



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS
FÍSICA DE ALTAS ENERGÍAS, FÍSICA NUCLEAR, GRAVITACIÓN Y FÍSICA
MATEMÁTICA

ESTUDIO DE LA CONEXIÓN GALAXIA - MATERIA OSCURA EN COSMOLOGÍA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
BEATRIZ MIROSLAVA SANDOVAL RAMOS

DR. SÉBASTIEN MICKAËL MARC FROMENTEAU
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

DRA. MARIANA VARGAS MAGAÑA
INSTITUTO DE FÍSICA

DR. FRÉDÉRIC SYLVAIN MASSET
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

CUERNAVACA, MORELOS, MAYO 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Modelo Cosmológico FLRW	5
1.1.1. Principio Cosmológico	6
1.1.2. Observadores Fundamentales	7
1.1.3. Contenido Energético	8
1.1.4. Geometría RW	9
1.1.5. Dinámica	11
1.2. Materia Oscura	12
1.2.1. Observaciones que sugieren la existencia de materia oscura	14
1.3. Energía Oscura	15
1.3.1. Λ CDM	16
1.3.2. Modelos con Λ Dinámica	17
1.3.3. Modelos de gravedad modificada	19
1.4. Sondeos que evalúan los modelos cosmológicos	20
1.4.1. SNIa	20
1.4.2. Anisotropías del CMB	22
1.4.3. BAO	25
2. Conexión Galaxias - Materia Oscura	30
2.1. Espectro de Potencias	31
2.2. Teoría Euleriana de Perturbaciones	31
2.3. Teoría de colapso esférico	34
2.4. Aproximación de Zeldóvich	40
2.5. Modelo Press-Schechter Extendido	42
2.6. Sesgo de los halos de materia oscura	44
2.7. Función de correlación de dos puntos	47
2.8. Sesgo lineal	49
2.9. Sesgo no lineal usando teoría de perturbaciones a 2do orden	50
2.10. Conexión Halo - Galaxia	52
2.11. Distribución de Ocupación de Halos	53
2.12. Función de Luminosidad Condicional	57
2.13. Empate de Abundancias de SubHalos	59
2.14. El sesgo en la reconstrucción del pico de BAO (BAOP)	60
2.14.1. Inferencia Bayesiana de $\mathcal{P}(M_h L)$	61

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	1
2.14.2. Aplicación para LRG	66
3. Resultados y Discusión	67
3.1. Código	67
3.1.1. Simulación del Campo Aleatorio Gaussiano	68
3.1.2. Conjunto de Excursión	74
3.2. Discusión de Resultados	82
3.2.1. Contraste de densidad de la Materia	82
3.2.2. Historias de Formación	84
3.2.3. Aplicación al estudio de sesgo de galaxias	89
3.2.4. Aplicación a la reconstrucción del pico de BA0	91
4. Conclusiones	94

Agradecimientos

Esta investigación fue realizada gracias a la beca de Maestría Conacyt y al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM « IA103421, Simulaciones numéricas de las grandes estructuras del Universo y de formación de planetas en disco de gas».

Agradezco la retroalimentación brindada por mis sinodales: Mariana Cano, Jorge, Octavio y José Alberto. Sus inquietudes me ayudaron a profundizar en el entendimiento del tema y a refrescar la manera de explicar este trabajo.

Mi agradecimiento para Frédéric y Mariana Vargas, por hacer ágil cada una de las revisiones semestrales del comité tutor y por la ayuda ofrecida. En especial, gracias Mariana por el esfuerzo de organizar y por la invitación a contribuir en proyectos que intentan cerrar la brecha de género en la ciencia desde una perspectiva institucional.

Agradezco a Sébastien por aceptar ser mi tutor en un momento sumamente difícil para mí. Gracias por apoyarme al responder mis dudas, gestionando recursos y al resolviendo trámites administrativos. Gracias por cada vez que buscarste el mejor ambiente posible para mi desempeño y por la motivación constante incluso en pandemia.

Gracias a mis amigas del club de lectura por el análisis filosófico y político que hicimos del quehacer científico usando nuestros lentes violetas. Realmente atesoramos que hayamos compartido nuestras subjetividades sobre las actitudes que nos rodean en física. Gracias a ustedes estoy más cerca de la objetividad que por tanto tiempo he anhelado.

Guardan un lugar especial en mi corazón mis amigas del club de escritura por su compañía que me hizo más llevadero el posgrado. Ustedes cambiaron radicalmente mi manera de ver a las físicas. Fue un gusto conocer una pequeña parte de sus complejas y extraordinarias personalidades, y no sólo quedarme con lo aparente. Gracias por los cuestionamientos y por el crecimiento que tuvimos juntas. Ustedes sentaron en mí un precedente de lo cambiante y nutrido que puede ser la amistad entre mujeres.

Mi más profundo agradecimiento a la guacha, por presentarme a tus amigos del café del ICF y dejarme dentro una red de personas amables y solidarias. A través de tu mirada me mostraste lo bella que puede ser Cuernavaca y gracias a eso es que he disfrutado mi tiempo aquí. Agradezco tu valentía y confianza al contarme tu historia, sacudirme y despertarme. Gracias a tí, me convertí en una versión más honesta y más amable de mí.

Gracias a mi chaparrita por estar aquí a pesar de las ciudades y los años. Agradezco todo el cariño y la empatía que siempre me muestras. Gracias por el día de la semana en que nos reímos juntas y por hacerme parte de tu familia.

Gracias a mi familia por entender la decisión de escribir una tesis sobre grumos de una sustancia invisible que empezaron a formarse mucho antes que lo hiciera nuestro sistema solar. Gracias a mi hermano por estar en la búsqueda de su propio camino e independencia. Gracias a mi hermana por la información confiable y por cuidarnos a todos durante la pandemia en Sinaloa, somos muy afortunados por haber contado contigo. Gracias a mi mamá, que como siempre sé que puedo contar contigo no importa si es una duda existencial, el desempleo o ¿cuántos tomates se necesitan para 1L de salsa?

Por último, y por primera ocasión, quiero agradecerme por todo lo que he crecido en este periodo. Me agradezco la disciplina y la paciencia de trabajar usando listas de tareas y mis rutinas de cuidado. Agradezco mucho mis esfuerzos por conocer a las otras y aprender de ellas. Además, fui valiente y empecé a conocerme y a tirar mis propias barreras, sin adormecerme. Y finalmente agradezco la flexibilidad de contemplar y experimentar otras formas de ser lo que quiero ser.

Objetivos

El objetivo de este trabajo de investigación es estudiar la conexión galaxia - halo de materia oscura, enfocado al sesgo lineal de los los halos respecto al contraste de densidad de la materia. Para ello recurrimos a:

- Simular un campo de materia oscura en un corrimiento al rojo $z = 100$ en una malla 3D de $25 \text{ Mpc}/h$ y 500 píxeles por lado, lo que nos da una resolución de $10^{12} M_{\odot}$.
- Desarrollar un código para explorar las variaciones del contraste de densidad de la materia en el espacio real usando el conjunto de excursión.
- Analizar las posibles historias de formación de estructuras de materia oscura fría usando el modelo de halo y la teoría de colapso esférico gravitatorio.
- Calcular el valor promedio del contraste de densidad a grandes escalas en corrimientos al rojo tardíos alrededor de halos de materia oscura fría. Esperamos que el sesgo aumente entre más cercano sea el corrimiento al rojo.

Capítulo 1

Introducción

El marco teórico de este trabajo ha sido dividido entre los capítulos 1 y 2. En el primer capítulo mostramos de forma no extensiva algunos aspectos de relatividad general y cosmología que sitúan este tema de tesis de forma relevante en la investigación científica actual. En el capítulo 2 presentamos las herramientas teóricas específicas que usamos y parte del contexto inmediato de aplicación de nuestros resultados. En el capítulo 3 tenemos una descripción detallada del código para que futuros alumnos puedan usarlo en la continuación del proyecto del grupo, así como presentamos el análisis de los resultados. Finalmente en el capítulo 4, mostramos conclusiones y sugerencias para la mejora del código y su implementación.

1.1. Modelo Cosmológico FLRW

Asumiremos que en grandes escalas la geometría del espaciotiempo está descrita por la teoría de relatividad general. Para tener un modelo cosmológico necesitamos especificar la geometría del espaciotiempo, el contenido energético presente y la interacción entre ambos. En las Ecuaciones de Campo de Relatividad General (GRFE) es donde queda plasmada toda esta información:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = T_{ab} - \Lambda g_{ab}, \quad (1.1)$$

donde R_{ab} es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci y g_{ab} es la métrica. Veamos que en el lado izquierdo tenemos la parte de la geometría y del lado derecho tenemos al contenido energético. Ya que el tensor G_{ab} está en términos de la métrica, su derivada covariante es cero, esto significa el tensor de energía momento T_{ab} se conserva,

$$\nabla_b G^{ab} = 0 \implies \nabla_b T^{ab} = 0. \quad (1.2)$$

Por lo tanto, si consideramos una constante cosmológica Λ dentro del modelo, ésta debe satisfacer la relación $\nabla\Lambda = 0$, es decir, que sea constante en el

tiempo y en el espacio. Según el lado donde la ubiquemos en las ecuaciones de campo, tendremos una interpretación distinta: una nueva entidad o una nueva teoría. Si la colocamos al lado derecho, Λ representa a un tipo de energía (nueva entidad) con presión negativa que explica la expansión acelerada del universo en tiempos tardíos. Por otro lado, del lado izquierdo estamos haciendo una modificación a Relatividad General RG y/o al modelo cosmológico Friedman-Lemaître-Robertson-Walker FLRW (nueva teoría).

Hubo una discusión similar al probar la Teoría de Gravitación Universal con las observaciones del sistema solar. Para explicar el movimiento de Urano, cuyo comportamiento era de acuerdo a las predicciones de la teoría, Le Verrier propuso que debía haber otro planeta que afectara su movimiento y así se descubrió Neptuno. Lo mismo sucedió con la órbita de Mercurio, pero en este caso las observaciones no encontraron al planeta propuesto, Vulcano, por lo que fue necesaria una nueva teoría para explicarlo, RG. [29]

Esto es, los mismos modelos nos indican las características físicas observables. Esto nos es muy útil para considerar cuáles modelos son viables para describir al universo. Ya que para aceptarlos o rechazarlos siempre debemos compararlos con las observaciones.

1.1.1. Principio Cosmológico

Nuestro entendimiento actual de la evolución del universo se basa en el modelo cosmológico FLRW. Este modelo de fondo consiste en universo isotrópico alrededor de cada evento de los observadores fundamentales, lo que supone que es también espacialmente homogéneo. Pero, ¿es esto un hecho?

A pequeñas escalas, la respuesta en ambos casos es *no*. La descripción FLRW del universo real asume de forma implícita que:

1. El universo es estadísticamente espacialmente homogéneo e isotrópico a partir de una escala ($100h^{-1}$ Mpc).
2. Una descripción de qué tan idealizada es la métrica respecto al universo real. El cual se llama el problema "del ajuste fino" en cosmología.

Como consecuencia, la deducción de la homogeneidad espacial se ha hecho a partir de la isotropía observada de la materia y radiación alrededor nuestro en grandes escalas en conjunto con el principio copernicano.¹ Esto resulta en un principio en el cual se basan nuestros modelos cosmológicos:

Principio cosmológico: *el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico.*

Que es una descripción a priori de las condiciones iniciales del universo que engloba la idea que el universo es necesariamente simple.

Tenemos evidencia observacional de la isotropía en distintas épocas. La primera vez que se estimó fue al analizar de forma estadística a las estructuras del Bosque de Lyman Alpha en $z \sim 2.6$. En $z \simeq 1100$ tenemos que las fluctuaciones

¹Principio copernicano: la Tierra no ocupa una posición privilegiada dentro del universo.

de la temperatura del fondo cósmico de radiación (CMB) en cualquier dirección del cielo son del orden de 10^{-5} . Otra prueba son las fuentes de rayos X de las estructuras de materia bariónica que se encuentran distribuidas de forma isotrópica en corrimientos al rojo de $z \sim 0.02$.

Al probar homogeneidad a través de isotropía y el principio copernicano debemos considerar el tipo de isotropía que guardan los datos, ya que esta podría ser isotropía proyectada o isotropía espacial. La isotropía espacial se expresa como

$$\rho(r, \theta_1, \phi_1) = \rho(r, \theta_2, \phi_2) \text{ para cada } r, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}^5.$$

Mientras que la isotropía proyectada, es la isotropía espacial integrada a lo largo de r ,

$$\rho_{\text{proy}}(\theta, \phi) = \int \rho(r, \theta, \phi) dr \implies \rho_{\text{proy}}(\theta_1, \phi_1) = \rho_{\text{proy}}(\theta_2, \phi_2).$$

De esta forma las observaciones que miden la isotropía proyectada en un intervalo de corrimientos al rojo, como el CMB, no son suficientes para garantizar un universo homogéneo [35].

De forma observacional, la homogeneidad espacial podría probarse con sólo 3 observadores distintos que detecten isotropía espacial, sin embargo aún no podemos establecer si otros observadores ven un universo isotrópico. [26]

1.1.2. Observadores Fundamentales

En cosmología las componentes materiales del universo nos dan una motivación física para elegir un movimiento de preferencia. Por ejemplo podemos escoger la cuatriveicidad en el marco de referencia del CMB y de esta forma vemos que el resto del universo es isótropo respecto a nosotros hasta un orden de $\sim 10^{-5}$.

Tal elección implica que hay un campo de velocidades u^a que genera una familia de líneas de mundo de preferencia. Elegimos a los observadores fundamentales como aquellos que se mueven de manera comóvil con la cuatriveicidad fundamental u^a de la materia. En coordenadas comóviles normalizadas, la parte espacial y^i de las coordenadas que describen las líneas de mundo (t, y^i) permanecerán constantes, esto es:

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \frac{dy^i}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow u^\mu = \delta_0^\mu. \quad (1.3)$$

Donde τ es el tiempo propio a lo largo de las líneas de mundo y la cuatriveicidad u^μ está en términos de una delta de Kronecker en la coordenada temporal. También es posible expresar a las líneas de mundo en términos de coordenadas locales x^μ por $x^\mu = x^\mu(\tau)$, entonces la 4-velocidad de preferencia es el vector,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \Rightarrow u^\mu u_\mu = -1. \quad (1.4)$$

El marco de referencia en reposo para cada uno de los observadores fundamentales se define localmente como superficies de simultaneidad. En ellas, el tensor de la métrica efectivo

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \quad (1.5)$$

nos permite calcular la proyección ortogonal de cualquier tensor respecto a u^a .

1.1.3. Contenido Energético

Ya que nos interesa describir al universo a partir de la época de dominación de la materia, de acuerdo al Modelo Estándar de cosmología, su contenido más relevante es:

- Materia del modelo estándar: Protones, electrones, átomos, fotones y neutrinos. La materia bariónica forma estructuras por efecto de la gravedad como estrellas, gas en las galaxias y gas intergaláctico en los cúmulos.
- Materia Oscura Fría: La cual se precisa de forma indirecta en la dinámica astrofísica y cosmológica. Se requiere para explicar la formación de estructuras a gran escala, dinámica galáctica y de cúmulos, así como los picos de compresión del CMB.
- Energía oscura: se deduce a partir de efectos gravitatorios a nivel cosmológico y depende del modelo cosmológico. Se usa para explicar la expansión acelerado del universo tardío.

Las componentes energéticas del universo pueden ser modeladas usando fluidos, gases y campos. Ya que el tensor de energía momento es simétrico para un observador que se mueve con 4-velocidad u^a de la materia, lo podemos escribir en términos de su parte paralela y ortogonal a u^a como

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + q_a u_b + u_a q_b + p h_{ab} + \pi_{ab}. \quad (1.6)$$

El observador mide que:

- $\rho = T_{ab} u^a u^b$ es la densidad de energía relativista;
- $p = h^{ab} T_{ab} / 3$ es la presión relativista;
- q_a es la densidad de momento relativista, la cual también es el flujo de energía relativo a u^a ;
- π_{ab} es el tensor de esfuerzos anisotrópico relativista.

Luego 10 componentes de T_{ab} están representadas por las dos cantidades escalares ρ y p , las tres componentes del vector q_a y las cinco componentes del tensor π_{ab} . En general, para cualquier elección de u^a es posible separar al tensor de energía momento entre su parte paralela y perpendicular; la física de la materia está dada por sus ecuaciones de estado que relacionan ρ , p , q_a y π_{ab} .

1.1.4. Geometría RW

Los modelos cosmológicos FLRW son aquellos universos que son isotrópicos alrededor los observadores fundamentales en todos los tiempos. Por lo tanto los modelos FLRW describen un universo espacialmente homogéneo: todas las propiedades físicas son las mismas en cualquier punto sobre las superficies espaciales ortogonales al flujo del fluido de la materia. Esta isotropía implica que las distancias relativas cambian únicamente debido a la tasa de expansión escalar Θ , independiente de la dirección, por lo que no cambia la dirección de la posición relativa entre observadores fundamentales. Esto quiere decir que de tener un conjunto de galaxias en una esfera en un tiempo t estas se encontrarán al tiempo $t + \delta t$ en una nueva esfera de mayor radio pero conservarán su posición en (θ, ϕ) . Entonces tenemos una expansión libre de cizalla σ_{ab} (que causa distorsiones) y vorticidad w^a (rotaciones),

$$\sigma_{ab} = 0 \quad y \quad w^a = 0. \quad (1.7)$$

si estas cantidades fueran distintas de cero, entonces estaríamos eligiendo alguna dirección predilecta en el espacio tridimensional ortogonal a u_a .

Existe un tiempo propio normalizado que cumple

$$u_a = -t_{,a}$$

y es único hasta una constante. Las superficies de homogeneidad espacial (donde el marco de referencia está en reposo) en estos universos son aquellas donde $t = \text{const}$, las cuales son ortogonales a las líneas de flujo que describe a la materia (paralelas a u^a). La isotropía también implica que

$$\pi_{ab} = 0, \quad q_a = 0, \quad (1.8)$$

por lo que el tensor de energía momento de un universo FLRW debe describir un fluido perfecto

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + p g_{ab}. \quad (1.9)$$

Si no se cumplieran las condiciones en 1.8 el tensor de esfuerzos y por lo tanto el tensor de Ricci serían anisotrópicos. Además la presión debe ser uniforme en las superficies espaciales, $p \equiv p(t)$ o causaría anisotropías a través de su gradiente. Es por eso que $\bar{\nabla}_a p = 0$, lo que implica $\dot{u}^a = 0$ de la ecuación de conservación de momento para un fluido perfecto,

$$(\rho + p)\dot{u}_a + \bar{\nabla}_a p = 0. \quad (1.10)$$

Con todo esto, las componentes cinemáticas distintas de cero y los escalares del tensor de energía momento son funciones únicamente del tiempo t

$$\rho = \rho(t), \quad p = p(t), \quad \Theta = \Theta(t) \iff \bar{\nabla}_a \rho = \bar{\nabla}_a p = \bar{\nabla}_a \Theta = 0. \quad (1.11)$$

Finalmente cuando se cumplen 1.7, 1.9, 1.11, tenemos un universo FLRW.

Geometría del espaciotiempo

Con el fin de describir la geometría del espaciotiempo, podemos separar su métrica en regiones paralelas y ortogonales a la velocidad de los observadores fundamentales u^μ .

Usando coordenadas comóviles² (t, x^i) , el elemento de línea es

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) f_{ij}(x^k) dx^i dx^j, \quad (1.12)$$

donde la parte paralela a las líneas de mundo es una delta de Kronecker en la parte temporal $u^\mu = \delta_0^\mu$, y la parte ortogonal $a^2(t) f_{ij}(x^k)$ describe a las regiones espaciales tridimensionales. El factor de escala $a(t)$, definido como,

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\Theta(t)}{3}, \quad (1.13)$$

describe el cambio en las distancias en las regiones espaciales según la evolución del universo. Por ejemplo, si suponemos que hay una distancia d_1 entre dos observadores fundamentales en $t = t_1$, y esta distancia evoluciona como $d(t) = a(t)d_1$, la rapidez de movimiento en la superficie a t constante está definida por

$$v(t) := \dot{d}(t) = \dot{a}(t)d_1 = H(t)dt, \quad H(t) := \dot{a}(t)/a(t). \quad (1.14)$$

Por lo que tenemos que la ley de expansión de Hubble puede ser interpretada como una ley de recesión entre las superficies de simultaneidad.

Geometría de las superficies espaciales

Ya que el tensor de Ricci es isotrópico, las secciones espaciales, descritas por las hipersuperficies homogéneas ortogonales al flujo del fluido, deben ser de curvatura constante $\kappa/a^2(t)$, donde κ puede ser 1, 0 o -1. De esta manera la métrica tiene la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dr^2 + f^2(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi)], \quad u^\mu = \delta_0^\mu, \quad (1.15)$$

$$f(r) := (\sinh r, r, \sin r) \text{ para } \kappa = (-1, 0, +1). \quad (1.16)$$

En estas regiones cualquier punto puede ser considerado como el centro de coordenadas, por lo que las secciones espaciales guardan homogeneidad. Lo mismo sucede con las cantidades observables evaluadas en las mismas, esto es a tiempo constante. Por lo tanto isotropía en todos los puntos implica homogeneidad espacial del espaciotiempo. Pero solamente en las secciones espaciales definidas por tener el mismo valor del tiempo t es donde los universos FLRW son homogéneos. Si la métrica espacial fuera la que hemos mencionado con anterioridad, pero la cuadrivelocidad de la materia no fuera ortogonal a esta. Podemos tener un espacio tiempo con una geometría FLRW, donde el contenido

²Las coordenadas comóviles son aquellas cuya distancia relativa entre observadores es constante.

de materia no sería un fluido perfecto. Esto significa que el tensor de energía momento no forza una interpretación particular sobre su propia naturaleza. Sin embargo, las fuentes de materia que se utilicen podrían parecer irreales y además el universo no parecería isotrópico para los observadores que se muevan con esta cuadrivelocidad, por lo que no hay una razón física para escoger un modelo así.

1.1.5. Dinámica

Las ecuaciones que gobiernan la dinámica de los modelos de universo FLRW relacionan al factor de escala, la densidad de energía y a la presión a través de la ecuación de Raychaudhuri, la conservación de energía y la ecuación de Friedman. Respectivamente estas son:

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3p) + \Lambda, \quad (1.17)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (1.18)$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}. \quad (1.19)$$

Estas ecuaciones parten de las ecuaciones de campo de RG: la ecuación de Raychaudhuri es la doble contracción del tensor de Ricci con la cuadrivelocidad del fluido, la ecuación de Friedmann generalizada es el escalar de curvatura 3R en términos de las densidad de energía y materia, y finalmente en una descripción $1 + 3$ la ecuación de conservación de energía, es la componente paralela a u^a en la ecuación 1.2.

De hecho, cuando tenemos un universo FLRW descrito por la ec. 1.16 donde $\dot{a} \neq 0$, solo es necesario satisfacer la ecuación de conservación de energía y la ecuación de Friedman para que las 10 ecuaciones de campo se cumplan. Esto se sigue porque la ecuación de Raychaudhuri será una consecuencia de la ecuación de conservación de energía y las otras 8 ecuaciones son triviales. Esto es válido sin importar la forma de la ecuación de estado, en una geometría RW sólo es necesario que la relación entre la densidad de energía efectiva y la presión con las demás propiedades de la materia muestren el comportamiento de un fluido perfecto en el tensor de energía momento. El punto clave es que ρ represente la suma total de todas las contribuciones de materia a la densidad de energía, sin importar su origen.

Parámetros de densidad y propiedades dinámicas

Usando la definición estándar de los parámetros de densidad Ω_i , y del parámetro de desaceleración q ,

$$\Omega_i := \frac{\rho_i}{\rho_{\text{crit}}}, \quad \Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H(z)^2}, \quad \rho_{\text{crit}} = \frac{3H(z)^2}{8\pi G}, \quad q := -\frac{1}{H(z)^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (1.20)$$

la ecuación de Friedman (ec. 1.19) se puede escribir como

$$\frac{K}{a^2 H(z)^2} = \Omega_{\text{total}} - 1 \equiv \Omega + \Omega_{\Lambda} - 1, \quad (1.21)$$

lo que muestra que $K > 0, = 0, < 0$ si $\Omega_{\text{total}} > 1, = 1, < 1$, respectivamente. Definiendo un parámetro de densidad para la curvatura Ω_K positivo, la ecuación anterior es

$$\Omega + \Omega_{\Lambda} + \Omega_K = 1, \quad \Omega_K = -\frac{K}{a^2 H^2}, \quad (1.22)$$

aquí $\Omega = \sum \Omega_i$ representa la contribución a la densidad de la energía de toda la materia y los campos presentes. Incluye bariones, materia oscura fría, fotones, neutrinos, pero no a la constante cosmológica. Los valores actuales de estas cantidades se denotan por un subíndice cero. [33]

1.2. Materia Oscura

Una forma de detectar a la materia bariónica es a través de la luz que emite, como la luminosidad de las estrellas. Para convertir la luminosidad a masa de estrellas necesitamos conocer la tasa de luz - masa estelar. Si embargo esta tasa dependerá del tipo de estrellas porque no todas siguen el mismo comportamiento. Es por eso que se clasifican en tipos espectrales, cada tipo tiene una temperatura y luminosidad superficial característico.

Precisamente, la función de masa inicial $\chi(M)$ que indica el número de estrellas con una masa M . Tiene un comportamiento distinto en cada una de las categorías espectrales, como vemos en la fig. 1.1

Luego la razón luz-masa estelar en una galaxia dependerá de la mezcla de tipos espectrales que conformen la población estelar. Un problema que surge al usar estrellas como trazadoras de la materia bariónica es que su luminosidad puede ser tan baja que no serían detectables, como ocurre con las enanas cafés. Por otro lado las estrellas luminosas y masivas emiten luz por muy poco tiempo, por lo que al disminuir su brillo dejarán de ser detectables.

Considerando solamente a la materia bariónica de las estrellas luminosas, el parámetro de densidad sería $\Omega_{*,0} = 0.003$. Esto no mejoraría mucho si incluyéramos a los remanentes de estrellas, a las enanas cafés o a las estrellas en formación. De hacer esto, el parámetro de densidad de la materia bariónica aumentaría a $\Omega_{*,0} = 0.005$.

Para tener una estimación más precisa de la materia bariónica podríamos considerar el gas interestelar, ya que éste representa el 20% de su valor en galaxias como la nuestra y la M31. Incluso este porcentaje aumenta de forma dramática cuando tratamos con galaxias irregulares, que casi no han formado estrellas ni colapsado. Un ejemplo es el cúmulo Coma, cuya masa estelar es $2 \times 10^{13} M_{\odot}$ mientras que la masa del gas es de $2 \times 10^{14} M_{\odot}$. ¡El gas representa el 90% de la materia bariónica! Ver fig 1.2. Por otro lado tenemos, el gas intracumular cuya energía cinética es tan elevada que no formará estrellas. Éste representa el

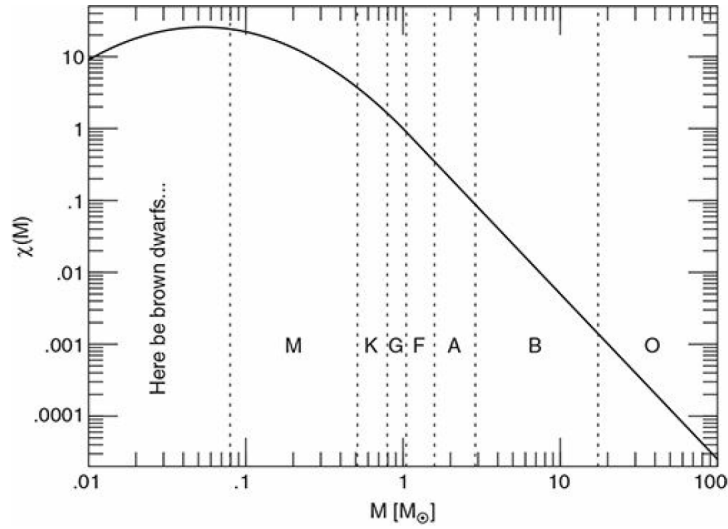


Figura 1.1: Función de masa inicial $\chi(M)$ de estrellas y enanas café. Los rangos de masa correspondiente a las tipos espectrales de O a M, así como las enanas café. Se asumen los valores $\beta = 2.3$, $M_c = 0.2M_{\odot}$ y $\sigma = 0.5$ [41].



Figura 1.2: Cúmulo Coma en rayos X y luz óptica, captado por la Cámara de Imágenes de Fotones Europea (EPIC) de XMM-Newton y el Sloan Digital Sky Survey (SDSS). [13]

85 % de los bariones en el universo se encuentra en forma de gas extremadamente tenue distribuido en el espacio intergaláctico.

La mejor estimación que tenemos de la materia bariónica actualmente, es gracias a las fluctuaciones de la temperatura del CMB pues estas depende de la razón de bariones/fotones en el universo temprano. Con esta información, el parámetro de densidad de la materia bariónica estimado es

$$\Omega_b = 0.048 \pm 0.003 \quad \text{o bien,} \quad \rho_b = 6.25 \times 10^{-9} \frac{M_\odot}{\text{pc}^3},$$

que es de 10 a 20 veces el valor estimado usando únicamente la masa estelar.

1.2.1. Observaciones que sugieren la existencia de materia oscura

Se ha planteado que la mayoría de la materia del universo en realidad es materia oscura. Como su nombre lo denota, no absorbe, emite ni dispersa radiación a ninguna longitud de onda.

En caso de existir, la forma en que podríamos detectarla sería a través de su influencia gravitatoria sobre la materia visible. Un método clásico consiste en observar la velocidad orbital de las estrellas en las galaxias espirales. En el caso de las órbitas circulares, podemos considerar que la única causa del movimiento circular uniformemente acelerado (M.C.U.A.) es debido a la interacción gravitatoria entre la estrella y la galaxia. De esta forma, la velocidad decrece con la distancia radial como

$$v \propto 1/\sqrt{R}. \quad (1.23)$$

En 1970, Vera Rubin y su equipo, midieron la velocidad de rotación de las estrellas en la galaxia M31 y notaron que la velocidad orbital para radios mayores era mayor que lo predicho en la ec. 1.23. De ahí dedujeron que la galaxia observada posiblemente se encontraba inmersa en una región con materia que no estaba siendo detectada. Esta materia causaría que las estrellas y el gas se mantuvieran gravitatoriamente ligadas, evitando su fuga al espacio intergaláctico. La galaxia M31 no es la única que tiene este comportamiento, la mayoría de las galaxias espirales tienen un halo de materia oscura con una masa similar.

De hecho esta no era la primera vez que las observaciones sugerían la existencia de materia faltante. En 1930, Zwicky midió la velocidad de dispersión de 7 galaxias en el cúmulo Coma y notó que era alrededor de 1000 km/s. Esta velocidad es demasiado grande y haría que las galaxias y el gas terminaran por disiparse hacia los alrededores vacíos, a no ser que hubiera alguna atracción gravitatoria que mantuviera al cúmulo unido justo como ocurrió en la galaxia M31. A diferencia del grupo de Vera Rubin, Zwicky consideró un sistema virializado de N galaxias unidos por energía potencial de origen gravitatorio

$$W = -\frac{G}{2} \sum_{j>i} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = -\alpha \frac{GM^2}{r_h}, \quad (1.24)$$

donde $M = \sum m_i$ es la masa total de las galaxias en el cúmulo, $\alpha \approx 0.45$ es un factor numérico que depende del perfil del densidad del cúmulo y r_h es el radio que encierra la mitad de la masa del cúmulo. En este sistema, la energía cinética asociada al movimiento relativo de las galaxias es

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\dot{r}_i|^2 = \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle. \quad (1.25)$$

Ya que este sistema no se expande ni se contrae, se cumple la versión estacionaria del teorema del virial

$$W + 2K = 0. \quad (1.26)$$

Por lo que podemos sustituir en la expresión de arriba las expresiones de 1.24 y 1.25 para estimar la masa del cúmulo,

$$M = \frac{\langle v^2 \rangle r_h}{\alpha G} = 2 \times 10^{15} M_\odot. \quad (1.27)$$

Ya que la mayoría de la masa de los cúmulos se encuentra en forma de gas caliente, podemos usar la presión del gas caliente interestelar para calcularla. En este sistema se cumple la ecuación de equilibrio hidrostático

$$\frac{dP_{\text{gas}}}{dr} = - \frac{GM(r)\rho_{\text{gas}}(r)}{r^2}, \quad (1.28)$$

donde P_{gas} es la presión del mismo, ρ_{gas} es la densidad del gas y M es la masa total dentro de una esfera de radio r que incluye gas, estrellas y materia oscura. Luego, suponiendo que se comporta como un gas ideal con una composición uniforme en todo el cúmulo la masa del cúmulo Coma calculada con este método debe ser de $1.3 \times 10^{15} M_\odot$, lo cual es consistente con el estimado usando el teorema del virial.

