



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CALENTAMIENTO Y ENFRIAMIENTO
RADIATIVO Y CONVECTIVO:
TEMPERATURA EFECTIVA PLANETARIA
E ISLA DE CALOR URBANA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

GUSTAVO FERNANDO VALLE SORIANO

TUTOR

M. EN C. MANUEL RENÉ DE JESÚS
GARDUÑO LÓPEZ

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE

DR. FAUSTINO SÁNCHEZ GARDUÑO

DR. FRANCISCO JAVIER MARTÍNEZ FARÍAS

DRA. MARNI MARGARITA PAZOS ESPEJEL



Ciudad Universitaria, México, CDMX, 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicado a

Mi madre

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por brindarme su apoyo en todo momento, desde mis abuelos que siempre creyeron en mí, además de impulsarme; a mi padre por su esfuerzo realizado para sustentar mis estudios, pudiendo entonces cumplir mis metas y objetivos; a mi madre por estar incondicionalmente a mi lado en mi desarrollo como estudiante y persona, inculcando en mí la responsabilidad y trabajo para lograr todo lo que me proponga; a mi hermana por apoyarme en las ocasiones en las que más requería ayuda, gracias por auxiliarme a reescribir mi reporte de laboratorio aquella vez en la que aquél apagón me hizo pensar que había perdido todo mi trabajo... te levantaste muy temprano y me ayudaste, por esto y por saber que en todo aspecto y momento siempre cuento contigo, gracias.

A mis amigos por todas aquellas ocasiones en las que juntos logramos salir de muchos retos de la vida universitaria, gracias por su apoyo y compañía.

Mi gratitud a la facultad de ciencias, porque sin duda, sin todas las experiencias que en ella viví no sería la persona que soy hoy en día, a todos mis profesores que bajo su esfuerzo y enseñanzas pude desarrollarme profesionalmente, mi agradecimiento especial al asesor de mi tesis que siempre estuvo para orientarme en mi trabajo, contando con todo su apoyo y soporte desde la realización de mi servicio social.

Lista de símbolos

Γ_1 — Gradiente térmico atmosférico.	$E_W(\nu, T)$ — Distribución de Wien para la radiación térmica por unidad de volumen y frecuencia.
I — Inercia térmica.	S — Entropía.
η — Número de onda.	κ — Constante de Boltzmann.
ν — Frecuencia.	ω' — Número de microestados.
λ — Longitud de onda.	\bar{u} — Energía promedio de un oscilador en el modelo de Planck para radiación térmica.
λ_{max} — Longitud de onda de emisión máxima.	$E_P(\nu, T)$ — Distribución de Planck para la radiación térmica por unidad de volumen y frecuencia.
$T_{<}$ — Temperatura mínima.	$E_e(\nu, T)$ — Distribución encontrada experimentalmente para la radiación térmica por unidad de volumen y frecuencia.
T — Temperatura.	U — Energía total en el sistema del modelo de Planck para radiación térmica.
c_e — Calor específico.	ε — Cuanto de energía.
K — Conductividad térmica.	n — Número de cuantos de energía.
C — Capacidad calorífica.	h — Constante de Planck.
E_v — Evapotranspiración.	$B(\lambda, T)$ — Distribución de radiación térmica por unidad de superficie y longitud de onda.
a_λ — Absortividad en longitud de onda.	Ω — Ángulo sólido.
e_λ — Emisividad en longitud de onda.	d_{A_s} — Diferencial de área proyectada sobre una esfera en base a un ángulo sólido.
a_ν — Absortividad en frecuencia.	$E_R(\lambda, T)$ — Distribución de Rayleigh para la radiación térmica por unidad de
e_ν — Emisividad en frecuencia.	
T_e — Temperatura efectiva.	
R — Escorrentía.	
P — Precipitación.	
A_a — Agua almacenada.	
c — Velocidad de la luz.	
ρ_λ — Reflectividad.	
ρ — Albedo.	
τ_λ — Transmisividad.	
$E(\nu, T)$ — Distribución de radiación térmica por unidad de volumen y frecuencia.	
σ — Constante de Stefan-Boltzmann.	

IV

volumen y longitud de onda.

$E_{RJ}(\lambda, T)$ — Distribución de Rayleigh y Jeans para la radiación térmica por unidad de volumen y longitud de onda.

$B(\eta, T)$ — Distribución de radiación térmica por unidad de superficie y número de onda.

T_F — Temperatura de la fotosfera solar.

r — Radio de la Tierra supuesta como esfera.

O_2 — Oxígeno.

O_3 — Ozono.

CH_4 — Metano.

N_2O — Oxido nitroso.

CO_2 — Dióxido de carbono.

I_0 — Irradiancia solar total.

A_f — Área frontal de la Tierra vista desde el Sol.

ρ_p — Albedo planetario.

a_T — Energía total solar absorbida por la Tierra.

e_T — Energía total emitida por la superficie de la Tierra.

T_e — Temperatura efectiva.

ξ — Constante para calcular la energía máxima emitida por unidad de superficie.

T_a — Temperatura del fluido en el que se encuentra inmerso un cuerpo en enfriamiento de Newton.

Q — Calor.

h_1 — Coeficiente de transferencia de calor.

u' — Energía interna.

A — Área de un cuerpo en enfriamiento.

T_b — Temperatura representativa de todos los objetos que rodean a un cuerpo en enfriamiento completo.

e — Emisividad integrada en toda longitud de onda.

a — Absortividad integrada en toda longitud de onda.

m — Masa del cuerpo en enfriamiento estudiado.

m' — Masa de las moléculas en el gas de la función de probabilidad de Maxwell-Boltzmann.

V — Volumen.

ρ_1 — Densidad.

α — Difusividad térmica.

$\varphi(z, t)$ — Flujo de calor a la altura z y tiempo t .

\mathcal{L} — Operador de transformada de Laplace.

Γ — Función gamma.

ω — Frecuencia angular.

t — Tiempo.

T_S — Temperatura superficial de la Tierra.

φ_g — Flujo generalizado.

ξ_1 — Inercia difusiva periódica.

Ψ — Amplitud del flujo generalizado.

τ — Esfuerzo cortante.

p — Momento lineal.

V_s — Velocidad superficial del agua en océanos.

ρ_2 — Densidad del agua.

μ_1 — Viscosidad.

L_s — Longitud areocéntrica.

ICU — Isla de calor urbana.

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Lista de símbolos	III
1. Introducción	1
2. Procesos de transferencia de calor	8
2.1. Conducción	8
2.2. Convección	10
2.3. Transportes de calor sensible y latente	12
2.3.1. Evapotranspiración	14
2.4. Radiación	16
2.4.1. Interacción entre radiación y materia	17
3. Radiación de cuerpo negro	20
3.1. Desarrollo histórico	20
3.1.1. Aproximación de Wien	22
3.2. Distribución de Planck	24
3.2.1. Por unidad de volumen	24
3.2.2. Por unidad de área	29
3.2.3. Comentarios por observaciones de la ley de radiación de Planck	32
4. Radiación solar y terrestre	36
4.1. Espectro atmosférico	36
4.2. Temperatura efectiva planetaria	40
4.3. Espectros ajenos del Sol y de la Tierra	41
4.4. Superficie efectiva planetaria de emisión	43
4.5. Efecto invernadero	44

5. Enfriamiento (calentamiento) completo	46
5.1. Ley de enfriamiento de Newton	46
5.1.1. Descripción matemática de la conducción-convección (libre y forzada)	49
5.2. Enfriamiento radiativo	50
5.2.1. Experimentalmente complejo	50
5.2.2. Matemáticamente accesible	51
5.3. Enfriamiento completo	57
5.4. Epílogo	63
6. Inercia térmica: ICU y regolito de Marte	65
6.1. Inercia térmica	65
6.1.1. Método para estimar valores de Inercia térmica	67
6.1.2. Generalización de la Inercia térmica	75
6.2. Inercia térmica y la isla de calor	78
6.3. Inercia térmica del regolito de Marte	81
7. Discusión y conclusiones	86
Referencias	90

Capítulo 1

Introducción

El motivante de esta tesis fue encontrar una causa física para la formación de una *isla de calor urbana (ICU)*; dicho causante se encontró en un trabajo paralelo que estudia la oscilación estacional del clima de Marte, pues en éste se explica con un concepto novedoso llamado *inercia térmica (I)*, el cambio estacional de los casquetes polares y la correspondiente variación de su presión atmosférica.

Descubierta *I*, se inició una revisión bibliográfica para indagar más sobre dicho concepto, encontrando que también aparece en el ámbito de la construcción, específicamente en la *bioarquitectura*. Durante el estudio de este concepto se encontró un hecho curioso, y es que al parecer *I* aparece solamente en casos en los que se tienen una fuente de radiación periódica, por lo que se comenzó a investigar si existen estudios de objetos calentados sólo por radiación y que además la fuente sea fija. A pesar de ser aparentemente un caso más sencillo que el oscilante, no se encontró bibliografía para este caso; no obstante, se descubrió el artículo de Besson (2010a), que sirvió para el estudio del calentamiento y enfriamiento de un cuerpo que toma en cuenta los tres procesos de transferencia de calor (conducción, convección y radiación).

Ya que Besson (2010a) trata los tres procesos de transferencia de calor, se decidió hacer una descripción de los mismos, pero, enfocados al funcionamiento del *sistema climático*, además del puramente físico, profundizando más sobre el radiativo, pues es a través de éste que el Sol transfiere energía a la Tierra, iniciando un estudio de las bases físicas del funcionamiento del sistema climático.

Otro motivante del desarrollo de esta tesis va enfocado a la docencia, ya que durante la investigación referente a *I*, se encontraron varios conceptos que regularmente se mencionan de manera vaga, superficialmente o que suelen no enseñarse en algunos cursos de física. Por mencionar algún ejemplo particular, en la tesis

se explica que la ley de radiación de Max Karl Ernst Ludwig Planck existe por unidad de volumen, y por unidad de área, analizando las diferencias que existen en cada caso, aquí cabe comentar que las notas de Romero (2015) sirvieron como base principal para esta descripción.

Se aclara que la fórmula de Planck por unidad de volumen tiene relevancia en el desarrollo teórico del estudio de un *cuerpo negro* (CN) (definido como aquél que absorbe toda la radiación que incide sobre él, y emite lo máximo posible), pero en la práctica se utiliza la fórmula por unidad de área; en particular en la tesis se muestran ejemplos de su uso en *física del clima* (estudio físico del clima con intención de crear modelos matemáticos que describan los fenómenos).

Como parte de los conceptos que suelen no enseñarse, se revisó la ley de Planck por unidad de área en términos del número de onda (η) (definida como el número de ondas por unidad de distancia). Por otro lado, se trató de dar una explicación de por qué las gráficas de la fórmula de Planck por unidad de volumen tienen la misma forma en las variables de frecuencia (ν) y longitud de onda (λ) a pesar de ser variables inversas. También se explicó de manera clara cada una de las distribuciones espectrales que históricamente surgieron para explicar la *radiación térmica* (siendo ésta la que emite un cuerpo debido sólo a su temperatura).

Explicado cómo se desarrolló el progreso del trabajo y los motivantes del mismo, a continuación se dará una descripción breve de los conceptos más relevantes que se tratan.

La *ICU* es un fenómeno que consiste en el aumento de la temperatura del ambiente de una ciudad, especialmente la temperatura mínima diaria ($T_{<}$) alcanzada en las superficies de los elementos de construcción que se encuentran en contacto con el aire, comparada con la medida en las zonas rurales vecinas y el espacio previo antes de ser urbanizado.

Como se dijo al comienzo, uno de los motivantes de este trabajo fue encontrar un causante físico de la formación de una *ICU*, y se buscó que dicha causa fuera convincente al menos cualitativamente, pues por lo general en la bibliografía se suele mencionar que los materiales utilizados para la construcción y urbanización son los causantes, argumentando que éstos pueden “guardar” o almacenar una gran cantidad de calor (Myrup, 1969; Yang et al., 2016; Verbeke y Audenaert, 2018; Maalouf et al., 2011); sin embargo, dicho argumento no es claro desde un punto de vista físico, pero se puede suponer que al decir que los materiales almacenan calor se están refiriendo al *calor específico* (c_e) de los mismos, que es una propiedad calorimétrica definida dentro de la *termodinámica en equilibrio* e indica

la cantidad de calor que debe ingresar por unidad de masa a un sistema termodinámico para incrementar su temperatura un grado (comunicación personal con Goldstein Patricia). No obstante, c_e para los materiales considerados es bajo, lo cual resulta contradictorio, pues esto significa que liberan el calor rápidamente. Además esta cantidad no ayuda a describir cambios temporales, por lo que resulta limitada para describir cómo ingresa calor a los elementos de construcción y urbanización. Estas son las principales razones por la que resultó interesante buscar una causa física convincente para la formación de una *ICU*.

I es una propiedad muy usada en los artículos que estudian el clima de Marte; antes de dar la razón de esto se definirá lo qué es el *regolito*. En general se llama así al suelo de planetas y satélites rocosos, se usa esta palabra para no confundir con el concepto edafológico de suelo; es importante aclarar que en particular en Marte puede haber polvo encima del regolito, pero el regolito sólo considera la parte sólida sin polvo (material de las tolvaneras).

Dada esta definición, la razón por la que I se usa en los estudios del clima de Marte se debe a que por lo general es a esta propiedad térmica del regolito a quien se le achaca la oscilación estacional de sus casquetes polares, siendo éste el regulador más importantes de su clima, actuando de manera similar a como lo hacen los océanos en la Tierra.

Saber que el comportamiento periódico de la formación y desaparición de los casquetes polares se debe a I , fue lo que condujo a pensar que en I se podía encontrar una explicación física de la formación de una *ICU*, pues ésta última también tiene un comportamiento periódico, aunque es diario, el cual se puede apreciar en medidas diarias de la temperatura de una ciudad. De esta modo se comenzó un estudio de I para los materiales usados en la construcción y urbanización, encontrando que sí es convincente la explicación que surge a partir de esta concepto, pues I incluye *conductividad térmica* (K), definida dentro de la termodinámica irreversible (comunicación personal con Goldstein Patricia), se puede pensar en esta cantidad como una medida del grado de avance del calor en una dirección, y sus dimensiones son $J/m s K$ (mide la facilidad con que un material transporta calor).

Al ser bajo el valor de K en los materiales usados para la construcción con respecto por ejemplo al agua o mármol (González, 2014), se puede entender que la señal externa proveniente del Sol que penetra en las superficies, genera un flujo de calor, el cual continua alcanzada la noche, pero ahora apuntando hacia el exterior, incrementando de manera general la temperatura, en especial $T_{<}$.

Además de K , I incluye c_e , que al multiplicar por ρ resulta capacidad calorífica (C) por unidad de volumen, propiedad extensiva definida dentro de la termodinámica en equilibrio como la razón de cantidad de energía calorífica transferida a un cuerpo y su cambio de temperatura.

Como ya se dijo, I tiene una característica muy peculiar, y es el hecho de que al parecer solamente emerge en casos en los que se tiene una fuente de calor externa oscilante como el Sol. Por otro lado, el caso fijo que consistiría en describir el calentamiento de una superficie con profundidad semi-infinita (condición que también aparece en el caso oscilante) por medio de una fuente fija parece no tener una descripción en términos de I .

Anteriormente se dijo que el artículo de Besson (2010a) se encontró cuando se buscaba un artículo que describiera el calentamiento de un objeto de manera puramente radiativa y con una fuente fija; no obstante, este artículo también sirvió para profundizar más en el calentamiento de la Tierra o Marte por el Sol, pues éste incluye calentamiento únicamente por radiación, dicho desarrollo sólo se puede realizar de manera teórica, pues experimentalmente es complejo de controlar (debido a que todo cuerpo emite constantemente radiación). Este estudio condujo a una revisión de los tres mecanismos usuales de transferencia de calor mencionados al principio, pues el artículo revisado incluye un proceso de enfriamiento (o calentamiento) que involucra a los tres, encontrando que los procesos conductivo y convectivo son acoplados en fluidos.

Para entender mejor este acoplamiento, se considera el ejemplo de transferencia de calor entre la superficie de la Tierra (compuesta por océanos y continentes) y la *troposfera* (capa más baja de la atmósfera con un espesor aproximado de 10 km); generalmente se sabe que el calor se transfiere de la superficie terrestre a la troposfera por medio de corrientes convectivas, generadas porque el aire caliente se eleva por ser más ligero (debido a que el ingreso de calor genera un aumento en su volumen, lo que ocasiona una disminución de su densidad) que el frío, dichas corrientes se caracterizan por ser *turbulentas* (movimiento irregular de un fluido); sin embargo, para que éstas se generen antes debe existir un transporte de calor por conducción, debido al *contacto molecular* entre la superficie y el *aire superficial* (siendo el aire de la atmósfera que se encuentra en contacto con la superficie); dicho proceso ocurre de manera regular, y se conoce como *flujo laminar*, el cual dura muy poco tiempo, pues casi en seguida se hace turbulento; no obstante, es necesario para que las corrientes convectivas inicien.

Es importante señalar que existen dos tipos de convección, *libre* y *forzada*, la primera se describió en el párrafo anterior, y también se le conoce con el nombre

de *convección natural*, debido a que su ocurrencia únicamente depende de la diferencia de temperatura existente entre las partes que intercambian calor (hecho que en física se conoce como *gradiente térmico*). Generalmente la transferencia de calor por este mecanismo ocurre en interfaces en las que al menos uno de sus componentes es un fluido, esto se puede apreciar en el sistema climático, con el transporte de calor entre el continente y la atmósfera (interfaz sólido-fluido), el cual se describió anteriormente y entre el océano y la atmósfera (interfaz fluido-fluido).

La convección forzada además de la existencia de un gradiente térmico, requiere la presencia de viento para que inicie y continúe el proceso. Este hecho se puede lograr de dos maneras, primero considerando un cuerpo sólido inmerso en un fluido en movimiento y el caso en que el fluido se encuentra en reposo y el sólido se mueve a través de él, ambos casos son equivalentes, pues hay ventilación, que produce una tasa de enfriamiento mayor que en la convección natural.

Hasta este punto se han mencionado los motivantes tomados en cuenta para realizar la tesis, así como parte de los conceptos más relevantes y novedosos que se tratan en ella. A continuación se da una descripción de los capítulos que la conforman.

El Capítulo 2 habla de los tres mecanismos fundamentales de transferencia de calor, así como su relevancia en el funcionamiento del sistema climático, específicamente en el transporte de calor entre superficie terrestre y troposfera. Entendidos estos procesos tanto físicamente como en el sistema climático, se introduce un nuevo mecanismo, el *transporte de calor latente*, teniendo como ejemplo importante la *evapotranspiración* (E_V).

Al ser uno de los tres mecanismos fundamentales de transferencia de calor, la radiación se estudia en el Capítulo 2 ; sin embargo, en el Capítulo 3 se profundiza más sobre este mecanismo, estudiando particularmente y con detalle la radiación térmica, lo cual se hace de manera cronológica, comenzando con Gustav Robert Kirchhoff, quien fundó el concepto de *CN* para describir dicha radiación.

Introducido el problema y los conceptos base, el estudio continúa mostrando las contribuciones que históricamente surgieron para explicar la radiación térmica, mediante trabajos teóricos y experimentales hechos por personajes como: John Tyndall, Josef Stefan, Ludwig Eduard Boltzmann, Wilhelm Carl Wien, John William Strutt mejor conocido como lord Rayleigh y James Hopwood Jeans, hasta llegar a la culminación de este estudio histórico con Planck, quien dedujo teóricamente una distribución espectral de energía que explicaba correctamente la radia-

ción térmica, y al mismo tiempo dio origen al nacimiento de la mecánica cuántica, teoría que revolucionaría la física del siglo 20, y que actualmente se utiliza para estudiar el comportamiento de fenómenos a escala atómica.

En el Capítulo 4 se estudia el espectro de emisión de la atmósfera, analizando el comportamiento de ésta con la radiación de *onda corta* que llega a la Tierra proveniente de la fotosfera del Sol, así como con la radiación de *onda larga* que es emitida por la superficie terrestre. Se describe la *absortividad* (a_λ) o *emisividad* (e_λ) de la parte opaca de la atmósfera con el modelo de George Simpson citado por Julian Adem (1962), y con la simplificación de éste hecha por el mismo Adem.

Una vez aclarado el espectro atmosférico, se estudia la *temperatura efectiva* (T_e) de la Tierra, deduciendo una ecuación para calcular su valor, y discutiendo por qué éste último no es igual al valor de la *temperatura promediada global anual al nivel del mar* (valor típico), debido principalmente al *efecto invernadero*, el cual también se estudia en este capítulo, viendo a la vez cómo es que dicho efecto genera el *gradiente térmico atmosférico* (Γ_1), que es un perfil térmico en el que la temperatura T de la troposfera varía con la altura de una manera simple, pues por cada *km* que uno sube, T baja 6.5°C . A partir de Γ_1 se introduce el concepto de *superficie efectiva planetaria de emisión*.

En este capítulo, en la sección de espectros ajenos se resalta una propiedad matemática interesante de la distribución de Planck, la cual resulta de gran utilidad en la representación de las distribuciones de emisión de la Tierra y la fotosfera solar, con lo que al mismo tiempo se puede dar una representación gráfica del equilibrio radiativo.

El objetivo del Capítulo 5 es estudiar el enfriamiento o calentamiento de un cuerpo a partir de la solución a una ecuación diferencial que toma en cuenta los tres mecanismos fundamentales de transferencia de calor, además, se retoma parte de lo dicho en el Capítulo 2, pues antes de revisar la solución, se estudia por separado el proceso acoplado conductivo-convectivo en la *ley de enfriamiento de Newton* y sus variantes libre y forzada, también se retoma parte de lo visto en el Capítulo 3, pues después de la ley de enfriamiento de Newton se revisa el enfriamiento o calentamiento de un objeto únicamente por radiación, culminando en un proceso que involucra los tres mecanismos de transferencia de calor.

El último capítulo habla sobre I , concepto novedoso y que se encontró como un causante físico principal de la formación de una *ICU*. También se presenta una explicación de la aparición y desaparición de los casquetes polares de Marte a partir de I , y su respectiva variación de presión atmosférica.

Antes de comenzar con el siguiente capítulo, en esta parte cabe mencionar que este trabajo es continuación del servicio social en el que se estudió *I* de los materiales urbanos. También aclarar que las figuras en las que no aparece referencia son de uso libre o realizadas por mi.

Capítulo 2

Procesos de transferencia de calor

2.1. Conducción

Es un mecanismo de transferencia de calor que se define en la *termodinámica fuera del equilibrio* (comunicación personal con Goldstein Patricia), este proceso se inicia y continua por la existencia de un gradiente térmico (ver Fig. 2.1a), donde la flecha indica el sentido del flujo de calor; las moléculas del cuerpo con mayor temperatura vibran más rápido, cediendo parte de su energía a las que tienen menos.

Esta transferencia ocurre principalmente en la materia condensada (sólidos y líquidos), en los primeros se lleva a cabo por sus *grados de libertad* de vibración, mientras que en los segundos por los de vibración, traslación y rotación (Beiser, 2003).

Cabe resaltar que existen sustancias que transportan calor por conducción con mayor facilidad, esto depende de K (coeficiente de conductividad térmica, definido en la introducción) y que es característico de cada sustancia.

El proceso conductivo puede darse en las interfaces sólido-sólido, sólido-líquido y líquido-líquido; sin embargo, sólo en la primera la transferencia de calor ocurre todo el tiempo por conducción, y en las dos restantes dicho proceso dura muy poco, pues casi de manera inmediata la transferencia se lleva a cabo por convección (proceso que se describirá con mayor detalle en la siguiente sección).

La conducción entre sólidos es un fenómeno que no resulta ajeno a lo que regularmente se enseña en cursos de física, por lo que a continuación sólo se dan ejemplos de la ocurrencia de conducción en las interfaces sólido-líquido y líquido-líquido,

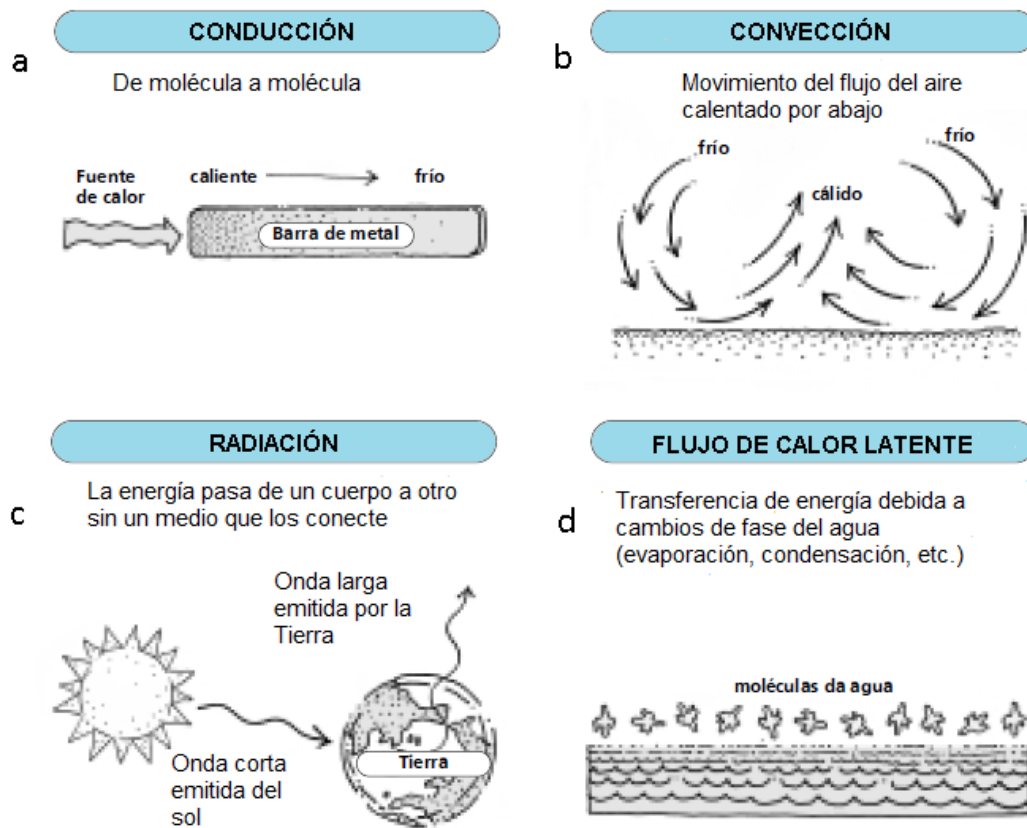


Figura 2.1: En la parte a) se representa el flujo de calor dentro de un sólido por medio de una flecha. En b) se ilustra el movimiento que experimenta el aire en la atmósfera por convección libre. En c) el transporte de energía por radiación de la Tierra y el Sol. la parte d) Ilustra del flujo de calor latente entre océano y atmósfera (Snyder y Melou, 2010).

las cuales en general suelen no ser tratadas.

Para ilustrar el transporte de calor entre un sólido y un fluido, basta con recordar el ejemplo descrito en la Introducción en el que se explica cómo la superficie de la Tierra transfiere calor al aire superficial (tratado como un fluido). Este último se caracteriza por tener una densidad elevada comparada con el aire por encima de él, debido principalmente a que la atmósfera se encuentra inmersa en un campo gravitacional; el hecho de que su densidad sea lo suficientemente elevada, incrementa la interacción entre sus moléculas, y por ende la breve transferencia de calor por conducción con la superficie terrestre.

Un ejemplo de conducción entre fluidos se puede encontrar en el sistema climático cuando los océanos transfieren calor al aire superficial, aunque como ya se dijo

este proceso dura muy poco. Como dato interesante aquí cabe comentar que si la conducción de calor entre diferentes niveles de la atmósfera ocurriera todo el tiempo por conducción, se tendría un flujo de calor en un fluido *estratificado*, en el que por estar quieto no existe *turbulencia* (movimiento irregular del fluido), que es lo que realmente ocurre en la atmósfera, debido a la convección.

2.2. Convección

Es la transferencia de calor por medio del movimiento de un fluido (líquido o gas) entre regiones con diferente temperatura. Calentar un fluido ocasiona que su densidad disminuya, provocando que se eleve hacia regiones en las que se encuentra fluido con menor temperatura, el cual al tener mayor densidad desciende y ocupa el lugar dejado por el ascendente, este proceso es cíclico, tal como se puede apreciar en las Figs. 2.1b y 2.2, a cada ciclo completado se le conoce como celda o *corriente convectiva* (O' Sullivan, 1900).

