de los impares menores que la veinticincoava parte de 7225, habiéndole sumado 26 unidades, es decir, la sucesión que se obtendrá será $1+3+5+\cdots+309+311+313 = \left(\frac{(315-1)}{2}\right)^2 = 157^2$.

Existe una solución más que no es presentada por Fibonacci y que igualmente parte del cuadrado 7225.

- En la tercera solución extra, el segundo cuadrado es aquel que tiene como raíz a 204, el cual surge de la suma de los impares menores que la diecisieteava parte de 7225, habiéndole restado 16 unidades, es decir, $\frac{7225}{17} = 425$. La sucesión que se obtendrá será $1 + 3 + 5 + \cdots + 403 + 405 + 407 = \left(\frac{(409-1)}{2}\right)^2 = 204^2$ y el tercer cuadrado es aquel que tiene como raíz a 221, el cual surge de la suma de los impares menores que la diecisieteava parte de 7225, habiéndole sumado 18 unidades, es decir, la sucesión que se obtendrá será $1+3+5+\cdots+437+439+441 = \left(\frac{(443-1)}{2}\right)^2 = 221^2$.

Observemos que 5,17 y 25 son divisores de 7225, al igual que 85, 289, 425 pero los respectivos resultados de dividir 7225 entre ellos serán 85, 25 y 17, por lo tanto no se podrá llevar a cabo el proceso realizado hasta ahora sin obtener números negativos.

De esta manera podemos generar ternas pitagóricas como queramos, y no sólo eso, sino construir una suma de tantos cuadrados como se desee cuyo resultado sea un número cuadrado. Recordemos que cada terna pitagórica tiene asociado un triángulo rectángulo donde los 2 primeros cuadrados representan los catetos y el tercer cuadrado la hipotenusa, pero ésta a su vez puede ser vista ahora como un nuevo cateto el cual puede ser asociado con otro cateto y generar una nueva hipotenusa, y así sucesivamente con la nueva hipotenusa.

En el lenguaje actual, dado un número cuadrado impar a sabemos que la siguiente identidad genera una terna pitagórica

$$a + \left[\frac{a-1}{2}\right]^2 = \left[\frac{a+1}{2}\right]^2$$

y dado que $\left[\frac{a+1}{2}\right]^2$ nuevamente es un número impar cuadrado éste puede ser tomado como un nuevo a' y aplicar la identidad nuevamente

$$a' + \left[\frac{a'-1}{2}\right]^2 = \left[\frac{a'+1}{2}\right]^2.$$

Por lo tanto

$$\left[\frac{a+1}{2}\right]^2 + \left[\frac{\left[\frac{a+1}{2}\right]^2 - 1}{2}\right]^2 = \left[\frac{\left[\frac{a+1}{2}\right]^2 + 1}{2}\right]^2$$

y esto se puede hacer de manera recursiva infinitamente si renombramos $a'' = \left[\frac{\left[\frac{a+1}{2}\right]^2+1}{2}\right]^2$

$$a'' + \left[\frac{a''-1}{2}\right]^2 = \left[\frac{a''+1}{2}\right]^2.$$

Aplicando este proceso a los ejemplos numéricos tendremos $a = 5^2 = 4^2 + 3^2$

$$a = 5^2 \qquad \frac{5^2-1}{2} = 12 \qquad \frac{5^2+1}{2} = 13$$
$$3^2 + 4^2 = 5^2 \qquad 5^2 + 12^2 = 13^2.$$

Por lo tanto

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$

Ahora $a' = 13^2 = 12^2 + 5^2$

$$a' = 13^2 \qquad \frac{13^2-1}{2} = 84 \qquad \frac{13^2+1}{2} = 85$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2 \qquad 13^2 + 84^2 = 85^2$$

por lo tanto

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$$

Ahora $a'' = 85^2 = 84^2 + 13^2$

$$a'' = 85^2 \qquad \frac{85^2-1}{2} = 3612 \qquad \frac{85^2+1}{2} = 3613$$
$$13^2 + 84^2 = 85^2 \qquad 85^2 + 3612^2 = 3613^2$$

por lo tanto

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + 3612^2 = 3613^2$$

con lo cual hemos encontrado la suma de cinco cuadrados cuyo resultado es un cuadrado.

Esto, visto de manera geométrica, es equivalente a buscar un gnomon cuadrado (el cual será un número impar) que sea suma de dos cuadrados al cual se le sumará el cuadrado interno que queda limitado por él, obteniendo así un número impar cuadrado el cual puede ser ubicado como un nuevo gnomon y repetir el proceso cuantas veces se desee.

Para contextualizar y generalizar las dos soluciones planteadas por Fibonacci y la extra, tomemos un número cuadrado a, y sea b cualquier entero divisor o no de a, los cuales cumplen la siguiente identidad,

$$a+\left[\frac{\frac{a}{b}-b}{2}\right]^2=\left[\frac{\frac{a}{b}+b}{2}\right]^2=a+\left[\frac{a-b^2}{2b}\right]^2=\left[\frac{a+b^2}{2b}\right]^2.$$

Aplicando esta identidad a los ejemplos numéricos tendríamos

- Caso 1: planteado por Fibonacci: $a=85^2$ y $b=5$

$$85^2+\left[\frac{\frac{85^2}{5}-5}{2}\right]^2=\left[\frac{\frac{85^2}{5}+5}{2}\right]^2=85^2+\left[\frac{85^2-5^2}{2(5)}\right]^2=\left[\frac{85^2+5^2}{2(5)}\right]^2$$

$$85^2+720^2=725^2.$$

- Caso 2: planteado por Fibonacci: $a=85^2$ y $b=25$

$$85^2+\left[\frac{\frac{85^2}{25}-25}{2}\right]^2=\left[\frac{\frac{85^2}{25}+25}{2}\right]^2=85^2+\left[\frac{85^2-25^2}{2(25)}\right]^2=\left[\frac{85^2+25^2}{2(25)}\right]^2$$

$$85^2+132^2=157^2.$$

- Caso extra: $a=85^2$ y $b=17$

$$85^2+\left[\frac{\frac{85^2}{17}-17}{2}\right]^2=\left[\frac{\frac{85^2}{17}+17}{2}\right]^2=85^2+\left[\frac{85^2-17^2}{2(17)}\right]^2=\left[\frac{85^2+17^2}{2(17)}\right]^2$$

$$85^2+204^2=221^2.$$

En los 3 casos anteriores la b es un divisor de a, por lo cual las raíces y a la vez los cuadrados obtenidos serán enteros. Pero la identidad funciona aun cuando a y b no tienen divisores comunes. Por ejemplo, para $a=6^2$ y $b=5$

$$6^2+\left[\frac{\frac{6^2}{5}-5}{2}\right]^2=\left[\frac{\frac{6^2}{5}+5}{2}\right]^2=6^2+\left[\frac{6^2-5^2}{2(5)}\right]^2=\left[\frac{6^2+5^2}{2(5)}\right]^2$$

$$6^2+\left(\frac{11}{10}\right)^2=\left(\frac{61}{10}\right)^2.$$

A diferencia de los ejemplos previos, aquí los 2 cuadrados encontrados resultan ser números fraccionarios debido a la no divisibilidad de a y b.

