



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE PSICOLOGÍA

Comparación de dos ajustes a la función
psicométrica en Bisección Temporal Roving

TESIS

Que para obtener el título de
Licenciado en Psicología

P R E S E N T A

Alejandro Rivas Méndez

DIRECTORA DE TESIS

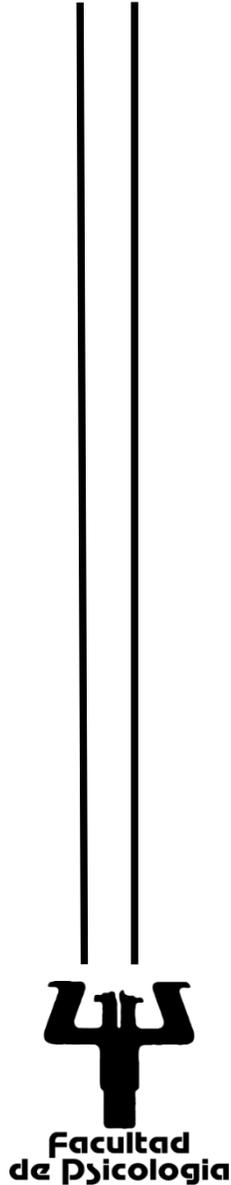
Dra. Judith Marina Menez Díaz

REVISORA DE TESIS

Dra. Livia Sánchez Carrasco

SINODALES

Dr. Raúl Ávila Santibáñez
Dr. Rogelio Escobar Hernández
Lic. Raúl Reyes Contreras



Tesis apoyada por el proyecto PAPIIT IN310320

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. Mayo, 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Para mamá, que siempre ha creído en mi

Para papá, que hacía lo que fuera por ayudarme

Para mi hermano, que nunca me deja solo

Para mí, tan afortunado de contar con ellos...

Agradecimientos

En mi casa siempre ha existido la música. Todos mis recuerdos se encuentran ligados a ella: en la casa, en el auto, al irme y al regresar, en las mañanas y en las noches, en las buenas y en las malas. La radio siempre encendida en casa, los DVD's en la televisión cuando hacían quehacer, la USB y la radio en el auto camino a la escuela o a cualquier destino.

Esta vez quiero compartirles una lista de canciones que me permiten expresar aquello que no suelo decir, pero que constituyen parte de mí y quisiera compartir.

<https://open.spotify.com/playlist/74yATbEV0KL9Q7XHDkk4Xt?si=57bb06cd08df4af3>

“El mejor día” en Spotify

Mamá, no encuentro palabras suficientes para ti. Cada vez que pienso en algo, necesito más cosas para poder expresar todo lo que siento. Eres todo para mí. Siempre me has ayudado a levantarme, sacudirme un poco e ir hacia adelante. Ya sea un consejo o un regaño, nunca te faltan las palabras para alentarme. Sin ti, se me va la vida.

Papá, te me fuiste a medio camino. Aunque no coincidíamos en muchas cosas, aprendí mucho de ti. A pesar de todo, nunca me dejaste y tampoco yo a ti. Descansa...

Hermano, admiro tu paciencia incansable y sentido del humor. Estaré siempre para ti. Por aguantar mis cambios de humor y bromas malas. Por ayudarme sin pensarlo y pensar siempre en mí, sin importar qué. Por tus ronquidos nocturnos mientras me la pasaba haciendo cosas. Por siempre intentar sacarme una sonrisa. Gracias, babas.

Doctora Marina, por todo el conocimiento que me ha transmitido. Por creer en mí y siempre impulsarme a mejorar. Ha sido todo un honor esta travesía. Tampoco encuentro palabras para agradecerle por los consejos académicos y de vida que me ha dado. Coincidir con usted ha sido uno de los mejores regalos que me ha dado la vida. Cuente conmigo, siempre.

A mis tías y tíos: Carmen, Martha, Gordo, Vicente, Rosy, Lupe, Nacho, Luis, Vero que siempre nos han apoyado y han visto por nosotros.

A las gemelas, que apenas van en el camino. Prometo apoyarlas conforme mis posibilidades y creencias.

A mi otro hermanote Tali, de tanto que he aprendido de ti y la oportunidad de estudiar un segundo idioma.

A “Los primos”: Que ha sido una fortuna coincidir con ustedes. Les han dado un nuevo sentido a las convivencias familiares. ¡Cuenten conmigo!

Profesoras que me impulsaron a muchas cosas nuevas especialmente en otro idioma: Edith, Gabriela, Vanyuli, Mariana, Abigail, Rosy.

A todas las profesoras y profesores que confiaron en mí:

Jeanette Hernández, Janett Sosa, Raúl Reyes, Ingrid Marissa Cabrera, Paty Trejo, Benilde García, María Montero, Diego Luna, Mariana Gutiérrez, Rodolfo Bernal, Sofía Rivera, Livia Sánchez, Angélica Juárez, Mariana Rangel, Rogelio Escobar, Corina Cuevas, Laura Hernández, Raúl Ávila. Agradezco las oportunidades que me brindaron, la confianza incondicional, los consejos y el apoyo a lo largo de mi carrera profesional.

Mis amiguines del CCH, no sé que hubiera sido de mí sin ustedes: Dani, Beto, Keni. Me impulsaron a hacer muchas cosas y aprender sobre mí y el mundo.

A mis hermanas postizas: Erandu, Mariana, Andrea (y ahora el sobrino Luca). Que después de tantos años y aunque no nos veamos tan seguido, cada reencuentro es como si nos viéramos todos los días. El cariño nunca cambia y siempre me reciben con una sonrisa.

A todos mis amigos del voli: Isra, Carlos, Carlitos, Monse, José Luis, Osiel, Jazel, David, Alexis, Víctor, Damarys. Siempre me impulsaron a dar lo mejor, a confiar más en mis

habilidades, a conocer nuevos lugares y nuevas experiencias, además de apoyarme en momentos difíciles y en cada etapa que viví junto a ustedes.

A todas las personas con las que compartí mi paso durante la facultad. Por su confianza, cariño y apoyo.

Mis amigas desde primer semestre: Misty, Puebla, Rubi, Brenda, Arely. Por todos esos momentos que vivimos en las clases, nuestras expediciones a conocer lugares de comida por todo CU, la confianza que siempre han tenido conmigo, nuestras aventuras locas, todo el chisme y las risas.

Mis amigos de ping-pong: Aridai, Mario, Andrés, Adriana, Carlos. Por todos esos momentos tan chidos jugando, además de una amistad sincera.

Los otros dos mosqueteros: Moranchel y Diego, porque nos hicimos amigos que buscaban siempre mejorar en lo que hacíamos.

Mis amigos del teatro: Emi, Fer y Tony, por brindarme una amistad tan entretenida y mostrarme nuevos lugares.

A todos los del laboratorio: Moranchel, Adri, Fer, Uri, Krys, Kari, Areli, doctora Marina. Por construir un lugar en el que me siento feliz trabajando y construyendo nuevo conocimiento para que todos podamos lograr nuestros objetivos, así como la confianza que han depositado en mí. A Noel, que me ayudaste enormemente con todo lo de las derivaciones matemáticas y pudimos intercambiar conocimientos mientras hacías tu servicio social.

¡Gracias por todos los momentos juntos!

Contenido

Resumen.....	8
Psicofísica.....	9
Teoría de Detección de Señales (TDS).....	11
Teoría de Expectancia Escalar (SET).....	17
Partición	25
Bisección Temporal Estándar.....	28
Modelo Logístico	31
Modelo Pseudo Logístico (MPL).....	33
Bisección Temporal Roving	37
Criterio de Información de Akaike.....	45
Justificación.....	49
Objetivos.....	50
Método	51
Participantes	51
Materiales y Aparatos	51
Procedimiento	52
Resultados.....	57
Discusión	68
Conclusiones.....	75
Referencias	77

Anexos.....	82
Anexo A. Consentimiento Informado.	83
Anexo B. Ajustes de las funciones obtenidas a partir del modelo logístico y pseudológico por sesión.	85
Anexo C. Ajustes de las funciones obtenidas a partir del modelo logístico y pseudológico para ejecuciones Promediadas entre sesiones.....	94
Anexo D. Ajustes de las funciones obtenidas a partir del modelo logístico y pseudológico por Bloques en ejecución promedio entre sesiones.	98
Anexo E. Ajustes de las funciones obtenidas a partir del modelo logístico y pseudológico por Orden de Presentación en ejecución Promedio entre sesiones.	107
Anexo F. Derivación del Modelo Logístico para ubicar el cambio de concavidad en el Modelo Pseudológico.	116

Resumen

Los modelos Logístico y Pseudológico se han propuesto para describir la ejecución en tareas de discriminación temporal. Sin embargo, no hay evidencia de una comparación directa entre parámetros de los modelos que permita determinar aquel con la evidencia estadística pertinente para analizar los datos resultantes. La presente investigación tuvo como objetivo comparar el ajuste de ambos modelos a los datos obtenidos de una modificación al procedimiento de discriminación temporal "Bisección Temporal Roving". 8 estudiantes de la Facultad de Psicología de la UNAM, de entre 17 y 28 años, participaron en el estudio. La tarea consistió en discriminar una serie de duraciones presentadas en computadora. Se ajustaron ambos modelos a las funciones psicométricas obtenidas y se calculó el Criterio de Información de Akaike (AIC) para determinar el mejor modelo. Adicionalmente, se comparó el parámetro pendiente utilizando ANOVAs de medidas repetidas con los factores Tipo de Ajuste, Bloque, Sesión y Orden de Presentación, así como una prueba t de medidas relacionadas para comparar el Tipo de Ajuste. Tanto los ANOVAs de medidas repetidas como la comparación entre valores de AIC, mostraron que no existen diferencias entre el ajuste de ambos modelos al procedimiento de Bisección Temporal Roving, sin embargo, la prueba t de medidas relacionadas mostró diferencias significativas en el parámetro pendiente ($t(7) = 7.81, p < 0.001$). Un análisis mediante la Teoría de Detección de señales permitió establecer la base empírica de los parámetros. En conclusión, ambos modelos son adecuados para describir las ejecuciones en Bisección Temporal Roving.

palabras clave: Modelo Pseudológico, Modelo Logístico, Bisección Temporal Roving, Criterio de Información, Humanos

Psicofísica

La Psicofísica se describe como el estudio científico de la relación entre un estímulo y su sensación (Gescheider, 1997), y puede aplicarse a cualquier sistema sensorial (Kingdom, 2006).

El filósofo Johann Herbart concibió el concepto de “Umbral Sensorial” como una idea de que los eventos mentales tenían que superar una cantidad crítica de energía para ser experimentados conscientemente (Gescheider, 1997).

Posteriormente, Ernst Weber y Theodor Fechner se interesaron en medir los límites de los órganos sensoriales humanos, definiendo un *Umbral Absoluto* como la cantidad mínima de energía necesaria para producir una sensación y un *Umbral Diferencial* como la cantidad de cambio en un estímulo necesaria para producir una “Diferencia Apenas Perceptible” (DAP) en la sensación.

Dentro de la psicofísica, el Método de Estímulos Constantes es utilizado ampliamente para determinar el umbral diferencial a partir de la discriminación de estímulos. Este método consiste en presentar repetidamente estímulos de intensidades diferentes, que puede tomar de 5 a 9 valores por estímulo. Los estímulos se presentan a intervalos iguales y de manera aleatoria durante el experimento (Gescheider, 1997). Para estimar el umbral diferencial, el sujeto debe comparar pares de estímulos: uno fijo denominado *Estímulo Estándar* contra uno variable o *Estímulo de Comparación* y juzgar cuál produce una sensación de mayor magnitud. El conjunto de estímulos de comparación se escoge de manera que un estímulo con mayor magnitud sea juzgado como mayor al estímulo estándar y un estímulo con menor magnitud, sea juzgado como menor al estímulo estándar teniendo el mismo número de estímulos por arriba

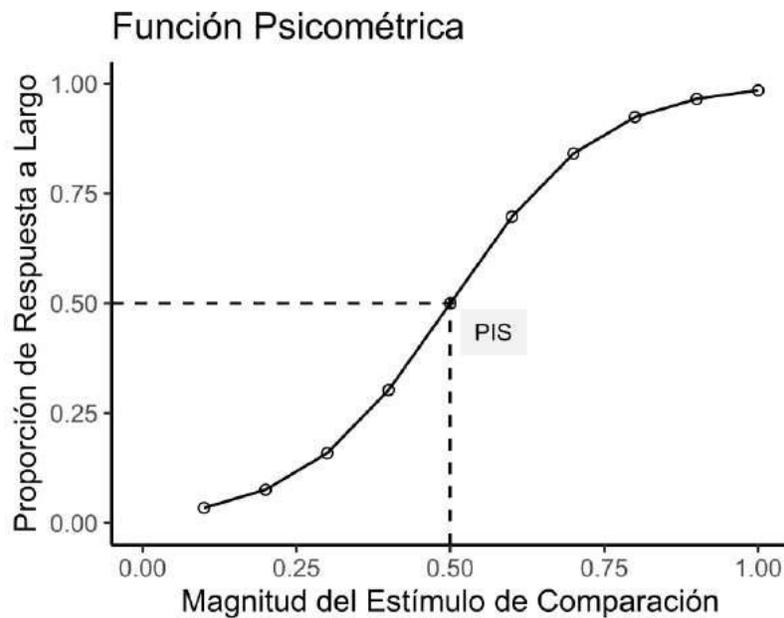
como por debajo de éste. El cálculo del Umbral Diferencial consiste en obtener las proporciones en que el sujeto respondió que el Estímulo de Comparación fue de mayor magnitud que el Estímulo Estándar, lo que se denomina *Proporción de Respuesta a Largo* y su gráfica es una función psicométrica (Figura 1), que nos permite evaluar qué tan sensibles son los sujetos para detectar diferencias entre los estímulos.

En esta función psicométrica, una medida relevante es el *Punto de Igualdad Subjetiva (PIS)* que representa al estímulo de comparación que se percibe subjetivamente igual al estímulo estándar el 50% de las veces, es decir, que el sujeto indica que el estímulo de comparación es mayor que el estándar 50% de las veces y que es menor, el otro 50% (ver Figura 1).

Considerando que en el procedimiento descrito la presentación de los estímulos es sucesiva, es importante considerar que el segundo estímulo se compara con la memoria del primero, la cual se desvanece rápidamente. Esto da origen a un error de tiempo que se corrige mediante un método de Contrabalanceo de Orden Temporal, donde los estímulos se presentan en un orden (ej. Estímulo de Comparación vs Estímulo Estándar) la mitad de las veces y en orden inverso (ej. Estímulo Estándar vs Estímulo de Comparación) la otra mitad, bajo el supuesto de que la combinación de los resultados a través de los ensayos cancelará los efectos de error y se obtendrá un estimado del umbral diferencial sin sesgo.

Figura 1.

Representación gráfica de la Función Psicométrica.



Nota. La función psicométrica muestra la Proporción de Respuesta a Largo (eje y) para un conjunto de estímulos de comparación (eje x) entre 0 y 1. PIS = Punto de Igualdad Subjetiva

Dentro de la psicofísica, se desarrolló un campo llamado “Teoría de Detección de Señales”, donde se asume que los organismos tomamos decisiones bajo incertidumbre y que esto incide en el proceso sensorial, lo que permite evaluar la sensibilidad y comprender los mecanismos que subyacen a la toma de decisiones.

Teoría de Detección de Señales (TDS)

Esta teoría se desarrolló para describir la toma de decisiones perceptuales en una tarea de elección forzada (seleccionar dentro de un conjunto de estímulos, aquel

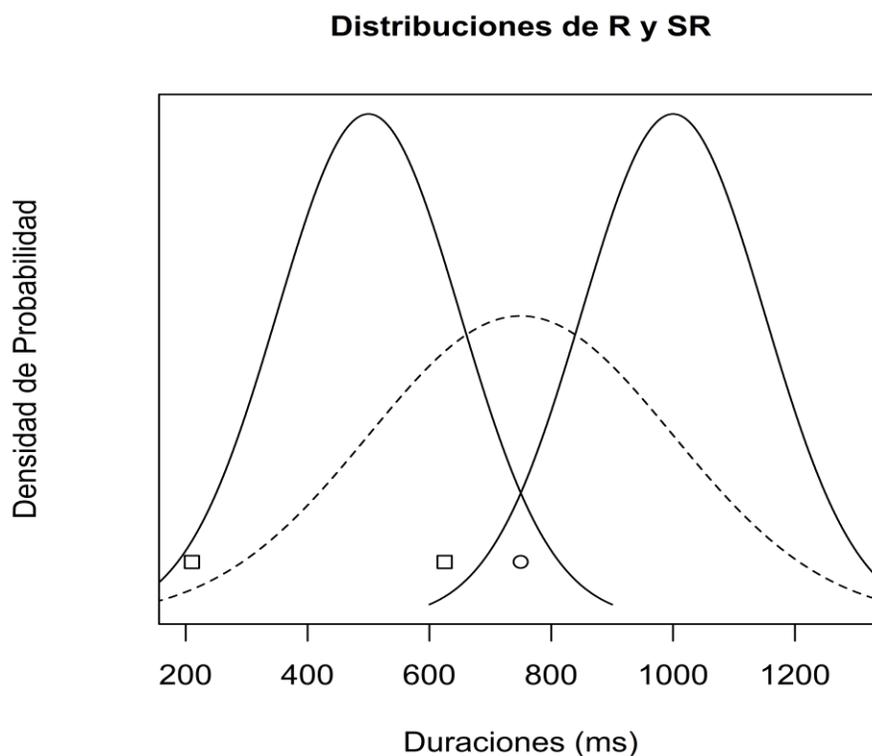
estímulo que fue presentado), lo que nos permite explicar la forma de la función psicométrica y su relación con la magnitud de un estímulo en un ambiente de incertidumbre. La representación cognitiva que tiene el sujeto sobre el estímulo presentado es una muestra, obtenida de alguna distribución de probabilidad con media y varianzas particulares (Kingdom y Prins, 2006).

Los organismos percibimos una variedad de estímulos ambientales que pueden ser internos (ej. hambre, dolor) o externos (ej. vibraciones, destellos). Cuando realizamos una observación, obtenemos una muestra del ambiente y debemos determinar, a partir de esta información, si se ha presentado o no un estímulo relevante. En otros términos, debemos decidir si la muestra proviene de una distribución de ruido (R), donde el estímulo estuvo ausente, o si proviene de una distribución que contiene la señal más el ruido (SR), donde se presentó un estímulo dentro de ese ambiente de ruido.

Diversos factores contribuyen a la dificultad en la discriminación; en el caso de un estímulo visual con una duración de 750 ms (ver Figura 2) y con el traslape existente entre distribuciones, el sujeto puede decidir que el estímulo estuvo ausente al ser una señal muy débil (se localiza en el extremo izquierdo de la curva SR), pero también puede categorizarlo como una señal al ser un valor alto de ruido (se localiza en el extremo derecho de la curva R). También puede ocurrir que al presentarse un ruido débil junto a una señal débil, la señal puede confundirse con ruido (Figura 2, símbolos cuadrados).

Figura 2.

Distribuciones de Ruido (R) y Señal más Ruido (SR).



Nota. En el eje x se muestran las duraciones presentadas y en el eje y, la densidad de probabilidad donde la distribución izquierda pertenece al ruido (R), la distribución derecha a la señal más el ruido (SR) y la distribución central corresponde al sistema perceptual del sujeto, combinando la percepción de las distribuciones de R y SR. El círculo representa a un estímulo de 750 ms y los cuadrados representan tanto un ruido, como una señal débil.

La ordenada de R da la probabilidad de ocurrencia (o verosimilitud) del estímulo cuando solo se presenta el ruido y la ordenada de SR da la verosimilitud de que se presenta una señal (Gescheider, 1997). Cada valor del estímulo puede ser expresado

como una razón entre la verosimilitud de ambas distribuciones (R y SR) referida como likelihood $l(x)$, definida como:

$$l(x) = \frac{\text{Ordenada SR}}{\text{Ordenada R}} \quad (1)$$

Esta razón de verosimilitudes es la base para la toma de decisiones, ya que expresa de forma relativa la verosimilitud de que la información brindada por el estímulo provenga de alguno de los contextos (SR o R), comparando y contrastando de qué contexto será más creíble que éste provenga.

La TDS asume que el observador establece un *punto de corte* o *criterio* (β) y lo contrasta con el estímulo presentado. Si el estímulo se encuentra por arriba (Señal Presente) o por debajo (Señal Ausente) del criterio se emitirá una respuesta aplicando una regla de decisión, donde:

$$(l(x) \geq \beta) = SR \text{ ó } (l(x) < \beta) = R \quad (2)$$

Si la razón entre ambas verosimilitudes es mayor o igual al criterio, el observador responderá que la señal estuvo presente, mientras que, si la razón es menor al criterio, responderá que la señal estuvo ausente.

Cuando un observador establece apropiadamente el criterio, se optimiza su ejecución en una serie larga de observaciones, esto es, categoriza o clasifica de manera precisa, las duraciones presentadas como menor o mayor que el criterio

cometiendo pocos errores. A partir de las decisiones del sujeto y la presencia o ausencia de un estímulo, podemos construir la siguiente tabla que resume el tipo de resultado de la decisión con el fin de conocer la sensibilidad del sujeto (d'), descrita como la distancia entre las medias de las distribuciones de R y SR (Gescheider, 1997):

Tabla 1.

Resultados de la interacción entre la señal y la decisión del sujeto.

		Señal	
		Presente	Ausente
Respuesta del Sujeto	Presente	Acierto	Falsa Alarma
	Ausente	Error	Rechazo Correcto

Esto es, si el sujeto responde que la señal estuvo presente cuando sí fue presentada, se clasifica como un “Acierto” pero si responde que estuvo ausente, se considera un “Error”. De forma contraria, si el sujeto responde que la señal estuvo ausente cuando no se presentó es un “Rechazo Correcto” y si responde que estuvo presente, se considera una “Falsa Alarma”.

Para calcular d' , se obtienen los valores de la ubicación del criterio para ambas distribuciones. Para el caso de la distribución de R se resta la probabilidad de falsas alarmas de 1 y el resultado se transforma a puntaje Z, mientras que, para la distribución de SR, se resta la probabilidad de aciertos de 1 y de igual forma, se transforma a puntaje Z:

$$Z_R = 1 - p(\text{Falsa Alarma}) \quad (3)$$

$$Z_{SR} = 1 - p(\text{Aciertos}) \quad (4)$$

Finalmente, para obtener d' , se sustrae el puntaje Z de la señal más ruido del puntaje Z del ruido:

$$d' = Z_R - Z_{SR} \quad (5)$$

Conforme d' se aleja positivamente de 0, refleja que el observador puede discriminar entre estímulos, por lo que su tasa de aciertos es mayor a la de falsas alarmas y conforme su valor es más cercano a 0, el observador es menos sensible a discriminar entre duraciones. Valores negativos de d' , reflejan una mayor tasa de falsas alarmas que de aciertos.

También se puede calcular el sesgo de respuesta (c) para conocer si el observador favorece alguno de los estímulos presentados, donde:

$$C = 0.5[Z_{SR} + Z_R] \quad (6)$$

Un siguiente parámetro que mide el sesgo de la respuesta es c prima (c') que representa el valor de c como una proporción de d' (c/d') lo que normaliza el valor de c por la sensibilidad (Macmillan, 1990).

El estudio de los procesos perceptuales tuvo sus inicios en los cinco sentidos: vista, oído, olfato, gusto y tacto, pero pronto sus métodos se extendieron a otras áreas (la psicofísica no sensorial). Tal es el caso de la estimación y discriminación temporal, que usa una variante del método de estímulos constantes para analizar este tipo particular de discriminación.

A continuación, se presenta la teoría más conocida en la estimación temporal.

Teoría de Expectancia Escalar (SET)

La teoría más influyente en el estudio de la estimación temporal es la *Teoría de Expectancia Escalar* (SET por sus siglas en inglés “Scalar Expectancy Theory”) propuesta por Gibbon y Church (1984), que describe el proceso de toma de decisiones sobre estímulos temporales, como por ejemplo cuándo comenzar a caminar o apretar el acelerador de un automóvil basados en el cambio de luz de un semáforo, mediante un modelo de 3 componentes: reloj, memoria y decisión/comparador (Allan, 1998). Bajo esta teoría, el componente del reloj se encarga de transformar el tiempo real en tiempo subjetivo mediante el almacenamiento de *pulsos* generados a partir de un estímulo temporal. Estos son regulados por un *interruptor* que los transfiere a un *acumulador* donde el total de pulsos acumulados representa el tiempo transcurrido (Allan, 1998). Posteriormente, el componente de memoria recuperará información de dos almacenes: *memoria de trabajo* que contiene la información del estímulo actual y *memoria de referencia* que contiene duraciones importantes previamente presentadas, que fueron reforzadas. En el procedimiento de bisección temporal (descrito más adelante), estas

duraciones almacenadas se asocian a lo que Allan denomina duraciones de referencia (Allan, 1998). Finalmente, el componente del *comparador* determina la emisión de una conducta o respuesta a partir de una regla de decisión que involucra los almacenes de memoria de trabajo y referencia.

Cada componente del modelo representa una fuente independiente de variabilidad en la estimación temporal. En el caso del comparador, la decisión se toma bajo un contexto de incertidumbre sobre si se debe o no responder a determinado valor de un estímulo temporal, lo que causa que la respuesta de los sujetos varíe. En el caso del reloj, puede existir variabilidad en el intervalo entre pulsos, la tasa de pulsos o la latencia con que se abre y cierra el interruptor. Mientras que, para el componente de memoria, la variabilidad está en la traducción que se hace para recuperar la información de ambos almacenes de memoria (Gibbon y Church, 1984).

La variabilidad se comprende como un gradiente en que se pueden responder a determinadas duraciones. Por ejemplo, si se le pregunta a un sujeto que indique si un estímulo tuvo una duración de 2 segundos, responderá que sí en los casos donde se presenten duraciones entre 1.8 s y 2.2 s debido a su cercanía y a que la representación subjetiva de la duración cuando es comparada con el estímulo presentado, en este caso de 2 s, es variable.

Esta variabilidad puede ser constante, escalar o no escalar. La idea central es la transformación escalar que produce la variabilidad del mismo tipo, así como el mismo patrón de respuesta en cualquier intervalo de tiempo cuando las duraciones se expresan en una escala relativa (Church, 2003).

Existen cuatro fundamentos en esta teoría: (a) *Proporcionalidad o Timing proporcional* definido como la relación lineal entre la latencia media de la respuesta y el intervalo entre el estímulo y el reforzamiento; (b) *Propiedad Escalar* entendido como una relación lineal entre la desviación estándar de una respuesta y el intervalo entre el estímulo y el reforzamiento (c) *Coeficiente de Variación o Ley de Weber* definido como la razón de la desviación estándar a la media, que es aproximadamente constante para distintos rangos de duraciones; (d) *Invarianza Escalar* que hace referencia a una superposición cuando la tasa de respuesta en función del tiempo es aproximadamente igual en cualquier intervalo presentado, cuando se transforma a una escala relativa (Church, 2003).

El fundamento de la ley de Weber, en particular, nos refiere a los conceptos psicofísicos ya reseñados, como se revisará a continuación.

La ley de Weber establece que un cambio en la intensidad del estímulo que sea apenas perceptible ($\Delta\Phi$) es una fracción constante (c) de la intensidad de dicho estímulo (Φ) (Gescheider, 1997):

$$\phi = c\phi \quad (7)$$

Y a partir de esta ley, se obtiene una constante conocida como Fracción de Weber:

$$c = \frac{\Delta\phi}{\phi} \quad (8)$$

Esta fracción de Weber funciona como un índice de sensibilidad a las duraciones indicando que, para que un sujeto identifique un cambio en el estímulo, la distancia absoluta entre ϕ y $\Delta\phi$ debe aumentar cada vez más.

Podemos pensar, por ejemplo, en una tarea de comparación donde un sujeto debe comparar la duración entre 2 estímulos indicando cuál tiene una menor duración. De acuerdo con la Fracción de Weber, se necesita un cambio relativamente pequeño para diferenciar entre dos duraciones como en el caso de 1 y 1.5 segundos, donde la diferencia es de .5 s. En el caso de duraciones más grandes, se necesitaría que la diferencia entre ellas sea mayor. Digamos que, si se presenta una duración de 10 s, el sujeto no podría indicar que 10 s es menor que 10.5 s aunque la diferencia es igual al caso de duraciones pequeñas (.5), sino que se necesitaría presentar una duración de 13 s para poder diferenciarla de la de 10 s.

Una de las posibles fuentes de variabilidad escalar se localiza en el componente de decisión (Gibbon y Church, 1984), en particular, en la regla de comparación de las duraciones almacenadas en las memorias de referencia y trabajo. En un intento de determinar si son la fuente que más contribuye a la variabilidad escalar, Gibbon y Church (1984) proponen diversas reglas (Gibbon, 1984), asumiendo que el reloj y la memoria carecen de variabilidad y la comparación está dada entre el tiempo "T" y la duración reforzada (referente) "S+". Una de estas reglas denominada Absoluta, propone que el proceso involucra calcular (computar, en términos cognitivos) la diferencia entre el valor subjetivo en Memoria de Referencia ($MS+$) y el valor subjetivo en Memoria de Trabajo (MT), donde el sujeto compara en términos de igualdad (o cercanía) y responde cuando la diferencia absoluta es menor al valor del criterio:

$$|M_{s+} - M_t| < \beta \quad (9)$$

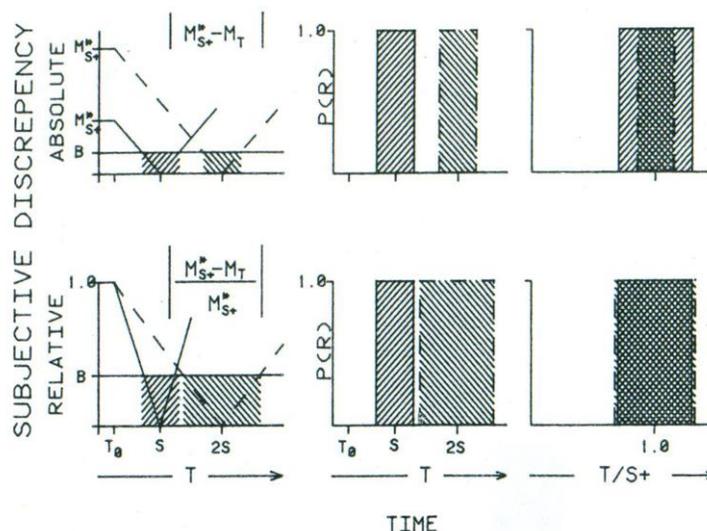
Una segunda regla denominada Relativa, normaliza la diferencia absoluta de los valores subjetivos en M_{s+} y M_t por el valor de M_{s+} , por lo que la diferencia subjetiva es tomada como una proporción del valor que se encuentra en memoria de referencia y cuando este valor es menor al criterio, el sujeto emite una respuesta:

$$\frac{|M_{s+} - M_T|}{M_{s+}} < \beta \quad (10)$$

La Figura 3 representa ambas reglas de decisión. Supongamos que tenemos dos duraciones que identificamos como 2 s y 4 s, donde 4 es el doble de 2 y que ambas duraciones son presentadas a un sujeto. Estas duraciones son lo que llamamos tiempo real o tiempo que transcurre en el reloj. Las reglas de decisión indican cómo transformamos el tiempo real en tiempo subjetivo y cómo se clasifica una duración, a partir de su comparación con el criterio.