Cuando el transporte de calor en el fluido ocurre únicamente por un gradiente térmico, se le conoce como *convección libre* o natural (descrita en el párrafo anterior), y en caso de existir viento que interfiera en el movimiento de las corrientes convectivas, se le denomina *convección forzada*, la descripción del modelo matemático de estos 2 fenómenos se dará en el Capítulo 5.

Por segunda ley de la termodinámica se sabe que el flujo de calor se da de la zona de mayor temperatura hacia la de menor; sin embargo, en oceanografía física el proceso puede ser más complejo, ya que la densidad puede no sólo depender de la temperatura, sino de la salinidad, tal como ocurre en las *termohalinas*, definidas como el conjunto de corrientes oceánicas producidas debido a diferencias de densidad (llamado también *gradiente de densidad*) generadas por cambios de temperatura y salinidad, al hecho de que exista flujo de calor debido a un gradiente de densidad, en *termodinámica irreversible* se le conoce como *relaciones de reciprocidad de Onsager* (comunicación personal con Goldstein Patricia), (Marcos et al., 2019).

Continuando con el sistema climático, en éste la convección libre ocurre durante el día, ya que la superficie de la Tierra absorbe calor del Sol, por lo que tiene una mayor temperatura que la del aire superficial, iniciando el transporte de calor por conducción, el cual se desorganiza casi de manera inmediata, pues la parcela de aire se expande y aumenta su volumen, disminuyendo su densidad y por ende transportándose a niveles superiores (mismo proceso que se describió al principio, aunque desde un enfoque puramente físico) de la atmósfera, donde la temperatura

de las capas de aire disminuye, esta disminución de temperatura es una manifestación de Γ_1 , el cual se forma principalmente por efecto invernadero (que se describirá con mayor detalle en la sección 4.5), las parcelas de aire superiores tienen una mayor densidad, por lo que descienden y ocupan el lugar de la parcela de aire superficial ascendente como se aprecia en la Fig.2.2. A las celdas o corrientes convectivas producidas por convección libre en meteorología se les conoce como *corrientes termales*.

La convección forzada también se presenta en el sistema climático, y el viento es el agente que modifica el movimiento natural de las corrientes convectivas. En este punto cabe mencionar que “En meteorología la convección (transporte de calor acarreado por el aire) se separa en dos partes: *advección*, referida al movimiento horizontal, y convección, que es la transferencia vertical de calor por movimientos ascendentes y descendentes del aire. De modo que la convección atmosférica es sólo la componente vertical de la convección física” (Garduño, 2003). Definida esta división, se puede decir que la convección forzada en el sistema climático presenta ambas componentes, pues cuando viento que circula horizontalmente (*advección*) se encuentra con una barrera orográfica, su sentido cambia hacia arriba (*convección*), generando fenómenos como condensación (cambio de estado gaseoso a líquido) debido a la disminución de temperatura.



Figura 2.2: Representación de una celda convectiva generada durante el transporte de calor por convección en la atmósfera (Zavadska, 2016).

La convección es un proceso físico que tiene influencia en diferentes aspectos climáticos, tales como la formación del viento, de las nubes cumulo-nimbus, de los tornados (cuando las corrientes convectivas ocurren de manera violenta) y de las brisas marinas y terrestres.

Si el proceso de convección no ocurriera en el sistema climático, se tendría una

fuelle de contaminación puramente física, pues para que no exista convección en la Tierra, debe ocurrir que la temperatura de la superficie terrestre sea menor que la del aire superficial, “como ya se dijo, el aire caliente inferior sube y el frío superior baja; esto es lo normal, pero cuando hay inversión térmica el aire frío (pesado) está abajo y allí se queda, y el que está encima es más caliente (ligero) y se bloquea la convección vertical de la atmósfera” (Garduño, 2003).

Que ocurra la inversión térmica es peligroso, ya que en condiciones normales la convección dispersa hacia arriba contaminantes como el smog; no obstante, durante la inversión térmica los contaminantes quedan atrapados abajo; cabe aclarar que esto sólo “ocurre en lugares muy fríos, como por ejemplo en los polos todo el tiempo y en la ciudad de México durante las mañanas de invierno” (Garduño, 2003).

Hasta este punto se han visto la conducción y la convección sólo como mecanismos de transferencia de calor; pero, estos incluyen disipación de calor; y por mencionar algunos ejemplos se considera la manera en cómo un elefante y el motor de una motocicleta liberan o disipan calor.

En ambos casos el elemento clave es el tamaño del *área emisora*, ya que en el ejemplo de los elefantes, estos se caracterizan por poseer grandes orejas, y la razón de esto es que tienen una mayor área a través de la cual pueden liberar calor, primero por conducción y después por convección en el aire que lo rodea; en el caso del motor de motocicleta, éste se caracteriza por poseer repliegues, cuya función es generar un área más grande a través de la cual liberar mayor calor. En ambos casos se puede lograr una tasa más alta de enfriamiento si hay ventilación de por medio, ya que los elefantes mueven las orejas cuando la pérdida por conducción y convección no es suficiente para disminuir su temperatura, y en el caso de la motocicleta, cuando se pone en marcha el viento acelera el proceso de enfriamiento.

2.3. Transportes de calor sensible y latente

El *calor sensible* es energía que se caracteriza por incrementar directamente la temperatura del sistema al que ingresa (ver Fig.2.3), dado que su ocurrencia requiere conducción de calor, este proceso se define dentro de la termodinámica fuera del equilibrio (comunicación personal con Goldstein Patricia); una manifestación del calor sensible en el sistema climático ocurre durante la transferencia de calor del continente hacia la atmósfera, o desde océanos hacia esta última.

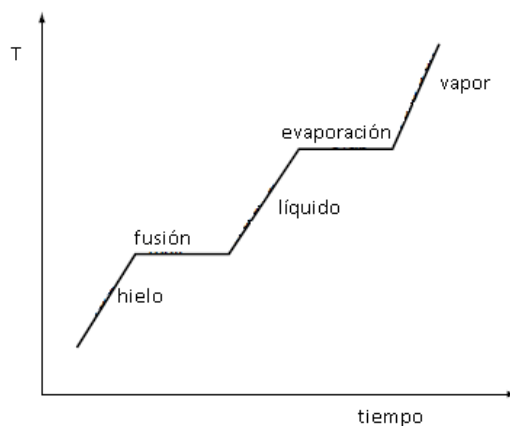


Figura 2.3: Esquema de aumento de temperatura y cambios de fase, el eje vertical registra temperaturas de hielo, agua y vapor, el horizontal representa el paso del tiempo. Las líneas inclinadas ilustran el ingreso de calor sensible a dichas sustancias, y las horizontales el latente.

El transporte de calor a la atmósfera y su respectivo incremento de temperatura no depende solamente de un gradiente térmico, pues también influye la velocidad horizontal del viento, tal como lo modela Jacobs (1951) en sus *fórmulas de bulto*.

Otro factor que contribuye al incremento de temperatura en la atmósfera, es el *calor latente*, que a diferencia del sensible, no incrementa directamente la temperatura del sistema al que ingresa, pues dicha energía se emplea en transiciones de fase que ocurren a temperatura constante, tal como se aprecia en la Fig. 2.3, en la que se observa que a pesar de que transcurre el tiempo, en las líneas horizontales no hay incremento en la temperatura, y esto es porque dicha energía en este ejemplo se emplea en los cambios de fase de fusión y evaporación.

La revisión de transferencia de calor latente en el sistema climático se puede dividir en dos interfaces: continente-atmósfera y océano-atmósfera, y se describen a continuación.

El transporte de calor latente entre el océano y la atmósfera depende de la *evaporación* del agua hacia el aire, y de la *condensación* del vapor de agua en la atmósfera. Cabe resaltar que ambos procesos son reversibles entre sí, al igual que la fusión y evaporación que aparecieron en la Fig.2.3.

La evaporación del agua del océano depende de distintos factores, entre los que se encuentra la *humedad relativa*, definida como la cantidad de vapor que contiene realmente el aire, dividida entre la cantidad que lo *saturaría* (Garduño, 2003).

La cantidad de vapor de agua que satura el aire depende de la temperatura de éste último, pues mientras más caliente se encuentre, mayor cantidad admite, y lo contrario si el aire tiene una baja temperatura, en éste caso al no haber tanto vapor en el aire, se condensa; esto explica por qué durante días fríos se forma neblina, que son pequeñas gotas de agua producto de la condensación; debe tenerse especial cuidado en no confundir la saturación del aire con el equilibrio que se produce cuando la *evaporación neta* (definida como la resta entre el agua que se evapora, y lo que se condensa) es igual a cero, esto significa que lo evaporado iguala lo condensado, por lo que en este momento no se nota cambio por evaporación; sin embargo, no es lo mismo que ocurre cuando el aire se satura.

Además de la humedad relativa y la temperatura del aire, la evaporación también depende del viento horizontal, pues éste puede remover aire que previamente haya sido humedecido con agua evaporada, trayendo consigo aire seco en el que resulta más fácil la evaporación (Jacobs, 1951).

Una vez que el vapor ingresa a la atmósfera, éste disminuye su temperatura a medida que se eleva (por Γ_1), de esta manera, el vapor de agua se condensa y libera calor. Cabe resaltar que las gotas de agua formadas por condensación contribuyen a la formación de nubes, cuando las temperaturas son demasiado bajas, puede ocurrir que el vapor en lugar de condensarse se cristalice, formando cierto tipo de nubes llamadas *cirrus*.

Al igual que en la interfaz océano-atmósfera, el transporte de calor en la interfaz continente-atmósfera depende de la evaporación, aunque en este caso se tiene que tomar en cuenta la disponibilidad limitada de agua, pues cuando la superficie es agua hay disponibilidad ilimitada de ella para ser evaporada; pero cuando es suelo (con todo y su vegetación), el agua es limitada. En este caso la evaporación depende del *gradiente de humedad* (cantidad que mide la diferencia de humedad entre dos regiones) entre el suelo y la atmósfera, e incluso puede llegar a invertirse el proceso, pues si el suelo está más seco que el aire, éste recibe humedad de aquél (Garduño, 2003). Además del gradiente de humedad, en el continente se debe tomar en cuenta el fenómeno de evapotranspiración (E_V) por la vegetación y mamíferos presente en la superficie continental.

2.3.1. Evapotranspiración

E_V es un fenómeno físico cuyo proceso se divide en dos partes, transpiración y evaporación (mencionados en orden de ocurrencia); la primera parte consiste en transportar agua desde el interior de la especie biológica considerada, hacia la superficie en contacto con la atmósfera; presente el agua en esta región, comienza la

evaporación.

La evaporación de un suelo cultivado depende de la cantidad de radiación solar que llega y es absorbida, dicha porción disminuye a medida que el cultivo crece, pues el aumento del *dosel* (copas o partes superiores de los árboles o plantíos) proyecta mayor sombra sobre el suelo.

Dicho esto, se entiende que durante las primeras etapas del cultivo, el suelo pierde agua por evaporación, pero con el aumento del dosel se puede llegar a impedir el paso de la radiación incidente, siendo entonces E_V el principal mecanismo de transporte de agua hacia la atmósfera (Allen et al., 1998).

En la E_V de las plantas se agregan factores de ocurrencia que son característicos de cada una, ya que distintas plantas presentan diferentes tasas de transpiración. Por ejemplo, algunas que crecen en zonas áridas, como los cactus, conservan más agua, transpirando menos.

Además de vegetación, en la superficie continental hay mamíferos, los cuales sudan para disminuir su temperatura, cabe aclarar que no todos sudan, o lo hacen muy poco, tal es el caso de los cerdos y perros que tienen pocas glándulas sudoríparas o los roedores y conejos que carecen de glándulas sudoríparas, llevando a cabo otros procesos de enfriamiento (Martínez, 2019). De esta manera la atmósfera también recibe vapor y posteriormente calor, por condensación, mismo mecanismo que se mencionó en la interfaz océano-atmósfera.

Con ayuda del *balance hidrológico* se puede calcular la cantidad de vapor de agua presente en la atmósfera por E_V , pues éste representa la conservación del agua en el sistema climático mediante un balance que toma en cuenta diferentes etapas que forman parte del *ciclo hidrológico*, mecanismo natural de transporte, bombeo y destilación de agua por los componentes del sistema climático y por la *biósfera*, cabe aclarar que en esta circulación el agua no cambia químicamente, sólo cambian sus fases o estados físicos (comunicación personal con Garduño René). En este caso además de E_V el balance incluye *escorrentía* (R), precipitación (P) y agua almacenada en el suelo y capas subyacentes (A_a).

Una vez que P alcanza el suelo, parte de esta agua comienza a escurrir por la superficie debido a la fuerza de gravedad, esta cantidad es R , que puede alcanzar ríos, en los que debido a sus corrientes conducen parte de P hacia los océanos. No toda el agua de lluvia fluye hacia los ríos, otra parte pasa a formar parte de A_a , de donde las plantas pueden tomar el agua y evapotranspirarla. Esto se representa con la Ec. (2.1).

$$\frac{dA_a(t)}{dt} = P(t) - E_V(t) - R(t) \quad (2.1)$$

Cuando la temperatura del clima es baja, en la vegetación del continente se pueden apreciar gotas de agua (rocío). Si la temperatura alcanza valores por debajo de 0°C , en lugar de condensarse, el vapor de agua se sublima, formando escarcha.

2.4. Radiación

La radiación es un mecanismo de transferencia de energía por medio de *ondas electromagnéticas*, las cuales se caracterizan por viajar a la velocidad de la luz (c) (que en el vacío es $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$).

En el universo existen diferentes tipos de radiación, que se definen de acuerdo a su frecuencia ν o longitud de onda λ ; al conjunto de todos los tipos de radiación se le conoce como *espectro electromagnético* (ver Fig. 2.4).

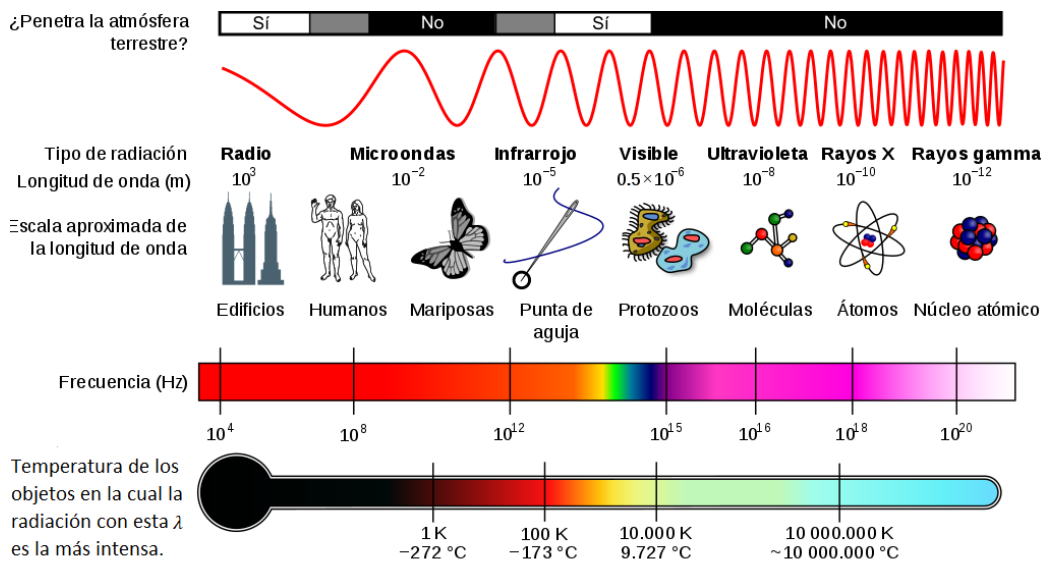


Figura 2.4: Espectro electromagnético en el que la escala de temperaturas y frecuencias sólo es esquemática.

Sabiendo por *tercera ley de la termodinámica* que ningún cuerpo puede alcanzar el cero absoluto de temperatura, se puede afirmar que todo objeto emite radiación

electromagnética, denominada radiación térmica, que en la introducción se definió como aquella que emite un cuerpo debido sólo a su temperatura.

Estudiar la radiación térmica fue todo un reto para físicos de los siglos 18 y 19, el primer científico en ocuparse de dicho estudio fue Kirchhoff, quien planteó las bases teóricas para su futuro desarrollo. Boltzmann fue el primero en desarrollar un modelo matemático para la radiación térmica, explicando que ésta depende de la temperatura a la cuarta potencia, sin embargo, su descripción no era capaz de cuantificar la cantidad de energía emitida por intervalo de λ ; pero Planck logró dar solución a esta última problemática, a partir de un modelo teórico cuyas bases dieron origen a la *mecánica cuántica* (teoría que estudia fenómenos físicos a escala atómica). Los desarrollos teóricos de Kirchhoff, Boltzmann y Planck se estudiarán con detalle en el siguiente capítulo.

En el clima hay dos tipos de radiación: solar y terrestre; la primera es primordialmente de onda corta o alta ν y la segunda de onda larga o baja ν . En el espectro electromagnético son prácticamente ajenas; la solar se ubica principalmente en la parte visible del espectro (ver Fig.2.4), con algo de ultravioleta y menos de infrarrojo; mientras que la terrestre es exclusivamente infrarroja.

La superficie del Sol (llamada fotosfera) emite como *CN* a unos $6000K$, por lo que su pico de emisión está en el color amarillo (parte del visible). En cambio, la temperatura a la que se emite la radiación terrestre es aproximadamente veinte veces menor, por lo tanto, la λ de su pico es veinte veces más larga (Garduño, 2003).

2.4.1. Interacción entre radiación y materia

Considerando a la radiación como un mecanismo de transporte de energía por medio de ondas electromagnéticas, se puede estudiar lo que ocurre cuando interactúa con materia.

En este trabajo se estudia la reflexión, absorción (emisión) y transmisión; de estos fenómenos, el primero ocurre en todos los cuerpos que no son negros, y por lo general se da de manera desorganizada, a menos que se trate de un espejo. Una manifestación directa de reflexión desorganizada se puede apreciar con la luz solar, pues cuando ésta incide sobre un cuerpo, parte de la radiación es reflejada en todas direcciones, por esta razón es posible ver dentro de un cuarto sin necesidad de luz artificial, aunque no se esté en contacto directo con la luz solar.

La *reflectividad* (ρ_λ) da una medida de la fracción de radiación incidente que es

reflejada por la superficie, se debe tomar en cuenta que esta porción es selectiva para cada λ . Aquí cabe aclarar que toda variable con subíndice λ es monocromática (depende de λ) y además, en general todas las cantidades que terminen en “idad” son fracciones, por lo que toman valores entre cero y uno. A la reflectividad integrada en λ se le conoce como *albedo* ρ .

La fracción de radiación de *CN* que es absorbida se mide con la *absortividad* a_λ . Para un *CN* $a_\lambda = 1$. Un cuerpo en el que a_λ es menor a uno y cuyo valor es el mismo para toda λ , se le llama *cuerpo gris*. Cuando la energía incidente es absorbida, se produce un incremento en la temperatura del cuerpo, provocando emisión térmica en longitudes de onda menores, cuya magnitud se puede describir con la *emisividad* e_λ (Kuhn, 1987).

Por último, la *transmisividad* τ_λ es la fracción de radiación incidente que no es absorbida ni reflejada, atravesando el material, por lo que los cuerpos opacos tienen un valor de $\tau_\lambda = 0$.

Hasta aquí, se ha dado una descripción de las tres partes consideradas en este estudio en las que se divide la radiación al entrar en contacto con materia, y al ser partes de un haz inicial incidente se cumple que

$$\rho_\lambda + \tau_\lambda + a_\lambda = 1 \quad (2.2)$$

Además de las tres cantidades descritas con la Ec. (2.2), durante la interacción entre radiación y materia puede ocurrir *dispersión*; fenómeno físico que consiste en la separación de ondas de distinta ν al atravesar un medio material, el cual se puede encontrar en estado sólido, líquido o gaseoso, en este trabajo interesa más éste último, ya que la atmósfera es la que se estudia con mayor detalle.

Aunque la dispersión afecta tanto a ondas mecánicas como electromagnéticas, en este caso se trata del segundo tipo con la dispersión de luz blanca, ya que es la que se puede ver a simple vista; no obstante, se debe tener claro que dicho fenómeno lo experimenta toda la radiación que aparece en el espectro electromagnético.

La desviación que puede sufrir el haz de luz considerado puede ocurrir de dos maneras, la primera se caracteriza por dispersar luz azul (de mayor ν) de manera preferente, y la segunda dispersa por igual todas las frecuencias que componen la luz blanca. El que ocurra una u otra depende del tamaño de las partículas (que conforman el medio material) dispersoras, si su radio es menor de una décima parte de un micrómetro, se produce el primer tipo, y se le conoce como *dispersión de Rayleigh*, cabe comentar que esta dispersión es la responsable del color azul

del cielo.

El segundo tipo de dispersión ocurre cuando el tamaño de la partícula es de aproximadamente medio micrómetro, como ya se dijo, en este caso la luz se dispersa por igual para toda ν , por lo que la luz dispersada se mantiene de color blanco, a este tipo de separación de la luz se le conoce como *dispersión de Mie*, y es la responsable del color blanco de las nubes.

Capítulo 3

Radiación de cuerpo negro

3.1. Desarrollo histórico

El estudio de la radiación térmica comenzó en 1859 con Kirchhoff, quien para estudiarla propuso un objeto teórico llamado *cuerpo negro* (*CN*), definido en la introducción como aquél que absorbe toda la radiación que incide sobre él, y emite lo máximo posible; un buen modelo de *CN* se puede lograr por medio de una cavidad cerrada con únicamente una pequeña abertura, pues como se ve en la Fig. 3.1a y recordando la interacción entre radiación y materia vista en el capítulo anterior, parte de la radiación incidente que ingresa por el hoyo será absorbida por un punto de la pared, y el resto será reflejada hacia otro punto en el que se repite lo mismo.

Este proceso se repetirá hasta que se alcance el equilibrio radiativo, momento en el que el total absorbido iguala a lo emitido por unidad de λ en todas las direcciones, tal como se aprecia en la Fig. 3.1b. De esto es importante resaltar la razón por la que la cavidad es una buena aproximación del *CN*, y se debe a que el hoyo de la cavidad es muy pequeño, por lo que es casi nula la probabilidad de que por éste escape radiación debido a alguna reflexión en el interior, pudiéndose asegurar que toda la radiación ingresada es absorbida, cumpliéndose de esta manera la hipótesis de *CN*.

El modelo de *CN* fue creado para facilitar el estudio de la radiación térmica, pues de esta manera se puede estar seguro que la radiación que sale por el hoyo es la emitida por la cavidad, que de otro modo es prácticamente imposible de estudiar, pues un cuerpo además de emitir radiación térmica debida a su temperatura, refleja radiación proveniente de los cuerpos que lo rodean, por lo que resulta complicado diferenciar entre radiación emitida y reflejada.

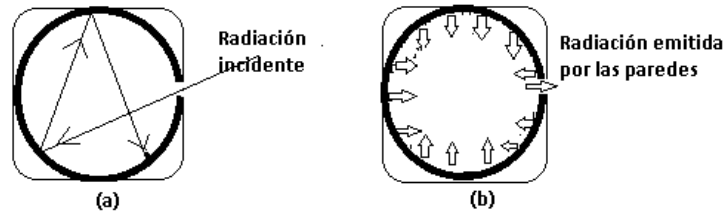


Figura 3.1: En la parte a) se ve el ingreso de radiación a la cavidad de CN , en b) la Radiación emitida en todas direcciones por las paredes de la cavidad del CN .

Alcanzado el equilibrio termodinámico entre la radiación y la cavidad del CN , ésta última estará llena de radiación térmica, y bajo estas condiciones Kirchhoff demostró que cualquier elemento de la superficie de la cavidad emite en promedio la cantidad de energía $e_\nu(\theta_1, T)$ por unidad de tiempo en el intervalo de frecuencias entre ν y $\nu + \delta\nu$ a la temperatura T y en la dirección θ_1 , medida desde la normal, dada por: (Romero, 2015).

$$e_\nu(T, \theta_1) = \frac{c}{8\pi} a_\nu E(\nu, T) \cos(\theta_1) \quad (3.1)$$

siendo c la velocidad de la luz, a_ν la absorptividad en ν y $E(\nu, T)$ la *densidad de energía por unidad de volumen*.

Al ser $E(\nu, T)$ una característica exclusiva de la radiación, se puede entender que el cociente $e_\nu(T, \theta_1)/a_\nu$ es universal, lo que quiere decir que es independiente del material o del tamaño de la cavidad; la ecuación que surge al igualar este cociente con $E(\nu, T)$ es conocida como *ley de radiación de Kirchhoff*. En el caso de un CN , al ser $a_\nu = 1$, se tiene que $e_\nu(T, \theta_1) = E(\nu, T)$.

Cabe resaltar que Kirchhoff asumió que la radiación dentro de la cavidad se propagaba por medio de ondas, tal como lo hacia la luz según Christian Huygens.

El principal objetivo de Kirchhoff era encontrar una distribución para $E(\nu, T)$; sin embargo, no lo logró, desafiando de esta manera a físicos teóricos y experimentales:

“Es una tarea sumamente importante hallar el poder emisor del CN . Aparecen grandes dificultades en el camino de su determinación experimental. Sin embargo, hay fundada esperanza de que tenga una forma simple, como la tienen todas las funciones que no dependen de las propiedades de los cuerpos individuales que se han conocido hasta ahora” (Kuhn, 1987).

De este modo se entiende que el principal objetivo a partir de este punto en la historia del estudio de la radiación de *CN* era encontrar una distribución para $E(\nu, T)$; no obstante, pasó mucho tiempo desde que Kirchhoff lanzó el problema para que alguien trabajara rigurosamente en encontrar una fórmula para esta distribución, quien lo hizo fue Wien en 1893; aunque se sabe que antes de él hubo variados intentos por describir lo mismo (Kuhn, 1987); sin embargo, el trabajo de Wien fue el primero en demostrar una solidez teórica y que además ajustaba con los experimentos a frecuencias altas.

Es importante mencionar que la fórmula para encontrar la *energía total emitida al interior del volumen* (integrada para toda ν o λ del espectro de emisión) se encontró antes que la distribución para $E(\nu, T)$.

En 1879 Stefan basado en datos experimentales obtenidos por Tyndall propuso que el integrado de la distribución para $E(\nu, T)$ era proporcional a la cuarta potencia; pero, no dio ninguna deducción teórica de esta propuesta, de lo que tiempo después en 1884 se encargaría Ludwig Boltzmann, quien estudió radiación confinada en un cilindro con un émbolo reflector. Para este estudio usó la teoría electromagnética de J. C. Maxwell y la termodinámica clásica.

Con este montaje experimental Boltzmann pudo obtener una potente formulación de la termodinámica de la radiación (Kuhn, 1987), y finalmente obtuvo la que hoy en día se conoce como *ley de Stefan-Boltzmann* (por unidad de volumen): $\frac{4\sigma}{c}T^4$, siendo σ la constante de Stefan-Boltzmann. Cabe resaltar que esta fórmula sirvió como base para encontrar la energía total emitida por unidad de tiempo y de área, que se verá con mayor detalle en la sección 3.2.2.

3.1.1. Aproximación de Wien

Wien mostró su aproximación $E_W(\nu, T)$ para la distribución de $E(\nu, T)$ en 1893. Se puede pensar en su trabajo como una extensión de lo realizado por Boltzmann en 1884, ya que basó sus técnicas experimentales en las realizadas por este último; además, usó las mismas teorías físicas generales (termodinámica y electromagnetismo). Con esto, Wien logró encontrar la forma de la función para su aproximación, dada por

$$E_w(\nu, T) = \nu^3 g' \left(\frac{\nu}{T} \right) \quad (3.2)$$

siendo $g'(v/T)$ una función por determinar.

Debido a que durante esa época en Alemania se estaban realizando variados experimentos para estudiar la emisión de distintos materiales con el objetivo de electrificar las ciudades con la construcción de focos eficientes, Wien pudo ir más allá de sólo conocer la forma que debía tener su fórmula, pues utilizando diferentes resultados experimentales además de los suyos, pudo encontrar una distribución que ajustaba correctamente a frecuencias altas.

$$E_w(v, T) = a_1 v^3 e^{-\frac{b_1 v}{T}} \quad (3.3)$$

con a_1 y b_1 dos constantes empíricas.