Capítulo 20

Proposición XX

Tres números y sus cuadrados para generar tres nuevos cuadrados.

En esta proposición se requiere encontrar tres números cuya suma agregada al cuadrado del primer número sea igual a un cuadrado, que a su vez sumado con el cuadrado del segundo número sea nuevamente igual a un cuadrado, el cual al ser agregado al cuadrado del tercer número sea igual a un cuadrado[1].

Fibonacci comienza aplicando la proposición anterior, y recurre a $6^2+8^2=10^2$ y $10^2+24^2=26^2$, dos ternas pitagóricas con un cuadrado común[2]. La proposición nos requiere encontrar a x, y y z tales que

$$x+y+z+x^2=l^2$$

$$l^2+y^2=m^2$$

$$m^2+z^2=n^2.$$

Las últimas dos ecuaciones son dos ternas pitagóricas con un cuadrado común, por lo tanto podemos decir que $l^2=6^2$, $y^2=8^2$ y $z^2=24^2$, lo cual implica que $y=8$ y $z=24$. Al sustituir los valores en las ecuaciones previas obtenemos que

$$x+8+24+x^2=6^2$$

$$6^2+8^2=10^2$$

$$10^2+24^2=26^2,$$

por lo tanto el problema se reduce a encontrar soluciones de la ecuación $x^2+x+32=36$, es decir, $x^2+x=4$. Se completa el trinomio y obtenemos que $x^2+x+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$, por lo tanto $(x+1/2)^2=\frac{17}{4}$, por lo que $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$. Fibonacci generaliza este resultado considerando múltiplos de 6, 8, 10, 24 y 26.

[1] Es decir, solicita encontrar x, y y z tales que $x+y+z+x^2=l^2$, $l^2+y^2=m^2$ y $m^2+z^2=n^2$, lo que es equivalente a solicitar x, y y z tales que $x+y+z+x^2+y^2+z^2=n^2$.

[2] Ya que $6^2+8^2=10^2=4(3^2+4^2=5^2)$ y $10^2+24^2=26^2=4(5^2+12^2=13^2)$.

Propone encontrar soluciones para el siguiente sistema de ecuaciones con x y k racionales

$$x + 8k + 24k + x^2 = (6k)^2$$
$$(6k)^2 + (8k)^2 = (10k)^2$$
$$(10k)^2 + (24k)^2 = (26k)^2$$

dichas ecuaciones se reducen a resolver

$$x^2 + x + 32k = (6k)^2$$

que se reescribe como

$$x^2 + x + \left(\frac{16}{3}\right) R = R^2 \quad \text{o} \quad x^2 + x = R^2 - \left(\frac{16}{3}\right) R$$

donde $R = 6k$.

La técnica utilizada por Fibonacci para resolver la ecuación es nombrar $x = R - a$, para alguna a que elimine los términos cuadráticos y que aporte soluciones racionales para x y para R. Al sustituir la x propuesta en la ecuación se obtiene

$$(R - a)(R - a + 1) + \left(\frac{16}{3}\right) R = R^2,$$

por lo tanto $R = \frac{3a(a-1)}{(6a-19)}$, por lo cual $x = \frac{a(3a-16)}{(19-6a)}$.

Para $\frac{19}{6} < a < \frac{16}{3}$, ambos x y R serán positivos. Fibonacci propone evaluar $a = 4$, por lo tanto $R = \frac{35}{5}$, $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{48}{5}$ y $z = \frac{144}{5}$. Otros valores de a darán distintos valores para R, x, y y z. Fibonacci exhibe una solución entera para esta proposición. Primero propone que

$$x + 24 + 60 + x^2 = 7^2$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2$$
$$25^2 + 60^2 = 65^2.$$

Entonces el problema se reduce a encontrar soluciones para la ecuación $x^2 + x + 84 = 7^2$, la cual se puede reescribir como

$$x^2 + x + 12(7) = 7^2.$$

Se renombra $R = 7$, y la ecuación anterior queda $x^2 + x + 12(R) = R^2$. Repite el mismo proceso que en el caso anterior, sustituyendo $x = R - a$ y genera la ecuación

$$(R - a)(R - a + 1) + 12R = R^2.$$

Dicha ecuación tendrá una solución racional para $R = \frac{a(a-1)}{(2a-13)}$, y evaluando con $a = 7$, se obtienen los valores $R = 24$, $x = 35$, $y = 144$ y $z = 360$.

Fibonacci generaliza la proposición incrementando el número de incógnitas, es decir,

$$x + y + z + +w + x^2 = l^2$$
$$l^2 + y^2 = m^2$$
$$m^2 + z^2 = n^2$$
$$n^2 + w^2 = o^2.$$

Por lo tanto, Fibonacci comienza la solución tomando tres ternas pitagóricas con dos cuadrados comunes, en este caso (25^2 y 65^2)

$$7^2 + 24^2 = 25^2$$
$$25^2 + 60^2 = 65^2$$
$$65^2 + 420^2 = 425^2,$$

y al realizar el mismo proceso de sustituir los valores de las ternas obtiene

$$x + 24 + 60 + 420 + x^2 = 7^2$$
$$x^2 + x + 504 = 7^2$$
$$x^2 + x + 72(7) = 7^2.$$

Antes de continuar con el proceso de análisis generaliza este caso tomando múltiplos de las ternas anteriores

$$(7k)^2 + (24k)^2 = (25k)^2$$
$$(25k)^2 + (60k)^2 = (65k)^2$$
$$(65k)^2 + (420k)^2 = (425k)^2,$$

y al sustituir se obtiene

$$x + (24k) + (60k) + (420k) + x^2 = (7k)^2$$
$$x^2 + x + 504k = (7k)^2$$
$$x^2 + x + 72(7k) = (7k)^2.$$

