UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Polinomios Cuadráticos y Cúbicos.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A:

Efrain Gaucin Arellano

DIRECTOR DE TESIS:
M. en C. José Antonio Gómez Ortega

CIUDAD DE MÉXICO, 2022

Índice general

*

Agradecimientos

A la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de México por la formación académica brindada en sus espacios.

A mi asesor José Antonio Gómez por el tiempo y esfuerzo que dedico a este proyecto, por su paciencia conmigo y por confiar en mi desde el principio. También, agradezco a cada uno de los sinodales por mostrar una gran dedicación. Es por sus contribuciones y a la guía de mi asesor que puedo sentirme orgulloso de este trabajo.

Agradezco a todos mis profesores, que me apoyaron tanto durante la carrera. En particular, quiero agradecer a la Dra. Gisela Camacho por todas las veces que conté con su apoyo y por presentarme nuevos horizontes en el campo profesional y académico.

Por último agradezco a mi familia; en especial a mis padres y a mi hermana por permitirme contar con ellos incondicionalmente y en todo momento.

Introducción

Introducción

La formación en matemáticas del estudiante puede ser obstaculizada si el profesor no es consciente de las circunstancias cuando confunde dos o más representaciones de un mismo objeto matemático; entendemos por objeto matemático a cualquier entidad abstracta estudiada en matemáticas como lo son número, recta, matriz, conjunto, etc. Así, para el caso de los objetos matemáticos: polinomio, ecuación, función polinomial y curva algebraica, es necesario distinguir entre ellos; además, mediante algunas de sus representaciones enfatizar como se relacionan los objetos entre sí. Cuando esto no ocurre en el momento que se aprende, el estudio de los objetos de la cuarteta mencionada se complica.

Los temas en este trabajo de tesis componen una propuesta de texto para el profesor de bachillerato de matemáticas que busque conocer las relaciones y diferencias que hay entre los polinomios, las ecuaciones, las funciones polinomiales y las curvas algebraicas. Es importante aclarar que no se busca ofrecer una lectura de consulta para presentar los temas en un curso, ni se pretende cubrir el temario de alguna materia; este es un trabajo que sirve como una lectura de estudio del profesor que quiere ampliar su cultura matemática. Se advierte que este documento tiene en cuenta que el lector modelo es un docente de matemáticas de bachillerato cuya formación profesional cubre conocimientos en álgebra superior, geometría plana, cálculo diferencial e integral, operaciones de vectores, entre otros temas y en cuanto a los distintos tipos de demostraciones en matemáticas se espera que el lector conozca la demostración directa, las pruebas contra positiva, por casos, por reducción al absurdo e inducción matemática.

Los contenidos se documentan bajo el objetivo de ampliar la cultura matemática del lector con respecto a los polinomios. Esto quiere decir que se le da importancia a la argumentación fina y a las demostraciones formales como cuando se demuestra el algoritmo de la división para polinomios o cuando se deducen las fórmulas generales para hallar las raíces tanto de polinomios de segundo y tercer grado como los de cuarto grado. Se busca que el lector ubique aspectos de ciertos contextos históricos, como por ejemplo la construcción geométrica de Cardano para hallar las raíces de ecuaciones de tercer grado o la solución de la ecuación cuadrática ideada por los antiguos griegos. Además se exponen resultados que exploran diversas propiedades del polinomio como la relación entre sumas de potencias y polinomios simétricos mediante las fórmulas de Newton o el uso de la derivada para estudiar polinomios de raíces múltiples. Al ampliar la cultura matemática del profesor, se pretende contribuir a la solución de las problemáticas mencionadas al principio, esperando que algunos profesores al leer este texto se percaten de las diferencias y relaciones entre los objetos matemáticos aquí mencionados.

El hilo conductor es la descripción de las propiedades de los polinomios lineales, cuadráticos y cúbicos, con la ayuda de objetos geométricos como son las rectas, las parábolas y las curvas algebraicas; al igual que con la ayuda de conceptos algebraicos como son las progresiones aritméticas, las progresiones geométricas y las progresiones aritméticas de segundo grado no degeneradas.

En el capítulo 1 se establece el lenguaje que se empleará durante el escrito. Se definen los objetos base que permitirán la construcción de resultados posteriores. Se busca que el uso del lenguaje y de la notación sea cuidadoso, teniendo en cuenta que hay objetos matemáticos que comparten una misma representación y por lo tanto es necesario resaltar su contexto.

El capítulo 2 presenta las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas que naturalmente terminan introduciendo relaciones lineales. Se diferencia entre función lineal y función afín. Se relaciona la colinealidad de un ambiente geométrico con el Teorema fundamental de la proporcionalidad. Finalmente, se demuestra que una función monótona es afín cuando preserva progresiones aritméticas. Queremos que al final del capítulo se distingan los objetos matemáticos: ecuación de una recta, ecuación lineal, ecuación afín, función lineal, función afín y las gráficas de estas funciones.

En el capítulo 3 se hace una construcción para explicar que es un trinomio cuadrado perfecto, se explica la fórmula de la solución por radicales de una ecuación cuadrática y se prueba que una función cuadrática también se puede definir como aquella función que transforma a cada progresión aritmética no constante en una progresión aritmética no constante de segundo grado no-degenerada.

Dentro del capítulo 4 se encuentran construcciones geométricas que se usan para resolver algunas ecuaciones cúbicas. También, se estudia la llamada ecuación reducida de una ecuación cúbica y las propiedades de la gráfica de una función cúbica. Por último, se deduce la formula general para resolver cualquier ecuación de cuarto grado.

En el capítulo 5 se explican las propiedades que permiten manipular polinomios de cualquier grado, polinomios con coeficientes enteros, saltos de Vieta, polinomios irreducibles, raíces múltiples, polinomios de varias variables y diferentes formas de obtener las de raíces de un polinomio.

En cada capítulo se incluye una lista de ejercicios que buscan ser novedosos tanto en su planteamiento como en su solución, todos los aquí presentados fueron resueltos con cuidado y se presentan acompañados de su respectiva sugerencia. Algunos de los ejercicios aparecieron en las Olimpiadas Matemáticas de los últimos años. Se busca que estos incentiven la creatividad, el planteamiento de situaciones apropiadas para la matemática aplicada y reforzar lo visto en cada capítulo.

Introducción

Capítulo 1

Notaciones básicas

Un **polinomio** en una variable x es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

donde cada a_i, con $0 \leq i \leq n$, es un elemento de un anillo[1] R. Cada a_i se conoce como el i-esimo coeficiente de $P(x)$ y a_n es el **coeficiente principal**. Un sumando del polinomio, por ejemplo $a_i x^i$, se llama **monomio**.

Los conjuntos de números enteros, números racionales, números reales o números complejos, denotados por $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, respectivamente, son ejemplos de anillos, y en cada caso particular si los coeficientes de $P(x)$ pertenecen a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, diremos que $P(x)$ es un polinomio entero, racional, real o complejo, respectivamente.

Al mayor de los exponentes $n \in \mathbb{N}$ con $a_n \neq 0$, se le llama el **grado** del polinomio $P(x)$, se dice que el **polinomio es de grado** n y se escribe $gradP(x) = n$. Si para un polinomio de grado n se cumple que $a_n = 1$, se dice que $P(x)$ es un polinomio **mónico**.

El polinomio que tiene a todos sus coeficientes iguales a cero se conoce como el **polinomio cero**. Se considera que el polinomio cero no tiene grado (en algunos libros se acuerda que tiene grado $-\infty$).

---

[1]Un anillo R es un conjunto con dos operaciones $\{\ +,\ \ \cdot\ \}$ donde para cualesquiera a, b y c en R se satisfacen:

1. $a + b \in R$ y $a \cdot b \in R$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. Hay un elemento 0 en R tal que $a + 0 = 0 + a = a$.
4. Para cualquier a en R, existe a' en R que cumple que $a + a' = a' + a = 0$.
5. $a + b = b + a$.
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Se pueden **evaluar** los polinomios, como se hace con toda función, reemplazando la variable x por algún número t y el valor del polinomio $P(x)$ en $x = t$, es $P(t)$.

Un **cero** del polinomio $P(x)$ es un número r, tal que $P(r) = 0$. También se dice, cuando $P(r) = 0$, que r es una **raíz del polinomio** o una **solución** de la ecuación polinomial $P(x) = 0$.

Dos polinomios son **iguales** si tienen el mismo grado y si los coeficientes de cada uno de sus términos son iguales. Es decir, los polinomios

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0,$$

son iguales si y solo si $m = n$ y a_i=b_i, para toda $i = 0, 1, ..., n$.

1.1. Suma y multiplicación de polinomios.

Para dos polinomios de grado n

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0,$$

se define **la suma de polinomios** como

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)x^i,$$

también se define **el producto del polinomio** $P(x)$ **por una constante** c como

$$(cP)(x) = cP(x) = \sum_{i=1}^{n}(ca_i)x^i.$$

El **producto de un polinomio** $P(x)$ **por un monomio** $M(x) = x^m$ con $m \in \mathbb{N}$, se define como

$$(x^m P)(x) = x^m P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{i+m}.$$

Es de notar que:

- $grad(P+Q)(x) = n$.
- $grad(cP)(x) = n$.
- $grad(x^m P)(x) = n + m$.

Ahora, para polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de grados n y m, respectivamente,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

su **producto de polinomios** se define como

$$(PQ)(x) = P(x) \cdot Q(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k.$$

Observe que $grad(PQ(x)) = n + m$.

Se denota por $R[x]$, al conjunto de todos los polinomios con coeficientes en el anillo R. Note que $R[x]$ es un anillo con las operaciones de suma y producto que se han definido. Como $\alpha P(x)$ es un polinomio para cualquier α en R, a $R[x]$ se le conoce como R-módulo, lo que quiere decir que para cualquier $P(x) \in R[x]$ y cualquier $\alpha \in R$ se cumple que:

- $1P(x) = P(x)$.
- $\alpha(P(x) + Q(x)) = \alpha P(x) + \alpha Q(x)$.
- $(\alpha + \beta)P(x) = \alpha P(x) + \beta P(x)$, para cualesquiera α y β en R.
- $\alpha(\beta P(x)) = (\alpha\beta P(x))$, para cualesquiera α y β en R.

Además $R[x]$ tiene estructura de espacio vectorial cuando R es un campo.

1.2. División de polinomios.

Se define la división entre polinomios, de la manera siguiente: $P(x)$ **divide** a $Q(x)$ si existe un polinomio $S(x)$ tal que $Q(x) = P(x) \cdot S(x)$. Se escribe $P(x) \mid Q(x)$, para decir que $P(x)$ divide a $Q(x)$.

Se dice que $P(x)$ puede **factorizarse** con $Q_1(x), \ldots, Q_n(x)$ si

$$P(x) = Q_1(x) \cdot \cdots \cdot Q_n(x).$$

Luego, cada $Q_j(x)$ es **factor** de $P(x)$. Note que cada $Q_j(x)$ divide a $P(x)$.

Ejemplo 1.
i) El polinomio $P(x) = x^3 - x$, se puede factorizar así:

$$x^3 - x = x(x-1)(x+1).$$

Note que ninguno de los factores x, $(x+1)$ y $(x-1)$ se pueden escribir como el producto de dos polinomios no constantes. Cuando no es posible expresar un polinomio $P(x)$ como el producto de dos polinomios $Q(x)$ y $S(x)$ no constantes se dice que $P(x)$ es un **polinomio irreducible**. En caso contrario, es decir, cuando $P(x)$ se puede escribir como el producto de dos polinomios no constantes, se dice que $P(x)$ es un **polinomio reducible**.

Observación 1 *En general, se verifica que para cualquier entero $n \geq 1$, se cumple la siguiente factorización,*

$$x^n - \alpha^n = (x-\alpha)(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1}), \tag{1.1}$$

note que el factor $(x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1})$ tiene grado $n-1$.

ii) Ahora, para cualquier polinomio $P(x)$ existe $Q(x)$ que cumple

$$P(x) - P(\alpha) = (x-\alpha)Q(x). \tag{1.2}$$

Pues, usando (1.1) varias veces se tiene que:

$$\begin{aligned} P(x) - P(\alpha) \quad &= a_n x^n + \cdots + a_1 x_1 + a_0 - (a_n \alpha^n + \cdots + a_1 \alpha + a_0) \\ &= a_n(x^n - \alpha^n) + \cdots + a_1(x-\alpha) \\ &= (x-\alpha)\left[a_n(x^{n-1} + \cdots + \alpha^{n-1}) + \cdots + a_2(x+\alpha) + a_1\right] \\ &= (x-\alpha)Q(x), \end{aligned}$$

con $Q(x) = a_n(x^{n-1} + \cdots + \alpha^{n-1}) + \cdots + a_2(x+\alpha) + a_1$.

Por lo que, $P(x) - P(\alpha) = (x-\alpha)Q(x)$.

Se observa que si $P(\alpha) = 0$, entonces

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x).$$

Esto prueba que si α es una raíz de $P(x)$, $(x-\alpha)$ es factor de $P(x)$. Inversamente si $x-\alpha$ es un factor de $P(x)$, entonces por (1.2), α es una raíz de $P(x)$. Ahora, suponga que se expresa al polinomio $P(x)$ como producto de factores irreducibles tal que uno de sus factores es de la forma $(x-\alpha)$ y este mismo aparece n veces en la factorización, entonces se dice que α es una raíz de **multiplicidad** n. Por ejemplo, 1 es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$.

Teorema 1.2.1 ***(Algoritmo de la división)*** *Sea $P(x)$ cualquier polinomio y sea $S(x)$ un polinomio distinto del polinomio cero, entonces existen dos únicos polinomios, $Q(x)$ (llamado **cociente**) y $R(x)$ (llamado **resto**), que satisfacen:*
a) $P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$.
b) $gradR(x) < gradS(x)$ o $R(x) = 0$.

Demostración. Supongamos que $P(x)$ y $S(x)$ se escriben como,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$$S(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

Se debe probar la existencia de $Q(x)$ y $R(x)$ tales que:
a) $P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$ y
b) $gradR(x) < gradS(x)$ o bien $R(x) = 0$.

Note que si $gradP(x) < gradS(x)$ basta considerar $Q(x) = 0$ y $R(x) = P(x)$.

Pero si $gradS(x) \leq gradP(x)$, considere los polinomios

$$Q_1(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m},$$

y

$$R_1(x) = P(x) - S(x)Q_1(x). \tag{1.3}$$

De este modo

$$P(x) = Q_1(x)S(x) + R_1(x). \tag{1.4}$$

Si $R_1(x) = 0$, se termina la prueba con $Q(x) = Q_1(x)$ y $R(x) = R_1(x) = 0$.

Si $R_1(x) \neq 0$ aplicamos lo anterior con $P(x) = R_1(x)$ y $S(x)$.
Como antes, si $gradR_1 < gradS(x)$ basta considerar $Q(x) = 0$ y $R_2(x) = R_1(x)$.

Pero si $gradS(x) \leq gradR_1(x) = m_1$, se considera el polinomio

$$R_2(x) = R_1(x) - S(x)\frac{a_{m_1}}{b_m}x^{m_1-m}, \tag{1.5}$$

donde a_{m_1} es el coeficiente principal de $R_1(x)$. De la ecuación anterior se despeja $R_1(x)$, se remplaza en (1.4), y se tiene que

$$P(x) = Q_2(x)S(x) + R_2(x),$$

con $Q_2(x) = \frac{a_{m_1}}{b_m}x^{m_1-m} + Q_1(x)$.

Note que $gradR_2(x) < gradR_1(x)$.
Si $R_2(x) = 0$, se termina la prueba con $Q(x) = Q_2(x)$ y $R(x) = R_2(x) = 0$.

Si $R_2(x) \neq 0$ y $gradS(x) \leq gradR_2(x)$ aplicamos lo anterior con $P(x) = R_2(x)$ y $S(x)$.

Se repiten estos pasos hasta encontrar polinomios $Q_i(x)$ y $R_i(x)$ tal que

$$P(x) = Q_i(x)S(x) + R_i(x)$$

con $gradR_i(x) < gradS(x)$ o $R_i(x) = 0$.

Es posible hallar dichos polinomios, ya que este procedimiento es finito, pues los grados de los polinomios $R_i(x)$ cumplen:

$$gradR_i(x) < gradR_{i-1}(x) < gradR_{i-2}(x) < \cdots < gradR_1(x).$$

Por lo tanto, queda probada la existencia de $Q(x)$ y $R(x)$ tales que
a) $P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$.
b) $gradR(x) < gradS(x)$ o bien $R(x) = 0$.

Solo queda probar que los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ son únicos. Para esto suponga que

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x),$$

y

$$P(x) = Q'(x)S(x) + R'(x),$$

con

$$gradR(x) < gradS(x) \text{ y } gradR'(x) < gradS(x).$$

Restando ambas expresiones tenemos que

$$S(x)(Q(x) - Q'(x)) = R'(x) - R(x).$$

Así, vemos que

$$grad[S(x)(Q(x) - Q'(x))] = grad(R'(x) - R(x)) \tag{1.6}$$

Pero como $gradR(x) < gradS(x)$ y $gradR'(x) < gradS(x)$, entonces

$$grad(R'(x) - R(x)) < gradS(x)$$

Por otro lado,

$$grad[S(x)(Q(x) - Q'(x))] \geq gradS(x).$$

Teniendo en cuenta las desigualdades anteriores, se tiene que la igualdad (1.6) ocurre si y solo si $R(x) = R'(x)$ y $Q(x) = Q'(x)$. Así la unicidad de $Q(x)$ y $R(x)$ queda mostrada.

■

Ejemplo 2. Divida $P(x) = x^5 + x^3 + 2x$ entre $S(x) = x^2 - x + 1$, para hallar $Q(x)$ y $R(x)$.

PASO 1. Como el grado del polinomio $S(x)$ es menor que el grado del polinomio $P(x)$, consideramos

$$Q_1(x) = x^3 \text{ y } R_1(x) = P(x) - S(x)Q(x) = x^4 + 2x.$$

Como $R_1(x)$ no es el polinomio cero ni su grado es menor que el del polinomio $S(x)$, se debe continuar con el siguiente paso.

PASO 2. Ahora consideramos los polinomios

$$Q_2(x) = Q_1(x) + x^2 = x^3 + x^2,$$

$$R_2(x) = R_1(x) - S(x)Q_2(x) = x^3 - x^2 + 2x.$$

Nuevamente como $R_2(x)$ no es el polinomio cero ni su grado es menor al grado del polinomio $S(x)$, se continua el procedimiento.

PASO 3. Ahora consideramos los polinomios

$$Q_3(x) = Q_2(x) + x = x^3 + x^2 + x$$

$$R_3(x) = R_2(x) - S(x)Q_3(x) = x.$$

Note que el grado del polinomio $R_3(x)$ es menor que el del polinomio $S(x)$. Por lo tanto, el cociente de dividir $P(x)$ entre $S(x)$ es $Q(x) = Q_3(x) = x^3 + x^2 + x$ y su residuo es $R(x) = R_3(x) = x$. Este procedimiento corresponde a la manera en que habitualmente se dividen los polinomios, veamos lo anterior usando la famosa "casita".

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{5}{l}{x^3+x^2+x} \\
\cline{2-6}
x^2-x+1 & x^5 & & +x^3 & & +2x \\
 & -x^5 & +x^4 & -x^3 & & \\
\cline{2-6}
 & & x^4 & & & +2x \\
 & & -x^4 & +x^3 & -x^2 & \\
\cline{3-6}
 & & & x^3 & -x^2 & +2x \\
 & & & -x^3 & +x^2 & -x \\
\cline{4-6}
 & & & & & x
\end{array}
$$

Para $P(x)$ un polinomio cualquiera y $a \in \mathbb{R}$, el algoritmo de la división garantiza que existen $Q(x)$ y $R(x)$ polinomios que satisfacen

$$P(x) = Q(x)(x-a) + R(x).$$

De donde

$$P(a) = 0 + R(a) = R(a).$$

Así queda establecida la demostración del siguiente resultado.

Teorema 1.2.2 ***(Teorema del Residuo)*** *El residuo de la división del polinomio $P(x)$ entre $(x-a)$, con $a \in \mathbb{R}$, es igual a $P(a)$.*

En particular si $P(a) = 0$, entonces

$$P(x) = (x-a)Q(x).$$

Así se tiene como consecuencia directa del teorema anterior, el siguiente resultado.

Corolario 1.2.1 ***(Teorema del factor o de Bezout)*** *Un polinomio $P(x)$ es divisible entre $x-a$ si y solo si a es raíz de $P(x)$.*

Más aún, es posible probar que cualquier polinomio $P(x)$ con coeficientes complejos y de grado n, tiene exactamente n raíces, no necesariamente todas diferentes. Por lo que $P(x)$ puede escribirse como el producto de n factores de grado 1. Este resultado es conocido como **Teorema Fundamental del Álgebra** y puede encontrar su demostración en la pagina 177.

1.3. Máximo común divisor.

Un polinomio $H(x)$ es **máximo común divisor** de $P(x)$ y $Q(x)$ si,
(a) $H(x)$ divide a $P(x)$ y a $Q(x)$ y
(b) $H(x)$ es divisible entre cualquier otro polinomio que divida a $P(x)$ y a $Q(x)$.

Se resalta que si $H(x)$ y $G(x)$ son dos polinomios mónicos que cumplen las condiciones anteriores (a) y (b), entonces como $H(x) \mid G(x)$ y $G(x) \mid H(x)$, se cumple que $G(x) = \lambda H(x)$ con λ en el anillo R diferente de cero.

Teorema 1.3.1 *El máximo común divisor de dos polinomios es único salvo por la multiplicación por una constante diferente de cero.*

Ejemplo 3. Hallar el máximo común divisor de $x^3 + x^2 - x - 1$ y $x^4 + x^3 - x - 1$.

Note que es posible reescribir ambos polinomios de la siguiente manera: $x^3+x^2-x-1 = (x+1)^2(x-1)$ y $x^4+x^3-x-1 = (x^2+x+1)(x+1)(x-1)$. Ahora, solo falta verificar que el polinomio x^2+x+1 no tiene raíces reales; basta ver que para toda $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 \neq 0$. Como para toda $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > 0 > -\frac{3}{4} \iff x^2 + x + \frac{1}{4} > -\frac{3}{4} = -1 + \frac{1}{4} \iff x^2 + x + 1 > 0.$$

Entonces, $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 \neq 0$ y así el polinomio $x^2 + x + 1$ no tiene raíces reales. Luego, $x^2 + x + 1$ no tiene divisores de grado mayor que cero. Por lo tanto, el factor lineal $(x+1)$ es el máximo común divisor de x^3+x^2-x-1 y x^4+x^3-x-1.

En general, se cuenta con un procedimiento para hallar el máximo común divisor de cualesquiera dos polinomios conocido como el Algoritmo de Euclides.

Teorema 1.3.2 ***(Algoritmo de Euclides)*** *Dados dos polinomios $P(x)$ y $S(x)$ no ambos el polinomio cero, al aplicar el algoritmo de la División se obtienen las siguientes igualdades*

$$\begin{aligned}
P(x) &= S(x)Q_1(x) + R_1(x)\\
S(x) &= R_1(x)Q_2(x) + R_2(x)\\
R_1(x) &= R_2(x)Q_3(x) + R_3(x)\\
\vdots &= \vdots\\
R_{n-3}(x) &= R_{n-2}(x)Q_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)\\
R_{n-2}(x) &= R_{n-1}(x)Q_n(x) + 0.
\end{aligned}$$

En la última igualdad se está señalando que el polinomio $R_n(x)$ es el polinomio cero, esto siempre es posible pues

$$0 \leq gradR_{n-1}(x) < gradR_{n-2}(x) < \cdots < gradR_1(x).$$

Luego $R_{n-1}(x)$ es el máximo común divisor de $P(x)$ y $S(x)$.

Demostración. Para probar la validez del algoritmo, se debe mostrar que $R_{n-1}(x)$ es un divisor de $P(x)$ y $S(x)$. Y luego verificar que cualquier polinomio que divida a $P(x)$ y $S(x)$, también divide a $R_{n-1}(x)$.

Se observa que por la última igualdad, $R_{n-1}(x)$ divide a $R_{n-2}(x)$. Pero como el residuo de dividir $R_{n-3}(x)$ entre $R_{n-2}(x)$ es $R_{n-1}(x)$, es decir

$$R_{n-3}(x) = R_{n-2}(x)Q_{n-1}(x) + R_{n-1}(x),$$

entonces $R_{n-1}(x)$ también divide a $R_{n-3}(x)$. Continuamos este procedimiento en las igualdades obtenidas en el algoritmo de la división, hasta llegar a que $R_{n-1}(x)$ divide a $R_1(x)$, luego divide a $S(x)$ y por último divide a $P(x)$.

Ahora, suponga que un polinomio $T(x)$ divide a $P(x)$ y $S(x)$. Esto es

$$P(x) = T(x)P'(x) \text{ y } S(x) = T(x)S'(x)$$

donde $P'(x)$ y $S'(x)$ son polinomios. De este modo, de la primera igualdad que se obtuvo al aplicar el algoritmo de Euclides se observa que

$$R_1(x) = P(x) - S(x)Q_1(x) = T(x)P'(x) - T(x)S'(x)Q_1(x) = T(x)[P'(x) - S'(x)Q_1(x)].$$

En consecuencia, se puede afirmar que $T(x)$ divide a $R_1(x)$. De la misma manera como $R_2(x)$ se puede escribir de la siguiente manera

$$R_2(x) = S(x) - R_1(x)Q_2(x),$$

así, teniendo en cuenta que $T(x)$ divide a $R_1(x)$ y a $S(x)$, $T(x)$ divide a $R_2(x)$. Continuando de este modo se muestra que $T(x)$ divide a $R_3(x), R_4(x), \ldots, R_{n-1}(x)$. Como en particular $T(x)$ divide a $R_{n-1}(x)$, entonces $R_1(x)$ es un máximo común divisor de $P(x)$ y $S(x)$. ∎

De ahora en delante, se denotará al máximo común divisor como **m.c.d**.