Este resultado hoy en día es conocido como *aproximación de Wien*, y es una ironía histórica que este resultado ajusta bien la parte cuántica de la verdadera distribución (la fórmula de Planck, que se verá con mayor detalle en las siguientes secciones) pues los experimentos de esa época no tenían acceso a la parte clásica, ya que se estudiaban los espectros de emisión de cuerpos muy calientes, tales como el Sol, llamas de gas, hierro al rojo vivo o filamentos incandescentes (Kuhn, 1987). Por otro lado, es muy importante recalcar que la Ec. (3.3) predice de manera correcta que la frecuencia de emisión más intensa del cuerpo depende de la temperatura, y que tal pico se corre de manera proporcional a ésta última, conforme el cuerpo se calienta o se enfría. Esto fue conocido como *ley de desplazamiento de Wien* (Romero, 2015).

Como dato curioso, se encontró que el exponencial de la aproximación de Wien fue inspirado por el que aparece en la distribución de velocidades de las moléculas de un gas (Romero, 2015), la cual queda descrita con la *función de probabilidad de Maxwell-Boltzmann*

$$f(V) = 4\pi \left(\frac{m'}{2\pi\kappa T} \right)^{\frac{3}{2}} V^2 e^{-\frac{m'V^2}{2\kappa T}} \quad (3.4)$$

siendo κ la constante de Boltzmann, m' , T y V la masa, temperatura y velocidad, respectivamente de las moléculas que conforman el gas.

En este punto cabe comentar que Boltzmann era atomista, por lo que pensaba que todos los fenómenos que ocurrían a escala macroscópica tenían relación con lo que ocurría a nivel microscópico; de este modo buscaba la conexión entre ambas escalas, cimentando las bases de la mecánica estadística. En particular, Boltzmann comenzó a dar un tratamiento estadístico a la segunda ley de la termodinámica,

en la que Rudolf Julius Emmanuel Clausius había introducido el concepto de entropía (S), estableciendo que dicha cantidad siempre aumenta o al menos se queda igual en cualquier proceso que ocurra en un sistema cerrado. De manera alterna se puede decir que S en un sistema térmicamente aislado nunca disminuye. Una consecuencia muy profunda es que la segunda ley establece la existencia absoluta de los procesos irreversibles de la naturaleza (Romero, 2015).

Estas ideas forman parte de la termodinámica clásica, y eran aceptadas por la mayoría de físicos de la época; no obstante, Boltzmann pudo concluir que la segunda ley no era absoluta, es decir que no siempre se cumple el hecho de que S nunca disminuye, sino que “casi” nunca disminuye, argumentando que los estados en los que S disminuye son muy poco probables. De esta manera también cuestionó la existencia de los procesos irreversibles como fundamentales de la naturaleza (Romero, 2015), Boltzmann declaró entonces que S es un resultado estadístico, representado por un número que se calcula con la Ec. (3.5).

$$S = \kappa \ln(\omega') \quad (3.5)$$

siendo ω' el número de microestados que resultan en un mismo macroestado.

Cabe resaltar que los resultados estadísticos de Boltzmann no eran aceptados por una gran parte de la comunidad científica de la época, en particular se sabe que Planck estaba inconforme con el tratamiento estadístico que daba a la segunda ley de la termodinámica, pues para él los procesos irreversibles eran fundamentales.

Como Planck conocía muy bien el problema del *CN* y el enunciado de Kirchhoff (profesor de Planck), decidió demostrar lo fundamental de los procesos irreversibles a través del estudio del establecimiento del equilibrio entre la radiación que absorbe un sistema y la que emite el mismo (Romero, 2015).

3.2. Distribución de Planck

3.2.1. Por unidad de volumen

Hasta este punto se debe tener claro que todo lo mencionado para el estudio de *CN* se ha considerado por unidad de volumen; es decir, al interior de la cavidad, aquí se continuará con lo mismo, pero desde el punto de vista como Planck lo estudió.

Planck comenzó su incursión en el estudio del *CN* desde 1890, tratando de demostrar el carácter fundamental de los procesos irreversibles. Sabiendo por Kirchhoff que la radiación al interior de la cavidad era independiente del material de las

paredes, Planck propuso modelarlas como un conjunto de N osciladores en interacción sólo con la radiación (De la Peña, 2006), cada uno de éstos tendría carga eléctrica y frecuencia ν dentro de la cavidad de CN ; de esta manera, cada oscilador es capaz de absorber y emitir radiación.

Con este modelo, Planck logró demostrar en 1897 que el establecimiento del equilibrio termodinámico de los osciladores con la radiación era realmente un proceso irreversible; no obstante, Boltzmann encontró errores en su trabajo, observando principalmente que el equilibrio debía ser entendido de manera estadística (Romero, 2015), tomando esto en cuenta, Planck logró encontrar que

$$E_P(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{u}(\nu, T) \quad (3.6)$$

siendo \bar{u} la energía promedio de cada oscilador.

Dicha formula resultó crucial para su trabajo, además se puede ver cómo encontró una nueva forma de abordar el problema lanzado por Kirchhoff en 1859, pues el encontrar la distribución de energía al interior de la cavidad ahora dependía de calcular \bar{u} para cada uno de sus supuestos osciladores. Con esto se puede apreciar el gran talento que Planck poseía como físico teórico.

Planck consideraba que la Ec. (3.3) era correcta, pues había demostrado estar de acuerdo con los experimentos de la época, de esta manera, mientras su objetivo en ese momento era encontrar \bar{u} , al mismo tiempo buscaba que se cumpliera la aproximación de Wien; en otras palabras, quería deducir nuevamente esta aproximación a partir de argumentos más generales.

Para hallar \bar{u} , Planck comenzó proponiendo una expresión de S en términos de ν y \bar{u} para su sistema de N osciladores

$$s = -\frac{\bar{u}}{b_2\nu} \left[\ln \left(\frac{\bar{u}}{\alpha_1\nu} \right) - 1 \right] \quad (3.7)$$

con $s = S/N$ la entropía por oscilador, α_1 y b_2 dos constantes por ajustar experimentalmente.

Pues teniendo s podía utilizar el siguiente resultado de termodinámica

$$\frac{\partial s}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{T} \quad (3.8)$$

Con la que lograría encontrar \bar{u} como función de ν y de T .

Derivando (3.7) con respecto a \bar{u} y usando (3.8), se obtiene

$$\frac{1}{T} = \frac{-1}{b_2 \nu} \ln \left(\frac{\bar{u}}{\alpha_1 \nu} \right) \quad (3.9)$$

De donde se puede despejar \bar{u} , quedando en términos de ν y de T como

$$\bar{u} = \alpha_1 \nu e^{-\frac{b_2 \nu}{T}} \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.10) en (3.6), se puede obtener

$$E_P(\nu, T) = \frac{8\pi\alpha_1}{c^3} \nu^3 e^{-\frac{b_2 \nu}{T}} \quad (3.11)$$

En (3.11), se puede ver que Planck encontró el valor de a_1 para la aproximación de Wien.

Aunque Planck no sabía cómo deducir o justificar la Ec. (3.7), pudo replicar la aproximación de Wien, con el plus de haber encontrado el valor de a_1 . De esta manera Planck estaba conforme con su resultado; no obstante, en octubre de 1900 los experimentos a bajas temperaturas fueron estudiados con mayor detalle. Cabe resaltar que los resultados experimentales de la época eran llevados a cabo principalmente por dos grupos, el primero a cargo de Otto Richard Lummer y Ernst Pringsheim y el segundo por Heinrich Leopold Rubens y Ferdinand Kurlbaum. Dichos experimentos comenzaron a mostrar información a bajas frecuencias, donde la aproximación de Wien demostraba no ajustar correctamente. Los experimentadores encontraron que un mejor ajuste para bajas frecuencias estaba dado por

$$E_e(\nu, T) = F_1 \nu^2 T \quad (3.12)$$

siendo F_1 una constante por ajustar experimentalmente.

Al enterarse de esto, la vida tranquila de Planck terminó, pues una vez más, el trabajo con el cual llevaba una década mostraba complicaciones; por lo que esta vez Planck estaba decidido a encontrar la distribución definitiva para $E(\nu, T)$.

Sabiendo que la Ec. (3.3) ajustaba correctamente a frecuencias altas, y que la Ec. (3.12) propuesta experimentalmente lo hacía a frecuencias bajas, Planck propuso la siguiente interpolación

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \bar{u}^2} = -\frac{F_1}{\bar{u}^2 + g(\nu)\bar{u}} \quad (3.13)$$

En la Ec. (3.13) $g(\nu)$ es una función por determinar, pero cumple que: $g(\nu) \rightarrow 0$ si $\nu \rightarrow 0$ y $g(\nu) \rightarrow \infty$ si $\nu \rightarrow \infty$. Pues en estos límites, ocurre de manera respectiva que la Ec. (3.13) toma la forma adecuada tal que integrándola una vez, usando las ecuaciones (3.8) y (3.6) se pueden obtener las ecuaciones (3.3) y (3.12).

Teniendo esto, Planck confiaba en que a partir de la Ec. (3.13) podría llegar a la fórmula que describiera la distribución de $E(\nu, T)$ para todas las frecuencias; por lo que integrando una vez la Ec. (3.13), y usando la Ec. (3.8), pudo encontrar \bar{u} como función de ν y de T de cada oscilador

$$\bar{u} = \frac{g(\nu)}{e^{\frac{g(\nu)}{F_1 T}} - 1} \quad (3.14)$$

Sustituyendo (3.14) en (3.6), y asumiendo que la Ec. (3.3) es correcta, lo cual implica que $g(\nu)$ es una función lineal en ν : $g(\nu) = b\nu$ con b una constante por determinar, entonces la expresión resultante es

$$E_P(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{b\nu^3}{e^{\frac{b\nu}{F_1 T}} - 1} \quad (3.15)$$

Este resultado fue presentado por Planck en octubre de 1900 en la Academia Prusiana de Ciencias. Rubens verificó casi de manera inmediata que la Ec.(3.15) ajustaba de manera correcta para todas las frecuencias según los datos experimentales, y en cuanto pudo se lo hizo saber a Planck, quien al enterarse de esto supo que la clave para dejar completamente resuelto este problema, era encontrar la entropía asociada a los osciladores; por lo que en este punto de la historia, Planck tuvo que aceptar por completo las ideas estadísticas de Boltzmann, pues esta vez consideraba utilizar la Ec. (3.5), con la que anteriormente Boltzmann había deducido la entropía de un gas ideal. Para poder utilizar esta ecuación, el primer problema que Planck encontró era hallar ω' ; es decir, contar cuántos estados hay en su modelo considerado tal que la energía total de los osciladores con frecuencia ν sumen una energía total U .

Para que el conteo mencionado en el párrafo anterior sea finito, Planck tuvo que suponer que U se podía partir en n pedazos iguales de energía ε , de tal manera que $U = n\varepsilon$. Esta hipótesis demuestra el grado de desesperación que Planck tenía por resolver este problema a como diera lugar, pues suponer que la energía se propagaba de manera discreta, rompía por completo sus ideales clásicos de

termodinámica, además de haber tenido que aceptar por completo las ideas estadísticas de Boltzman.

Después de un arduo trabajo con cálculos estadísticos, los cuales cabe mencionar eran muy poco conocidos durante esa época (Romero, 2015), Planck pudo encontrar una fórmula para ω'

$$\omega' = \frac{(N+n-1)!}{(N-1)!n!} \quad (3.16)$$

Teniendo ω' , Planck substituyó este valor en la Ec. (3.5), donde después de ciertos ajustes, y usando la Ec. (3.8), pudo encontrar

$$\bar{u} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{\kappa T}} - 1} \quad (3.17)$$

recordando que κ es la constante de Boltzmann.

Con este valor, Planck usó nuevamente la Ec. (3.6), en la que substituyó \bar{u} , obteniendo

$$E_P(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{\kappa T}} - 1} \quad (3.18)$$

Llegado a este punto, Planck apeló nuevamente a la veracidad teórica de la Ec. (3.3), a partir de la cual se puede deducir junto con la Ec. (3.18) que $\varepsilon = h\nu$, siendo h la *constante de Planck*. Obteniendo finalmente la *distribución de energía por unidad de volumen* al interior de la cavidad

$$E_P(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{\kappa T}} - 1} \quad (3.19)$$

Esta deducción la presentó Planck en la Academia Prusiana de Ciencias el 14 de diciembre de 1900 (Romero, 2015).

La Ec. (3.19) se puede expresar en términos de λ , y se puede hacer mediante la relación

$$\nu\lambda = c \quad (3.20)$$

Pues de ella se sigue que

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \quad (3.21)$$

Considerando un determinado intervalo del espectro, que puede definirse en términos de la frecuencia como ν y $\nu + \delta\nu$, o en términos de λ entre λ y $\lambda + \delta\lambda$. Se obtienen la siguiente relación para este intervalo (Eisberg, 2000).

$$E_P(\lambda, T)\delta\lambda = -E_P(\nu, T)\delta\nu \quad (3.22)$$

“Ya que ambos miembros son iguales a la energía contenida por cm^3 en ese intervalo de espectro. (el signo menos se compensa por el hecho de que, de acuerdo con la Ec. (3.21), $\delta\lambda$ y $\delta\nu$ tienen signo opuesto)” (Eisberg, 2000). Aquí resulta interesante comentar que el producto de $E_P(\lambda, T)$ con $\delta\lambda$ representa el número de osciladores (del modelo supuesto por Planck) por unidad de volumen contenidos en el intervalo de λ ($\lambda, \lambda + \delta\lambda$), y se le conoce como *densidad de modos* (De la Peña, 2006), análogamente ocurre lo mismo para la variable ν .

Usando las ecuaciones (3.21) y (3.22) se puede obtener

$$E_P(\lambda, T) = -E_P(\nu, T) \left(\frac{-c}{\lambda^2} \right) \quad (3.23)$$

Despejando ν de la ecuación (3.20), sustituyendo éste valor en (3.19) y usando la ecuación (3.23) se obtiene

$$E_P(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (3.24)$$

3.2.2. Por unidad de área

En la sección anterior se describió la distribución de energía por unidad de volumen $E_P(\nu, T)$ al interior de la cavidad. En ésta, se verá la *emisión por unidad de superficie*, tiempo y λ a una determinada temperatura $B(\lambda, T)$; que en el modelo de CN de Kirchhoff sería la radiación que es emitida al interior de la cavidad y que después pasa hacia afuera por el área del hoyo.

La Ecuación que describe $B(\lambda, T)$ se puede obtener a partir de la Ec. (3.1), pues ésta relaciona la emisividad por unidad de área de la cavidad de cuerpo negro $e_\nu(\theta_1, T)$ con $E(\nu, T)$; sabiendo que ésta última queda definida con la Ec. (3.19), haciendo los cálculos necesarios y el cambio de variable a λ , se puede encontrar el valor de $B(\lambda, T)$.

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (3.25)$$

Comparando las ecuaciones (3.25) y (3.24), se ve que en lugar del factor 8π , se coloca 2, y esto tiene relación con la geometría de la cavidad, pues cuando es 8π se toma en cuenta el área total de la esfera (integración del ángulo sólido Ω sobre la superficie total de la esfera), y cuando el factor es 2, se trata con el área proyectada dA_s del ángulo sólido sobre la esfera, tal como se aprecia en la Fig.3.2.

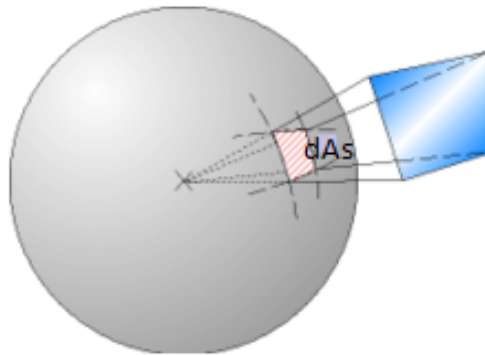


Figura 3.2: Área proyectada en una esfera con base a un determinado ángulo sólido

Otro cambio que se puede observar es el de c por c^2 , el cual se entiende una vez realizado el análisis dimensional, pues cuando se lleva a cabo se obtienen dimensiones de $W \cdot m^{-2}$, correspondientes a un flujo por unidad de superficie, mientras que la Ec. (3.25) en la que aparece la velocidad de la luz de manera lineal tiene dimensiones de $J \cdot m^{-3}$, correspondientes a una densidad energética.

A continuación se dará una breve descripción de dos hechos que cumplen la Ec.(3.25):

1.-Cuando se calienta una barra de hierro, ésta cambia de color debido al incremento de su temperatura; el motivo de los colores observados hasta llegar al “rojo vivo” se debe a que la superficie de la barra emite radiación como si fuera un CN; además, en este ejemplo se puede visualizar la ley de desplazamiento de Wien, pues conforme aumenta su temperatura, λ disminuye, observándose las tonalidades rojizas en la barra caliente de hierro.

2.-En una estrella se tienen temperaturas muy elevadas, que se deben a la *fusión termonuclear* que ocurre en su interior; fusionando hidrógeno en helio. Hablando

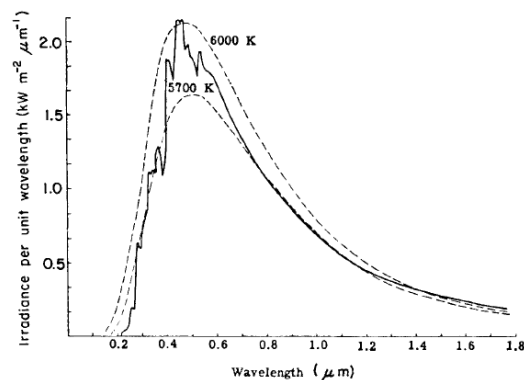


Figura 3.3: Espectro de radiación del Sol (línea continua), y curvas de *CN* (líneas punteadas) para temperaturas de 5700K y 6000K (Fleagle y Businger, 1980).

específicamente del Sol, su núcleo alcanza temperaturas del orden de 15 millones de K , provocando que la fotosfera emita radiación electromagnética y *viento solar*, compuesto principalmente por partículas cargadas como protones, electrones y partículas alfa. El punto importante de este ejemplo es hacer notar que la radiación emitida por el Sol, se ajusta de manera muy aproximada a las curvas de *CN* con temperaturas de 5700K y 6000K, tal como se puede apreciar en la Fig. 3.3.

El hecho de que estos fenómenos cumplan la Ec. (3.25) se debe a que en ambos casos se emite a través de un área, ya sea la superficie completa de la estrella o una región específica del hierro incandescente; en estos ejemplos además se hace evidente uno de los intereses de Planck acerca de este estudio, y es el hecho de que la radiación emitida por un cuerpo, es independiente de las características del material emisor, ya que en los ejemplos mencionados, los materiales emisores son: hierro y plasma, comportándose ambos de la misma manera en cuanto a emisión radiativa.

Anteriormente se vio la ley de Stefan-Boltzmann por unidad de volumen, aquí se da su análogo por unidad de superficie, siendo el resultado de integrar la Ec. (3.25) en todas las longitudes de onda de emisión, dando un flujo de energía con valor de σT^4 , que en los ejemplos considerados significaría calcular la energía total emitida por unidad de superficie y de tiempo a través de la fotosfera, o de la superficie de la barra de hierro.

3.2.3. Comentarios por observaciones de la ley de radiación de Planck

Un tema importante que se trata en esta subsección es la distribución de Rayleigh y Jeans, la cual no se incluyó en el desarrollo histórico del estudio de *CN* porque es posterior al trabajo final de Planck (que explica correctamente la emisión de *CN*); además que su forma final no incluye término exponencial, a diferencia de las aproximaciones de Wien y de Planck, así como la ley de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann, que sí incluyen término exponencial, por esta razón se decidió incluirla en esta subsección.

La fórmula de Rayleigh surgió como una crítica a la Ec.(3.3), dando sus principales fundamentos conceptuales en una nota del *Philosophical Magazine* en junio de 1900 (Kuhn, 1987). “La ley de Wien, decía Rayleigh, hace que la densidad de energía radiante (en λ) a una longitud de onda concreta sea proporcional a $\lambda^{-5}e^{-a\lambda T}$. Si fuese correcta, entonces la energía dejaría de aumentar con la temperatura cuando λT fuese grande comparado con la constante a conocida; además, señalaba Rayleigh, el corte debería ocurrir dentro de un intervalo experimental accesible” (Kuhn, 1987).

Con esto, se infiere que las críticas de Rayleigh a la Ec.(3.3) son en el sentido de mencionar que falla para longitudes de onda larga; ante esto, Rayleigh propone modificarla por

$$E_R(\lambda, T) = b_2 \lambda^{-4} e^{-a_2/\lambda T} \quad (3.26)$$

La Ec. (3.26) no es la que hoy en día se conoce como ley de radiación de Rayleigh y Jeans, ésta surgió hasta 1905, y difiere de la la Ec. (3.26) en el valor de la constante de proporcionalidad, el cual Jeans corrigió, pues el valor que Rayleigh había dado era incorrecto, ya que había contado modos de vibración de más en su supuesto teórico, el cual se basaba en representar el campo electromagnético dentro de la cavidad mediante las vibraciones de un medio elástico, modelo que cabía esperar de alguien que era experto en la teoría del sonido (Kuhn, 1987). Una vez realizado el ajuste de Jeans, la fórmula resultante es

$$E_{RJ}(\lambda, T) = 8\pi\kappa T \lambda^{-4} \quad (3.27)$$

Además de dar el valor correcto de la constante de proporcionalidad, se debe notar que la (3.27) no incluye término exponencial, el motivo de esto último no logró aclararse, pero quizá se deba a ajustes experimentales; mencionar esto es interesante, ya que es un cambio que rompe con la forma de las aproximaciones obtenidas anteriormente, primero por Wien y después por Planck (ecuaciones (3.3) y

(3.11), respectivamente).

Presentada la fórmula de Rayleigh y Jeans, es importante comentar que por un lado, existe la creencia de que Planck conocía la validez del resultado a frecuencias altas, la ley de Wien, y a bajas, la ley de Rayleigh y Jeans, y que en base a esto construyó la interpolación correcta; sin embargo, Esto es falso, ya que la ley de Rayleigh y Jeans fue posterior y se publicó en parte también como una crítica válida a los trabajos de Planck, pues no había razón para creer en sus ideas revolucionarias (cuánticas).

Rubens y Kurlbaum demostraron experimentalmente que la ley de Rayleigh y Jeans ajustaba sólo para longitudes de onda largas, y fracasaba para las cortas (o frecuencias altas), “no había razón alguna para tomarla en serio. Menos de seis meses después de nacer fue desechada. Ni siquiera Planck, normalmente tan meticuloso, mencionó para nada la contribución de Rayleigh” (Kuhn, 1987).

La ley de radiación de Rayleigh-Jeans dio origen a lo que más tarde en 1911 Paul Ehrenfest denominó como *catástrofe ultravioleta* en una monografía para explicar el trabajo de Planck (Romero, 2015), la cual queda más clara si se considera la Ec. (3.27) en términos de ν

$$E_{RJ}(\nu, T) = 2\pi c^{-2} \nu^2 \kappa T \quad (3.28)$$

Debido a que la Ec. (3.28) depende de la frecuencia al cuadrado, se puede ver claramente que conforme aumenta ν , la energía también lo hace y sin ningún límite, de esta forma se puede entender que la energía tiende al infinito si la frecuencia crece. Dado que el efecto es notorio para la radiación con frecuencias en el ultravioleta, Ehrenfest decidió nombrar esta problemática como *catástrofe ultravioleta*, pero se debe tener claro que este hecho no sirvió como inspiración a Planck para el desarrollo de su ley de radiación; no obstante, si se quisiera entender la historia de manera lineal (como regularmente se hace en cursos de introducción a la mecánica cuántica), podría pensarse que la ley de Planck terminó por ajustar la distribución de energía para el *CN* en todas las frecuencias, arreglando las problemáticas que surgieron de la ley de Wien (que ajustaba para frecuencias altas) y la de Rayleigh-Jeans (que ajustaba para frecuencias bajas).

Hasta este punto se ha entendido la manera en cómo la ley de radiación de Rayleigh-Jeans se involucra en la historia del desarrollo de la Ec. (3.19); ahora, por otro lado resulta interesante comentar que las gráficas generadas con las ecuaciones (3.19) y (3.24) son de la misma forma, lo cual es intrigante, pues éstas corresponden a la densidad energética al interior del modelo de *CN* en ν y λ , respectivamente; y al

ser variables inversas, resulta natural pensar que las gráficas tengan forma distinta en cada caso; no obstante, como ya se dijo, lo que se observa son gráficas con la misma forma, lo cual, aunque no se justifica de manera rigurosa, aquí se comenta que se puede deber a la forma que tienen las ecuaciones (3.19) y (3.24); pues si se observa con detalle, la Ec. (3.19) se compone de una función creciente y una decreciente, para ver esto de una manera más didáctica, se descompone ésta ecuación, resultando

$$E_P(\nu, T) = k_1 \nu^3 \frac{1}{e^{k_2 \nu} - 1} \quad (3.29)$$

siendo k_1 y k_2 la combinación de constantes vistas en la Ec. (3.19).

De esta manera se ve que ν^3 es la función creciente y $\frac{1}{e^{k_2 \nu} - 1}$ la decreciente. Análogamente se puede simplificar la Ec. (3.24), resultando la Ec. (3.30); en este caso la función decreciente es $\frac{k_3}{\lambda^5}$ y la creciente es $\frac{1}{e^{k_4 \lambda^{-1}} - 1}$.

$$E_P(\lambda, T) = \frac{k_3}{\lambda^5} \frac{1}{e^{k_4 \lambda^{-1}} - 1} \quad (3.30)$$

con k_3 y k_4 igual a la combinación de constantes dadas en la Ec. (3.24).

Puestas las distribuciones de esta manera se observa con mayor facilidad que ambas se componen del producto entre una función creciente y una decreciente; además, se nota que en el caso de la fórmula en términos de λ la exponencial es función creciente con argumento λ , y en el caso de la fórmula en términos de ν , la exponencial con argumento ν se encuentra como función decreciente en el denominador; la rapidez con la que crecen y decrecen estas funciones se ve atenuada respectivamente por: $\frac{k_3}{\lambda^5}$ y $k_1 \nu^3$, con esto se puede pensar que las potencias a las que están elevadas estas dos últimas funciones es la adecuada para atenuar la rapidez con la que crecen y decrecen las funciones anteriores, generando gráficas con forma similar en ambas variables. De este modo se puede tener una idea de por qué las curvas generadas con las distribuciones en ν y λ son de la misma forma, además de que esto es un resultado puramente matemático, pues físicamente representan lo mismo. Otro punto interesante por comentar acerca de la ley de radiación de Planck es su uso en espectroscopia, específicamente en la medición de absorción y emisión en gases, pues para este tipo de estudios se utiliza la fórmula de Planck en términos del número de onda η , que suele no enseñarse; la forma que adquiere la fórmula de Planck en esta variable queda como la Ec. (3.31) (Government Degree College Kulgam, 2004).

$$B(\eta, T) = 2hc^2\eta^3 \frac{1}{e^{\frac{hc\eta}{kT}} - 1} \quad (3.31)$$

Sabiendo que la Ec.(3.31) se utiliza en la medición de espectroscopia en gases, conviene explicar los principios físicos de emisión en éstos.

Para entender con mayor claridad la emisión en gases, se puede iniciar la explicación con un gas monoatómico, sobre el que incide un fotón, que es absorbido por el átomo, de esta manera éste último se excita y los electrones que lo conforman pueden subir a niveles superiores de los orbitales permitidos por la *teoría atómica de Bohr*. En este estado el átomo es inestable, por lo que busca regresar a su estado original de energía, y la manera en cómo lo hace es emitiendo un fotón (distinto al absorbido), cuya frecuencia se registra con una *línea de emisión* en un *espectro de emisión*.

Cuando se agrega un segundo átomo al gas, comienzan a aparecer más líneas de emisión, esto se debe a que se incluyen nuevas formas de movimiento, o *grados de libertad*; los cuales son rotación y vibración.

Conforme más átomos sean agregados, se formará un *gas poliatómico*, el cual puede generar espectros de emisión en los que se pueden observar *bandas continuas de emisión*, formadas por la superposición de diferentes líneas de emisión.

Sabiendo los principios físicos de emisión en gases, resulta interesante explicar lo que ocurre en líquidos y sólidos.

Para el caso de un líquido la información encontrada en la bibliografía fue escasa; no obstante, se puede suponer que al ser un estado de la materia en el que la cercanía entre sus moléculas es mayor y además el camino por el que se pueden trasladar los átomos es menor que en un gas poliatómico, se espera ver espectros en los que las bandas de emisión sean más anchas que para un gas poliatómico.