Figura 3.

Representación de las reglas de decisión absoluta y relativa, considerando la variabilidad de dos estímulos: 2s y 4s (Adaptado de Gibbon, 1984).



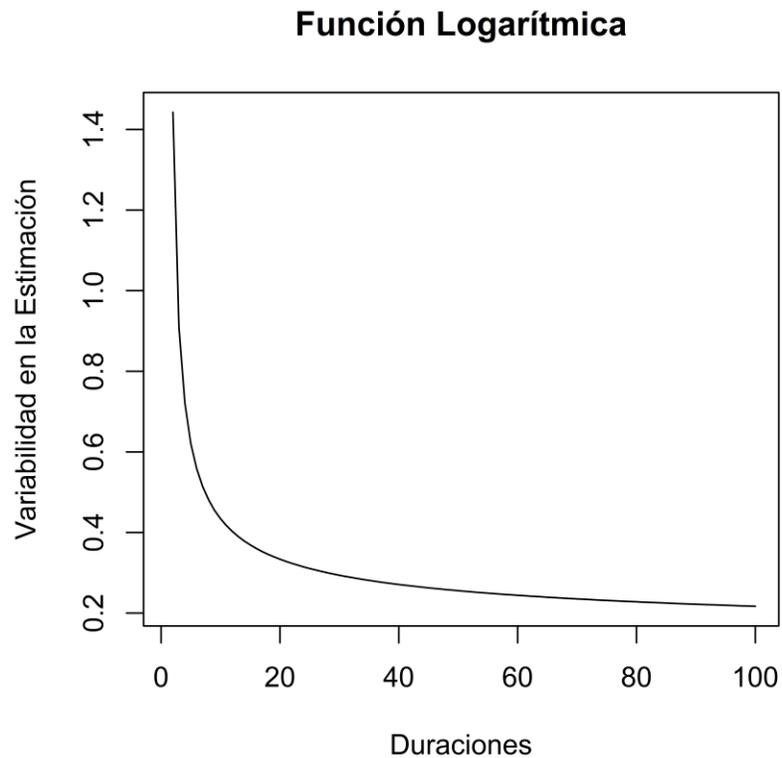
Tomado de Gibbon, J, y Church, R. (1984). Sources of variance in an information processing theory of timing. En W. L. Roitblat, T. G. Bever, & H. S. Terrace (Eds.), *Animal cognition* (pp. 465–488). Erlbaum.

La parte superior muestra el proceso de conversión de tiempo real a tiempo subjetivo según la regla absoluta, mientras que la parte inferior lo hace según la regla relativa. La columna izquierda representa la comparación para la toma de decisiones entre ambas duraciones (2s y 4s) en términos de la comparación entre el criterio (B) y el resultado de la aplicación de las reglas de decisión. El ancho de las barras representa la variabilidad en las estimaciones.

En el caso de la toma de decisiones al utilizar la regla absoluta, y teniendo en cuenta la duración de 2 s, la comparación se da entre el tiempo real (2s) y la representación subjetiva de esa duración que se almacena en memoria de referencia; si esa diferencia es menor al criterio que el sujeto estableció, entonces emitirá una respuesta indicando que la duración presentada es similar a la duración recordada.

Para el caso de la duración de 4 s el proceso de decisión es el mismo, aunque el almacén de duraciones presentadas corresponde a la representación subjetiva de 4 s.

La representación de tiempo real según la regla absoluta para las duraciones de 2 s y 4 s, implica que tienen una misma variabilidad, la cual representa una ventana en que se puede responder a ambas duraciones a partir de la comparación entre la duración presentada y la duración recordada (Figura 3 parte superior central), pero al transformarse mediante la regla absoluta a tiempo subjetivo (Figura 3 parte superior derecha) la variabilidad es menor para la duración de 4 s indicando que conforme se vaya incrementando una duración, menor será la variabilidad en tiempo subjetivo y, por lo tanto, la diferencia entre la duración presentada y la duración almacenada en memoria de referencia. Esta regla indicaría que la escala de tiempo es logarítmica ya que conforme aumenta el tiempo, la variabilidad en tiempo subjetivo disminuye cada vez más rápido (ver Figura 4).

Figura 4.*Función logarítmica*

Nota. La gráfica representa que conforme aumentan las duraciones presentadas, disminuye la variabilidad en la estimación de esas duraciones.

Para el caso de la regla relativa, se calcula una proporción tomando la diferencia de la duración presentada y la duración almacenada en memoria de referencia, dividiéndola por esta última. El sujeto determinará que la duración presentada pertenece al conjunto de la duración almacenada si la proporción es menor al criterio establecido.

Dentro de esta regla en la escala de tiempo real, la variabilidad con que el sujeto emite una respuesta para la duración de 4 s es el doble que aquella de 2 s (Figura 3 parte inferior central), pero la transformación a tiempo subjetivo evidencia que la variabilidad de ambas duraciones se traslapa (aunque no completamente), indicando que independientemente de la duración, la comparación se mantiene constante.

Esta regla indica entonces que la transformación del tiempo real a tiempo subjetivo es lineal respecto a la Fracción de Weber, donde distintos valores de un estímulo que se encuentran a diferente escala, al ser transformados a una misma medida (i.e. tendencia central, punto de bisección, breakpoint), se superponen, dando pie al supuesto de invarianza escalar. Para que se cumpla este supuesto es necesario que la variabilidad de uno o más componentes que propone la teoría de SET, sea de tipo escalar o de lo contrario, la superposición no sería posible (Gibbon & Church, 1984).

A continuación, se describe el procedimiento de partición, derivado del método de estímulos constantes por tratarse de la primera preparación experimental con la que se analizó la discriminación temporal.

Partición

El procedimiento de Partición fue desarrollado por Stubbs (1968) para conocer si la discriminación temporal puede describirse por la respuesta diferencial de un organismo a un continuo de duraciones, utilizando palomas como sujetos experimentales.

Las sesiones se realizaron los 7 días de la semana y cada sesión tenía una duración aproximada de 2 horas y media o 40 reforzadores, lo que ocurriera primero. Existían periodos antes y después de la sesión sin iluminación y las respuestas de las palomas no tenían consecuencias. El procedimiento general consistió en entrenar a 6 palomas en una caja operante (Figura 4) con 3 teclas. Una tecla central, una izquierda y otra derecha. El inicio del ensayo comenzaba cuando la tecla central se encendía de color naranja hasta que el animal emitía una respuesta (picotazo) en esta tecla, haciendo que la tecla se tornara blanca, marcando el inicio de un intervalo. Al término del intervalo, la tecla se apagaba y las teclas de los lados se iluminaban, una de color verde y otra de color rojo. Cuando la paloma respondía en alguna de las teclas, estas se apagaban y el proceso se reiniciaba.

Las duraciones utilizadas fueron de 1 a 10 s: Stubbs decidió que las duraciones de 1 a 5 s tenían que ser clasificadas como “Corto” y las duraciones de 6 a 10 s como “Largo”. Para tres de las palomas, la respuesta de la luz roja estaba asociada a la duración corta y la luz verde estaba asociada a la duración larga, mientras que para las palomas restantes el orden era inverso. Una respuesta correcta les daba acceso a un reforzador condicionado o comida y una respuesta incorrecta solo mantenía las luces apagadas y se procedía al siguiente ensayo sin utilizar algún método de corrección.

El estudio consistió en 3 experimentos con modificaciones al procedimiento para aislar el posible efecto de la interacción entre programas de reforzamiento (razón fija y razón variable), efectos secuenciales (rangos de duraciones) y manipulación de contingencias (colores de las luces e intensidad), con la discriminación de las duraciones.

El análisis de este procedimiento se enfoca en comparar la duración de los estímulos con el punto de corte (entre 5s y 6s), el marco de teoría de detección de señales y las veces que categorizó una duración como larga. Si el sujeto responde que cualquier duración mayor al punto de corte (i.e. 6,7,8,9 y 10 s) es larga, se considera como un acierto, mientras que si clasifica cualquiera de las duraciones menores al punto de corte (i.e. 1,2,3,4 y 5 s) como larga, se considera como una falsa alarma; a partir de las categorizaciones de las duraciones se grafican las proporciones de respuesta a largo para cada duración y su representación se aproxima a la función psicométrica (ver Figura 1).

Stubbs reportó que existieron cambios en la proporción de respuestas a corto y largo a partir del punto de corte (criterio), asociados con un sesgo relativo a las duraciones cercanas al criterio, pero sin que se vea afectada la sensibilidad de los sujetos (Stubbs, 1968). Esto resulta de gran importancia porque indica que los sujetos establecen el criterio independientemente al proceso de discriminación. El criterio de respuesta esperado para este procedimiento se establece con el valor de la media aritmética, utilizando las duraciones de los extremos (referentes). La noción de criterio es central a SET y a modelos posteriores como Learning to Time (LeT) que describe la regulación de la conducta bajo programas de reforzamiento basados en tiempo (Machado, 1997).

Los resultados de este estudio pionero utilizando un procedimiento psicofísico en animales estimularon el desarrollo del procedimiento más utilizado en el estudio de la discriminación temporal denominado "*Bisección Temporal Estándar*". Su principal diferencia con el procedimiento de partición es que permite al organismo determinar el

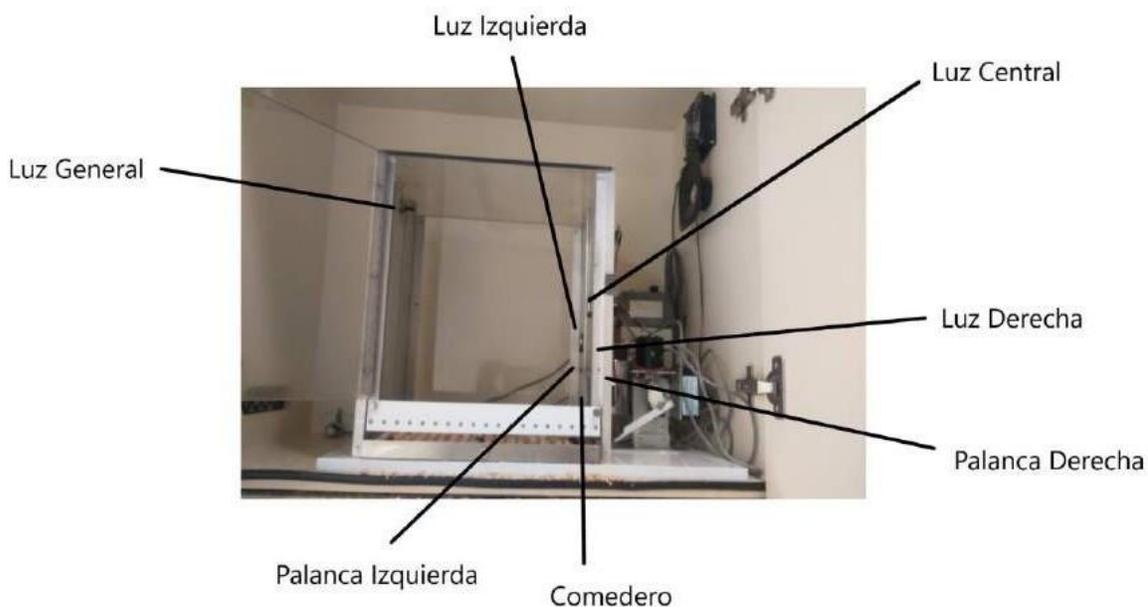
criterio, lo que en el contexto de la tarea de Bisección Temporal Estándar se puede equiparar al punto de igualdad subjetiva (PIS) descrito previamente en el marco de la Psicofísica.

Bisección Temporal Estándar

La tarea típica dentro del campo de discriminación temporal fue desarrollada por Church y Deluty (1977) con ratas y es conocida como Bisección Temporal Estándar. Este procedimiento se llevó a cabo en cajas operantes (Figura 5), cada caja contó con dos palancas (izquierda y derecha), 4 luces (izquierda, centro, derecha y general) y un comedero que le da acceso a un reforzador comestible.

Figura 5.

Conformación de caja operante.



En una primera fase, se entrenó a los animales a presionar la palanca izquierda al terminar una señal con determinada duración (i.e. 1s) y presionar la palanca derecha para otra duración (i.e. 4s), cuatro veces más larga. Estas duraciones extremas, son denominadas *Duraciones de Referencia*, *Duraciones Ancla o Referentes* y se denominan como “Corto” y “Largo”, para 1 y 4 segundos, respectivamente.

Al finalizar el estímulo, las luces se apagaban y se presentaban ambas palancas simultáneamente. Cuando alguna de las palancas era presionada, ambas se retraían y después de un intervalo entre ensayos de 30 segundos, comenzaba un nuevo ensayo. Cada duración tenía una probabilidad de .5 de presentarse durante un ensayo. Si el animal contestaba correctamente, se le reforzaba de manera inmediata con un pellet; de forma contraria, si contestaba incorrectamente, no se entregaba el pellet y se repetía el mismo ensayo como método de corrección.

En la fase de prueba, la probabilidad de aparición de las duraciones de referencia era de .25 en cada ensayo. En los demás ensayos, se presentaba 1 de 5 duraciones intermedias (i.e. 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5) con igual probabilidad (.10). Estas duraciones estaban espaciadas logarítmicamente, en intervalos iguales, entre las duraciones de referencia. Como resultado, 3 duraciones intermedias se encontraban aproximadamente en algún tipo de media: geométrica (2), armónica (1.6) y aritmética (2.5). Cuando se presentaba cualquiera de las duraciones intermedias, la respuesta no era seguida de reforzamiento.

Al dividir del número de veces que el sujeto determina que una duración presentada es “Larga”, por el total de veces que se presentó esa duración, se tiene la “Proporción de Respuestas a Largo”, su representación gráfica se obtiene al relacionar

las duraciones presentadas con la proporción de respuestas a largo correspondientes y se conoce como función psicométrica (Figura 1). Se espera que aquellas duraciones cercanas al referente corto tengan una proporción de 0, lo que indica que el sujeto las identificó como “No largas” o cortas, mientras que, para las duraciones cercanas al referente largo, se espera una proporción de 1, indicando que se identificaron como largas el 100% de las veces que se presentaron.

Una medida importante, al igual que en el área de psicofísica, es la duración que es clasificada indistintamente como corta o larga la mitad de las veces que fue presentada, denominada dentro del campo de la estimación temporal como *Punto de Bisección* (PB), ya que bisecta (divide a la mitad) el conjunto de duraciones. Su localización proporciona información acerca de cómo el organismo representa el tiempo real. Se han sugerido distintas interpretaciones sobre el proceso de percepción temporal según el valor que tome el PB y su cercanía con algún tipo de media: geométrica, aritmética y armónica, lo que nos permite conocer el proceso de decisión y cómo es que se representa el tiempo subjetivamente (Gibbon, 1986).

Si normalizamos la proporción de respuestas a largo por la media geométrica para distintos conjuntos de valores (ej. 3-10, 30-100 y 300-1000), se produce la ya mencionada superposición de funciones para todos los valores considerados. Esta superposición es una forma de Ley de Weber, donde la discriminación es constante a proporciones constantes de la razón Corto-Largo. Cuando el PB es cercano a la media geométrica, se asume que el organismo adopta una regla de discriminación de razones de verosimilitud, por lo que la escala subjetiva de tiempo es logarítmica (timing

logarítmico) ya que el PB es evaluado por su similitud a los extremos (Gibbon, 1986; Gibbon & Church, 1981).

En otro escenario, si el PB es cercano a la media aritmética, el criterio está relacionado linealmente a la media de los referentes y la evaluación está determinada por contraste con el intervalo que es la mitad de largo, especificando que la escala subjetiva de tiempo es lineal (Gibbon, 1986). Construcciones alternativas al proceso de timing escalar predicen a la media armónica como el punto medio temporal si la desviación estándar aumenta de forma proporcional al cuadrado de la media y la media es proporcional al tiempo real (Gibbon, 1986).

El modelo matemático principal para analizar datos provenientes de estos procedimientos es una función sigmoideal (en forma de S), conocida como *Función Logística*.

Modelo Logístico

La función o modelo logístico puede describirse completamente a partir de 4 parámetros (Treutwein, 1999):

- 1- Posición de la función en el eje X (Umbral).
- 2- Pendiente (Sensibilidad).
- 3- Asíntota mayor (Tasa de Lapsos): ejecución a niveles altos del estímulo que generalmente se asume como perfecta y cualquier error es asumido como una falla en el equipo o lapsos atencionales del sujeto, que lo desvían de la perfección.

- 4- Asíntota menor (Tasa de Adivinación) como la ejecución a niveles bajos del estímulo.

Guilhardi y Church (2005) propusieron una fórmula para realizar el ajuste de la función logística; a diferencia de la función descrita por Treutwein, su versión tiene sólo 3 parámetros:

$$y = \frac{c}{\left(1 + e^{\left(\frac{-(x-a)}{b}\right)}\right)} \quad (11)$$

La función establece el tiempo en que la tasa de respuesta alcanzó el punto medio hacia la tasa máxima de respuestas (**a**), el estimado de la escala de la función o medida de precisión de la estimación temporal (**b**), la tasa máxima de respuesta esperada (**c**) en función del valor del estímulo (**x**). Esta fórmula fue después adaptada (Guilhardi & Church, 2005) a partir del procedimiento de bisección estándar de la siguiente manera:

$$P_{(RL)} = \frac{1}{\left(1 + e^{\left(\frac{-t(c)}{s}\right)}\right)} \quad (12)$$

Donde el punto medio (**c**) se refiere al Punto de Bisección, la medida de precisión (**s**) determina la pendiente de la función, la tasa máxima de respuesta se fija en 1 al ser la tasa máxima de respuesta esperada cuando se trabaja con proporciones, y el valor del estímulo (**t**) denota el uso de estímulos temporales.

El parámetro Pendiente está relacionado a la capacidad del sujeto para discriminar entre duraciones, es decir, su discriminación temporal, mientras que el parámetro Punto de Bisección nos ayuda a ubicar aquella duración en que el sujeto es indiferente y que, del total de las veces en que fue presentada, la mitad de veces es categorizada como corta y la otra mitad como larga, lo que funciona como un indicador del sesgo en la respuesta del sujeto cuando éste se compara con alguna medida específica, ya sea de tendencia central o algún indicador no sesgado.

Esta función ha sido ajustada de manera exitosa a datos tanto de animales humanos (Wearden & Bray, 2001; Droit-Volet & Zélanti, 2013b) como no humanos (Church & Deluty, 1977; Arantes & Machado, 2008).

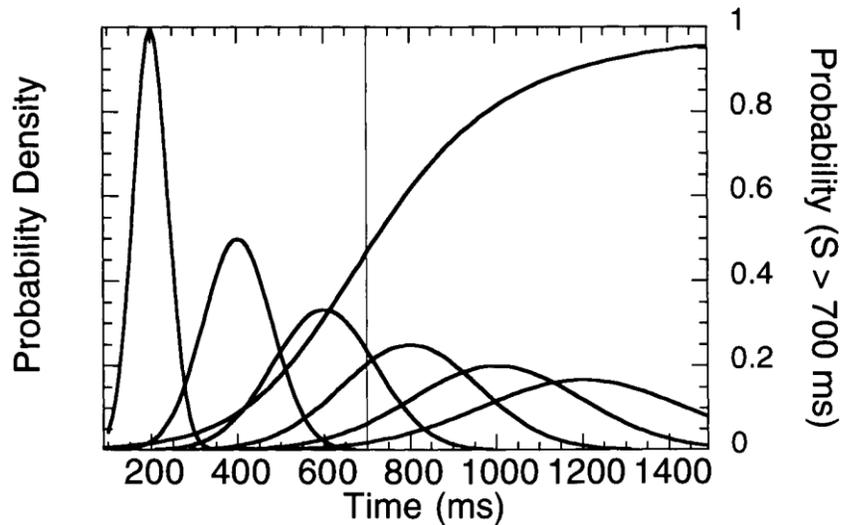
Como se podrá apreciar a continuación, este análisis puede resultar incorrecto por su interpretación sobre la variabilidad del estímulo, por lo que se desarrolló un segundo modelo denominado pseudo logístico que corrige la suposición de la variabilidad y del continuo de tiempo.

Modelo Pseudo Logístico (MPL)

Killeen, Fetterman y Bizo (1997) notaron que el análisis a partir de la función logística es erróneo ya que se requiere de una dispersión para cada valor del estímulo temporal (ver Figura 6), contrario al supuesto del modelo logístico de que todos los estímulos o duraciones tienen la misma dispersión.

Figura 6.

Distribuciones para distintos valores temporales.



Nota. Distribución de la Proporción de Respuesta a Largo para distintos intervalos temporales.

Esta noción de las distintas distribuciones para cada intervalo temporal propició el desarrollo de un modelo denominado Modelo Pseudo Logístico (MPL), el cual asume que la desviación estándar de la distribución incrementa según la Fracción de Weber (**w**) y la media de las distintas duraciones del estímulo (**t**), que además da cuenta de los distintos tipos de variabilidad: escalar (**w**), no escalar (**p**) y constante (**c**), a partir de la siguiente fórmula:

$$\sigma_t = \sqrt{(wt)^2 + pt + c} \quad (13)$$

La inconsistencia en el uso de la función logística radica en el supuesto del continuo de tiempo. Usualmente se asume que este continuo es metatético (Clase II) como pueden ser el tono, la posición, la inclinación, etc., refiriéndose al “qué” y “dónde”, cuando se puede demostrar que es un continuo protético (Clase I) como son la

pesadez (peso), el volumen, brillantez, juicios de duración, etc. refiriéndose al “cuánto” (Killeen, et. al, 1997, Stevens y Galanter, 1957). La diferencia esencial entre estos continuos radica en el comportamiento que tiene la escala de categorización sobre algún estímulo: mientras que en el continuo metatético la escala es lineal y la discriminación entre valores de un estímulo se comporta como si estuviese basado en un mecanismo sustitutivo a nivel fisiológico, en el continuo protético la discriminación varía de un extremo a otro y está basada en un mecanismo aditivo, sumando niveles de excitación a nivel fisiológico (Stevens & Galanter, 1957), lo que es coherente con la teoría de SET en cuanto a la acumulación de pulsos, el mecanismo de toma de decisiones usando la regla relativa, el cumplimiento de la fracción de Weber y por tanto, con el supuesto de invarianza escalar.

Killeen, Fetterman & Bizo (1997) argumentan también que existe una inconsistencia al suponer que la desviación estándar es constante a lo largo del continuo de duraciones cuando no lo es, por lo que utilizar una función Gaussiana o una función logística es incongruente. El modelo pseudologístico permite ajustar los datos a dispersiones con una desviación estándar que incrementa junto con la duración conforme la ecuación 13.

Estos cambios hacen posible graficar una única función centrada en el criterio del sujeto y que traza el área hacia la derecha de este, mediante la siguiente ecuación:

$$P_{(R_L)} = \left[1 + \exp \left(\frac{\mu - t}{0.55\sigma_t} \right) \right]^{-1} \quad (14)$$

Este modelo tiene una asíntota menor a 1 (ecuación 15), además asume que la dispersión del estímulo es simétrica y puede predecir las tasas de aciertos, falsas alarmas, errores y rechazos correctos de la matriz de la Teoría de Detección de Señales (Tabla 1).

$$F = \left[1 + e \left(\frac{1.81}{w} \right) \right]^{-1} \quad (15)$$

La fracción de Weber (**w**) determina la pendiente de la función y es el índice de discriminación, mientras que la localización del criterio se convierte en un índice de sesgo. Al ser una distribución sesgada positivamente, el criterio es menor a la media y cercano a la mediana e indica que existe una tendencia a responder que una duración es larga y se está sobreestimando el tiempo, por lo que las duraciones “cortas” son clasificadas como “largas” por el sujeto.

Para valores bajos del continuo de tiempo, en donde la variabilidad es aproximadamente constante y domina la variabilidad escalar (Killeen, et al. 1997; Gescheider, 1997), el criterio cae en la media aritmética, mientras que, si la duración de los referentes se multiplica por una fracción “K” proporcional al producto de la fracción de Weber por el logaritmo de la razón de los referentes, el criterio es un valor mayor a la media armónica (Killeen, et al. 1997). Por lo que el criterio puede caer en la media armónica cuando no hay error constante, o cerca de la media aritmética cuando la fracción de Weber es pequeña (un valor alto de c en la ecuación 13).

Una variante denominada Bisección Temporal Roving, descrita en el siguiente apartado, parece especialmente adecuada para ensayar el ajuste del MPL, ya que las

curvas obtenidas con esta tarea se caracterizan por no alcanzar los valores de 0 y 1 en sus extremos, es decir, las duraciones más cortas y más largas no alcanzan proporciones de respuesta exclusivamente cortas y largas (0 y 1, respectivamente), por lo que al utilizar la función logística se producen estimadores sesgados del punto de bisección y la escala, lo que lleva a interpretaciones erróneas de los parámetros de la discriminación temporal, con las consecuentes implicaciones teóricas.

Bisección Temporal Roving

Rodríguez-Gironés y Kacelnik (2001) desarrollaron una variación al procedimiento de Bisección Temporal Estándar a la que denominaron Bisección Temporal Roving. En este procedimiento, se preserva la noción de que el sistema de decisión dentro del marco de SET opera con la información provista por la percepción y ambos tipos de memoria (de trabajo y de referencia) y evalúa si el almacén de memoria de referencia es necesario para que los sujetos puedan discriminar duraciones.

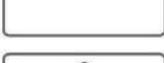
En el caso de Bisección Temporal Estándar, los referentes se presentan al inicio de la sesión, asumiendo que se almacenan y mantienen en el almacén de memoria de referencia durante toda la sesión, mientras que en Bisección Temporal Roving los referentes (con duraciones variables) se presentan en cada ensayo, evitando la formación del almacén en memoria de referencia ya que las decisiones están en función de los referentes presentados en el ensayo, trabajando solo con el almacén de memoria de trabajo.

Los autores encontraron que las proporciones de respuesta siguen comportándose de forma sigmoïdal debido a que el proceso interno de discriminación permanece intacto, al igual que el supuesto de invarianza escalar. Esto no se interpreta como que el componente de memoria de referencia carezca de variabilidad escalar, más bien sugiere su existencia desde antes que se realice el almacenamiento y recuperación de información en este almacén de memoria (Rodríguez-Gironés, 2001), como lo habían referido Gibbon y Church (1984) al analizar las fuentes de varianza escalar, por lo que variabilidad de tipo escalar puede estar presente desde los componentes de memoria de trabajo, el acumulador, el interruptor y/o la tasa de pulsos.

El procedimiento (Figura 7) consiste en presentar 3 pares de figuras geométricas de forma consecutiva. La primera figura de cada par indica el inicio de un intervalo y la segunda el final de este. El sujeto debe decidir si el intervalo entre el tercer par de figuras es más similar al intervalo del primer o del segundo par. Los primeros dos intervalos entre figuras son los referentes (Corto y Largo) y están delimitados por triángulos y cuadrados, mientras que el tercer intervalo es el estímulo de prueba y está delimitado solamente por círculos.

Figura 7.

Diagrama del procedimiento de Bisección Temporal Roving.

Etapa	Pantalla	Duración
1		<i>Suj.</i>
2		<i>d1</i>
3		<i>0.1 s</i>
4		<i>L</i>
5		<i>0.1 s</i>
6		<i>d2</i>
7		<i>0.1 s</i>
8		<i>S</i>
9		<i>0.1 s</i>
10		<i>d3</i>
11		<i>0.1 s</i>
12		<i>t + MG</i>
13		<i>0.1 s</i>
14		<i>d4</i>
15		<i>Suj.</i>

Nota. Diagrama adaptado del procedimiento Bisección Temporal Roving de Rodríguez, G. y Kacelnick, A., (2001). Relative importance of perceptual and mnemonic variance in human temporal bisection. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 54A(2), 527-546.

d1, *d2*, *d3* y *d4* son demoras aleatorias entre 1 y 3 segundos. *L* y *S* son las duraciones de los referentes. *Suj.* es una instancia donde se espera la respuesta del sujeto.

El orden de presentación y las figuras geométricas de los referentes se muestran de forma aleatoria en cada ensayo, por lo tanto, existen 4 diferentes combinaciones en que pueden ser presentados (Tabla 2).

Tabla 2.

Combinaciones del orden de presentación de referentes y figuras, en el experimento de Rodríguez-Girones & Kacelnik (2001).

Primer par	Segundo par
Triángulo-Corto	Cuadrado-Largo
Triángulo-Largo	Cuadrado-Corto
Cuadrado-Corto	Triángulo-Largo
Cuadrado-Largo	Triángulo-Corto

Las duraciones de los referentes eran calculadas en cada ensayo de manera independiente. La duración del referente corto provenía de una distribución uniforme o equiprobable, que podía tomar un valor entre 0.5 s y 2 s.

Se obtenía un segundo valor denominado “r” proveniente también de una distribución uniforme, que podía tomar un valor entre 1.5 s y 8 s.

Para la obtención de la duración del referente largo, se multiplicaba la duración del referente corto por el valor de “r” con la condición de que el valor resultante fuese menor a 5.5 s y en caso de que fuese mayor, se obtenían nuevos valores para calcular la duración del referente largo.

La duración del intervalo del tercer par de estímulos, también llamada duración prueba, se obtenía cada ensayo multiplicando la media geométrica de los referentes corto y largo, por un valor “tau” que podía variar entre 0.5, 0.59, 0.71, 0.84, 1.00, 1.19, 1.41, 1.68, 2.00 segundos.

Cada sujeto completó 3 sesiones en días consecutivos, con una duración de 35 min cada una. Cada sesión contaba con 90 ensayos y cada valor de tau podía aparecer 10 veces durante la sesión.

Rodríguez-Gironés y Kacelnik (2001) encontraron que la principal fuente de error es la varianza específica en los ensayos, ya que los sujetos presuntamente calculan un nuevo criterio cada ensayo; además indican que los efectos del orden de presentación están reflejados en su decisión mediante la evaluación de las diferencias en la ubicación del PB para cada orden de presentación. Los autores concluyeron que la varianza escalar se encuentra en el almacén de memoria de trabajo antes de que la información del estímulo sea almacenada y recuperada por el almacén de memoria de referencia.