Observación 2 *El m.c.d $R_{n-1}(x)$ de $P(x)$ y $S(x)$, también es el m.c.d de las siguientes parejas: $S(x)$ y $R_1(x)$, $R_1(x)$ y $R_2(x)$, $\ldots$, $R_{n-2}(x)$ y $R_{n-1}(x)$.*

Observación 3 *Sea $R(x)$ el máximo común divisor de dos polinomios $P(x)$ y $S(x)$ obtenido en el teorema anterior. Si $P(x) = 0$, entonces $R(x) = S(x)$; si $S(x) = 0$, entonces $R(x) = P(x)$. Además del teorema anterior, se verifica fácilmente que cada $R_i(x)$, en particular $R(x)$, es una combinación lineal de $P(x)$ y $S(x)$.*

Observación 4 *Dados los polinomio $P(x)$, $S(x)$, $T(x)$ y $K(x)$ tales que*

$$S(x) = P(x)T(x) + K(x), \tag{1.7}$$

entonces, el polinomio $H(x)$ es el máximo común divisor de $P(x)$ y $S(x)$ si y solo si $H(x)$ es el máximo común divisor de $P(x)$ y $K(x)$.

Demostración. Suponga que $H(x)$ es el máximo común divisor de $P(x)$ y $S(x)$, entonces

$$P(x) = P'(x)H(x) \text{ y } S(x) = S'(x)H(x),$$

donde $P'(x)$ y $S'(x)$ son polinomios. Despejando $K(x)$ de (1.7) tenemos que

$$K(x) = S(x)-P(x)T(x) = S'(x)H(x)-P'(x)H(x)T(x) = H(x)(S'(x)-P'(x)T(x)),$$

entonces $H(x)$ es divisor de $K(x)$.
Si hay otro polinomio $H'(x)$ que sea divisor de $P(x)$ y $K(x)$, entonces

$$P(x) = P''(x)H'(x) \text{ y } K(x) = K'(x)H'(x),$$

donde $P''(x)$ y $K'(x)$ son polinomios. Por (1.7) tenemos que

$$S(x) = P(x)T(x)+K(x) = P''(x)'H'(x)T(x)+K'(x)H'(x) = H'(x)(P''(x)T(x)+K'(x)),$$

entonces $H'(x)$ divide a $S(x)$. En otras palabras, $H'(x)$ divide a $P(x)$ y $S(x)$. Pero $H(x)$ es el máximo común divisor de $P(x)$ y $S(x)$. Por lo tanto, $H(x)$ divide a $H'(x)$. Así, $H(x)$ es el máximo común divisor de $P(x)$ y $K(x)$.

Ahora, supongamos que $H(x)$ es el máximo común divisor de $P(x)$ y $K(x)$, entonces

$$P(x) = P'(x)H(x) \text{ y } K(x) = K'(x)H(x),$$

donde $P'(x)$ y $K'(x)$ son polinomios. De (1.7) tenemos que

$$S(x) = P(x)T(x)+K(x) = P'(x)'H(x)T(x)+K'(x)H(x) = H'(x)(P'(x)T(x)+K'(x)),$$

entonces $H'(x)$ es divisor de $S(x)$. Luego, si hay otro polinomio $H'(x)$ divisor de $P(x)$ y $S(x)$, entonces

$$P(x) = P''(x)H'(x) \text{ y } S(x) = S'(x)H'(x),$$

donde $P''(x)$ y $S'(x)$ son polinomios. Despejando $K(x)$ de (1.7) tenemos que

$$K(x) = S(x) - P(x)T(x) = S'(x)H'(x) - P''(x)H'(x)T(x) = H'(x)(S'(x) - P''(x)T(x)),$$

entonces $H'(x)$ divide a $K(x)$. En otras palabras, $H'(x)$ divide a $P(x)$ y $K(x)$. Pero $H(x)$ es el máximo común divisor de $P(x)$ y $K(x)$. Por lo tanto, $H(x)$ divide a $H'(x)$. Así, $H(x)$ es el máximo común divisor de $P(x)$ y $S(x)$. ■

1.4. Ejercicios del capítulo 1.

Ejercicio 1. Determine el valor de n, de manera que $(x+3)$ sea un factor de

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - nx + 24$$

Ejercicio 2. El polinomio $x^3 - kx^2 - 24x + 28$ tiene como un factor a $x-2$, encuentre el valor de k y las otras raíces del polinomio.

Ejercicio 3. Encuentre un polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $P(2) = 10$ y cuyas raíces sean -1 y $\frac{1}{3}$,

Ejercicio 4. Muestra que si el polinomio $P(x) = ax^2+bx+c$ tiene como factores a $(x-r)$ y $(x-\frac{1}{r})$, entonces $a = c$ o $r^2 = 1$.

Ejercicio 5. Encuentra el residuo $R(x)$ de dividir x^{100} entre $x^2 - 3x + 2$.

Ejercicio 6. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan la identidad,

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1.$$

Ejercicio 7. Sea $P(x)$ un polinomio real que satisface $P(1) = 3$, $P(2) = 5$ y $P(3) = 2$. Determine el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $(x-1)(x-2)(x-3)$.

Ejercicio 8. Dados dos números enteros a y b, se dice que a divide a b si y solo si $a = kb$ para algún k entero. Luego, se escribe $a|b$ si y solo si a divide a b. Además, se sabe que dicha relación cumple para cualesquiera a, b y c enteros, los siguiente : (i) $a|a$; (ii) Si $a|b$ y $b|a$, entonces $a = \pm b$; (iii) Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.
Teniendo en cuenta esto, pruebe lo siguiente:

(a) Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros, entonces para cualesquiera a y b enteros se tiene que $a - b \mid P(a) - P(b)$.

(b) Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ es un polinomio con coeficientes enteros tal que para cualquier número real r, $P(P(r)) = r$. Muestre que $P(1) = 1$.

Ejercicio 9. Sean a, b y c son tres enteros distintos, y sea $P(x)$ un polinomio entero. Muestre que no pueden suceder las siguientes igualdades simultáneamente,

$$P(a) = b,\ P(b) = c,\ P(c) = a.$$

Ejercicio 10. Encuentre el máximo común divisor de $(x+1)^{4n+3} + x^{2n}$ y $x^3 - 1$.

1.5. Sugerencias a ejercicios del capítulo 1

Sugerencia al Ejercicio 1. Si $(x+3)$ es un factor de $P(x)$, -3 es raíz de $P(x)$, luego $0 = P(-3) = (-3)^3 - 3(-3)^2 - (-3)n + 24$. Despejando n, se tiene que $n = 10$.

Sugerencia al Ejercicio 2. Como $x-2$ es factor de $P(x)$, 2 es raíz del polinomio, así $0 = P(2) = 2^3 - 2k^2 - 48 + 28 = -4k - 12$, luego $k = -3$ y

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$. Al dividir $P(x)$ entre $(x-2)$, obtenemos que los otros factores de $P(x)$ son $(x-2)$ y $(x+7)$. Luego $P(x)$ tiene dos raíces, 2 (que es de multiplicidad 2) y -7.

Sugerencia al Ejercicio 3. Como $10 = P(2) = 4a + 2b + c$, $0 = P(-1) = c$ y $0 = P(\frac{1}{3}) = a\frac{1}{9} + b\frac{1}{3} + c$. Se tiene que, $a = 3$, $b = -1$ y $c = 0$.

Sugerencia al Ejercicio 4. Como r y $\frac{1}{r}$ son raíces de $P(x)$, entonces $ar^2 + br + c = 0$, y $a\frac{1}{r^2} + b\frac{1}{r} + c = 0$, esta última puede escribirse así, $a + br + cr^2 = 0$. Restando se obtiene, $(a-c)r^2 + (c-a) = 0$, por lo que $a = c$ o bien $r^2 - 1 = 0$.

Sugerencia al Ejercicio 5. Se puede aplicar algoritmo de la división o verificar que al dividir $x^2 - 3x + 2$ entre x^{100} se tiene que $x^{100} = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + R(x)$. Si $R(x) = ax + b$. Como $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$, al evaluar en $x = 1$ y $x = 2$, se tiene que $2^{100} = 2a + b$ y $1 = a + b$, respectivamente. En consecuencia, $a = 2^{100} - 1$ y $b = 2 - 2^{100}$ Por lo tanto, $R = (2^{100} - 1)x + (2 - 2^{100})$.

Sugerencia al Ejercicio 6. Considere el polinomio $Q(x) = P(x) - x^2$, entonces, por hipótesis $Q(x+1) = P(x+1) - (x+1)^2 = P(x) - x^2 = Q(x)$ y esto solo puede pasar si $Q(x) = c$ una constante. De manera que $P(x) = x^2 + c$. Inversamente, cualquier polinomio $P(x) = x^2 + c$ cumple que $P(x+1) = P(x) + 2x + 1$. Por lo tanto, los polinomios que cumplen la condición dada son todos aquellos que son de la forma $P(x) = x^2 + c$ para alguna c constante.

Sugerencia al Ejercicio 7. Por algoritmo de la división $P(x) = Q(x)(x-1)(x-2)(x-3) + R(x)$, donde el grado de $R(x)$ es menor que 3. Pero, por hipótesis $3 = P(1) = R(x)$, $5 = P(2) = R(x)$ y $2 = P(3) = R(x)$. Luego, $R(x)$ no puede ser constante ni de grado de grado 1, entonces $R(x) = ax^2 + bx + c$.

Al evaluar $P(x)$ en 1,2 y 3. Se tienen las siguientes ecuaciones $a + b + c = 3$, $4a + 2b + c = 5$ y $9a + 3b + c = 2$. Por lo tanto, al resolver el sistema de ecuaciones y obtener los valores de los coeficientes, se tiene que $R(x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{19}{2}x - 4$.

Sugerencia al Ejercicio 8. Para el inciso (a) considere a y b enteros se sabe que $a - b | a^n - b^n$. Luego $a - b | c_n(a^n - b^n)$ y así $a - b | c_n(a^n - b^n) + \cdots + c$, es decir $a - b | P(a) - P(b)$.

Para el inciso (b), suponga que $P(1) \neq 1$. De este modo, se puede decir que $P(1) = r$ con $r \neq 1$. Como $r - 1 | P(r) - P(1)$ y $P(r) - P(1) | P(P(r)) - P(P(1)) = r - 1$, se tiene que $r - 1 = P(r) - P(1)$ o $1 - r = P(r) - P(1)$. Pero, si $r - 1 = P(r) - P(1)$, como $P(r) = r$, se sigue que $r = 1$, lo cual contradice lo supuesto. De manera que

$1 - r = P(1) - P(r)$. Así, $P(r) = 2r - 1$ y $P(2r - 1) = P(P(1)) = 1$. Luego, por hipótesis

$$\begin{aligned} 1 - r =& f(r) - f(1) \\ =& ar^2 + br + c - (a + b + c) \\ =& a(r^2 - 1) + b(r - 1) \\ =& -(1 - r)(a(r + 1) - b). \end{aligned}$$

Como $r \neq 1$, entonces $b = -(ar + a + 1)$. Luego,

$$\begin{aligned} 2r - 1 =& f(1) \\ =& a + b + c \\ =& a - (ar + a + 1) + c \\ =& -ar - 1 + c, \end{aligned}$$

así $c = ar + 2r$. Finalmente, como $P(2r - 1) = 1$, $a(2r - 1)^2 - (ar + a + 1)(2r - 1) + (ar + 2r) = 1$. Por lo tanto, $a(r - 1)^2 = 0$. Lo cual es imposible, pues tanto a como $r - 1$ son distintos de 0. Por lo tanto, $P(1) \neq 1$.

Sugerencia al Ejercicio 9. Como $P0(a) = b$, $P(b) = c$ y $P(c) = a$ y por el ejercicio anterior se sigue que $a - b|P(a) - P(b)$, $b - c|P(b) - P(c)$ y $c - a|P(c) - P(a)$ y de esto se tiene que $a - b|b - c$, $b - c|c - a$ y $c - a|a - b$. De manera que $a - b = b - c = c - a = k$, de donde se sigue que $3k = 0$. Lo que implica que $a = b = c$.

Sugerencia al Ejercicio 10. Observe que $S(x) = x^3 - 1 = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, y que $(x - 1)$ no es un divisor de $P(x)$. En caso contrario tendríamos que $P(1) = 0$, pero $P(1) = (2)^{4n+3} + 1$. solo queda verificar que $(x^2 + x + 1)$ es un divisor de $P(x)$. Pero,

$$P(x) = (x + 1)^{4n+3} + x^{2n} = (x + 1)[(x + 1)^2]^{2n+1} + x^{2n}.$$

Luego, como $[(x + 1)^2]^{2n+1} = [(x^2 + x + 1) + x]^{2n+1}$. Por otro lado,

$$[(x^2 + x + 1) + x]^{2n+1} = Q(x)(x^2 + x + 1) + x^{2n},$$

con algún polinomio $Q(x)$. En consecuencia,

$$(x + 1)[(x + 1)^2]^{2n+1} = (x + 1)Q(x)(x^2 + x + 1) + (x + 1)x^{2n}.$$

Así,

$$P(x) = (x + 1)T(x)(x^2 + x + 1) + (x + 1)Q(x)^{2n} + x^{2n}.$$

Finalmente, $P(x) = (x^2 + x + 1) + (Q(x) + x^{2n})$. Por lo tanto, el máximo común divisor es $(x^2 + x + 1)$.

Capítulo 2

Polinomios lineales

2.1. Proporciones

2.1.1. Proporción directa y proporción inversa

En esta sección se verá la relevancia que tienen los polinomios lineales, en particular en situaciones que involucran proporcionalidad. La proporcionalidad es una noción matemática de las más utilizadas en la cultura universal y los primeros intentos de fundamentarla teóricamente tienen más de 2000 años; ver (Marcén y Sallán 2013).

Un ejemplo de proporcionalidad lo encontramos en la fórmula del área de un rectángulo de los lados a y b. El área del rectángulo es $A = ab$, lo que nos permite afirmar que el área A es "directamente proporcional" a la longitud del lado a (y de hecho también a la longitud del lado b). Mientras que para un rectángulo de área fija A, un lado, por ejemplo a, es "inversamente proporcional al otro lado b", ya que $a = \frac{A}{b}$ y en este caso también a es directamente proporcional al área A.

A continuación se aclara un poco más en los dos tipos de proporcionalidad. Dos cantidades x, y son **directamente proporcionales** si una de ellas es múltiplo de la otra, ya que $x = ky$ o equivalentemente $y = \frac{1}{k}x$. Así mismo dos cantidades x, y son **inversamente proporcionales**, si una de ellas es múltiplo del inverso de la otra, ya sea $x = k\frac{1}{y}$ o equivalentemente $y = k\frac{1}{x}$. Note que la relación de ser proporcional, directa o indirectamente, es simétrica.

Mas formalmente, una **proporcionalidad directa** es una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(ax) = af(x)$, para cualesquiera números reales a y x. Como consecuencia $f(ax) = af(x) = xf(a)$ y se tiene cuando $a \neq 0$ que, $f(x) = \frac{f(a)}{a}x$; al número $c = \frac{f(a)}{a}$ se le conoce como **constante de proporcionalidad**. Note que si $x = 1$, entonces $f(a) = af(1)$. Luego, $c = f(1)$.

Mientras que una **proporcionalidad inversa** es una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(ax) = \frac{f(x)}{a}$, para cualesquiera números reales x, a con $a \neq 0$. También, note que $f(ax) = \frac{f(x)}{a} = \frac{f(a)}{x}$, por lo que $f(x) = af(a)\frac{1}{x}$ y el número $c = af(a)$ es la constante de proporcionalidad.

Se observa que si $f(ax) = xf(a)$ para todo a y todo x, entonces escribiendo $r = f(1)$, se tiene $f(x) = f(1 \cdot x) = x \cdot f(1) = rx$. Es decir $f(x) = rx$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De forma similar, si para toda a y todo $x \neq 0$ se cumple que $f(x) = af(a)\frac{1}{x}$, entonces se tiene que $f(1) = af(a)$. Luego, si escribimos $r = f(1)$, se tiene que $f(x) = r\frac{1}{x}$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

En resumen, se dice que la magnitud y es directamente proporcional a la magnitud x, cuando existe un número r, la constante de proporcionalidad, tal que $y = rx$. En cuanto a la proporcionalidad inversa, solo tiene sentido cuando se trata de magnitudes no nulas, la magnitud $y \neq 0$ es inversamente proporcional a la magnitud $x \neq 0$, cuando existe un número r, la constante de proporcionalidad, tal que $y = r\frac{1}{x}$.

Ejemplo 1. *i*) Se descubrió una nueva enzima que es capaz de disminuir los niveles de glucosa en la sangre a razón de 0.1 miligramos en un decilitro cada hora. ¿Cuánta glucosa se puede disminuir, gracias a la enzima, después de t horas?

La primera observación en este ejemplo es que es una situación cuyo modelo es de proporcionalidad directa; las magnitudes a tomar en cuenta son x la razón de glucosa en un decilitro de sangre, medida en mg/dl (miligramos en un decilitro) y t el tiempo, en horas, que ha pasado desde que se suministro la enzima, entre más pasa el tiempo más glucosa disminuye. Pero, se puede suponer que $y = f(t)$, es la cantidad de glucosa que ha disminuido después de la t-ésima hora que ha pasado desde que se inicia el suministro de la enzima. Nótese que en una hora, se disminuyen $r = f(1) = 0.1$ mg/dg de glucosa, esta razón será la constantes de proporcionalidad. La siguiente lista representa la situación planteada

$$\begin{aligned} f(1) =& 0.1 \\ f(2) =& (0.1) \cdot 2 \\ &\vdots \\ f(t) =& (0.1) \cdot t \end{aligned}$$

es decir, en $x = t$ horas la enzima reduce $f(t) = (0.1) \cdot t$ mg/dl de glucosa en sangre.

ii) Ahora, esta enzima mejorada en un tratamiento es capaz de estabilizar la sangre de una persona. ¿Cuánto tiempo se tarda en estabilizar la glucosa en sangre de una persona diabética con glucosa de 160 mg/dl a tener entre 110 y 120 mg/dl con este tratamiento?

Usando la expresión anterior, se busca el valor de t tal que $40 = (0.1) \cdot t$, es decir $t = 400$, y el valor de t que cumple $50 = (0.1) \cdot t$, es decir $t = 500$. Lo que quiere decir que pasarán entre 400 y 500 horas para que la glucosa en sangre disminuya de 160mg/dl a 120 y 100 mg/dl, respectivamente.

Ejemplo 2. En general el aumento, dentro de cierto rango de temperatura favorece el crecimiento de bacterias, este rango es a veces conocido como rango de peligro. Suponga que se descubre que el rango de peligro de cierta bacteria del tipo estreptococo es de 60°C a 80°C. Entre más disminuye la temperatura por debajo de los 60°C o aumenta por arriba de los 80°C, la población de esta bacteria también disminuye. Pero, dentro del rango de peligro, la población de la bacteria aumenta proporcionalmente. ¿Cómo varía la población de bacterias en el instante en que están a una temperatura de $T°C$ en cierta muestra, teniendo en cuenta que en dicha muestra habría 20 millones de bacterias cuando la temperatura esta a 60°C?

Sea T la temperatura en la muestra de bacterias y $P(T)$ la población de bacterias en la muestra si esta está sometida a $T°C$. Si $T < 60°C$ la relación con $P(T)$ es directamente proporcional, entre más disminuye la temperatura menos bacterias hay en la muestra, más precisamente hay $P(T) = \frac{T \cdot 60}{2 \times 10^{12}}$. Así mismo, si $60°C \leq T \leq 80°C$ la población $P(T) = \frac{T \cdot 60}{2 \times 10^{12}}$ aumenta proporcionalmente. Pero, entre más aumente la temperatura T si $T > 80°C$, la población $P(T)$ disminuye, es decir la relación es inversamente proporcional y $P(T) = \frac{2 \times 10^{12} \cdot 60}{T}$.

2.1.2. Progresión Aritmética

En los modelos matemáticos, sobre todo en situaciones cotidianas, son comunes los que sufren variaciones iguales en periodos de tiempo iguales.

Ejemplo 3. El cometa Halley visita la Tierra cada 76 años. Su último paso por aquí fue en 1986. ¿Cuántas veces ha visitado el cometa Halley la Tierra desde el nacimiento de Cristo? ¿En qué año de nuestra era fue su primer paso cercano a nuestro planeta?

Se puede escribir a_i para referirse al i-ésimo año en el que pasó el cometa. Teniendo esto en cuenta note lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1986 \\ a_1 - a_0 &= -76 \\ a_2 - a_1 &= -76 \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= -76. \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que estamos en una situación que involucra una progresión aritmética, donde la diferencia de dos términos consecutivos es constante $a_n - a_{n-1} = -76$. Sumando las igualdades anteriores, es fácil ver que $a_n = 1986 - 76n$. Además se tiene que $a_n > 0$ cuando $n < \frac{1986}{76} < 27$.

Los primeros 27 términos positivos de esta lista de números son, $a_0, a_1, ..., a_{26}$. De este modo, el cometa Halley nos visitó 27 veces en nuestra era y su primer pasó cerca de la tierra fue en el año

$$a_{26} = 1986 - 76 \cdot 26 = 10.$$

A veces hay diferentes formas de resolver un problema, veamos que para este problema hay otra. Si a_0 es el primer año de nuestra era en que pasó el cometa, los años siguientes que pasó son:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + 76 \\ a_2 &= a_1 + 76 = a_0 + 2 \cdot 76 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + 76 = a_0 + n \cdot 76. \end{aligned}$$

Uno de ellos debe ser 1986, suponga que $a_n = a_0 + n \cdot 76 = 1986$ como $27 \cdot 76 = 2052$, debe suceder que $n \leq 26$ y como fue la última vez en 1986, se tiene que $n = 26$ y $a_0 = 1986 - 26 \cdot 76 = 10$, esto es, el primer año en que paso fue en el año 10.

En muchas ocasiones, cuando se trabaja con una lista de números, resulta útil comparar dos números consecutivos de la lista. En el caso que se ha tratado, se tiene que $a_{i+1} - a_i = -76$. La diferencia no es la única forma de comparar dos números de una lista, según la situación puede ser mejor fijarse en el cociente, en lugar de la diferencia.

Ejemplo 4. Se estima que el Club de las Chivas tiene 5 millones de seguidores y esta cantidad disminuye en 2 % al año. ¿Cuál será la cantidad de seguidores de ese club dentro de n años?

Del mismo modo que en el ejemplo anterior se considera una lista que representa la cantidad de personas que siguen a las Chivas por año $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$.

Esta lista se puede escribir como

$$a_0 = 5 \times 10^6$$

$$a_1 = a_0 - (0.02)a_0 = 0.98 \cdot a_0$$

$$a_2 = a_1 - (0.02)a_1 = 0.98 \cdot a_1$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1} = a_n - (0.02)a_n = 0.98 \cdot a_n.$$

Las relaciones anteriores se pueden reescribir como

$$a_0 = 5 \times 10^6$$

$$\frac{a_1}{a_0} = 0.98$$

$$\frac{a_2}{a_1} = 0.98$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 0.98.$$

Ahora se puede encontrar el n-enésimo término de la lista multiplicando las identidades anteriores, que es $a_n = (0.98)^n(5 \times 10^6)$. Por ejemplo, dentro de 5 años el club tendrá 4,519,604 seguidores.

Como se vio en los dos ejemplos anteriores, hay por lo menos dos formas de comparar un par de números cualesquiera a y b. Se puede considerar la diferencia de los números $a - b$. O bien se puede usar el cociente de los números $\frac{a}{b}$. Analicemos los casos que cada una de estas opciones genera.

Notemos lo siguiente:

- $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$
- $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$
- $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$

Ahora para $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$

- $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$
- $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow (b > 0 \text{ y } a > b) \text{ o } (b < 0 \text{ y } a < b)$
- $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow (b > 0 \text{ y } a < b) \text{ o } (b < 0 \text{ y } a > b)$

En general, una **sucesión real** es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y sus imágenes son números reales, llamados elementos de la sucesión. Entonces, cualquier progresión aritmética $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, cuyos términos son números reales, es una sucesión real. Para fines prácticos, entenderemos que se puede escribir $a_n = a(n)$.

De este modo, dada cualquier sucesión $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ se pueden comparar cualesquiera dos términos consecutivos de la sucesión con alguna de las dos formas anteriormente descritas.

Se dice que la sucesión $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ es una **progresión aritmética** si $a_{n+1} - a_n = d$ es constante para $n \geq 0$, es decir, las progresiones aritméticas son sucesiones en las cuales la diferencia entre un término y el término anterior es una constante. Esta diferencia constante es llamada **diferencia de la progresión**. Si la diferencia de la progresión es igual a cero, se dice que la progresión es **estacionaria o constante**, mientras que si la razón es distinta de cero se dice que es una **progresión de primer orden**.

Si la sucesión $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ es una progresión aritmética con diferencia d, entonces se pueden escribir los términos de la sucesión como

$$\begin{aligned} a(1) = a_1 =& a_0 + d \\ a(2) = a_2 =& a_0 + 2d \\ &\vdots \\ a(n) = a_n =& a_0 + nd. \end{aligned}$$

Ahora con la ayuda del lenguaje de funciones se puede decir que en una progresión aritmética sus términos van cambiando con la regla de una función que es aplicada a los enteros no negativos: $a(n) = a_0 + nd$. Ver la figura 2.1.