1.3. Energía Oscura

Gracias a diversas observaciones como SNIa, el espectro de potencias del CMB, BAO, entre otras, sabemos que el universo se encuentra en una expansión acelerada. En el modelo estándar de la cosmología, se considera que la responsable de esta aceleración es la energía oscura, cuyo origen sigue siendo desconocido. Sin embargo se estima que forma alrededor del 70 % de la energía del universo actual. Esta se distingue de la materia ordinaria, como los bariones y la radiación, en el sentido de que tiene presión negativa. Este tipo de presión es necesaria para contrarrestar la atracción gravitatoria y tener un universo en expansión acelerada, tal y como lo muestran las observaciones desde $z \sim 1$.

La solución más sencilla y popular que explica la expansión acelerada del universo es Λ CDM que hace uso de la constante cosmológica Λ .

Hay enfoques alternativos que proponen que la expansión del universo es debido a un tipo de energía con presión negativa en el tensor de energía momento o bien que es necesario modificar las ecuaciones de campo en el lado geométrico.

En el primer caso tenemos modificaciones al contenido energético del universo como de modelos de quintaesencia, k-esencia y fluidos perfectos. En el segundo caso, tenemos los modelos de gravedad modificada como los modelos $f(R)$, los tensor-escalar y los modelos de mundo Brana. [2]

A un nivel teórico todavía no hay un modelo que supere a Λ CDM, ya que los otros modelos no explican la crisis de la energía del vacío y no tienen una motivación física convincente. Sin embargo es importante seguir estudiando alternativas a la energía oscura y los modelos de gravedad modificada. Esto nos ayudará a entender el espacio de posibilidades, la variedad de las propiedades cosmológicas y nos ayudará a tener estrategias de observación necesarias para distinguirlas entre sí.

1.3.1. Λ CDM

En el modelo estándar de cosmología, las mediciones [1] indican que el valor de los parámetros de densidad actualmente son

$$\Omega_{\Lambda 0} \approx 0.69, \quad \Omega_{m 0} \approx 0.31, \quad \Omega_{K 0} \approx 0, \quad \Omega_{r 0} \approx 10^{-4}. \quad (1.29)$$

Al sustituirlos en el parámetro de desaceleración q ,

$$q = \frac{1}{H_0^2} \frac{\ddot{a}}{a} = \Omega_{\Lambda 0} - \frac{1}{2} \Omega_{m 0} (1+z)^3 - \Omega_{r 0} (1+z)^4, \quad (1.30)$$

tenemos que el universo se expande de forma acelerada.

La forma más sencilla de explicar la aceleración del universo es con una constante cosmológica, esta entra a las ecuaciones de campo de RG a través del tensor de energía momento, de la misma forma en que lo haría la energía del vacío. De hecho, no es posible distinguirlas entre sí.

La energía del vacío es una energía de fondo que existe a lo largo de todo el universo. Para estimar su energía de punto cero o base, podemos hacer una aproximación burda para una energía igual a la masa de Planck $E = M_p$. Sustituyendo en $\rho = E^4$, esto correspondería a una contribución de la energía del vacío a la constante cosmológica de $\Lambda_{\text{vac}} = 8\pi G \rho_{\text{vac}} = 10^{38} \text{ GeV}^2$. Mientras que la constante medida es

$$\Lambda_{\text{eff}} = \Lambda + \Lambda_{\text{vac}} = 10^{-83} \text{ GeV}^2,$$

luego las mediciones tienen una diferencia de 120 órdenes de magnitud con el estimado teórico. A esto se le llama el *problema del ajuste fino de la energía oscura*. Aún suponiendo que la energía es mucho más pequeña que la masa de Planck, por ejemplo usando la energía de Sussky que es alrededor de 1 Tera eV, tendríamos 60 órdenes de magnitud de diferencia. Esta diferencia podría ser explicada usando gravedad cuántica al mostrar que el vacío no gravita, es decir $\Lambda_{\text{vac}} \equiv 0$. De forma que Λ sería una constante gravitatoria sin relación con la energía del vacío.

Otro problema es el de la coincidencia. Habíamos mencionado que en $z \sim 1$ es cuando el universo empieza a acelerarse, esto se obtiene cuando $\rho_{\Lambda} = \rho_{m 0}$.

Lo conflictivo de esta época es que concuerda con la región cercana del universo que podemos observar. Esto es, durante todo el pasado la energía oscura no había sido relevante hasta el hoy y dominará la evolución del universo en el futuro. De no haber sido así, las estructuras a gran escala no serían como las observamos actualmente. Incluso si Λ hubiera dominado antes no se hubiera formado estructura.

1.3.2. Modelos con Λ Dinámica

El problema de la coincidencia que presenta la propuesta de la constante cosmológica Λ , podría ser resuelto si Λ fuera una variable dinámica con $w < -1/3$ en su ecuación de estado. Sin embargo con esta estrategia no puede resolverse el problema del ajuste fino y, de hecho aún no hay un modelo de energía oscura que pueda explicar ambos problemas de forma convincente.

Fluido Perfecto

Si el origen de la aceleración cósmica fuera debido a algún tipo de materia o energía desconocida que permeara todo el espacio, la energía oscura sería una componente dinámica del universo que evoluciona con el tiempo. Ya que aún no hay una evidencia concreta sobre la naturaleza de este material, solo podemos construir modelos sencillos para calcular cómo evolucionaría el universo y probar estos modelos con las observaciones.

El caso más simple de tal tipo de energía es descrito por una densidad de masa ρ_X , y una presión efectiva, p_X que se relacionan linealmente entre sí

$$p_X = w\rho_X c^2,$$

donde $w \equiv w(z)$ evoluciona con el corrimiento al rojo. Al hacer eso, podemos integrar la ecuación

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3H \left(1 + \frac{p}{\rho c^2} \right) = -3H(1+w) \implies p = w\rho c^2, \quad (1.31)$$

para derivar una expresión de la densidad del universo en función del corrimiento al rojo. Lo cual tiene como solución

$$\rho(z) = \rho(0) \exp \left(3 \int_0^z \frac{1+w(z')}{1+z'} dz' \right). \quad (1.32)$$

Linder (2003) y Cheralier & Polarski (2001) proponen un modelo sencillo para la evolución de $w(z)$,

$$w(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}. \quad (1.33)$$

Al considerar este modelo para describir la expansión de un universo plano provisto de materia y energía oscura que evolucionan de forma independiente,

la función de Hubble queda descrita por la ecuación

$$\frac{H(z)}{H_0} = \left[\Omega_m (1+z)^3 + (1 - \Omega_m) \exp \left(3 \int_0^z \frac{1+w(z')}{1+z'} dz' \right) \right]^{1/2}. \quad (1.34)$$

Vemos que $w(z)$ es una idea sencilla y plausible, que nos permite parametrizar la energía oscura y así tener un modelo más general que una constante cosmológica. [25]

Quintaescencia

Este modelo consiste en un campo escalar ϕ con un potencial $V(\phi)$ que es el responsable de la aceleración tardía cósmica. De forma distinta al modelo de constante cosmológica, los modelos de quintaescencia cambian dinámicamente con el tiempo [2]. Dentro de un espaciotiempo FLRW, estos modelos se ven como

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (1.35)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (1.36)$$

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_r + \rho_m + \rho_\phi). \quad (1.37)$$

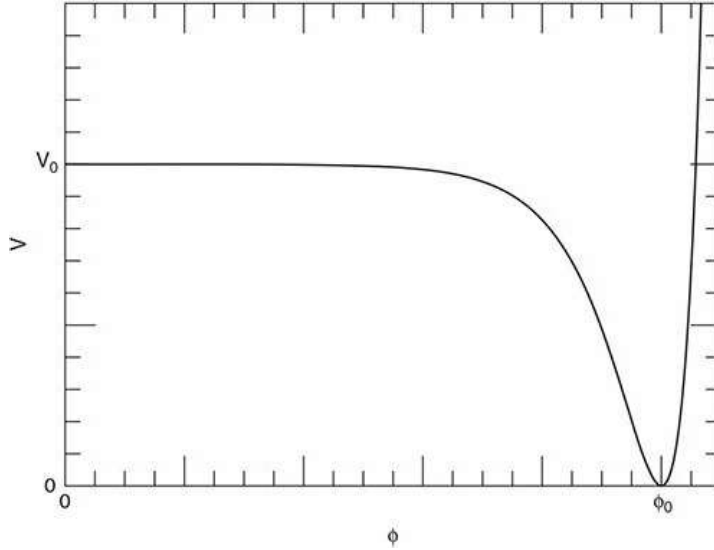


Figura 1.3: Potencial que podría dar lugar a la aceleración tardía cósmica, notemos su parecido con el potencial de inflación. [41]

Este campo rueda cuesta abajo su potencial y la densidad de energía oscura evoluciona a lo largo del tiempo, como vemos en la figura 1.3. Se han encontrado potenciales para los cuales la densidad de energía del campo sigue a la componente dominante de materia, lo que nos abre la posibilidad de resolver el problema de la coincidencia. Sin embargo estos modelos son insensibles a las condiciones iniciales por lo que requieren un ajuste fino para asegurar la reciente dominancia del campo.

1.3.3. Modelos de gravedad modificada

Si usamos la geometría RW, la alternativa que tendríamos para explicar la expansión acelerada del universo sería un debilitamiento de la gravedad a gran escala. Este efecto se podría obtener al modificar RG, sin embargo es extremadamente difícil hacerlo para bajas energías sin violar ninguna restricción observacional para regiones cercanas (sistema solar).

Una modificación consistente de relatividad general, requiere una formulación covariante de las ecuaciones de campo en el caso general, es decir, términos generales y anisotropías. No es suficiente proponer modificaciones ad hoc de la ecuación de Friedmann de la forma $f(H^2) = 8\pi G\rho/3$ para alguna función f . Tal relación sólo nos permitiría calcular las observaciones de fondo, pero no podríamos calcular las perturbaciones a la densidad sin saber la teoría covariante progenitora que nos lleva a tal versión de las ecuaciones de fondo modificadas, ni tampoco podríamos calcular las predicciones en el sistema solar.

Los requerimientos mínimos para estas conexiones son: consistencia teórica, aceleración tardía según las observaciones de SNIa, BAO, CMB, una época donde la materia domine, una evolución del factor de escala que sea consistente para la formación de estructuras, perturbaciones a la densidad que sean consistentes con el factor de escala observado, el espectro de potencias de la materia, las velocidades peculiares y las anisotropías del CMB, así como el espectro de potencia de lentes gravitatoria, también debe haber soluciones esféricas estáticas estables para estrellas y debe haber consistencia con las observaciones terrestres y del sistema solar, finalmente debe tener consistencia con los datos de los períodos de pulsares binarios.

Aún cuando las modificaciones de RG, no compiten contra LCDM, el estudio de gravedad modificada ha sido muy importante, al menos por su legado. Nos ha ayudado a mejorar nuestro entendimiento sobre:

- La relación entre gravedad y la historia de expansión y de formación de estructura.
- La relación entre restricciones por observaciones locales y cosmológicas.
- Las propiedades especiales de RG.
- Las pruebas necesarias para distinguir entre diferentes modelos candidatos así como las limitaciones y degeneraciones dentro de esas técnicas.

- El desarrollo de pruebas que nos pueden ayudar a probar la validez de RG en escalas cosmológicas, independiente de cualquier modelo alternativo en partículas.

[33]

1.4. Sondeos que evalúan los modelos cosmológicos

La base de la cosmología científica son las observaciones, con ellas podemos determinar qué tan aceptables son los modelos cosmológicos para representar al universo real. Éstas han mejorado mucho en los últimos años, ahora tenemos observaciones en múltiples longitudes de onda que nos permiten guardar información de un gran número de fuentes y contextos. Gracias a ellas podemos probar el modelo de fondo y también podemos probar el modelo de las perturbaciones alrededor de una teoría de fondo específica.

Para evaluar las perturbaciones podemos usar la información de los sondeos que miden las anisotropías del CMB y el crecimiento de estructura a grandes escalas como BAO. Estos modelos son evaluados a través de sus predicciones estadísticas, tras haber fijado los parámetros de la cosmología de fondo. Si un modelo perturbado pasa una prueba observacional, entonces tenemos una prueba de consistencia. Esto a su vez implica una evaluación a RG, ya que es la teoría gravitatoria que conecta a la cosmología de fondo y a la perturbación.

Cuando se evalúa la cosmología de fondo se necesitan observaciones que nos den información sobre la expansión del universo $H(z)$:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{K0}(1+z)^2 + \Omega_{de0} \exp 3 \int_0^z \left[\frac{1+w(z')}{1+z'} \right] dz', \quad (1.38)$$

donde $w(z)$ es la ecuación de estado de la energía oscura [33]. El valor de H_0 , teniendo de base Λ CDM con los resultados de CMB + BAO, es 67.36 ± 0.54 . [18] Cualquier conjunto de objetos astrofísicos que nos ayude a medir distancias con un patrón conocido es útil para este propósito, es decir podemos lograrlo ya sea con una candela o regla estándar. A continuación mencionaremos brevemente algunos sondeos que evalúan el fondo (SNIa), las perturbaciones (CMB) y ambos (BAO).

1.4.1. SNIa

Las Supernovas tipo Ia son las candelas estándares más confiables que tenemos hasta ahora. Son usadas para medir distancias al comparar el flujo recibido con la luminosidad intrínseca. La primera se puede medir con precisión pero la

segunda sólo se puede estimar cuando se conoce alguna otra propiedad de la candela que nos permita inferir su luminosidad [23]. Las curvas de luz de las SNIa nos muestran la evolución de su intensidad luminosa y su forma característica depende de la composición de sus progenitoras así como el tiempo transcurrido después de la explosión. A pesar de que las SNIa no tienen el mismo pico de luminosidad, es posible estandarizarlas a través de la relación de Phillips: la máxima luminosidad está correlacionada con la pendiente de la luminosidad después de la explosión. Entre más pronunciada sea dicha pendiente, menor será la magnitud del pico [39]. En los sondeos se mide la magnitud aparente m ,

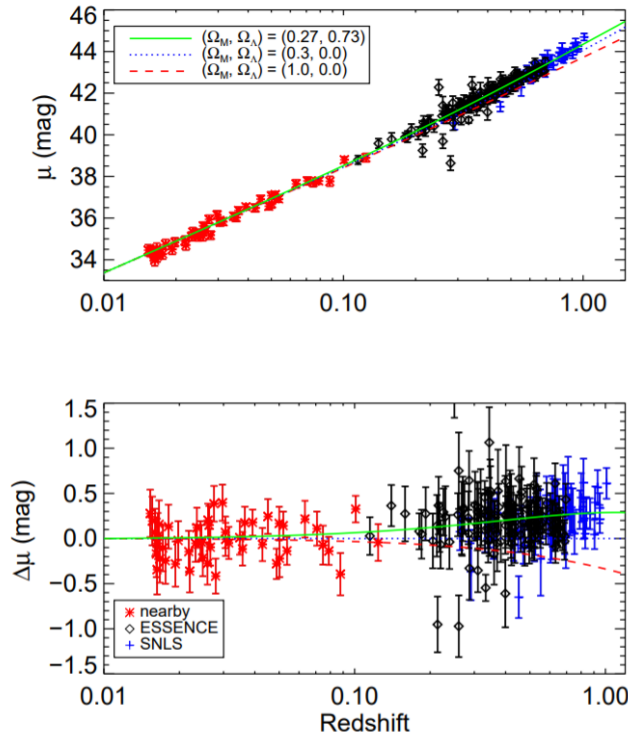


Figura 1.4: Arriba: Diagrama de magnitud de corrimiento al rojo para SNIa de tres sondeos. La curva sólida (verde) proporciona el mejor ajuste. Abajo: Desviación de un modelo sin energía oscura. (De Krisciunas (2008), cortesía de Kevin Krisciunas y ESSENCE Equipo de búsqueda de Supernova. Resultados preliminares de 2008. [28])

como vemos en la figura 1.4. Ésta se relaciona con la magnitud absoluta M y la distancia de luminosidad D_L a través de la ecuación

$$\mu := m - M = 5 \log_{10} D_L + \text{const}, \quad M := -2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{4\pi(10 \text{ pc})} \right), \quad (1.39)$$

donde L es la luminosidad de la fuente. A su vez, la distancia de luminosidad como función de corrimiento al rojo en un espaciotiempo FLRW es

$$D_L = \frac{1+z}{H_0\sqrt{-\Omega_{K0}}} \sin \left(\sqrt{-\Omega_{K0}} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')/H_0} \right). \quad (1.40)$$

Luego, los valores de M y m constriñen la tasa de expansión de $H(z)$ a través de la distancia de luminosidad para una Ω_K y una w dada, por lo que hay una degeneración para la curvatura y la dinámica. Sin embargo podríamos discernir entre ambas al tener observaciones independientes.

Cuando comparamos el módulo distancia μ con el corrimiento al rojo, notamos que el universo se expande una forma más lenta a distancias mayores, de no haber errores sistemáticos en los datos y basándonos en un modelo FLRW esto sugeriría que la expansión del universo es acelerada. Cuya explicación es un tema central de investigación de cosmología actual y un problema importante para la física teórica.

1.4.2. Anisotropías del CMB

El Fondo Cósmico de Microondas es la radiación remanente tras la época de recombinación del universo. Las observaciones muestran que el espectro del CMB tiene un comportamiento similar al de un cuerpo negro y que las anisotropías de la temperatura actual T_0 del CMB son del orden de $\sim 10^{-5}$. En términos de la temperatura actual promedio del universo se expresan como,

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - T_0}{T_0}, \quad (1.41)$$

donde la temperatura está parametrizada en términos del ángulo azimutal ϕ y polar θ , que indican la posición en el cielo. En términos de sus armónicos esféricos, la temperatura del CMB es,

$$T(\theta, \phi) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (1.42)$$

donde l denota el multipolo y cada uno de los enteros $-l \leq m \leq l$ representa una de las $(2l+1)$ orientaciones independientes.

Ya que la medida de las perturbaciones de 1.41 es compatible con cero, vemos que tienen un comportamiento gaussiano o muy cercano al mismo, lo que justifica que la mayoría de la información esté contenida en la función de correlación de 2 puntos de la temperatura. Más aún, ya que hay correlaciones muy débiles entre las fases en el cielo del CMB y al no observarse una dirección de preferencia, la varianza sólo depende de la separación angular. En la figura 1.5 podemos ver la detección más precisa del campo de temperaturas del CMB en la actualidad.

El monopolio a_{00} del CMB es simplemente su temperatura promedio, al día de hoy su detección corresponde a una temperatura de $2.7255 \pm 0.0006K$, valor que fue medido por el instrumento FIRAS del satélite COBE. El momento

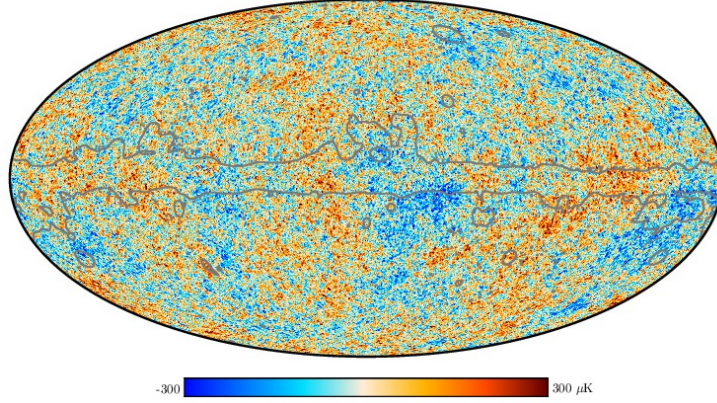


Figura 1.5: Mapa de temperaturas del Fondo Cósmico de Microondas medido en la colaboración Planck 2018 [18].

dipolar ($l = 1$) es la anisotropía más grande del CMB y su origen se debe al movimiento relativo entre la Tierra y el CMB, por lo que es una cantidad que depende del marco de referencia. Esto implica al elegir el marco de referencia del CMB (aquel donde el término del dipolo es nulo) podemos remover las velocidades relativas que interfieren con el estudio de las anisotropías del CMB en cosmología. Finalmente, las variaciones en el CMB en multipolos mayores ($l \geq 2$) son interpretadas como el resultado de las perturbaciones en la densidad del universo temprano, las cuales se manifiestan en la época de la última dispersión de los fotones del CMB. Por lo que al medir las a_{lm} s estamos obteniendo información directa sobre el origen, naturaleza y evolución de las perturbaciones de la densidad que ahora consideramos que dieron lugar a las galaxias y a la estructura a gran escala en el universo.

Un cielo estadísticamente isotrópico significa que todos los m son equivalentes por lo que la función de correlación de la temperatura entre dos posiciones en el cielo depende únicamente de la separación angular y no de la orientación. En conjunto con la suposición de Gaussianidad, la función de correlación de dos puntos del campo de temperatura caracteriza por completo a las anisotropías. La suma de las potencias sobre todas las m para cada l es $\frac{(2l+1)}{4\pi}C_l$, donde $C_l \equiv \langle |a_{lm}|^2 \rangle$. Luego, los valores promedios de los coeficientes a_{lm} sobre m pueden ser usados como estimadores de C_l s para acotar sus valores esperados, las cuales son cantidades predichas por el modelo teórico, ver fig. 1.6. El origen físico de las anisotropías en los valores C_l las clasifica en primarias y secundarias. Las anisotropías secundarias son debidas a la evolución del CMB desde la época de recombinación hasta la detección en la actualidad, por ejemplo puede deberse al efecto de lente gravitatoria. Las anisotropías primarias son aquellas que se deben a la perturbación de la materia en el universo temprano, que es a la parte en la que nos enfocaremos. La física de fondo de los valores de C_l puede explicarse en 4 regiones principales etiquetadas en la figura 1.6:

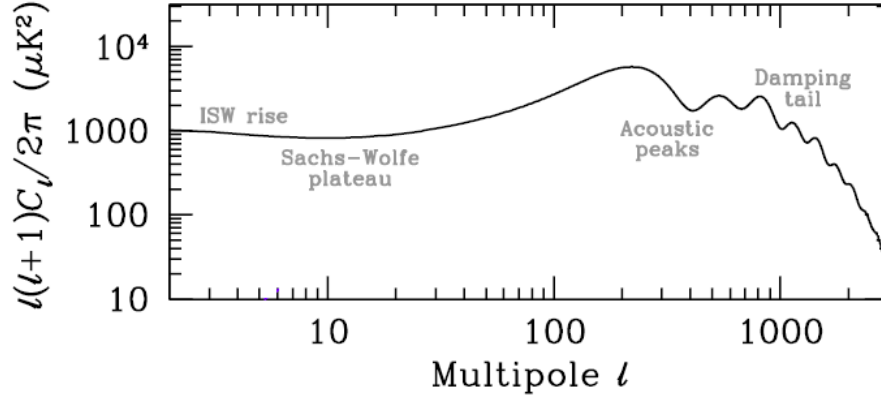


Figura 1.6: Espectro de potencias teórico de las anisotropías del CMB calculado con CAMB usando el mejor ajuste del modelo Λ CDM de Planck.

Subida ISW, $l \lesssim 10$, y la Meseta Sachs-Wolfe, $10 \lesssim l \lesssim 100$

La escala del horizonte en la última dispersión corresponde a $l \simeq 100$. Ya que las anisotropías a grandes escalas casi no han evolucionado de manera significativa, son un reflejo de las condiciones iniciales. Las variaciones de la temperatura son $\delta T/T \simeq (1/3)\delta\phi/c^2$, donde $\delta\phi$ es la perturbación del potencial gravitatorio evaluado en la superficie de última dispersión. Este es un resultado de la combinación del corrimiento al rojo gravitatorio y las variaciones intrínsecas de la temperatura, lo cual se conoce como *efecto Sachs-Wolfe*. La variación de los potenciales (i.e., las perturbaciones de la métrica dependientes del tiempo) en tiempos tardíos causan una subida en el espectro de potencias en los multipolos más pequeños; de hecho cualquier desviación de una ecuación de estado con $w = 0$ causa este efecto. Entonces la dominancia de la energía oscura en corrimientos al rojo bajos hace que los l más bajos se eleven sobre la meseta. Este fenómeno se le conoce como el efecto Sachs-Wolfe Integrado pues proviene de la integral de línea de $\dot{\phi}$.

BAO, $100 \lesssim l \lesssim 1000$

En la siguiente sección describiremos la física de las oscilaciones acústicas por lo que no entraremos en mucho detalle salvo para mencionar la importancia de sus fases en el CMB. En las escalas menores a 1° las anisotropías del CMB se deben a las oscilaciones acústicas del plasma primigenio. Las mediciones de las anisotropías del CMB son evidencia de que las perturbaciones adentro del horizonte en la última dispersión evolucionaron causalmente. Las fases de estas ondas de sonido se congelaron tras la recombinación y se proyectaron sobre el cielo del CMB como una serie armónica de picos. El primer pico corresponde al modo

que alcanzó una compresión máxima, cuyo tamaño corresponde al horizonte causal. Los picos impares sucesivos corresponde a los tamaños que alcanzaron los modos con 2, 3, 4, etc compresiones máximas en el proceso de oscilación y lo picos pares corresponden a los modos que llegaron a la 1ra, 2da, 3ra, 4ta, etc, dilatación máxima.

La escala física de longitud asociada a los picos es el horizonte de sonido en la última dispersión, al proyectarse sobre el cielo nos da una escala angular que depende tanto de la geometría del espacio como de la distancia a la última dispersión. Por lo que la posición ángulos de los picos es una prueba sensible a una combinación particular de parámetros cosmológicos.

Cola amortiguada $l \gtrsim 1000$

Como la recombinación no fue un proceso instantáneo la superficie de última dispersión en realidad tiene un grosor. Esto hace que haya un amortiguamiento en las anisotropías en los l s más altos, que corresponden a escalas menores que aquellas subtendidas por el grosor del CMB. [17]

1.4.3. BAO

Las Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO) son perturbaciones del plasma primitivo generadas en la época de recombinación que se propagaron como ondas acústicas hasta el desacoplamiento de los fotones y bariones. Su movimiento fue causado por la acción gravitatoria y por la presión de radiación.

De acuerdo a un modelo adiabático, las sobredensidades iniciales se presentan en todas las especies que componen el contenido energético del universo (materia oscura y bariónica, fotones y neutrinos). En la fig. 1.7 podemos ver la evolución de las perturbaciones iniciales en cada uno de los elementos que componen al universo. El movimiento del plasma está influenciado por las sobredensidades de materia oscura que se mantienen en el centro con un pequeño radio, mientras que las sobredensidades de fotones tienen mayor presión que sus alrededores. Para equilibrar esto, se emite una onda esférica de sonido hacia el exterior que viaja por el plasma de fotones y bariones. Su propagación se mantiene mientras haya fotones que generen presión, cuando estos se escapan, la velocidad del sonido disminuye y la onda deja de moverse. Finalmente tenemos un patrón compuesto por una sobredensidad de materia oscura al centro y alrededor un cascarón de materia bariónica de radio $100 \text{ Mpc}/h$.

Ya que en los cascarones formados por las BAO son regiones donde hay un exceso de gas, tenemos que hay una geometría predilecta a gran escala donde las galaxias tienden a agruparse. En las observaciones esto se manifiesta como un pequeño pico en la función de correlación de la distribución de las galaxias en una separación de $100 \text{ Mpc}/h$, ver fig. 1.8.

La importancia del Pico Acústico de Bariones (BAP) radica en que es evidencia irrefutable del agrupamiento gravitatorio y una confirmación de la teoría de crecimiento lineal de la estructuras actuales debido a efectos gravitatorios cuya perturbación inicial se encuentra en $z \simeq 1000$. Ésta es una regla estándar robusta que nos permite medir la evolución el parámetro de Hubble $H(z)$, por

lo que sabemos que el universo se encuentra en una expansión acelerada y como hemos mencionado esta información es esencial en la investigación sobre la energía oscura.

Sin embargo el BAP no se recupera del todo en las mediciones al usar teoría lineal para el agrupamiento de galaxias. En cambio, la función de correlación de dos puntos se vuelve borrosa debido al movimiento relativo entre las parejas de galaxias respecto a su posición inicial comóvil. Esto se manifiesta en la función de correlación de las galaxias como un pico más ancho que es más difícil de centrar. Este borrado se debe a las velocidades entre pares de galaxias a pequeñas escalas $\sim 10\text{Mpc}$, el cual podría ser causado por la formación de cúmulos y por el movimiento en conjunto hacia supercúmulos o saliendo de vacíos. A pesar de esto, es posible modelar el campo de desplazamientos usando teoría de perturbaciones y en principio medirlo y removerlo. En la figura 1.9 hablamos más a detalle de este proceso.