Ahora, renombrando $R = 7k$ la ecuación anterior queda descrita como $x^2 + x + 72(R) = R^2$. Repite el mismo proceso que en el caso anterior al sustituir $x = R - a$, con la a conveniente y genera la ecuación

$$(R - a)(R - a + 1) + 72R = R^2,$$

la cual tiene como solución $R = \frac{a(a-1)}{2a-73}$ y, por lo tanto, $x = \frac{a(72-a)}{2a-73}$. Para obtener valores positivos de x y R toma $\frac{73}{2} < a < 72$. El primer entero dentro de este intervalo es 37. Para $a = 37$, $R = 1332$, $x = 1295$, $k = \frac{R}{7} = \frac{1332}{7}$, $y = \frac{31968}{7}$,

$z = \frac{79920}{7}$ y $w = 79920$. Por lo tanto estos números resuelven la proposición con cuatro incógnitas

$$1295 + \frac{31968}{7} + \frac{79920}{7} + 79920 + 1295^2 = 1332^2$$

$$1332^2 + \left(\frac{31968}{7}\right)^2 = \left(\frac{33300}{7}\right)^2$$

$$\left(\frac{33300}{7}\right)^2 + \left(\frac{79920}{7}\right)^2 = \left(\frac{85580}{7}\right)^2$$

$$\left(\frac{86580}{7}\right)^2 + 79920^2 = \left(\frac{566100}{7}\right)^2.$$

No podemos terminar sin mencionar que existen antecedentes de este problema en la obra de Diofanto. En el problema 29 del libro IV de su *Aritmética* nos plantea lo siguiente:

Dado a, encontrar w, x, y, z tales que $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + x + y + z + w = a.$

Este enunciado no requiere mayor explicación pues se puede ver inmediatamente su relación con el problema 20. Lo que haremos en lo que resta de esta sección es presentar las analogías entre Fibonacci y Diofanto respecto al problema final del *Liber Quadratorum*.

Regresemos al problema citado de Diofanto. La solución que proporciona en la *Aritmética* es para un caso particular, pero nos traza caminos para hacer una generalización que se acerque al problema de Fibonacci. Diofanto considera que $a = 12$ sea el número dado, después le suma la unidad de esta forma: $12 + \frac{4}{4} = 13$. Ahora, al 13 lo escribe como suma de los cuadrados, el 4 y 9, y a la vez cada uno de estos cuadrados se puede descomponer en suma de otros dos, entonces $4 = \frac{64}{25} + \frac{36}{25}$ y $9 = \frac{144}{25} + \frac{81}{25}$; de manera que 13 es la suma de los cuadrados de $\frac{8}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{12}{5}$ y $\frac{9}{5}$. Enseguida podemos ver a cada uno de los números anteriores de esta manera:

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

Entonces, a la primera fracción la podemos reescribir como $(\frac{8}{5} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{11}{10} + \frac{1}{2}$, por lo tanto el cuadrado de $\frac{8}{5}$ es $\left(\frac{11}{10} + \frac{1}{2}\right)^2$, y lo mismo hacemos con el resto de los números $\frac{6}{5}$, $\frac{12}{5}$ y $\frac{9}{5}$ para llegar a que

$$13 = \left(\frac{11}{10} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{19}{10} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{10} + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Cuando se desarrolla cada binomio en la forma $l^2 + l + \frac{1}{4} = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2$ se llegará a

$$13 = \frac{121}{100} + \frac{49}{100} + \frac{361}{100} + \frac{169}{100} + \frac{11}{10} + \frac{7}{10} + \frac{19}{10} + \frac{13}{10}$$

entonces

$$12+\frac{4}{4}=\frac{121}{100}+\frac{49}{100}+\frac{361}{100}+\frac{169}{100}+\frac{11}{10}+\frac{7}{10}+\frac{19}{10}+\frac{13}{10}+\frac{4}{4}.$$

Recordemos que nuestro número dado es el 12, por lo tanto

$$12=\left(\frac{11}{10}\right)^2+\left(\frac{7}{10}\right)^2+\left(\frac{19}{10}\right)^2+\left(\frac{13}{10}\right)^2+\frac{11}{10}+\frac{7}{10}+\frac{19}{10}+\frac{13}{10}.$$

Finalmente llegamos a que 12 es suma de cuatro cuadrados y de sus respectivas raíces.

Para el caso análogo con Fibonacci requerimos que a sea un cuadrado. Recordemos que él requiere encontrar tres cuadrados que al ser sumados junto con sus raíces se genere otro cuadrado. En esta analogía con Diofanto, lo que se hace es dar el cuadrado final r^2 y se encontrarán cuatro cuadrados que al ser sumados junto con las raíces den lugar al cuadrado r^2. En el contexto del *Liber Quadratorum* el problema es éste:

Dado r^2, encontrar w, x, y, z tales que $x^2+y^2+z^2+w^2+x+y+z+w=r^2$.

Queremos aclarar que presentamos una demostración general, no un caso particular, y que nos saldremos parcialmente del marco conceptual exclusivo tanto de Diofanto como de Fibonacci, ya que usaremos un resultado propuesto por Fermat y demostrado por Euler. El resultado al que recurrimos nos indica que todo entero puede ser representado como una suma de cuatro cuadrados. Usaremos este resultado porque facilita llegar a la expresión diofantina, de partir a dos enteros cuadrados como suma de dos cuadrados cada uno. Nosotros optamos por ir directo por la suma de los cuatro cuadrados, como se verá en la demostración que se presenta a continuación.

Demostración:

Sea $a=r^2$ y $b=r^2+1$, que a la vez lo reescribimos como $b=r^2+\frac{4}{4}$. Por otro lado, como sabemos que todo entero se puede escribir como suma de cuatro cuadrados, entonces

$$b=u^2+v^2+w^2+z^2.$$

Al escribir a cada una de las raíces como $l-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, entonces b se reescribe como

$$b=\left(u-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(w-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2,$$

entonces

$$b=\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(u-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\right]+\left[\left(v-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\right]$$
$$+\left[\left(w-\frac{1}{2}\right)^2+\left(w-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\right]+\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\right].$$

Como $b = r^2 + \frac{4}{4}$, por lo tanto

$$r^2 = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(w - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2$$
$$+ \left(u - \frac{1}{2}\right) + \left(v - \frac{1}{2}\right) + \left(w - \frac{1}{2}\right) + \left(z - \frac{1}{2}\right),$$

y con esta igualdad obtenemos los cuatro cuadrados que sumados con sus raíces dan como resultado un cuadrado.

