UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

PROPIEDADES DE SECUENCIALIDAD Y COMPACIDAD

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ISRAEL RUIZ MENDOZA

DIRECTOR: GERARDO ACOSTA GARCÍA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS DE LA UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO 2022.

Índice General

Introdución

Desde nuestros primeros cursos de Cálculo, aparece la noción de sucesión y de convergencia de una sucesión. Se dice incluso que la definición de función continua, dada en términos de epsilones y deltas, equivale a una más agradable en términos de la preservación de la convergencia de una sucesión (la imagen, bajo la función dada, de una sucesión convergente es otra sucesión convergente). Se dice también que una sucesión convergente, solamente puede converger a un elemento. En cursos posteriores de Cálculo, y también en un primer curso de Topología General, aparecen las nociones de conjunto cerrado y de conjunto compacto e incluso se dice que, en un espacio con buenas propiedades, los compactos son cerrados y que hay situaciones en las que dichos conceptos son el mismo.

El presente trabajo está dividido en seis capítulos. En el Capítulo 1 presentamos las nociones y resultados, propios de la Topología General, que se necesitan para una mejor comprensión. En el Capítulo 2 presentamos propiedades básicas de los espacios secueciales y de los espacios de Fréchet. Además consideramos la relación que existe entre dichos espacios y los llamados espacios 1N que estudiamos en la Sección 1.5. En el Capítulo 3 consideramos dos clases de espacios, los llamados KC en donde ser cerrado y ser compacto coinciden, y los que se conocen como US, en donde las sucesiones que convergen, lo hacen a un solo elemento del espacio. Además de presentar las propiedades fundamentales de dichos espacios, consideramos la llamada compactación de Alexandroff de un espacio topológico. El Capítulo 4 está dedicado a los k-espacios. Primero presentamos propiedades básicas de dichos espacios y, posteriormente su relación con los espacios compactos, los localmente compactos, los secuenciales y los de Fréchet. En el Capítulo 5 presentamos relaciones que hay entre los espacios KC y los k-espacios. A los largo de este trabajo aparecen varios contrajemplos. Por mencionar algunos, existen espacios T_1 que no son KC, espacios KC que no son k-espacios, así como k-espacios que no son compactos. Los ejemplos que cumplen estas propiedades, entre otros más que consieramos, los agrupamos en el Capítulo 6.

Los llamados k-espacios, también conocidos como espacios compactamente generados. Fueron estudiados por W. Hurewicz, la motivación para su estudio profundo surgió en la década de 1950, a partir de las deficiencias bien conocidas de la categoría topológica habitual. Se buscaba ver cuándo el producto cartesiano de identificaciones fuera una identificación, el producto usual de complejos CW sea un complejo CW. En 1962 la primera sugerencia para remediar esto fue restringirse a la subcategoría de espacios Hausdorff compactamente generados. Otra sugerencia en 1964 fue considerar los espacios Hausdorff usuales pero usar funciones continuas en subconjuntos compactos.

A principios del siglo XX surgió un problema de gran importancia, el cual fue determinar condiciones bajo las cuales un espacio topológico es metrizable. Se introdujeron los axiomas de separación con la finalidad de buscar solución a este problema, después de la solución del problema de metrización surgieron nuevos axiomas de separación, entre ellos el axioma KC. Es común cuestionarse acerca de la relación entre el axioma KC y los axiomas de separación más estudiados (T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$ y T_4), una primer respuesta es que el axioma KC se encuentra entre T_1 y T_2, es decir, es un axioma más débil que T_2 pero no tanto como T_1.

La importancia de los espacios KC y los k-espacios radica en el estudio de las propiedades de separación de la extensión de Alexandroff $X^\star = X \cup \{\infty\}$ y más aún, para la compactación unipuntual de un espacio topológico no compacto (su compactación de Alexandroff $A(X^\star)$), es decir, dadas propiedades de separación para un espacio topológico X, es de interés saber si $X^\star$ o bien $A(X^\star)$ (cuando X no es compacto) preservarán estas propiedades, las cambiarán o bien, surgirán otras propiedades de separación distintas. Es así como los espacios KC y los k-espacios surgen al investigar las propiedades necesarias que debe de tener un espacio X para que $A(X^\star)$ sea un espacio T_2.

En este trabajo se estudiarán propiedades hereditarias, topológicas, multiplicativas, factorizables, de preservación y de preservación por preimágenes de funciones, de los espacios KC y los k-espacios.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacio topológico y espacio métrico

En el presente capítulo estudiamos definiciones y resultados que posteriormente serán muy utilizados. Consideramos primero las siguientes definiciones.

Definición 1.1. *Sean X un conjunto y τ una colección de subconjuntos de X. Se dice que τ es una* ***topología*** *sobre X o de X, si satisface las siguientes condiciones:*

1) $X, \emptyset \in \tau$;

2) *dada una colección* $\{A_\alpha \colon \alpha \in I\} \subset \tau$, *se tiene que* $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$;

3) *si* $A, B \in \tau$, *entonces* $A \cap B \in \tau$.

A la pareja (X, τ) la llamamos ***espacio topológico****. A los elementos de τ les decimos* ***conjuntos abiertos de*** *X, o simplemente los* ***abiertos*** *de X. Dado $A \subset X$ se dice que A es un* ***conjunto cerrado de*** *X, o simplemente un* ***cerrado*** *de X, si $X - A \in \tau$.*

Definición 1.2. *Una* ***métrica*** *en un conjunto X, es una función $d \colon X \times X \to [0, \infty)$ tal que, para cada $x, y, z \in X$ se cumplen las siguientes condiciones:*

1) $d(x, y) = d(y, x)$;

2) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$;

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A la pareja (X, d) la llamamos ***espacio métrico****.*

En general, un espacio topológico lo denotamos como la pareja (X, τ), donde X es un conjunto y τ es una topología en X. Cuando no tenemos necesidad de especificar la topología, el espacio topológico se denota simplemente por X. Incluso una oración como "sea X un espacio topológico", significa que X es un conjunto al que se le ha asignado una topología. Las mismas consideraciones hacemos con respecto a la pareja (X, d) y a una oración del tipo "sea X un espacio métrico".

Dado un conjunto X, el símbolo $P(X)$ es el *conjunto potencia* de X, es decir,

$$P(X) = \{A \colon A \subset X\}.$$

Del siguiente ejemplo deducimos que un **conjunto no degenerado**, es decir un conjunto con más de un elemento, posee por lo menos las dos topologías que indicamos.

Ejemplo 1.3. *Sea X un conjunto. Definimos las familias τ_I y τ_D, donde:*

1) $\tau_I = \{X, \emptyset\}$. *Tenemos que τ_I es una topología sobre X y se le conoce como la **topología indiscreta**, o bien como la **topología trivial** de X.*

2) $\tau_D = P(X)$. *Entonces τ_D es una topología sobre X y se le conoce como la **topología discreta**, o bien como la **topología total** de X.*

Los siguientes espacios topológicos servirán de contraejemplo en varias ocasiones.

Ejemplo 1.4. *Sea X un conjunto. Consideremos las siguientes colecciones:*

$$\tau_{CF} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \colon X - A \text{ es finito}\},$$

$$\tau_{CN} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \colon X - A \text{ es numerable}\}.$$

*Entonces τ_{CF} y τ_{CN} son topologías sobre X. La primera se conoce como la **topología de los complementos finitos**, o bien la **topología cofinita** de X. La segunda es la **topología de los complementos numerables**, o bien la **topología conumerable** de X.*

Notemos que $\tau_{CF} \subset \tau_{CN}$. Además, X es finito si y sólo si $\tau_D = \tau_{CF}$ y X es numerable si y sólo si $\tau_D = \tau_{CN}$. Por estas razones, cuando a un conjunto X le damos la topología cofinita, pensamos que X es infinito, y cuando le asignamos la topología conumerable, suponemos que X es no numerable.

En el siguiente ejemplo vemos la forma de darle una topología a un conjunto que posee una métrica. Posteriormente presentamos la topología usual de la recta real $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.5. *Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $x \in X$ y toda $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$, definimos la **bola con centro en** x **y radio** r como:*

$$B_d(x,r) = \{y \in X\colon d(x,y) < r\}.$$

Consideremos ahora la familia

$$\tau_d = \{A \subset X\colon \textit{para cada } x \in A \textit{ existe } r > 0 \textit{ tal que } B_d(x,r) \subset A\}.$$

*Entonces τ_d es una topología sobre X tal que $B_d(x,r) \in \tau_d$, para cada $x \in X$ y toda $r > 0$. A τ_d se le llama **la topología inducida en** X por la métrica d.*

Ejemplo 1.6. *Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$, con d la métrica euclidiana sobre $\mathbb{R}$, es decir,*

$$d(x,y) = |x - y|, \quad \textit{para cada } x, y \in \mathbb{R}.$$

*La topología τ_d, inducida en $\mathbb{R}$ por la métrica d, se conoce como la **topología usual** sobre $\mathbb{R}$ y, como es más común, la denotamos por τ_u.*

Notemos que a $\mathbb{R}$ le podemos dar cualquiera de las topologías que hemos definido hasta el momento: la indiscreta, la discreta, la cofinita, la conumerable y la usual. A partir de ahora, si en $\mathbb{R}$ no especificamos una topología, suponemos que posee la usual. Consideremos ahora la siguiente definición.

Definición 1.7. *Un espacio topológico (X, τ) es **metrizable** si existe una métrica d sobre X tal que $\tau = \tau_d$.*

Uno de los problemas más importantes de la Topología consiste en determinar si un espacio topológico dado es metrizable o no. Muchas de las propiedades que se definen, en particular las que consideramos en el presente trabajo, dan respuesta parcial a este problema.

A lo largo del presente capítulo mostraremos propiedades del siguiente espacio topológico. Para tomar un elemento que no pertenece a un espacio topológico X, podemos definir $X = \infty$ y recordemos que una consecuencia del axioma de fundación de teoría de conjuntos es que para todo conjunto X, $X \notin X$.

Ejemplo 1.8 (La Extensión Cerrada). *Dados un espacio topológico (X, τ), con $X \neq \emptyset$, y un elemento $\infty \notin X$, definimos $X^* = X \cup \{\infty\}$ y*

$$\tau_e = \{\emptyset\} \cup \{V \cup \{\infty\}\colon V \in \tau\}.$$

*El fácil ver que τ_e es una topología sobre X^*. Al espacio topológico (X^*, τ_e) se le llama la **extensión cerrada** de (X, τ).*

No es difícil probar que los cerrados de (X^*, τ_e), que son distintos de X^*, coinciden con los cerrados de (X, τ). Por esta razón el espacio (X^*, τ_e) recibe el nombre que le hemos dado: al agregarle un elemento a X, lo estamos extendiendo sin alterar los conjuntos cerrados. Veamos otras propiedades de este espacio. Es claro que $\{\infty\}$ es abierto en X^*. Ahora bien, si F es un subconjunto cerrado de X^* tal que $\infty \in F$, entonces $X^* - F \in \tau_e$. Luego existe $V \in \tau$ tal que $X^* - F = V \cup \{\infty\}$ o bien $X^* - F = \emptyset$. El primer caso implica que $\infty \notin F$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $X^* - F = \emptyset$, de donde $F = X^*$. Esto prueba que X^* es el único subconjunto cerrado de (X^*, τ_e) que tiene a ∞. En particular, $\{\infty\}$ no es cerrado en (X^*, τ_e).

Si X tiene la topología indiscreta τ_I, entonces τ_e no es la topología indiscreta, pues

$$\tau_e = \{\emptyset, \emptyset \cup \{\infty\}, X \cup \{\infty\}\} = \{\emptyset, \{\infty\}, X^*\}.$$

1.2. Funciones

Ahora presentamos una serie de resultados sobre funciones definidas entre espacios topológicos, o bien entre conjuntos. Si (X, τ_1) y (Y, τ_2) son espacios topológicos, la notación $f\colon (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$, indica que f es una función de X en Y, en donde en X consideramos la topología τ_1 y en Y la topología τ_2. Si no requerimos hacer mención explícita de dichas topologías, o bien si tanto X como Y son conjuntos sin topología, entonces la notación clásica $f\colon X \to Y$ indica que f es una función de X en Y. Si además $A \subset X$ y $B \subset Y$, entonces:

$$f(A) = \{f(a)\colon a \in A\} \quad \text{y} \quad f^{-1}(B) = \{x \in X\colon f(x) \in B\}$$

son, respectivamente, la **imagen directa** de A y la **imagen inversa** de B bajo f.

Definición 1.9. *Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) dos espacios topológicos y $f\colon (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$. Decimos que*

1) *f es una **función continua** si para todo $U \in \tau_2$ se cumple que $f^{-1}(V) \in \tau_1$;*

2) *f es una **función abierta** si para todo $U \in \tau_1$ sucede que $f(U) \in \tau_2$;*

3) *f es una **función cerrada** si para todo $C \subset X$ cerrado en X, se cumple que $f(C)$ es cerrado en Y;*

4) *f es un **homeomorfismo** si f es una función biyectiva, continua y la función inversa, $f^{-1}\colon (Y, \tau_2) \to (X, \tau_1)$, de f es continua;*

5) *dos espacios topológicos son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo entre ellos.*

Ejemplo 1.10. *Consideremos la extensión cerrada (X^*, τ_e) del espacio (X, τ), definida en el* Ejemplo 1.8. *Sea $i\colon (X, \tau) \to (X^*, \tau_e)$ la función inclusión. Entonces $i(x) = x$ para cada $x \in X$. Si $W \in \tau_e$, entonces $W = \emptyset$ o bien $W = V \cup \{\infty\}$, donde $V \in \tau$. En el primer caso $i^{-1}(W) = \emptyset$ y, en el segundo, $i^{-1}(W) = V$. En cualquier situación tenemos que $i^{-1}(W) \in \tau$. Esto muestra que i es continua. Notemos que $X \in \tau$ y que $i(X) = X \notin \tau_e$, así que i no es* *abierta. Como los cerrados de* (X^*, τ_e)*, que son distintos de* X^**, coinciden con los cerrados de* (X, τ)*, resulta que* i *es cerrada. Dado que* i *no es suprayectiva, tenemos que* i *no es un homeomorfismo.*

La noción de continuidad puede darse en términos locales. Si (X, τ_1) y (Y, τ_2) son dos espacios topológicos y $f\colon (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$, decimos que f es **continua en** un punto $x \in X$, si para cada $V \in \tau_2$ con $f(x) \in V$, existe $U \in \tau_1$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subset V$. En [21, Teorema 18.1, pág. 104] se prueba que f es continua en cada punto de X si y sólo si f es continua.

En el siguiente resultado, que se utilizará con bastante frecuencia, incluso sin hacer referencia explícita al mismo, se enlistan algunas propiedades generales de la imagen directa y de la imagen inversa de una función. Para su demostración se puede ver [8, Teoremas 6.3 y 6.4, pág. 12].

Teorema 1.11. *Sean* X *y* Y *dos conjuntos y* $f\colon X \to Y$*. Entonces:*

1) *para* $B_1, B_2 \subset Y$ *se tiene que* $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$ *y, si* $B_1 \subset B_2$*, entonces* $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$*;*

2) *si* $\{B_\alpha \colon \alpha \in I\} \subset P(Y)$*, entonces*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha) \quad y \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha);$$

3) *para* $A_1, A_2 \subset X$ *se cumple que* $f(A_1) - f(A_2) \subset f(A_1 - A_2)$ *y si* $A_1 \subset A_2$*, entonces* $f(A_1) \subset f(A_2)$*; si* f *es inyectiva entonces* $f(A_1) - f(A_2) = f(A_1 - A_2)$*;*

4) *si* $\{A_\alpha \colon \alpha \in I\} \subset P(X)$*, entonces*

$$f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha) \quad y \quad f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha);$$

si f *es inyectiva entonces* $f(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$*.*

Una prueba del siguiente resultado se encuentra en [8, Teorema 6.5, pág. 12].

Teorema 1.12. *Sean* X *y* Y *dos conjuntos y* $f\colon X \to Y$*. Entonces para cada* $A \subset X$ *y todo* $B \subset Y$ *se cumplen las siguientes propiedades:*

1) $A \subset f^{-1}(f(A))$ *y, si* f *es inyectiva, entonces* $A = f^{-1}(f(A))$*;*

2) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ *y, si* f *es suprayectiva, entonces* $f(f^{-1}(B)) = B$*;*

3) *si f es suprayectiva, entonces $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$;*

4) $f^{-1}(Y) = X$;

5) $f^{-1}(Y - f(X - A)) \subset A$.

El siguiente resultado se prueba en [8, Teorema 8.3, pág. 79].

Teorema 1.13. *Si $f\colon X \to Y$, entonces f es continua si y sólo si, para cada $D \subset Y$ cerrado en Y, sucede que $f^{-1}(D)$ es cerrado en X.*

Una prueba del siguiente teorema aparece en [8, Teorema 12.2, pág. 89].

Teorema 1.14. *Supongamos que $f\colon (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ es biyectiva. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1) *f es abierta;*

2) *f es cerrada;*

3) *la función inversa $f^{-1}\colon (Y, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ de f es continua.*

Del teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.15. *Supongamos que $f\colon X \to Y$ es biyectiva. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1) *f es un homeomorfismo;*

2) *f es continua y abierta;*

3) *f es continua y cerrada.*

1.3. Construcción de topologías

En la presente sección mostramos diversos conceptos que llevan a la construcción de una topología en un conjunto. Empezamos con el siguiente.

Definición 1.16. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $V \subset X$ tales que $x \in V$. Decimos que V es una **vecindad de** x, si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset V$. Decimos que V es una **vecindad cerrada de** x, si V es tanto una vecindad de x como un subconjunto cerrado de X. Para toda $x \in X$ definimos*

$$\Psi_x = \{U \subset X : U \text{ es una vecindad de } x\}.$$

*A Ψ_x se le llama el **sistema de vecindades** de x. Un **sistema de vecindades básicas** de x, es una familia no vacía β_x de subconjuntos de X tales que*

1) $\beta_x \subset \Psi_x$;

2) *para cada* $U \in \Psi_x$ *existe* $B \in \beta_x$ *tal que* $B \subset U$.

Los elementos de β_x *se llaman* ***vecindades básicas*** *de* x. *Una* ***base local en*** x *es un sistema de vecindades básicas* β_x *de x, tal que cada miembro de* β_x *es un abierto en X. Si* β_x *es una base local de* x, *sus elementos se llaman* ***básicos locales de*** x.

En [27, Teorema 4.5, pág. 33] se prueba el siguiente resultado, cuya segunda parte indica una manera de darle una topología a un conjunto dado.

Teorema 1.17. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Para cada* $x \in X$, *supongamos que* β_x *es una base local en* x. *Entonces se tienen las siguientes propiedades:*

1) *si* $V \in \beta_x$, *entonces* $x \in V$;

2) *si* $V_1, V_2 \in \beta_x$, *entonces existe* $V_3 \in \beta_x$ *tal que* $V_3 \subset V_1 \cap V_2$;

3) *para cada* $V \in \beta_x$ *y toda* $y \in V$, *existe* $V_y \in \beta_y$ *tal que* $V_y \subset V$;

4) $G \subset X$ *es abierto si y sólo si para cada* $x \in G$, *existe* $U \in \beta_x$ *tal que* $U \subset G$.

Ahora supongamos que X *es un conjunto y que, para cada* $x \in X$, *tenemos una familia no vacía* β_x *de subconjuntos de* X, *tal que la colección* $\beta = \{\beta_x \colon x \in X\}$ *tiene las propiedades* 1), 2) *y* 3). *Entonces la familia*

$$\tau_\beta = \{G \subset X \colon \textit{para cada } x \in G \textit{ existe } U \in \beta_x \textit{ tal que } U \subset G\}$$

es una topología en X *tal que, para toda* $x \in X$, β_x *es una base local en* x.

Como una aplicación del Teorema 1.17, vemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.18 (El Plano de Moore). *En* $\mathbb{R}^2$, *vamos a darle una topología al semiplano superior cerrado*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0\}.$$

Al espacio topológico correspondiente le llamamos el ***plano de Moore*** *o bien el* ***plano de Niemytzki.***

Usamos la métrica euclidiana d para $\mathbb{R}^2$, definida como sigue:

$$d((p, q), (z, s)) = \sqrt{(z-p)^2 + (s-q)^2}, \quad \text{para cada } (p, q), (z, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Para todo $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ y cada número $\epsilon > 0$, la bola en $\mathbb{R}^2$ con centro en (p, q) y radio ϵ es

$$B_d((p, q), \epsilon) = \left\{(z, s) \in \mathbb{R}^2 \colon d((p, q), (z, s)) < \epsilon\right\}.$$

Definimos ahora, para cada $(p, q) \in X$, una familia no vacía $\beta(p, q)$ de subconjuntos de X, de modo que la colección $\{\beta(p, q) \colon (p, q) \in X\}$ tiene las propiedades 1), 2) y 3) del Teorema 1.17. Tomamos, por tanto, $(p, q) \in X$. Para cada $\epsilon > 0$ definimos

$$U_\epsilon(p, q) = B_d((p, q), \epsilon) \cap X, \quad \text{y} \quad V_\epsilon(p) = \{(p, 0)\} \cup B_d((p, \epsilon), \epsilon).$$

Notemos que cada $B_d((p, \epsilon), \epsilon)$ es una bola abierta, contenida en X y tangente al eje x en el punto $(p, 0)$ (ver Figura 1.1). Por otro lado, cada $U_\epsilon(p, q)$ es la bola $B_d((p, q), \epsilon)$ si $B_d((p, q), \epsilon) \subset X$, o bien es homeomorfo a una semicircunferencia si $B_d((p, q), \epsilon) \not\subset X$.

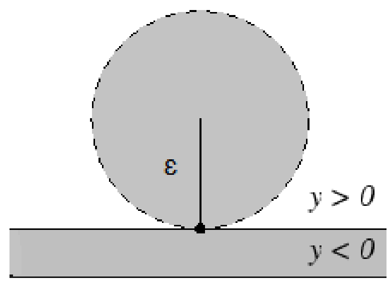

Figura 1.1: Bola abierta tangente al eje x

Definimos

$$\beta(p, q) = \begin{cases} \{U_\epsilon(p, q) \colon \epsilon > 0\}, & \text{si } q > 0; \\ \{V_\epsilon(p) \colon \epsilon > 0\}, & \text{si } q = 0. \end{cases}$$

Ahora probamos que la colección $\beta = \{\beta(p, q) \colon (p, q) \in X\}$ tiene las propiedades 1), 2) y 3) del Teorema 1.17. Cada elemento de $\beta(p, q)$ tiene por definición a (p, q). Así se cumple 1). Sean $V_1, V_2 \in \beta(p, q)$. Si $q > 0$, entonces existen $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tales que

$$V_1 = B_d((p, q), \epsilon_1) \cap X \quad \text{y} \quad V_2 = B_d((p, q), \epsilon_2) \cap X.$$

Consideremos, sin perder generalidad, que $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$. Entonces

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_2 = (B_d((p, q), \epsilon_1) \cap X) \cap (B_d((p, q), \epsilon_2) \cap X) = (B_d((p, q), \epsilon_1) \cap B_d((p, q), \epsilon_2)) \cap X = \\ = B_d((p, q), \epsilon_1) \cap X = V_1. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $q = 0$. Entonces existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales qe

$$V_1 = \{(p, 0)\} \cup B_d((p, \delta_1), \delta_1) \quad \text{y} \quad V_2 = \{(p, 0)\} \cup B_d((p, \delta_2), \delta_2).$$

Consideremos, sin perder generalidad, que $\delta_1 \leq \delta_2$. Entonces

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_2 &= (\{(p, 0)\} \cup B_d((p, \delta_1), \delta_1)) \cap (\{(p, 0)\} \cup B_d((p, \delta_2), \delta_2)) = \\ &= \{(p, 0)\} \cup (B_d((p, \delta_1), \delta_1) \cap B_d((p, \delta_2), \delta_2)) = \{(p, 0)\} \cup B_d((p, \delta_1), \delta_1)) = V_1. \end{aligned}$$

Hemos probado, en ambos casos, que la intersección de V_1 y V_2 es uno de dichos conjuntos. Por tanto se satisface 2). Ahora tomemos $V \in \beta(p,q)$ y $(z,s) \in V$. Para verificar 3), supongamos que $(z,s) \neq (p,q)$. Dividimos la prueba en dos casos. Consideremos primero que $q > 0$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$V = U_\epsilon(p,q) = B_d((p,q),\epsilon) \cap X.$$

Como $(z,s) \in V \subset B_d((p,q),\epsilon)$ y $(z,s) \neq (p,q)$, tenemos que $0 < d((p,q),(z,s)) < \epsilon$. Si $s > 0$, definimos

$$r = \epsilon - d((p,q),(z,s)).$$

Luego $0 < r < \epsilon$ y

$$(z,s) \in U_r(z,s) = B_d((z,s),r) \cap X \in \beta(z,s).$$

Además si $(a,b) \in U_r(z,s)$, entonces

$$d((a,b),(p,q)) \leq d((a,b),(z,s)) + d((z,s),(p,q)) < r + (\epsilon - r) = \epsilon. \tag{1.1}$$

Por tanto $U_r(z,s) \subset U_\epsilon(p,q) = V$. Si $s = 0$, definimos

$$r = \epsilon - d((p,q),(z,0)).$$

Entonces $0 < r < \epsilon$ y $U_r(z,0) = B_d((z,0),r) \cap X$. Además

$$(z,0) \in V_{\frac{r}{2}}(z) = \{(z,0)\} \cup B_d\left(\left(z,\frac{r}{2}\right),\frac{r}{2}\right) \in \beta(z,0)$$

y, procediendo como en (1.1), $V_{\frac{r}{2}}(z) \subset U_r(z,0) \subset V$. Terminamos así el primer caso.

Ahora consideremos que $q = 0$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$V = V_\epsilon(p) = \{(p,0)\} \cup B_d((p,\epsilon),\epsilon).$$

Como $(z,s) \neq (p,q)$ y $(z,s) \in V$, tenemos que $(z,s) \in B_d((p,\epsilon),\epsilon)$. Definimos

$$r = \epsilon - d((p,\epsilon),(z,s)).$$

Luego $0 < r < \epsilon$ y

$$(z,s) \in U_r(z,s) = B_d((z,s),r) \cap X \in \beta(z,s).$$

Un argumento similar al dado en (1.1), muestra que $U_r(z,s) \subset V$. Terminamos así el segundo caso. Notemos que, en los dos casos, hemos hecho ver que un miembro de $\beta(z,s)$ está contenido en V. Luego 3) se satisface y, como también se cumplen 1) y 2), por el Teorema 1.17,

$$\tau_\beta = \{G \subset X\colon \text{para cada } (p,q) \in G, \text{ existe } V \in \beta(p,q) \text{ tal que } V \subset G\}$$

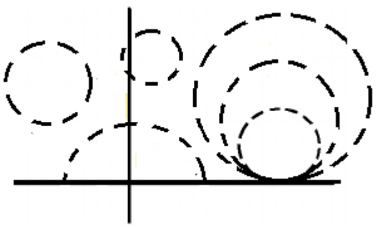

Figura 1.2: Espacio de las Burbujas

es una topología en X, tal que para todo $(p, q) \in X$, la familia $\beta(p, q)$ es una base local en (p, q). Al espacio topológico $(X, \tau_{\beta(p,q)})$ se le conoce informalmente como **el espacio de las burbujas**. Más formalmente se llama el **plano de Moore** o bien **el plano de Niemytzki**. El primer nombre se tiene debido a que, para los elementos de la forma $(p, 0)$, si nos situamos en dicho punto con un popote para hacer burbujas y soplamos, generaremos miembros de la base local $\beta(p, 0)$, que son como las burbujas que se ilustran en la Figura 1.2.

En [9, pág. 23] se dice que el plano de Moore fue definido en [2] y atribuido a V. Niemytzki. En Estados Unidos dicho espacio fue estudiado por R. L. Moore. Debido a esto, hoy en día es común referirse a $(X, \tau_{\beta(p,q)})$ como el plano de Niemytzki o bien el plano de Moore, según indicamos anteriormente.

Cuando una base local es numerable, podemos encontrar otra base local cuyos miembros satisfacen la condición que se indica en el siguiente resultado.

Proposición 1.19. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $\beta_x = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base local en x. Entonces existe una base local $\gamma_x = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ en x tal que $C_{n+1} \subset C_n \subset B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Definimos $C_1 = B_1$, $C_2 = C_1 \cap B_2$, $C_3 = C_2 \cap B_3$ y así sucesivamente. Notemos que C_n es la intersección de los primeros n elementos de β_x, así entonces $C_{n+1} = C_n \cap B_{n+1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por inducción podemos ver que $x \in C_{n+1} \subset C_n \subset B_n$. Para mostrar que $\gamma_x = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local en x, sea U un abierto en X con $x \in U$. Puesto que β es una base local en x, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_m \subset U$. Luego $x \in C_m \subset B_m \subset U$. Esto prueba que γ_x es una base local en x.

Las bases locales que hemos construido en la prueba de la Proposición 1.19, reciben un nombre especial.

Definición 1.20. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Una **base local anidada en** x, es una base local numerable $\gamma_x = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ en x tal que $C_{n+1} \subset C_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

En algunos textos se utiliza "base local decreciente" para referirse a lo que hemos definido como base local anidada. Por la Proposición 1.19, para toda base local numerable en x existe una base local anidada en x. Consideremos ahora las siguientes definiciones.

