UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

EL ESPACIO DE GEOMETRÍAS BI-INVARIANTES EN UN GRUPO DE LIE

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS)

PRESENTA:

JUAN FLORES TORRES

TUTOR:

DR. DIEGO CORRO TAPIA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS, KARLSRUHE INSTITUTE OF TECHNOLOGY

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO 2022.

Índice general

Introducción

Este trabajo se desarrollará en el contexto de grupos de Lie de dimensión finita dotados con una métrica Riemanniana invariante bajo traslaciones izquierdas. El objetivo principal es describir el *espacio moduli de métricas bi-invariantes* para aquellos grupos de Lie que admiten una de éstas. Cada elemento del espacio moduli representa una geometría bi-invariante, así podemos decir que el espacio moduli parametriza las geometrías bi-invariantes no equivalentes en un grupo de Lie. Una vez descrito este espacio usamos el trabajo de Milnor [24] para estudiar las propiedades de curvatura de cada elemento del espacio moduli de métricas bi-invariantes.

En [22] Kodama, Takahara y Hiroshi estudiaron el espacio de métricas invariantes izquierdas en un grupo de Lie G. En el contexto de las variedades Riemannianas el estudio de los grupos de Lie arroja múltiples ventajas que resultan ser consecuencia de la compatibilidad entre la estructura diferenciable y la algebraica. En este trabajo nos propusimos dar una descripción del espacio de métricas bi-invariantes. Cuando equipamos al grupo con una métrica invariante izquierda tenemos la ventaja de que cualquier traslación es una isometría y por lo tanto nos basta hacer todos los cálculos de curvatura en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Si la métrica es bi-invariante entonces las geodésicas serán clases laterales de subgrupos uniparamétricos y el mapeo exponencial Riemanniano está dado en términos del mapeo exponencial del grupo $exp : \mathfrak{g} \to G$. En el caso de los subgrupos cerrados de $GL(n, \mathbb{R})$ este mapeo está dado por la exponencial de matrices. Podemos concluir que las métricas bi-invariantes son un reflejo de una consonancia total entre la topología, el álgebra y la geometría de G. A continuación describimos brevemente lo desarrollado en cada capítulo.

En el capítulo 1 revisamos las herramientas de teoría clásica de grupos de Lie de dimensión finita que necesitaremos a lo largo de todo el trabajo. Definimos un grupo y álgebra de Lie, homomorfismos de grupos y álgebras de Lie, el Teorema del subgrupo cerrado, el mapeo exponencial, la representación adjunta, grupo cubriente, los tres Teoremas de Lie, los espacios homogéneos y finalmente mencionamos un teorema que involucra a los toros maximales.

En el capítulo 2 nos enfocamos en considerar métricas Riemannianas invariantes bajo traslaciones izquierdas y métricas bi-invariantes. Además de aplicar los conceptos básicos de geometría Riemanniana a estas métricas como: la conexión de Levi-Civita y el tensor de curvatura de Riemann. A lo largo del capítulo se hacen observaciones que señalan las ventajas que se obtienen al considerar a las métricas bi-invariantes.

En el capítulo 3 nos adentramos en el tema central del trabajo siguiendo el enfoque de [22] aplicado en métricas bi-invariantes. Primero definimos el espacio $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ constituyente de todas las métricas bi-invariantes de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Posteriormente se define una acción del grupo de automorfismos $Aut(\mathfrak{g})$ en el espacio $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ y se busca dar una descripción de la factorización del espacio $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ bajo el grupo $Aut(\mathfrak{g})$ para describir el espacio moduli de métricas bi-invariantes $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$.

En el capítulo 4 utilizamos lo desarrollado por Milnor en la parte de curvatura seccional de [24] y se concluye que si un grupo de Lie admite una métrica bi-invariante con curvatura seccional estrictamente positiva entonces el grupo es un cociente de $SU(2)$ por un subgrupo discreto. También se verifica que si un grupo G es producto semidirecto de un grupo abeliano con un grupo H que admita una métrica bi-invariante, cualquier métrica bi-invariante de H se puede extender a una métrica invariante izquierda en G con curvatura seccional no negativa. Finalmente se verifica que si un grupo tiene una métrica bi-invariante con curvatura seccional identicamente cero, entonces cualquier métrica bi-invariante será plana.

En el capítulo 5 de nuevo utilizamos lo desarrollado por Milnor [24] en la parte de curvatura de Ricci. Se concluye que si el grupo es compacto y semisimple, entonces cualquier métrica bi-invariante tiene curvatura de Ricci estrictamente positiva. Finalmente concluimos que cuando el cubriente universal $\widetilde{G}$ es compacto entonces cualquier métrica bi-invariante tiene curvatura de Ricci constante.

En el capítulo 6 utilizamos la parte de curvatura escalar de [24] y concluimos que si un grupo de Lie tiene un subgrupo compacto H, entonces cualquier métrica bi-invariante en H se puede extender a una métrica invariante izquierda en todo el grupo de modo que la curvatura escalar es estrictamente positiva.

Capítulo 1

Teoría de Lie

En este capítulo vamos a revisar algunos resultados de teoría clásica de grupos de Lie que vamos a utilizar a largo de todo el trabajo. Damos la definición de un grupo y álgebra de Lie, así como las relaciones que existen entre estos dos objetos. También presentamos las derivaciones, la representación adjunta, una breve mención a la teoría de espacios cubrientes aplicada a variedades y grupos de Lie, algunos resultados de espacios homogéneos y finalmente el Teorema del toro maximal. Las referencias principales para este capítulo son [4], [5], [10], [11], [14], [21] y [34].

1.1. Grupos de Lie

Definición 1.1. *Un grupo de Lie G, es un grupo que también es una variedad diferenciable, donde el mapeo $\Phi : G \times G \to G$, dado por $\Phi(g, h) = gh^{-1}$, es diferenciable. El elemento neutro G lo denotaremos siempre con la letra e.*

Observación 1.2. *Si G es un grupo de Lie, el mapeo $g \mapsto g^{-1}$ de G en si mismo es diferenciable pues lo podemos ver como la siguiente composición $g \overset{i_e}{\mapsto} (e, g) \overset{\Phi}{\mapsto} eg^{-1}$. Donde i_e es la inclusión $i_e : G \to G \times G$, dada por $i_e(g) = (e, g)$ que es claramente diferenciable. También el mapeo $(g, h) \mapsto gh$ de $G \times G$ en G es diferenciable pues lo podemos ver como la siguiente composición $(g, h) \mapsto (g, h^{-1}) \overset{\Phi}{\mapsto} gh$, que es claramente diferenciable.*

Observación 1.3. *La componente conexa de un grupo de Lie G que contiene al elemento neutro $e \in G$ es un grupo de Lie y es difeomorfa a cualquier otra componente conexa de G.*

Ejemplos 1.4. *A continuación mencionaremos algunos ejemplos de grupos de Lie.*

1. *El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie bajo la suma de vectores.*

2. *$\mathbb{C}^*$ todos los números complejos distintos de cero forman un grupo de Lie con la multiplicación.*

3. *$\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$ el círculo unitario con la multiplicación, también es un grupo de Lie.*

4. *El producto de grupos de Lie, $G \times H$ es un grupo de Lie con la estructura diferenciable del producto y el producto directo de grupos.*

5. *El toro de dimensión n, $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ es un grupo de Lie correspondiente al producto de $\mathbb{S}^1$ consigo mismo n-veces.*

6. *El grupo $GL(n, \mathbb{R})$ formado por las matrices invertibles de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ con la operación de multiplicación de matrices es una variedad de dimensión n^2 pues es un abierto de $\mathbb{R}^{n^2}$ y grupo de Lie.*

7. *Análogamente tenemos que el grupo $GL(n, \mathbb{C})$ es una variedad de dimensión $2n^2$, pues es un abierto de $\mathbb{C}^{n^2}$.*

Un grupo de Lie tiene dos familias de difeomorfismos llamados traslaciones derechas e izquierdas. Para cada $g \in G$, estos difeomorfismos están definidos como sigue:

$$L_g : G \to G, \ L_g(h) = gh, \tag{1.1}$$

$$R_g : G \to G, \ R_g(h) = hg. \tag{1.2}$$

A estos mapeos los llamaremos traslaciones izquierdas o derechas respectivamente. Es claro que los mapeos inversos están dados por $L_{g^{-1}}$ y $R_{g^{-1}}$.

1.1.1. Campos Vectoriales Invariantes Bajo Traslaciones

Si tenemos un grupo de Lie G, dado un vector tangente X_e en la identidad de G, podemos trasladarlo a cualquier punto de G utilizando los difeomorfismos (1.1) y (1.2) de la siguiente forma

$$X_g = (dL_g)_e X_e, \quad \widetilde{X}_g = (dR_g)_e X_e.$$

De esta forma obtenemos dos campos vectoriales no nulos en todo G . Por otro lado si tenemos un campo vectorial X en G, decimos que es invariante izquierdo si es invariante bajo cualquier traslación izquierda, es decir, $X_{gh} = (dL_g)_h X_h$. De manera análoga definimos un campo vectorial invariante derecho. Con esto en mente enunciamos la siguiente proposición cuya demostración es inmediata.

Proposición 1.5. *Si X es un campo vectorial invariante izquierdo en un grupo de Lie G, este queda determinado por su valor en $e \in G$.*

Observación 1.6. *La existencia de campos globales no nulos en ningún punto implica que cualquier grupo de Lie es orientable.*

1.2. Álgebras de Lie

Definición 1.7. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial con un operador bilineal $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$ se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$[x, y] = -[y, x]$ anti simetría.*

2. *$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ Identidad de Jabobi*

Al operador $[,]$ lo llamamos el bracket o corchete de $\mathfrak{g}$.

El estudio de las álgebras de Lie es muy importante pues más adelante veremos que cualquier grupo de Lie tiene un álgebra de Lie íntimamente relacionada con él. El estudio de los grupos de Lie está en gran medida reducido al estudio de sus álgebras de Lie.

Ejemplos 1.8. *A continuación mencionaremos algunos ejemplos de álgebras de Lie.*

1. *Si M es una variedad diferenciable, el espacio vectorial formado por los campos vectoriales suaves de M, es un álgebra de Lie bajo la operación de bracket de Lie definida en campos vectoriales.*

2. *Cualquier espacio vectorial se puede convertir en un álgebra de Lie, simplemente definiendo el bracket idénticamente cero. A las álgebras de Lie con bracket idénticamente cero les llamaremos abelianas o conmutativas.*

3. *El espacio vectorial $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices reales de $n \times n$ forman un álgebra de Lie, si definimos $[A, B] = AB - BA$.*

4. *Un espacio vectorial de dimensión 2 con una base e_1, e_2 forma un álgebra de Lie definiendo $[e_1, e_1] = 0 = [e_2, e_2]$, $[e_1, e_2] = e_2$ y extendiendo bilinealmente. Se puede demostrar que ésta es la única álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2.*

5. *$\mathbb{R}^3$ con la operación del producto cruz es un álgebra de Lie.*

Definición 1.9. *Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $e_1, ..., e_n \in \mathfrak{g}$ una base, definimos las constantes de estructura $\alpha_{ijk} \in \mathbb{R}$ como $[e_i, e_j] = \sum_k \alpha_{ijk} e_k$.*

Observación 1.10. *Es claro que las constantes de estructura dependen de la base elegida. Además debido a que el bracket de Lie es antisimétrico las constantes de estructura satisfacen que $\alpha_{ijk} = -\alpha_{jik}$.*

Observación 1.11. *Cualquier colección de números reales $\{\alpha_{ijk}\}_{i,i,k=1}^{n}$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\alpha_{ijk} + \alpha_{jik} = 0$

2. $\sum_{m,r}(\alpha_{jkm}\alpha_{imr} + \alpha_{kim}\alpha_{jmr} + \alpha_{ijm}\alpha_{kmr}) = 0$

determina una estructura de álgebra de Lie en cualquier espacio vectorial V de dimensión n, simplemente definiendo

$$[e_i, e_j] = \sum_k \alpha_{ijk} e_k$$

para una base $e_1, ..., e_n$ de V y extendiendo bilinealmente.

1.2.1. El álgebra de Lie de un grupo de Lie

Consideremos un grupo de Lie G y T_eG su espacio tangente en la identidad. Tomamos $e_1, ..., e_n$ una base de T_eG y utilizando la Proposición 1.5 podemos construir una familia de campos vectoriales invariantes izquierdos $E_1, ..., E_n$ generados por esta base, que además resultan ser linealmente independientes en cada punto de G. Así cada campo invariante izquierdo se podrá escribir como combinación lineal de $E_1, ..., E_n$. Con esto en mente podemos identificar al espacio tangente en la identidad con el conjunto de campos vectoriales invariantes izquierdos.

Lema 1.12. *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ el conjunto de campos vectoriales invariantes izquierdos, entonces $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial isomorfo a T_eG.*

Demostración.
Es claro que $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial real y el hecho de que cualquier campo vectorial invariante izquierdo esté determinado por su valor en la identidad nos permite definir el siguiente mapeo, $\alpha : \mathfrak{g} \to T_eG$, $\alpha(x) = x_e$. Es inyectivo, pues si $\alpha(x) = 0$ entonces el valor de x en todo G es cero. Dado $x \in T_eG$, utilizando las traslaciones izquierdas podemos definir un campo invariante izquierdo que en la identidad tome el valor x. De lo cual concluimos que $T_eG \cong \mathfrak{g}$.
□

Cuando se estudian los campos vectoriales en variedades se pide de entrada que sean diferenciables. Una característica de los campos invariantes izquierdos es que esta cualidad ya implica la diferenciabilidad de estos campos.

Lema 1.13. *Si $x \in \mathfrak{g}$ es un campo invariante izquierdo de un grupo de Lie G, entonces es diferenciable.*

Demostración.
Sea $x \in \mathfrak{g}$, $f \in C^\infty(G)$, $g \in G$ y γ una curva en G que satisface $\gamma'(0) = x_e$, calculamos:

$$xf(g) = x_g f = dL_g(x_e)f = x_e(f \circ L_g) = \frac{d}{dt} f(g\gamma(t))|_{t=0}.$$

Así $xf \in C^\infty(G)$ pues $f(g\gamma(t))$ depende suavemente de g y t. □

Lema 1.14. *Consideremos $[,]$ el bracket de Lie de campos vectoriales en un grupo de Lie G como variedad diferenciable. Para $x, y \in \mathfrak{g}$ campos invariantes izquierdos, se tiene $[x, y] \in \mathfrak{g}$.*

Demostración.
Para $g \in G$ y $[,]$ el bracket de Lie de campos vectoriales, tenemos que $dL_g([x, y]) = [dL_g(x), dL_g(y)] = [x, y] \in \mathfrak{g}$.
□

Estos tres Lemas nos permiten enunciar la siguiente proposición

Proposición 1.15. *Los campos vectoriales invariantes izquierdos de un grupo de Lie G, forman un álgebra de Lie con la operación de bracket entre campos vectoriales.*

Notación 1.16. *Cuando hablemos del álgebra de Lie de un grupo de Lie G, usaremos la notación $\mathfrak{g}$ ó $Lie(G)$.*

Ejemplo 1.17. *El grupo de Lie $\mathbb{R}$ tiene como álgebra de Lie los múltiplos escalares del vector tangente $\frac{d}{dt}$, y el bracket es idénticamente cero pues $[\lambda(\frac{d}{dt}), \alpha(\frac{d}{dt})] = \alpha\lambda[\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}] = 0$.*

1.3. Homomorfismos de Grupos de Lie

Definición 1.18. *Un mapeo $\varphi : G \to H$ entre grupos de Lie, es un homomorfismo de grupos de Lie si $\varphi \in C^\infty(G, H)$ y es un homomorfismo de grupos. Si φ es un difeomorfismo y un isomorfismo de grupos, entonces diremos que es un isomorfismo de grupos de Lie. Un isomorfismo de un grupo de Lie en sí mismo se llama un automorfismo. Y si $H = Aut(V)$ para algún espacio vectorial V, el homomorfismo φ se llama una representación de G.*

Definición 1.19. *Si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son álgebras de Lie, un mapeo $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie si es lineal y $\psi([x, y]) = [\psi(x), \psi(y)]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{h} = End(V)$ para algún espacio vectorial V, entonces decimos que ψ es una representación de $\mathfrak{g}$.*

Teorema 1.20. *Si tenemos G y H grupos de Lie con $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ sus respectivas álgebras de Lie entonces, cualquier homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : G \to H$ induce un homomorfismo de álgebras de Lie $d\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$.*

Demostración.
Como φ es suave tenemos un mapeo lineal $d\varphi_e : T_eG \to T_eH$. Como T_eG y T_eH están identificados con $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente entonces $d\varphi_e$ se pude interpretar como un mapeo lineal entre las álgebras de Lie que denotaremos $d\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, donde a cada $x \in \mathfrak{g}$ le asignamos $d\varphi(x) \in \mathfrak{h}$, el campo vectorial invariante izquierdo en H generado por $d\varphi_e(x_e) \in T_eH$.

Como φ es homomorfismo de grupos, entonces para $g \in G$ se cumple que $L_{\varphi(g)} \circ \varphi = \varphi \circ L_g$. Para $x \in \mathfrak{g}$ denotemos $\overline{x} = d\varphi(x) \in \mathfrak{h}$ y notemos que

$$\overline{x}_{\varphi(g)} = dL_{\varphi(g)}\overline{x}_e = dL_{\varphi(g)}d\varphi(x_e) = d(L_{\varphi(g)}\varphi)(x_e) = d(\varphi \circ L_g)(x_e) = d\varphi(x_g).$$

Ahora para $x, y \in \mathfrak{g}$, tenemos que $d\varphi[x, y] = \overline{[x, y]_e} = d\varphi([x, y]_e) = [d\varphi(x_e), d\varphi(y_e)]$.
□

1.4. Subgrupos de Lie

Definición 1.21. *Decimos que H es un subgrupo de Lie de un grupo de Lie G, si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *H es un grupo de Lie.*
2. *La inclusión $i : H \to G$, es una inmersión inyectiva y además es un homomorfismo de grupos de Lie.*

El siguiente teorema nos arroja un criterio para determinar cuando un subgrupo abstracto de un grupo de Lie, es grupo de Lie.

1.4.1. Teorema del Subgrupo Cerrado

Teorema 1.22. *Sea G un grupo de Lie y sea H un subgrupo cerrado de G, entonces H tiene una única estructura suave que lo convierte en un subgrupo de Lie de G.*

Para una demostración consultar [34].

Una clase importante de grupos de Lie son los subgrupos cerrados de $GL(n, \mathbb{R})$ o $GL(n, \mathbb{C})$, también llamados grupos lineales.

Ejemplos 1.23. *A continuación tenemos una serie de grupos lineales que sirven de ejemplo de subgrupos de Lie.*

1. *El grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | AA^T = I_n\}$.*

2. *El grupo especial lineal* $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | det(A) = 1\}$.

3. *El grupo especial ortogonal* $SO(n, \mathbb{R}) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n, \mathbb{R})$.

4. *El grupo unitario* $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) | AA^* = I\}$ *con* A^* *es la transpuesta conjugada de* A.

5. *El grupo especial unitario* $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$.

1.5. Subálgebras de Lie

Definición 1.24. *Decimos que* $\mathfrak{h}$ *es una subálgebra de Lie de un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\mathfrak{h}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathfrak{g}$.

2. $[x, y] \in \mathfrak{h}$ *para cualesquiera* $x, y \in \mathfrak{h}$.

Es claro que con estas dos condiciones $\mathfrak{h}$ *es un álgebra de Lie con el bracket de* $\mathfrak{g}$ *restringido a* $\mathfrak{h}$. *Si además* $[x, y] \in \mathfrak{h}$ *para todo* $y \in \mathfrak{h}$ *y* $x \in \mathfrak{g}$, *decimos que* $\mathfrak{h}$ *es un ideal de* $\mathfrak{g}$.

Proposición 1.25. *Si* H *es subgrupo de Lie de* G *entonces* $\mathfrak{h}$ *es una subálgebra de Lie de* $\mathfrak{g}$.

Demostración.
Es claro que $\mathfrak{h}$ es un subespacio de $\mathfrak{g}$, además si $x, y \in \mathfrak{h}$ entonces $[x, y] = di([x, y]) \in \mathfrak{h}$, donde $i : H \to G$ es la inclusión. Con esto concluimos que $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$.
□

A continuación vamos a dar algunos ejemplos de álgebras de Lie de subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$, que serán subálgebras de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

1.5.1. Los grupos $O(n)$, $SO(n)$ y sus álgebras de Lie

Proposición 1.26. *El álgebra de Lie* $\mathfrak{o}(n)$ *del grupo ortogonal* $O(n)$ *consiste en el espacio de matrices antisimétricas* $Asim(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) | A = -A^T\}$.

Demostración.
Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to O(n, \mathbb{R})$ una curva suave tal que $\alpha(0) = I_n$ y además se cumple que $\alpha(s)^T \alpha(s) = I_n$. Derivando la curva tenemos $\alpha'(s)^T \alpha(s) + \alpha(s)^T \alpha'(s) = 0$, para $s = 0$ obtenemos

$$\alpha'(0)^T \alpha(0) + \alpha(0)^T \alpha'(0) = 0.$$

Como $\alpha(0) = I_n$ entonces $\alpha'(0)^T = -\alpha'(0)$ por lo tanto $\mathfrak{o}(n) \subset Asim(n, \mathbb{R})$. Es fácil ver que las matrices antisimétricas de $n \times n$ forman un espacio vectorial de dimensión $\frac{n(n-1)}{2} = dim(O(n, \mathbb{R}))$ y por lo tanto, $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = Asim(n, \mathbb{R})$.
□

El grupo especial ortogonal $SO(n)$ se define como el subgrupo de $O(n)$ que consiste en todas las matrices ortogonales de determinante 1, $SO(n)$ resulta ser la componente conexa de $O(n)$ que contiene al elemento identidad, de esta forma concluimos que tanto $O(n)$ como $SO(n)$ tienen la misma álgebra de Lie.

1.5.2. El grupo especial unitario $SU(2)$ y su álgebra de Lie.

Proposición 1.27. *El grupo $SU(2)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^3$.*

Demostración.

Tomemos una matriz

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in SU(2).$$

Y esta matriz tiene que cumplir que $M\overline{M}^t = I$, es decir

$$M\overline{M}^t = \begin{bmatrix} a\overline{a} + c\overline{c} & a\overline{b} + c\overline{d} \\ \overline{a}b + d\overline{c} & b\overline{b} + d\overline{d} \end{bmatrix} = I.$$

Resolviendo el sistema tenemos que las soluciones de estas 4 ecuaciones son $c = -\overline{b}$ y $d = \overline{a}$ por $c = -\overline{b}$ y $d = -\overline{a}$. Con esto tenemos que cualquier matriz $M \in SU(2)$ es de la forma

$$M = \begin{bmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

Ahora definimos $\phi : SU(2) \to \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$, como $\phi(M) = (a, b)$. Este mapeo está bien definido pues

$$1 = det(M) = a\overline{a} + b\overline{b} = |a|^2 + |b|^2,$$

lo cual implica que $(a, b) \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$. Además ϕ es claramente biyectiva y suave. Su inversa esta dada por

$$\phi^{-1}(a, b) = \begin{bmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

□

Ya vimos que el grupo $SU(2)$ es el grupo de las matrices complejas de la forma

$$Q = \begin{bmatrix} a + di & -b - ci \\ b - ci & a - di \end{bmatrix},$$

donde $det(Q) = 1$. Otra forma de ver a estas matrices es con el grupo de los cuaternios. A cada matriz la podemos ver de la siguiente forma

$$Q = \begin{bmatrix} a + di & -b - ci \\ b - ci & a - di \end{bmatrix} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

donde

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Estas matrices claramente cumplen $\mathbf{ijk} = -\mathbf{1} = \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2$ y como $det(Q) = 1$ entonces $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Esto concuerda con identificar $SU(2)$ con $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Proposición 1.28. *El álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ está formado por cuaternios con parte real igual a cero.*

Demostración.