Cabe señalar que este proceso no se puede usar directamente para el caso de tres cuadrados, que es a lo que en particular se refiere el problema 20 de Fibonacci, y se debe a que el desarrollo de los términos $l^2 + l + \frac{1}{4} = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2$ para el caso de los cuatro cuadrados de Diofanto, no se puede usar para el caso de los tres cuadrados de Fibonacci. Esto se debe a que la suma de cuatro veces $\frac{1}{4}$ que se toman de los respectivos desarrollos de $\left(l + \frac{1}{2}\right)^2$ no se puede aplicar para tres cuadrados, como sería lo deseado.

Pero aún no terminamos con Diofanto. Se puede encontrar el problema 16 del mismo libro IV, que sí involucra la suma de tres cuadrados y sus raíces. El problema enuncia lo siguiente:

Encontrar x, y, z tales que $x+y+z = a^2$, $x^2+y = b^2$, $y^2+z = c^2$, $z^2+x = d^2$.

Es claro que el problema no es el mismo que el 20 de Fibonacci, pero lo enunciamos porque sin duda entra en el entorno de lo que posiblemente conoció Fibonacci cuando redactó el *Liber Quadratorum*. Este problema da lugar a que se encuentren x, y, z tales que

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = b^2 + c^2 + d^2.$$

Aquí Diofanto sí involucra tres cuadrados y sus raíces correspondientes. La diferencia está en que la suma de todo es igual a tres cuadrados y no uno como se pide en el problema de Fibonacci.

Esta clase de problemas que exhiben fuertes vinculos entre lo hecho por Diofanto y Fibonacci, resurgieron en el siglo XVII con Fermat cuando leyó y dejó sus anotaciones en los márgenes de la *Aritmética* de Diofanto.

En el problema 29 del Libro IV (arriba citado) Fermat dejó anotado en el margen lo siguiente:

Todo número es: o bien triangular, o bien la suma de 2 o 3 números triangulares. Cuadrado, o suma de 2, 3 o 4 cuadrados. Pentagonal, o suma de 2, 3, 4 o 5 pentagonales. Y así sucesivamente e indefinidamente, ya sean hexagonales, heptagonales o poligonales cualesquiera. Pudiéndose enunciar según el número de ángulos esta general y memorable proposición.

Esta reflexión de Fermat marcó el inicio de una nueva vertiente de trabajo en la teoría aditiva de los números.

Algunos de los resultados obtenidos a partir de la propuesta de Fermat:

1. La primera demostración del teorema para el caso de los cuadrados, la cual incluye una parte por descenso infinito, la dio Lagrange en 1770, y en ella era esencial la identidad de Euler que trata sobre productos de sumas de cuatro cuadrados. Esta demostración se puede consultar en *Démostration d'un Théorème d'Arithmetique*[3].

2. Cauchy demostró el teorema general de Fermat. La demostración se puede consultar en el libro Obras de Agustín Cauchy, ésta es larga ya que consta de nueve Teoremas, diez corolarios y tres problemas antes de la demostración del Teorema General. Una versión corta de su demostración se puede consultar en la obra de Nathanson[4].

3. Gauss realizó una demostración para los números triangulares en su libro de *Disquisitiones Arithmeticae*, en el problema 293, donde aborda el problema de que todo número entero puede descomponerse en tres números triangulares o cuatro cuadrados[5].

El problema 20 que es el final del *Liber Quadratorum* parece a la vez el inicio de lo que serían grandes retos de la teoría de los números. En el siglo XVII Fermat será como un puente entre Diofanto y Fibonacci para traer al quehacer matemático los problemas de cuadrados. Es casi imposible pensar que Fibonacci fue ajeno a los problemas de Diofanto. Ambos tuvieron la visión de trabajar con problemas que dieron lugar a crear la base sobre la que grandes personajes como Fermat, Lagrange, Legandre, Gauss y Nathanson, entre otros, desarrollaron paradigmas sobresalientes de la Teoría aditiva de los números. La buena noticia para los interesados en esta disciplina es que aún existen diversas vertientes de trabajo en las que se pueden encontrar resultados importantes para seguir fortaleciendo la teoría que inició con Diofanto y Fibonacci.

[3] Ver [Lagrange [12], 1770].
[4] Ver [Nathanson [16], 1996].
[5] Ver [Gauss [17], 1966].

Apéndice A

Proposición XI, versión Fibonacci

Dados AB y BG dos segmentos de recta, sin pérdida de generalidad se toma $BG > AB$. Defininamos $AG = AB + BG$ y $DG = BG - AB$ (Fig. A.1)

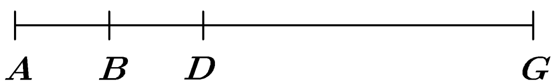


Figura A.1

Analizaremos 2 casos posibles:

1 Si $\frac{BG}{AB} < \frac{AG}{DG}$ entonces será posible encontrar un número congruente en una cantidad de números impares que tenga relación con la cantidad de números impares siguientes, en particular la relación entre los números AB y BG.

2 Si $\frac{BG}{AB} > \frac{AG}{DG}$ entonces será posible encontrar 2 cantidades de números impares consecutivos en la relación que existe entre AG y DG. De la suma de cada una de estas cantidades resulta un número congruente.

Analicemos el Caso 1. Sea $\frac{BG}{AB} < \frac{AG}{DG}$

Hay que encontrar 2 cantidades de números impares en la relación $\frac{BG}{AB}$, tales que la suma de las unidades de cada cantidad sea la misma, es decir, que sean iguales y correspondan a un mismo número congruente, generado de dos maneras distintas.

Tenemos 2 opciones para AG:

PAR Sea AD sobre AG. Como $AD = 2AB$ es par, entonces DG también lo será, pues es la diferencia entre dos números pares.

Sean $EZ = DG(BG)$ y $ZI = DG(AB)$, los cuales son pares por construcción y cumplen que $\frac{BG}{AB} = \frac{EZ}{ZI}$. Ahora sean $MK = AG(BG)$ y $KL = AG(AB)$, MK y KL son pares por construcción y cumplen $\frac{BG}{AB} = \frac{MK}{KL}$. De las igualdades anteriores se obtiene que $\frac{EZ}{ZI} = \frac{MK}{KL}$.

Sean $OP = EZ(KL)$ y $PQ = ZI(MK)$. Se tendrá que $OP = PQ$ y se propone que éstas serán las cantidades buscadas. Resta demostrar las siguientes condiciones:

- Cada una de ellas corresponde al mismo número congruente.
- Estas cantidades conservan la razón $\frac{BG}{AB}$.
- Son cantidades de impares consecutivos, es decir, a la primera cantidad de impares le sigue la segunda[1].