Definición 1.21. *Sean (X, τ) un espacio topológico y β una familia de subconjuntos de X. Decimos que*

1) *β es una **base** para la topología τ si $\beta \subset \tau$ y cada $A \in \tau$ se puede escribir como una unión de elementos de β. A los miembros de β se les llama **básicos** de X.*

2) *β es una **subbase** para τ si la familia de las intersecciones finitas de los elementos de β es una base para τ. A los miembros de β se les llama **subbásicos** de X.*

Definición 1.22. *Si X es un conjunto y β es una familia de subconjuntos de X, decimos que β es **base para una topología** de X, si existe una topología τ de X tal que β es una base para τ.*

El siguiente ejemplo muestra que una topología dada en un conjunto puede tener varias bases.

Ejemplo 1.23. *Sea (X, d) un espacio métrico. Con respecto a la notación introducida en el* Ejemplo 1.5*, las familias*

$$\beta_1 = \{B_d(x, r)\colon x \in X \text{ y } r > 0\}, \quad \beta_2 = \{B_d(x, q)\colon x \in X \text{ y } q \in \mathbb{Q} \text{ con } q > 0\}$$

y

$$\beta_3 = \left\{B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in X \text{ y } n \in \mathbb{N}\right\}$$

son bases para la topología inducida τ_d en X por la métrica d.

El teorema siguiente se prueba en [27, Teorema 5.3, pág. 38].

Teorema 1.24. *Sean X un conjunto y $\beta \neq \emptyset$ con $\beta \subset P(X)$. La colección β es una base para una topología de X si y sólo si se satisfacen las siguientes dos condiciones:*

1) *X es una unión de elementos de β o, equivalentemente, para cada $x \in X$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B$;*

2) *la intersección de cada dos miembros de β es una unión de elementos de β o, equivalentemente, para cada $B_1, B_2 \in \beta$ y toda $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

La demostración del siguiente resultado es sencilla.

Teorema 1.25. *Sean X un conjunto y β una base para una topología de X. Entonces la colección*

$$\tau_\beta = \left\{ U \subset X \colon \textit{existe } \xi \subset \beta \textit{ tal que } U = \bigcup_{B \in \xi} B \right\} \tag{1.2}$$

es una topología sobre X y, además, β es una base para τ_β.

Definición 1.26. *La topología τ_β, definida en* (1.2)*, se llama la* ***topología generada*** *por la base β.*

Como una aplicación del Teorema 1.25 tenemos el siguiente ejemplo, en el cual se presenta una nueva topología que le podemos dar a $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.27 (La Recta de Sorgenfrey). *Consideremos en $\mathbb{R}$ la siguiente colección de intervalos:*

$$\beta_S = \{[a, b) \colon a, b \in \mathbb{R} \textit{ con } a < b\}.$$

Notemos que β_S cumple con los incisos 1) *y* 2) *del* Teorema 1.24*. Entonces por este mismo resultado y el* Teorema 1.25*, la familia*

$$\tau_S = \left\{ U \subset \mathbb{R} \colon \textit{existe } \beta \subset \beta_S \textit{ tal que } U = \bigcup_{B \in \beta} B \right\}$$

es una topología sobre $\mathbb{R}$ y, además, β_S es una base para τ_S. El espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_S)$ se llama ***la recta de Sorgenfrey****.*

La prueba del siguiente resultado es muy sencilla.

Proposición 1.28. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $Y \subset X$. La colección:*

$$\tau_Y = \{U \cap Y \colon U \in \tau\} \tag{1.3}$$

es una topología sobre Y.

La topología τ_Y que se construye en la Proposición 1.28 recibe el nombre que indicamos a continuación.

Definición 1.29. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $Y \subset X$. La colección τ_Y, definida en* (1.3)*, se llama la* ***topología de subespacio*** *de X en Y. La pareja (Y, τ_Y) es un* ***subespacio topológico*** *de (X, τ).*

Por lo general diremos únicamente “subespacio” en lugar de “subespacio topológico”. Ahora bien, entre las operaciones topológicas que se consideran en la literatura, vamos a utilizar la siguiente.

Definición 1.30. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Consideremos la familia*

$$\mu = \{C \subset X \colon C \text{ es cerrado en } X \text{ y } A \subset C\}.$$

La ***cerradura*** *de A en X es el conjunto $\bigcap_{C \in \mu} C$.*

La cerradura del subconjunto A del espacio topológico X, la denotamos por $\overline{A}^X$. Si no queremos indicar a X de manera explícita, escribimos $\overline{A}$. Es fácil ver que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado de X tal que $A \subset \overline{A}$. Además A es un conjunto cerrado de X si y sólo si $A = \overline{A}$. Si (Y, τ_Y) es un subespacio de (X, τ) decimos que A es **cerrado en** Y si $A \subset Y$ y, además, A es cerrado con la topología τ_Y definida en (1.3), es decir, $Y - A \in \tau_Y$.

Una demostración del siguiente resultado se puede consultar en [27, Teorema 7.2, pág. 44].

Teorema 1.31. *Sean X y Y espacios topológicos y $f \colon X \to Y$. Entonces f es continua si y sólo si para cada $A \subset X$ se cumple que*

$$f(\overline{A}^X) \subset \overline{f(A)}^Y.$$

El siguiente teorema se prueba en [27, Teorema 6.3, pág. 42].

Teorema 1.32. *Sean (Y, τ_Y) un subespacio de (X, τ) y $A \subset Y$. Entonces el conjunto A es cerrado en Y si y sólo si existe $C \subset X$, cerrado de X, tal que $A = C \cap Y$.*

Corolario 1.33. *Sean (Y, τ_Y) un subespacio de (X, τ) y $A \subset Y$. Si A es cerrado en Y y Y es cerrado en X, entonces A es cerrado en X.*

La prueba del siguiente resultado, que determina si un punto está en la cerradura de un conjunto dado, se encuentra en [8, Teorema 4.4, pág. 69].

Teorema 1.34. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces*

$$x \in \overline{A} \text{ si y sólo si para todo } U \in \tau \text{ tal que } x \in U, \text{ se cumple que } U \cap A \neq \emptyset.$$

Consideremos ahora la siguiente noción.

Definición 1.35. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Dado $x \in X$ decimos que x* ***es un punto de acumulación*** *de A si $x \in \overline{A - \{x\}}$.*

Equivalentemente, por la Proposición 1.34, x es un punto de acumulación de A si y sólo si para todo abierto U en X con $x \in U$, sucede que $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$.

El conjunto de puntos de acumulación de A se denota por A' y se llama **el conjunto derivado** de A. En [8, Teorema 4.1, pág. 71] se prueba que

$$\overline{A} = A \cup A'$$

y que A es cerrado en X si sólo si A contiene a todos sus puntos de acumulación, es decir, $A' \subset A$. No es difícil probar que A' es cerrado en X.

Ligado a la noción de cerradura tenemos el siguiente concepto.

Definición 1.36. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es* ***denso*** *en X si $\overline{A} = X$.*

Intuitivamente, A es denso en X si A se encuentra por todo el espacio X o, en otras palabras, A abarca prácticamente todo X. Lo correcto es decir que A es denso en X si todo punto de X es adherente a A, es decir, la densidad depende de los abiertos de X que intersectan a A. Por ejemplo, en los reales con la topología usual, los racionales son un subconjunto denso pues cerca de un número real hay un racional y por lo tanto todo punto de $\mathbb{R}$ es adherente a $\mathbb{Q}$. El siguiente resultado muestra una forma de caracterizar a los conjuntos densos y su prueba se encuentra en [8, Teorema 4.13, pág.72]

Proposición 1.37. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces A es denso en X si y sólo si para cada abierto no vacío U de X, sucede que $U \cap A \neq \emptyset$.*

Veamos cómo funciona la idea intuitiva de la densidad, para la extensión cerrada (X^*, τ_e) del espacio topológico (X, τ), que definimos en el Ejemplo 1.8. Recordemos que $X^* = X \cup \{\infty\}$. Vimos que X^* es el único subconjunto cerrado de (X^*, τ_e) que tiene a ∞. Por tanto

$$\overline{\{\infty\}}^{X^*} = X^*.$$

Luego el conjunto unitario $\{\infty\}$, que intuitivamente no abarca todo X^*, es denso en X^*.

Como $\{\infty\}$ es un abierto en (X^*, τ_e) que tiene a ∞ y no intersecta a X deducimos, por el Teorema 1.34, que $\infty \notin \overline{X}^{X^*}$. De hecho, X es cerrado en (X^*, τ_e). Entonces el conjunto X, que intuitivamente abarca todo X^*, no es denso en X^*.

Consideremos la topología del subespacio X, es decir, τ_{e_X} . Como $X^* \in \tau_e$, sucede que

$$X = X^* \cap X \in \tau_{e_X}.$$

En vista de que los elementos no vacíos de τ_e tienen a ∞, sucede que $X \notin \tau_e$. Luego $\tau_{e_X} \not\subset \tau_e$. Por otro lado, si $V \in \tau$, entonces $V \cup \{\infty\} \in \tau_e$, de donde

$$V = (V \cup \{\infty\}) \cap X \in \tau_{e_X}.$$

Esto prueba que $\tau \subset \tau_{e_X}$. Ahora supongamos que $W \in \tau_{e_X}$. Entonces $W = U \cap X$, donde $U \in \tau_e$. Si $U = \emptyset$, entonces $W = \emptyset \in \tau$. Si $U \neq \emptyset$, entonces $U = A \cup \{\infty\}$, donde $A \in \tau$. Luego

$$W = U \cap X = (A \cup \{\infty\}) \cap X = A \in \tau.$$

Luego $\tau_{e_X} \subset \tau$ y, como la otra contención también es cierta, sucede que $\tau = \tau_{e_X}$. Por tanto, X como subespacio de X^*, mantiene su estructura topológica. Consideremos ahora la función identidad $1_X \colon (X, \tau) \to (X, \tau_{e_X})$. Como $\tau = \tau_{eX}$, resulta que 1_X es un homeomorfismo.

Terminamos la presente sección con el siguiente resultado, cuya prueba se encuentra en [27, Teorema 6.3, pág. 42].

Teorema 1.38. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset Y \subset X$. Entonces la cerradura de A en Y es*

$$\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y.$$

1.4. Convergencia de sucesiones

Vamos a enunciar una serie de resultados que involucran la noción de sucesión y la de convergencia de una sucesión en un espacio topológico. Recordemos primero que una **sucesión** en un conjunto X, es una función $f \colon \mathbb{N} \to X$. En dicho caso, si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $x_n = f(n)$, es costumbre decir que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión f.

Definición 1.39. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X **converge** a un elemento $x \in X$, si para cada $U \in \tau$ con $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, sucede que $x_n \in U$.*

Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X converge a un elemento $x \in X$, escribimos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

En el siguiente resultado vemos que, a partir de una base local anidada (ver Definición 1.20), podemos extraer sucesiones convergentes.

Proposición 1.40. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $\gamma_x = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base local anidada en x. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in C_n$. Entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.*

Demostración. Sea U un abierto en X tal que $x \in U$. Como γ_x es una base local en x, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $C_m \subset U$. Para cada $n \geq m$ tenemos que $x_n \in C_n \subset C_m \subset U$, así que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

En cursos de Cálculo vemos que la continuidad de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se puede expresar en términos de sucesiones y su convergencia. Para establecer formalmente este resultado, y utilizarlo para funciones entre espacios topológicos, consideremos la siguiente definición.

Definición 1.41. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f\colon X \to Y$. Decimos que f es **secuencialmente continua en** $x \in X$ si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, que converge a x, sucede que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Y que converge a $f(x)$. Decimos que f es **secuencialmente continua** si es secuencialmente continua en cada punto de X.*

La relación formal entre la continuidad y la continuidad secuencial es la siguiente.

Teorema 1.42. *Sean X y Y dos espacios topológicos, $f\colon X \to Y$ y $x \in X$. Si f es continua en x, entonces f es secuencialmente continua en x.*

Demostración. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a x, y V un abierto en Y tal que $f(x) \in V$. Como f es continua en x, existe un abierto U en X tal que $x \in U$ y $f(U) \subset V$. En vista de que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, sucede que $x_n \in U$. Por tanto, para $n \geq N$, tenemos que $f(x_n) \in f(U) \subset V$. Esto implica que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ y, así, f es secuencialmente continua en x.

Corolario 1.43. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f\colon X \to Y$. Si f es continua, entonces f es secuencialmente continua.*

En el Teorema 1.53 veremos que el regreso del Teorema 1.42 no es cierto.

Consideremos ahora el siguiente tipo de sucesiones.

Definición 1.44. *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **eventualmente constante** si existen $k \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ tal que, para cada $n \geq k$ sucede que $x_n = x$. A x se le llama la **constante de eventualidad** de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión eventualmente constante, cuya constante de eventualidad es x. Es fácil ver que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Esto muestra que las sucesiones eventualmente constantes son convergentes. Podemos pensar que, por ser x la constante de eventualidad, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ solamente converge a x. Sin embargo esto no es así y para convencernos de esto, basta considerar cualquier espacio indiscreto con cardinalidad mayor o igual a dos. En este tipo de espacios, todas las sucesiones convergentes (en particular, todas las sucesiones eventualmente constantes) convergen a todos los puntos del espacio.

Para ver un espacio no indiscreto con sucesiones eventualmente constantes que convergen a más de un elemento, consideremos la extensión cerrada (X^*, τ_e) del espacio topológico (X, τ). Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X^* que converge a ∞. Como $\{\infty\}$ es un abierto en X^* que tiene a ∞, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq k$, sucede que $x_n \in \{\infty\}$. Luego $x_n = \infty$ para cada $n \geq k$, por lo que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante. Tomemos ahora $x \in X$ y sea V un abierto en X^* tal que $x \in V$. Entonces $V = U \cup \{\infty\}$, donde $U \in \tau$. Como $x_n = \infty$ para cada $n \geq k$, tenemos que $x_n \in V$ para todo $n \geq k$. Luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Así pues, toda sucesión que converge a ∞ es eventualmente constante y, además, converge a cualquier elemento de X^*.

1.5. Axiomas de numerabilidad y de separación

Ahora enunciamos una serie de propiedades que utilizaremos en capítulos posteriores. Iniciamos con los axiomas de numerabilidad.

Definición 1.45. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que X es*

1) ***primero numerable*** (1N*, para simplificar*)*, si cada $x \in X$ tiene una base local numerable;*

2) ***segundo numerable*** (2N*, para simplificar*)*, si existe una base numerable para τ.*

Como consecuencia de la Proposición 1.19, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.46. *Si X es* 1N *entonces, para cada $x \in X$, existe una base local anidada en x.*

El siguiente teorema indica que, en los espacios 1N, las nociones de cerradura, conjunto abierto y conjunto cerrado, se pueden describir en términos de sucesiones convergentes. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión y M es un conjunto, el símbolo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ significa que $x_n \in M$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.47. *Sea X un espacio* 1N. *Para $M \subset X$ se cumple que*

1) *$x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ que converge a x;*

2) *M es cerrado en X si y sólo si, para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ que converge a $x \in X$, sucede que $x \in M$;*

3) *M es abierto en X si y sólo si, para todo $x \in M$ y cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ que converge a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in M$, para cada $n \geq N$.*

Demostración. Como X es 1N, por la Proposición 1.46, para cada $x \in X$, podemos fijar una base local anidada $\beta_x = \{C_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ en x.

Para probar 1), supongamos primero que $x \in \overline{M}$. Por el Teorema 1.34, todo abierto en X que tiene a x intersecta a M. En particular, existe $x_n \in C_n \cap M$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 1.40, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ así construida converge a x. Esto prueba la necesidad de 1). Para la suficiencia no necesitamos que X sea primero numerabilidad. Para probarlo, supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en M que converge a $x \in X$. Sea U un abierto en X tal que $x \in U$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, todos sus elementos están en U, salvo una cantidad finita de ellos. Luego $U \cap M \neq \emptyset$ y, por el Teorema 1.34, $x \in \overline{M}$. Esto prueba 1).

Para demostrar la necesidad de 2) no se requiere que X sea primero numerable. Supongamos que M es cerrado en X. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M que converge a $x \in X$. Por la suficiencia de 1), $x \in \overline{M} = M$. Esto prueba necesidad de 2). Supongamos ahora que la hipótesis de la suficiencia de 2) es cierta. Sea $x \in \overline{M}$. Por la necesidad de 1), existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en M que converge a x. Luego, por hipótesis, $x \in M$. Esto prueba que $\overline{M} \subset M$ y, como la otra contención también es cierta, concluimos que M es cerrado en X. Esto prueba 2).

La necesidad de 3) no requiere que X sea primero numerable. Para verlo, supongamos que M es abierto en X. Sean $x \in M$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a x. Por la definición de convergencia de una sucesión, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in M$, para cada $n \geq N$. Esto prueba la necesidad de 3). Para ver la suficiencia de 3), supongamos que cada que tomemos un punto de M y una sucesión en X que converge a dicho punto, todos sus elementos están en M, salvo una cantidad finita de ellos. Si M no es abierto en X, entonces no es cierto que para cada $x \in M$ existe un abierto U en X tal que $x \in U \subset M$. Por tanto, existe $x \in M$ tal que, para cada abierto U en X con $x \in U$, sucede que $U \cap (X - M) \neq \emptyset$. En particular, para los elementos de la base local anidada β_x en x, existe $x_n \in C_n \cap (X - M)$. Por la Proposición 1.40, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ así construida converge a x. Entonces, por hipótesis, todos sus miembros están en M, salvo una cantidad finita de ellos. Esto contradice el hecho de que, por construcción, ningún elemento de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está en M. Deducimos, por tanto, que M es abierto en X. Esto prueba 3).

Ahora presentamos los axiomas de separación que utilizamos.

Definición 1.48. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que X es*

1) T_0 *si para cada $x, z \in X$ con $x \neq z$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $z \notin U$, o bien $z \in U$ y $x \notin U$;*

2) T_1 *si para todo $x, z \in X$ con $x \neq z$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U - V$ y $z \in V - U$;*

3) T_2 *o* ***de Hausdorff*** *si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $U, V \in \tau$ disjuntos tales que $x \in U$ y $y \in V$;*

4) ***regular*** *si para cada $A \subset X$ cerrado y todo $x \in X - A$ existen $U, V \in \tau$ tales que $A \subset U$, $x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$;*

5) T_3 *si X es regular y T_0.*

Se deduce inmediatamente de la definición anterior que los espacios T_3 son T_2, que los T_2 son T_1, y que los T_1 son T_0. En símbolos esto se expresa como sigue:

$$T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Las implicaciones anteriores no son reversibles, es decir, existen espacios T_0 que no son T_1, así como espacios T_1 que no sean T_2 y espacios T_2 que no sean T_3. Aunque en el Teorema 1.53 damos un espacio T_1 que no es T_2, en general, no vamos a considerar aquí ejemplos de espacios T_0 que no son T_1, ni de espacios T_2 que no son T_3. El lector interesado los puede encontrar en [19, Ejemplos 86, 82, 75, 18 y 53, págs. 106, 100, 93, 49 y 77]. En su lugar, vamos a ocupar formas equivalentes de expresar los axiomas T_1 y la regularidad. La prueba del siguiente resultado se encuentra en [27, Teorema 13.4, pág. 86].

Teorema 1.49. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es T_1 si y sólo si para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado en X.*

Corolario 1.50. *Supongamos que X es T_1. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión eventualmente constante en X que converge a x, entonces x es su constante de eventualidad. Además la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ solamente converge a x.*

Demostración. Sea $y \in X - \{x\}$ y supongamos que y es la constante de eventualidad de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces todos sus términos son iguales a y, salvo una cantidad finita de ellos. Por el Teorema 1.49, $X - \{y\}$ es un abierto en X que tiene a x y, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, todos sus términos son diferentes de y, salvo una cantidad finita de ellos. Tenemos así una contradicción, de la cual se infiere que x es la constante de eventualidad de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ahora supongamos que existe $z \in X - \{x\}$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a z. Como $X - \{x\}$ es un abierto en X que tiene a z, todos los términos de la sucesión son diferentes de x, salvo una cantidad finita de ellos. Esto contradice el hecho de que x es la constante de eventualidad de la sucesión y, así, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ solamente converge a x.

Consideremos la extensión cerrada (X^*, τ_e) del espacio topológico (X, τ). Ya vimos que toda sucesión que converge a ∞ es eventualmente constante y converge a cualquier elemento de X^*. Utilizando esto y el Corolario 1.50, concluimos que (X^*, τ_e) no es T_1. Alternativamente podemos usar el siguiente argumento: sabemos que $\{\infty\}$ no es cerrado en (X^*, τ_e). Luego, por el Teorema 1.49, (X^*, τ_e) no es T_1.

Como los abiertos no vacíos de (X^*, τ_e) tienen a ∞, no es posible encontrar dos abiertos no vacíos y disjuntos. Luego, (X^*, τ_e) no es T_2. Alternativamente, (X^*, τ_e) no es T_2, pues ya vimos que no es T_1 e indicamos que los espacios T_2 son T_1. Notemos que X es cerrado en X^* y que $\infty \notin X$. Además el único abierto en X^* que contiene a X es X^*. Luego, no es posible encontrar dos abiertos disjuntos U y V en X^*, de modo que $\infty \in U$ y $X \subset V$. Esto implica que (X^*, τ_e) no es regular.

Notemos que $\{\{\infty\}\}$ es una base local en ∞. Supongamos que X es 1N. Dada $x \in X$ sea

β_x una base local numerable en x. Es fácil ver que

$$\gamma_x = \{U \cup \{\infty\} : U \in \beta_x\}$$

es una base local numerable en x, para (X^*, τ_e). Esto prueba que si (X, τ) es 1N, entonces también lo es (X^*, τ_e). De manera similar, si (X, τ) es 2N entonces (X^*, τ_e) es 2N. No es difícil probar que los recíprocos también son ciertos. Por tanto (X, τ) es 1N (respectivamente, 2N) si y sólo si (X^*, τ_e) es 1N (respectivamente, 2N).

Ahora presentamos varias formas de enunciar la regularidad de un espacio topológico.

Teorema 1.51. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *X es regular.*

2) *Para cada $x \in X$ y toda vecindad V de x, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$.*

3) *Para cada $x \in X$ y toda vecindad V de x, existe una vecindad cerrada W de x tal que $W \subset V$.*

4) *Para cada $x \in X$ y todo $U \in \tau$ con $x \in U$, existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset U$.*

5) *Para cada $x \in X$ y todo básico U con $x \in U$, existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset U$.*

6) *Para cada $x \in X$ y todo subbásico V con $x \in V$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio regular. Sean $x \in X$ y V una vecindad de x. Entonces existe $G \in \tau$ tal que $x \in G \subset V$. Tenemos que $X - G$ es cerrado en X y además $x \notin X - G$ y, por ser X regular, existen $W, U \in \tau$ tales que $X - G \subset W$, $x \in U$ y $W \cap U = \emptyset$. Entonces $X - W$ es cerrado en X, contiene a U y

$$x \in U \subset \overline{U} \subset \overline{X - W} = X - W \subset G \subset V.$$

Esto prueba que 1) implica 2). Ahora supongamos que 2) se cumple. Sean $x \in X$ y V una vecindad de x. Por 2), existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$. Notemos que $W = \overline{U}$ es una vecindad cerrada de x tal que $W \subset V$. Esto muestra que 2) implica 3).

Supongamos que 3) se cumple. Sean $x \in X$ y $U \in \tau$ con $x \in U$. Como U es una vecindad de x, por 3), existe una vecindad cerrada W de x tal que $W \subset U$. Tomemos $A \in \tau$ tal que $x \in A \subset W$. Entonces

$$x \in A \subset \overline{A} \subset \overline{W} = W \subset U.$$

Esto prueba que 3) implica 4). Ahora supongamos que 4) es cierto. Sean $x \in X$ y U un básico tales que $x \in U$. Entonces $U \in \tau$ y $x \in U$ así que, por 4), existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset U$.

Esto muestra que 4) implica 5). Como todo subbásico es un básico tenemos que 5) implica 6).

Supongamos ahora que 6) se cumple. Sean $A \subset X$ cerrado y $x \in X - A$. Entonces $x \in X - A \in \tau$. Tomemos un básico B tal que $x \in B \subset X - A$. Notemos que $B = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, donde cada V_i es un subbásico. Aplicando 6) tenemos que, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $U_i \in \tau$ tal que $x \in U_i \subset \overline{U_i} \subset V_i$. Sean

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \quad \text{y} \quad G = X - \bigcap_{i=1}^{n} \overline{U_i}.$$

Entonces $x \in U \in \tau$, $G \in \tau$, $U \cap G = \emptyset$ y

$$A \subset X - B = X - \bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset X - \bigcap_{i=1}^{n} \overline{U_i} = G.$$

Esto prueba que X es regular, por lo que 6) implica 1).

En el siguiente resultado mostramos que, en un espacio T_1, las sucesiones convergentes que no son eventualmente constantes, contienen subsucesiones con buenas propiedades.

Teorema 1.52. *Sean X un espacio T_1 y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, que no es eventualmente constante. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con las siguientes propiedades:*

1) *$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x y $x_{n_k} \neq x$, para todo $k \in \mathbb{N}$;*

2) *para cada $k, m \in \mathbb{N}$ con $k \neq m$, sucede que $x_{n_k} \neq x_{n_m}$.*

Demostración. Como la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es eventualmente constante, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \neq x$. Al ser X un espacio T_1, por el Teorema 1.49, $\{x_{n_1}\}$ es cerrado en X. Luego $U_1 = X - \{x_{n_1}\}$ es un subconjunto abierto de X que tiene a x. Esto implica, usando de nuevo que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es eventualmente constante, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_2 > n_1$, $x_{n_2} \neq x$ y $x_{n_2} \neq x_{n_1}$. Como X es T_1, sucede que $U_2 = X - \{x_{n_1}, x_{n_2}\}$ es un subconjunto abierto de X que tiene a x. Utilizando de nuevo que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es eventualmente constante, existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $n_3 > n_2$, $x_{n_3} \neq x$, $x_{n_3} \neq x_{n_1}$ y $x_{n_3} \neq x_{n_2}$.

Continuando el argumento, para cada $k \in \mathbb{N} - \{1\}$, existe un abierto U_k que tiene a x pero no a los elementos $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ previamente construidos, que son distintos dos a dos, diferentes de x y con $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. El hecho de que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es eventualmente constante y converge a x, permite construir $n_{k+1} > n_k$ tal que $x_{n_{k+1}} \in U_k$ con $x_{n_{k+1}} \neq x$ y la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ así construida satisface 1) y 2).

En el siguiente resultado mostramos, entre otras cosas, una función secuencialmente continua que no es continua, por lo que el regreso del Teorema 1.42 no es cierto.

Teorema 1.53. *Supongamos que X es un conjunto no numerable con la topología conumerable τ_{CN}, que definimos en el* Ejemplo 1.4. *Entonces el espacio topológico (X, τ_{CN}) tiene las siguientes propiedades:*

1) *es T_1 pero no T_2 ni* 1N*;*

2) *una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X converge a $x \in X$ si y sólo si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante y x es su constante de eventualidad.*

Consideremos ahora la función identidad $1_X\colon (X, \tau_{CN}) \to (X, \tau_D)$, donde τ_D es la topología discreta en X. Entonces, para cada $x \in X$, 1_X es secuencialmente continua en x pero no continua en x.

Demostración. Para probar 1), sea $x \in X$. Como $X - \{x\} \in \tau_{CN}$, sucede que $\{x\}$ es cerrado en X. Entonces, por el Teorema 1.49, (X, τ_{CN}) es T_1. Tomemos ahora $y, z \in X$ con $y \neq z$. Si X es T_2, entonces existen $U, V \in \tau_{CN}$ tales que $y \in U$, $z \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego $(X - U) \cup (X - V) = X$. Esto implica, debido a que $X - U$ y $X - V$ son numerables, que X es numerable, lo que contradice el hecho de que X es no numerable. Por tanto, (X, τ_{CN}) no es T_2.

Si (X, τ_{CN}) es 1N entonces, dada $x \in X$, podemos encontrar una base local numerable $\beta_x = \{B_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ en x. Afirmamos que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{x\}. \tag{1.4}$$

Para ver esto, supongamos que existe $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ tal que $x \neq y$. Como $X - \{y\}$ es un abierto en X que tiene a x, y β_x es una base local en x, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset X - \{y\}$. Esto implica que $y \notin B_n$, contradiciendo la elección de y. Así (1.4) se cumple. Notemos ahora que, al tomar complementos en (1.4), tenemos que

$$X - \{x\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X - B_n).$$

Como todo B_n es abierto en X, cada complemento $X - B_n$ es un conjunto numerable. Por tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X - B_n)$ es una unión numerable de conjuntos numerable y, así, es numerable. Esto implica que $X - \{x\}$ es numerable, por lo que también X es numerable. Como se contradice el hecho de que X es no numerable, deducimos que (X, τ_{CN}) no es 1N. Así se prueba 1).

Para probar 2), supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a $x \in X$. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es eventualmente constante, por el Teorema 1.52, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con las propiedades 1) y 2) de dicho resultado. Podemos continuar la demostración usando dicha subsucesión que converge a x o, en su lugar, suponer sin perder generalidad que para cada $n, m \in \mathbb{N}$, tenemos que $x_n \neq x$ y $x_n \neq x_m$. Esto último es lo que haremos. Consideremos ahora el subconjunto numerable $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ de X. Notemos que $X - A$ es un abierto en X que tiene a x. Además ningún elemento de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está en $X - A$. Esto implica que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a x, lo cual es un absurdo. Por tanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante. Aplicando el Corolario 1.50, tenemos que x es la constante de eventualidad de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Esto prueba la primera parte de 2). Naturalmente, toda sucesión eventualmente constante, cuya constante de eventualidad es x, converge a x. Esto termina la prueba de 2).

Consideremos ahora la función identidad $1_X \colon (X, \tau_{CN}) \to (X, \tau_D)$. Sean $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a x. Por 2), $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante y x es su constante de eventualidad. Luego $\{1_X(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión eventualmente constante, cuya constante de eventualidad es $x = 1_X(x)$. Por tanto, $\{1_X(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $1_X(x)$ en (X, τ_D). Esto prueba que 1_X es secuencialmente continua en x.