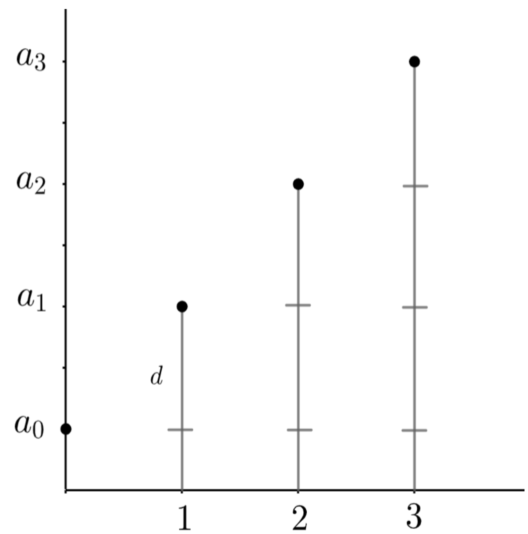


Figura 2.1: Aquí se dibuja la gráfica de la función $a(n) = a_0 + nd$, para algunos de los puntos de la forma (n, a_n).

Los términos de la progresión aritmética también se pueden escribir como,

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + d = f(a_0) \\ a_2 &= a_1 + d = f(a_1) \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + d = f(a_{n-1}). \end{aligned}$$

Luego cualquier término a_n de la sucesión se puede escribir como $a_n = f(a_{n-1})$, donde se involucra a la función $f(x) = x + d$, que se puede graficar en el plano, y su gráfica (ver Figura 2.2) ayudará a visualizar el comportamiento de la sucesión.

Así, el comportamiento de la sucesión $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ también es representado con la ayuda de la gráfica de la función lineal de variable real $f(x) = x + d$, donde $a_n = f(a_{n-1}) = (f \circ f \circ \cdots \circ f)(a_0)$.

2.1.3. Progresión Geométrica

Se dice que la sucesión $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ es una **progresión geométrica** si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ es constante, para toda n. La constante es llamada **la razón de la progresión geométrica**.

Como $a(n+1) = a_{n+1} = ra_n$, con la ayuda de la función lineal $f(x) = r \cdot x$, se puede tener una representación gráfica del comportamiento de la progresión (ver figura 2.3), notando que $a_n = f(a_{n-1}) = ra_{n-1}$.

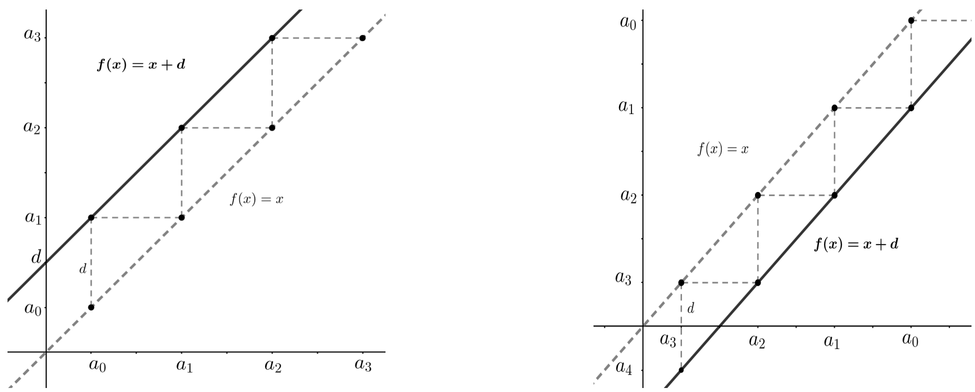


Figura 2.2: Aquí se dibuja la gráfica de la función $f(x) = x + d$ con $d > 0$ (la gráfica izquierda) y la gráfica de $f(x) = x + d$ con $d < 0$ (la gráfica de la derecha). Observe que si $d = 0$, $f(x)$ es la identidad y su gráfica es la línea recta punteada.

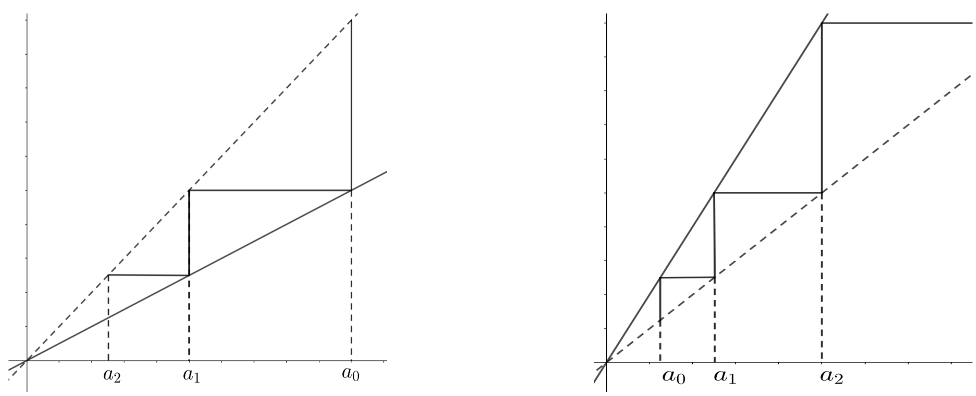


Figura 2.3: La figura del lado izquierdo corresponde gráfica de la función $f(x) = r \cdot x$ si $r < 1$, y la gráfica derecha es la función $f(x) = r \cdot x$ si $r > 1$. Note que si $r = 1$, la función es la identidad, y su gráfica es la recta punteada.

Lo que muestra que la sucesión a_n es creciente si $r > 1$, en cambio si $0 < r < 1$ la sucesión es decreciente. Del mismo modo como en la progresión aritmética, los términos de la progresión geométrica con razón $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$, se pueden escribir como,

$$\begin{aligned} a_1 &= r a_0 \\ a_2 &= r^2 a_0 \\ &\vdots \\ a_n &= r^n a_0. \end{aligned}$$

Así el n-ésimo término de la lista es $a(n) = a_n = r^n a_0$. En este caso, también se puede considerar a la función en los enteros positivos definida por $a(n) = r^n a_0$.

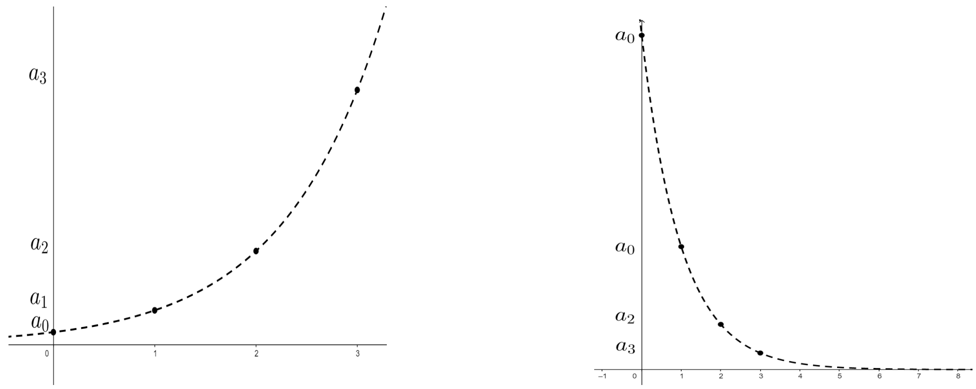


Figura 2.4: En el lado izquierdo se dibuja la gráfica de la función $a(n) = r^n a_0$ con $r > 1$ y en el derecho la gráfica de la misma función si $r < 1$, que son los puntos de la forma (n, a_n). Cuando $r = 1$, la función sería la constante, $a(n) = a_0$.

Ejemplo 5. En el ejemplo 4 (página 26) se identifican gráficamente los datos analizados al considerar la función $a(n) = a_n = (0.98)^n(5 \times 10^6)$. También se estudia $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ con la ayuda de la función $f(x) = rx$, ya que $a_n = f(a_{n-1}) = ra_{n-1}$ para $n \geq 1$. Más aún, $a_n = f(a_{n-1}) = (f \circ f \circ \cdots \circ f)(a_0)$, donde $a_0 = 5 \times 10^6$.

En resumen, para aludir tanto a los términos de una progresión aritmética $(a_0, a_1, \dots)$ con diferencia $d \neq 0$, como a los términos de una progresión geométrica $(b_0, b_1, \dots)$ con razón $r \neq 1$, se pueden usar otras funciones, considerando lo siguiente:

- La recta que pasa por los puntos $(n, a(n))$ de la gráfica de $a(n) = a_0 + nd$ es similar a la gráfica de $f(x) = x + d$, ver Figuras 2.1 y 2.2, ambas rectas son paralelas a la identidad. Pero, la primera corta al eje y en $(0, a_0)$ y la segunda en $(0, d)$. Así mismo, en la figura 2.2 el n-ésimo término de la progresión se obtiene al sumar n-veces la diferencia d al primer término de la misma. Mientras que la gráfica de $f(x) = x + d$ se construye desplazando la recta identidad d unidades hacia arriba (si $d > 0$) y los puntos marcados en ella (digamos los puntos (a_n, a_{n+1}) se obtienen al trazar segmentos de longitud d de manera escalonada, como en la figura 2.2).

- Las figuras 2.3 y 2.4 son completamente distintas. La primera es una recta que pasa por el origen y muestra como cada término de la progresión geométrica es una contracción (si $0 < r < 1$) o expansión (si $r > 1$) del término anterior. En la segunda los puntos $(n, b(n))$ de la gráfica $b(n) = r^n b_0$ están en la gráfica de una función exponencial, a saber $g(x) = r^x b_0$.

Esto quiere decir que siempre es posible referenciar a una progresión aritmética o a una progresión geométrica con la ayuda de la gráfica de una función lineal. Considerando lo anterior es conveniente estudiar rectas en el plano.

2.2. Ecuación de la línea recta

En esta sección se trabaja en el plano cartesiano, es decir, en el conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$. Se entenderá por una **línea recta no vertical** en el plano al lugar geométrico Γ de puntos del plano, tales que al tomar cualesquiera dos de ellos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, se tiene que $x_1 \neq x_2$ y la **pendiente** o **coeficiente angular** entre ellos, que puede expresarse con el cociente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, el cual siempre es constante.
En cambio un conjunto Γ de puntos en el plano es una **línea recta vertical** si la primera coordenada x de cualesquiera de sus puntos $P(x, y)$ es constante y el valor de y arbitrario. Es decir las líneas rectas verticales son conjuntos de la forma $\{(x, y) \,|\, x = a, y \in \mathbb{R}\}$ con a fijo. Note que en este caso no está bien definida la pendiente para dicha recta. El siguiente resultado se sigue directamente de la definición.

Lema 2.2.1 *Tres puntos son colineales si las pendientes de cualesquiera dos de ellos coinciden entre si, o bien si la primera coordenada de los puntos es la misma.*

Se resalta que las líneas rectas verticales son conjuntos de la forma

$$\{(x, y) \,|\, x = a, y \in \mathbb{R}\}$$

con a fijo. Luego se denotan con la ecuación $x = a$.
De manera similar las **líneas rectas horizontales** son conjuntos de la forma

$$\{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{R}, y = b\}$$

con b fijo. Luego se denotan con la ecuación $y = b$.

En general es posible hacer referencia a una línea recta con la ayuda de una ecuación. Primero, se dirá que una **curva algebraica** en el plano cartesiano es el conjunto de puntos $P = (x, y)$ que satisfacen una ecuación de la forma $P(x, y) = 0$, donde P es un polinomio en dos variables, es decir que es de la siguiente forma:

$$P(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{i,j} x^i y^j \;\text{ con } a_{i,j} \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Por ejemplo, un polinomio de dos variables de grado $n = 2$ es de la forma

$$P(x, y) = a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}.$$

El número n se conoce como el grado del polinomio. Así, cada vez que $n = 1$, la curva algebraica queda reducida a una ecuación de la forma

$$ax + by + c = 0, \tag{2.2}$$

que será la **ecuación general de la recta**.
En efecto, una curva algebraica con ecuación $ax + by + c = 0$ cumple la definición que se ha dado de línea recta en el plano, es decir, si tomamos dos puntos cualesquiera que satisfacen la ecuación de la curva, la pendiente del segmento que determinan es constante, o bien la ecuación se reduce a una ecuación de una recta vertical. Y viceversa, los puntos de una línea recta satisfacen una ecuación de la forma $ax+by+c = 0$, para algunos números reales a, b y c. Veamos esto último con detalle.

Considere el conjunto de puntos (x, y) que cumplen la ecuación $ax + by + c = 0$. Observemos que $a \neq 0$ o $b \neq 0$ pues si $a = b = 0$, entonces la ecuación se reduce a $c = 0$, en cuyo caso la ecuación no es de grado $n = 1$. Así, basta analizar los siguientes tres casos:

- Caso 1. $a = 0$; entonces $b \neq 0$ y la ecuación en este caso es: $by + c = 0$. Así $y = -\frac{c}{b}$, que como se discutió anteriormente es la ecuación de una línea recta horizontal, y en tal caso la pendiente determinada por dos puntos es 0.

- Caso 2. $b = 0$; entonces $a \neq 0$ y $ax + c = 0$. Así $x = -\frac{a}{c}$, es la ecuación de una línea recta vertical, como ya se mencionó al inicio de esta sección.

- Caso 3. $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Considere los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ tales que $ax_1 + by_1 + c = 0$ y $ax_2 + by_2 + c = 0$. Entonces $ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2$ y así
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{b}. \tag{2.3}$$
En consecuencia, la pendiente entre ellos es $m = -\frac{a}{b}$, y no depende de los dos puntos.

De forma recíproca, consideremos una recta. Si la recta es vertical o es horizontal, ya se ha mostrado que cumplen ecuaciones de la forma $x = a$ o $y = b$, respectivamente. Consideremos una recta que no sea vertical u horizontal. Tomemos dos puntos particulares de ésta, digamos los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, y sea $P = (x, y)$ un punto arbitrario de la recta. Como las pendientes entre cada par de puntos es la misma, tenemos que :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.4}$$

Por lo que, $(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$, de donde:

$$(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + x_2y_1 - y_2x_1 = 0, \tag{2.5}$$

que es de la forma, $ax+by+c=0$, con $a = y_2-y_1$, $b = -(x_2-x_1)$ y $c = x_2y_1-y_2x_1$. Se resalta que los coeficientes a, b, c no dependen del punto arbitrario (x, y).

Así pues, es posible definir cualquier recta por medio de una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$. Más adelante se verá que se puede hacer referencia a las rectas con otras ecuaciones. La posibilidad de representar una recta con diferentes ecuaciones es una ventaja importante a la hora de resolver un problema donde puede ser más apropiado considerar una ecuación en particular que el resto de ellas. Esto debido a la información que cada una de las ecuaciones de la recta pueden aportar. Para terminar esta sección y teniendo en cuenta lo anterior es importante mencionar que para simplificar el uso del lenguaje se admitirá escribir "la recta $f(x, y) = 0$" en lugar de "la recta con ecuación $f(x, y) = 0$", como estrictamente sería lo correcto.

2.2.1. Ecuación de la línea recta pendiente ordenada al origen

Suponga que una línea recta no vertical ℓ con pendiente m corta al eje y en un punto $(0, b)$, ahora cualquier otro punto $P = (x, y)$ de la recta y el punto $(0, b)$, determinan un segmento cuya pendiente cumple que $m = \frac{y-b}{x}$, o de forma equivalente el punto $P = (x, y)$ satisface la ecuación,

$$y = mx + b. \tag{2.6}$$

Recíprocamente, siempre que las coordenadas de un punto cualquiera $P = (x, y)$, que sea distinto a $(0, b)$ y que satisface la ecuación (2.6), se tendrá que los puntos $P = (x, y)$ y $(0, b)$ tienen la misma pendiente, ya que se cumple la igualdad $y - b = m(x - 0)$, que a su vez se puede reescribir como $m = \dfrac{y-b}{x}$. Lo último es equivalente a afirmar que $P = (x, y)$ pertenece a la recta ℓ. En otras palabras:

Teorema 2.2.2 *Un punto $P = (x, y)$ del plano, satisface la ecuación $y = mx + b$ si, y solamente si, $P = (x, y)$ pertenece a la línea recta no vertical ℓ con pendiente m y que corta al eje y en el punto $(0, b)$.*

La ecuación (2.6) recibe el nombre de **ecuación de la línea recta pendiente ordenada al origen**. Más aún, si la línea recta no vertical ℓ tiene por pendiente $m = \frac{p}{q}$, queda definida por la ecuación $y = \frac{p}{q}x + k$. Se observa que esta última ecuación es equivalente a la ecuación general de la recta $ax + by + c = 0$, con $a = p$, $b = -q$ y $c = qk$. Inversamente, una ecuación de la forma general $ax+by+c = 0$ que define a una línea recta ℓ es equivalente a la ecuación del tipo pendiente-ordenada al origen dada por $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

Observación 5 *La curva dada por la ecuación $y = ax+b$ es la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$. Recuerde que la gráfica de f es el conjunto $Graf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$.*

Ejemplo 6. Para el cultivo de una rosa el primer día se emplean 2 miligramos de abono, posteriormente se le suministra abono pero aumentando la cantidad de manera constante cada día que pasa. Si se quiere que en el día 30 se suministren 62 mg de abono, ¿qué cantidad debe aumentarse de abono cada día, con respecto al día anterior?

Solución. En principio se está ante una progresión aritmética $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ con $a_0 = 2$ y diferencia d, desde luego n es el n-ésimo día y a_n la cantidad de abono en miligramos suministrados el día n. En este problema se buscará utilizar la función $n \to a_n$ asociada a la sucesión en lugar de estudiar los elementos de la sucesión. Para dar con la ecuación de la forma (2.6) que defina la línea recta que se busca, tome en cuenta que esta línea recta debe cortar al eje y en el punto $(0, a_0) = (0, 2)$. Por otro lado, la pendiente entre cualesquiera par de puntos $(n-1, a_{n-1})$ y (n, a_n), con $n > 1$ es

$$m = \frac{a_n - a_{n-1}}{n - (n-1)} = a_n - a_{n-1} = d.$$

Por lo tanto, por el teorema anterior la ecuación que define la recta buscada es $y = dx + 2$, es decir que d es al mismo tiempo la pendiente de la recta asociada a la sucesión como la diferencia de esta misma. Luego, $a_n = a(n) = dn + 2$, y como buscamos que $a_{30} = 62$, entonces $(30, 62)$ es un punto en la recta en cuestión y así $62 = d(30) + 2$. Por lo tanto el número buscado es $d = 2$. Es decir, cada día se debe aumentar 2 mg de abono al suministrado el día anterior.

Ahora, se consideran dos líneas rectas de la forma $y = mx + b$ y $y = m'x + b'$. Tenemos dos casos:

Caso 1. Si $m = m'$, entonces se tienen dos subcasos:

(i) Si $b = b'$, las rectas son iguales.

(ii) Si $b \neq b'$, entonces las rectas son paralelas y diferentes. Ya que tiene la misma pendiente pero cortan al eje y en puntos distintos.

Caso 2. Si $m \neq m'$, la pareja de números reales

$$x_0 = \frac{b - b'}{m' - m} \quad \text{y} \quad y_0 = \frac{bm' - b'm}{m' - m},$$

satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = mx + b \\ y = m'x + b' \end{cases} \tag{2.7}$$

Lo que quiere decir que hay un punto $P = (x_0, y_0)$ que satisface las ecuaciones de las líneas rectas $y = mx + b$ y $y = m'x + b'$, por lo que en tal punto las líneas rectas se intersecan. Recíprocamente, si las líneas rectas $y = mx + b$ y $y = m'x + b'$ se intersecan en un punto $P = (x_0, y_0)$, la pareja de números reales (x_0, y_0) satisface el sistema de ecuaciones (2.7) si, y solo si se satisface la igualdad

$$(m - m')x = (b - b'),$$

la cual tiene solución si, y solamente si $m \neq m'$. De lo anterior, se afirma lo siguiente.

Teorema 2.2.3 *(A) Dos rectas $y = mx + b$ y $y = m'x + b'$ son paralelas y diferentes si, y solo si tienen la misma pendiente y cortan al eje y en puntos distintos, es decir, si $m = m'$ y $b \neq b'$.*
(B) Dos rectas $y = mx + b$ e $y = m'x + b'$ se intersecan si, y solo si $m \neq m'$, en cuyo caso el punto común es $(x_0, y_0) = (\frac{b-b'}{m'-m}, \frac{bm'-b'm}{m'-m})$.

No siempre es necesario contar con el punto $(0, b)$ para obtener la ecuación, como en el ejemplo anterior. La razón subyace en el hecho de que al conocer un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ de la línea recta y su pendiente m, la ecuación (2.6) es equivalente a

$$y = y_0 + m(x - x_0), \tag{2.8}$$

donde la b en (2.6) es $b = y_0 - mx_0$. La ecuación anterior se conoce como la **ecuación de la recta con pendiente dada y que pasa por un punto dado** $P_0 = (x_0, y_0)$.

Más aún, es posible determinar la ecuación de la línea recta que pasa por dos puntos distintos cualesquiera $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$. Si $x_1 = x_2$, la ecuación buscada solo puede ser $x = x_1 = x_2$, esto es, la ecuación es la ecuación de una recta vertical. En cambio, si $x_1 \neq x_2$, la recta que pasa por P_1 y P_2 tiene inclinación $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Luego, la línea recta queda definida por cualquiera de las ecuaciones siguientes

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \tag{2.9}$$

$$y = y_2 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2). \tag{2.10}$$

Ambas ecuaciones describen la misma recta, es decir la línea recta que pasa por $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, y cuya inclinación o pendiente es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Tanto a la ecuación (2.9) como a la ecuación (2.10) se les conoce como **ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados**. Recíprocamente, cualquier punto (x, y) que cumpla (2.9) o (2.10), entonces cumple la ecuación (2.8), donde la pendiente es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. En consecuencia también satisfacen una ecuación de la forma $y = mx + b$, con $b = y_1 - mx_1$.

Ejemplo 7. En una progresión aritmética, el quinto término vale 30 y el vigésimo vale 50. ¿Cuánto vale el octavo término de esta progresión?

Solución. Se considera la recta ℓ que contiene los siguientes puntos $P = (5, 30)$ y $Q = (20, 50)$. Luego, ℓ está representada por una ecuación de la forma,

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

De este modo, se tiene que

$$y = 30 + \frac{4}{3}(x - 5).$$

Entonces, al evaluar en $x = 8$ se tiene que $y = 30 + \frac{4}{3}(8 - 5) = 34$. Por lo tanto, el octavo término vale 34.

2.2.2. La ecuación vectorial

También, se puede emplear el lenguaje vectorial para expresar la ecuación de una línea recta $\ell_{0,v}$ que pasa por el origen $O = (0, 0)$ y cuya dirección queda determinada por un vector $\vec{v} = (u, v)$ que parte del origen del plano cartesiano (así serán todos los vectores que trabajaremos en esta parte, parten del origen y terminan en un punto (u, v), abusando del lenguaje el vector $\vec{v} = (u, v)$ queda indistinto de su punto final (u, v)). Basta tener en cuenta que multiplicar al vector $\vec{v}$, conocido como el **vector director** de la recta, por un escalar $t \in \mathbb{R}$ da como resultado el vector $t\vec{v} = (tu, tv)$ que tiene la misma dirección que $\vec{v}$. El sentido del vector $t\vec{v}$ es opuesto a $\vec{v}$ si $t < 0$, en cambio, si $t > 0$ el sentido del vector $t\vec{v}$ es el mismo que el del vector $\vec{v}$. La **longitud**, **magnitud** o **norma** de un vector es por el Teorema de Pitágoras: $||\vec{v}|| = ||(u, v)|| = \sqrt{u^2 + v^2}$, ver Figura 2.5. En la Figura 2.6 se ilustra como la multiplicación de un vector por un escalar también cambia su magnitud si $t \neq 1$; por ejemplo, si $|t| < 1$, entonces la longitud de $t\vec{v}$ es menor que la de $\vec{v}$ y si $|t| > 1$, entonces la longitud de $t\vec{v}$ es mayor que la de $\vec{v}$, lo anterior se sigue de la validez de la siguiente identidad,

$$||t\vec{v}|| = |t| \; ||\vec{v}||.$$

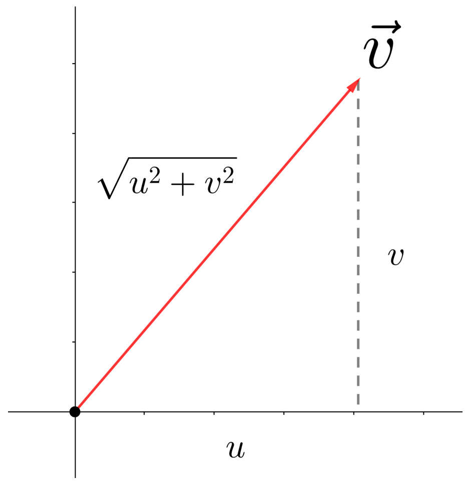


Figura 2.5: La longitud de un vector se obtiene del teorema de Pitágoras.