La primera condición no es demostrada por Fibonacci, pero se puede verificar de una manera muy rápida.

$$\begin{aligned} OP = EZ(KL) &= (DG)(BG)(AG)(AB) \\ &= (AB)(BG)(AG)(DG) \\ &= (AB)(BG)((BG)^2 - (AB)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PQ = ZI(MK) &= (DG)(AB)(AG)(BG) \\ &= (AB)(BG)(AG)(DG) \\ &= (AB)(BG)((BG)^2 - (AB)^2) \end{aligned}$$

dichos números tendrán la forma con la cual Fibonacci define a los números congruentes.

Continuando con la demostación de Fibonacci, procedemos a probar la segunda condición. Sabemos por el Capítulo anterior que si $OP = EZ(KL)$, entonces hay tantos impares sucesivos a ambos lados de KL como unidades en EZ. De forma análoga si $PQ = ZI(MK)$, entonces hay tantos impares sucesivos a ambos lados de MK como unidades en ZI. Por lo cual se cumple que

$$\frac{\#\text{ de impares que forman OP}}{\#\text{ de impares que forman PQ}} = \frac{EZ}{ZI} = \frac{BG}{AB}.$$

Para la tercer condición definimos $KM = AG(BG)$ y $BG = BD + DG$. Al reescribir $KM = AG(BD + DG)$, obtenemos $KL = AG(BD) = AG(AB)$ y $LM = AG(DG)$; pero $AG = AB + BG$, entonces $LM = (AB + BG)DG$ de donde se obtiene que $LM = AB(DG) + BG(DG) = EZ + ZI = EI$. Ahorra, si tomamos $LN = EZ$ y $NM = ZI$, $LM = LN + NM$ (Fig. A.2)

[1]Fibonacci denomina esta condición como que las cantidades son continuas, sin que esto tenga relación con el concepto de continuidad en Análisis Matemático.

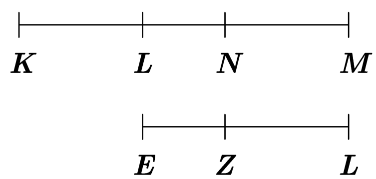


Figura A.2

Otra cosa que hay que demostrar es que $KL > EZ$, es decir, que $AG(AB) > DG(BG)$, lo cual se usa como hipótesis en el caso que estamos analizando $\frac{BG}{AB} < \frac{AG}{DG}$. Por lo tanto, $AG(AB) > DG(BG)$, que es lo que se quería demostrar. Fibonacci utilizá un número alterno, el cual es menor que AG y que está en la misma relación con DG como BG con AB. Dicho número es llamado AF.

Dado $AF < AG$, tal que $\frac{AF}{DG} = \frac{BG}{AB}$, entonces $AB(AF) = BG(DG)$, pero $KL = AG(AB) > AF(AB) = BG(DG) = EZ$, por lo tanto $KL > EZ$, lo que se quería demostrar.

Tomemos $HL = LN = EZ$ sobre KL. Por lo tanto, $HN = 2EZ$. Enseguida agreguemos al número KM el número $MC = MN = ZI$. Por lo tanto $NC = 2ZI$ (Fig. A.3). Como KL es par si le restamos el número par LN obtendremos el número par KM, igualmente par. Dado que KM es par y le estamos agregando el número par MC obtendremos el número par KC.

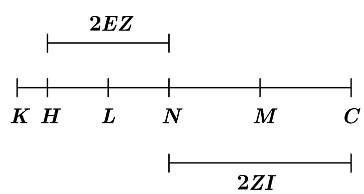


Figura A.3

Por otro lado, como KH es par su mitad contendrá el mismo número de unidades que el número de impares entre la unidad y KH, inclusive la suma de dichos impares formará el cuadrado de la mitad de KH. Llamemos RO a dicho cuadrado. De la misma forma en HN que es par, existirán la misma cantidad de unidades que números entre KH y KN y en su mitad, es decir, $HL = LN = EZ$, se tendrá la misma cantidad de unidades que números impares entre KH y KN. Con lo cual queda demostrado que el número $OP = EZ(KL)$ resulta de estas cantidades de números, pues dichos números están situados a ambos lados de KL. En consecuencia el número $RP = RO+OP$ tendrá el mismo número de unidades que impares entre la unidad y KN, cuya suma es un número cuadrado del cual la raíz es la mitad de KN.

$$RP = \underbrace{RO}_{\#\text{impares(1-HK)}} + \underbrace{OP}_{\#\text{impares(KH-KN)}} = \underbrace{(KN/2)^2}_{\#\text{impares(1-KN)}}$$

Ahora en NC hay tantas unidades con números entre KN y KC y en su mitad, es decir, $NM = MC = ZI$, tendrán la misma cantidad de unidades que números impares entre KN y KC, que en particular son sucesivos de los impares entre KH y KN, los cuales forman OP.

Por lo tanto el número $PQ = ZI(KM)$ será igual a la cantidad de impares entre KN y KC, pues dichos números impares están situados a ambos lados de KM. En consecuencia el número $RQ = RP + PQ$ tendrá el mismo número de unidades que impares entre la unidad y KC, cuya suma es un número cuadrado del cual la raíz es la mitad de KC.

$$RQ = \underbrace{RP}_{\#\text{impares(1-HN)}} + \underbrace{PQ}_{\#\text{impares(KN-KC)}} = \underbrace{(KC/2)^2}_{\#\text{impares(1-KC)}}$$

Por último falta demostrar que OP y PQ son números congruentes (en realidad estamos hablando del mismo número). Esto queda demostrado con la construcción pues PQ es un número tal que si se le suma un cuadrado, en este caso RP, se obtendrá el cuadrado RQ. Y si a este cuadrado se le resta el número OP, se obtendrá el cuadrado RO, quedando así demostrado que OP y PQ son números congruentes y al mismo tiempo se obtiene la solución de la proposición.

Continuemos con un ejemplo para que quede más claro el procedimiento.

Dados $AB = 3$ y $BG = 5$, se calculan: $AG = 8$; $EZ = 10 = LN$; $KM = 40$; $LM = 16$; $KC = 46$; $OP = 240$; $DG = 2$; $ZI = 6 = MN$; $KL = 24$; $KN = 34$; $KH = 14$ y $PQ = 240$

Ahora bien, RO es el cuadrado que proviene de los impares que van desde la unidad hasta KH, es decir, los impares del 1 al 14; dicho de otro modo, 1,3,5,7,9,11,13, y cuya suma es 49, lo que resulta ser el cuadrado de 7 (ya que hay 7 números impares situados a ambos lados de 7). Por otra parte, ya se demostró que OP proviene de la cantidad de impares entre KH y KN, es decir, los impares entre 14 y 34. Dicho de otra manera, estos son 15,17,19,21,23,25,27,29,31,33, cuya suma es 240. Por lo tanto el número total RP proviene de los impares situados entre 1 y 34. Estos números son 17, y su suma es igual al producto de 17 por la mitad de 34, es decir, 17 por 17. Por lo tanto RP es igual a RO más OP, es decir, 49 más 240 igual a 289 resulta ser el cuadrado de 17 (ya que hay 17 números impares situados a ambos lados de 17).