En el caso de un sólido, los átomos se encuentran extremadamente cerca, por lo que en este caso sólo se puede hablar del grado de libertad de vibración, de esta manera, el movimiento de un átomo afecta inmediatamente a su vecino, y así sucesivamente para cada uno de los átomos que conformen al sólido, con esto se puede entender que los espectros para un sólido estén completamente llenos por bandas de emisión superpuestas.

Capítulo 4

Radiación solar y terrestre

4.1. Espectro atmosférico

Varios elementos del sistema climático se comportan como CN para radiación de onda larga; tal es el caso de los océanos, nubes y el continente; Por su parte, la atmósfera tiene un comportamiento espectral diferente: selectivo, según λ (Garduño, 2003).

En este estudio se supone una atmósfera sin nubes, por lo que se ignora la radiación emitida por éstas, así como su albedo ρ , el cual sí se considerará en la siguiente sección.

El comportamiento selectivo de la atmósfera se debe a que la parte del flujo de energía emitido por la fotosfera solar (radiación de onda corta) con una temperatura representativa T_F de $6000K$ que llega a la Tierra, atraviesa “casi” en su totalidad libremente la atmósfera terrestre, el decir “casi” se debe a que el vapor de agua presente en ésta última absorbe el infrarrojo, mientras que los rayos UV tienen la energía suficiente para *disociar* moléculas de oxígeno O_2 , formando dos oxígenos atómicos $2O$, los cuales después se pueden enlazar a una molécula de O_2 , formando ozono O_3 .

En el párrafo anterior se describió cómo se forma O_3 ; y en éste se ve la manera en cómo se destruye, pues de lo contrario no habría un equilibrio del mismo en la atmósfera. La eliminación de O_3 también se debe a un proceso de disociación causado por los rayos UV , pues cuando éstos entran en contacto con O_3 , se genera O y O_2 ; cabe resaltar que en ésta última molécula el proceso descrito en el párrafo anterior se puede repetir, formando el llamado *ciclo de Chapman*.

Estas regiones de absorptividad a_λ (o emisividad e_λ) y transmisividad τ_λ en la atmósfera se aprecian en la Fig. 4.1b. En cuya parte izquierda se puede ver que la radiación proveniente de la fotosfera del Sol atraviesa casi libremente la atmósfera; encima de esta región, en la Fig. 4.1a se encuentra el espectro de CN de la fotosfera $B(\lambda, T_F)$ normalizado a uno en la λ donde se alcanza la emisión máxima (λ_{max}) y por lo tanto adimensional, con el eje λ en escala logarítmica.

En la parte derecha de la Fig. 4.1b se puede ver que la atmósfera es “casi” totalmente opaca al flujo de energía emitido por la superficie terrestre σT_S^4 (radiación de onda larga) con una *temperatura de piel* (o de la superficie de la Tierra) T_S representativa con valor de $255K$, en cuya parte superior se ve de manera análoga a lo que se hizo para la fotosfera, el espectro de CN para la Tierra $B(\lambda, T_S)$.

Gases como el vapor de agua, metano CH_4 , óxido nitroso N_2O , dióxido de carbono CO_2 y O_3 conocidos como gases de efecto invernadero GEI (que se verán con mayor detalle en la sección 4.5), son responsables de la opacidad de la atmósfera al flujo σT_S^4 .

La razón por la que la atmósfera no se pueda considerar CN para la radiación de onda larga del flujo σT_S^4 , es porque existe una región de transparencia por la que puede salir o entrar libremente a la Tierra radiación con longitudes de onda que se encuentren aproximadamente entre el intervalo formado por $\lambda_1 = 8\mu$ y $\lambda_2 = 13\mu$. Estas regiones de a_λ y τ_λ en la atmósfera se aprecian en la parte derecha de la Fig. 4.1b.

Es importante comentar que el espectro de la Fig. 4.1b considera la atmósfera completa, a diferencia de la Fig. 4.2, en la que se toma solamente una “delgada” capa atmosférica (Johnson, 1954).

Para calcular la radiación emitida por la atmósfera, Simpson (1928) citado por Adem (1962) consideró como hipótesis de trabajo una “delgada” capa atmosférica al nivel del mar (Johnson, 1954), la cual contiene sólo 0.3 mm de agua precipitable y 0.06 g de CO_2 por cm^2 , y emite como CN para longitudes de onda entre 5.5μ y 7μ y de 14μ hasta el final del espectro, siendo transparente para las longitudes de onda de 8.5μ a 11μ . Él asumió además que la radiación es parcialmente emitida para longitudes de onda entre 7μ y 8.5μ y de 11μ a 14μ .

El párrafo anterior surgió del texto de Adem (1962), que cita a Simpson (1928), pero Adem basó su trabajo en el libro de Johnson (1954).

Las regiones de a_λ y τ_λ del modelo de Simpson se pueden apreciar en la Fig.4.2,

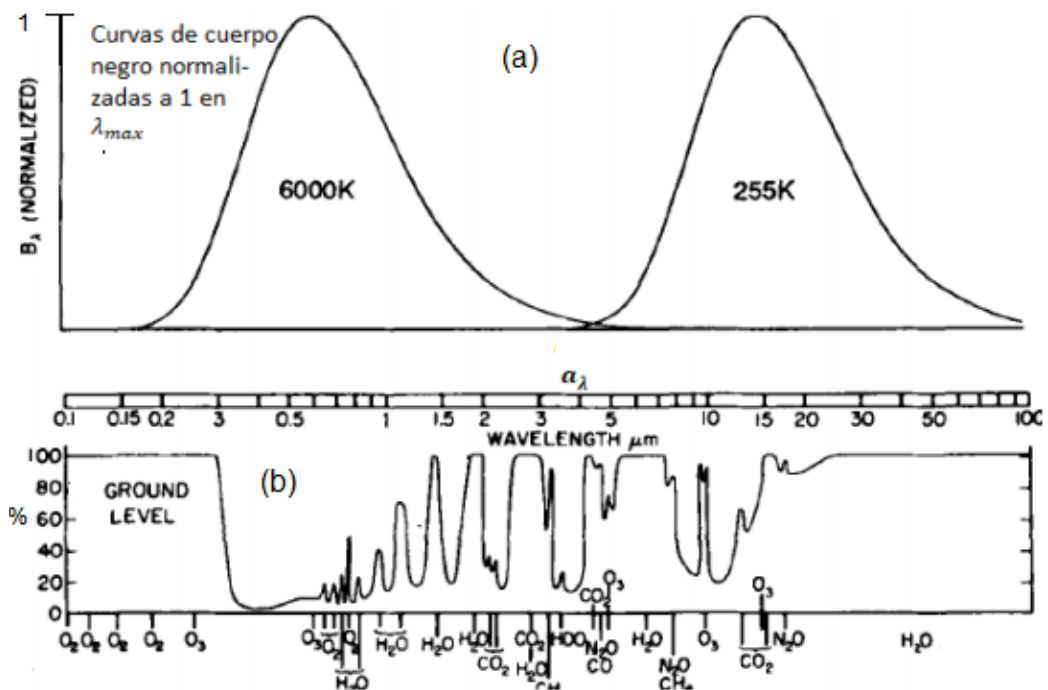


Figura 4.1: En la parte a) se ilustran los espectros de emisión normalizados a 1 en λ_{max} para la fotosfera $B(\lambda, T_F)$ (a la izquierda) y la Tierra (a la derecha). El eje λ se encuentra en escala logarítmica y en unidades de micras. En la parte b) se ve α_λ y τ_λ en por ciento de los gases presentes en la atmósfera completa, especialmente los *GEI*, Adaptado de (Hartmann, 1994) quien a su vez lo toma de (Goody y Yung, 1989).

en la que es interesante hacer notar que si en la Fig.4.1 se superpusieran su parte b con la parte a, para la Tierra, se notaría el espectro más lleno que lo que se aprecia en la Fig. 4.2, esto se debe a que en la Fig.4.1 se considera la atmósfera completa, y en la 4.2 se muestra el espectro de una “delgada” capa atmosférica superficial (Johnson, 1954).

Adem (1962) simplificó aún más el ya simplificado modelo de Simpson, considerando que la atmósfera emite como *CN* de 0 a 8μ y de 13μ a ∞ , siendo transparente en la región de 8μ a 13μ , tal como se muestra en la Fig.4.3; cabe resaltar que ésto fue un gran avance en la modelación de la atmósfera, porque antes nadie consideraba la “ventana” atmosférica, tratándola de manera general en física del clima como un cuerpo gris.

Con el modelo de Adem y haciendo uso de la aproximación de Wien por unidad de área, que es igual a la Ec. (3.25) (distribución de Planck por unidad de área) sin el -1 en el denominador, se puede calcular la radiación emitida por la parte opaca

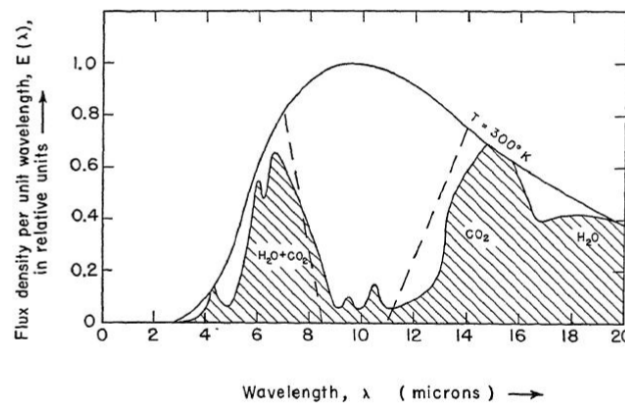


Figura 4.2: Espectro de la delgada capa superficial atmosférica supuesta por Simpson, modulado por una curva de CN con una temperatura de $300K$ normalizado a 1 en λ_{max} y el eje λ aparece de manera lineal. Las regiones sombreadas corresponden a los límites de a_λ para el vapor de agua y CO_2 (principales GEI) (Johnson, 1954).

de la atmósfera, pues esta cantidad equivale a la resta del flujo total emitido por la capa atmosférica considerada menos la región de transparencia representada por el área $ABCD$ en la Fig.4.3, cuyo valor se puede calcular integrando la aproximación de Wien por unidad de área entre $\lambda_1 = 8\mu$ y $\lambda_2 = 13\mu$. Cabe resaltar que esta aproximación es integrable por intervalos de λ , a diferencia de la ley de Planck que sólo es integrable considerando todas las longitudes de onda de emisión.

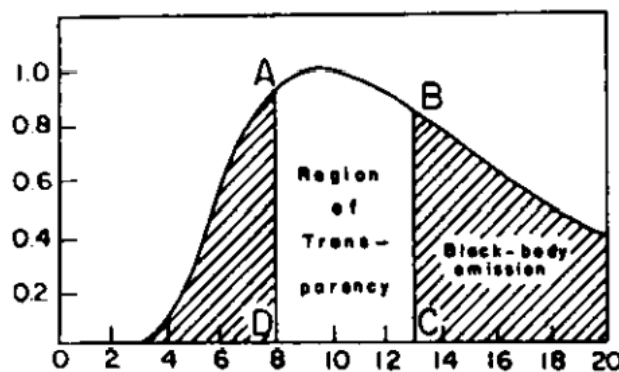


Figura 4.3: Espectro de emisión usado por Adem con una T de $300K$, normalizado a 1 en λ_{max} y el eje λ aparece de manera lineal, las regiones sombreadas representan la a_λ atmosférica, mientras que el área $ABCD$ la región de τ_λ (Adem, 1962).

En la región de transparencia de la atmósfera puede pasar parte del flujo σT_S^4 emitido por la superficie hacia el espacio exterior, siempre y cuando se encuentre entre las longitudes de onda que se aprecian en la Fig.4.3; además de esta radia-

ción, hacia el espacio también puede pasar la radiación que es emitida por la parte opaca de la atmósfera superior.

4.2. Temperatura efectiva planetaria

El análisis que sigue es para la Tierra, pero se puede aplicar para cualquier planeta sólido con geometría esférica y sin atmósfera (como estructura vertical), pues este modelo sí considera la existencia de nubes.

La Tierra dista del Sol $1.5 \times 10^{11} m$ en promedio, la cantidad de energía proveniente de éste que llega a la Tierra es conocida como *irradiancia solar total TSI*, por sus siglas en inglés, pues representa el flujo de energía incidente por unidad de tiempo y de área perpendicular al rayo en diferentes regiones del espacio. Para la Tierra tiene un valor promedio de $I_0 = 1367 W m^{-2}$, la superficie frontal al Sol sobre la cual incide esta energía es un círculo de área $A_f = \pi r^2$, consecuencia de suponer a la Tierra como una esfera de radio r , tal como se aprecia en la Fig. 4.4.

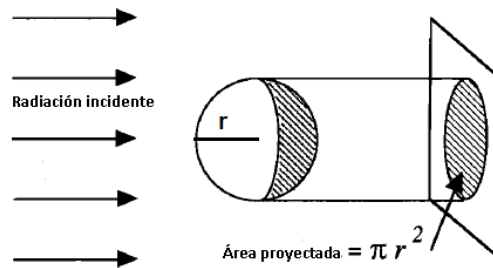


Figura 4.4: Radiación solar que llega al área que la Tierra apunta de frente al Sol, siendo ésta un círculo de área πr^2 , consecuencia de suponer a la Tierra como una esfera de radio r (Hartmann, 1994).

En la sección anterior se asumió una atmósfera sin nubes, pero aquí son fundamentales para calcular la fracción de *TSI* que es absorbida por la superficie de la Tierra, pues esta cantidad es proporcional a la resta $1 - \rho_p$ (siendo ρ_p el *albedo planetario*), “el porcentaje promedio con el que las nubes contribuyen al albedo de la Tierra es cercano al 75 %” (centro Mario Molina, 2016). Es interesante saber que la atmósfera sin nubes también contribuye con ρ_p , pues como se vio en la sección de interacción entre radiación y materia, el azul del cielo se debe a la dispersión de la luz, la cual se puede pensar como una reflexión desordenada. Con esto en mente, la energía total que es absorbida por la superficie terrestre a_T queda dada por (comunicación personal con Garduño René), (Besson, 2009).

$$a_T = I_0 A_f (1 - \rho_p) \quad (4.1)$$

En este punto cabe recalcar el hecho de que a_T ocurre sobre la cara frontal que la Tierra apunta al Sol, siendo ésta un disco de área πr^2 , en cambio por su rotación la Tierra emite por toda su superficie (con valor de $4\pi r^2$) el flujo σT_S^4 , de tal manera que la energía total emitida por la superficie terrestre queda como

$$e_T = 4\pi r^2 \sigma T_S^4 \quad (4.2)$$

Igualando las ecuaciones (4.1) y (4.2) resulta

$$I_0 A_f (1 - \rho_p) = 4\pi r^2 \sigma T_S^4 \quad (4.3)$$

Despejando T_S de la Ec.(4.3) que bajo estas condiciones es conocida como *temperatura efectiva* T_e , o de equilibrio queda

$$T_e = \sqrt[4]{\frac{I_0 (1 - \rho_p)}{4\sigma}} \quad (4.4)$$

De la Ec. (4.4) es interesante observar que el valor de T_e únicamente depende de I_0 y de ρ_p (con valor promedio de 0.3), ya que σ es una constante y las dimensiones de la Tierra no se toman en cuenta, pues al dividir la Ec.(4.3) por $4\pi r^2$, únicamente queda la razón de 1/4, el cual es conocido como *factor de forma*, y en este caso tiene este valor porque la Tierra es una esfera.

Sustituyendo los valores de I_0 y de ρ_p para la Tierra en la Ec. (4.4), se encuentra que $T_e = 255K$ ó $-18^\circ C$; $33^\circ C$ menos que el valor típico al nivel del mar, esto se debe a que como se mencionó al principio, este modelo ignora la estructura vertical de la atmósfera y por ende su *efecto invernadero* (que se verá con mayor detalle en la sección 4.5).

4.3. Espectros ajenos del Sol y de la Tierra

La Tierra y el Sol se aproximan a un *CN* para longitudes de onda larga y corta, respectivamente, por lo que su emisión se puede describir usando la Ec. (3.25) y la *ley del desplazamiento de Wien*, ésta última ya se introdujo en el Capítulo 3, aunque de manera cualitativa, pues se mencionó cómo es que los picos máximos de emisión son proporcionales a la temperatura, pero aquí sí es necesario introducir la fórmula con la que se calcula λ_{max} .

$$\lambda_{max} = \frac{c\lambda}{T} \quad (4.5)$$

con $c\lambda \simeq 2.89 \times 10^{-3} mK$.

Sustituyendo la Ec. (4.5) en (3.25) se obtiene

$$B(\lambda_{max}, T) = \frac{2hc^2}{(c\lambda T^{-1})^5 e^{\frac{hc}{c\lambda k}} - 1} \quad (4.6)$$

Desarrollando la potencia en el denominador, y reacomodando los términos, la ecuación (4.6) se puede expresar como

$$B(\lambda_{max}, T) = T^5 \frac{2hc^2}{(c\lambda)^5 e^{\frac{hc}{c\lambda k}} - 1} \quad (4.7)$$

En la Ec.(4.7) se puede observar que la parte derecha del segundo miembro contiene sólo valores constantes, por lo que se pueden reducir a un sólo valor, ζ , resultando

$$B(\lambda_{max}, T) = \zeta T^5 \quad (4.8)$$

siendo ζ una constante con valor de $4.1 \times 10^{-12} Wm^{-2}\mu^{-1}K^{-5}$. Cabe resaltar que esta ecuación es deducción propia, y no suele aparecer en libros de física relacionados con el tema.

Con la Ec.(4.8) se puede calcular la *energía máxima emitida* por un CN $B(\lambda_{max}, T)$; resultando un valor de $3.19 \times 10^7 Wm^{-2}\mu^{-1}$ para el Sol, y de $44 Wm^{-2}\mu^{-1}$ para la Tierra. En estas unidades es importante resaltar que el m^{-2} corresponde a la unidad de superficie del flujo de energía, y μ al intervalo λ de emisión.

Los valores de $B(\lambda_{max}, T)$ para la Tierra y el Sol difieren en 7 ordenes de magnitud, y la razón entre áreas de sus espectros de CN integrados tiene un valor de aproximadamente 3.06×10^5 ; debido a esto, es imposible ver ambas gráficas en una misma. Por lo que en física del clima, éstas se dibujan normalizando $B(\lambda, T)$ a 1 en λ_{max} y con el eje λ en escala logarítmica, tal como se aprecia en la Fig. 4.1a.

Al graficar el eje λ en escala logarítmica y normalizando $B(\lambda, T)$ a 1 en λ_{max} , se pueden apreciar en una misma gráfica un conjunto de espectros con áreas iguales para diferentes temperaturas sin importar los ordenes de magnitud de diferencia

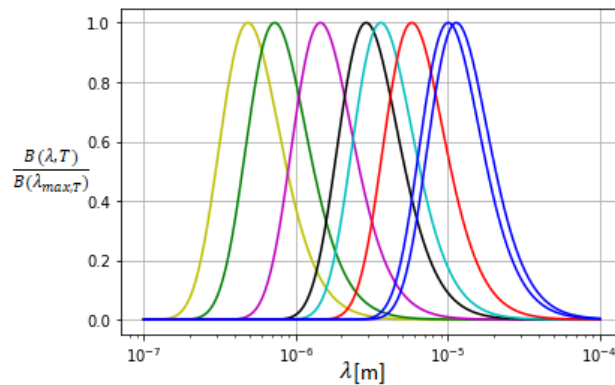


Figura 4.5: Gráficas de CN normalizadas a 1 en λ_{max} y el eje λ en escala logarítmica para temperaturas de izquierda a derecha con valores de: 6000K (temperatura representativa de la fotosfera del Sol), 4000, 2000, 1000, 800, 500, 288 (representativa para la Tierra con atmósfera) y 255K (temperatura efectiva de la tierra).

que puedan existir entre éstas; tal como se aprecia en la Fig.4.5.

Esta es una propiedad matemática muy interesante que cumple la Ec. (3.25), y es de mucho uso en física del clima, pues como los espectros tienen áreas iguales, se puede hacer una representación gráfica de la Ec. (4.3) (de equilibrio radiativo), el cual también se puede ver en la Fig. 4.5, pues el primer espectro (de izquierda a derecha) tiene la temperatura representativa de la fotosfera solar, y es ajeno al último, el cual se gráfica con la temperatura efectiva. De este modo se puede entender que el primer espectro corresponde a la fracción de radiación de onda corta que absorbe la Tierra, mientras que el último representa la cantidad de radiación de onda larga que emite, teniendo con esto un par de *espectros ajenos* que ilustran el balance radiativo del planeta en promedio global anual para un año promedio.

4.4. Superficie efectiva planetaria de emisión

Tal como se vio en la sección 4.2, la temperatura efectiva de la Tierra T_e no es igual al valor típico de su temperatura, y esto se debe a que el modelo considerado para medir T_e ignora la atmósfera, pero cuando se toma en cuenta la estructura vertical de ésta última, aparece el perfil térmico de Γ_1 (explicado en la introducción), y que es casi igual en todos lados y en todo momento.

Esto no significa que la temperatura T en la troposfera sea igual siempre y dondequiera, sino que, independientemente de la T registrada en un punto e instante, 1km encima el aire está 6.5°C más frío, a los 2km es 13°C más frío, etc.; o sea que

la temperatura de toda la troposfera cambia junto con la del aire superficial, según pase el tiempo o dependiendo de la posición en la que se mida. Esta simplificación es muy aproximada a la realidad, y suponerlo en los modelos atmosféricos da buenos resultados y facilita la modelación (Garduño, 2003).

Considerando Γ_1 , se puede entender que exista un nivel de la atmósfera sobre la superficie de la Tierra donde $T = T_e$, dicha envolvente es conocida como *superficie efectiva planetaria de emisión*.

Sabiendo la tasa de decremento Γ_1 , se puede calcular que el valor típico de T disminuye a un valor de $-17.5\text{ }^\circ\text{C}$ a los 5 km, valor próximo al calculado de T_e en la sección 4.2, por lo que aproximadamente en esta altura se ubica la superficie efectiva planetaria de emisión.

En este punto cabe mencionar que Γ_1 es consecuencia del *efecto invernadero*, que de alguna manera ya se vislumbró en la sección 4.1, cuando se vio que la radiación proveniente de la fotosfera solar ingresa casi libremente, y que después gran parte de la radiación emitida por la Tierra es atrapada por los *GEI*.

4.5. Efecto invernadero

Hasta aquí se debe tener claro que la radiación proveniente del Sol que llega a la Tierra atraviesa casi libremente su atmósfera, la parte de esta radiación que alcanza la superficie terrestre y no es reflejada, es absorbida, provocando que la superficie se caliente y después emita, calentando al aire superficial, y sucesivamente a capas superiores.

La Tierra emite radiación de onda larga, que es absorbida en gran parte por los *GEI*, que se calientan y después emiten en todas direcciones, particularmente hacia abajo, calentando aún más el aire superficial, a este proceso físico se le conoce como *efecto invernadero*, y fue propuesto por primera vez por Jean-Baptiste Joseph Fourier quien escribió: “La temperatura puede aumentar por la interposición de la atmósfera, porque el calor en estado de luz encuentra menos resistencia al penetrar el aire que la que encuentra al volver al aire una vez convertido en calor no luminoso” (Black, 2013), (comunicación personal con Goldstein Patricia).

A este fenómeno se le llama así por su analogía con un invernadero, pues la función de éste es calentar su interior para favorecer el desarrollo de plantas; sin embargo, el proceso físico por el que se incrementa la temperatura es diferente en

cada caso; Pues “en 1909 R. W. Wood llevó a cabo un experimento con dos pequeños modelos de invernadero, de los cuales uno fue cubierto con vidrio (transparente a la radiación de onda corta, pero opaco a la radiación de onda larga) y otro con sal de roca. La sal de roca es transparente para ambos tipos de radiación, ondas larga y corta. Por lo tanto, no atrapa radiación en el sentido mencionado arriba. Ambos modelos de invernadero alcanzaron casi las mismas temperaturas altas, demostrando que la efectividad de los invernaderos en el crecimiento de las plantas no es resultado de la absorción de la radiación de onda larga por el vidrio” (Fleagle y Businger, 1980).

La razón por la que un invernadero eleva su temperatura se debe al efecto mecánico que produce su cubierta, ya que anula la salida de calor por convección, y el enfriamiento debido a ventilación. “La captura de radiación por la atmósfera, es típica de ésta y dicho proceso correctamente debería ser llamado *efecto atmósfera*; sin embargo, el término efecto invernadero continúa siendo ampliamente utilizado” (Fleagle y Businger, 1980).

Suponiendo que la troposfera se pueda dividir en capas, el aire superficial formaría parte de la más baja, la que se encuentra en contacto con la superficie terrestre. Esta capa supuesta se caracteriza por tener una mayor densidad, en comparación con las superiores, ya que además de estar inmersa en un campo gravitacional, en ella predomina el vapor de agua, pues su principal fuente es la evaporación de los océanos y la evapotranspiración de plantas, animales y suelos.

Además de ser la más densa, la capa más baja también es la de mayor temperatura, pues se encuentra en contacto directo con la fuente que calienta a la atmósfera, la superficie terrestre. Aquí es importante resaltar el hecho de que la atmósfera es calentada desde abajo, y este flujo de calor hacia arriba se va atenuando, pues la primer capa absorbe más que la segunda, y esta que la siguiente, y así sucesivamente, esto ocasiona que la temperatura vaya disminuyendo con la altura, dando lugar a la formación de Γ_1 , de esta manera funciona el efecto invernadero.

Con lo dicho hasta aquí, resulta evidente que la atmósfera no tiene una temperatura uniforme en la vertical, no existe una única temperatura de emisión, pues eso significaría suponer una especie de “techo” con temperatura igual a la efectiva, si esto ocurriera, se estaría ignorando la estructura vertical de la atmósfera, lo cual dificultaría la supervivencia de los seres vivos, pues la disminución de temperatura sería muy brusca. Sin embargo, lo que realmente ocurre es la existencia de Γ_1 como un perfil vertical de temperatura en la atmósfera.

Capítulo 5

Enfriamiento (calentamiento) completo

Parte del Capítulo 2 consistió en dar una explicación de los tres mecanismos físicos fundamentales de transferencia de calor, aquí se aplica la conducción y convección a la *ley de enfriamiento de Newton*. Cabe aclarar que de aquí en adelante, aunque sólo se diga enfriamiento, la explicación de los procesos que se revisan también se aplica al calentamiento. Cuando el enfriamiento incluye radiación, se llamará *enfriamiento de Newton-Stefan* (O' Sullivan, 1900).

El enfriamiento de Newton-Stefan se plantea con una ecuación diferencial y la deducción de su solución; aunque, antes de llegar a ésta, se describirá el enfriamiento de un cuerpo con cada proceso de transferencia de calor por separado, primero por conducción-convección con la ley de enfriamiento de Newton, y después únicamente por radiación, el cual llamo *enfriamiento de Stefan*.

5.1. Ley de enfriamiento de Newton

En 1701 Newton desarrolló la ley que describe el enfriamiento de un cuerpo con temperatura T al tiempo t sumergido en un fluido, generalmente agua, aunque históricamente Newton lo desarrolló en aire con temperatura T_a menor a T . La diferencia de temperaturas es necesaria para que se inicie y mantenga la transferencia de calor por convección.

Estrictamente hablando, el enfriamiento de Newton no ocurre únicamente por convección, pues se tiene que tomar en cuenta el mecanismo de conducción, ya que éste es el inicio de la convección, pues el calor se comienza a propagar por conducción desde la superficie del cuerpo estudiado hacia la capa de aire más cer-

cana, aunque dicho proceso dura muy poco, pues casi de inmediato la densidad de las capas de aire cambia, iniciándose el proceso de convección libre (definida en la sección 2.2). Lo dicho hasta aquí se cumple también en los procesos disipativos de calor considerados en el Capítulo 2 de los elefantes y el motor de motocicleta.

Lo mencionado en el párrafo anterior es una revisión importante a los mecanismos de conducción y convección en la ley de enfriamiento de Newton, ya que regularmente se ignora el acoplamiento entre ellos; además, cabe mencionar que este estudio ignora cualquier contribución de intercambio de energía por radiación.