Un estudio posterior dirigido por Allan y Gerhardt (2001), incorporó el ajuste de la función pseudolística a las ejecuciones provenientes del procedimiento de Bisección Roving, especificando que, en el procedimiento de Bisección Estándar el rol de los referentes es establecer el criterio (PB), comparando cada duración de prueba percibida con el criterio y la decisión para responder “Largo” está basada en que la duración percibida sea mayor al criterio.

Se comparó la presentación de los referentes en tres condiciones: (1) “sin referente” mostrando los referentes sólo al inicio de la sesión (el equivalente a la bisección temporal estándar), (2) “referente fijo” en el cual los referentes son presentados en cada ensayo con un valor constante durante la sesión y (3) “referente variable” o Roving, en el que los referentes varían ensayo a ensayo durante toda la sesión, por lo que es posible que las duraciones de los referentes fueran irrepetibles.

A diferencia del estudio de Rodríguez-Gironés, había 3 pares de referentes: $L = 650$ ms vs $C = 400$ ms, $L = 700$ ms vs $C = 450$, y $L = 750$ vs $C = 500$ y se obtenían seis duraciones de prueba espaciadas aritméticamente dentro del rango de C y L. Además, los referentes cortos estaban señalados por un círculo rojo, los referentes largos por un círculo verde y el estímulo de prueba por un cuadrado negro. Se aplicó el MPL para determinar si el modelo podría describir las funciones de las tres condiciones, asumiendo que la regla de comparación es la misma: que la duración de prueba era comparada con el PB y que las fuentes de variabilidad escalar dominaban, además de ajustar curvas a datos individuales para comparar los parámetros de ajuste entre condiciones.

Todas las condiciones tuvieron un buen ajuste y obtuvieron valores similares para la Fracción de Weber (w), por lo que concluyen que la ausencia o variación de los referentes no contribuye de manera sustancial a la variabilidad general; la comparación en términos del referente o el criterio con la prueba queda aún en duda.

En las condiciones sin referentes y con referentes constantes, el criterio depende en mayor medida de las duraciones de los referentes y aumenta conforme aumenta la duración de los referentes, a diferencia de la condición de referentes variables, en

donde el criterio se mantiene relativamente constante. En las condiciones de referentes fijos y referentes variables, hubo un efecto por el orden de presentación (Corto-Largo, Largo-Corto), que influyó en la ubicación del criterio.

Los autores especulan que los humanos no hacen comparaciones directas con los referentes, sino que forman un criterio a partir de la media de las duraciones absolutas de los referentes y la decisión se basa en la comparación de ese criterio con el valor de la duración de prueba (Allan y Gerhardt, 2001).

En un segundo estudio, Allan (2002) buscó comprender el rol de los referentes en bisección y memoria temporal debido a las discrepancias encontradas de estudios previos (Rodríguez-Gironés, 2001; Allan, 2001). Las hipótesis planteadas estaban enfocadas en que, si el estímulo prueba no se compara directamente con los referentes, el valor de una demora entre el segundo referente y la presentación de la prueba no tendría efecto en la pendiente de la función psicométrica. El método general consistió en la presentación de 4 bloques de 120 ensayos. El valor del referente corto provenía de una distribución uniforme entre 400 y 700, "r" podía tomar valores de 1.50, 1.75 o 2.00 y se mantenía constante durante la sesión; el referente largo se determina multiplicando el referente corto y "r". Se asociaron cinco categorías para obtener la duración de la prueba y cada una debía aparecer 24 veces durante un bloque.

Los datos fueron consistentes con el MPL y con la hipótesis de que, en cada ensayo, la duración de prueba fue comparada con un criterio y clasificó una duración como "larga" cuando su valor percibido resultó mayor al criterio. Se asumió que dominaban las fuentes de variabilidad escalar y se ajustó el MPL a cada observador; se

encontró que las pendientes fueron similares para los diferentes valores de r , indicando que la fracción de Weber se mantuvo constante.

Las duraciones de prueba fueron normalizadas por la media geométrica y se calculó el Punto de Bisección No Sesgado (PBNS) que identifica el valor de una duración en que se cruzan dos distribuciones (Allan, 2002), en este caso las distribuciones de Corto y Largo:

$$PBNS = \frac{(S - rL) + \sqrt{(S - rL)^2 - (1 - r)((wS)^2 \ln(r))}}{1 - r} \quad (16)$$

Teniendo en cuenta la duración más pequeña (**S**) y la duración más larga (**L**) de las duraciones de prueba presentadas, $r = (S/L)^2$ y la Fracción de Weber (**w**).

El sesgo en la respuesta de los sujetos se determina mediante la comparación del PB con el PBNS. Si el PB es menor al PBNS, el observador tiende a responder que las duraciones presentadas son largas, lo que se conoce como sobreestimación. En caso contrario, cuando el PB es mayor al PBNS, el observador tiende a responder que las duraciones presentadas son cortas y se considera como subestimación.

Se encontró que los sujetos tuvieron un PB mayor o menor al PBNS indistintamente, lo que refleja efectos de sobreestimación y subestimación de duraciones sin que predomine algún tipo de sesgo. Los resultados indican que la duración de prueba no se compara directamente con los referentes y esto hace que la tarea de Bisección Temporal Roving se parezca a la tarea de Partición, además de que esta transición puede ocurrir independientemente del rango de duraciones de los pares de referentes.

Allan sugiere que la memoria de referencia no es una fuente dominante de variabilidad en bisección y que el valor del PB está dado por el rango de valores de las duraciones de prueba, como en la tarea de partición (Stubbs, 1968). Se especula que la prueba no puede compararse con los referentes debido a que para los humanos resulta difícil realizar ese tipo de comparaciones directamente (Allan, 2002).

Dada la falta de información sobre las diferencias en los valores de los parámetros pendiente, punto de bisección y el ajuste del modelo a los datos entre la aplicación de ambos modelos (logístico y pseudologístico) se sugiere un análisis en términos de los criterios de información, que brindan una medida de la calidad que tienen los modelos estadísticos para describir los datos y se explican en el siguiente apartado.

Criterio de Información de Akaike

Los modelos estadísticos son presentados como conjuntos de ecuaciones que describen alguno o todos los aspectos de los datos recabados, con el fin de comprender el fenómeno bajo estudio y la noción del mecanismo que genera los datos que está relacionada con el procedimiento utilizado para su recolección (National Research Council, 2013).

Los modelos nos permiten identificar, describir y explicar las relaciones existentes entre las variables y los parámetros del modelo propuesto. Los valores (verdaderos) que toman los parámetros son desconocidos y los datos nos brindan un estimado de los posibles valores que pueden tomar, lo que nos permite realizar

inferencias y predicciones sobre las propiedades del fenómeno (National Research Council, 2013).

Una manera de comparar el ajuste de 2 o más modelos que pueden estar o no anidados, esto es, que los parámetros de un modelo estén contenidos en el otro, es utilizando Criterios de Información. Estos criterios de información son estimados de la distancia relativa existente entre un modelo específico y la realidad del fenómeno que intenta explicar, comparando la evidencia relativa sobre qué modelo pudo haber generado los datos (likelihood) y ajustando, con pesos diferenciados, según la complejidad del modelo (Young, 2019).

Un primer paso para el entendimiento de los criterios se encuentra en el Criterio de Información “Kullback-Leibler” (K-L), el cual define una distancia entre dos modelos: un modelo “f” que denota la realidad total o verdadera y un modelo “g” que denota la aproximación del modelo en términos de una distribución de probabilidad (Burnham, 2002). La distancia entre ambos modelos está definida por funciones continuas como una integral de la siguiente forma:

$$I(f, g) = \int f(x) \log \left(\frac{f(x)}{g(x|\theta)} \right) dx \quad (17)$$

Donde log denota el logaritmo natural, $I(f, g)$ es la información perdida cuando g se aproxima a f, o la distancia existente de g a f, la cual es positiva a menos que la distancia entre las dos distribuciones sea idéntica.

Akaike desarrolló más a fondo el criterio de información y posteriormente se le denominó Criterio de Información de Akaike (AIC por sus siglas en inglés), donde mostró que el valor máximo del logaritmo de la verosimilitud (log-verosimilitud) está sesgado hacia arriba, como un estimador del modelo objetivo seleccionado “f”, además de que, bajo ciertas condiciones, el sesgo es aproximadamente igual al número de parámetros estimables en el modelo “K” (Burnham y Anderson, 2002)

El AIC es definido como un estimado de la distancia esperada y relativa entre el modelo ajustado y el mecanismo (desconocido) verdadero que generó los datos observados:

$$AIC = -2 \log(L(\hat{\theta}|y)) + 2k \quad (18)$$

La expresión $\log(L(\hat{\theta}|y))$ es el valor numérico de la log-verosimilitud en su punto máximo, que corresponde a los valores estimados de máxima verosimilitud y K es el número de parámetros estimables del modelo ajustado.

Para cada modelo que sea candidato, se calcula su valor de AIC y se selecciona aquel modelo que tenga el valor más bajo de AIC. Usualmente su valor es positivo, sin embargo, puede ser modificado por cualquier constante aditiva, lo que resulta en un valor negativo, esto no indica diferencias en su interpretación ya que lo relevante dentro de estos análisis, son los valores relativos sobre el conjunto de modelos considerados, particularmente las Diferencias de AIC (Burnham y Anderson, 2002).

Las diferencias de AIC se obtienen de la siguiente manera para todo el conjunto de modelos propuestos:

$$\Delta_i = AIC_i - AIC_{min} \quad (19)$$

A cada uno de los modelos propuestos (AIC_i) se le resta el AIC del modelo que obtuvo el menor valor (AIC_{min}) y el mejor modelo estimado será aquel cuyo valor de diferencias sea igual a 0, por lo que el modelo con menor AIC será el mejor modelo per se. Aquellos modelos en que su valor de diferencias sea mayor a 10, pueden no tener soporte y deben ser excluidos en análisis posteriores, o bien, fallan en explicar variaciones sustanciales de los datos. Por tanto, a menor valor de diferencia, es más plausible que el modelo ajustado $\Delta i(x|\theta)$ sea el mejor modelo Kullback-Leibler (K-L) dado los datos x (Tabla 3).

Tabla 3.

Apoyo empírico de los modelos a partir de las diferencias de Akaike.

Δ_i	Nivel de apoyo empírico del modelo
0 - 2	Sustancial
4 - 7	Considerablemente menor
>10	Esencialmente nada

Esta forma de análisis permite una rápida interpretación y clasificación de los modelos, además de que resulta útil para calcular los Pesos de Akaike ya que describen al mejor modelo que ajusta a los datos, al representar su información.

$$w_i = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\Delta_i\right)}{\sum_{r=1}^R \exp\left(-\frac{1}{2}\Delta_r\right)} \quad (20)$$

Estos pesos convierten los valores de devianza (diferencias entre verosimilitudes) a verosimilitudes simples (sin utilizar logaritmos) para estandarizarlas. Cada peso se puede leer en términos de probabilidad estimada de que cada modelo funcione mejor en datos futuros. Los pesos de Akaike son condicionales al grupo de modelos considerados, por lo que agregar o eliminar algún modelo modificará su valor.

Al utilizar criterios de información, las comparaciones deben realizarse con el mismo conjunto de datos debido a que las inferencias están dadas bajo el contexto de los datos utilizados. Se debe evitar el uso de la palabra “significativo” al reportar los resultados, debido a que la técnica no constituye una prueba estadística y no está asociada a conceptos como “poder, valores F o niveles de α ” (Burnham y Anderson, 2002). Además, los modelos utilizados deben asumir errores independientes y distribuidos normalmente con varianza constante, aunque esta variabilidad de los residuos parece no provocar algún sesgo o cambios en la selección de algún modelo (Spiess & Neumeyer, 2010).

Justificación

La psicología científica recurre a herramientas de modelamiento matemático y estadístico para alcanzar una mejor comprensión de los fenómenos de su interés. La comparación entre los modelos logístico y pseudo-logístico es relevante debido a que constantemente se busca el mejor modelo que nos permita describir el fenómeno de interés y en general, es imposible para los modelos explicar de manera exacta y completa un fenómeno por lo que es necesario conocer las diferencias en los estimados de los parámetros de ambos modelos, en este caso dentro del

procedimiento de Bisección Temporal Roving para conocer cuál nos permite explicar el proceso de discriminación temporal y realizar las inferencias adecuadas.

El uso del “Criterio de Información de Akaike” (AIC) para diferenciar aquel modelo que describe mejor los datos obtenidos a partir de la tarea de Bisección Temporal Roving, se debe a que R^2 y R^2 ajustada, usualmente utilizados para evaluar la bondad de ajuste de los modelos, no se recomienda para modelos no lineales. En un estudio realizado por Spiess y Neumeyer, (2010) en el cual se realizaron simulaciones para evaluar el ajuste de estas medidas en modelos no lineales, se encontró que suelen llevar a conclusiones incorrectas, ya que su valor tendía a ser menor para el mejor modelo no lineal y solo llevaron a la conclusión correcta entre el 28-43% de todas las simulaciones, por ello los autores sugieren el uso del AIC como una forma de corregir este problema.

Objetivos

Los objetivos del presente trabajo fueron:

- Comparar el ajuste de los modelos Logístico y Pseudo-logístico en la tarea de Bisección Temporal Roving.
- Conocer el modelo que describe mejor los datos obtenidos de un procedimiento de Bisección Temporal Roving.
- Buscar el referente empírico a los valores de los parámetros del ajuste que mejor describa las ejecuciones en la tarea de Bisección Temporal Roving.
- Discutir las posibles implicaciones de dichos resultados para la teoría de SET.

Método

Participantes

Participaron 8 estudiantes universitarios entre 17 y 28 años, pertenecientes a la Facultad de Psicología de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Se les pidió asistir 3 días consecutivos a la misma hora, por un periodo de 20 minutos diarios.

Materiales y Aparatos

El experimento se realizó en el laboratorio de Aprendizaje Temporal de la División de Posgrado de la Facultad de Psicología en Ciudad Universitaria, en un cubículo con dimensiones aproximadas de 2.94 metros de largo y 3 metros de ancho, con una altura de 3 metros. La tarea experimental fue programada en MATLAB con la herramienta Psychtoolbox, ambas en versión 2019. La presentación de los estímulos se realizó en una computadora de escritorio marca ASUS con procesador Intel Core i5-8250U, 1.60 GHz y 1.80 GHz, con resolución 1920 x 1080 píxeles. Los participantes se sentaban en una silla frente al escritorio con la computadora, a una distancia de aproximadamente 60 cm.

Procedimiento

Previo a la aplicación del procedimiento experimental, se realizó una fase de pilotaje para evaluar su dificultad y la posibilidad de realizar cambios al procedimiento, a partir de la retroalimentación de los sujetos.

Una de las modificaciones más importantes dentro del procedimiento fue el cambio de la estimación de los intervalos, por lo que ahora los sujetos deben determinar un intervalo lleno en vez del intervalo vacío debido a que los sujetos reportaban omitir alguna de las figuras que marcan el intervalo, causando que estimaran un intervalo incorrecto. Por ejemplo, un sujeto podía omitir la primera figura del primer par y comenzar a estimar a partir de la aparición de la segunda figura, consecuentemente al aparecer la primera figura del segundo intervalo, el sujeto notaba que había estado estimando un intervalo incorrecto, lo que le llevaría a tomar una decisión independiente de las duraciones de los estímulos y, por lo tanto, no estaría respondiendo apropiadamente a las duraciones programadas en la tarea.

Se mantuvieron los cálculos como en el estudio de Allan (2002), usando solamente un valor específico de r (2.00) al no buscar comprobar propiedad escalar; se optó por presentar las duraciones de referencia con un cuadrado y la duración de prueba con un círculo, además de que todas las figuras eran de color negro.

Además, se redujo el número de sesiones y ensayos para evitar que los sujetos abandonaran el estudio, alegando fatiga o aburrimiento, y así evaluar si se podían replicar los resultados de Allan et al. (2002) y Rodríguez-Gironés y Kacelnik (2001).

Una vez realizadas las modificaciones sugeridas por el piloteo se procedió a reclutar a los participantes.

El contacto con éstos se realizó vía correo electrónico o por contacto directo. Una vez que aceptaron participar, se acordó un horario que les permitiese asistir los 3 días consecutivos al laboratorio de Aprendizaje Temporal para realizar la tarea experimental. Cada día de asistencia, se les recibía de manera cordial invitándolos a entrar al cubículo y sentarse frente a la computadora. Se procedía a proporcionar el consentimiento informado (Anexo 1). Posteriormente, se les presentaban las instrucciones en el monitor y se les pedía que, al terminar de leerlas, avisaran al experimentador.

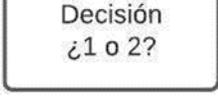
Las instrucciones en pantalla se presentaron de la siguiente manera: “A continuación se presentarán 3 figuras una después de otra. Tu tarea es estimar la duración de cada figura. Para la última figura, tienes que decidir si su duración se parece más a la primera o a la segunda figura. Si se parece más a la primera figura, presiona "S". Si se parece más a la segunda figura, presiona "L". El esquema de la tarea está representado en la Figura 8. Una vez que los participantes habían leído las instrucciones, se les pedía que explicaran al experimentador la manera en que debían de resolver la tarea con el fin de asegurarse que habían comprendido el procedimiento. A cualquier señal de duda o si el sujeto cometía algún error, se le explicaba la tarea de la siguiente manera: “Aparecerán 3 figuras y debes de tomar el tiempo de cada una. Si el tiempo de la tercera figura se parece más al tiempo de la primera, presionas S. Si el tiempo de la tercera figura se parece más al tiempo de la segunda, presionas “L”. Una

vez que el sujeto comprendía completamente la manera en que debía responder a la tarea, comenzaba la sesión.

Cada sesión consistió en 360 ensayos, divididos en 3 bloques. Al inicio de cada ensayo, se obtenían las duraciones de cada figura. La duración del referente corto (S) provenía de una distribución uniforme entre 400 y 700 ms igual que en Allan (2002), “r” tenía un valor constante de 2 y la duración del referente largo (L) era la multiplicación del referente corto y “r”.

Figura 6.

Representación gráfica del procedimiento de Bisección Roving

Etapa	Pantalla	Duración
1		<i>Resp.</i>
2		<i>1 s</i>
3		<i>L</i>
4		<i>1 s</i>
5		<i>S</i>
6		<i>1 s</i>
7		<i>P</i>
8		<i>1 s</i>
9		<i>Resp.</i>

Para obtener la duración del estímulo prueba, se realizó uno de cinco cálculos distintos, cada uno asociado a un nombre o categoría (Tabla 4).

Tabla 4.

Fórmulas para obtener las duraciones del estímulo de prueba

<i>Categoría</i>	<i>S</i>	<i>S1</i>	<i>MG</i>	<i>L2</i>	<i>L</i>
<i>Duración</i>	<i>S</i>	$\frac{S + MG}{2}$	\sqrt{SL}	$\frac{L + MG}{2}$	$(S)(r)$

Supongamos que en un ensayo la duración es de $S = 520$ ms y de antemano, conocemos que $r = 2$. Los cálculos quedarían como en la Tabla 5.

Tabla 5.

Ejemplo de las posibles duraciones que puede tomar el estímulo de prueba en un ensayo.

<i>Categoría</i>	<i>Duración</i>
<i>S</i>	520 ms
<i>S1</i>	$\frac{S + MG}{2} = \frac{520 + 735.39}{2} = \frac{1255.39}{2} = 627.69$ ms
<i>MG</i>	$\sqrt{(S)(L)} = \sqrt{(520)(1040)} = \sqrt{540800} = 735.39$ ms
<i>L2</i>	$\frac{L + MG}{2} = \frac{1040 + 735.39}{2} = \frac{1775.39}{2} = 887.69$ ms
<i>L</i>	$(S)(r) = (520)(2) = 1040$ ms

Nota. ms = milisegundos

La duración en pantalla depende de la categoría seleccionada aleatoriamente para cada ensayo, cada una aparece 8 veces en un bloque, además las duraciones de referencia se presentaron 4 veces en orden Corto-Largo y la otra mitad Largo-Corto, aleatoriamente.

Resultados

Se utilizó el lenguaje de programación “R” a través de su Ambiente Integrado de Desarrollo (IDE por sus siglas en inglés) “RStudio” para realizar todo lo relacionado al procesamiento, graficación y análisis de datos.

Inicialmente, se realizó el cálculo de la proporción de respuesta a largo (PRL) para cada categoría (S, S1, MG, L2, L) considerando las siguientes medidas:

- 1- Promedio: PRL en las tres sesiones tomadas como una
- 2- Sesión: PRL para cada sesión
- 3- Bloques: PRL al inicio, intermedio y final de cada sesión, donde cada bloque está compuesto por 40 ensayos y
- 4- Orden de Presentación: PRL para el orden Largo-Corto y para Corto-Largo

Las proporciones de respuesta a largo fueron normalizadas por la media geométrica y posteriormente se utilizó un algoritmo no lineal, especificando cada uno de los modelos (logístico y pseudologístico), tomando la PRL como variable dependiente y la fórmula de cada modelo como función a ajustar; a partir de un proceso iterativo, se encontraron los valores correspondientes a los parámetros pendiente y PB.

Para el ajuste pseudologístico se asumió como en Allan (2002) y Allan y Gerhardt (2001) que predomina la varianza escalar, por lo que los parámetros \mathbf{p} y \mathbf{c} de la ecuación 13 se vuelven 0.

Las gráficas de las funciones psicométricas presentan las proporciones de respuesta a largo para cada duración normalizada (t/MG), la línea negra representa la predicción realizada por cada modelo y se presentan los parámetros de pendiente (s para el modelo logístico y γ para el modelo pseudologístico) y PB , así como los valores de AIC y R^2 , en el caso del modelo pseudologístico se encuentra también el $PBNS$. El apartado de anexos presenta las gráficas para las distintas medidas: promedio entre sesiones (Anexo B), diferencias entre sesiones (Anexo C), análisis por bloques (Anexo D) y análisis por orden de presentación (Anexo E).

Un primer ajuste de funciones se realizó a la condición "Promedio". Como se puede observar en la Tabla 6, el único valor que varía entre ambas funciones es el valor que representa la pendiente.

Tabla 6.

Valores de los parámetros de la ejecución promedio para cada ajuste.

Sujeto	Ajuste Logístico		Ajuste Pseudológico	
	PB	Pendiente	PB	Pendiente
1	0.95	0.2	0.95	0.35
2	0.89	0.37	0.89	0.65
3	1.03	0.31	1.03	0.55
4	0.98	0.14	0.98	0.24
5	0.93	0.19	0.93	0.34
6	0.97	0.22	0.97	0.39
7	0.99	0.14	0.99	0.25
8	0.83	0.3	0.83	0.53

Se evaluaron los supuestos de normalidad y homogeneidad de varianza para el parámetro pendiente mediante las pruebas Shapiro-Wilks y Test de Levene. Los resultados indican que los datos se distribuyen de manera normal ($W = 0.92$, $p > 0.1$) y que la varianza es homogénea ($F_{(1,14)} = 1.88$, $p = 0.19$), por lo que se procedió a realizar una prueba t de muestras relacionadas, la cual mostró diferencias entre las pendientes obtenidas por ambos ajustes ($t_{(7)} = 7.81$, $p < 0.001$), siendo el modelo pseudológico aquel con un valor de media más grande (media = .413 y sd = .149).

Un aspecto importante en esta tarea es verificar si la ejecución cambió a lo largo de las sesiones. Se efectuó un ANOVA de medidas repetidas, con los factores "Tipo de Ajuste" (Logístico vs Pseudológico) y "Sesión" (1, 2 y 3). Se considera el Tipo de

Ajuste como una medida intra-sujetos ya que ambos modelos se aplican al mismo conjunto de datos.

La prueba de esfericidad de Mauchly ($W = 0.78$, $p = 0.47$) indica que no se ha violado el supuesto de homogeneidad de las varianzas. Las pruebas Shapiro-Wilk para cada sesión y tipo de ajuste, indican que las distribuciones son normales. El ANOVA de medidas repetidas arrojó que únicamente el factor entre sujetos “Tipo de ajuste”, resultó estadísticamente significativo ($F_{(1,7)} = 60.43$, $p = 0.001$). El factor intra sujetos “Sesión”, y la interacción del Tipo de ajuste x Sesión, a su vez, no resultaron estadísticamente significativos ($F_{(2,14)} = 0.398$, $p = 0.67$ y $F_{(2,14)} = 0.52$, $p = 0.60$, respectivamente). Es decir, las pendientes difirieron entre tipos de ajuste, pero no se observaron cambios entre sesiones ni hubo interacción entre tipo de ajuste y sesión.

Se realizó también un ANOVA de medidas repetidas con los factores “Tipo de Ajuste”, “Bloques” (Inicio, Mitad y Final de la sesión) y “Sesión”. En este análisis, se viola el supuesto de homogeneidad de varianzas y en algunos casos se viola el supuesto de normalidad. Los ANOVAs de medidas repetidas son robustos a violaciones del supuesto de normalidad, por lo que se realizaron y analizaron las correcciones de Huynh–Feldt (H-F), donde se observa que ninguno de los factores resultó estadísticamente significativo ($F_{(1.09,7.66)} = 0.970$, $p = 0.36$), es decir, no se observaron diferencias estadísticamente significativas entre ninguno de los factores: Tipo de ajuste, Sesión o Bloques, lo que indica que no existen diferencias en el parámetro de pendiente en los distintos bloques que componen la sesión.

Al igual que en el análisis previo, el ANOVA de medidas repetidas que toma en cuenta el “Tipo de Ajuste”, la “Sesión” y el “Orden de Presentación”, viola el supuesto

de homogeneidad de varianzas y de normalidad. Al realizar la corrección H-F, no se obtuvieron resultados significativos ($F_{(2.53,17.70)} = 1.644$, $p = 0.23$). Por lo que no existen diferencias en el parámetro pendiente según el orden de presentación de las duraciones de referencia.

Se utilizó la tercera sesión para realizar el cálculo de las diferencias del Criterio de Información de Akaike, ya que se espera que la respuesta del sujeto tenga un rendimiento estable a partir de un efecto de aprendizaje por la experiencia de las sesiones anteriores, aunque, como se puede ver en el Anexo B, dos sujetos (2 y 7) no cumplen con esta condición. La obtención de las diferencias de Akaike da un valor de 0 ya que ambos modelos obtuvieron el mismo valor de AIC (Tabla 7) indicando que ambos modelos ajustan de buena forma nuestros datos.

Tabla 7.

Valores de los parámetros de ambos modelos en la tercera sesión de los sujetos

Sujeto	Modelo Logístico	Modelo Pseudológico	PB*	AIC*
	Pendiente	Pendiente		
1	0.14	0.25	0.95	-9.14
2	0.43	0.75	1.06	-16.74
3	0.26	0.46	1.04	-5.9
4	0.11	0.19	0.97	-6.47
5	0.17	0.29	0.95	-13.97
6	0.23	0.41	0.94	-7.19
7	0.18	0.31	1.1	-9.74

8	0.25	0.43	0.89	-5.58
---	------	------	------	-------

Nota. PB y AIC tienen el mismo valor para ambos modelos.

Se realizó también el análisis de Detección de Señales para la tercera sesión de los sujetos para conocer las medidas d' , c y c' (Tabla 8), lo que nos permite identificar si los sujetos fueron sensibles a las diferencias de las duraciones de los estímulos de prueba.

Tabla 8.

Análisis de Sensibilidad (d'), Sesgo (c) y Proporción de la distancia entre c y d' (c') para la tercera sesión de cada sujeto.

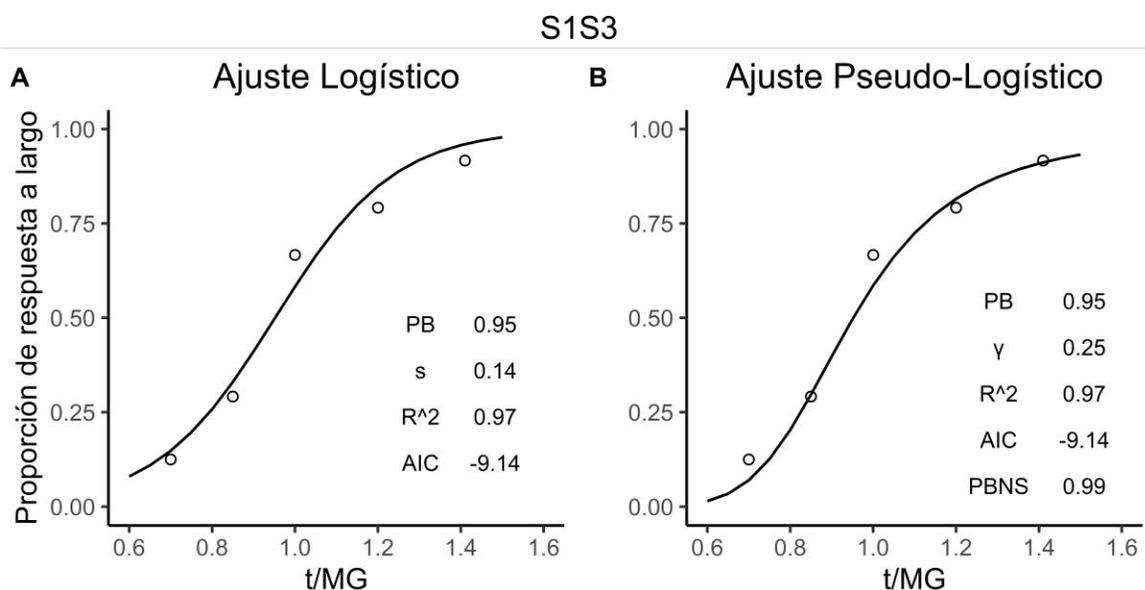
Sujeto	d'	c	c'
1	1.867	-0.120	-0.064
2	0.750	0.057	0.075
3	1.284	-0.032	-0.025
4	2.204	0.048	0.022
5	1.869	-0.325	-0.174
6	1.375	-0.198	-0.144
7	1.869	0.325	0.174
8	1.132	-0.247	-0.219

Valores de d' cercanos a 0 indican poca sensibilidad y conforme este valor aumenta de forma positiva, hay mayor sensibilidad. El sujeto 4 fue aquel con mayor sensibilidad, lo que concuerda con la forma cercana a una sigmoide “S” que tiene su ajuste (Figura 7, cuarta hilera) y las proporciones de respuesta a largo para cada

categoría, mientras que el sujeto 2 (Figura 7, segunda hilera) tuvo la menor sensibilidad, concordando con la forma relativamente plana o casi lineal que toma su función psicométrica. Ninguno de los valores de d' fueron 0 o algún valor negativo, lo que indica que los sujetos tuvieron una mayor tasa de aciertos que de falsas alarmas y muestra que los sujetos son sensibles al discriminar entre las duraciones presentadas, a pesar de la dificultad de la tarea.