Supongamos que 1_X es continua en x. Notemos que $V = \{x\}$ es un abierto en (X, τ_D) tal que $1_X(x) = x \in V$. Como 1_X es continua en x, existe un abierto U en (X, τ_{CN}) tal que $x \in U$ y $U = 1_X(U) \subset V$. Por lo tanto tenemos que $U = \{x\}$ y, como $\{x\}$ es abierto en (X, τ_{CN}), el conjunto $X - \{x\}$ es numerable. Esto implica que X es numerable, contradiciendo el hecho de que X es no numerable. Por tanto, 1_X no es continua en x.

El siguiente resultado muestra la condición clásica, bajo la cual, las funciones secuencialmente continuas son continuas.

Teorema 1.54. *Sean X y Y dos espacios topológicos, $f \colon X \to Y$ y $x \in X$. Si X es* 1N *y f es secuencialmente continua en x, entonces f es continua en x.*

Demostración. Como X es 1N, por la Proposición 1.46 existe una base local anidada $\beta_x = \{C_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ en x. Supongamos que f no es continua en x. Entonces existe un abierto V en Y con $f(x) \in V$ tal que, para cada abierto U en X con $x \in U$, sucede que $f(U) \not\subset V$. En particular $f(C_n) \not\subset V$, para ninguna $n \in \mathbb{N}$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in C_n$ tal que $f(x_n) \notin V$. Por la Proposición 1.40, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ así formada converge a x. En vista de que f es secuencialmente continua en x, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Y que converge a $f(x)$. Como V es un abierto en Y que tiene al punto de convergencia $f(x)$ de la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, todos los miembros de la sucesión están en V, salvo una cantidad finita de ellos. Esto contradice el hecho de que, por construcción, ningún elemento de la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está en V. Tenemos, así, que f es continua en x.

Corolario 1.55. *Sean X y Y dos espacios topológicos, $f \colon X \to Y$ y $x \in X$. Si X es* 1N, *entonces f es continua en x si y sólo si f es secuencialmente continua en x.*

Corolario 1.56. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f\colon X \to Y$. Si X es* 1N*, entonces f es continua si y sólo si f es secuencialmente continua.*

El Corolario 1.55 se sigue de los Teoremas 1.42 y 1.54, mientras que el Corolario 1.56 es una consecuencia del Corolario 1.55, la noción de continuidad secuencial y el hecho de que una función es continua si y sólo si es continua en cada punto de su dominio.

1.6. Compacidad

La compacidad es una propiedad notable en la Topología e incluso, es la propiedad más importante en el presente trabajo. A continuación damos su definición.

Definición 1.57. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Una colección $\Im = \{U_\alpha \colon \alpha \in I\}$ de subconjuntos de X es una **cubierta** de A si*

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

*Si $\Im$ es una cubierta de A y cada elemento de $\Im$ es abierto en X, decimos que $\Im$ es una **cubierta abierta** de A. Si $\Im$ es una cubierta de A y ϑ es una subcolección de $\Im$ tal que $A \subset \bigcup \vartheta$, entonces ϑ es una **subcubierta** de $\Im$. Si ϑ es una subcubierta de $\Im$ y ϑ tiene una cantidad finita de elementos, entonces ϑ es una **subcubierta finita** de $\Im$. Por último, decimos que*

1) *X es **compacto** si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita;*

2) *A es **compacto** en X, si como subespacio de X, A es compacto.*

Es claro que en cualquier espacio topológico X, los subconjuntos finitos de X son compactos. En el siguiente resultado vemos una manera de producir un conjunto compacto, a partir de una sucesión convergente.

Teorema 1.58. *Sean X un espacio topológico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, que converge a $x \in X$. Entonces*

$$K = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

es compacto en X.

Demostración. Sea $\Im = \{U_\alpha \colon \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de K. Como

$$x \in K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha,$$

existe $\alpha_0 \in I$ tal que $x \in U_{\alpha_0}$. Puesto que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq m$, $x_n \in U_{\alpha_0}$. Para cada $1 \leq i \leq m-1$ sea $\alpha_i \in I$ tal que $x_i \in U_{\alpha_i}$. Notemos que

$$K \subset U_{\alpha_0} \cup U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_{m-1}}.$$

Por tanto, $\{U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_{m-1}}\}$ es una subcubierta finita de $\Im$. Esto prueba que K es compacto.

Se suele decir, informalmente, que un espacio es compacto si satisface dicha propiedad donde sea puesto. Para formalizar la oración anterior, consideremos la siguiente definición.

Definición 1.59. *Sea X un espacio topológico. Una propiedad P se dice **absoluta** si para cada $B \subset A \subset X$, B tiene la propiedad P en X si y sólo si B tiene la propiedad P en A.*

Proposición 1.60. *La compacidad es una propiedad absoluta.*

Demostración. Sean X un espacio topológico y $B \subset A \subset X$. Supongamos que B es compacto en A y tomemos una cubierta $\beta = \{U_\alpha \colon \alpha \in I\}$ de B formada por abiertos de X. Como $B \subset A$, la familia

$$\vartheta = \{V_\alpha = U_\alpha \cap A \colon \alpha \in I\}$$

es una cubierta de B formada por abiertos de A. Esto se sigue del hecho de que cada V_α es abierto en A y, además,

$$B = B \cap A \subset \Big(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\Big) \cap A = \bigcup_{\alpha\in I}(U_\alpha \cap A) = \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha.$$

Como B es compacto en A, existe $\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \ldots, V_{\alpha_r}\} \subset \vartheta$ tal que $B \subset \bigcup_{j=1}^{r} V_{\alpha_j}$. Así tenemos que $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_r}\}$ es una subcubierta finita de β en X, por lo que B es compacto en X.

Ahora supongamos que B es compacto en X. Sea $\psi = \{U_\alpha \colon \alpha \in I\}$ una cubierta de B, formada por abiertos de A. Para cada $\alpha \in I$ existe $V_\alpha \in \tau$ tal que $U_\alpha = V_\alpha \cap A$. Por ser ψ una cubierta de B tenemos que:

$$B \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}(V_\alpha \cap A) \subset \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha.$$

Luego $\xi = \{V_\alpha \colon \alpha \in I\}$ es una cubierta de B, formada por abiertos de X. Como B es compacto en X, existe $\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \ldots, V_{\alpha_k}\} \subset \xi$ tal que $B \subset \bigcup_{j=1}^{k} V_{\alpha_j}$. Por tanto $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_k}\}$ es una subcubierta finita de ψ en A y, así, B es compacto en A.

Sean X un espacio topológico y $B \subset A \subset X$. La Proposición 1.60 permite estudiar la compacidad de B sin importar si es subespacio de A o de X. Por esta razón, a lo largo de este trabajo no mencionamos el lugar donde un espacio es compacto, a menos que exista alguna confusión.

Teorema 1.61. *Sean X un espacio topológico y $A, B \subset X$. Si A y B son compactos, entonces $A \cup B$ es compacto.*

Demostración. Sea $\Im = \{U_\alpha \colon \alpha \in I\}$ una cubierta de $A \cup B$ formada por abiertos de X. Notemos que $\Im$ también es cubierta de los compactos A y B. Por tanto existen $I_1, I_2 \subset I$ finitos tales que

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I_1} U_\alpha \quad \text{y} \quad B \subset \bigcup_{\alpha \in I_2} U_\alpha.$$

Si $J = I_1 \cup I_2$, entonces $\{U_\alpha \colon \alpha \in J\}$ es una subcubierta finita de $\Im$. Esto prueba que $A \cup B$ es compacto.

Los siguientes dos resultados se prueban en [27, Teorema 17.5, pág. 119]

Teorema 1.62. *Sea (X, τ) un espacio T_2. Si $C \subset X$ compacto, entonces C es cerrado en X.*

Teorema 1.63. *Si X es compacto y $C \subset X$ es cerrado en X, entonces C es compacto.*

Consideremos la extensión cerrada (X^*, τ_e) de (X, τ). Ya hemos probado que la topología de subespacio de X^* en X es τ. De esto y la Proposición 1.60 se tiene que

$$\text{los subconjuntos de } X \text{ que son compactos en } X, \text{también son compactos en } X^*. \tag{1.5}$$

Supongamos ahora que A es un subconjunto compacto en X^*. Sea $\beta = \{V_\alpha \colon \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de $A - \{\infty\}$, formada por abiertos de X. Entonces $\{V_\alpha \cup \{\infty\} \colon \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de A, formada por abiertos de X^*. Como A es compacto en X^*, existe

$$\{V_{\alpha_1} \cup \{\infty\}, V_{\alpha_2} \cup \{\infty\}, \ldots, V_{\alpha_n} \cup \{\infty\}\} \quad \text{tal que} \quad A \subset \bigcup_{j=1}^{n} (V_{\alpha_j} \cup \{\infty\}).$$

Luego $A - \{\infty\} \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{\alpha_j}$, de donde $\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \ldots, V_{\alpha_n}\}$ es una subcubierta finita de β. Esto prueba que $A - \{\infty\}$ es compacto en X. Combinando este resultado con (1.5) deducimos que los subconjuntos compactos de (X^*, τ_e), que no tienen a ∞, son exactamente los subconjuntos compactos de (X, τ). Afirmamos ahora que

$$X \text{ es compacto si y sólo si } X^* \text{ es compacto.} \tag{1.6}$$

Para probar esto, supongamos primero que X es compacto. Entonces, por (1.5), X es compacto en X^* y, como también $\{\infty\}$ es compacto, por el Teorema 1.61, $X^* = X \cup \{\infty\}$ es compacto. Ahora supongamos que X^* es compacto. Entonces, por lo que probamos luego de (1.5), $X = X^* - \{\infty\}$ es compacto en X. Así (1.6) se cumple.

Proposición 1.64. *Sean (X, τ) un espacio T_2 y $C \subset X$ compacto. Si $x \in X - C$, entonces existen $U, V \in \tau$ disjuntos tales que $x \in U$ y $C \subset V$.*

Demostración. Sea $x \in X - C$. Para cada $z \in C$ tenemos que $x \neq z$ entonces existen $U_z, V_z \in \tau$ disjuntos tales que $x \in U_z$ y $z \in V_z$. Sea $\vartheta = \{V_z\}_{z \in C}$, claramente ϑ es una cubierta abierta de C, por lo tanto existen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in C$ tales que $C \subset \bigcup_{i=1}^n V_{z_i}$. Dado que para cada U_z construimos V_z disjunto, consideremos el abierto $\bigcap_{i=1}^n U_{z_i}$, el cual además cumple que $x \in \bigcap_{i=1}^n U_{z_i}$. Sean $V = \bigcup_{i=1}^n V_{z_i}$ y $U = \bigcap_{i=1}^n U_{z_i}$. Por como fueron construidos los abiertos U y V son disjuntos. Además se cumple que $x \in U$ y $C \subset V$.

El siguiente resultado se demuestra en [27, Teorema 17.7, pág. 119].

Teorema 1.65. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ continua. Si K es un subconjunto compacto de X, entonces $f(K)$ es un subconjunto compacto de Y.*

El Teorema 1.65 indica que las funciones continuas preservan la compacidad. En otras palabras, la imagen continua de un compacto es un compacto. Para ver un resultado que indique que la imagen inversa de un compacto es un compacto, requerimos de la siguiente noción.

Definición 1.66. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f\colon X \to Y$. Decimos que f es* ***de fibras compactas*** *si para cada $y \in Y$, sucede que $f^{-1}(\{y\})$ es compacto. Además f es* ***perfecta*** *si es continua, cerrada y de fibras compactas.*

Como consecuencia del siguiente resultado, las funciones perfectas y suprayectivas "anti-preservan" la compacidad.

Proposición 1.67. *Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) dos espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ cerrada, suprayectiva y de fibras compactas. Si $D \subset Y$ es compacto, entonces $f^{-1}(D)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\Im = \{U_\alpha \colon \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de $f^{-1}(D)$. Entonces

$$f^{-1}(D) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

Para cada $y \in D$ tenemos que

$$f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(D) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha,$$

por lo que $\Im$ es una cubierta abierta del compacto $f^{-1}(\{y\})$. Entonces existe $J_y \subset I$ finito tal que

$$f^{-1}(\{y\}) \subset \bigcup_{\alpha \in J_y} U_\alpha. \tag{1.7}$$

Claramente $\bigcup_{\alpha \in J_y} U_\alpha \in \tau_1$. Entonces, al ser f una función cerrada, $f\Big(X - \bigcup_{\alpha \in J_y} U_\alpha\Big)$ es un cerrado en Y, con lo cual

$$B_{J_y} = Y - f\Big(X - \bigcup_{\alpha \in J_y} U_\alpha\Big) \in \tau_2.$$

Afirmamos que $y \in B_{J_y}$ pues si $y \notin B_{J_y}$, entonces

$$y \in f\Big(X - \bigcup_{\alpha \in J_y} U_\alpha\Big).$$

Tomemos $x \in X - \bigcup_{\alpha \in J_y} U_\alpha$ tal que $y = f(x)$. Aplicando (1.7) tenemos que

$$x \in f^{-1}(\{y\}) \subset \bigcup_{\alpha \in J_y} U_\alpha,$$

lo cual es una contradicción. Hemos mostrado que, para cada $y \in D$, el conjunto B_{J_y} es un abierto en Y tal que $y \in B_{J_y}$. Luego

$$D \subset \bigcup_{y \in D} B_{J_y}. \tag{1.8}$$

Entonces la familia

$$\vartheta = \{B_{J_y} : y \in D\}$$

es una cubierta abierta del compacto D. Por tanto, existen $B_{J_{y_1}}, B_{J_{y_2}}, \ldots, B_{J_{y_k}} \in \vartheta$ tales que $D \subset \bigcup_{m=1}^{k} B_{J_{y_m}}$. Por las propiedades 2) y 5) de los Teoremas 1.11 y 1.12, se cumple

$$f^{-1}(D) \subset f^{-1}\Big(\bigcup_{m=1}^{k} B_{J_{y_m}}\Big) = \bigcup_{m=1}^{k} f^{-1}\Big(Y - f\Big(X - \bigcup_{\alpha \in J_{y_m}} U_\alpha\Big)\Big) \subset \bigcup_{m=1}^{k} \Big(\bigcup_{\alpha \in J_{y_m}} U_\alpha\Big).$$

Esto prueba que $f^{-1}(D)$ es compacto.

1.7. Filtros y ultrafiltros

Otra forma de caracterizar los conjuntos compactos es usando filtros y bases de filtros. A continuación presentamos las definiciones y los resultados importantes para representar la compacidad en términos de filtros.

Definición 1.68. *Sean X un conjunto no vacío y $\Im$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Decimos que $\Im$ es un **filtro en** X si cumple las siguientes tres propiedades:*

1) $\emptyset \notin \Im$;

2) *si $A, B \in \Im$ entonces $A \cap B \in \Im$;*

3) *si $G \subset X$ y $F \in \Im$ son tales que $F \subset G$, entonces $G \in \Im$.*

Definición 1.69. *Sean X un conjunto no vacío, $\Im$ un filtro en X y β una familia no vacía de subconjuntos de X. Entonces β es una **base para** $\Im$ si:*

1) $\beta \subset \Im$;

2) *dado $F \in \Im$ existe $B \in \beta$ tal que $B \subset F$.*

Si β es una base para el filtro $\Im$ entonces, dados $B_1, B_2 \in \beta \subset \Im$, tenemos que $B_1 \cap B_2 \in \Im$, y por la propiedad 2) de la Definición 1.69, existe $B_3 \in \beta$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Esto motiva nuestra siguiente definición.

Definición 1.70. *Sean X un conjunto no vacío y β una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de X. Decimos que β es una **base de filtro en** X si dados $B_1, B_2 \in \beta$ existe $B_3 \in \beta$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Así pues, toda base para un filtro en X, es una base de filtro en X. A la inversa, el siguiente resultado muestra que toda base de filtro en X es una base para un filtro específico de X.

Proposición 1.71. *Sean X un conjunto no vacío y β una base de filtro en X. Entonces*

$$\xi(\beta) = \{A \subset X \colon \text{existe } B \in \beta \text{ tal que } B \subset A\} \tag{1.9}$$

es un filtro en X y β es una base para $\xi(\beta)$.

Demostración. Claramente $\emptyset \notin \xi(\beta)$ y de la definición de $\xi(\beta)$ deducimos que si $G \subset X$ y $A \in \xi(\beta)$ tal que $A \subset G$, entonces $G \in \xi(\beta)$. Sean $A_1, A_2 \in \xi(\beta)$ por lo tanto existen $B_1, B_2 \in \beta$ tal que $B_1 \subset A_1$ y $B_2 \subset A_2$. Por ser β una base de filtro existe $B_3 \in \beta$ tal que $B_3 \subset B_2 \cap B_2$. Así tenemos que $B_3 \subset A_1 \cap A_2$, lo cual implica que $A_1 \cap A_2 \in \xi(\beta)$. Esto muestra que $\xi(\beta)$ es un filtro y obviamente β es una base de filtro para $\xi(\beta)$.

Notemos que los miembros de la familia $\xi(\beta)$ son los superconjuntos de los elementos de β.

Definición 1.72. *Sean X un conjunto no vacío y β una base de filtro en X. La familia $\xi(\beta)$ que se construye en* (1.9) *se llama el **filtro generado** por β.*

Si X es un conjunto no vacío y $x_0 \in X$, entonces la familia

$$\mathcal{U}(x_0) = \{U \subset X \colon U \text{ es una vecindad de } x_0\}$$

es una base de filtro en X. Vamos a utilizar con cierta frecuencia esta base de filtro.

El siguiente resultado se encuentra demostrado en [8, Teorema 2.2, pág. 211].

Teorema 1.73. *Sean* $\eta = \{N_\alpha \colon \alpha \in I\}$ *y* $\beta = \{B_\gamma \colon \gamma \in J\}$ *dos bases de filtro en* X. *Entonces:*

1) $\eta \vee \beta = \{N_\alpha \cup B_\gamma \colon (\alpha, \gamma) \in I \times J\}$ *es una base de filtro en* X.

2) *Si para cada* $(\alpha, \gamma) \in I \times J$ *tenemos que* $N_\alpha \cap B_\gamma \neq \emptyset$, *entonces la familia*

$$\eta \wedge \beta = \{N_\alpha \cap B_\gamma \colon (\alpha, \gamma) \in I \times J\}$$

es una base de filtro en X.

3) *Para cada familia finita* $\{N_{\alpha_1}, N_{\alpha_2}, \ldots, N_{\alpha_n}\} \subset \eta$ *existe* $N_\delta \in \eta$ *tal que*

$$N_\delta \subset N_{\alpha_1} \cap N_{\alpha_2} \cap \cdots \cap N_{\alpha_n}.$$

En particular cada intersección finita de elementos de una base de filtro en X *es no vacía.*

Se puede hablar de la convergencia de una base de filtro, como se indica en la siguiente definición.

Definición 1.74. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* $\beta = \{B_\alpha \colon \alpha \in I\}$ *una base de filtro en* X. *Entonces*

1) β ***converge a un punto*** $x_0 \in X$ *(en símbolos* $\beta \to x_0$*), si para cada* $U \in \tau$ *tal que* $x_0 \in U$ *existe* $B_\alpha \in \beta$ *tal que* $B_\alpha \subset U$;

2) $p \in X$ *es un* ***punto de acumulación de*** β, *si para cada* $V \in \tau$ *tal que* $p \in V$ *y todo* $B_\alpha \in \beta$, *sucede que* $B_\alpha \cap V \neq \emptyset$.

Del Teorema 1.34 podemos concluir que p es un punto de acumulación de la base de filtro β en X si y sólo si

$$p \in \bigcap_{\alpha \in I} \overline{B_\alpha}^X.$$

Usaremos este resultado con frecuencia en el presente trabajo. Consideremos ahora la siguiente noción.

Definición 1.75. *Sean* η *y* β *dos bases de filtro en* X. *Decimos que* β *es un* ***refinamiento de*** η *o que* β ***refina a*** η, *si para cada* $N \in \eta$ *existe* $B \in \beta$ *tal que* $B \subset N$.

Notemos que β refina a η si los miembros de η son superconjuntos de elementos de β. Si β refina a η es también común decir que β está subordinada a η. Los refinamientos de bases de filtro tienen las siguientes propiedades. Su demostración se puede ver en [8, Teorema 2.5, pág. 213].

Proposición 1.76. *Sean η y β dos bases de filtro en X y $x_0 \in X$. Entonces*

1) *Si $\eta \subset \beta$, entonces β refina a η.*

2) *Si β refina a η, entonces para cada $B \in \beta$ y $N \in \eta$ sucede que $B \cap N \neq \emptyset$.*

3) *$\eta \to x_0$ si y sólo si η refina a $\mathcal{U}(x_0) = \{U \subset X : U$ es una vecindad de $x_0\}$.*

Los resultados posteriores hablan de las propiedades de convergencia de las bases de filtro. El siguiente, por ejemplo, caracteriza los espacios de Hausdorff usando bases de filtro.

Teorema 1.77. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces X es T_2 si y sólo si para cada base de filtro convergente β en X, existe un único $p \in X$ tal que $\beta \to p$.*

Demostración. Primero supongamos que X es T_2. Sea $\beta = \{B_\alpha : \alpha \in I\}$ una base de filtro convergente, es decir que $\beta \to p$ con $p \in X$. Para todo $m \in X$ con $m \neq p$ existen $U, V \in \tau$ disjuntos tales que $p \in U$ y $m \in V$. Por la convergencia de β existe $B_\alpha \in \beta$ tal que $B_\alpha \subset U$. Si $\beta \to m$, entonces existe $B_\gamma \in \beta$ tal que $B_\gamma \subset V$. Esto implica que $B_\alpha \cap B_\gamma = \emptyset$ pues U y V son disjuntos, lo cual es una contradicción al inciso 3) del Teorema 1.73. Por consiguiente, β converge solamente al punto p de X.

Ahora supongamos que cada base de filtro convergente, converge a un único elemento de X. Si X no es T_2, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ distintos tales que para todo $U, V \in \tau$ con $x_1 \in U$ y $x_2 \in V$ sucede que $U \cap V \neq \emptyset$. Consideremos las bases de filtro en X

$$\mathcal{U}(x_1) = \{U \subset X : U \text{ es una vecindad de } x_1\}$$

y

$$\mathcal{U}(x_2) = \{U \subset X : U \text{ es una vecindad de } x_2\}.$$

Por la parte 2) del Teorema 1.73

$$\Im = \mathcal{U}(x_1) \wedge \mathcal{U}(x_2) = \{U \cap V : U \in \mathcal{U}(x_1) \text{ y } V \in \mathcal{U}(x_2)\}$$

es una base para un filtro de X. Además, para todo $W \in \tau$ tal que $x_1 \in W$, tenemos que $W \in \mathcal{U}(x_1)$ y, como $X \in \mathcal{U}(x_2)$, sucede que $W = W \cap X \in \Im$. Esto muestra que $\Im \to x_1$. Similarmente para todo $M \in \tau$ tal que $x_2 \in M$, tenemos que $M \in \mathcal{U}(x_2)$ y, como $X \in \mathcal{U}(x_1)$, resulta que $M = M \cap X \in \Im$. Así $\Im \to x_2$ y, con esto, la base de filtro $\Im$ en X es convergente, y converge a dos elementos distintos de X. Por lo tanto se tiene que X es un espacio T_2.

Las relaciones habituales entre las propiedades de convergencia de las sucesiones y sus subsucesiones, se extienden a las bases de filtros de la siguiente forma.

Teorema 1.78. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $\eta = \{N_\alpha \colon \alpha \in I\}$ y $\beta = \{B_\gamma \colon \gamma \in J\}$ dos bases de filtro en X, y $x_0 \in X$.*

1) *Si $\eta \to x_0$ entonces x_0 es un punto de acumulación de η y, si X es de Hausdorff, entonces x_0 es el único punto de acumulación de η.*

2) *Si β refina a η y $\eta \to x_0$, entonces $\beta \to x_0$.*

3) *Si β refina a η y x_0 es un punto de acumulación de β, entonces x_0 es punto de acumulación de η.*

Demostración. Para probar 1) sea $U \in \tau$ tal que $x_0 \in U$. Por la convergencia de η existe $N_\alpha \in \eta$ tal que $N_\alpha \subset U$. Por el inciso 3) del Teorema 1.73, $N_\alpha \cap N_\delta \neq \emptyset$ para toda $\delta \in I$. Luego $N_\delta \cap U \neq \emptyset$ para cada $\delta \in I$. Esto prueba que x_0 es punto de acumulación de η.

Si X es de Hausdorff y $x_1 \in X - \{x_0\}$, entonces existen $U, V \in \tau$ disjuntos tales que $x_0 \in U$ y $x_1 \in V$. Por la convergencia de η existe $N_\alpha \in \eta$ tal que $N_\alpha \subset U$. Notemos que $N_\alpha \cap V = \emptyset$ pues U y V son disjuntos, por lo que x_1 no puede ser punto de acumulación de η. Esto prueba 1).

Para ver 2) sea $U \in \tau$ tal que $x_0 \in U$. Como $\eta \to x_0$, existe $N_\alpha \in \eta$ tal que $N_\alpha \subset U$. Dado que β refina a η, existe $B_\gamma \in \beta$ tal que $B_\gamma \subset N_\alpha$. Luego $B_\gamma \subset U$ y, así, $\beta \to x_0$.

Para probar 3) sean $U \in \tau$ con $x_0 \in U$ y $N_\alpha \in \eta$. Como β refina a η, existe $B_\gamma \in \beta$ tal que $B_\gamma \subset N_\alpha$. Al ser x_0 un punto de acumulación de β, sucede que

$$\emptyset \neq B_\gamma \cap U \subset N_\alpha \cap U.$$

Esto prueba que x_0 es punto de acumulación de η.

Corolario 1.79. *Sean X un espacio topológico, $x_0 \in X$ y η una base de filtro en X. Entonces*

1) *$\eta \to x_0$ si y sólo si para todo refinamiento β de η, existe un refinamiento γ de β tal que $\gamma \to x_0$;*

2) *x_0 es punto de acumulación de η si y sólo si existe un refinamiento β de η tal que $\beta \to x_0$.*

Una prueba del Corolario 1.79 aparece en [8, Corolario 3.3, pág. 214]. Los conceptos topológicos básicos pueden ser expresados con bases de filtro. Por ejemplo en el siguiente resultado, cuya prueba aparece en [8, Teorema 4.1, pág. 215], se caracteriza la operación de cerradura. Conviene compararlo con la parte 1) del Teorema 1.47 en el que caracterizamos los miembros de una cerradura en términos de sucesiones, bajo el supuesto que nuestro espacio base es 1N. En el corolario del teorema, utilizamos la noción de conjunto derivado que aparece luego de la Definición 1.35.

Teorema 1.80. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una base de filtro en A que converge a x.*

Corolario 1.81. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces:*

1) *A es cerrado en X si y sólo si los puntos de acumulación de cada base de filtro en A, están contenidos en A;*

2) *$a \in A'$ si y sólo si existe una base de filtro en $A - \{a\}$ que converge al punto a.*

Ahora consideramos bases de filtro maximales con respecto a la contención $\subset$.

Definición 1.82. *Sean X un conjunto no vacío y η una base de filtro en X. Entonces η es una* ***base de ultrafiltro en*** *X si para toda base de filtro β en X tal que β refina a η, sucede que η refina a β.*

El siguiente resultado caracteriza las bases de ultrafiltros.

Teorema 1.83. *Sea η una base de filtro en X. Entonces η es una base de ultrafiltro en X si y sólo si para todo $A \subset X$ exactamente uno de A o $X - A$ contiene un elemento de η.*

Demostración. Primero supongamos que $\eta = \{N_\alpha \colon \alpha \in I\}$ es una base de ultrafiltro en X. Consideremos que existen $\alpha_0, \alpha_1 \in I$ tales que $N_{\alpha_0} \subset A$ y $N_{\alpha_1} \subset X - A$. Luego $N_{\alpha_0} \cap N_{\alpha_1} = \emptyset$, lo cual es una contradicción al inciso 3) del Teorema 1.73. Esto muestra que A y $X - A$ no pueden contener miembros de η. Falta probar que uno de A y $X - A$ debe contener algún elemento de η.

Supongamos que A no contiene elementos de η. Entonces para todo $\alpha \in I$ tenemos que $N_\alpha \cap (X - A) \neq \emptyset$. Notemos que

$$\beta = \{N_\alpha \cap (X - A) \colon \alpha \in I\}$$

es una base de filtro en X. En efecto, para $\alpha_1, \alpha_2 \in I$, por ser η una base de filtro en X, existe $\alpha_0 \in I$ tal que $N_{\alpha_0} \subset N_{\alpha_1} \cap N_{\alpha_2}$, de donde

$$N_{\alpha_0} \cap (X - A) \subset (N_{\alpha_1} \cap (X - A)) \cap (N_{\alpha_2} \cap (X - A)).$$

Esto muestra que β es una base de filtro en X. Además es claro que β refina a η. Como η es una base de ultrafiltro en X, sucede que η refina a β. En consecuencia, para una $\alpha \in I$ fija, existe $\gamma \in I$ tal que

$$N_\gamma \subset N_\alpha \cap (X - A) \subset X - A.$$

Hemos probado así, que si A no contiene elementos de η, entonces $X - A$ contiene un miembro de η. Con esto terminamos la primera parte de la demostración.