[14; 11; 12]

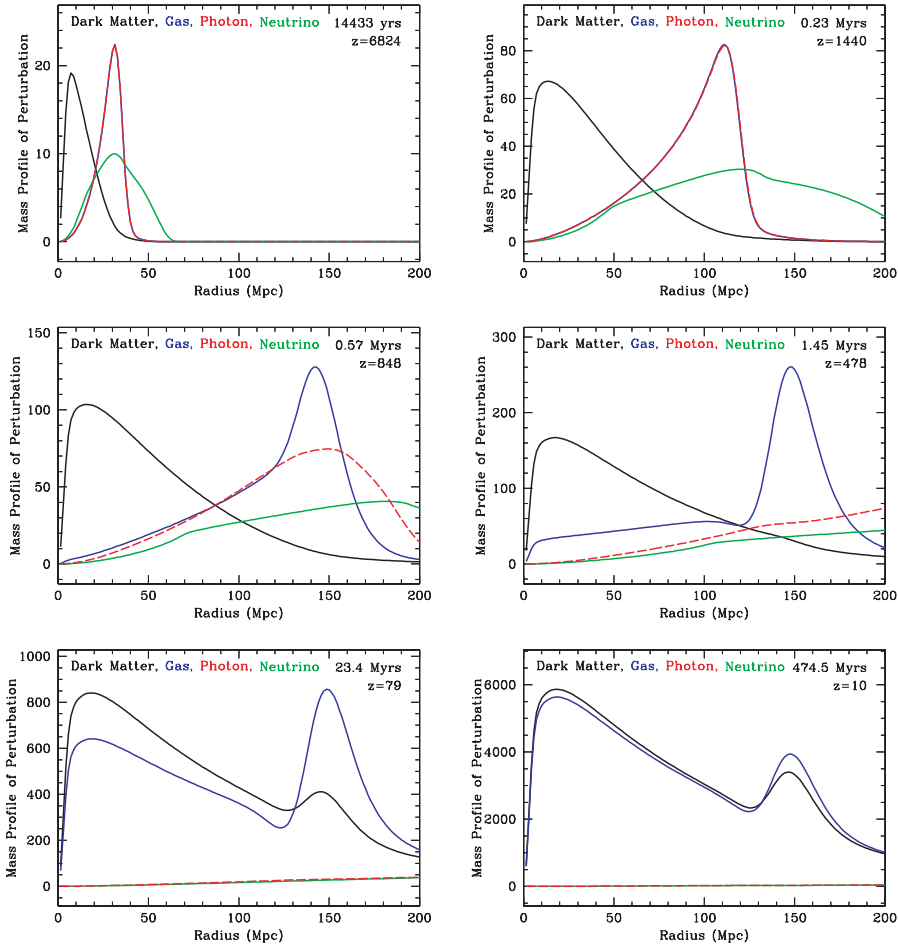


Figura 1.7: Capturas de la evolución del perfil radial de la masa contra el radio comóvil de una perturbación inicial ubicada en el origen. Las líneas negra, azul, roja y verde son la materia oscura, bariones, fotones y neutrinos, respectivamente. El corrimiento al rojo y el tiempo tras el big bang son indicados en cada panel. *Arriba a la izquierda:* Cerca del tiempo inicial, los fotones y bariones viajan hacia afuera como un pulso. *Arriba a derecha:* Cerca de la recombinación vemos una ola de materia oscura levantada por el pulso de bariones que viaja hacia afuera. *Centro a la izquierda:* En la recombinación los fotones se escapan de la perturbación bariónica. *Centro a la derecha:* Al terminar la recombinación nos quedamos con una perturbación de materia oscura cerca del centro y una perturbación bariónica o pico (BAP, Barionic Acoustic Peak) en un cascarón. *Abajo a la izquierda:* La inestabilidad gravitatoria atrae a la materia oscura y a los nuevos bariones hacia las sobredensidades. *Abajo a la derecha:* En épocas tardías, la fracción bariónica de la perturbación está cerca del valor cósmico, ya que el nuevo material estaba en el promedio cósmico [12]

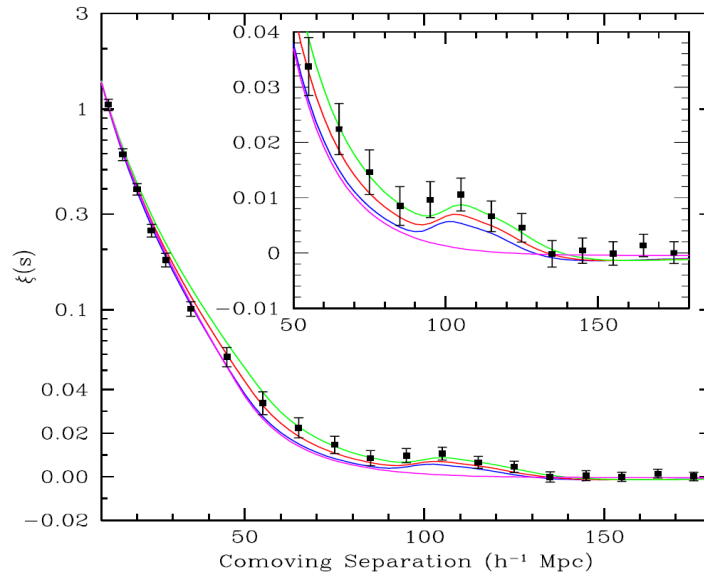


Figura 1.8: Oscilaciones Acústicas de Bariones. Función de correlación a gran escala de la muestra de LRG de SDSS. Los modelos son $\Omega_m h^2 = 0.12$ (arriba, verde), 0.13 (rojo), y 0.14 (fondo con pico, azul), todos con $\Omega_b h^2 = 0.024$ y $n = 0.98$. La línea magenta muestra un modelo CDM puro ($\Omega_m h^2 = 0.105$), que carece del pico acústico. Notemos que los datos muestran una protuberancia estadísticamente significativa en $100h^1\text{Mpc}$ [14].

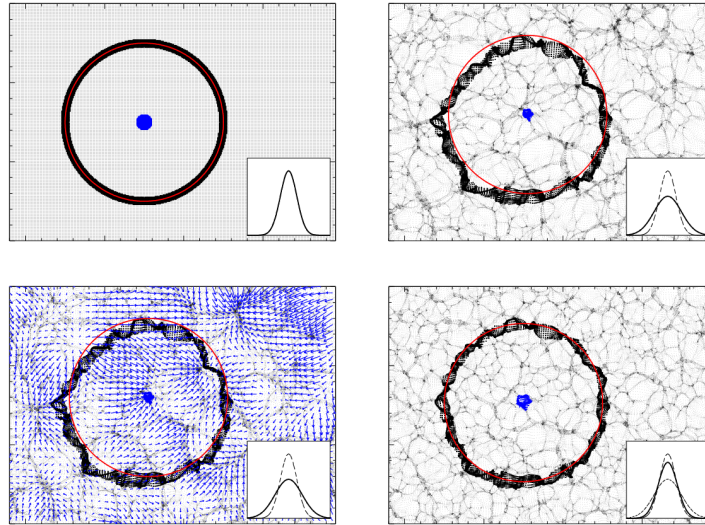


Figura 1.9: Descripción sencilla de la reconstrucción. **Arriba a la izquierda**, tenemos la configuración original del BAP con un radio de 100Mpc/h y en el recuadro de abajo está una distribución gaussiana que la representa. El campo de velocidades hace que los puntos se dispersen, por lo que la firma acústica (el perímetro del BAP) se vuelve más grueso. **Arriba a la derecha**, se perturban las partículas con la aproximación de Zeldóvich, el punto azul está en el centroide de la configuración actual de las partículas y con centro en éste se ubica el radio del BAP inicial. **Abajo a la izquierda**, se ha suavizado el campo de desplazamiento con un filtro gaussiano y se han sobrepuesto el campo de desplazamiento. La idea de la reconstrucción es estimar este campo de desplazamientos a partir del campo de densidades final y regresar a las partículas a su configuración original. **Abajo a la derecha**, se regresan las partículas a su posición original estimada, notemos que debido al filtro gaussiano no es posible regresarlas exactamente de donde partieron. [16]

Capítulo 2

Conexión Galaxias - Materia Oscura

El modelo FLRW es sólo una idealización de lo que observamos en el universo. Si el universo quedara descrito por completo con esta cosmología, veríamos al espacio lleno de materia de forma uniforme debido al agrupamiento gravitatorio. Sin embargo, observamos estructuras a gran escala como galaxias y cúmulos de galaxias [5]. Por lo tanto es importante estudiar las fluctuaciones primordiales de la densidad de materia que dieron origen a las estructuras que observamos en el universo. Por otro lado al observar la distribución espacial de galaxias y entender su evolución y formación, podemos inferir las condiciones iniciales que determinaron el campo de densidad inicial [24; 47]. Al unir esta información, podremos explorar la relación que existe entre las galaxias y la materia oscura y así tener una idea más precisa sobre la evolución de las estructuras del universo.

La versión más sencilla de la conexión galaxia-halo es asumir que hay una relación de proporcionalidad entre el número de galaxias y la cantidad de materia, como un sesgo lineal. Las relaciones de sesgo, no sólo están presente entre materia bariónica y materia oscura, sino también entre el número y masa de halos de materia oscura respecto a la distribución de materia oscura a gran escala, que es finalmente el tema de esta tesis. Ésta última relación es relevante para la conexión galaxia - halo, pues las galaxias se condensan adentro de los halos de materia oscura. De esta forma, si entendemos cómo se relaciona la distribución de halos con la densidad de materia oscura a escalas mucho mayores que esta unidad de estructura, podremos tener también una perspectiva más amplia sobre la distribución de galaxias [42], vía la relación de sesgo entre la distribución de halos y la de galaxias. [34]

2.1. Espectro de Potencias

Con el objetivo de describir las perturbaciones iniciales del campo de densidad de la materia,

$$\delta(\vec{r}, t) \equiv \frac{\rho(\vec{r}, t) - \overline{\rho(t)}}{\overline{\rho(t)}}, \quad (2.1)$$

nos será muy útil describirlo en términos de su espectro de potencias. Este nos da la información sobre el proceso aleatorio que genera el campo de perturbaciones de la materia $\delta_{\vec{k}}$ en el espacio de Fourier. Usaremos la convención discreta y continua de la transformada de Fourier como sigue:

$$\delta(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}); \quad \delta_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{V_u} \int \delta(\vec{x}, t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{r}, \quad (2.2)$$

donde V_u es el volumen de la caja donde con condiciones a la frontera periódicas. Estos modos evolucionan de forma independiente y las amplitudes $\delta_{\vec{k}}$ evolucionan con la tasa de crecimiento lineal, $D(t)$. Al estar en el espacio de Fourier, cada uno de los $\delta_{\vec{k}}$ es un número complejo y lo podemos expresar a través de su amplitud, $\alpha_{\vec{k}}$ y su fase, $\varphi_{\vec{k}}$,

$$\delta_{\vec{k}} = \alpha_{\vec{k}} \exp(i\varphi_{\vec{k}}). \quad (2.3)$$

Las fases $\varphi_{\vec{k}}$ siguen una distribución uniforme, $\mathcal{U}(0, 2\pi)$. Mientras que las amplitudes $\alpha_{\vec{k}} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 = P(k))$ son descritas por un proceso Gaussiano cuyo promedio es cero por ergodicidad y su segundo momento es el espectro de potencias de la materia,

$$P(k) \equiv V_u \langle \delta_{\vec{k}} \cdot \delta_{-\vec{k}} \rangle = V_u \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle, \quad (2.4)$$

que contiene la información de la varianza del contraste de densidad. Cabe mencionar que la segunda igualdad en la ecuación de arriba, se debe a que suponemos que el contraste de densidad es un campo real, lo que implica $\delta_{\vec{k}}^* = \delta_{-\vec{k}}$. [24]

2.2. Teoría Euleriana de Perturbaciones

De acuerdo al modelo estándar de cosmología, las estructuras observadas al día de hoy (como galaxias o cúmulos de galaxias) son el resultado de la evolución de pequeñas perturbaciones de la densidad inicial de materia que han crecido por acción gravitatoria, las cuales tienen su origen en la inflación. Al analizar aquellas estructuras más pequeñas que el horizonte (garantizando causalidad) y de pequeña amplitud ($\delta < 1$) podemos usar teoría Euleriana de perturbaciones. Si descomponemos a las perturbaciones en modos de Fourier, encontramos que algunos modos son amplificados y otros amortiguados, por lo que la evolución actúa como un filtro de las perturbaciones de la densidad primordial generadas en los tiempos tempranos del universo.

Para abordar este problema, supongamos que la materia bariónica está desacoplada de los fotones, por lo que podemos despreciar su contribución al potencial gravitatorio. Así podemos modelar a la materia como materia oscura tipo polvo y sin presión, que se comporta como un fluido no relativista de densidad ρ y velocidad \vec{u} , bajo la influencia de un potencial gravitatorio ϕ . Además escribiendo la densidad ρ en términos de la perturbación δ a la densidad promedio $\bar{\rho}$,

$$\rho(\vec{x}, t) = \bar{\rho}(t)[1 + \delta(\vec{x}, t)]. \quad (2.5)$$

Esta perturbación es respecto a la variaciones promedio de un fluido no relativista. Trabajaremos con este fluido en un universo FLRW en expansión, por lo que es conveniente usar coordenadas comóviles \vec{x} . Usando además $\bar{\rho} \propto a^{-3}$ podemos describir su evolución temporal a través de las ecuaciones de continuidad, de Euler y de Poisson para las perturbaciones de la densidad de materia δ y para las perturbaciones del campo gravitatorio Φ

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot [(1 + \delta)\vec{v}] = 0 \quad (\text{Continuidad}), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\bar{a}}{a} \vec{v} + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla \Phi}{a} - \frac{\nabla P}{a\bar{\rho}(1 + \delta)} \quad (\text{Euler}), \quad (2.7)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta, \quad \Phi \equiv \phi + a\ddot{a}x^2/2 \quad (\text{Poisson}), \quad (2.8)$$

donde \vec{v} es la velocidad peculiar, la cual se mide respecto a un observador comóvil, la derivada en notación de Newton es respecto a t , $\nabla \equiv \nabla_{\vec{x}}$ y $\partial/\partial t$ es para una \vec{x} fija.

En el sistema de arriba tenemos 6 incógnitas (δ, v_i, P, ϕ) y 5 ecuaciones, pero especificando una cosmología podemos tener a $a(t)$ y con la ecuación de estado tendríamos la ecuación que necesitamos para resolver el sistema. Esta última ecuación es importante porque nos indica los procesos termodinámicos que sufre el fluido. En el caso donde la presión depende únicamente de la densidad y la entropía podemos escribirla como

$$P = P(\rho, S), \quad (2.9)$$

donde S es la entropía específica. Cómo hemos agregado a la entropía S como una nueva variable necesitamos una nueva ecuación, usaremos la primera ley de la termodinámica para un gas ideal monoatómico,

$$T dS = d\left(\frac{3P}{2\rho}\right) + P d\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (2.10)$$

Luego, usamos $P = (\rho/\mu m_p) k_B T$, donde μ es el peso molecular promedio en unidades de masa de protón m_p , para sustituir la temperatura

$$d \ln P = \frac{5}{3} d \ln \rho + \frac{2}{3} \frac{\mu m_p}{k_B} S d \ln S, \quad (2.11)$$

y entonces

$$P \propto \rho^{5/3} \exp\left(\frac{2}{3} \frac{\mu m_{\text{p}}}{k_{\text{B}}} S\right). \quad (2.12)$$

De aquí tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla P}{\bar{\rho}} &= \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \nabla \rho + \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_\rho \nabla S \right] \\ &= c_s^2 \nabla \delta + \frac{2}{3} (1 + \delta) T \nabla S, \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde

$$c_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S^{1/2}, \quad (2.14)$$

es la velocidad del sonido adiabática. Luego la ecuación de Euler (2.7) se puede escribir como

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla \Phi}{a} - \frac{c_s^2}{a} \frac{\nabla \delta}{(1 + \delta)} - \frac{2T}{3a} \nabla S. \quad (2.15)$$

Aproximando que δ , \vec{v} son pequeñas, podemos despreciar los términos no lineales, por lo que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{Continuidad}) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} = -\frac{\nabla \Phi}{a} - \frac{c_s^2}{a} \nabla \delta - \frac{2\bar{T}}{3a} \nabla S \quad (\text{Euler}) \quad (2.17)$$

donde \bar{T} es la temperatura del fondo, y c_s es la velocidad del sonido evaluada en el fondo. Al aplicar $\nabla \times$ en ambos lados de la ecuación 2.17 obtenemos

$$\nabla \times \vec{v} \propto a^{-1}.$$

Luego en el régimen lineal la vorticidad de la velocidad peculiar se vuelve despreciable cuando aumenta la expansión del universo, lo que se traduce en conservación del momento angular. Derivamos 2.16 respecto a t y usamos 2.8 y 2.17 para obtener

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G \bar{\rho} \delta + \frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2 \delta + \frac{2\bar{T}}{3a^2} \nabla^2 S. \quad (2.18)$$

El segundo término del lado izquierdo es el término de arrastre de Hubble el cual suprime el crecimiento de las perturbaciones debido a la expansión del universo. El primer término del lado derecho es el término gravitatorio, que hace que las perturbaciones crezcan debido a la inestabilidad gravitatoria cuando $\delta > 0$. Ya que los dos últimos términos son términos de presión: el término $\nabla^2 \delta$ se debe a las variaciones espaciales en la densidad, mientras que el término $\nabla^2 S$ es causado debido a las variaciones espaciales de la entropía específica, podemos igualarlos a cero en el caso de materia oscura,

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} - 4\pi G \bar{\rho} \delta = 0. \quad (2.19)$$

En el régimen lineal, la ecuación que gobierna la evolución de las perturbaciones es lineal en las cantidades perturbadas. Como mencionamos en la sección 2.1 en esta escala podemos expandir los campos de perturbaciones en funciones de modos de ondas planas $\delta_{\vec{k}}$. Podemos aprovechar esto y obtener la ecuación de evolución para cada modo individual $\delta_{\vec{k}}$ tras convertir la ec. 2.19 al espacio de Fourier. Además, usando el hecho de que ∇ puede ser reemplazado por $i\vec{k}$ y que ∇^2 , se reemplaza por $-k^2$ en el espacio de Fourier, la ecuación de Poisson pasa a ser:

$$-k^2 \Phi_{\vec{k}} = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta_{\vec{k}} \quad (2.20)$$

donde $\Phi_{\vec{k}}$ es la transformada de Fourier del campo del potencial gravitatorio perturbado. Finalmente, al considerar el campo de velocidades irrotacional, podemos escribir a v como el gradiente de un potencial de velocidades $\vec{v} = \nabla \mathcal{V}$, de forma que la transformada de Fourier de la ecuación 2.16 es

$$\vec{v}_{\vec{k}} = i\vec{k} \mathcal{V}_{\vec{k}} = \frac{ia\vec{k}}{k^2} \frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt}. \quad (2.21)$$

Volviendo a la transformada de Fourier de la ec. (2.19), cuando tenemos perturbaciones isentrópicas en un fluido sin presión, esta es,

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dt^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt} = 4\pi G \bar{\rho} \delta_{\vec{k}} \quad (2.22)$$

donde $\bar{\rho}_m$ es la densidad promedio del fluido. Si δ_1 y δ_2 son dos soluciones de esta ecuación, entonces

$$\delta_1 \dot{\delta}_2 - \delta_2 \dot{\delta}_1 \propto a^{-2}. \quad (2.23)$$

En un universo EdS con $a(t) \propto t^{2/3}$, las soluciones para un modo creciente y uno decreciente son respectivamente:

$$\delta_+ \propto t^{2/3} \propto a(t); \quad \delta_- \propto t^{-1} \propto H(t). \quad (2.24)$$

De estas soluciones vemos que el modo decreciente δ_- disminuye rápidamente por el arrastre de Hubble y podemos despreocuparnos de ella. Mientras que los modos crecientes evolucionan con el factor de crecimiento lineal $D(t)$ cuya solución coincide con la forma de $a(t)$ en un universo EdS. [24]

2.3. Teoría de colapso esférico

Los halos son la unidad fundamental de estructura de materia oscura, en nuestro estudio supondremos que su formación sigue un modelo de colapso gravitatorio con simetría esférica. Ya que sólo nos interesa el estado inicial y final del sistema, aplicaremos este modelo de colapso a perturbaciones en el régimen

lineal, originadas en $z \gg 10$ y así podremos estimar la época en la que han formado estructuras de materia oscura.

Estudiaremos la formación de estructuras en $z \sim 0$ cuyas perturbaciones iniciales se generaron en la época de dominación de materia tras la recombinación $z < 1100$. Aquí la materia oscura domina sobre la materia bariónica, por lo que su influencia es la que guía el colapso gravitatorio. Al ser una buena aproximación a estas condiciones, continuaremos usando la cosmología Einstein-de Sitter (EdS)¹. Finalmente, la distribución de materia de las perturbaciones seguirá el modelo de sombrero de copa (*top hat*), es decir, tendrán un valor uniforme adentro de una región con simetría esférica.

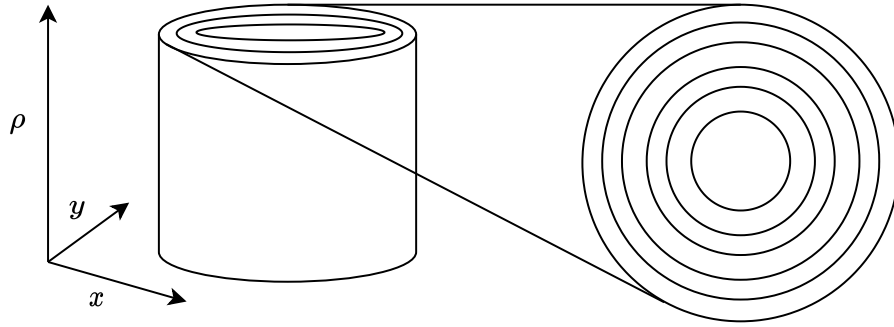


Figura 2.1: En el lado izquierdo vemos una representación 2-dimensional de las perturbaciones de la densidad del modelo de colapso esférico, a la derecha tenemos las capas individuales de materia oscura que eventualmente se cruzarán entre sí.

Pensemos en la sobredensidad, como un grupo de materia oscura que consiste en muchos cascarones delgados concéntricos (de igual densidad), como vemos en su representación 2D de la fig. 2.1. Ya que la materia oscura no colisiona, estas capas pueden cruzarse y oscilar entre entre sí, intercambiando energía hasta que el sistema alcance el equilibrio. A este proceso se le conoce como virialización y hablaremos de él con mayor detalle más adelante.

Para el modelo del sombrero de copa, sea r_i el radio de un cascarón de masa dentro de la perturbación a un tiempo inicial t_i y sea δ_i y $\bar{\rho}_i$ el valor de la sobredensidad adentro de dicho radio y la densidad de fondo al mismo tiempo. La masa encerrada por este cascarón es

$$\begin{aligned} M(< r) &= \frac{4}{3}\pi r_i^3 \bar{\rho}_i [1 + \delta_i] \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \bar{\rho}_i [1 + \delta(t)], \end{aligned}$$

¹Solución del universo de FLRW donde: $K = 0$, $a(t) \propto t^{2/3}$, $\Omega = 1$ y $q_0 = 1/2$

donde la segunda igualdad denota conservación de la masa, pero sólo es válida hasta antes del cruce de capas. La masa de un cascarón esférico dentro de la perturbación evoluciona de acuerdo a la ecuación de Newton,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}. \quad (2.25)$$

Al integrar esta ecuación una vez, tenemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} = E, \quad (2.26)$$

donde la constante de integración E es la energía de nuestro cascarón. Una solución trivial es el caso $E = 0$, ahí

$$r(t) = \left(\frac{9GM}{2} \right)^{1/3} t^{2/3}, \quad (2.27)$$

lo cual muestra que $r \propto a(t)$; el cascarón de masa y por lo tanto la perturbación, crecen con la misma tasa de expansión que el universo. Por lo cual no hay crecimiento respecto al fondo $\delta(t) = \delta_i$. Sin embargo el caso que nos interesa es el de un sistema gravitatoriamente ligado $E < 0$, implica que nuestro cascarón colapsará y formará una halo de materia oscura. Para un cascarón cuya energía inicial es $E < 0$ su solución paramétrica es

$$r = A(1 - \cos \theta), \quad (2.28)$$

$$t = B(\theta - \sin \theta), \quad (2.29)$$

donde las constantes A y B están definidas por los valores iniciales de la masa y energía del cascarón analizado:

$$A = \frac{GM}{2|E|} \quad \text{y} \quad B = \frac{GM}{(2|E|)^{3/2}}, \quad \implies \quad A^3 = G M B^2. \quad (2.30)$$

Esta solución implica que en el caso idealizado de colapso esférico un cascaron se expande desde $(r, \theta) = (0, 0)$ hasta un radio máximo, r_{\max} , en $\theta = \pi$ y finalmente colapsaría al volver a $r = 0$ cuando $\theta = 2\pi$. Sin embargo sabemos que esta simetría es poco probable y que en realidad el tamaño final de las estructuras virializadas es aproximadamente la mitad de su radio máximo $r_{\text{vir}} = r_{\max}/2$, ver fig 2.2.

El tiempo cuando se alcanza el radio de tamaño máximo se conoce como tiempo de retorno, t_{ta} por su nombre en inglés *turn-around*. Mientras que el tiempo de colapso se conoce como tiempo de virialización, $t_{\text{vir}} = 2t_{\text{ta}}$. Este criterio para establecer el tiempo de virialización es con el fin de garantizar que las capas de la perturbación que oscilan intercambiando energía, ya han llegado a un equilibrio entre sí.

Aproximando que el cascaron se mueve con el flujo de Hubble, inicialmente su velocidad era $v_i = H_i r_i$. Por lo que la energía inicial de tal cascarón es

$$E_i = K_i + W_i = \frac{1}{2} H_i^2 r_i^2 - \frac{GM}{r_i}. \quad (2.31)$$

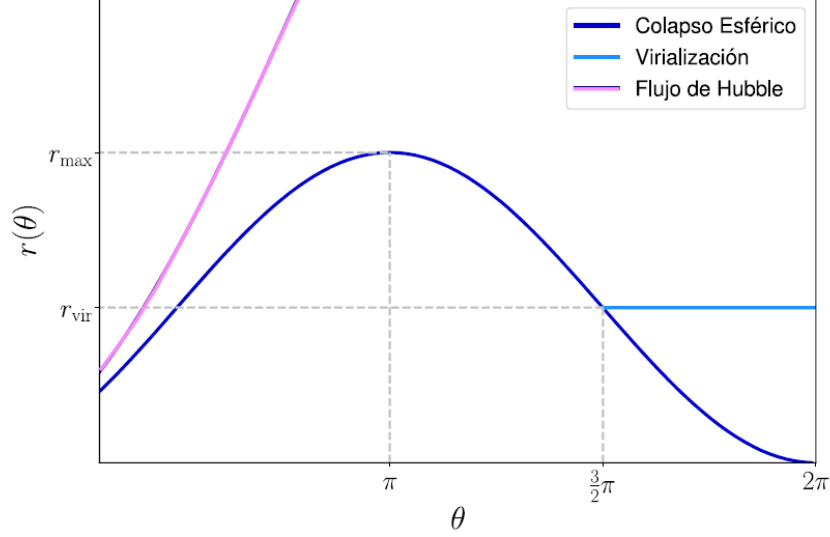


Figura 2.2: En la gráfica podemos observar la evolución del radio de una capa que colapsa en color azul rey y la contrastamos con el tamaño de aquellas regiones que siguen la expansión del universo en azul oscuro. La perturbación inicial aumenta de tamaño hasta un radio máximo donde se desacopla por completo del flujo de Hubble. Siguiendo el modelo de colapso esférico, donde se considera una simetría perfecta, esta perturbación colapsaría hasta formar un agujero negro. Sin embargo, en realidad las perturbaciones llegan a un tamaño final, r_{vir} que es aproximadamente la mitad del r_{max} como indicamos en azul cielo.

Sustituimos la expresión de la masa,

$$M = \frac{4}{3}\pi r_i^3 \bar{\rho}_i (1 + \delta_i) = \frac{H_i^2 r_i^3}{2G} (1 + \delta_i), \quad (2.32)$$

en la energía potencial

$$E_i = K_i - K_i (1 + \delta_i), \quad (2.33)$$

podemos establecer que, para una energía de amarre $E_i < 0$ es necesario $\delta_i > 0$, i.e., *las perturbaciones que colapsan son aquellas que tienen mayor densidad que el promedio.*

Obviamente en el punto de retorno, la velocidad es cero, por lo que la energía depende únicamente de la parte potencial

$$E_{\text{ta}} = -\frac{H_i^2 r_i^3}{2r_{\text{max}}} (1 + \delta_i). \quad (2.34)$$

Como en el punto de retorno aún no hay cruce de capas, podemos suponer conservación de energía $E_{\text{ta}} = E_i$, lo que implica,

$$\frac{r_{\text{max}}}{r_i} = \frac{1 + \delta_i}{\delta_i} \simeq \delta_i^{-1}, \quad (2.35)$$

esto significa que el radio máximo depende únicamente del valor de la sobredensidad inicial, no de la masa encerrada por el cascarón. En este sencillo modelo de colapso esférico, la densidad de la perturbación es

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^3} = \frac{3M}{4\pi A^3} (1 - \cos \theta)^{-3}, \quad (2.36)$$

mientras que la densidad del fondo es

$$\bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2} = \frac{1}{6\pi G B^2} (\theta - \sin \theta)^{-2}. \quad (2.37)$$

Por lo tanto, el valor de la sobredensidad en el modelo de colapso esférico (SC) evoluciona como

$$\delta_{\text{sc}} = \frac{\rho}{\bar{\rho}} - 1 = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} - 1. \quad (2.38)$$

Podemos seguir este mismo procedimiento para resolver el valor de δ_{sc} en el caso límite donde la perturbación inicial pertenece al régimen lineal, δ_{lin} . Esto lo calculamos partiendo de la solución paramétrica de $r(t)$ para $\theta \ll 1$ y de la cosmología límite, EdS. Así,

$$\delta_{\text{lin}} = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} \left(\frac{t}{t_{\text{máx}}} \right)^{2/3} \quad (2.39)$$

Luego, podemos comparar el valor de la perturbación en algunos puntos clave de su evolución cuando se aplica la aproximación del régimen lineal. En la tabla 2.3 mostramos los valores de δ cuando aplicamos el modelo de colapso esférico a una perturbación cualquiera (Colapso esférico) y cuando lo aplicamos a una perturbación usando la aproximación lineal (Lineal).

$\delta = \rho/\bar{\rho} - 1$	retorno	colapso
Colapso esférico	4.55	∞
Lineal	1.062	1.686

Este es un resultado muy importante, porque podemos usar el modelo de colapso esférico para estudiar la formación de estructuras y aplicarlo a un campo de perturbaciones en el régimen lineal. Por lo que de manera sencilla sabemos que se han formado estructuras cuando las perturbaciones hayan alcanzado un valor de $\delta_{\text{lin}} \geq 1.68$, lo que nos da una cota para establecer la formación de estructuras. Más aún, ya que todas las cosmologías se comportan como EdS en corrimientos al rojo tempranos (donde aplica la aproximación lineal), este valor

límite es preciso para hasta un 1 % para nuestro universo.

Como hemos mencionado, el modelo de colapso esférico solamente es válido hasta el cruce de capas o virialización. Ahí las capas de la sobredensidad interactúan gravitatoriamente e intercambian energía hasta llegar al equilibrio, dando como resultado un halo de materia oscura virializado.

Aunque lo habíamos presentado sin ser muy explícitos, partiendo del teorema del virial en el caso estacionario y de la conservación de energía

$$2K_f + W_f = 0, \quad (2.40)$$

$$E_f = K_f + W_f = E_{ta}, \quad (2.41)$$

respectivamente, podemos estimar el radio al momento de virialización en términos del tiempo de retorno, $r_{vir} = r_{ta}/2$.

Además, también podemos calcular el valor de la densidad promedio de un halo de materia oscura virializado respecto a la densidad promedio del universo

$$1 + \delta_{vir} \equiv 1 + \delta(t_{coll}) = \frac{\rho(t_{coll})}{\bar{\rho}(t_{coll})}, \quad (2.42)$$

usando que $\bar{\rho} \propto a^{-3} \propto t^{-2}$ (EdS), y recordando que $t_{coll} = 2t_{ta}$ tenemos

$$1 + \delta_{vir} = \frac{8\rho_{ta}}{\bar{\rho}(t_{ta})/4} = 32(1 + \delta_{ta}) \simeq 178.$$

Por lo que con este sencillo cálculo podemos establecer que, aquellas regiones en el universo con una densidad 178 veces mayor que la densidad promedio de universo forman halos de materia oscura. Sin embargo esta no es un criterio exacto, ya que el modelo en sí es una aproximación de la realidad. Cuando un halo se encuentra virializado, su masa se infiere a partir de las observaciones astronómicas de la dinámica de los bariones que contiene, como la temperatura del gas de rayos X o la dispersión de velocidad de las galaxias. De hecho, en la mayoría de las observaciones las galaxias son detectadas en aquellas regiones donde la densidad es 200 veces mayor que el promedio. [44]

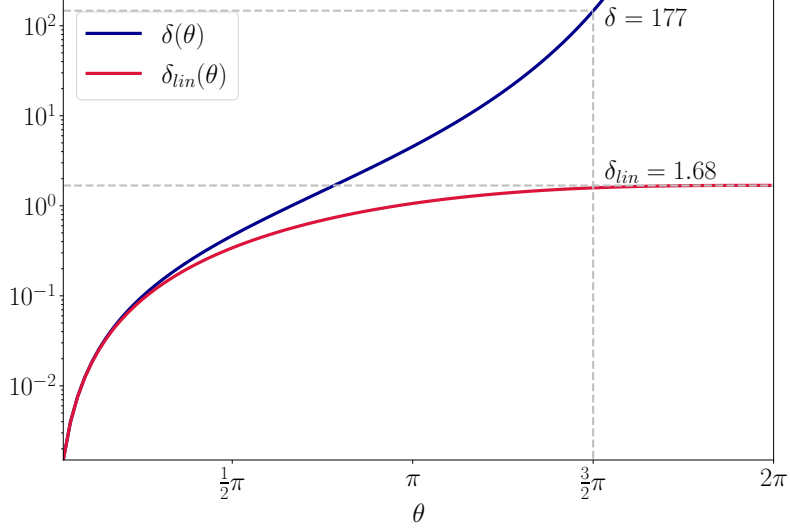


Figura 2.3: Identificamos los valores de la perturbación δ en teoría lineal y colapso esférico para dos épocas importantes: retorno $\theta = \pi$ y colapso $\theta = 2\pi$ respectivamente. El valor $\delta_{vir} \simeq 177$ corresponde al valor de la perturbación una vez que ha virializado en el modelo de colapso esférico.