Figura 7.

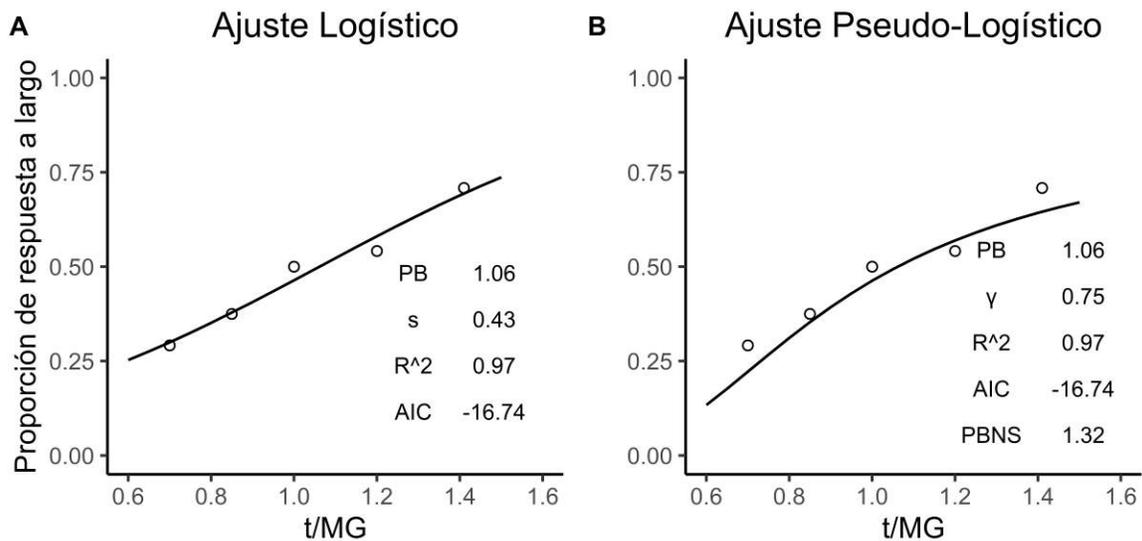
Ejecución de los sujetos en la tercera sesión.



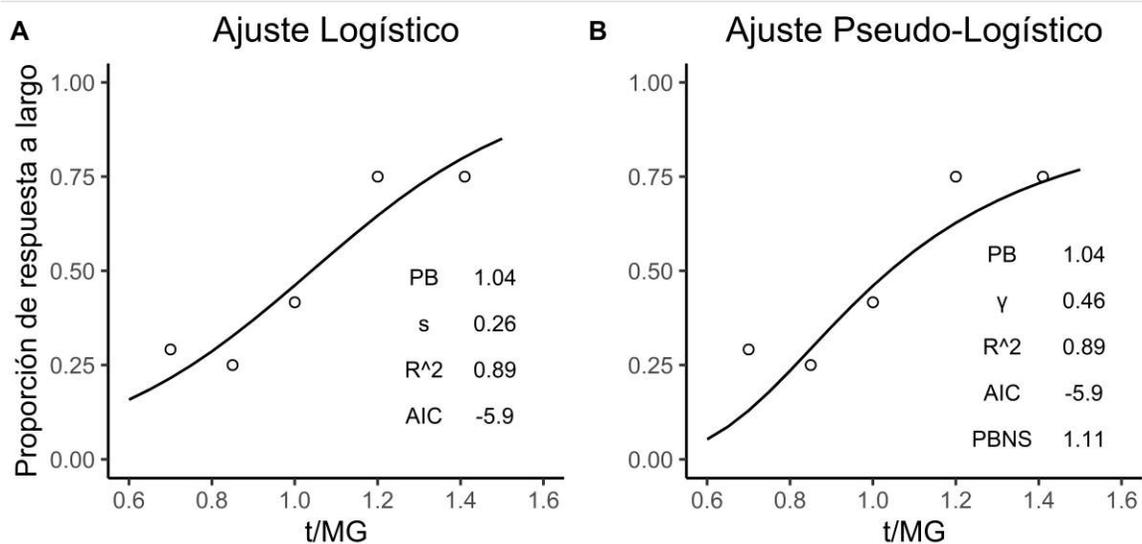
Nota. Distribución de la Proporción de Respuesta a Largo en función del tiempo (t) relativizado por la media geométrica (MG), para cada categoría.

La primera "S" de cada gráfica, representa el número del sujeto (1 al 8), mientras que la segunda "S" representa la sesión, que en este caso indica que cada gráfica pertenece a la tercera sesión.

S2S3



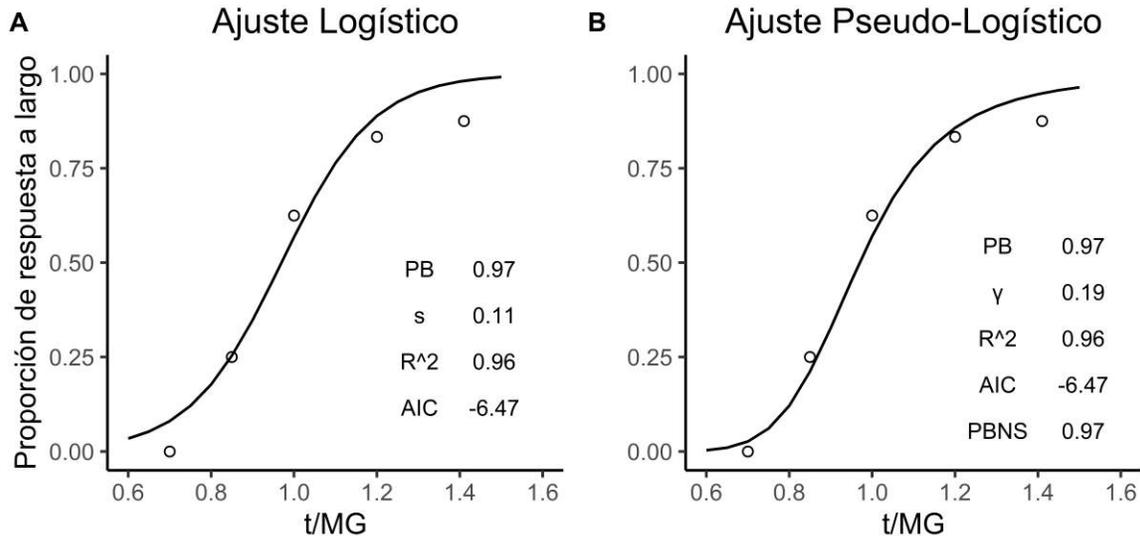
S3S3



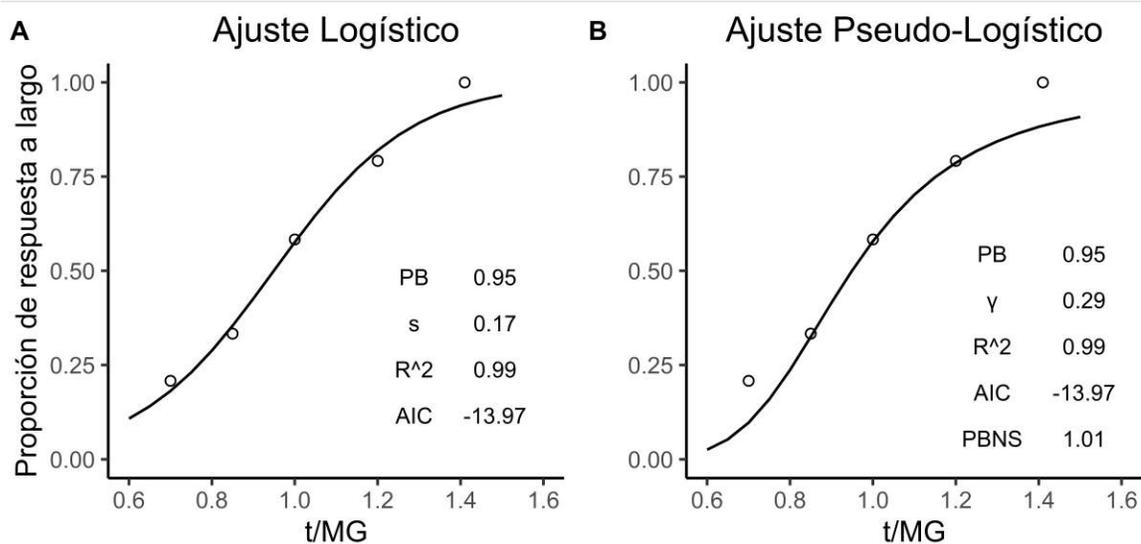
Nota. Distribución de la Proporción de Respuesta a Largo en función del tiempo (t) relativizado por la media geométrica (MG), para cada categoría.

La primera "S" de cada gráfica, representa el número del sujeto (1 al 8), mientras que la segunda "S" representa la sesión, que en este caso indica que cada gráfica pertenece a la tercera sesión.

S4S3



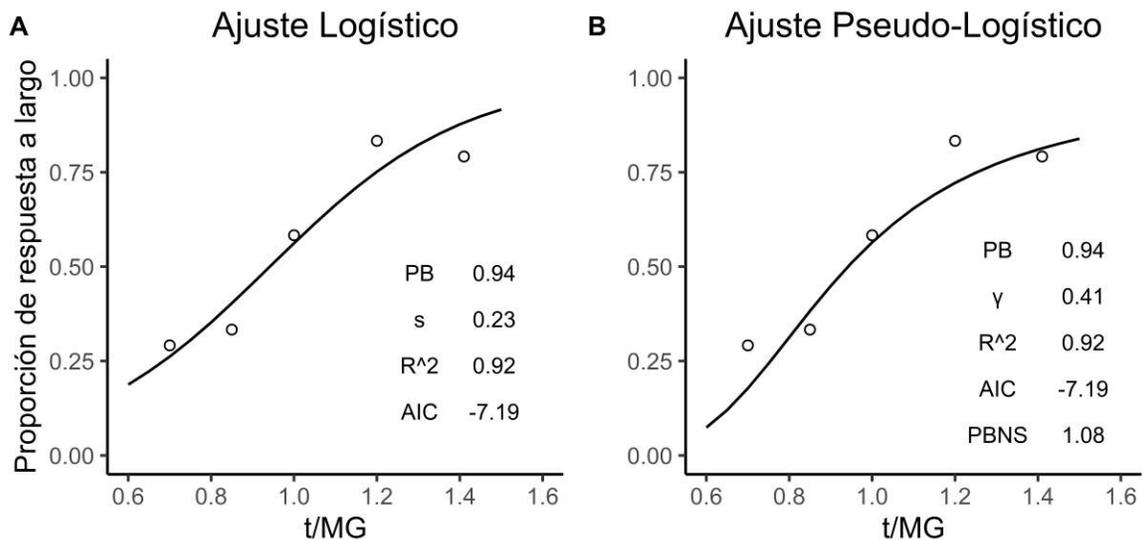
S5S3



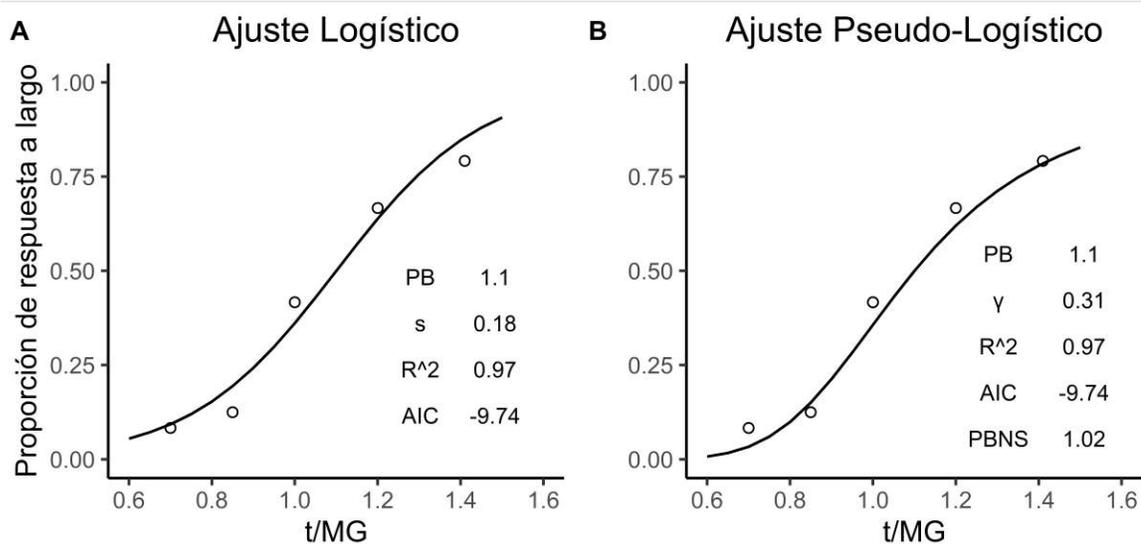
Nota. Distribución de la Proporción de Respuesta a Largo en función del tiempo (t) relativizado por la media geométrica (MG), para cada categoría.

La primera "S" de cada gráfica, representa el número del sujeto (1 al 8), mientras que la segunda "S" representa la sesión, que en este caso indica que cada gráfica pertenece a la tercera sesión.

S6S3



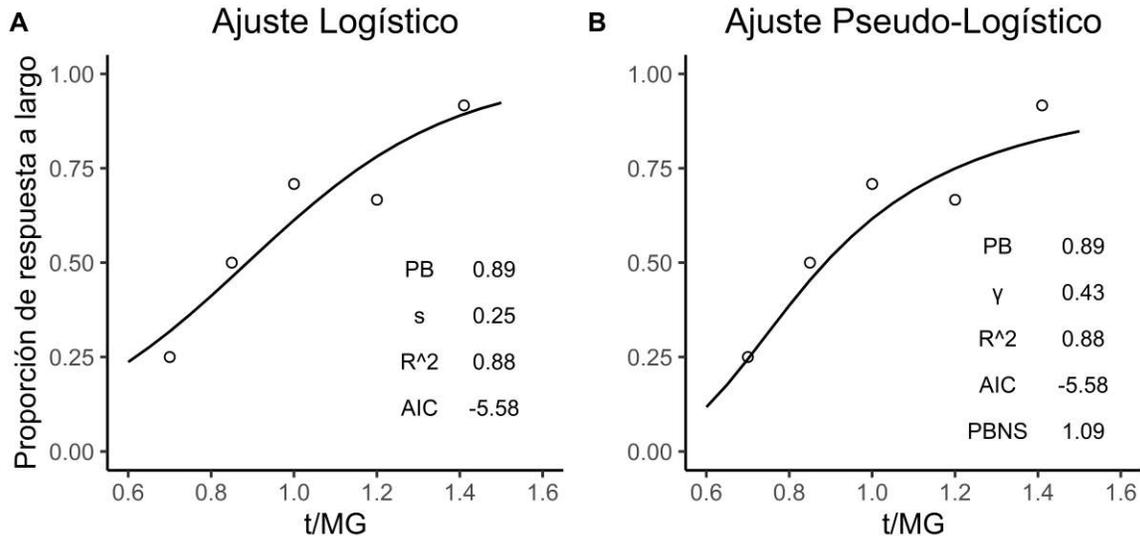
S7S3



Nota. Distribución de la Proporción de Respuesta a Largo en función del tiempo (t) relativizado por la media geométrica (MG), para cada categoría.

La primera "S" de cada gráfica, representa el número del sujeto (1 al 8), mientras que la segunda "S" representa la sesión, que en este caso indica que cada gráfica pertenece a la tercera sesión.

S8S3



Nota. Distribución de la Proporción de Respuesta a Largo en función del tiempo (t) relativizado por la media geométrica (MG), para cada categoría.

La primera "S" de cada gráfica, representa el número del sujeto (1 al 8), mientras que la segunda "S" representa la sesión, que en este caso indica que cada gráfica pertenece a la tercera sesión.

En el caso del parámetro c , la mayoría de los sujetos (1, 3, 5, 6, 8) tuvieron valores negativos, indicando una tendencia a responder que la duración de prueba era más similar al referente largo, mientras que los demás sujetos (2,4,7) tuvieron un valor de c positivo, por lo que tendían a responder que la duración de prueba era más similar al referente corto. Conforme este parámetro tiende a valores positivos, el sujeto subestima las duraciones "largas" categorizándolas como cortas y de forma contraria, conforme el parámetro tiende a valores negativos, el sujeto sobreestima las duraciones "cortas" categorizándolas como largas.

En el caso de la comparación entre el PB y el PBNS para la tercera sesión, el valor del PB es menor que el PBNS para la mayoría de los sujetos (1,2,3,5,6,8) (Tabla 8), mientras que sólo un sujeto (7) tuvo un PB mayor que el PBNS y otro (4) tuvo valores iguales para ambos ajustes.

Tabla 8.

Punto de Bisección y Punto de Bisección No Sesgado para la tercera sesión de cada sujeto.

Sujeto	PB	PBNS
1	.95	.99
2	1.06	1.32
3	1.04	1.11
4	.97	.97
5	.95	1.01
6	.94	1.08
7	1.1	1.02
8	.89	1.09

Discusión

En el presente trabajo se estudió el ajuste de las funciones logística y pseudologística para establecer qué modelo nos permite explicar de mejor forma las ejecuciones obtenidas en una tarea de discriminación temporal. Se propuso la comparación de dos funciones de ajuste a la función psicométrica obtenida de la ejecución de participantes humanos respondiendo la tarea de Bisección Temporal Roving porque uno de ellos - Modelo Pseudo Logístico - se derivó en el contexto de la

tarea de bisección temporal estándar (Killeen, et al. 1997) y posteriormente se utilizó para describir los datos de Bisección Temporal Roving (Allan y Gerhardt, 2001; Allan, 2002), sin explicitar qué modelo es pertinente para modelar las ejecuciones del procedimiento experimental y si se adapta a las características propias de la ejecución en el procedimiento, donde las proporciones de respuesta a largo son mayores a 0 para duraciones de prueba cortas y menores a 1 para duraciones de prueba largas, por lo que es de interés comprender cómo es que se deriva el modelo pseudológico a partir del modelo logístico.

La comparación entre los valores de pendiente, mediante una prueba t para muestras relacionadas, arrojó diferencias estadísticamente significativas ($t_{(7)} = 7.81$, $p < 0.001$), siendo los valores del modelo pseudológico (media = .413 y sd = .149) mayores que los del modelo logístico, que en términos de la discriminación temporal indica mayor sensibilidad para discriminar entre duraciones, congruente a lo esperado según Killeen, Fetterman & Bizo (1997) al aplicar el modelo pseudológico. Al igual que en estudios previos (Allan, 2001; Allan, 2002), el modelo pseudológico tuvo un buen ajuste a los datos obtenidos en el procedimiento de Bisección Temporal Roving.

Uno de los supuestos centrales de los distintos modelos y teorías de timing es el relativo a la predominancia de las fuentes de varianza escalar en la estimación temporal. En la mayoría de las preparaciones experimentales en las que se ha verificado la presencia de la propiedad escalar como el intervalo fijo, el procedimiento de pico, el de generalización temporal, time-left (tiempo restante) y bisección, ésta se ha atribuido a algún aspecto del componente de memoria en combinación con alguna

regla de respuesta, generalmente de tipo relativo (Gibbon & Church 1984; Gibbon, 1986; Church, et al. 1997; Meck, 2003).

Al realizar el ajuste de los parámetros del modelo pseudologístico se asumió que predomina la variabilidad escalar dentro del proceso de decisión, lo que en términos de la Ecuación 13 se refiere a mantener constantes los parámetros “p” y “c” correspondientes a variabilidad no escalar y constante respectivamente, por lo que el modelo pseudologístico se reduce al modelo logístico, resultando en la obtención de los mismos valores de Punto de Bisección y AIC para ambos modelos.

Las diferencias observadas en el parámetro pendiente en la prueba t para muestras independientes, se debe a que el modelo pseudologístico utiliza un factor de corrección de 0.55 ya que el denominador de la fórmula del modelo logístico no es una desviación estándar regular (Killeen, comunicación personal, 5 de septiembre de 2021). Este factor de corrección produce, entonces, un valor mayor del parámetro pendiente que representa una menor variabilidad en los datos y, por tanto, indica una mayor precisión en la discriminación temporal de los sujetos, lo que observamos visualmente en la representación gráfica como una curva más semejante a una sigmoide y esto hace que la línea de ajuste esté más cerca de los puntos.

Debido a la igualdad en los valores de los parámetros entre ambos modelos, se derivó el modelo pseudologístico del modelo logístico, para comprender su relación. El Anexo F muestra detalladamente la derivación del PB, al ser el punto en que la función cambia de concavidad (de ser convexa a cóncava), donde: se inicia obteniendo la primera derivada, lo que nos ayuda a conocer en dónde se encuentra un máximo o un mínimo local (Guichard, s.f.), además de indicar cómo cambia una variable con relación

a otra, conocido como razón de cambio o pendiente, que en este caso refleja cómo cambia la proporción de respuesta a largo para cada duración.

Posteriormente, se obtiene la segunda derivada para conocer el punto de inflexión, igualando la segunda derivada a 0 (Guichard, s.f.), lo que permite verificar que el cambio de concavidad de la función pseudologística es el PB.

Se agrega además, la integración de la función de densidad de probabilidad (muestra qué observaciones son más probables que sucedan) a la función acumulada (probabilidad de que suceda una observación dado un valor establecido de la variable en el eje x), lo que nos permite realizar una comparación entre la forma del modelo logístico y el modelo pseudologístico en términos de los parámetros que ambos explican (pendiente y PB), comprendiendo entonces que ambos modelos son equivalentes y aquello que se está modificando en el modelo pseudologístico es la forma en que se considera la variabilidad de respuesta de los sujetos, que en este caso ocurre en términos de variabilidad escalar, no escalar y constante (Killeen, Fetterman & Bizo, 1997).

En cuanto al referente empírico a los valores de los parámetros que componen a ambos modelos, se evalúa la relación del parámetro pendiente con d' . Se muestra que hay una relación inversa entre estos dos valores de la forma:

$$y = \frac{k}{x} \quad (21)$$

Dónde, si el valor que queremos encontrar (y) es la pendiente, entonces dividimos una constante (k) por el valor conocido (x) que sería d' . En caso de querer encontrar el valor de d' , entonces intercambiamos x y y .

Por lo tanto, conforme d' sea mayor a 0, el valor del parámetro pendiente será más cercano a 0, indicando que el sujeto puede discriminar cuando las diferencias entre duraciones son relativamente pequeñas y por eso la razón de cambio (pendiente) es pequeña, a diferencia de cuando el valor de d' es más cercano a 0 y el valor del parámetro pendiente es mayor a 0, denotando que el sujeto tiene poca sensibilidad, así que necesita que las duraciones sean más discrepantes entre sí para percibir diferencias entre ellas. Esta relación inversa se comprueba cuando se compara el valor de la pendiente con d' (ver Tablas 7 y 8), en donde para ambos modelos, conforme d' es mayor a 0, la pendiente es cada vez más cercana a 0.

A diferencia de estudios previos (Allan, 2001; Allan, 2002), en el presente, el PB es menor al PBNS para la mayoría de los sujetos, lo que indica que tendían a responder que las duraciones eran más largas de lo que realmente eran, esto es, sobreestimaban las duraciones, comprobado además por los valores negativos del parámetro c , que reflejan la tendencia del sujeto a categorizar una duración como larga (Tabla 8), lo que causa que el PB se desplace a la izquierda.

Respecto a los hallazgos de este estudio, el análisis de varianza de medidas repetidas para el tipo de ajuste sugiere que ambos modelos nos permiten explicar satisfactoriamente los datos, por lo que utilizar uno u otro modelo es indiferente; esto se verifica al no encontrarse diferencias en los valores del Criterio de Información de Akaike, por lo que los datos son inapropiados para inferir de manera determinante cuál

de los dos modelos nos permiten explicar el fenómeno observado. Sin embargo, el procedimiento de Bisección Temporal Roving (y, se podría agregar, cualquier tarea que produzca ejecuciones truncadas en los extremos) presenta sesgos en el PB, por lo que es recomendable utilizar el modelo pseudologístico, ya que permite analizar correctamente las ejecuciones.

Una alternativa para cuando dos modelos explican un fenómeno con el mismo nivel de evidencia en este caso a partir del AIC, es realizar conclusiones más robustas a partir de Inferencias Multimodelo (MMI por sus siglas en inglés), donde la idea central es evitar la selección del “mejor modelo” para confiar en múltiples modelos, ponderando cada uno a partir de un criterio de información y así obtener sumas ponderadas de los parámetros que componen a cada modelo, lo que permite retener toda la información y realizar inferencias de manera informada y probabilística (Guisan, et al. 2017) al promediar modelos, incorporar la incertidumbre sobre resultados esperados para distintos conjuntos de datos mediante métodos iterativos con el fin de mejorar la estimación de la precisión, establecer conjuntos de confianza o confiabilidad, entre otros, que permiten evaluar la importancia relativa de las variables que componen a cada modelo (Burnham & Anderson, 2002).

Los resultados obtenidos en el análisis de varianza de medidas repetidas para el número de sesión, bloques y orden de presentación indican que no hubo cambios en la discriminación temporal debidos al paso de las sesiones, al transcurso de la sesión, ni al orden de presentación de los referentes. Mientras que en otros estudios se presentaron 1440 y 2160 ensayos, divididos en 12 y 20 sesiones respectivamente (Allan & Gerhardt, 2001; Allan, 2002), en el presente estudio, a partir de comentarios

como fatiga, aburrimiento y la estimación de intervalos incorrectos por parte de los participantes en la fase de piloteo, se redujo la cantidad de ensayos a 360 en 3 sesiones, lo que pudo atenuar posibles efectos de acarreo, aprendizaje o inercia reflejados en los resultados de sesiones y orden de presentación que reportaron Allan y cols. en estudios previos (Allan & Gerhardt, 2001; Allan, 2002).

Lo que refiere al PB y su localización, por el efecto del orden de presentación de los referentes, se encontró que los sujetos establecieron un criterio a partir de las duraciones de los referentes ya que hubo diferencias en el PB; éstas se deben a que su decisión estuvo basada en la comparación del criterio con la duración del estímulo de prueba. En cambio, si la comparación fuese directamente con los referentes, el PB se ubicaría en el mismo punto indistintamente del orden de presentación.

Contrario a lo reportado por Allan (2002), en el presente estudio el orden de presentación no tuvo un efecto significativo en la percepción de las duraciones de prueba (ANOVA de medidas repetidas, $F_{(1,7)} = 0.53$, $p = 0.4893$).

El resultado no significativo en el efecto del orden de presentación puede deberse a causas perceptuales, en el sentido de que las estimaciones estaban en función de intervalos llenos en vez de intervalos vacíos ya que como se observó durante la fase de piloteo, la estimación de intervalos vacíos está sujeta a errores por la observación de un intervalo incorrecto, lo que conlleva a una toma de decisiones independiente de las duraciones de los estímulos y por tanto, a un error en las interpretaciones de las respuestas emitidas por los sujetos; mientras que el uso de intervalos llenos asegura que los sujetos observan el estímulo correctamente y se atribuye la toma de decisiones al proceso de discriminación temporal. Otro factor que

pudo atenuar el efecto de orden es que las figuras eran de un mismo color (negro) (Allan, 2002). Es relevante para estudios futuros conocer si estos efectos de la estimación de intervalos llenos y el color de las figuras son independientes entre sí.

En términos cognitivos, la ausencia del efecto de orden puede deberse a cuestiones como fatiga, falta de atención, inercia, o dificultad, por las demandas propias del procedimiento que fueron controladas reduciendo el número de ensayos y sesiones, a partir de lo reportado por los sujetos en la fase de piloteo.

Conclusiones

Tras la comparación realizada entre los parámetros que componen a los modelos logístico y pseudologístico, se encontró que es necesario evaluar la influencia que tienen las distintas fuentes de variabilidad -escalar, no escalar y constante- dentro del proceso de decisión y en la predicción que realizan ambos modelos al procedimiento de Bisección Temporal Roving, lo que nos ayudaría a aclarar qué modelo utilizar según las fuentes de variabilidad tomadas en cuenta dentro de SET, ya que su inclusión nos hubiese permitido comprender en qué condiciones, según las fuentes de variabilidad consideradas, es conveniente aplicar uno u otro modelo de análisis para describir de mejor manera la discriminación temporal.

Respecto al referente empírico sobre los parámetros de los ajustes, se pudo corroborar que ambos modelos capturan la discriminación temporal de los sujetos a partir de la relación inversa existente entre d' con el valor del parámetro pendiente, así como el punto de indiferencia a las duraciones a partir del PB y el sesgo en la respuesta a partir de la comparación entre el PB con el PBNS.

En conclusión, resultados similares utilizando un procedimiento distinto, como la generalización episódica (Wearden & Bray, 2001) en el que el cambio de referente de ensayo a ensayo produjo desplazamientos del gradiente de generalización dependientes del valor (corto o largo) de la duración reforzada, proporcionarían evidencia de que es necesario reconsiderar los planteamientos de SET respecto a cómo se lleva a cabo la comparación de duraciones en el módulo de decisión, la conformación del criterio de respuesta y el papel de la memoria de referencia en este tipo de tareas. El trabajo futuro en esta línea de investigación también debería incorporar consideraciones como las formuladas por Machado y cols. (Arantes & Machado, 2008; Carvalho, Machado & Vasconcelos, 2015) respecto a la influencia del contexto temporal en la discriminación del tiempo.

Referencias

- Allan, L. (1998). The influence of the scalar timing model on human timing research. *Behavioural Processes*, *44*(2), 101-117. DOI: 10.1016/s0376-6357(98)00043-6
- Allan, L. (2002). Are the referents remembered in temporal bisection? *Learning and Motivation*, *33*(1), 10-31. DOI: 10.1006/lmot.2001.1097
- Allan, L. (2002). The location and interpretation of the bisection point. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *55B*(1), 43-60. DOI: 10.1080/02724990143000162
- Allan, L. & Gibbon, J. (1991). Human Bisection at the Geometric Mean. *Learning and Motivation*, *22*(1-2), 39-58. DOI: <https://doi.org/10.1002/0471214426.pas0309>
- Allan, L. & Gerhardt, K. (2001). Temporal bisection with trial referents. *Perception & Psychophysics*, *63*(3), 524-540. DOI: 10.3758/bf03194418
- Arantes, J., & Machado, A. (2008). Context effects in temporal discrimination task: further tests of the Scalar Expectancy Theory and Learning-to-time models. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *90*(1), 33-51. DOI: 10.1901/jeab.2008.90-33
- Burnham, K. & Anderson, D. (2002). *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*. (2a ed.). Springer.
- Carvalho, M. O., Machado, A., & Vasconcelos, M. (2015). Context effects in temporal differentiation: some data and a model. *International Journal of Comparative*

Psychology, 8, recuperado de [Context effects in temporal differentiation: Some data and a model \(scholarship.org\)](#)

Church, R. & Deluty, M. (1977). Bisection of Temporal Intervals. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 3(3), 216-228. DOI: 10.1037//0097-7403.3.3.216

Church, R. (2003). A Concise Introduction to Scalar Timing Theory. En Meck, W. *Functional and Neural Mechanisms of Interval Timing*. CRC Press.