Supongamos ahora que para todo $A \subset X$ exactamente uno de A o $X - A$ contiene un elemento de η. Para ver que $\eta = \{N_\alpha \colon \alpha \in I\}$ es una base de ultrafiltro en X, supongamos que $\beta = \{B_\gamma \colon \gamma \in J\}$ es una base de flitro en X tal que β refina a η. Por hipótesis para toda $\gamma \in J$ existe $\delta \in I$ tal que $N_\delta \subset B_\gamma$ o bien $N_\delta \subset X - B_\gamma$. Ahora bien, por el inciso 2) del Teorema 1.76, no puede suceder que $N_\delta \subset X - B_\gamma$ pues como β refina a η, se cumple que para todo $\gamma \in J$, $N_\delta \cap B_\gamma \neq \emptyset$. Por lo tanto, para toda $\gamma \in J$ existe $\delta \in I$ tal que $N_\delta \subset B_\gamma$, lo cual significa que η refina a β y, con esto, η es una base de ultrafiltro en X.

El Teorema 1.83 permite probar que las bases de ultrafiltro existen. Para ver esto, consideremos un conjunto X y $x_0 \in X$. Entonces la colección

$$\eta = \{M \subset X \colon x_0 \in M\}$$

es una base de filtro en X pues, para $M, N \in \eta$, sucede que $M \cap N \in \eta$. Por otra parte, para cada $A \subset X$, exactamente uno de A o $X - A$ contiene a x_0 y, por tanto, exactamente uno de A o $X - A$ está en η. Luego, por el Teorema 1.83, η es una base de ultrafiltro en X. Notemos que, en este ejemplo, $\{\{x_0\}\}$ es una base de filtro en X y η es una base de ultrafiltro en X que contiene a $\{\{x_0\}\}$, por lo que η refina a $\{\{x_0\}\}$. Como se muestra en [8, Teorema 7.3, pág. 219], esto en general siempre es posible, es decir, siempre se puede encontrar una base de ultrafiltro que refine a cualquier base de filtro dada.

Teorema 1.84. *Sea β una base de filtro en X. Entonces existe una base de ultrafiltro η en X que refina a β.*

En la parte 1) del Teorema 1.78 vimos que si una base de filtro converge a un punto, entonces dicho punto es de acumulación de la base de filtro. Cuando, en su lugar, la base de filtro es una base de ultrafiltro, ambos conceptos son equivalentes, es decir, la base de ultrafiltro converge a un punto si y sólo si dicho punto es de acumulación de la base de ultrafiltro dada.

Proposición 1.85. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $x_0 \in X$ y $\beta = \{B_\alpha \colon \alpha \in I\}$ una base de ultrafiltro en X. Entonces x_0 es un punto de acumulación de β si y sólo si $\beta \to x_0$.*

Demostración. Por lo que hemos comentado, basta probar que si x_0 es un punto de acumulación de β, entonces $\beta \to x_0$. Supongamos, por tanto, que x_0 es un punto de acumulación de β. Sea $U \in \tau$ tal que $x_0 \in U$. Por el Teorema 1.83 existe $\alpha \in I$ tal que $B_\alpha \subset U$ o bien $B_\alpha \subset X - U$. Ahora bien, como x_0 es un punto de acumulación de β, para todo $\alpha \in I$ sucede que $B_\alpha \cap U \neq \emptyset$. Entonces la contención $B_\alpha \subset X - U$ no puede suceder y, así, $B_\alpha \subset U$ de donde $\beta \to x_0$.

Estamos en condiciones de probar la caracterización de los conjuntos compactos en función de bases de filtro y bases de ultrafiltros.

Teorema 1.86. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *X es compacto.*

2) *X posee la propiedad de la intersección finita, es decir, para cada familia no vacía $\Im = \{F_\alpha : \alpha \in I\}$ de subconjuntos cerrados en X que cumplen que $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \emptyset$, existe una subfamilia finita $\{F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots, F_{\alpha_n}\}$ de $\Im$ tal que $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \emptyset$.*

3) *Toda base de filtro en X tiene al menos un punto de acumulación.*

4) *Toda base de ultrafiltro en X es convergente.*

Demostración. Supongamos que X es compacto y que $\Im = \{F_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia no vacía de subconjuntos cerrados en X tales que $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \emptyset$. Entonces $X = \bigcup_{\alpha \in I}(X - F_\alpha)$ y, por ser X compacto, existe una subfamilia finita $\{F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots, F_{\alpha_n}\}$ de $\Im$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^n (X - F_{\alpha_i})$. Luego $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \emptyset$. Esto prueba que 1) implica 2).

Supongamos ahora que X tiene la propiedad de la intersección finita. Tomemos una base de filtro $\beta = \{B_\alpha : \alpha \in I\}$ en X. Por el inciso 3) del Teorema 1.73, para cada subfamilia finita $\{B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \ldots, B_{\alpha_n}\}$ de β sucede que $\bigcap_{i=1}^n B_{\alpha_i} \neq \emptyset$. Considerando en todo momento las cerraduras en X, lo anterior implica que para cada subfamilia finita $\{\overline{B}_{\alpha_1}, \overline{B}_{\alpha_2}, \ldots, \overline{B}_{\alpha_n}\}$ de la familia $\{\overline{B}_\alpha : \alpha \in I\}$, de subconjuntos cerrados en X, se tiene que $\bigcap_{i=1}^n \overline{B}_{\alpha_i} \neq \emptyset$. Luego, por el contrapositivo al enunciado que indicamos como la propiedad de la intersección finita, sucede que $\bigcap_{\alpha \in I} \overline{B}_\alpha \neq \emptyset$. Es claro que cada miembro de $\bigcap_{\alpha \in I} \overline{B}_\alpha$ es un punto de acumulación de β. Esto prueba que 2) implica 3).

Consideremos ahora que toda base de filtro en X tiene al menos un punto de acumulación. Sea η una base de ultrafiltro en X. Por hipótesis existe $p \in X$ tal que p es punto de acumulación de η. Luego, por el Teorema 1.85, $\eta \to p$. Esto prueba que 3) implica 4).

Para terminar la demostración, consideremos que toda base de ultrafiltro en X es convergente. Sea $\Phi = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de X. Supongamos que Φ no tiene una subcubierta finita. Luego, para todo $F \subset I$ finito, $X - \bigcup_{\gamma \in F} U_\gamma \neq \emptyset$. Esto permite considerar a la familia no vacía

$$\beta = \left\{ X - \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha : F \subset I \text{ es finito} \right\}$$

de subconjuntos no vacíos de X. Si $F_1, F_2 \subset I$ son finitos, tenemos que

$$\left(X - \bigcup_{\alpha \in F_1} U_\alpha \right) \cap \left(X - \bigcup_{\delta \in F_2} U_\delta \right) = X - \bigcup_{\alpha \in F_1 \cup F_2} U_\alpha \in \beta.$$

Por lo tanto β es una base de filtro de X. Aplicando el Teorema 1.84, existe una base de ultrafiltro $\eta = \{N_\delta \colon \delta \in J\}$ en X tal que η refina a β. Por hipótesis η es convergente, es decir, existe $p \in X$ tal que $\eta \to p$. Por ser Φ cubierta abierta de X, existe $\alpha_0 \in I$ tal que $p \in U_{\alpha_0}$. Por la convergencia de η, existe $\delta_0 \in J$ tal que $N_{\delta_0} \subset U_{\alpha_0}$. Ahora bien, $X - U_{\alpha_0} \in \beta$ y η refina a β. Entonces existe $\delta_1 \in J$ tal que $N_{\delta_1} \subset X - U_{\alpha_0}$. Hemos probado, con esto, que tanto U_{α_0} como $X - U_{\alpha_0}$ contienen un elemento de η, contradiciendo el Teorema 1.83. Como la contradicción proviene de haber supuesto que que Φ no tiene una subcubierta finita, concluimos que Φ posee una subcubierta finita. Luego X es compacto y, así, 4) implica 1).

1.8. Compacidad local

La siguiente es una noción que, en Topología General, se considera del tipo de compacidad.

Definición 1.87. *Un espacio topológico (X,τ) es* ***localmente compacto en*** *un punto $x \in X$, si para cada $U \in \tau$ con $x \in U$, existe $V \in \tau$ tal que $\overline{V}$ es compacto y, además, $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Decimos que X es* ***localmente compacto****, si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos.*

En algunos textos se dice que

($\diamond$) (X,τ) es localmente compacto en $x \in X$ si existen $U \in \tau$ y $V \subset X$ compacto, tales que $x \in U \subset V$.

Si X es localmente compacto en x de acuerdo con la Definición 1.87, entonces también lo es con respecto a ($\diamond$), pues el conjunto $\overline{V}$ que se garantiza en tal definición es una vecindad compacta de x, es decir, un conjunto compacto que a la vez es vecindad de x.

Para ver que la compacidad local con respecto a ($\diamond$) no implica la dada en la Definición 1.87, consideremos la extensión cerrada (X^*,τ_e) del espacio topológico (X,τ). Vamos a probar que

a) si X es localmente compacto en x según ($\diamond$), entonces (X^*,τ_e) es localmente compacto en x según ($\diamond$).

Como X es localmente compacto en x según ($\diamond$), existen $U \in \tau$ y $V \subset X$ compacto tales que $x \in U \subset V$. Entonces $U \cup \{\infty\}$ es un abierto en X^* tal que $x \in U \cup \{\infty\}$. Como los subconjuntos compactos de X también son compactos en X^*, sucede que V es compacto en X^*. También $\{\infty\}$ es compacto en X^* así que, por el Teorema 1.61, $V \cup \{\infty\}$ es compacto en X^*. Además $x \in U \cup \{\infty\} \subset V \cup \{\infty\}$, por lo que X^* es localmente compacto en x según ($\diamond$). Esto prueba a).

Para un espacio topológico (X,τ), decimos que X es **indiscreto en** $p \in X$ si X es el único abierto de X que tiene a p. Ahora veremos que

b) si X no es indiscreto en x, entonces (X^*, τ_e) no es localmente compacto en x, según la Definición 1.87.

Como X no es indiscreto en x, existe un abierto U en X tal que $U \neq X$ y $x \in U$. Si (X^*, τ_e) es localmente compacto en x, según la Definición 1.87, entonces existe un abierto $V \cup \{\infty\}$ en (X^*, τ_e) tal que

$$x \in V \cup \{\infty\} \subset \overline{V \cup \{\infty\}}^{X^*} \subset U \cup \{\infty\} \quad \text{y} \quad \overline{V \cup \{\infty\}}^{X^*} \text{ es compacto.}$$

Como $\{\infty\}$ es denso en X^*, sucede que

$$\overline{V \cup \{\infty\}}^{X^*} = \overline{V}^{X^*} \cup \overline{\{\infty\}}^{X^*} = \overline{V}^{X^*} \cup X^* = X^*.$$

Por tanto $U \cup \{\infty\} = X^*$, de donde $U = X$, lo cual contradice la elección de U. Esto prueba b).

Afirmamos, por último, que

c) si X es localmente compacto en x, según la Definición 1.87 o bien según ($\diamond$), y no es indiscreto en x, entonces (X^*, τ_e) es localmente compacto en x, según ($\diamond$), pero no según la Definición 1.87.

En efecto, si X es localmente compacto en x, según la Definición 1.87, X también es localmente compacto según ($\diamond$). Luego, por a), (X^*, τ_e) es localmente compacto en x, según ($\diamond$). Como X no es indiscreto en x, por b), (X^*, τ_e) no es localmente compacto en x, según la Definición 1.87. Esto prueba c).

En [8, Teorema 6.2, pág. 238] se prueba que en los espacios T_2 ser localmente compacto en x, según la Definición 1.87, es equivalente a ser localmente compacto en x, según ($\diamond$). A partir de este momento, vamos a considerar la compacidad local según la Definición 1.87. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Teorema 1.88. *Si X es localmente compacto, entonces X es regular.*

Demostración. Sean $x \in X$ y U un abierto en x tales que $x \in U$. Como X es localmente compacto en x, existe un abierto V en X tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ y $\overline{V}$ es compacto. Esto implica, por la equivalencia entre los incisos 1) y 4) del Teorema 1.51, que X es regular.

Corolario 1.89. *Los espacios localmente compactos y T_0 son T_3.*

1.9. La topología producto

El producto cartesiano es importante en matemáticas y, en el caso de la Topología General no es la excepción. Presentamos ahora su definición y propiedades elementales. Supongamos que $\{X_s\colon s \in S\}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos. El **producto cartesino** de los miembros de dicha familia es el conjunto

$$\prod_{s\in S} X_s = \left\{ x\colon S \to \bigcup_{s\in S} X_s \mid x(s) \in X_s, \text{ para cada } s \in S \right\}.$$

Si $x \in \prod_{s\in S} X_s$ y, para cada $s \in S$, escribimos $x_s = x(s)$, es común decir que $x = (x_s)_{s\in S}$ y considerar que

$$x_s)_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s.$$

Si $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ es finito, el producto cartesiano $\prod_{s\in S} X_s$ se escribe como

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n,$$

y sus miembros de denotan como $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, es decir, como n-adas ordenadas. Entendemos que $x_i \in X_i$ para toda $i \in S = \{1, 2, \ldots, n\}$. De esta manera, para un conjunto arbitrario S, la notación $(x_s)_{s\in S}$ extiende la noción de n-ada ordenada.

Cuando cada conjunto X_s posee una topología, es posible darle también una buena topología al producto cartesiano $\prod_{s\in S} X_s$.

Definición 1.90. *Sea $\{(X_s, \tau_s)\colon s \in S\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. Consideremos el producto cartesiano*

$$X = \prod_{s\in S} X_s.$$

*La **topología producto** en X, denotada como τ_p, es la que tiene por base a los conjuntos de la forma $\prod_{s\in S} U_s$, donde:*

1) *U_s es abierto en X_s, para cada $s \in S$;*

2) *existe $J \subset S$ finito tal que $U_s = X_s$ para toda $s \in S - J$.*

*Consideremos la familia de funciones $\{\rho_s\colon (X, \tau_p) \to (X_s, \tau_s) \mid s \in S\}$ donde, para cada $x = (x_s)_{s\in S} \in X$, tenemos que $\rho_s(x) = x_s$. La función ρ_s se llama s-**ésima proyección** de X en X_s.*

Si $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ es finito, entonces la topología producto τ_p en el producto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, tiene por base a los conjuntos de la forma $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ donde, para cada $i \in S$, U_i es abierto en X_i.

A partir de este momento, vamos a considerar la topología producto en cualquier producto cartesiano dado. El siguiente resultado se prueba en [8, Teorema 2.1, pág. 101].

Teorema 1.91. *Sean $\{(X_s, \tau_s) \colon s \in S\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos y $X = \prod_{s\in S} X_s$. Para cada $s \in S$, la proyección $\rho_s \colon X \to X_s$ es continua, abierta y suprayectiva.*

La siguiente es una caracterización de los espacios T_2 en términos de la topología producto.

Teorema 1.92. *Un espacio topológico X es T_2 si y sólo si la diagonal en X, es decir, el conjunto*

$$\Delta = \{(x, x) \colon x \in X\},$$

es cerrado en $X \times X$.

Demostración. Supongamos que X es T_2 y tomemos $(x, y) \in X \times X - \Delta$. Entonces $x \neq y$ y, como X es T_2, existen abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego $U \times V$ es un abierto en $X \times X$ tal que $(x, y) \in U \times V$ y $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$. Esto implica que $X \times X - \Delta$ es abierto en $X \times X$ y, por tanto, Δ es cerrado en X.

Supongamos ahora que Δ es cerrado en X. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces $(x, y) \in X \times X - \Delta$ y, como $X \times X - \Delta$ es abierto en $X \times X$, existen abiertos U y V en X tales que $(x, y) \in U \times V \subset X \times X - \Delta$. Del hecho de que $U \times V$ no intersecta a Δ se sigue que $U \cap V = \emptyset$. Por tanto, X es T_2.

El siguiente teorema se prueba en [8, Teorema 1.2, pág. 99].

Teorema 1.93. *Sean $\{(X_s, \tau_s) \colon s \in S\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos y $X = \prod_{s\in S} X_s$. Para cada $s \in S$, tomemos $A_s \subset X_s$. Entonces*

$$\overline{\prod_{s\in S} A_s}^{X} = \prod_{s\in S} \overline{A_s}^{X_s}.$$

Por tanto la cerradura en X de un producto cartesiano es el producto cartesiano de las respectivas cerraduras de los factores involucrados. El siguiente resultado se prueba en [8, Teorema 1.4, pág. 224].

Teorema 1.94 (**Teorema de Tychonoff**). *Sean $\{(X_s, \tau_s) \colon s \in S\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos y $X = \prod_{s\in S} X_s$. Entonces X es compacto si y sólo si, para cada $s \in S$, X_s es compacto.*

En el siguiente teorema mostramos que el producto cartesiano, con la topología producto, contiene una copia de cada uno de sus factores.

Teorema 1.95. *Sean* $\{(X_i, \tau_i) \colon i \in I\}$ *una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos y* $X = \prod_{i\in I} X_i$. *Tomemos* $s \in I$ *y, para toda* $j \in I - \{s\}$, *fijemos un elemento* a_j *de* X_j. *Entonces*

$$Y_s = \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i \colon x_j = a_j, \text{ para toda } j \in I - \{s\} \right\} \tag{1.10}$$

es un subconjunto de X *homeomorfo a* X_s. *En consecuencia, para cada* $s \in I$, *existe un subespacio* Y_s *de* X *tal que* Y_s *es homeomorfo a* X_s.

Demostración. Fijemos $s \in S$ y notemos que

$$Y_s = \prod_{i\in I} A_i$$

donde $A_j = \{a_j\}$ para toda $j \in I - \{s\}$ y $A_s = X_s$. Sean $\rho_s \colon X \to X_s$ la proyección de X sobre X_s y $\varphi_s = \rho_s|_{Y_s} \colon Y_s \to X_s$, la restricción de ρ_s a Y_s. Mostremos que φ_s es un homeomorfismo, haciendo ver que es una función biyectiva, continua y abierta.

Tomemos $x = (x_i)_{i\in I}$ e $y = (y_i)_{i\in I}$ en Y_s de modo que $\varphi_s(x) = \varphi_s(y)$. Para cada $j \in I - \{s\}$ se tiene que $x_j = a_j = y_j$ y, además, $x_s = \varphi_s(x) = \varphi_s(y) = y_s$. Por tanto $x = y$, de donde φ_s es inyectiva. Para mostrar que también es suprayectiva, sea $z_s \in X_s$. Consideremos el punto $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ tal que $x_j = a_j$ para toda $j \in I - \{s\}$ y $x_s = z_s$. Entonces $x \in Y_s$ y $\varphi_s(x) = z_s$, probando así que φ_s es suprayectiva.

Por el Teorema 1.91 ρ_s es una función continua y, por ser φ_s la restricción de ρ_s a Y_s, tenemos que φ_s es una función continua. Supongamos ahora que B es un abierto básico en Y_s. Entonces

$$B = \prod_{i\in I} B_i, \text{ donde } B_j = A_j = \{a_j\} \text{ para } j \in I - \{s\} \text{ y } B_s \text{ es un abierto de } X_s.$$

Como $\varphi_s(B) = B_s$, se sigue que $\varphi_s(B)$ es abierto en X_s. Acabamos de mostrar que la imagen bajo φ_s de todo abierto básico de Y_s, es un abierto en X_s. Finalmente si U es un abierto en Y_s, entonces

$$U = \bigcup_{k\in J} B_k,$$

donde cada B_k es un abierto básico de Y_s. Luego

$$\varphi_s(U) = \varphi_s\Big(\bigcup_{k\in J} B_k\Big) = \bigcup_{k\in J} \varphi_s(B_k),$$

la cual es una unión de abiertos en X_s. Por tanto $\varphi_s(U)$ es abierto en X_s, lo que implica que φ_s es una función abierta y, por tanto, φ_s es un homeomorfismo.

Para presentar otras propiedades de la topología producto, consideremos la siguiente definición.

Definición 1.96. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Supongamos que X posee una propiedad P.*

1) *P es una **propiedad hereditaria** si cualquier $Y \subset X$, con la topología relativa de X, tiene la propiedad P.*

2) *P es una **propiedad topológica** si cualquier espacio topológico Y, que sea homeomorfo a X, tiene la propiedad P.*

3) *Si del hecho de que cada elemento de una familia $\{(X_s, \tau_s)\colon s \in S\}$ de espacios topológicos posea la propiedad P, sucede que $(\prod_{s\in S} X_s, \tau_p)$ tiene la propiedad P, decimos que P es una **propiedad multiplicativa**.*

4) *Si $\{(X_s, \tau_s)\colon s \in S\}$ es una familia de espacios topológicos, y del hecho de que el espacio $(\prod_{s\in S} X_s, \tau_p)$ tenga la propiedad P, sucede que cada espacio X_s tiene la propiedad P, decimos que P es una **propiedad factorizable**.*

Notemos que si X tiene una propiedad P hereditaria, entonces todos los subespacios de X poseen la propiedad P. Si además la propiedad P es topológica y algún subespacio de X es homeomorfo a un espacio topológico Z se sigue que Z también tiene la propiedad P. El siguiente resultado se basa en la idea anterior para mostrar la relación que hay entre las propiedades 1), 2) y 4) de la Definición 1.96.

Proposición 1.97. *Toda propiedad topológica y hereditaria es factorizable.*

Demostración. Sean P una propiedad topológica y hereditaria y $\{(X_s, \tau_s)\colon s \in S\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. Hagamos $X = \prod_{s\in S} X_s$ y supongamos que (X, τ_p) tiene la propiedad P. Sea $s \in S$. Por el Teorema 1.95 existe $Y \subset X$ tal que Y es homeomorfo a X_s. Por ser P una propiedad hereditaria, se sigue que Y tiene la propiedad P. Además P también es una propiedad topológica, lo cual implica que X_s tiene la propiedad P. Dado que $s \in S$ fue arbitrario, deducimos que P es una propiedad factorizable.

La prueba del siguiente teorema se encuentra en [8, Teorema 1.3, pág. 138].

Teorema 1.98. *Ser un espacio de Hausdorff es una propiedad hereditaria, topológica, factorizable y multiplicativa.*

Teorema 1.99. *Sean* $\{(X_s, \tau_s) \colon s \in S\}$ *una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos y* $X = \prod_{s\in S} X_s$. *Entonces* X *es* T_1 *si y sólo si para cada* $s \in S$, *el espacio* X_s *es* T_1.

Demostración. Supongamos que X es un espacio T_1. Por la Proposición 1.97 tenemos lo deseado.

Ahora supongamos que para toda $s \in S$, X_s es un espacio T_1. Sea $x = (x_s)_{s\in S} \in X$, entonces $\{x\} = \prod_{s\in S}\{x_s\}$. Aplicando los Teoremas 1.93 y 1.49 tenemos que:

$$\overline{\{x\}}^X = \overline{\prod_{s\in S}\{x_s\}}^X = \prod_{s\in S}\overline{\{x_s\}}^{X_s} = \prod_{s\in S}\{x_s\} = \{x\}.$$

Por lo tanto X es un espacio T_1

Corolario 1.100. *Para cada* $s \in S$ *el subespacio* Y_s *de* X, *definido en* (1.10), *es cerrado en* X *si* X *es* T_1.

Capítulo 2

Espacios Secuenciales y de Fréchet

2.1. Propiedades de los espacios secuenciales

En el presente capítulo se abordan resultados sobre los espacios en los que las sucesiones son suficientes para determinar su topología. Con esto queremos decir que, tanto la noción de sucesión como la de convergencia de una sucesión, son más que suficientes para caracterizar a dichos espacios.

Las siguientes nociones fueron dadas en 1965 por S. P. Franklin en [11]. Las partes 1) y 2) están inspiradas en la forma en que se caracterizan los abiertos y los cerrados en un espacio 1N, según se indica en el Teorema 1.47.

Definición 2.1. *Sean X un espacio topológico y $U \subset X$. Decimos que*

1) *U es* ***secuencialmente abierto*** *en X, si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, que converge a un punto $x \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$;*

2) *U es* ***secuencialmente cerrado*** *en X, si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en U, que converge a un punto $x \in X$, sucede que $x \in U$;*

3) *X es* ***secuencial*** *si todo subconjunto secuencialmente abierto en X, es abierto en X.*

A continuación enlistamos varias propiedades de los conjuntos secuencialmente abiertos y de los secuencialmente cerrados.

Teorema 2.2. *Sean X un espacio topológico y $U \subset X$. Entonces*

1) *si U es abierto en X, entonces U es secuencialmente abierto;*

2) *si U es cerrado en X, entonces U es secuencialmente cerrado;*

3) *U es secuencialmente abierto en X si y sólo si $X - U$ es secuencialmente cerrado en X.*

Demostración. Para probar 1), supongamos que U es abierto en X. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, que converge a un punto $x \in U$. Por la definición de convergencia de una sucesión, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. Luego U es secuencialmente abierto en X. Esto prueba 1).

Para probar 2), supongamos que U es cerrado en X. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en U, que converge a un punto $x \in X$. Entonces, para cada abierto V en X con $x \in V$, todos los miembros de la sucesión están en V, salvo una cantidad finita de ellos. Luego $V \cap U \neq \emptyset$ y, por tanto, $x \in \overline{U} = U$. De esta manera, U es secuencialmente cerrado en X. Esto prueba 2).

Para probar 3), supongamos primero que U es secuencialmente abierto en X. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X - U$ que converge a un punto $x \in X$. Si $x \in U$ entonces, al ser U secuencialmente abierto en X, todos los miembros de la sucesión están en U, salvo un número finito de ellos. Esto contradice el hecho de que ningún miembro de la sucesión está en U. Por tanto, $x \in X - U$, probando con ello que $X - U$ es secuencialmente cerrado en X.

Ahora supongamos que $X - U$ es secuencialmente cerrado en X. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a un punto $x \in U$. Consideremos que

a) para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \geq n$ tal que $x_{m_n} \in X - U$.

Entonces para $n = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \in X - U$. Para $n = n_1 + 1$, existe $n_2 \geq n_1 + 1$ tal que $x_{n_2} \in X - U$. En general, si n_k ya ha sido construido, aplicando a), existe $n_{k+1} \geq n_k + 1$ tal que $x_{n_{k+1}} \in X - U$. La subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, así construida, está en el conjunto $X - U$, que es secuencialmente cerrado en X. Además tal subsucesión converge a x. Luego $x \in X - U$. Esto contradice el hecho de que $x \in U$. Por consiguiente, a) no se cumple. Esto implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. Luego, U es secuencialmente abierto en X.

Más adelante, en el Ejemplo 2.5, damos un un espacio topológico X que contiene un subconjunto U secuencialmente abierto y no abierto en X. Esto implica, por el Teorema 2.2, que el complemento $X - U$ es secuencialmente cerrado y no cerrado en X. Consideremos, de momento, el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *En un espacio topológico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *todo subconjunto secuencialmente abierto en X es abierto en X;*

2) *todo subconjunto secuencialmente cerrado en X es cerrado en X.*

Demostración. Supongamos que 1) se cumple. Sea U un conjunto secuencialmente cerrado en X. Por la parte 3) del Teorema 2.2, $X - U$ es secuencialmente abierto en X. Luego, por 1), $X - U$ es abierto en X. Esto implica que U es cerrado en X. Esto prueba que 1) implica 2). La prueba de que 2) implica 1) es similar.

Teorema 2.4. *Todo espacio metrizable es secuencial.*

Demostración. Sean (X, τ) un espacio metrizable y d una métrica sobre X tales que $\tau = \tau_d$, donde τ_d es la topología inducida en X por la métrica d, que definimos en el Ejemplo 1.5. Si $(X, \tau) = (X, \tau_d)$ no es secuencial, existe $A \subset X$ secuencialmente abierto y no abierto en X. Por tanto, existe $x \in A$ tal que para cada $\epsilon > 0$, tenemos que $B_d(x, \epsilon) \not\subset A$. Así para cada $n \in N$, existe $x_n \in B_d(x, \frac{1}{n}) - A$. Notemos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $X - A$ es tal que $x_n \to x$. Esto implica, por ser $X - A$ secuencialmente cerrado en X, que $x \in X - A$. En vista de que esto contradice el hecho de que $x \in A$, deducimos que (X, τ) es secuencial.

Del Teorema 2.4 se sigue que los espacios métricos son secuenciales.

Ejemplo 2.5. *Supongamos que X es un conjunto no numerable con la topología conumerable τ_{CN}. Entonces (X, τ_{CN}) no es secuencial.*

Demostración. Tomemos $x \in X$. En la parte 2) del Teorema 1.53 mostramos que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a x, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante, y x es su constante de eventualidad. Esto implica que el singular $\{x\}$ es secuencialmente abierto en X. Como X es no numerable, sucede que $\{x\}$ no es abierto en X.

Dado un espacio topológico, es posible modificar su topología original para obtener un espacio topológico secuencial. El siguiente resultado muestra cómo realizar esto.

Teorema 2.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Definimos*

$$\tau_{seq} = \{B \subset X \colon B \text{ es secuencialmente abierto en } X\}.$$

Entonces τ_{seq} es una topología en X tal que (X, τ_{seq}) es secuencial y $\tau \subset \tau_{seq}$.

Demostración. Es claro que $\emptyset$ y X son secuencialmente abiertos en X, de donde $\emptyset, X \in \tau_{seq}$. Supongamos ahora que $\{U_\alpha \colon \alpha \in I\} \subset \tau_{seq}$ y que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a $x \in \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$. Tomemos $\alpha_0 \in I$ tal que $x \in U_{\alpha_0}$. Como U_{α_0} es secuencialmente abierto en X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_{\alpha_0}$ para todo $n \geq \mathbb{N}$. Así $x_n \in \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ para cada $n \geq \mathbb{N}$, de donde $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ es secuencialmente abierto en X. Esto prueba que $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \tau_{seq}$.