Debido a que $T > T_a$, el cuerpo comenzará a ceder calor Q al aire, disminuyendo su temperatura a través del tiempo, ésta tasa de cambio es proporcional a la diferencia de temperaturas del cuerpo y la del medio en el que está inmerso, esto queda expresado con (O' Sullivan, 1900)

$$\frac{dQ}{dt} = Ah_1(T - T_a) \quad (5.1)$$

siendo h_1 el coeficiente de transferencia de calor, que mide la velocidad de transferencia de calor entre una superficie sólida y un fluido por unidad de superficie y unidad de diferencia de temperatura (Connor, 2020), y A el área del cuerpo estudiado.

Usando la primera ley de la termodinámica, y sabiendo que en este proceso no se efectúa trabajo, se puede deducir que $du'/dt = -Q$ (con u' la energía interna), sabiendo que se cumple $CdT/dt = du'/dt$, la Ec. (5.1) se puede transformar en

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{h_1A}{C}(T - T_a) = \frac{\Delta T}{\tau'} \quad (5.2)$$

con $\tau' = \frac{C}{h_1A}$ y $\Delta T = T - T_a$.

La Ec. (5.2) representa la ley de enfriamiento de Newton, y es una ecuación diferencial lineal de primer orden que se puede resolver mediante separación de variables, cuya solución está dada por

$$\Delta T(t) = \Delta T(0) \exp^{-t/\tau'} \quad (5.3)$$

siendo $\Delta T(0)$ la diferencia de temperaturas al tiempo cero.

La gráfica de la solución resultante es de la forma que se aprecia en la Fig.5.1a, donde se puede ver que T disminuye de manera asintótica a T_a a través del tiempo. Este es el *proceso transitorio* de la ley de enfriamiento de Newton. El *caso*

estacionario ocurre cuando $T = T_a$, momento en el que el sistema alcanza el *equilibrio térmico*.

La validez de la ley de enfriamiento de Newton requiere el cumplimiento de algunas hipótesis (Bohren, 1991) que en general se ignoran (quizá por parecer obvias), las cuales se enlistan a continuación:

- El tamaño del objeto en enfriamiento debe ser tal que se pueda asegurar que se tiene una sola temperatura que lo describa.
- El valor de T_a es constante.
- No existen generadores de energía al interior del objeto, tales como radiactividad o reacciones químicas.
- Despreciar la pérdida de calor por radiación.

Lo descrito hasta este punto es como actualmente se acepta y entiende la ley de enfriamiento de Newton; sin embargo, hay una descripción histórica que define de manera diferente lo dicho hasta aquí, pues en los trabajos originales de Newton, no se planteó ninguna de las ecuaciones que se han presentado en esta sección, de hecho se sabe que no había fórmulas en su trabajo (Besson, 2010b), expresando verbalmente su ley: “Si tiempos iguales de enfriamiento son tomados, los grados de calor estarán en proporción geométrica” (Bohren, 1991).

De este enunciado es importante hacer notar que no existía una diferencia clara entre calor y temperatura, pues enuncia como grados de calor a lo que hoy se llama temperatura, además que a la relación exponencial de las temperaturas con el tiempo le llamaba proporción geométrica.

Finalmente, es importante mencionar que la *ley de calentamiento de Newton*, en la que ocurriría que $T < T_a$ no es común, pues en la revisión bibliográfica llevada a cabo sólo se encontró el artículo de Gokenbach y Schmidtke (2009) que habla acerca de este caso.

El comportamiento para el caso del calentamiento es similar al enfriamiento, incrementando T de manera asintótica a T_a como se aprecia en la Fig. 5.1b.

Tanto el enfriamiento como el calentamiento alcanzan un estado estacionario, y ocurre cuando la temperatura inicial del cuerpo T_i disminuye o aumenta (para el calentamiento) hasta igualarse a T_a .

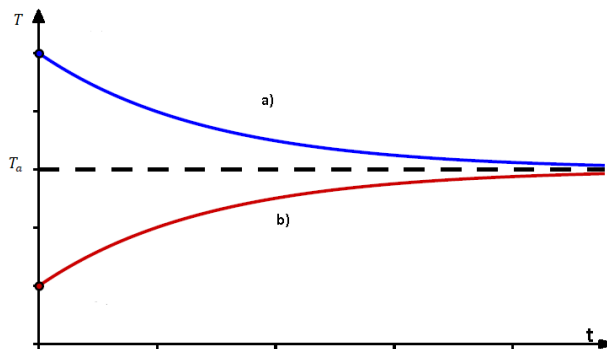


Figura 5.1: En a) se ve la Disminución de T en el cuerpo a través del tiempo t de manera asintótica a T_a , En b) el Aumento de T de manera asintótica a T_a .

5.1.1. Descripción matemática de la conducción-convección (libre y forzada)

Newton mencionaba que la exactitud de su ley mejoraba si se presenta un flujo de aire que sopla de manera uniforme sobre el cuerpo en enfriamiento (Besson, 2010a). Esto significa que la ley de enfriamiento de Newton se satisface con mayor exactitud en el caso de convección forzada (definida en el Capítulo 2) y “no siempre se sostiene con exactitud en todas las circunstancias... sin la ventilación de aire” (Martine, 1738) citado por Besson (2010b). Pues de lo contrario no se cumpliría la hipótesis 2 de la sección anterior, en la que se dijo que T_a debe ser constante.

El caso de la convección libre es más complicado, ya que además de la diferencia de temperaturas, depende de la geometría del cuerpo en enfriamiento y de las características del fluido y de su flujo. Es importante resaltar que lo complicado de este estudio es desde un punto de vista teórico, pues experimentalmente es más sencillo que la convección forzada, ya que ésta última requiere de una fuente de energía externa que ocasione que el fluido fluya; aunque, la convección forzada es más sencilla de estudiar de manera teórica que la libre.

El problema de la convección libre fue estudiado experimentalmente y teóricamente durante las últimas décadas del siglo 19 por A Oberbeck. en 1879 y L. Lorenz en 1881 citados por Besson (2010b). Su descripción teórica se basa en la Ec. (5.4), desarrollada por P. Duolong y A. Petit en 1818 citados por O' Sullivan (1900); de esta ecuación es importante resaltar que a diferencia de la Ec.(5.2), ésta describe flujo de calor, físicamente ambas describen lo mismo; pues la entrada o salida de calor del cuerpo produce variación en su energía interna (lo que describe la Ec. (5.2)).

$$\frac{dQ}{dt} = c_2(T - T_a)^{n_1} \quad (5.4)$$

siendo c_2 una constante de proporcionalidad y $\frac{dQ}{dt}$ el flujo de calor del cuerpo hacia el medio.

“Taylor establece que el valor de n_1 en la Ec. (5.4) varía entre 1.3 y 1.6, dependiendo de la libertad de circulación del aire” (O’ Sullivan, 1900); de los trabajos desarrollados por Oberbeck y Lorenz se encontró que si $n_1 = 1.3$ se describe un flujo turbulento, hecho físico que ocurre en la convección libre, por lo que se puede usar la Ec. (5.4) con $n_1 = \frac{4}{3}$ para describir este fenómeno (Besson, 2010a). Por otro lado, si $n_1 = \frac{5}{4}$ se tiene una alternativa al enfriamiento de Newton, pues este valor corresponde a un flujo laminar (Besson, 2010a), como el movimiento de las corrientes externas en la convección forzada.

5.2. Enfriamiento radiativo

Junto con sus trabajos de convección libre, en 1818, Duolong y Petit también estudiaron el calentamiento y enfriamiento de un cuerpo sólo por radiación. Siendo pioneros en este tipo de estudios, estableciendo que el enfriamiento de un cuerpo en el vacío, es dado por el exceso de su radiación emitida, en comparación con la que absorbe de sus alrededores (Besson, 2010b).

Del párrafo anterior se puede concluir que el enfriamiento de un cuerpo únicamente por radiación requiere una condición ideal, y es el hecho de reducir al máximo posible la radiación térmica emitida por los objetos que lo rodean, lo cual puede ser complicado, tal como se describirá en la siguiente sección.

5.2.1. Experimentalmente complejo

Para asegurar que la energía calorífica se transporte únicamente por radiación, es necesario el vacío, el cual se puede lograr mediante una *campana de vacío*, instrumento que permite bombear el aire desde su interior hacia el exterior, logrando condiciones cercanas al vacío dentro de ella.

Si se coloca un cuerpo con una determinada temperatura T dentro de la campana, éste emitirá radiación térmica, disminuyendo T , pudiendo asegurarse que su

enfriamiento se debe sólo al proceso radiativo, pues el enfriamiento por *conducción-convección* es despreciable, debido a las condiciones de vacío de materia; aquí cabe resaltar algo importante, y es que hay vacío de materia, pero no de radiación.

Por tercera ley de la termodinámica se sabe que todos los objetos que rodean al cuerpo en enfriamiento emiten radiación térmica, tales como el aire alrededor de la campana, la superficie de la Tierra, la campana misma, etc. Los cuales calientan al cuerpo en estudio, el cual reemite hacia los objetos que lo rodean, que se calientan y emiten nuevamente hacia el primero...

Cada uno de los objetos que rodean al cuerpo en estudio se puede considerar como *CN* a una determinada temperatura, la cual en general es diferente para cada uno, dificultando el estudio, pues se tienen que tomar en cuenta estas contribuciones de radiación térmica.

5.2.2. Matemáticamente accesible

El contenido de esta sección pertenece al trabajo de Besson (2010a) con contribuciones propias, las cuales se harán notar.

En la sección anterior se vio lo complicado que puede llegar a ser el estudio experimental del enfriamiento de un cuerpo únicamente por radiación, pues se tienen que tomar en cuenta las distintas contribuciones de radiación térmica de los objetos que lo rodean; debido a esto, una simplificación teórica que se puede hacer, es suponer el enfriamiento en un entorno cuyo comportamiento puede ser considerado como un *CN* con temperatura T_b constante que emite radiación térmica, la cual alcanza uniformemente la superficie completa del cuerpo estudiado. Esta hipótesis implica que en un supuesto experimento se trate a todos los objetos que rodean al cuerpo, y el medio en el que están inmersos como un único *CN* con temperatura T_b constante; además, cada uno de éstos no se afectan entre sí, por lo que sólo son objetos emisores, que modifican la temperatura del cuerpo en estudio, cabe resaltar que esta última observación es propia, complementando las hipótesis supuestas por Besson (2010a).

Otra contribución propia, es hacer notar que el suponer T_b constante es una hipótesis fuerte, pues al emitir, los objetos de alrededor deberían disminuir su temperatura. Esto resulta físicamente poco realista; sin embargo, esta suposición facilita la descripción matemática del proceso, pues el cambio en la energía interna $C \frac{dT}{dt}$ del cuerpo estudiado queda descrito con:

$$C \frac{dT}{dt} = -e\sigma AT^4 + a\sigma AT_b^4 \quad (5.5)$$

siendo A la superficie total del cuerpo (Otra contribución propia aquí, fue aclarar que el cuerpo se debe suponer más o menos convexo, sin recovecos, lo que permite un área bien definida), C capacidad calorífica, T la temperatura al tiempo t con valor inicial T_i , σ la constante de Stefan-Boltzmann, e y a la emisividad y absorptividad (integradas en λ), respectivamente.

El primer término de la derecha representa el flujo de energía emitido por el cuerpo, y el último la cantidad de energía que absorbe.

Suponiendo que e no depende de la temperatura (Besson, 2010a) se puede asumir que $e = a$, con esto y reordenando la Ec. (5.5) se obtiene

$$-\frac{e\sigma A}{C} dt = \frac{dT}{T^4 - T_b^4} \quad (5.6)$$

Algo importante que se puede notar desde aquí, es que en la Ec. (5.6) se ve que la función solución de la Ec. (5.5) tendrá al tiempo como variable dependiente de la temperatura, lo cual no es muy común en física.

Integrando ambos miembros de la Ec. (5.6) se obtiene

$$-\int \frac{e\sigma A}{C} dt = \int \frac{dT}{T^4 - T_b^4} = \frac{\ln|T_b - T| - \ln|T_b + T| - 2\arctan\left(\frac{T}{T_b}\right)}{4T_b^3} \quad (5.7)$$

La primitiva del miembro derecho la da Besson (2010a), aunque no da el método usado para su resolución, por lo que se comprobó el resultado resolviéndola por fracciones parciales usando el software de Wolfram (2009).

El miembro izquierdo de la Ec. (5.6) es sencillo de integrar; de este modo sabiendo ambas primitivas se puede hacer la integral definida en los intervalos $[T_i, T]$ y $[0, t]$, resultando

$$\frac{e\sigma AT_b^3 t}{C} = -\frac{1}{4} \left[\ln \frac{|T_b - T|}{|T_b - T_i|} - \ln \frac{|T_b + T|}{|T_b + T_i|} - 2\arctan\left(\frac{T}{T_b}\right) + 2\arctan\left(\frac{T_i}{T_b}\right) \right] \quad (5.8)$$

La Ec. (5.8) se puede adimensionalizar y normalizar en θ de la siguiente manera

$$\frac{e\sigma AT_b^3 t}{C} = -\frac{1}{4} \left[\ln \left(\frac{|\theta - 1|}{|\theta_i - 1|} \right) - \ln \left(\frac{|\theta + 1|}{|\theta_i + 1|} \right) - 2(\arctan(\theta) - \arctan(\theta_i)) \right] \quad (5.9)$$

con $\theta_i = \frac{T_i}{T_b}$ y $\theta = \frac{T}{T_b}$. Aquí es pertinente comentar algo que Besson (2010a) no hace, y es que adimensionalizar temperaturas no es común en física; sin embargo aquí conviene hacerlo desde un punto de vista matemático.

El término de la izquierda en la Ec. (5.9) está formado sólo por valores constantes, a excepción de la variable t , por lo que se puede definir $\gamma_1 = \frac{C}{4e\sigma AT_b^3}$ a partir de la cual se define: $\tau_1 = \frac{t}{\gamma_1}$, con lo que la Ec.(5.9) queda como

$$\tau_1(\theta) = -\ln\left(\frac{|\theta - 1|}{|\theta_i - 1|}\right) + \ln\left(\frac{|\theta + 1|}{|\theta_i + 1|}\right) + 2(\arctan(\theta) - \arctan(\theta_i)) \quad (5.10)$$

La función $\tau_1(\theta)$ es solución general de la ecuación diferencial (5.5), por lo que es la descripción matemática del enfriamiento de un cuerpo únicamente por radiación; denominado *enfriamiento de Stefan*.

De la Ec. (5.10) es interesante comentar que Besson (2010a) menciona que el segundo y tercer términos son despreciables en comparación con el primero, por lo que se puede hacer una aproximación exponencial de la misma.

Besson (2010a) coloca la Fig. 5.2 como gráfica de la Ec. (5.10), el enfriamiento se observa en la parte superior y se debe notar que aparece con las variables τ_1 y θ invertidas (apareciendo como usualmente se tratan en física), y con la condición inicial $T_i > T_b$ ($\theta > 1$ con valor inicial $\theta_i = 1.8$).

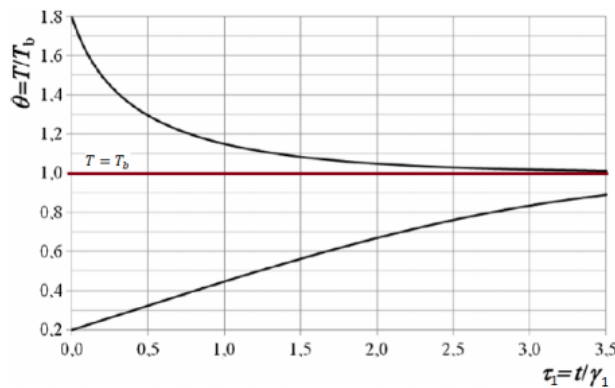


Figura 5.2: En el eje vertical se grafican valores de $\theta = T/T_b$, en el horizontal los de $\tau_1 = t/\gamma_1 = 4e\sigma AT_b^3 t/C$. ambos ejes son adimensionales y el vertical está normalizado. la curva de arriba representa el enfriamiento, y la de abajo calentamiento.

También se calcula el calentamiento, con la condición inicial $T_i < T_b$ ($\theta < 1$ con valor inicial $\theta_i = 0.2$ simétrica con respecto a $\theta = 1$), y de manera análoga al en-

friamiento, su gráfica se muestra en la parte inferior de la Fig. 5.2. En ambos casos la temperatura tiende asintóticamente a $\theta = 1$, momento en el que la temperatura T del cuerpo es igual a la del entorno T_b .

Se observa que a pesar de comenzar simétricas y terminar asíntotas ambas ramas (las funciones no cruzan al otro lado del eje en $\theta = 1$), su desarrollo es asimétrico. De aquí se sigue el curioso hecho que se observa en la Fig. 5.2 y es que el enfriamiento ocurre más rápido que el calentamiento, este es un resultado puramente matemático (consecuencia del modelo), comprobar si experimentalmente ocurre lo mismo es difícil de lograr por las razones vistas en la sección anterior.

Con lo dicho hasta aquí, se debe entender que la Fig. 5.2 se genera por pasos, primero se dibuja la rama superior (correspondiente al enfriamiento) con su condición inicial $\theta_i = 1.8$ y después la inferior (correspondiente al calentamiento) con la condición inicial $\theta_i = 0.2$ para finalmente unir ambas gráficas.

Es importante mencionar que parte de este trabajo consistió en replicar las gráficas de la Fig 5.2, y se notó que en cada caso se obtiene como resultado una gráfica que incluye 2 ramas (Ver Fig. 5.3), de las cuales sólo una tiene significado físico, cuya inversa es la que se observa en la Fig. 5.2, donde cada rama es función, ya que en la función original (no inversa) cada rama con significado físico es biyectiva y continua, condiciones suficientes para asegurar que cada una de sus inversas también son función.

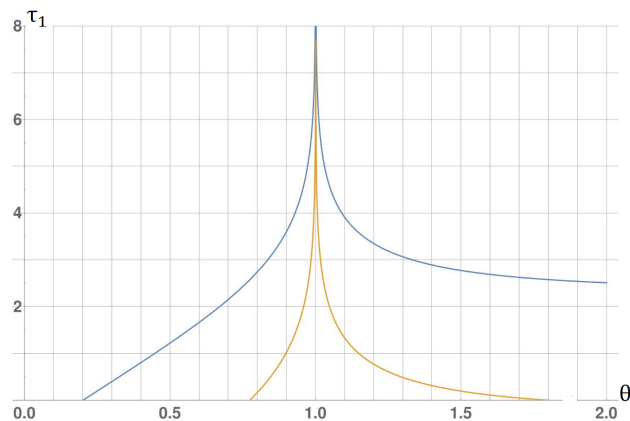


Figura 5.3: Gráfica obtenida a partir de la Ec. (5.10), las curvas naranjas corresponden al enfriamiento, con condición inicial $\theta_i = 1.8$, y las azules al calentamiento, con $\theta_i = 0.2$.

La Fig. 5.2 tiene un carácter muy matemático, pues los ejes son adimensionales, y el vertical está normalizado; además, Besson (2010a) no aclara el valor de las

constantes γ_1 y T_b que utiliza para adimensionalizar, y conocer su valor es importante, ya que proporcionan información necesaria para poder dar una interpretación física a la Ec. (5.10). Por esta razón el análisis que aparece en los siguientes párrafos se hizo con la intención de entender el trabajo desde un punto de vista más físico.

Para comenzar con la interpretación física de la Ec. (5.10) y de la Fig. 5.2, se analiza el eje vertical de ésta última relacionado con las temperaturas. Si se supone $T_b = 20^\circ\text{C}$ (temperatura de confort), se puede deducir el valor de T_i tanto para el enfriamiento como para el calentamiento, pues sabiendo que en este caso la conversión para obtener la temperatura en grados Celsius es: $T = \theta(T_b + 273) - 273$ (Besson, 2010a) y que el valor de θ_i para el enfriamiento es 1.8 (ver Fig 5.2), entonces $T_i = 254.67^\circ\text{C}$.

Análogo al enfriamiento, en el calentamiento se tiene que $T_i = -214.37^\circ\text{C}$; para poder visualizar esto, se generó una gráfica con temperatura en escala Celsius (ver Fig. 5.4); de esta última figura cabe resaltar que para pasar de τ_1 a t se supuso $\gamma_1 = 1h$, lo cual como se verá más adelante implicó entre otras cosas un volumen del cuerpo estudiado de más o menos 1/4 de litro, para lo que se requiere un material con densidad de aproximadamente $4000\text{kg}/\text{m}^3$, y la densidad del titanio se acerca a este valor, el cual tiene un $c_e = 520\text{J}/\text{kgK}$ y debería pesar 1kg .

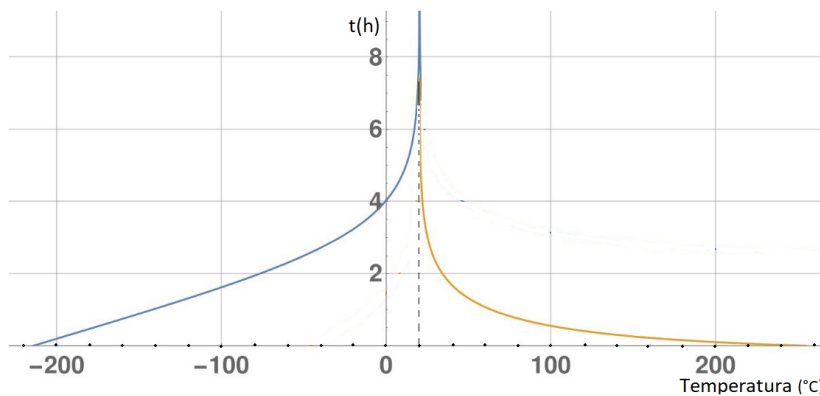


Figura 5.4: En el eje vertical se grafica el tiempo en h que tardan los procesos de enfriamiento (rama derecha) y calentamiento (rama izquierda) en horas. En el eje horizontal se grafican las temperaturas en Celsius, la línea punteada representa la temperatura ambiente que se supone de 20°C .

Con lo dicho en los dos párrafos anteriores se puede ver que las temperaturas iniciales (tanto para el enfriamiento como para el calentamiento) son accesibles en el laboratorio; no obstante, si el experimento se hiciera en condiciones únicamente

ambientales, éstas serían inalcanzables. De este modo se ve que la Ec. (5.10) sí parece tener una interpretación física (en condiciones de laboratorio).

Para el eje horizontal de la Fig. 5.2, γ_1 es el factor que adimensionaliza, y si se supone que vale $1h$, la duración del experimento sería de $3.5h$.

Con la intención de descubrir si este eje horizontal tiene significado físico, además de suponer que $\gamma_1 = 1h$, se puede suponer $1kg$ de acero, cuyo calor específico es de $460J/kgK$, manteniendo el valor de T_b de confort, y sabiendo que se cumple

$$\frac{t}{\gamma_1} = \frac{4Ae\sigma T_b^3 t}{C} \quad (5.11)$$

con $C = c_e m$, siendo c_e calor específico (definido en la introducción) y m la masa del cuerpo.

Se puede notar que la única incógnita en la Ec. (5.11) es A , por lo que en base al tamaño resultante de ésta, se puede dar una primera aproximación del realismo físico del eje horizontal de la Fig. 5.2, despejando A

$$A = \frac{c_e m}{4e\sigma\gamma_1 T_b^3} \quad (5.12)$$

Sustituyendo los valores correspondientes, se obtiene que $A \simeq 250cm^2$, a partir del cual se puede calcular un volumen, si se supone el de un cubo se tiene que dividir el valor de A entre 6, obteniendo el área a_c de una de las caras, por lo que $a_c = A/6$, de aquí se sigue que la arista del cubo es $\sqrt{a_c}$; con esto, el volumen V del cubo queda como

$$V = \sqrt{a_c}^3 \quad (5.13)$$

Haciendo los cálculos, resulta que $V \simeq 268.33cm^3$ más o menos $1/4L$. Valor que se puede considerar razonable para que cumpla el supuesto de $1kg$ de acero.

Lo siguiente que se hizo para tratar de encontrar el realismo físico del eje horizontal de la Fig. 5.2 fue expresar γ_1 en términos de V

$$\gamma_1 = \frac{\rho_1 c_e V^{\frac{1}{3}}}{24e\sigma T_b^3} \quad (5.14)$$

siendo ρ_1 la densidad del material.

Al definir un material, c_e y ρ_1 adquieren un valor, y los demás son valores constantes, con excepción de V , por lo que despejando esta incógnita de la Ec. (5.14) se puede ver qué tan realista resulta su valor, esto se hizo para distintos metales, resultando valores de V aproximadamente iguales a 3.43×10^{-4} , 2.7×10^{-5} y $6.4 \times 10^{-5} m^3$ para plomo, acero y aluminio, respectivamente. Los cuales se pueden considerar razonables, de esta manera se puede decir que el eje horizontal de la Fig. 5.2 sí parece tener realismo físico.

Por otro lado, se puede ver que comparada con la ley de enfriamiento de Newton sólo por conducción-convección, la solución matemática del enfriamiento de un objeto únicamente por radiación resulta muy complicada, pues como se vio anteriormente, en el caso conductivo-convectivo se tiene como solución a la temperatura disminuyendo de manera exponencial y asintóticamente a T_a a través del tiempo, mientras que el caso radiativo involucra logaritmos y arco-tangentes.

Otro punto de comparación importante entre el enfriamiento de Newton y el de Stefan, es que aparentemente en el segundo las curvas de enfriamiento y calentamiento no son simétricas (ver Fig. 5.2 y 5.4), característica que el enfriamiento conductivo-convectivo sí cumple.

También se debe notar que comparada con la ley de Newton, la cual se define en base a una diferencia de temperaturas, el caso radiativo involucra razones entre temperaturas, lo cual no es común en física, excepto que se haga para todo, y no se usara Celsius ni Fahrenheit. Se debe ser muy cuidadoso al hacer esto (comunicación personal con Garduño René).

5.3. Enfriamiento completo

Al igual que en la sección anterior, el contenido de esta se basa en el artículo de Besson (2010a), con excepción de las aportaciones propias, las cuales se harán notar.

Se revisa el enfriamiento de un cuerpo sumergido en un fluido como el considerado en la sección 5.1 de la ley de enfriamiento de Newton, con temperatura constante y homogénea. Además para este estudio se supone que el fluido es transparente, por lo que no emite ni absorbe (esta hipótesis es una aportación propia, y se discutirá con mayor detalle al final de la sección).

Aquí, además del enfriamiento conductivo-convectivo, se toma en cuenta el proceso radiativo, por lo que se cumplen las mismas hipótesis para los objetos que

rodean al cuerpo en estudio mencionadas en la sección anterior, además en esta ocasión este último no está en el vacío, sino inmerso en un fluido. De igual manera que en la sección anterior aquí $a = e$ para el cuerpo estudiado. A este proceso que involucra los tres mecanismos de transferencia de calor se le llama *enfriamiento de Newton-Stefan* (O' Sullivan, 1900).

Este enfriamiento completo resulta difícil, pues a la ya complicada Ec. (5.5) se le agrega un término lineal correspondiente al proceso *conductivo-convectivo*, resultando

$$C \frac{dT}{dt} = -\sigma AT^4 e + \sigma AT_b^4 a - h_1 A(T - T_a) \quad (5.15)$$

cada uno de los términos que aparecen en esta ecuación se ha explicado en las secciones 5.1 y 5.2.

En la Ec. (5.15) aparecen tres temperaturas (T, T_a y T_b); de éstas, T_a es la temperatura del fluido en el que se encuentra sumergido el cuerpo en enfriamiento, se debe tener cuidado en no confundirla con T_b , que es la temperatura representativa de los objetos emisores y el fluido en el que están inmersos.