2.4. Aproximación de Zeldóvich

El modelo de colapso esférico que hemos presentado tiene un par de defectos que es importante considerar para elegir en cuáles situaciones resulta conveniente trabajar con él y en cuales otras no. Por ejemplo, una de las suposiciones es que las perturbaciones se encuentran en regiones perfectamente esféricas y no tienen velocidad peculiar. Esto no sólo aplica a las condiciones iniciales, sino que esta situación se mantiene durante todo el colapso. En el enfoque propuesto por Zeldóvich [49] se asume que las partículas se mueven durante toda su evolución de acuerdo a la dirección del campo de desplazamientos inicial, $\vec{f}(\vec{q})$, que depende de coordenadas comóviles \vec{q} . Así las coordenadas propias \vec{x} de una partícula dada son,

$$\vec{x}(t) = a(t)[\vec{q} - b(t)\vec{f}(\vec{q})], \quad (2.43)$$

donde $b(t)$ describe la evolución de una perturbación en el régimen lineal. Al resolver para una cosmología EdS la solución de $b(t)$ es $D(t) \propto t^{2/3}$, luego la ec. 2.43 se expresa como

$$\vec{x}(t) = a(t)[\vec{q} + D(t)\vec{f}(\vec{q})]. \quad (2.44)$$

En realidad el campo $\vec{f}(\vec{q})$, usado en la aproximación de Zeldóvich, es la perturbación a primer orden del campo de desplazamientos $\vec{\Psi}(\vec{q})$ en teoría lagrangiana de perturbaciones,

$$\vec{\Psi}(\vec{q}) = \vec{\Psi}(\vec{q})^{(1)} + \vec{\Psi}(\vec{q})^{(2)} + \vec{\Psi}(\vec{q})^{(3)} + \dots \quad (2.45)$$

La ec. 2.44 nos da un mapeo único entre la configuración euleriana y la Lagrangiana que nos permite obtener la densidad comóvil en términos de la densidad inicial ρ_0 ,

$$\frac{\rho(\vec{x})}{\rho_0} = |J(\vec{x}, t)|^{-1}, \quad (2.46)$$

donde $|J(\vec{x}, t)|$ es el determinante jacobiano del tensor de esfuerzos $\partial f_i / \partial q_j$. Ya que el movimiento descrito es por acción gravitatoria, el campo de desplazamientos es irrotacional y es posible expresarlo en términos de un potencial,

$$\vec{f}(\vec{q}) = \vec{\nabla} \psi(\vec{q}) \Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial q_j}, \quad (2.47)$$

lo que hace obvio que su tensor de esfuerzos es simétrico. Con estas condiciones, podemos diagonalizar el jacobiano y entonces,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = [(1 - D(t) \alpha) (1 - D(t) \beta) (1 - D(t) \gamma)]^{-1}, \quad (2.48)$$

donde $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ son los valores propios del tensor de esfuerzos. En esta aproximación, el colapso empieza a lo largo del eje cuyo valor propio sea más negativo. Por ejemplo, si tuviéramos una perturbación elipsoidal triaxial, esto correspondería al eje más corto. Así, la gravedad acentúa la asfericidad pues las sobredensidades de materia oscura pueden colapsar a lo largo de 1, 2 o 3 dimensiones, lo que nos da estructuras en forma de paredes, filamentos y esferas, respectivamente. Volviendo a la ec. 2.48 podemos describir a las perturbaciones en el régimen lineal como,

$$\delta = -D(t) (\alpha + \beta + \gamma) = -D(t) \vec{\nabla} \cdot \vec{f}. \quad (2.49)$$

También vemos en la ec. 2.48 que en algunos tiempos t_{sc} donde ocurre el colapso, el factor de crecimiento lineal $D(t_{sc}) = 1/\alpha, 1/\beta$ o $1/\gamma$, lo que nos crea singularidades en el cruce de capas. Esto implica que hay puntos que parten de distintas posiciones en la configuración inicial que terminan encontrándose en un mismo lugar, por lo que la relación de la ec. 2.44 deja de ser única en el cruce de capas. Además, tras este colapso, los elementos del fluido continúan su movimiento, por lo que desaparecen las estructuras formadas.

Para evitar este problema en los cálculos, se suaviza el campo de densidad removiendo las fluctuaciones a pequeñas escalas (altamente no lineales), pues son las que originan el cruce de capas. Este proceso no altera la evolución del campo a gran escala. Luego, construimos el campo de desplazamientos en el espacio de

Fourier usando las perturbaciones lineales, donde los modos crecientes del campo de desplazamientos comóvil \vec{f}_k son paralelos a los \vec{k} ,

$$\vec{f}_k = -i \frac{\delta_k}{k^2} \vec{k}. \quad (2.50)$$

Finalmente, al usar este campo de desplazamientos evitamos el cruce de capas y tenemos mayor precisión al modelar la evolución del contraste densidad en simulaciones de N cuerpos. [37; 7].

2.5. Modelo Press-Schechter Extendido

Ya que tenemos en mente un modelo de como podría formarse un halo de materia oscura, un siguiente paso es preguntarse cómo es que el medio que los rodea influye en su formación. Para hacer este análisis, en la siguiente sección, necesitaremos de la función de masa de los halos propuesta por Press y Schechter en su trabajo [40]. En este modelo, $n(m, z) dm$ indica el número N de halos en un tiempo z cuya masa está en un intervalo de $[m, m + d \ln m]$,

$$n(m, z) = \frac{1}{m} \frac{dN}{d \ln m} \quad (2.51)$$

[7].

Bond et al [4], estimaron la misma forma analítica de $n(m, z)$ asumiendo que su forma es equivalente a la distribución de *primeros cruces* de un conjunto de excursión, suponiendo que los halos colapsan siguiendo el modelo de colapso esférico [21] y que la distribución inicial de perturbaciones del campo de materia es gaussiana. Como ya lo hemos mencionado, esto último implica que las fluctuaciones quedan descritas por completo por el espectro de potencias $P(k)$ a través de su varianza en el espacio real,

$$\sigma^2(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int P(k) \widetilde{W}^2(kr) k^2 dk, \quad (2.52)$$

donde $\widetilde{W}^2(kr)$ es la Transformada de Fourier de una función ventana que suaviza el campo (hasta una escala lineal, por ejemplo) y relaciona el volumen de una esfera con cierto peso $W(r)$ de la masa que encierra. En nuestro caso,

$$W(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > R \\ \frac{3}{4\pi R^3} & \text{si } r \leq R, \end{cases} \quad (2.53)$$

lo cual corresponde a una esfera de masa $m = 4\pi \bar{\rho} R^3/3$. Siendo exactos, la masa de interés sería $m = 4\pi \bar{\rho}(1 + \delta) R^3/3$, pero en nuestro análisis los corrimientos al rojo son $z \gg 1$ lo que implica que $\delta \sim 10^{-4}$. Esto se traduce en una corrección relativa a la masa del mismo orden, por lo que despreciar la magnitud de las perturbaciones iniciales para la estimación de la masa es una buena aproximación.

Cuando Bond asume el modelo de colapso esférico, toma en cuenta que existe una cota $\delta_{\text{SC}}(z)$, constante en cada z que debe ser superada por el valor del contraste de densidad para formar estructuras. Y, al considerar que el campo de fluctuaciones iniciales es gaussiano, nos muestra que dicho campo es análogo a un conjunto de caminantes aleatorios que siguen un movimiento no correlacionado e independiente. Estos caminantes forman estructuras, cuando cruzan la barrera de $\delta_{\text{SC}}(z)$ por primera vez de arriba hacia abajo, de radios mayores hacia más pequeños. Este cruce significa que el cascarón de materia ubicado en ese punto tiene una sobredensidad de materia tal que liga gravitatoriamente todo su interior, o bien que lo colapsa. En la figura 2.4, tenemos un ejemplo de la distribución de caminatas que cruzan la barrera, notemos que aquellas que empiezan desde valores de la densidad más altos son las que tienen más probabilidad de cruzar. Con esto en mente, la función de masa $n(m, z)$ de un objeto

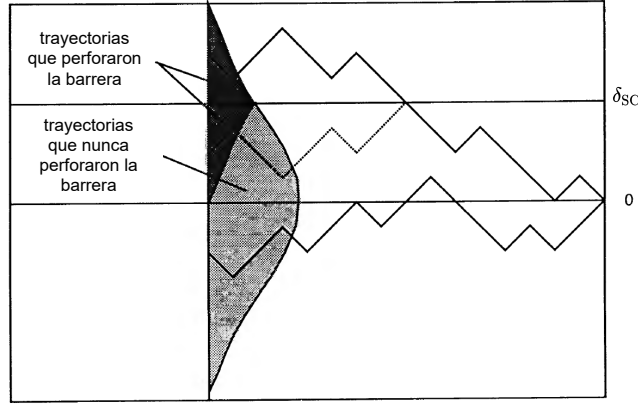


Figura 2.4: Esta figura muestra de forma esquemática algunos ejemplos de caminatas aleatorias, las cuales reportan en el eje y el valor del contraste de densidad en pasos constantes en el eje x . La región negra de la distribución representa la fracción de caminantes que perforaron la barrera, notemos que la posición inicial de estos parten de regiones de alta densidad. Figura de [4]

colapsado en z satisface

$$\nu f(\nu) \equiv m^2 \frac{n(m, z)}{\bar{\rho}} \frac{d \log m}{d \log \nu}, \quad (2.54)$$

donde $\bar{\rho}$ es la densidad de fondo, $\nu = \delta_{\text{SC}}(z)/\sigma(m)$ y $f(\nu)d\nu$ es la distribución de primeros cruces de la barrera $\delta_{\text{SC}}(z)$. Notemos que por la relación entre la masa y el radio, $R = \sqrt[3]{3m/4\pi\bar{\rho}}$, en realidad $\sigma(m)$ y $\sigma(R)$ son equivalentes.

En particular para una cosmología EdS, una región con sobredensidad δ_i en z_i colapsará en z_c cuando,

$$\delta_{\text{SC}}(z_c) = \frac{\delta_i(1+z_i)}{1+z_c} = 1.68. \quad (2.55)$$

Ya que la barrera tiene un valor constante, es posible calcular de forma analítica la distribución de primeros cruces,

$$\nu f(\nu) = 2 \left(\frac{\nu^2}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\nu^2}{2} \right) [42]. \quad (2.56)$$

2.6. Sesgo de los halos de materia oscura

En una de las primeras simulaciones de un universo dominado por materia oscura fría [9], se muestra cómo evolucionan las estructuras a gran escala para un universo plano con una constante cosmológica positiva. Sobre el agrupamiento de la materia oscura notaron que, conforme evolucionan las simulaciones, aparecen grumos o *halos* que rápidamente forman estructuras como filamentos y supercúmulos, así como regiones de baja densidad. Sin embargo al haber un fuerte subagrupamiento, en épocas tardías las estructuras se borran conforme los halos de materia se fusionan en sistemas cada vez más y más grandes. En su época final, la materia se encuentra distribuida en muy pocos cúmulos que prácticamente no tienen subestructura. Es decir, las estructuras a gran escala siguen un modelo de formación jerárquico, en el sentido que colapsan primero las estructuras pequeñas y luego se forman estructuras cada vez mayores como podemos ver claramente en la figura 2.5. Otro de los productos del análisis de estas simulaciones fue la hipótesis de que los halos de materia oscura no se forman de manera aleatoria, sino que lo hacen en regiones de mayor densidad que el promedio, i.e. tienen un sesgo. En el artículo de [34] estudian el sesgo de los halos cuya separación es mayor al radio virial de los halos más grandes. Usaron el formalismo de Press-Schechter [40] para tener una aproximación analítica del sesgo de los halos de materia oscura y efectivamente encontraron que la formación de halos mejora en regiones donde la densidad de fondo es mucho más alta que el promedio.

Para describir el sesgo de los halos de materia oscura respecto a la distribución de materia a gran escala, supongamos que tenemos una región a gran escala de radio R_0 y cuyo contraste de densidad δ_0 está en el régimen lineal y lo seguirá estando en épocas tardías. Además, adentro de esta región tendremos halos de masa m_1 que colapsarán en $z_1 > 0$, por lo que $m_1 < m_0$ y $\delta_1(z_1) = 1.68$. Este escenario lo vemos en la figura 2.5.

Haciendo uso de la distribución de primeros cruces, Bond et al [4] mostraron que la fracción de masa contenida en halos de colapsados (δ_1, R_1) respecto a la región a gran escala donde se encuentran inmersos (δ_0, R_0) es,

$$f(\sigma_1, \delta_1 | \sigma_0, \delta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta_1 - \delta_0}{(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(\delta_1 - \delta_0)^2}{2(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)} \right]. \quad (2.57)$$

Para simplificar la notación, funciones que usen estos argumentos las escribiremos como $g(1 | 0) \equiv g(\sigma_1, \delta_1 | \sigma_0, \delta_0)$. Luego, el número promedio de halos de masa m_1 en z_1 en una región de radio comóvil R_0 y sobredensidad δ_0 es,

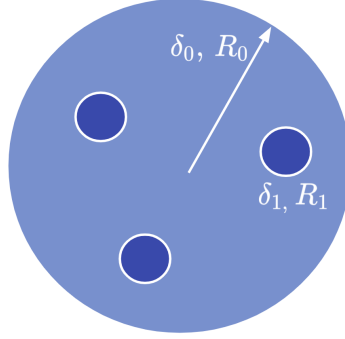


Figura 2.5: En la figura tenemos un ejemplo del modelo jerárquico de formación de estructuras. Vemos que antes de que colapsara la región de radio R_0 y masa $m_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \bar{\rho}$ esta tenía subestructuras formadas por pequeños halos de masa $m_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \bar{\rho}$. Por este orden en el colapso, la densidad adentro de los halos pequeños superó primero la barrera de colapso esférico y por ello $\delta_1 \gg \delta_0$.

$$\mathcal{N}(1 | 0) = \frac{m_0}{m_1} f(1 | 0). \quad (2.58)$$

Por lo tanto el número de halos formados en cada época z depende del contraste de densidad, δ_0 , del ambiente a gran escala que los contiene. Esto significa que no es un número aleatorio, sino que los halos de materia oscura, y en consecuencia los cúmulos de galaxias presentan un sesgo con el ambiente a gran escala. En la configuración Lagrangiana, el sesgo de los halos de materia oscura $\delta_h^L(1 | 0)$ es,

$$\delta_h^L(1 | 0) = \frac{\mathcal{N}(1 | 0)}{n(m_1)V_0} - 1, \quad (2.59)$$

donde $V_0 = 4\pi R_0^3/3$. En el caso límite cuando la masa contenida en la región más grande es mucho mayor que la masa de los halos, $R_0 \gg R_1$, de forma que $\sigma_0 \ll \sigma_1$ y $|\delta_0| \ll |\delta_1|$, la ec. se simplifica como:

$$\delta_h^L(1 | 0) = b_L(\delta_1, m_1) \delta_0 = \frac{\nu_1^2 - 1}{\delta_1} \delta_0 \quad \text{con} \quad \delta_1 = \delta_{\text{sc}}(1 + z_1), \quad (2.60)$$

donde $\nu_1 \equiv \delta_1/\sigma_1$, $\sigma_1 = \sigma(m_1, z_1)$ y δ_0 es el valor del contraste de densidad inicial de la región comóvil extrapolado al momento de la observación. Entonces el sesgo de los halos de materia oscura en la configuración lagrangiana es directamente proporcional a la sobredensidad lineal de la masa de la región a gran escala. Esto significa que los halos colapsan más rápido si se encuentran en un región de sobredensidad a gran escala, este fenómeno queda descrito por la "Descomposición del Fondo de los Picos". En el esquema de la figura 2.6 la sobredensidad de la región a gran escala está representada por las crestas de la onda de mayor periodo, mientras que las sobredensidades a pequeñas escalas

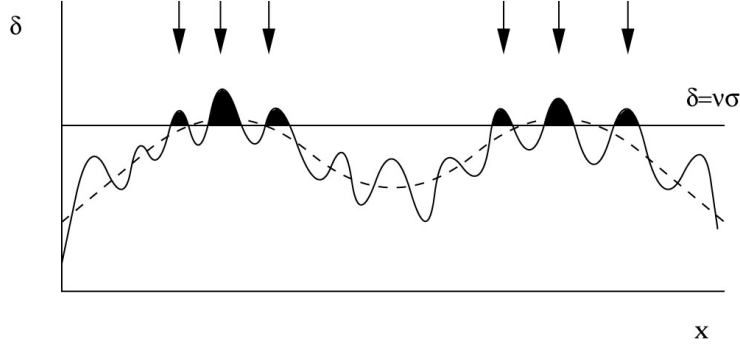


Figura 2.6: Sesgo los halos de materia oscura sobre grandes regiones de sobredensidad. Descomponemos el campo de densidad en dos componentes, una a nivel de la escala de las galaxias (picos pequeños) y otra con una mayor longitud de onda, representada como un oleaje sobre el cual están las pequeñas perturbaciones. Aquellas regiones que se encuentre arriba de la barrera $\nu\sigma$ están fuertemente agrupadas. En este modelo suponemos que los objetos (sombreados e indicados con flechas) se forman en las crestas del oleaje, por lo que hay un sesgo en la distribución espacial de los halos de materia oscura, ya que su distribución no fue uniforme incluso antes de la evolución del campo de densidad. [36]

son los picos pequeños sobre la gran onda. Así vemos, que es más sencillo que las pequeñas sobredensidades crucen la barrera δ_{SC} y formen estructuras si se encuentran una región de sobredensidad. Con el modelo de colapso esférico podemos establecer una conexión entre la evolución de la región lagrangiana (R_0, δ_0) y la Euleriana $(R(R_0, \delta_0, z_1), \delta(\delta_0, z_1))$, donde z_1 es el tiempo donde describimos la evolución. Sin pérdida de generalidad, cuando $z_1 = 0$, tenemos los radios y los contrastes de densidad se relacionan como:

$$R_0 = R(1 + \delta)^{1/3}, \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \delta_0 = & -1.35(1 + \delta)^{-2/3} + 0.78785(1 + \delta)^{-0.58661} \\ & - 1.12431(1 + \delta)^{-1/2} + 1.68647. \end{aligned} \quad (2.62)$$

De esta forma, en la configuración Euleriana, el sesgo de los halos de materia oscura en una región radio R y sobredensidad δ es

$$\delta_{\text{h}}^{\text{E}}(1 | 0) = \frac{\mathcal{N}(1 | 0)}{n(m_1, z_1)V} - 1, \quad (2.63)$$

donde $V = 4\pi R^3/3$ y δ_0 está descrita por 2.62. Al igual que en la configuración lagrangiana tomamos el caso límite cuando $R_0 \gg R_1$ y $\delta_0 \ll \delta_1$ por lo que el sesgo es,

$$\delta_{\text{h}}^{\text{E}}(1 | 0) = b_E(m_1, \delta_1) \delta(\delta_0, z_1) = (1 + b_L(\delta_1, m_1)) \delta(\delta_0, z_1). \quad (2.64)$$

Notemos que el sesgo de la configuración Euleriana queda expresado en términos del sesgo en la configuración Lagrangiana. Además el primer término del sesgo está relacionado con una expansión o contracción de la región esférica, mientras que el segundo término refleja el sesgo del campo de densidad inicial dado por la ecuación 2.60 [34].

2.7. Función de correlación de dos puntos

Hasta ahora, hemos descrito de forma teórica cómo es que se forman las estructuras de materia oscura y su relación de sesgo con el campo de materia a gran escala. Sin embargo, este problema también se puede abordar empíricamente al considerar un enfoque estadístico. Para ello se recurre a observaciones de trazadores (galaxias que cumplen con propiedades de interés para un sondeo) y a partir de su distribución espacial es que inferimos aquella de la materia oscura.

Ya que en cosmología partimos de la suposición de homogeneidad e isotropía a grandes escalas, asumimos que la porción del cielo de cada observación representa una muestra justa del universo como un todo, es decir suponemos *ergodicidad*. Esto implica que:

- dos regiones distantes en el universo son realizaciones independientes del mismo proceso físico,
- al haber muchas muestras independientes del universo podemos agruparlas para aproximar un ensamble estadístico,
- los promedios a lo largo del ensamble no son afectados por la rotación.

El estadístico más usado para estudiar la distribución de materia es la función de correlación de dos puntos, $\xi(r)$, o bien su transformada de Fourier, el espectro de potencias $P(k)$. Su popularidad se debe a que el contraste de densidad de la materia del CMB, inferido a partir de las perturbaciones de temperatura, sigue una distribución gaussiana centrada en cero. Esto significa que sólo necesitamos la varianza o la función de correlación de dos puntos para caracterizar por completo dichas perturbaciones iniciales.

Hablando de la distribución de galaxias en el espacio, cabe mencionar que en las observaciones se usa el corrimiento al rojo como una medida de la distancia pero el movimiento debido a las velocidades peculiares de las galaxias dentro del cúmulo que las contiene podría traer errores que pueden ser incluso mayores que la longitud del cúmulo, (Finger of God). Otra complicación en la estimación de las distancias es el efecto Káiser, el cual describe una distorsión debido al movimiento relativo entre cúmulos. Si bien su velocidad (y por lo tanto la distorsión) es mucho menor que la del efecto "Finger of God", esta nos da información sobre la distribución de materia oscura. Esto es debido a que el movimiento de los halos no es aleatorio como el de las galaxias, sino que se debe a la acción gravitatoria en el régimen lineal [38].

Para entender de forma didáctica la función de correlación de dos puntos, usemos

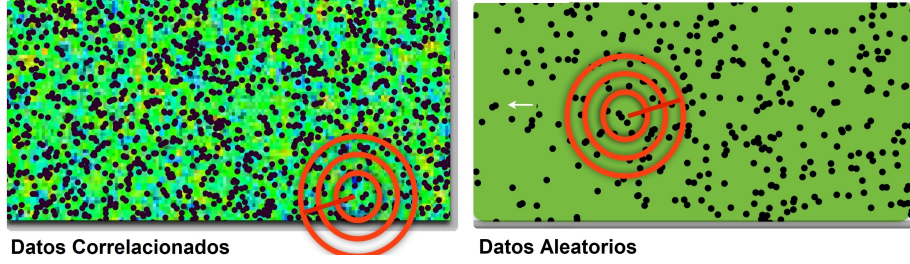


Figura 2.7: En el conjunto de la izquierda tenemos las parejas de datos correlacionados $DD(r)$, mientras que a la derecha tenemos un conjunto de datos aleatorios $RR(r)$. Como vemos representado en círculos concéntricos, en cada una de las posiciones se evalúa el número de parejas alrededor de un intervalo Δr para cada valor del radio r dado.

como ejemplo uno de sus estimadores más sencillos usado en los sondeos de galaxias:

$$\hat{\xi}(r) = \frac{DD(r)}{RR(r)} - 1, \quad (2.65)$$

donde $DD(r)\Delta r$ es la distribución de parejas galaxia-galaxia observadas en el sondeo con una separación $r \pm \Delta r$ y $RR(r)\Delta r$ es la distribución de parejas cuando tenemos un catálogo aleatorio de galaxias, en este caso $RR(r)$ sigue una distribución de Poisson, ver fig. 2.7.

Bajo esta definición, $\xi(r) = 0$ significa que las galaxias están distribuidas de forma aleatoria y cuando su valor es distinto de cero significa que hay agrupamiento [24]. En general cuando usamos estimadores para evaluar la función de correlación necesitaremos un volumen de datos lo suficientemente grande para que el resultado sea preciso. Sin embargo, hay estimadores como el de Landy-Szalay y el de Hamilton [30; 22] que resultan ser buenos para un conjunto de datos pequeño.

La probabilidad de que un objeto esté dentro de un volumen dV es

$$dP = \bar{n}_g dV, \quad (2.66)$$

donde $\bar{n}_g = n_g/V$ es independiente de la posición y se define como el número de galaxias n_g entre el volumen total V . La probabilidad de encontrar un objeto será proporcional al tamaño del volumen explorado. La función de correlación de dos puntos ξ queda definida por la probabilidad conjunta de encontrar un objeto en dV_1 y otro en dV_2 cuya separación entre sí sea r_{12} ,

$$dP(r_{12}) = n^2 dV_1 dV_2 [\xi(r_{12}) + 1], \quad (2.67)$$

donde expresamos $\xi(\vec{r}_{12})$ como $\xi(r_{12})$ por isotropía. Como habíamos mencionado, en un proceso de Poisson los objetos se encuentran distribuidos de manera

aleatoria en el espacio por lo que $\xi(r) \equiv 0$ y en este caso las probabilidades de encontrar objetos en dV_1 y en dV_2 son independientes:

$$dP = \bar{n}_g^2 dV_1 dV_2. \quad (2.68)$$

En general, cuando buscamos en alrededor de un objeto ubicado al azar, la probabilidad de encontrar una pareja en una vecindad de radio r , alrededor de dV es: En general, cuando

$$dP = n dV [\xi(r) + 1]. \quad (2.69)$$

Notemos que la ecuación 2.69 es igual equivalente a la ecuación 2.67. La diferencia entre ambas simplemente radica en la eficiencia al explorar el conjunto de datos. En 2.67 se buscan parejas en dos volúmenes dV_1 y dV_2 que se escogen de manera aleatoria (por lo que bien podrían estar vacíos), mientras que en 2.69 sabemos que hay parejas en dV y corresponde a lo que se hace en la práctica como ilustramos en 2.7.

Finalmente el número promedio de vecinos que podemos encontrar alrededor de un objeto escogido al azar dentro de un radio r es

$$\bar{n}(< r)_g = \frac{4}{3}\pi r^3 \bar{n}_g + 4\pi \bar{n}_g \int_0^r \xi(r') r'^2 dr'. \quad (2.70)$$

Por lo que la función de correlación de dos puntos puede ser vista como el exceso de probabilidad de encontrar un par de galaxias en 2 volúmenes dV_1 y dV_2 con una separación r_{12} en comparación con muestra aleatoria.

2.8. Sesgo lineal

Ya que no podemos medir de manera directa la distribución de materia oscura usamos trazadores como galaxias que nos permiten inferirla una vez que entendamos la relación de sesgo entre ambas distribuciones espaciales. Una de las primeras hipótesis al respecto fue que las galaxias seguían una distribución de Poisson y que además trazaban de forma directa la distribución de materia. Sin embargo en las simulaciones de materia oscura fría, donde se contempla un universo con constante cosmológica positiva, la formación de cúmulos de galaxias ocurre en los picos de sobredensidad del campo de materia. Siguiendo la teoría de colapso esférico, esto ocurriría sólo en las regiones donde la sobredensidad local supera la cota $\delta_{sc} \simeq 1.68$ y no de forma aleatoria. De esta forma el agrupamiento de las galaxias está sesgado, es decir, las galaxias se forman con mayor preferencia en las regiones de alta densidad y por lo tanto están más correlacionadas con la distribución de materia en general.

Esta es una hipótesis razonable, ya que la formación de galaxias ocurre cuando las nubes de hidrógeno y helio colapsan rápidamente y se fragmentan formando estrellas, por lo que se requieren condiciones favorables y que no haya cambios en el ambiente extragaláctico. Por ejemplo, uno de estos factores externos podría causar que la primera generación de estrellas se fotoionice o bien,

estas podrían calentarse a altas temperaturas por una onda de choque. A estas regiones les tomará más tiempo enfriarse, colapsar y fragmentarse, por lo tanto se espera que sea en los altos picos de densidad (los cuales tienen tiempos de enfriamiento y de colapso más cortos) donde sea más probable que se complete el proceso de formación de galaxias de forma satisfactoria.

Continuando con nuestro análisis sobre la relación entre la distribución de galaxias y la distribución de materia, pensemos en un campo de perturbaciones δ_m suavizado a una escala de masa m igual a la masa de una galaxia, el cual sigue una distribución Gaussiana de varianza σ_m^2 . La función de correlación de la densidad de materia es

$$\xi_{mm}(r) = \langle \delta_m(\vec{r} + \vec{x}) \delta_m(\vec{x}) \rangle_{\vec{x}}. \quad (2.71)$$

Si las galaxias trazaran perfectamente a la materia, la función de correlación de dos puntos de las galaxias, ξ_{gg} , coincidiría con la de la materia. Sin embargo esto no se cumple cuando suponemos que las galaxias se forman en regiones que han superado una cota de sobredensidad $\delta_{sc} = \nu \sigma_m$, es decir adentro de los halos de materia oscura. De forma aproximada, la relación entre la función de correlación de la materia, en puntos que cumplen $\delta_m \geq \delta_{sc}$, y la función de correlación de la distribución de las galaxias es

$$\xi_{gg}(r) \simeq b^2 \xi_{mm}(r), \quad (2.72)$$

donde $b = \delta_g / \delta_m$. Su forma lineal no tiene una justificación, sólo se usa por simplicidad. Puede ser aplicado a pequeñas y grandes escalas, siempre y cuando éste actúe de forma local sobre la densidad. También hay propuestas de sesgos no lineales, pero son modelos mucho más difíciles de construir, como lo ilustraremos en la siguiente sección.

De cualquier forma, lo mejor es pensar a b como una aproximación, ya que en un solo parámetro guardamos información de procesos físicos complejos como: la información de agrupamiento gravitatorio, formación de estrellas y dinámica del gas. [9; 7]

2.9. Sesgo no lineal usando teoría de perturbaciones a 2do orden

Podemos obtener de manera más precisa la función de correlación de dos puntos del campo de materia y sus trazadores usando teoría de perturbaciones a 2do orden sin embargo su implementación es mucho más costosa que simplemente asumir un sesgo lineal. De manera breve nos basaremos en el modelo de CLPT para ilustrar esto usando a las galaxias como trazadores, por lo cual usamos el subíndice g .

Primero debemos establecer una relación entre las coordenadas Eulerianas \vec{x} y la descripción lagrangiana del elemento de materia oscura que describiremos a lo largo del tiempo y del espacio. En coordenadas lagrangianas, este parte de

una posición inicial \vec{q} a un tiempo t_0 y su movimiento quedará descrito por el campo de desplazamiento Lagrangiano $\vec{\Psi}$,

$$\vec{x}(\vec{q}, t) = \vec{q} + \vec{\Psi}(\vec{q}, t). \quad (2.73)$$

El contraste de densidad en ambas configuraciones se escribe con la ecuación de continuidad,

$$[1 + \delta_{m0}(\vec{x}, t)]d^3x = [1 + \delta_{m0}(\vec{q})]d^3q. \quad (2.74)$$

Incluso podemos simplificar esta relación si suponemos que el tiempo t_0 es lo suficientemente temprano para que la amplitud de la perturbación inicial de materia $\delta_{m0}(\vec{q})$ sea pequeña,

$$1 + \delta_{m0}(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{q} \delta_{m0D}[\vec{x} - \vec{q} - \vec{\Psi}(\vec{q}, t)]. \quad (2.75)$$

Por otro lado, tenemos una colección de galaxias g que tienen un contraste de densidad con un sesgo local respecto a la perturbación inicial $\delta_{m0}(\vec{q})$,

$$1 + \delta_g(\vec{q}, t) = F[\delta_{m0}(\vec{q})], \quad (2.76)$$

aquí $F(\delta_{m0})$ es la función de sesgo Lagrangiano. Este contraste de densidad en coordenadas comóviles se calcula al hacer una convolución entre el contraste en la configuración lagrangiana y los desplazamientos,

$$1 + \delta_g(\vec{x}) = \int d^3\vec{q} F[\delta_{m0}(\vec{q})] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{q} - \vec{\Psi}(\vec{q}))}. \quad (2.77)$$

Luego la función de correlación de dos puntos de las galaxias se obtiene al sustituir $\delta_g(\vec{x})$ de la ecuación de arriba en

$$\xi_{gg}(\vec{r}) = \langle \delta_g(\vec{x}) \delta_g(\vec{x} + \vec{r}) \rangle. \quad (2.78)$$

Sin embargo la función de sesgo lagrangiano $F(\delta_{m0}(\vec{q}))$ no es conocida. Para evaluarla se asume primero que el sesgo es independiente de la posición, lo que implica que dos valores idénticos de δ_g se relacionan con un mismo valor en el contraste de densidad de la materia (i.e. $\delta_g(\vec{x}_1) = \delta_g(\vec{x}_2) \implies \delta_m(\vec{x}_1) = \delta_m(\vec{x}_2)$). Así podemos, sacar al sesgo $F(\delta_{m0})$ la de la integral 2.77 para evaluar $\delta_g(\vec{x})$ en la función de correlación.