Sean $A, B \in \tau_{seq}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión que converge a $y \in A \cap B$. Entonces existen $N_A, N_B \in \mathbb{N}$ tales que $y_n \in A$ para cada $n \geq N_A$ y también $y_n \in B$ para toda $n \geq N_B$. Sea $N = \max\{N_A, N_B\}$. Es claro que $y_n \in A \cap B$ para todo $n \geq N$, de donde $A \cap B$ es secuencialmente abieto en X. Esto prueba que $A \cap B \in \tau_{seq}$. Hemos probado, así, que τ_{seq} es una topología en X.

Sea $H \in \tau$. Por la parte 1) del Teorema 2.2, $H \in \tau_{seq}$. Esto muestra que $\tau \subset \tau_{seq}$. Por último, si U es secuencialmente abierto en (X, τ_{seq}), entonces U es secuencialmente abierto en (X, τ), por lo que U es abierto en (X, τ_{seq}). Esto prueba que (X, τ_{seq}) es secuencial.

Corolario 2.7. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es secuencial si y sólo si $\tau = \tau_{seq}$.*

Demostración. Supongamos que X es secuencial. Entonces $\tau_{seq} \subset \tau$ y, por el Teorema 2.6, $\tau \subset \tau_{seq}$ así que $\tau = \tau_{seq}$. Ahora supongamos que $\tau = \tau_{seq}$. Entonces todo subconjunto de X secuencialmente abierto es abierto en X, por lo que X es secuencial.

El siguiente resultado proporciona una condición necesaria y suficiente para determinar si un espacio es secuencial.

Teorema 2.8. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es secuencial si y sólo si para cualquier $A \subset X$ que no sea cerrado en X, existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $a_n \to a$ con $a \in X - A$.*

Demostración. La existencia de una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $a_n \to a$ con $a \in X - A$, equivale a decir que A no es secuencialmente cerrado. Queremos probar, por tanto, que X es secuencial si sus subconjuntos no cerrados tampoco son secuencialmente cerrados lo que, por contrapositivo, equivale a decir que sus subconjuntos secuencialmente cerrados son cerrados, cosa que es cierta por el Teorema 2.3.

En general la propiedad de secuencialidad no es hereditaria. El siguiente resultado asegura bajo qué condiciones se puede heredar la secuencialidad.

Teorema 2.9. *Sean (X, τ) un espacio secuencial y $A \subset X$ abierto o cerrado en X. Entonces (A, τ_A) es secuencial.*

Demostración. Afirmamos que

1) si $A \subset X$ es secuencialmente abierto en X y $B \subset A$ es secuencialmente abierto en A, entonces B es secuencialmente abierto en X.

Notemos que 1) es la versión secuencial del siguiente resultado: si $A \subset X$ es abierto en X y $B \subset A$ es abierto en A, entonces B es abierto en X. Para probar 1) tomemos una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ que converge a un punto $b \in B$. Entonces $b \in A$ y, por ser A secuencialmente abierto en X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_n \in A$ para todo $n \geq N$. Como B es secuencialmente abierto en A y $\{b_n\}_{n\geq N}$ es una sucesión en A que converge a $b \in A$, existe $M \in \mathbb{N}$ con $M \geq N$

tal que $b_n \in B$ para cada $n \geq M$. Esto implica que B es secuencialmente abierto en X y, así, 1) se cumple.

Primero supongamos que $A \in \tau$. Por el Teorema 2.2, A es secuencialmente abierto en X. Sea $B \subset A$ secuencialmente abierto en A. Así por el inciso 1) y al ser X un espacio secuencial se sigue por el Teorema 2.3 que $B \in \tau$ y por lo tanto $B = A \cap B \in \tau_A$.

Supongamos ahora que A es cerrado en X. Entonces por el Teorema 2.2 tenemos que A es secuencialmente cerrado en X. Sea $W \subset A$ secuencialmente cerrado en A. Mostraremos que W es secuencialmente cerrado en X. Sea $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ que converge a un punto $w \in X$. Como $W \subset A$ esto implica que $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ y por ser A secuencialmente cerrado en X, tenemos que $w \in A$. La hipótesis de que W es secuencialmente cerrado en A garantiza que $w \in W$, con esto concluimos que W es secuencialmente cerrado en X. Por ser X un espacio secuencial, el Teorema 2.3 implica que W es cerrado en X y finalmente por el Teorema 1.32 concluimos que $W = A \cap W$ es cerrado en A.

Por el Teorema 2.3 en ambos casos concluimos que (A, τ_A) es un espacio secuencial.

El siguiente resultado garantiza cuándo la preimagen de un subconjunto secuencialmente abierto es secuencialmente abierto.

Proposición 2.10. *Sean X un espacio topológico secuencial, Y un espacio topológico y $f\colon X \to Y$ continua. Si $U \subset Y$ es secuencialmente abierto en Y, entonces $f^{-1}(U)$ es secuencialmente abierto en X.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ que converge a un punto $x \in f^{-1}(U)$, entonces $f(x) \in U$. Por ser f una función continua y por el Corolario 1.43 tenemos que $f(x_n) \to f(x)$, lo cual implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) \in U$ para todo $n \geq N$, es decir, $x_n \in f^{-1}(U)$ para todo $n \geq N$. Esto nos dice que $f^{-1}(U)$ es secuencialmente abierto en X.

Teorema 2.11. *Sean (X, τ_1) un espacio topológico secuencial, (Y, τ_2) un espacio topológico y $f\colon X \to Y$. Entonces f es continua si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x$, se tiene que $f(x_n) \to f(x)$.*

Demostración. Primero supongamos que f es continua. Por el Corolario 1.43 se tiene inmediatamente lo deseado.

Recíprocamente supongamos que para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x$, se tiene que $f(x_n) \to f(x)$. Sea $U \in \tau_2$. Por el Teorema 2.2 obtenemos que U es secuencialmente abierto en Y, por el teorema anterior tenemos que $f^{-1}(U)$ es secuencialmente abierto en X. Como X es un espacio secuencial, obtenemos que $f^{-1}(U) \in \tau_1$ y por lo tanto f es una función continua.

Los dos siguientes resultados permiten conocer las condiciones bajo las cuáles se puede preservar la secuencialidad de un espacio topológico.

Teorema 2.12. *Sean (X, τ_1) un espacio topológico secuencial, (Y, τ_2) un espacio topológico, $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to X$ continuas tales que $f \circ g = 1_Y$. Entonces Y es un espacio secuencial.*

Demostración. Sea $U \subset Y$ secuencialmente abierto en Y. Por la proposición anterior tenemos que $f^{-1}(U)$ es secuencialmente abierto en X. Como X es un espacio secuencial, se sigue que $f^{-1}(U) \in \tau_1$ y por ser g una función continua tenemos que $g^{-1}(f^{-1}(U)) \in \tau_2$, pero observemos que $g^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ g)^{-1}(U) = 1_Y(U) = U$, así $U \in \tau_2$ y por lo tanto, Y es un espacio secuencial.

Teorema 2.13. *Sean (X, τ_1) un espacio topológico secuencial, (Y, τ_2) un espacio topológico y $f\colon X \to Y$ abierta, continua y suprayectiva. Entonces Y es un espacio secuencial.*

Demostración. Sea $U \subset Y$ secuencialmete abierto en Y. Por la Proposición 2.10 tenemos que $f^{-1}(U)$ es secuencialmente abierto en X. Como X es un espacio secuencial, entonces $f^{-1}(U) \in \tau_1$, por ser f abierta y suprayectiva, tenemos que $f(f^{-1}(U)) = U \in \tau_2$. Por lo tanto, tenemos que Y es un espacio secuencial.

Ahora veamos que la propiedad de "ser secuencial" es topológica.

Teorema 2.14. *Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) dos espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ un homeomorfismo. Si Y es secuencial, entonces X es secuencial.*

Demostración. Sea $U \subset X$ secuencialmente abierto en X. Mostraremos que $f(U)$ es secuencialmente abierto en Y. Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que $y_n \to y \in f(U)$.

Sea $x = f^{-1}(y)$ y para cada n definimos $x_n = f^{-1}(y_n)$. Por lo tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sucesión en X. Mostremos que $x_n \to x$.

Sea $W \in \tau_1$ tal que $x \in W$. Por ser f una función abierta, $f(W) \in \tau_2$ y además por el inciso 2) del Teorema 1.12 tenemos que $y = f(f^{-1}(y_n)) = f(x) \in f(W)$. Por lo tanto existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in f(W)$ para todo $n \geq M$. Dada $n \geq M$, $x_n = f^{-1}(y_n) \in f^{-1}(f(W)) = W$, así $x_n \to x$. Más aún, notemos que $x = f^{-1}(y) \in f^{-1}(f(U)) = U$. Por ser U secuencialmente abierto en X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. Concluimos que $y_n = f(x_n) \in f(U)$ para todo $n \geq N$, es decir, $f(U)$ es secuencialmente abierto en Y. Como Y es un espacio secuencial, tenemos que $f(U) \in \tau_2$ y finalmente, por ser f una función inyectiva y continua se tiene que $U = f^{-1}(f(U)) \in \tau_1$. Por lo tanto, X es un espacio secuencial.

Teorema 2.15. *La propiedad de ser secuencial es factorizable.*

Demostración. Sean $\{(X_s, \tau_s)\}_{s\in S}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos y $X = \prod_{s\in S} X_s$. Consideremos en X la topología producto τ_p y supongamos que X es un espacio secuencial. El resultado es consecuencia del Teorema 2.13 pues las proyecciones son funciones continuas, abiertas y supreyectivas.

En [11, Ejemplo 1.10] se construyen dos espacios secuenciales cuyo producto cartesiano no es secuencial. Por tanto la propiedad de ser secuencial no es multiplicativa.

2.2. Propiedades de los espacios de Fréchet

En esta sección estudiaremos las propiedades básicas de los espacios de Fréchet, incluyendo resultados que nos permitan saber cuándo un espacio es de Fréchet. También estudiaremos la relación que tienen los espacios de Fréchet con los espacios secuenciales.

Definición 2.16. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que X es un* ***espacio de Fréchet*** *si para cada $A \subset X$ se cumple que $x \in \overline{A}^X$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que converge a x.*

El siguiente resultado dice que para probar que un espacio topológico es de Fréchet, basta demostrar que para cada $A \subset X$, si $x \in \overline{A}^X$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que converge a x.

Proposición 2.17. *Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$. Si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que converge a x, entonces $x \in \overline{A}^X$*

Demostración. Sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$. Como $x_n \to x$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. Además $x_n \in A \cap U$ para todo $n \geq N$, es decir, $A \cap U \neq \emptyset$ y por lo tanto, $x \in \overline{A}^X$

Ejemplo 2.18. *Los espacios topológicos $1N$ son espacios de Fréchet.*

Se sigue inmediatamente del Teorema 1.47 inciso 1).

El siguiente resultado nos dice que la propiedad de Fréchet es hereditaria.

Teorema 2.19. *La propiedad de ser un espacio de Fréchet es hereditaria.*

Demostración. Sean X un espacio topológico de Fréchet, $A \subset X$. Mostraremos que (A, τ_A) es un espacio de Fréchet.

Sean $x \in A$, $U \subset A$ tales que $x \in \overline{U}^A$. Probaremos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ que converge a x en A. Por el Teorema 1.38 sabemos que $\overline{U}^A = \overline{U}^X \cap A$, entonces $x \in \overline{U}^X$ y por ser X un espacio de Fréchet, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ que converge a x en X. Sea $D \in \tau_A$ con $x \in D$, entonces existe $B \in \tau$ tal que $D = A \cap B$, así que $x \in B$ y como $x_n \to x$ en X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B$ para todo $n \geq N$. Entonces tenemos que $x_n \in B \cap A = D$ para todo $n \geq N$, es decir $x_n \to x$ en A. Finalmente (A, τ_A) es un espacio de Fréchet.

Los espacios de Fréchet y los espacios secuenciales tienen una relación. El siguiente teorema nos asegura que todo espacio de Fréchet es un espacio secuencial.

Teorema 2.20. *Todo espacio topológico de Fréchet es un espacio secuencial.*

Demostración. Sea X un espacio topológico de Fréchet y $U \subset X$ secuencialmente cerrado en X. Mostraremos que U es cerrado en X, para esto bastará probar que $\overline{U}^X \subset U$.

Sea $x \in \overline{U}^X$, por ser X un espacio de Fréchet existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ tal que $x_n \to x$. Como U es secuencialmente cerrado en X esto implica que $x \in U$, así $U = \overline{U}^X$ y por el Teorema 2.3 concluimos que X es un espacio secuencial.

Tenemos entonces la siguientes implicaciones

$$1N \Rightarrow \text{ Fréchet } \Rightarrow \text{ Secuencia.l}$$

Es decir, todo espacio 1N es de Fréchet y todo espacio de Fréchet es secuencial. Las implicaciones anteriores no son reversibles pues, en [11, Ejemplo 2.2] como en [9, Ejemplo 1.6.19], se construye un espacio secuencial que no es de Fréchet, mientras que en [9, Ejemplo 1.6.18] se muestra un espacio de Fréchet que no es 1N.

En el siguiente resultado mostraremos que solamente en los espacios de Fréchet, la propiedad de ser secuencial es hereditaria.

Teorema 2.21. *Sea X un espacio secuencial. Cada subespacio de X es secuencial si y sólo si X es un espacio de Fréchet.*

Demostración. Primero supongamos que cada subespacio de X es secuencial. Sean $A \subset X$ y $x \in X$ tales que $x \in \overline{A}^X$. Supongamos que $x \notin A$, entonces por hipótesis $A \cup \{x\}$ es secuencial. Mostraremos que A no es secuencialmente cerrado en $A \cup \{x\}$, para esto supongamos lo contrario. Como $A \cup \{x\}$ es secuencial por el Teorema 2.3 tenemos que A es cerrado en $A \cup \{x\}$ y por lo tanto existe $D \subset X$ cerrado en X tal que $A = D \cap (A \cup \{x\}) = (D \cap A) \cup (D \cap \{x\})$.

Afirmamos que $x \notin D$, porque de lo contrario $D \cap \{x\} = \{x\}$, lo que implica que $x \in A$ porque $A = (D \cap A) \cup \{x\}$ lo cual es una contradicción pues $x \notin A$. Entonces $A = A \cap D$ y por lo tanto, $A \subset D$ y así $x \in \overline{A}^X \subset \overline{D}^X = D$ y nuevamente obtenemos una contradicción. Así obtenemos que A no es secuencialmente cerrado en $A \cup \{x\}$ y por el Teorema 2.8 existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \to x$ en $A \cup \{x\}$, más aún $x_n \to x$ en X. Por lo tanto, concluimos que X es un espacio de Fréchet.

Para demostrar la segunda parte, supongamos que X es un espacio de Fréchet. Sea $A \subset X$, por el Teorema 2.19 tenemos que (A, τ_A) es un espacio de Fréchet y por el teorema anterior obtenemos que (A, τ_A) es secuencial. Por lo tanto cada subespacio de X es secuencial.

El producto de espacios de Fréchet no necesariamente es un espacio de Fréchet. El lector interesado puede consultar ejemplos en la introdcucción de [20]

En el siguiente resultado estudiaremos la relación entre los espacios de Fréchet y las funciones continuas.

Teorema 2.22. *Sean X un espacio de Fréchet, Y un espacio topológico y $f\colon X \to Y$. Entonces f es continua si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x$, se tiene que $f(x_n) \to f(x)$.*

Demostración. Por el Teorema 2.20 tenemos que X es un espacio secuencial. Por el Teorema 2.11 obtenemos el resultado deseado.

El siguiente resultado es análogo al resultado de espacios secuenciales.

Teorema 2.23. *Sean X un espacio de Fréchet, Y un espacio topológico, $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to X$ continuas tales que $f \circ g = 1_Y$. Entonces Y es un espacio de Fréchet*

Demostración. Sean $A \subset Y$ y $a \in Y$ tal que $a \in \overline{A}^Y$. Entonces $g(a) \in g(\overline{A}^Y)$ y por ser g una función continua, por el Teorema 1.31 tenemos que $g(a) \in g(\overline{A}^Y) \subset \overline{g(A)}^X$. Por ser X un espacio de Fréchet existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset g(A)$ tal que $x_n \to g(a)$ y por lo tanto $f(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \subset f(g(A)) = A$. Como f es una función continua por el teorema anterior tenemos que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en A tal que $f(x_n) \to f(g(a)) = a$. Por lo tanto, Y es un espacio de Fréchet.

El siguiente lema será de ayuda para poder demostrar la preservación de la propiedad "ser de Fréchet", bajo una función continua, suprayectiva y abierta.

Lema 2.24. *Sean X y Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ suprayectiva. Entonces para cada $D \subset Y$ se cumple*

$$f(X - \overline{f^{-1}(D)}^X) \cap D = \emptyset$$

Demostración. Sea $D \subset Y$. Entonces tenemos $f^{-1}(D) \subset \overline{f^{-1}(D)}^X$, lo cual implica que $X - \overline{f^{-1}(D)}^X \subset X - f^{-1}(D)$. Pero por el inciso 1.2) del Teorema 1.11 obtenemos que $X - f^{-1}(D) = f^{-1}(Y - D)$, por lo cual, $X - \overline{f^{-1}(D)}^X \subset f^{-1}(Y - D)$. Finalmente por el inciso 2) del Teorema 1.12 tenemos que $f(X - \overline{f^{-1}(D)}^X) \subset f(f^{-1}(Y - D) = Y - D$ con lo que concluimos que $f(X - \overline{f^{-1}(D)}^X) \cap D = \emptyset$

Teorema 2.25. *Sean (X, τ_1) un espacio de Fréchet, (Y, τ_2) un espacio topológico y $f\colon X \to Y$ continua, suprayectiva y abierta. Entonces Y es un espacio de Fréchet.*

Demostración. Sean $B \subset Y$, $y \in Y$ tales que $y \in \overline{B}^Y$. Mostraremos por contradicción que $f^{-1}(\{y\}) \cap \overline{f^{-1}(B)}^X \neq \emptyset$. Supongamos que $f^{-1}(\{y\}) \cap \overline{f^{-1}(B)}^X = \emptyset$, entonces esto implica que $f^{-1}(\{y\}) \subset X - \overline{f^{-1}(B)}^X \in \tau_1$. Por ser f una función abierta, $y \in f(X - \overline{f^{-1}(B)}^X) \in \tau_2$. Como $y \in \overline{B}^Y$, tenemos que $f(X - \overline{f^{-1}(B)}^X) \cap B \neq \emptyset$ pero esto es una contradicción al lema anterior, así que existe $w \in f^{-1}(\{y\}) \cap \overline{f^{-1}(B)}^X$. Por ser X un espacio de Fréchet, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset f^{-1}(B)$ tal que $x_n \to w$. Dado que f es una función continua, por el Teorema 2.22 concluimos que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ es tal que $f(x_n) \to f(w) = y$, pues $y \in f^{-1}(\{y\})$. Por lo tanto Y es un espacio de Fréchet.

Corolario 2.26. *La propiedad de ser un espacio de Fréchet es topológica.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del teorema anterior

Corolario 2.27. *La propiedad de ser un espacio de Fréchet es factorizable.*

Demostración. Se sigue del Teorema 2.25

El siguiente resultado nos muestra condiciones bajo las cuales se preserva la propiedad de Fréchet por medio de la función inversa.

Teorema 2.28. *Sean X, Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ continua, biyectiva y tal que $f^{-1} : Y \to X$ es una función continua. Si Y es un espacio de Fréchet, entonces X es un espacio de Fréchet.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del Teorema 2.26

Capítulo 3

Espacios KC y US

3.1. Definiciones y ejemplos

En el presente capítulo se abordan resultados sobre los espacios llamados KC y sobre los US. Con dicho nombre, éstos espacios fueron introducidos en 1967 por A. Wilansky en [26, p. 262] aunque, con diferente nombre aparecieron anteriormente. Por ejemplo en 1965 C. E. Aull y N. Levine, en artículos distintos, se refirieron a los espacios KC con la notación J_1' y CC, respectivamente. También en 1965, H. F. Cullen se refiere en [7] a los espacios US como "espacios con límite secuencial único". En 1966 M. G. Murdershwar y S. A. Naimpally usaron el nombre *semi-Hausdorff* para referirse a los espacios US. Entre otras cosas, veremos si "ser un espacio KC" y "ser un espacio US" son propiedades hereditarias, topológicas, factorizables y multiplicativas. Además de si se preservan y se antipreservan.

Definición 3.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que X es*

1) *un **espacio** KC si cada $A \subset X$ compacto es cerrado en X;*

2) *un **espacio** US si toda sucesión convergente en X, tiene un único límite. A estos espacios también se les llama **espacios de convergencia única**.*

Para simplificar, en varias ocasiones diremos "X es KC" y "X es US" respectivamente, en lugar de "X es un espacio KC" y "X es un espacio US." En vista de la Definición 3.1, el Teorema 1.62 se puede reformular como sigue.

Proposición 3.2. *Todo espacio T_2, es KC.*

Ejemplo 3.3. *Los espacios metrizables, la recta de Sorgenfrey y el plano de Moore son T_2 y por la* Proposición 3.2*, también son espacios KC.*

Proposición 3.4. *Todo espacio KC es T_1.*

Demostración. Sea $x \in X$. Dado que $\{x\}$ es compacto y X es KC, tenemos que $\{x\}$ es cerrado en X. Luego por el Teorema 1.49, X es T_1.

En símbolos, las Proposiciones 3.2 y 3.4 dicen que

$$T_2 \implies KC \implies T_1,$$

así que el axioma KC se encuentra entre los axiomas de separación T_1 y T_2. Vamos a indicar cómo queda colocado el axioma US.

Teorema 3.5. $T_2 \implies KC \implies US \implies T_1$.

Demostración. Supongamos que X es KC. Si X no es US, entonces existen una sucesión convergente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $a, b \in X$ tales que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto a y también al punto b con $a \neq b$. Por la Proposición 3.4 X es T_1 así que, por el Teorema 1.49, $\{b\}$ es cerrado en X. Luego $X - \{b\}$ es un subconjunto abierto de X que tiene al punto a. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq n_0$, sucede que $x_n \in X - \{b\}$. Como la subsucesión $\{x_i\}_{i\geq n_0}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto a, por el Teorema 1.58, el conjunto

$$K = \{x_i \colon i \geq n_0\} \cup \{a\} \subset X - \{b\}$$

es compacto. En vista de que X es KC, resulta que K es cerrado en X. Sea V un abierto de X con $V \subset X - K$ tal que $b \in V$. Como la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto b, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq s$, $x_n \in V$. Sea $N = \max\{n_0, s\}$. Entonces, para todo $n \geq N$, tenemos que $x_n \in V \cap K$. Luego $b \in \overline{K}^X = K$. Esto contradice el hecho de que K es un subconjunto de $X - \{b\}$. Por tanto, X es US.

Supongamos ahora que X es US. Sean $x \in X$ y $y \in \overline{\{x\}}^X$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = x$. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión constante y por tanto, converge a x. Si U es un abierto de X tal que $y \in U$, entonces $U \cap \{x\} \neq \emptyset$. Luego $x_n = x \in U$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y. En vista de que X es US, tenemos que $x = y$. Esto muestra que $\overline{\{x\}}^X \subset \{x\}$. Por lo cual $\{x\}$ es cerrado en X. Por el Teorema 1.49, concluimos que X es T_1

En la Sección 1.5, vimos que la extensión cerrada (X^*, τ_e) del espacio topológico (X, τ) no es T_1. Entonces, por el Teorema 3.5, (X^*, τ_e) no es KC ni US. Recordemos que $\{\infty\}$ es compacto, abierto y no cerrado en (X^*, τ_e).

Ahora vamos a ver que las implicaciones enunciadas en el Teorema 3.5, no son reversibles.

Teorema 3.6. *Sea X un conjunto infinito con la topología cofinita τ_{CF}. Entonces (X, τ_{CF}) es compacto y T_1 pero no US.*

Demostración. Dada $z \in X$ tenemos que $X - \{z\} \in \tau_{CF}$, así que $\{z\}$ es cerrado en X. Luego, por el Teorema 1.49, (X, τ_{CF}) es T_1. Supongamos ahora que $\Im = \{U_\alpha \colon \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de X. Sea $\alpha_0 \in I$ tal que $U_{\alpha_0} \neq \emptyset$. Entonces $X - U_{\alpha_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un conjunto finito. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sea $\alpha_i \in I$ tal que $x_i \in U_{\alpha_i}$. Entonces

$$X = U_{\alpha_0} \cup (X - U_{\alpha_0}) = \bigcup_{i=0}^{n} U_{\alpha_i},$$

por lo que $\{U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ es una subcubierta finita de $\Im$. Esto prueba que (X, τ_{CF}) es compacto.

Como X es infinito, entonces X contiene una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$, entonces $x_n \neq x_m$. Sean $x \in X$ y $U \in \tau_{CF}$ tales que $x \in U$. Como $X - U$ es finito, todos los miembros de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ están en U, salvo una cantidad finita. Esto implica que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Como el punto x es arbitrario, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a todos los elementos de X. Luego X no es US.

Teorema 3.7. *Consideremos el espacio* $[0, 1]$ *con la topología usual* τ_u. *Sean* $X = [0, 1] \cup \{2\}$ *y*

$$\tau = \tau_u \cup \{U \cup \{2\} \colon U \in \tau_u \text{ y } U \text{ es denso en } [0, 1]\}.$$

Entonces τ *es una topología en* X *y el espacio topológico* (X, τ) *es compacto y* US *pero no* KC.

Demostración. Notemos que $\emptyset \in \tau_u \subset \tau$. Además $[0, 1] \in \tau_u$ y $[0, 1]$ es denso en $[0, 1]$, por lo que $X = [0, 1] \cup \{2\} \in \tau$. Supongamos ahora que $V_1, V_2 \in \tau$. Si $V_1, V_2 \in \tau_u$, entonces $V_1 \cap V_2 \in \tau_u \subset \tau$. Supongamos ahora que

$$V_1 = U_1 \cup \{2\} \quad \text{y} \quad V_2 = U_2 \cup \{2\},$$

donde $U_1, U_2 \in \tau_u$ y son densos en $[0, 1]$. Entonces

$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap U_2) \cup \{2\}, \quad U_1 \cap U_2 \in \tau_u$$

Además afirmamos que $U_1 \cap U_2$ es denso en $[0, 1]$. Sea $W \in \tau_u$ no vacío, entonces $U_1 \cap W \in \tau_u$ no vacío. Por la densidad de U_2 y la Proposición 1.37 implica que $(W \cap U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. Nuevamente por la Proposición 1.37 concluimos que $U_1 \cap U_2$ es denso en $[0, 1]$

Supongamos ahora, sin perder generalidad, que $V_1 \in \tau_u$ y $V_2 = U \cup \{2\}$, donde $U \in \tau_u$ y es denso en $[0, 1]$. Entonces $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap U \in \tau_u \subset \tau$. Esto prueba que la intersección de cada dos elementos de τ está en τ. Probaremos que la unión de elementos elementos de τ esta en τ.

Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau$ una familia no vacía de abiertos de X no vaciós. Si $V_\alpha \in \tau_u$ para toda $\alpha \in I$, entonces $\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha \in \tau_u \subset \tau$.

Si $V_\alpha = U_\alpha \cup \{2\}$ es tal que $U_\alpha \in \tau_u$ y es denso para toda $\alpha \in I$, entonces

$$\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}(U_\alpha \cup \{2\}) = (\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha) \cup \{2\}, \quad \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \tau_u$$

También afirmamos que $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ es denso en $[0,1]$. Sea $B \in \tau_u$ no vacío, tenemos que $(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha) \cap B \in \tau_u$ y no vacío. Por ser U_{α_0} denso en $[0,1]$ para algún $\alpha_0 \in I$, por la Proposición 1.37 concluimos que $(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha) \cap B \neq \emptyset$. Finalmente por la Proposición 1.37 tenemos lo deseado.

Finalmente supongamos sin pérdida de generalidad que existen $I_1, I_2 \subset I$ no vacíos y $I_1 \cup I_2 = I$, tales que para todo $\alpha \in I_1$, $V_\alpha \in \tau_u$ y para todo $\alpha \in I_2$, $V_\alpha = U_\alpha \cup \{2\}$ con $U_\alpha \in \tau_u$ y denso en $[0,1]$

$$\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha = (\bigcup_{\alpha\in I_1} V_\alpha) \cup (\bigcup_{\alpha\in I_2} V_\alpha) = \left((\bigcup_{\alpha\in I_1} V_\alpha) \cup (\bigcup_{\alpha\in I_2} U_\alpha)\right) \cup \{2\}, \quad (\bigcup_{\alpha\in I_1} V_\alpha) \cup (\bigcup_{\alpha\in I_2} U_\alpha) \in \tau_u$$

Por el mismo argumento dado en el párrafo anterior podemos concluir que $(\bigcup_{\alpha\in I_1} V_\alpha) \cup (\bigcup_{\alpha\in I_2} U_\alpha)$ es denso en $[0,1]$. Esto prueba que la unión de elementos de τ está en τ y por lo tanto τ es una topología para X.

Para ver que (X,τ) es US, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a $x \in X$. Supongamos que para un subconjunto infinito I de $\mathbb{N}$ sucede que $x_n = 2$ para todo $n \in I$. Si $x \in [0,1]$, entonces, al ser $[0,1]$ un elemento de τ_u, todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ están en $[0,1]$, salvo una cantidad finita. Esto contradice la elección de I, por lo que $x = 2$. Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $y \in X - \{x\}$, entonces $y \in [0,1]$ y, repitiendo el argumento anterior, todos los elementos de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ están en $[0,1]$ salvo una cantidad finita. En vista de que esto contradice el hecho de que una infinidad de miembros de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son 2. Hemos mostrado que la sucesión convergente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede converger a un elemento de $[0,1]$, por lo que converge solamente a $x = 2$.