Droit-Volet, S., & Zélanti, P. (2013b). Development of time sensitivity and information-processing speed. *PLoS ONE*, 8(8), e71424. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0071424>

Field, A., Miles, J. & Field, Z. (2012). *Discovering Statistics Using R*. Sage Publications.

Gescheider, G. (1997). *Psychophysics: The Fundamentals* (3a ed.). Routledge.

Gibbon, J. & Church, R. (1981). Timeleft: Linear versus Logarithmic subjective time. *Journal of Experimental Analysis: Animal Behavior Processes*, 7(2), 87-108. PMID: 7241054

Gibbon, J. & Church, R. (1984). Sources of variance in an information processing theory of timing. En W. L. Roitblat, T. G. Bever, & H. S. Terrace (Eds.), *Animal cognition* (pp. 465–488). Erlbaum.

Gibbon, J. (1986). The structure of subjective time: How Time Flies. *The Psychology of Learning and Motivation*, 20(1), 105-135. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0079-7421\(08\)60017-1](https://doi.org/10.1016/S0079-7421(08)60017-1)

Guichard, D. (Sin Fecha). Calculus: early transcendants.

https://www.whitman.edu/mathematics/calculus_online/

Guisan, A., Thuiller, W., & Zimmermann, N. (2017). *Habitat Suitability and Distribution Models: With Applications in R*. Cambridge Press. DOI:

<https://doi.org/10.1017/9781139028271>

Killeen, P.R. & Weiss, N. (1987). Optimal Timing and the Weber function. *Psychological Review*, 94(4), 455-468. DOI: <https://doi.org/10.1037/0033-295X.94.4.455>

Killeen, P.R., Fetterman, G. & Bizo, L. (1997). Time's Causes. En Bradshaw, C. M. & Szabadi, E. (Eds.), *Time and Behaviour: Psychological and Neurobehavioural Analyses* (pp. 79-131). Elsevier Science.

Kingdom, F. & Prins, N. (2016). *Psychophysics: A practical introduction* (2da ed.).

Elsevier

Machado, A. (1997). Learning the temporal dynamics of behavior. *Psychological Review*, 104(2), 241-265. DOI: <https://doi.org/10.1037/0033-295X.104.2.241>

Macmillan, N., & Creelman, C.D. (1990). Response Bias: Characteristics of Detection Theory, Threshold Theory, and "Nonparametric" Indexes. *Psychological Bulletin*, 107(3), 401-413.

McElreath, R. (2015). *Statistical Rethinking: A Bayesian Course with examples in R and Stan*. CRC Press.

Meck, W. (2003). *Functional and Neural Mechanisms of Interval Timing*. CRC Press.

- National Research Council. (2013). *Frontiers in Massive Data Analysis*. National Academies Press.
- Rodríguez-Gironés, M. & Kacelnik, A. (2001). Relative importance of perceptual and mnemonic variance in human temporal bisection. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *54A*(2), 527-546. DOI: 10.1080/713755980
- Stevens, S. & Galanter, E. H. (1957). Ratio Scales and Category Scales for a dozen perceptual continua. *Journal of Experimental Psychology*, *54*(6), 377-411. DOI: <https://doi.org/10.1037/h0043680>
- Stubbs, A. (1968). The discrimination of stimulus duration by pigeons. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *11*(3), 223-238. DOI: <https://doi.org/10.1901/jeab.1968.11-223>
- Spiess, A. & Neumeyer, N. (2010). An evaluation of R^2 as an inadequate measure for nonlinear models in pharmacological and biochemical research: a Monte Carlo approach. *BioMed Central*, *10*(6). DOI: <https://doi.org/10.1186/1471-2210-10-6>
- Treutwein, B., & Strasburger, H. (1999). Fitting the psychometric function. *Perception and Psychophysics*, *61*(1), 87-106. DOI: <https://doi.org/10.3758/BF03211951>
- Vieira, A., Pinheiro, M., Kroger-Costa, A., & Machado, A. (2013). A Percepção do Tempo: Contributos do Procedimento de Bisseção. *Temas em Psicologia*, *21*(1), 49-70. DOI: <http://dx.doi.org/10.9788/TP2013.1-04>
- Wearden, J. H., & Bray, S. (2001). Scalar timing without reference memory? Episodic temporal generalization and bisection in humans. *The Quarterly Journal of*

Experimental Psychology, 54B(4), 289-309. DOI:

<https://doi.org/10.1080/02724990042000173>

Young, M. (2019). Bayesian Data Analysis as a tool for behavior analysts. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 111(2), 225-238. DOI: doi: 10.1002/jeab.512

Anexos

Anexo A. Consentimiento Informado.

Consentimiento Informado

La presente investigación es conducida por Alejandro Rivas Méndez perteneciente a la Facultad de Psicología de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). El presente estudio es sobre un fenómeno denominado “Estimación Temporal”, el cual tiene que ver con cómo las personas percibimos el tiempo y de cómo es que utilizamos la memoria de referencia para tomar una decisión.

Si usted accede a participar en este estudio, se le pedirá asistir a 3 sesiones de aproximadamente 20 minutos, en días consecutivos; considere que el ejercicio se realiza frente a una computadora.

La participación en el estudio es estrictamente voluntaria, la información que brindará totalmente confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. Sus respuestas al programa de computadora serán codificadas usando un número de identificación, por lo tanto, serán anónimas.

Si tiene alguna duda, puede hacer preguntas en cualquier momento durante su participación. Así mismo, tiene el derecho de retirarse del estudio en el momento que desee sin repercusión alguna.

De antemano agradecemos su participación.

Acepto participar voluntariamente en esta investigación. He sido informado (a) del objetivo, la duración de este estudio y mi papel en el mismo.

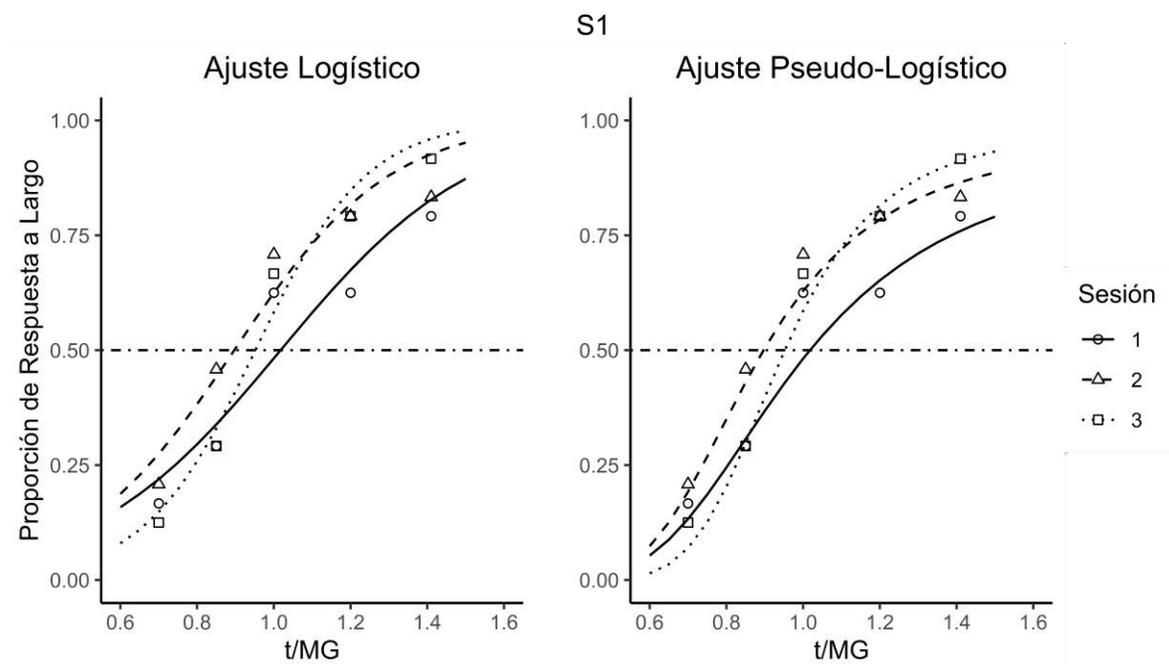
Reconozco que la información que yo provea en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y no será usada para ningún otro propósito fuera de los de este estudio sin mi consentimiento. He sido informado de que puedo hacer preguntas sobre el proyecto en cualquier momento y que puedo retirarme del mismo cuando así lo decida, sin que esto tenga efecto alguno contra mi persona.

Nombre del Participante

Firma del Participante

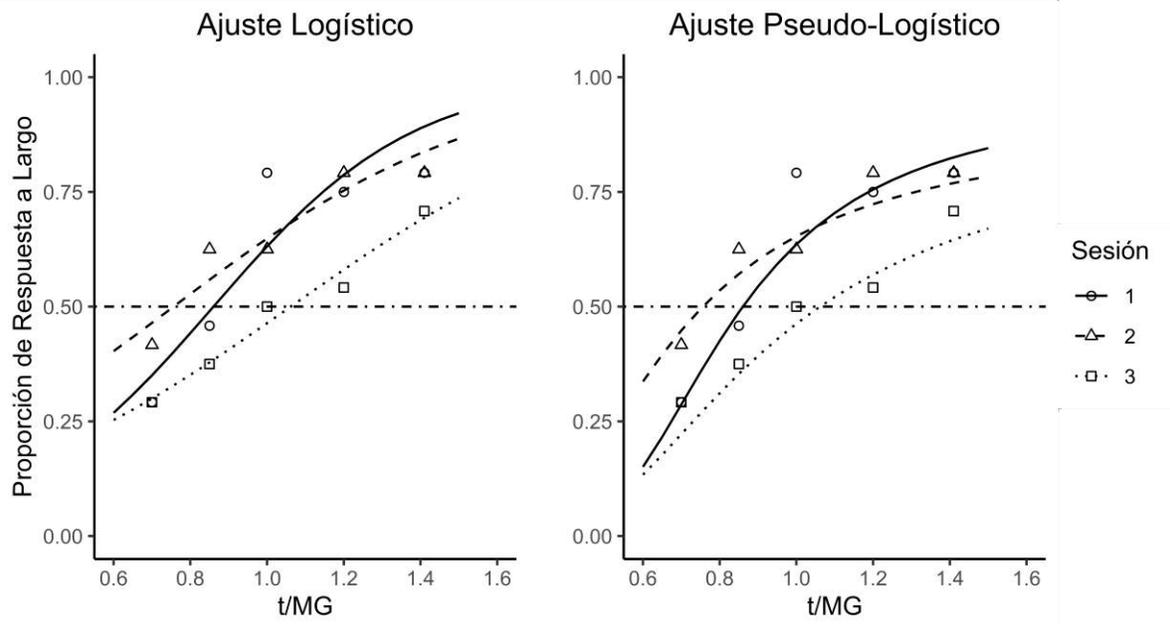
Fecha

Anexo B. Ajustes de las funciones obtenidas a partir del modelo logístico y pseudologístico por sesión.



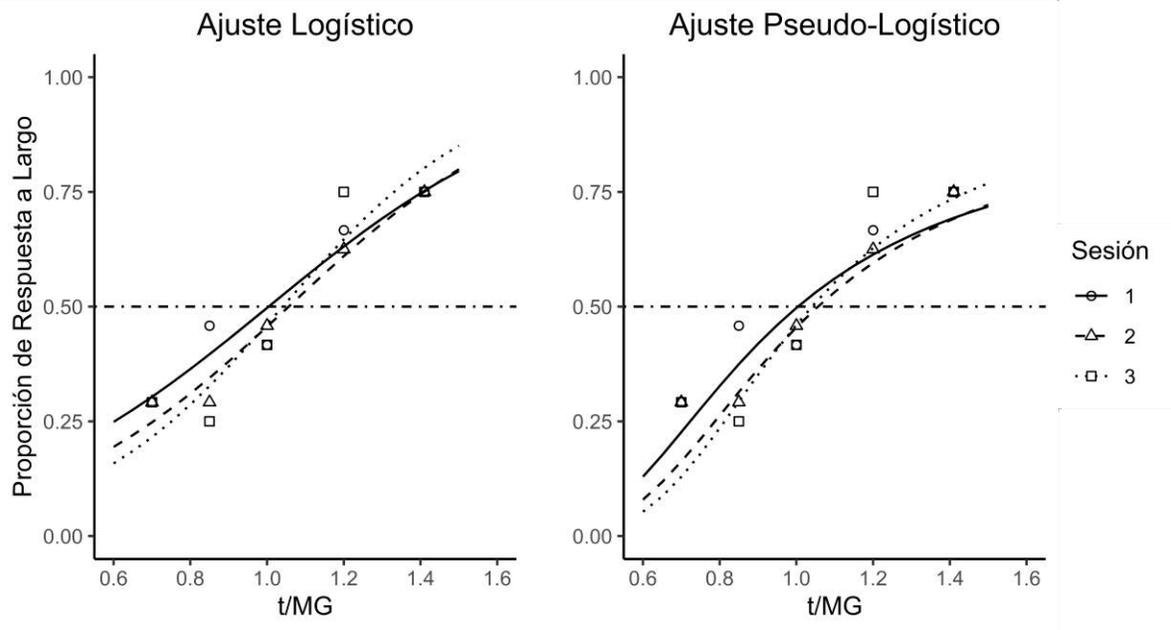
Sesión	Modelo		PB	AIC
	Logístico	Pseudológico		
1	Pendiente: 0.25	Pendiente: 0.44	1.02	-5.55
2	Pendiente: 0.2	Pendiente: 0.36	0.9	-7.18
3	Pendiente: 0.14	Pendiente: 0.25	0.95	-9.14

S2



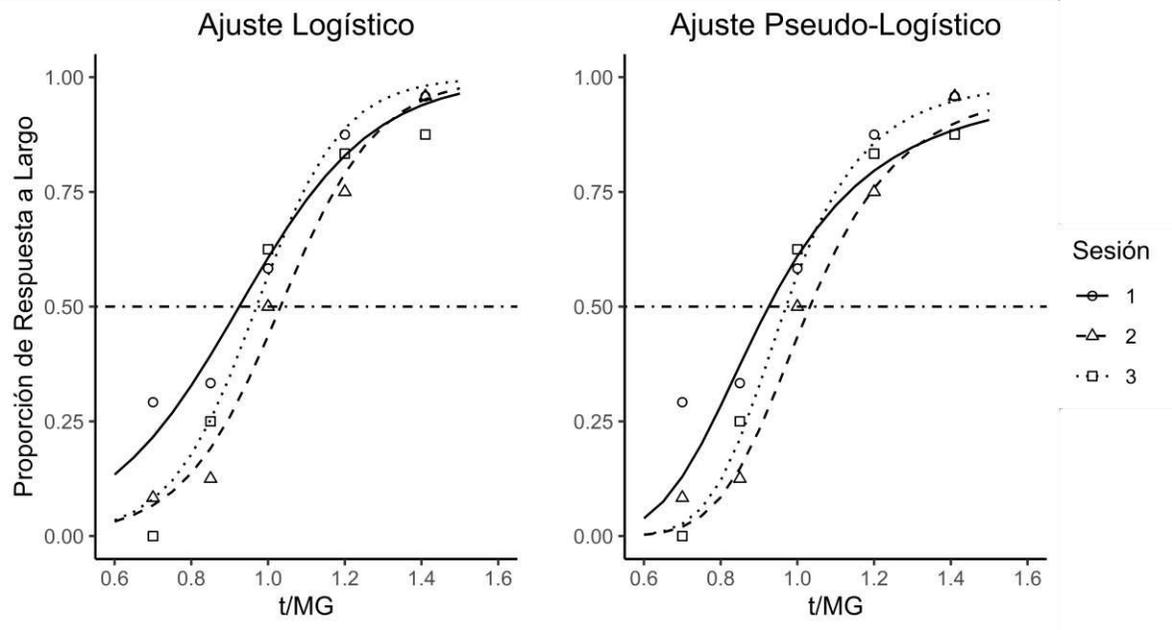
Sesión	Modelo		PB	AIC
	Logístico	Pseudológico		
1	0.26	0.46	0.86	-3.74
2	0.4	0.7	0.76	-10.45
3	0.43	0.75	1.06	-16.74

S3



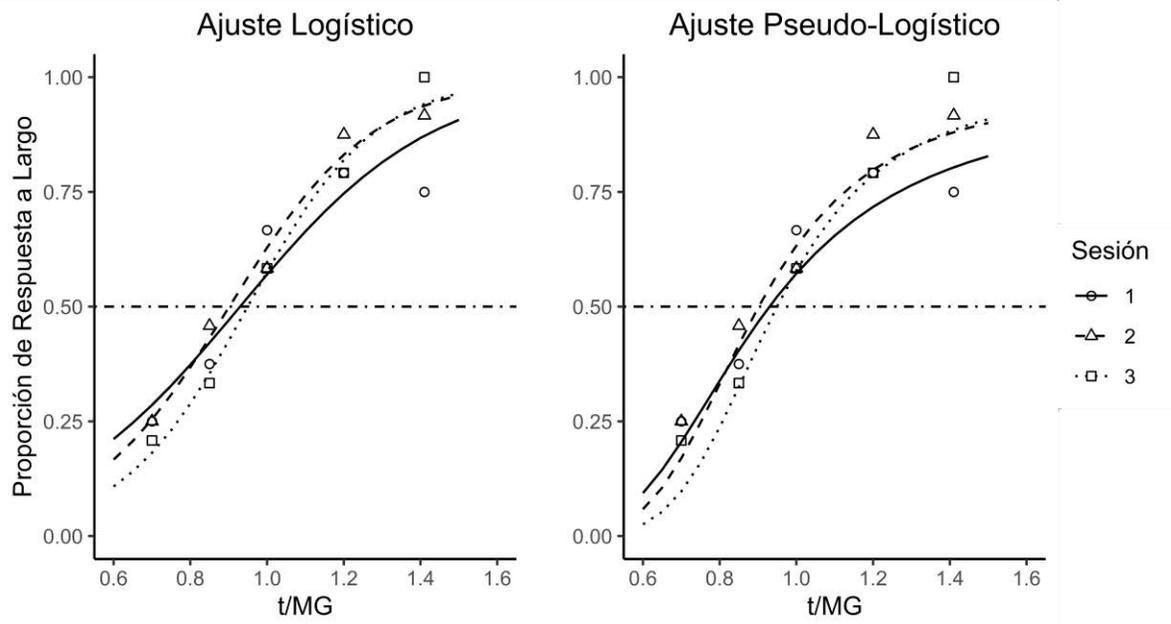
Sesión	Modelo		PB	AIC
	Logístico	Pseudológico		
1	0.37	0.64	1	-10.07
2	0.32	0.56	1.06	-14.4
3	0.26	0.46	1.04	-5.9

S4



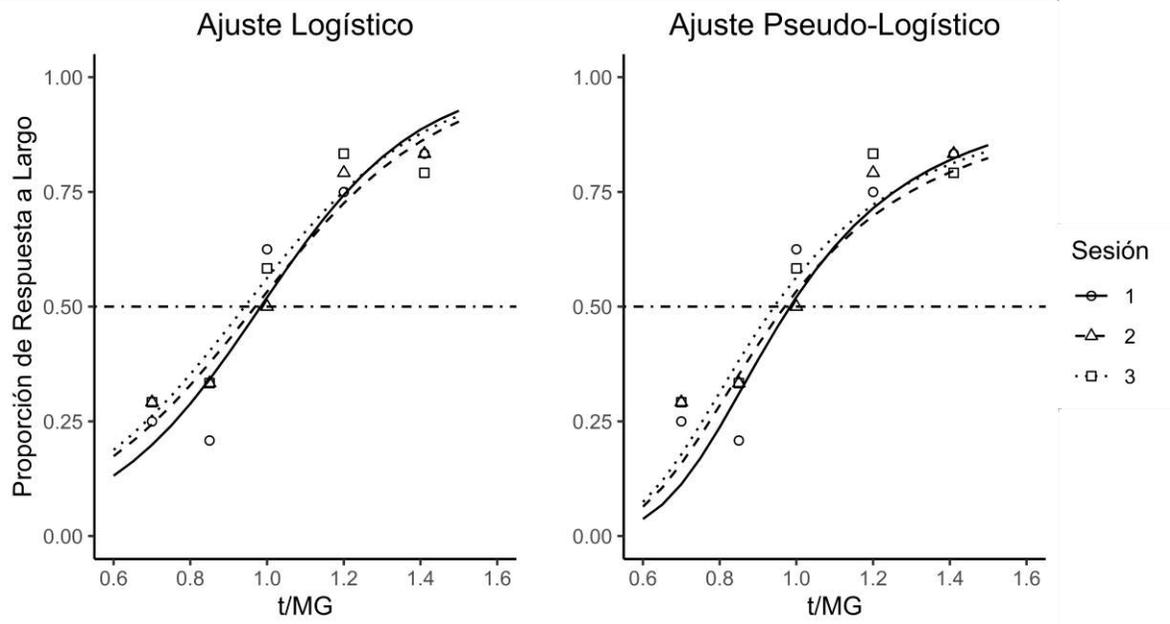
Sesión	Modelo		PB	AIC
	Logístico	Pseudológico		
1	0.17	0.31	0.92	-9.82
2	0.13	0.22	1.03	-10.72
3	0.11	0.19	0.97	-6.47

S5



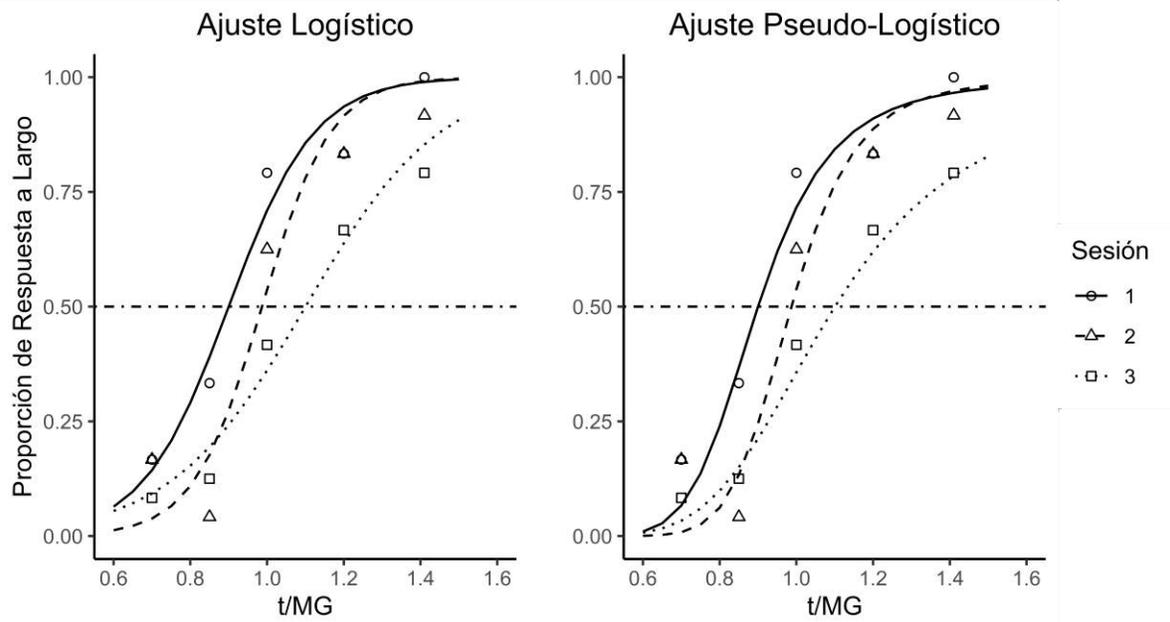
Sesión	Modelo		PB	AIC
	Logístico	Pseudológico		
1	0.25	0.44	0.93	-5.44
2	0.19	0.33	0.9	-14.21
3	0.17	0.29	0.95	-13.97

S6

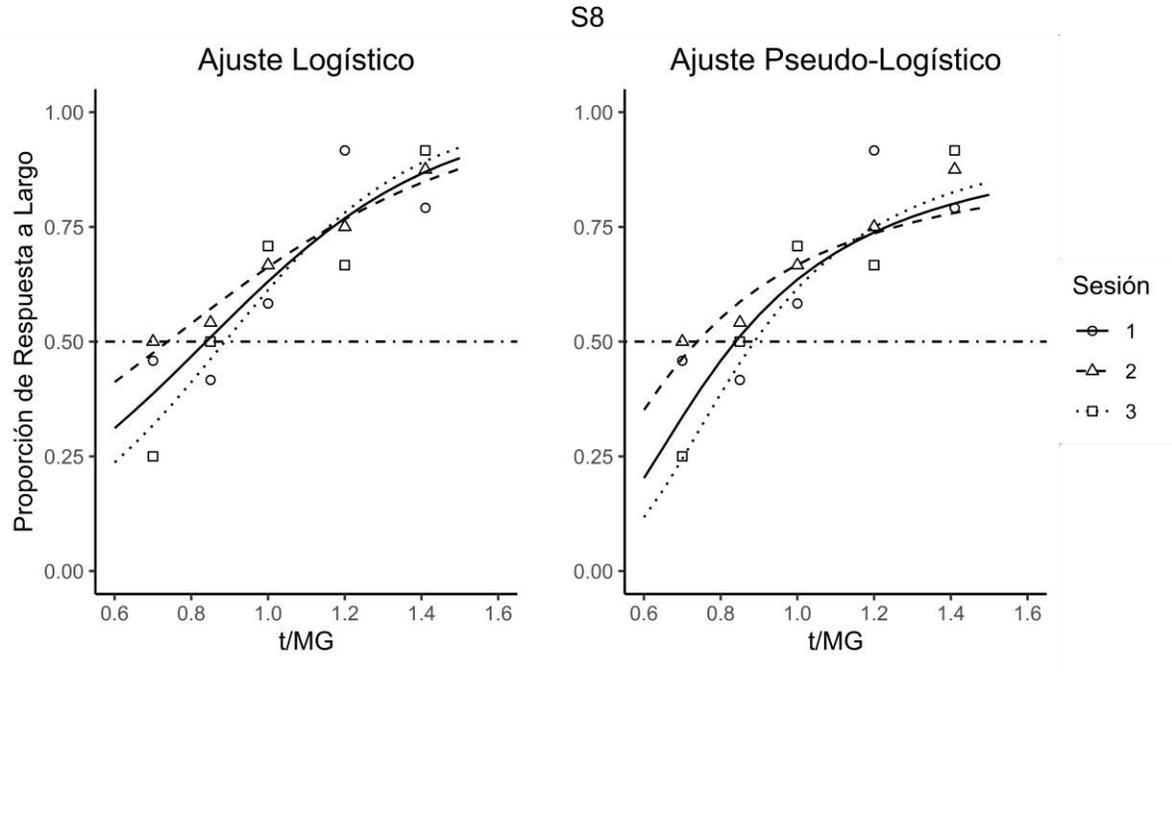


Sesión	Modelo		PB	AIC
	Logístico	Pseudológico		
1	Pendiente: 0.2	Pendiente: 0.36	0.98	-4.67
2	Pendiente: 0.24	Pendiente: 0.42	0.97	-10.57
3	Pendiente: 0.23	Pendiente: 0.41	0.94	-7.19

S7



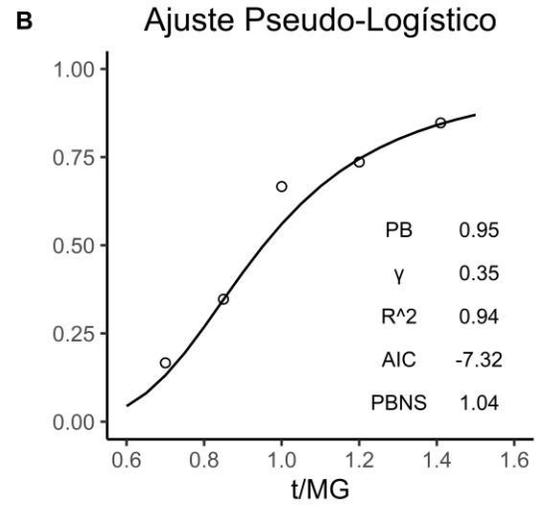
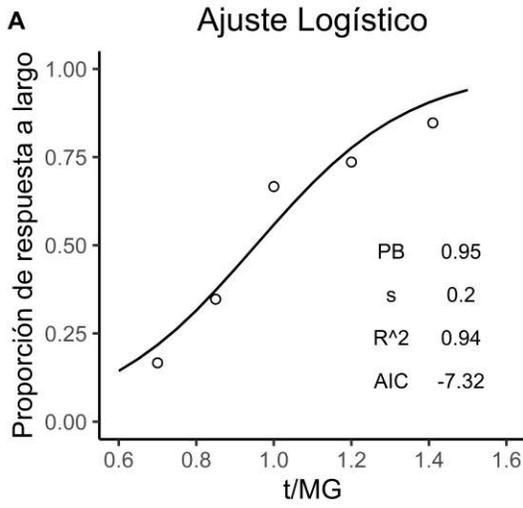
Sesión	Modelo		PB	AIC
	Logístico	Pseudológico		
1	0.11	0.2	0.9	-7.15
2	0.09	0.16	0.99	-2.36
3	0.18	0.31	1.1	-9.74



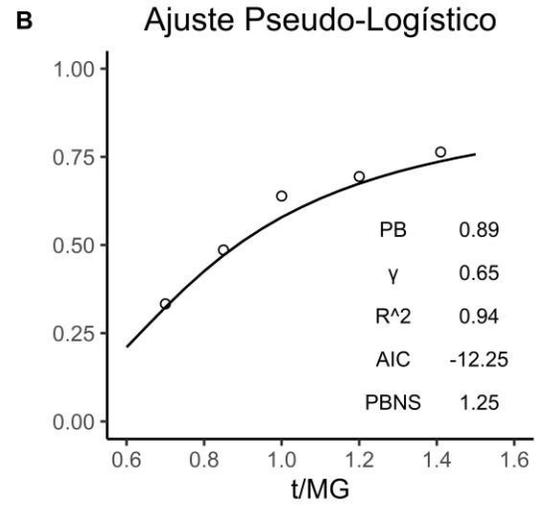
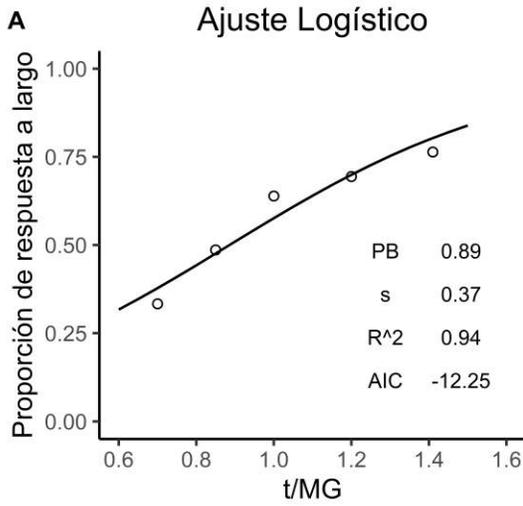
Sesión	Modelo		PB	AIC
	Logístico	Pseudologístico		
1	0.3	0.53	0.84	-3.48
2	0.39	0.68	0.74	-17.93
3	0.25	0.43	0.89	-5.58

Anexo C. Ajustes de las funciones obtenidas a partir del modelo logístico y pseudologístico para ejecuciones Promediadas entre sesiones.