Tomando en cuenta la representación en cuaternios de $SU(2)$ consideremos $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to SU(2)$ una curva suave, donde $\gamma(0) = \mathbf{1}$ y para cada $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ tenemos que $\gamma(s)\overline{\gamma(s)^T} = \mathbf{1}$. Derivando obtenemos que $\gamma'(s)\overline{\gamma(s)^T} + \gamma(s)\overline{\gamma'(s)^T} = 0$, si $s = 0$. Entonces $\gamma(0) = \mathbf{1}$ y por lo tanto $\gamma'(0) + \overline{\gamma'(0)^t} = 0$. Esto significa que un vector tangente $\gamma'(0)$ es un cuaternio sin parte real, es decir $\gamma'(0) \in \mathbb{R}\mathbf{i}+\mathbb{R}\mathbf{j}+\mathbb{R}\mathbf{k}$ y como $\mathfrak{su}(2)$ es un espacio vectorial de dimensión 3, entonces esto implica que $\mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}\mathbf{i} + \mathbb{R}\mathbf{j} + \mathbb{R}\mathbf{k}$.

□

1.5.3. Subgrupos Uniparamétricos

Definición 1.29. *Un subgrupo uniparamétrico de un grupo de Lie G es un homomorfismo de grupos de Lie $\alpha : \mathbb{R} \to G$.*

Proposición 1.30. *Los subgrupos uniparamétricos de un grupo de Lie G están en correspondencia con su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

Demostración.

Para $\alpha : \mathbb{R} \to G$ subgrupo uniparamétrico definimos el mapeo Ψ como $\alpha \xmapsto{\Psi} \alpha'(0)$, donde claramente $\alpha'(0) \in \mathfrak{g}$. Para un campo invariante izquierdo $x \in \mathfrak{g}$ definimos $x \xmapsto{\Psi^{-1}} \alpha_x$, donde $\alpha_x : \mathbb{R} \to G$ es la curva integral del campo x tal que $\alpha_x(0) = e$. Verifiquemos que α_x es un subgrupo uniparamétrico: sea Φ el flujo correspondiente al campo x. Entonces

$$\alpha_x(t + s) = \Phi_{t+s}(e) = \Phi_t(\Phi_s(e)).$$

Como $x \in \mathfrak{g}$ es invariante izquierdo se sigue que $\Phi_t(ge) = g\Phi_t(e)$ para todo $g \in G$. Denotamos $g = \Phi_s(e)$, con lo cual se satisface $\Phi_t(\Phi_s(e)) = \Phi_t(\Phi_s(e)e) = \Phi_s(e)\Phi_t(e) = \alpha_x(s)\alpha_x(t)$ lo que implica que α_x es un homomorfismo de grupos.

Es claro que la composición $x \mapsto \alpha_x \mapsto \alpha_x'(0)$ es la identidad. Por otro lado para α un subgrupo uniparamétrico con $\alpha'(0) = x$, notemos que α define un flujo $\Phi : \mathbb{R} \times G \to G$, $\Phi_t(g) = g\alpha(t)$ donde

$$\frac{d}{dt}\Phi|_{t=0} = dL_g(\alpha'(0)).$$

Es claro que es el mismo flujo correspondiente a $x \in \mathfrak{g}$ y por lo tanto el mapeo $x \mapsto \alpha'(0) = x \mapsto \alpha_x$ es la identidad lo cual termina la demostración.

□

Observación 1.31. *Para $x \in \mathfrak{g}$, tenemos que α_x es la única curva integral de x tal que $\alpha(0) = e$ y como x es invariante izquierdo entonces $L_g \circ \alpha_x$ es también una curva integral de x y es la única tal que $(L_g \circ \alpha_x)(0) = g$. En particular esto implica que los campos invariantes izquierdos son completos. Análogamente se puede ver que las curvas integrales de un campo vectorial invariante derecho está dado por $R_g \circ \alpha_x$.*

Ejemplo 1.32. *Para el grupo $GL(n, \mathbb{R})$ tenemos que el subgrupo uniparamétrico correspondiente a $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ es $\alpha_A : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$ $\alpha_A(t) = \mathrm{e}^{tA} = \sum_{n=0} \frac{1}{n!}(tA)^n$. Del mismo modo los subgrupos uniparamétricos de cualquier grupo lineal están dados por la exponencial de matrices.*

1.6. Mapeo Exponencial

Para G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, tomamos $x \in \mathfrak{g}$. Por la Proposición 1.30 existe un único subgrupo uniparamétrico $\alpha_x : \mathbb{R} \to G$, tal que $\alpha_x'(0) = x$. Esto nos permite definir el mapeo exponencial.

Definición 1.33. *Para G grupo de Lie definimos el mapeo exponencial como sigue*

$$exp : \mathfrak{g} \to G, \ exp(x) = \alpha_x(1).$$

Teorema 1.34. *Sea G grupo de Lie y $x \in \mathfrak{g}$. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $exp(tx) = \alpha_x(t)$.
2. $exp((t+s)x) = exp(tx)exp(sx)$.
3. $exp(-tx) = (exp(tx))^{-1}$.
4. $exp : \mathfrak{g} \to G$ *es* C^∞, *además es un difeomorfismo local entre vecindades de* $0 \in \mathfrak{g}$ *y* $e \in G$ *respectivamente.*

Demostración.

1. Tenemos que $exp(tx) = \alpha_{tx}(1)$ y es claro que $\alpha_{tx} = \alpha_x \circ \varphi_t$, donde $\varphi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_t(p) = tp$. De esta forma $\alpha_{tx}(1) = \alpha_x(\varphi_t(1)) = \alpha_x(t)$.
2. Por el inciso anterior $exp((t+s)x) = \alpha_{(t+s)x}(1) = \alpha_x(t+s) = \alpha_x(t)\alpha_x(s) = exp(tx)exp(sx)$.
3. Calculamos $exp(-tx) = \alpha_{-tx}(1) = \alpha_x(-t) = (\alpha_x(t))^{-1} = (\alpha_{tx}(1))^{-1} = exp(tx)^{-1}$.
4. Notemos que el mapeo $\Phi : \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{g} \to G \times \mathfrak{g}$, $\Phi(t, g, x) = (g\alpha_x(t), x)$ es el flujo del campo en $G \times \mathfrak{g}$ dado por $(g, x) \mapsto (L_g(x), 0)$, por lo que Φ es suave y su restricción a $\{1\} \times \{e\} \times \mathfrak{g} \to G$, $(1, e, x) \mapsto \alpha_x(1)$ coincide con exp y es suave. Además su diferencial $dexp : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es la identidad y por el teorema de la función inversa es un difeomorfismo local entre vecindades de $0 \in \mathfrak{g}$ y $e \in G$ respectivamente.

$\square$

Observación 1.35. *Si tenemos γ y β curvas en un grupo de Lie G tales que $\gamma(0) = e = \beta(0)$, definimos $\sigma(t) = \gamma(t)\beta(t)$. Es fácil ver que $\sigma'(0) = \gamma'(0) + \beta'(0)$ y de esta forma si el grupo de Lie es abeliano, entonces para $x, y \in \mathfrak{g}$ se cumple $exp(x + y) = \alpha_{x+y}(1) = \alpha_x(1)\alpha_y(1)$. Con lo que concluimos que el mapeo exponencial es un homomorfismo entre $\mathfrak{g}$ y G.*

La siguiente proposición ilustra la relación entre el mapeo exponencial y los homomorfismos de grupos de Lie.

Proposición 1.36. *Un homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : G \to H$ induce un diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle exp} \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H, \end{array}$$

donde para cada $x \in \mathfrak{g}$ se cumple que $\varphi(exp(x)) = exp(d\varphi(x))$.

Demostración.

Sea $x \in \mathfrak{g}$, sabemos que $\alpha'_x(0) = x$. Entonces $d\varphi(x) = (\varphi \circ \alpha_x)'(0) \in \mathfrak{h}$ y de esta forma $exp(d\varphi(x)) = (\varphi \circ \alpha_x)(1)$. Por otro lado $exp(x) = \alpha_x(1)$ y $\varphi(exp(x)) = \varphi(\alpha_x(1))$, por lo tanto $\varphi \circ exp = exp \circ d\varphi$.

□

Notación 1.37. *Tomando en cuenta el Ejemplo 1.32, cuando tengamos un grupo lineal $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ vamos a denotar el mapeo exponencial con la notación de la exponencial de matrices. Es decir, si $A \in \mathfrak{g}$ entonces denotamos $\mathrm{e}^A = exp(A)$.*

Lema 1.38. *Cualquier grupo de Lie conexo está generado por una vecindad de la identidad.*

El siguiente resultado es de gran importancia y es válido también para grupos topológicos.

Demostración.

Sea $U \subset G$ vecindad abierta tal que $e \in U$ y $U = U^{-1}$ (si es necesario tomamos $U \cap U^{-1}$). Consideremos el generado por U, $S = \{g_1 \cdots g_n | g_1, ..., g_n \in U, n \in \mathbb{N}\}$. Veamos ahora que $S = G$. S es abierto pues $\bigcup_{g \in S} gU = S$. Además si $g \notin S$ entonces $gS \cap S = \emptyset$ y de esta forma $S = G - \bigcup_{g \notin S} gS$. Es decir S es el complemento de un abierto, por lo cual S es cerrado también. Como G es conexo entonces $G = S$.

□

En consecuencia tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.39. *Un homomorfismo entre grupos de Lie conexos está determinado por su diferencial en la identidad.*

Demostración.

Sea $df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorfismo entre las álgebras de Lie de G y H, grupos de Lie conexos, Como el mapeo exponencial es un difeomorfismo local para una vecindad de $U \subset G$, entonces podemos definir f en la vecindad U, como sigue: $f(exp(x)) = exp(df(x)) \in H$. Por el Lema anterior, cualquier $g \in G$ es de la forma $g_1 \cdots g_n$ con $g_i \in U$ y de esta forma definimos $f : G \to H$, como $f(g) = f(g_1) \cdots f(g_n)$.

□

1.7. Automorfismos y Derivaciones

Definición 1.40. *Para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión n, definimos el grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}$ como $Aut(\mathfrak{g}) = \{\phi \in GL(\mathfrak{g}) | \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)], x, y \in \mathfrak{g}\}$.*

Proposición 1.41. *El grupo $Aut(\mathfrak{g})$ es un subgrupo cerrado de $GL(\mathfrak{g})$.*

Demostración.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con una producto interno, y $e_1, ..., e_n \in \mathfrak{g}$ una base, definimos $\Psi : GL(\mathfrak{g}) \to \mathbb{R}$,

$$\Psi(\phi) = \sum_{i<j} ||(\phi([e_i, e_j]) - [\phi(e_i), \phi(e_j)||^2.$$

Es claro que $Aut(\mathfrak{g}) = \Psi^{-1}(0)$, por lo tanto es un subgrupo cerrado de $GL(\mathfrak{g})$, al ser Ψ continua.

□

Definición 1.42. *Dada un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *definimos el álgebra de derivaciones de* $\mathfrak{g}$ *como*

$$Der(\mathfrak{g}) = \{\phi \in End(\mathfrak{g}) | \phi([x, y]) = [\phi(x), y] + [x, \phi(y)], x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

El álgebra de derivaciones $Der(\mathfrak{g})$ es subálgebra de $End(\mathfrak{g})$. A continuación verificaremos que es el álgebra de Lie del grupo de automorfismos $Aut(\mathfrak{g})$.

Proposición 1.43. $Der(\mathfrak{g})$ *es el álgebra de Lie del grupo de Lie* $Aut(\mathfrak{g})$.

Demostración.

Sea $\phi \in Lie(Aut(\mathfrak{g}))$, entonces $exp(t\phi) \in Aut(\mathfrak{g})$. Si $x, y \in \mathfrak{g}$ tenemos que

$$exp(t\phi)([x, y]) = [exp(t\phi)(x), exp(t\phi)(y)],$$

y de esta forma $\phi([x, y]) = \frac{d}{dt}([exp(t\phi)(x), exp(t\phi)(y)])|_{t=0} = [\phi(x), y] + [x, \phi(y)]$. Con esto concluimos que $Lie(Aut(\mathfrak{g})) \subset Der(\mathfrak{g})$. Ahora tomamos $\phi \in Der(\mathfrak{g})$ y consideramos las curvas $\alpha(t) = exp(t\phi)([x, y])$ y $\beta(t) = [exp(t\phi)(x), exp(t\phi)(y)]$, usando la restricción del mapeo exponencial $exp : End(\mathfrak{g}) \to GL(\mathfrak{g})$ a $Der(\mathfrak{g})$. Es claro que $\alpha(0) = [x, y] = \beta(0)$, además $\alpha'(t) = \phi(\alpha(t))$ y

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= [\phi(exp(t\phi)(x)), exp(t\phi)(y)] + [exp(t\phi), \phi(exp(t\phi)(y))] \\ &= \phi[exp(t\phi)(x), exp(t\phi)(y)] \\ &= \phi(\beta(t)). \end{aligned}$$

Entonces α y β son soluciones del campo $z' = \phi z$ con la misma condición inicial por lo tanto $\alpha = \beta$ y $\phi \in Lie(Aut(\mathfrak{g}))$ por lo tanto $Lie(Aut(\mathfrak{g})) = Der(\mathfrak{g})$.

□

1.8. Representación Adjunta

Cada $g \in G$ define un autormorfismo interno, dado por $\psi_g : G \to G$, $\psi_g(x) = gxg^{-1}$. Con esto podemos definir un homomorfismo de grupos que llamaremos la representación adjunta de G.

Definición 1.44. *Sea* G *un grupo de Lie. Definimos el siguiente homomorfismo de grupos de Lie* $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$*, donde* $Ad(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *es la diferencial de* ψ_g *en el neutro de* G.

La diferencial del homomorfismo Ad induce un homomorfismo entre las respectivas álgebras de Lie $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ que llamaremos la representación adjunta de $\mathfrak{g}$.

Proposición 1.45. *La representación adjunta* $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ *satisface que para todo* $x \in \mathfrak{g}$, $ad(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *es tal que* $ad(x)(y) = [x, y]$.

Demostración.

Para $x, y \in \mathfrak{g}$ tenemos $\psi_{\alpha_x(s)}\alpha_y(t) = \alpha_x(s)\alpha_y(t)\alpha_x(-s)$, y consideremos el mapeo $A : \mathbb{R}^2 \to G$, $A(s, t) = \psi_{\alpha_x(s)}\alpha_y(t)$. De esta forma $Ad(\alpha_x(s))(y) = \frac{d}{dt}A(s, t)|_{t=0} \in \mathfrak{g}$. Por lo cual

$$ad(x)(y) = \frac{d}{ds}(\frac{d}{dt}A(s, t)|_{t=0})|_{s=0}.$$

Ahora veamos como actúa el vector $ad(x)(y)$ en una función $f \in C^{\infty}(G;\mathbb{R})$, recordemos que $(ad(x)(y))(f) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(A(s,t))|_{(0,0)}$. Notemos que $f \circ A$ es igual a la composición de los siguientes mapeos

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (s,t) \mapsto (s,t,-s)\ y\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (a,b,c) \mapsto f(\alpha_x(a)\alpha_y(b)\alpha_x(c)).$$

Utilizando la regla de la cadena concluimos que

$$(ad(x)(y))(f) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(A(s,t))|_{(0,0)} = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(\alpha_x(s)\alpha_y(t))|_{(0,0)} - \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(\alpha_y(t)\alpha_x(s))|_{(0,0)}.$$

Como ya vimos $(t,g) \mapsto g\alpha_y(t)$ es el flujo correspondiente al campo invariante izquierdo $y \in \mathfrak{g}$ así tenemos que $\frac{d}{dt} f(g\alpha_x(s)\alpha_y(t))|_{t=0} = y(f(g\alpha_x(s)))$ y análogamente para x tenemos que $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(g\alpha_x(s)\alpha_y(t))|_{(0,0)} = (xy(f))(g)$. Haciendo lo mismo para el otro sumando concluimos que $ad(x)(y)(f) = xy(f) - yx(f) = [x,y]$.

□

En consecuencia tenemos el siguiente resultado para subgrupos de Lie normales.

Corolario 1.46. *Si H es subgrupo de Lie normal de G, entonces $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demostración.

Como H es subgrupo normal de G, se cumple $\psi_g(H) \subset H$, para todo $g \in G$. Entonces $d\psi_g(\mathfrak{h}) = Ad(g)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ y para todo $x \in \mathfrak{g}$ y $y \in \mathfrak{h}$ tenemos que $Ad(exp(tx)) \in \mathfrak{h}$. Asi concluimos $[x,y] = ad(x)(y) = \frac{d}{dt} Ad(exp(tx))(Y)|_{t=0} \in \mathfrak{h}$.

□

Observación 1.47. *Usando 1.36 tenemos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "ad"] \arrow[d, "exp"'] & Der(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\mathrm{e}"] \\
G \arrow[r, "Ad"] & Aut(\mathfrak{g}).
\end{tikzcd}$$

Definición 1.48. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es abeliana si $[x,y] = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.*

El diagrama conmutativo de la Observación 1.47 ilustra entre otras cosas la relación entre álgebras de Lie abelianas y grupos de Lie abelianos. Ya que si el grupo es abeliano entonces Ad es un homomorfismo trivial y por lo tanto ad también lo cual implicaría que $\mathfrak{g}$ es abeliana. Por ello podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 1.49. *Si un grupo de Lie G es abeliano, entonces $\mathfrak{g}$ también lo es.*

1.8.1. Caracterización de grupos de Lie abelianos

El siguiente teorema nos ilustra por completo cómo son los grupos de Lie abelianos conexos. Para una demostración de este hecho consultar [29].

Teorema 1.50. *Cualquier grupo de Lie conexo abeliano es isomorfo a $\mathbb{R}^l \times (\mathbb{S}^1)^k$.*

1.9. Grupo Cubriente

En esta sección utilizaremos algunas herramientas de topología algebraica, el lector deberá estar familiarizado con los conceptos de espacio localmente conectable por trayectorias, localmente simplemente conexo, homotopía y grupo fundamental.

Definición 1.51. *Sea X un espacio topológico, decimos que un espacio topológico C es un cubriente de X, si existe una función continua y suprayectiva $p : C \to X$ tal que para todo $x \in X$ existe $U \subset X$ vecindad de x, tal que $p^{-1}(U)$ es una unión de abiertos disjuntos en C, donde cada uno de ellos es homeomorfo a U a través de p.*

Si $p : N \to M$ es un cubriente donde M es una variedad diferenciable, podemos definir un atlas para N utilizando que p es un homeomorfismo local, de forma que p es un mapeo suave. En este contexto vamos a enunciar el criterio de levantamiento para espacios cubrientes. Para una demostración de este criterio y un tratado más profundo de los espacios cubrientes el lector puede consultar [32].

Teorema 1.52. *Sea $p : C \to M$ un mapeo cubriente y $f : N \to M$ un mapeo suave con $q \in f^{-1}(p)$, el mapeo f admite un levantamiento suave $\widetilde{f} : N \to C$ con $\widetilde{f}(q) = \widetilde{p}$ si y sólo si $f_{\#}(\pi_1(N, q)) \subset p_{\#}(\pi_1(C, \widetilde{p}))$. Si N es conexo, el levantamiento es único.*

Definición 1.53. *Decimos que un cubriente $\widetilde{X}$ de un espacio topológico X es universal si es simplemente conexo.*

Corolario 1.54. *Dos cubrientes universales $\widetilde{X}$ y $\widetilde{X}'$ del mismo espacio X, son homeomorfos.*

Observación 1.55. *Como cualesquiera dos cubrientes universales de un espacio X son homeomorfos, vamos a fijar un tipo de homeomorfismos de los cubrientes y referirnos a él como el cubriente universal de X.*

Observación 1.56. *Si M es una variedad diferenciable con un cubriente universal $\widetilde{M}$ utilizando la unicidad de la propiedad de levantamiento es fácil verificar que la estructura suave en $\widetilde{M}$ inducida por el mapeo cubriente es única.*

Notación 1.57. *Cuando hablemos de el cubriente universal de una variedad M lo denotaremos como $\widetilde{M}$.*

En [34] podemos encontrar el siguiente teorema que garantiza la existencia del cubriente universal para cualquier variedad diferenciable conexa.

Teorema 1.58. *Si X es un espacio topológico conexo, localmente conectable por trayectorias y localmente simplemente conexo, entonces X tiene un cubriente universal $\widetilde{X}$.*

Observación 1.59. *Es fácil demostrar que cualquier variedad diferenciable conexa satisface las hipótesis del Teorema 1.58 por lo cual tenemos que cualquier variedad diferenciable tiene un cubriente universal.*

Teorema 1.60. *Cualquier grupo de Lie conexo, tiene un cubriente $\widetilde{G}$ simplemente conexo que también es un grupo de Lie. Además el mapeo cubriente es un homomorfismo de grupos de Lie.*

Demostración.

Sea $\widetilde{G}$ el cubriente universal de G, veremos que $\widetilde{G}$ tiene una estructura de grupo de Lie. Definimos el mapeo

$$\alpha : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to G,\ \alpha(\widetilde{g}, \widetilde{h}) = p(\widetilde{g})p(\widetilde{h})^{-1}.$$

Fijamos $\widetilde{e} \in p^{-1}(e)$. Como $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ es simplemente conexo existe un único $\widetilde{\alpha} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ tal que $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$ y $\widetilde{\alpha}(\widetilde{e}, \widetilde{e}) = \widetilde{e}$, como lo indica el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{G} \arrow[d, "p"] \\ \widetilde{G} \times \widetilde{G} \arrow[ur, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"] & G. \end{tikzcd}$$

Vamos a definir la operación de $\widetilde{G}$ a través del mapeo $\widetilde{\alpha}$. Sean $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in \widetilde{G}$. Definimos

$$\widetilde{h}^{-1} = \widetilde{\alpha}(\widetilde{e}, \widetilde{h}) \ y \ \widetilde{g}\widetilde{h} = \widetilde{\alpha}(\widetilde{g}, \widetilde{h}^{-1}).$$

Notemos que $\widetilde{e}^{-1} = \widetilde{\alpha}(\widetilde{e}, \widetilde{e}) = \widetilde{e}$. Ahora vamos a verificar que $\widetilde{g}\widetilde{e} = \widetilde{g} = \widetilde{e}\widetilde{g}$. Calculamos

$$\begin{aligned} p(\widetilde{e}\widetilde{g}) &= p(\widetilde{\alpha}(\widetilde{e}, \widetilde{g}^{-1})) \\ &= \alpha(\widetilde{e}, \widetilde{g}^{-1}) \\ &= p(\widetilde{e})p(\widetilde{g}^{-1})^{-1} \\ &= p(\widetilde{g}^{-1})^{-1} \\ &= (p(\widetilde{\alpha}(\widetilde{e}, \widetilde{g})))^{-1} \\ &= (\alpha(\widetilde{e}, \widetilde{g}))^{-1} \\ &= (p(\widetilde{e})p(\widetilde{g})^{-1})^{-1} \\ &= p(\widetilde{g}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\widetilde{g}\widetilde{e}) &= p(\widetilde{\alpha}(\widetilde{g}, \widetilde{e}^{-1})) \\ &= p(\widetilde{\alpha}(\widetilde{g}, \widetilde{e})) \\ &= \alpha(\widetilde{g}, \widetilde{e}) \\ &= p(\widetilde{g}). \end{aligned}$$

Eso implica que los mapeos $\widetilde{g} \mapsto \widetilde{g}\widetilde{e}$, $\widetilde{g} \mapsto \widetilde{e}\widetilde{g}$ y $\widetilde{g} \mapsto \widetilde{g}$ conmutan con p en el diagrama,

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{G} \arrow[d, "p"] \\ \widetilde{G} \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "p"] & G. \end{tikzcd}$$

Por la unicidad del levantamiento de mapeos en espacios cubrientes esto significa que estos mapeos son iguales y por lo tanto $\widetilde{g}\widetilde{e} = \widetilde{g} = \widetilde{e}\widetilde{g}$. Utilizando una técnica similar podemos verificar que $\widetilde{g}(\widetilde{h}\widetilde{i}) = (\widetilde{g}\widetilde{h})\widetilde{i}$, $\widetilde{g}\widetilde{g}^{-1} = \widetilde{e} = \widetilde{g}^{-1}\widetilde{g}$. Con lo que concluimos que $\widetilde{G}$ tiene estructura de grupo y como $\widetilde{\alpha}$ es suave entonces $\widetilde{G}$ es un grupo de Lie.