Ahora supongamos que sólo una cantidad finita de elementos de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son 2. Entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n\}_{n\geq M} \subset [0,1]$. Ya que $[0,1]$ como subespacio de X tiene la topología usual, la suceción $\{x_n\}_{n\geq M}$ converge a lo más a un elemento z de $[0,1]$. Esto significa que 2 y z son los únicos puntos de acumulación de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y z es el único en $[0,1]$.

Entonces bajo el supuesto de que z existe, el conjunto $\{x_n : n \geq M\} \cup \{z\}$ es cerrado en $[0,1]$, luego $U = [0,1] - \{x_n : n \geq M\} \cup \{z\}$ es abierto en $[0,1]$ y como $\{x_n : n \geq M\} \cup \{z\}$ es numerable, U también es denso en $[0,1]$. Por tanto $V = U \cup \{2\}$ es un abierto en X que tiene a 2 y solo una cantidad finita de miembros de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ estan en V. En vista de que esto contradice el hecho de que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, deducimos que $x \in [0,1]$. Usando que

$([0,1], \tau_u)$ es US, deducimos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ solamente converge a x. Esto prueba que (X, τ) es US.

Ahora supongamos que $\Im = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una cubierta abierta de $[0,1]$, formada con abiertos de (X,τ). Definimos $\beta = \{U_\alpha \cap [0,1]\}_{\alpha\in I}$. Entonces β es una cubierta abierta de $[0,1]$, formada con abiertos del espacio compacto $([0,1], \tau_u)$. Esto implica que β posee una subcubierta finita, la cual induce una subcubierta finita de $\Im$. Luego, $[0,1]$ es compacto en (X,τ). Como también $\{2\}$ es compacto en (X,τ), por el Teorema 1.61, $X = [0,1] \cup \{2\}$ es compacto.

Por definición, los elementos de τ que tienen a 2 intersectan a $[0,1]$. Esto implica que $\{2\}$ no es abierto en (X,τ). Luego $X - \{2\} = [0,1]$ no es cerrado en (X,τ). Tenemos así que $[0,1]$ es un compacto en (X,τ) que no es cerrado. Esto prueba que (X,τ) no es KC.

Más adelante vamos a definir otros espacios compactos y US que no son KC. Presentamos ahora un espacio KC que no es T_2.

Teorema 3.8. *Sea X un conjunto no numerable con la topología conumerable τ_{CN}. Entonces (X, τ_{CN}) es KC pero no T_2 ni compacto.*

Demostración. Vamos a probar primero que todo subconjunto compacto de (X, τ_{CN}) es finito. Supongamos que K es un subconjunto compacto e infinito de X. Construimos un subconjunto infinito y numerable $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de K como sigue: fijamos $x_1 \in K$ y, si suponemos que los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ya han sido construidos, entonces fijamos

$$x_{m+1} \in K - \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $U_n = (X - D) \cup \{x_n\}$. Dada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $D - \{x_n\}$ es un subconjunto numerable de X tal que

$$X - (D - \{x_n\}) = (X - D) \cup (X \cap \{x_n\}) = (X - D) \cup \{x_n\} = U_n.$$

Luego $U_n \in \tau_{CN}$. Además

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} ((X - D) \cup \{x_n\}) = (X - D) \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\} \Big) = (X - D) \cup D = X.$$

Entonces $\Omega = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de X y, por tanto, también del compacto K. Luego existe $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\} \subset \Omega$ tal que $K \subset \bigcup_{n=1}^{k} U_n$. Notemos que

$$\bigcup_{n=1}^{k} U_n = \bigcup_{n=1}^{k} ((X - D) \cup \{x_n\}) = (X - D) \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{k} \{x_n\} \Big) = (X - D) \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}.$$

Claramente x_{k+1} es un elemento de K que no está en $(X-D)\cup\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ y, por tanto, tampoco en $\bigcup_{n=1}^{k} U_n$. Luego K no está contenido en $\bigcup_{n=1}^{k} U_n$, lo cual es una contradiccion. Por lo tanto K es finito y, así, todo subconjunto compacto de (X,τ_{CN}) es finito. En particular (X,τ_{CN}) no es compacto, pues X es no numerable.

Supongamos ahora que K es un subconjunto compacto de (X,τ_{CN}). Como acabamos de probar, K es finito y, por tanto, numerable. Luego $X-K\in\tau_{CN}$, de donde K es cerrado en (X,τ_{CN}). Esto prueba que (X,τ_{CN}) es KC.

Supongamos ahora que (X,τ_{CN}) es T_2. Tomemos $x,w\in X$ con $x\neq w$ así como $U,V\in\tau_{CN}$ disjuntos tales que $x\in U$ y $w\in V$. Entonces $X-U$ y $X-V$ son numerables y, como $U\cap V=\emptyset$, al tomar complementos sucede que $(X-U)\cup(X-V)=X$ es numerable, esto es una contradicción. Por lo tanto (X,τ_{CN}) no es T_2.

En la Sección 3.4, presentaremos un espacio compacto y KC que no es T_2.

3.2. Propiedades de los espacios KC y US

Ahora vamos a presentar propiedades de los espacios KC y de los US.

Proposición 3.9. *Ser KC y ser US son propiedades hereditarias.*

Demostración. Sean (X,τ) un espacio KC y $A\subset X$. Mostremos que (A,τ_A) es KC. Para esto, sea B un subconjunto compacto de A. Como $B\subset A\subset X$, por la Proposición 1.60, B es compacto en X el cual es KC, así que B es cerrado en X. Ahora bien, por el Teorema 1.38,

$$\overline{B}^A=\overline{B}^X\cap A=B\cap A=B.$$

Luego B es cerrado en A y, así, (A,τ_A) es KC.

Ahora supongamos que (X,τ) es US y que $A\subset X$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A, que converge a los puntos x y y de A. Si $U\in\tau$ es tal que $x\in U$, entonces $U\cap A\in\tau_A$ y $x\in U\cap A$. Esto implica, por la convergencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a x, que todos los elementos de dicha sucesión están en $U\cap A$, y por tanto también en U, salvo un número finito de ellos. Luego la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en (X,τ). De manera similar, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y en (X,τ). Como X es US, esto implica que $x=y$. Por tanto, (A,τ_A) es US.

Ahora vemos condiciones, bajo las cuales, "ser KC" y "ser US" se preservan.

Proposición 3.10. *Sean X,Y espacios topológicos y $f\colon X\to Y$ cerrada, suprayectiva y de fibras compactas. Si X es KC, entonces Y es KC.*

Demostración. Sea A un subconjunto compacto de Y. Por la Proposición 1.67, $f^{-1}(A)$ es un subconjunto compacto de X, el cual es KC. Luego $f^{-1}(A)$ es cerrado en X y, como f es cerrada y suprayectiva, usando la parte 2) del Teorema 1.12, $A = f(f^{-1}(A))$ es cerrado en Y. Esto prueba que Y es KC.

Corolario 3.11. *La propiedad KC es topológica.*

Corolario 3.12. *La propiedad KC es factorizable.*

El Corolario 3.11 se sigue del hecho de que los homeomorfismos son funciones perfectas y suprayectivas. El Corolario 3.12 se sigue de la Proposición 1.97.

Proposición 3.13. *Sean X, Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ biyectiva y abierta. Si X es US, entonces Y es US.*

Demostración. Supongamos que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Y, que converge a los puntos y y z de Y. Sean $\{x\} = f^{-1}(\{y\})$, $\{w\} = f^{-1}(\{z\})$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\{x_n\} = f^{-1}(\{y_n\})$. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X. Sea U un abierto en X tal que $x \in U$. Como f es abierta, $f(U)$ es un abierto en Y con $\{y\} = f(f^{-1}(\{y\})) = f(x) \in f(U)$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, sucede que $y_n \in f(U)$. Dada $n \geq N$, por la parte 1) del Teorema 1.12,

$$\{x_n\} = f^{-1}(\{y_n\}) \in f^{-1}(f(U)) = U.$$

Esto implica que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. De manera similar vemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a w. En vista de que X es US, sucede que $x = w$. Luego $y = f(x) = f(w) = z$, por lo que Y es US.

Corolario 3.14. *La propiedad US es topológica.*

Corolario 3.15. *La propiedad US es factorizable.*

El Corolario 3.14 se sigue del hecho de que los homeomorfismos son funciones abiertas y biyectivas. El Corolario 3.15 se sigue de la Proposición 1.97.

Ahora veamos condiciones, bajo las cuales, "ser KC" y "ser US" se preservan por preimágenes de funciones continuas e inyectivas.

Proposición 3.16. *Sean X, Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ continua e inyectiva. Si Y es KC, entonces X es KC.*

Demostración. Sea B un subconjunto compacto de X. Como f es continua, por el Teorema 1.65, $f(B)$ es un subconjunto compacto de Y, el cual es KC. Luego $f(B)$ es cerrado en Y. De la continuidad de f y el inciso 1) del Teorema 1.12

$$B = f^{-1}(f(B))$$

es cerrado en X. Esto prueba que X es KC.

Proposición 3.17. *Sean X, Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ continua e inyectiva. Si Y es US, entonces X es US.*

Demostración. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X, que converge a los puntos x y y en X. Por el Teorema 1.42, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Y que converge a $f(x)$ y a $f(y)$. Como Y es US, sucede que $f(x) = f(y)$. Luego, $x = y$, pues f es inyectiva. Por tanto, X es US.

Teorema 3.18. *La propiedad US es multiplicativa.*

Demostración. Sea $\{(X_s, \tau_s)\}_{s\in S}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. Definimos $X = \prod_{s\in S} X_s$ y consideremos en X la topología producto τ_p. Supongamos que cada X_s es US. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converge a los puntos $a = \{a_s\}_{s\in S}$ y $b = \{b_s\}_{s\in S}$ de X. Si $a \neq b$, entonces existe $t \in S$ tal que $a_t \neq b_t$. Consideremos la proyección $\rho_t\colon X \to X_t$. Como p_t es una función continua, por el Teorema 1.42, $\{p_t(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X_t que converge tanto a $p_t(a) = a_t$, como a $p_t(b) = b_t$. Como X_t es US, esto implica que $a_t = b_t$. Esto contradice el hecho de que $a_t \neq b_t$ y, debido a que la contradicción proviene de haber supuesto que a y b son distintos puntos de X, deducimos que $a = b$.

La propiedad KC no es multiplicativa. Para ver esto necesitamos de una construcción que daremos en la Sección 3.4. El siguiente resultado es un caso particular de cuando el producto de dos espacios topológicos es un espacio KC.

Teorema 3.19. *Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) dos espacios topológicos. Si X es KC y Y es T_2, entonces $X \times Y$ es KC.*

Demostración. Sea D un subconjunto compacto de $X \times Y$. Supongamos que D no es cerrado en $X \times Y$. Entonces existe $(x, y) \in \overline{D}^{X\times Y} - D$. Vamos a construir $G \in \tau_1$ y $W \in \tau_2$ de manera que $G \times W$ es un abierto en $X \times Y$ que tiene a (x, y) y no intersecta a D. Para esto, consideremos las proyecciones $\rho_1 : X \times Y \to X$ y $\rho_2 : X \times Y \to Y$ definidas como

$$\rho_1(a, b) = a \quad \text{y} \quad \rho_2(a, b) = b, \quad \text{para cada } (a, b) \in X \times Y.$$

Por el Teorema 1.91, ρ_1 y ρ_2 son funciones continuas. Además, por el Teorema 1.65, $\rho_1(D)$ es un subconjunto compacto de X, el cual es KC, así que $\rho_1(D)$ es cerrado en X. En particular,

$$\overline{\rho_1(D)}^X = \rho_1(D). \tag{3.1}$$

Afirmamos que $x \in \rho_1(D)$. Sea $U \in \tau_1$ tal que $x \in U$. Como $U \times Y$ es un abierto de $X \times Y$ que tiene al punto (x, y), el cual está en la cerradura de D, sucede que $(U \times Y) \cap D \neq \emptyset$. Si $(a, b) \in (U \times Y) \cap D$, entonces $a \in U \cap \rho_1(D)$, por lo que $U \cap \rho_1(D) \neq \emptyset$. Luego $x \in \overline{\rho_1(D)}^X$ y, por (3.1), $x \in \rho_1(D)$. Sea

$$K = \rho_1^{-1}(\{x\}) \cap D.$$

Como X es KC, por la Proposición 3.4, X es T_1. Luego, por el Teorema 1.49, $\{x\}$ es cerrado en X. Por el Teorema 1.13, tenemos que $\rho_1^{-1}(\{x\})$ es cerrado en $X \times Y$. Luego K es cerrado en el espacio compacto D y, por el Teorema 1.63, K es un subconjunto compacto de $X \times Y$. Ahora, por el Teorema 1.65, $\rho_2(K)$ es un subconjunto compacto de Y. Si $y \in \rho_2(K)$, entonces existe $(c,d) \in K \subset \rho_1^{-1}(\{x\})$ tal que $\rho_2(c,d) = y$. Entonces $c = \rho_1(c,d) = x$ y $d = \rho_2(c,d) = y$, por lo que $(x,y) \in K \subset D$. Esto contradice el hecho de que $(x,y) \notin D$, así que $y \notin \rho_2(K)$.

Hemos visto que $\rho_2(K)$ es un subconjunto compacto del espacio Y, que es T_2, tal que $y \notin \rho_2(K)$. Entonces, por la Proposición 1.64, existen $W, V \in \tau_2$ disjuntos tales que $y \in W$, $\rho_2(K) \subset V$. La igualdad $W \cap V = \emptyset$ implica que

$$\overline{W}^Y \cap V = \emptyset. \tag{3.2}$$

Definimos $A = (X \times \overline{W}^Y) \cap D$. Notemos que $X \times \overline{W}^Y$ es cerrado en $X \times Y$, así que A es cerrado en el espacio compacto D. Luego, por el Teorema 1.63, A es compacto y, por el Teorema 1.65, $\rho_1(A)$ es un subconjunto compacto de X, el cual es KC, así que $\rho_1(A)$ es cerrado en X.

Sea $G = X - \rho_1(A)$. Tenemos que $G \in \tau_1$ y $G \cap \rho_1(A) = \emptyset$. Si $x \in \rho_1(A)$, entonces existe $(u,v) \in A$ tal que $u = \rho_1(u,v) = x$. Además $(u,v) \in A \subset X \times \overline{W}^Y$, así que $v \in \overline{W}^Y$. Como $u = x$, tenemos que $(x,v) \in D$, de donde $(x,v) \in \rho_1^{-1}(\{x\}) \cap D = K$. Luego $v = \rho_2(x,v) \in \rho_2(K) \subset V$. Así concluimos que $v \in \overline{W}^Y \cap V$, lo cual contradice (3.2). Por tanto $x \notin \rho_1(A)$, de donde $x \in G$.

Por construcción de G y W, tenemos que $G \times W$ es un abierto de $X \times Y$ que tiene al punto (x,y) que supusimos en la cerradura de D. Luego $(G \times W) \cap D \neq \emptyset$ así que existe $(p,q) \in (G \times W) \cap D$. Como $G \times W \subset X \times \overline{W}^Y$, sucede que $(p,q) \in (X \times \overline{W}^Y) \cap D = A$. Luego $p \in G \cap \rho_1(A) \neq \emptyset$. Esto contradice el hecho de que $G \cap \rho_1(A) = \emptyset$. Finalmente tenemos que D es cerrado en $X \times Y$ y así, $X \times Y$ es KC.

En el Teorema 6.2 del capítulo 6 se da un ejemplo de dos espacios KC cuyo producto no es un espacio KC.

3.3. Más propiedades de los espacios KC y de los US

Hemos visto las propiedades más elementales de los espacios KC y de los US. Ahora vamos a dar otros resultados. Por ejemplo, daremos condiciones bajo las cuales un espacio US es KC, o bien un espacio KC es T_2. En el siguiente resultado vemos formas alternativas de enunciar el axioma KC. La propiedad 2) muestra que ser KC es una modificación del axioma de separación T_1, cambiando puntos por conjuntos compactos.

Teorema 3.20. *En un espacio topológico X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *X es KC;*

2) *para cualesquiera dos subconjuntos compactos C y D de X, tales que $C \cap D = \emptyset$, existen abiertos U y V en X tales que $C \subset U - V$ y $D \subset V - U$.*

3) *para todo subconjunto compacto C de X y cada $x \in X - C$, existen abiertos U y V en X tales que $x \in U - V$ y $C \subset V - U$.*

Demostración. Supongamos que X es KC. Sean C y D dos subconjuntos compactos de X, tales que $C \cap D = \emptyset$. Como X es KC, tanto C como D son cerrados en X. Luego $U = X - D$ y $V = X - C$ son abiertos en X. Además

$$U - V = U \cap (X - V) = (X - D) \cap C \quad \text{y} \quad V - U = V \cap (X - U) = (X - C) \cap D.$$

Luego $C \subset U - V$ y $D \subset V - U$. Esto prueba que 1) implica 2).

Ahora supongamos que 2) se cumple. Sean C un subconjunto compacto de X y $x \in X - C$. Entonces $\{x\}$ y C son dos subconjuntos compactos de X, tales que $\{x\} \cap C = \emptyset$ y, por 2), existen abiertos U y V en X tales que $\{x\} \subset U - V$ y $C \subset V - U$. Esto prueba que 2) implica 3).

Supongamos, por último, que 3) se cumple. Sean C un subconjunto compacto de X y $x \in X - C$. Por 3), existen abiertos U y V en X tales que $x \in U - V$ y $C \subset V - U$. Entonces U es un abierto en X que tiene a x y no intersecta a C. Luego $X - C$ es abierto en X y, por tanto, C es cerrado en X. Esto muestra que X es KC y por tanto 3) implica 1).

Para dar una forma alternativa de la propiedad US, necesitamos de la siguiente noción.

Definición 3.21. *Sean X un espacio topológico y $S \subset X$. Decimos que S es **secuencialmente compacto** si cada sucesión en S posee una subsucesión que converge a un punto de S.*

Teorema 3.22. *Si X es US, entonces todo subconjunto de X secuencialmente compacto es secuencialmente cerrado.*

Demostración. Supongamos que $S \subset X$ es secuencialmente compacto. Si S no es secuencialmente cerrado, entonces existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ que converge a un punto $x \in X - S$. Como S es secuencialmente compacto, una subsucesión $\{x_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $y \in S$. Luego $\{x_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a los elementos distintos x y y de X, contradiciendo el hecho de que X es US.

El siguiente resultado es la versión equivalente al Teorema 1.92, para espacios US.

Teorema 3.23. *Un espacio topológico X es US si y sólo si, la diagonal de X, es decir*

$$\Delta = \{(x,x)\colon x \in X\}$$

es secuencialmente cerrado en $X \times X$.

Demostración. Supongamos que X es US y que una sucesión $\{(x_n,x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Δ converge a un punto $(x,y) \in X \times X - \Delta$. Luego $x \neq y$. Consideremos las proyecciones $\rho_1\colon X \times X \to X$ y $\rho_2\colon X \times X \to X$ definidas como

$$\rho_1(a,b) = a \quad y \quad \rho_2(a,b) = b, \quad \text{para cada } (a,b) \in X \times X.$$

Como ρ_1 es continua, por el Teorema 1.42, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\rho_1(x_n,x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\rho_1(x,y) = x$. De manera similar, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\rho_2(x_n,x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\rho_2(x,y) = y$. Luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a los puntos distintos x y y de X, contradiciendo el hecho de X es US. Por tanto, $x = y$ y, así, Δ es secuencialmente cerrado.

Ahora supongamos que Δ es secuencialmente cerrado. Si X no es US, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a dos puntos distintos x y y de X. Si W es un abierto en $X \times X$ tal que $(x,y) \in W$, entonces existen abiertos U y V en X con $(x,y) \in U \times V \subset W$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge tanto a x como a y, todos sus miembros están en $U \cap V$, salvo una cantidad finita de ellos. Por tanto, todos los elementos de la sucesión $\{(x_n,x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Δ están en $U \times V \subset W$, salvo un número finito de ellos. Esto implica que $\{(x_n,x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(x,y) \in X \times X - \Delta$, contradiciendo con esto que Δ es secuencialmente cerrado. Por tanto, X es US.

En el siguiente resultado vemos que, en los espacios T_1, podemos dar una propiedad que se encuentra entre los KC y los US.. Consideremos ahora la siguiente definición.

Definición 3.24. *Un espacio topológico X se llama **AB** si para cualesquiera dos subconjuntos compactos C y D de X con $C \cap D = \emptyset$, existe un abierto U en X tal que $C \subset U$ y $D \cap U = \emptyset$, o bien $D \subset U$ y $C \cap U = \emptyset$.*

Los espacios AB fueron definidos en 1965 por C.E. Anull en [3]. La idea de esta nueva clase de espacios es hacer una modificación al axioma T_0, intercambiando puntos por conjuntos compactos.

Teorema 3.25. *Los espacios KC son AB.*

Demostración. Consideremos que X es KC. Por el inciso 2) del Teorema 3.20 tenemos que X es AB

Teorema 3.26. *Los espacios AB y T_1 son US.*

Demostración. Supongamos que X no es US, entonces existen una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y puntos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ y la sucesión converge tanto a x como a y. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante. Sin perder generalidad, podemos suponer que x es una constante de eventualidad de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces todos los términos de la sucesión son iguales a x, salvo una cantidad finita de ellos. Como $X - \{x\}$ es un abierto en X que tiene a y, todos los términos de la sucesión están en $X - \{x\}$, salvo una cantidad finita de ellos. En vista de que esto es una contradicción, deducimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es eventualmente constante. Entonces, por el Teorema 1.52, podemos suponer sin perder generalidad que $x_n \neq x_m$, para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$.

Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y y $X - \{x\}$ es un abierto que tiene a y, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N_1$, tenemos que $x_n \in X - \{x\}$. De manera similar, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y $X - \{y\}$ es un abierto que tiene a x, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N_2$, sucede que $x_n \in X - \{y\}$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y consideremos las subsucesiones $\{x_{N+2i}\}_{i\geq 0}$ y $\{x_{N+2i+1}\}_{i\geq 0}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, las cuales convergen tanto a x como a y. Entonces, por el Teorema 1.58,

$$C = \{x_{N+2i}\}_{i\geq 0} \cup \{y\} \quad \text{y} \quad D = \{x_{N+2i+1}\}_{i\geq 0} \cup \{x\}$$

son subconjuntos compactos de X. Más aún, como todos los elementos de $C \cup D$ son distintos dos a dos, tenemos que $C \cap D = \emptyset$. Luego, por ser X un espacio AB existe un abierto U en X tal que

$$C \subset U \text{ y } D \cap U = \emptyset \quad \text{o bien} \quad D \subset U \text{ y } C \cap U = \emptyset. \tag{3.3}$$

Supongamos que $C \subset U$. Como $y \in C \subset U$ y la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y, todos sus elementos están en U, salvo una cantidad finita de ellos. En particular hay miembros de la forma x_{N+2i+1} en U. Luego $D \cap U \neq \emptyset$. Esto implica que el caso $C \subset U$ y $D \cap U = \emptyset$ no es posible. Supongamos ahora que $D \subset U$. Como $x \in D \subset U$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, todos sus elementos están en U, salvo una cantidad finita de ellos. En particular hay elementos de la forma x_{N+2i} en U. Luego $C \cap U \neq \emptyset$. Esto implica que el caso $D \subset U$ y $C \cap U = \emptyset$ tampoco es posible. Esto contradice (3.3) y, como la contradicción proviene de suponer que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a dos elementos distintos de X, concluimos que X es US.

Así pues, en los espacios T_1, sucede que.

$$KC \implies AB \implies US.$$

En [17, Teorema 2.67 y Teorema 2.76] se muestra un espacio US que no es AB y un espacio AB y T_1 que no es KC respectivamente. Así pues las implicaciones $KC \implies AB \implies US$ no son reversibles, consideradas en la familia de los espacios T_1. En [17, Teorema 2.70] se muestra que ser AB es una propiedad hereditaria.

Ahora mostramos que, en la familia de los espacios primero numerables, "ser T_2", "ser KC" y "ser US" son propiedades equivalentes.

Teorema 3.27. *Si X es un espacio* 1N*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *X es T_2;*

2) *X es KC;*

3) *X es AB y T_1;*

4) *X es US.*

Demostración. Por el Teorema 3.5, obtenemos que 1) implica 2). Por los Teoremas 3.25 y 3.5 tenemos que 2) implica 3). Ahora bien, por el Teorema 3.26, concluimos 3) implica 4)

Supongamos, por tanto, que X es US. Si X no es T_2, entonces existen $x \neq w$ tales que para todo $U, V \in \tau$ con $x \in U$ y $w \in V$ sucede que $U \cap V \neq \emptyset$. Como X es 1N, por la Proposición 1.46, existen bases locales anidadas $\beta_x = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\beta_w = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ en x y w, respectivamente. Luego $B_n \cap C_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, fijemos un punto $x_n \in B_n \cap C_n$. Por la Proposición 1.40, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ así formada, converge tanto a x como a w. Debido a que esto contradice que X es US, deducimos que X es T_2.

Ahora mostramos que en los espacios localmente compactos, "ser T_2" y "ser KC" son propiedades equivalentes.

Teorema 3.28. *Sea X un espacio localmente compacto. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *X es T_2;*

2) *X es KC.*

Demostración. Por la Proposición 3.2, 1) implica 2). Supongamos ahora que X es KC. Por la Proposición 3.4, X es T_1 y, en particular X es T_0. Como también es localmente compacto, por el Corolario 1.89, X es T_3. Luego, X es T_2.

3.4. Compactación de Alexandroff

Las propiedades de los espacios compactos son, como hemos visto, agradables. Surge por tanto la pregunta de cómo hacer compacto un espacio X que no lo es. La idea es encontrar un espacio compacto $\widehat{X}$, que contenga un conjunto Y que sea homeomorfo a X y que abarque casi todo $\widehat{X}$, en el sentido de que la cerradura de Y es $\widehat{X}$. Cuando esto es posible, diremos que $\widehat{X}$ es una compactación de X. En esta sección estudiamos una compactación especial, llamada compactación de Alexandroff. Presentamos resultados importantes que posteriormente serán utilizados. Primero formalizamos la noción de compactación.

Definición 3.29. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Una* ***compactación*** *de (X,τ) es una pareja $((\widehat{X},\widehat{\tau}),f)$ con las siguientes propiedades.*

1) *$(\widehat{X},\widehat{\tau})$ es un espacio compacto;*

2) *$f\colon (X,\tau)\to(\widehat{X},\widehat{\tau})$ es un encaje, es decir, f es una función continua e inyectiva tal que $f\colon X\to f(X)$ es un homeomorfismo;*

3) *$f(X)$ es denso en $\widehat{X}$, es decir, $\overline{f(X)}^{\widehat{X}}=\widehat{X}$.*

Recordemos que es posible tomar un elemento que no pertenece a un espacio topológico X, pues podemos definir $X=\infty$ y recordemos que una consecuencia del axioma de fundación de teoría de conjuntos es que para todo conjunto X, $X\notin X$.

Definición 3.30. *Sean (X,τ) un espacio topológico e ∞ un elemento que no pertenece a X. La* ***extensión de Alexandroff*** *es la pareja $(X^\star,\tau^\star)$ donde $X^\star=X\cup\{\infty\}$ y $\tau^\star$ es la siguiente colección:*

$$\tau^\star=\tau\cup\{X^\star-K\colon K \text{ es cerrado y compacto en } X\}$$

En el siguiente resultado verificaremos que $\tau^\star$ es una topología para $X^\star$ y también mencionaremos algunas propiedades importantes que usaremos a lo largo de este trabajo.

Teorema 3.31. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $\tau^\star$ la colección definida en 3.30 tiene las siguientes propiedades:*

1) *$\tau^\star$ es una topología en $X^\star$.*

2) *La topología de $X^\star$ restringida a X es la topología original de X, es decir, $\tau^\star_X=\tau$.*

3) *El espacio $(X^\star,\tau^\star)$ es compacto.*

4) *Las colecciones*

$$\vartheta=\{X^\star-K\colon K \text{ es cerrado y compacto en } X\}$$

y

$$\Omega=\{A\cup\{\infty\}\colon A\in\tau \text{ y } X-A \text{ es compacto en } X\}$$

son iguales.

5) *Sea $A\subset X^\star$. Si $\infty\in A$ y A es cerrado en $X^\star$, entonces A es cerrado en X. Si $\infty\notin A$, entonces A es cerrado en $X^\star$ si y sólo si A es cerrado y compacto en X. En particular $A\subset X$ es cerrado en $X^\star$ si y sólo si A es cerrado y compacto en X.*

6) *X es denso en $(X^\star, \tau^\star)$ si y sólo si X no es compacto.*

7) *La pareja $((X^\star, \tau^\star), i)$, con $i\colon (X,\tau) \to (X^\star, \tau^\star)$ la función inclusión, es una compactación de X si y sólo si X no es compacto.*

Demostración. Para probar 1) notemos que $\emptyset \in \tau$, así que $\emptyset \in \tau^\star$. También tenemos que $X^\star = X^\star - \emptyset$ y $\emptyset$ es un subconjunto compacto y cerrado en X. Luego $X^\star \in \tau^\star$.

Sean $A, B \in \tau^\star$. Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$, por lo que $A \cap B \in \tau^\star$. Supongamos que $A = X^\star - K_1$ y $B = X^\star - K_2$ donde K_1 y K_2 son subconjuntos compactos y cerrados de X. Notemos que

$$A \cap B = (X^\star - K_1) \cap (X^\star - K_2) = X^\star - (K_1 \cup K_2).$$

Como $K_1 \cup K_2$ es compacto y cerrado en X, obtenemos que $A \cap B \in \tau^\star$. Ahora supongamos sin perder generalidad que $A \in \tau$ y $B = X^\star - K$ con K compacto y cerrado en X. Tenemos que $A \cap B = A \cap (X^\star - K)$. Luego $X - K \in \tau$ y además

$$A \cap B = A \cap (X^\star - K) = A \cap (X - K) \in \tau.$$

Así tenemos que $A \cap B \in \tau$ y por tanto, $A \cap B \in \tau^\star$. Hemos probado que la intersección de cada dos elementos de $\tau^\star$ está en $\tau^\star$.