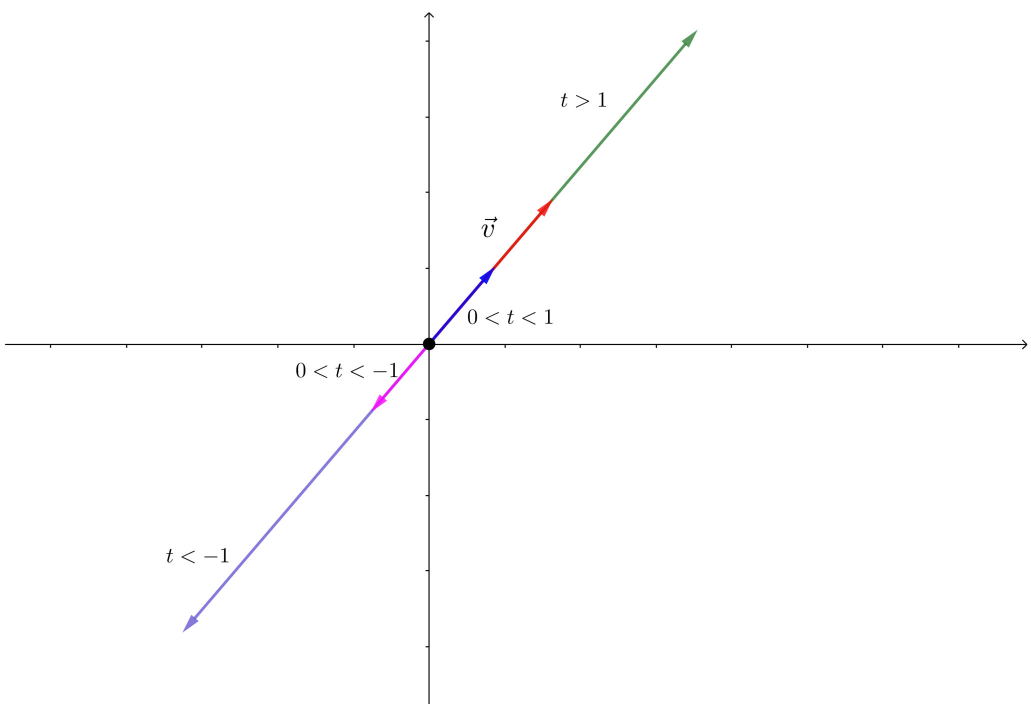


Figura 2.6: Observe como cambia un vector al multiplicarlo por un escalar t.

Teniendo en cuenta lo anterior, la recta $\ell_{0,v}$ está formada por todos los múltiplos escalares del vector $\vec{v} = (u, v)$, en otras palabras la recta es el conjunto

$$\ell_{0,v} = \{\vec{u} : \vec{u} = t\vec{v} = (tu, tv),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

De manera parecida, tal como se ilustra en la Figura 2.7, se expresa en términos vectoriales la ecuación de una recta que pasa por un punto del plano $P = (a, b)$ y con la dirección del vector $\vec{v} = (u, v)$, de la siguiente manera, si $\vec{p}$ es el vector con punto final (u, v), la recta la denotamos por $\ell_{\vec{p},\vec{v}}$ y es,

$$\ell_{\vec{p},\vec{v}} = \{\vec{u} : \vec{u} = \vec{p} + t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}\}. \tag{2.11}$$

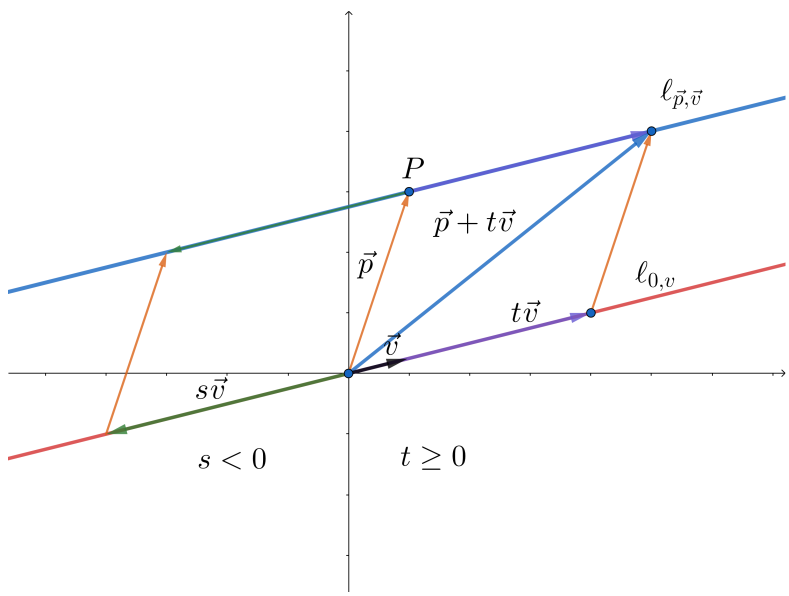


Figura 2.7: Observe que las líneas rectas $\ell_{\vec{p},\vec{v}}$ y $\ell_{0,v}$ poseen la misma dirección.

La ecuación (2.11) se conoce como la **ecuación vectorial** de la recta. Escribir de este modo la ecuación de una recta da la ventaja de expresarla en términos de un solo parámetro. También se puede deducir una expresión vectorial para un segmento sobre la mencionada recta. Para esto, recuerde que el vector director $\vec{v} = (u, v)$ de una recta ℓ se puede obtener al conocer un par de puntos de ella, si por ejemplo $A = (a, b) = \vec{a}$ y $B = (c, d) = \vec{b}$ son puntos de ℓ, entonces se tiene que

$$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a} = (c - a, d - b).$$

Por lo tanto, las coordenadas de un punto cualquiera $U = (x, y) = \vec{u}$ en la recta están dadas por la siguiente expresión,

$$\vec{u} = \vec{a} + t\vec{v} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \tag{2.12}$$

o bien escrito en coordenadas cartesianas como,

$$\begin{cases} x = (1 - t)a + tc = a + t(c - a), \\ y = (1 - t)b + td = b + t(d - b), \end{cases} \tag{2.13}$$

con $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a} = (c - a, d - b)$ y t un parámetro que puede tomar cualquier valor real. Cualquiera de las ecuaciones anteriores son conocidas como la **ecuación paramétrica** de la recta que pasa por dos puntos A y B.

Pero, si se quiere solo definir el segmento que va de A a B basta considerar las ecuaciones (2.13) con $t \in [0, 1]$.

Ejemplo 8. Encontrar las coordenadas del **punto medio** $M = (x, y) = \vec{m}$ entre los puntos $A_0 = (x_0, y_0) = \vec{a_0}$ y $A_1 = (x_1, y_1) = \vec{a_1}$. Para hacer esto basta tomar $t = \frac{1}{2}$, en cualquiera de las ecuaciones anteriores donde $\vec{a} = \vec{a_0}$ y $\vec{b} = \vec{a_1}$, por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + \frac{1}{2}(x_1 - x_0) = \frac{x_0 + x_1}{2}, \\
y &= y_0 + \frac{1}{2}(y_1 - y_0) = \frac{y_0 + y_1}{2}.
\end{aligned}
$$

Es fácil verificar que $||\vec{a_0} - \vec{m}|| = ||\vec{m} - \vec{a_1}||$, lo que confirma que M es el punto medio del segmento A_0A_1. Se hace notar también que $\vec{m} = \frac{\vec{a_0} + \vec{a_1}}{2}$.

Veamos ahora como se puede pasar de la ecuación paramétrica (2.12) a la ecuación general de una recta.

Si el vector dirección $\vec{v} = (c - a, d - b)$ es paralelo al eje y es decir $c - a = 0$, se tiene que $x - a = 0$, que es la ecuación general de una recta vertical. Si el vector dirección $\vec{v} = (c - a, d - b)$ es paralelo al eje x es decir $d - b = 0$, se tiene que $y - b = 0$, que es la ecuación general de una recta horizontal.

Si el vector dirección $\vec{v} = (c - a, d - b)$, es tal que $c - a \neq 0$ y $d - b \neq 0$, basta despejar t de (2.13) en ambas ecuaciones,

$$
t = \frac{x - a}{c - a} \quad \text{y} \quad t = \frac{y - b}{d - b},
$$

e igualando, se obtienen las siguientes ecuaciones equivalentes

$$
\begin{aligned}
(x - a)(d - b) &= (y - b)(c - a) \\
(d - b)x + (a - c)y + (bc - ad) &= 0 \\
Ax + By + C &= 0,
\end{aligned}
$$

con $A = d - b$, $B = a - c$ y $C = bc - ad$.

También, es fácil pasar de una ecuación general $Ax+By+C=0$ a una ecuación paramétrica 2.13. Observando la forma del vector dirección en la ecuación paramétrica, el vector dirección es $\vec{v}=(-B,A)$, y un punto que cumple la ecuación $Ax+By+C=0$, y por tanto un punto de la recta, es $(0,-\frac{C}{B})$ si $B\neq 0$ o bien $(-\frac{C}{A},0)$ si $A\neq 0$. Si $B\neq 0$, entonces como $(0,-\frac{C}{B})$ es un punto de la recta, para cualquier punto $U=(x,y)=\vec{u}$ en la recta se tiene que $(x,y)=(0,-\frac{C}{B})+t\vec{v}$, con $t\in\mathbb{R}$, y viceversa, cualquier punto $(0,-\frac{C}{B})+t\vec{v}$ para algún $t\in\mathbb{R}$ pertenece a la recta. Del mismo modo si $A\neq 0$, entonces como $(-\frac{C}{A},0)$ pertenece a la recta, para cualquier punto $U=(x,y)=\vec{u}$ en la recta se tiene que $(x,y)=(-\frac{C}{A},0)+t\vec{v}$, con $t\in\mathbb{R}$, y cualquier punto $(-\frac{C}{A},0)+t\vec{v}$ para algún $t\in\mathbb{R}$ pertenece a la recta. En cualquier caso la recta con ecuación $Ax+By+C=0$ queda representada por una ecuación paramétrica 2.13. Así, queda establecida la equivalencia de las ecuaciones de la recta vistas hasta ahora.

2.2.3. La ecuación normal

Vistos de manera geométrica, dos vectores son **paralelos** si tienen la misma dirección y sus sentidos son iguales u opuestos, es decir, si forman un ángulo de $\pm 180°$. Por otro lado, si los vectores en cuestión forman un ángulo de $\pm 90°$ se dice que estos son vectores **ortogonales** o **perpendiculares**.

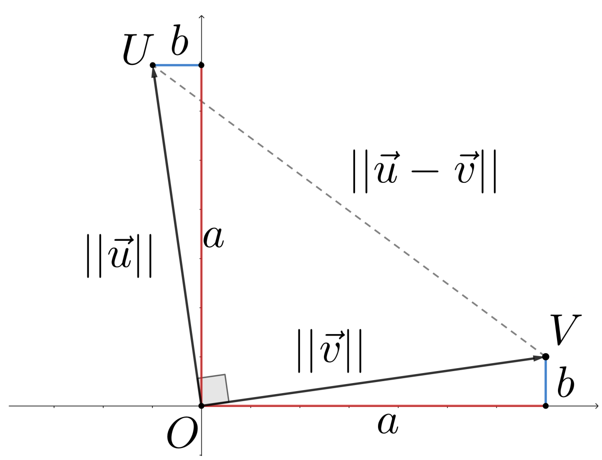


Figura 2.8: El vector $\vec{u}=(x,y)=U$ es el resultado de rotar en sentido positivo al vector $\vec{v}$. Estos vectores forman un triángulo.

Por ejemplo, en la Figura 2.8 se ilustra como al rotar $90°$ un vector $\vec{v}=(a,b)$, no nulo, en sentido positivo (es decir, en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj), se obtiene un nuevo vector $\vec{u}=(x,y)$ que como mostramos más adelante, cumple $\vec{u}=(x,y)=(-b,a)$.

Si consideramos los puntos finales $V = (a, b)$ y $U = (x, y)$ de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$, estos son ortogonales pues el triángulo ΔOVU, de la Figura 2.8, es isósceles pues $||\vec{u}||^2 = a^2 + b^2 = ||\vec{v}||^2$, y es un triángulo rectángulo. En tal triángulo rectángulo se cumple el Teorema Pitágoras, pero el cuadrado de la hipotenusa es,

$$\begin{aligned}
||\vec{v} - \vec{u}||^2 &= ||(a, b) - (x, y))||^2 \\
&= ||(a - x, b - y)||^2 \\
&= (a - x)^2 + (b - y)^2 \\
&= (a^2 + b^2) + (x^2 + y^2) - 2(ax + by) \\
&= ||\vec{v}||^2 + ||\vec{u}||^2 - 2(ax + by),
\end{aligned}$$

que es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, menos el factor $2(ax + by)$, este factor deberá ser cero para que se cumpla Pitágoras. Pero basta con,

$$ax + by = 0. \tag{2.14}$$

Pero, los vectores $\vec{u_1} = (-b, a)$ y $\vec{u_2} = (b, -a)$ cumplen la ecuación anterior y $||\vec{u_2}||^2 = ||\vec{u_1}||^2 = a^2 + b^2 = ||\vec{u}||^2$, luego $\vec{u} = (-b, a)$ o $\vec{u} = (b, -a)$.
Recíprocamente, si un vector $\vec{u} = (x, y) = U$ cumple (2.14), entonces $\vec{u} = (x, y)$ es un vector ortogonal a $\vec{v} = (a, b) = V$. Para probar esto, considere el triángulo ΔOUV cuya hipotenusa corresponde a un vector paralelo a $\vec{u} - \vec{v}$. Como en el triángulo ΔOUV, el cuadrado de la hipotenusa es la suma de los catetos al cuadrado, pues se cumple que

$$\begin{aligned}
||\vec{u} - \vec{v}||^2 &= ||(a, b) - (x, y)||^2 \\
&= ||(a - x, b - y)||^2 \\
&= (a - x)^2 + (b - y)^2 \\
&= a^2 + x^2 - 2ax + b^2 + y^2 - 2by \\
&= a^2 + b^2 + x^2 + y^2 - 2(ax + by) \\
&= a^2 + b^2 + x^2 + y^2 - 2(0) \quad \text{por (2.14)} \\
&= ||(a, b)||^2 + ||(x, y)||^2,
\end{aligned}$$

entonces, nuevamente por el Teorema de Pitágoras, este triángulo es rectángulo y así el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ mide $\pm 90°$. Más aún, el vector $\vec{u} = (x, y) = U$ debe ser paralelo al vector $(-b, a)$, que ya se probó forma un ángulo recto con el vector $\vec{v}$, es decir que para algún número real t se cumple que $\vec{u} = t(-b, a)$. De ahora en adelante dado cualquier vector $\vec{v} = (a, b)$ se denotará al vector $(-b, a)$, como $\vec{v}^{\perp} = (-b, a)$.

Lo anterior también motiva una nueva operación entre vectores $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para $(a, b), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrarios, se define,

$$(a, b) \cdot (x, y) = ax + by,$$

y a esta operación se le conoce como **producto punto** o **producto interior**. Se trata de una operación entre vectores cuyo resultado siempre es una magnitud escalar. Esta operación es conmutativa, asociativa y distributiva sobre la suma de vectores. También es lineal en cada factor. Más aún, por lo anteriormente discutido, podemos afirmar que los vectores (a, b) y (x, y) son ortogonales si, y solo si $(a, b) \cdot (x, y) = 0$.

Otra propiedad referente al producto interior, es que se puede expresar al cuadrado de la norma de un vector (a, b) como $||(a, b)||^2 = (a, b) \cdot (a, b)$. Precisamente, por esta misma razón $(a, b) \cdot (a, b) \geq 0$. Más aún, si el vector (a, b) es no nulo entonces $a \neq 0$ o $b \neq 0$, luego en este caso se tiene que $(a, b) \cdot (a, b) > 0$. Esto se usará para probar el siguiente resultado

Proposición 2.2.4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se cumple que*

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \; ||\vec{v}||$$

Demostración. Si $\vec{u} = (0, 0)$ o $\vec{v} = (0, 0)$ el resultado es inmediato. Supongamos entonces que ambos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos. Entonces $\vec{u} \cdot \vec{u} \neq 0$ y $\vec{v} \cdot \vec{v} \neq 0$. Sea $\lambda = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ y sea $\vec{w} = \vec{u} - \lambda\vec{v}$. Ahora, observe que por las propiedades anteriormente citadas del producto interior, se tiene que

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= \vec{v} \cdot (\vec{u} - \lambda\vec{v}) \\
&= \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \lambda\vec{v} \\
&= \vec{v} \cdot \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} \cdot \vec{v} \\
&= \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} \\
&= \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{u} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\vec{w}\cdot\vec{w} &= (\vec{u}-\lambda\vec{v})\cdot\vec{w}\\ &= (\vec{u}\cdot\vec{w}-\lambda\vec{v}\cdot\vec{w})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{w} \qquad\qquad \text{pues } \vec{v}\cdot\vec{w}=0\\ &= \vec{u}\cdot(\vec{u}-\lambda\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}-\lambda\vec{u}\cdot\vec{v}\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}-\frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\end{aligned}$$

Pero $\vec{w}\cdot\vec{w}\geq 0$, entonces

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leq (\vec{u}\cdot\vec{u})\ (\vec{v}\cdot\vec{v}) = ||\vec{u}||^2\ ||\vec{v}||^2.$$

y al sacar raíz cuadrada en ambos lados, se obtiene la desigualdad buscada.
■

De lo anterior, $-1 \leq \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\ ||\vec{v}||} \leq 1$, y a esta expresión se le conoce como el coseno del ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se denota por $\theta=\theta(u,v)$ al ángulo y se escribe $\cos\theta$.

Corolario 2.2.1 (Desigualdad del Triángulo) *Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se cumple que*

$$||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||.$$

Demostración Por la proposición anterior,

$$\begin{aligned}||\vec{u}+\vec{v}||^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= ||\vec{u}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2\\ &\leq ||\vec{u}||^2+2||\vec{u}||\ ||\vec{v}||+||\vec{v}||^2\\ &= (||\vec{u}||+||\vec{v}||)^2,\end{aligned}$$

y sacando raíz cuadrado en ambos lados de la ecuación se obtiene la expresión deseada.
■

De acuerdo a lo anterior y considerando dos líneas rectas ℓ_1 y ℓ_2, en el lenguaje vectorial, estas son **líneas rectas perpendiculares** si sus vectores directores son perpendiculares.

De manera similar, ℓ_1 y ℓ_2 son **líneas rectas paralelas** si son distintas y es posible expresar sus ecuaciones con el mismo vector director. Note que para esta última definición no se pide que los vectores directores sean paralelos, pues se pueden definir varios vectores directores para una misma recta, los cuales resultarán ser múltiplos escalares los unos de los otros. Aquí es importante notar que dadas dos líneas rectas con el mismo vector director que pasan por el mismo punto, son iguales.

Ahora, se observará que el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ ortogonales a un vector $\vec{n} = (a, b)$, coincide con la línea recta que pasa por el origen y que tiene ecuación, $ax + by = 0$,

$$\ell = \{(x, y) : (a, b) \cdot (x, y) = 0\} = \{(x, y) : ax + by = 0\}\,, \tag{2.15}$$

Al vector $\vec{n} = (a, b)$ se le conoce como el **vector normal** de la recta. Desde luego el punto $(-b, a)$ es un punto de ℓ y el vector $\vec{v} = (-b, a)$ es un vector dirección de la recta ℓ. Del lado izquierdo de la Figura 2.9 se ilustra una recta con su vector normal. Notemos que el vector normal de una recta siempre es ortogonal al vector director de ésta, y viceversa, cualquier vector ortogonal al vector director de una recta es un vector normal, y cualquier vector ortogonal al vector normal es un vector director de la misma recta.

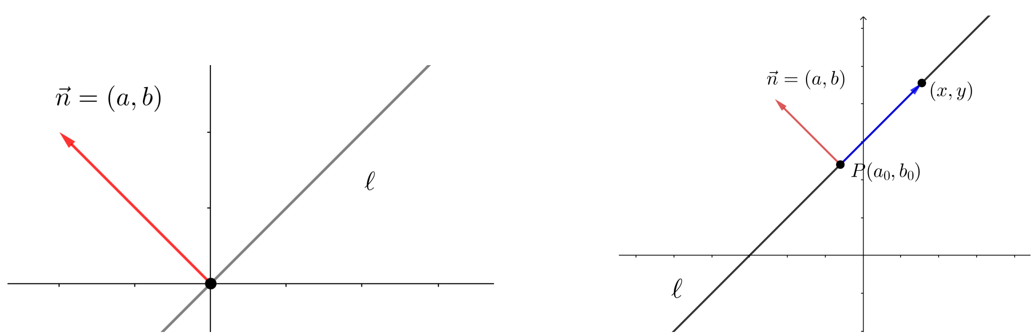


Figura 2.9: En la figura de la izquierda la recta que pasa por el origen con ecuación normal (2.15), y en la figura del lado derecho la recta con ecuación (2.16)

Si la recta ℓ no pasa por el origen, considere uno de sus puntos $A = (a_0, b_0)$. Igualmente, suponga que su vector normal es $\vec{n} = (a, b)$. Entonces la recta ℓ es el lugar geométrico de todos los puntos (x, y), tales que el vector que parte de $A = (a_0, b_0)$ a $P = (x, y)$, es decir $A - P = (a_0 - x, b_0 - y)$, es ortogonal a $\vec{n}$. En otras palabras ℓ queda definida por el siguiente conjunto

$$\begin{aligned}\ell &= \{(x,y) : (a,b)\cdot(x-a_0, y-b_0) = 0\}\\ &= \{(x,y) : a\,(x-a_0) + b\,(y-b_0) = 0\}\\ &= \{(x,y) : ax - aa_0 + by - bb_0 = 0\}\\ &= \{(x,y) : ax + by - (aa_0 + bb_0) = 0\}\end{aligned}$$

Luego, al hacer $c = -(aa_0 + bb_0)$, se obtiene la siguiente ecuación (ver Figura 2.9)

$$\ell = \{(x,y) : ax + by + c = 0\}\,, \tag{2.16}$$

También es fácil convencernos de que un vector normal a la recta que pasa por los puntos $A = (a,b)$ y $B = (c,d)$ es $\vec{n} = (b-d, c-a)$, ver Figura 2.10. Por lo que la recta por los puntos $A = (a,b)$ y $B = (c,d)$ es,

$$\ell = \{(x,y) : (b-d, c-a)\cdot(x-a, y-b) = 0\}\,.$$

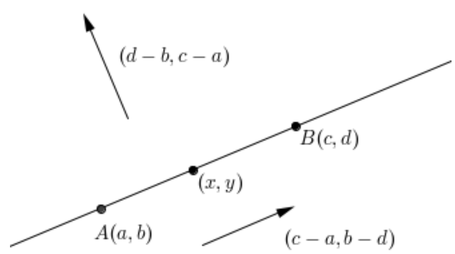


Figura 2.10: El segmento por A y B es ortogonal a $\vec{n} = (d-b, c-a)$, y es paralelo a $\vec{v} = (c-a, b-d)$.

Desarrollando la ecuación de la regla de correspondencia, se tiene que la recta buscada está formada por los puntos (x,y) tales que sus coordenadas cumplen que

$$(x-a)\,(b-d) + (y-b)\,(c-a) = 0,$$

Pero, esta ecuación se puede reescribir, si $b-d \neq 0$ y $c-a \neq 0$ como

$$\frac{x-a}{b-d} = \frac{y-b}{c-a},$$

que es la ecuación de la recta (2.4), pues $c-a$ y $b-d$ son la abscisa y ordenada del vector director de la recta que se describe, respectivamente. La ecuación anterior se puede reescribir como,

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1, \tag{2.17}$$

con $\alpha = \dfrac{bc - ad}{b - d}$ y $\beta = \dfrac{bc - ad}{c - a}$. La ecuación anterior (2.17) se conoce como la **ecuación normal** de una recta. Es útil notar que los puntos $(\alpha, 0)$ y $(0, \beta)$ pertenecen a la recta y que $(b, -a) \cdot (c, d) = bc - ad$. Recíprocamente, de una recta con ecuación general $ax + by + c = 0$, se tiene la ecuación $-a\frac{x}{c} - b\frac{y}{c} = 1$, que es equivalente a la ecuación $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$ con $\alpha = -\frac{c}{a}$ y $\beta = -\frac{c}{b}$. Luego, si $x = 0$ entonces $y = -\frac{c}{b}$ y si $y = 0$ entonces $x = -\frac{c}{a}$.

La discusión anterior, se puede aplicar al segmento P_1P_2 con extremos $P_1 = (a, b)$ y $P_2 = (a_0, b_0)$ notando que todos los puntos $P = (x, y)$ que sean perpendiculares a $\vec{n} = P_2 - P_1$, cumplen la siguiente igualdad

$$x(a - a_0) + y(b - b_0) = 0,$$

que define una recta que pasa por el origen y tiene vector director $\vec{n}^{\perp}$. Pero si se quiere definir la recta que pasa justo por en medio del segmento P_1P_2 se puede considerar al punto medio de dicho segmento $M = \dfrac{P_1 + P_2}{2}$ y a la recta $\ell_{M,\vec{n}^{\perp}}$ que se le conoce como la **mediatriz** de P_1 y P_2, que a su vez es el conjunto de todos los puntos equidistantes de P_1 y P_2, ver Figura 2.11.

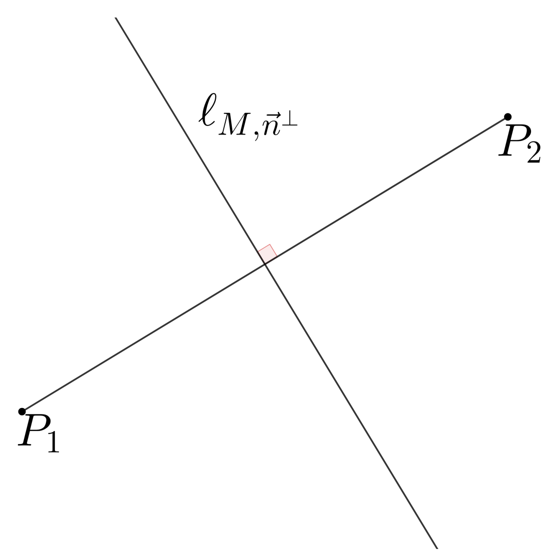


Figura 2.11: La mediatriz de los puntos de los puntos P_1 y P_2.

Teniendo en cuenta lo visto hasta ahora, ya se cuentan con bastantes herramientas para determinar más relaciones geométricas, entre rectas y otras curvas, valiéndonos de vectores y parámetros.

El siguiente ejemplo solo requiere de recordar que la ecuación que define la circunferencia unitaria con centro en el origen es $x^2 + y^2 = 1$. Más aún, por lo visto hasta ahora se cuenta con las condiciones adecuadas para encontrar expresiones que definan las distancias entre un punto y una recta y la distancia entre dos rectas, que será lo próximo a hacer en la siguiente sección.