□

Observación 1.61. *Si $p : \widetilde{G} \to G$ es cubriente universal y $q : H \to G$ es cubriente de G con H conexo, por el Teorema 1.52 existe un único $f : \widetilde{G} \to H$ tal que $p = q \circ f$, lo cual implica que $\widetilde{G}$ es cubriente de cualquier cubriente de G. Este hecho justifica el nombre universal.*

Observación 1.62. *Si $p : \widetilde{G} \to G$ es el cubriente universal de un grupo de Lie G, como p es difeomorfismo local y es homomorfismo de grupos, entonces $\widetilde{G}$ y G tienen la misma álgebra de Lie.*

1.10. Los Tres Teoremas de Lie

Una parte importante del trabajo de Sophus Lie son sus tres Teoremas fundamentales, publicados en su obra de 3 volúmenes *Theorie der Transformationsgruppen* en el periodo de 1888 a 1893 en Leipzig. El segundo y el tercero son muy citados en libros de texto que estudian los grupos y álgebras de Lie, a diferencia del primero que no es tan mencionado debido a que apunta a un problema que se considera básico con el lenguaje actual. Originalmente está enunciado en términos locales y el enunciado sería el siguiente.

Teorema 1.63. ***(Primer Teorema de Lie)*** *Un homomorfismo de grupos de Lie está determinado localmente por un homomorfismo de álgebras de Lie.*

Este hecho quedó demostrado en el Corolario 1.39. Para una discusión más profunda de por qué se omite este Teorema de los textos contemporáneos consultar [19]. El segundo Teorema de Lie cuya demostración podemos consultar en [34] dice lo siguiente.

Teorema 1.64. ***(Segundo Teorema de Lie)*** *Sean G y H grupos de Lie con $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ sus respectivas álgebras de Lie, donde G es simplemente conexo. Sea $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : G \to H$ tal que $d\varphi = \psi$.*

Una consecuencia directa de este Teorema es el siguiente corolario.

Corolario 1.65. *Si G y H son grupos de Lie simplemente conexos con álgebras de Lie isomorfas, entonces G y H son isomorfos.*

Para la prueba del Tercer Teorema de Lie, necesitamos dos resultados, uno es de álgebras de Lie mejor conocido como el Teorema de Ado, cuya demostración se puede encontrar en [18]. Y el otro es un teorema que nos garantiza una correspondencia entre subálgebras de Lie y subgrupos de Lie cuya demostración puden consultar en [34].

Teorema 1.66. ***(Ado)*** *Cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita es isomorfa a una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ para alguna n.*

Teorema 1.67. *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{h}$ subálgebra de $\mathfrak{g}$. Entonces existe un único subgrupo de Lie $H \subset G$ conexo tal que $Lie(H) = \mathfrak{h}$.*

Teorema 1.68. ***(Tercer Teorema de Lie)*** *Cualquier álgebra de Lie de dimensión finita es el álgebra de Lie de algún grupo de Lie simplemente conexo.*

Demostración.
Por el Teorema de Ado 1.66, $\mathfrak{g}$ es subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ para algún n. Por el Teorema 1.67 existe G subgrupo de Lie conexo de $GL(n, \mathbb{R})$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Tomamos $\widetilde{G}$ el cubriente universal de G y éste es el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. La unicidad se sigue del Corolario 1.65.
□

1.11. Espacios Homogéneos

En esta sección daremos una visión panorámica de algunos resultados relacionados con las herramientas de acciones de grupos de Lie en variedades que utilizaremos más adelante en este trabajo. Para las demostraciones de los resultados de esta sección el lector puede consultar [34] y [2] para una discusión mas profunda de la teoría de acciones de grupos de Lie sobre variedades.

Teorema 1.69. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G, y sea $G/H = \{gH|g \in G\}$ el conjunto de clases laterales izquierdas. Sea $\pi : G \to G/H$ la proyección natural $\pi(g) = gH$. Entonces G/H tiene una única estructura diferenciable tal que:*

1. *π es C^∞.*

2. *El mapeo $\pi : G \to G/H$ es una submersión.*

Las variedades de la forma G/H se llaman espacios homogéneos.

Definición 1.70. *Sea M variedad diferenciable y G un grupo de Lie. Una acción izquierda de G en M es un mapeo diferenciable $l : G \times M \to M$ tal que $l(e, p) = p$ y $l(g, l(h, p)) = l(gh, p)$.*

Definición 1.71. *Decimos que un acción izquierda $l : G \times M \to M$ es transitiva si para todo $p, q \in M$ existe $g \in G$ tal que $l(g, p) = q$.*

Definición 1.72. *Si $l : G \times M \to M$ es una acción izquierda, para $p \in M$ definimos el subgrupo cerrado de G, $G_p = \{g \in G|l(g, p) = p\}$, llamado el grupo de isotropía de $p \in M$ ó estabilizador de $p \in M$.*

Teorema 1.73. *Sea $l : G \times M \to M$ una acción izquierda transitiva. Para $p \in M$ y G_p el estabilizador de p, el mapeo $G/G_p \to M$, dado por $gG_p \mapsto l_g(p)$ es un difeomorfismo.*

1.12. Toro Maximal

En esta sección definiremos el concepto de toro maximal y citaremos el resultado central que involucra a estos grupos de Lie. Si el lector está interesado en un estudio más detallado de los toros en grupos compactos puede consultar [4] o [14], en donde podrá encontrar las demostraciones de los resultados aquí mencionados.

Definición 1.74. *Un toro T es un grupo de Lie compacto, conexo y abeliano.*

Observación 1.75. *Por la caracterización de grupos de Lie conexos y abelianos podemos concluir que cualquier toro es un grupo de Lie isomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$.*

Definición 1.76. *Si tenemos un grupo de Lie compacto G, decimos que un toro $T \subset G$ es maximal en G, si no está contenido propiamente en ningún toro en G.*

1.12.1. Teorema del Toro Maximal

Teorema 1.77. *Si G es un grupo de Lie compacto y conexo se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Si S y T son toros maximales de G entonces, existe $x \in G$ tal que $T = xSx^{-1}$.*
2. *Cualquier $g \in G$ pertenece a algún toro maximal.*

Una de las consecuencias más importantes de este Teorema del Toro Maximal es el siguiente corolario.

Corolario 1.78. *Sea G grupo de Lie compacto y conexo. Entonces el mapeo exponencial es suprayectivo.*

Capítulo 2

Geometría Riemanniana de un Grupo de Lie

En este capítulo vamos a estudiar conceptos básicos de geometría Riemanniana en métricas invariantes izquierdas en un grupo de Lie y métricas bi–invariantes. Todo el material aquí revisado se puede consultar en [2], [7], [9] y [24].

2.1. Métricas Invariantes izquierdas

Definición 2.1. *Una métrica $\langle , \rangle$ riemanniana en un grupo de Lie G, es invariante izquierda si*

$$\langle u, v \rangle_g = \langle (dL_h)_g(u), (dL_h)_g(v) \rangle_{hg},$$

para todo $g, h \in G$ y $u, v \in T_gG$.

Proposición 2.2. *Hay una correspondencia biyectiva entre métricas invariantes izquierdas en un grupo de Lie G y los productos internos en $\mathfrak{g}$.*

Demostración.
Si $\langle , \rangle$ es un producto interno en $\mathfrak{g}$, definimos $\langle u, v \rangle_g = \langle (dL_{g^{-1}})_g(u), (dL_{g^{-1}})_g(v) \rangle_e$ para todo $u, v \in T_gG$ y $g \in G$. Es claro que es una métrica invariante izquierda en G. Ahora si tenemos una métrica invariante izquierda en G, en particular tenemos un producto interno en $\mathfrak{g}$.
□

Proposición 2.3. *Dado G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, si $e_1, ..., e_n$ es una base de $\mathfrak{g}$ existe una única métrica riemanniana invariante izquierda tal que los vectores $e_1, ..., e_n$ son ortonormales.*

Demostración.
Definimos una métrica en $\mathfrak{g}$ de la siguiente forma, tomamos $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ y por extensión bilineal obtenemos un producto interno en $\mathfrak{g}$ y por lo anterior una métrica riemanniana invariante izquierda en G.
□

Definición 2.4. *Para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definimos $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g}) = \{\langle , \rangle | \text{es producto interno de } \mathfrak{g}\}$, que es el conjunto de métricas invariantes izquierdas de $\mathfrak{g}$.*

La siguiente proposición nos dice que el conjunto de métricas invariantes izquierdas en un grupo de Lie G se puede identificar con el espacio homogéneo $GL(n, \mathbb{R})/O(n)$.

Proposición 2.5. *Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión n, el espacio $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$ es una variedad de dimensión $\frac{1}{2}(n+1)n$ homeomorfa a $GL(n, \mathbb{R})/O(n)$.*

Demostración.
Podemos definir una acción izquierda de $Gl(\mathfrak{g})$ en $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$ de la siguiente forma para $A \in Gl(\mathfrak{g})$ y $\mu \in \widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$, fijamos $(A, \mu) \mapsto \mu_A$, donde μ_A está definido como $\mu_A(u, v) = \mu(A^{-1}(u), A^{-1}(v))$, para $u, v \in \mathfrak{g}$. Esta acción es transitiva en $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$, pues si $\mu, \nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$, y $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ son bases ortonormales de μ y ν respectivamente, sabemos que existe $A \in Gl(\mathfrak{g})$ tal que $A^{-1}(a_i) = b_i$ por lo que $\mu_A = \nu$. El estabilizador de un elemento $\mu \in \widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$ se corresponde con el subgrupo de isometrías bajo la métrica μ. Utilizando el Teorema 1.73 podemos identificar al espacio $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$ con el espacio homogéneo $Gl(\mathfrak{g})/O(\mathfrak{g})$ de dimensión $\frac{1}{2}(n+1)n$. □

Para un estudio más profundo del espacio $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$ se puede consultar [22]. En el siguiente capítulo nos enfocaremos en estudiar el subespacio de $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$ consistente de todas las métricas bi-invariantes.

Observación 2.6. *Dada una métrica invariante izquierda en un grupo de Lie G, tenemos que las traslaciones izquierdas son isometrías de G y por lo tanto G es una variedad Riemanniana homogénea.*

Observación 2.7. *En una variedad Riemanniana un campo vectorial es de Killing si el flujo del campo actúa por isometrías sobre la variedad. Notemos que por la Observación 1.31 tenemos que en un grupo de Lie con una métrica invariante izquierda el flujo de un campo vectorial invariante derecho esta dado por $\Phi_t(g) = R_g \circ \alpha_x(t) = \alpha_x(t)g$, es decir el flujo está dado por traslaciones izquierdas y por lo tanto los campos invariantes derechos son campos de Killing en una métrica invariante izquierda.*

Proposición 2.8. *Un grupo de Lie G es un espacio completo.*

Demostración.
La bola cerrada $\overline{B}_\varepsilon(e)$ de radio épsilon alrededor del neutro e es compacta y con traslaciones izquierdas podemos obtener una bola compacta de radio $\varepsilon > 0$ alrededor de cualquier punto de G.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy en G, sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_i, a_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $i, j > N$. Consideremos $\overline{B_{a_m}}(\varepsilon)$ con $m > N$ y de lo anterior es claro que $a_j \in \overline{B_{a_m}}(\varepsilon)$ para todo $j > N$. Con esto tenemos que la cola de la sucesión $\{a_n\}$ cae dentro de $\overline{B_{a_m}}(\varepsilon)$ que es compacto y por lo tanto $\{a_n\}$ tiene una subsucesión que converge a $p \in \overline{B_{a_m}}(\varepsilon)$. Pero como $\{a_n\}$ es de Cauchy también converge a algún p. Por lo tanto G es completo. □

Observación 2.9. *Si G es un grupo de Lie con una métrica invariante izquierda, dada $\{e_1, ..., e_n\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{g}$, las constantes de estructura definidas en la Definición 1.9 están dadas por $\alpha_{ijk} = \langle [e_i, e_j], e_k \rangle$.*

Observación 2.10. *Como ya vimos en la Observación 1.11 cualquier colección de números reales $\{\alpha_{ijk}\}_{i,i,k=1}^n$ que satisface las condiciones*

1. $\alpha_{ijk} + \alpha_{jik} = 0$,

2. $\sum_{m,r}(\alpha_{jkm}\alpha_{imr} + \alpha_{kim}\alpha_{jmr} + \alpha_{ijm}\alpha_{kmr}) = 0$,

determina una estructura de álgebra de Lie en cualquier espacio vectorial V de la siguiente forma: para una base $v_1, ..., v_n \in V$ consideremos la extensión bilineal de

$$[v_i, v_j] = \sum_k \alpha_{ijk} v_k.$$

Además la métrica $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ es la única que satisface $\langle [v_i, v_j], v_k \rangle = \alpha_{ijk}$. En conclusión podemos decir que las constantes de estructura caracterizan por completo al álgebra de Lie y a una métrica invariante izquierda.

2.2. Métricas bi-invariantes

En este trabajo pondremos especial atención a las métricas bi-invariantes y sus propiedades de curvatura, comenzamos el estudio con la siguiente definición.

Definición 2.11. *Decimos que una métrica riemanniana en un grupo de Lie es bi-invariante si es invariante bajo traslaciones izquierdas y derechas.*

El siguiente teorema se puede consultar en [2].

Teorema 2.12. *Cualquier grupo de Lie compacto G admite una métrica bi-invariante.*

En [24] Milnor demuestra los siguientes lemas 2.13 y2.14.

Lema 2.13. *Una métrica invariante izquierda en un grupo de Lie G es invariante derecha si y sólo si $Ad(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es una isometría para cualquier elemento $g \in G$.*

Demostración.
Sean L_g y R_g traslaciones izquierda y derecha por $g \in G$. Recordemos que $Ad(g)$ está inducida por el mapeo $L_g \circ R_{g^{-1}} : G \to G$. Como la métrica $\langle , \rangle$ es invariante izquierda tenemos que $L_g^*(\langle , \rangle) = \langle , \rangle$ y si es invariante derecha $R_g^*(\langle , \rangle) = \langle , \rangle$, entonces evidentemente $(L_g \circ R_{g^{-1}})^*(\langle , \rangle) = \langle , \rangle$ y esto implica que $Ad(g)$ es una isometría. El converso se sigue de la definición. □

Lema 2.14. *Si G es un grupo de Lie conexo, una métrica invariante izquierda es bi-invariante si y sólo si $ad(x)$ es anti-adjunta para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Demostración.
Si g está lo suficientemente cerca de e, entonces $g = exp(x)$ para alguna $x \in \mathfrak{g}$. Recordemos que debido al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "ad"] \arrow[d, "exp"'] & Der(\mathfrak{g}) \arrow[d, "e"] \\ G \arrow[r, "Ad"] & Aut(\mathfrak{g}), \end{tikzcd}$$

tenemos que $Ad(g) = Ad(exp(x)) = \mathrm{e}^{ad(x)}$. Por el Lema anterior si la métrica es bi-invariante entonces $Ad(g)$ es una isometría. En particular $\langle Ad(g)(u), v\rangle = \langle u, Ad(g)^{-1}(v)\rangle$ y esto implica que $Ad(g)^{-1} = Ad(g)^*$. Por lo tanto

$$Ad(g)^{-1} = Ad(g^{-1}) = Ad(exp(-x)) = \mathrm{e}^{ad(-x)} = \mathrm{e}^{-ad(x)}.$$

Por otro lado

$$Ad(g)^* = Ad(exp(x))^* = (\mathrm{e}^{ad(x)})^* = \mathrm{e}^{ad(x)^*}.$$

Con lo cual concluimos que $ad(x)$ es anti-adjunta. Ahora recordemos que un grupo de Lie conexo está generado por cualquier vecindad U de e, es decir el conjunto $S = \{g_1 \cdots g_n | g_i \in U, n \in \mathbb{N}\}$ satisface $G = \langle S\rangle$, entonces para un elemento $y \in \mathfrak{g}$ tenemos que $exp(y) = h = g_1^{a_1} \cdots g_n^{a_n}$ y $Ad(h) = Ad(g_1^{a_1} \cdots g_n^{a_n})) = Ad(g_1)^{a_1} \cdots Ad(g_n)^{a_n}$. Por lo visto anteriormente cada $Ad(g_i)$ es una transformación ortogonal y por lo tanto $Ad(h)$ es ortogonal. Por lo ya mencionado anteriormente $-ad(y) = ad(y)^*$. El converso se sigue revirtiendo los pasos anteriores.
$\square$

Esta propiedad nos permite re enunciar una definición equivalente a la Definición 2.11, para saber cuándo un álgebra de Lie admite una métrica bi-invariante.

Definición 2.15. *Una métrica en $\mathfrak{g}$ es bi-invariante si $ad(x)$ es anti-adjunta para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Las métricas bi-invariantes y los grupos de Lie simples tienen una relación interesante que será de gran relevancia para este trabajo. A continuación veremos algunos resultados que reflejan esa relación.

Definición 2.16. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es simple si no es abeliana y sus únicos ideales son $\{0\}$ y $\mathfrak{g}$.*

Definición 2.17. *Un grupo de Lie G es simple si $\mathfrak{g}$ es simple.*

Algunos ejemplos de grupos de Lie simples son $SU(2)$, $SL(2, \mathbb{R})$, $SL(3, \mathbb{R})$ y $SU(3)$. El lector interesado en más ejemplos puede consultar la clasificación de álgebras de Lie en [11].

Definición 2.18. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es semisimple si es suma directa de ideales simples.*

Definición 2.19. *Un grupo de Lie G es semisimple si $\mathfrak{g}$ es semisimple.*

Lema 2.20. *Si $\mathfrak{g}$ tiene una métrica bi-invariante, entonces el complemento ortogonal de cualquier ideal es también un ideal. Por lo tanto $\mathfrak{g}$ puede expresarse como una suma directa de ideales simples ortogonales e ideales conmutativos sin ideales propios.*

Demostración.
Sea y un vector ortogonal a un ideal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$. Como la métrica en $\mathfrak{g}$ es bi-invariante, ad es antiadjunta. Entonces para todo $z \in \mathfrak{a}$ y $x \in \mathfrak{g}$ tenemos que $\langle [x, y], z\rangle = -\langle y, [x, z]\rangle = 0$ pues $[x, z] \in \mathfrak{a}$. Por lo tanto $[x, y]$ es ortogonal a $\mathfrak{a}$. Esto implica que $[\mathfrak{a}^\perp, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}^\perp$, es decir $\mathfrak{a}^\perp$ es un ideal, y $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$. La descomposición en ideales simples se sigue por inducción.
$\square$

La siguiente proposición que se puede encontrar en [2] y [24], será de vital importancia en el siguiente capítulo. Para la demostración de esta necesitamos recordar que por el tercer Teorema de Lie 1.68 cualquier álgebra de Lie de dimensión finita es el álgebra de Lie de algún grupo de Lie simplemente conexo.

Proposición 2.21. *Sea $\mathfrak{g}$ con una métrica bi-invariante, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$ es una suma directa de ideales simples e ideales conmutativos sin ideales propios, donde el grupo de Lie simplemente conexo $\widetilde{G}$ asociado a $\mathfrak{g}$ se puede expresar como el producto $A_1 \times \cdots \times A_k$ de subgrupos normales. Además para cada A_i tenemos dos opciones:*

1. *Si $\mathfrak{a}_i$ es conmutativo, entonces es de dimensión 1 y $A_i \cong \mathbb{R}$.*

2. *Si $\mathfrak{a}_i$ es no conmutativo entonces el centro de $\mathfrak{a}_i$ debe ser trivial y A_i tiene curvatura de Ricci estrictamente positiva y además A_i es compacto.*

Demostración.

Tenemos que para $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$, por el Tercer Teorema de Lie existe algún $\widetilde{G}$ grupo de Lie simplemente conexo tal que $Lie(\tilde{G}) = \mathfrak{g}$. Ahora consideremos el mapeo exponencial $exp : \mathfrak{g} \to \tilde{G}$ y para cada $\mathfrak{a}_i$ consideramos A_i el subgrupo normal de $\tilde{G}$ generado por $exp(\mathfrak{a}_i) \subset \tilde{G}$. Notemos que $A_1 \times \cdots \times A_k$ es simplemente conexo y $Lie(A_1 \times \cdots \times A_k) = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$. La función $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$, definida por $\psi(x_1 + \cdots + x_k) = (x_1, ..., x_k)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Entonces por el segundo Teorema de Lie 1.64 sabemos que existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : \tilde{G} \to A_1 \times \cdots \times A_k$ tal que $d\varphi = \psi$. De igual forma $\hat{\psi} : \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k \to \mathfrak{g}$, dada por $\hat{\psi}(x_1, ..., x_k) = x_1 + \cdots + x_k$ es un homomorfismo de álgebras de Lie y por el segundo Teorema de Lie 1.64 existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\hat{\varphi} : A_1 \times \cdots \times A_k \to \tilde{G}$ tal que $d\hat{\varphi} = \hat{\psi}$. Consideremos ahora las composiciones

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k \xrightarrow{\hat{\psi}} \mathfrak{g},$$

$$\tilde{G} \xrightarrow{\varphi} A_1 \times \cdots \times A_k \xrightarrow{\hat{\varphi}} \tilde{G}.$$

Notemos que $\hat{\psi} \circ \psi = Id_{\mathfrak{g}}$, y de nuevo por el segundo Teorema de Lie 1.64 tenemos que

$$d(\hat{\varphi} \circ \varphi) = \hat{\psi} \circ \psi = Id_{\mathfrak{g}}.$$

De igual forma tenemos que $\psi \circ \hat{\psi} = Id_{\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k}$ y por lo tanto

$$d(\varphi \circ \hat{\varphi}) = \psi \circ \hat{\psi} = Id_{\mathfrak{a}_1 \times \cdots \times \mathfrak{a}_k}.$$

Con esto concluimos que $\hat{\varphi} \circ \varphi = Id_{\tilde{G}}$ y $\varphi \circ \hat{\varphi} = Id_{A_1 \times \cdots \times A_k}$, por lo tanto φ es un isomorfismo de grupos de Lie.

Si $\mathfrak{a}_i$ es conmutativa entonces $[X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{a}_i$. Por lo que cualquier subespacio de $\mathfrak{a}_i$ es un ideal. Pero como $\mathfrak{a}_i$ es simple y no trivial entonces tiene que ser de dimensión 1.

El último punto quedará verificado con los dos primeros resultados del capítulo de curvatura de Ricci ver sección 5.1.

□

En 1971 Jeff Cheeger y Detlef Gromoll publicaron un articulo donde demostraron el Teorema del alma ([8, Theorem 5]) que dice lo siguiente.