Tomemos ahora una familia no vacía $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau^\star$ con $A_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in I$. Si para toda $\alpha \in I$, $A_\alpha \in \tau$, entonces

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau \subset \tau^\star.$$

Supongamos ahora que para toda $\alpha \in I$, $A_\alpha = X^\star - K_\alpha$, donde K_α es un subconjunto compacto y cerrado de X. Notemos que:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X^\star - K_\alpha) = X^\star - \bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha. \tag{3.4}$$

Afirmamos que $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha$ es compacto. Como cada K_α es cerrado en X, sucede que $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha$ es cerrado en X. Ahora bien, dada $\beta \in I$, K_β es un conjunto compacto tal que $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \subset K_\beta$. Luego, por el Teorema 1.63, $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha$ es compacto. Por lo anterior y (3.4), tenemos que $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau^\star$.

Afirmamos ahora que si $U \in \tau$ y C es un subconjunto compacto y cerrado de X, entonces $U \cup (X^\star - C) \in \tau^\star$. Tomemos U y C como se indica. Notemos que

$$(X^\star - U) \cap C = (X - U) \cap C,$$

por lo que $(X^\star - U) \cap C$ es cerrado en X. Como C es compacto y $(X^\star - U) \cap C \subset C$, por el Teorema 1.63, $(X^\star - U) \cap C$ es compacto. Además

$$U \cup (X^\star - C) = X^\star - \Big((X^\star - U) \cap C\Big).$$

Entonces $U \cup (X^\star - C) \in \tau^\star$.

Tomemos ahora $I_1, I_2 \subset I$ no vacíos tales que $I_1 \cup I_2 = I$. Supongamos $A_\alpha \in I_1$, para cada $\alpha \in I_1$ y para toda $\alpha \in I_2$ sucede que $A_\alpha = X^\star - K_\alpha$ con K_α un subconjunto compacto y cerrado de X. Definimos

$$U = \bigcup_{\alpha \in I_1} A_\alpha \quad \text{y} \quad C = \bigcap_{\alpha \in I_2} K_\alpha.$$

Notemos que $U \in \tau$ y C es cerrado en X y al estar contenido en cualquiera de sus intersectandos, C también es compacto. Además

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = U \cup \Big(\bigcup_{\alpha \in I_2} (X^\star - K_\alpha)\Big) = U \cup \Big(X^\star - \bigcap_{\alpha \in I_2} K_\alpha\Big) = U \cup (X^\star - C).$$

Esto implica que $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau^\star$. Así probamos que $\tau^\star$ es una topología sobre $X^\star$.

Para probar 2) sea $U \in \tau$, entonces $U \in \tau^\star$ y como $U = U \cap X \in \tau^\star_X$, tenemos que $\tau \subset \tau^\star_X$.

Supongamos ahora que $V \in \tau^\star_X$. Entonces existe $U \in \tau^\star$ tal que $V = U \cap X$. Si $U \in \tau$, entonces $V \in \tau$ y así, $V \in \tau^\star$. Si $U = X^\star - K$, donde K es un subconjunto compacto y cerrado de X. Luego $X - K \in \tau$, por lo que $V = X \cap U = X \cap (X^\star - K) = X - K \in \tau$. Esto muestra que $\tau^\star_X \subset \tau$ Por lo tanto $\tau = \tau^\star_X$.

Para probar 3) sea $\vartheta = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de $X^\star$. Entonces existe $\alpha_0 \in I$ tal que $\infty \in U_{\alpha_0}$, con $U_{\alpha_0} = X^\star - K$, donde K es un subconjunto compacto y cerrado de X. Sea $\psi = \{U_\alpha \cap X \colon \alpha \in I\}$. Notemos que cada elemento de ψ está en $\tau^\star_X = \tau$ y también

$$K \subset X = X^\star \cap X \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\right) \cap X = \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \cap X).$$

Esto muestra que ψ es una cubierta abierta del compacto K. Por tanto, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I$ tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} (U_{\alpha_i} \cap X).$$

Luego

$$X^\star = (X^\star - K) \cup K = U_{\alpha_0} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} (U_{\alpha_i} \cap X) \right),$$

probando así que $X^\star$ es compacto.

Para probar 4) sea $U \in \vartheta$. Entonces $U = X^\star - K$ con $K \subset X$ compacto y cerrado. Definimos $A = X - (X^\star - U)$ y notemos que A es abierto en $X^\star$ ya que $A = X - (X^\star - U) = X - K \in \tau$. Además $X - A = K$ es compacto en X. Por lo tanto

$$A \cup \{\infty\} = (X - K) \cup \{\infty\} = X^\star - K = U,$$

con $A \in \tau$ y $X - A$ compacto en X, así $U \in \Omega$.

Sea $B \in \Omega$. Entonces $B = A \cup \{\infty\}$ con $A \in \tau$ y $X - A$ compacto en X. Definimos $K = X - A$ y por lo tanto K es compacto y cerrado en X. Notemos que

$$B = A \cup \{\infty\} = (X - K) \cup \{\infty\} = X^\star - K,$$

así $B \in \vartheta$.

Para probar 5) si $\infty \in A$, entonces $X^\star - A$ es un abierto de $X^\star$ que no tiene a ∞, por lo que $X^\star - A \in \tau$ y en particular $X^\star - A \subset X$. Esto implica que $X^\star - A = X - A$ y como $X - A$ es abierto en X, sucede que A es cerrado en X. Supongamos que A es cerrado en $X^\star$. Si $\infty \notin A$ entonces $X^\star - A$ es abierto en $X^\star$ y además $\infty \in X^\star - A$. Luego $X^\star - A$ tiene la forma $X^\star - K$, donde K es cerrado y compacto en X. Por tanto $A = K$ y entonces A es cerrado y compacto en X.

Ahora supongamos que A es cerrado y compacto en X. Por el inciso 4) de esta demostración tenemos que $X^\star - A = (X - A) \cup \{\infty\}$ es abierto en $X^\star$, por lo cual A es cerrado en $X^\star$.

Para probar 6) supongamos que X no es compacto. Claramente $\overline{X}^{X^\star} \subset X^\star$, así que basta mostrar que $X^\star \subset \overline{X}^{X^\star}$. Sean $p \in X^\star = X \cup \{\infty\}$ y $U \in \tau^\star$ tales que $p \in U$. Si $p \in X$, entonces $U \cap X \neq \emptyset$. Supongamos ahora que $p = \infty$. Como los elementos de τ son subconjuntos de X y $p \notin X$, tenemos que $U \in \tau^\star$. Luego $U = X^\star - K$, donde K es un subconjunto compacto y cerrado de X. Puesto que X no es compacto, tenemos que $X - K \neq \emptyset$. Por tanto $U \cap X = (X^\star - K) \cap X = X - K \neq \emptyset$. Hemos visto, en ambos casos, que $U \cap X \neq \emptyset$. Luego $p \in \overline{X}^{X^\star}$, de donde $X^\star \subset \overline{X}^{X^\star}$ y así, $\overline{X}^{X^\star} = X^\star$.

Ahora para demostrar la necesidad, supongamos que X es compacto. Entonces X es cerrado y compacto en X y por el inciso 5) de esta demostración tenemos que $X^\star$ es cerrado en $X^\star$, así $\overline{X}^{X^\star} = X$, es decir, X no es denso en $X^\star$.

Para probar 7) sea $i : (X, \tau) \to (X^\star, \tau^\star)$ la función inclusión. Supongamos primero que la pareja $((X^\star, \tau^\star), i)$ es una compactación de (X, τ). Por el inciso 3) de la Definición 3.29, sucede que $X = i(X)$ es denso en $X^\star$. Luego por 6), X no es compacto. Ahora supongamos que X no es compacto. Nuevamente por 6), $X = i(X)$ es denso en $X^\star$. Además por 3) tenemos que $(X^\star, \tau^\star)$ es compacto. Notemos que i es inyectiva. Además por 2) i como función de X en $i(X) = X$, es la función identidad de (X, τ), así que es un homeomorfismo. Por último para cada abierto U en $X^\star$, tenemos que $i^{-1}(U) = U \cap X$. Por tanto, si $U \in \tau$ sucede que $i^{-1}(U) = U$ es abierto en X. Si $U = X^\star - K$, donde K es cerrado y compacto en X, entonces

$$i^{-1} = U \cap X = (X^\star - K) \cap X = X - K,$$

es abierto en X. En cualquiera de los dos casos tenemos que $i^{-1}(U) \in \tau$. Esto muestra que i como función de (X, τ) en $(X^\star, \tau^\star)$ es continua. Por lo tanto la pareja $((X^\star, \tau^\star), i)$ es una compactación de (X, τ).

Es importante mencionar que la extensión de Alexandroff $(X^\star, \tau^\star)$ siempre se puede definir para cualquier espacio topológico (X, τ), incluso si X es un espacio compacto. Cuando el espacio X no es compacto, la pareja $((X^\star, \tau^\star), i)$ recibe un nombre especial. Este nombre se presenta en la siguiente definición.

Definición 3.32. *La **compactación de Alexandroff** de un espacio topológico no compacto X, es la pareja $((X^\star, \tau^\star), i)$ donde $i\colon (X, \tau) \to (X^\star, \tau^\star)$ es la función inclusión.*

Por el inciso 7) del Teorema 3.31 tenemos que un espacio X tiene compactación de Alexandroff si y sólo si X no es compacto. A partir de este momento usaremos $X^\star$ para denotar la extensión de Alexandroff $(X^\star, \tau^\star)$ y $A(X^\star) = ((X^\star, \tau^\star), i)$ denota la compactación de Alexandroff de un espacio topológico X no compacto. Por definición, $A(X^\star)$ es compacto, pero nada asegura que también es de Hausdorff. Tiene sentido, por tanto, considerar la siguiente definición.

Definición 3.33. *Diremos que $A(X^\star)$ es una **compactación de Hausdorff**, si $A(X^\star)$ es un espacio de Hausdorff.*

Para un espacio KC, el siguiente resultado indica que se extensión de Alexandroff queda descrita de la siguiente manera.

Teorema 3.34. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $X^\star$ la extensión de Alexandroff de X. Entonces la colección*

$$\tau^\star_{KC} = \tau \cup \{X^\star - K \colon K \text{ es un subconjunto compacto de } X\},$$

es una topología sobre $X^\star$ si y sólo si X es un espacio KC.

Demostración. Primero supongamos que $\tau^{\star}_{KC}$ es una topología sobre $X^{\star}$. Sea $C \subset X$ compacto en X. Entonces $X^{\star} - C \in \tau^{\star}_{KC}$ y $(X^{\star} - C) \cap X = X - C \in \tau^{\star}_{KC}$. Puesto que $\infty \notin X - C$ se sigue que $X - C \in \tau$ y por lo tanto C es cerrado en X. Esto prueba que X es KC.

Ahora supongamos que X es un espacio KC. Este resultado se obtiene del inciso 1) del Teorema 3.31, pues sabemos que en un espacio KC todo compacto es cerrado.

Nuestro objetivo en este trabajo, es considerar la extensión de Alexandroff con la topología $\tau^{\star}_{KC}$ y además por los Teoremas 3.31 y 3.34 la compactación de Alexandroff $A(X^{\star})$ tiene la topología $\tau^{\star}_{KC}$ si y sólo si X es un espacio KC no compacto. A partir de este momento cuando hablemos de la compactación de Alexandroff $A(X^{\star})$, sólo consideraremos espacios KC no compactos.

El siguiente resultado nos muestra cuando $A(X^{\star})$ es una compactación de Hausdorff.

Teorema 3.35. *Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff no compacto. Entonces $A(X^{\star})$ es una compactación de Hausdorff si y sólo si X es localmente compacto.*

Demostración. Supongamos que X es localmente compacto. Sean $x, y \in A(X^{\star})$ tales que $x \neq y$. Si $x, y \in X$, entonces, como X es de Hausdorff, existen $U, V \in \tau$ disjuntos tales que $x \in U$ y $y \in V$. Como $\tau \subset \tau^{\star}_{KC}$, entonces $U, V \in \tau^{\star}_{KC}$. Supongamos ahora que $x \in X$ y $y = \infty$. Sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$, por ser X localmente compacto existe $V \in \tau$ tal que $\overline{V}^X$ es compacto y $x \in V \subset \overline{V}^X \subset U$. Entonces $V \cap (X - \overline{V}^X) = \emptyset$, por lo que $V \cap (X^{\star} - \overline{V}^X) = \emptyset$. Ahora bien, como $y \notin X$ se sigue que $y \in X^{\star} - \overline{V}^X \in \tau^{\star}_{KC}$. Tenemos así que $V, X^{\star} - \overline{V}^X \in \tau^{\star}_{KC}$ son disjuntos, $x \in V$ y $y \in X^{\star} - \overline{V}^X$. Si $y \in X$ y $x = \infty$, procediendo como antes, encontramos abiertos disjuntos en $A(X^{\star})$ que tienen a x y y. Esto muestra que $A(X^{\star})$ es de Hausdorff.

Ahora supongamos que $A(X^{\star})$ es un espacio de Hausdorff. Sea $x \in X$, por hipótesis existen $U, V \in \tau^{\star}_{KC}$ disjuntos tales que $x \in U$ y $\infty \in V$. Dado que $\infty \in V$ existe $K \subset X$ compacto tal que $V = X^{\star} - K$. Pero por ser disjuntos U y V tenemos que $U \subset X^{\star} - V = K$. Finalmente por ser X un espacio de Hausdorff, la Definición 1.87 es equivalente a la definición $(\diamond)$ de un espacio localmente compacto. Así concluimos que X es localmente compacto.

Teorema 3.36. *Sea (X, τ) un espacio KC, entonces $X^{\star}$ es US.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^{\star}$ una sucesión que converge $a \neq \infty$. Notemos que $X \in \tau^{\star}_{KC}$ es tal que $a \in X$. Por definición de límite para el abierto X, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in X$, es decir $x_n \neq \infty$.

Sea $K = \{a, x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots\}$. En el Teorema 3.5 ya se mostró que K es compacto y por ser X un espacio KC, tenemos que K es cerrado en X. Por el inciso 5) del Teorema 3.31

tenemos que K es cerrado en $X^\star$. Como $\infty \notin K$ esto implica que ∞ no es un punto límite de la suceción $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por el Teorema 3.5 tenemos que X es un espacio US y entonces b no es un punto límite de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si $a \neq b \in X$.

En [17, Teorema 2.76] se muestra que el espacio $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ es KC y su compactación de Alexandroff $A(\mathbb{R}^\star)$ es AB y T_1 pero no KC. Por tanto ser KC no se conserva entre un espacio y su compactación de Alexandroff. Por otro lado, la compactación de Alexandroff $A(\mathbb{R}^\star)$ es US pero no KC.

Capítulo 4

k-espacios

4.1. Propiedades de los k-espacios

En el presente capítulo se abordan resultados sobre los llamados k-espacios. En 1967 estos espacios fueron introducidos por A. Wilansky en [26, pág. 263]. En la década de 1950 fueron estudiados por W. Hurewicz bajo el nombre de espacios compactamente generados, con la intención de subsanar las deficiencias conocidas de la categoría topológica habitual. En esta sección estudiaremos propiedades hereditarias, topológicas, multiplicativas, factorizables, preservación y antipreservación de los k-espacios. También analizaremos la relación entre los k-espacios con los espacios secuenciales, 1N y localmente compactos.

Definición 4.1. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es un **k-cerrado** en X si para todo $K \subset X$ compacto sucede que $A \cap K$ es cerrado en K. Decimos que X es un **k-espacio** si todo k-cerrado de X es cerrado en X.*

Todo conjunto cerrado es un k-cerrado, pero viceversa no es cierto. En el Capítulo 6 presentamos un k-cerrado que no es cerrado (Ejemplo 6.4). El siguiente resultado muestra condiciones bajo las cuales se hereda la propiedad de ser k-espacio

Proposición 4.2. *Ser un k-espacio se preserva bajo subespacios cerrados.*

Demostración. Sean X un k-espacio y $A \subset X$ cerrado, mostremos que (A, τ_A) es un k-espacio. Afirmamos que

1) todo subconjunto B de A que es k-cerrado en (A, τ_A), también es k-cerrado en X

Sea $K \subset X$ compacto. Dado que A es cerrado en X entonces $A \cap K$ es compacto en X. Ahora bien, por la Proposición 1.60 $A \cap K$ es compacto en A. Al ser B un k-cerrado de A sucede que $B \cap (A \cap K)$ es cerrado en $A \cap K$, pero $B \cap (A \cap K) = B \cap K$.

Entonces $B \cap K$ es cerrado en $A \cap K$, luego $B \cap K$ es cerrado en K. Así tenemos que B es un k-cerrado de X. Esto prueba 1). Ahora, como X es un k-espacio se sigue que B es cerrado en X y por la Proposición 1.38 tenemos $\overline{B}^A = \overline{B}^X \cap A = B \cap A = B$. De esta manera tenemos que B es cerrado en A y por tanto A es un k-espacio.

Proposición 4.3. *Sean X, Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ continua e inyectiva. Si $B \subset Y$ es k-cerrado en Y, entonces $f^{-1}(B)$ es k-cerrado en X.*

Demostración. Sea $K \subset X$ compacto. Mostremos que $f^{-1}(B) \cap K$ es cerrado en K. Dado que K es compacto y f continua, por la Proposición 1.65 tenemos que $f(K)$ es compacto y por ser B un k-cerrado de Y, se sigue que $B \cap f(K)$ es cerrado en $f(K)$. Por continuidad de f sucede que $f^{-1}\Big(B \cap f(K)\Big)$ es cerrado en $f^{-1}\Big(f(K)\Big)$. Como f es inyectiva $f^{-1}\Big(B \cap f(K)\Big) = f^{-1}(B) \cap K$ es cerrado en $K = f^{-1}\Big(f(K)\Big)$

Corolario 4.4. *La propiedad de ser un k-espacio es topológica.*

Demostración. Sea $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ homeomorfismo. Si Y es un k-espacio entonces X es k-espacio. Sea $A \subset X$ un k-cerrado, mostremos que A es cerrado en X. Por ser f homeomorfismo existe la función inversa de f, digamos $g : (Y, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ continua e inyectiva, por el lema anterior $g^{-1}(A)$ es un k-cerrado de Y y al ser Y un k-espacio se sigue que $g^{-1}(A)$ es cerrado en Y. Por continuidad de f tenemos que $f^{-1}\Big(g^{-1}(A)\Big) = A$ es cerrado en X.

Corolario 4.5. *Si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces X es un k-espacio si y sólo si Y es un k-espacio.*

Demostración. Es consecuencia directa del resultado anterior, basta usar la función inversa del homeomorfismo.

Corolario 4.6. *Ser un k-espacio es propiedad topológica.*

Ser un k-espacio no es propiedad multiplicativa. El lector interesado puede consultar [23, Ejemplo, pág. 704]. Sin embargo el siguiente resultado nos dice cuando el producto de dos espacios resulta ser un k-espacio.

Teorema 4.7. *Sean (X, τ_1) un espacio T_2 y localmente compacto y (Y, τ_2) un k-espacio T_2. Entonces $X \times Y$ es un k-espacio.*

Demostración. Sea $C \subset X \times Y$ un k-cerrado. Mostremos que $\overline{C}^{X \times Y} \subset C$.
Sean $(x, y) \in \overline{C}^{X \times Y}$ y Z un abierto de X tal que $x \in Z$. Por la compacidad local, existe un

abierto B en X tal que $x \in B \subset \overline{B}^X \subset Z$ y $\overline{B}^X$ es compacto. Definimos $V = \overline{B}^X$ y también

$$T = \rho_1(C \cap (V \times \{y\})) \text{ y } S = \rho_2(C \cap (V \times Y)),$$

donde $\rho_1 : X \times Y \to X$ y $\rho_2 : X \times Y \to Y$ son las funciones proyección.

Notemos que $V \times \{y\}$ es compacto y, por ser C un k-cerrado sucede que $C \cap (V \times \{y\})$ es cerrado en $V \times \{y\}$ y por lo tanto también compacto. Ahora bien, por la continuidad de la función ρ_1 tenemos que T es compacto también y así cerrado en X, por ser X un espacio T_2. Mostremos ahora que S es cerrado en Y. Sea $A \subset Y$ compacto. Notemos que:

$$S \cap A = \rho_2(C \cap (V \times Y)) \cap \rho_2(X \times A) = \rho_2(C \cap (V \times Y) \cap (X \times A)) = \rho_2(C \cap (V \times A).$$

Por el Teorema 1.94 obtenemos que $V \times A$ es compacto y por ser C un k-cerrado tenemos que $C \cap (V \times A)$ es cerrado en $V \times A$ y por lo tanto compacto. Por la continuidad de ρ_2 se sigue que $S \cap A$ es compacto y por tanto cerrado en Y, por ser Y un espacio T_2. Acabamos de mostrar que S es un k-cerrado en el k-espacio Y. Luego S es cerrado en Y.

Sea $W \in \tau_2$ tal que $y \in W$. Entonces $(x, y) \in B \times W$ y como $(x, y) \in \overline{C}^{X \times Y}$ tenemos que $(B \times W) \cap C \neq \emptyset$. En particular $(V \times W) \cap C \neq \emptyset$ y también $S \cap W = \rho_2(C \cap (V \times W)) \neq \emptyset$. Por tanto, $y \in \overline{S}^Y = S$.

De la definición de S se sigue que para algún $m \in V$ tenemos que $(m, y) \in C$ y este m también es un elemento de T. Luego $V \cap T \neq \emptyset$. En particular $Z \cap T \neq \emptyset$. Hemos probado que para cualquier abierto Z con $x \in Z$, sucede que $Z \cap T \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \overline{T}^X = T$. Esto, de acuerdo con la definición de T implica que $(x, y) \in C$. Luego el k-cerrado en $X \times Y$, por lo que $X \times Y$ es un k-espacio.

El siguiente resultado da una condición, bajo la cual, ser un k-espacio es una propiedad factorizable.

Teorema 4.8. *Sean $\{(X_s, \tau_s)\}_{s \in S}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos y $X = \prod_{s \in S} X_s$. Si X es un k-espacio y T_1, entonces para cada $s \in S$, X_s es un k-espacio.*

Demostración. Sea $s \in S$. Por el Teorema 1.95 y el Corolario 1.100 existe Y_s subespacio de X tal que Y_s es cerrado en X y homeomorfo a X_s. Al ser X k-espacio y Y_s un subconjunto cerrado de X por la Proposición 4.2, Y_s es un k-espacio. Luego por el Corolario 4.6 concluimos que X_s es un k-espacio.

4.2. Más propiedades de los k-espacios

En la presente sección se muestran propiedades de los k-espacios en relación con los espacios 1N, compactos, localmente compactos, secuenciales y los espacios de Frechet.

Proposición 4.9. *Todo espacio localmente compacto es un k-espacio.*

Demostración. Sean (X, τ) un espacio localmente compacto y $A \subset X$ un k-cerrado. Supongamos que A no es cerrado en X, entonces existe $x \in \overline{A}^X - A$. Sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$. Por ser X un espacio localmente compacto, existe $V \in \tau$ con $\overline{V}^X$ compacto y además $x \in V \subset \overline{V}^X \subset U$. Como $x \in \overline{A}^X$ tenemos que $\emptyset \neq A \cap V \subset (A \cap \overline{V}^X) \cap U$. Esto muestra que $x \in \overline{(A \cap \overline{V}^X)}^X$ y también $x \in \overline{V}^X$. Así tenemos que $\overline{A \cap \overline{V}^X}^{\overline{V}^X}$. Dado que $x \notin A$, sucede que $x \notin A \cap \overline{V}^X$. Por tanto, $A \cap \overline{V}^X$ no es cerrado en $\overline{V}^X$. Ahora bien $A \cap \overline{V}^X$ es cerrado en el compacto $\overline{V}^X$, por lo que es compacto. Como A es un k-cerrado, esto implica que $A \cap \overline{V}^X$ es cerrado en $\overline{V}^X$, lo cual es una contradicción. Finalmente A es cerrado en X y así X es un k-espacio.

Proposición 4.10. *Todo espacio compacto es un k-espacio.*

Demostración. Sea X un espacio topológico compacto. Sea $A \subset X$ un k-cerrado, veamos que A es cerrado en X. Por ser A un k-cerrado en X, entonces para todo $K \subset X$ compacto sucede que $A \cap K$ es cerrado en K, en particular también es cierto para X por ser compacto, así $A = A \cap X$ es cerrado en X.

Proposición 4.11. *Todo espacio secuencial es un k-espacio.*

Demostración. Sean X un espacio secuencial y $B \subset X$ un k-cerrado. Supongamos que B no es cerrado en X. Por el Teorema 2.8 existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ tal que x_n converge a un elemento $x \in X - B$. Sea $K = \{x\} \cup \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ el cual es compacto por el Teorema 1.58. Además por ser B un k-cerrado de X tenemos que $B \cap K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en K, lo cual es una contradicción pues el límite de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no esta en $B \cap K$. Así X es un k-espacio.

Corolario 4.12. *Todo espacio de Fréchet es un k-espacio.*

Demostración. El resultado se sigue del Teorema 2.20 y la proposición anterior.

Corolario 4.13. *Todo espacio* 1N *es un k-espacio.*

Demostración. El resultado se sigue del Teorema 2.18 y el corolario anterior.

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del Teorema 4.7 y los Corolarios 4.10, 4.11, 4.12 y 4.13.

Corolario 4.14. *Sean X un espacio T_2 localmente compacto y Y un espacio T_2. Si Y es compacto,* 1N*, de Fréchet o bien secuencial, entonces $X \times Y$ es un k-espacio.*

Capítulo 5

Espacios KC vs k-espacios

5.1. Relación entre los espacios KC y los k-espacios

Algo muy natural, es preguntarse por la relación entre los espacios KC y los k-espacios. En esta sección definimos el concepto de compactamente cerrado, el cual tiene relación con la definición de ser un k-cerrado. En 1967 A. Wilansky en [26, Teorema 5] muestra una relación entre los espacios KC y los k-espacios. Posteriormente A. García-Maynez en [13, pág. 41, 42 y 43] trabaja con el concepto de conjuntos compactamente cerrados, para mostrar una relación entre los espacios KC y k-espacios, diferente a la presentada por A. Wilansky. También en [13, Teorema 3.9] se presentan condiciones necesarias y suficientes que relacionan los espacios KC y los k-espacios.

En el siguiente capítulo presentamos un espacio KC que no es un k-espacio. Por ahora mostraremos las herramientas necesarias para lograr algunos teoremas que relacionen los espacios KC con los k-espacios, los cuales serán la parte central de este trabajo.

Definición 5.1. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es* ***compactamente cerrado en*** *X si para todo K subconjunto cerrado de X y compacto, sucede que $A \cap K$ es compacto.*

Es claro que todo k-cerrado es compactamente cerrado. Supongamos que X es un espacio KC y $A \subset X$ compactamente cerrado. Por ser X un espacio KC sabemos que todo $K \subset X$ compacto es cerrado en X, entonces por ser A compactamente cerrado tenemos que $A \cap K$ es compacto y nuevamente por ser X un espacio KC concluimos que $A \cap K$ es cerrado en K. Por lo tanto, en un espacio KC ser compactamente cerrado y k-cerrado son equivalentes.

Teorema 5.2. *Sean X un espacio compacto y Y un espacio KC tal que $Y^\star$ sea su extensión de Alexandroff. Entonces $C \subset X \times Y$ es compactamente cerrado en $X \times Y$ si y sólo si $C \cup (X \times \{\infty\})$ es compacto en $X \times Y^\star$.*

Demostración. Supongamos que $C \subset X \times Y$ es compactamente cerrado en $X \times Y$. Sea $\Phi = \{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de $C \cup (X \times \{\infty\})$. Por el Teorema 1.94 tenemos que $X \times \{\infty\}$ es compacto en $X \times Y^\star$ y podemos suponer sin pérdida de generalidad, que existe $\alpha_0 \in I$ tal que V_{α_0} tiene la forma $V_{\alpha_0} = X \times W$, donde W es un abierto de $Y^\star$ con $\infty \in W$. Por la definición de la topología de $Y^\star$ tenemos que $W = Y^\star - K$ con K subconjunto compacto y cerrado de Y. Notemos que $Y^\star - W = K$ y por lo tanto $Y^\star - W$ es compacto y cerrado en Y.

Ahora bien, por el Teorema 1.94 tenemos que $X \times (Y^\star - W)$ es compacto y por el Teorema 1.93 también es cerrado en $X \times Y$. Luego por ser C compactamente cerrado en $X \times Y$, tenemos que $H = C \cap (X \times (Y^\star - W))$ es compacto en $X \times Y$. Por lo tanto existe $\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \ldots, V_{\alpha_n}\} \subset \Phi$ tales que $H \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$. Entonces $C \cup (X \times \{\infty\}) \subset \bigcup_{i=0}^n V_{\alpha_i}$.

Ahora supongamos que $C \cup (X \times \{\infty\})$ es compacto en $X \times Y^\star$. Sea $K \subset X \times Y$ compacto y cerrado. Consideremos la función proyección $\rho_2 : X \times Y \to Y$. Por los Teoremas 1.91 y 1.65 obtenemos que $\rho_2(K)$ es compacto en Y. Por ser Y un espacio KC tenemos que $\rho_2(K)$ es cerrado en Y. Ahora bien, por el inciso 5) del Teorema 3.31 se sigue que $\rho_2(K)$ es cerrado en $Y^\star$ y además

$$C \cap K = [C \cup (X \times \{\infty\})] \cap (X \times \rho_2(K)) \cap K,$$

es compacto y por lo tanto C es compactamente cerrado en $X \times Y$.