A pesar de que $T_b \neq T_a$, aquí se puede suponer que son iguales, esto con la intención de facilitar un poco el estudio de la Ec. (5.15) y su solución. Con esta suposición y sabiendo que $a = e$. La Ec. (5.15) se puede escribir como

$$C \frac{dT}{dt} = -\sigma Ae(T^4 - T_b^4) - h_1 A(T - T_b) \quad (5.16)$$

Haciendo el cambio de variable $\theta = \frac{T}{T_b}$, la Ec. (5.16) queda como

$$T_b \frac{d\theta}{dt} = \frac{-\sigma Ae((\theta T_b)^4 - T_b^4) - h_1 A(\theta T_b - T_b)}{C} \quad (5.17)$$

Reacomodando y factorizando la Ec. (5.17), se puede escribir de la siguiente manera

$$T_b \frac{d\theta}{dt} = \frac{-e\sigma A}{C} T_b^4 \left(\theta^4 - 1 + \frac{h_1}{e\sigma T_b^3} (\theta - 1) \right) \quad (5.18)$$

Definiendo $p_1 = \frac{h_1}{e\sigma T_b^3}$, y reacomodando la Ec.(5.18), se puede obtener la ecuación diferencial

$$\frac{e\sigma A}{C} T_b^3 dt = -\frac{d\theta}{\theta^4 - 1 + p_1(\theta - 1)} \quad (5.19)$$

Hasta este punto lo único que se hizo fue separar las variables y voltearlas, obteniendo una ecuación análoga a la Ec. (5.6). Encontrar la integral definida en el

intervalo $[0, t]$ del término izquierdo de la Ec. (5.19) es sencillo, pero la integral definida en $[\theta_i, \theta]$ del lado derecho requiere más desarrollo, primero se debe notar que “el denominador de esta fracción puede ser dividido por $(\theta - 1)$, obteniendo que $(\theta^4 - 1 + p_1(\theta - 1)) = (\theta - 1)(\theta^3 + \theta^2 + \theta + p_1 + 1)$. Consecuentemente, la fracción puede ser descompuesta en dos” (Besson, 2010a), resultando

$$\frac{1}{\theta^4 - 1 + p_1(\theta - 1)} = \frac{1}{p_1 + 4} \left(\frac{1}{\theta - 1} - \frac{\theta^2 + 2\theta + 3}{\theta^3 + \theta^2 + \theta + p_1 + 1} \right) \quad (5.20)$$

Usando la Ec.(5.20), la integral de la Ec. (5.19) queda como

$$\frac{e\sigma AT_a^3 t}{C} = -\frac{1}{p_1 + 4} \left(\ln \frac{|\theta - 1|}{|\theta_i - 1|} - \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{\theta^2 + 2\theta + 3}{\theta^3 + \theta^2 + \theta + p_1 + 1} d\theta \right) \quad (5.21)$$

En la Ec. (5.21) se nota algo que matemáticamente resulta poco elegante, pues θ es adimensional, mientras que t no lo es; aunque, después se adimensionaliza.

Despejando t de la Ec. (5.21), y usando que $p_1 = \frac{h_1}{e\sigma T_b^3}$

$$t = -\frac{C}{A(h_1 + 4e\sigma T_b^3)} \left(\ln \frac{|\theta - 1|}{|\theta_i - 1|} - \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{\theta^2 + 2\theta + 3}{\theta^3 + \theta^2 + \theta + p_1 + 1} d\theta \right) \quad (5.22)$$

Definiendo γ_2 como

$$\gamma_2 = \frac{C}{A(h_1 + 4e\sigma T_b^3)} = \frac{C}{4e\sigma AT_b^3 \left(1 + \frac{p_1}{4}\right)} = \frac{\gamma_1}{\left(1 + \frac{p_1}{4}\right)} \quad (5.23)$$

Análogamente a la sección anterior, si se hace $\tau_2 = t/\gamma_2$. La Ec. (5.22) se puede escribir como

$$\tau_2(\theta) = -\ln \frac{|\theta - 1|}{|\theta_i - 1|} + \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{\theta^2 + 2\theta + 3}{\theta^3 + \theta^2 + \theta + p_1 + 1} d\theta \quad (5.24)$$

Para que la solución dada por la Ec. (5.24) quede completamente definida, hace falta resolver la integral que aparece en ella; Besson (2010a) da un algoritmo para resolverla por medio de fracciones parciales, comienza diciendo que el denominador de la fracción que aparece en la integral admite una solución real, dada por la fórmula

$$x = -\frac{1}{3} + \frac{z}{3} - \frac{2}{3z} \quad (5.25)$$

donde $z = (\sqrt{8 + (13.5p_1 + 10)^2} - (13.5p_1 + 10))^{1/3}$

Dado que x es solución de la ecuación $\theta^3 + \theta^2 + \theta + p_1 + 1 = 0$, entonces $p_1 = -(x^3 + x^2 + x + 1)$.

dividiendo el denominador por $(\theta - x)$, el cociente resultante es el polinomio $(\theta^2 + (x+1)\theta + x^2 + x + 1)$, por lo que el denominador se puede expresar como: $\theta^3 + \theta^2 + \theta + p_1 + 1 = (\theta - x)(\theta^2 + (x+1)\theta + x^2 + x + 1) = (\theta - x)(\theta^2 + a'\theta + b')$, siendo $a' = x + 1$ y $b' = x^2 + x + 1$ (Besson, 2010a).

De este modo la fracción de la integral puede ser descompuesta en dos fracciones, quedando

$$\frac{\theta^2 + 2\theta + 3}{(\theta - x)(\theta^2 + a'\theta + b')} = \frac{E_1}{\theta - x} + \frac{F_2\theta + G}{\theta^2 + a'\theta + b'} \quad (5.26)$$

La integral de la primer fracción del lado derecho de la Ec. (5.26) es $E_1 \ln|\theta - x|$; haciendo los cálculos se puede encontrar los valores de las constantes E_1 , F_2 y G (que estarán en términos de x), de tal manera que encontrando estos valores, y desarrollando la segunda fracción del lado derecho de la Ec. (5.26), se puede llegar a que la solución de la Ec. (5.24) es

$$\tau_2(\theta) = -\ln|\theta - 1| + c_3 \ln|\theta - x| + c_4 \ln|\theta^2 + a'\theta + b'| + c_5 \arctan(m'\theta + n') - c_6 \quad (5.27)$$

“El coeficiente c_6 es determinado por la condición inicial $\tau_2 = 0$, cuando $\theta = \theta_i$ ” (Besson, 2010a) y las constantes a' , b' , c_3 , c_4 , c_5 , m' y n' se pueden expresar en términos de x (la cual a su vez está en términos de p_1).

Suponiendo que $e = 1$, en la Fig. 5.5 se grafican curvas de enfriamiento generadas con la Ec.(5.27) de un cuerpo que intercambia calor por conducción-convección y radiación térmica con un entorno y objetos emisores a temperatura constante $T_b = 290K$, para los casos en los que $h_1 = 8W(m^2K)^{-1}$ (línea sólida) y $h_1 = 16W(m^2K)^{-1}$ (línea punteada), estos valores de h_1 se dan debido a que en p_1 es la única variable.

En la Fig. 5.5 también se muestra una ecuación paramétrica, para la que (en mi notación) “he calculado una lista de valores (θ, τ_2) de la Ec. (5.27) y he buscado el mejor ajuste exponencial para estos valores. Este ajuste exponencial se gráfica en la Fig. 5.5 con la línea de cadena para el caso cuando $h_1 = 16W(m^2K)^{-1}$ (teniendo $\tau = 0$ cuando $\theta = 3$ y $\tau \rightarrow \infty$ cuando $\theta \rightarrow 1$), la ecuación de este ajuste es $\tau = -0.60 \ln((\theta - 1)/2)$ ó $\theta = 1 + 2 \exp(-1.667\tau)$ ” (Besson, 2010a).

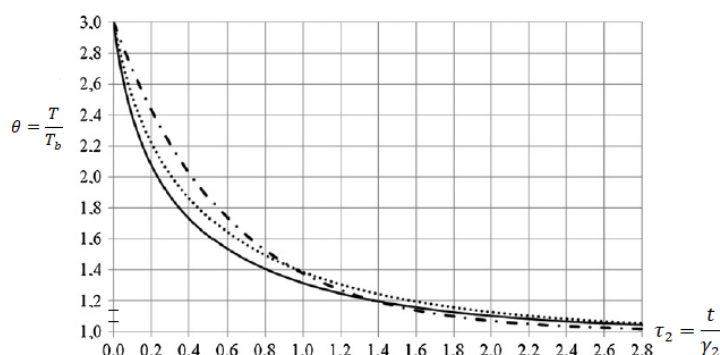


Figura 5.5: El eje vertical gráfica $\theta = T/T_b$, y el horizontal $\tau_2 = t/\gamma_2$, las curvas corresponden al enfriamiento de un cuerpo cuando $h_1 = 8W(m^2K)^{-1}$ (línea sólida) y $h_1 = 16W(m^2K)^{-1}$ (línea punteada); la línea de cadena gráfica el mejor ajuste exponencial del caso cuando $h_1 = 16W(m^2K)^{-1}$.

Es importante hacer notar que al igual que en la sección anterior, las curvas que se aprecia en la Fig. 5.5 corresponden a la inversa de la Ec. (5.27) y Besson (2010a) tampoco aclara del todo las propiedades físicas del cuerpo estudiado, pues no da los valores de C y A que forman parte de γ_2 que adimensionaliza τ_2 ; no obstante, aquí no se hizo el análisis que se realizó en la sección anterior, en el que se trató de encontrar el realismo físico de la Ec. (5.10) a partir de una serie de suposiciones, ya que Besson (2010a) en esta ocasión sí realiza aparte un experimento, el cual se verá más adelante.

Resulta interesante resaltar que la ecuación de forma exponencial correspondiente al ajuste que se muestra en la Fig. 5.5 se obtiene por una razón similar a la que se mencionó en la sección anterior, pues recordando que Besson (2010a) menciona que el segundo logaritmo y los términos arcotangentes de la Ec. (5.10) son despreciables en comparación con el primer término logarítmico, parece que en esta parte también se queda con el primer término logarítmico de la Ec. (5.27), con esto se puede entender que las constantes para la ecuación de ajuste que Besson (2010a) encontró son el 2 y el -1.667.

Como contribución propia en esta parte se remarca el hecho de que al parecer los objetos emisores de alrededor no modifican la forma de la curva que se genera en el caso del enfriamiento conductivo-convectivo de Newton. Con esto se puede interpretar que quizá en este caso se cumple la ley de enfriamiento de Newton, aunque seguramente con otros parámetros.

A diferencia de la sección anterior; aquí, Besson (2010a) sí realiza un experi-

mento, en el que usa un cilindro de aluminio pintado de negro con diámetro de 2.54cm y longitud de 3.81cm que intercambia calor por conducción-convección y radiación térmica; además $T_b = 299.2\text{K}$, $T_i = 400.6\text{K}$, $e = 1$ y $C/A = 11.57 \times 10^3\text{W}(m^2\text{K})^{-1}$ (este cociente aparece en el factor γ_2). Los resultados de su experimento y el mejor ajuste de éstos se grafican en la Fig. 5.6.

También de manera diferente a la sección anterior, en esta ocasión Besson (2010a) escribe la Ec. (5.27), en términos de t y de T , resultando

$$t(T) = \gamma_2(-\ln|(T - T_b)| + c_3 \ln|(T - T_x)| + c_4 \ln|T^2 + a''T + b''| + c_5 \arctan(m''T + n_2)) - c' \quad (5.28)$$

con $a'' = a'$, $T_b = (x + 1)$, $T_b = T_x + T_b$, $b'' = b'T_b^2$, $m'' = m'/T_b$ y c' es determinada por la condición inicial $t = 0$, cuando $T = T_i$.

Por medio de la Ec. (5.28), Besson (2010a) encontró una ecuación paramétrica que ajusta a los datos experimentales (ver Fig. 5.6). Los parámetros que encontró corresponden a las constantes γ_2 , c_3 , c_4 , c_5 , a'' , b'' , m'' , n_2 y c' de la Ec. (5.28), todos estos valores tienen en común que dependen de h_1 , de esta manera “Obtuve que la función $t(T)$ (Ec.(5.28)) que mejor se ajusta a los datos experimentales ocurre utilizando un valor de $h_1 = 7.7\text{W}(m^2\text{K})^{-1}$. Encontrando un coeficiente de determinación $R^2 = 0.9985$ ” (Besson, 2010a). Con esto la ecuación paramétrica queda como

$$t(T) = 14.00(-\ln|(T - 299.2)| + 0.3322 \ln|(T + 600.7)| + 0.3339 \ln|T^2 - 301.5T + 2.707 \times 10^5| + 0.7995 \arctan(2.008 \times 10^{-3}T - 0.3028)) - 0.3179 \quad (5.29)$$

Cabe resaltar que las unidades de la Ec. (5.29) son segundos, por lo que para obtener la escala en minutos del eje horizontal de la Fig. 5.6 es necesario multiplicar los valores resultantes de t por el factor $1/60$.

Del trabajo de Besson (2010a) se puede ver que en su experimento realizado no aclara ciertas cosas que son necesarias para que se cumplan las hipótesis mencionadas al principio, por ejemplo para que la temperatura del fluido se mantenga constante y homogénea, éste debería estar fluyendo, y también debe ser transparente (no emite ni absorbe), pues de lo contrario formaría parte de los objetos emisores; pero, éste rodea tanto a los objetos emisores como al cuerpo en estudio; ésta es una hipótesis fuerte.

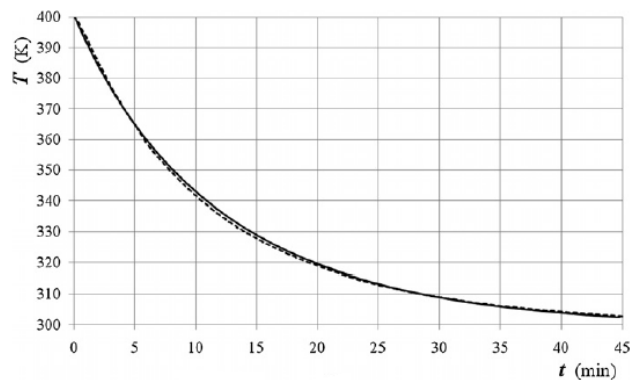


Figura 5.6: La curva discontinua gráfica los datos experimentales del proceso de enfriamiento de un cilindro de aluminio pintado de negro. La curva continua es la gráfica de la Ec. (5.29), que es el mejor ajuste a los datos experimentales.

Finalmente, también es importante mencionar que a diferencia de la sección anterior en la que se desarrolló el enfriamiento y el calentamiento, en esta parte Besson (2010a) sólo calcula el caso del enfriamiento, mencionando que el calentamiento es análogo.

5.4. Epílogo

En la última sección no se realizó un análisis para encontrar el realismo físico de la Ec. (5.27); sin embargo, la veracidad de esta solución particular se refuerza con el experimento revisado de Besson (2010a), el cual realiza aparte para fundamentar su desarrollo teórico, pues da una ecuación paramétrica, la cual obtiene a partir de su teoría, y en ésta encuentra el valor de 9 constantes; en la Fig. 5.6 se puede ver cómo esta ecuación ajusta correctamente a sus resultados experimentales.

Parte importante del trabajo desarrollado en la sección 5.1 fue encontrar las referencias bibliográficas de Bohren (1991) y de O' Sullivan (1900), pues en estos artículos se hace una evaluación crítica de la ley de enfriamiento de Newton, cabe resaltar que en ninguno de estos trabajos se trata el calentamiento de Newton, lo cual es normal, pues se encontró que este caso no es muy común, ya que en la revisión bibliográfica que se llevó a cabo no se encontró más que el artículo de Gokenbach y Schmidtke (2009) que aborda este caso; no obstante, no se profundiza mucho el estudio con una ecuación diferencial análoga a la Ec.(5.2).

Otro punto que es importante resaltar acerca de la sección 5.1 es el hecho de considerar la conducción en el proceso estudiado, pues regularmente se ignora que

la conducción precede a la convección, de ahí surge el acoplamiento conductivo-convectivo.

Para el estudio del enfriamiento de un cuerpo únicamente por radiación se replicaron las gráficas que se muestran en la Fig.5.2, descubriendo que para cada una de las condiciones iniciales correspondientes al enfriamiento y al calentamiento se generan dos ramas (ver Fig. 5.3), de las cuales sólo una tiene significado físico, al mismo tiempo se hizo notar que las gráficas que Besson (2010a) da corresponden a la inversa de la Ec.(5.10).

Otro punto relevante del Capítulo 5, fue parte de lo realizado en la subsección 5.2.2, pues aquí, se realizó una interpretación del realismo físico de la Ec.(5.10) a partir de la serie de suposiciones vistas, ya que en este caso Besson (2010a) no realiza un experimento que fundamente su desarrollo teórico, tal como sí lo hizo en el enfriamiento completo.

Parte importante de este capítulo fue encontrar las referencias bibliográficas citadas, pero más que sólo encontrarlas, también es relevante la crítica que se hizo de las mismas.

Pues por ejemplo en el caso de enfriamiento de Newton se aclaró que para que T_a sea uniforme y constante, en el experimento se debe tener un fluido que fluya, así como también recalcar que se debe ignorar cualquier contribución de enfriamiento por radiación.

Para el enfriamiento puramente radiativo, se aclaró que las condiciones de vacío al interior de la campana son de materia, pero no de radiación, también se hizo mención de cómo es que los objetos que rodean al cuerpo estudiado no se afectan entre sí, interactuando solamente con este último. Con esto, se definieron como objetos emisores, para los que se hizo notar que el suponerlos con temperatura T_b constante es una hipótesis fuerte, pues al emitir debería disminuir su temperatura.

La aclaración relevante agregada para el enfriamiento completo fue el decir que el fluido debe ser transparente, y además de igual manera que en el caso de Newton debe fluir para que mantenga una temperatura constante y uniforme.

Capítulo 6

Inercia térmica: ICU y regolito de Marte

6.1. Inercia térmica

La inercia térmica I es una propiedad física de los materiales que se halló mientras se trataba de encontrar un causante físico convincente para la formación de una isla de calor urbana ICU , ya que la mayoría de los artículos (Mencionados en la introducción) que hablan de esto argumentan que los materiales usados para construcción y urbanización “guardan” calor; pero, no se aclara qué propiedad térmica causa esto; no obstante, se puede suponer que se refieren al c_e de los materiales; sin embargo, este valor es bajo.

Por otro lado, si c_e fuera el causante, para dar una descripción extensiva se tendría que hacer con C , y esta propiedad física no es suficiente para este estudio, ya que de acuerdo a cómo se definió en la introducción, se entiende que dicha propiedad describe la cantidad de calor que se requiere para aumentar una unidad de temperatura del cuerpo. En palabras más convencionales, se podría pensar en C como una medida del límite de calor que puede ingresar a un cuerpo, es una cantidad que no describe el flujo de calor a través de tiempo y espacio, siendo esta otra razón que demuestra la deficiencia de C para explicar la formación de una ICU . Pues para esto es necesario estudiar el flujo de calor en el tiempo y espacio, y se encontró que I incluye K , con lo que se puede ver cómo se distribuye en la profundidad y en el tiempo la radiación que incide sobre el cuerpo estudiado, en palabras llanas, con I se puede describir “cómo se llena ” este último.

A continuación se mencionan algunas de las referencias en las que aparece I definida de la misma manera (Ec. (6.1)). De la revisión bibliográfica, el artículo más

antiguo es el de Sinton y String (1959), en el que se estudia el cambio de temperatura en el suelo de Marte usando la Ec. (6.1); aunque, no la llaman inercia térmica; Wood y Paige (1992) modelan el ciclo estacional de CO_2 en la atmósfera de Marte, y en su desarrollo calculan y definen I ; Jáuregui (1993) menciona I como un posible causante de la ICU , y la define en prosa, llamándola también *admitancia*; Wang et al. (2010) dan un método que sirve para estimar valores de I a nivel global, mediante una ecuación que relaciona el flujo de calor en el suelo de una región con condiciones parecidas a las de una ciudad y el cambio de su temperatura; Veto y Christensen (2015) definen I y dan una generalización del concepto, además de una tabla en la que aparecen ecuaciones que describen fenómenos oscilantes en los que aparecen cantidades análogas a I .

En todas las referencias mencionadas en el párrafo anterior aparece I como

$$I = \sqrt{\rho_1 c_e K} \quad (6.1)$$

siendo ρ_1 la densidad del material, c_e calor específico y K conductividad térmica. Las dimensiones de I son $J/m^2 K s^{1/2}$ (que se entenderán con mayor detalle más adelante).

Se puede definir I de manera cualitativa como una medida de la resistencia que pone un cuerpo a cambiar su temperatura en el tiempo (Tian et al., 2015).

De las referencias revisadas, a pesar de que todas definen I con la Ec. (6.1), resulta curioso que casi ninguna utiliza dicha fórmula para calcular su valor, pues en general introducen I para estudiar fenómenos que tienen relevancia a escala global; por ejemplo, la variación estacional de los casquetes polares de Marte, y en esta escala es complicado medir valores directos de ρ_1 , c_e y K (Tian et al., 2015), y hasta ahora imposible para otros planetas (Wang et al., 2010). Aquí es importante mencionar que no se encontraron estudios que describieran I de manera experimental; caso en el que sí tendrían que hacerse mediciones directas de ρ_1 , c_e y K .

Debido a la complejidad de las medidas mencionadas en el párrafo anterior, se hacen estimaciones de I a partir de modelos matemáticos, tal como lo hacen Wang et al. (2010), lo cual se verá con mayor detalle más adelante.

Sólo se encontraron dos referencias en las que parece utilizan la Ec. (6.1) para calcular valores de I , uno de ellos son las notas de un autor desconocido, de las que infortunadamente se perdió el enlace en el que se encontraban en internet; no obstante, su contenido resultó bastante interesante, pues fue el único lugar en el que se encontró una tabla con tres columnas en las que aparecen valores de ρ_1 , c_e

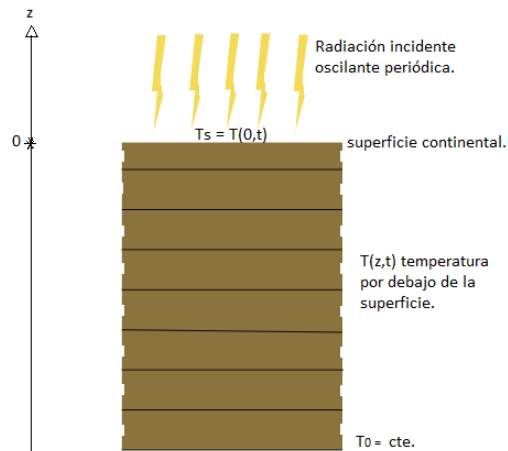


Figura 6.1: Superficie (plana horizontal) de un cuerpo sólido con profundidad semi-infinita; siendo $T(0,t) = T_s$ la temperatura medida en la superficie, y T_0 una temperatura constante medida a una profundidad por debajo de la cual sus propiedades térmicas permanecen invariantes.

y K y que utiliza para calcular I , valor que coloca en una cuarta y última columna para diferentes materiales, dentro de los que se incluye agua, lo cual resulta curioso, pues en general se encontró que los estudios que involucran I son para sólidos.

Otra referencia en la que parece ser utilizan la Ec. (6.1) para calcular valores de I , es el sitio web de Sánchez (2016), cabe aclarar que en este sitio no aparecen explícitamente los valores de ρ_1 , c_e y K para cada uno de los materiales de los que da su valor de I ; pero, sí aparece la Ec. (6.1) (y ninguna otra ecuación), por lo que se puede pensar que la utilizó para calcular dichos valores.

6.1.1. Método para estimar valores de Inercia térmica

Wang et al. (2010) desarrollan un método para estimar valores de I basado en lo hecho por Bennett et al. (2008) y Wang y Bras (1999). El objetivo de estos últimos fue calcular el flujo de calor en el suelo a la altura z y tiempo t $\varphi(z,t)$ a partir de la temperatura medida en la misma ubicación $T(z,t)$.

Los tres artículos citados en el párrafo anterior suponen una superficie sólida plana horizontal con profundidad semi-infinita como la que se muestra en la Fig. 6.1, sobre la que incide energía radiante con comportamiento oscilante periódico. Un ejemplo directo de esto sería considerar la superficie de la Tierra (continente) y la radiación solar en su ciclo día noche.

La razón específica por la que Wang et al. (2010) desarrollan su método para estimar valores de I , se debe a que una medición directa de esta propiedad térmica es complicada a escala global, pues depende de diferentes características geológicas de la corteza; de esta manera comentan que por medio de observaciones radiométricas y el uso de su modelo es posible obtener valores de I .

El resultado final del desarrollo de este método será una ecuación que relaciona $\varphi(z,t)$ con $T(z,t)$, la cual incluye I como coeficiente de proporcionalidad.

Aunque este método fue encontrado en el artículo de Wang et al. (2010), el desarrollo que sigue a continuación se basa en el trabajo de Wang y Bras (1999), citados por los primeros, pues su trabajo contiene más detalles de las herramientas matemáticas usadas para obtener el resultado esperado.

El desarrollo comienza estudiando la transferencia de calor en el suelo con la ecuación de difusión de calor, la cual se puede deducir de la siguiente manera:

Sabiendo que la *ley de Fourier de conductividad térmica* está dada por

$$\varphi(z,t) = -K \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \quad (6.2)$$

cabe comentar que esta ecuación se puede justificar con la primera ley de la termodinámica, pues asumiendo que en este proceso no se realiza trabajo mecánico, la ley de Fourier de conductividad térmica describe la forma en que $\varphi(z,t)$ produce cambios en la temperatura medida a una determinada altura, también es interesante resaltar que esta ecuación tiene la forma de la *primera ley de Fick*.

Y que la *ecuación de continuidad de conservación de la energía* para este caso térmico está dada por

$$\rho_1 c_e \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi(z,t)}{\partial z} \quad (6.3)$$

Basta con sustituir la Ec.(6.2) en la Ec. (6.3), para obtener

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} \quad (6.4)$$

siendo $\alpha = \frac{K}{\rho_1 c_e}$ la difusividad térmica, que es una propiedad del material.

La Ec. (6.4) es la de difusión de calor, y tiene la forma de la *segunda ley de Fick*; cabe comentar que ésta última se usa para modelar procesos difusivos en general (tales como pueden ser la propagación de una gota de tinta en agua o la difusión

de moléculas en el interior de células vivas) (Hernández, 2014).

Dada esta deducción de la ecuación de calor, se puede continuar con el desarrollo del método de Wang et al. (2010).

Se comienza definiendo las variables $\bar{z} = z/\sqrt{\alpha}$ y $\vartheta = T - T_0$ que satisfacen la Ec. (6.5) y las condiciones inicial y de frontera (6.6) y (6.7), respectivamente.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{z}^2} \quad (6.5)$$

$$\vartheta = 0 \quad (6.6)$$

para $t = 0$ y $\bar{z} < 0$

$$\vartheta = 0 \quad (6.7)$$

para $t > 0$ y $\bar{z} \rightarrow -\infty$

Es importante señalar que el tiempo inicial se elige de tal manera que el perfil inicial de la temperatura del suelo sea uniforme. Estos cambios de variable y la definición de las condiciones son necesarios por la forma en que se resuelve el problema, que es aplicando la transformada de Laplace a la Ec. (6.5), esta forma de resolver el problema entra en lo que se conoce como *métodos espectrales* (comunicación personal con Martínez Francisco).

Sabiendo de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales que dada una función $f(x, t)$ acotada y definida para todo $t > 0$, entonces su transformada de Laplace sobre t ($\mathcal{L}\{f(x, t)\}$) es la función $F(x, r_1)$ dada por

$$\mathcal{L}\{f(x, t)\} = \int_0^{\infty} e^{-r_1 t} f(x, t) dt = F(x, r_1) \quad (6.8)$$

siendo r_1 un complejo (Domínguez y Jaramillo, 2017).

Y que además se cumplen las ecuaciones (6.9) y (6.10)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\right\} = r_1 F(x, r_1) - f(x, 0) \quad (6.9)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2 F(x, r_1)}{\partial x^2} \quad (6.10)$$

Se puede obtener la transformada de Laplace de la Ec. (6.5), pues usando los resultados de las ecuaciones (6.9) y (6.10), además de usar la condición inicial dada por la Ec. (6.6), se tiene que

$$\frac{\partial^2 \bar{\vartheta}(\bar{z}, r_1)}{\partial \bar{z}^2} = r_1 \bar{\vartheta}(\bar{z}, r_1) \quad (6.11)$$

en donde $\bar{\vartheta}(\bar{z}, r_1)$ es la transformada de Laplace de $\vartheta(z, t)$, que de acuerdo a la Ec. (6.8) queda como

$$\bar{\vartheta}(\bar{z}, r_1) = \int_0^\infty e^{-r_1 t} \vartheta(\bar{z}, t) dt \quad (6.12)$$

La solución general de la Ec. (6.11) es

$$\bar{\vartheta}(\bar{z}, r_1) = A_1(r_1) e^{\bar{z}\sqrt{r_1}} + B_1(r_1) e^{-\bar{z}\sqrt{r_1}} \quad (6.13)$$

con A_1 y B_1 funciones arbitrarias de r_1 por determinar de acuerdo a la condición de frontera para ϑ . Debido a que $\bar{\vartheta} = 0$ por la condición de frontera de la Ec. (6.7), se sigue que $B_1(r_1) = 0$ (Wang y Bras, 1999), por lo que

$$\bar{\vartheta}(\bar{z}, r_1) = A_1(r_1) e^{\bar{z}\sqrt{r_1}} \quad (6.14)$$

Derivando la Ec. (6.14) respecto de \bar{z} se obtiene

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}(\bar{z}, r_1)}{\partial \bar{z}} = \sqrt{r_1} \bar{\vartheta}(\bar{z}, r_1) \quad (6.15)$$

Aquí es necesario acudir a la teoría del *cálculo fraccional*, rama de las matemáticas que generaliza los operadores de derivadas e integrales a ordenes no enteros, pudiendo ser el orden cualquier número. Racional, irracional o complejo; debido a esto, el nombre de cálculo fraccional es incorrecto, siendo más apropiado llamarlo integración y diferenciación de orden arbitrario (Torres y Brambila, 2017).