Ejemplo 9. Una proyección estereográfica. Determinar una biyección entre los números reales y la circunferencia unitaria con centro en el origen (que se denota por $\mathbb{S}$), sin el punto $N = (0, 1)$. Esto es que a cada número real se le puede asociar uno y solo un punto de $\mathbb{S} \setminus \{N\}$, y recíprocamente a cada punto de $\mathbb{S} \setminus \{N\}$ se le puede asignar un único número real.

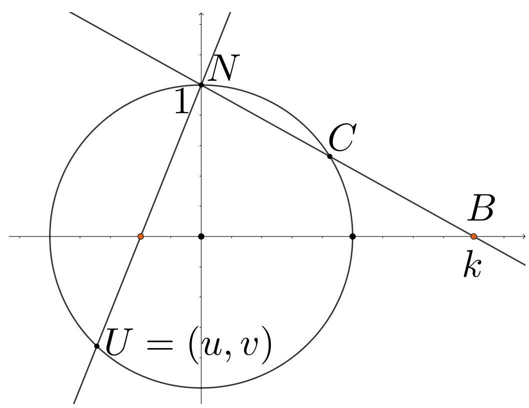


Figura 2.12: En la proyección estereográfica, a cualquier punto del eje x se le asocia un único punto de la circunferencia unitaria.

Se mostrará que la biyección definida de la siguiente manera cumple el enunciado: a cualquier número real k le corresponde el único punto C en $\mathbb{S}\setminus\{N\}$ y que pertenece a la recta que pasa por los puntos $N = (0, 1)$ y $B = (k, 0)$, ver Figura 2.12. La ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos N y B es:

$$\begin{cases} x = tk \\ y = 1 - t \end{cases}$$

Ahora, se debe de determinar t de modo que $C = (x, y)$ esté a distancia uno del origen, o equivalentemente que esté sobre la circunferencia unitaria con centro en el origen: $x^2 + y^2 = 1$. Entonces, se debe cumplir que $t^2k^2 + (1 - t)^2 = 1$, y esta ecuación se reduce a,

$$(1 + k^2)t^2 = 2t,$$

luego los valores de t buscados son $t = 0$ o $t = \frac{2}{1+k^2}$. Si $t = 0$, se obtiene el punto $N = (0, 1)$. Si $t = \frac{2}{1+k^2}$, entonces $x = \frac{2k}{1+k^2}$ y $y = \frac{k^2-1}{k^2+1}$. Por lo tanto, el punto buscado es

$$C = \left(\frac{2k}{1+k^2}, \frac{k^2-1}{k^2+1}\right),$$

que es el único punto (además de N) que está sobre la recta y que su distancia al origen es igual a 1.

Ahora, considere un punto $U = (u, v)$ en $\mathbb{S}$, diferente de N. La ecuación de la recta que pasa por N y U es $y = \frac{v-1}{u}x + 1$. Luego, el punto $(x, 0)$ está en la recta, si cumple la ecuación, $\frac{v-1}{u}x + 1 = 0$, por lo $x = \frac{u}{1-v}$, entonces el número real que se le asigna al punto U es $x = \frac{u}{1-v}$.

2.2.4. Rectas perpendiculares y paralelas

Antes de plantear la pregunta que motivará lo próximo a discutir, recordemos que **la distancia entre dos puntos** $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ está dada por la expresión

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}. \tag{2.18}$$

Rectas perpendiculares

Hemos señalado que dos rectas dadas en forma vectorial son ortogonales o perpendiculares si sus vectores dirección son ortogonales, mostraremos ahora algunas equivalencias de esta noción de perpendicularidad y veremos condiciones para que dos rectas, utilizando otro tipo de ecuaciones, sean perpendiculares. Por ejemplo, ¿cuáles son las condiciones para que dos rectas no verticales con ecuaciones, $y = m_1x + b$ y $y = m_2x + b'$ sean perpendiculares?

Para responder esto considere las rectas con las mismas pendientes que las rectas mencionadas: $y = m_1x$ y $y = m_2x$, pues éstas serán paralelas a $y = m_1x + b$ y $y = m_2x + b'$, respectivamente, luego sus vectores directores son iguales, luego si unas son perpendiculares las otras lo serán también. La ventaja de esto es que las rectas $y = m_1x$ y $y = m_2x$ pasan por el origen, ver Figura 2.13. Así, puede tomar los puntos $P = (1, m_1)$ y $Q = (1, m_2)$, y si los segmentos OP y OQ son perpendiculares, el triángulo OPQ es rectángulo y por *Teorema de Pitágoras* y su inverso, esto sucede si, y solo si

$$\begin{aligned} d(P,Q)^2 &= d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 \\ &= \sqrt{1+m_1^2}^2 + \sqrt{1+m_2^2}^2 \\ &= 1 + m_1^2 + 1 + m_2^2 \end{aligned}$$

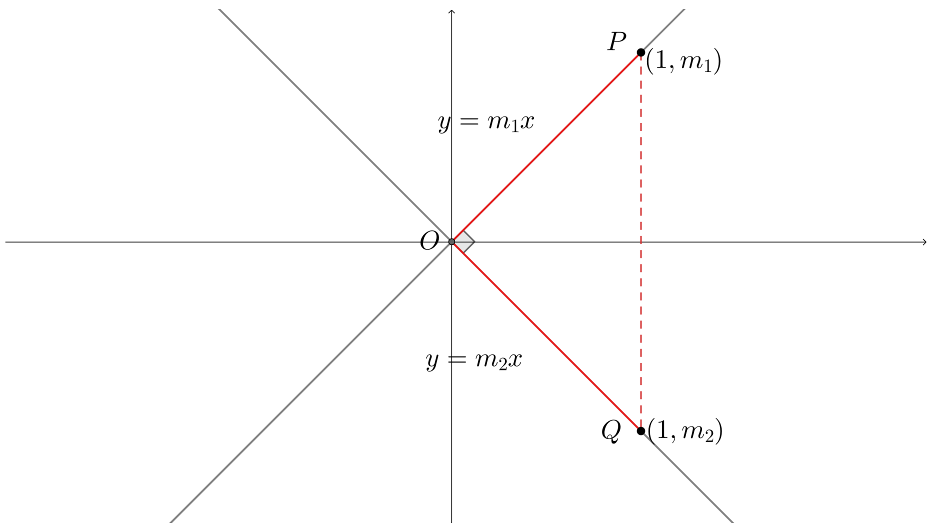


Figura 2.13: El triángulo OPQ.

Por otro lado $d(P,Q) = m_1 - m_2$, así

$$(m_1 - m_2)^2 = 1 + m_1^2 + 1 + m_2^2,$$

que es equivalente a

$$m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 = 1 + m_1^2 + 1 + m_2^2$$

que se cumple si, y solo si $m_2m_1 = -1$. Que su vez es equivalente a que $m_2 = \frac{-1}{m_1}$.

En el caso de las rectas $y = m_1x + b$ y $y = m_2x + b'$ por lo observado anteriormente son perpendiculares si, y solo si $m_2m_1 = -1$. Por lo tanto, dos rectas no verticales son perpendiculares si y solamente si sus pendientes son recíprocas negativas entre sí.

Es posible reformular este resultado en términos de la ecuación general de la recta.

Teorema 2.2.5 *Para que las líneas rectas $ax+by+c=0$ y $a'x+b'y+c'=0$ sean perpendiculares es una condición necesaria y suficiente que, $aa'+bb'=0$.*

Demostración Simplemente, hace faltar notar que las pendientes de las líneas rectas $ax+by+c=0$ y $a'x+b'y+c'=0$ son $m=-\frac{a}{b}$ y $m'=-\frac{a'}{b'}$, respectivamente. Por el resultado anterior, si las líneas rectas $ax+by+c=0$ y $a'x+b'y+c'=0$ son ortogonales si, y solo si $-\frac{a'}{b'}=\frac{b}{a}$. Lo cual sucede si, y solo si $aa'+bb'=0$. ∎

En otras palabras, si las rectas $ax+by+c=0$ y $a'x+b'y+c'=0$ son perpendiculares, como sus vectores normales son $\vec{n}=(a,b)$ y $\vec{n'}=(a',b')$, respectivamente, entonces se cumple que

$$(a,b)\cdot(a',b')=aa'+bb'=0,$$

que asegura que los vectores normales son ortogonales. Desde luego el recíproco es cierto.
También se pueden usar los vectores directores $\vec{v}=(-b,a)$ y $\vec{v'}=(-b',a')$ de las rectas $ax+by+c=0$ y $a'x+b'y+c'=0$, respectivamente, para verificar que

$$\vec{v}\cdot\vec{v'}=(-b,a)\cdot(-b',a')=aa'+bb'=0.$$

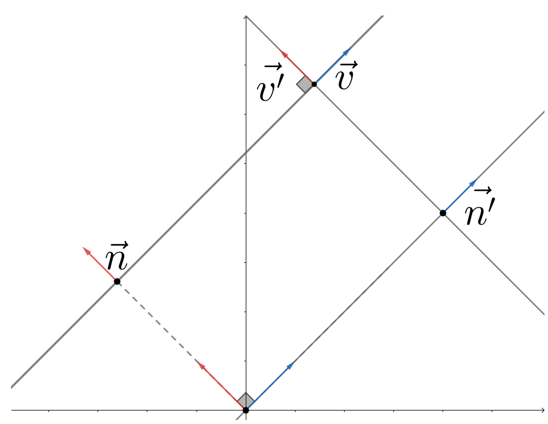


Figura 2.14: Los vectores normales y directores de rectas ortogonales, son ortogonales entre sí.

Rectas paralelas

Primero, es necesario analizar cuando dos ecuaciones definen la misma recta. Dos ecuaciones de la forma $y=m_1x+b$ e $y=m_2x+b'$, definen la misma recta, cuando $b=b'$; que es la ordenada del punto en que esta recta corta el eje Y), y las pendientes de las rectas coinciden, $m_1=m_2$.

Ahora, para todo $k \neq 0$ las ecuaciones $ax + by + c = 0$ y $kax + kby + kc = 0$ definen la misma recta. Mas aún, se puede probar que si las ecuaciones $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ definen la misma recta entonces existe $k \neq 0$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$ y $c' = kc$. Para probar esto, suponga que $b \neq 0$. Esto equivale a decir que la recta $ax + by + c = 0$ no es vertical, como $a'x + b'y + c' = 0$ es la misma recta, entonces no es vertical por lo que $b' \neq 0$. Luego las rectas quedan también definidas por las ecuaciones $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ e $y = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'}$, por lo tanto $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ y $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$. Haciendo $k = \frac{b'}{b}$ se tiene $b' = kb$, $a' = ka$ y $c' = kc$. Si $b = 0$, la recta $ax + by + c = 0$ es vertical, lo mismo que la recta $a'x + b'y + c' = 0$, luego $b' = 0$. Las rectas ahora tienen la forma $ax + c = 0$ y $a'x + c' = 0$, que son rectas verticales que cortan al eje x en el mismo punto, con $x = -\frac{c}{a}$ en una y en la otra $x = -\frac{c'}{a'}$, por lo que $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$, este valor común es el que sirve como k. Lo anterior lo podemos resumir en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.6 *Las ecuaciones $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ definen la misma recta si, y solamente si, existe $k \neq 0$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$ y $c' = kc$.*

Analicemos cuando dos rectas $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ diferentes son paralelas. Primero, bajo el supuesto de que $b \neq 0$, es decir que la primera no es vertical y como son paralelas la segunda no es vertical y entonces también se cumple que $b' \neq 0$. Así las rectas están representadas también por las ecuaciones

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \text{ y } y' = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'},$$

respectivamente. Su paralelismo equivale a decir que $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ y $\frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$. Poniendo $k = \frac{b'}{b}$, se sigue que $a' = ka$, $b' = kb$ y $c' \neq kc$. Pues en el caso de que $c' = kc = \frac{b'}{b}c$, se sigue que $\frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}$, que es una contradicción.

En el caso de que $b = 0$, entonces por el paralelismo $b' = 0$ y resulta que las dos rectas son verticales y están representadas por las ecuaciones $x = -\frac{c}{a}$ y $x = -\frac{c'}{a'}$. Entonces, si $k = \frac{a'}{a}$, $b' = kb$ y $c' \neq kc$. Pues si $c' = kc = \frac{a'}{a}c$, se cumple que $\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a}$, lo que implica que las ecuaciones $x = -\frac{c}{a}$ y $x = -\frac{c'}{a'}$ definen la misma recta, una contradicción. Por lo tanto $c' \neq kc$.

Recíprocamente, si existe $k \neq 0$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$ y $c' \neq kc$, las ecuaciones $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ no pueden poseer una solución en común, pues si $ax + by + c = 0$, se tiene que $a'x + b'y = -kc \neq -c'$. Por lo tanto, las rectas representadas por estas ecuaciones no se cortan en algún punto, luego son rectas paralelas.

En resumen se tienen los siguientes resultados.

Teorema 2.2.7 *Las rectas $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ son paralelas si, y solamente si, para algún $k \neq 0$ se tiene $a' = ka$, $b' = kb$ y $c' \neq kc$.* ■

Teorema 2.2.8 *Las rectas $ax+by+c = 0$ y $a'x+b'y+c' = 0$ tienen un único punto en común si, y solamente si, para todo número real $k \neq 0$, se cumple que $a' \neq ka$ o $b' \neq kb$.* ■

Observe que cada vez que se cumplen las igualdades $a' = ka$ y $b' = kb$, con $a \neq 0$, $a' \neq 0$, $b \neq 0$ y $b' \neq 0$, se tiene que $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$. Esta última igualdad es equivalente a que se cumpla que $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$. Luego, $ab' = ba'$ y $ab' - ba' = 0$, también son igualdades equivalentes. Por lo tanto, de los teoremas anteriores, se puede concluir el siguiente resultado.

Corolario 2.2.2 (A) *Las rectas $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ son paralelas si, y solamente si, $ab' - a'b = 0$.*

(B) *Las rectas $ax+by+c = 0$ y $a'x+b'y+c' = 0$ son concurrentes si, y solamente si, $ab' - a'b \neq 0$.*

Ejemplo 10. Se realizó un estudio de la cotización de las acciones de dos empresas hipotéticas. Las acciones de la primera empresa, empiezan costando \$800,000 y se devalúan en \$1,000 por cada año, mientras las acciones de la segunda empresa comienzan en un valor de \$480,000 y disminuyen en \$5,000 cada año de uso ¿habrá un año donde las acciones de ambas empresas cuesten lo mismo no importando si se evalúan con valor de empresa negativo?

Solución Se puede pensar que en el plano cartesiano, los números en el eje x representan el tiempo con unidad de tiempo un año y los números en el eje y son el precio de las acciones medido en miles de pesos. El crecimiento del valor de las acciones, sigue un modelo de una progresión aritmética, en la primera empresa el valor de una acción en el año n es $a_1(n) = 800 + n$, que es la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(0, 800)$ y $(800, 0)$. Igualmente, la recta $a_2(n) = 480 + 5n$, que pasa por lo puntos $(0, 480)$ y $(96, 0)$ modela el precio de las acciones de la segunda empresa. Luego, como la pendiente de la primera recta es 1 y la pendiente de la segunda recta es 5, ambas rectas tendrán un punto en común. Por lo tanto, hay un año, puntualmente en $n = 80$, donde ambas acciones valdrán lo mismo.

Es relevante hablar de la distancia entre dos rectas paralelas o la distancia que separa un punto de una recta. Ahora, considérense dos rectas paralelas $ax+by+c = 0$ y $ax+by+c' = 0$. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces ambas rectas son paralelas al eje x y su distancia es $\left|\frac{c}{b} - \frac{c'}{b}\right|$. De forma similar, si $b = 0$ y $a \neq 0$, entonces ambas rectas son paralelas al eje y y su distancia es $\left|\frac{c}{a} - \frac{c'}{a}\right|$. Entonces supongamos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Observe que ambas rectas $ax + by + c = 0$ y $ax + by + c' = 0$ son perpendiculares a $bx - ay = 0$. Pues las pendientes de $ax + by + c = 0$ y de $ax + by + c' = 0$ son las dos iguales a $m_1 = -\frac{a}{b}$, y la pendiente de $bx - ay = 0$ es $m_2 = \frac{b}{a}$, como $m_1 \cdot m_2 = -1$ son ortogonales. La recta $bx - ay = 0$ pasa por el origen, y corta a las rectas $ax + by + c = 0$ y $ax + by + c' = 0$ en los puntos P y Q, respectivamente. Las coordenadas de dichos puntos se obtienen resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx - ay = 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} ax + by + c' = 0 \\ bx - ay = 0 \end{cases}$$

Como $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a^2 + b^2 \neq 0$. Luego, se obtiene que $P = \left(\frac{ac}{a^2+b^2}, \frac{bc}{a^2+b^2}\right)$ y $Q = \left(\frac{ac'}{a^2+b^2}, \frac{bc'}{a^2+b^2}\right)$.

La distancia entre las dos rectas dadas es la distancia entre los puntos P y Q. Otro cálculo sencillo nos da que,

$$d(P, Q) = \frac{|\, c' - c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Para calcular la distancia de un punto $P = (x_0, y_0)$ a la recta ℓ, dada por $ax + by + c = 0$, se observa que ℓ' la recta paralela a ℓ que pasa por P tiene la siguiente ecuación: $ax + by + c' = 0$, donde $c' = -(ax_0 + by_0)$ y que la distancia de P a ℓ es igual a la distancia entre esas dos rectas paralelas ℓ y ℓ', es por lo que se acaba de observar igual a,

$$d(P, \ell) = d(P, Q) = \frac{|\, c - c' \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\, ax_0 + by_0 + c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{2.19}$$

Lo siguiente es una manera alternativa de encontrar la distancia de un punto a una recta con ecuación de la forma $y = mx + b$ y se ilustra en la Figura 2.15. Consideraremos que el $P = (u, v)$ no pertenece a la recta. Supongamos la distancia de P a la recta es α. También tome en cuenta el punto de la recta $Q = (u, mu + b)$ y a O el pie de la perpendicular de P sobre la recta. Observe que se forma un triángulo rectángulo OPQ, por encima de la recta. Después, considere un triángulo rectángulo cuya hipotenusa esté sobre la recta, con uno de los lados paralelo a PQ y que éste mida m, mientras que el otro cateto sea de longitud 1, como se ve en la figura 2.15.

Luego, los triángulos rectángulos construidos son semejantes, pues tienen un par de ángulos iguales: el ángulo recto y los ángulos θ_1 y θ_2 miden los mismo ya que está entre lados paralelos y una recta secante. Por lo tanto, la semejanza garantiza que,

$$\frac{\alpha}{|v-mu-b|}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}.$$

y así

$$d(P,\ell)=\alpha=\frac{\mid v-mu-b\mid}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Note que esta última expresión coincide con la encontrada antes (ecuación (2.19)) Al considerar el punto $P_0=(x_0,y_0)=(u,v)$ y convertir a la recta $y=mx+b$ en su forma ecuación general, $mx-y+b=0$, que nos daría,

$$d(P_0,\ell)=\frac{\mid mx_0-y_0+b\mid}{\sqrt{1^2+m^2}}=\frac{\mid mu-v+b\mid}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\mid v-mu-b\mid}{\sqrt{1+m^2}}.$$

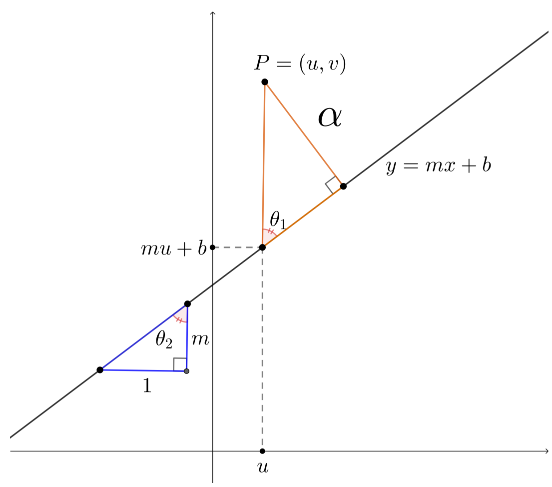


Figura 2.15: La construcción de los triángulos semejantes sobre la recta $y=mx+b$.

2.2.5. Colinealidad

Para terminar esta sección, veamos como verificar la colinealidad de tres puntos $P_1\,(x_1,y_1)$, $P_2\,(x_2,y_2)$ y $P_3\,(x_3,y_3)$, es decir que pertenezcan a la misma línea recta. La recta que pasa por P_1 y P_2, con $x_2\neq x_1$, está dada por la ecuación

$$y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Entonces P_3 pertenece a la misma recta, si sus coordenadas cumplen con la ecuación de la recta, es decir,

$$y_3 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1).$$

Podemos decir que tres puntos distintos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, tales que $x_2 \neq x_1$ y $x_3 \neq x_1$, son **colineales**, si, y solo si

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

En cambio si se tiene que los tres puntos distintos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, son tales que $x_2 = x_1$, o $x_3 = x_1$, o $x_2 = x_3$, entonces dos de los puntos tienen la misma primera coordenada, es decir están sobre una recta vertical. Luego, si la segunda coordenada del tercer punto es igual a la de los otros dos, entonces los tres puntos son colineales y están sobre una misma recta vertical, en caso contrario no lo son.

2.3. Polinomios lineales

Un polinomio lineal o de primer grado es una expresión algebraica de la forma $P(x) = ax+b$, con $a \neq 0$ cuya una raíz es $x = \frac{a}{b}$; una ecuación lineal es una igualdad de la forma $ax + b = 0$, con $a \neq 0$, para la cual solo hay hay una única solución, a saber $x = \frac{a}{b}$; la ecuación $y = mx + b$, tal que $m \neq 0$, define una recta que corta al eje x en $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$ y una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que para toda $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax + b$, es una función lineal, cuya gráfica es la recta $y = ax + b$.

En este sentido, si se consideran dos puntos sobre el plano cartesiano (x_1, y_1) y (x_2, y_2), con $x_1 \neq x_2$, se sabe por la sección anterior, que hay una única recta que pasa por estos dos puntos, a saber

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1) + y_1$$

que se puede reescribir como

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x - \left[x_1\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) + y_1\right]$$

Además, esto quiere decir que ésta es la única ecuación tal que si $x = x_1$ entonces $y = y_1$, y cuando $x = x_2$ entonces $y = y_2$. En consecuencia el polinomio lineal $P(x) = ax + b$, con $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y $b = x_1\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) + y_1$, es el único polinomio de grado 1 tal que $P(x_1) = y_1$ y $P(x_2) = y_2$. En otras palabras, se acaba de probar lo siguiente.

Teorema 2.3.1 *Dadas las parejas de números reales (x_1, y_1) y (x_2, y_2), con $x_1 \neq x_2$, existe un único polinomio $P(x)$ lineal tal que $P(x_1) = y_1$ y $P(x_2) = y_2$.*

De igual modo se puede asegurar que las ecuaciones lineales tienen solución única. Ahora, considere dos polinomios $P(x) = ax + b$ y $Q(x) = cx + d$ y dos rectas $y = ax + b$ y $y = cx + d$. Recuerde que al considerar un par de rectas distintas, se implican solo dos casos posibles: i) las rectas no se intersecan en ningún puntos, es decir que son paralelas. ii) Se intersecan en un único punto. Si son paralelas, su ordenada al origen debe ser distinta, es decir $b \neq d$, pero su inclinación o pendiente es igual, esto es $a = c$. Si las rectas se intersecan, el único punto de intersección es $x = \frac{b-d}{a-c}$. Por lo tanto, se puede afirmar lo siguiente.

Teorema 2.3.2 *Sean $P(x) = ax + b$ y $Q(x) = cx + d$ polinomios lineales. Si los polinomios lineales $P(x)$ y $Q(x)$ son distintos entonces $P(x) \neq Q(x)$ para cualquier número real x, o existe un único x tal que $P(x) = Q(x)$, a saber $x = \frac{b-d}{a-c}$. Además, $P(x) \neq Q(x)$ para cualquier número real x, si, y solo si $a = c$ y $b \neq d$.*

De esta manera, se puede apreciar la relación que hay entre las rectas y los polinomios lineales. Esta relación no es biunívoca en tanto que se excluyen a las rectas verticales. Esta relación es relevante en la solución de los ejemplos siguientes:

Ejemplo 11. i) Encuentre todos los polinomios lineales con única raíz $x = 2$.
ii) Encuentre todas las rectas en el plano que pasen por el punto $(2, 0)$.

Solución. i) El polinomio $P(x) = ax + b$ tiene raíz $x = 2$ si, y solo si $P(2) = 0$ equivalentemente $2a + b = 0$. Por lo que el polinomio es $P(x) = a(x - 2)$, con a cualquier número real diferente de cero.
ii) Una recta en el plano $ax + by + c = 0$, pasa por el punto $(2, 0)$ si, y solo si $a2 + b0 + c = 0$, luego $c = 2a$. Por lo que la recta es de la forma $a(x - 2) + by = 0$ con a, b números reales y $a \neq 0$. Entonces el conjunto buscado es el haz de rectas de la siguiente figura, todas ellas pasan por el punto $(2, 0)$.

Hacemos notar lo siguiente, las gráficas de las funciones polinomiales $P(x) = a(x - 2)$, son todas las líneas rectas $a(x - 2) + by = 0$ con a, b números reales que cumplen $a \neq 0$ y $b \neq 0$, éstas son todas las rectas de la figura anterior salvo la recta $x = 2$, que sí es parte de las rectas de ii), pero no es la gráfica de una función (polinomial).

Ejemplo 12. Encontrar todos los polinomios lineales cuya única raíz coincida con alguna de las raíces de $Q(x) = x^2 - 1$.