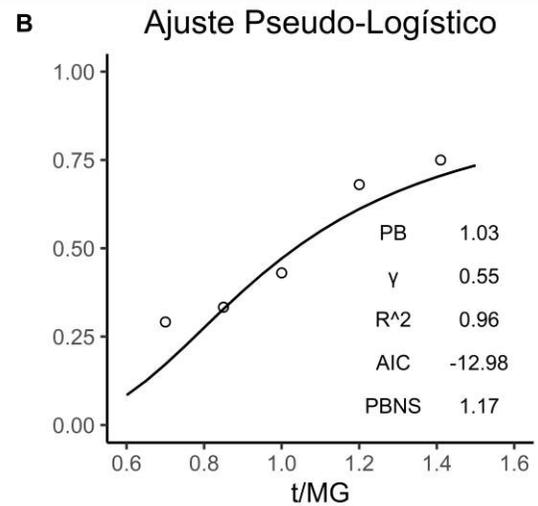
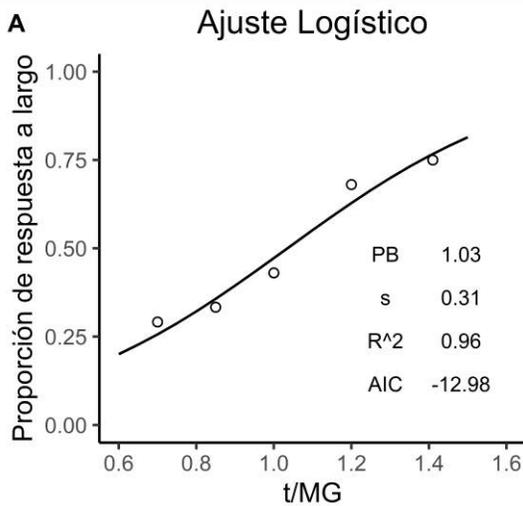
S1



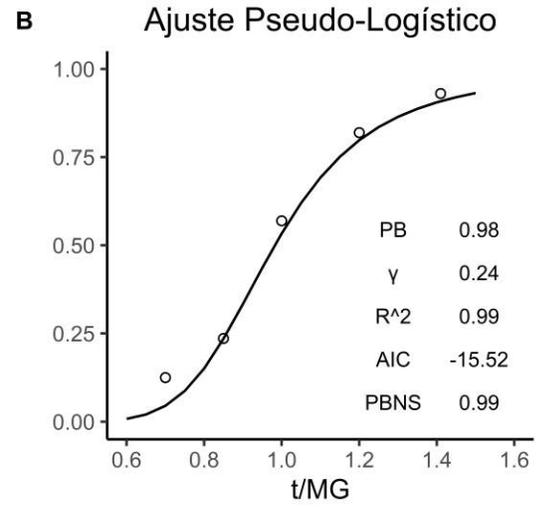
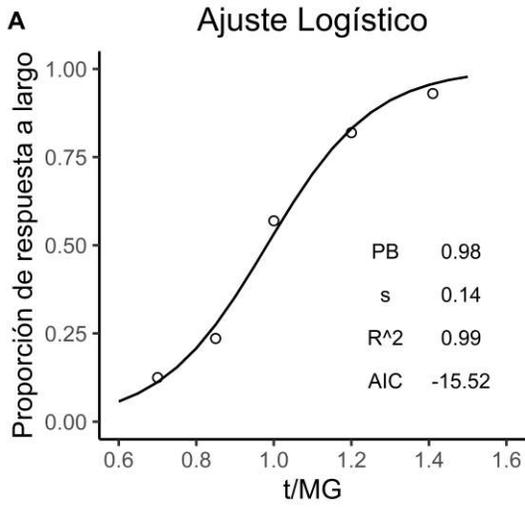
S2



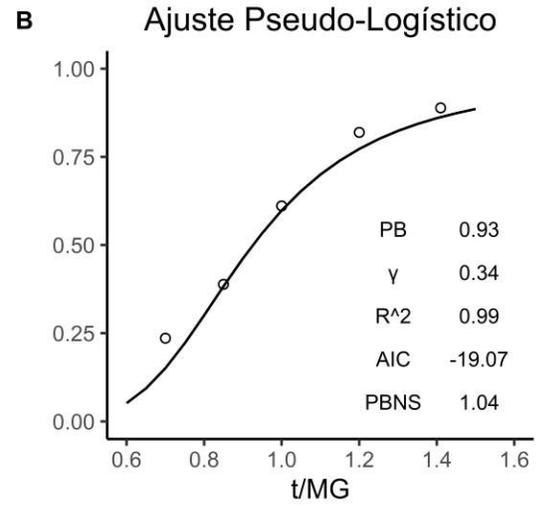
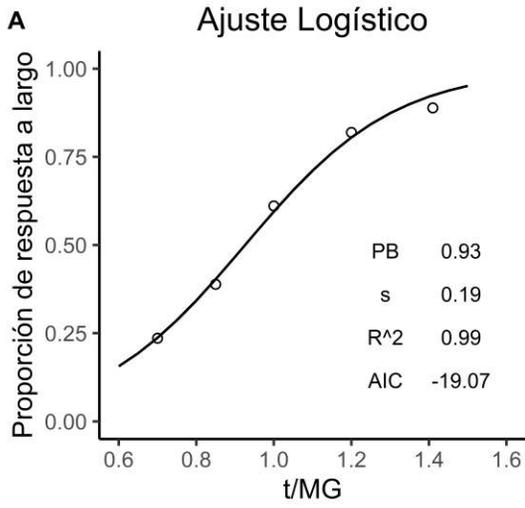
S3



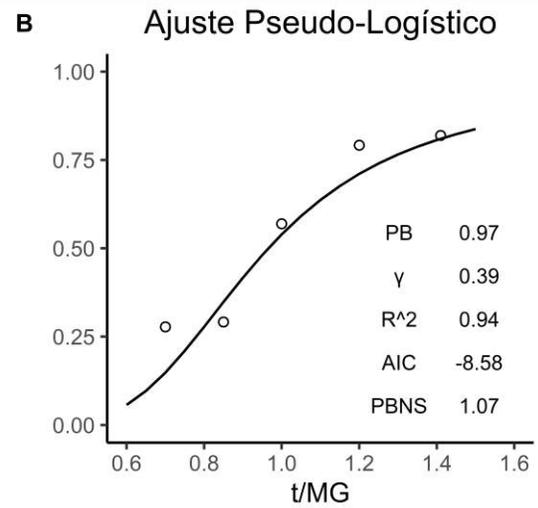
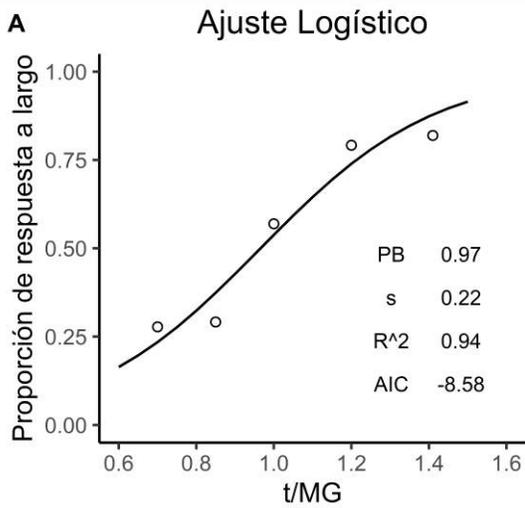
S4



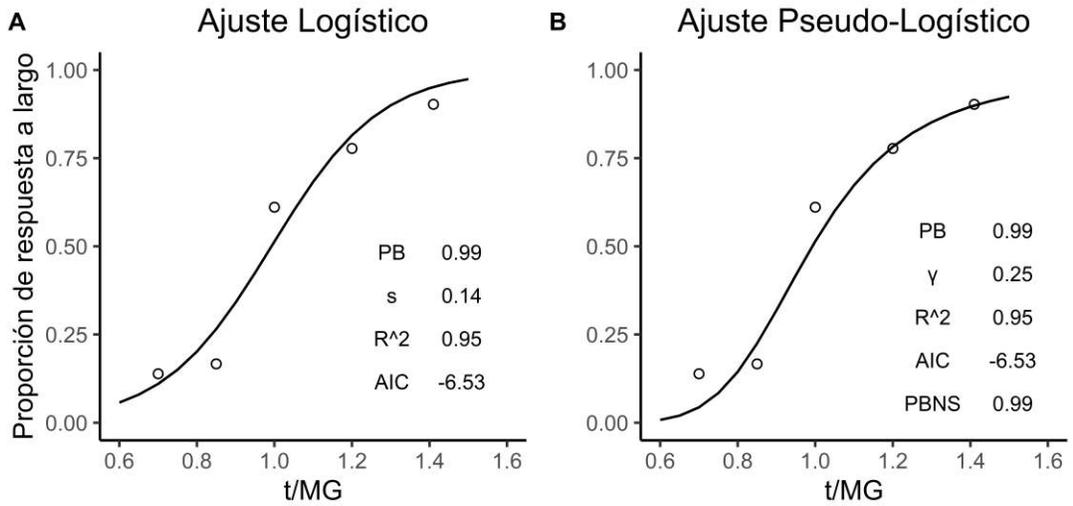
S5



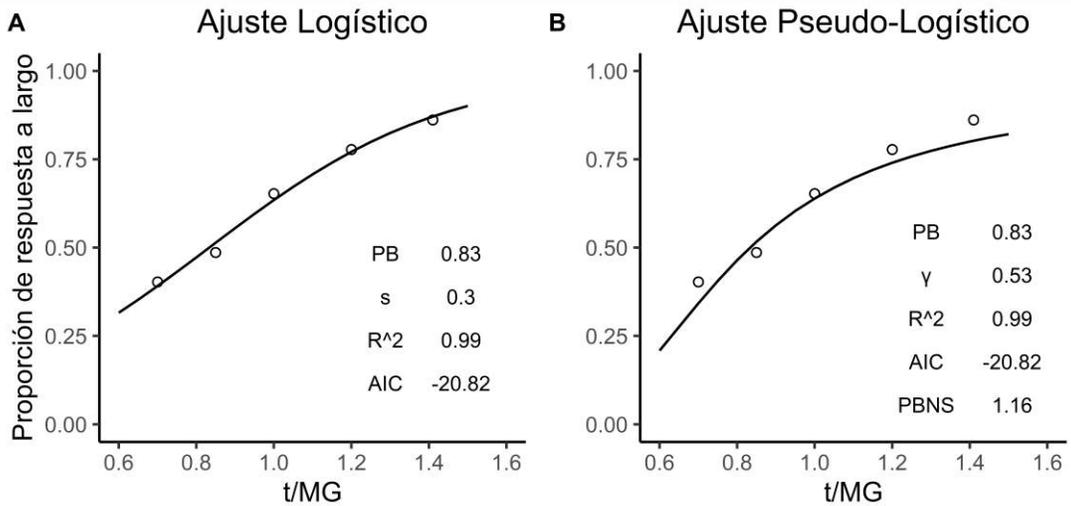
S6



S7

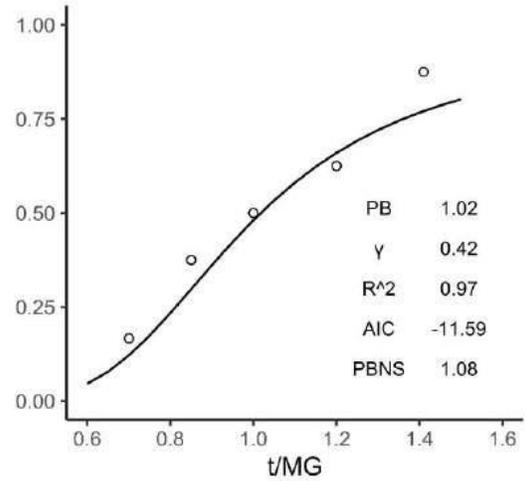
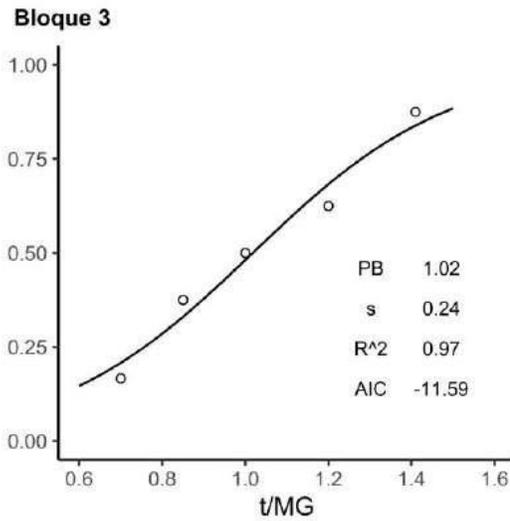
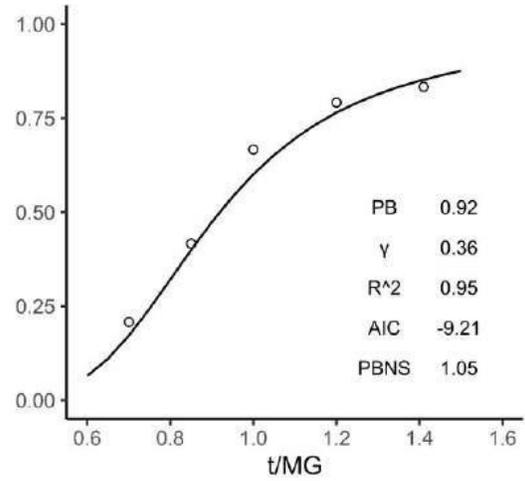
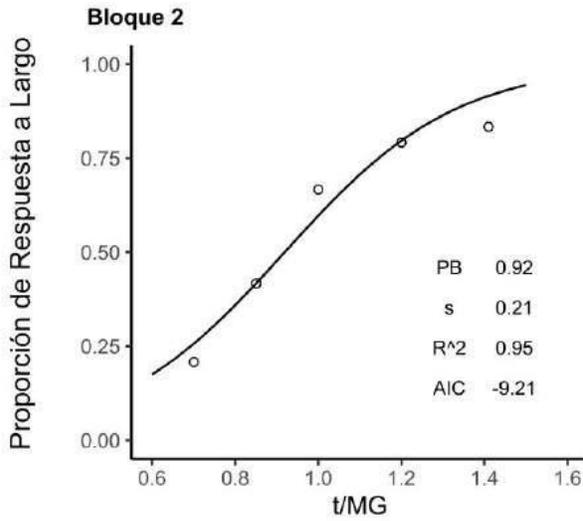
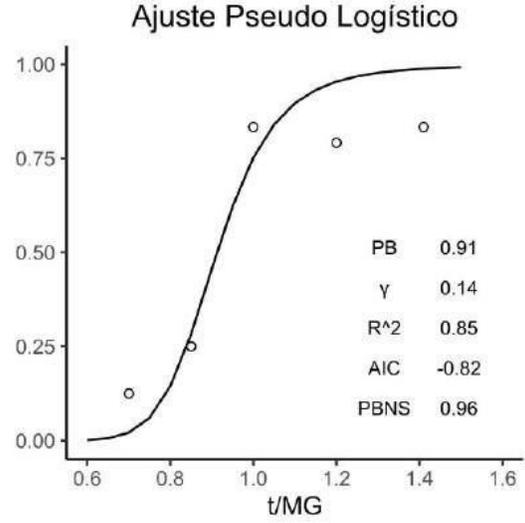
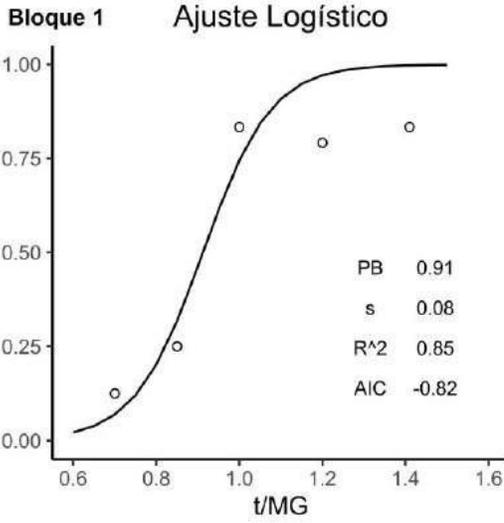


S8



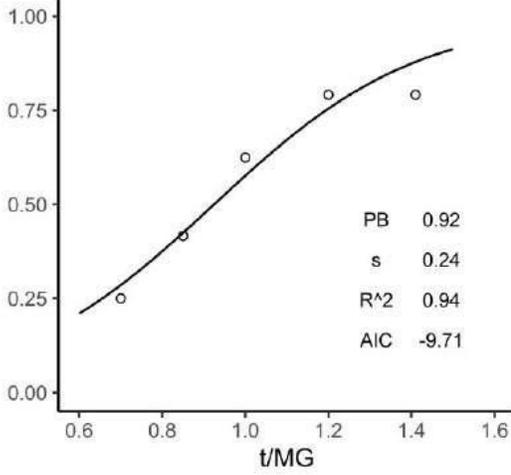
Anexo D. Ajustes de las funciones obtenidas a partir del modelo logístico y pseudologístico por Bloques en ejecución promedio entre sesiones.

S1

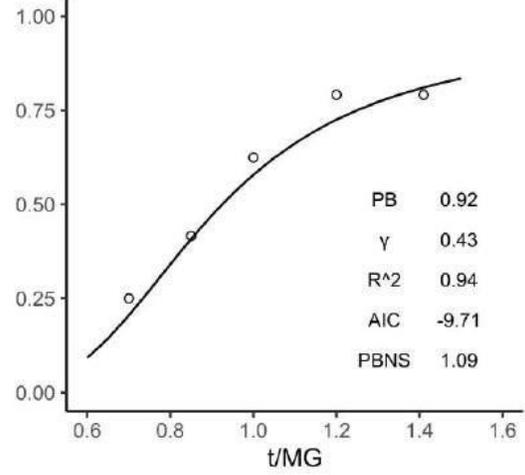


S2

Bloque 1 Ajuste Logístico

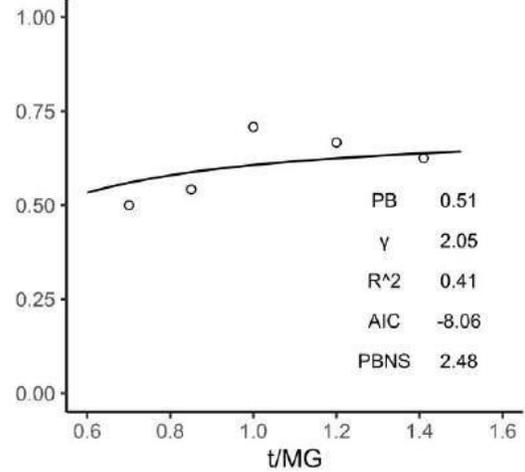
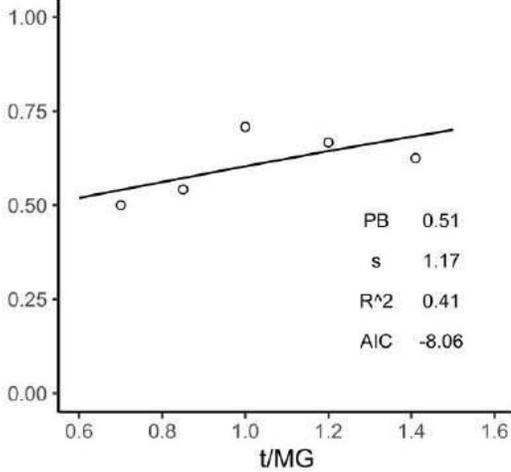


Ajuste Pseudo Logístico

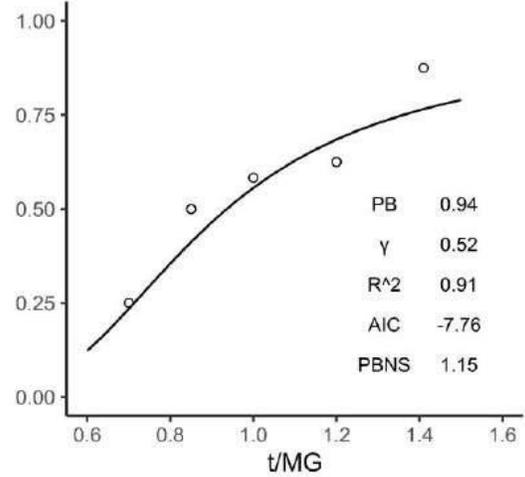
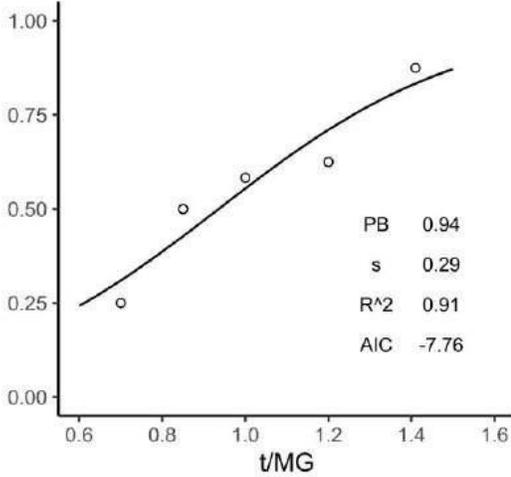


Bloque 2

Proporción de Respuesta a Largo

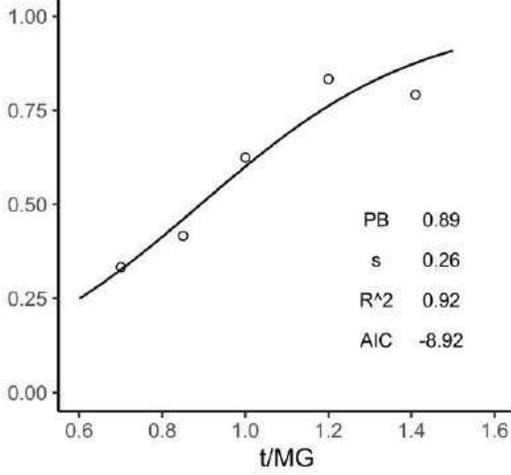


Bloque 3

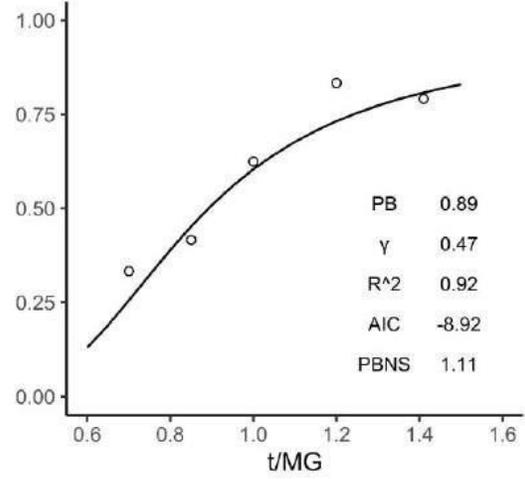


S3

Bloque 1 Ajuste Logístico

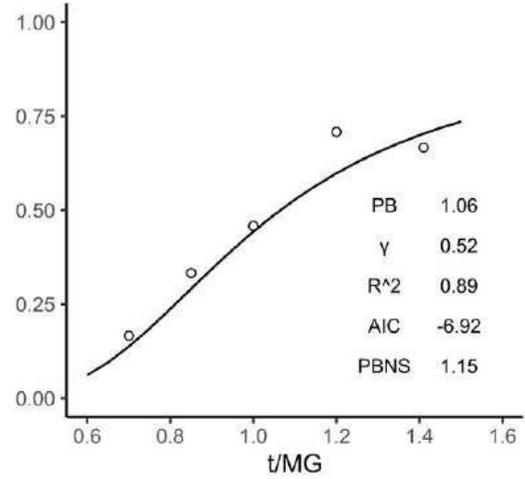
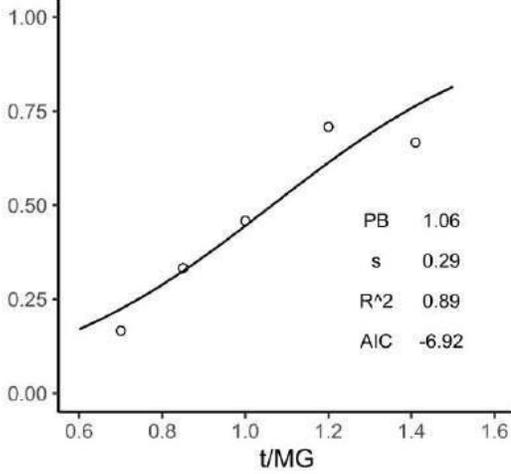


Ajuste Pseudo Logístico

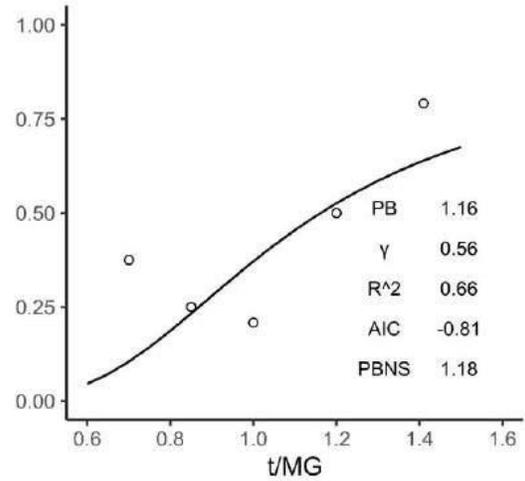
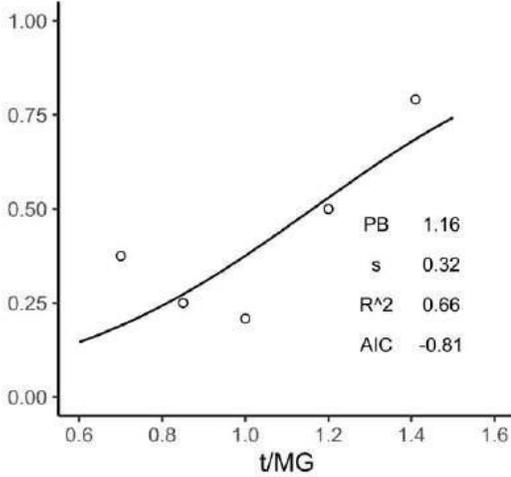


Bloque 2

Proportión de Respuesta a Largo

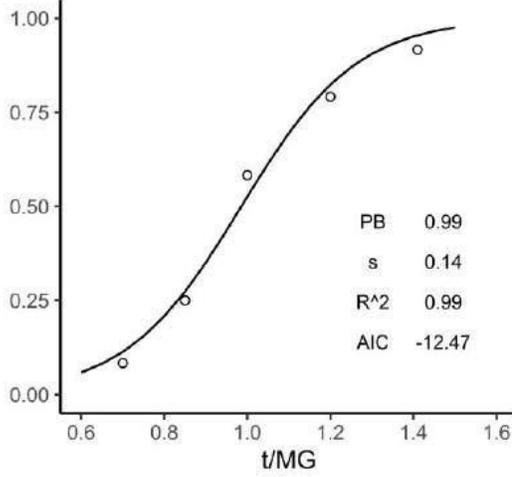


Bloque 3

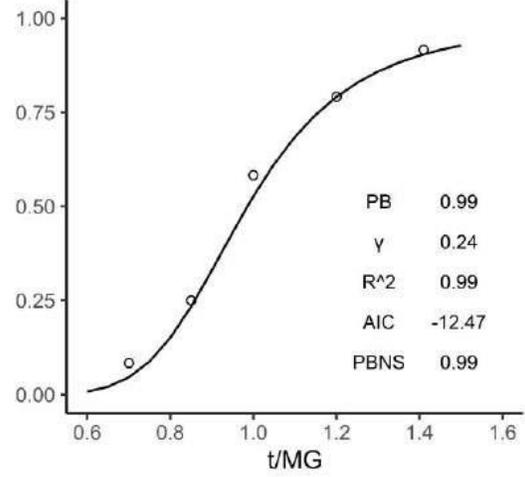


S4

Bloque 1 Ajuste Logístico

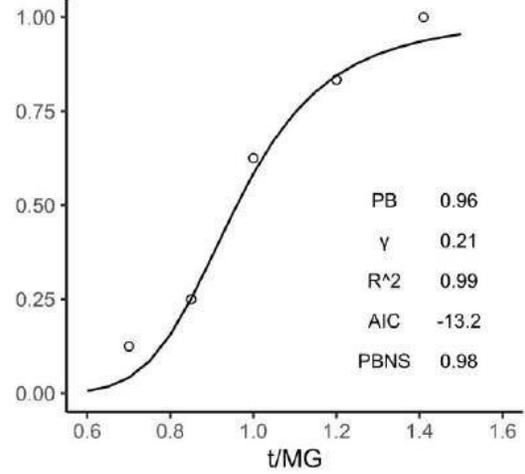
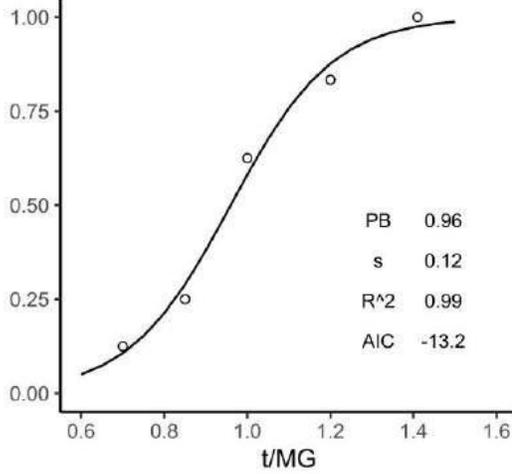