Esto también nos ayuda a hacer predicciones teóricas, pues el sesgo pasa de ser una propiedad local a una propiedad estadística global del contraste de densidad de la materia inicial,

$$F(\delta_{m0}(\vec{r} + \vec{x})) \rightarrow F(\delta_{m0}). \quad (2.79)$$

Al expresarlo como una expansión de Taylor de F ,

$$F(\delta_{m0}) = b_0 + F' \delta_{m0} + \frac{F''}{2} \delta_{m0}^2 + \dots \quad (2.80)$$

vemos que el sesgo lagrangiano puede quedar en términos de $b_0 = b$ que es una constante de ajuste, el sesgo lineal $b_1 = \langle F' \rangle$ y el sesgo a segundo orden $b_2 = \langle F'' \rangle$. Sólo debemos considerar que cada vez que agregamos un término a la serie, este será incluido en todos los cálculos que relacionen δ_g con δ_m lo que en términos prácticos se traduce en la posibilidad de cometer errores en los cálculos. También se debe considerar la precisión del sondeo pues en el caso de algunos trazadores (como QSO y ELG) es suficiente usar la aproximación lineal pues las correcciones a 2do orden no agregan mejoras significativas [15; 6].

2.10. Conexión Halo - Galaxia

Al estudiar la conexión Galaxia - Halo nos interesa establecer una relación entre las propiedades astrofísicas de las galaxias y la masa de los halos que las hospedan, tomando en cuenta el criterio de selección para determinar la muestra del sondeo [8]. Hasta ahora hemos hablado del modelo de halo, donde los halos de materia oscura son los bloques fundamentales que construyen la materia oscura y de cómo estos no se forman de manera aleatoria sino en las zonas de alta densidad (PBS). Si esto lo combinamos con un modelo que describa cómo es que los halos de distintas masas son poblados por galaxias, podemos hacer predicciones sobre el agrupamiento de galaxias.

La función de correlación de dos puntos de los halos de materia con masa M , se relaciona con la función de correlación de la materia mediante el sesgo lineal de los halos de materia oscura para dicha masa,

$$\xi_{hh}(r | M) = b_h^2(M) \xi_{mm}^{\text{lin}}(r), \quad (2.81)$$

A su vez, la función de correlación de las galaxias, dada una característica astrofísica de interés como la luminosidad L se relaciona con la función de correlación de la materia vía el sesgo $b_g(L)$ de las galaxias según su luminosidad:

$$\xi_{gg}(r | L) = b_g^2(L) \xi_{mm}^{\text{lin}}(r). \quad (2.82)$$

Por lo tanto, podemos usar $\xi_{gg}(r | L)$ para inferir la masa promedio de los halos que hospedan galaxias con luminosidad L al encontrar M_{eff} para el cual

$$\xi_{hh}(r | M_{\text{eff}}) = \xi_{gg}(r | L). \quad (2.83)$$

Esto es, los sesgos de las galaxias y halos son iguales cuando encontramos la masa efectiva, M_{eff} de los halos cuando el sesgo de los halos corresponde a al sesgo de las galaxias de luminosidad L hospedan galaxias de luminosidad L

$$b_g^2(L) = b_h^2(M_{\text{eff}}), \quad (2.84)$$

que es equivalente a

$$b_h(M) = [\xi_{gg}(r | L) / \xi_{mm}^{\text{lin}}(r)]^{1/2}. \quad (2.85)$$

Notemos que para lograr esto, necesitamos conocer la función de masa dn/dM que nos dará $b_h(M)$ y $\xi_{mm}^{\text{lin}}(r)$, cantidades que están fuertemente relacionados con la cosmología. [45] Esto quiere decir que el sesgo de los halos de materia oscura influye directamente el agrupamiento de las galaxias que hospedan.

2.11. Distribución de Ocupación de Halos

Usando el enfoque de la Distribución de Ocupación de Halos (HOD) podemos conocer el sesgo de cualquier población de galaxias usando la probabilidad condicional $P(N | M)$ de que un halo de materia oscura de masa virial M tenga N galaxias en su interior, así como la relación entre la distribución de materia y galaxias dentro de los halos [47; 3]. Esto es, podemos tener una relación entre la función de correlación de las galaxias y la función de correlación de la materia.

En este enfoque se escogen los halos de materia oscura como aquellas regiones cuya densidad es $\rho/\bar{\rho} \sim 200$, ya que en ese valor de la densidad se espera que se haya dejado de acretar materia y el halo se encuentre en un equilibrio dinámico.

El ajuste de los parámetros de las HOD cambian según el tipo de galaxias estudiadas (definidas por sus rangos de luminosidad y colores o bien por su morfología) y dependen también del corrimiento a rojo de observación. Esto se debe a que la dinámica del gas, el enfriamiento radiativo y la formación de estrellas son procesos astrofísicos locales que influyen la distribución de galaxias dentro de los halos de materia oscura. Sin embargo, la masa y la distribución espacial de los halos de materia oscura pueden ser determinados usando principalmente la dinámica gravitatoria de la materia oscura. De esta forma vemos que la HOD nos permite entender el sesgo de las galaxias como resultado de dos procesos, por un lado tenemos la teoría de formación de galaxias que nos dice cómo se poblan los halos y por otro lado tenemos el modelo cosmológico que determina las propiedades de la distribución de halos.

Además nos da un argumento físico que nos permite explicar las discrepancias entre el agrupamiento predicho y el agrupamiento observado de galaxias. [3]

Usando la función de correlación de dos puntos podemos mostrar cómo es que la HOD influye el agrupamiento de galaxias.

Tomando en cuenta el radio virial de los halos de materia oscura, la función de correlación de las galaxias es la suma de un término “1-halo” y un término “2- halos”:

$$\xi_{gg}(r) = \xi_{gg}^{\text{1h}}(r) + \xi_{gg}^{\text{2h}}(r) + 1. \quad (2.86)$$

El primer término se refiere a parejas de galaxias formadas adentro del radio virial de un mismo halo y el segundo a las parejas que se encuentran en halos separados y correlacionados.

Considerando a un halo de masa M_1 , el número de galaxias en exceso en un volumen dV a una distancia r de halo, se obtiene al hacer la integral sobre la función de masa del halo $n(M)$ pesando cada halo por el número de galaxias

promedio $\langle N \rangle_M$ y el factor de sesgo:

$$1 + \xi_{\text{gg}}^{\text{lh}}(r) = \int n(M) \langle N(N-1) \rangle_M \lambda(r | M) dM \frac{1}{2 \bar{n}_g^2}, \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \xi_{\text{gg}}^{2\text{h}}(r) &= \xi_{\text{mm}}^{\text{lin}}(r) \int n(M_1) b_h(M_1) \langle N \rangle_{M_1} dM_1 \\ &\times \int n(M_2) b_h(M_2) \langle N \rangle_{M_2} \lambda(r | M_1, M_2) dM_2 \frac{1}{\bar{n}_g^2}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

donde \bar{n}_g es la densidad de número de galaxias en la muestra, $b_h(M)$ es el sesgo lineal a gran escala de los halos y $\lambda(r|M)$ es el perfil radial de la densidad de galaxias dentro de un halo de masa M y $\lambda(r|M_1, M_2)$ la convolución de dos perfiles radiales distintos.

En separaciones muy grandes, esperamos que

$$\xi_{\text{gg}}(r) = b_g^2 \int \xi_{\text{mm}}^{\text{lin}}(r), \quad (2.89)$$

donde b_g^2 es el sesgo de las galaxias, por lo que simplemente es el valor del sesgo del halo pesado. La ec. 2.88 depende del número promedio de galaxias en halos de masa fija,

$$\langle N \rangle_M = \sum_N N P(N | M), \quad (2.90)$$

y la ec. 2.87 del segundo momento de $P(N|M)$,

$$\langle N(N-1) \rangle_M = \sum_N N(N-1) P(N | M) \quad (2.91)$$

Por lo que es deseable tener una versión sencilla de $P(N | M)$ para ajustar con facilidad sus parámetros a la función de correlación de dos puntos de las galaxias observadas [27]. Afortunadamente, es posible separar la distribución de probabilidad para galaxias centrales y para galaxias satélites. En el primer caso asumimos una distribución de Bernoulli, mientras que en el segundo asumimos una distribución de Poisson [47]. Esta separación es observable en los sondeos de galaxias al notar que las galaxias centrales tienen un comportamiento distinto a aquellas que son satélites. Incluso se han usado simulaciones hidrodinámicas para visualizar esta diferencia en sus propiedades encontrando que se debe a sus distintas *historias de formación*. En las simulaciones, las galaxias centrales acretan la mayoría del gas frío del halo, tienden a ser más masivas y viejas, lo que coincide con las predicciones de los modelos semianalíticos. También, este tipo de galaxias tienden a quedarse más cerca de los halos de materia oscura a los que están más fuertemente ligadas y se mueven lentamente hacia el centro de masa del halo que las hospeda. En el caso de las galaxias satélites, éstas son arrastradas por fricción dinámica y pueden fusionarse con la galaxia central.

Además su dispersión de velocidades es muy similar a la de la materia oscura, por lo que lo que puede ser usada para evaluar la masa de los halos. [51].

Entonces, diferenciando entre galaxias centrales y satélites, el primer momento de $P(N | M)$ es,

$$\langle N \rangle = \langle N_{\text{cen}} \rangle_M + \langle N_{\text{sat}} \rangle_M. \quad (2.92)$$

En el caso de las LRG, que son de interés para este tema de tesis, la probabilidad de tener una galaxia central queda descrita por la función

$$\langle N_{\text{cen}} \rangle_M = \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf} \left(\frac{\log M - \log M_{\text{mín}}}{\sigma_{\log M}} \right) \right] \quad (2.93)$$

mientras que el número promedio de las galaxias satélites quedan parametrizadas como

$$\langle N_{\text{sat}} \rangle_M = \left(\frac{M}{M_{\text{sat}}} \right)^\alpha \exp \left(-\frac{M_{\text{cut}}}{M} \right) \langle N_{\text{cen}} \rangle_M. \quad (2.94)$$

En la ecuación anterior notamos que, para que haya galaxias satélites en una muestra de LRG, primero debe haber una galaxia central, por eso multiplicamos por su ocupación promedio. En este modelo de HOD, $M_{\text{mín}}$, $\sigma_{\log M}$, α , M_{sat} y M_{cut} son parámetros libres que serán ajustados usando cadenas Montecarlo hasta obtener el conjunto de valores que mejor reproduzca la función de correlación de dos puntos de las galaxias observadas.

De forma breve, $M_{\text{mín}}$ es la masa en la cual la mitad de los halos tienen una galaxia central, $\sigma_{\log M}$ es la parametrización de la anchura de la función error de gauss, α es el exponente de la ley de potencias que nos da la dependencia de la masa entre el número de satélites, M_{sat} es la masa típica de los halos que tienen 1 galaxia satélite, y M_{cut} nos permite que la masa de corte en la función de ocupación de satélites varíe con la masa del halo [50]. Nos enfocamos en la HOD para LRG porque son las galaxias consideradas en este trabajo de tesis, sin embargo al usar otro tipo de galaxias la forma funcional de la HOD debe cambiar. Para ejemplificar el cambio de la HOD con al observación, tomemos el ejemplo de la fig. 2.8. En ella vemos que el tipo de galaxia observada nos dará una distribución distinta tanto para las galaxias centrales como para las satélites y también notamos que hay una diferencia entre las LRGs y las ELGs.

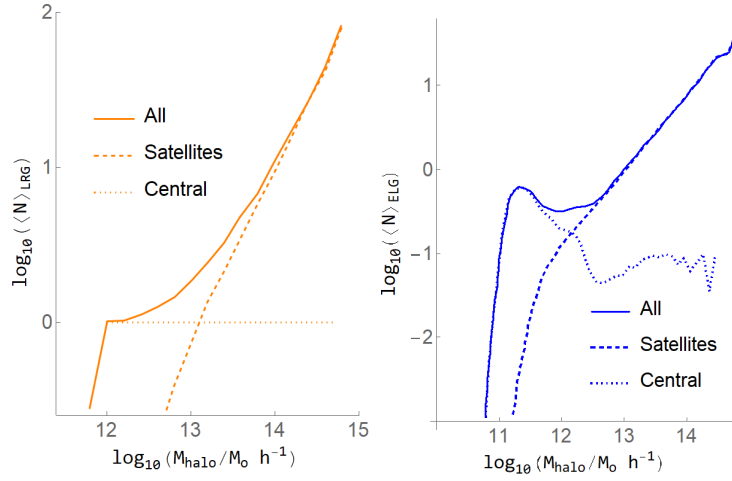


Figura 2.8: **(Izq)** HOD para galaxias rojas luminosas (LRG). Vemos que estas galaxias son centrales en los halos que poblan y en los halos masivos puede haber más de una galaxia de este tipo incluyendo a su galaxia central, por lo que las LRG pueden ser galaxias satélites [51]. **(Der)** HOD para galaxias con línea de emisión (ELG). Vemos que las ELG pueden ser galaxias centrales cuando la masa de los halos es pequeña, sin embargo la mayoría son galaxias satélites en las faldas de los halos masivos [20]. En particular notemos que las galaxias centrales de esta muestra no pueden ser parametrizadas por una función escalón y que puede haber galaxias satélites aún si no hay galaxia central tipo ELG, por lo que su HOD debe ser distinta a la mostrada en las ec. 2.93 y 2.94.

2.12. Función de Luminosidad Condicional

Nos interesa usar la luminosidad de las galaxias para caracterizar la masa de los halos que las hospedan, por lo cual usaremos la Función de Luminosidad Condicional (CLF). Esta función describe el número promedio de galaxias, $\phi(L | M_h)$, en función de la luminosidad L de galaxias de un halo de materia oscura de cierta masa M_h . La CLF se estima contando las galaxias en rangos de luminosidad delimitadas por un valor del corrimiento al rojo, z_L [48]. En general, describe de forma separada la distribución de luminosidad para galaxias centrales y para galaxias satélites.

Esto se puede inferir directamente de las medidas de grupos y cúmulos o de un modelo completo de agrupamiento de galaxias y abundancias [47]. Por lo que la CLF total, se escribe como

$$\phi(L | M_h) = \phi_{\text{cen}}(L | M_h) + \phi_{\text{sat}}(L | M_h), \quad (2.95)$$

suponemos que la distribución de las galaxias centrales es lognormal:

$$\phi_{\text{cen}}(L | M) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma_c} \exp\left[-\frac{(\log L - \log L_c)^2}{2\sigma_c^2}\right], \quad (2.96)$$

donde A es el número de galaxias centrales por halo y $A \equiv 1$ en la CLF total cuando no hacemos una distinción entre galaxias rojas y azules. Por lo general las LRG pertenecen a las primeras y las ELG a las segundas. Cuando sí separamos a las galaxias en rojas y azules, $A = f_{\text{red}}$ para las galaxias rojas, (siendo f_{red} la fracción de galaxias rojas centrales) y $A = 1 - f_{\text{red}}$ para las galaxias azules. Esta separación nos es de ayuda para asociar el tipo de galaxia central que tenemos considerando la masa del halo huésped como se ve en la fig. 2.9. Ahí vemos que en el rango de masas $14.4 \leq \log M_h \leq 14.7$ las galaxias centrales suelen ser rojas. Mientras que $12.0 \leq \log M_h \leq 12.3$ es posible que haya galaxias azules como galaxia central.

Notemos que $\log L_c$ es, por definición, el valor esperado del logaritmo de la luminosidad de la galaxia central:

$$\log L_c = \int_0^\infty \phi_{\text{cen}}(L | M) \log L \, d \log L, \quad (2.97)$$

y que $\sigma_c = \sigma(\log L_c)$, la anchura de ley log-normal. Para la parte de las galaxias

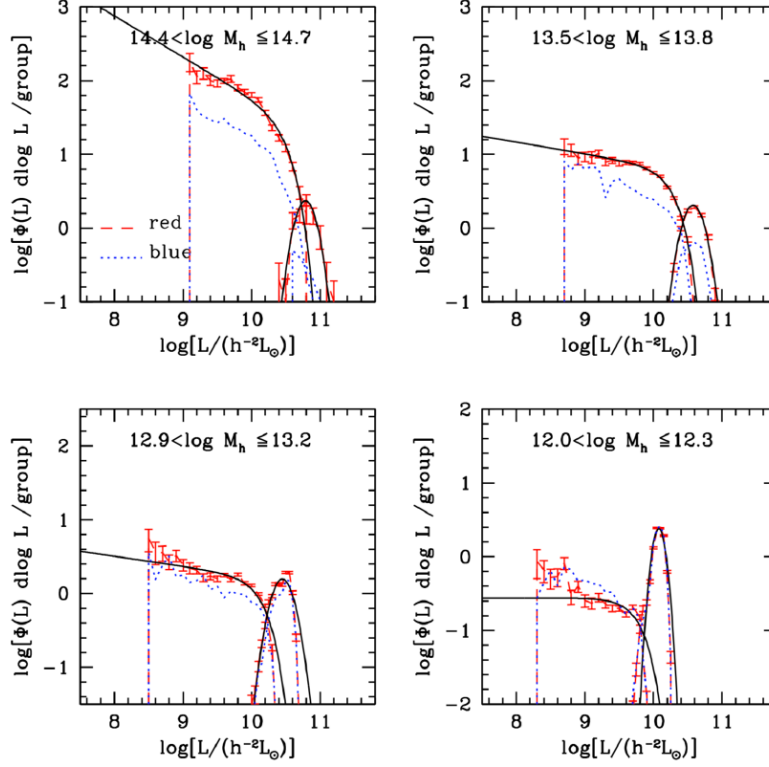


Figura 2.9: En la figura se muestra la CLF para las galaxias rojas (líneas discontinuas) y azules (línea punteada) en 4 rangos de masa. La línea sólida muestra la parametrización que mejor ajusta la CLF de las galaxias rojas. En ambos casos los componentes de las galaxias centrales y satélites de la CFL se indican por separado. Para mayor claridad, las barras de error se muestran solamente para las galaxias rojas [48].

satélites usamos la función de Schechter modificada²:

$$\phi_{\text{sat}}(L | M) = \phi_s^* \left(\frac{L}{L_s^*} \right)^{(\alpha_s^* + 1)} \exp \left[- \left(\frac{L}{L_s^*} \right)^2 \right]$$

²Es necesario usar una distribución modificada respecto a la de Press-Schechter, porque en el caso de la CLF queremos describir la distribución de galaxias dada su luminosidad y masa, mientras que en el caso de Press-Schechter hablamos de la distribución de halos formados dada una masa. La diferencia radica, en que la luminosidad se relaciona con la masa estelar y a su vez, la eficiencia de la producción de estrellas depende de procesos astrofísicos locales. La eficiencia de producción de estrellas aumenta hasta un valor de masa de halo fijo y luego disminuye, por lo que la razón de masa estelar M^* y la masa bariónica M no es constante. En el caso de las galaxias satélites, la explicación de este fenómeno son las fuentes de rayos UV (Supernovas o AGN) que ionizan el gas y por lo tanto no se forman estrellas. En el caso de las galaxias centrales, estas pueden colisionar con galaxias cercanas en un proceso descrito de forma aleatoria, que resulta en la pérdida de gas.

la cual disminuye más rápido en la región más brillante (hombro de la fig. 2.11) que la función de Schechter*. Esta parametrización tiene un total de 5 parámetros libres: $L_c, \sigma_c, \phi_s^*, \alpha_s^*$, y L_s^* . En la práctica tenemos que $\log L_c \sim \log L_s^* + 0.25$ es una buena aproximación, lo que reduce el número de parámetros de 5 a 4 [48].

El siguiente sección haremos un pequeño paréntesis para presentar un modelo de población más preciso que podría ser útil en el futuro estudio de este tema cuando se tome en consideración a otros trazadores como las ELGs.

2.13. Empate de Abundancias de SubHalos

En las secciones anteriores hemos presentado algunas de las formas más populares de establecer la conexión galaxia-halo, como la Distribución de Ocupación de Halo y la Función de Luminosidad Condicional. Si bien estos enfoques guardan la información general de la observación, necesitan de un gran número de parámetros libres, lo que dificulta entender el mecanismo de fondo que hace coincidir el modelo con los datos de la observación. Además, su aplicación no acota la relación entre las componentes luminosas de las galaxias y los halos de materia oscura.

En el enfoque de SHAM (SubHalo Abundance Matching) se pretende discernir si existe una relación sencilla entre los halos y galaxias que refleje el agrupamiento de galaxias observado. Para ello se sigue la evolución de las propiedades de cada halo y subhalo de materia oscura y se pretende empatar de forma monótona alguna de ellas con una característica de las galaxias.

En el análisis de SHAM se distingue entre los halos y subhalos. Esto se debe a que en las simulaciones de alta resolución, que usan un modelo de materia oscura fría jerárquico, las regiones virializadas de los halos en realidad no son suaves sino que contienen grumos. Los subhalos son halos acretados que se encuentran inmersos y que orbitan dentro de la región encerrada por el radio virial (aquel que encierra una densidad 180 veces mayor que la densidad promedio) de un halo más grande. Si un halo no se encuentra inmerso dentro de otro simplemente se le conoce como halo. Cuando un subhalo es acretado, y sobrevive a la fusión, algunas de sus propiedades como velocidad máxima circular y la masa gravitatoriamente ligada evolucionan dinámicamente conforme estos orbitan dentro del potencial del halo huésped. Respecto a la formación de galaxias, no hay ninguna diferencia entre los halos y subhalos: cualquier subhalo con un pozo de potencial gravitatorio lo suficientemente profundo será capaz de enfriar y colapsar nubes de material bariónico que formarán galaxias luminosas.

Al usar la luminosidad de las galaxias como trazador de la materia oscura resulta conveniente seguir la evolución de la masa y la velocidad máxima circular de los halos y subhalos para establecer una conexión galaxia - halo. Esto se debe a que la velocidad circular actual es una medida del pozo de potencial del halo construido durante su evolución y por lo tanto se puede esperar que esté fuertemente correlacionada con la masa estelar de la galaxia hospedada. La componente estelar de las galaxias, que debería estar más fuertemente ligada

que la masa del halo, no debería ser afectada de manera significativa por las fuerzas de marea, originadas en las fusiones de subhalos, y puede estabilizar la distribución de masa de las regiones internas. Por lo tanto en las simulaciones sin disipación, podemos esperar que la luminosidad y la masa estelar de las galaxias estén correlacionada con la masa de los subhalos o con su velocidad circular V_{\max}^{acc} al momento de ser acretados. En contraposición a la velocidad V_{\max} actual que si se ve afectada por la evolución dinámica.

Finalmente, asumimos una relación monótona entre la luminosidad de las galaxias y V_{\max} con la condición que se preserve la función de luminosidad (LF). Específicamente:

$$n_g(> L_i) = n_h(V_{\max,i}) \quad (2.98)$$

donde n_g y n_h son la densidad de número de galaxias y halos, respectivamente. En la expresión de arriba queremos remarcar que V_{\max} es la velocidad máxima hoy para los halos y la velocidad máxima al momento de acreción para los subhalos. Para cada L_i rango de luminosidad se busca $V_{\max,i}$ el rango de velocidades donde se siga la relación de arriba. Este modelo no tiene otras suposiciones y es completamente no paramétrico [8].

2.14. El sesgo en la reconstrucción del pico de BAO (BAOP)

Retomando nuestro trabajo, hablaremos de una de sus aplicaciones inmediatas, que es mejorar el método de reconstrucción para la medida del BAOP. Ya que la degradación del BAOP es causada por el movimiento de la materia y de las galaxias relativo a la distancia inicial preferida (100 Mpc/h), en [12] proponen abordar este problema modelando el desplazamiento de las galaxias desde sus posiciones iniciales en un estado casi homogéneo. El campo de desplazamientos se evalúa a primer orden considerando un sesgo lineal y siguiendo la aproximación de Zeldóvich:

$$\vec{\psi}(\vec{k}) = \frac{-i\vec{k}\delta_g(\vec{k})}{b_g k^2}. \quad (2.99)$$

Donde se ha sustituido $\hat{\delta}_m(\vec{k}) = \delta_g(\vec{k})/b_g$ en la ec. 2.50 y también ha cambiado la notación como $\vec{f}_k \rightarrow \vec{\psi}(\vec{k})$ y $\delta_k \rightarrow \hat{\delta}_m$. Usando este campo de desplazamientos es que podemos regresar a las galaxias de los sondeos a su posición inicial y finalmente tener una medida mejor definida del BAOP en la función de correlación de dos puntos de las galaxias. De manera estándar, el sesgo b_g se calcula al comparar función de correlación de dos puntos de la distribución de galaxias observadas y se comparara con la función de correlación teórica de la materia. Luego se busca el valor del sesgo lineal de las galaxias para que su función de correlación tenga el valor más cercano posible a la parte lineal de la función de correlación de la materia. Por otro lado, en [19] proponemos usar la conexión halo galaxia para calcular el sesgo de las galaxias de manera individual respecto

a la materia oscura. Con este enfoque logramos calcular un sesgo más cercano a lo local porque consideramos la relación entre el agrupamiento y la luminosidad de las galaxias LRG y la masa de su halo huésped. Por otro lado, el sesgo de los halos respecto de la distribución de materia oscura depende de la masa de los mismos. Por lo que una vez estimado el sesgo de los halos, podemos saber el sesgo de cada galaxia observada dependiendo de su luminosidad e inferir el contraste de densidad de la materia para finalmente reconstruir BAOP.

2.14.1. Inferencia Bayesiana de $\mathcal{P}(M_h | L)$

Nuestro método consiste en aplicar el teorema de Bayes a la información de la HOD y la CLF de un trazador específico para obtener la probabilidad de la masa de halo según la luminosidad de la muestra de galaxias. Al usar la información de la HOD en conjunto con la CLF, mejora la precisión de la estimación de la masa de los halos de materia oscura. Ya que al usar solamente la HOD para un mismo número de galaxias agrupadas no podríamos distinguir si la masa del halo huésped es distinta. Para ello, la CLF nos da información astrofísica de las galaxias (luminosidad) que podemos asociar a la masa de los halos. Luego con el sesgo de los halos de materia oscura es posible obtener el sesgo a gran escala de las galaxias que hospedan. *Mi trabajo de tesis justamente se enfoca a calcular el sesgo de los halos de materia oscura.* En esencia, este método podría aplicarse en futuros sondeos donde una vez conocida la probabilidad de tener una galaxia central o el número de galaxias satélites y usar en conjunto alguna característica astrofísica del trazador que se relacione con la masa de los halos que los hospedan podemos asociarles un sesgo a gran escala.

Para calcular la probabilidad de que las galaxias con luminosidad L se encuentren hospedadas en halos de masa M_h se usa el teorema de Bayes:

$$\mathcal{P}(M_h | L) = \frac{\mathcal{P}(L | M_h) \times \mathcal{P}(M_h)}{\mathcal{P}(L)}. \quad (2.100)$$

De la ecuación anterior, $\mathcal{P}(M_h)$ es la probabilidad a priori de la masa del halo. Esta se calcula al hacer la convolución entre la probabilidad de tener al menos una galaxia en un halo de masa M_h (HOD) y la función de masa de halo (HMF). Con esto, podemos asociar una probabilidad de tener una masa de halo según el número de galaxias observadas. Así, la fracción de halos de masa M_h que podrían tener al menos una galaxia es:

$$\mathcal{P}(M_h) = \frac{\mathcal{P}(N_{gal} \geq 1 | M_h) \times \frac{dn(M_h)}{d \log M}}{\int_0^\infty d \log M \mathcal{P}(N_{gal} \geq 1 | M_h) \times \frac{dn(M)}{d \log M}} \quad (2.101)$$

donde $\frac{dn(M)}{d \log M}$ es la función de masa que depende del corrimiento al rojo como se muestra en fig. 2.10. $\mathcal{P}(N_{gal} \geq 1 | M_h)$ representa la fracción de halos de masa M_h que hospedan al menos una galaxia del tipo que observamos.

La evidencia Bayesiana en la ec. 2.100, $\mathcal{P}(L)$, sólo es necesaria al comparar entre distintos modelos cosmológicos cuando inferimos la probabilidad a posteriori asumiendo el modelo cosmológico. Finalmente, la función de verosimilitud,

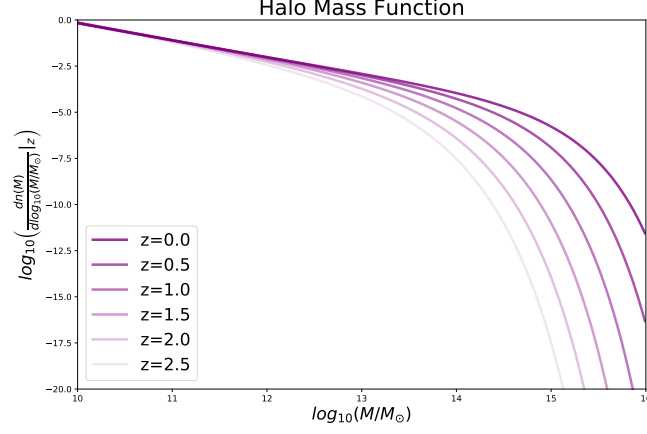


Figura 2.10: Función de masa de halo para distintos corrimientos al rojo, calculada con el algoritmo HMFcafe en [43].

$\mathcal{P}(L | M_h)$, se obtiene al intrapolar la densidad de galaxias de luminosidad L en un halo de masa M_h ,

$$\mathcal{P}(L | M_h) = \frac{\phi(L | M_h)}{\int_{L_{\text{cut}}}^{\infty} d \log L \phi(L | M_h)}. \quad (2.102)$$

En la figura 2.11 hemos graficado $\phi(L | M_h)$ para distintos valores de M_h . El límite inferior de integración de la ec. 2.102, L_{cut} , representa el flujo y el corrimiento al rojo límite de observación para el sondeo en cuestión. Este valor se puede inferir de la función de selección de galaxias o de una forma auto consistente como,

$$\int_{L_{\text{cut}}}^{\infty} d \log L \phi(L | M_h) \times \mathcal{P}(M_h) \times \frac{dn(M)}{d \log M} = \bar{n}_{\text{obs}}, \quad (2.103)$$

donde \bar{n}_{obs} es la densidad observada de galaxias en el sondeo que corresponde a L_{cut} .

Una vez calculadas la verosimilitud $\mathcal{P}(L | M_h)$ y el prior $\mathcal{P}(M_h)$ podemos obtener la probabilidad conjunta:

$$\mathcal{P}(L, M_h) = \mathcal{P}(L | M_h) \times \mathcal{P}(M_h). \quad (2.104)$$

Ésta nos dice la probabilidad de tener una masa de halo dada la luminosidad de una galaxia cuando fijamos el valor de la luminosidad o bien la probabilidad de tener cierta luminosidad para una masa de halo dada, esta distribución está graficada en fig. 2.13.