Solución. Las raíces de $Q(x) = x^2 - 1$ son únicamente -1 y 1. Luego se quiere encontrar todos los polinomios $P(x) = ax + b$ tales que $P(-1) = 0$ o $P(1) = 0$. Siguiendo el ejemplo anterior, tenemos en el primer caso que los polinomios son los de la forma $P(x) = a(x + 1)$ con a un real diferente de cero. En el segundo caso, los polinomios son los de la forma $P(x) = a(x - 1)$ con a un real diferente de cero.

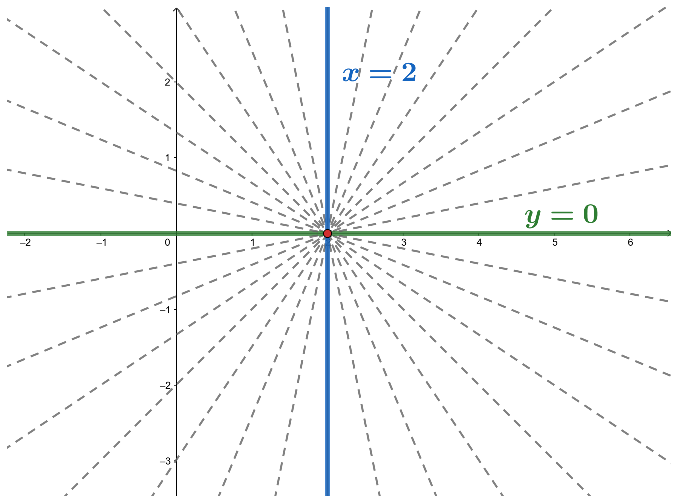


Figura 2.16: El haz o familia de rectas que pasa por $(2, 0)$.

2.4. Funciones lineales y afines

2.4.1. Funciones lineales

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dirá que es una **función lineal** si cumple las siguientes dos condiciones:
(i) es **aditiva** es decir $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para $x, y \in \mathbb{R}$
(ii) **saca escalares reales** es decir $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para $\lambda, x \in \mathbb{R}$.

De acuerdo al siguiente teorema, también podemos decir que cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal si existe $a \in \mathbb{R}$, tal que para todo x número real, se cumple $f(x) = ax$.

Teorema 2.4.1 *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal si, y solo si $f(x) = ax$ para todo x número real, donde a es un número real fijo.*

Demostración Observemos que si la función es lineal, cumple la condición de que, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para $\lambda, x \in \mathbb{R}$. En particular tomando $\lambda = x$ y $x = 1$, se tiene que $f(x \cdot 1) = xf(1) = f(1)x$, por lo que $f(x) = ax$ con $a = f(1)$, para todo número real x.
Recíprocamente una función de la forma $f(x) = ax$ es lineal, ya que:
$i)$ $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$ para $x, y \in \mathbb{R}$.
$ii)$ $f(\lambda x) = a(\lambda x) = \lambda(ax) = \lambda f(x)$ para $\lambda, x \in \mathbb{R}$. ■

Lo que se hará ahora es encontrar la forma de saber cuando una función es una proporcionalidad.

Antes, debemos tener en cuenta (señalar) que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es,
· **Creciente** si: para $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
· **Decreciente** si: para $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
· **Monótona no decreciente** si: para $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
· **Monótona no creciente** si: para $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Si una función f cumple alguna de estas cuatro condiciones, se dirá que la función es **monótona**. En las dos primeras especificaciones (f creciente o f decreciente) se usa también que f es **estrictamente monótona**. En estos dos últimos casos resulta que la función es inyectiva (es decir, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$).

Con esto, ya es posible probar el siguiente teorema.

Teorema 2.4.2 ***Fundamental de la Proporcionalidad (en*** $\mathbb{R}$***)*** *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función creciente (o decreciente). Las siguientes afirmaciones son equivalentes*
(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *para cualquier* $x, y \in \mathbb{R}$.
(2) $f(nx) = nf(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *y* $x \in \mathbb{R}$.
(3) f *es lineal, es decir de la forma* $f(x) = ax$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$ *con* $a = f(1)$.

Demostración Se va a demostrar suponiendo que la función f es creciente. Primero, se probará que (1) implica (2). Supongamos entonces que: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$.
Si $x = y = 0$, se tiene que $f(0+0) = f(0) + f(0)$, de donde $f(0) = 0$.
Si $y = -x$, se tiene que $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, por lo que $f(-x) = -f(x)$, para cualquier x real.
Si $y = x$, se tiene que $f(2x) = 2f(x)$. Ahora veamos usando el principio de inducción matemática que $f(nx) = nf(x)$ para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Ahora para enteros negativos, notemos que,

$$0 = f(0) = f(0x) = f((n + (-n))x) = f(nx) + f((-n)x)$$

por lo que $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$, lo que prueba (2).
Mostremos ahora que (2) implica (3).
Primero veamos que para números racionales $r = \frac{p}{q}$, se cumple que $f(r) = f(1)r$.
Sea $r = \frac{p}{q}$ un número racional, entonces p, q son enteros y $p = qr$. Por hipótesis,

$$qf(rx) = f(qrx) = f(px) = pf(x),$$

así, se tiene que para cualquier real x

$$f(rx) = \frac{p}{q} f(x) = rf(x).$$

Si hacemos $x = 1$, en la identidad anterior se tiene que para cualquier número racional r, $f(r) = rf(1) = ar$ con $a = f(1)$. Note, por ser f creciente, que $a = f(1) > f(0) = 0$.

Ahora, se puede ver que esto también se cumple para los números irracionales. Se probará esto por reducción al absurdo. Suponga que existe un número irracional q tal que $f(q) \neq aq$. Entonces $f(q) < aq$ o $f(q) > aq$. Veamos el caso en que, $f(q) < aq$. Como $a > 0$, $\frac{f(q)}{a} < q$. Ahora se usará una propiedad de los números racionales que nos asegura que entre cualesquiera dos números reales hay un número racional, esto es, existe r racional tal que $\frac{f(q)}{a} < r < q$. Entonces $f(q) < ar < aq$. Pero sabemos que para r racional, $f(r) = ar$, entonces

$$f(q) < f(r) < aq.$$

Así, $f(q) < f(r)$. Esto es una contradicción, pues por otro lado se tiene, por ser f creciente, que si $r < q$, entonces $f(r) < f(q)$, llegando a una contradicción. Por lo tanto, (3) se cumple para números irracionales. Por lo tanto,$f(ax) = ax$ para toda x un número real.

Veamos ahora que (3) implica (1). Suponga que $f(x) = ax$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ con $a = f(1)$ y sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y),$$

lo que prueba (1). ■

Podemos aplicar este Teorema de la siguiente manera.

Ejemplo 13. Si la altura de un rectángulo está fija, el área del rectángulo es proporcional a la base. Deducir la fórmula del área de un rectángulo.

Sea b una altura fija y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que para cualquier número real x, $f(x)$ es el área del rectángulo de altura b y base x. Así, f es una función creciente y como un rectángulo de altura b y base nx puede ser descompuesto en n rectángulos de altura b y base x, como se muestra en la Figura 2.17. De este modo $f(nx) = nf(x)$. Entonces por el teorema anterior se tiene que $f(x) = Bx$ con $B = f(1)$ el área del rectángulo de base 1 y altura b. Lo que muestra que el área de un rectángulo de altura fija es proporcional a la base.

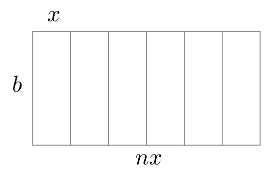


Figura 2.17: En el caso donde $n = 6$, se tiene 6 rectángulos de base x y altura b.

Ahora procedemos de forma análoga para los rectángulos de base fija igual a 1 y altura variable x, se tienen la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x)$ es el área del rectángulo de base 1 y altura x, como antes g es una función creciente y como un rectángulo de altura nx y base 1 puede ser descompuesto en n rectángulos de altura x y base 1, se tiene que $g(nx) = ng(x)$. Por el teorema anterior $g(x) = Ax$, con $A = g(1)$ el área del rectángulo de base 1 y altura 1. Pero si acordamos que el área del cuadrado de lado 1 es 1, tenemos que $A = 1$ por lo que $g(x) = x$. Lo que muestra que el área de un rectángulo de base 1 y altura b es b. Entonces, en la primera parte resulta que $B = b$ y entonces el área de un rectángulo de base a y altura b es igual a ab.

2.4.2. Funciones afines

Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama **función afín** cuando existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

La función **identidad** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es afín. También son afines las **traslaciones** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$, las **funciones lineales**, $f(x) = ax$ y las **funciones constantes** $f(x) = b$.

Es posible, mediante criterios como los que se presentan a continuación, saber que una cierta función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es afín, sin dar la regla de correspondencia de la función, es decir sin que los coeficientes a y b sean dados explícitamente. Por ejemplo, en este caso, se obtiene b como el valor que la función dada asume cuando $x = 0$. El valor $b = f(0)$ a veces se llama el **valor inicial** de la función dada. En cuanto el coeficiente a, puede ser determinado a partir de conocer los valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$ que la función f asume en dos puntos distintos (pero arbitrarios) x_1y x_2. En efecto, conocidos $f(x_1) = ax_1 + b$ y $f(x_2) = ax_2 + b$, se obtienen $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$. Por lo tanto

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

y entonces

$$f(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} x + f(0).$$

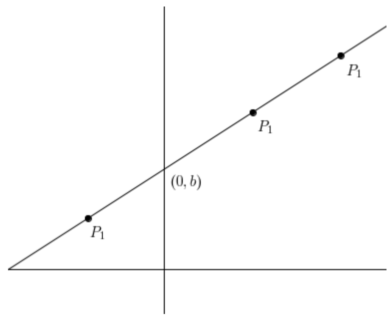


Figura 2.18: Los puntos P_1, P_2 y P_3 son colineales.

Se dan x, $x+h \in \mathbb{R}$ con $h \neq 0$, el número $a = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se llama **tasa de crecimiento (o tasa de variación)** de la función f en el intervalo de extremos x y $x+h$.

Gráfico de una función afín

La gráfica de una función afín $f : x \mapsto ax+b$ es una línea recta. Como se muestra en la Figura 2.18, se toman tres puntos cualesquiera $P_1 = (x_1, ax_1+b)$, $P_2 = (x_2, ax_2+b)$ y $P_3 = (x_3, ax_3+b)$ de la gráfica y si se desea probar que son colineales. Bastará mostrar que dos de las pendientes entre ellos son iguales. La pendiente entre los primeros dos puntos es,

$$m_{P_1P_2} = \frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2-x_1} = \frac{a(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = a,$$

de manera análoga se tiene que $m_{P_2P_3} = a$ y $m_{P_3P_1} = a$, luego el resultado.

La colinealidad también se puede justificar mostrando que la mayor de las distancias $d(P_1,P_2)$, $d(P_2,P_3)$ y $d(P_1,P_3)$ es igual a la suma de las otras dos. Se puede suponer que $x_1 < x_2 < x_3$. Como,

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + a^2(x_2-x_1)^2} = (x_2-x_1)\sqrt{1+a^2}$$

y análogamente $d(P_2,P_3) = (x_2-x_3)\sqrt{1+a^2}$ y $d(P_1,P_3) = (x_3-x_1)\sqrt{1+a^2}$.

Resulta que al sumar las dos últimas, resulta la primera. Por lo tanto los tres puntos arbitrarios son colineales.

En la gráfica que se observa en la Figura 2.18 b es la ordenada del punto donde la recta corta al eje y, el valor de a es la pendiente, la inclinación, o el coeficiente angular de dicha recta con respecto al eje x. Cuando $a > 0$, la recta es ascendente y cuando $a < 0$, la recta es descendente.

En el caso particular de una función afín $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, como su gráfico es una línea recta y como una recta queda enteramente determinada cuando se conocen dos de sus puntos, resulta que basta conocer dos valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$, que la función afín $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ asume en dos números $x_1 \neq x_2$ (escogidos arbitrariamente), para que f quede enteramente determinada, esto es:

Teorema 2.4.3 *Dados dos puntos arbitrarios (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, con $x_1 \neq x_2$, existe una, y solamente una, función afín $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$.*

Demostración Queremos determinar una función afín $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que es de la forma $f(x) = ax + b$, que cumpla con $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ con $x_1 \neq x_2$. Esto es debemos determinar los coeficientes a y b de modo que se tenga,

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2. \end{aligned}$$

El sistema con incógnitas a y b tiene por solución,

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ y } b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Además a y b quedan determinadas de manera única. ■

Evidentemente, la gráfica de una función afín es una recta recta no-vertical, esto es, no es paralela al eje y. Recíprocamente:

Teorema 2.4.4 *Toda recta no-vertical r es la gráfica de una función afín.*

Demostración Tome dos puntos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ en la recta r. Como r no es vertical, se tiene necesariamente $x_1 \neq x_2$, luego por el teorema anterior, existe una función afín $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. La gráfica de f es una recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 luego esa recta coincide con r. ■

Con las notaciones anteriores, tenemos por un lado que la recta que pasa por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ es exactamente la recta r, pero la fórmula de una recta por estos dos puntos es,

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} = ax + b.$$

Si $f(x) = ax + b$, se dice que $y = ax + b$ es la **ecuación** de la recta r.

Luego la recta r tiene por ecuación a $y = ax + b$, es decir la recta r es el lugar geométrico de los puntos (x, y) que cumplen la ecuación. Por otro lado, la función afín $f(x) = ax + b$ tiene por gráfica una recta, de hecho es la recta que tiene por ecuación $y = ax + b$.

Ahora, estamos listos para señalar que una función afín es diferente a una recta. Una función afín es una función cuya regla de correspondencia es un polinomio lineal. La gráfica de una función afín son los puntos en el plano que cumplen la ecuación de una recta.

Caracterización de la función afín

En este libro se entiende por caracterizar a un objeto matemático como encontrar condiciones equivalentes para que se cumpla su definición. En esta sección veremos que condiciones debe cumplir una función para que sea equivalente a una función afín.

Se quiere encontrar una forma de saber cuando a un problema le corresponde como modelo matemático una función afín. La respuesta se puede encontrar en el siguiente resultado.

Teorema 2.4.5 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona inyectiva. Si el aumento $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ dependiese de h, y no de x, entonces f es una función afín. Y recíprocamente si f es afín $f(x+h) - f(x)$ depende linealmente de h.*

Demostración Suponga que la función f es creciente (los demás casos son similares). Entonces φ también es creciente y $\varphi(0) = 0$. Ahora, para cualesquiera $h, k \in \mathbb{R}$ tiene

$$\begin{aligned}
\varphi(h+k) &= f(x+h+k) - f(x) \\
&= f((x+h)+k) - f(x+k) + f(x+k) - f(x) \\
&= \varphi(h) + \varphi(k).
\end{aligned}$$

Así, por teorema Fundamental de la Proporcionalidad, al hacer $a = \varphi(1)$ se tiene $\varphi(h) = a \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Esto quiere decir que $f(x+h) - f(x) = a \cdot h$. Si hacemos $f(0) = b$, resulta $f(h) = ah + b$, es decir f es una función afín. Para el recíproco basta ver que si $f(x) = ax + b$ entonces $f(x+h) - f(x) = ah$. ■

Observación 6 *La condición "$f(x+h) - f(x)$ no depende de x" también se puede expresar como que los aumentos de $f(x)$ son proporcionales a los aumentos de x.*

Habiendo probado la anterior, solo queda demostrar el siguiente resultado que relaciona las funciones afines y las progresiones aritméticas.

Teorema 2.4.6 ((Teorema Caracterización de la función afín)) *Una función monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es afín si, y solo si f transforma cualquier progresión aritmética $\{x_1, x_2, \dots\}$ en una progresión aritmética $\{y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots\}$.*

Demostración Antes que nada, tenga en cuenta que una progresión aritmética es una sucesión de puntos $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ separados entre si por la misma distancia. En otras palabras, la diferencia $d = x_{i+1} - x_i$ es la misma para toda $i \in \mathbb{N}$. De manera que al considerar una función afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, al aplicar f a la progresión aritmética $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$, sucede que la imagen $y_i = f(x_i) = ax_i + b$ para $i = 1, 2, \dots$, representa una progresión aritmética con diferencia: $y_{i+1} - y_i = (ax_{i+1} + b) - (ax_i + b) = a(x_{i+1} - x_i) = ad.$

Para el reciproco; si la función monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, transforma cualquier progresión aritmética $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ en una progresión aritmética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_i = f(x_i), \dots$, queremos mostrar que f es afín. Nos ayudaremos de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(0)$, ésta nueva función también transforma cualquier progresión aritmética en otra progresión aritmética, pero ahora tiene la propiedad $g(0) = 0$, ahora solo bastará probar que g es lineal.
Primero notemos que si x es un número real, entonces $-x, 0, x$ forman una progresión aritmética, por lo que los números $g(-x), 0, g(x)$ son una progresión aritmética, en consecuencia, $g(-x) = -g(x)$.
Ahora, considere $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Como los números $0, x, 2x, \dots, nx$ forman una progresión aritmética, por hipótesis sus imágenes bajo g: $0, g(x), g(2x), \dots, g(nx)$ también forman una progresión aritmética, con diferencia igual a $g(x)$, que resulta de la diferencia entre el segundo y el primer término. Finalmente, $g(nx) = n \cdot g(x)$, cumpliéndose para cualquier número real y cualquier entero $n \geq 0$, pero como $g(-x) = -g(x)$, también es válida la identidad $g(nx) = n \cdot g(x)$, para todo entero n. Pero esta última propiedad, por el teorema fundamental de proporcionalidad, es una condición suficiente para garantizar que g es lineal, esto es $g(x) = ax$ y si $f(0) = b$, se tiene que $f(x) = g(x) + f(0) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

2.5. Sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección, siempre que se considere una ecuación de la forma $ax+by+c = 0$, se asume que $a^2 + b^2 \neq 0$. Lo que significa que los coeficientes a y b no se anulan simultáneamente. Ahora, se define una **solución del sistema lineal**

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 =& 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 =& 0 \end{aligned}$$

como una pareja de números reales (x, y) que satisfacen ambas ecuaciones del sistema. Se dice que el **sistema es indeterminado** si tiene una infinidad de soluciones, el **sistema es imposible** si el sistema de ecuaciones no admite solución, y si el sistema de ecuaciones admite una sola solución es un **sistema determinado**. Tal y como ya se ha mencionado, cada ecuación del sistema tiene como soluciones las coordenadas de los puntos de una recta, de modo que un sistema de ecuaciones solo puede ser indeterminado, imposible o determinado, y solo una de estas tres, de acuerdo a las rectas representadas por cada una de las ecuaciones del sistema, ya sea que coinciden, que son paralelas o que concurrentes, respectivamente, ver Figura 2.19.

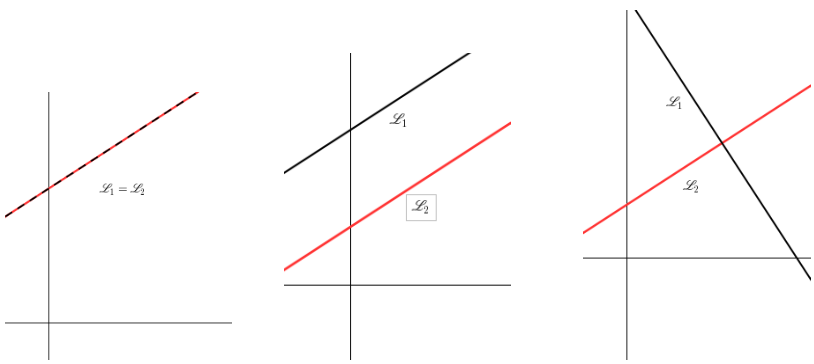


Figura 2.19: Resolviendo simultáneamente sus ecuaciones es posible concluir que dos rectas son iguales, paralelas o concurrentes.

Al sistema de ecuaciones le corresponde el siguiente arreglo que es conocido como la **matriz de coeficientes**

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Evidentemente, dos rectas que poseen más de un punto en común deben coincidir. Luego el sistema es indeterminado si, y solo si sus ecuaciones definen la misma recta, lo que como se ya se vio esto ocurre si, y solo si existe un número $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$y $c_2 = kc_1$, o equivalente mente que se cumple que $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ y $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$, es decir, si los vectores fila $\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$ del arreglo de coeficientes son colineales.

En cambio, el sistema de ecuaciones es imposible cuando las rectas con ecuaciones $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ son paralelas. Esto sucede si, y solo si existe un número $k \neq 0$ tal que $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$ y $c_2 \neq kc_1$, o equivalentemente si, y solo si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

El número $a_1b_2 - a_2b_1$ es **el determinante de la matriz del sistema**.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Del mismo modo, el sistema es determinado cuando no es indeterminado o imposible, esto es cuando las rectas con ecuaciones $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ son concurrentes, es decir, cuando el determinante $a_1b_2 - a_2b_1$ es diferente de cero, o lo que es lo mismo, cuando los vectores fila $\vec{u_1} = (a_1, b_1)$ y $\vec{u_2} = (a_2, b_2)$ de la matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

no son múltiplos uno del otro.

Por otro lado, se dice que un vector $\vec{w}$ es una combinación lineal de dos vectores $\vec{u_1}$ y $\vec{u_2}$, cuando existen x_1 y x_2 tales que $\vec{w} = x_1\vec{u_1} + x_2\vec{u_2}$.
El sistema de ecuaciones analizado anteriormente puede ser visto en términos de los vectores columna $\vec{v_1} = (a_1, a_2)$, $\vec{v_2} = (b_1, b_2)$, $\vec{w} = (-c_1, -c_2)$ de la matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{bmatrix}.$$

Así, el sistema posee solución si, y solamente si, $-\vec{w}$ es combinación lineal de dos vectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$. De manera que si los vectores $\vec{v_1} = (a_1, a_2)$ y $\vec{v_2} = (b_1, b_2)$ son tales que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ entonces cualquier vector $-\vec{w} = (-c_1, -c_2)$ se escribe como combinación lineal única de ellos, y se dice que $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son vectores linealmente independientes.

2.5.1. Sistemas equivalentes

Dos sistemas se dicen equivalentes cuando admiten las mismas soluciones. Por ejemplo, cuando se sustituye una de las ecuaciones con la suma de esta ecuación un múltiplo de la otra, se obtiene un sistema equivalente, es decir, si para toda $k \in \mathbb{R}$, los sistemas siguientes poseen las mismas ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\
(a_2 + ka_1)\,x + (b_2 + kb_1)\,y + c_2 + c_1 &= 0
\end{aligned}
$$

Un método para resolver el sistema es por medio de la eliminación, donde se escoge un valor tal que algunos de los coeficientes $a_2 + ka_1$ o $b_2 + kb_1$ sea cero. Esto da inmediatamente el valor de una de las siguientes incógnitas, el cual es sustituido en la primera ecuación para encontrar el otro valor. Geométricamente se dice que cuando $a_1b_2 - a_2b_1$ es diferente de cero las rectas con ecuaciones $a_1b + b_iy = c_1$ y $a_2b + b_2y = c_2$ se intersecan en un punto (x_0, y_0). Para cualquier número k, haciendo $a_3 = a_1 + ka_2$, $b_3 = b_1 + kb_2$ y $c_3 = c_1 + kc_2$, la recta con ecuación $a_3x + b_3y = c_3$ aún pasa por (x_0, y_0). Luego, si se escoge k de tal modo que se anule uno de los coeficientes a_3 o b_3 equivale a obtener la recta con ecuación $a_3x + b_3y = c_3$ horizontal o vertical, lo cual permite determinar fácilmente una de las coordenadas x_0 o y_0.

2.6. Ejercicios del capítulo 2

Ejercicio 1. Un grupo de música estará de gira durante 180 días. El primer día de la gira es la inauguración y su primer concierto será el tercer día mientras que la última presentación debe ser el último día. El grupo quiere dar 60 conciertos y entre cada concierto quieren descansar la misma cantidad de días. ¿Cuántos días podrán descansar los miembros del grupo entre cada presentación?

Ejercicio 2. Un grupo de investigadores esta probando un nuevo bactericida Acinetobacter baumannii. Para probar la resistencia de la bacteria, a esta sustancia se suministra de bactericida una dosis inicial de 2 micro-gramos. Para otros cultivos de la misma bacteria se probará su resistencia, ahora suministrando un micro-gramo del bactericida mas del suministro administrado al cultivo el día anterior. Y así sucesivamente, hasta que el 35-avo cultivo, que resulto ser el que no resistió la dosis. ¿Qué dosis se le suministró a este último cultivo de bacterias?

Ejercicio 3. Las longitudes de los lados de un triangulo rectángulo forman una progresión aritmética creciente. Muestre que la diferencia de esta progresión es igual al radio de la circunferencia inscrita.

Ejercicio 4. Determine 4 números en progresión aritmética creciente, sabiendo que la suma de los cuatro es 8 y la suma de sus cuadros es 36.

Ejercicio 5. Muestre que la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ es, $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$. En consecuencia, el promedio de los n términos es $\frac{a_1+a_n}{2}$.

Ejercicio 6. Un paciente que padece de esquizofrenia debe someterse a un tratamiento de 31 días de ingesta de Clozapina. Como el medicamento es muy fuerte debe empezar con una dosis alta e ir reduciendo esta misma paulatinamente cada día, de manera que el día 32 ya no la tome. Lo médicamente recomendable es que debe ir reduciendo la Clozapina .5 mg al día. ¿Cuál es la dosis con la que debería comenzar su tratamiento el paciente?.

Ejercicio 7. Muestre que las rectas $ax + by = c$ y $bx - ay = c'$ son perpendiculares, sin importar quienes son a, b, c, c', con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Ejercicio 8. Encuentre el punto de intersección de las rectas $y = ax + b^2$ y $y = bx + a^2$, si $a \neq b$.