Así mismo, el número PQ proviene de los números impares situados entre los números KN y KC, es decir, los impares entre 34 y 46, dicho de otro modo, 35,37,39,41,43,45, y cuya suma nuevamente es 240. Por consiguiente el número total RQ, que es igual a la suma de RP y PQ, provendrá de la suma de los impares entre 1 y 46. Esta cantidad de números es 23 y su suma es igual al producto de 23 por la mitad de KC, es decir, 23 por 23. Por lo tanto RQ es, por una parte, 289 más 240 igual a 529 y por otra parte también el cuadrado generado por 23, es decir, el cuadrado que tiene como raíz a 23 (ya que hay 23 números impares situados a ambos lados de 23).

IMPAR Debemos encontrar de nuevo dos cantidades de números impares sucesivos que produzcan dos números congruentes. Sean $T = 2BG$, y $S = 2AB$, y se tendrá que $\frac{T}{S} = \frac{BG}{AB}$. Sean $EZ = T(DG)$ y $ZI = S(DG)$, los cuales siguen conservando la razón, es decir, $\frac{EZ}{ZI} = \frac{T}{S} = \frac{BG}{AB}$. Por otro lado sean $KM = T(AG)$ y $KL = S(AG)$, los cuales siguen conservando la razón, es decir, $\frac{KM}{KL} = \frac{EZ}{ZI} = \frac{T}{S} = \frac{BG}{AB}$. Dado que T y S son pares, se asegura que KM y KL son pares también, debido a que son producto de un número par por un número impar. Como en el caso anterior se pueden construir los números KH, HL, LN, NM y MC para generar los números OP, PQ, RO, RP y RQ. Siendo OP y PQ los números congruentes y RO, RP y RQ, los respectivos cuadrados.

Demos un ejemplo numérico. Dados $AB = 1$ y $BG = 2$, se calculan: $AG = 3$; $T = 4$; $EZ = 4 = LN$; $KM = 12HN = 8$; $KN = 10$; $OP = 24$; $DG = 1$; $S = 2$; $ZI = 2 = MN$; $KL = 6$; $KC = 14$; $KH = 2$ y $PQ = 24$

Ahora bien, RO es el cuadrado que proviene de los impares que van desde la unidad hasta KH, es decir, los impares del 1 al 2; dicho de otro modo, 1, y cuya suma es 1, lo que resulta ser el cuadrado de 1. Por otra parte, ya se demostró que OP proviene de la cantidad de impares entre KH y KN, es decir, los impares entre 2 y 10; dicho de otra manera, 3,5,7,9, cuya suma es 24. Por lo tanto, el número total RP proviene de los impares situados entre 1 y 10. Estos números son 5 y su suma es igual al producto de 5 por la mitad de 10, es decir, 5 por 5. Por lo tanto RP es igual a RO más OP, es decir, 1 más 24 igual a 25, resulta ser el cuadrado de 5 (ya que hay 5 números impares situados a ambos lados de 5).

Así mismo, el número PQ proviene de los números impares situados entre los números KN y KC, es decir, los impares entre 10 y 14, o dicho de otro modo, 11 y 13, y cuya suma nuevamente es 24. Por consiguiente el número total RQ, que es igual a la suma de RP y PQ, provendrá de la suma de los impares entre 1 y 14. Esta cantidad de números es 7 y su suma es igual al producto de 7 por la mitad de KC, es decir, 7 por 7. Por lo tanto RQ es por una parte, 25 más 24 igual a 49, y por otra parte el cuadrado generado por 7, es decir, el cuadrado que tiene como raíz a 7 (ya que hay 7 números impares situados a ambos lados de 7)[2].

[2]Cabe mencionar que en este caso se utilizaron los 2 enteros positivos más pequeños, es decir, 1 y 2, con los cuales se forman el primer número impar positivo, y de los cuales se obtendrá el número congruente mas pequeño, es decir, 24, y que además cae entre 3 cuadrados de números enteros. Se pueden obtener números congruentes más pequeños usando fracciones en lugar de números enteros.

Analicemos el Caso 2. $\frac{BG}{AB} > \frac{AG}{DG}$

En este caso será posible encontrar 2 cantidades de números impares consecutivos en la razón que existe entre AG y DG y que formen un número congruente.

De nueva cuenta tenemos 2 opciones para AG: no los demuestra y solo presenta un ejemplo para cada caso.

PAR Dados AB, BG, AG y DG, como hasta ahora, y definamos $EZ = AB(AG)$, $ZI = AB(DG)$, $KM = BG(AG)$ y $KL = BG(DG)$. Se tendrá que estos números conservan la razón, es decir, $\frac{KM}{KL} = \frac{EZ}{ZI} = \frac{AG}{DG}$. Proponemos OP y PQ como hasta ahora; se obtendrán los cuadrados RO, RP y RQ.

EJEMPLO: Dados $AB = 1$ y $BG = 3$, se calculan $AG = 4$; $EZ = 4 = LN$; $KM = 12$; $HN = 8$; $KN = 10$; $OP = 24$; $DG = 2$, $ZI = 2 = MN$; $KL = 6$; $KC = 14$; $KH = 2$ y $PQ = 24$.

Ahora bien, RO es el cuadrado que proviene de los impares que van desde la unidad hasta KH, es decir, los impares del 1 al 2; dicho de otro modo, 1, y cuya suma es 1, lo que resulta ser el cuadrado de 1. Por otra parte, ya se demostró que OP proviene de la cantidad de impares entre KH y KN, es decir, los impares entre 2 y 10; dicho de otra manera, 3,5,7,9, cuya suma es 24. Por lo tanto, el número total RP proviene de los impares situados entre 1 y 10. Estos números son 5 y su suma es igual al producto de 5 por la mitad de 10, es decir, 5 por 5. Por lo tanto RP es igual a RO más OP, es decir, 1 más 24 igual a 25, resulta ser el cuadrado de 5 (ya que hay 5 números impares situados a ambos lados de 5).