Teorema 2.22. *Sea M una variedad completa localmente homogénea con curvatura de Ricci no negativa. Entonces M es isométrica a un haz vectorial sobre un espacio compacto localmente homogéneo S. Además S y M admiten métricas localmente homogéneas con curvatura seccional no negativa.*

En el caso de la Proposición 2.21, el grupo $\widetilde{G}$ se descompone en el producto de subgrupos A_i donde solo hay factores abelianos de dimensión 1 y factores compactos con curvatura de Ricci estrictamente positiva. Como veremos más adelante, los grupos abelianos serán planos por lo que el grupo $\widetilde{G}$ satisface las hipótesis del Teorema del alma y en este caso el subgrupo de $\widetilde{G}$ formado por el producto de los A_i compactos jugaría el papel del alma de $\widetilde{G}$.

Para un grupo de Lie conexo que admite una métrica bi-invariante Milnor da la siguiente descripción.

Lema 2.23. *Un grupo de Lie conexo admite una métrica bi-invariante si y sólo si es isomorfo al producto cartesiano $K \times \mathbb{R}^l$, donde K es compacto.*

Demostración.
Si G admite una métrica bi-invariante entonces por la Proposición 2.21 su cubriente universal $\widetilde{G}$ se descompone en un producto cartesiano de un grupo compacto H y el grupo aditivo $\mathbb{R}^m$. Además por el primer teorema de isomorfismo de grupos tenemos que $G \cong \widetilde{G}/L$ donde L es un subgrupo normal y discreto de $\widetilde{G}$. Ahora proyectamos L en $\mathbb{R}^m$ con la proyección canónica $\pi : H \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, consideramos V el subespacio vectorial generado por $\pi(L) \subset \mathbb{R}^m$ y $V^\perp$ su complemento ortogonal. Entonces tenemos

$$G \cong (H \times \mathbb{R}^m)/L \cong ((H \times V)/L) \times V^\perp.$$

Notemos que $H \times V/L$ es compacto pues H es compacto y $\pi(L) = \mathbb{Z}x_1 + \cdots + \mathbb{Z}x_k$. Con lo cual $V/\pi(L) \cong \mathbb{T}^k$, que es compacto. Finalmente $V^\perp$ es isomorfo a $\mathbb{R}^l$ y con esto concluimos que $((H \times V)/L) \times V^\perp$ es de la forma $K \times \mathbb{R}^l$.

Ahora es claro que cualquier grupo conmutativo admite una métrica bi-invariante y por el Teorema 2.12 cualquier grupo compacto admite una métrica bi-invariante.

□

La siguiente definición será de utilidad para caracterizar a las álgebras de Lie con métricas bi-invariantes.

Definición 2.24. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, definimos el álgebra derivada $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ como el subespacio de $\mathfrak{g}$ generado por los elementos de la forma $[x, y] \in \mathfrak{g}$.*

Es claro que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es siempre un ideal de $\mathfrak{g}$. Antes de continuar con la siguiente sección, vamos a enunciar un corolario que es consecuencia de la Proposición 2.21. Este corolario nos será útil más adelante.

Corolario 2.25. *Sea G un grupo de Lie compacto, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{b}$, donde $\mathfrak{s}$ es semisimple y $\mathfrak{b} = Z(\mathfrak{g})$ es abeliana.*

Observación 2.26. *Adicionalmente en [21, Corollary 4.25] se demuestra que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus Z(\mathfrak{g})$. Es decir el álgebra semisimple corresponde a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

2.3. Conexión de Levi-Civita en un grupo de Lie

Teorema 2.27. *Dado un grupo de Lie G con una métrica invariante izquierda $\langle , \rangle$. Existe una única conexión $\nabla : \Gamma(TG) \times \Gamma(TG) \to \Gamma(TG)$ que satisface las siguientes propiedades*

1. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,

2. $\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle$.

Esta conexión se conoce como la conexión de Levi-Civita y será la que utilizaremos en todo el trabajo.

Observación 2.28. *Notemos que cuando $x, y, z \in \mathfrak{g}$ son campos invariantes izquierdos entonces $x\langle y, z\rangle = 0$ pues la métrica también es invariante izquierda, de esta forma tenemos que la segunda condición de 2.27 se reescribe de la siguiente forma $\langle \nabla_x y, z\rangle + \langle y, \nabla_x z\rangle = 0$.*

Observación 2.29. *En una variedad Riemanniana tenemos una expresión para la conexión de Levi-Civita que está dada por la fórmula de Koszul:*

$$2(\langle \nabla_X Y, Z\rangle) = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle.$$

Gracias a la invarianza izquierda de la métrica y los campos vectoriales en el grupo de Lie se simplifica la expresión a la dada en la Proposición 2.30.

En [24] Milnor da la siguiente expresión para la conexión de Levi-Civita en un grupo de Lie con una métrica invariante izquierda.

Proposición 2.30. *Si tenemos un grupo de Lie G con una métrica invariante izquierda y $x, y, x \in \mathfrak{g}$ entonces*

$$\langle \nabla_x y, z\rangle = \frac{1}{2}(\langle [x, y], z\rangle - \langle [y, z], x\rangle + \langle [z, x], y\rangle).$$

Demostración.

Utilizando las propiedades del Teorema 2.27 y la Observación 2.28 obtenemos la igualdad.

□

En contraste con lo anterior tenemos la expresión dada por Jeff Cheeger en [7].

Proposición 2.31. *Sea G un grupo de Lie con una métrica invariante izquierda. Si $x, y, z \in \mathfrak{g}$, entonces $\nabla_x y = \frac{1}{2}([x, y] - ad(x)^*(y) - ad(y)^*(x))$.*

Demostración.

Sabemos por la Proposición 2.30 que

$$\langle \nabla_x y, z\rangle = \frac{1}{2}(\langle [x, y], z\rangle - \langle [y, z], x\rangle + \langle [z, x], y\rangle).$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \langle \nabla_x y - \tfrac{1}{2}[x, y], z\rangle &= \tfrac{1}{2}(-\langle [y, z], x\rangle - \langle [x, z], y\rangle) \\ &= \tfrac{1}{2}(-\langle ad(y)(z), x\rangle - \langle ad(x)(z), y\rangle) \\ &= \tfrac{1}{2}(-\langle ad(y)^*(x), z\rangle - \langle ad(x)^*(y), z\rangle) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\nabla_x y - \frac{1}{2}[x, y] = \frac{1}{2}(-ad(x)^*(y) - ad(y)^*(x))$ y finalmente concluimos que

$$\nabla_x y = \frac{1}{2}([x, y] - ad(x)^*(y) - ad(y)^*(x)).$$

□

Una vez demostrada esta igualdad, podemos deducir cuándo los subgrupos uniparámetricos serán geodésicas de un grupo de Lie con una métrica invariante izquierda.

Observación 2.32. *En este caso* $ad(x)^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *se refiere a la transformación lineal adjunta de* $ad(x)$ *con respecto a la métrica de* $\mathfrak{g}$.

Corolario 2.33. *Sea* G *un grupo de Lie con una métrica invariante izquierda, los subgrupos uniparamétricos son geodésicas de* G *si y sólo si para todo* $x \in \mathfrak{g}$ *se cumple que* $ad^*(x)(x) = 0$.

Demostración.
Sea $x \in \mathfrak{g}$, por la Proposición 2.31 tenemos que

$$\nabla_x x = \frac{1}{2}([x,x] - ad(x)^*(x) - ad(x)^*(x)).$$

Y esto se anula si y sólo si $ad(x)^*(x) = 0$.
□

Observación 2.34. *Con la expresión dada en la Proposición 2.31 para la conexión tenemos que si* $x, y \in \mathfrak{g}$ *entonces* $\nabla_x y$ *es un campo invariante izquierdo y además el mapeo* $\nabla_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *es anti-adjunto por la propiedad* 2 *del Teorema 2.27.*

El siguiente resultado que aparece en [24] nos dará una relación que será fundamental de aquí en adelante para hacer cálculos, ya que nos da una expresión de la conexión de Levi-Civita en términos de las constantes de estructura del álgebra de Lie.

Corolario 2.35. *Si* $e_1, ..., e_n$ *es una base ortonormal de* $\mathfrak{g}$, *entonces*

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle = \frac{1}{2}(\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij}).$$

En otras palabras $\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \frac{1}{2}(\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij}) e_k$. *Es decir los símbolos de Christoffel de una métrica invariante izquierda están dados por* $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij})$.

Demostración.
Por la Proposición 2.30 tenemos que

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle = \frac{1}{2}(\langle [e_i, e_j], e_k - \rangle - \langle [e_j, e_k], e_i \rangle + \langle [e_k, e_i], e_j \rangle) = \frac{1}{2}(\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kji}).$$

Además $\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle = \langle \sum_m \Gamma^m_{ij} e_m, e_k \rangle = \sum_m \Gamma^m_{ij} \langle e_m, e_k \rangle = \Gamma^k_{ij}$. Por lo tanto tenemos que en este caso los símbolos de Christoffel están dados por las constantes de estructura. Es decir $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kji})$, con esto obtenemos que $\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \frac{1}{2}(\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij}) e_k$.
□

Ahora veremos una forma de obtener una expresión para la conexión de Levi-Civita en una métrica bi-invariante.

Observación 2.36. *Si tenemos un grupo de Lie* G *con una métrica bi-invariante entonces sabemos que* $ad(x)$ *es anti-adjunta; por la Proposición 2.30 obtenemos que*

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_x y, z \rangle &= \tfrac{1}{2}(\langle ad(x)(y), z \rangle - \langle ad(y)(z), x \rangle + \langle ad(z)(x), y \rangle) \\
&= \tfrac{1}{2}(\langle ad(x)(y), z \rangle - \langle ad(y)(z), x \rangle - \langle x, ad(z)(y) \rangle) \\
&= \tfrac{1}{2}(\langle ad(x)(y), z \rangle - \langle ad(y)(z), x \rangle + \langle x, ad(y)(z) \rangle) \\
&= \tfrac{1}{2}\langle ad(x)(y), z \rangle.
\end{aligned}$$

Lo cual implica que $\nabla_x y = \frac{1}{2} ad(x)(y)$.

2.4. Tensor de curvatura en un grupo de Lie

En esta sección definimos el tensor de curvatura de una métrica Riemanniana, y presentamos identidades para el tensor de curvatura de una métrica invariante izquierda, o bi-invariante en un grupo de Lie.

Definición 2.37. *Si tenemos M una variedad Riemanniana definimos el tensor de curvatura $R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$, por*

$$R_{XY}(Z) = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z.$$

Este tensor satisface las siguientes dos propiedades

1. $\langle R_{XY}Z, W\rangle = \langle Z, -R_{XY}W\rangle$, es decir es anti-adjunto.
2. $R_{XY} = -R_{YX}$.

Las múltiples curvaturas que estudiaremos en este trabajo se pueden describir con la siguiente función.

Definición 2.38. *Dados $X, Y \in \Gamma(TM)$ campos vectoriales de una variedad riemanniana, definimos la función de curvatura como $\kappa(X, Y) = \langle R_{XY}X, Y\rangle$.*

Al estar trabajando en grupos de Lie con métricas invariantes izquierdas, tenemos que las traslaciones izquierdas son isometrías del grupo y esto nos permite hacer todos los cálculos de curvatura en el espacio tangente al neutro del grupo, es decir el álgebra de Lie. El siguiente lema fue probado por Milnor en [24] nos dice que la función κ evaluada en dos elementos de un álgebra de Lie queda expresada en términos de las constantes de estructura.

Lema 2.39. *Si G es un grupo de Lie con una métrica invariante izquierda, entonces κ esta dada por la expresión*

$$\kappa(e_1, e_2) = \sum_k (\frac{1}{2}\alpha_{12k}(-\alpha_{12k}+\alpha_{2k1}+\alpha_{k12}) - \frac{1}{4}(\alpha_{12k}-\alpha_{2k1}+\alpha_{k12})(\alpha_{12k}+\alpha_{2k1}-\alpha_{k12}) - \alpha_{k11}\alpha_{k22}),$$

donde e_1 y e_2 son vectores ortogonales unitarios.

Demostración.

Si $e_1, ..., e_n$ es una base ortonormal de $\mathfrak{g}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\kappa(e_1, e_2) &= \langle R_{e_1e_2}(e_1), e_2\rangle = \langle \nabla_{[e_1,e_2]}e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1 + \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1, e_2\rangle \\ &= \langle \nabla_{[e_1,e_2]}e_1, e_2\rangle - \langle \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1, e_2\rangle + \langle \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1, e_2\rangle.\end{aligned}$$

Desarrollando cada sumando tenemos:

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{[e_1,e_2]}e_1, e_2\rangle &= \langle \nabla_{\sum_k \alpha_{12k}e_k} e_1, e_2\rangle \\ &= \textstyle\sum_k \alpha_{12k}\langle \nabla_{e_k}e_1, e_2\rangle \\ &= \textstyle\sum_k \alpha_{12k}\frac{1}{2}(\alpha_{k12} - \alpha_{12k} + \alpha_{2k1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\langle \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1, e_2\rangle &= -\langle \nabla_{e_1}(\textstyle\sum_k \frac{1}{2}(\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21})e_k, e_2\rangle \\ &= -\textstyle\sum_k \frac{1}{2}(\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21})\langle \nabla_{e_1}e_k, e_2\rangle \\ &= -\textstyle\sum_k \frac{1}{2}(\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21})(\frac{1}{2}(\alpha_{1k2} - \alpha_{k21} + \alpha_{21k})) \\ &= -\textstyle\sum_k \frac{1}{4}(\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21})(\alpha_{1k2} - \alpha_{k21} + \alpha_{21k}) \\ &= -\textstyle\sum_k \frac{1}{4}(\alpha_{12k} - \alpha_{k12} + \alpha_{2k1})(\alpha_{k12} - \alpha_{2k1} + \alpha_{12k}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1, e_2\rangle &= \langle \nabla_{e_2}(\textstyle\sum_k \frac{1}{2}(\alpha_{11k} - \alpha_{1k1} + \alpha_{k11})e_k), e_2\rangle \\ &= \textstyle\sum_k \frac{1}{2}(-\alpha_{11k} - \alpha_{1k1}\alpha_{k11})\langle \nabla_{e_2}e_k, e_2\rangle \\ &= \textstyle\sum_k \frac{1}{2}(-\alpha_{11k} - \alpha_{1k1}\alpha_{k11})\frac{1}{2}(\alpha_{2k1} - \alpha_{k22} + \alpha_{22k}) \\ &= \textstyle\sum_k \frac{1}{2}(2\alpha_{k11})\frac{1}{2}(-2\alpha_{k22}) \\ &= -\textstyle\sum_k \alpha_{k11}\alpha_{k22}.\end{aligned}$$

Sumando cada término obtenemos la igualdad del Lema.

□

Para una métrica bi-invariante tenemos lo siguiente.

Observación 2.40. *En un grupo de Lie G con una métrica bi-invariante, tenemos que si $x, y \in \mathfrak{g}$ entonces $\nabla_x y = \frac{1}{2}[x, y]$. Con lo cual el tensor de curvatura se ve de la siguiente forma*

$$R_{xy} = \frac{1}{2}ad([x, y]) - \frac{1}{4}ad(x)ad(y) + \frac{1}{4}ad(y)ad(x).$$

Utilizando la identidad de Jacobi esto se reduce a

$$R_{xy} = \frac{1}{4}ad([x, y]).$$

Finalmente para la función de curvatura en una métrica bi-invariante tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.41. *En un grupo de Lie G con una métrica bi-invariante, tenemos que si $x, y \in \mathfrak{g}$ entonces $\kappa(x, y) = \frac{1}{4}||[x, y]||^2 \geq 0$.*

Demostración.

Calculamos $\kappa(x, y) = \langle R_{xy}(x), y\rangle = \frac{1}{4}\langle [[x, y], x], y\rangle$ y como ad es anti-adjunta entonces $\langle R_{xy}(x), y\rangle = \frac{1}{4}\langle [x, y], [x, y]\rangle = \frac{1}{4}||[x, y]||^2$. Por lo que $\kappa(x, y) \geq 0$ y la igualdad se da si y sólo si $[x, y] = 0$. □

En los grupos abelianos cualquier métrica invariante izquierda es bi-invariante. Utilizando el Teorema anterior concluimos que en este caso $\kappa = 0$. Esto tiene como consecuencia que los grupos abelianos serán siempre planos.

Capítulo 3

Espacio Moduli de Métricas Bi-invariantes

En este capítulo vamos a estudiar el espacio moduli consistente de todas las métricas bi-invariantes de algún grupo de Lie G. Una ventaja de este enfoque se aplicará en el hecho de que para encontrar métricas con curvaturas seccional y escalar no negativa basta encontrar un subgrupo con una métrica bi-invariante. De esta forma, al saber cuantas métricas bi-invariantes tiene el subgrupo, tendremos inmediatamente todo un espacio de métricas con curvatura seccional y escalar no negativa.

3.1. Clases de Isometría de Métricas Bi-Invariantes

Definición 3.1. *Si $\mathfrak{g}$ admite una métrica bi-invariante, definimos*

$$\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g}) = \{\langle,\rangle \in \widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g}) | \langle,\rangle \ es\ bi-invariante\},$$

el conjunto de métricas invariantes izquierdas que son bi-invariantes en $\mathfrak{g}$.

Queremos estudiar el *espacio moduli de métricas bi-invariantes* $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ que consta de las clases de isometría de $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ y el espacio $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$ de clases de isometría equivalentes salvo múltiplos escalares. Para ello introducimos la siguiente definición.

Definición 3.2. *Para $(\mathfrak{g}_1, \langle,\rangle_1)$ y $(\mathfrak{g}_2, \langle,\rangle_2)$ álgebras de Lie con productos internos decimos que:*

1. *Son isométricas si existe un isomorfismo de algebras de Lie $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ tal que*
$$\langle,\rangle_1 = \phi^*(\langle,\rangle_2).$$

2. *Son isométricas salvo multiplos escalares, si existe un isomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ y $\lambda > 0$ tal que*
$$\langle,\rangle_1 = \lambda(\phi^*(\langle,\rangle_2)).$$

Es claro que ambas son relaciones de equivalencia en $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$. Ahora vamos a probar que una clase de equivalencia de una métrica bi-invariante contiene solamente métricas bi-invariantes.

Proposición 3.3. *Si $\langle,\rangle_0$ es una métrica bi-invariante en $\mathfrak{g}$, entonces $\phi^*(\langle,\rangle_0)$ y $\lambda(\phi^*(\langle,\rangle_0))$ también son bi-invariantes, para cualquier $\phi \in Aut(\mathfrak{g})$ y $\lambda > 0$.*

Demostración.

Por el Lema 2.14 sabemos que $ad(x)$ es anti-adjunta para todo $x \in \mathfrak{g}$, lo cual implica que

$$\langle [x,y], z\rangle_0 = -\langle y, [x,z]\rangle_0.$$

Ahora para $\phi \in Aut(\mathfrak{g})$ tenemos

$$\langle \phi([x,y]), \phi(z)\rangle_0 = \langle [\phi(x), \phi(y)], \phi(z)\rangle_0 = -\langle \phi(y), [\phi(x), \phi(z)]\rangle_0.$$

Con esto concluimos que ad es anti-adjunta en la métrica $\phi^*(\langle , \rangle_0)$. Por el Lema 2.14 es bi-invariante y $\lambda(\phi^*(\langle , \rangle_0))$ también es bi-invariante.

□

Ahora tenemos lo suficiente para definir los espacios moduli $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$.

Definición 3.4. *Para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que admite una métrica bi-invariante definimos:*

1. $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ *como el espacio de clases de isometría de* $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$.
2. $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$ *como el espacio de clases de isometría salvo múltiplos escalares de* $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$.

Podemos concluir directamente de la definición de ambas relaciones de equivalencia el siguiente corolario.

Corolario 3.5. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie con una métrica bi-invariante, entonces:*

1. $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ *es el espacio de órbitas* $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})/Aut(\mathfrak{g})$, *bajo la acción izquierda* $(\phi, \langle , \rangle) \mapsto \phi^*(\langle , \rangle)$.
2. $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$ *es el espacio de orbitas* $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})/\mathbb{R}^\times Aut(\mathfrak{g})$, *Donde el grupo de Lie* $\mathbb{R}^\times$ *es*

$$\mathbb{R}^\times = \{\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} | \psi(x) = \lambda x, \lambda > 0\}.$$

La acción de $\mathbb{R}^\times Aut(\mathfrak{g})$ *en* $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ *está dada por* $(\lambda\phi, \langle , \rangle) \mapsto (\lambda\phi^*(\langle , \rangle))$, *con* $\phi \in Aut(\mathfrak{g})$ *y* $\lambda > 0$.

Observación 3.6. *Notemos que la acción de $Aut(\mathfrak{g})$ en $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ conmuta con la acción de $\mathbb{R}^\times$, es decir $\lambda\phi^*(\langle , \rangle) = \phi^*(\lambda\langle , \rangle)$, esto será crucial más adelante cuando estemos dando la descripción del espacio $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$.*

El caso más sencillo es cuando tenemos un álgebra de Lie abeliana.

Corolario 3.7. *Si $\mathfrak{g}$ es abeliana, entonces $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g}) = \{\langle , \rangle_0\}$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g}) = \{\langle , \rangle_0\}$.*

Demostración.

En un álgebra de Lie abeliana cualquier métrica es bi-invariante. Además cualquier transformación lineal invertible de $\mathfrak{g}$ en sí misma es un automorfismo, con lo cual tenemos que cualesquiera dos métricas en $\mathfrak{g}$ están relacionadas bajo un automorfismo. Por lo tanto $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g}) = \{\langle , \rangle_0\}$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g}) = \{\langle , \rangle_0\}$.

□

3.2. Reducción al Caso Compacto y Semisimple

Si G es un grupo de Lie conexo que admite una métrica bi-invariante, por el Corolario 2.25 tenemos que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \oplus Z(\mathfrak{g})$, con $\mathfrak{s} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$ ideal semisimple y el cubriente universal es el producto $\widetilde{G} = A_1 \times \cdots \times A_k \times \mathbb{R}^l$, donde cada A_i es compacto y simple con $Lie(A_i) = \mathfrak{a}_i$. Por el Corolario 3.5 sabemos que para determinar los espacios $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$ tenemos que factorizar $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ con $Aut(\mathfrak{g})$ y $\mathbb{R}^{\times}Aut(\mathfrak{g})$. Para ello tenemos que saber un poco más del grupo de automorfismos de $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \oplus Z(\mathfrak{g})$.

Notación 3.8. *De ahora en adelante cada vez que escribamos $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \oplus Z(\mathfrak{g})$ nos referimos a un algebra de Lie en abstracto que admite una métrica bi-invariante.*

Para dar una buena descripción de $Aut(\mathfrak{s} \oplus Z(\mathfrak{g}))$ necesitamos el siguiente resultado de álgebras de Lie semisimples.