En cálculo fraccional se define la transformada de Laplace para una *derivada de orden arbitrario* (Spanier, 1977), con la que se puede calcular la transformada de Laplace de la derivada de orden medio con respecto a t de $\vartheta(\bar{z}, t)$ (Wang y Bras, 1999), obteniendo que su valor es igual a $\sqrt{r_1} \bar{\vartheta}(\bar{z}, r_1)$ (Spanier, 1977), mismo que aparece en la Ec. (6.15), con esto y aplicando la transformada de Laplace inversa a la Ec. (6.15) se puede llegar a que

$$\frac{\partial \vartheta(\bar{z}, t)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} \vartheta(\bar{z}, t) \quad (6.16)$$

Aquí cabe comentar que la Ec. (6.16) tiene la forma de una ecuación de *difusión anómala* (Comunicación personal con Sánchez Faustino y Martínez Francisco),

que es una generalización de la de difusión normal (ver Ec. (6.4) o Ec. (6.5)). Una de las principales características de la difusión anómala es que el desplazamiento cuadrado promedio ($\langle d^2(t) \rangle$) recorrido por la sustancia que se difunde crece con el tiempo de la siguiente forma: $\langle d^2(t) \rangle \propto t^\gamma$ (Hernández, 2014), a diferencia de una difusión normal en la que dicho desplazamiento sí es proporcional de manera lineal al tiempo.

Regresando a las variables originales z y T , la Ec. (6.16) queda como

$$\frac{\partial}{\partial z} T(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} T(z, t) \quad (6.17)$$

Para calcular la parcial de orden medio que aparece en la Ec. (6.17) es necesario introducir la *derivada fraccionaria de Riemman-Liouville* dada por

$$\frac{d^{\alpha_2} f(t)}{dt^{\alpha_2}} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_2)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(r_2)}{(t - r_2)^{\alpha_2}} dr_2 \quad (6.18)$$

con $0 < \alpha_2 < 1$ (Rodríguez, 2020), (Wang y Bras, 1999) y r_2 una variable de integración muda (Wang et al., 2010).

Un dato interesante que cabe comentar aquí es que “los operadores fraccionarios son operadores no locales, es decir, lo que ocurre en un punto depende de un promedio en un intervalo que contiene al punto.” (Rodríguez, 2020), por esta razón en la definición de derivada fraccionaria aparece una integral (comunicación personal con Martínez Francisco), “esto hace del cálculo fraccional una herramienta excepcional para fenómenos no locales como pueden ser procesos ecológicos como acumulación de metales, problemas de evolución de poblaciones, problemas de radiación, economía... etc.” (Rodríguez, 2020).

Hasta este punto el desarrollo se ha basado principalmente en lo hecho por Wang y Bras (1999); y sirve para entender cómo obtener la Ec. (6.19) que dan Wang et al. (2010), ya que en su trabajo no hacen el desarrollo necesario para saber cómo llegar a dicha ecuación; sin embargo, con lo visto hasta aquí se puede entender que con una ecuación como la (6.17), la ley de Fourier de conductividad térmica y la definición de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, Wang et al. (2010) pudieron obtener que

$$\varphi(z, t) \equiv -K \frac{\partial}{\partial z} T(z, t) = I \int_{-\infty}^t \frac{\partial T(z, r_2)}{\partial r_2} \frac{dr_2}{\sqrt{\pi(t - r_2)}} \quad (6.19)$$

La Ec. (6.19) es conocida como derivada temporal de orden medio (wang et al., 2010), (Bennett et al., 2008), y es importante señalar que el multiplicar la Ec.

(6.17) por el factor $-K$ no sólo ocasiona que su valor sea igual a $\varphi(z, t)$ (por ley de Fourier de conductividad térmica), sino que además produce I , pues haciendo las operaciones se puede ver que I es el resultado del cociente $K/\sqrt{\alpha}$.

La Ec. (6.19) se cumple en particular para $z = 0$ (superficie del suelo), lo que lleva a una ecuación que relaciona $\varphi(0, t)$ con la historia temporal de T_S (Wang et al., 2010) dada por

$$\varphi(0, t) = I \int_{-\infty}^t \frac{\partial T_S(r_2)}{\partial r_2} \frac{dr_2}{\sqrt{\pi(t-r_2)}} \quad (6.20)$$

“Un algoritmo numérico para calcular la integral singular en las Ecuaciones (6.19) ó (6.20) es dado por Bennett et al. (2008)” (Wang et al., 2010), y para poder hacer este cálculo es necesario dar la forma en que varía T_S , al saber que el comportamiento de la radiación incidente es oscilante, resulta natural pensar en modelar T_S con una función senoidal, Wang et al. (2010) proponen que T_S varía en el tiempo de la siguiente forma

$$T_S(t) = \bar{T}_S + \Delta T_S \text{sen } \omega t \quad (6.21)$$

siendo ΔT_S un coeficiente que es igual a la amplitud de la oscilación de T_S y ω la frecuencia angular.

De este modo, sustituyendo la Ec. (6.21) en (6.20) y haciendo los cálculos se puede llegar a la Ec. (6.22), que relaciona $\varphi(0, t)$ con ΔT_S , apareciendo I como parte de la amplitud del flujo.

$$\varphi(0, t) = I\sqrt{\omega}\Delta T_S \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (6.22)$$

“La Ec. (6.22) indica que $\varphi(0, t)$ también es una función senoidal, con un desfase de $\pi/4$ relativo a T_S , indicando que el flujo en la superficie adelanta a T_S en tres horas para un ciclo diurno, y 1.5 meses para el ciclo anual” (Wang et al., 2010). En este punto se observa que el desfase que Wang et al. (2010) suponen es de 1/8 de ciclo, matemáticamente no se logro encontrar la razón de esto; pero físicamente funciona bien como primera aproximación, pues el adelanto de tres horas para el ciclo diurno es cercano al promedio medido en las ciudades de aproximadamente 2h; mientras que para el ciclo anual, el valor de mes y medio también es cercano al estacional promedio del hemisferio, considerando como principal regulador el océano, cuyo valor es de aproximadamente un mes (comunicación personal con Garduño René).

La aproximación senoidal de $\varphi(0,t)$ implica una simetría entre el flujo que es absorbido por la corteza durante el día, y la radiación emitida por la noche, lo cual es una hipótesis fuerte, tal como se verá en la Fig. 6.2.

De acuerdo con la Ec. (6.22), la amplitud diurna del flujo en superficie está dada por

$$\Delta\varphi(0,t) = I\sqrt{\omega}\Delta T_S \quad (6.23)$$

Este método es una aproximación, ya que la Ec. (6.19) o (6.20) es exacta sólo para T_S de forma senoidal y considerando I constante. Una estimación más exacta de I se puede obtener usando la Ec. (6.20) para cualquier forma de T_S (Wang et al., 2010).

El método es evaluado con datos de campo medidos en el sitio de Lucky Hill del distrito unificado de Tombstone, Arizona, en la cuenca experimental de Walnut Gulch (Renard et al., 2008) citados por Wang et al. (2010). El experimento se realizó durante el pre-monzón, temporada caracterizada por una fuerte insolación y nubes ocasionales. El sitio experimental está ubicado en un lugar aislado sobre un área plana. El suelo no contiene humedad removible desde la superficie hasta al menos diez centímetros (Wang et al., 2010).

Los datos fueron medidos del 5 al 16 de junio del 2008 (ver Fig. 6.2); en la parte a) de esta figura se puede ver el ciclo de $\varphi(z,t)$ medido 1cm debajo de la superficie del suelo, se debe notar que no tiene simetría vertical, lo cual sí se esperaba, pues durante la noche deja de llegar radiación al suelo; además, no todo lo que absorbe éste último es emitido, pues como se vio en el Capítulo 3, también se puede tomar en cuenta la evapotranspiración, por esta razón el flujo no tiene por qué comportarse como función senoidal; aunque, como primera aproximación puede dar buenos resultados (comunicación personal con Garduño René). También se puede observar que no existe simetría horizontal, pues las ondas a nivel de los valles se ven más anchas que en las crestas.

En la parte b) de la Fig. 6.2 se observa el ciclo de T_S , se nota que la disminución de esta cantidad ocurre más lento que el incremento, aquí tampoco hay simetría horizontal; sin embargo, para este caso la aproximación senoidal puede resultar más natural, y de igual manera que para $\varphi(z,t)$ funciona bien como primera aproximación. Tanto para la parte a) como la b) de la Fig. 6.2 se notan irregularidades en las últimas ondas, lo que hace pensar que durante estos días quizá hubo nubosidad.

Haciendo un análisis aproximado para ver el desfase temporal que existe entre los

máximos de $\varphi(z,t)$ y T_S , se encontró que su valor es de aproximadamente 2.6h, valor que se encuentra cercano a las tres horas de desfase que Wang et al. (2010) dan para el ciclo diurno.

De manera análoga, para encontrar el desfase temporal entre el momento en el que se alcanza el mínimo de $\varphi(z,t)$ y el de T_S , se encontró que su valor es de aproximadamente 10.6h, lo que resulta muy diferente al desfase de tres horas que Wang et al. (2010) dan para el ciclo diurno; esto ya se podía notar en la Fig. 6.2, pues en ella se puede ver que en general todos los mínimos de $\varphi(z,t)$ terminan en un pico que apunta en dirección opuesta al pico en el que también de manera general terminan los mínimos de T_S .

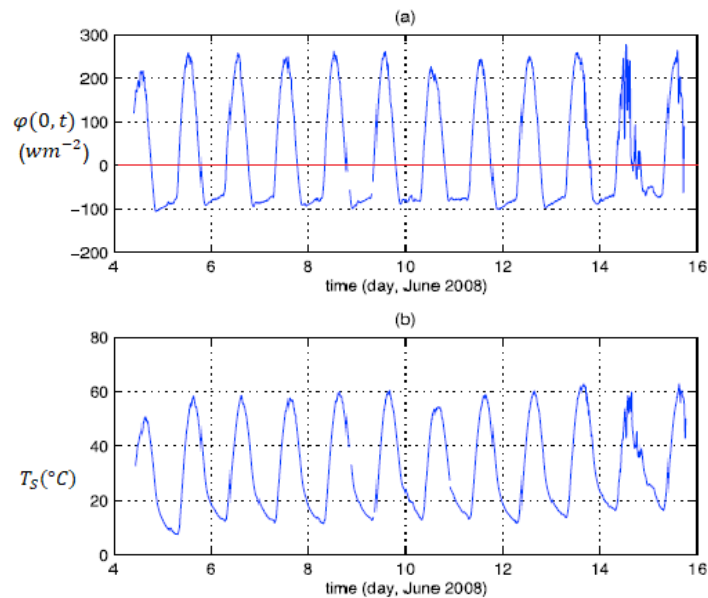


Figura 6.2: En la parte a) se representa el Ciclo diario de $\varphi(0,t)$, se considera positivo cuando el calor penetra en él (durante el día), y negativo cuando sale (durante la noche). En b) el Ciclo diario de T_S , se observan mediciones para los días del 5 al 16 de junio del 2008 (Wang et al., 2010).

A partir de la Ec. (6.22) quedan más claras las dimensiones de I , pues si se recuerda involucran un $s^{1/2}$ (que podría ser la parte menos comprensible); sin embargo, aquí se entiende que se eleva a esta potencia fraccionaria debido a la existencia del factor $\sqrt{\omega}$ en la Ec. (6.22) pues al multiplicarse los exponentes se suman, generando 1s que forma parte de las unidades de $\varphi(z,t)$. Las dimensiones de K correspondientes a ΔT_S en la Ec. (6.22) se eliminan con el K^{-1} incluido en las dimensiones de I , resultando finalmente unidades de flujo.

En este punto resulta interesante comentar un hecho peculiar de I , y es que sabiendo que valores grandes de esta cantidad ocasionan que ΔT_s sea chico, se puede pensar en I como una extensión de los conceptos mecánicos de *inercia lineal* (masa inercial que da una medida de la resistencia al cambio en un movimiento rectilíneo) e *inercia rotacional* (también llamado momento de inercia, que da una medida de la resistencia al movimiento giratorio).

6.1.2. Generalización de la Inercia térmica

A continuación se dará una generalización de I , ya que en el artículo de Veto y Christensen (2015) se encuentran distintos fenómenos en los que aparecen conceptos similares a I ; que además se modelan con una ecuación de la misma forma que la Ec. (6.22).

Cada una de las analogías que mencionan Veto y Christensen (2015) se caracterizan por constar de una cantidad que puede fluir (como el calor en el método de Wang et al. (2010)) de un medio a otro a través de una interfaz, y cuyo sentido es controlado por un forzador externo con comportamiento oscilante periódico (como la radiación solar en su ciclo día noche, en el ejemplo revisado).

Para cada una de las analogías que Veto y Christensen (2015) dan, escriben una ecuación en la que se relaciona el flujo medido en una condición de frontera (igual que en el caso revisado de I) al tiempo t de la cantidad que puede fluir $\varphi_g(0,t)$ (flujo de radiación $\varphi(0,t)$ en lo revisado para I) con la amplitud Ψ de la función senoidal que describe el comportamiento oscilante periódico de la cantidad que se ve afectada por el flujo incidente (T_s en el caso de I), cabe resaltar que a esta última cantidad Veto y Christensen (2015) la llaman potencial.

Veto y Christensen (2015) dan la Ec. (6.24) para hacer una generalización de cada uno de los ejemplos que mencionan en su trabajo, ya que todos se modelan con una ecuación de esta forma.

$$\varphi_g(0,t) = \zeta_1 \sqrt{\omega} \Psi \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \quad (6.24)$$

ζ_1 es la *inercia difusiva periódica* (Veto y Christensen, 2015).

Para comparar y observar las similitudes que existen en la descripción matemática de este tipo de fenómenos, se verá uno en particular, el transporte de *momentum* (p) tratado por Veto y Christensen (2015), y que en este trabajo se adaptó a la

interfaz océano-atmósfera del sistema climático.

En este caso, la cantidad que fluye es p , y su flujo comienza con viento que tenga un comportamiento oscilante periódico, esta condición es necesaria para poder dar una descripción matemática similar a la que se dio para I .

Viento con este comportamiento es producido por las brisas marinas y terrestres (Dalu y Baldi, 1988), para explicarlas se considerará el mar y la costa (Ver Fig. 6.3), el primer tipo ocurre durante el día, pues durante este tiempo el suelo de la costa es más caliente que la superficie del mar (debido a que el mar tiene una mayor capacidad calorífica), por lo que el aire superficial de la costa es más caliente que el que se encuentra encima del mar; por esta razón el primero disminuye su densidad, y se eleva dejando un espacio, el cual es ocupado por el aire superficial de encima del mar, de este modo se entiende que el sentido del viento en superficie es del mar hacia la costa durante una brisa marina (ver Fig 6.3a).

Las brisas terrestres se explican de manera análoga a las marinas, sólo que éstas ocurren durante la noche, momento en el que la temperatura del mar es mayor que la del suelo de la costa, nuevamente esto se debe a que el agua tiene mayor capacidad calorífica. En esta ocasión el sentido del viento en superficie apunta de la costa hacia el mar, tal como se aprecia en Fig. 6.3b. En ambos tipos de brisas el movimiento del aire se explica con las corrientes convectivas vistas en el Capítulo 2.

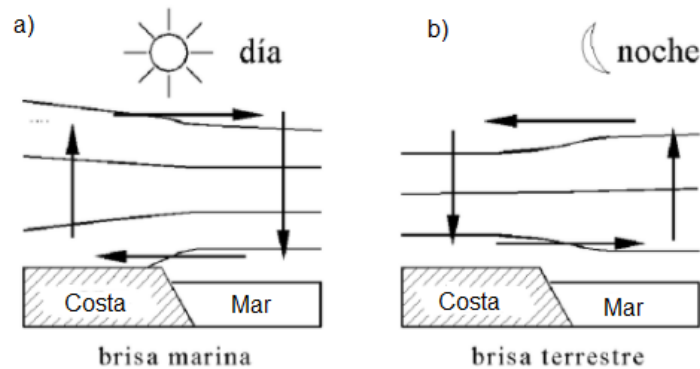


Figura 6.3: En a) se ve la Representación del viento producido en el día por una brisa marina, en b) la del viento producido durante la noche por una brisa terrestre (Adaptado de Casas y Alarcón, 1999).

Existiendo viento con estas características, el flujo de p comienza de la atmósfera hacia la superficie del mar por medio de un *esfuerzo cortante* el cual tiene comportamiento oscilante periódico (por las brisas) a la altura z y tiempo t $\tau(z, t)$ (este

sería el análogo al flujo de radiación en el caso visto de I).

$\tau(z,t)$ llega de manera tangencial sobre la superficie del mar, transfiriendo p a este último, y generando corrientes marinas, cambiando la velocidad del agua en superficie V_S , de esta manera se puede ver que V_S juega un papel análogo a T_S , siendo entonces la cantidad que Veto y Christensen (2015) llaman potencial.

Aunque Veto y Christensen (2015) no dan una ecuación para describir el comportamiento de V_S , se esperaría que fuera un senoide, debido al flujo oscilante periódico de p que llega a la superficie del mar, por lo que se puede pensar que su forma es similar a la de la Ec. (6.21) que Wang et al. (2010) dan para T_S .

De esta manera se entiende la similitud que existe entre el fenómeno descrito por Wang et al. (2010) y el que se planteó en esta ocasión basado en lo hecho por Veto y Christensen (2015), de tal manera que se podría pensar en un método similar al realizado por Wang et al. (2010) para llegar a la Ec. (6.25), en la que se describe el comportamiento oscilante de $\tau(z,t)$ en la superficie del mar ($\tau(0,t)$) como función de ΔV_S , siendo esta última la amplitud de la función senoide que se espera para describir a V_S .

$$\tau(0,t) = \sqrt{\mu_1 \rho_2} \sqrt{\omega} \Delta V_S \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (6.25)$$

siendo ρ_2 la densidad del agua y μ_1 la viscosidad del fluido cuyas dimensiones son $Pa \cdot s$.

Las ecuaciones (6.22) y (6.25) son de la misma forma que la Ec. (6.24) que Veto y Christensen (2015) dan para generalizar fenómenos de este tipo.

El término $\sqrt{\mu_1 \rho_2}$ en la Ec. (6.26) es el que Veto y Christensen (2015) llaman de manera general como inercia difusiva periódica, y que en este caso llaman *inercia de fluido* (Veto y Christensen, 2015), y en el método revisado de Wang et al. (2010) recordar que se llamó inercia térmica, dada por $\sqrt{\rho_1 c_e K}$; entre estas cantidades es interesante observar que μ_1 es análogo a K y ρ_1 a ρ_2 ; mientras que en la inercia de fluido no se encuentra un término similar a c_e presente en la inercia térmica.

Las dimensiones de la Ec. (6.25) son pascuales, resultado del producto de la inercia del fluido cuyas dimensiones son $kgm^{-2} \sqrt{s}$ con las de $\sqrt{\omega}$ y las de ΔV_S ; es importante mencionar que las dimensiones de pascuales para $\tau(0,t)$ en este caso no son como las referidas a una presión, en las que una fuerza actúa de manera perpen-

dicular al plano de acción; pues en este caso se entiende que Veto y Christensen (2015) más bien se refieren a que sabiendo por segunda ley de Newton que una fuerza es igual a dp/dt , y como un flujo se mide por unidad de tiempo y unidad de área, entonces al dividir la fuerza entre dimensiones de área, se obtiene pascal; pero, se debe tener claro que en este caso no actúa ninguna fuerza de manera perpendicular, pues de hecho el esfuerzo cortante se ejerce tangencialmente sobre la superficie del mar.

6.2. Inercia térmica y la isla de calor

Es bien conocido que el clima de una ciudad es más cálido que su entorno y que el espacio previo; i.e. se registra temperatura mayor con respecto a sus alrededores rurales y con el espacio rural antes de ser urbanizado, a este fenómeno se le conoce como isla de calor urbana (*ICU*), aumentando de manera general la temperatura en la ciudad; pero más la mínima $T_{<}$ alcanzada durante el amanecer, disminuyendo el rango térmico.

Una variable climática es anómala cuando su valor promediado idealmente durante un periodo de 30 años cambia con respecto al valor promedio de la misma cantidad durante otro periodo de 30 años; entendido esto, la *ICU* es una *anomalía positiva de temperatura* (comunicación personal con Garduño René).

La *ICU* ha sido estudiada en varias ciudades, principalmente de latitudes medias; evaluando la diferencia de temperatura. Sin embargo, sus causas físicas suelen mencionarse sólo de paso, diversas y superficialmente, lo cual ya se había dicho en la introducción, en la que se supuso que cuando la mayoría de las referencias revisadas (Mencionadas en la introducción) mencionan que los materiales de construcción “guardan” calor se están refiriendo al calor específico c_e del material; pero como se vio, dicha suposición es incorrecta e incompleta, pues con c_e sólo se puede dar una medida de la cantidad de calor que admite el cuerpo estudiado. Mientras que con I se puede describir cómo ingresa calor al cuerpo, pues incluye conductividad, con lo que se puede explicar de manera más completa la formación de una *ICU*.

Dada la incompletez mencionada en el párrafo anterior, a continuación se enumeran las causas físicas consideradas en este trabajo en orden de importancia:

- 1.- Materiales de construcción y urbanización que tienen una gran I , provocando la penetración del calor diurno y su lenta liberación nocturna. Aquí es interesante mencionar que las superficies se calientan más rápido (Kim, 1991) de lo que se

enfrian (Wang et al., 2010) por eso resulta que esta es una de las principales causas de la *ICU*.

2.- Deficiencia de agua líquida superficial para ser evapo-transpirada, entonces el calor (natural y antropógeno) introducido al ambiente se va en aumento de temperatura (calor sensible) y no en cambio de fase, o calor latente (explicados en el Capítulo 2). La deficiencia de agua líquida ocasiona un incremento general de la temperatura, y esto a su vez ocasiona mayor sequedad en el ambiente urbano, lo cual refuerza el causante inicial, y así de manera sucesiva. A este fenómeno se le conoce como *isla de sequedad urbana (ISU)* (comunicación personal de Garduño René con Jáuregui (1993)) y es un ejemplo de *retroalimentación positiva* del clima.

3.- Transporte de calor sensible al aire por conducción-convección emitido por máquinas y aparatos, habitantes y animales, etc. Es importante hacer notar que estas fuentes se consideran tanto en el exterior como al interior de los edificios, aunque las variables climáticas se refieren al exterior de las construcciones, no al interior.

4.- Efecto invernadero local (adicional al efecto invernadero global, causante del cambio climático, producido por los *GEI*) por la emisión exacerbada de gases termoactivos.

Las causas 2, 3 y 4 se dan por completez, ya que en las referencias citadas (en la introducción) no se dan; sin embargo, su mención es relevante para explicar la formación de una *ICU*, pues son convincentes y su entendimiento no es ajeno al conocimiento general en física del clima; por otro lado, la causa 1 sí suele mencionarse, aunque no en términos de *I*, por lo que no resulta clara la explicación que en general se da, por esa razón aquí se profundiza en su estudio.

Para estudiar la formación de una *ICU* con *I*, conviene hacer la separación entre elementos de construcción y urbanización, al primer conjunto pertenecen paredes, azoteas y patios, mientras que el segundo se refiere al pavimento vehicular y banquetas principalmente.

Para los elementos de construcción, a excepción de los patios, se debe suponer que tienen el grosor suficiente para que se pueda ignorar el hecho de que la señal térmica penetre hasta el interior, de esta manera se asegura poder medir las variables climáticas en el exterior sin pérdida de generalidad. También es importante aclarar que estos elementos son aislantes térmicos, pues de otro modo incluso se podría hablar de una isla de calor doméstica.

La condición del grosor suficiente en los elementos de construcción no es necesaria para los de urbanización, pues éstos se aproximan bastante bien a la condición teórica analizada en la sección anterior de una superficie con profundidad semi-infinita.

Es importante mencionar que la segunda causa de la enumeración dada anteriormente resulta extremosa, pues la deficiencia de agua líquida superficial ocasiona que la temperatura máxima incremente más, y la mínima disminuya más, mientras que la tercera contribuye principalmente al aumento de la máxima. De este modo se entiende que estas causas no explican la reducción del rango térmico que ocurre en la *ICU* por el aumento de $T_{<}$.

Sin embargo, la primer causa sí ayuda a explicar el aumento de $T_{<}$, y por ende la disminución del rango térmico que ocurre en una *ICU*, pues como se vio, la liberación de calor durante la noche es lenta, debido a los altos valores de I de los elementos de construcción y urbanización de una ciudad, con esto se puede entender que al amanecer la lenta liberación continua, incrementando $T_{<}$. Aunado a esto, se puede conjeturar que la cuarta causa contribuye al aumento de $T_{<}$, se mencionó la palabra conjeturar porque en los artículos revisados no mencionan esto como causa.

Dicho esto, y sabiendo que I se podría calcular experimentalmente con la Ec. (6.1) (recordar que a escala global su valor se estima con modelos como el de Wang et al. (2010)), a continuación se revisaran las variables físicas intensivas: c_e , ρ_1 y K (que dan I) de los elementos de construcción y urbanización.

El valor de c_e en los materiales usados para construcción y urbanización es bajo con respecto por ejemplo al del agua, esto significa que la temperatura de éstos debería cambiar rápidamente; sin embargo, esto no ocurre, sino lo contrario; y esto se explica por los grandes valores de I que tienen los componentes de la ciudad, causados principalmente por tener ρ_1 elevado, ya que K , al igual que c_e es baja, en comparación con metales, pues por ejemplo si se considera cobre, el valor de la conductividad del concreto (material que suele ser usado en los elementos de construcción y urbanización) es de aproximadamente 1/423 el del cobre.

La importancia de K radica en que da un sentido temporal al proceso, pues como se ha visto con esta propiedad se puede describir cómo ingresa el calor al sistema; no obstante, saber que la conductividad en los materiales de construcción y urbanización es baja ayuda a entender de manera más intuitiva la formación de una *ICU* y su *ciclo diario*, pues esto significa que el flujo de calor a través de los

componentes de las ciudades es lento, provocando que durante la noche el flujo iniciado durante el día, continúe, pero en dirección contraria, hacia el exterior, aumentando el valor de la temperatura de los alrededores, en especial $T_{<}$. Cabe resaltar que la primer y tercer causas son responsables del aumento de $T_{<}$.

Lo descrito en el párrafo anterior con respecto al flujo de calor se repite diariamente, de este modo se entiende el ciclo diario de la *ICU* y de temperatura, como el que se observa en la Fig. 6.2b, correspondiente al ciclo diario de la temperatura medida en el suelo del sitio de Lucky Hill, Arizona, en la cuenca de Walnut Gulch durante la temporada de premonzón caracterizada por una fuerte insolación y nubes ocasionales, características que resultan muy parecidas a las de una ciudad.

De lo dicho anteriormente se han entendido las principales características de una ciudad que propician el aumento de su temperatura, especialmente $T_{<}$; no obstante, también se debe hacer notar que las ciudades cuentan con una mayor superficie expuesta por los edificios para disipar calor en comparación con las zonas rurales, tal como pasaba en los ejemplos de la forma en que liberan calor los elefantes y el motor de motocicleta vistos en el Capítulo 2. En esta parte también resulta interesante comentar que algunos autores mencionan que los edificios encajonan el calor, aumentando $T_{<}$; sin embargo, esto puede resultar en un efecto contrario, pues el encajonamiento también produce viento, lo cual refresca los alrededores.