Así mismo, el número PQ, proviene de los números impares situados entre los números KN y KC, es decir, los impares entre 10 y 14, dicho de otro modo, 11,13, y cuya suma nuevamente es 24. Por consiguiente el número total RQ, que es igual a la suma de RP y PQ, provendrá de la suma de los impares entre 1 y 14. Esta cantidad de números es 7 y su suma es igual al producto de 7 por la mitad de KC, es decir, 7 por 7. Por lo tanto RQ es por una parte 25 más 24 igual a 49 y por otra parte el cuadrado generado por 7, es decir, el cuadrado que tiene como raíz a 7 (ya que hay 7 números impares situados a ambos lados de 7)[3].

IMPAR En este caso nuevamente tenemos que encontrar 2 cantidades de números impares consecutivos en la razón que existe entre AG y DG que formen un número congruente.

Sean $T = 2BG$ y $S = 2AB$ y $EZ = S(AG)$ y $ZI = S(DG)$, por otro lado sean $KM = T(AG)$ y $KL = T(DG)$, los cuales están a razón $\frac{KM}{KL} = \frac{EZ}{ZI} = \frac{AG}{DG}$. Como en el caso anterior se pueden construir los números KH, HL, LN, NM y MC para generar los números OP, PQ, RO, RP y RQ. Siendo OP y PQ los números congruentes y RO, RP y RQ los respectivos cuadrados.

[3]De nueva cuenta, obtenemos como número congruente al 24 que como ya mencionamos es el menor entero múltiplo de 24, y que proviene de los dos números más pequeños que forman un número par, es decir, 1 y 3.

Demos un ejemplo numérico. Dados $AB = 2$ y $BG = 5$, se calculan: $AG = 7$; $T = 10$; $EZ = 28 = LN$; $KM = 70$; $HN = 56$; $KN = 58$; $OP = 840$; $DG = 3$; $S = 4$; $ZI = 12 = MN$; $KL = 30$; $KC = 82$; $KH = 2$ y $PQ = 840$.

Ahora bien, RO es el cuadrado que proviene de los impares que van desde la unidad hasta KH, es decir, los impares del 2 al 2; dicho de otro modo, 1, y cuya suma es 1, lo que resulta ser el cuadrado de 1. Por otra parte, ya se demostró que OP proviene de la cantidad de impares entre KH y KN, es decir, los impares entre 1 y 58; cuya suma es 840. Por lo tanto, el número total RP proviene de los impares situados entre 1 y 58. Estos números son 29 y su suma es igual al producto de 29 por la mitad de 58, es decir, 29 por 29. Por lo tanto RP es igual a RO más OP, es decir, 1 más 840 igual a 841, que resulta ser el cuadrado de 29 (ya que hay 29 números impares situados a ambos lados de 29).

Así mismo, el número PQ proviene de los números impares situados entre los números KN y KC, es decir, los impares entre 58 y 82; y cuya suma nuevamente es 840. Por consiguiente el número total RQ es igual a la suma de RP y PQ, por lo tanto provendrá de la suma de los impares entre 1 y 82. Esta cantidad de números es 41 y su suma es igual al producto de 41 por la mitad de KC, es decir, 41 por 41. Por lo tanto RQ es por una parte, 841 más 840 igual a 1681, y por otra parte el cuadrado generado por 41, es decir, el cuadrado que tiene como raíz a 41 (ya que hay 41 números impares situados a ambos lados de 41).

Como se puede observar 840=24(35), es decir, es un múltiplo de 24, pues como se demostró anteriormente cualquier número entero congruente es múltiplo de 24.

Dado que se obtendrá un número congruente al multiplicar el número 24 por un número cuadrado, observemos que al multiplicar 24 por el cuadrado más pequeño (el cual será el primer cuadrado), es decir, 1, se obtiene el mismo 24, mientras que el segundo cuadrado de obtiene de la suma del 24 con el primer cuadrado, es decir, 25, (hagamos notar que 25 es el primer número congruo) cuya raíz es 5; el tercer cuadrado se obtiene al sumar el 24 y el segundo cuadrado, es decir, 24+25=49, cuya raíz es 7. Por otra parte, la primera cantidad de números impares que forma un número congruente será el doble de la cantidad que forma al mismo número. De la misma manera se podrá generar un número congruente si se multiplica 24 por la suma de cuadrados a partir de la unidad, tomando pares e impares, o solamente pares, o solamente impares, incrementados en ternos, o por cuaternos. En nuestro último ejemplo la suma de los primeros 3 cuadrados impares, es decir, 1,9,25, será igual a 35, y 35(24)=840, número congruente que proviene de los números 7 y 5. La razón entre la cantidad de los números impares que forman el segundo número congruente y el primero será igual a la razón que guardan las raíces del tercer y segundo cuadrado, es decir, 7 y 5.

Apéndice B

Solución a ternas pitagóricas

Se demostrará que dada una terna pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$ con $(x, y) = 1$ los números x,y y z pueden ser expresados en términos de otros 2 números y esto de dos maneras distintas.

Antes de comenzar aclaremos que x o y tiene que ser impar, pero no ambos pues de ser así $x = 2\lambda + 1$ y $y = 2\gamma + 1$, entonces $x^2 \equiv 1(mod4)$ y $y^2 \equiv 1(mod4)$, por propiedades de congruencia $x^2 + y^2 \equiv 2(mod4)!$, ya que no puede existir un número cuadrado de esta forma, pues todo número puede ser representado por $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ y $4k + 3$, y sus respectivos cuadrados serán de la forma $4k'$, $4k' + 1$, $4k"$ y $4k" + 1$, pero nunca $4k + 2$.

- Para iniciar con la primer manera, supongamos sin pérdida de generalidad que x es impar, entonces $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$.

Ahora, sea $d_1 = ((z + y), (z - y))$, el máximo común divisor de $(z + y)$ y $(z-y)$, entonces $(z+y) = ad_1$ y $(z-y) = bd_1$ por lo tanto, $x^2 = (z+y)(z-y) = (ad_1)(bd_1) = ab(d_1)^2$, y como $(a, b) = 1$, entonces $a = u^2$ y $b = v^2$, por lo cual $x^2 = u^2v^2(d_1)^2$ y por ende $x = uvd_1$ con u y v impares, ya que x al ser impar no puede tener factores pares.

Al sumar $(z + y) = ad_1$ y $(z - y) = bd_1$, obtenemos $2z = (a + b)\ d_1 = (u^2 + v^2)d_1$, entonces, $z = \frac{(u^2+v^2)d_1)}{2}$, y al restar obtenemos $2y = (a - b)d_1 = (u^2 - v^2)d_1$, entonces $y = \frac{(u^2-v^2)d_1}{2}$.