Lema 3.9. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie semisimple, entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.*

Demostración.
Es claro que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$. Ahora por ser $\mathfrak{g}$ semisimple se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$, donde cada $\mathfrak{a}_i$ es simple y por definición no es abeliano y no tiene ideales propios distintos del trivial. Por lo que $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] = \mathfrak{a}_i$. Si $x \in \mathfrak{g}$, entonces $x = x_1 + \cdots + x_k$ con $x_i \in \mathfrak{a}_i$. Cómo $\mathfrak{a}_i = [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i]$ cada x_i es combinación lineal de elementos de $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i]$. Por lo tanto x es combinación lineal de elementos de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y de esto se sigue que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.
□

Proposición 3.10. *Para el álgebra de Lie $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \oplus Z(\mathfrak{g})$ se cumple que*

$$Aut(\mathfrak{g}) \cong Aut(\mathfrak{s}) \oplus Aut(Z(\mathfrak{g})).$$

Demostración.
Sea $\phi \in Aut(\mathfrak{g})$. Veamos que $\phi(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{s}$ y $\phi(Z(\mathfrak{g})) \subset Z(\mathfrak{g})$. Sea $x \in \mathfrak{s}$, como $\mathfrak{s}$ es semisimple por el Lema 3.9 tenemos $x = \sum \alpha_i[u_i, v_i]$ para una familia finita de $u_i, v_i \in \mathfrak{s}$. Ahora se sigue que $\phi(\sum \alpha_i[u_i, v_i]) = \sum \alpha_i[\phi(u_i), \phi(v_i)] \in \mathfrak{s}$, ya que el bracket de $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \oplus Z(\mathfrak{g})$ solo tiene componentes no triviales en $\mathfrak{s}$, pues $Z(\mathfrak{g})$ es abeliana. Si $y \in Z(\mathfrak{g})$ para $w \in \mathfrak{g}$ calculamos $[\phi(y), w] = \phi([y, \phi^{-1}(w)]) = 0$ por lo tanto $\phi(y) \in Z(\mathfrak{g})$. Lo cual termina la prueba.
□

Lema 3.11. *Para el álgebra de Lie $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \oplus Z(\mathfrak{g})$, los espacios $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$ son equivalentes a $\mathfrak{BI}(\mathfrak{s})$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{s})$ respectivamente.*

Demostración.
Una métrica $\langle , \rangle_{\mathfrak{g}}$ en $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \oplus Z(\mathfrak{g})$ se expresa como una suma de métricas definidas en cada sumando, $\langle , \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle , \rangle_{\mathfrak{s}} + \langle , \rangle_{Z(\mathfrak{g})}$. Si $\phi \oplus \psi \in Aut(\mathfrak{s}) \oplus Aut(Z(\mathfrak{g}))$ entonces

$$(\phi \oplus \psi)^*(\langle , \rangle_{\mathfrak{s}} + \langle , \rangle_{Z(\mathfrak{g})}) = \phi^*(\langle , \rangle_{\mathfrak{s}}) + \psi^*(\langle , \rangle_{Z(\mathfrak{g})}).$$

Esto nos dice que podemos identificar el espacio moduli $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{s} \oplus Z(\mathfrak{g}))/Aut(\mathfrak{s} \oplus Z(\mathfrak{g}))$ con el producto

$$(\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{s})/Aut(\mathfrak{s})) \times (\widetilde{\mathfrak{BI}}(Z(\mathfrak{g}))/Aut(Z(\mathfrak{g}))).$$

Pero como ya vimos en el Corolario 3.7 al ser $Z(\mathfrak{g})$ abeliana entonces $\widetilde{\mathfrak{BI}}(Z(\mathfrak{g}))/Aut(Z(\mathfrak{g})) = \{\langle,\rangle_0\}$. En conclusión tenemos que para nuestra álgebra de Lie $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \oplus Z(\mathfrak{g})$, los espacios moduli $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$ se reducen a $\mathfrak{BI}(\mathfrak{s})$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{s})$ respectivamente.

□

Con esta observación podemos concluir que el estudio de los espacios moduli $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$ se reduce al caso de grupos de Lie compactos y semisimples. Sabemos por el Teorema 2.12 que cualquier grupo de Lie compacto admite una métrica bi-invariante. El siguiente teorema nos será de utilidad para ver qué pasa cuando el grupo es compacto y simple.

Teorema 3.12. *Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión n con un producto interno, los operadores autoadjuntos están en correspondencia con las matrices simétricas de $n \times n$. Estas matrices forman un espacio de dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$. Así mismo el espacio de productos internos en $\mathfrak{g}$ es de la misma dimensión.*

Demostración.

Sea $\langle,\rangle \in \widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$, T un operador autoadjunto y $e_1, ..., e_n \in \mathfrak{g}$ una base ortonormal. Denotamos $\widetilde{A}$ la matriz asociada a T con la base dada y $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ son los vectores formados por las coordenadas de x y y con respecto de la misma base. Calculamos $\langle Ax, y\rangle = (\widetilde{A}\widetilde{x})^T\widetilde{y} = \widetilde{x}^T\widetilde{A}^T\widetilde{y}$ y también $\langle x, Ay\rangle = \widetilde{x}^T\widetilde{A}\widetilde{y}$, por lo tanto $\widetilde{x}^T\widetilde{A}\widetilde{y} = \widetilde{x}^T\widetilde{A}^T\widetilde{y}$. Entonces $\widetilde{A} = \widetilde{A}^T$, lo cual implica que $\widetilde{A}$ tiene $\frac{n(n+1)}{2}$ grados de libertad y por lo tanto el espacio de los operadores autoadjuntos es de dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$.

□

Lema 3.13. *Si tenemos un grupo de Lie compacto y simple, entonces la metrica bi-invariante es única salvo multiplos escalares positivos.*

Demostración.

Sea $\langle,\rangle$ una métrica bi-invariante en $\mathfrak{g}$. Si S es un operador autoadjunto de $\mathfrak{g}$, entonces $\mu(x,y) = \langle Sx, y\rangle$ es una nueva métrica. Por el Teorema 3.12 sabemos que la dimensión del espacio de operadores autoadjuntos es la misma que la de las métricas en $\mathfrak{g}$, entonces cualquier otra métrica en $\mathfrak{g}$ se puede expresar como $\langle Sx, y\rangle$. Si esta métrica μ es bi-invariante entonces $ad(u)$ es anti-adjunta para ambas métricas, $\mu(ad(u)(x), y) = -\mu(x, ad(u)(y))$. Es decir

$$\langle S(ad(u)(x)), y\rangle = -\langle Sx, ad(u)(y)\rangle = \langle ad(u)(Sx), y\rangle,$$

con lo cual concluimos que $ad(u)$ y S conmutan. Ahora si x es un vector propio de S con valor propio λ, entonces $S(ad(u)(x)) = ad(u)(Sx) = ad(u)(\lambda x) = \lambda ad(u)(x)$ con lo que tenemos que $ad(u)(x)$ es un vector propio de S con valor propio λ. De esto tenemos que $\mathbb{E}$ el espacio de vectores propios de λ es un ideal de $\mathfrak{g}$, pues $[u,x] = ad(u)(x) \in \mathbb{E}$ para todo $u \in \mathfrak{g}$ y $x \in \mathbb{E}$. Como $\mathfrak{g}$ es simple, entonces $\mathbb{E} = \mathfrak{g}$. Es decir $Sx = \lambda x$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, por lo que $\mu(x,y) = \lambda\langle x, y\rangle$ y por lo tanto $\lambda > 0$. Con esto concluimos que la métrica bi-invariante es esencialmente única salvo múltiplo escalar.

□

Observación 3.14. *En [2, Theorem 2.35] se verifica que la forma de Killing, $B(X,Y) = tz(ad(X)ad(Y))$ es Ad invariante. Además si el grupo es compacto, conexo y semisimple entonces B es negativa definida y $-B$ juega el papel de una métrica bi-invariante. En el caso del Lema 3.13 la única métrica salvo múltiplo escalar, está representada por la forma de Killing.*

Como ya se mencionó en el Lema 3.11 el estudio de nuestros espacios moduli se reduce al caso de grupos compactos semisimples. El siguiente resultado nos da una descripción del espacio $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{s})$, para $\mathfrak{s}$ semisimple.

Proposición 3.15. *Para S grupo de Lie compacto, conexo y semisimple con descomposición del álgebra de Lie $\mathfrak{s} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$, donde $\mathfrak{a}_i$ es simple, se cumple que $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{s})$ está identificado con $\{(\alpha_1, ..., \alpha_k)|\alpha_i > 0\} \subset \mathbb{R}^k$.*

Demostración.
Para $\mathfrak{s} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$, sabemos por el Lema 3.13 que cada $\mathfrak{a}_i$ admite una métrica bi-invariante única salvo múltiplos escalares positivos, y sin pérdida de generalidad por la Observación 3.14 podemos suponer que está dada por la forma de Killing $-B_i$. De esta forma, para cada $\alpha_i > 0$, la métrica

$$\alpha_1(-B_1) + \cdots + \alpha_k(-B_k)$$

es bi-invariante en $\mathfrak{s}$. Ahora, si $\langle , \rangle_{\mathfrak{s}}$ es una métrica bi-invariante en $\mathfrak{s}$, entonces la restricción de $\langle , \rangle_{\mathfrak{s}}$ a cada $\mathfrak{a}_i$ es una métrica bi-invariante en $\mathfrak{a}_i$. Con lo cual $\langle , \rangle_{\mathfrak{s}}$ se descompone de manera única como una métrica bi-invariante en cada sumando, con lo cual tenemos que

$$\langle , \rangle_{\mathfrak{s}} = \alpha_1(-B_1) + \cdots + \alpha_k(-B_k).$$

Así podemos identificar a $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{s})$ con $\{(\alpha_1, ..., \alpha_k)|\alpha_i > 0\}$.
□

Observación 3.16. *De la Proposición 3.15 podemos concluir que en un grupo compacto y semisimple S con $\mathfrak{s} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$, se cumple que la descomposición $\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$ es ortogonal con respecto de cualquier $\langle , \rangle \in \widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{s})$.*

Observación 3.17. *Notemos que en este caso, el espacio $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{s}) = \{(\alpha_1, ..., \alpha_k)|\alpha_i > 0\}$ tiene estructura de grupo con el producto de números reales entrada a entrada. Este hecho tendrá consecuencias fuertes más adelante.*

3.3. Acción del grupo de automorfismos en $\widetilde{\mathfrak{BI}}$

Recordemos que una métrica bi-invariante en un grupo de Lie G es invariante bajo $Ad(g)$ para todo $g \in G$, con lo cual tenemos que cualquier métrica de $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ se queda fija bajo la acción $(Ad(g), \langle , \rangle) \mapsto Ad(g)^*\langle , \rangle = \langle , \rangle$, esto señala una clara ventaja al momento de restringir el espacio $\widetilde{\mathfrak{M}}(\mathfrak{g})$ solo a métricas bi-invariantes.

Esto nos lleva a estudiar la acción de los automorfismos de $\mathfrak{g}$ que no son de la forma $Ad(g)$. Para seguir avanzando en la descripción de nuestros espacios moduli debemos saber un poco más del grupo de automorfismos de un álgebra de Lie semisimple.

Definición 3.18. *Si G es un grupo de Lie conexo, definimos el grupo de automorfismos internos de $\mathfrak{g}$ cómo*

$$Int(\mathfrak{g}) = \{Ad(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}|g \in G\}.$$

No es dificil verificar que $Int(\mathfrak{g})$ no depende de G o $\widetilde{G}$. En [30, Chapter II] podemos encontrar el siguiente resultado.

Teorema 3.19. *Sea G un grupo de Lie conexo semisimple. Entonces la componente conexa de la identidad del grupo de automorfismos $Aut^0(G)$ en $Aut(G)$ coincide con $Int(G)$.*

Observación 3.20. *Los automorfismos internos de $\mathfrak{g}$ están inducidos por automorfismos internos de G, pues para cada $g \in G$, $Ad(g)$ es la diferencial de algún automorfismo interno de G. Cuando $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonces $Int(\mathfrak{g}) = Aut^0(\mathfrak{g})$, es decir la componente conexa de la identidad en $Aut(\mathfrak{g})$ está conformada solo por automorfismos internos.*

De esta forma sabemos que si S es compacto y semisimple entonces para $\mathfrak{s}$ su álgebra de Lie, la acción de $Int(\mathfrak{s})$ sobre $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{s})$ es trivial, por ello debemos solo estudiar cómo son los automorfismos externos del álgebra de Lie.

Definición 3.21. *Para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definimos el grupo de automorfismos externos como $Ext(\mathfrak{g}) = Aut(\mathfrak{g})/Int(\mathfrak{g})$.*

Recordemos que para un grupo de Lie G el cociente G/G^0 es un grupo donde cada elemento corresponde a una componente conexa de G. En [25, Corollary 2] se verifica que para un grupo de Lie conexo y semisimple tenemos que $Aut(G)/Aut^0(G)$ es finito. De esta forma concluimos que si $\mathfrak{s}$ es un álgebra de Lie semisimple, entonces $Aut(\mathfrak{s})$ tiene una cantidad finita de componentes conexas y por lo tanto $Ext(\mathfrak{s})$ es un grupo finito.

Lema 3.22. *Si G es un grupo de Lie compacto y simple entonces la acción de $Ext(\mathfrak{g})$ sobre $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ es trivial.*

Demostración.

Tomamos la métrica bi-invariante dada por $-B$, donde B es la forma de Killing de $\mathfrak{g}$. Sea $\phi \in Ext(\mathfrak{g})$. Como la métrica $\phi^*(-B)$ es bi-invariante, entonces por el Lema 3.13 $\phi^*(-B) = \alpha(-B)$ con $\alpha > 0$. Como $Ext(\mathfrak{g})$ tiene orden finito, entonces $\phi^n = Id$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, por lo cual $(\phi^n)^*(-B) = \alpha^n(-B) = -B$. Lo que implica que $\alpha = 1$ y por lo tanto la acción de $Ext(\mathfrak{g})$ es trivial sobre $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$.

□

Observación 3.23. *Tenemos que para un grupo G compacto y simple la acción de $Aut(\mathfrak{g})$ sobre $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ es trivial. Con esto concluimos que $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g}) = \widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}^+$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g}) = \{\langle,\rangle_0\}$.*

Ahora vamos por el caso semisimple. Para ello revisemos los siguientes resultados.

Proposición 3.24. *Si $\mathfrak{u}$ es un ideal de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $\phi \in Aut(\mathfrak{g})$, entonces $\phi(\mathfrak{u})$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demostración.

Sea $u \in \mathfrak{u}$ y $x \in \mathfrak{g}$. Notemos que $[\phi(u), x] = [\phi(u), \phi(\phi^{-1}(x))] = \phi([u, \phi^{-1}(x)]) \in \phi(\mathfrak{u})$.

□

Corolario 3.25. *Sea $\mathfrak{s} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$ semisimple y $\phi \in Aut(\mathfrak{g})$. Entonces $\phi(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{a}_j$, para algún j.*

Demostración.

Sabemos que $\phi(\mathfrak{a}_i)$ es un ideal simple de $\mathfrak{g}$. Además para toda j, $\phi(\mathfrak{a}_i) \cap \mathfrak{a}_j$ es un ideal de $\mathfrak{a}_j$. Pero como $\mathfrak{a}_j$ es simple entonces $\phi(\mathfrak{a}_i) \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}$ ó $\phi(\mathfrak{a}_i) \cap \mathfrak{a}_j = \mathfrak{a}_j$. En el segundo caso tenemos que $\mathfrak{a}_j \subset \phi(\mathfrak{a}_i)$ pero como $\phi(\mathfrak{a}_i)$ es simple, entonces $\phi(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{a}_j$. Además si $\phi(\mathfrak{a}_i) \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}$ para todo j, entonces $\phi(\mathfrak{a}_i) = 0$ lo cual es una contradicción.

□

El siguiente paso será estudiar el caso semisimple donde todos los factores son no isomorfos entre sí.

Lema 3.26. *Si $\mathfrak{s} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$ es un álgebra de Lie semisimple donde los sumandos no son isomorfos dos a dos, entonces $Aut(\mathfrak{s}) \cong Aut(\mathfrak{a}_1) \oplus \cdots \oplus Aut(\mathfrak{a}_k)$*

Demostración.

Sea $\phi \in Aut(\mathfrak{s})$, como todos los sumandos no son isomorfos entre sí por el Lema anterior tenemos que $\phi(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{a}_i$. Así concluimos que $\phi = \phi_1 + \cdots + \phi_k$, donde cada $\phi_i \in Aut(\mathfrak{a}_i)$, lo cual termina la prueba.

□

Lema 3.27. *Sea un grupo de Lie G compacto, conexo y semisimple con $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$ donde los sumandos no son isomorfos dos a dos y son simples. Entonces la acción de $Ext(\mathfrak{g})$ en $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ es trivial.*

Demostración.

Sea $\langle , \rangle_0 = (-B_1) + \cdots + (-B_k)$ la métrica bi-invariante dada por la suma de las formas de Killing B_i en cada $\mathfrak{a}_i$. Definimos el mapeo

$$\Phi : Ext(\mathfrak{g}) \to \widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g}),\ \Phi(\psi) = \psi^*(\langle , \rangle_0).$$

Por el Lema anterior sabemos que $\psi = \psi_1 + \cdots + \psi_k$ donde $\psi_i \in Aut(\mathfrak{a}_i)$. Además cada $\psi_i^*(-B_i) = \alpha_i(-B_i)$ con $\alpha_i > 0$ pues es una métrica bi-invariante. De esta forma concluimos que $\Phi(\psi) = \psi^*(\langle , \rangle_0) = \psi_1^*(-B_1) + \cdots + \psi_k^*(-B_k) = \alpha_1(-B_1) + \cdots + \alpha_k(-B_k)$. Si además $\mu \in Ext(\mathfrak{g})$, tenemos $\Phi(\mu) = \beta_1(-B_1) + \cdots + \beta_k(-B_k)$ y podemos concluir que $\Phi(\mu \circ \psi) = \alpha_1\beta_1(-B_1) + \cdots + \alpha_k\beta_k(-B_k)$.

Recordemos que habíamos identificado a $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ con el grupo multiplicativo de vectores con k entradas de reales positivos. Con lo visto anteriormente concluimos que Φ es un homomorfismo de grupos y la imagen de $Ext(\mathfrak{g})$ es un subgrupo finito de $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$. Pero este grupo no tiene subgrupos finitos distintos del trivial, por lo que concluimos que Φ es trivial y la acción de $Ext(\mathfrak{g})$ en $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ también.

□

3.4. Descripción de $\mathfrak{BI}$ y $\mathfrak{EBI}$

Con lo desarrollado hasta el momento podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.28. *Para un grupo de Lie G compacto, conexo y semisimple con $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$ donde los sumandos son simples y no son isomorfos dos a dos, se cumple que $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g}) = \widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$. Además $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g}) = \widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})/\mathbb{R}^\times$ corresponde con el conjunto de vectores de $k-1$ números reales estrictamente positivos.*

Ahora vamos a estudiar el caso $G = H \times \cdots \times H$ donde H es un grupo de Lie compacto y simple, con álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_k$, donde cada $\mathfrak{h}_i \cong Lie(H)$. Para un automorfismo $\phi \in Aut(\mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_k)$ el Corolario 3.25 asegura que $\phi(\mathfrak{h}_i) = \mathfrak{h}_j$. Este pequeño detalle nos permite decir algunas cosas de los elementos de $Aut(\mathfrak{g})$ y su relación con el grupo simétrico de permutaciones, comenzamos con la siguiente definición.

Definición 3.29. *Dado un conjunto X y S_n el grupo simétrico de permutaciones de n elementos, definimos la acción izquierda de S_n en $X^n = X \times \cdots \times X$ dada por*

$$(\sigma, (x_1, ..., x_n)) \mapsto (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}).$$

Observación 3.30. *Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_k$ semisimple, donde $\mathfrak{h}_i \cong \mathfrak{a}$, tenemos un homomorfismo de grupos $T : Aut(\mathfrak{g}) \to S_k$ dado de la siguiente forma: si $\phi \in Aut(\mathfrak{g})$, entonces $T(\phi) \in S_k$ de modo que $T(\phi)(i) = j$ si y sólo si $\phi(\mathfrak{h}_i) = \mathfrak{h}_j$. En conclusión tenemos que cada automorfismo de $\mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_k$ está dado por una familia $\{\phi_i \in Aut(\mathfrak{h}_i)\}_{i=1,...,k}$ y una permutación $\sigma \in S_k$, donde se cumple que, si $x_i \in \mathfrak{h}_i$, entonces $\phi_i(x_i) \in \mathfrak{h}_{\sigma(i)}$.*

Ahora veremos que pasa cuando cada $\mathfrak{h}_i$ es el álgebra de Lie de un grupo compacto y simple.

Teorema 3.31. *Sea H es un grupo de Lie compacto, conexo, simple y consideremos el producto de H consigo mismo k veces, $G = H \times \cdots \times H$. Entonces la acción de $Aut(\mathfrak{g})$ en $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ coincide con la acción del grupo simétrico S_k, dada por*

$$(\sigma, \langle , \rangle) \mapsto \langle , \rangle_\sigma,$$

donde $\sigma \in S_k$ y $\langle x_1 + \cdots + x_k, y_1 + \cdots + y_k \rangle_\sigma = \langle x_{\sigma(1)} + \cdots + x_{\sigma(k)}, y_{\sigma(1)} + \cdots + y_{\sigma(k)} \rangle$.

Demostración.

Sea $\phi \in Aut(\mathfrak{g})$ y veamos cómo actúa este automorfismo en una métrica bi-invariante $\langle , \rangle_0 \in \widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$. Sabemos que $\langle , \rangle_0 = \alpha_1(-B) + \cdots + \alpha_k(-B)$, donde B es la forma de Killing de H y cada $\alpha_i > 0$. Utilizando la Observación 3.16 sabemos que la descomposición $\mathfrak{h} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}$ es ortogonal para cualquier métrica bi-invariante, de esto obtenemos

$$\begin{aligned} \phi^*(\langle , \rangle_0)(\textstyle\sum_i^k x_i, \sum_i^k y_i) &= \textstyle\sum_i^k \langle \phi_i(x_i), \phi_i(y_i) \rangle_0 \\ &= \textstyle\sum_i^k \alpha_{\sigma(i)}(-B)(\phi_i(x_i), \phi_i(y_i)). \end{aligned}$$

Pero como ya vimos en el Lema 3.22 la acción del grupo de automorfismos de un grupo compacto y simple sobre el espacio $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{h})$ es trivial. Con lo cual tenemos que

$$\begin{aligned} \phi^*(\langle , \rangle_0)(\textstyle\sum_i^k x_i, \sum_i^k y_i) &= \textstyle\sum_i^k \alpha_{\sigma(i)}(-B)(x_i, y_i) \\ &= \textstyle\sum_i^k \langle x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)} \rangle_0. \end{aligned}$$

Con esto tenemos que la acción de $Aut(\mathfrak{g})$ en $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ está dada por la acción del grupo simétrico S_k.

□

Definición 3.32. *Para un espacio topológico X y S_n el grupo simétrico de permutaciones de n elementos, consideramos la acción de S_n en $X^n = X \times \cdots \times X$ dada por*

$$(\sigma, (x_1, ..., x_n)) \mapsto (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}).$$

Definimos el n-ésimo producto simétrico de X como $PS^n(X) = X^n/S_n$.