Éste método lo aplicamos a la muestra de LRG de eBOSS usando la HOD de [50]. Para este trazador el número de galaxias aumenta siguiendo una ley de

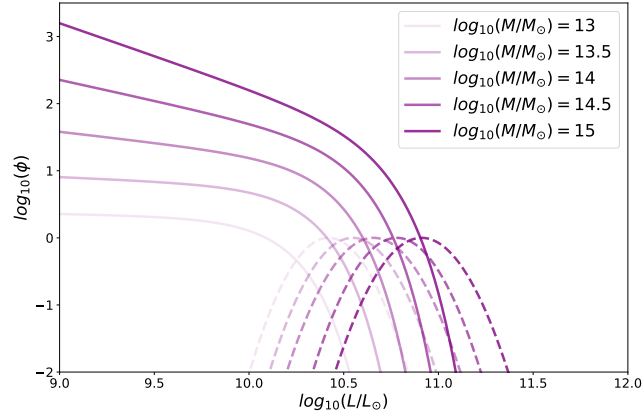


Figura 2.11: En la figura tenemos la distribución de probabilidad de luminosidad de las galaxias centrales (línea punteada) y de las galaxias satélites (línea sólida) que se hospedan en halos de distintas masas. [43]

potencias en la masa del halo, es decir, en este caso la CLF no agrega información de manera significativa salvo en el límite de LRG muy brillantes. Además, en este tipo de galaxias la existencia de las galaxias satélites implica que hay una galaxia central, por lo que el prior de la distribución de masa de los halos se puede obtener usando únicamente la información de las galaxias centrales, como vemos en la figura 2.12.

Siguiendo el método de arriba, la probabilidad conjunta se obtiene al multiplicar la probabilidad a priori de la masa del halo con la verosimilitud, como vemos en la figura 2.13

Finalmente podemos conocer la distribución de probabilidad de la masa del halo dada la luminosidad haciendo cortes a L constante en la probabilidad conjunta como vemos en 2.14.

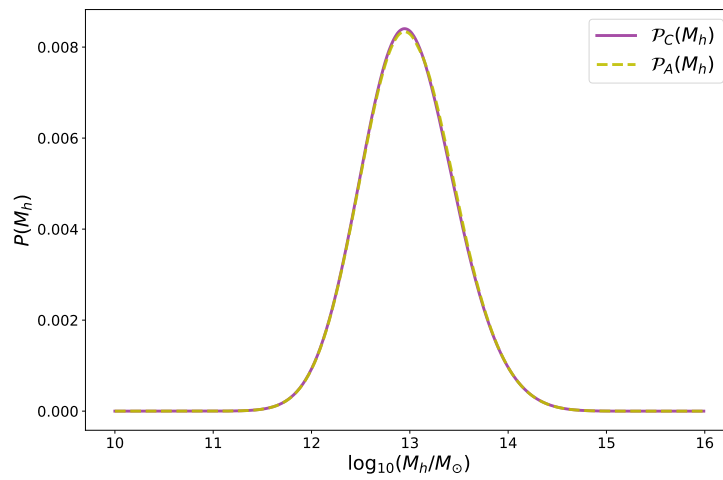


Figura 2.12: Probabilidad a priori de la masa de halos de la muestra de LRGs de eBOSS. En la figura podemos observar que esta distribución puede ser calculada usando únicamente la información de las galaxias centrales de la HOD. Esto se debe a que las LRG sólo tienen galaxias satélites cuando una galaxia tipo LRG es una galaxia central, de forma que es suficiente tener una galaxia LRG por halo para que este sea contado.

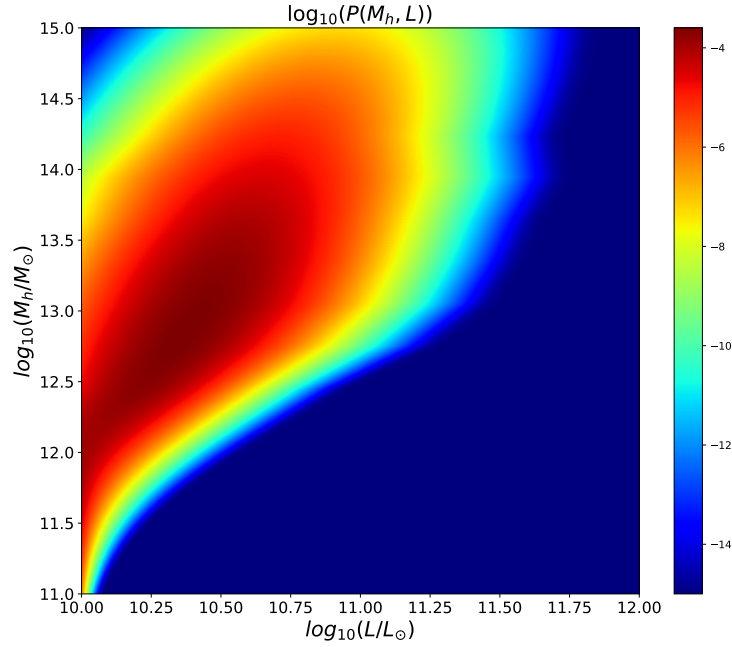


Figura 2.13: Distribución de la probabilidad conjunta en escala $\log_{10} \mathcal{P}(L, M_h)$. Los cortes en esta superficie a L constante son distribución de probabilidad condicionada $\mathcal{P}(M | L)$ y viceversa y a M fija son $\mathcal{P}(L | M)$. La frecuencia se indica con el gradiente de colores de la barra de la derecha, donde rojo denota la mayor probabilidad y en azul la menor.

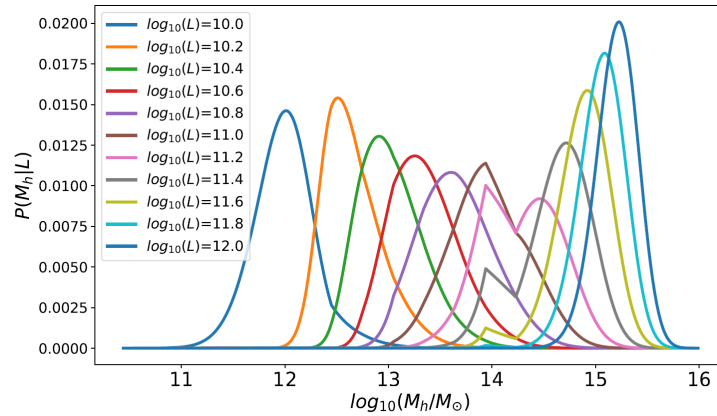


Figura 2.14: Distribución de probabilidades a posteriori para distintas luminosidades L .

2.14.2. Aplicación para LRG

A partir de una simulación de materia oscura ubicamos las regiones colapsadas ($\rho > 200\bar{\rho}$) para seleccionar los halos, los cuales poblamos con LRG de acuerdo con la información de su HOD y CLF. Luego aplicamos el método propuesto para estimar la masa de los halos huésped dada la luminosidad de las galaxias en este catálogo. No se espera obtener exactamente las mismas masas de los halos que fueron poblados porque dicho proceso es una realización aleatoria que introduce ruido blanco. En este caso en particular, se usó PBS para estimar el sesgo de cada halo y éste se asoció de manera local a las galaxias.

Finalmente al dividir el contraste de densidad de las galaxias entre el sesgo estimamos el campo de materia oscura, como vemos en la fig. 2.15.

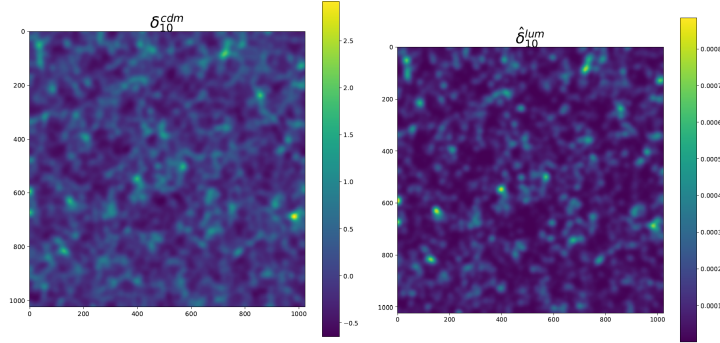


Figura 2.15: (Izq) Simulación de la distribución del contraste de densidad de materia oscura. (Der) Estimación del contraste de densidad tomando en cuenta la luminosidad de las galaxias.

En el siguiente capítulo describiremos a detalle cómo podemos calcular el sesgo de los halos de materia oscura de manera empírica al explorar el contraste de densidad de la materia con un conjunto de excursión, así como otros resultados importantes que agregan un entendimiento más profundo de la conexión halo galaxia [43], [19].

Capítulo 3

Resultados y Discusión

A continuación mostraremos el resultado clave de este trabajo de tesis que es la implementación de nuestro código para el estudio del sesgo de los halos de materia oscura y sus historias de formación. Este código podría ser aplicado en el futuro para mejorar nuestro entendimiento sobre la conexión galaxia - halo de materia oscura. Para ello creamos una simulación del campo de materia oscura y exploramos el campo de perturbaciones inicial en el espacio real usando el método de conjunto de excursión propuesto por Bond [4]. Presentaremos los resultados y su discusión, dentro de la cual hablaremos de las posibles mejoras que podrían esperarse al usar un equipo de cómputo con mayor memoria RAM y de las limitaciones generales.

3.1. Código

El código que presentamos a continuación fue escrito en Python y hace uso de algunas bibliotecas, como CAMB y Scipy. Hablaremos brevemente sobre las características más importantes que usamos de cada una de ellas. La librería de CAMB (Código para Anisotropías en el Fondo de Microondas) [32] ha sido parte medular del mismo ya que nos ha facilitado obtener el espectro de potencias lineal de la materia. A partir del mismo fue que construimos el contraste de densidad de la materia en el espacio de Fourier para la cosmología y el corrimiento al rojo especificados. A la par de la Transformada Inversa de Fourier pasamos el contraste de densidad de la materia en el espacio real. En particular hemos usado los valores de los parámetros cosmológicos publicados en [1] y un corrimiento al rojo de $z = 100$. Así empezamos en una época donde las escalas son lineales y podemos usar el método de colapso esférico acoplado a la teoría lineal de perturbaciones. Usamos 2 conjuntos de excursión para explorar el espacio, uno parte de posiciones aleatorias y otro de máximos locales, ambos con un tamaño de 20 000 caminantes. Cada caminante habrá reportado las variaciones del contraste de densidad desde su punto de partida hasta un radio máximo explorado. Los caminantes que parten de regiones aleatorias nos

permitirán visualizar la variedad de estructuras en el espacio, mientras que los caminantes que parten de los picos de alta densidad nos ayudarán a calcular el sesgo. Para ello, usando la teoría de colapso esférico [21] asignamos una masa a los halos colapsados y con el valor del contraste de densidad a grandes escalas calcularemos su sesgo, que podrá ser incorporado al trabajo realizado por nuestro grupo de investigación, sobre el uso de la información de luminosidad de las galaxias luminosas rojas (LRGs por su sigla en ingles) [19]. En la siguiente sección describiremos el código a gran detalle para facilitar su uso a futuros estudiantes.

3.1.1. Simulación del Campo Aleatorio Gaussiano

CAMB: Espectro de Potencias Inicial

El tamaño de nuestra caja de simulación dependerá del radio de la región a gran escala "LS", donde querramos explorar el sesgo de los halos de materia oscura. Tal radio depende de la masa que encierra y esta a su vez, se estima usando la densidad critica en términos de la función de Hubble. Por eso necesitamos definir los parámetros de la cosmología para establecer el tamaño de nuestra caja. Por otro lado, si a esto le agregamos los parámetros del espectro de potencias inicial, podremos generar un espectro de potencias que nos permitirá crear el campo de perturbaciones inicial de la densidad. Para fijar dichos valores en CAMB para Python con las instrucciones:

- Creamos el objeto `pars = camb.CAMBparams(kwgs)` que almacenará los parámetros necesarios para ejecutar los cálculos de CAMB.
- Ajustamos los parámetros cosmológicos `set_cosmology(kwgs)` y los parámetros del espectro de potencias inicial `InitPower.set_params(kwargs)` nosotros usamos los obtenidos en Planck 2018 [1] en el cuadro 3.1.
- Obtenemos los primeros resultados de los cálculos de CAMB al correr la función `results = camb.get_results(pars)`.

$\Omega_b h^2$	$\Omega_c h^2$	$H_0[\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}]$	τ	A_s	n_s	m_ν
0.0224	0.122	67.4	0.054	0.2e-9	0.965	0.06

Cuadro 3.1: Parámetros de la cosmología usados para generar el espectro de potencias inicial de [1].

Tamaño de la Simulación

El espacio físico de nuestra simulación será una caja cúbica con condiciones periódicas a la frontera para evitar efectos de borde, como vemos en la fig. 3.1. Para tener una estadística robusta el lado de la caja, L debe ser al menos 10 veces el tamaño de la región a gran escala R_0 . En nuestro caso nos interesa que

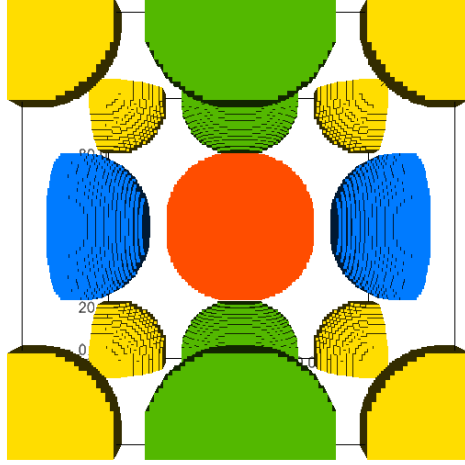


Figura 3.1: En esta composición podemos ver el control que poseemos sobre las condiciones periódicas a la frontera, sólo hemos graficado 4 esferas. Esta hermosa visualización es gracias a la librería `IPyvolume`.

R_0 esté en un futuro dentro del rango lineal y que dentro del mismo puedan formarse cúmulos de galaxias. Haciendo un balance entre la resolución deseada y la memoria RAM de nuestro equipo, podemos llegar hasta $R_0 = 2.5\text{Mpc}/h$. Esto es considerando una resolución de píxel de $10^{12}M_\odot$ en un corrimiento al rojo de $z = 100$ y un tamaño de malla de $500 \times 500 \times 500$ píxeles debido a la memoria RAM con la que disponemos.

El tamaño de píxel será el radio de un halo de masa $10^{13}M_\odot$. Para obtenerlo, calculamos la densidad crítica del universo ρ_c , con uno de los resultados de CAMB, la función de Hubble $H(z)$:

$$\rho_c(z) = \frac{3}{8\pi G} H(z)^2. \quad (3.1)$$

Luego, evaluando en $z = 100$ y en $M = 10^{13}M_\odot$ tenemos que el tamaño del píxel será

$$R(z, M) = \frac{1}{h} \left[\frac{3M}{4\pi\rho_c(z)} \right]^{1/3} = 0.05\text{Mpc}/h \quad (3.2)$$

Notemos que el resultado del radio, ha sido dividido entre $h = 0.674$ ya que seguiremos la convención de unidades para las distancias de $[\text{Mpc}/h]$. Para dicho tamaño de píxel y de radio máximo de exploración, los caminantes reportarán el valor del contraste de densidad en 25 pasos de 2 píxeles de grosor cada uno.

Contraste de Densidad en el espacio de Fourier

Una de las hipótesis de nuestro trabajo es que los halos de materia oscura se forman de manera predilecta en las regiones de sobredensidad a gran escala [34]. Para evaluar esto, debemos generar tal contraste de densidad $\delta_{\vec{r}}$ en el espacio real a partir de la Transformada Inversa de Fourier (TIF) del campo escalar complejo $\delta_{\vec{k}}$ descrito en la sección 2.1. Tanto la TIF como los vectores \vec{k} del espacio de Fourier 3-dimensional los construiremos usando la librería de Scipy. Cada $\delta_{\vec{k}}$ está en función de su magnitud y de una fase aleatoria. La magnitud de los $|\delta_{\vec{k}}|$ sigue una distribución gaussiana centrada en cero y de varianza $\sigma^2(k) = P(|k|)$. Evaluaremos el espectro de potencias $P(|k|)$ en el valor de la magnitud de los \vec{k} . Mientras que la fase seguirá una distribución uniforme $\mathcal{U}(0, 2\pi)$. Con estos 2 elementos habremos construido el campo $\delta_{\vec{k}}$ y aplicándole la TIF tendremos $\delta_{\vec{r}}$.

Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier Discreta n-dimensional se calcula usando el algoritmo de Transformada de Fourier rápida (FFT) de la librería de Scipy [46]. Ilustraremos su funcionamiento para 1 dimensión aplicado a una pareja de funciones conocidas y se sigue la generalización para n dimensiones. Esperamos que este ejemplo ilustre el uso de esta función, ya que la convención de Python del orden de los modos ν del espacio de Fourier es no trivial.

La función `scipy.fft.fft(x)` calcula la Transformada de Fourier en 1 dimensión. De forma que, considerando a x como un vector, `fft` es equivalente a:

$$y[k] = \text{np.sum}(x * \text{np.exp}(-2j * \text{np.pi} * \nu * \text{np.arange}(n) / n))$$

Su contraparte es la transformada de Fourier Inversa Discreta 1-dimensional, y se calcula con `scipy.fft.ifft`. La forma más sencilla de ejecutarla es aplicar `ifft` a un vector al que previamente se le haya calculado la Transformada de Fourier con `fft`. Esto es porque `ifft` ha sido programada para calcular la función inversa de `fft` i.e., `ifft(fft(x)) == x`, dentro de la precisión numérica.

En nuestro caso calcularemos la transformada inversa a un campo $y[\nu]$ que nosotros mismos construiremos ($\delta_{\vec{k}}$), por lo que debemos asegurarnos que tenga el mismo orden que la salida de `fft`, esto es:

- `y[0]` debe contener el término de frecuencia cero por es el valor promedio del campo,
- `y[1:n//2]` debe contener los términos de frecuencia positiva,
- `y[n//2+1:]` debe contener los términos de frecuencia negativa, en orden ascendente a partir de la frecuencia más negativa.

Para ver en acción estas funciones tomemos como ejemplo la pareja de fun-

ciones analíticas,

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -T \leq t \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad (3.3)$$

y

$$F(\omega) = \frac{2 \sin \omega T}{\omega}, \quad (3.4)$$

donde $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$ y ésta última a su vez es la transformada inversa de $F(\omega)$. Podemos comparar sus valores analíticos con los calculados por `Scipy`, como vemos en la fig. 3.2.

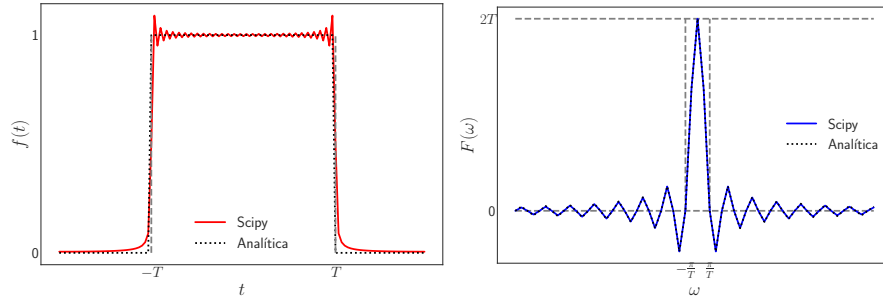


Figura 3.2: Función escalón (izq.) y seno cardinal (der.) evaluadas en los mismos puntos tanto de forma analítica como usando el método de FFT a través de la paquetería de `Scipy`.

La generalización a N dimensiones la hacemos con la Transformada de Fourier Discreta N -dimensional con la función `scipy.fft.fftn`, cuya salida es análoga a la de `fft`. A su vez la función `scipy.fft.ifftn` calcula la Transformada de Fourier Inversa Discreta en N dimensiones de la misma forma que su versión en una dimensión, `ifftn (fftn (x)) == x` y por lo tanto se deben tener las mismas consideraciones de orden sobre un arreglo $y[\nu]$ para aplicar `ifftn(y)`.

Espacio de Fourier

Cada una de de las coordenadas los vectores $\vec{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$ del espacio de Fourier podrá ser evaluada en alguna de las frecuencias de muestreo $2\pi\nu_i$ del arreglo generado por la función

$$\vec{\nu} = \text{scipy.fft.fftfreq}(T, n),$$

donde $T = L/n$ es el tamaño de pixel en el espacio físico y n es el número de pixeles de la malla de longitud L . Por lo tanto, el espacio de los vectores \vec{k} tendrá $n \times n \times n$ elementos, así como los valores mínimo y máximo de los modos k estará definido en función del tamaño de la caja por

$$k_{\min} = \frac{2\pi}{L} \quad \text{y} \quad k_{\max} = \frac{n\pi}{L}. \quad (3.5)$$

Remarcamos que la diferencia entre \vec{k} y $\vec{\nu}$ es un factor de 2π , porque Scipy espera un vector como $\vec{\nu}$ para evaluar las transformadas discretas (sin el factor), mientras que CAMB evalúa el espectro de potencias entre los valores de k_{\min} y k_{\max} , los cuales deben incluir un factor de 2π . La ventaja de usar la función `fftfreq` es que ordena las frecuencias de muestreo en el mismo orden de salida de la función `fft` por lo que es posible evaluar directamente la función `ifft`.

La magnitud de los vectores \vec{k} usando la norma euclidiana es

$$|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad k_x, k_y, k_z \in 2\pi\nu, \quad (3.6)$$

de forma que la norma más pequeña distinta de cero que usaremos es $k_{\min} = 2\pi\nu_{\min}$ y la máxima $k_{\max} = \pi/\sqrt{3}\nu_{\max}$. Estos valores serán importantes para evaluar en la siguiente sección el espectro de potencias de la materia sobre las magnitudes de \vec{k} .

Espectro de potencias de la Materia

Ya que el contraste de densidad de la materia que generaremos es para el universo temprano a grandes escalas, podemos aproximar el espectro de potencias de la materia $P(k, z)$ a simplemente su contribución lineal $P_L(k, z)$. Además, al centrar nuestro análisis en la época de dominación de la materia, usamos un universo EdS, y el factor de crecimiento es $D_+(a) = a$, por lo tanto las sobredensidades evolucionan como $\delta_m(\vec{k}, a) \propto a$ [10]. De esta forma podemos comparar espectros de potencias a diferentes corrimientos al rojo como:

$$P_L(z_f) = P_L(z_i) \left(\frac{z_f + 1}{z_i + 1} \right)^2 \quad (3.7)$$

Esta última relación es muy útil para verificar que suponemos linealidad en los corrimientos al rojo adecuados, como hemos hecho en la figura 3.3.

El espectro de potencias de la materia calculado por CAMB tiene unidades de $(h^{-1}\text{Mpc})^3$ y su parte lineal se obtiene con las instrucciones:

- Solicitar que no se hagan las correcciones no lineales al espectro de potencias de la materia con `pars.NonLinear = model.NonLinear_none`.
- Guardar los cálculos en `results = camb.get_results(pars)`.
- Acceder específicamente a los resultados del espectro de potencias indicando los parámetros k_{\max} , k_{\min} y el número de puntos n a calcular en la función `results.get_matter_power_spectrum(minkh, maxkh, npoints)`.

En los resultados tendremos kh , z , pk . En kh se guardan las magnitudes de vectores \vec{k} similares a los vectores que hemos construido y sus unidades son $h^{-1}\text{Mpc}^{-1}$. Sin embargo, nos interesa reportarlas en las mismas unidades que $1/L$, es decir, $h\text{Mpc}^{-1}$, por eso indicamos `minkh = $k_{\min}h^2$` y `maxkh = $k_{\max}h^2$` . Además multiplicamos el arreglo kh por h^2 para tener las unidades deseadas.

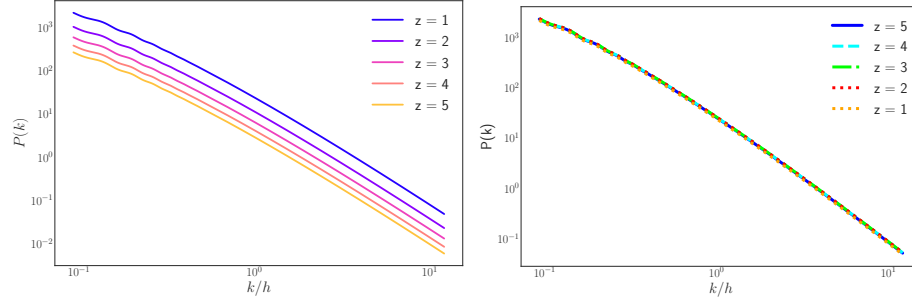


Figura 3.3: A la izq. tenemos la gráfica del espectro de potencias de la materia comparando distintos valores de z . En la derecha hemos evolucionado espectros de potencias que parten de distintos corrimientos al rojo hasta $z = 1$ haciendo uso de ec. 3.7 y como es de esperarse las gráficas se sobreponen.

Otro punto importante de estos resultados es que necesitaremos evaluar $p_{\vec{k}}$ en cada una de las magnitudes de los vectores \vec{k} que construimos y que no coinciden exactamente con kh . Por esta razón, usamos la función `InterpolatedUnivariateSpline` para interpolar $p_{\vec{k}}$ usando un spline cúbico.

Ahora contamos con todos los elementos necesarios para construir contraste de densidad en el espacio de Fourier. Guardaremos las perturbaciones $\delta_{\vec{k}}$ en un arreglo `dk` de $n \times n \times n$ elementos, donde la entrada $\{i, j, k\}$ será evaluada en:

$$P(\{|k_i, k_j, k_k\}) \times \mathcal{N}(0, 1) \times \exp(i \mathcal{U}(0, 2\pi)).$$

Para cumplir con representación del espectro de potencias en el régimen lineal usaremos en corrimiento al rojo $z = 100$ para calcularlo. Los valores para cada uno de los elementos de la malla tridimensional de la distribución gaussiana que nos dará la magnitud y la distribución uniforme que nos da las fases, los calculamos usando la rutina de números aleatorios de Numpy (`numpy.random`) con las funciones `normal(size=(n, n, n))` y `2π*uniform(size=(n, n, n))`, respectivamente. El ángulo de la fase θ se guarda como un número complejo $e^{i\theta}$ con la función del módulo `cmath`, `exp(complex(0, θ))`. Finalmente nos aseguramos que las perturbaciones cumplan con la condición de realidad, $\delta_{-\vec{k}}^* = \delta_{\vec{k}}$,

$$\text{dk}[-i, -j, -k] = \text{np.conj}(-\text{dk}[i, j, k])$$

y que el promedio del arreglo final $\delta_{\vec{\tau}}$ sea cero

$$\text{dk}[n//2, n//2, n//2] = 0.$$

Tras aplicar la Transformada Inversa de Fourier N-dimensional, descrita con anterioridad, al arreglo `dk` tendremos un contraste de densidad de la materia como el de la figura 3.4.

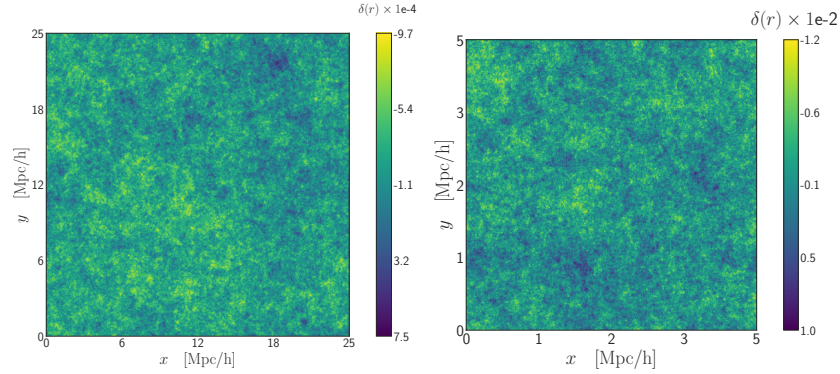


Figura 3.4: Corte 2D de las simulaciones del contraste de densidad de la materia en un corrimiento al rojo $z = 100$, ambas mallas tienen 500 píxeles de lado. En la imagen de la izquierda tenemos una realización con un tamaño de píxel de $10^{12} M_{\odot}$, mientras que a la derecha la resolución es de $10^{10} M_{\odot}$. Notemos que la variación del contraste de densidad de la materia es dependiente de la escala.

3.1.2. Conjunto de Excursión

Para explorar el contraste de densidad usamos un conjunto de caminantes que pueden partir de posiciones aleatorias o bien de máximos locales (donde se formarán los primeros halos de materia oscura), y a partir de ahí avanzan hasta R_0 . Los caminantes se mueven en pasos representados por cascarones concéntricos de 2 píxeles de grosor y guardan el contraste de densidad promedio adentro de cada *bola* explorada. El sentido en el que llamamos a su recorrido una caminata aleatoria es debido a que los valores encontrados de la densidad promedio de cada cascarón *explorado* (no generado) varían de forma aleatoria.

Posiciones Iniciales

Al explorar alrededor de posiciones aleatorias, las caminatas nos mostrarán un panorama general de las estructuras contenidas en el contraste de densidad. Mientras que las caminatas que parten de máximos nos darán información importante para establecer una relación de sesgo entre las zonas de alta densidad y sus alrededores.

Máximos Locales

Encontramos estos puntos críticos usando el submódulo `ndimage` de la librería de `Scipy`. En ella, la función `maximum_filter` nos ayuda a procesar rápidamente nuestra imagen 3D del contraste de densidad y nos devuelve el valor máximo dentro de una caja de exploración. Hemos buscado los máximos en cajas con condiciones periódicas a la frontera, cuyo lado es el doble del radio de un halo de $10^{15} M_{\odot}$. Luego, hemos filtrado las posiciones del contraste de densidad donde se encuentran los valores de los máximos encontrados y así tenemos los máximos locales. Finalmente, ordenamos los máximos locales de forma que los

primeros en evaluar son aquellos de mayor valor en la sobredensidad.

Posiciones aleatorias

Para generarlas simplemente creamos una función que nos regresa un número específico N de posiciones aleatorias adentro de un cubo de (n, n, n) , donde n es el número de píxeles por lado usando la función `numpy.random.randint`.

Caminos

La parte esencial de nuestro trabajo, son las caminatas aleatorias. Con ellas caracterizamos la variación de la densidad en cascarones concéntricos de un mismo grosor. Esta información acoplada a la teoría de colapso esférico, puede ser usada después para saber si ha habido formación de halos y sus masas, para hablar de la posible historia de formación o bien para calcular el sesgo de los halos de materia oscura dentro de la región explorada.

En el código calculamos las caminatas con la función `caminantes`, la cual está compuesta por tres funciones anidadas, como vemos en el diagrama 3.5. En

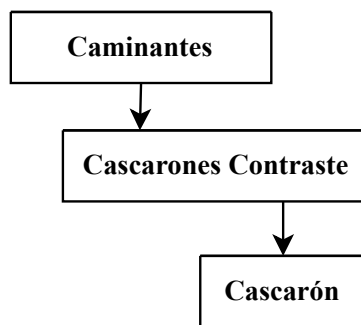


Figura 3.5: Estructura general del código que guarda las caminatas aleatorias

la estructura más baja tenemos una función, `Cascarón`, que calcula el valor promedio del contraste de densidad en cada anillo. Luego tenemos una función que se encarga de evaluar sobre todos los anillos y recopilar la información, `cascarones Contraste`, y en la parte más alta de la jerarquía tenemos la función `Caminantes` que organiza la información y la devuelve de forma manejable para el usuario. A continuación mencionaremos con más detalle los elementos que las componen.

`Cascarón`

En esta función construimos cada uno de los cascarones de exploración y luego los trasladamos al puntos de partida de cada caminante, ver fig. 3.6 (izq). Para construir cada cascarón necesitamos:

- Centro de los anillos. Este se caracteriza por tener la coordenadas del radio máximo de exploración.
- Caja de exploración. Para hacer que el código sea más rápido, en lugar de

explorar todo el espacio para seleccionar los elementos que se encuentran adentro de cada cascarón, construimos una caja que lo contenga. Esta caja está en color gris en el diagrama de la izq. de la fig. 3.6.

- Cascarón. Cada cascarón está compuesto por la intersección de dos esferas. Siendo r el radio del cascarón, la esfera mayor tiene radio $r + dr$ y la menor $r - dr$, donde dr es el tamaño de píxel. Buscamos si un píxel pertenece o no al cascaron únicamente adentro de la caja de exploración del punto anterior. Este cascarón se ve en color rojo en la figura de la izquierda en 3.6.