Pero $(x, y) = 1$ y x es impar por lo tanto $d_1 = 1$; como u y v son impares y además $(z + y) = a$ y $(z - y) = b$, tendremos que $a > b$ y entonces $u^2 > v^2$ y por consiguiente $u > v$.

Finalmente se tendrá que $x = uv$, $y = \frac{u^2-v^2}{2}$ y $z = \frac{u^2+v^2}{2}$, con $(u, v) = 1$, $u > v$, u y v impares.

- Para construir la segunda manera supongamos sin pérdida de generalidad que y es par, entonces $y^2 = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x)$.

Ahora, sea $d_2 = ((z+x),(z-x))$, el máximo común divisor de $(z+y)$ y $(z-y)$; observamos que tanto $(z+y)$ como $(z-y)$ son pares, por lo tanto $d_2 = 2d_3$, entonces $(z+x) = 2ed_3$ y $(z-x) = 2fd_3$, por lo tanto $y^2 = (z+x)(z-x) = (2ed_3)(2fd_3) = 4ef(d_3)^2$, y como $(e,f) = 1$, entonces $e = r^2$ y $f = s^2$, por lo que $y^2 = 4r^2s^2(d_3)^2$ y por ende $y = 2rsd_3$.

Al sumar $(z+x) = 2ed_3$ y $(z-x) = 2fd_3$, obtenemos $2z = (e+f)2d_3 = (r^2+s^2)2d_3$, entonces, $z = (r^2+s^2)d_3$, y al restar obtenemos $2x = (e-f)2d_3 = (r^2-s^2)2d_3$. Entonces $x = (r^2-s^2)d_3$.

Pero $(x,y) = 1$ y y es par, por lo tanto $d_3 = 1$; como z y x son impares, r y s deben tener paridad distinta y como además $(z+x) = 2e$ y $(z-x) = 2f$, tendremos que $e > f$ por lo que $r^2 > s^2$ y por consiguiente $r > s$.

Finalmente se tendrá que $y = 2rs$, $x = (r^2-s^2)^2$ y $z = (r^2+s^2)^2$, con $(r,s) = 1$, $r > s$, r y s de distinta paridad.

Bibliografía

[1] Alter, Ronald. 2008. *The Congruent Number Problem.* The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 1 (Jan., 1980), pp. 43-45, The Mathematical Association of America.

[2] Alter, Ronald. Curtz, T.B. and Kubota, K.K.. 1972. *Remarks and results on congruent numbers.* Proc. Third Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, pp. 27-35.

[3] Cassels, J. W. S. Schinzel, A. 1982. *Selmer's Conjecture and Families of Elliptic Curves.* Bulletin of the London Mathematical Society. Volume 14, Issue 4, pp 345–348

[4] Chrystal, G. 1964. *Algebra, an elementary text-book.* pp 398-409.

[5] Conrad, Keith. 2008. *The Congruent Number Problem.* The Harvard College Mathematics Review 2, pp 58-74.

[6] Dickson, Leonard E. 1919. *History of the theory of numbers.* New York: Chelsea Publishing Company.

[7] Diez Freyle, Juan. 1556. *Sumario compendioso de las cuentas de oro y plata.* México. Analisis Matemático de: Marco Arturo Moreno Corral y Julio César Guevara Bravo. 2008. UNAM

[8] Diofanto de Alejandría. 1959. *Les six Livres Arithmétiques et le Livre des Nombres Polygones.* Traducción y notas de Paul Ver Eecke. París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

[9] Diofanto de Alejandría. 2007. *Diofanto de Alejandría. La Aritmética y el libro sobre los números poligonales.* Versión en castellano, introducción, notas y apéndices de Manuel Benito Muñoz, Emilio Fernández Moral y Mercedes Sánchez Benito. España: Nivola.

[10] Euclides. 1991. *Elementos.* Introducción de Luis Vega. Madrid: Editorial Gredos

[11] Godwin, H.J. 1978. *A note on congruent numbers.* Math Comp. 32, pp. 293-295.

[12] Lagrange, Joseph L. 1770. *Démonstration d'un théorème d'arithmétique.* Œuvres complètes, tome 3, 189-201 (volume). Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, année.

[13] Lario, Joan-C. 2016. *Al-Karají y yo.* La Gaceta de la RSME, Vol 19, Num. 1, pp. 133-149.

[14] Mordell, L.J. 1969. *Diophantine Equations.* Pure and Applied Math. 30, New York: Academic Press.

[15] Moreno Castillo, Ricardo. 2004. *Fibonacci. El primer matemático medieval.* España: Nivola.

[16] Nathanson, Melvyn B. 1996. *Additive Number Theory The Classical Bases.* Springer-Verlag New York.

[17] Gauss, Carl F. 1966. *Disquisitiones Arithmeticae.* Yale University Press.

[18] Pacioli, Luca. 1494 *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalità.* Venecia: Paganino de Paganini. Edición facsimilar procedente de la Biblioteca de la Universidad de Sevilla.

[19] Pisa, Leonardo de. 1952 *Le livre Des Nombres Carrés.* Traduccido de la edición latina con notas de: Paul Ver Eecke. París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

[20] Pisa, Leonardo de. 1973 *El libro de los números cuadrados.* Traducción de la versión francesa de: Paul Ver Eecke. Buenos Aires: Eudeba.

[21] Pisa, Leonardo de. 1987 *Leonardo Pisano Fibonacci's book of Squares.* Traducción directa del *Liber Quadratorum* hecha por L.E. Sigler. Boston: Academic Press.

[22] Pisa, Leonardo de. 2002 *Fibonacci's Liber Abaci.* Traducción de L.E. Sigler. New York: Spinger Verlag.

[23] Koshy, Tomas. 2007 *Elementary number theory with applications.* California: Academic Press.

[24] Nelsen, Roger B. 1993 *Proofs without words.* The Mathematical Association of America

[25] Puig, Andrés. 1715. *Arithmetica especulativa y practiva y arte de algebra.* Capítulo X, Libro IV, pp. 313. Barcelona: Por Joseph Giral.

[26] Roberts, S. 1879. *Note on a problem of Fibonacci's.* Proc. London Math. Soc. 11, pp. 35-44.

[27] Selmer, E. 1954 *The diophantine equation ax3 + by3 + cz3 = 0.* Acta. Math. 92 pp 191-197.

[28] Sierpinski, W. 1964. *Elementary Theory of Numbers.* PWN, Warsaw.

[29] Stephens, N.M. 1975. *Congruence Properties of Congruent Numbers.* Bull. London Math. Soc. 7, pp. 182-184.

[30] Uspensky, J.V. and Heaslet, M.A.. 1939. *Elementary Number Theory.* McGraw-Hill, New York.