Ejercicio 9. Demuestra que solo hay un polinomio $P(x)$ en $\mathbb{N}$ que cumple que $P(1) = 2$ y $P(xy) = P(x)P(y) - P(x + y) + 1$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 10. Encuentre los valores reales x que cumplan la igualdad

$$\frac{a}{x+d} + \frac{b}{x^2 - d^2} = \frac{c}{d - x},$$

con $x \neq -d, d$ y $(a + c) \neq 0$.

Ejercicio 11. Diga cómo son todas las progresiones aritméticas $a_1, a_2, \ldots$ con diferencia d tales que los puntos (k, a_k) y $(k + 1, a_{k+1})$ están separados m unidades.

Ejercicio 12. De un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, que no sea lineal.

Ejercicio 13. (i) Pruebe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la regla: $f(x) = 8x + \operatorname{sen} 2\pi x$, es monótona creciente, y que la progresión aritmética

$$a_1 = x + 1,\ a_2 = x + 2, \ldots$$

para un número real x fijo, es transformada por f en una progresión aritmética,

$$y_1 = f(a_1),\ y_2 = f(a_2), \ldots.$$

(ii) Explique porqué el inciso anterior no contradice el teorema de caracterización de la función afín 2.4.6.

Ejercicio 14. Dadas dos progresiones aritméticas $a_1, a_2, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots$ con diferencias d_1 y d_2, respectivamente, encuentre todas las funciones afines $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(a_i) = b_i$, para toda i en $\mathbb{Z}^+$.

Ejercicio 15. La siguiente reacción química corresponde al amoniaco

$$N_2 + H_2 \to NH_3,$$

y para balancearla, es decir que haya la misma cantidad de moléculas de un lado que de otro, se consideran números enteros x, y y z tales que

$$x\ N_2 + y\ H_2 \to z\ NH_3$$

para que los elementos químicos en la reacción ocurran en cantidades iguales en ambos lados de la reacción. Suponga que $z = k \neq 0$ una constante ¿Qué deben cumplir los números reales x y y para que la reacción química quede balanceada?

2.7. Sugerencias a ejercicios del capítulo 2

Sugerencia al Ejercicio 1. Se d la cantidad de días que descansan. Basta notar que $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3 + d$, $a_3 = a_2 + d = 3 + 2d$, $a_4 = a_3 + d = 3 + 3d$ $\ldots$,$a_{60} = a_{59} + d = 3 + 59d$, pero $a_{60} = 180$. Luego $3 + 59d = 180$, entonces $59d = 177$ y de ahí, $d = \frac{177}{59} = 3$.

Sugerencia al Ejercicio 2. Considere la siguiente tabla de suministro de dosis,

Cultivo	Dosis
1	$a_1 = 2$
2	$a_2 = 2 + 1$
3	$a_3 = a_2 + 1 = 2 + 2 \cdot 1$
$\vdots$	$\vdots$
j	$a_j = a_{j-1} + 1 = 2 + (j - 1) \cdot 1 = j + 1$

Así $a_j = j + 1$ y $a_{35} = 35 + 1 = 36$ mil-gr.

Sugerencia al Ejercicio 3. Considere que los lados del triángulo rectángulo tienen longitudes $a - d$, d y $a + d$ por el teorema de Pitágoras se tiene que $(a + d)^2 = a^2 + (a - d)^2$, ver la Figura 2.20.

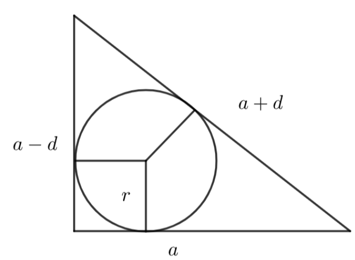


Figura 2.20: El triángulo rectángulo de lados de longitud $a - d$, d y $a + d$

Luego $2ad = a^2 - 2ad$, por lo que $4d = a$.

El área del triángulo rectángulo [1] por un lado es $\frac{a(a-d)}{2}$. Pero también es la suma de los triángulo de bases $a - d$, a, $a + d$ y altura r, esto es $\frac{(a-d)+d+(a+d)}{2}r$. Al igualar los valores del cálculo de áreas y cancelar se tiene que, $d = r$.

Otra manera. Como las tangentes a una circunferencia desde un punto tienen el mismo valor, el dibujo ayuda a ver que $a + d = ((a - d) - r) + a - r$. Ahora reduciendo y usando que $a = 4d$, se llega de nuevo a $d = r$.

[1] Usaremos las siguientes dos fórmulas del triángulo: $\frac{bh}{2}$ y sr, donde b es la base del triángulo, h la altura, s el semiperímetro y r el radio de la circunferencia inscrita.

Sugerencia al Ejercicio 4. Escribimos las condiciones del problema, donde d es la diferencia de la progresión y $a-d$, a, $a+d$ y $a+2d$ son los 4 números de la progresión que hay que determinar.

$$\begin{gathered}(a-d)+a+(a+d)+a+2d=8\\ (a-d)^2+a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2=36\end{gathered}$$

La primera de las ecuaciones se reduce a $2a+d=4$, y la segunda después de sustituir d, se reduce a, $a^2-4a+3=0$. La última ecuación tiene raíces solamente en $a=3$ y $a=1$, de donde d es en cada caso $d=-2$ y $d=1$. Como la progresión es creciente, esto sucede solamente cuando $d=1$ y $a=1$. La progresión aritmética es $-1,1,3,5$.

Sugerencia al Ejercicio 5. Sabemos que los términos primeros n términos de la progresión aritmética son: a_1, $a_2=a_1+d$, $a_3=a_1+2d,\ldots,$ $a_n=a_1+(n-1)d$. Luego la suma de éstos es,

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+(a_1+d)+\cdots+(a_1+(n-1)\,d)=\\ &=na_1+(1+2+\cdots+(n-1))d=na_1+\frac{(n-1)n}{2}d=\\ &=\frac{2na_1+(n-1)nd}{2}=\frac{na_1+n(a_1+(n-1)d)}{2}=\frac{a_1+a_n}{2}n.\end{aligned}$$

Sugerencia al Ejercicio 6. Se puede modelar esta situación con una progresión aritmética : a_0, $a_1=a_0+d$, $a_2=a_0+2d$, $a_n=a_0+nd,\ldots,$ donde la diferencia es $d=-\frac{1}{2}$ y donde la condición inicial a_0 se debe determinar a partir de la información de que $a_{32}=0$. Es decir debemos de resolver $a_{32}=a_0+32d=0$, luego $a_0=-32(-\frac{1}{2})=16$. Por lo tanto el paciente debe empezar el tratamiento con 16 mg.

Sugerencia al Ejercicio 7. Las pendientes m y m' de las rectas $ax+by=c$ y $bx-ay=c'$ son $m=\frac{a}{b}$ y $m'=\frac{b}{-a}$, respectivamente. Luego $mm'=-1$, que es una condición suficiente para que las rectas sean perpendiculares.

Sugerencia al Ejercicio 8. Observe que basta hallar x tal que se cumple la siguiente igualdad $ax+b^2=a^2+bx$, para $a\neq b$. Es decir, se busca la solución de la ecuación

$$(a-b)\,x=(a^2-b^2),$$

que tiene solución, ya que $a - b \neq 0$, y la solución es

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b} = a + b.$$

Por tanto el punto de intersección es, $(a + b, a(a + b) + b^2) = (a + b, a^2 + ab + b^2)$.

Sugerencia al Ejercicio 9. Es muy fácil probar que el polinomio $P(x) = x+1 \in \mathbb{N}[x]$ cumple ambas propiedades. Basta probar que si $Q(x)$ es un polinomio en $\mathbb{Z}$ que cumple que $P(1) = 2$ y $P(xy) = P(x)P(y) - P(x+y) + 1$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Q}$. Entonces $Q(x) = P(x) = x+1$ para toda $x \in \mathbb{Q}$. Para esto, haga $x = 1$ y $y = n \in \mathbb{N}$, entonces

$$Q(n+1) = Q(1(n+1)) = Q(1)Q(n+1) - Q((n+1)+1) + 1 = 2Q(n+1) - Q(n+2) + 1.$$

Y despejando se tiene que $Q(n + 2) = Q(n + 1) + 1$. Como la elección de y fue arbitraria, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $Q(n + 1) = Q(n) + 1$. En consecuencia, para todo $x \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q(x - 1) + 1 \\ &= (Q(x - 2) + 1) + 1 = \dots \\ \dots &= (Q(1) + (x - 2)) + 1 \\ &= 2 + (x - 2) + 1 \\ &= x + 1 = P(x). \end{aligned}$$

Sugerencia al Ejercicio 10. Se observa que $x^2 - d^2 = (x + d)(x - d)$, entonces al multiplicar por $x^2 - d^2$ en ambos lados de la igualdad del problema, se llega a,

$$a(x - d) + b = -c(x + d)$$

y así $(a + c)x = ad - b - cd$. Por lo tanto, $x = \frac{ad-b-cd}{a+c}$, es el único valor que cumple la igualdad.

Sugerencia al Ejercicio 11. Basta considerar la fórmula de distancia entre dos puntos, $m = d(P, Q) = \sqrt{1 + (a_{k+1} - a_k)^2} = \sqrt{1 + d^2}$, entonces $d = \pm\sqrt{m^2 - 1}$.

Sugerencia al Ejercicio 12. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{Si } x \text{ es racional} \\ 3x & \text{Si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Desde luego esta función no es lineal, sin embargo cumple que $f(nx) = nf(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$. Veamos esto último, para $n \in \mathbb{Z}$; si x es racional

$f(nx) = 2nx = nf(x)$, y si x es irracional $f(nx) = 3nx = nf(x)$.

Sugerencia al Ejercicio 13. (i) La función $f(x) = 8x + \text{sen}\ 2\pi x$ es creciente ya que $f'(x) = 8 + 2\pi\text{cos}\ 2\pi x > 0$. La progresión aritmética $a_n = x + n$, se transforma bajo f en $b_n = 8(x + n) + \text{sen}\ 2\pi(x + 8) = 8x + \text{sen}\ (2\pi x + 16\pi) + 8n = 8x + \text{sen}\ 2\pi x + 8n$, que es una progresión aritmética con diferencia $d = 8$ y valor inicial $a_1 = 8x + \text{sen}\ 2\pi x$.

(ii) No contradice, porque no siempre transforma progresiones aritméticas en progresiones aritméticas. Por ejemplo, la progresión aritmética con diferencia $d = \frac{1}{4}$, $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{3}{4}, a_5 = 1$ se transforma en $f(a_1) = 0, f(a_2) = 2 + 1 = 3, f(a_3) = 4 + 0 = 4, f(a_4) = 6 - 1 = 5, f(a_5) = 8$, que no se comporta como una progresión aritmética, ya que no tiene diferencia constante.

Sugerencia al Ejercicio 14. Se quiere probar que hay una función afín $f(x) = ax + b$ tal que $f(a_n) = b_n$, para todo $n \geq 1$. Esto es que,

$$f(a_1 + (n-1)d_1) = a(a_1 + (n-1)d_1) + b = b_1 + (n-1)d_2$$

por lo que, $aa_1 + b = b_1$ y $a(n-1)d_1 = (n-1)d_2$, de donde $a = \frac{d_2}{d_1}$ y $b = b_1 - \frac{d_2}{d_1}a_1$, que están unívocamente determinados.

Sugerencia al Ejercicio 15. Para que los elementos químicos en la reacción se equilibren se debe cumplir que

$$\begin{cases} 2x = k \\ 2y = 3k \end{cases},$$

que tiene por solución $x = \frac{k}{2}$ y $y = \frac{3k}{2}$, donde k es arbitrario, para tener que x, y y k sean enteros basta que k sea par, puede ser $k = 2$ y concluir que la ecuación siguiente está balanceada,

$$N_2 + 3H_2 \to 2NH_3.$$

Capítulo 3

Polinomios cuadráticos

Un **polinomio cuadrático**, de **grado dos**, o un **trinomio de segundo grado** es una expresión algebraica de la forma

$$ax^2 + bx + c, \tag{3.1}$$

donde a se conoce como el **coeficiente cuadrático**, b como el **coeficiente lineal** y el número c como el **término independiente**. De acuerdo a lo señalado en capítulos anteriores se usa $P(x)$ para referirse de manera breve a $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Reducción de un polinomio cuadrático.

Los polinomios cuadráticos de la forma

$$P(x) = x^2 + 2xh + h^2 = (x + h)^2, \tag{3.2}$$

tienen una única raíz, a saber $x = -h$. En cuanto a las raíces de los polinomio de la forma

$$P(x) = (x + h)^2 + k, \tag{3.3}$$

son $x = -h + \sqrt{-k}$ y $x = -h - \sqrt{-k}$. Estos valores son números reales cuando $-k \geq 0$ y $h \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, para encontrar las raíces del polinomio cuadrático (3.1), se puede reescribir este mismo de la siguiente forma

$$P(x) = a(x + h)^2 + k, \tag{3.4}$$

donde k y h son números en $\mathbb{R}$. Probaremos esto usando una construcción geométrica. Considere el polinomio con coeficientes reales $P(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ y observemos primero que

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Supongamos que cada uno de los números reales a, b y c es la longitud de un segmento dado. Lo siguiente será construir un cuadrado con área $a\left(x+h\right)^2 + k$.

Consideremos los cuadriláteros R_1 y R_2 tales que

- R_1 es el cuadrado de lado de longitud x, su área es desde luego x^2.

- R_2 es el rectángulo con lados de longitudes $\frac{b}{a}$ y x; su área es igual a $\frac{b}{a}x$.

Además, se construye el polígono R_3 al dividir por la mitad al rectángulo R_2, como se ve en la Figura 3.1, para formar dos nuevos rectángulos que se acomodan en dos lados contiguos del cuadrado R_1.

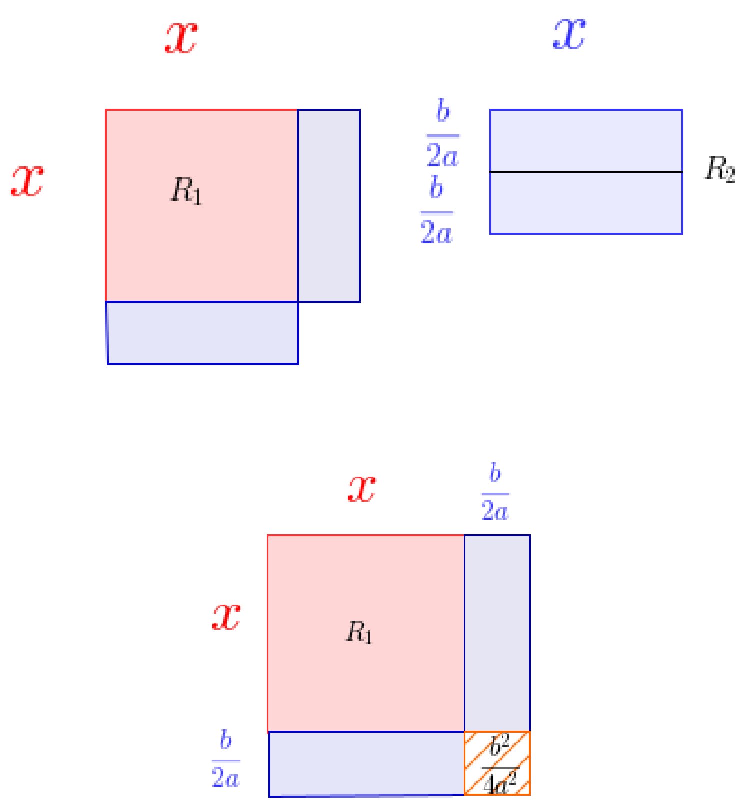


Figura 3.1: El polígono R_3 se forma con el cuadrado R_2 que se muestra en color rojo y los rectángulos azules, que resultan de dividir el rectángulo R_2.

De este modo, se tienen dos rectángulos iguales de lados $\frac{b}{2a}$ y x. Esto resulta en la construcción del polígono cuya área es la diferencia del área del cuadrado de lados de longitud $x+\frac{b}{2a}$ y el área de un cuadrado pequeño de lados de longitud $\frac{b}{2a}$. Entonces, el nuevo polígono tiene área igual a $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x$ unidades cuadradas.

Por lo que,

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c. \tag{3.5}$$

Al hacer $h=\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{4ac-b^2}{4a}$, podemos concluir que $P(x)=ax^2+bx+c=a\,(x+h)^2+k$, nombrando a la expresión del lado derecho de la ecuación (3.4) **forma canónica** del polinomio de segundo grado $P(x)=ax^2+bx+c$.
En cuanto al procedimiento para obtener la la ecuación canónica, éste es conocido como **completar el cuadrado**, pues de la construcción geométrica anterior queda establecido que cada uno de los términos de un polinomio de la forma (3.4) con $h=\frac{b}{2a}$ y $k=\frac{4ac-b^2}{4a}$, se relacionan con el área del cuadrado de la derecha de la Figura 3.1 y el cuadrado pequeño en la figura de la derecha. También, por esta razón a cualquier polinomio de la forma (3.2) se le conoce como **Trinomio cuadrado perfecto**.

Discriminante

Dado un polinomio cuadrático $P(x)=ax^2+bx+c$, la expresión

$$b^2-4ac, \tag{3.6}$$

se conoce como el **discriminante** del polinomio cuadrático $P(x)$ y se denota por

$$\Delta=b^2-4ac.$$

y nos ayuda a la localización de las raíces del polinomio.

De la identidad,

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right], \tag{3.7}$$

desde luego con $a\neq 0$, podemos afirmar que r es un raíz de $P(x)$ si, y solo si

$$\left(r+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}, \tag{3.8}$$

En seguida, se tienen los siguientes casos que van de acuerdo al signo del discriminante:

- Si $b^2 - 4ac > 0$ y $a > 0$ entonces al sacar la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación (3.8) se tiene que
$$r = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
- Si $b^2 - 4ac > 0$ y $a < 0$, entonces
$$r = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
- Si $b^2 - 4ac = 0$ entonces r puede tomar un solo valor, a saber $r = -\dfrac{b}{2a}$, en cuyo caso es una raíz de multiplicidad 2.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, el polinomio $P(x)$ no tiene solución real, pues $(r + \frac{b}{2a})^2$ no puede ser negativo.

Lo anterior, prueba el siguiente teorema.

Teorema 3.0.1 *Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio cuadrático con coeficientes reales. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si $\Delta > 0$, $P(x)$ tiene dos raíces reales, a saber,*
$$x_0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \textit{y su conjugado} \qquad x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
2. *Si $\Delta = 0$, $P(x)$ tiene una raíz real de multiplicidad 2, a saber $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.*
3. *Si $\Delta < 0$, $P(x)$ no tiene raíces reales.*

A propósito, de la expresión

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{3.9}$$

ésta a menudo es referida como **la solución general** de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ o como **la solución por radicales**. Aunque hay mucho por explicar acerca de ésta, esto solo será posible al apoyarse de las secciones posteriores.

Por lo que será después que se comentará a detalle sobre esta expresión.

En el Anexo (ver pag.173) se explica que para un número real positivo a, la raíz cuadrada de $-a$ se puede escribir como $\sqrt{-a} = \sqrt{-1}\sqrt{a} = i\sqrt{a}$, donde $i = \sqrt{-1}$. De manera que al considerar el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ con $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, se cumple que $\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}$. Por lo tanto, por el teorema anterior es inmediato el siguiente resultado.

Corolario 3.0.1 *Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio cuadrático en $\mathbb{R}[x]$ con discriminante $\Delta < 0$. Entonces $P(x)$ tiene dos raíces complejas, a saber*

$$x_0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a},$$

y su conjugado complejo

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Más aún, es posible probar que cualquier polinomio cuadrático se puede reescribir como el producto de dos polinomios lineales por una constante, es decir $P(x) = a(x - x_0)(x - x_1)$ tal que x_0 y x_1 son las raíces de $P(x)$. De hecho, por el resultado conocido como Teorema Fundamental del Álgebra (pag.177), se sabe que un polinomio cualquiera con n raíces reales o complejas se puede expresar como el producto de n factores lineales de grado menor o igual a 1.

Nótese que cuando se trata de un polinomio mónico $P_0(x) = x^2 + bx + c$ esté se reescribe de la forma $P_0(x) = (x - x_0)(x - x_1)$. Lo que significa que $P_0(x)$ tiene las mismas raíces que el polinomio $P(x)$. Por ello, en general, cuando se trata de estudiar las raíces de un polinomio es común trabajar con polinomios mónicos en lugar de considerar su forma general.

Fórmulas de Vieta

Lo siguiente será establecer la relación que hay entre un polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$ y sus raíces, que puede nombrar cómo x_0 y x_1. Para lograr esto, observe que por lo dicho anteriormente y asumiendo el Teorema Fundamental del Álgebra (pag.177) se cumple la siguiente igualdad

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1) = ax^2 - a(x_0 + x_1)x + ax_0x_1,$$

y al comparar los coeficientes se tienen las siguientes igualdades

$$-\frac{b}{a} = (x_0 + x_1) \quad \text{y} \quad \frac{c}{a} = x_0 x_1, \tag{3.10}$$

que se conocen como las **fórmulas de Vieta** del polinomio $P(x)$.

Ejemplo 1. Las raíces del polinomio $x^2 + ax + b + 1 = 0$, son números naturales. Muestre que $a^2 + b^2$ no es un número primo.

Solución. Si r y s son las raíces del polinomio y éstas son números naturales, por la ecuación (3.10), $r + s = -a$ y $rs = b + 1$. Luego es claro que a y b son enteros, y se tiene que $a^2 + b^2 = (r + s)^2 + (rs - 1)^2 = (r^2 + 1)(s^2 + 1)$ es el producto de dos números enteros mayores que 1, por lo que no es un número primo.

Para terminar esta sección, considere nuevamente al polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ con raíces x_0 y x_1. Primero, por las fórmulas de Vieta, es fácil verificar que se cumple la igualdad

$$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + x_1)^2 - 2x_0 x_1 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Tenemos también, en el caso en $a = 1$, es decir cuando $P(x)$ es mónico, que se cumplen,

$$\begin{aligned} x_0 x_1 &= c \\ x_0 + x_1 &= b \\ x_0^2 + x_1^2 &= b^2 - 2c \\ x_0^3 + x_1^3 &= b^2(b - 3c). \end{aligned}$$

La última igualdad se puede probar usando la conocida fórmula del binomio de Newton o desarrollando las expresiones paso a paso, veamos como

$$x_0^3 + x_1^3 = (x_0 + x_1)^3 - 3(x_0 + x_1)(x_0 x_1) = b^3 - 3bc.$$

Las fórmulas de Vieta también sirven para expresar las raíces x_0 y x_1 de cualquier ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Para empezar la raíces de la cuadrática son las mismas que las soluciones de $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Luego, por las fórmulas de Vieta, la suma de las soluciones de esta última ecuación es $\frac{-b}{a}$. Así pues, $\frac{-b}{2a}$ es la media aritmética de x_0 y x_1. Ahora podemos efectuar un cambio de variable maravilloso:

$x \to t - \frac{b}{2a}$, nos lleva la cuadrática a una ecuación cuadrática, en términos de t. Pero más aún como el cambio de variable es una traslación, las nuevas raíces, son el resultado de restarles a ellas $-\frac{b}{2a}$, que es la media aritmética de x_0 y x_1. En consecuencia, la media aritmética de las raíces de la nueva ecuación, así como su suma, son iguales a cero. Y de acuerdo a las fórmulas de Vieta, esto quiere decir que el coeficiente lineal de la nueva ecuación es igual a cero. En efecto,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(t - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(t - \frac{b}{2a}\right) + \frac{c}{a} = t^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$

de donde las soluciones de ésta última son $t_i = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$, con $i = 0, 1$, luego las soluciones de la cuadrática original son $x_i = t_i - \frac{b}{2a}$, que coinciden con la solución por radicales (3.9).

3.1. La parábola

3.1.1. Definición y componentes

La curva $y = ax^2 + bx + c$ corresponde a la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ y se trata de una parábola.
Para definir la parábola, se hace referencia a una recta d, llamada **directriz** y un punto F fuera de ella, llamado **foco**. Luego, la **parábola** es el conjunto de todos los puntos $P = (x, y)$ en el plano que equidistan de F y de d, es decir, que satisface la identidad $d(P; F) = d(P; d)$. Una parábola siempre es simétrica con respecto a la recta llamada **eje de la parábola**, que es una recta que pasa por el foco F y perpendicular a la directriz, de alguna manera dicho eje divide a la parábola en dos partes simétricas. Por otra parte, el **vértice de la parábola** V es el punto que pertenece a la parábola más próximo a la directriz. En consecuencia, el vértice de la parábola es también el punto medio del segmento cuyos extremos son el foco y la intersección del eje de la parábola con su directriz, ver Figura 3.2.

En nuestro caso bastará considerar solo las parábolas verticales. Éstas son aquellas cuyo eje es paralelo al eje y y con vértice en el origen, será el caso más elemental.

Teorema 3.1.1 *La ecuación $x^2 = 4py$ define una parábola vertical cuyo vértice V es el origen, su foco es el punto $F = (0, p)$ y su directriz es la recta horizontal $y = -p$. Además, en esta curva se cumple lo siguiente:*

i) La distancia del foco F al vértice V es igual a $|p|$.

ii) Si $p > 0$ la parábola abre hacia arriba y si $p < 0$ la parábola abre hacia abajo.

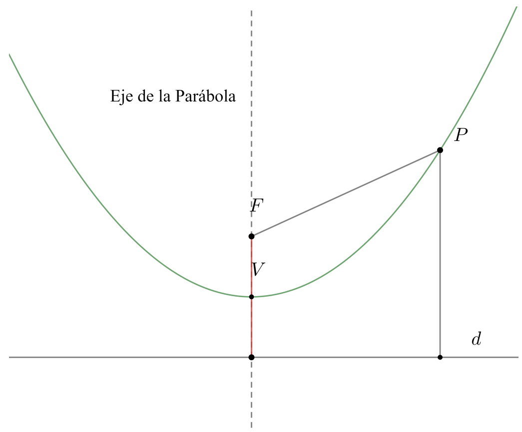


Figura 3.2: La parábola y sus componentes.