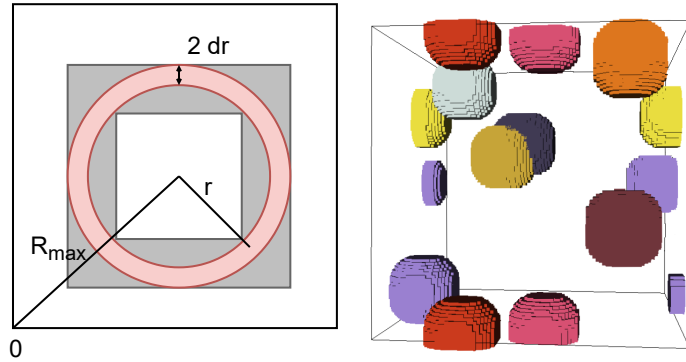


Figura 3.6: (izq.) En lugar de buscar en todo el volumen del contraste de densidad, exploramos únicamente en la caja representada por la región gris si los píxeles pertenecen o no al cascarón rojo. Por claridad, en este ejemplo el cascarón a construir no es el del radio máximo por lo que es más sencillo entender la importancia de centrar cada uno de los cascarones en $(R_{\max}, R_{\max}, R_{\max})$ para que todos sean concéntricos. (der.) 10 bolas de exploración de radio 10 Mpc/h en una caja cúbica de 100 Mpc/h de lado, con condiciones periódicas a la frontera. El centro de cada bola representa el punto de partida de un caminante.

Cada cascarón se construye sólo 1 vez, pero se evalúa N veces (una vez por caminante). Para ello, se traslada el cascarón a la posición inicial del caminante y ahí se calcula la densidad promedio y el número de píxeles del cascarón. Es posible que algunos de los píxeles de los cascarones se salgan del contraste de densidad, por lo que usamos condiciones periódicas a la frontera, como vemos en la figura 3.6 (der).

Cascarones

En esta función se calculan los radios de los cascarones a explorar según el tamaño del radio máximo de exploración y el tamaño del píxel. El tamaño de píxel se define como el tamaño físico de la malla 1D entre el número de píxeles por lado, L/n . También recordemos que los cascarones tienen solamente 2 píxeles de grosor, de forma que en un corte 2D los anillos que veríamos serían como en la

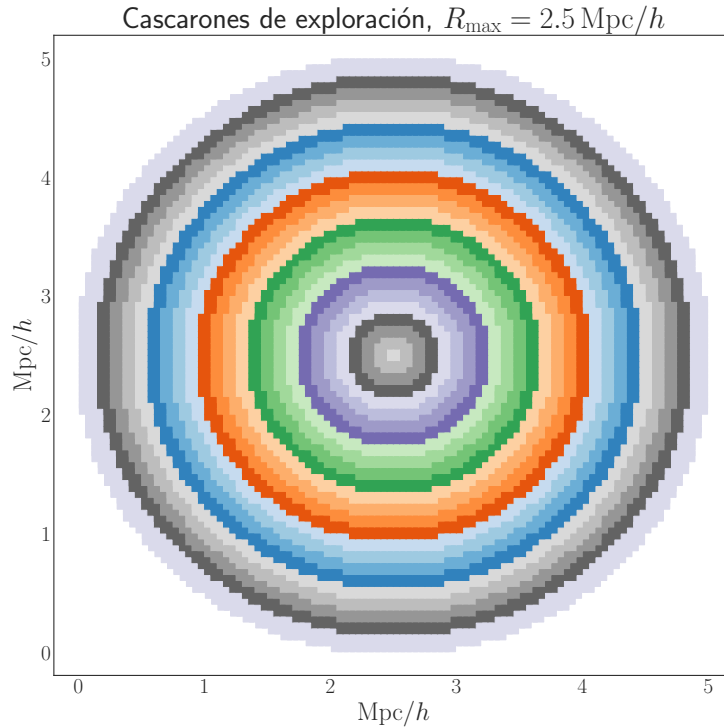
fig. 3.7. Para cada uno de los radios estimados la función `cascarones` ejecuta

Figura 3.7: En la figura vemos cada uno de los anillos calculados en la función `cascarones` donde se explorará el valor de la densidad promedio. Notemos que podemos ver ejemplificados varios puntos claves del código mencionados con anterioridad. Recordando la figura 3.6, vemos que efectivamente los anillos tienen grosor de 2 píxeles y que los cascarones se encuentran centrados en el radio máximo de exploración que en este caso es 2.5 Mpc/h.

la función `cascarón` y guarda un arreglo de los radios, número de píxeles y la densidad promedio por número de píxeles de cada cascarón. Este último resultado se guarda así para poder calcular el promedio de la densidad en las *bolas*.

Caminantes

El objetivo de esta función es regresar la densidad promedio adentro de las bolas de cada uno de los radios para todos los caminantes, en la fig. 3.8 vemos la gráfica de un caminante que parte de un máximo y otro que parte de una posición aleatoria. Esto se logra fácilmente haciendo dos arreglos de sumas acumulativas. La primera suma se hace sobre el número de píxeles en cada uno de los cascarones, de forma que es el número de píxeles en cada bola. La segunda suma se hace sobre la densidad promedio por número de píxeles de cada cascarón, por lo que el arreglo de la suma es la suma de todos los valores de la

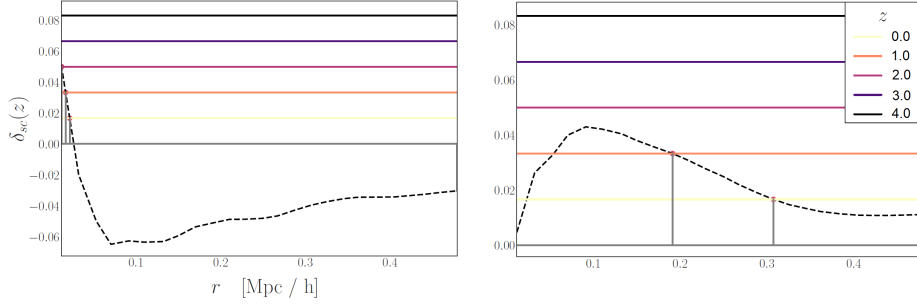


Figura 3.8: Al lado izquierdo vemos un caminante que parte de un máximo y marcamos en rojo la intersección entre el valor del contraste de densidad $\delta_{sc}(z)$ y el valor de la barrera de colapso en cada corrimiento al rojo, esto nos permite conocer el tamaño de la región colapsada indicada por el eje horizontal. A la derecha vemos un caminante que parte de una posición aleatoria en el contraste de densidad y también marcamos su tamaño en cada corrimiento al rojo.

densidad en cada bola. Entonces para obtener el valor promedio de la densidad en cada bola, basta con dividir el segundo arreglo entre el primero. Para mayor claridad, veamos un sencillo ejemplo de estas operaciones para 1 caminante que avanza 4 pasos en el cuadro 3.2 y su continuación en 3.3:

R	P_c	$\overline{\delta\rho_c}$
2	27	1.6
4	216	0.9
6	804	0.3
8	1184	0.2

Cuadro 3.2: En la tabla vemos los resultados de evaluar la función `cascarón` aplicada a 1 caminante en 4 radios distintos. Los resultados de esta función son el número de píxeles P_c y la densidad promedio $\overline{\delta\rho_c}$ de cada cascarón, es decir cada renglón es una aplicación de `Cascarón`. La función `cascarones_contraste` es la que se encarga de iterar esa función en todos los radios, por lo que en este ejemplo crea las columnas.

Finalmente la función `caminantes` regresa un arreglo con los radios y otro con la densidad promedio en la bola de cada radio de exploración para cada uno de los caminantes.

$\sum_{l=P_c}^{l=P_c} \delta_{cl} =$ $\bar{\delta}_c \times P_c$	$P_{bj} =$ $\sum_{i=j}^{i=j} P_{ci}$	$\sum_{l=P_{bj}}^{l=P_{bj}} \delta_{bl} =$ $\sum_{i=j}^{i=j} \sum_{l=P_{ci}}^{l=P_{ci}} \delta_{cil}$	$\bar{\delta}_{\rho_b} =$ $\frac{1}{P_{bj}} \sum_{l=P_{bj}}^{l=P_{bj}} \delta_{bl}$
43.2	27	43.2	1.6
194.4	243	237.6	0.98
241.2	1047	478.8	0.46
236.8	2031	715.6	0.32

Cuadro 3.3: Continuando con la información del cuadro anterior, tenemos en la primera columna la suma del valor de la perturbación a la densidad de materia en cada píxel δ_c y para cada uno de los cascarones (cada renglón). Esta información se recupera simplemente al multiplicar la densidad promedio del cascarón $\bar{\delta}_c$ por su número de píxeles P_c . En la segunda columna tenemos el número de píxeles en cada una de las bolas P_b , esta es la suma acumulativa del número de píxeles de los cascarones adentro de la misma. En la tercera columna tenemos la suma de los valores de la perturbación en todos los píxeles de cada bola, para ello se hace la suma acumulativa de los valores de las perturbaciones en cada cascaron contenido en la misma. Finalmente ya que hemos sumado las contribuciones de la perturbación de cada uno de los píxeles adentro de cada bola, al dividir entre el número de píxeles de esta tenemos la densidad promedio de la perturbación de la bola. Notemos que dicho valor, tiende a cero cuando usamos radios cada vez mayores. Al igual que en el cuadro anterior, la función `cascarones` itera sobre todos los radios y además realiza y regresa la operación de la primera columna. La función `caminantes` realiza las operaciones de la 2da y 3ra columna, y regresa los valores de la 4ta columna.

Pixeado de los Cascarones

Debemos recordar que al aplicar la teoría de forma aproximada es posible que no obtengamos los valores que se esperan en el caso ideal. En nuestro caso no estamos explorando el espacio en cascarones sino en un conjunto de píxeles que aproximan cascarones. Por lo que posiblemente tendremos un error que dependa del número de píxeles usados para muestrear cada cascarón. Además debemos tomar en cuenta que el radio promedio del cascarón r no encierra la mitad de su volumen, por lo que de asumirlo de esta forma vamos a tener un error que se propague de forma proporcional al tamaño del radio. En la figura 3.9 vemos cómo una mala interpretación de los datos nos llevaría a considerar que hay un error en la estimación del volumen de las esferas.

Si bien el volumen en los cascarones pixeleados (proporcional al número de píxeles) no es representado por el radio r , los cálculos como los promedios son correctos porque se hacen sobre el número de píxeles, así las gráficas de la figura 3.9 son iguales en todas las escalas. Para asignar el valor correcto del radio de cada cascaron, un primer paso es calcular *el radio equivalente* r_e . Este es el radio promedio del radio mínimo y el radio máximo de un cascarón que encierra el mismo volumen que el cascarón pixeleado. Es decir, el radio equivalente, r_e es

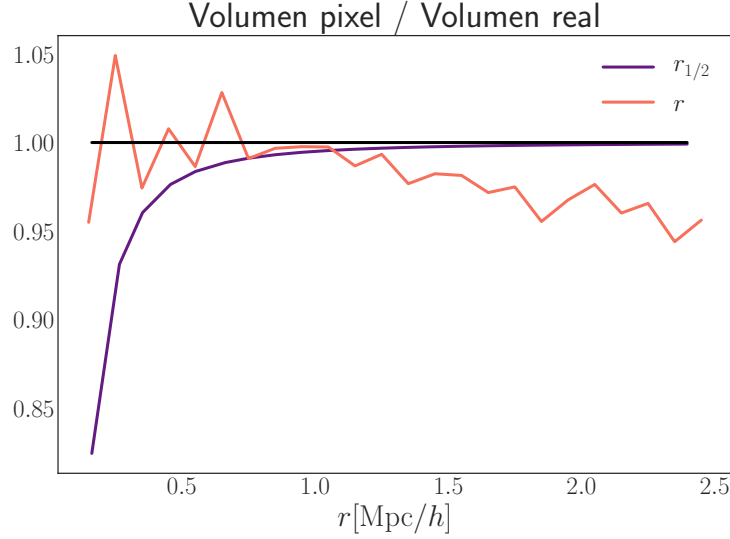


Figura 3.9: Gráfica del volumen de los cascarones pixeleados V_{pix} , entre el volumen real V_{real} que esperaría para cada radio. La convergencia del volumen es independiente de la resolución de píxel, ya que obtenemos esta misma gráfica para $L_{10}/n = R(M = 10^{10} M_{\odot})$ y $L_{14}/n = R(M = 10^{14} M_{\odot})$. Es posible que esta relación cambie al modificar el número de píxeles en el grosor de los anillos de exploración.

aquel que cumple

$$V_{\text{pix}} = V_{r_e} = \frac{4\pi}{3} [(r_e + dr)^3 - (r_e - dr)^3], \quad (3.8)$$

por lo tanto es igual a

$$r_e = \sqrt{\left| \frac{c - 2 dr^3}{6 dr} \right|}, \quad c = \frac{V_{\text{pix}}}{4\pi/3} \quad \text{y} \quad dr = L/n. \quad (3.9)$$

Sin embargo esta versión del radio equivalente se construye sobre el radio medio:

$$\bar{r} = \frac{r_{\text{min}} + r_{\text{max}}}{2}, \quad (3.10)$$

que no es adecuada para representar al volumen. Para ello, es mejor usar el radio $r_{1/2}$ que encierra a la mitad del volumen del cascaron $V_{1/2}$, este se relaciona con el radio promedio, \bar{r} como:

$$\frac{1}{2} V = \frac{2}{3} \pi (r_{\text{max}}^3 - r_{\text{min}}^3) = \frac{4}{3} \pi (r_{\text{max}}^3 - r_{1/2}^3), \quad (3.11)$$

recordando que $r_{\text{max}} = r + dr$ y $r_{\text{min}} = r - dr$,

$$r_{1/2} = \sqrt[3]{3dr^2 r + r^3}. \quad (3.12)$$

En la fig. 3.9 vemos que al usar el radio correcto $r_{1/2}$ el volumen converge al aumentar el número de píxeles.

Masa de los Halos

Al tener las caminatas aleatorias, ver figuras 3.13 y 3.14 , el siguiente paso es asignar una masa de halo colapsado dependiente del valor del contraste de densidad y el corrimiento al rojo de interés. Esta masa será aquella encerrada por el radio donde la caminata y la barrera móvil de la teoría de colapso esférico se intersecten. Esta asignación de la masa es equivalente a definir los halos de materia oscura como aquellas regiones cuya densidad sea 178 veces el valor de la densidad promedio.

Contraste de densidad crítico (`delta_sc`)

De acuerdo a la aproximación lineal del modelo de colapso esférico, el valor que deberán alcanzar las sobredensidades para formar estructuras es una barrera constante (1.68) donde el contraste de densidad evoluciona como la solución de crecimiento lineal, $D(t)$, que mostramos en la ec 2.24. Sin embargo para hacer la visualización más sencilla, podemos dejar fijos los valores de contraste de densidad encontrados en las caminatas y en cambio evolucionamos la barrera como $D(t)^{-1}$. Para ello, hemos creado una función, `delta_sc`, que nos da los valores de la barrera para los corrimientos al rojo z_f considerando que los valores del contraste de densidad de la caminata corresponden a una realización generada z_i . Entonces,

$$\delta_{sc}(z_f) = 1.68 \frac{z_f + 1}{z_i + 1}. \quad (3.13)$$

Esta función nos será de gran ayuda para establecer una cota que los caminantes deben superar para formar estructuras en cualquier corrimiento al rojo deseado.

`primeros_cruces`

Con esta función interpolamos linealmente el radio de intersección entre cada caminata y cada una de las barreras de interés, lo que nos permite asociar una masa de halo colapsado. En realidad hay 4 formas distintas en las que una caminata puede cruzar una barrera, pero solo nos interesa el cruce que se hace de abajo hacia arriba y en la dirección de radios grandes hacia radios pequeños. Este tipo de cruce es el que representa adecuadamente el modelo de formación de estructuras jerárquico de la materia oscura fría, donde recordemos primero se forman las estructuras más pequeñas y luego, al acretar materia, se forman estructuras cada vez mayores. La función de `primeros_cruces` tiene como argumentos los radios de las caminatas, los valores del contraste de densidad alrededor de cada caminante y las barreras. Devuelve una matriz donde guardamos el radio de cruce de cada caminante con cada barrera, en caso de que no haya colapso regresa el valor $R = 0$ en la caminata en cuestión. Con estos radios, podemos asociar una masa a cada halo formado como:

$$M(R, z) = \frac{4\pi}{3} (R * h)^3 \rho_{crit}(z) \quad (3.14)$$

donde la masa está en unidades de M_{\odot} y el argumento R en Mpc/h . En particular en $z = 100$, que es el corrimiento al rojo en el cual generamos nuestra simulación, $\rho_{\text{crit}}(z = 100) = 4.258 \times 10^{16} M_{\odot} \text{Mpc}^{-3}$.

sesgo

Esta función prepara la información necesaria para realizar la gráfica del sesgo contra masa de halo colapsado. Para ello, se aplica la función primeros cruces a los caminantes que parten de máximos y a una barrera en z_0 . Luego, se depuran las caminatas que no colapsaron y se calculan las masas de los halos formados. Por otro lado, en cada caminata donde hay formación de halos se guarda y evoluciona el contraste de densidad a grandes escalas, δ_{LS} , de cada halo desde $z_i = 100$ hasta $z_f = z_0$ como:

$$\delta_{LS}(z = z_0) = \delta_{LS}(z = 100) \left(\frac{100 + 1}{z_0 + 1} \right). \quad (3.15)$$

Finalmente, agrupamos los halos por rango de masa (cuyo valor promedio reportamos) y se les asocia el error de la desviación estándar del contraste de densidad a grandes escalas.

3.2. Discusión de Resultados

A continuación describimos e interpretamos algunos de los resultados que obtuvimos al aplicar nuestro código para generar y explorar el contraste de densidad de la materia en $z = 100$ con una resolución de píxel de $10^{12} M_{\odot}$ y tamaño de caja de $L = 25 \text{Mpc}/h$. Encontramos que los halos de materia oscura de mayor masa y en corrimientos al rojo tardíos se encuentran rodeados por un ambiente de sobredensidad a grandes escalas. Además con las caminatas individuales del conjunto de excursión obtuvimos las historias de formación, que nos dan una idea de lo variada que es la formación de estructuras contemplando información como la época inicial de la acreción de materia, posibles fusiones de halos y radios iniciales y finales.

3.2.1. Contraste de densidad de la Materia

Las perturbaciones de la simulación del campo de densidad de la materia que realizamos en $z = 100$ varían de acuerdo a la resolución del píxel. Como es de esperarse, entre mayor sea el tamaño del píxel menor será la varianza del contraste. Esto lo podemos ver en la fig. (3.4), este comportamiento puede explicarse considerando que nuestro universo es homogéneo a grandes escalas, por lo que si tuviéramos un píxel de 100 Mpc de lado no veríamos variaciones en el contraste de densidad.

La variación del contraste de densidad en el espacio real medida por el conjunto de excursión alrededor de posiciones aleatorias tiene promedio $\bar{\delta} = 0$ y su varianza disminuye conforme aumenta el volumen de la región explorada, lo

cual es un comportamiento esperado para un universo homogéneo a grandes escalas ($r > 100\text{Mpc}^{-1}$). Este resultado lo vemos reportado en las distribuciones del contraste de densidad en la gráfica de la derecha de la figura 3.10. En la gráfica de la izquierda se muestra la distribución del contraste de densidad de aquellos caminantes que parten de máximos locales, hablaremos más a detalle en un futuro.

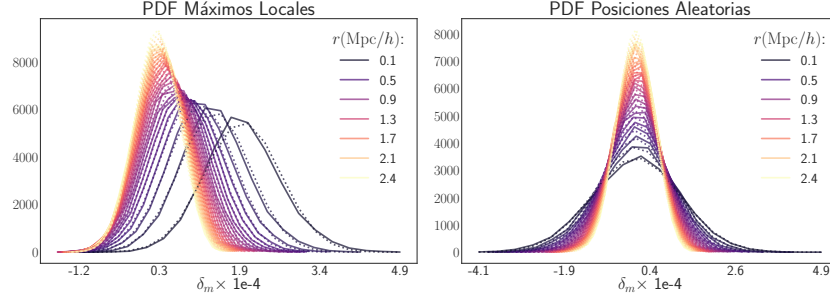


Figura 3.10: En el histograma de la izquierda, vemos las distribuciones del contraste de densidad encontrado por los caminantes que parten de los máximos a distintos radios. Como es de esperarse en los radios más pequeños tenemos un promedio mucho mayor al que encontramos cuando la región de exploración se extiende hasta radios cada vez mayores. Entre mayor sea el radio de exploración, el promedio tenderá al promedio de la caja de simulación que es cero. En la derecha tenemos a los caminantes que parten de regiones aleatorias y las distribuciones del contraste de densidad que encontraron para los mismos radios que los caminantes de los máximos. En este caso, todas las distribuciones están centradas en cero.

Es posible calcular la varianza del contraste de densidad en el espacio real usando los resultados de las caminatas que parten de regiones aleatorias.

Su valor lo estimamos en cada uno de los anillos explorados como,

$$\sigma^2(r_0) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\delta_i(r_0) - \bar{\delta}(r_0))^2, \quad (3.16)$$

donde r_0 es el radio en el que se calcula la varianza del contraste de densidad y cada uno de los N caminantes reporta un valor $\delta_i(r_0)$ de la misma. Luego para compararlo con el valor que calcula CAMB [31],

$$\langle \delta^2(r_0) \rangle = \int dk k^2 P(k) W^2(k r_0), \quad (3.17)$$

donde $W(k r_0)$ es la transformada de Fourier de la función ventana de una esfera de radio r_0 . A éste último le aplicamos un spline cúbico evaluado en los radios corregidos que graficamos en la figura (3.9). Así vemos en la figura 3.11 que los caminantes estiman la varianza del contraste de densidad generado con CAMB

con una precisión cercana al 95% en las regiones más grandes exploradas. El extremo inferior de la varianza tiene una precisión similar a la que obtenemos en el cálculo del volumen, es decir 82%, por lo que es posible que a pequeñas escalas la precisión de nuestro código se deba a la pixelización de los cascarones. Sin embargo el error del 5% que tenemos en el extremo superior podría tener otro origen distinto al de la pixelización pues el volumen converge a grandes escalas. Un primer paso para explorar el origen de este error, podría ser aumentar el número de caminantes para tener una muestra más robusta al calcular la varianza. Si se sospecha que el error se debe a la pixelización, se podría mejorar la resolución de pixel, así como el número píxeles de grosor de cada uno de los anillos de exploración. De cualquier forma, el conjunto de excursión tiende a estimar de forma correcta la varianza a más grandes escalas, por lo que esto nos da una medida de que es un método confiable para explorar el contraste de densidad.

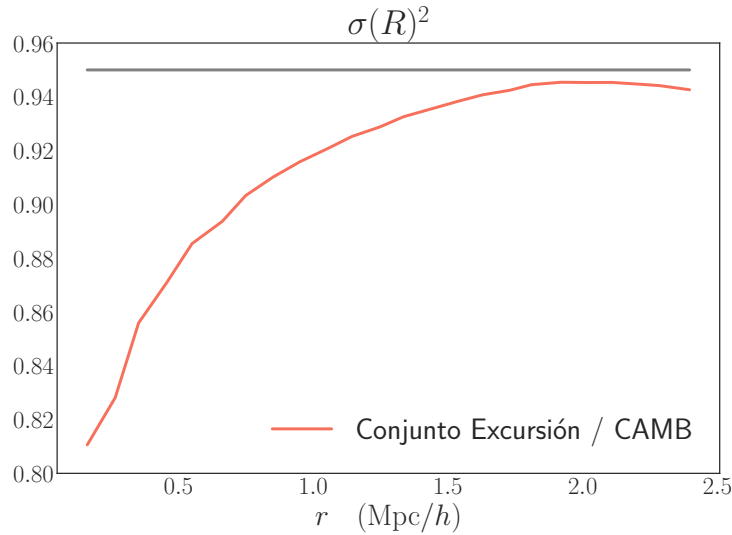


Figura 3.11: En la gráfica comparamos la varianza calculada con nuestro método y aquella calculada de forma teórica por CAMB

3.2.2. Historias de Formación

Hemos usado dos conjuntos de excursión para explorar nuestro contraste de densidad, uno que parte de regiones de sobredensidad y otro que parte de posiciones aleatorias. En la figura 3.12 podemos verlos a la izquierda y a la derecha, respectivamente.

Estas caminatas son el resultado de evaluar la función caminantes, que reporta el valor promedio del contraste de densidad adentro de bolas del radio indicado, mientras que las barras de colores son las cotas que deben superar estas

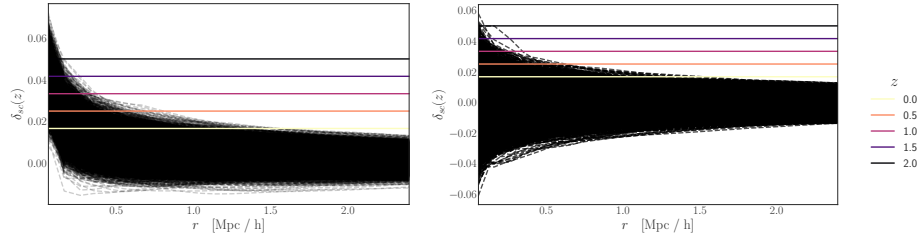


Figura 3.12: Conjuntos de excursión. A la izquierda tenemos caminantes que parten de máximos y a la derecha caminantes que parten de posiciones aleatorias. Estos caminantes reportan el valor del contraste de densidad adentro de los radios indicados en el eje horizontal. Las barras de colores son las barreras que los caminantes deben cruzar para formar estructuras en los corrimientos al rojo indicados. Estos cruces deben realizarse de menor a mayor valor del contraste de densidad y de mayor a menor valor del radio.

caminatas para formar estructuras a distintos corrimientos al rojo de acuerdo a la teoría de colapso esférico aplicada a perturbaciones lineales. Para que la visualización sea más sencilla, el contraste de densidad se reporta constante en lugar de evolucionarlo con el factor de crecimiento lineal y evolucionamos la cota de colapso con el inverso del factor de crecimiento lineal en lugar de mantenerlas constantes en $\delta_{SC} = 1.68$. De esta manera las historias de formación deben ser interpretadas de arriba hacia abajo. También notamos que los caminantes que parten de máximos, efectivamente se encuentran en el lado de valores positivos del contraste de densidad en pequeñas escalas y también siguen esta tendencia en los valores a grande escala, lo que concuerda con la "descomposición del fondo de picos" (PBS). Otra observación de las caminatas que parten de máximos es que los primeros halos de materia oscura que se forman son de menor radio y por lo tanto de menor masa. Este comportamiento es esperado según la función de masa, el modelo jerárquico de formación de estructuras y de acuerdo a las simulaciones de partículas de materia oscura fría.

Con el fin de mostrar cómo pueden caracterizar estas caminatas al espacio y cómo interpretarlas, hemos graficado algunos casos particulares de las mismas en la figura 3.13 y para mostrar con más detalle la formación de estructuras mostramos algunas caminatas con una resolución de píxel $10^{10} M_{\odot}$ en la figura 3.14. Las caminatas deben cruzar las barreras para formar estructuras en los corrimientos al rojo indicados. Los puntos rojos muestran los radios de intersección que siguen un modelo jerárquico (de menor a mayor contraste de densidad y de mayor a menor radio) calculados por la función `primeros_cruces`.

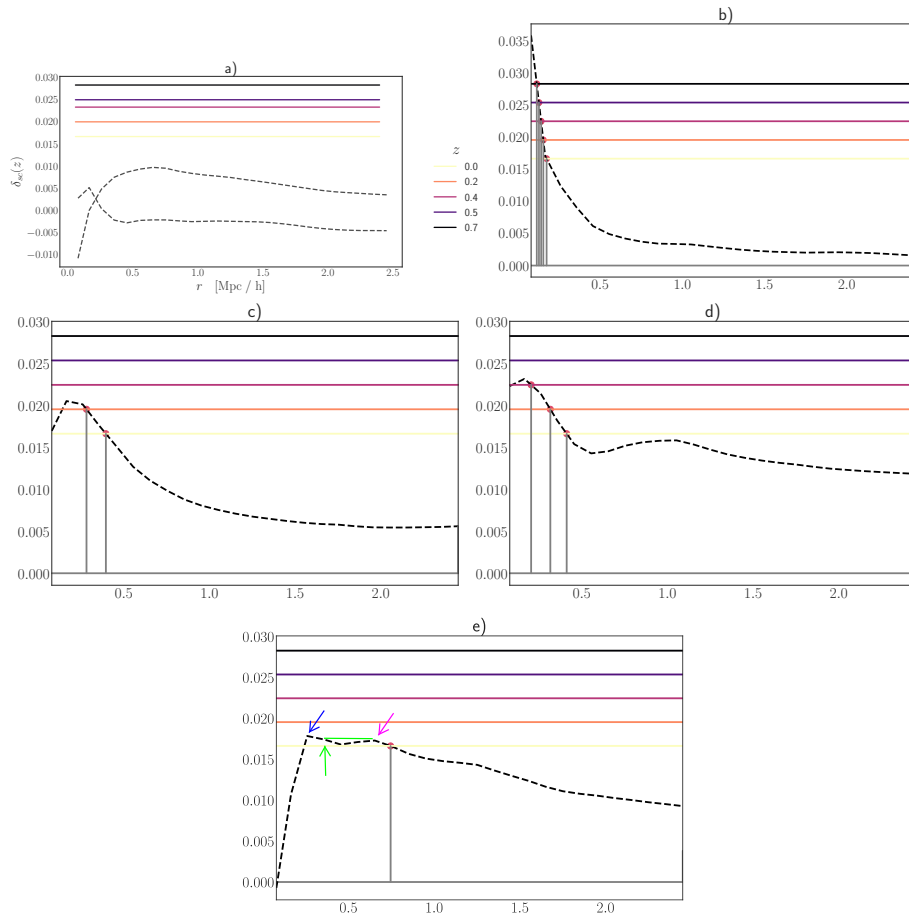


Figura 3.13: Cada una de las gráficas de línea punteada es una caminata que parte de una posición aleatoria en la caja de simulación y avanzan hasta un radio máximo de 2.5 Mpc/h. En el eje y tenemos el valor promedio de la sobredensidad adentro de la bola del radio indicado en el eje x . En color rojo tenemos los puntos de intersección entre las caminatas y el valor mínimo de la sobredensidad para formar estructuras indicado por las barras de colores. a) Estas regiones nunca alcanzaron el valor mínimo necesario para formar estructuras. b) Aquí se acreció materia desde la resolución más pequeña del radio y creció hasta su intersección con la barra $z = 0$. c) El tamaño mínimo de acreción es alrededor del doble de la resolución mínima. Notemos que esta región crece más que la de b) aunque empezó a formarse después. e) La estructura se forma con un radio marcado por la flecha azul y acreta materia suavemente hasta la flecha verde, después hay un colapso masivo donde la masa aumenta hasta el valor del radio en la flecha magenta, finalmente la estructura termina de formarse en el punto rojo.