Ajuste Pseudo Logístico

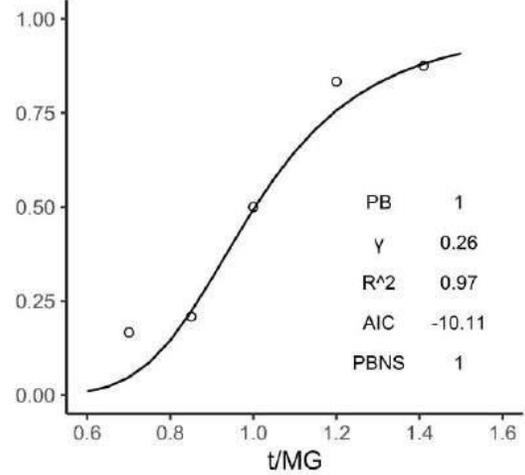
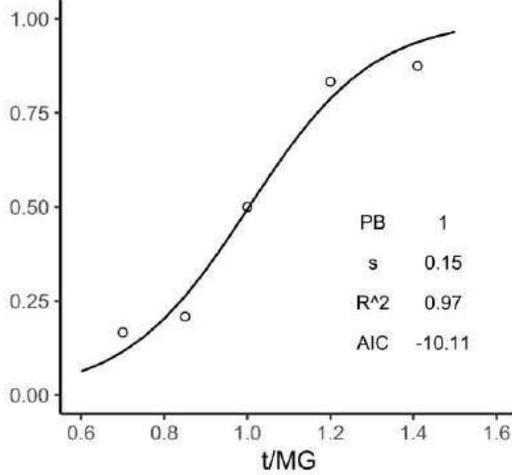


Bloque 2

Proporción de Respuesta a Largo

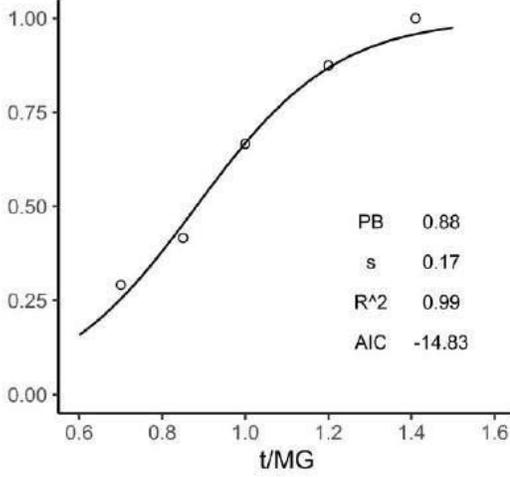


Bloque 3

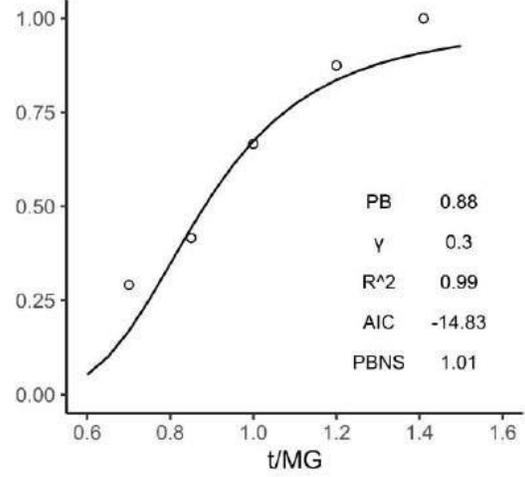


S5

Bloque 1 Ajuste Logístico

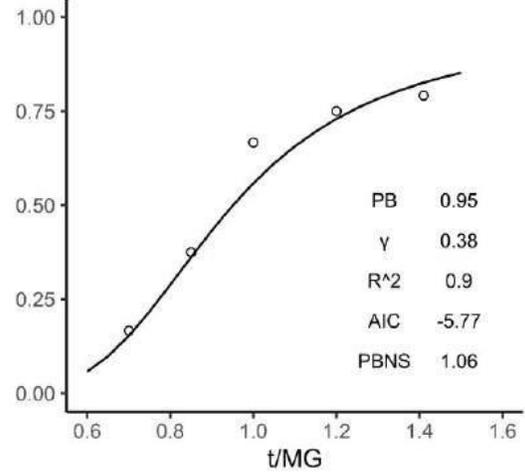
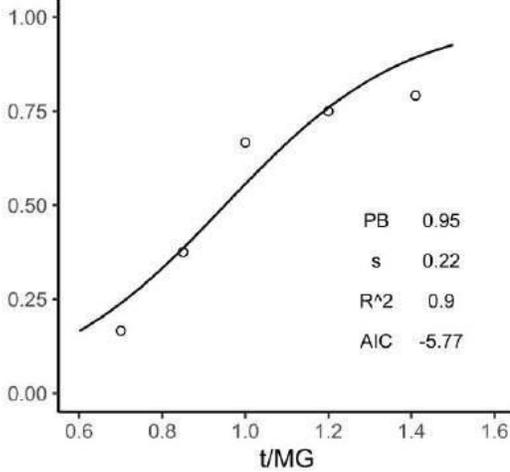


Ajuste Pseudo Logístico

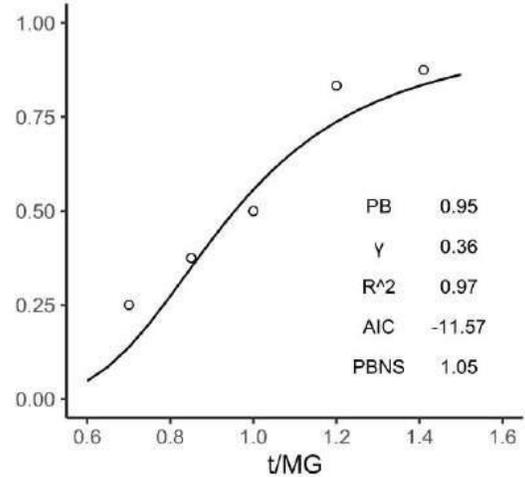
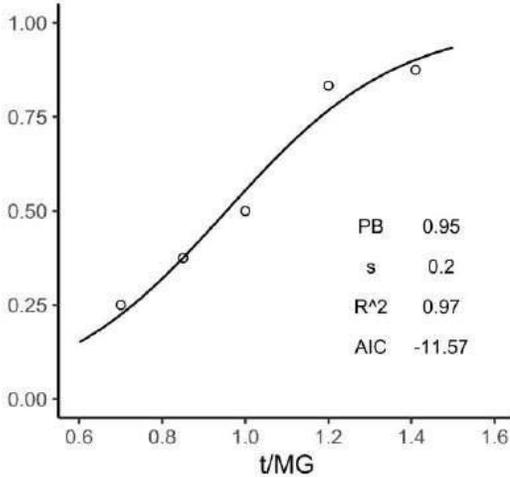


Bloque 2

Proporción de Respuesta a Largo

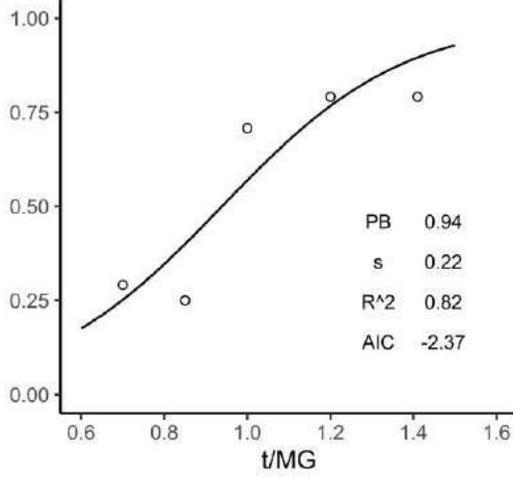


Bloque 3

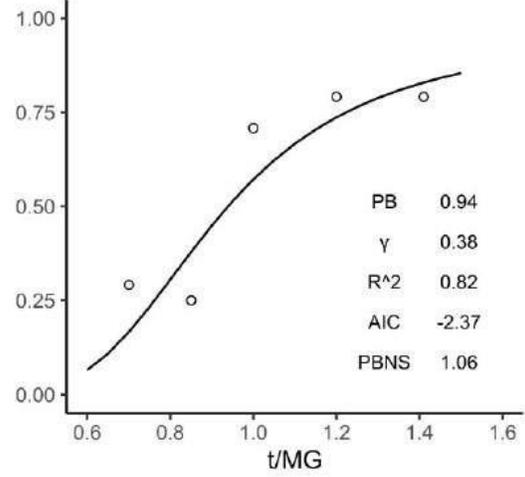


S6

Bloque 1 Ajuste Logístico

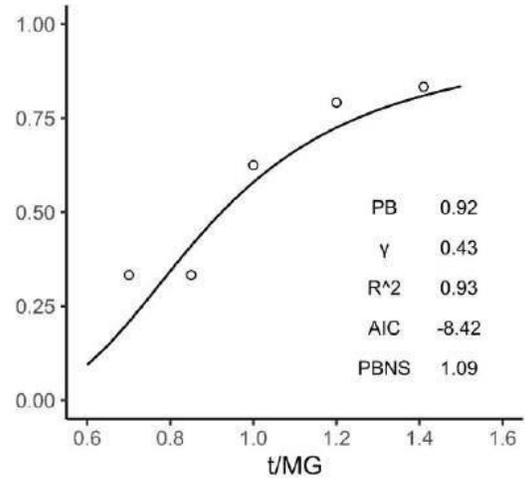
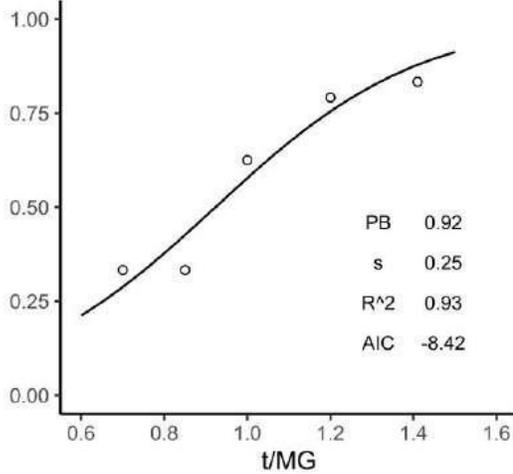


Ajuste Pseudo Logístico

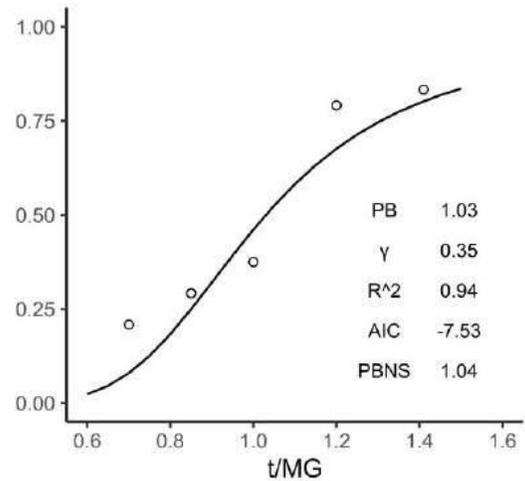
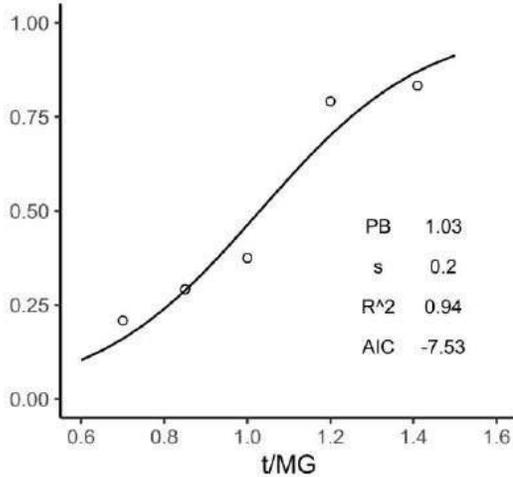


Proporción de Respuesta a Largo

Bloque 2

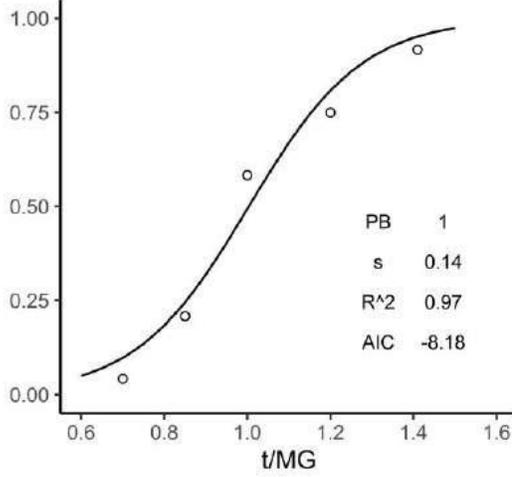


Bloque 3

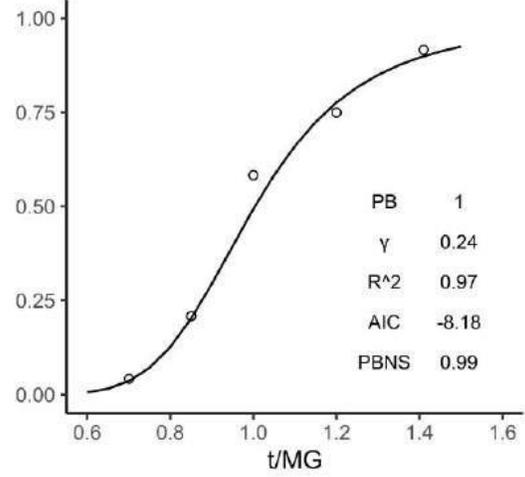


S7

Bloque 1 Ajuste Logístico

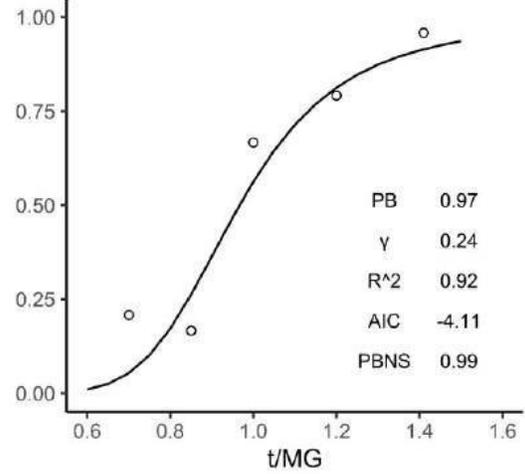
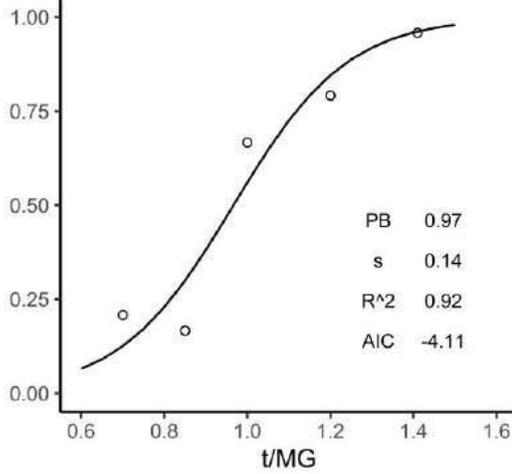


Ajuste Pseudo Logístico

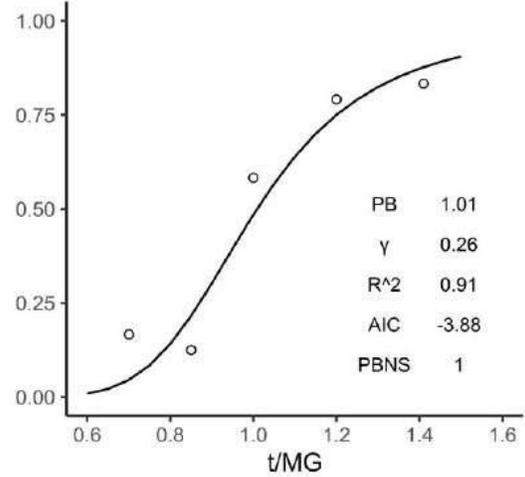
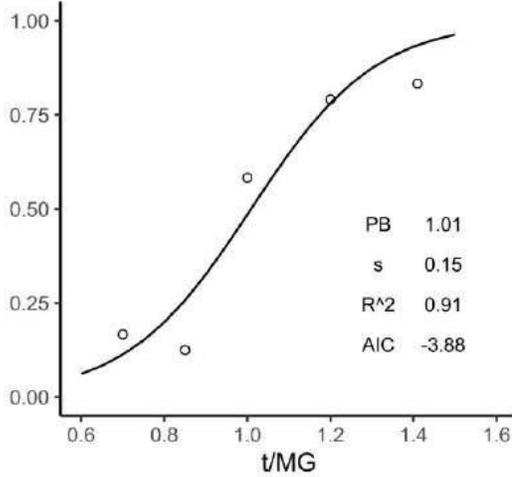


Bloque 2

Proportión de Respuesta a Largo

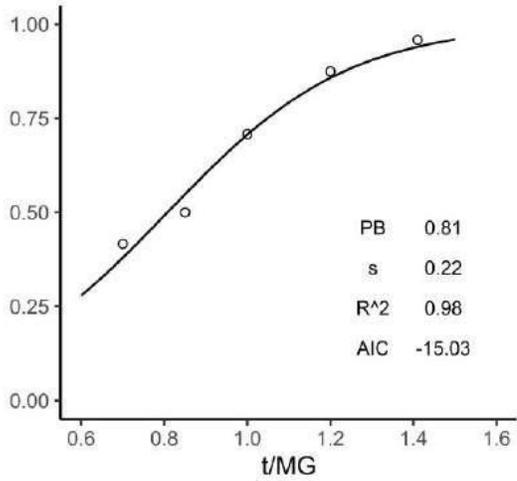


Bloque 3

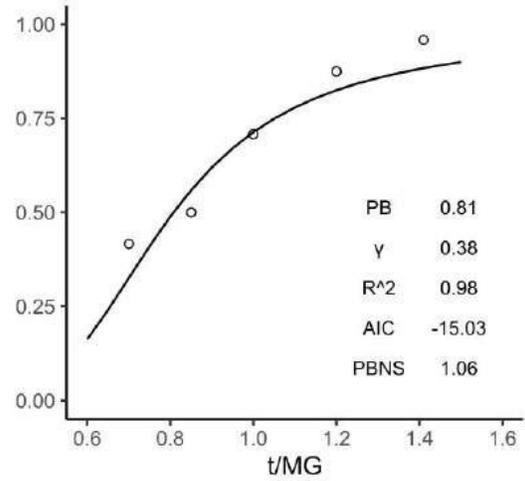


S8

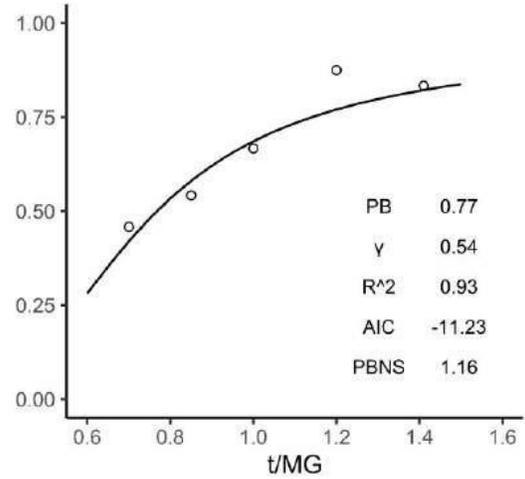
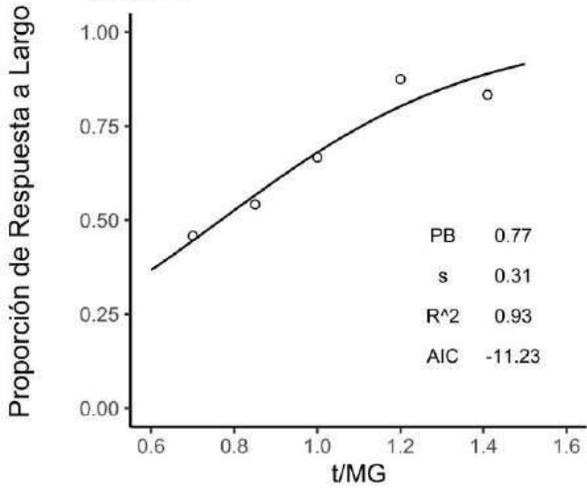
Bloque 1 Ajuste Logístico



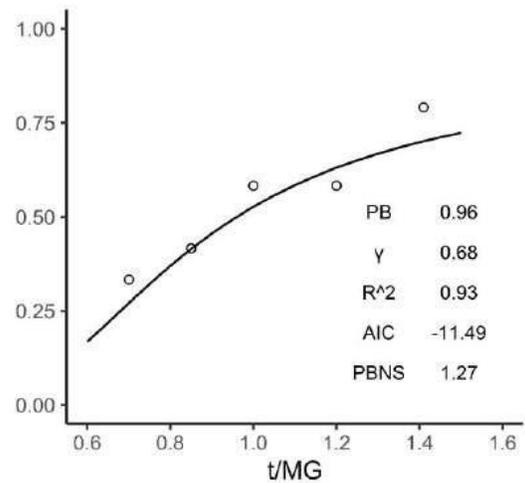
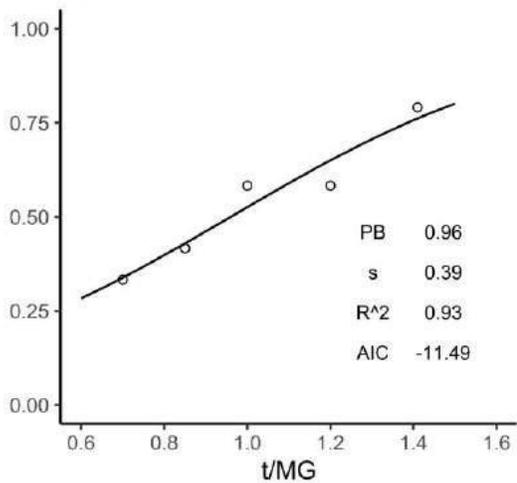
Ajuste Pseudo Logístico



Bloque 2

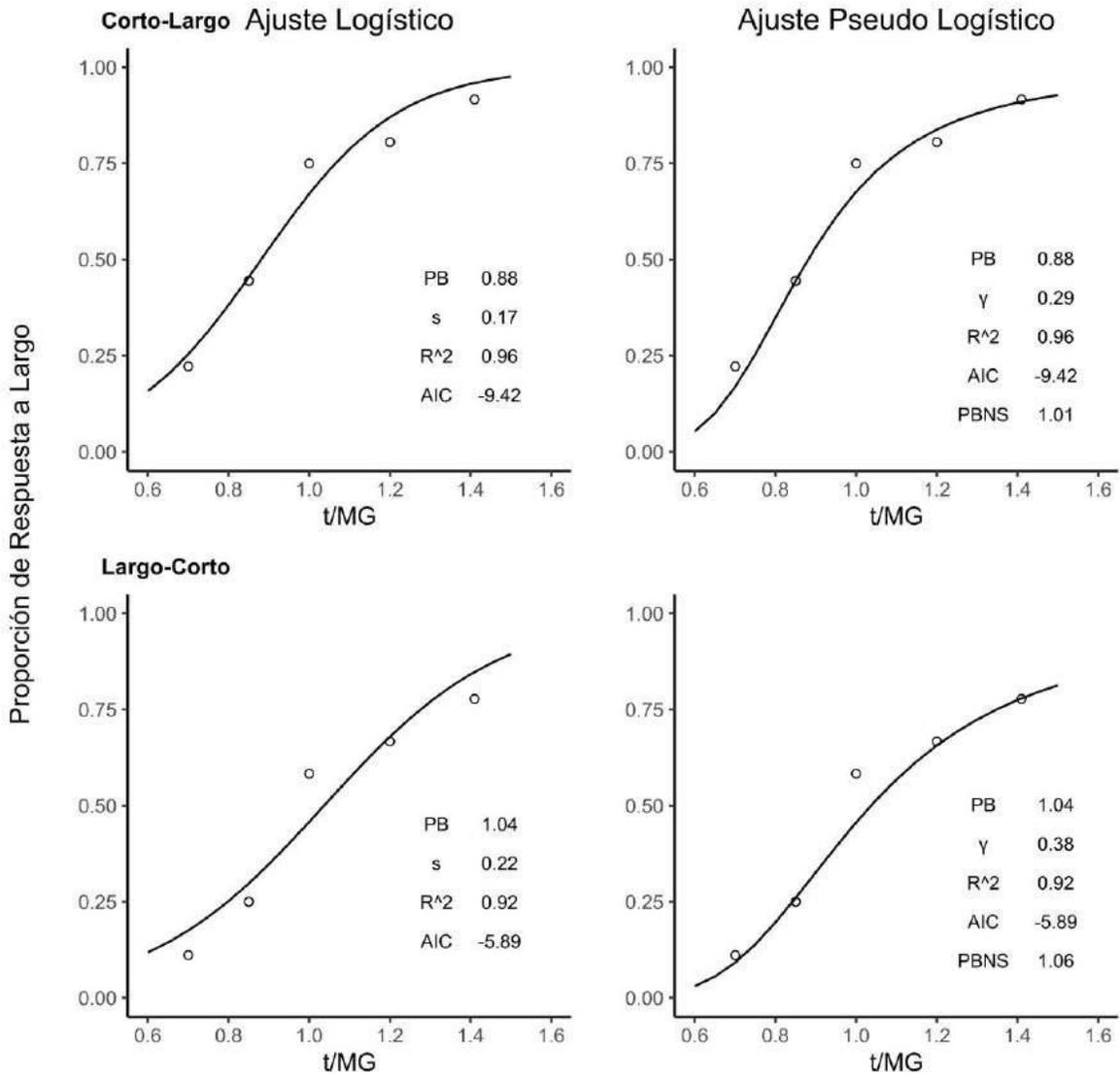


Bloque 3

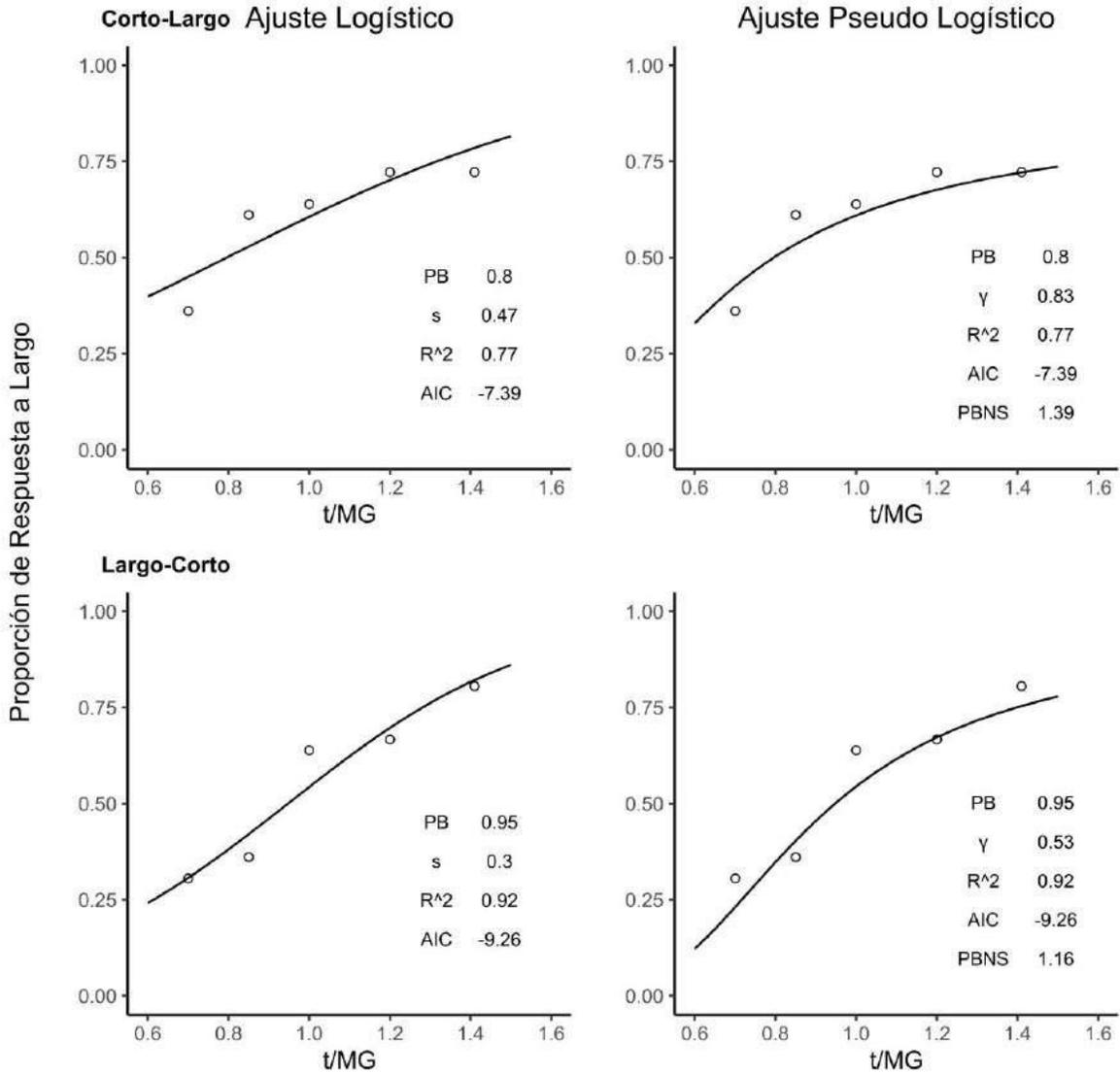


Anexo E. Ajustes de las funciones obtenidas a partir del modelo logístico y pseudologístico por Orden de Presentación en ejecución Promedio entre sesiones.