Teorema 5.3. *Sean X, Y dos espacios topológicos y $X^\star$, $Y^\star$ sus extensiones de Alexandroff respectivamente. Supongamos que Y es un espacio KC, entonces $C \subset X \times Y$ es compactamente cerrado en $X \times Y$ si y sólo si $C \cup (X \times \{\infty\})$ es compactamente cerrado en $X \times Y^\star$.*

Demostración. Supongamos que $C \subset X \times Y$ es compactamente cerrado en $X \times Y$. Sean $X^\star = X \cup \{\infty^\star\}$ y $Y^\star = Y \cup \{\infty\}$ las respectivas extensiones de Alexandroff de X y Y. Como $X^\star$ es compacto. Por el Teorema 5.2 basta mostrar que $C^\star = C \cup (X \times \{\infty\}) \cup (\{\infty^\star\} \times Y^\star)$ es compacto en $X^\star \times Y^\star$.

Sea $\Phi = \{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta de $C^\star$ con abiertos de $X^\star \times Y^\star$. Por los Teoremas 1.94 y 1.61 tenemos que $(X^\star \times \{\infty\}) \cup (\{\infty^\star\} \times Y^\star)$ es compacto en $X^\star \times Y^\star$. Sin pérdida de generalidad supongamos que existe $\alpha_0 \in I$ tal que $(X^\star \times \{\infty\}) \cup (\{\infty^\star\} \times Y^\star) \subset V_{\alpha_0}$. Por el Teorema 1.93 obtenemos que $L = X^\star \times (Y^\star - V_{\alpha_0})$ es cerrado en $X^\star \times Y^\star$ y además por ser $X^\star \times Y^\star$ compacto, entonces L es compacto y por la Proposición 1.60 obtenemos que L es compacto y además cerrado en $X \times Y$. Por hipótesis, sucede que $C \cap L$ es compacto y por lo tanto existe $\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \ldots, V_{\alpha_n}\} \subset \Phi$ tal que $C \cap L \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$. Así podemos concluir que $C^\star \subset \bigcup_{i=0}^n V_{\alpha_i}$.

Para la segunda parte supongamos que $C \cup (X \times \{\infty\})$ es compactamente cerrado en $X \times Y^\star$. Sea $K \subset X \times Y$ compacto y cerrado. Consideremos $\rho_2 : X \times Y \to Y$ y por los

Teoremas 1.91 y 1.65 tenemos que $\rho_2(K)$ es compacto y además es cerrado en Y por ser Y un espacio KC. Por el inciso 5) del Teorema 3.31 obtenemos que $\rho_2(K)$ es cerrado en $Y^\star$ y entonces $X \times \rho_2(K)$ es cerrado en $X \times Y^\star$. Como $K \subset X \times \rho_2(K)$, entonces K es cerrado en $X \times Y^\star$. Por hipótesis $K \cap (C \cup (X \times \{\infty\})) = K \cap C$ es compacto y por lo tanto C es compactamente cerrado en $X \times Y$.

Teorema 5.4. *Sean X y Y dos espacios topológicos tales que $X^\star$ y $Y^\star$ son sus extensiones de Alexandroff respectivamente. Si $X^\star \times Y^\star$ es un espacio KC, entonces $X \times Y$ es un k-espacio.*

Demostración. Sean $A \subset X \times Y$ un k-cerrado. Por hipótesis y por ser KC una propiedad hereditaria, tenemos que $X \times Y$ es un espacio KC. También por ser KC una propiedad factorizable, entonces Y es KC. Ahora bien, claramente todo k-cerrado es compactamente cerrado, por lo tanto A es compactamente cerrado en $X \times Y$. Por el Teorema 3.4 tenemos que $A \cup (X \times \{\infty\})$ es compactamente cerrado en $X \times Y^\star$.

Sea $K \subset X \times Y$ compacto y cerrado. Consideremos la función proyección $\rho_2 : X \times Y \to Y$, la cual es continua y por la compacidad de K, obtenemos que $\rho_2(K)$ es compacto y además es cerrado en Y porque Y es KC. Por el inciso 5) del Teorema 3.31 tenemos que $\rho_2(K)$ es cerrado en $Y^\star$, entonces $X \times \rho_2(K)$ es cerrado en $X \times Y^\star$. Como $K \subset X \times \rho_2(K)$, sucede que K es cerrado en $X \times Y^\star$.

Por ser $A \cup (X \times \{\infty\})$ compactamente cerrado en $X \times Y^\star$ sucede que $A \cap K = K \cap (A \cup (X \times \{\infty\}))$ es compacto en $X \times Y$. Por lo tanto $A \cap K$ es cerrado en $X \times Y$ pues $X \times Y$ es KC. Así $X \times Y$ es un k-espacio.

El siguiente lema es una herramienta necesaria para lograr el Teorema 5.6.

Lema 5.5. *Sean X un espacio topológico KC y $X^\star$ su extensión de Alexandroff. Si $K^\star \subset X^\star$ es un compacto tal que $\infty \in K^\star$, entonces $F = K^\star - \{\infty\}$ es un k-cerrado de X.*

Demostración. Sea $K \subset X$ compacto. Por ser X un espacio KC, tenemos que K es cerrado en X, por el inciso 5) del Teorema 3.31 se sigue que K es cerrado en $X^\star$. Ahora, por la Proposición 1.32 tenemos que $K^\star \cap K$ es cerrado en $K^\star$ y por la compacidad de $K^\star$, concluimos que $K^\star \cap K$ es compacto en $X^\star$. Por la Proposición 1.60 tenemos que $K^\star \cap K$ es compacto en X y por ser X un espacio KC obtenemos que $K^\star \cap K$ es cerrado en X. Notemos que $F \cap K = (K^\star \cap K) \cap X = K^\star \cap K$. Así tenemos que $F \cap K$ es cerrado en X y por la Proposición 1.38 se cumple que $\overline{F \cap K}^K = F \cap K$. Por lo tanto, $F \cap K$ es cerrado en K y F es un k-cerrado de X.

El siguiente resultado es un aporte importante de este trabajo, pues exhibe una relación entre los espacios KC y los k-espacios.

Teorema 5.6. *Sea X un espacio KC. Entonces $X^\star$ es un espacio KC si y sólo si X es un k-espacio.*

Demostración. Primero supongamos que $X^\star$ es un espacio KC.
Sean $F \subset X$ un k-cerrado y $S = F \cup \{\infty\}$. Por la demostración del inciso 3) del Teorema 3.31 tenemos que S es compacto en $X^\star$. Por ser $X^\star$ un espacio KC se sigue que S es cerrado en $X^\star$. Notemos que $S \cap X = (F \cup \{\infty\}) \cap X = F$ y por la Proposición 1.32 concluimos que $F = S \cap X$ es cerrado en X, por lo tanto X es un k-espacio.

Para la segunda parte supongamos que X es un k-espacio. Sea $K^\star \subset X^\star$ un compacto. Tenemos los siguientes casos:

1. $K^\star \subset X$. Por la Proposición 1.60 tenemos que $K^\star$ es compacto en X y al ser X un espacio KC, tenemos que $K^\star$ es cerrado en X y por el inciso 3) del Teorema 3.31 concluimos que $K^\star$ es cerrado en $X^\star$. Por tanto $X^\star$ es un espacio KC.

2. $\infty \in K^\star$. Sea $F = K^\star - \{\infty\}$. Por el Lema 5.5 tenemos que F es un k-cerrado de X, ahora bien, X es un k-espacio, así obtenemos que F es cerrado en X.

   Afirmamos que $X - F = X^\star - K^\star$. Veamos las dos contenciones. Para probar que $X - F \subset X^\star - K^\star$ supongamos lo contrario. Sea $w \in X^\star - K^\star$ tal que $w \notin X - F$ así tenemos que $w \notin K^\star$, pero $w \notin X - F$ entonces $w \in F$, es decir $w \in K^\star$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto la contención es cierta.

   Ahora veamos la otra contención. Sea $p \in X^\star - K^\star$, tenemos los siguientes casos:

   I) $p \in X$ y $p \notin K^\star$. Claramente $p \notin F = K^\star - \{\infty\}$, por tanto $p \in X - F$.

   II) $p = \infty$ y $p \notin K^\star$. Por el caso 2 de esta demostración tenemos que $p = \infty \in K^\star$ lo cual es una contradicción, por tanto este caso no es posible. Así concluimos que $X - F = X^\star - K^\star$ y por tanto $X^\star - K^\star \in \tau^\star$. Luego $K^\star$ es cerrado en $X^\star$, mostrando que $X^\star$ es un espacio KC.

Corolario 5.7. *Sea X un espacio de Hausdorff no compacto. Entonces:*

1) *$X^\star$ es siempre US.*

2) *$X^\star$ es KC si y sólo si X es un k-espacio.*

3) *$A(X^\star)$ es de Hausdorff si y sólo si X es localmente compacto.*

Demostración. Inciso 1) Por el Teorema 3.36 tenemos que $X^\star$ es un espacio US.

Inciso 2) Se obtiene del teorema anterior.

Inciso 3) Por el Teorema 3.35 tenemos lo deseado.

Corolario 5.8. *Sea X un espacio de Hausdorff y* 1N*. Entonces $X^\star$ es un espacio KC.*

Demostración. Por ser X un espacio 1N por el Corolario 4.13 obtenemos que X es un k-espacio y por el inciso 2) del corolario anterior concluimos que $X^\star$ es un espacio KC.

Corolario 5.9. *Sea X un espacio de Hausdorff y $X^\star$ un espacio* 1N*. Entonces X es localmente compacto.*

Demostración. Por el Corolario 5.7 tenemos que $X^\star$ es un espacio US, dado que $X^\star$ es 1N por el Teorema 3.27 tenemos que $X^\star$ es un espacio de Hausdorff y por el Corolario 5.7 tenemos lo deseado.

Teorema 5.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es localmente compacto y Hausdorff.*
2. *Para cada espacio KC, k-espacio Y, el producto $X \times Y$ es un espacio KC y k-espacio.*
3. *$X \times X^\star$ es un espacio KC y k-espacio.*

Demostración. 1) implica 2). Se obtiene de los Teoremas 3.19 y 4.7.

2) implica 3.) Se obtiene por el Teorema 5.6.

3) implica 1). Supongamos que X no es localmente compacto en x. Mostraremos que la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es compactamente cerrada en $X \times X^\star$ pero no es cerrada en $X \times X^\star$. Sea B abierto de $X \times X^\star$ con $(x, \infty) \in B$. Entonces existen $U \in \tau$ y $V \in \tau^\star$ tales que $(x, \infty) \in U \times V \subset B$, donde $V = X^\star - K$ con $K \subset X$ compacto. Notemos que $(x, \infty) \in (U \cap X) \times (X^\star - K)$ y también $(x, x) \in (U \cap X) \times (X^\star - K)$, esto quiere decir que todo abierto de $X \times X^\star$ que contenga al punto (x, ∞) intersecta a la diagonal Δ, es decir $(x, \infty) \in \overline{\Delta}^{X \times X^\star}$, mientras que $(x, \infty) \notin \Delta$. Por lo tanto, tenemos que Δ no es cerrada en $X \times X^\star$.

Sea $L \subset X \times X^\star$ compacto y cerrado. Mostremos que $M = L \cap \Delta$ es compacto. Sea η una base de filtro en M. Entonces existe $(a, b) \in L$ tal que para cada $N \in \eta$ sucede que $(a, b) \in \overline{N}^{X \times X^\star}$. Veamos ahora que (a, a) es punto de acumulación de η. Sean W abierto de $X \times X^\star$ con $(a, a) \in W$ y V abierto de X tales que $a \in V$ y $V \times V \subset W$. Notemos que $V \times X^\star$ es abierto en $X \times X^\star$ y además $(a, b) \in V \times X^\star$, por lo tanto, para cualquier $N \in \eta$ existe $(v, v) \in (V \times X^\star) \cap N$ es decir para toda $N \in \eta$ sucede que $(V \times V) \cap N \neq \emptyset$ y $(a, a) \in \overline{N}^{X \times X^\star}$.

Esto implica que (a, a) es un punto de acumulación de M y por el Teorema 1.86 tenemos que M es compacto. Acabamos de mostrar que Δ es compactamente cerrado en $X \times X^\star$ pero no es cerrado en $X \times X^\star$. Por hipótesis y por la obsrvación de la Definición 5.1 obtenemos que Δ es un k-cerrado el cual no es cerrado en $X \times X^\star$ lo cual es una contradicción pues $X \times X^\star$ es un k-espacio. Así tenemos que X es localemnete compacto.

Finalmente por hipotesis y por ser KC una propiedad factorizable tenemos que X es un espacio KC. Entonces X es KC y localmente compacto, por el Teorema 3.28 concluimos que X es un espacio de Hausdorff.

Capítulo 6

Ejemplos

En este capítulo describiremos algunos ejemplos sobre las definiciones y resultados mencionados anteriormente, pero sobre todo, describiremos ejemplos de las propiedades de los espacios KC y los k-espacios. No se presentarán muchos detalles en las pruebas de los ejemplos, pues la intención es presentar estos ejemplos.

6.1. T_1 no implica KC

Teorema 6.1. *La compactación de Alexandroff $A(\mathbb{R}^\star)$ del espacio no compacto $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ es T_1, pero no es un espacio KC.*

Demostración. Mostremos que $A(\mathbb{R}^\star)$ es un espacio T_1. Sean $x, z \in A(\mathbb{R}^\star)$ con $x \neq z$. Veamos los siguientes casos:

Caso I) Si $x, z \in \mathbb{R}$. Consideremos $D = \mathbb{R} - \{x\}$ y $W = \mathbb{R} - \{z\}$. Notemos que D y W son abiertos de $A(\mathbb{R})$ y además $x \in W - D$ y $z \in D - W$, lo que implica que $A(\mathbb{R}^\star)$ es T_1.

Caso II) Si $x = \infty$ y $z \in \mathbb{R}$. El conjunto $\{z\}$ es compacto en $\mathbb{R}$, consideramos $D = A(\mathbb{R})^\star - \{z\}$ y $W = \mathbb{R}$, los cuales son abiertos en $A(\mathbb{R}^\star)$ y además $x \in D - W$ y $z \in W - D$, así $A(\mathbb{R}^\star)$ es T_1. El caso cuando $z = \infty$ y $x \in \mathbb{R}$ es análogo al caso II)

Veamos que $A(\mathbb{R}^\star)$ no es un espacio KC. Mostraremos que $A = [0, 1] \cup \{\infty\} \subset A(\mathbb{R}^\star)$ es compacto, pero no es cerrado en $A(\mathbb{R}^\star)$. Primero mostremos que A es compacto.
Sea $\vartheta = \{V_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta de A formada por abiertos de $A(\mathbb{R}^\star)$, entonces $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$. Así existe $\alpha_0 \in I$ tal que $\infty \in V_{\alpha_0}$. Los abiertos que tienen a ∞ son de la forma $A(\mathbb{R}^\star) - K$, donde K es un compacto de $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ y por el Teorema 3.8, sabemos que todo compacto en $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ es finito, entonces tenemos que V_{α_0} contiene a todos los elementos de $A(\mathbb{R}^\star)$, excepto a una cantidad finita de ellos, por lo tanto V_{α_0} contiene a todos los elementos

de $[0,1] \cup \{\infty\}$ excepto a un número finito, este número finito de elementos que no están en V_{α_0} se puede cubrir por una cantidad finita de abiertos de ϑ. Así tenemos que A es compacto.

Mostremos por contradicción que A no es cerrado en $A(\mathbb{R}^\star)$. Supongamos que A es cerrado en $A(\mathbb{R}^\star)$. Entonces $A(\mathbb{R}^\star) - A \in \tau_{CN}^\star$.

Caso 1) Si $A(\mathbb{R}^\star) - A \in \tau_{CN}$, tomemos el complemento en $\mathbb{R}$ de $A(\mathbb{R}^\star) - A$, es decir:

$$\mathbb{R} - (A(\mathbb{R}^\star) - A) = \mathbb{R} - \Big((\mathbb{R} \cup \{\infty\}) - ([0,1] \cup \{\infty\})\Big) = \mathbb{R} - (\mathbb{R} - [0,1]) = [0,1]$$

el cual no es numerable, por lo tanto $A(\mathbb{R}^\star) - A$ no es abierto en $A(\mathbb{R}^\star)$.

Caso 2) Si $A(\mathbb{R}^\star) - A$ es de la forma $A(\mathbb{R}^\star) - K$ con K compacto de $\mathbb{R}$, esto implica que $\infty \in A(\mathbb{R}^\star) - K$ pero $\infty \notin A(\mathbb{R}^\star) - A$, por lo tanto $A(\mathbb{R}^\star) - A$ no es abierto en $A(\mathbb{R}^\star)$.

En ambos casos mostramos que $A(\mathbb{R}^\star) - A$ no es abierto en $A(\mathbb{R}^\star)$, así que A no es cerrado en $A(\mathbb{R}^\star)$ y por tanto $A(\mathbb{R}^\star)$ no es un espacio KC.

6.2. Producto de espacios KC no necesariamente es un espacio KC

Teorema 6.2. *La compactación de Alexandroff de los racionales $A(\mathbb{Q}^\star)$ es un espacio KC, pero $A(\mathbb{Q}^\star) \times A(\mathbb{Q}^\star)$ no es un espacio KC.*

Demostración. Mostremos que $A(\mathbb{Q}^\star)$ es un espacio KC. Sea $C \subset A(\mathbb{Q}^\star)$ compacto. Veamos que C es cerrado en $A(\mathbb{Q}^\star)$.

Caso I) Si $\infty \notin C$, entonces $C \subset \mathbb{Q}$, así tenemos que C es compacto en $\mathbb{Q}$ y por tanto $A(\mathbb{Q}^\star) - C$ es un abierto de $A(\mathbb{Q}^\star)$, lo cual implica que C es cerrado en $A(\mathbb{Q}^\star)$.

Caso II) Si $\infty \in C$, supongamos que C no es cerrado en $A(\mathbb{Q}^\star)$, entonces $\overline{C}^{A(\mathbb{Q}^\star)} - C \neq \emptyset$, así existe $x \in \overline{C}^{A(\mathbb{Q}^\star)} - C$, por ser C compacto, también es secuencialmente compacto, así que existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ que converge a x. Ahora bien como $x \notin C$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in C$, podemos suponer que los puntos x_n son todos diferentes, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos hallar un abierto U_n de $\mathbb{Q}$ tal que $U_n \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_n\}$. Definimos $B = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ el cual es compacto y por lo tanto $A(\mathbb{Q}^\star) - B$ es abierto en $A(\mathbb{Q}^\star)$.

Notemos que la familia $D = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \cup (A(\mathbb{Q}^\star) - B)$ es una cubierta abierta del compacto C, entonces D tiene una subcubierta finita, lo cual es una contradicción pues D

no tiene una subcubierta finita, porque B es numerable. Por lo tanto C es cerrado en $A(\mathbb{Q}^\star)$ y concluimos que $A(\mathbb{Q}^\star)$ es un espacio KC.

Veamos ahora que $A(\mathbb{Q}^\star) \times A(\mathbb{Q}^\star)$ no es un espacio KC. Para esto mostraremos que la diagonal $\Delta = \{(x,x) : x \in A(\mathbb{Q}^\star)\} \subset A(\mathbb{Q}^\star) \times A(\mathbb{Q}^\star)$ es un compacto que no es cerrado en $A(\mathbb{Q}^\star) \times A(\mathbb{Q}^\star)$.
Afirmamos que la diagonal Δ es compacto. Sea $f : A(\mathbb{Q}^\star) \to A(\mathbb{Q}^\star) \times A(\mathbb{Q}^\star)$ definida como $f(q) = (q,q)$ para cada $q \in A(\mathbb{Q}^\star)$. f es una función continua, pues es continua entrada a entrada, además:

$$f(A(\mathbb{Q}^\star)) = \{f(q) : q \in A(\mathbb{Q}^\star)\} = \{(q,q) : q \in A(\mathbb{Q}^\star)\} = \Delta \tag{6.1}$$

Por ser $A(\mathbb{Q}^\star)$ compacto, por (6.1) y la Proposición 1.65 tenemos que Δ es compacto.

Mostremos que todo abierto de $A(\mathbb{Q}^\star) \times A(\mathbb{Q}^\star)$ que contenga al punto $(\infty, 0)$ intersecta a la diagonal, es decir $(\infty,0) \in \overline{\Delta}^{A(\mathbb{Q}^\star)}$, pero $(\infty, 0) \notin \Delta$.

Sean $K \subset \mathbb{Q}$ compacto y $I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon) \cap \mathbb{Q}$ para cada $\epsilon > 0$. Consideremos $B(K,\epsilon) = (A(\mathbb{Q}^\star) - K) \times I_\epsilon$ y sea H la familia de todos estos $B(K,\epsilon)$; H es una base local de $(\infty, 0) \in A(\mathbb{Q}^\star) \times A(\mathbb{Q}^\star)$. Mostremos que $I_\epsilon - K \neq \emptyset$ para toda $\epsilon > 0$. Supongamos que $I_\epsilon - K = \emptyset$, entonces $I_\epsilon \subset K$. Tomemos un número irracional $z \in (-\epsilon, \epsilon)$, entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\epsilon,\epsilon)$ que converge a z. La sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en K no converge a ningún punto de K, pues $K \subset \mathbb{Q}$, esto contradice la compacidad de K.

Tomemos $x \in I_\epsilon - K$ y notemos que $(\infty, 0) \in (A(\mathbb{Q}^\star) - K) \times I_\epsilon$, pero también $(x,x) \in (A(\mathbb{Q}^\star) - K) \times I_\epsilon$, con esto, hemos mostrado que todo abierto que tiene a $(\infty,0)$ intersecta a la diagonal, es decir, $(\infty, 0) \in \overline{\Delta}^{A(\mathbb{Q}^\star)}$, mientras que claramente $(\infty,0) \notin \Delta$. Por lo tanto podemos concluir que $\overline{\Delta}^{A(\mathbb{Q}^\star)} - \Delta \neq \emptyset$, lo cual implica que Δ no es cerrado en $A(\mathbb{Q}^\star) \times A(\mathbb{Q}^\star)$.

6.3. Ser un k-espacio no implica ser compacto

Teorema 6.3. *La recta de Sorgenfrey es un k-espacio pero no es compacto.*

Demostración. La recta de Sorgenfrey es 1N pues $\beta_x = \left\{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$ es base local numerable de x y por el Corolario 4.13 la recta de Sorgenfrey es un k-espacio, pero no es compacto pues $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $U_n = [-n, n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, es cubierta abierta de la recta de Sorgenfrey, la cual no tiene subcubierta finita.

6.4. Ser k-espacio no es una propiedad hereditaria

Ejemplo 6.4. *Sea* $X = \left\{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) : \ n, m \geq 1 \text{ con } n, m \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{(\frac{1}{m}, 0) \mid m \geq 1\right\} \cup \{(0,0)\}$. *Consideremos una topología para* X *descrita como sigue:*

1. Para $m, n \geq 1$ el punto $(\frac{1}{m}, \frac{1}{n})$ es aislado.
2. Para $m \geq 1$ las vecindades básicas abiertas de $(\frac{1}{m}, 0)$ son de la forma $\{(\frac{1}{m}, 0)\} \cup \{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) : \ n > k\}$ para $k > 1$.
3. Las vecindades básicas abiertas de $(0,0)$ son de la forma $\{(0,0)\} \cup \bigcup_{m \in A} U_m$ donde $A \subset \mathbb{N}$ es cofinito y U_m es una vecindad básica abierta de $(\frac{1}{m}, 0)$ para cada $m \in A$. Por la Proposición 4.11 tenemos que X es un k-espacio.

Veamos que $Y = X - \left\{(\frac{1}{m}, 0) : m \geq 1\right\}$ no es un k-espacio, considerando $Z = Y - \{(0,0)\}$, el cual no es cerrado en Y. Mostremos que los subconjuntos compactos de Y son finitos. Supongamos que los únicos subconjuntos compactos de Y son los conjuntos infinitos. Sea $L \subset Y$ compacto infinito, así existe $m \geq 1$ tal que $A \cap A_m$ es infinito o bien existe una infinidad de $m \geq 1$ tal que $A \cap A_m \neq \emptyset$.

Caso 1) Notemos que $\{Y - X_m\} \cup \left\{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) : n \geq 1\right\}$ es una cubierta de L por abiertos de Y, la cual no tiene subcubierta finita, lo que contradice la compacidad de L.

Caso 2) Sea $H = \{m \geq 1 : A \cap A_m \neq \emptyset\}$ y para cada $m \in H$ tomando $n_m \geq 1$ tal que $(\frac{1}{m}, \frac{1}{n_m}) \in L$, entonces $\left\{Y - \left\{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n_m})\right\} : m \in H\right\} \cup \left\{\left\{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n_m})\right\} : m \in H\right\}$ es una cubierta de L por abiertos de Y, la cual no tiene subcubierta finita, por tanto tenemos una contradicción.

Ahora, por ser X un espacio de Hausdorff, tenemos que Y es de Hausdorff, por lo tanto para cada $K \subset Y$ compacto, $Z \cap K$ es cerrado en K. Así Z es un k-cerrado de Y que no es cerrado en Y.

6.5. Ser un k-espacio no implica ser un espacio KC

Ejemplo 6.5. *El espacio* $A(\mathbb{Q}^\star) \times A(\mathbb{Q}^\star)$ *es un* k*-espacio que no es un espacio* KC.

Por el Teorema 6.2 el espacio $A(\mathbb{Q}^\star) \times A(\mathbb{Q}^\star)$ no es un espacio KC, pero por el inciso 3) del Teorema 3.31 sabemos que $A(\mathbb{Q}^\star)$ es compacto y por el Teorema 1.94 tenemos que $A(\mathbb{Q}^\star) \times A(\mathbb{Q}^\star)$ es compacto, finalmente por la Proposición 4.10, se sigue que $A(\mathbb{Q}^\star) \times A(\mathbb{Q}^\star)$ es un k-espacio

6.6. Ser un espacio KC no implica ser un k-espacio

Ejemplo 6.6. *El espacio $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ es un espacio KC que no es un k-espacio.*

Por el Teorema 3.8 el espacio $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ es un espacio KC. Veamos que el espacio $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$, no es un k-espacio. Supongamos que $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ es un k-espacio, por el Teorema 5.6 la compactación de Alexandroff $A(\mathbb{R}^\star)$ sería un espacio KC, lo cual es una contradicción al Teorema 6.1.

Bibliografía

[1] Alas, O. T. y Wilson, R. G., Spaces in which compact subsets are closed and the lattice of T_1-topologies on a set, Math. Univ. Caroline 43,3 (2002) 641-652.

[2] Alexandroff P. S. y Hopf H., *Topologie*, Reimpresión de la edición de 1935, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[3] Anull C. E., Separation of bicompact sets, Math. Ann. 158 (1965), 197-202.

[4] Arkhangelskii, A. V., A characterization of very k-spaces, Czech Math. Journ. 18 (1968) 392-395.

[5] Arkhangelskii, A.V., On a class of spaces containing all metric and locally bicompact spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR 151 (1963) 751-754.

[6] Bagley, R. W. y Yang J. S., On k-spaces and function spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966) 703-705.

[7] Culler H. F., Unique sequential limits, Boll. Un. Mat. Ital. 20 (1965), 123–124.

[8] Dugundji J., Topology. Allyn and Bacon. Boston 1996.

[9] Engelking R., General Topology. Heldermann Verlag, Berlin 1989.

[10] Fleitas Morales G. y Margalef Roig J., Problemas de topología general. Editorial Alhambra, S.A. 1970.

[11] Franklin S. P., Spaces in which sequences suffice, Fund. Math. 1 Vol. 57 (1965), 107–115.

[12] Franklin S. P., Spaces in which sequences suffice II. Fund. Math. 61 Vol. 1 (1967), 51–56.

[13] García-Máynez A., On KC and k-spaces, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma de México 15 No. 1 (1975) 33-50.

[14] García-Máynez A., Some generalizations of the Hausdorff separation axiom, Bol. Soc. Mat. Mex., Vol. 16, No. 1 (1971) 38-41.

[15] Gillman L. y Jerison M., Rings of continuous Functions. Princeton: Van Nostrand 1960.

[16] Halfar E., Compact mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957) 828-830.

[17] Jiménez Bolaños R., Axiomas de Separación, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias U.N.A.M., 2016.

[18] Kelley J. L., General topology, Van Nostrand Princeton, N. J., 1995

[19] Lynn A. S., and Seebach J. A. Counterexamples in Topology, Springer Verlag, New York 1970

[20] Olšák M., Product of Fréchet spaces, Charles University in Prague, 2015.

[21] Munkres J. R., Topology. Massachusetts Institute of Technology. Prentice Hall. 2002

[22] Murdeshwar M. G. y Naimpally S. A., Semi-Hausdorff spaces. Canad. Math. Bull. 9 (1966) 353-356.

[23] R. W. Bagley y J. S. Yang., On k-spaces and function spaces. Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 17 No. 3 (1966) 703-705.

[24] Steiner E. F., Wallman spaces and compactifications. Fund. Math. 61 (1968), 295-304.

[25] Steiner E. F. and Steiner A. K., Wallman and Z compactifications. Duke Math. J. 35 (1968), 269-275.

[26] Wilanski A., Between T_1 and T_2, Amer. Math. Monthly, 74 No. 3 (1967) 261–266.

[27] Willard S., General Topology. Addison- Wesley series in mathematics. 1970