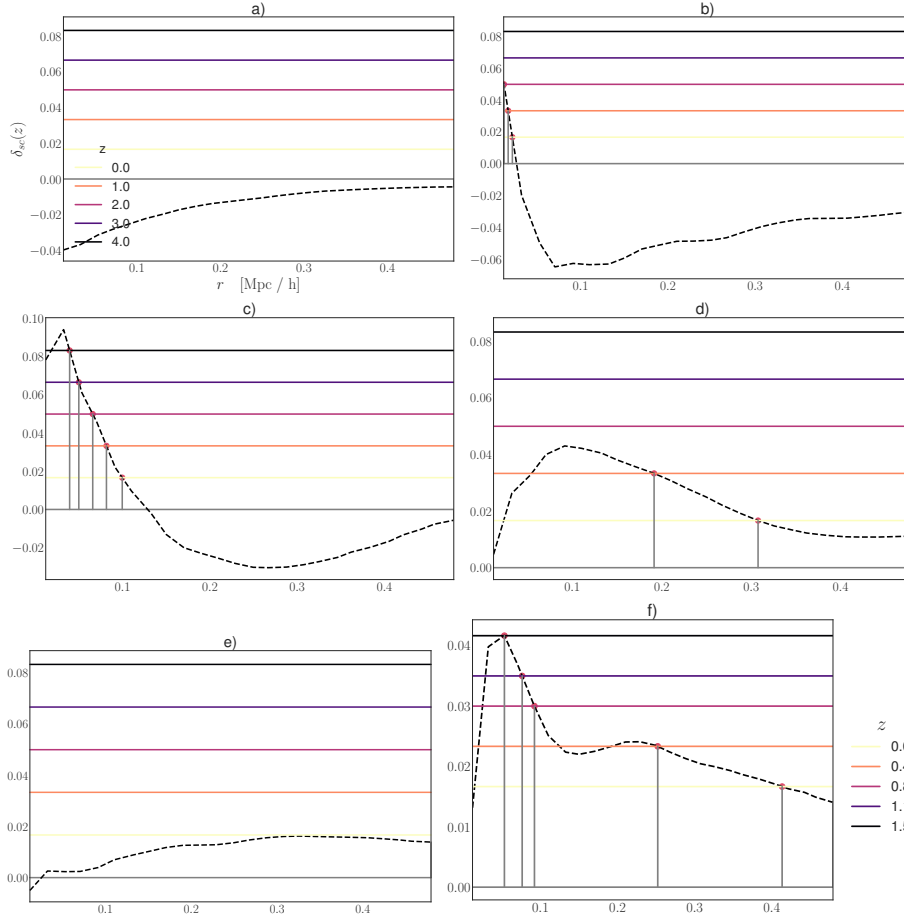


Figura 3.14: Caminatas análogas a las de la figura 3.13 pero con una resolución de $10^{10} M_{\odot}$ para mayor claridad. Las barras de colapso en gráficas de a)-e) están los corrimientos al rojo indicados en a). **a)** Esta región es una subdensidad en todas las escalas por lo que no formará estructuras. **b)** Esta región acreta materia desde la resolución más pequeña del radio y aumentó su tamaño hasta $0.025 \text{Mpc}/h$. **c)** Las estructuras se forman a partir de un radio mayor que la resolución mínima y crecen hasta $0.1 \text{Mpc}/h$. **d)** Respecto a b) y C) esta estructura colapsó a partir de un radio mucho mayor y en menos tiempo, alcanzó un radio de $0.3 \text{Mpc}/h$. **e)** En esta caminata tenemos un cruce que no sigue el modelo jerárquico de formación de estructuras, por lo tanto no lo contamos como estructura. **f)** En este colapso cambiamos el intervalo del corrimiento al rojo para describirlo a detalle. El primer halo de materia oscura se forma con un radio inicial de alrededor $0.05 \text{Mpc}/h$ en $z = 1.5$, luego acreta materia suavemente hasta un poco antes de $z = 0.4$, ahí hay un colapso masivo que hace aumentar el radio de alrededor 0.1 hasta $0.22 \text{Mpc}/h$. Finalmente alcanza un radio de $0.4 \text{Mpc}/h$ en $z = 0$.

Como vemos en las figuras 3.13 y 3.14 las caminatas suelen tener mayor amplitud y tener más variedad en su estructura a pequeñas escalas, que es donde se forman los halos de materia oscura. Luego las caminatas tienden a cero debido a la homogeneidad del universo a grandes escalas. Esto lo podríamos interpretar como el borrado de estructuras que reflejan las simulaciones en épocas tardías. Las caminatas que parten de regiones de sobredensidad son las primeras en colapsar y lo hacen más rápido entre mayor sea el valor de esta. Al ordenar los picos del contraste de densidad por su magnitud, notamos que aquellos de mayor valor también tienen una mayor correlación de Pearson con la distribución de materia a grandes escalas. Este orden permite explorar los halos de materia oscura de manera cronológica empezando con los que colapsaron primero que podría ser útil en el estudio de SHAM. Observamos que los primeros halos en formarse son los que tienen menor masa inicial de todo el conjunto. El conjunto de excursión que partió de posiciones aleatorias nos mostró la gran variedad de estructuras que podemos esperar en la materia oscura, desde regiones que nunca colapsan hasta regiones que en su historia de formación pueden tener múltiples acreciones masivas.

Similitudes entre el Conjunto de Excursión y SHAM

Recordando el trabajo que desarrollamos en [19], ahí sólo usamos la información de PBS para asignar el valor del sesgo de las galaxias tipo LRG respecto a la masa de su halo huésped. Sin embargo este método se puede extender a trazadores que dependen de su ambiente, como las galaxias tipo ELG o los cuásares, usando el conjunto de excursión. Éste último brinda más información que PBS ya que permite explorar las estructuras internas de los halos que colapsan. Esta propuesta podría hacer frente a alguno de los problemas de cómputo de SHAM ya que es más ligera y brinda información similar. Cuando analizamos las caminatas aleatorias en conjunto con las barras que indican el valor del contraste de densidad para que haya colapso, tenemos una descripción de la evolución de la materia en una zona, justo como lo describimos en 3.13 y 3.14. Esto es porque podemos saber si la densidad aumentará o disminuirá respecto al promedio para cierto corrimiento al rojo y a partir de ahí podemos saber si se acreta materia o no.

En SHAM (SubHalo Abundance Matching) podemos conocer las historias de formación a mayor detalle siguiendo el número de subhalos que había en determinada época y cómo estos se fueron fusionando para formar los halos que se observan en épocas más cercanas. Al guardar todos estos datos en cada corrimiento al rojo de interés y para cada halo terminamos con simulaciones muy pesadas. Sin embargo, ofrecen la ventaja de tener una idea de la disponibilidad del gas para formar estrellas y detectar ELGs.

Con el conjunto de excursión podemos saber cómo ha ido cambiando en promedio el número de halos en cada rango de masa y corrimiento al rojo. Comparando esta información con la función de masa de los halos podemos inferir la probabilidad de que una galaxia tipo ELG habite o no un halo de cierta masa en función del cambio del número de halos. Ya que esto sería un indicador de las fusiones

que ocurrieron y su impacto sobre la formación de estrellas. Si bien con nuestro método no es posible conocer la historia de fusión de los halos, si podemos tener una noción del tipo de estructuras que pueden haber en los alrededores. Esto es importante porque nos permitiría diferenciar entre zonas que tienen la misma masa pero el comportamiento de los trazadores en su interior es distinto.

Veamos las caminatas de la fig. 3.15, las trayectorias de las líneas punteadas tienen 2 puntos en común pero la forma en la que llegaron a los mismos es distinta por lo que podrían albergar distintos trazadores. En este ejemplo la caminata de color azul, probablemente inicie su recorrido desde una región de baja densidad que posiblemente albergue galaxias satélites, mientras que la caminata roja quizá parta de una galaxia central. En general, el perfil radial de materia donde habitan las galaxias satélites tiende a ser más denso en las regiones externas, como vemos en la caminata azul. Probablemente, en el máximo local de su contraste, se acreta un halo que contenía a una galaxia central. A partir de ahí la acreción de materia fue suave, por lo que existe la posibilidad de que se acretaran galaxias de poca masa. Así esperamos las galaxias en esta región sean más de tipo satélite.

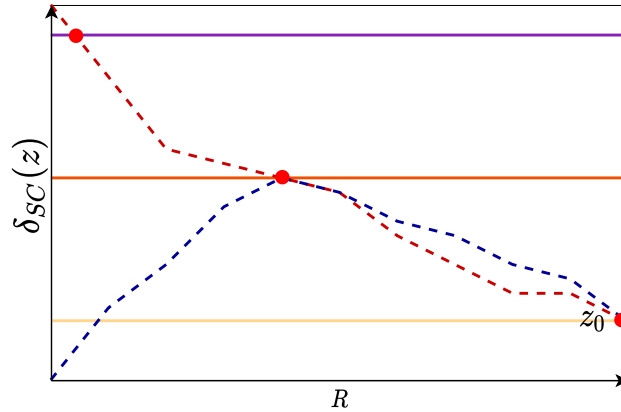


Figura 3.15: Aún cuando dos Halos tengan el mismo radio final, su historia de formación puede ser muy distinta. En el caso de la línea azul notamos que la mayoría de la masa se encuentra en las zonas externas de la caminata por lo que posiblemente esté asociada a una galaxia satélite que se fusionó con otras galaxias satélites. Mientras que en la caminata roja la mayoría de la materia se encuentra en el punto de partida, por lo que podría representar a una galaxia central que acreta materia lentamente.

3.2.3. Aplicación al estudio de sesgo de galaxias

Tomando en cuenta la propuesta de [34] evaluamos el sesgo de los halos de materia oscura alrededor de los picos de alta densidad del contraste de densidad de la materia, por lo que usamos las caminatas que parten de máximos.

Volviendo a la distribución de la izquierda en la figura 3.10, vemos que incluso en los picos de alta densidad el contraste de la materia tiene una dispersión simétrica. Esta simetría se debe a la naturaleza Gaussiana del campo de perturbaciones inicial de la materia y por lo tanto está presente en todas las escalas, sólo que vemos a las distribuciones trasladadas porque exploramos alrededor de máximos. Este es el comportamiento que describe Bond para justificar el valor 2 de la distribución de primeros cruces propuesta en [40]. Significa que los caminantes que cruzarán la barrera de colapso siguen una distribución simétrica centrada en el valor de la barrera.

Una forma rápida de evaluar la relación entre el contraste de densidad en los picos y las grandes escalas que los contienen es evaluando la correlación de Pearson entre ambos valores. En la gráfica 3.16 vemos que hay una tendencia marcada de tener sobredensidades importantes a pequeñas escalas si la región a grandes escalas que las contiene también es una sobredensidad. Incluso entre regiones de sobredensidad vemos que los 1000 puntos más altos están adentro de las regiones más densas a gran escala, lo que se esperaba según PBS.

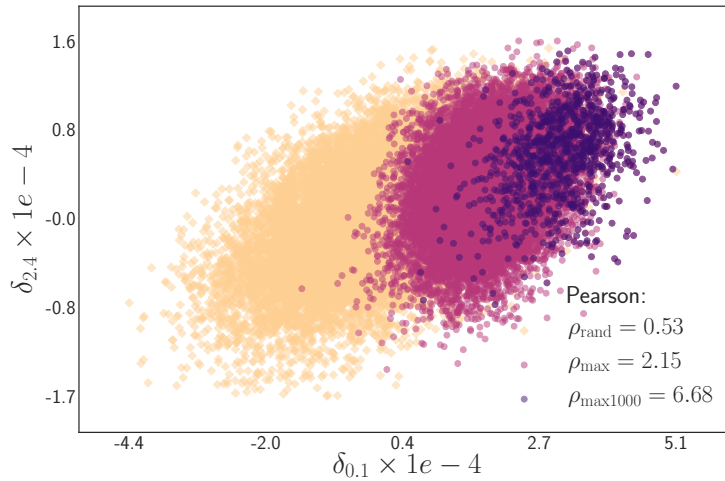


Figura 3.16: En la figura vemos los contrastes de densidad encontrados en el radio mínimo de exploración contra el radio máximo. La correlación de Pearson aumenta es 4 veces cuando los radios de exploración están centrados en los máximos respecto a posiciones aleatorias. Como es de esperarse los primeros 1000 máximos de mayor valor en el contraste de densidad (color más oscuro) son los que tienen la mayor correlación.

Finalmente al catalogar a las regiones colapsadas por el valor de su masa encerrada y evaluar su contraste de densidad asociado a grandes escalas, podemos conocer la relación de sesgo de los halos de materia oscura con el contraste de densidad de la materia, como se ve en la figura 3.17.

En la figura 3.17, el rango de masas colapsadas identificadas por el conjunto

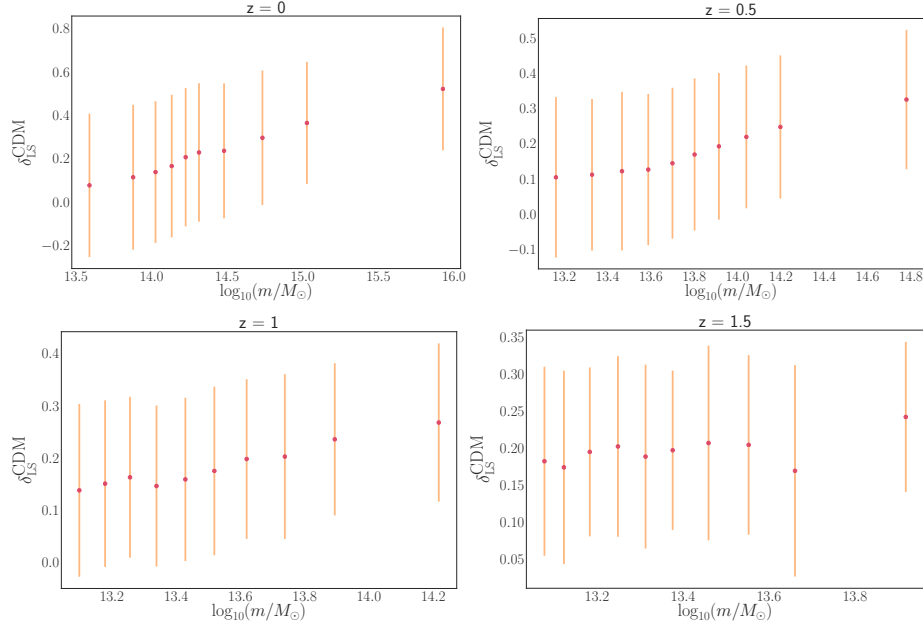


Figura 3.17: Sesgo de los halos de materia oscura calculado por el conjunto de excursión en corrimientos al rojo característicos de las observaciones actuales. Las clases de las masas tienen el mismo número de elementos.

de excursión es más amplio en $z = 0$, mientras que este intervalo se reduce y se traslada hacia masas pequeñas como vemos en la gráfica donde $z = 1.5$. Este comportamiento es esperado pues hay una mayor variedad de halos colapsados en épocas tardías y es en los corrimientos al rojo tempranos que se forman las primeras pequeñas estructuras, de acuerdo al modelo de colapso jerárquico.

También notamos que el sesgo tiende a ser más pronunciado en los halos de mayor masa y en épocas cercanas a $z = 0$, esto podría explicarse por el factor de crecimiento lineal que guía la evolución de todas las estructuras. Al volverse más pronunciadas las zonas de sobre y sub densidad con el paso del tiempo, el número de caminantes en el contraste de densidad en $z = 100$ que podrán formar estructuras en $z = 0$ será muy reducido, pues el valor de la densidad en la posición inicial del caminante podría afectar drásticamente al valor promedio en caso que éste fuera negativo. Es por eso, que sólo aquellos caminantes que estén muy cerca de la cota de colapso podrán formar estructuras.

3.2.4. Aplicación a la reconstrucción del pico de BA0

El objetivo global del proyecto de investigación del grupo donde este trabajo de tesis se encuentra inmerso es mejorar el modelado del sesgo lineal que se usa

en la reconstrucción del pico de BAO usando información astrofísica local como la luminosidad de los trazadores observados. Esto implica usar tanto información como un modelo no lineal en la reconstrucción.

Mi trabajo ha consistido en calcular de manera empírica el sesgo de los halos de materia oscura respecto al contraste de densidad, así como sus historias de formación. Hemos aplicado algunas simplificaciones teóricas que serán reemplazadas, de manera muy sencilla, por su versión más cercana a la realidad antes de implementar este trabajo a datos reales. Estas modificaciones incluyen modificar el factor de crecimiento para una cosmología Λ CDM y cambiar la forma de la barrera de colapso esférico por una de colapso elipsoidal. Luego aplicaremos nuestro método de reconstrucción basado en el conjunto de excursión a simulaciones de alta precisión y compararemos los resultados obtenidos con aquellos de los métodos tradicionales de reconstrucción de BAO. De esta manera podremos evaluar si este método arroja resultados más cercanos a las simulaciones o bien, si añade algún error sistemático.

De lograr nuestros objetivos, este método representaría un ahorro significativo respecto a obtener las historias de fusión de los halos usando simulaciones numéricas. Ya que, en el caso de las simulaciones no sólo es importante contar con la memoria RAM suficiente para ejecutarlas, sino que debemos contar con suficiente espacio en el medio de almacenamiento de datos para guardar los resultados. Esto es, cada vez que se modifique el valor de un parámetro en las condiciones iniciales de las simulaciones tendremos que guardar de nuevo todas las instantáneas en cada corrimiento al rojo, así como el análisis de los árboles de fusión. Además sería necesario rehacer todas las simulaciones cada vez que queramos cambiar la prescripción de si hay o no un trazador de interés en cierta posición.

Actualmente, hay dos grandes vertientes en las cuales se realiza el estudio de BAO. Por un lado tenemos las metodologías que aplican teoría de perturbaciones hasta 2do o 3er orden para modelar la evolución de distribución de materia considerando una cosmología específica. El problema de este enfoque es que, por construcción, sólo considera información global y no depende de la distribución de las galaxias observada, que nos da la información local. En la metodología de reconstrucción se usa la distribución de las galaxias, y aunque el sesgo que actualmente se aplica es lineal, el simple hecho de usar información local hace que la reconstrucción recupere de manera más precisa la posición del pico de BAO que teoría de perturbaciones a 2do orden. En la reconstrucción, actualmente se usa el sesgo lineal para establecer una relación de proporcionalidad entre la densidad del número de galaxias y la densidad de materia, así como así como entre la masa del halo y el contraste de densidad de materia. Este método funciona de manera adecuada en trazadores como las galaxias LRG, ya que asumimos que viven solas en un halo. Esto es cercano a la realidad, ya que esta generalización sólo deja de cumplirse en los halos más masivos, cuyo número es despreciable.

En nuestro método ampliaríamos la información, al considerar también la luminosidad de las galaxias para asignar una masa de halo a las galaxias. Estaríamos aplicando un sesgo que varía de manera local. La relación de conexión

entre galaxias y los halos que habitan es altamente no trivial. En el futuro nos interesaría establecer una relación entre alguna observable de cada uno de los trazadores de los nuevos sondeos como ELG, QSO/AGN con la masa de su halo huésped. Este tipo de información estará disponible en el futuro ya que aún es investigación de frontera. Una vez conocida esta información, será posible usar la relación de la masa de halo con el contraste de densidad para conectar la distribución de los trazadores con la de materia. En el caso de las ELG nos gustaría estimar la probabilidad de que se encuentren dentro de un halo de cierta masa y cierto corrimiento al rojo, usando las historias de formación obtenidas con el conjunto de excursión y considerando el contraste de densidad a gran escala que los rodea. Ya que es posible que podamos predecir la formación de subhalos y el tipo de interacciones que tienen los halos de cierta masa según el contexto de densidad a gran escala que habitan.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo de tesis hemos estudiado la Conexión Halo-Galaxia enfocándonos en el sesgo de los halos de materia oscura respecto a la distribución materia. Para ello creamos una simulación del contraste de densidad de la materia en $z = 100$, así como un código que nos permite analizar los cambios de la densidad usando el conjunto de excursión. Este conjunto reporta el valor del contraste de densidad promedio adentro de bolas concéntricas centradas en cada una de las posiciones iniciales del conjunto. Acoplado el modelo de colapso esférico a las caminatas del conjunto de excursión calculamos el radio de las regiones que forman estructuras, por lo que finalmente pudimos calcular su masa y asociarles un sesgo. Esta herramienta, podría ser usada en futuras investigaciones para conocer la historia de formación de los halos de materia oscura, lo que impactaría en investigaciones que usan esta información para calcular el sesgo de las galaxias, como SHAM.

Siguiendo el orden de nuestros objetivos, respecto a: la simulación del campo de materia explorada con el conjunto de excursión, el sesgo de los halos de materia oscura con las regiones a grandes escalas y las historias de formación, concluimos lo siguiente:

- El contraste de densidad de la materia siguió una distribución gaussiana centrada en el origen, cuya varianza disminuye para radios cada vez mayores. La varianza de la simulación tiene un comportamiento convergente con la de CAMB en grandes escalas, donde la precisión tiende al 95% en la escala explorada.
- Obtuvimos que el sesgo de los halos de materia oscura respecto al contraste de densidad a grandes escalas, aumenta con la masa y también lo hace en corrimientos al rojo cercanos. Encontramos un mayor rango de masas en la estimación del sesgo en épocas tardías, lo que es congruente con el hecho de que en ese momento se espera que hayan colapsado una gran variedad de halos. Tenemos el rango más pequeño de masas en corrimientos al rojo tempranos tal y como se espera en la función de masa que primero colapsen los halos pequeños.

- Al ordenar los picos del contraste de densidad por su magnitud, notamos que aquellos de mayor valor también tienen una mayor correlación de Pearson con la distribución de materia a grandes escalas. Este orden permite explorar los halos de materia oscura de manera cronológica empezando con los que colapsaron primero que podría ser útil en el estudio de SHAM. Observamos que los primeros halos en formarse son los que tienen menor masa inicial de todo el conjunto. El conjunto de excursión que partió de posiciones aleatorias nos mostró la gran variedad de estructuras que podemos esperar en la materia oscura, desde regiones que nunca colapsan hasta regiones que en su historia de formación pueden tener múltiples acreciones masivas.

En general, en este trabajo de tesis se ha abordado de manera pedagógica el problema del sesgo de los halos de materia oscura, al preferir el conjunto de excursión sobre la descomposición del fondo de los picos (PBS). Esta metodología nos brinda una visión más completa sobre cómo se forman las estructuras y por qué presentan un sesgo. Por un lado, PBS nos permite estimar rápidamente el sesgo de los halos de materia oscura que en conjunto con la HOD nos permite conocer el sesgo de ciertos marcadores como las galaxias LRG. Por otro lado, hay trazadores que dependen de su historia de formación como las ELG, por lo que el conjunto de excursión resulta una herramienta más adecuada.

En un futuro podríamos usar el código producto de esta tesis, para estimar el sesgo de los halos y calcular la versión local del sesgo de las galaxias b_g , el cual es necesario para corregir con mayor precisión el campo de desplazamientos mostrado en [19]. Y no sólo eso, es parte del trabajo futuro, aplicar este método en el estudio de las ELG, tomando en cuenta la evolución de la subestructura de los halos que habitan. Para ello podríamos usar el conjunto de excursión junto con la información de la evolución del número de subhalos obtenida de simulaciones tipo SHAM y así obtener la probabilidad que tienen los halos de fusionarse. Esto nos ayudaría a estimar la distribución de probabilidad del número de ELGs que podemos esperar en un halo debido a la disponibilidad de gas para formar estrellas tras las colisiones. Esta propuesta es novedosa, ya que en la investigación de frontera aún no se usa la información de la masa de los cúmulos para restringir los parámetros cosmológicos, ya que existen procesos astrofísicos locales que dificultan la correcta estimación del sesgo.

Bibliografía

- [1] N. et al. Aghanim. Planck 2018 results. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, Sep 2020.
- [2] Luca Amendola and Shinji Tsujikawa. *Dark Energy: Theory and Observations*. Cambridge Univ. Press, Nueva York, 2010.
- [3] Andreas A. Berlind and David H. Weinberg. The Halo Occupation Distribution: Towards an Empirical Determination of the Relation Between Galaxies and Mass. *arXiv:astro-ph/0109001*, April 2002. arXiv: astro-ph/0109001.
- [4] J R Bond, S Cole, G Efstathiou, and N Kaiser. EXCURSION SET MASS FUNCTIONS FOR HIERARCHICAL GAUSSIAN FLUCTUATIONS. *ApJ*. . ., 379:21, 1991.
- [5] Gianluca Calcagni. *Classical and Quantum Cosmology*. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [6] Jordan et al. Carlson. Convolution Lagrangian perturbation theory for biased tracers. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 429(2):1674–1685, February 2013.
- [7] F. Coles, P. & Lucchin. *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. John Wiley & Sons, LTD, Great Britain, 2 edition, 2002.
- [8] Charlie Conroy, Risa H. Wechsler, and Andrey V. Kravtsov. Modeling Luminosity-Dependent Galaxy Clustering Through Cosmic Time. *arXiv:astro-ph/0512234*, February 2006. arXiv: astro-ph/0512234.
- [9] M. Davis, G. Efstathiou, C. S. Frenk, and S. D. M. White. The evolution of large-scale structure in a universe dominated by cold dark matter. *The Astrophysical Journal*, 292:371, May 1985.
- [10] Scott Dodelson and Fabian Schmidt. 8 - growth of structure: linear theory. In Scott Dodelson and Fabian Schmidt, editors, *Modern Cosmology (Second Edition)*, pages 195–229. Academic Press, second edition edition, 2021.

- [11] Daniel et al. Eisenstein. Improving cosmological distance measurements by reconstruction of the baryon acoustic peak. *The Astrophysical Journal*, 664(2):675–679, 2007.
- [12] Daniel et al. Eisenstein. On the robustness of the acoustic scale in the low-redshift clustering of matter. *The Astrophysical Journal*, 664:660–674, August 1, 2007 2007.
- [13] ESA. First sighting of hot gas sloshing in galaxy cluster. https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/First_sighting_of_hot_gas_sloshing_in_galaxy_cluster, October 2020.
- [14] Eisenstein et al. Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies. *The Astrophysical Journal*, 633(2):560–574, November 2005. arXiv: astro-ph/0501171.
- [15] M. Icaza-Lizaola et al. The clustering of the SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 LRG sample: structure growth rate measurement from the anisotropic LRG correlation function in the redshift range $0.6 < z < 1.0$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 492(3):4189–4215, March 2020.
- [16] Padmanabhan et al. A 2% Distance to $z=0.35$ by Reconstructing Baryon Acoustic Oscillations - I : Methods and Application to the Sloan Digital Sky Survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427(3), December 2012.
- [17] Particle Data Group et al. Review of Particle Physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020(8), 08 2020.
- [18] Planck Collaboration et al. *Planck* 2018 results: VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, September 2020.
- [19] Sébastien Fromenteau, Mariana Vargas Magaña, Marcos Iram Toledo Ortiz, Brenda Izamar Tapia Benavides, Matias Rodriguez Otero, and Beatriz Miroszlava Sandoval Ramos. Galaxy: Dark matter connection in cosmology. *Astronomische Nachrichten*, 342(171):171–175, January 2021.
- [20] V. Gonzalez-Perez, J. Comparat, P. Norberg, C. M. Baugh, S. Contreras, C. Lacey, N. McCullagh, A. Orsi, J. Helly, and J. Humphries. The host dark matter halos of [OII] emitters at $0.5 < z < 1.5$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 474(3):4024–4038, March 2018. arXiv: 1708.07628.
- [21] James E Gunn and Hale Observatories. ON THE INFALL OF MATTER INTO CLUSTERS OF GALAXIES AND SOME EFFECTS ON THEIR EVOLUTION. *ApJ*. . ., 176(1):20, 1972.

- [22] A. J. S. Hamilton. Measuring Omega and the real correlation function from the redshift correlation function. *The Astrophysical Journal*, 385, 1992.
- [23] J. C. Hillebrandt, W.; Niemeyer. Type ia supernova explosion models. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 38 (1), 2000.
- [24] Simon White Houjun Mo, Frank van den Bosch. *Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge University Press, 2010.
- [25] Bernard J. T. Jones. *Precision Cosmology: The First Half Million Years*. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [26] Edward W. Kolb and Michael Stanley Turner. *The early universe*. Addison-Wesley, 1990.
- [27] Andrey V. Kravtsov, Andreas A. Berlind, Risa H. Wechsler, Anatoly A. Klypin, Stefan Gottlober, Brandon Allgood, and Joel R. Primack. The Dark Side of the Halo Occupation Distribution. *The Astrophysical Journal*, 609(1):35–49, July 2004.
- [28] Kevin Krisciunas. Type Ia Supernovae and the Acceleration of the Universe: Results from the ESSENCE Supernova Survey. In *First Middle East-Africa Regional IAU Meeting*, page 7, April 2008.
- [29] Ofer Lahav and Michela Massimi. Dark energy, paradigm shifts, and the role of evidence. *Astronomy & Geophysics*, 55(3):3.12–3.15, 2014. _eprint: https://academic.oup.com/astrogeo/article-pdf/55/3/3.12/656936/10.1093_astrogeo_atu122.pdf.
- [30] Stephen D. Landy and Alexander S. Szalay. Bias and Variance of Angular Correlation Functions. , 412:64, July 1993.
- [31] Antony Lewis. Camb notes, 2014.
- [32] Antony Lewis and Sarah Bridle. Cosmological parameters from CMB and other data: A Monte Carlo approach. , 66:103511, 2002.
- [33] Roy Maartens, Malcolm MacCallum, and George Ellis. *Relativistic Cosmology*. Cambridge Univ. Press, Nueva York, 2012.
- [34] H. J. Mo and S. D. M. White. An analytic model for the spatial clustering of dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 282(2):347–361, September 1996.
- [35] Pierros Ntelis. *Probing Cosmology with the homogeneity scale of the Universe through large scale structure surveys*. PhD thesis, Université Sorbonne Paris Cité, 2017.
- [36] J. Peacock. Large-scale surveys and cosmic structure. *arXiv: Astrophysics*, 2003.

- [37] John A. Peacock. *Cosmological physics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, reprinted with corr edition, 2005.
- [38] Phillip James Edwin Peebles. *The Large-scale Structure of the Universe*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, 1980.
- [39] M. M. Phillips. The Absolute Magnitudes of Type IA Supernovae. *Astrophysical Journal Letters*, 413:L105, 1993.
- [40] William H Press and Paul Schechter. FORMATION OF GALAXIES AND CLUSTERS OF GALAXIES BY SELF-SIMILAR GRAVITATIONAL CONDENSATION. *ApJ*. . . , 187(3):14, 1974.
- [41] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology*. Cambridge University Press, New York, NY, second edition edition, 2017.
- [42] R. K. Sheth, H. J. Mo, and G. Tormen. Ellipsoidal collapse and an improved model for the number and spatial distribution of dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 323(1):1–12, May 2001.
- [43] M. Toledo. Formación de grandes estructuras en cosmología con simulaciones numéricas. B.S. Thesis, UAEM;, Cuernavaca, Morelos, 2 2020.
- [44] Frank van den Bosch. Lecture 8: Non-linear collapse & virialization, October 2020.
- [45] Frank C. van den Bosch, Surhud More, Marcello Cacciato, Houjun Mo, and Xiaohu Yang. Cosmological constraints from a combination of galaxy clustering and lensing – I. Theoretical framework. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 430(2):725–746, April 2013.
- [46] James W. and John W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comput*, 19:297–201, 1965.
- [47] Risa H. Wechsler and Jeremy L. Tinker. The Connection between Galaxies and their Dark Matter Halos. *arXiv:1804.03097 [astro-ph]*, April 2018. arXiv: 1804.03097.
- [48] Xiaohu Yang, H. J. Mo, and Frank C. van den Bosch. Galaxy Groups in the SDSS DR4. II. Halo Occupation Statistics. *The Astrophysical Journal*, 676(1):248–261, March 2008.
- [49] Ya. B. Zel’dovich. Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations. *Astronomy and Astrophysics*, 5:84–89, March 1970.
- [50] Zhongxu Zhai, Jeremy L. Tinker, ChangHoon Hahn, Hee-Jong Seo, Michael R. Blanton, Rita Tojeiro, Hugo O. Camacho, Marcos Lima, Aurelio Carnero Rosell, Flavia Sobreira, Luiz N. da Costa, Julian E. Bautista, Joel R. Brownstein, Johan Comparat, Kyle Dawson, Jeffrey A. Newman,

- Abhishek Prakash, Alexandre Roman-Lopes, and Donald P. Schneider. The Clustering of Luminous Red Galaxies at $z \sim 0.7$ from EBOSS and BOSS Data. *The Astrophysical Journal*, 848(2):76, October 2017.
- [51] Zheng Zheng, Andreas A. Berlind, David H. Weinberg, Andrew J. Benson, Carlton M. Baugh, Shaun Cole, Romeel Dave, Carlos S. Frenk, Neal Katz, and Cedric G. Lacey. Theoretical Models of the Halo Occupation Distribution: Separating Central and Satellite Galaxies. *The Astrophysical Journal*, 633(2):791–809, November 2005.