Como veremos en el Apéndice B, cuando M es una variedad diferenciable entonces $PS^n(M)$ tiene estructura de variedad orbital (*orbifold*). Cuando $M = \mathbb{R}$ tenemos que

$$PS^n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})^{n-1}.$$

Teorema 3.33. *Si H es un grupo de Lie compacto, conexo, simple y G es el producto de H consigo mismo k veces, $G = H \times \cdots \times H$, entonces el espacio moduli $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ es homeomorfo al k-ésimo producto simétrico de $\mathbb{R}$, $PS^k(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})^{k-1}$.*

Demostración.
Sean $\langle , \rangle = \alpha_1(-B) + \cdots + \alpha_k(-B) \in \widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$, $x = \sum_i^k x_i, y = \sum_i^k y_i \in \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}$ y $\sigma \in S_k$. Calculamos

$$\begin{aligned} \langle \textstyle\sum_i^k x_{\sigma(i)}, \sum_i^k y_{\sigma(i)} \rangle &= \textstyle\sum_i^k \alpha_i(-B(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)})) \\ &= \textstyle\sum_i^k \alpha_{\sigma(i)}(-B)(x_i, y_i). \end{aligned}$$

Con esto concluimos que la clase de isometría de una métrica bi-invariante es el conjunto $[(\alpha_1, ..., \alpha_k)] = \{(\alpha_{\sigma(1)}, ..., \alpha_{\sigma(k)}) | \sigma \in S_k\}$, de esto se sigue que

$$\mathfrak{BI}(\mathfrak{g}) \cong (\mathbb{R}^+)^k / S_k \cong \mathbb{R}^k / S_k = PS^k(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})^{k-1}.$$

□

Observación 3.34. *En este caso $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ es homeomorfo al producto $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})^{k-1}$ que es homotópico a un punto y por lo tanto es contraible.*

Observación 3.35. *Para el espacio $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$ recordemos que por la Observación 3.6 tenemos que las acciones de $Aut(\mathfrak{g})$ y $\mathbb{R}^\times$ en $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ conmutan, por lo que podemos primero considerar el espacio $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})/\mathbb{R}^\times$ y posteriormente factorizarlo con $Aut(\mathfrak{g})$. Como $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ está formado por vectores de k reales estrictamente positivos, podemos pensar al espacio $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})/\mathbb{R}^\times$ como $\mathbb{S}_+^{k-1} = \mathbb{S}^{k-1} \cap \widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ y de esta forma $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g}) = \mathbb{S}_+^{k-1}/Aut(\mathfrak{g})$.*

Dicho esto podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 3.36. *Si H es un grupo de Lie compacto, conexo, simple y G es el producto de H consigo mismo k veces, $G = H \times \cdots \times H$, entonces $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g}) = \mathbb{S}_+^{k-1}/S_k$.*

Observación 3.37. *El espacio $\mathbb{S}_+^{k-1}$ es un abierto de $\mathbb{S}^{k-1}$ que resulta ser contraible. Es decir existe una homotopía $H : \mathbb{S}_+^{k-1} \times I \to \mathbb{S}_+^{k-1}$, tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = y_0$ para algún $y_0 \in \mathbb{S}_k^{k-1}$. Definimos $\tilde{H} : \mathbb{S}_+^{k-1}/S_k \times I \to \mathbb{S}_+^{k-1}/S_k$, como $([x_1, ..., x_k], t) \mapsto [H(x_1, t), ..., H(x_k, t)]$. Es fácil ver que $\tilde{H}$ está bien definida y que es un retracto de $\mathbb{S}_+^{k-1}/S_k$ en $[y_0, ..., y_0]$. Por lo tanto $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$ es contraible.*

3.4.1. Caso General

Al principio del capítulo vimos que el estudio del espacio $\mathfrak{BI}$ se reduce a grupos de Lie compactos y semisimples. Vamos a terminar este capítulo con el caso general.

Teorema 3.38. *Sea G un grupo compacto, conexo y semisimple con $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{b}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{b}_l$ donde $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$ es semisimple con factores no isomorfos entre sí, además cada $\mathfrak{b}_i$ es semisimple y se descompone como suma de m_i factores todos isomorfos entre sí pero ninguno de estos factores es isomorfo a algún $\mathfrak{a}_j$. Entonces $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ es homeomorfo a*

$$\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{s}) \times PS^{m_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times PS^{m_l}(\mathbb{R}).$$

Demostración.

Sea $\phi \in Aut(\mathfrak{g})$. Por el Corolario 3.25 tenemos que $\phi = \psi + \varphi_1 + \cdots + \varphi_l$ donde $\psi \in Aut(\mathfrak{s})$ y cada $\varphi_i \in Aut(\mathfrak{b}_i)$. Sabemos que la acción de ψ en $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{s})$ es trivial y la acción de φ_i en $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{b}_i)$ es a través de una permutación $\sigma \in S_{m_i}$. Por lo tanto al factorizar $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ con $Aut(\mathfrak{g})$ tenemos que $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ es homeomorfo a $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{s}) \times PS^{m_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times PS^{m_l}(\mathbb{R})$.

□

Y para el espacio $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$ tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.39. *Sea G un grupo compacto, conexo y semisimple con $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{b}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{b}_l$ donde $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$ es semisimple con factores no isomorfos entre sí; además cada $\mathfrak{b}_i$ es semisimple y se descompone como suma de m_i factores todos isomorfos entre sí pero ninguno de estos factores es isomorfo a algún $\mathfrak{a}_j$. Entonces $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$ es homeomorfo a*

$$\mathfrak{EBI}(\mathfrak{s}) \times (\mathbb{S}_+^{m_1-1}/S_{m_1}) \times \cdots \times (\mathbb{S}_+^{m_l-1}/S_{m_l}).$$

En ambos casos los espacios $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$ son productos de espacios contraibles y por lo tanto son contraibles también. Además notemos que estos espacios no dependen tanto de la estructura de Lie del grupo G, una vez el grupo admita la métrica bi-invariante. Los espacios solo dependen de la cantidad de sumandos directos que tenga el álgebra de Lie. A continuación veremos algunos ejemplos.

3.5. Ejemplos

En dimensión 1 todos los grupos de Lie son abelianos. En dimensión 2 solo hay un álgebra de Lie no abeliana $\mathfrak{g}^2$ la cual tiene una base $e_1, e_2 \in \mathfrak{g}^2$ donde el bracket de Lie está dado por $[e_1, e_2] = e_2$. Esta no admite una métrica bi-invariante pues no tiene ideales simples. El primer ejemplo de métricas bi-invariantes en un grupo no abeliano aparece en dimensión 3 con $SU(2)$.

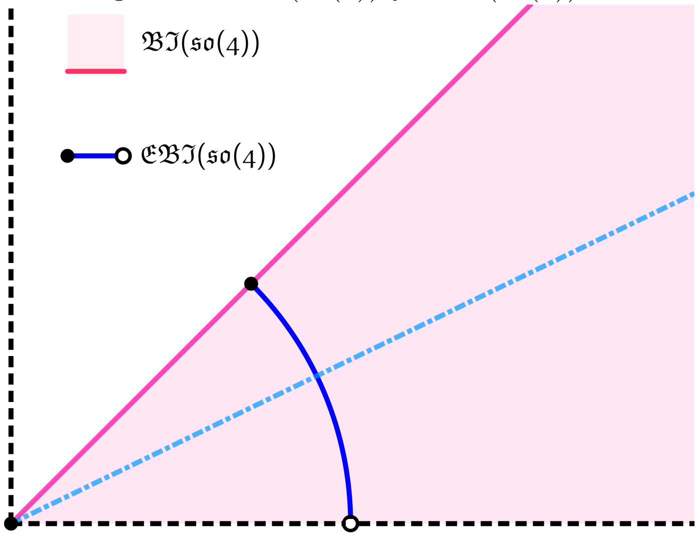
3.5.1. $\mathfrak{BI}(\mathfrak{su}(2))$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{su}(2))$.

En un álgebra de Lie tridimensional $\mathfrak{g}^3$ que tiene una métrica bi-invariante con una base ortonormal $e_1, e_2, e_3 \in \mathfrak{g}^3$, las constantes de estructura satisfacen $\alpha_{ijk} = -\alpha_{ikj}$. Por lo cual es fácil concluir que $[e_1, e_2] = \lambda e_3$, $[e_2, e_3] = \lambda e_1$, $[e_3, e_1] = \lambda e_2$ donde $\lambda > 0$. Vamos a verificar que esta álgebra de Lie es isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$. Tomamos $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{su}(2)$ la base que satisface $[a_1, a_2] = a_3$, $[a_2, a_3] = a_1$ y $[a_3, a_1] = a_2$. Definimos $\phi : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{g}^3$ como $\phi(a_i) = \frac{1}{\lambda} e_i$. Entonces, ϕ es un isomorfismo de álgebras de Lie pues, $\phi([a_i, a_j]) = \phi(a_k) = \frac{1}{\lambda} e_k$ y $[\phi(a_i), \phi(a_j)] = [\frac{1}{\lambda} e_i, \frac{1}{\lambda} e_j] = \lambda(\frac{1}{\lambda^2}) e_k = \frac{1}{\lambda} e_k$. Esto nos dice que en dimensión 3 solo hay un álgebra de Lie con una métrica bi-invariante. Como $SU(2)$ es compacto y simple entonces $\mathfrak{BI}(\mathfrak{su}(2)) = \mathbb{R}^+$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{su}(2)) = \{\langle , \rangle_0\}$.

3.5.2. $\mathfrak{BI}(\mathfrak{so}(4))$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{so}(4))$.

El grupo de Lie $SO(4)$ es de dimensión 6. Además es compacto y semisimple pues se cumple que $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. Al tener dos sumandos simples tenemos que $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{so}(4)) = (\mathbb{R}^+)^2$. Por lo que el espacio moduli $\mathfrak{BI}(\mathfrak{so}(4)) \cong (\mathbb{R}^+)^2/S_2$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{so}(4))$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^+$ (Ver figura 3.1).

Figura 3.1: $\mathfrak{BI}(\mathfrak{so}(4))$ y $\mathfrak{CBI}(\mathfrak{so}(4))$



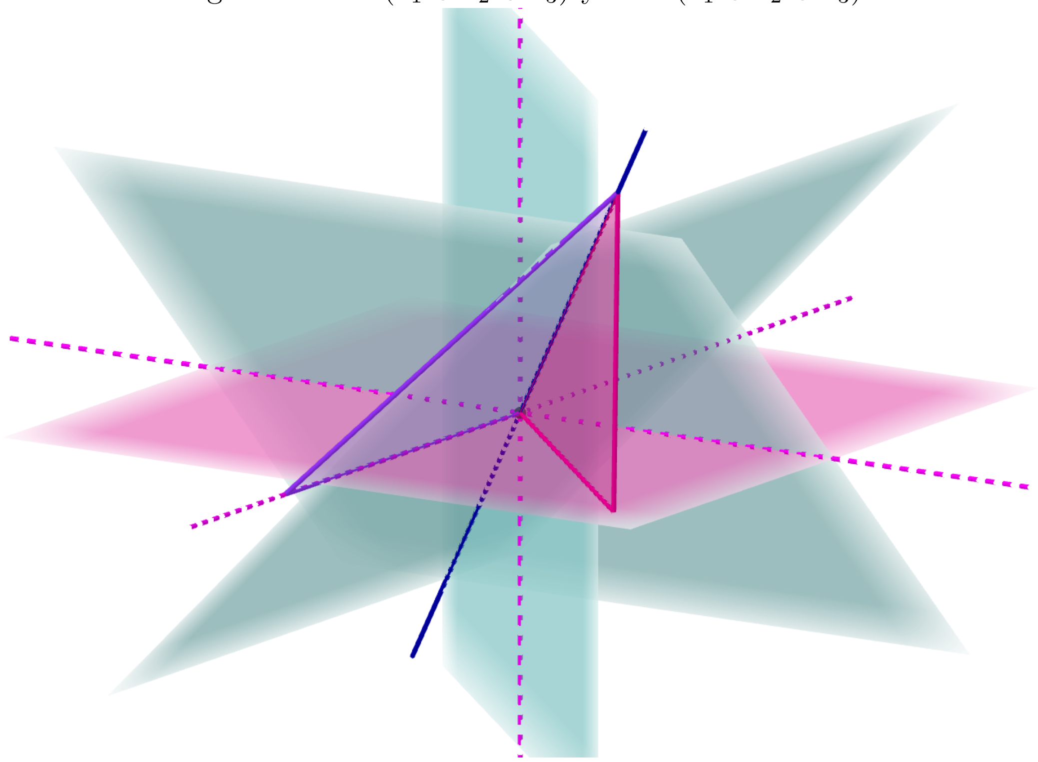
Observación 3.40. *Como* $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$*, el espacio* $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{so}(4))$ *consta del cuadrante con entradas estrictamente positivas de* $\mathbb{R}^2$*, la acción de* S_2 *solo consta de intercambiar las entradas* $(x, y) \mapsto (y, x)$ *lo cual corresponde a una reflexión en la identidad. De esta forma el espacio* $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{so}(4))/S_2$ *se identifica con la parte rosa. Así mismo* $\mathfrak{CBI}(\mathfrak{so}(4)) = \mathbb{S}^1_+/S_2$ *corresponde con el fragmento azul de circunferencia que es cerrado en el extremo que toca a la identidad y abierto en el extremo que toca al eje* x*.*

3.5.3. Tres sumandos directos

Sea G un grupo de Lie compacto, conexo y semisimple de modo que $G \cong A_1 \times A_2 \times A_3$ y también $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_3$ con cada A_i compacto y simple. Como tenemos 3 sumandos directos entonces el espacio $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ está formado por puntos en $\mathbb{R}^3$ con entradas estrictamente positivas. Ya sabemos que $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ es homeomorfo a $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+)^2$ y $\mathfrak{CBI}(\mathfrak{g})$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^2_+/S_3$ (Ver figura 3.2).

Observación 3.41. *El espacio* $\mathfrak{BI}(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_3)$ *consta de factorizar el cuadrante de entradas positivas de* $\mathbb{R}^3$ *bajo la acción del grupo* S_3*, como cada permutación está generada por transposiciones y cada una de estas transposiciones actúa en* $\mathbb{R}^3$ *por reflexiones sobre los planos* $x = y$*,* $y = z$ *y* $x = z$*, de este modo el espacio* $\mathfrak{BI}(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_3)$ *se identifica con la región de entradas positivas de* $\mathbb{R}^3$ *delimitada por dos de estos planos, estos planos se identifican bajo la acción de* S_3*. Con esto el espacio* $\mathfrak{BI}(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_3)$ *es la región dentro de los planos rosas y el plano morado, donde los puntos del plano morado forman parte del espacio, mientras que los de los planos rosas no. El espacio* $\mathfrak{CBI}(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_3)$ *es la factorización de la intersección de la esfera unitaria y* $\mathfrak{BI}(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_3)$*.*

Figura 3.2: $\mathfrak{BI}(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_3)$ y $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_3)$



Capítulo 4

Curvatura Seccional

En este capítulo desarrollamos lo visto por Milnor en [24] con respecto a la curvatura seccional con intención de aplicarlo a elementos del espacio moduli de métricas bi-invariantes. En conclusión se verifica que:

1. Si $\langle , \rangle \in \mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$, tal que $K > 0$ entonces $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}(2)$ (ver Corolario 4.7).

2. Si G es el producto semidirecto $P \rtimes H$ de un subgrupo H que tiene una métrica bi-invariante y un subgrupo P conmutativo, normal con una métrica invariante izquierda invariante bajo $Ad(h)$ para todo $h \in H$. Entonces cualquier $\langle , \rangle \in \mathfrak{BI}(\mathfrak{h})$ se puede extender a una métrica en $\mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ tal que $K \geq 0$ (ver Observación 4.11).

3. Si $\langle , \rangle \in \mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ es tal que $K = 0$ entonces cualquier elemento de $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ tiene curvatura seccional nula (ver 4.15).

4.1. Curvatura Seccional en una Variedad Riemanniana

Supongamos que tenemos una variedad Riemanniana M y Π un subespacio de dimensión 2 de T_pM. Para vectores $u, v \in \Pi$ que forman una base de Π definimos

$$K(u, v) = \frac{\kappa(u, v)}{\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle^2},$$

donde κ es nuestra función de curvatura. Se puede demostrar que $K(u, v)$ no depende de la base de Π (para más detalles de este hecho consultar [9]), por lo que denotamos $K(u, v) = K(\Pi)$. A este número real lo llamamos la curvatura seccional de Π en el punto $p \in M$. Si u, v son una base ortonormal de Π, entonces $K(u, v) = \kappa(u, v)$.

En nuestro caso al estar trabajando con un grupo de Lie con una métrica invariante izquierda, es suficiente calcular la función de curvatura κ en vectores unitarios ortogonales del álgebra de Lie.

4.2. Curvatura Seccional Positiva

En [24] Milnor demuestra el siguiente criterio para determinar cuando la curvaturas eccional es no negativa en un grupo de Lie con una métrica invariante izquierda.

Lema 4.1. *Sea G un grupo de Lie con una métrica invariante izquierda y $u \in \mathfrak{g}$. Si $ad(u)$ es anti-adjunta, entonces*

$$K(u, v) \geq 0,$$

para todo $v \in \mathfrak{g}$ y la igualdad se da si y sólo si u es ortogonal a la imagen $ad(v)(\mathfrak{g})$.

Demostración.

Sabemos que la curvatura seccional $K(\Pi)$ donde $\Pi \subset \mathfrak{g}$ es un plano, no depende de la base de Π que tomemos, por lo que sin pérdida de generalidad podemos tomar una base ortonormal $e_1, ..., e_n$ donde $e_1 = \alpha u$ y $\kappa(u, v) = \kappa(e_1, e_2)$. Por hipótesis tenemos que $ad(e_1)$ es anti-adjunta, es decir $\langle [(e_1, e_j], e_k \rangle = -\langle e_j, [e_1, e_k] \rangle = -\langle [e_1, e_k], e_j \rangle$ y por lo tanto $\alpha_{1jk} = -\alpha_{1kj}$, en otras palabras las constantes de estructura con $i = 1$ son antisimétricas en los últimos dos índices. Por el Lema 2.39 tenemos que

$$\kappa(e_1, e_2) = \sum_k (\frac{1}{2}\alpha_{12k}(-\alpha_{12k}+\alpha_{2k1}+\alpha_{k12}) - \frac{1}{4}(\alpha_{12k}-\alpha_{2k1}+\alpha_{k12})(\alpha_{12k}+\alpha_{2k1}-\alpha_{k12}) - \alpha_{k11}\alpha_{k22}).$$

Utilizando la antisimetría, intercambiando índices, tenemos que

$$-\alpha_{12k} + \alpha_{2k1} + \alpha_{k12} = \alpha_{2k1}$$

$$\alpha_{12k} - \alpha_{2k1} + \alpha_{k12} = -2\alpha_{1k2} - \alpha_{2k1}$$

$$\alpha_{12k} + \alpha_{2k1} - \alpha_{k12} = \alpha_{2k1}.$$

Además $\alpha_{k11} = 0$, por lo que la expresión se reduce a

$$K(e_1, e_2) = \kappa(e_1, e_2) = \sum_k \frac{1}{4}\alpha_{2k1}^2 \geq 0.$$

Ahora, si esta expresión es cero, entonces $\langle [e_2, e_k], e_1 \rangle = 0$ para todo k. Si $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, entonces

$$\begin{aligned} \langle e_1, [v, e_k] \rangle &= \lambda_1 \langle e_1, [e_1, e_k] \rangle + \lambda_2 \langle e_1, [e_2, ek] \rangle \\ &= -\lambda \langle [e_1, e_2], e_k \rangle + \lambda_2 \langle e_1, [e_2, e_k] \rangle \\ &= \lambda_2 \langle e_1, [e_2, e_k] \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto pasa si y solo si e_1 es ortogonal a la imagen $ad(v)(\mathfrak{g})$.

□

En consecuencia tenemos los siguientes corolarios también demostrados por Milnor en [24].

Corolario 4.2. *Si u es un elemento del centro de $\mathfrak{g}$, entonces para cualquier métrica invariante izquierda, $K(u, v) \geq 0$ para todo $v \in \mathfrak{g}$.*

Demostración.

Si u es un elemento del centro de $\mathfrak{g}$, entonces $ad(u)(v) = [u, v] = [v, u]$ y por otro lado $[u, v] = -[v, u]$, por lo tanto $ad(u)(v) = [u, v] = 0$. En este caso es obvio que $ad(u)$ es anti-adjunta, así por el Lema 4.1 se satisface la afirmación.

□

Recordemos que por los Lemas 2.14 y 2.23 tenemos que una métrica invariante izquierda en un grupo de Lie conexo es invariante derecha si y sólo si $ad(x)$ es anti-adjunta para todo $x \in \mathfrak{g}$. Por el Lema 2.23 un grupo de Lie conexo admite una métrica bi-invariante si y sólo si es isomorfo al producto de un grupo compacto y un grupo conmutativo.

Corolario 4.3. *Cualquier grupo de Lie compacto admite una métrica bi-invariante tal que $K(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.*

Demostración.
Cualquier grupo de Lie compacto G, admite una métrica bi-invariante y por el Teorema 2.41 tenemos que las curvaturas seccionales asociadas a métricas bi-invariantes se pueden calcular con la expresión $K(x, y) = \kappa(x, y) = \frac{1}{4}\langle [x, y], [x, y]\rangle = ||[x, y]||^2 \geq 0$.
□

4.2.1. Teorema de Wallach

En 1972 Nolan R. Wallach publica [33] en donde prueba que cualquier grupo de Lie compacto simplemente conexo y con una métrica invariante izquierda que tenga curvaturas seccionales estrictamente positivas es isomorfo a $SU(2)$. Para poder demostrar este teorema necesitaremos los siguientes dos resultados.

Proposición 4.4. *Sea M una variedad Riemanniana, compacta, conexa de dimensión par con todas sus curvaturas seccionales estrictamente positivas. Si $X \in \Gamma(TM)$ es un campo de Killing, entonces X se anula en algun punto.*

Para una demostración consultar [33, Corollary 2.1].

Proposición 4.5. *Sea G un grupo de Lie compacto y conexo de rango 1 con $dim(G) > 1$, entonces $G \cong SO(3)$ ó $G \cong SU(2)$.*

Para la prueba revisar [5, (1.6) Corollary]

Teorema 4.6. ***(Wallach, 1972)***. *Sea G un grupo de Lie compacto y simplemente conexo, si G admite una métrica invariante izquierda con curvaturas seccionales estrictamente positivas, entonces G es isomorfo a $SU(2)$.*

Demostración.
Como G es compacto y conexo sabemos que cualquier elemento está en un toro maximal $\widetilde{T}$. Tomemos $T \subset \widetilde{T}$ un toro de dimensión 1 y consideremos $T\backslash G$, el espacio de clases laterales derechas Tg, que es compacto. Sabemos que $\pi : G \to T\backslash G$, la proyección natural, es una submersión. Además $T\backslash G$ tiene una métrica Riemanniana de tal forma que π es una submersión Riemanniana. Ahora, por la fórmula de O'Neill (que podemos consultar en [7, 3.20. Theorem]) sabemos que la curvatura seccional de $T\backslash G$ está dada por la expresión

$$K_{G\backslash T}(X, Y) = K_G(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \frac{3}{4}||[\tilde{X}, \tilde{Y}]^V||^2,$$

donde X, Y son campos ortonormales en $T\backslash G$, $\tilde{X}, \tilde{Y}$ son los levantamientos horizontales de X y Y en G y además $[\tilde{X}, \tilde{Y}]^V$ es la proyección del campo $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ a $ker(d\pi)$.