6.3. Inercia térmica del regolito de Marte

Tres de las manifestaciones climáticas más importantes de Marte son las tolvanezas, oscilación estacional del tamaño de los casquetes polares y la correspondiente variación periódica de su presión atmosférica; de éstas, se evitará la primera, pues es un proceso dinámico irregular que resulta complicado de modelar; mientras que las dos restantes se fundamentarán con la inercia térmica del regolito (definido en la introducción) de Marte.

En Marte existen estaciones climáticas similares a las de la Tierra, debido principalmente a que su eje de rotación está inclinado 25° con respecto al de su órbita, comparable con los 23.5° del eje de la Tierra. Para este estudio sólo se considerará invierno y verano, y su revisión se hará en los polos, de esta manera se puede dividir el año en día (verano) y noche (invierno) polar; cabe resaltar que estas estaciones son asimétricas, es decir que invierno y verano son opuestas por hemisferio, pues de otro modo no habría variación periódica en la presión atmosférica que estudiar, lo cual se verá con mayor detalle más adelante.

Marte tiene una excentricidad en su órbita que es más de cinco veces mayor que la de la Tierra (Nave, 2017); además, por segunda ley de Kepler la noche polar sur excede a la de Norte en 77 días (Mendoza et al., 2020). Con esto y sabiendo que durante el perihelio en el hemisferio norte es invierno y en el sur verano, y que en el afelio ocurre lo contrario, se puede entender que las estaciones climáticas para el hemisferio sur son más extremas; sin embargo, la asimetría en las estaciones se debe principalmente a la topografía del planeta, pues se sabe que el polo sur está 4km por encima del nivel de referencia promedio (6.4 mb), en comparación con el polo norte que está 2 km por debajo del nivel de referencia (Mendoza et al., 2020), esto significa que el casquete en el polo norte tiene un espesor mucho mayor que el del sur.

Es interesante comentar que la altitud en Marte no importa en el sentido de considerar un efecto invernal como en la Tierra, pues allá no existe este fenómeno, ya que el número de moléculas absorbentes (también llamada *masa óptica* o *camino óptico*) de radiación de onda larga por unidad de área en una columna de la atmósfera de Marte es baja (comunicación personal con Garduño René); No obstante, la altitud en relación con la topografía sí se debe considerar, pues como ya se dijo, el casquete polar norte es más profundo que el sur, teniendo como una de sus consecuencias que la oscilación estacional de los casquetes polares no sea simétrica.

El comportamiento térmico del regolito de Marte es fundamental para su clima, pues es su principal regulador de temperatura, y funciona de manera análoga a como lo hacen los océanos en la Tierra; cabe aclarar que en este estudio se considera el agua en Marte despreciable en todas sus fases, por lo que no tiene un ciclo hidrológico, pero sí uno de CO_2 , regulado principalmente por la inercia térmica del regolito.

La atmósfera de Marte está compuesta principalmente por CO_2 , formando parte de un 95 % de su composición, el resto está formado por nitrógeno 2.6%, argón 1.9%, y gases traza como vapor de agua, oxígeno y además polvo (de las tolvaneras) (Shekhtman, 2019).

Sabiendo que el CO_2 es el principal componente de la atmósfera, se puede pasar al estudio de la oscilación estacional del tamaño de los casquetes polares, pues cuando comienza la noche polar, la temperatura del regolito desciende hasta valores que se encuentran por debajo de la temperatura de condensación del CO_2 , cabe aclarar que aquí así se llama al cambio de estado gaseoso a sólido (Mendoza et al., 2020); de este modo los casquetes se comienzan a formar de hielo seco (CO_2

sólido), incrementando a la vez su espesor (vertical) y extensión (horizontal) durante el invierno.

Una vez terminada la noche polar, comienza el día, periodo durante el que conviene suponer al regolito formado por capas superpuestas, pues se puede pensar que en éstas penetra el calor durante todo el día polar, si además se consideran los grandes valores de I del regolito, pareciera que el calor se “almacena” en las capas. Durante este lapso el hielo seco de los casquetes polares se sublima, pasando directamente de estado sólido a gaseoso; esto se debe a la baja presión atmosférica, que es más de 100 veces menor que la de la Tierra medida al nivel del mar (González , 2011), en la que incluso tampoco existe CO_2 en estado líquido, cabe comentar que por debajo del *punto triple* del CO_2 no existe dicho elemento en estado líquido.

Mendoza et al. (2020) modelan la oscilación estacional del tamaño de los casquetes polares, a partir de lo cual lograron calcular su crecimiento; esto se representa en la Fig. 6.4 para dos casos que están en función de una determinada *longitud areocéntrica* (L_s), la cual se mide en grados pues es el ángulo Marte-Sol, medido desde el equinoccio de primavera del hemisferio norte, donde $L_s = 0$, “todas las estaciones, los solsticios y equinoccios se nombran por el hemisferio Norte, por lo que deben entenderse como “boreales” ” (Mendoza et al., 2020).

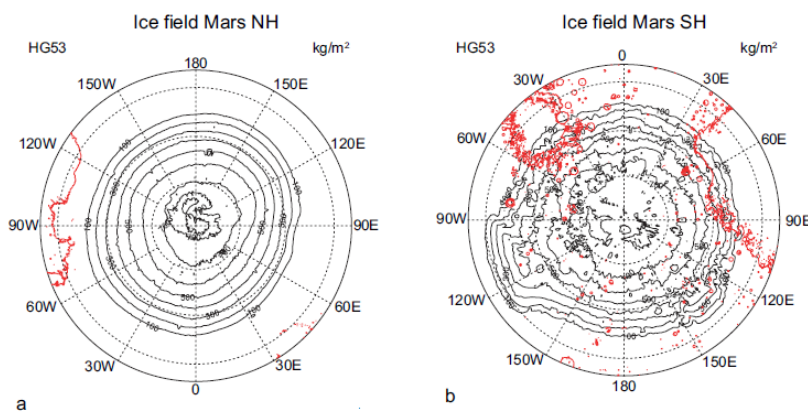


Figura 6.4: Masa de hielo ($kg\ m^{-2}$), calculada con el modelo de Mendoza et al. (2020), en (a) Polo Norte para $L_s = 342^\circ$ (al final del invierno boreal) y (b) Polo Sur para $L_s = 150^\circ$ (final del verano boreal). Los contornos rojos indican el nivel de referencia $z = 0$.

En el artículo de Mendoza et al. (2020) no se dan datos con los cuales comparar el crecimiento de los casquetes calculado a partir del modelo; pero, mencionan que “La forma y extensión de ambos casquetes polares simulados por el modelo, con-

cuerda bien con la forma y extensión de las heladas estacionales en ambos polos, publicado por National Geographic (2016)” (Mendoza et al., 2020).

Otra forma indirecta de comprobar el éxito del modelo, es a partir de la variación de la presión atmosférica, ya que el balance de masa de CO_2 implica que el incremento (decremento) de la superficie total de la masa de hielo, produce un decremento (incremento) del CO_2 atmosférico. Por esta razón, el modelo de Mendoza et al. (2020) incluye una ecuación para la variación de la presión en la atmósfera, y en este caso sí se cuenta con datos tomados por los Viking Lander 1 y 2, con los cuales se puede comprobar el modelo.

Los Vikings 1 y 2 se encargaron de tomar datos durante los periodos de 4 y 3 años, respectivamente (Tillman, 1989 citado por Mendoza et al. (2020)); la gráfica de la variación de la presión como función de la *longitud areocéntrica* (L_s) para ambos Vikings se puede ver en la Fig. 6.5, L_s “se expresa en grados, el 0 corresponde al equinoccio de verano. Todas las estaciones, solsticios y equinoccios se nombran para el hemisferio norte” (Mendoza et al., 2020).

Es importante mencionar que el Viking 2 se posicionó en una altitud menor que la del 1 (Wood y Paige, 1992), por esta razón en la Fig. 6.5 se aprecia que en general los valores de las presiones medidas por el Viking 2 son mayores que las del 1.

En la Fig. 6.5 se puede apreciar el extremoso cambio de presión que sufre la atmósfera, ya que para los dos Vikings se ve una amplitud (diferencia entre valor máximo y mínimo) de aproximadamente 30%; y como ya se dijo, esto se debe principalmente a los valores de la inercia térmica y a la larga duración de los ciclos durante los cuales el calor penetra y se libera, ocasionando la sublimación y condensación, respectivamente, del CO_2 , principal componente de la atmósfera, por lo que durante la condensación la atmósfera prácticamente se “cae”, aunado a esto se debe tomar en cuenta la baja densidad de la atmósfera, su bajo valor de gravedad y la excentricidad del planeta que contribuyen a los cambios bruscos de presión atmosférica.

También resulta interesante hacer notar que al principio, en el intervalo para L_s de 0 a 150° las curvas para ambos Vikings se parecen mucho. Para este mismo intervalo, también se debe observar que en el caso del Viking 2, se observa una pérdida de información. Otro punto por resaltar, es que para el Viking 1 en la segunda cresta se ve una diferencia apreciable (espacio) entre la curva calculada y la generada con los datos medidos.

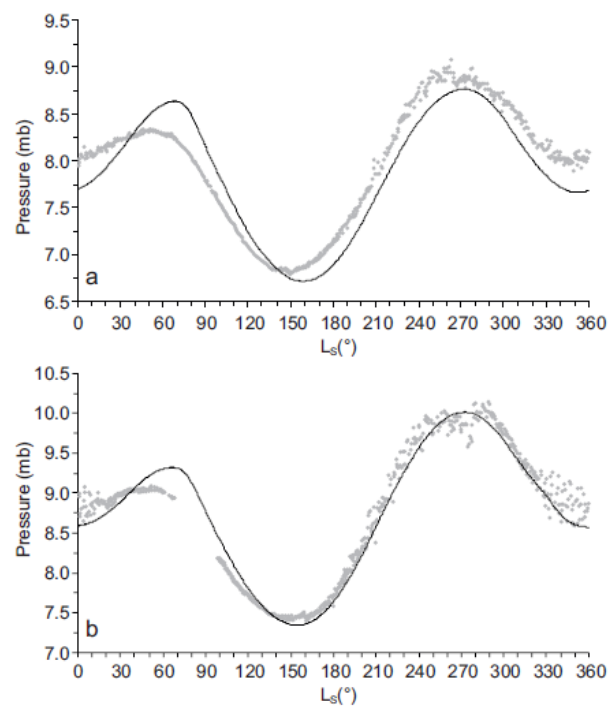


Figura 6.5: La curva continua de la parte a) se genera con el modelo termodinámico de Mendoza et al. (2020), mientras que los puntos corresponden a los valores promedio diarios observados por el Viking Lander 1. En b) La curva continua se calcula con el modelo termodinámico, y los puntos corresponden a valores promedio diarios medidos por el Viking Lander 2.

Capítulo 7

Discusión y conclusiones

El objetivo inicial que motivó este trabajo fue dar una causa física argumentada y lo más clara posible para la formación de una isla de calor urbana *ICU*, pues en artículos revisados (citados en la introducción) los autores argumentan que los materiales usados para construcción y urbanización “guardan calor” durante el día, el cual se libera lentamente por la noche, aumentando la temperatura en las ciudades; sin embargo, esto resulta incompleto desde un punto de vista físico, ya que no queda claro qué propiedad del material ocasiona el efecto de “guardar calor”, resulta natural pensar que se refieren a la capacidad calorífica; no obstante, ésta es baja en los materiales de construcción y urbanización; además, no incluye tiempo, pues como se definió en la introducción es una propiedad calorimétrica (dentro de la termodinámica en equilibrio), no de transporte (comunicación personal con Goldstein Patricia).

Además que en las referencias citadas no se especifica la propiedad de los materiales que ocasiona este efecto de “guardar calor”, tampoco aclaran que durante el día los materiales también liberan calor; pero, es más notorio durante la noche, ya que no hay radiación solar incidente.

La inercia térmica I es la propiedad que ayudó a entender qué quieren decir las referencias al mencionar que los materiales “guardan calor”, pues como se vio en el Capítulo 6, esta propiedad incluye conductividad, cuyo valor es bajo en los materiales usados para la construcción, de esta manera se entiende cómo es que el calor que penetra en los elementos de construcción y urbanización durante el día, continúa su flujo por la noche (pareciendo que el calor se “guarda” durante el día) pero en sentido opuesto hacia el medio ambiente, incrementando a su vez la temperatura del aire.

Aunque el aumento de temperatura ocurre de manera general, es más notorio en

la mínima, cuyo incremento se debe quizá al efecto invernadero local, que es a su vez una causa más de la *ICU*, ésta última tiene muchas causas, aunque aquí se explica con *I* el aumento general de temperatura.

Por otro lado, no se encontró ningún estudio de *I* que incluya una fuente de radiación fija. De este modo, se puede concluir que *I* y definiciones análogas (tal como la inercia de fluido vista en la sección 6.1.2) surgen en fenómenos que incluyen un forzador (externo) oscilante periódico, como la radiación solar que penetra los componentes de construcción y urbanización durante el día, o, las brisas marinas y terrestres que transfieren momentum de la atmósfera al mar. En ambos casos al existir un forzador oscilante, la respuesta tiene un comportamiento del mismo tipo.

Novedoso resultó el concepto de *I*, del cual incluso sus unidades parecían extrañas; ya que incluyen \sqrt{s} siendo la parte más intrigante, pues en física no es común ver unidades elevadas a una potencia fraccionaria; sin embargo, se encontró la razón de este hecho, pues al ser *I* parte de la amplitud de la Ec. (6.23) que describe el comportamiento oscilante del flujo provocado por el forzador, se entendieron sus unidades, ya que al multiplicarse por los otros factores que conforman la amplitud (ver Ec. (6.23)) se obtienen unidades de flujo (energía por unidad de área y de tiempo). Cabe resaltar que esto último sólo ayuda a entender y verificar las unidades de *I*, mas no es una deducción formal.

Así pues, entendido el significado de las unidades de *I*, se puede concluir desde otra perspectiva que efectivamente este concepto funciona solamente en fenómenos que se caracterizan por tener un comportamiento oscilante.

En el Capítulo 2 se entendieron los principios físicos del funcionamiento del sistema climático, esto se hizo a partir de los tres mecanismos de transferencia de calor; de los cuales se realizó una revisión crítica en el Capítulo 5, resaltando procesos que existen pero que en general se ignoran, tales como el mecanismo conductivo-convectivo, y la complejidad matemática del enfriamiento completo de un cuerpo (que incluye los tres mecanismos de transferencia).

El enfriamiento completo es más realista que la conocida ley de enfriamiento de Newton, la cual es un caso ideal sobre-simplificado, ya que en general no se habla del proceso acoplado conductivo-convectivo, considerando que el transporte de calor se efectúa únicamente por conducción; tampoco se aclara que la ley se cumple con mayor precisión para la convección forzada, pues en este caso se mantiene constante la temperatura del fluido en el que se encuentra inmerso el cuerpo en estudio, lo cual en general tampoco se dice. Finalmente también es importante mencionar que casi no hay referencias para el caso simétrico (calentamiento).

A pesar de que el enfriamiento completo es más realista, cabe comentar que la descripción revisada de este proceso involucra varias condiciones que resultan muy ideales; pues como se vio, para facilitar el estudio del transporte por radiación, se debe suponer que la temperatura de todos los objetos que rodean al cuerpo en estudio sea constante, además de considerar que sólo emiten (no interactúan entre ellos), afectando únicamente al cuerpo; también se debe suponer que el fluido en el que se encuentra sumergido este último (para considerar la conducción-convección) es completamente transparente, es decir que no emite ni absorbe.

De los procesos de transferencia de calor se profundizó más sobre el radiativo, ya que es el transporte mediante el cual el Sol transfiere energía a la Tierra, siendo la fuente que hace funcionar al sistema climático. Se entendió parte del desarrollo histórico de esta transferencia estudiando la radiación térmica, y después se revisó su influencia en diferentes procesos climáticos, tales como el equilibrio radiativo para calcular la temperatura efectiva de un planeta, la radiación atmosférica, efecto invernadero, entre otros; de estos, el primero es de especial interés, pues se representó gráficamente el balance radiativo de la Tierra con sus espectros de absorción de onda corta (radiación solar) y de emisión de onda larga (radiación terrestre).

Esto se pudo hacer debido a que se encontró un comportamiento peculiar de la ley de radiación de Planck, pues normalizando a 1 la energía emitida por unidad de superficie en λ_{max} (definida en el Capítulo 4), y con el eje horizontal (λ) en escala logarítmica, se tiene un conjunto de curvas iguales desplazadas sobre este último eje con la “misma área” (ver Fig. 4.5).

Específicamente para las temperaturas de la Tierra y el Sol, la posición de estas curvas resultan ajenas, pero yuxtapuestas (donde termina una comienza la otra), lo cual resulta muy ilustrativo y pedagógico en física del clima. Esta representación gráfica permite entender el balance radiativo que debe mantener el planeta en promedio global anual para un año promedio.

Un hecho importante fue haber encontrado que I además de explicar el aumento de temperatura, sobre todo la mínima en las ciudades, ayuda a entender la oscilación estacional del clima de Marte, pues la I de su regolito es su principal regulador de temperatura, comportándose de manera similar a como lo hacen los océanos en la Tierra.

Otro aspecto muy valioso que se cumplió en la tesis es el enfocado a la docencia, ya que se entendieron puntos que por lo general suelen no quedar totalmente claros o que incluso pueden ser desconocidos, tales como el reconocer la diferencia

entre la distribución de Planck por unidad de volumen y de área (densidad de radiación al interior de la cavidad y flujo de radiación en el hueco de ésta última, respectivamente), o mostrar que la distribución de Planck, ya sea por unidad de área o volumen, se puede expresar en función de otras variables que las conocidas ν y λ , escribiéndola en términos del número de onda η . De esta distribución resultó interesante hacer notar que a pesar de que ν y λ son variables inversas, las gráficas que se generan con sus respectivas ecuaciones tienen la misma forma. Cabe destacar que también se hizo una revisión clara de las tres aproximaciones (de Planck, Wien y Rayleigh-Jeans) que explican la radiación de cuerpo negro.

Hasta aquí se han descrito las conclusiones principales de esta tesis; a continuación se mencionan algunos puntos que podrían desarrollarse en un posible trabajo futuro para complementar el presente.

Encontrar referencias para la *ley de calentamiento de Newton* resultó complicado, por lo que realizar el experimento para verificar si este proceso es simétrico al conocido enfriamiento, sería de gran aporte, sobre todo cuando se trata los calentamientos más completos.

Otro punto sobre el que se podría profundizar más en la tesis, es en la descripción teórica del calentamiento de un objeto por una fuente de radiación fija; pues para este caso sólo se encontró una referencia, por lo que se propone ver si se puede profundizar más la búsqueda de bibliografía, o realizar un experimento de este caso. Pues de esta manera se podrían comparar los comportamientos que siguen el caso fijo y el oscilante.

Para que queden más claros los resultados del Capítulo 6, sería un gran aporte poder realizar mediciones experimentales para calcular valores I con distintos materiales, pues no se encontraron referencias en las que se reporte esta clase de estudio de manera formal.

Referencias

- Adem J. (1962). On the theory of the general circulation of the atmosphere. *Tellus*, **vol. 14**, 102–115.
- Allen R., L. Pereira, M. Smith y D. Raes. (1998). *Crop Evapotranspiration-Guidelines for computing crop water requirements-FAO Irrigation and drainage*. Roma: FAO.
- Beiser A. (2003). *Concepts of Modern Physics*. New York: Mcgraw-hill.
- Bennett W., J. Wang y L. Bras (2008). Estimation of global ground heat flux. *European journal of hydrometeorology*, **vol. 9**, 744–759.
- Besson U. (2010a). Cooling and warming laws: An exact analytical solution. *European journal of physics*, **vol. 5**, 1107–1121.
- Besson U. (2010b). The history of the cooling law: When the search for simplicity can be an obstacle. *Science and education*, **vol. 8**, 1085–1110.
- Besson U. (2009). Paradoxes of thermal radiation. *European journal of physics*, **vol. 30**, 995–1007.
- Black R. (2013). Las cicatrices del calentamiento global desde la revolución industrial. En *BBC NEWS/MUNDO*. Recuperado de https://www.bbc.com/mundo/noticias/2013/09/130926_ciencia_historia_cambio_climatico_np#:~:text=1824%20E2%80%93%20El%20f%C3%ADsico%20franc%C3%A9s%20Joseph,Aire%20una%20vez%20convertido%20en%20el%2023/2/22.
- Bohren C. (1991). Comment on “Newton’s law of cooling-a critical assessment” by Colm O’ Sullivan. *American journal of physics*, **vol. 59**, 1044-1045.
- Casas C. y J. Alarcón. (1999). *Meteorología y clima*. Barcelona: Editions UPC.
- Centro Mario Molina. (2016). Programa de educación en cambio climático (Física). En *centro Mario Molina*. Recuperado de <https://centromariomolina.org/libro/libros/LibrodeFisica/2/#zoom=z>. el 29/8/2021.
- Connor N. (2020). ¿Qué es el coeficiente de transferencia de calor por convección? Definición. En *Thermal Engineering*. Recuperado de <https://www.thermal-engineering.org/es/que-es-el-coeficiente-de-transferencia-de-calor-por-conveccion-definicion/> el 15/2/2021.

- Dalu A. y M. Baldi. (1998). Upwelling induced by periodic wind stress. *Nuovo cimento*, **vol. 11**, 577-587.
- De la Peña L. (2006). *Introducción a la mecánica cuántica*. México: CFE.
- Dominguez D. y A. Jaramillo. (2017). Resolución de la ecuación unidimensional de calor usando la transformada de Laplace. En *Scribd*. Recuperado de <https://www.scribd.com/documents/355507976/Resolucion-de-la-ecuacion-de-calor-usando-transformadas-de-Laplace> el 3/12/21.
- Eisberg R. (2000). *Fundamentos de Física moderna*. México: Limusa.
- Fleagle R. y J. Businger. (1980). *An introduction to atmospheric physics*. Seattle: Academic press.
- Garduño R. (2003). *El veleidoso clima*. México: CFE.
- Gokenbach M. y K. Schmidtke. (2009). Newton's law of heating and the heat equation. *Involve*, **vol. 2**, 419-437.
- González F. (2011). El exótico clima Marciano. *Instituto de Astrofísica de Andalucía*, **vol. 4**, 1-15.
- González E. M. (2014). Características térmicas de los materiales. En *Arquitectura eficiente*. Recuperado de <https://pedrojhernandez.com/2014/04/09/caracteristicas-termicas-de-los-materiales/> el 4/3/22.
- Government Degree College Kulgam. (2004). Planck's Radiation Law. En *Gdckulgam*. Recuperado de http://gdckulgam.edu.in/Files/f07ef270-7e91-4716-8825-2966f17cc0f7/Menu/Plancks_Radiation_law_3da32a73-3848-4135-bd19-e110bd2dfdbd.pdf el 15/3/22.
- Hartmann D. (1994). *Global Physical Climatology*, Seattle: Academic press.
- Hernandez D. (2014). Difusión anómala: fundamentos y aplicaciones. *Sociedad matemática mexicana*, **vol. 58**, 37-51.
- Jacobs W. (1951). *The Energy Exchange Between Sea and Atmosphere and Some of Its Consequences*, California: University of California press.
- Jáuregui E. (1993). La isla de calor urbano a fines del siglo XIX. *Investigaciones Geográficas, Instituto de Geografía, UNAM*, **vol. 26**, 31-39.
- Johnson J. (1954). *Physical Meteorology*, U.S.A.: Massachusetts institute of technology.

- Kim H. (1991). Urban heat island. *International journal of remote sensing*, **vol. 13**, 2319-2336.
- Kuhn T. (1987). *La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica*, Madrid: Alianza editorial.
- Maalouf C., D. Tran Lee, L. Chahwane y M. Lachi. (2011). A study of the use of thermal inertia in simple layer walls and its application to the use of a vegetal fiber material in buildings. *International journal of energy*, **vol. 19**, 467-489.
- Marcos A., A. Lifshitz. A. de Pomposo. T. Froese. M.D. Kirchhoff. O. Basurto. M. Villegas. A. Mercado Reyes. B. Domínguez. E. L. Mateos. J. J. Reyes. H. Ilarraza. D. Rius. R. Chávez. L. Rodríguez. A. C. Ilarraza. O. Valadez. E. Hernández-Lemus. M. Siqueiros García. C. E. Maldonado. (2019). *Biocomplejidad facetas y tendencias*. México: Copit-arxives.
- Martínez V. (2019). ¿Qué animales sudan?. En *Botanical*. Recuperado de <https://www.botanical-online.com/animales/animales-sudan> el 5/8/21.
- Mendoza V., B. Mendoza, R. Garduño, G. Cordero, M. Pazos, S. Cervantes y K. Cervantes. (2020). Thermodynamic simulation of the seasonal cycle of temperature and pressure on Mars. *Atmósfera*, **vol. 34**, 1–41.
- Myrup L. (1969). A numerical model of the urban heat island. *Journal of applied meteorology*, **vol. 8**, 908-918.
- Nave M. (2017). Casquetes Polares de Marte. En *hyperphysics*. Recuperado de <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbases/Solar/mars3.html#c2> el 7/6/2020.
- O' Sullivan C. (1900). Newton law cooling- a critical assessment. *American journal of physics*, **vol. 10**, 1-5.
- Rodríguez M. (2020). *Introducción al cálculo fraccional y a los modelos de crecimiento tumoral clásicos y fraccionarios*. [Trabajo fin de grado, Universidad complutense Madrid], <https://eprints.ucm.es/id/eprint/59424/>.
- Romero V. (2015). *Radiación de cuerpo negro – Gas de fotones*. Instituto de Física. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Sánchez M. (2016). La inercia térmica en las casas de madera. En *The cambium design*. Recuperado de <https://www.thecambiumdesign.com/the-cambium-design-blog/construccion/la-inercia-termica-en-las-casas-de-madera-parte-1/> el 19/6/2020.

- Shekhtman L. (2019). With Mars Methane Mystery unsolved, curiosity serves Scientists a New One: Oxygen. En NASA. Recuperado de <https://www.nasa.gov/feature/goddard/2019/with-mars-methane-mystery-unsolved-curiosity-serves-scientists-a-new-one-oxygen> el 11/2/2021.
- Sinton W. y J. String. (1959). Radiometric observations of Mars, *Astrophysical journal*, **vol. 131**, 459-469.
- Snyder R. y J. Melou. (2010). *Protección contra las heladas: fundamentos práctica y economía*. Roma: FAO.
- Spanier J. (1977). Education in applied mathematics the Claremont mathematics clinic. *Siam review*, **vol. 19**, 536-549.
- Tian J., H. H. Su, H. He y X. Sun. (2015). An empirical method of estimating soil thermal inertia. *Hindawi*, **vol. 2015**, 1-9.
- Torres A. y F. Brambila. (2017). *Introducción al cálculo fraccional*. México: UNAM (Facultad de ciencias).
- Verbeke S. y A. Audenaert. (2018). Thermal inertia in buildings: A review of impacts across climate and building use. *Sciencedirect*, **vol. 82**, 2-19.
- Veto M. y P. Christensen. (2015). Mathematical theory of thermal inertia revisited1: improving our understanding of martian thermophysical properties through analogous examples of periodic diffusive inertias. *Lunar and planetary science conference*, **vol. 46**, 1-2.
- Wang J. y R. Bras. (1999). Ground heat flux estimated from surface soil temperature. *Journal of hydrology*, **vol. 216**, 214-226.
- Wang J., R. Bras, G. Sivandran, y R. Knox. (2010). A simple method for the estimation of thermal inertia. *Geophysical research letters*, **vol. 37**, 1-5.
- Water science school. (2014). El ciclo del agua. En USGS. Recuperado de <https://water.usgs.gov/edu/watercyclespanish.html> el 12/8/2020.
- Wolfram S. (2009). Wolfram Alpha. En *Wolfram Research*. Recuperado de <https://www.wolframalpha.com/> el 12/9/2020.
- Wood S. y D. Paige. (1992). Modeling the Martian Seasonal CO₂ Cycle. *Icarus*, **vol. 99**, 1-14.
- Yang L., F. Qian, D. Song y K. Zheng. (2016). Research on urban heat island effect. *Elsevier*, **vol. 169**, 11-18.

Zavadska H. (2016). La transferencia de calor en la atmósfera. En *CK12*. Recuperado de <https://www.ck12.org/na/la-transferencia-de-calor-en-la-atmosfera-1/lesson/La-transferencia-de-calor-en-la-atmosfera/> el 2/6/2021.