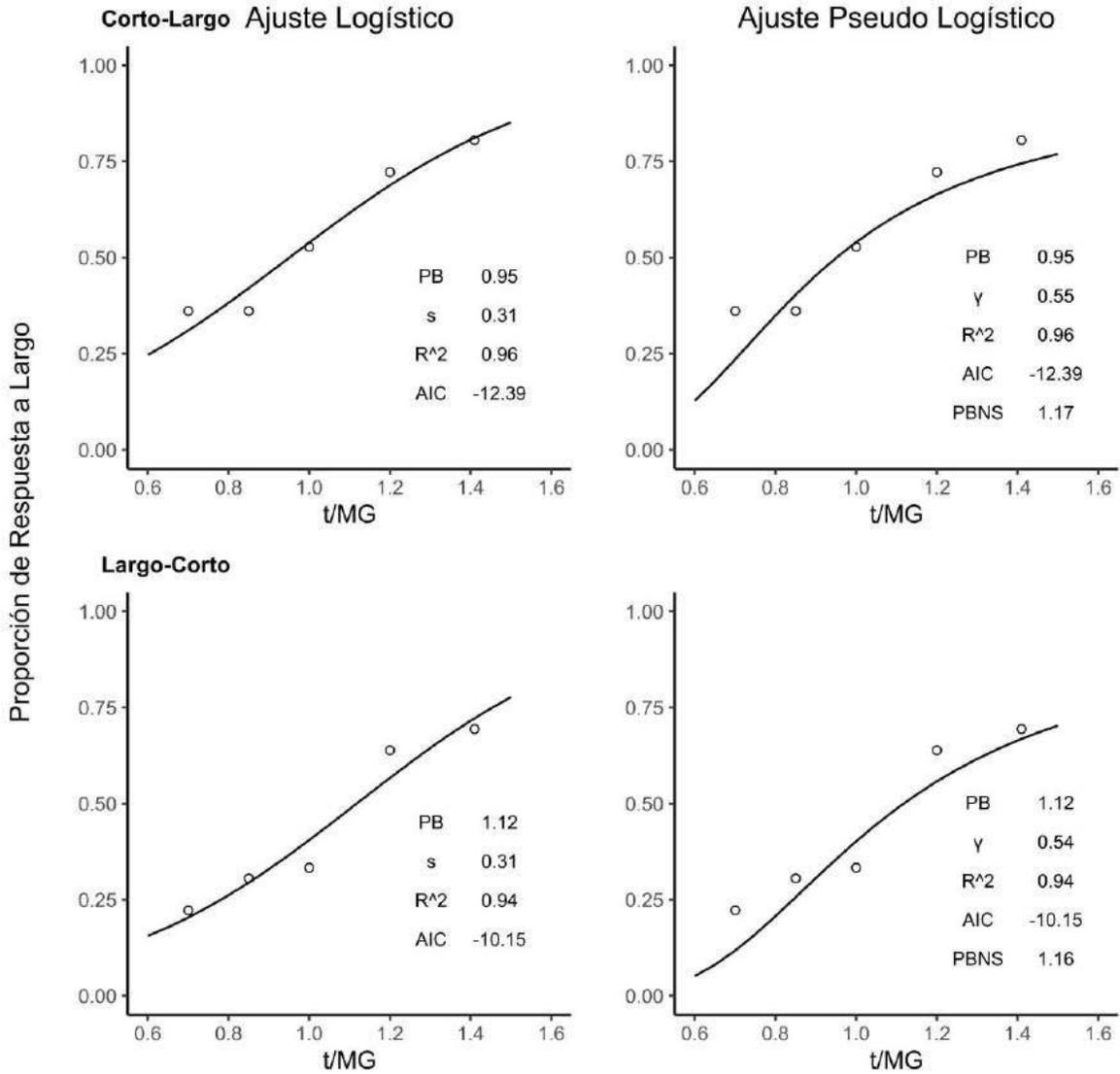
S1



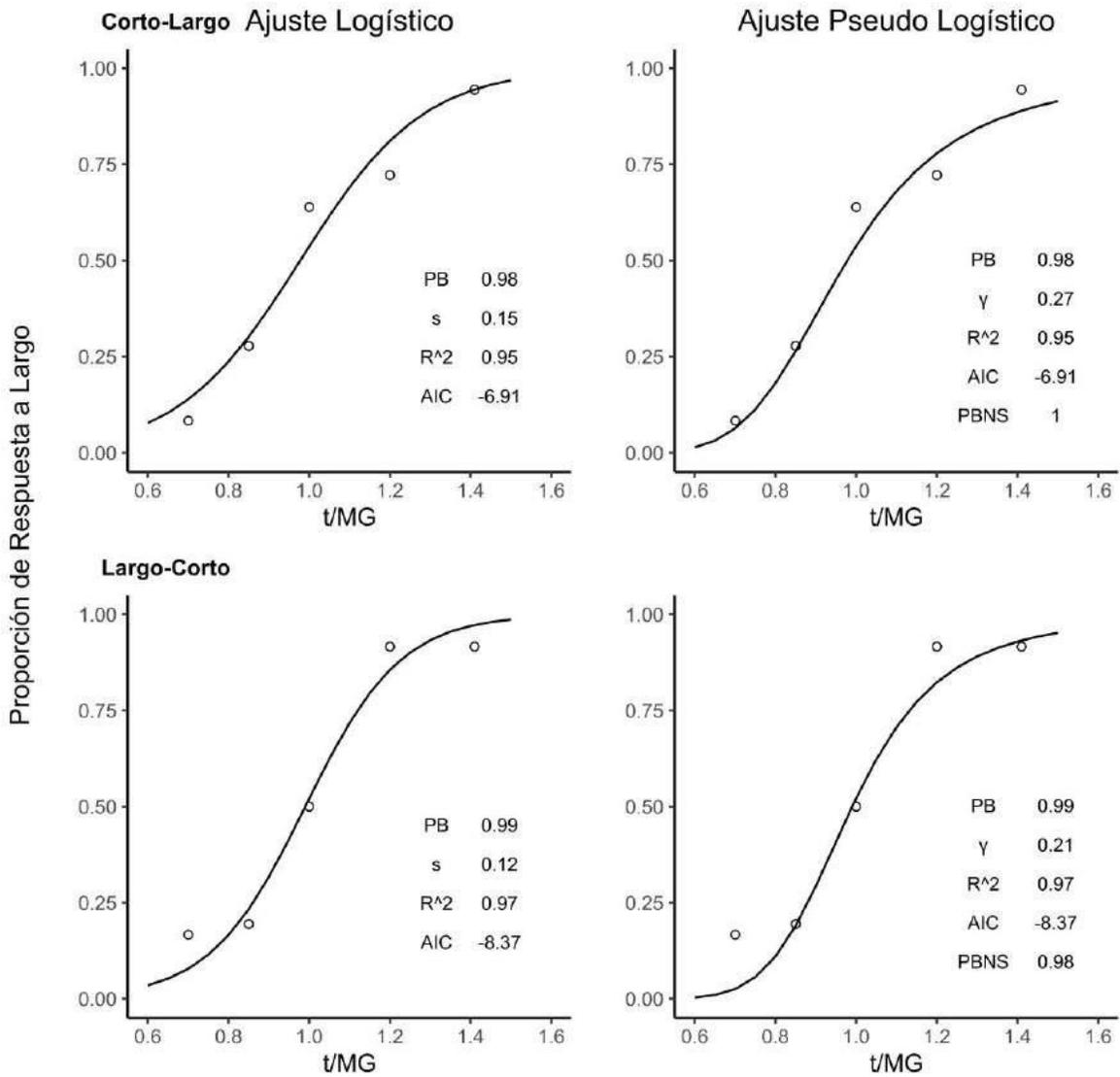
S2



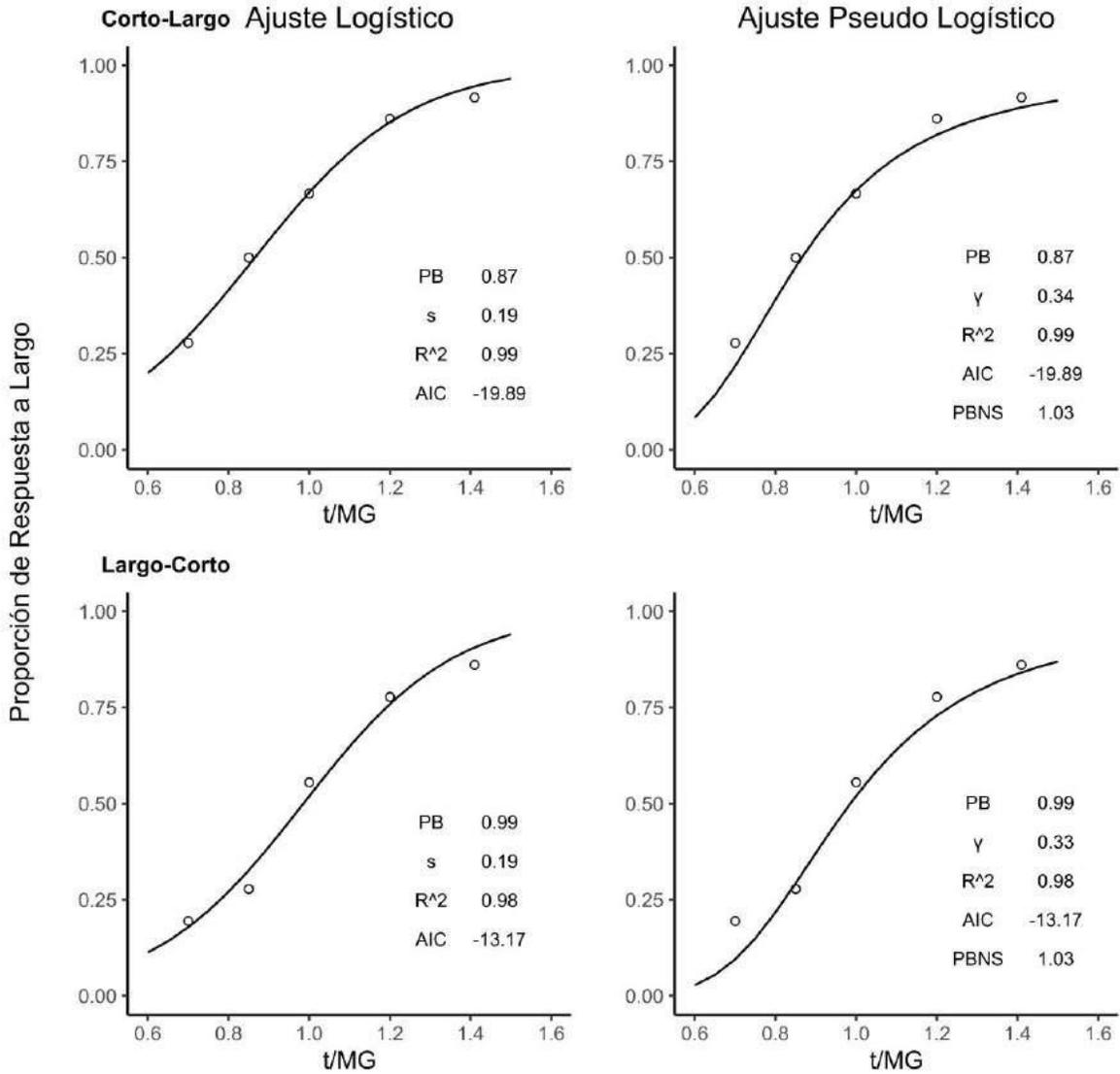
S3



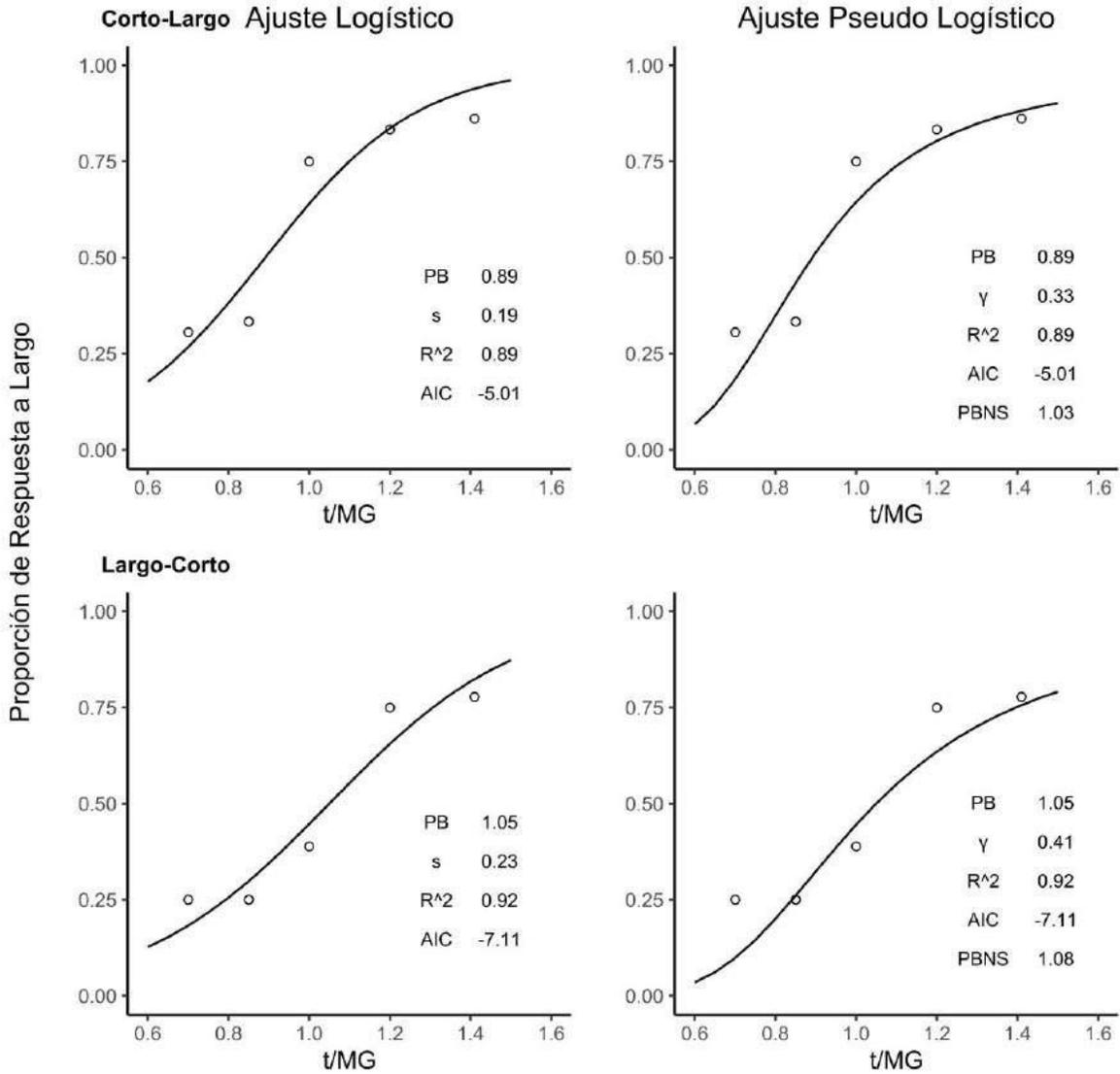
S4



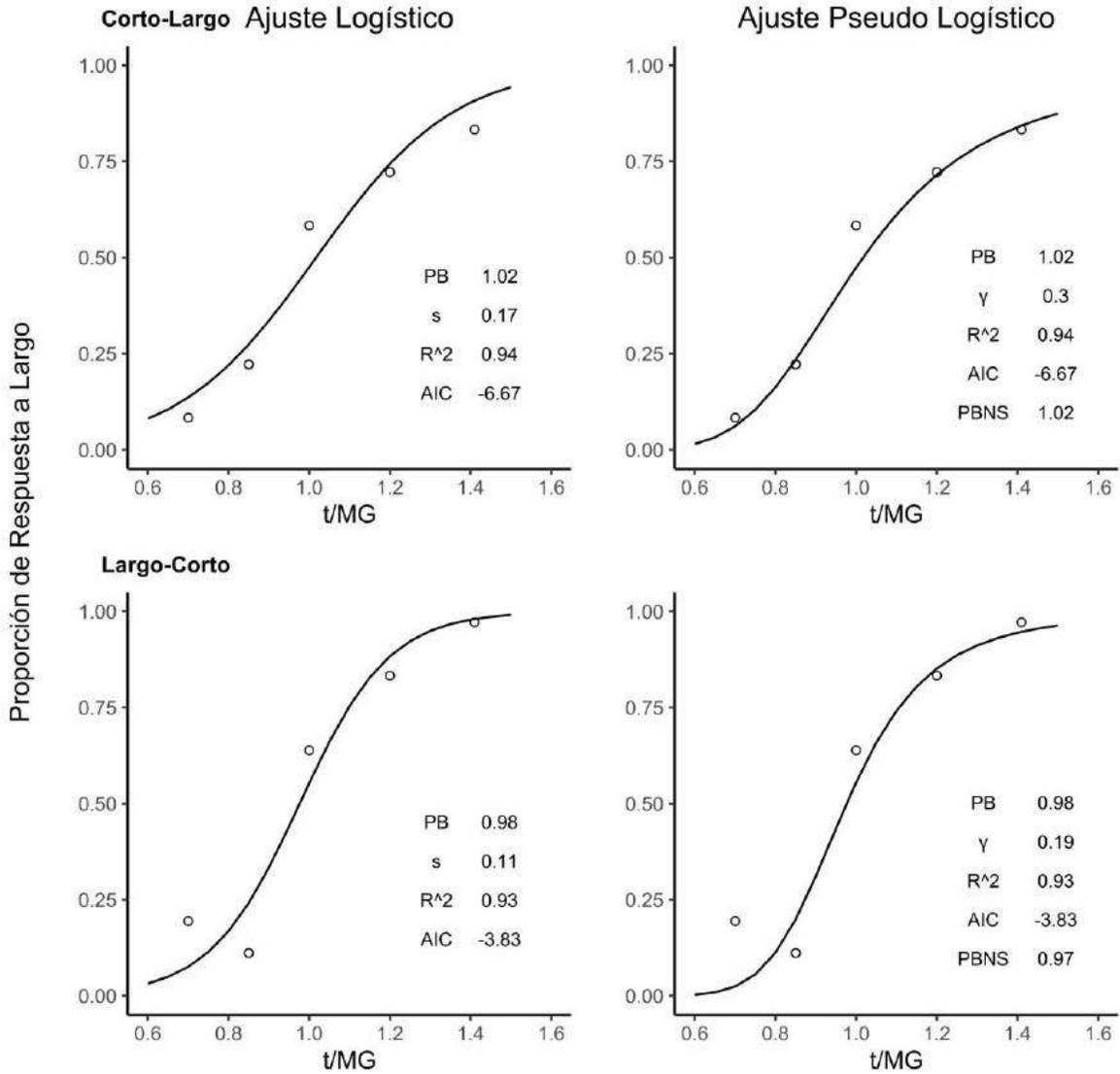
S5



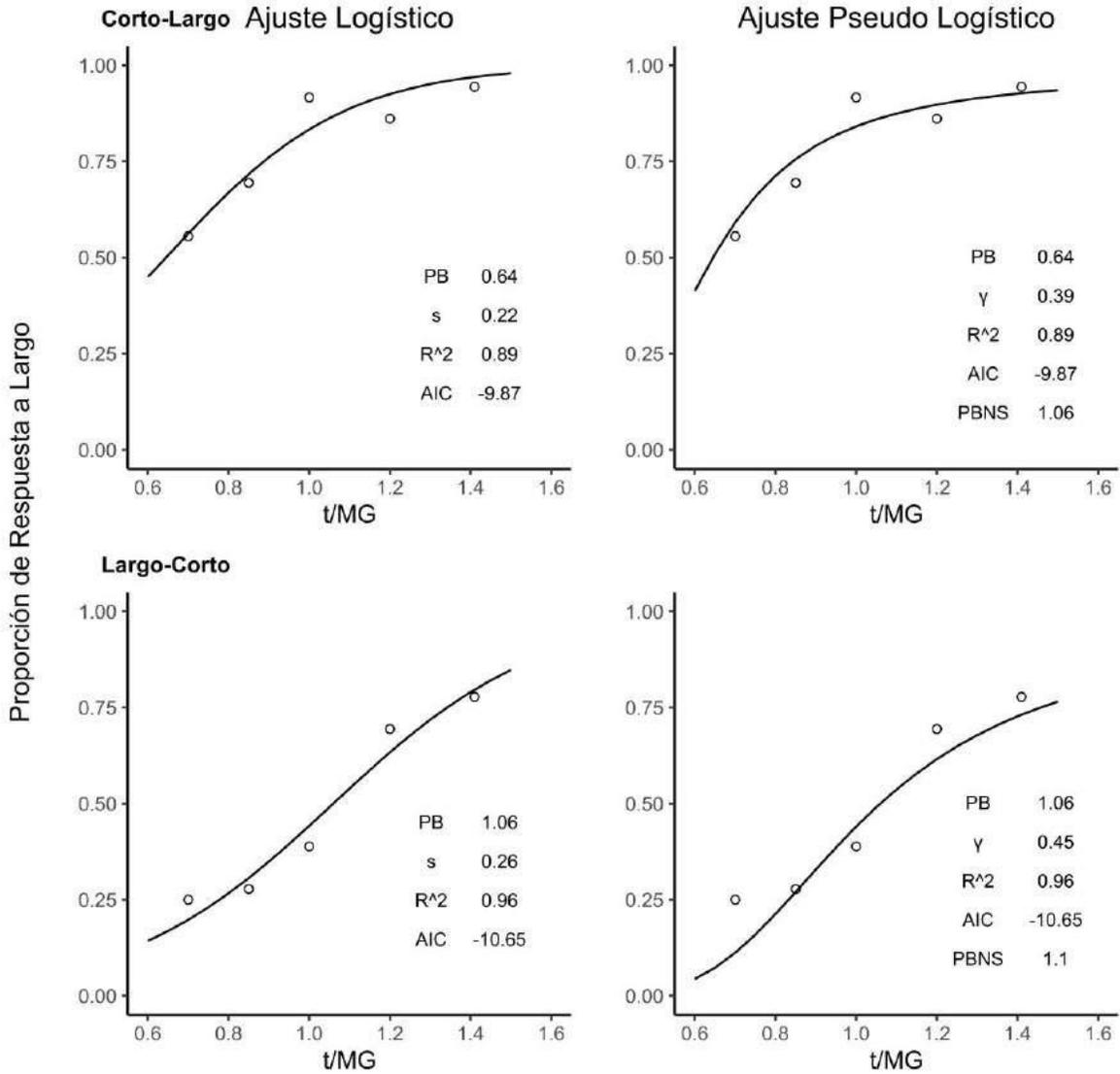
S6



S7



S8



Anexo F. Derivación del Modelo Logístico para ubicar el cambio de concavidad en el Modelo Pseudológico.

Derivando la función Logística.

Recordatorio

Regla de la cadena: Es una fórmula para derivar funciones compuestas, es decir, si $h(x) = (f(g))(x)$, entonces $h(x)' = (f(g))'(x) = (f'(g)(x))(g'(x))$

La función logística a derivar es:

$$P(R_L) = \left[1 + \exp\left(\frac{T_{1/2} - t}{\frac{\sqrt{3}}{\pi}\sigma_t}\right) \right]^{-1}$$

Donde $P(R_L)$ es la proporción de respuesta a largo, $T_{1/2}$ es el punto de bisección, t el tiempo y σ_t es la desviación estándar del tiempo percibido.

Primero reescribimos la función cambiando el exponente de e de la siguiente forma:

$$\frac{T_{1/2} - t}{\frac{\sqrt{3}}{\pi}\sigma_t} = \frac{\pi(T_{1/2} - t)}{\sqrt{3}\sigma_t}$$

Derivamos $P(R_L)$ con respecto a t de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left[1 + \exp\left(\frac{\pi(T_{1/2} - t)}{\sqrt{3}\sigma_t}\right) \right]^{-1}$$

Usando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{dt} \left[1 + \exp\left(\frac{\pi(T_{1/2} - t)}{\sqrt{3}\sigma_t}\right) \right]^{-1} = \frac{d}{du} \frac{1}{u} \frac{du}{dt}$$

donde $u = 1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2} - t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}$ y $\frac{d}{du} \left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}$. Entonces

$$\frac{d}{du} \frac{1}{u} \frac{du}{dt} = -\frac{\frac{d}{dt} \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2} - t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \right)}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2} - t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \right)^2}$$

Ahora derivamos el numerador término a término

$$-\frac{\frac{d}{dt} \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2} - t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \right)}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2} - t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \right)^2} = -\frac{1}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2} - t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \right)^2} \left[\frac{d}{dt} (1) + \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{\pi(T_{1/2} - t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \right) \right]$$

Sabemos que $\frac{d}{dt}(1) = 0$, entonces tenemos

$$= -\frac{\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2}$$

Usamos nuevamente la regla de la cadena y tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right) = \frac{de^u}{du} \frac{du}{dt},$$

donde $u = \frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}$ y $\frac{d}{du}(e^u) = e^u$:

$$= -\frac{1}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \left[e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t} \right) \right) \right]$$

Factorizamos las constantes

$$= -\frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \left[\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left(\frac{d}{dt} (T_{1/2} - t) \right) \right]$$

Nuevamente diferenciamos término a término $\frac{d}{dt}(T_{1/2} - t) = \frac{d}{dt}(T_{1/2}) - \frac{d}{dt}(t)$ de donde $\frac{d}{dt}(T_{1/2}) = 0$, entonces

$$= -\frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \pi \left(-\frac{d}{dt} t \right)}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \right)^2}$$

Finalmente tenemos que la derivada de t es 1 y llegamos a la respuesta:

$$= \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \pi}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \right)^2}$$

Segunda derivada

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \pi}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right)$$

camos la constante $\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t}$ y tenemos

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right) \right)$$

Usamos la regla del producto tomando $u = e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}$ y $v = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2}$

(Regla del producto: $\frac{d}{dx}(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$)

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left[\frac{\frac{d}{dt} \left(e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \right)}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right) \right]$$

Usamos la regla de la cadena, $\frac{d}{dt} \left(e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \right) = \frac{de^u}{du} \frac{du}{dt}$, donde $u = \frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}$ y $\frac{d}{du}(e^u) = e^u$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left[e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t} \right) \right) \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right) \right]$$

Sacamos las constantes

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left[\frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \pi \left(\frac{d}{dt} (T_{1/2}-t) \right)}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right) \right]$$

Resolvemos la derivada de la diferencia como el la primer derivación, es decir, $\frac{d}{dt}(T_{1/2} - t) = \frac{d}{dt}(T_{1/2}) - \frac{d}{dt}(t)$ de donde $\frac{d}{dt}(T_{1/2}) = 0$, entonces

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left[e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right) \right) - \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \pi}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right]$$

Usamos nuevamente la regla de la cadena, esta vez para hacer la derivada

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right) = \frac{d}{du} \frac{1}{u^2} \frac{du}{dt},$$

donde $u = \frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}$ y $\frac{du}{dt} \left(\frac{1}{u^2} \right) = -\frac{2}{u^3}$. Entonces

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left[e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \left(\frac{2 \left(\frac{d}{dt} \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \right) \right)}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3} \right) - \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \pi}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right]$$

Ahora diferenciamos la suma término a término

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left[\frac{2e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3} \left(\frac{d}{dt} \left(e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \right) \right) - \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \pi}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right]$$

Hacemos un reacomodo

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left[\frac{2e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \left(\frac{d}{dt} \left(e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \right) \right)}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3} - \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \pi}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right]$$

Nuevamente ocupamos la regla de la cadena para $\frac{d}{dt} \left(e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \right) = \frac{de^u}{du} \frac{du}{dt}$, donde $u = \frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}$ y $\frac{d}{du}(e^u) = e^u$:

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left[-\frac{2e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\left(1+e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3} e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t} \right) \right) - \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \pi}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1+e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right]$$

Reacomodamos

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left[-\frac{2e^{\frac{2\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t} \right) \right)}{\left(1+e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3} - \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \pi}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1+e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right]$$

Factorizando la constante $\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t}$, y haciendo la derivada término a término, tenemos

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left[-\frac{2e^{\frac{2\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left[\frac{d}{dt} (T_{1/2}) - \frac{d}{dt} (t) \right] \right)}{\left(1+e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3} - \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \pi}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1+e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left[-\frac{2\pi e^{\frac{2\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} (-1)}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1+e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3} - \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \pi}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1+e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \left[\frac{2\pi e^{\frac{2\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1+e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3} - \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \pi}{\sqrt{3}\sigma_t \left(1+e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right]$$

Finalmente simplificamos el resultado:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[1 + \exp \left(\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t} \right) \right]^{-1} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t} \right)^2 \left[\frac{2e^{\frac{2\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\left(1+e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3} - \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\left(1+e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right]$$

Igualamos a cero el resultado de la derivación para encontrar el punto de cambio en la naturaleza:

$$\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t}\right)^2 \left[\frac{2e^{\frac{2\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3} - \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} \right] = 0$$

Dividimos entre $\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma_t}\right)^2$ ambos lados de la igualdad:

$$\frac{2e^{\frac{2\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3} - \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} = 0$$

Despejamos:

$$\frac{2e^{\frac{2\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3} = \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2}$$

$$2e^{\frac{2\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2 = e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3$$

Dividimos entre $e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}$ ambos lados de la igualdad:

$$2e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2 = \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3$$

Despejamos:

$$2e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} = \frac{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^3}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2}$$

$$2e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} = 1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}$$

$$2e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} - e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} = 1$$

$$e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}} = 1$$

Aplicamos logaritmo en ambos lados de la igualdad:

$$\log\left(e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right) = \log(1)$$

$$\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t} = 0$$

$$\pi(T_{1/2}-t) = 0$$

$$T_{1/2} - t = 0$$

Por lo tanto

$$t = T_{1/2}$$

Pasaremos de la función de densidad a la función acumulada, que en este caso será la función del modelo pseudologístico, mediante la integración de la función normal:

$$\int \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\frac{\sqrt{3}\sigma_t}{\pi} \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} dx$$

Sacamos la constante

$$\int \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\frac{\sqrt{3}\sigma_t}{\pi} \left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}\sigma_t}{\pi}} \int \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} dx$$

Hacemos una sustitución con $u = 1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}$, donde la derivada de u es de la siguiente forma $du = -\frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\frac{\sqrt{3}\sigma_t}{\pi}} dx$. Entonces

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{3}\sigma_t}{\pi}} \int \frac{e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}}{\left(1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}\right)^2} dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}\sigma_t}{\pi}} \int -\frac{\frac{\sqrt{3}\sigma_t}{\pi}}{u^2} du$$

Sacamos la constante y aplicamos la regla de la potencia

$$-\frac{\frac{\sqrt{3}\sigma_t}{\pi}}{\frac{\sqrt{3}\sigma_t}{\pi}} \int \frac{1}{u^2} du = - \int \frac{1}{u^2} du = -\left[-\frac{1}{u} + C_0\right]$$

Finalmente multiplicamos el resultado por -1 y sustituimos el valor de u

$$-\left[-\frac{1}{u} + c_0\right] = \frac{1}{1 + e^{\frac{\pi(T_{1/2}-t)}{\sqrt{3}\sigma_t}}} + C$$