Como G tiene curvaturas seccionales estrictamente positivas entonces $T\backslash G$ también. Recordemos que por 2.7 los campos invariantes derechos en G son campos de Killing, con lo cual sabemos que podemos construir un campo invariante izquierdo que no se anule y por la Proposición 4.4 la dimensión de G es impar y por lo tanto $T\backslash G$ es de dimensión par. Ahora si $C(T)$ es el centralizador de T, podemos definir una acción izquierda $C(T) \times T\backslash G \to T\backslash G$ de la siguiente forma $(h, Tg) \mapsto hTg = Thg$. Esta acción induce una isometría para cada $h \in C(T)$, pues L_h es una isometría que preserva $Ker(d\pi)$ y $d\pi : ker(d\pi)^{\perp} \to T(T\backslash G)$ es una isometría. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "L_h"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ T\backslash G \arrow[r, "l_h"] & T\backslash G. \end{tikzcd}$$

Ahora, si $X \in Lie(C(T))$, tenemos un campo en $T\backslash G$

$$\hat{X}_{Tg} = \frac{d}{dt}(exp(tX)Tg)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(Texp(tX)g)|_{t=0}.$$

El flujo está dado por $\varphi(Tg, t) = exp(tX)Tg$. Como $exp(tX) \in C(T)$ y ya sabemos que los elementos de $C(T)$ actúan por isometrías en $T\backslash G$ tenemos que $\hat{X} \in \Gamma(T(T\backslash G))$ es un campo de Killing y de nuevo por la Proposición 4.4 este campo se debe anular en algún punto. Pero esto implica que el campo invariante izquierdo en G generado por X en algún punto es tangente a una clase lateral de T. En conclusión tenemos que X es tangente a T en $e \in G$, $X \in Lie(T)$ y entonces $h = exp(X) \in T$, es decir $C(T) < T$. Esto implica que G tiene rango 1 y por la Proposición 4.5 concluimos que $G \cong SU(2)$. $\square$

Esto quiere decir que no existen ejemplos en dimensiones superiores de grupos compactos, simplemente conexos con métricas invariantes izquierdas cuyas curvaturas seccionales sean estrictamente positivas. Además tenemos la siguiente consecuencia poniendo especial atención en las métricas bi-invariantes.

Corolario 4.7. *Si G es un grupo de Lie con una métrica bi-invariante con $K(x, y) > 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, entonces G es compacto y de dimensión igual a tres.*

Demostración.
Como G admite una métrica bi-invariante entonces $\widetilde{G}$ también. Por la Proposición 2.23 tenemos que $\widetilde{G} \cong K \times \mathbb{R}^l$ donde K es un grupo compacto. Si $v \in \mathfrak{g}$ es unitario y tangente a $\mathbb{R}^l$ se satisface que $[v, u] = 0$ para todo u unitario. Entonces $K(v, u) = \frac{1}{4}||[u, v]||^2 = 0$ por lo cual concluimos que $\widetilde{G}$ tiene que ser compacto. Además por ser simplemente conexo podemos aplicar el Teorema de Wallach 4.6 con lo cual concluimos que $\widetilde{G} \cong SU(2)$, por lo tanto $G \cong SU(2)/L$ donde L es un subgrupo finito de $SU(2)$.
$\square$

Observación 4.8. *Como consecuencia del Corolario 4.7 tenemos las siguientes observaciones:*

1. *Solo hay un grupo simplemente conexo con una métrica bi-invariante de curvatura seccional positiva, que es $SU(2)$ y por la Proposición 1.27 sabemos que es difeomorfo a $\mathbb{S}^3$.*

2. *Salvo múltiplo escalar, cualquier métrica bi-invariante es de hecho la métrica redonda de curvatura seccional constante.*

3. *Por la formula de O'Neill cualquier cociente $SU(2)/H$ donde H es subgrupo cerrado tiene curvatura seccional positiva. Si H es discreto entonces la curvatura es constante.*

4.2.2. Condición Suficiente

Ahora vamos a ver que tiene que satisfacer un grupo de Lie para admitir una métrica invariante izquierda donde $K(\Pi) \geq 0$, para cualquier plano Π del álgebra de Lie.

Teorema 4.9. *Si G es el producto semidirecto $P \rtimes H$ de un subgrupo H que tiene una métrica bi-invariante y un subgrupo P conmutativo y normal con una métrica invariante izquierda invariante bajo $Ad(h)$ para todo $h \in H$, entonces $K(\Pi) \geq 0$ para cualquier plano $\Pi \subset \mathfrak{g}$.*

Demostración.

Como $G = PH$ tenemos que como espacio vectorial $\mathfrak{g}$ es suma directa de $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{h}$, consideramos $\langle , \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle , \rangle_{\mathfrak{p}} + \langle , \rangle_{\mathfrak{h}}$ donde $\langle , \rangle_{\mathfrak{h}}$ es bi-invariante en H y $\langle , \rangle_{\mathfrak{p}}$ es invariante izquierda en P e invariante bajo la acción de H, de esta forma tenemos que $\langle , \rangle_{\mathfrak{g}}$ es invariante bajo $Ad(h) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ para cualquier $h \in H$. Usando que P es abeliano, entonces $\mathfrak{p}$ también lo es, y para $x, y \in \mathfrak{p}$ se cumple $\kappa(x, y) = 0$. Si $u \in \mathfrak{h}$, entonces $ad(u)$ es anti-adjunta al tener una métrica bi-invariante y utilizando el Lema 4.1 tenemos que $\kappa(u, x) \geq 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Con lo cual concluimos que $K(\Pi) \geq 0$ para cualquier plano $\Pi \subset \mathfrak{g}$.

$\square$

En [24] Milnor conjetura que el Teorema 4.9 es una equivalencia, es decir que todos los grupos con curvatura seccional no negativa en una métrica invariante izquierda son de esa forma.

Observación 4.10. *Más adelante, en el capítulo 6, veremos que podemos obtener el álgebra de Lie de este grupo $G = PH$ con curvaturas seccionales positivas, como el límite $\mathfrak{g}_0$ de una familia de álgebras de Lie $\mathfrak{g}_\varepsilon$ que dependen de ε.*

Observación 4.11. *Una vez probado el Teorema 4.9 podemos darnos cuenta que utilizamos la métrica bi-invariante del grupo H para obtener la condición $K \geq 0$. De esta forma podemos decir que todas las métricas del espacio moduli $\mathfrak{BI}(\mathfrak{h})$ se pueden extender a una métrica en $\mathfrak{g}$ con curvatura seccional no negativa. Como P es abeliano cualquier métrica invariante izquierda sobre P será plana, así que si queremos una métrica no plana en G las secciones con curvatura positiva provienen de H. Si la conjetura de Milnor es cierta, entonces todas las métricas invariantes izquierdas de G con curvatura seccional no negativa provienen de una bi-invariante del subgrupo H.*

4.3. Grupos Planos

Las variedades Riemannianas más sencillas son aquellas que todas sus curvaturas seccionales son idénticamente cero y se llaman variedades planas. En el caso de un grupo de Lie con una métrica invariante izquierda tenemos por el Lema 2.39 que si $\mathfrak{g}$ es conmutativa entonces cualquier métrica invariante izquierda es plana en $\mathfrak{g}$. Con esto en mente podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 4.12. *Cualquier grupo de Lie abeliano con una métrica invariante izquierda satisface que* $K(\Pi) = 0$ *para cualquier* Π *sección de* $\mathfrak{g}$.

El criterio preciso para determinar cuando un grupo es plano se puede establecer utilizando dos resultados. El primero que enunciaremos es un Teorema clásico de geometría Riemanniana y el segundo es una consecuencia del Tercer Teorema de Lie.

Teorema 4.13. ***(Cartan - Hadamard)****. Si* M *es una variedad completa, conexa con todas sus curvaturas seccionales no positivas, entonces para cualquier punto* $p \in M$*, se tiene que* $exp_p : T_pM \to M$ *es un mapeo cubriente. En particular si* M *es simplemente conexo entonces es difeomorfo a* $\mathbb{R}^n$.

Para la demostración revisar [23, Theorem 1.10].

En [24] Milnor demuestra el siguiente teorema que caracteriza a los grupos planos.

Teorema 4.14. *Un grupo de Lie* G *con una métrica invariante izquierda es plano si y sólo si* $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$ *donde* $\mathfrak{b}$ *es una subalgebra conmutativa,* $\mathfrak{u}$ *es un ideal conmutativo y* $ad(b)$ *es anti-adjunta para todo* $b \in \mathfrak{b}$.

Demostración.
Sea G un grupo de Lie simplemente conexo que admite una métrica plana invariante izquierda. Como G es una variedad Riemanniana completa entonces por el Corolario 1.65 y el Teorema 4.13 tenemos que G es isométrico a un espacio euclidiano. Además notemos que por este hecho cualquier subgrupo compacto de G es trivial. Para cualquier métrica en $\mathfrak{g}$, tenemos una transformación lineal $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{o}(n)$, $L(x) = \nabla_x$, donde $\mathfrak{o}(n)$ es el espacio de transformaciones anti-adjuntas de $\mathfrak{g}$ en sí misma. Si el tensor de curvatura es idénticamente cero, entonces $\nabla_{[x,y]} = \nabla_x\nabla_y - \nabla_y\nabla_x$ y por lo tanto L es un homomorfismo de algebras de Lie. Sabemos que $\mathfrak{u} = ker(L)$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y además por la igualdad $[u, v] = \nabla_u v - \nabla_v u$ tenemos que $\mathfrak{u}$ es conmutativo: si $u, v \in ker(L)$ entonces $\nabla_u = 0 = \nabla_v$ y por lo tanto $[u, v] = \nabla_u v - \nabla_v u = 0$.

Si $\mathfrak{b}$ es el complemento ortogonal de $\mathfrak{u}$, para cada $b \in \mathfrak{b}$ y $u \in \mathfrak{u}$ claramente se satisface que $[b, u] = \nabla_b u - \nabla_u b = \nabla_b u$ por lo que ∇_b mapea $\mathfrak{u}$ en sí mismo y por lo tanto mapea $\mathfrak{b}$ en sí mismo. De esto se sigue que $\mathfrak{b}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$.

Además $\mathfrak{b}$ se mapea bajo L de manera isomorfa en una subálgebra de $\mathfrak{o}(n)$. Como esta es el álgebra de Lie del grupo compacto $O(n)$, admite una métrica bi-invariante y con el pull-back de esta podemos dar a $\mathfrak{b}$ una métrica bi-invariante (esta métrica podría no tener nada que ver con la métrica original). Por la Proposición 2.21 tenemos que $\mathfrak{b}$ se descompone en una suma directa de ideales simples $\mathfrak{b}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{b}_k$. Si algún $\mathfrak{b}_i$ fuera no conmutativo, entonces el grupo de Lie correspondiente B_i sería no trivial y compacto. De nuevo por la Proposición 2.21, B_i sería subgrupo compacto de G. Pero esto es imposible, por lo tanto $\mathfrak{b}_i$ es conmutativa para toda i y por lo tanto $\mathfrak{b}$ es conmutativa. Con lo cual tenemos que $\mathfrak{g}$ se descompone como una suma directa ortogonal $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{b}$ donde $\mathfrak{u}$ es un ideal conmutativo y $\mathfrak{b}$ es una subalgebra conmutativa. Además para cada $b \in \mathfrak{b}$ tenemos que $ad(b)$ restringida a $\mathfrak{b}$ es trivial, pues $\mathfrak{b}$ es conmutativa y $ad(b)$ restringida a $\mathfrak{u}$ coincide con la transformación anti-adjunta ∇_b, pues si $u \in \mathfrak{u}$ entonces $ad(b)(u) = [b, u] = \nabla_b u - \nabla_u b = \nabla_b u$, ya que $u \in Ker(L)$.

Conversamente usando la Proposición 2.30 tenemos que $\nabla_u = 0$ y $\nabla_b = ad(b)$, de donde podemos obtener a través de algunos cálculos que $\kappa(x, y) = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

□

Observación 4.15. *Notemos que la segunda parte de la prueba del Teorema 4.14 es un caso particular del Teorema 4.9, donde ambos factores del grupo G son abelianos y por ello la curvatura seccional es cero. Además en un grupo de Lie G que admite una métrica bi-invariante plana, cualquier métrica bi-invariante es plana.*

Ejemplo 4.16. *Existen ejemplos de grupos de Lie no conmutativos con métricas invariantes izquierdas planas, pero son todos solubles. El ejemplo más simple es el grupo de transformaciones rígidas del plano euclidiano*

$$E(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{v} & A \end{bmatrix} : A \in O(2), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

No es conmutativo pero se puede expresar como el producto semidirecto de los subgrupos

$$\mathbb{R}^2 \cong \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{v} & I_2 \end{bmatrix} : I_2 \in O(2), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$O(2) \cong \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{0} & A \end{bmatrix} : A \in O(2), \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Como ambos son abelianos, $E(2)$ resulta ser plano.

Conectando con el trabajo de Bieberbach, el cual se puede consultar en [6], tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.17. *Si M es una variedad Riemanniana simplemente conexa, completa y plana, entonces M es isométrica a $\mathbb{R}^n$. Si no es simplemente conexa, entonces es isométrica $\mathbb{R}^n/L$, con $L \subset E(n)$ subgrupo discreto, libre de torsión. Además si M es compacta entonces $Hol(\nabla)$ es finito.*

Tenemos que un grupo de Lie plano, si es simplemente conexo, es isométrico a $\mathbb{R}^n$ y si no es simplemente conexo entonces es isométrico a $\mathbb{R}^n/L$ con L subgrupo discreto de $E(n)$ y el álgebra de Lie en ambos casos se descompone como indica el Teorema 4.14.

Capítulo 5

Curvatura de Ricci

En este capítulo desarrollamos un fragmento de lo visto por Milnor en [24] con respecto a la curvatura de Ricci con intención de aplicarlo a elementos del espacio moduli de métricas bi-invariantes. En conclusión tenemos que:

1. Si G es compacto y semisimple entonces cualquier $\langle,\rangle \in \mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ satisface que $Ric > 0$ y $\pi_1(G)$ es de orden finito (ver 5.9).

2. Si $\widetilde{G}$ es compacto, cualquier $\langle,\rangle \in \widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ satisface que Ric es constante y cualquier elemento de $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$ tiene un representante que satisface $Ric = 1$ (ver 5.13).

La curvatura de Ricci se puede caracterizar con una forma cuadrática r evaluada en vectores tangentes unitarios. Esta forma cuadrática está definida por la siguiente fórmula.

Definición 5.1. *Para un grupo de Lie G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definimos la forma cuadrática de Ricci, $r : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ como sigue*

$$r(x) = \sum_{i\neq 1} \kappa(x, e_i) = \sum_{i\neq 1} \langle R_{xe_i}(x), e_i\rangle,$$

donde $\frac{x}{||x||}, e_2, ..., e_n$ es un marco ortonormal en $\mathfrak{g}$. Si u es un vector tangente unitario $r(u)$ es la curvatura de Ricci en la dirección de u y la denotamos $Ric(u)$.

Se puede hacer una interpretación de la curvatura de Ricci en dirección de $u \in \mathfrak{g}$ como $(n-1)$ veces el promedio de las curvaturas $K(\Pi_i)$ donde cada Π_i es un plano generado por u y e_i. En geometría Riemanniana (ver por ejemplo [27]) se define el tensor de curvatura de Ricci como la contracción del tensor R y posteriormente se prueba que la expresión de este en coordenadas locales coincide con la Definición 5.1. Así queda demostrado que $Ric(u)$ está bien definido.

Con intención de facilitar los cálculos vamos a definir la siguiente transformación cuyos valores propios jugarán un papel importante de aquí en adelante.

Definición 5.2. *Definimos la transformación de Ricci, $\hat{r} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dada por $\hat{r}(x) = \sum_i R_{e_i x}(e_i)$. Los valores propios de $\hat{r}$ se llaman las curvaturas principales de Ricci.*

Proposición 5.3. *La transformación $\hat{r}$ es autoadjunta y además $\langle \hat{r}(x), x\rangle = r(x)$.*

Demostración. Por las propiedades de R, tenemos que

$$\langle \hat{r}(x), y\rangle = \sum_{i\neq 1}\langle R_{e_i x} e_i, y\rangle = \sum_{i\neq 1}\langle R_{e_i y} e_i, x\rangle = \langle \hat{r}(y), x\rangle$$

lo que implica que $\hat{r}$ es autoadjunto. Y además

$$\langle \hat{r}(x), x\rangle = \sum_{i\neq 1}\langle R_{e_i x} e_i, x\rangle = \sum_{i\neq 1}\langle R_{x e_i} x, e_i\rangle = r(x).$$

□

Observación 5.4. *1. Si $e_1, ..., e_n$ es una base ortonormal de vectores propios de $\hat{r}$, la forma cuadrática asociada a $\hat{r}$ está diagonalizada $r(\varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n e_n) = \sum_i \varepsilon_i^2 r(e_i)$.*

2. Los escalares $r(e_i)$ se pueden identificar con las curvaturas principales y

$$\{sgn(r(e_1)), ..., sgn(r(e_n))\}$$

se identifica con la signatura de r.

5.1. Curvatura de Ricci Positiva

Ahora vamos a enunciar un criterio que demuestra Milnor en [24] para obtener una dirección con curvatura de Ricci positiva.

Lema 5.5. *Si $ad(x)$ es anti-adjunta, entonces $Ric(x) \geq 0$. La igualdad se da si y sólo si x es ortogonal al ideal $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Demostración.
Esto quedó probado en el Lema 4.1.
□

El caso en donde el tensor de Ricci es estrictamente positivo tiene fuertes consecuencias topológicas debido al Teorema de Myers ([26]), publicado en 1941 por Sumner Byron Myers.

Teorema 5.6. ***(Myers, 1941)*** *Una variedad Riemanniana completa de dimensión n, que satisface $Ric(X) \geq c > 0$, para todo X tangente unitario, tiene diámetro menor o igual a $\pi[\frac{n-1}{c}]^{1/2}$.*

En consecuencia tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.7. *Si M es una variedad Riemanniana completa con curvatura de Ricci positiva alejada de 0, entonces $\widetilde{M}$, el cubriente universal de M, es compacto y $\pi_1(M)$ es de orden finito.*

Para un grupo de Lie Milnor prueba el siguiente teorema.

Teorema 5.8. *Un grupo de Lie G conexo admite una métrica invariante izquierda con curvatura $Ric(x) > 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ si y sólo si es compacto con grupo fundamental finito.*

Demostración.

Por lo visto en el Corolario 5.7 tenemos la implicación en una dirección.

Ahora si G es compacto, entonces admite una métrica bi-invariante donde además $ad(x)$ es anti-adjunta para todo $x \in \mathfrak{g}$. Por el Lema 5.5 tenemos la curvatura de Ricci es mayor o igual a cero y para la desigualdad estricta vamos a demostrar que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Veamos que si G tiene grupo fundamental finito, entonces su cubriente universal $\widetilde{G}$ es compacto. Sea $\{\tilde{a}_n\}$ una sucesión en $\widetilde{G}$, entonces con el mapeo cubriente $p : \widetilde{G} \to G$ tenemos $\{a_n = p(\tilde{a}_n)\}$ una sucesión en G. Como este es compacto tenemos una subsucesión g_n de $\{a_n\}$ que converge a algún $g \in G$. Ahora sabemos que existe $K \subset G$ compacto que contiene a g y a todo g_m a partir de algún momento y además K es difeomorfo a cada componente conexa de $p^{-1}(K)$. Entonces tenemos $\tilde{g}_m$ subsucesión de $\tilde{a}_n$ contenida en una cantidad finita de compactos contenidos en $\tilde{G}$ pues el cubriente tiene una cantidad finita de hojas. Por lo que $\tilde{g}_m$ tiene una subsucesión convergente en $p^{-1}(K)$ con lo cual concluimos que $\widetilde{G}$ es compacto.

Por la Proposición 2.26 tenemos que en general $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus Z(\mathfrak{g})$. Notemos que $Z(\mathfrak{g})$ es trivial, pues de lo contrario definimos el siguiente homomorfismo no trivial de álgebras de Lie entre $\mathfrak{g}$ y $\mathbb{R}$. Para $x + z \in \mathfrak{s} \oplus Z(\mathfrak{g})$ consideremos la composición

$$x + z \overset{\phi}{\mapsto} z \overset{\psi}{\mapsto} (\alpha_1, ..., \alpha_l) \overset{p_i}{\mapsto} \alpha_i,$$

donde ϕ es la proyección de $\mathfrak{g}$ al centro, ψ es un isomorfismo de $Z(\mathfrak{g})$ con $\mathbb{R}^l$ y p_i la proyección de $\mathbb{R}^l$ al i-ésimo factor $\mathbb{R}$. Esta composición nos da un homomorfismo de grupos no trivial entre $\mathfrak{g}$ y $\mathbb{R}$. Por el Segundo Teorema de Lie 1.64 existe un homomorfismo no trivial de grupos de Lie entre $\widetilde{G}$ y $\mathbb{R}$ pero esto es una contradicción por la compacidad de $\tilde{G}$, pues el único subgrupo compacto de $\mathbb{R}$ es trivial. Entonces $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y por el Lema 5.5 tenemos que todas las curvaturas de Ricci son positivas.

□

Poniendo especial atención en métricas bi-invariantes tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.9. *En un grupo de Lie G compacto y semisimple cualquier métrica en $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ satisface que $Ric > 0$. Además $\pi_1(G)$ es de orden finito.*

Demostración.

Cualquier métrica bi-invariante en G satisface que $ad(x)$ es anti-adjunta, como G es semisimple entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ y usando el Lema 5.5 concluimos que cualquier métrica en $\mathfrak{BI}(\mathfrak{g})$ satisface $Ric > 0$. Finalmente usando el Teorema 5.8 concluimos que $\pi_1(G)$ es de orden finito.

□

5.2. Curvatura de Ricci Constante

Las variedades Riemannianas con curvatura de Ricci constante se suelen llamar variedades de Einstein (ver por ejemplo [2]) y satisfacen que $Ric(X) = \lambda ||X||^2$, en esta sección daremos un criterio para saber cuándo un grupo de Lie admite una métrica bi-invariante con curvatura de Ricci constante. Comenzamos con la siguiente observación que se puede consultar en [2, Remark 2.34].

Observación 5.10. *Para $x \in \mathfrak{g}$ definimos el mapeo $Q(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $Q(x)(y) = R_{xy}(x)$. Entonces se cumple que $Ric(x) = tz(Q(x))$, de modo que $Ric(x) = -\frac{1}{4}B(x,x)$, donde B es la forma de Killing.*

Lema 5.11. *Si tenemos un grupo de Lie compacto y simple entonces la métrica bi-invariante tiene curvatura de Ricci constante.*

Demostración.

Sea $u \in \mathfrak{g}$, un vector unitario en úna métrica bi-invariante $\langle , \rangle$. Recordemos que $\langle , \rangle = \lambda(-B)$ con $\lambda > 0$ y utilizando la observación anterior calculamos

$$Ric(u) = -\frac{1}{4}B(u,u) = \frac{1}{4}(\lambda\langle u,u\rangle) = \frac{\lambda}{4}.$$

□

Es fácil verificar que haciendo un cambio de escala en la métrica multiplicando por una constante podemos obtener una métrica que satisfaga $\langle x,x\rangle = r(x)$ de tal forma que la curvatura de Ricci será idénticamente 1.

Como consecuencia Milnor demuestra el siguiente corolario en [24].

Corolario 5.12. *Cualquier grupo de Lie G cuyo cubriente universal $\widetilde{G}$ es compacto, admite una métrica bi-invariante con curvatura de Ricci constante igual a* 1.

Demostración.

Tenemos que $\widetilde{G}$ es compacto y por lo tanto admite una métrica bi-invariante. Por la proposición 2.21 $\widetilde{G}$ se descompone como un producto $A_1 \times \cdots \times A_k$ de grupos simples. Cada grupo simple tiene una métrica bi-invariante de curvatura de Ricci igual a $\frac{1}{k}$. Por lo que si $u \in \mathfrak{g}$ es un vector unitario con la métrica producto, la curvatura de Ricci del producto está dada por

$$r(u) = \langle\langle \hat{r}(u), u\rangle\rangle = \langle \hat{r}_1(u_1), u_1\rangle_1 + \cdots + \langle \hat{r}_k(u_k), u_k\rangle = \langle u_1, u_1\rangle + \cdots + \langle u_k, u_k\rangle = 1.$$

Esto termina la prueba pues $\widetilde{G}$ y G son localmente isométricos. □

Observación 5.13. *Cuando $\widetilde{G}$ es compacto cualquier métrica en $\widetilde{\mathfrak{BI}}(\mathfrak{g})$ tiene curvatura de Ricci constante $r(u) = \alpha$. Haciendo un cambio de escala podemos concluir que cualquier clase de $\mathfrak{EBI}(\mathfrak{g})$ tiene un representante que realiza $Ric = 1$.*

Capítulo 6

Curvatura Escalar

En este capítulo de nuevo desarrollamos lo visto por Milnor en [24] correspondiente a curvatura escalar, se verifica que si un grupo de Lie G tiene un subgrupo compacto H no conmutativo, cualquier elemento de $\mathfrak{BI}(\mathfrak{h})$ se extiene a una métrica en $\mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ con $\rho > 0$ (ver 6.5).

La curvatura escalar de una variedad Riemanniana de dimensión n se define como la contracción del tensor de Ricci y en coordenadas locales tiene la siguiente expresión

$$\rho = 2\sum_{i<j} K(E_i, E_j),$$

donde $E_1, ..., E_n$ es un marco ortonormal de vectores tangentes en un punto. De manera alternativa podemos definir la curvatura escalar como el promedio de todas las curvaturas seccionales en un punto multiplicado por $n(n-1)$. En el caso de un grupo de Lie definiremos la curvatura escalar de la siguiente forma.

Definición 6.1. *Si G es un grupo de Lie con una métrica invariante izquierda y $e_1, ..., e_n \in \mathfrak{g}$ es una base ortonormal, definimos la curvatura escalar de $\mathfrak{g}$ como*

$$\rho(\mathfrak{g}) = r(e_1) + \cdots + r(e_n) = 2\sum_{i<j} \kappa(e_i, e_j).$$

6.1. Curvatura Escalar Positiva

Antes de enunciar el siguiente criterio para la curvatura escalar positiva necesitamos utilizar el Teorema de Iwasawa cuya demostración se puede consultar en [17].

Teorema 6.2. ***Iwasawa***. *Si G es un grupo de Lie conexo, entonces:*

1. *Cualquier subgrupo compacto está contenido en un subgrupo compacto maximal H, que es necesariamente un grupo de Lie conexo.*

2. *Este subgrupo compacto maximal es único salvo conjugación.*

3. *G es homeomorfo a $H \times \mathbb{R}^m$.*

En [24] Milnor prueba lo siguiente.

Corolario 6.3. *El cubriente universal de G es homeomorfo a un espacio euclidiano si y sólo si cualquier subgrupo compacto es conmutativo.*

Demostración.

Tenemos que G es homeomorfo a $H \times \mathbb{R}^m$ donde H es el compacto maximal y además es conmutativo por hipótesis. Ahora como $H \times \mathbb{R}^m$ es un grupo de Lie conmutativo, tenemos que su álgebra de Lie es su cubriente universal que es claramente un espacio euclidiano.

□

Teorema 6.4. ***(Wallach)*** *Si el cubriente universal de G no es homeomorfo a un espacio euclidiano, entonces G admite una métrica invariante izquierda de curvatura escalar estrictamente positiva.*

Demostración.

Por el Corolario 6.3 tenemos que G contiene un subgrupo compacto, conexo y no conmutativo H. De la misma forma como se hizo en el Teorema 2.12 utilizando la compacidad de H podemos construir una métrica en $\mathfrak{g}$ que es invariante bajo la transformación lineal $Ad_h : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ para toda $h \in H$.

Consideramos $b_1, ..., b_m$ una base ortonormal de $\mathfrak{h}$ y la extendemos a una base ortonormal $b_1, ..., b_n$ de $\mathfrak{g}$. Como se vio en el Lema 2.14 tenemos que las transformaciones lineales $ad(b_1), ..., ad(b_m)$ son anti adjuntas. Considerando $\varepsilon > 0$, tomamos una nueva base $e_1, ..., e_n$ definida por:

$$e_1 = b_1, ..., e_m = b_m, \quad e_{m+1} = \varepsilon b_{m+1}, ..., e_n = \varepsilon b_n$$

Tomamos una nueva métrica $\langle , \rangle_\varepsilon$ donde $e_1, ..., e_n$ es una base ortonormal y denotamos $\mathfrak{g}_\varepsilon$ al álgebra de Lie con esta métrica. Notemos que si $i > m$ como $\langle e_i, e_i \rangle_\varepsilon = 1$ entonces $\langle b_i, b_i \rangle_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Las constantes de estructura son funciones que dependen continuamente de ε. Verifiquemos que $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_{ijk}(\varepsilon)$ siempre existe; escribimos $[b_i, b_j] = \sum_k \beta_k b_k$, y analizamos diferentes casos.

1. Si $i, j, k \leq m$, entonces $\alpha_{ijk}(\varepsilon) = \langle [e_i, e_j], e_k \rangle_\varepsilon = \langle \beta_k b_k, b_k \rangle_\varepsilon = \beta_k$, en este caso $\alpha_{ijk}(\varepsilon)$ es constante por lo que $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_{ijk}(\varepsilon) = \beta_k$.

2. Si $j, k \leq m < i$ entonces $\alpha_{ijk}(\varepsilon) = \langle [e_i, e_j], e_k \rangle_\varepsilon = \varepsilon \beta_k \langle b_k, b_k \rangle_\varepsilon = \varepsilon \beta_k$, en este caso $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_{ijk}(\varepsilon) = 0$.

3. Si $i, j \leq m < k$ entonces $\alpha_{ijk}(\varepsilon) = \langle [e_i, e_j], e_k \rangle_\varepsilon = 0$, esto pues $[e_i, e_j] \in \mathfrak{h}$ y $e_k \in \mathfrak{h}^\perp$.

4. Si $i \leq m < j, k$, entonces $\alpha_{ijk}(\varepsilon) = \langle [e_i, e_j], e_k \rangle_\varepsilon = \varepsilon^2 \beta_k \langle b_k, b_k \rangle_\varepsilon = \varepsilon^2 \beta_k \frac{1}{\varepsilon^2} = \beta_k$, en este caso $\alpha_{ijk}(\varepsilon)$ es constante por lo que $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_{ijk}(\varepsilon) = \beta_k$.

5. Si $i, j > m$, $k \leq m$ entonces $\alpha_{ijk}(\varepsilon) = \langle [e_i, e_j], e_k \rangle_\varepsilon = \varepsilon^2 \beta_k \langle b_k, b_k \rangle_\varepsilon = \varepsilon^2 \beta_k$, en este caso $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_{ijk}(\varepsilon) = 0$

6. Si $m < i, j, k$ entonces, $\alpha_{ijk}(\varepsilon) = \langle [e_i, e_j], e_k \rangle_\varepsilon = \varepsilon^3 \beta_k \langle b_k, b_k \rangle_\varepsilon = \varepsilon \langle e_k, e_k \rangle_\varepsilon = \varepsilon \beta_k$ por lo tanto $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_{ijk}(\varepsilon) = 0$.

Definimos $\widetilde{\alpha}_{ijk} = \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_{ijk}(\varepsilon)$ y como ya vimos:

$$\widetilde{\alpha}_{ijk} = \begin{cases} \beta_k & si \quad i,j \leq m \\ 0 & si \quad i,j \leq m < k \\ \beta_k & si \quad i < m < j,k \\ 0 & si \quad m < i,j,k. \end{cases}$$

Por la Observación 2.10 con estas nuevas constantes de estructura y $a_1, .., a_n \in \mathfrak{g}$ cualquier base (por ejemplo $b_1, ..., b_n$), podemos definir un álgebra de Lie limite $\mathfrak{g}_0$, con su métrica $\langle , \rangle_0$ donde $\langle [a_i, a_j]_0, a_k \rangle_0 = \widetilde{\alpha}_{ijk}$ y esta métrica hace a esta base ortonormal. Notemos que $\mathfrak{g}_0$ se descompone como suma directa $\mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{u}_0$ donde $\mathfrak{h}_0$ está generado por $a_1, ..., a_m$ y $\mathfrak{u}_0$ por los casos 4 y 6 es un ideal conmutativo generado por $a_{m+1}, ..., a_n$.

Notemos que si $b \in \mathfrak{h}_0$, entonces $ad(b)$ es anti adjunta y usando la Proposición 2.30 podemos concluir que $\nabla_u = 0$ para todo $u \in \mathfrak{u}_0$. En consecuencia tenemos que para todo $x \in \mathfrak{g}_0$

$$R_{xu} z = \nabla_{[x,u]} z - \nabla_x \nabla_u z + \nabla_u \nabla_x z = \nabla_{[x,u]} z.$$

Analizando las constantes de estructura $\widetilde{\alpha}_{ijk}$, tenemos que $[x, u] \in \mathfrak{u}_0$ con lo que concluimos que $R_{xu} = 0$ y por lo tanto $\kappa(x, u) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}_0$. Con esto en mente tenemos que $r(u) = 0$, y si $b \in \mathfrak{h}_0$ por el Lema 5.5 entonces $r(b) \geq 0$ (el caso $r(b) = 0$ no siempre se da puesto que $\mathfrak{h}$ es no conmutativa). Por lo que $\rho(\mathfrak{g}_0) > 0$, y por continuidad tenemos que $\rho(\mathfrak{g}_\varepsilon) > 0$ para alguna ε suficientemente pequeña.

□

Observación 6.5. *En la prueba del Teorema anterior se usa que G tiene un subgrupo compacto H con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ no conmutativa, y la métrica bi-invariante de este se extiende a una invariante izquierda tal que $\rho > 0$, por lo que todas las métricas del espacio moduli $\mathfrak{BI}(\mathfrak{h})$ se pueden extender a una métrica en $\mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ con $\rho > 0$.*

Observación 6.6. *Esta álgebra de Lie límite $\mathfrak{g}_0$ nos da un ejemplo de un álgebra de Lie con todas sus curvaturas seccionales positivas.*

Apéndices

Apéndice A

Submersiones Riemannianas

En este apéndice mencionaremos algunos resultados importantes de geometría Riemanniana que involucran a las submersiones Riemannianas. Para un tratado más profundo de estos temas el lector puede consultar [12] y [7].

Definición A.1. *Decimos que un mapeo entre variedades $\pi : M \to B$ es una submersión si es suprayectiva y $d\pi_p$ también es suprayectiva para todo $p \in M$.*

Observación A.2. *Si $\pi : M \to B$ es una submersión, entonces por el teorema de la función implícita podemos concluir que $\pi^{-1}(p)$ es una subvariedad de M.*

Definición A.3. *Sea $\pi : M \to B$ una submersión donde M y B son variedades Riemannianas. Decimos que π es submersión Riemanniana si $d\pi_p$ restringida a $(ker(d\pi_p))^{\perp}$ es una isometría para todo $p \in M$.*

La siguiente Observación es una síntesis de un par de comentarios que se pueden consultar en [12, Section 2.4].

Observación A.4. *Si G es un grupo de Lie con una métrica invariante izquierda y $H \subset G$ es un subgrupo cerrado, definimos una acción izquierda de H en G como $(h, g) \mapsto hg$. De esta forma H actúa por isometrías en G, donde el espacio de órbitas de esta acción es $H\backslash G = \{Hg | g \in G\}$, un espacio homogéneo y la proyección canónica $\pi : G \to H\backslash G$ es una submersión.*

Si queremos que la proyección a clases laterales izquierdas sea una submersión Riemanniana entonces debemos pedir que la métrica invariante izquierda en G sea bi-invariante en H como lo indica el siguiente teorema que se puede consultar en [12, Section 2.4].

Teorema A.5. *Sea G un grupo de Lie con una métrica invariante izquierda y $H \subset G$ un subgrupo cerrado tal que la métrica invariante izquierda es bi-invariante sobre H, entonces*

1. *Existe una única métrica Riemanniana en $G/H = \{gH | g \in G\}$ tal que la proyección canónica $\pi : G \to G/H$ es una submersión Riemanniana.*

2. *El grupo G actúa por isometrías en G/H de la forma $(g, aH) \mapsto gaH$.*

La siguiente observación nos dará todo el lenguaje para poder entender la Formula de O'Neill.

Observación A.6. *En una submersión Riemanniana* $\pi : M \to B$ *el espacio tangente a* M *en* p *se descompone como suma directa* $T_pM = Ker(d\pi_p) \oplus (ker(d\pi_p))^{\perp}$*. Además si tomamos* $X \in T_{\pi(p)}B$ *entonces existe un único* $\widetilde{X} \in (ker(d\pi_p))^{\perp}$ *tal que* $d\pi_p(\widetilde{X}) = X$*. A* $\widetilde{X}$ *le llamamos el levantamiento horizontal de* X*. Finalmente si* $Y \in T_pM$*, denotamos* Y^V *a la proyección de* Y *en* $ker(d\pi)$*.*

A.1. Formula de O'Neill

El siguiente teorema nos da una forma de aprovechar las submersiones Riemannianas para calcular la curvatura seccional. La demostración se puede consultar en [7]. Denotemos por K_B la curvatura seccional en B y K_M la curvatura seccional en M.

Teorema A.7. ***(O'Neill)*** *Si* $\pi : M \to B$ *es una submersión Riemanniana y* $X, Y \in T_{\pi(p)}B$ *entonces* $K_B(X,Y) = K_M(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) + ||[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V||$*.*

Observación A.8. *En el caso en que* $\pi : G \to G/H$ *es una submersión Riemanniana, la Formula de O'Neill dice que* $K_{G/H}(X,Y) = K_G(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) + ||[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V||$*. Donde* $K_G(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ *es la curvatura seccional de* G *para planos contenidos en* $\mathfrak{h}^{\perp}$ *y* $||[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V||$ *se calcula con la métrica bi-invariante que tenemos definida sobre* $\mathfrak{h}$*. Con esto encontramos una relación entre la geometría del espacio homogéneo* G/H *y cualquier métrica en* $\mathfrak{BI}(\mathfrak{h})$*.*

Apéndice B

Variedades Orbitales

Las variedades orbitales (*Orbifolds*) son espacios topológicos que se modelan localmente sobre un cociente de una variedad dfierenciable bajo la acción de un grupo finito. En este apéndice veremos lo más básico de variedades orbitales, mencionaremos algunos ejemplos que se pueden encontrar en [1] y probaremos que el espacio $PS^n(\mathbb{R})$ tiene estructura de variedad orbital.

Definición B.1. *Sea X un espacio topológico. Una carta orbital de dimensión $n \geq 0$ en X es una tripleta (U, G, ϕ) donde U es subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$, G es un subgrupo finito del grupo de difeomorfismos de U en sí mismo, $Dif(U)$, $\phi : U \to X$ es un mapeo abierto que induce un homeomorfismo entre U/G y $\phi(U)$.*

Definición B.2. *Si (U, G, ϕ) y (V, H, ψ) son cartas orbitales en un espacio topológico X, un encaje $\lambda : (V, H, \psi) \to (U, G, \phi)$ es un mapeo $\lambda : V \to U$ tal que $\phi \circ \lambda = \psi$.*

Definición B.3. *Un atlas orbital en un espacio topológico X es una familia $\mathcal{A} = \{(U_i, G_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ de cartas orbitales que cubren a X y son localmente compatibles; es decir dadas dos cartas $(U, G, \phi), (V, H, \psi) \in \mathcal{A}$ con $\phi(U) = \widetilde{U}$, $\psi(V) = \widetilde{V}$ y $p \in \widetilde{U} \cap \widetilde{V}$, existe una vecindad $\tilde{W}$ de p y $(W, K, \varphi) \in \mathcal{A}$ con $\varphi(W) = \widetilde{W}$ tal que tenemos dos encajes $\lambda : (W, K\varphi) \to (V, H, \psi)$ y $\mu : (W, K\varphi) \to (U, G, \phi)$.*

Definición B.4. *Un atlas orbital $\mathcal{A}$ refina a otro atlas $\mathcal{B}$ si para cualquier carta de $\mathcal{A}$ existe un encaje en alguna carta de $\mathcal{B}$. Dos atlas son equivalentes si tienen un mismo refinamiento.*

Definición B.5. *Una variedad orbital $\mathfrak{X}$ de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff, paracompacto X equipado con una clase de equivalencia $[\mathcal{A}]$ de atlas orbitales de dimensión n.*

Ejemplo B.6. *Sea $\mathbb{T}^4 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y definimos la acción izquierda de $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ sobre $\mathbb{T}^4$, dada por $(-1, (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}, e^{i\theta_4})) \mapsto (e^{-i\theta_1}, e^{-i\theta_2}, e^{-i\theta_3}, e^{-i\theta_4})$, el espacio $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ tiene estructura de variedad orbital y se conoce como la superficie de Kummer.*

Ejemplo B.7. *Sea G un subgrupo finito de $GL(n, \mathbb{C})$, el espacio $\mathbb{C}^n/G$ tiene estructura de variedad orbital.*

Ejemplo B.8. *Consideremos $\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_0, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} | \sum_i |z_i|^2 = 1\}$ y fijemos $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Definimos la acción $(\lambda, (z_0, ..., z_n)) \mapsto (\lambda^{a_0} z_0, ..., \lambda^{a_n} z_n)$ donde los a_i son enteros primos relativos. El espacio $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ denotado como $W\mathbb{P}(a_0, ..., a_n)$ tiene estructura de variedad orbital y se le llama un espacio proyectivo con pesos $a_0, ..., a_n$.*

Definición B.9. *Para un espacio topológico X y S_n el grupo simétrico de permutaciones de n elementos, consideramos la acción de S_n en el producto cartesiano de X consigo mismo n veces X^n, dada por*

$$(\sigma, (x_1, ..., x_n)) \mapsto (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}).$$

Definimos el n-ésimo producto simétrico de X como $PS^n(X) = X^n/S_n$ con la topología cociente.

Teorema B.10. *El espacio topológico $PS^n(\mathbb{R})$ tiene una estructura de variedad orbital.*

Demostración.

Usando que $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff y paracompacto podemos concluir fácilmente que $PS^n(\mathbb{R})$ también lo es. Ahora dotemos a $PS^n(\mathbb{R})$ de un atlas orbital.

La acción de S_n en $\mathbb{R}^n$ induce un homomorfismo inyectivo de grupos $\rho : S_n \to O(n)$, $\rho(\sigma)(x_1, ..., x_n) = (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$. Denotamos $\Gamma = \rho(S_n)$ y consideramos la proyección a clases $\pi : \mathbb{R}^n \to PS^n(\mathbb{R})$, $\pi(x_1, ..., x_n) = [(x_1, ..., x_n)]$. La tripleta $(\mathbb{R}^n, \Gamma, \pi)$ es una carta orbital para $PS^n(\mathbb{R})$, pues $\mathbb{R}^n$ es abierto y conexo, $\Gamma \subset O(n) \subset Dif(\mathbb{R}^n)$ es subgrupo finito y el mapeo π pasa al cociente como la identidad entre $\mathbb{R}^n/S_n$ y $PS^n(\mathbb{R})$. De esta forma el atlas orbital $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \Gamma, \pi)\}$ con una sola carta orbital, $[\mathcal{A}]$ dota a $PS^n(\mathbb{R})$ de una estructura de variedad orbital.

□

Proposición B.11. *El espacio $PS^n(\mathbb{R})$ es homeomorfo a $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})^{n-1}$.*

Demostración.

Cada elemento de $PS^n(\mathbb{R})$ tiene un único representante $(t_1, ..., t_n)$ de modo que $t_i \leq t_{i+1}$, definimos el siguiente mapeo $\phi : PS^n \to \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})^{n-1}$, dado por

$$\phi(t_1, ..., t_n) = (t_1, t_2 - t_1, ..., t_n - t_{n-1}).$$

No es difícil verificar que ϕ es un homeomorfismo. □

En [1] se generaliza este Teorema para cualquier variedad diferenciable.

Teorema B.12. *Dada M una variedad diferenciable entonces $PS^n(M)$ admite una estructura de variedad orbital.*

Bibliografía

[1] Adem, Alejandro; Leida, Johan; Ruan, Yongbin. *Orbifolds and Stringy Topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[2] Alexandrino, Marcos; G. Bettiol, Renato. *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions*, Springer International Publishing, Switzerland 2015.

[3] Azencott, Robert; Wilson, Edward N. *Homogeneous manifolds with negative curvature. I*, Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976), 323–362.

[4] Bump, Daniel. *Lie Groups.* Springer, New York, 2013.

[5] Brocker, Theodor; tom Dieck, Tammo. *Representations of Compact Lie Groups.* Springer-Verlag, New York, 1985.

[6] Charlap, Leonard S. *Bieberbach Groups and Flat Manifolds.* Springer-Verlag, New York Inc, 1986.

[7] Cheeger, Jeff; Ebin, David G. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.

[8] Cheeger, Jeff; Gromoll, Detlef. *The Splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature.*J. Differential Geometry 6 (1971/72), 119–128.

[9] do Carmo, Manfredo Perdigão, *Riemannian Geometry*, Birkhäusser Boston 1993.

[10] Frankel, Theodore. *The Geometry of Physics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[11] Fulton, William; Harris, Joe. *Representation Theory: A First Course.* Springer-Verlag, New York Inc. 199.

[12] Gromoll, Detlef; Walschap, Gerard. *Metric Foliations and Curvature.* Birkhäuser Verlag AG, Berlin, 2009.

[13] Gündogan, Hasan. *The component group of the automorphism group of a simple Lie algebra and the splitting of the corresponfing short exact sequence.* J. Lie Theory 20 (2010), no. 4, 709–737.

[14] Hall, Brian C. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations.* Springer, Switzerland 2012.

[15] Heintze, Ernst. *On Homogeneous Manifolds of Negative Curvature*, Math. Ann. 211 (1974), 23-34.

[16] Helgason, Sigurdur. *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Academic Press, New York, 1962.

[17] Iwasawa, Kenkichi. *On some types of topological groups*. Ann. of Math. (2) 50 (1949), 507–558.

[18] Jacobson, Nathan. *Lie Algebras*. Dover Publications, New York, 1979.

[19] Ji, Lizhen; Papadopoulos, Athanaese. *Sophus Lie and Felix Klein: The Erlangen Program and Its Impact in Mathematics and Physics*. European Mathematical Society, Switzerland, 2015.

[20] Kazdan, Jerry L.; Warner, F. W. *Scalar curvature and Conformal Deformation of Riemannian Structure* 10 (1975), 113–134.

[21] Knapp, Anthony W. *Lie Groups Beyond an Introuction*. Birkhäusser, New York, 2002.

[22] Kodama, Hiroshi; Takahara, Atsushi; Tamaru, Hiroshi. *The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling*. Manuscripta Math. 135 (2011), no. 1-2, 229–243.

[23] Lee, John, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[24] Milnor, John. *Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups*. Advances in Mathematics 21, 293-329(1976).

[25] Murakami, Shingo. *On the automorphism of a real semi-simple Lie algebra*. J. Math. Soc. Japan 4 (1952), 103–133.

[26] Myers, S. B., *Riemannian manifolds with positive mean curvature*. Duke Math. J. 8 (1941), 401–404.

[27] O'Neill, Barret. *Semi-Riemannian geometry*. Academic Press, San Diego, 1983.

[28] O'Neill, Barrett. *The Fundamental Equations of a Submersion*. Michigan Math. J. 13 (1966), 459–469.

[29] Procesi, Claudio. *Lie Groups, An Approach through Invariants and Representations*. Springer, San Francisco, 2007

[30] Serre, Jean-Pierre . *Complex Semisimple Lie Algebras*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001.

[31] Serre, Jean-Pierre. *Lie Algebras and Lie Groups*, Springer-Verlag Berlin Heidelber 1992.

[32] Spanier, Edwin. *Algebraic Topology*, Springer, New York, 1982.

[33] Wallach, Nolan R., *Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature*. Ann. of Math. (2) 96 (1972), 277–295.

[34] WARNER, FRANK. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer-Verlag, New York 1983.

[35] WOLF, JOSEPH A. *Curvature in nilpotent Lie Groups.* Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 271–274.