Demostración. Como se muestra en la Figura 3.3, tome un punto $P = (x, y)$ en la curva, y sea A el punto de la directriz más cercano a P, desde luego el segmento PA es perpendicular a la directriz.

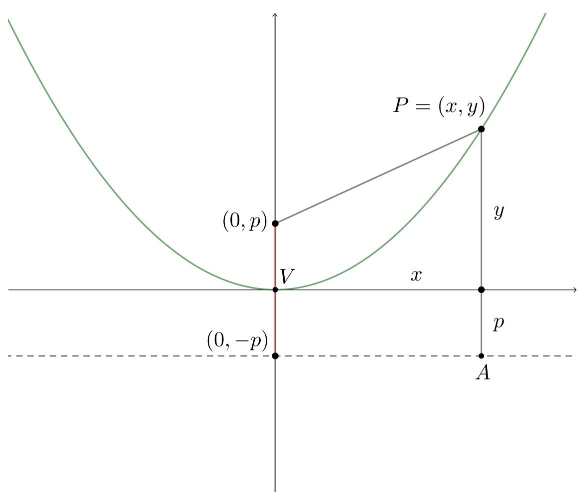


Figura 3.3: El punto $P = (x, y)$ de una parábola con foco $F = (0, p)$.

Entonces, por la definición de parábola, el punto $P = (x, y)$ deberá satisfacer la condición geométrica $d(P, F) = d(P, d)$. Veamos que así sucede, como $d(P, d) = d(P, A)$, usando la fórmula de distancia entre dos puntos 2.18, como $P = (x, y)$ y $A = (x, -p)$ se tiene que $d(P, A) = \sqrt{(x - x)^2 + (y + p)^2} = |y+p|$. Por otro lado, como $F = (0, p)$ se tiene $d(P, F) = \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{4py + (y - p)^2} = \sqrt{(y + p)^2} = |y + p|$, lo que muestra que P está en la parábola.

Recíprocamente, si P es un punto de la parábola, se cumple que $d(P, F) = d(P, d)$, como $d(P, d) = d(P, A) = |y + p|$, se tiene que,

$$\sqrt{(y-p)^2 + x^2} = | y + p |,$$

de manera que al elevar ambos lados de la ecuación se obtiene $(y-p)^2 + x^2 = (y+p)^2$. Por lo tanto, se cumple que $x^2 = 4py$.

Adicionalmente, como el vértice está en el origen, entonces la distancia del vértice al foco es $|p|$. De esta manera, si $p < 0$, se sigue que para todo punto $P = (x, y)$ en la parábola $x^2 = 4py$ se cumple que $y = \frac{x^2}{4p} < 0$, pues $x^2 \geq 0$ y $p < 0$, entonces la parábola abre hacia abajo. De forma similar, si $p > 0$, se cumple que $y = \frac{x^2}{4p} > 0$ y en este caso la parábola abre hacia arriba. ■

Una vez probado esto, es posible demostrar que la gráfica de cualquier función real $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola vertical (es decir, con eje de simetría una recta vertical), con vértice en el punto $V = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$, con foco el punto $F = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} + \frac{a}{4}\right)$ y con directriz la recta $y = c - \frac{b^2}{4a} - \frac{a}{4}$. Para mostrar lo anterior, usaremos la forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$, con $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$; de esta manera bastará considerar solo los siguientes casos:

i) La gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2$ es la curva con ecuación $y = x^2$. Dado que la ecuación se puede reescribir como $x^2 = 4\left(\frac{1}{4}\right)y$. Entonces, por el teorema anterior, haciendo $p = \frac{1}{4}$, la curva $y = x^2$ es una parábola cuyo vértice es el punto $V = (0, 0)$, el foco es el punto $F = (0, \frac{1}{4})$ y la directriz es la recta $y = -\frac{1}{4}$. Además, la parábola abre hacia arriba y la distancia del foco al vértice es igual a $\frac{1}{4}$, ver Figura 3.4.

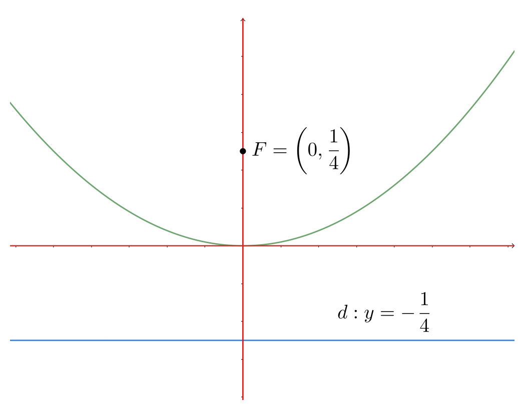


Figura 3.4: La gráfica de la función $f(x) = x^2$, su foco y la directriz.

ii) Veamos ahora el caso de la gráfica de la función $f(x) = ax^2$ con $a \neq 0$. La ecuación es equivalente a $x^2 = \frac{y}{a}$, que por el teorema es una parábola con vértice en el origen, foco en $F = (0, \frac{1}{4a})$ y directriz $y = -\frac{1}{4a}$. Además si $a > 0$ la curva abre hacia arriba y si $a < 0$ la curva abre hacia hacia abajo, ver Figura 3.5.

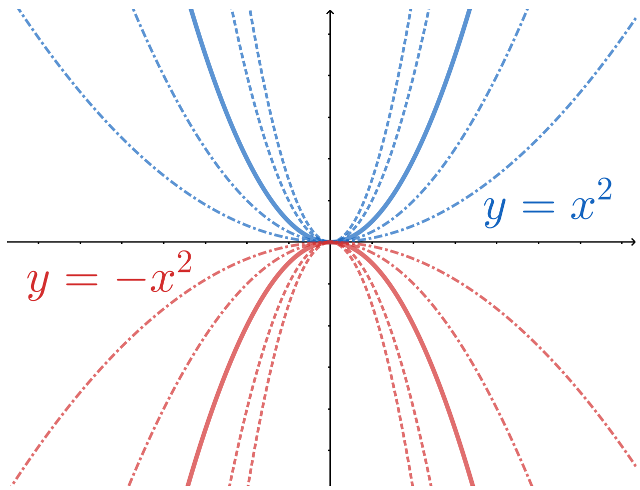


Figura 3.5: Las curvas azules punteadas son las gráficas de $y = ax^2$ con $a > 0$. Si $0 < a < 1$ (respectivamente si $a > 1$) las parábolas caen abajo(respectivamente arriba) de $y = x^2$, la parábola azul con línea continua. Las curvas rojas son las gráficas de $y = ax^2$ con $a < 0$. La línea continua es de $y = -x^2$. Si $-1 < a < 0$ (o $a < -1$) las parábolas caen dentro (o fuera) de la parábola no punteada.

iii) Como tercer caso se considera la función cuadrática $f(x) = a(x-h)^2$, con $a \neq 0$ y h un número real. Si se toma $z = x - h$, la ecuación se transforma en, $y = az^2$, por el caso anterior su gráfica es una parábola con foco $F = (0, \frac{1}{4a})$ y cuya directriz es la recta $y = -\frac{1}{4a}$, pero esto sucede en el plano de los puntos (z, y). Para regresar al plano (x, y) se aplica la traslación horizontal $(x, y) \to (x + h, y)$, por lo que el foco es $F = (h, \frac{1}{4a})$ y la directriz la misma, ver Figura 3.6.

iv) El último caso es el de la función $f(x) = a(x-h)^2 + k$ con $a, h, k \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. La ecuación se puede reescribir como $w = az^2$, donde $w = y - k$ y $z = x - h$. Por el teorema anterior, la gráfica de está última ecuación, es una parábola en el plano (w, z) con foco $F = (0, \frac{1}{4a})$ y con directriz la recta horizontal $w = -\frac{1}{4a}$, ver Figura 3.7. Para regresar al plano (x, y) se aplica la traslación horizontal $(x, y) \to (x - h, y)$ seguida de la traslación vertical $(x, y) \to (x, y + k)$. Por lo que en el sistema de coordenadas (x, y) el foco es $F = (h, k + \frac{1}{4a})$, la directriz $y = k - \frac{1}{4a}$ y el vértice es $V = (h, k)$. De manera que la distancia entre el foco y el vértice de la parábola es $|p|$.

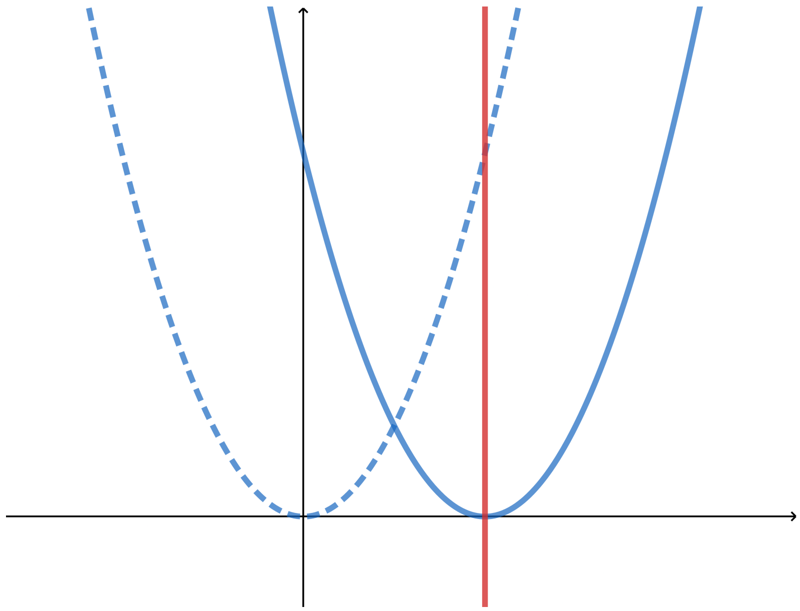


Figura 3.6: La curva azul punteada corresponde a la parábola $y = ax^2$ y la curva azul no punteada corresponde a la parábola $y = a(x-h)^2$.

Finalmente, observe que el teorema 3.1.1 implica que dada una parábola vertical con vértice $V = (h, k)$, si $|p|$ es la longitud entre el foco y el vértice, entonces en el plano (z, w) con $z = x - h$ y $w = y - k$, la curva tiene ecuación $w = 4pz^2$. Esto es más claro cuando se hace notar que el origen del sistema coordenado (z, w) coincide con el punto $V = (h, k)$. De manera que para regresar al sistema de coordenadas (x, y) se aplica la traslación horizontal $(x, y) \to (x + h, y)$ seguida de la traslación vertical $(x, y) \to (x, y - k)$. Después se tiene que la parábola se reescribe en coordenadas (x, y) como $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. Por lo tanto, de los casos probados referentes a la forma de la función $f(x) = a(x - h)^2 + k$ queda probado el siguiente teorema.

Teorema 3.1.2 *La ecuación de una parábola con vértice (h, k) y directriz paralela al eje x, es de la forma*

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

donde $|p|$ es la distancia del foco al vértice. Además, si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba y si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

Así mismo, la gráfica de una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ es la parábola con ecuación $(y - k) = p(x - h)^2$, tal que $h = -\frac{b}{2a}$, $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$ y $p = \frac{1}{4a}$. De donde el vértice de la parábola es el punto $V = (h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

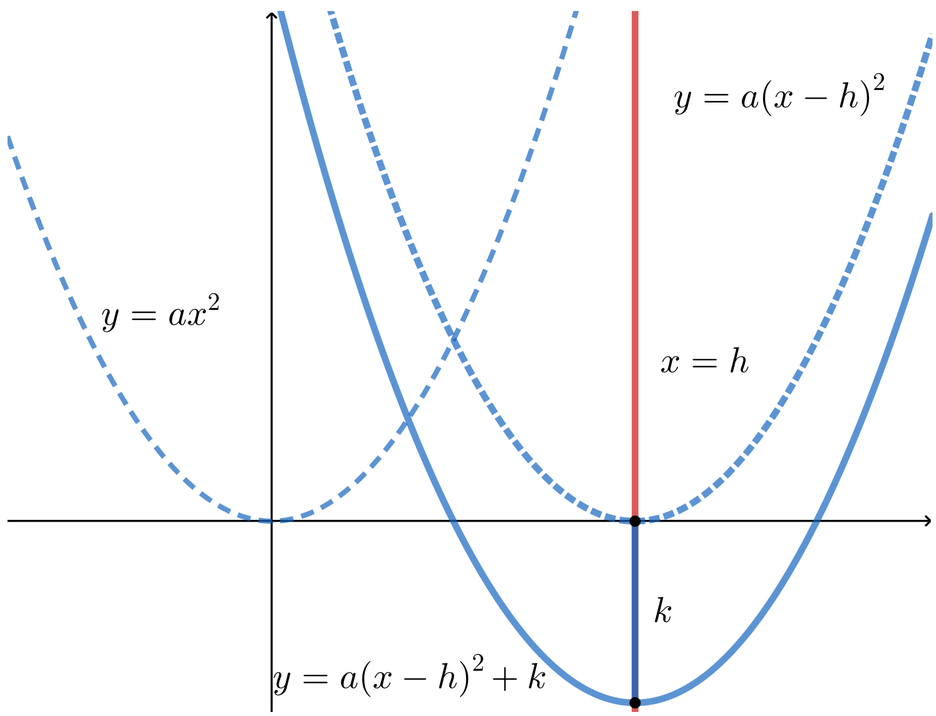


Figura 3.7: A la parábola $y = a(x-h)^2 + k$ se le aplica una traslación vertical y una horizontal, haciéndola coincidir con una curva de la forma $y = 4p'x^2$.

Por otro lado, el polinomio $ax^2 + bx + c$ tiene dos raíces distintas x_0 y x_1 si se cumple que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Como la media aritmética de x_0 y x_1 es igual a $\mu = -\frac{b}{2a}$, los puntos $(x_0, 0)$ y $(x_1, 0)$ de la parábola $y = ax^2+bx+c$ son equidistantes al vértice V. Lo que se reescribe como el siguiente teorema.

Teorema 3.1.3 *Sea $y = ax^2+bx+c$ la ecuación de una parábola. Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, entonces los puntos*

$$\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}, 0\right) \qquad y \qquad \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}, 0\right)$$

pertenecen a la parábola y equidistan del vértice de la parábola $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$. Por supuesto, si $\Delta = 0$, el vértice es $V = (-\frac{b}{2a}, 0)$. Además, si $\Delta < 0$, la parábola nunca corta al eje x.

Por lo tanto, si $f(x) = ax^2 + bx + c$, cuando $f(z) = f(w)$, para $z \neq w$ los puntos $P = (z, f(z))$ y $Q = (w, f(w))$ son simétricos. Más aún, la recta $x = -\frac{b}{2a}$ es el eje de simetría de la parábola $y = ax^2 + bx + c$.

Recordemos que P y Q son **simétricos con respecto a una recta**, llamada **eje de simetría**, si la recta es perpendicular al segmento PQ y pasa por el punto medio de este segmento. Una curva $f(x,y)=0$ es **simétrica con respecto a una recta** cuando es posible encontrar para cada punto de la curva otro punto en la curva, simétrico con respecto a la recta. La recta resulta ser un eje de simetría. La parábola $y=ax^2+bx+c$ es simétrica con respecto al eje de la parábola, ya que si $f(x)=ax^2+bx+c$ se tiene que los puntos $P=(z,f(z))$ y $Q=(w,f(w))$ son simétricos con respecto a la recta $x=-\frac{b}{2a}$, que es el eje de la parábola si, y solo si la recta $x=-\frac{b}{2a}$ es perpendicular a PQ y pasa por el punto medio de este segmento. Esto sucede si, y solo si $f(z)=f(w)$ y $\frac{z+w}{2}=-\frac{b}{2a}$. En el caso de que $z=w=-\frac{b}{2a}$, entonces los puntos P y Q coinciden con el vértice.

En cambio cuando $z\neq w$ las igualdades $f(z)=f(w)$ y $\frac{z+w}{2}=-\frac{b}{2a}$ son condiciones equivalentes. En el sentido de que cada vez que $z\neq w$ y la igualad $\frac{z+w}{2}=-\frac{b}{2a}$ se cumple, se sigue que

$$f(z)-k=(z+h)^2=(w+h)^2=f(w)-k. \tag{3.11}$$

con h y k como en la forma canónica (3.4). Inversamente, si $z\neq w$ y $f(z)=f(w)$, entonces se cumple la igualdad (3.11). De donde se sigue que, $(z+h)=\pm(w+h)$. Y si $(z+h)=(w+h)$, entonces $z=w$, una contradicción. De manera que se debe cumplir que $(z+h)=-(w+h)$. Luego, $\frac{z+w}{2}=-h=\frac{b}{2a}$.

Por último, sean α y β las abscisas de los puntos donde la gráfica de la función $f(x)=ax^2+bx+c=0$ intersecan al eje x, el punto medio del segmento con extremos $(\alpha,0)$ y $(\beta,0)$ es la abscisa del vértice de la parábola $y=ax^2+bx+c$. Si la curva esta completamente arriba del eje x o completamente abajo del eje x la ecuación no tiene raíces. Si el eje x es tangente a la curva, entonces la ecuación tiene una sola raíz de multiplicidad 2. Si $\alpha<x<\beta$, $f(x)$ tiene signo contrario al signo de a. En cambio si $x<\alpha$ o $x>\beta$, $f(x)$ tiene el mismo signo que a. Esta conclusión se ilustra de forma sencilla al estudiar la gráfica 3.8.

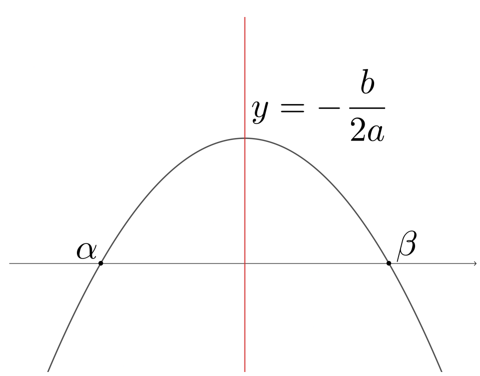


Figura 3.8: La parábola con abscisas α y β las abscisas.

3.1.2. Puntos máximo, mínimos y concavidad

Si la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es la parábola con vértice $V = (h, k)$ que abre hacia arriba (es decir, $a > 0$), entonces en el intervalo (h, ∞) la función es creciente, en efecto, si x y w son números reales que cumplen con $-\frac{b}{2a} = h < w < x$, entonces $-\frac{b}{a} < w + x$, lo que implica que $-b < a(w + x)$ y así se tiene $-b(x - w) < a(w + x)(x - w) = a(x^2 - w^2)$. Por lo que, $f(w) = aw^2 + bw + c < ax^2 + bx + c = f(x)$. Análogamente, la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, h)$.

En el otro caso, donde la gráfica de la función f abre hacia abajo (es decir, $a < 0$), se tiene de forma similar que la función es decreciente en el intervalo (h, ∞) y creciente en el intervalo $(-\infty, h)$. Esto quiere decir que el vértice una parábola vertical es el punto más bajo o más alto que está puede alcanzar, dependiendo de si está abre hacia arriba o hacia abajo, respectivamente.

Cuando $a > 0$, la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede escribir, con la ayuda de la forma canónica de la parábola, de la forma siguiente:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Ahora bien, ya que se cumple que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ y como la expresión $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ es una constante, se concluye que el menor valor de la suma $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}$ se alcanza cuando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Es decir, para $x = -\frac{b}{2a}$ la función alcanza su valor mínimo. Análogamente, si $a < 0$, el valor máximo de la función se alcanza cuando $x = -\frac{b}{2a}$.

Lo anterior se puede escribir en términos de funciones. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que alcanza su **mínimo** en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si $f(x_0) \leq f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. El valor $f(x_0)$ se conoce como *el valor mínimo.* Análogamente $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto *máximo* de la función f si $f(x_0) \geq f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. El valor $f(x_0)$ se conoce como *el valor máximo.*

Con esto en cuenta, el mínimo o el máximo de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se alcanza en el punto $x = -\frac{b}{2a}$, el valor de la función en tal punto es $f(-\frac{b}{2a}) = \frac{4ac-b^2}{4a}$, y es un valor mínimo o un valor máximo dependiendo si $a > 0$ o $a < 0$, respectivamente.

También diremos que la función es **cóncava hacia arriba** si la gráfica de la función es una parábola que abre hacia arriba, y se dirá **cóncava hacia abajo** si la gráfica de la función es una parábola que abre hacia abajo.

3.1.3. Más observaciones sobre la fórmula cuadrática

Lo visto anteriormente sobre la parábola ayuda a sentar la relación que tienen los elementos algebraicos que aparecen en la solución por radicales de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ (3.9), con elementos de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, para el caso donde $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Para empezar, nos centraremos en el caso de la ecuación $x^2+bx+c = 0$. Las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c = 0$ son los puntos donde la parábola $y = x^2+bx+c$ corta al eje x. Notemos que las curvas $y = x^2 + bx$ y $y = x^2 + bx + c$ son parábolas con la misma forma, pues una es el resultado de trasladar verticalmente c unidades la otra. En consecuencia, como el eje de la parábola $y = x^2+bx$ es $x = -\frac{b}{2}$, entonces la misma recta también es el eje de la otra parábola $y = x^2 + bx + c$.

Ahora, como $x_0 = 0$ y $x_1 = -b$, son las raíces de la ecuación $x^2 + bx = 0$, y como el vértice de la parábola $y = x^2 + bx$ es $\left(-\frac{b}{2}, -\frac{b^2}{4}\right)$, se sigue que la distancia del vértice al eje x es de $\frac{b^2}{4}$ unidades. Así mismo y como ya se comentó, $x = -\frac{b^2}{4}$ es el valor máximo o mínimo que puede alcanzar la parábola $y = ax^2 + bx$, dependiendo de si $a < 0$ o si $a > 0$, respectivamente. Por consiguiente, la distancia del vértice de la parábola $y = x^2+bx+c$ al eje x es de $\frac{b^2}{4}-c = \frac{\Delta}{4}$ unidades en el plano.

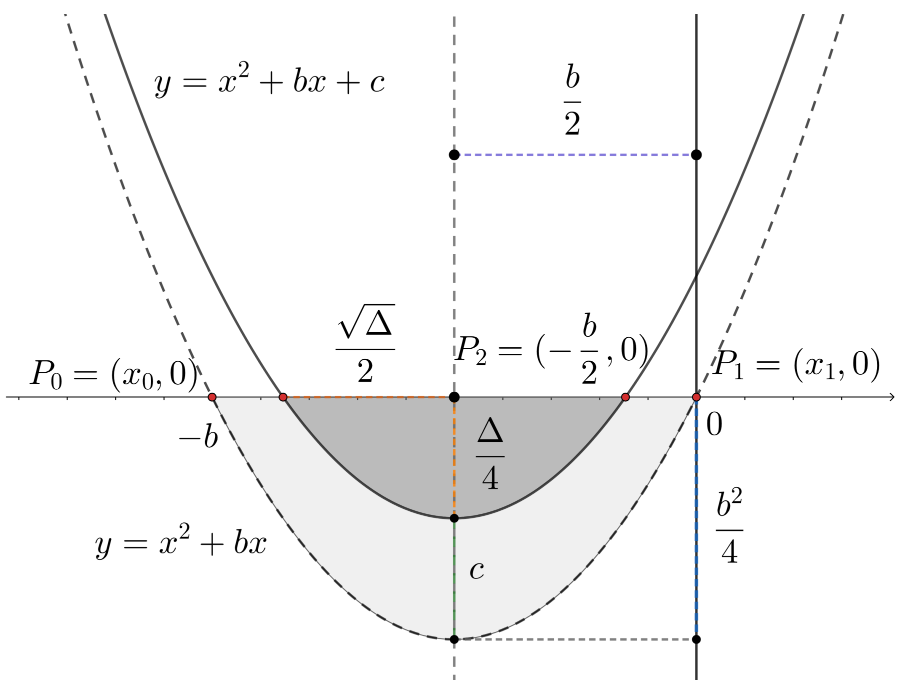


Figura 3.9: Al sumarle c unidades a $y = x^2+bx$ se obtiene la parábola $y = x^2+bx+c$.

En lo que sigue, se referirá a la región entre la parábola y el eje x como el **valle de la parábola**, que se señala en color gris de la Figura 3.9. El valle de la parábola es partido a la mitad por ele eje de la parábola $x = -\frac{b}{2}$. Mientras que los puntos $P_0 = (x_0, 0)$ y $P_1 = (x_1, 0)$ que son las raíces de $y = x^2 + bx$, son los extremos de la **base del valle de la parábola**. Estos puntos equidistan $\frac{b}{2}$ unidades del punto $P_2 = \left(-\frac{b}{2}, 0\right)$, que es precisamente el punto medio de la base del valle de la parábola. De donde se sigue que la base del valle de la parábola $y = x^2 + bx$, mide b unidades en el plano. Este número es conocido como la **longitud del valle de la parábola**. Por otro lado, se sabe que la distancia desde vértice de la parábola $y = ax^2 + bx$ al eje x es de $\frac{b^2}{4}$ unidades. Esté número es la **profundidad del valle de la parábola**. Esto implica que la profundidad del valle es el cuadrado de la mitad de la longitud del valle, sin cambiar de signo. Esta propiedad se mantiene para la parábola $y = ax^2 + bx + c$, con las modificaciones correspondientes, así la longitud del valle de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es $\sqrt{\Delta}$ y la profundidad del valle de esta última es igual a

$$\sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} = \sqrt{\frac{\Delta}{4}}.$$

La mitad de la longitud de este valle es igual a $\sqrt{\frac{\Delta}{2}}$. Además, los puntos $(x_0, 0)$ y $(x_1, 0)$ de la parábola $y = x^2 + bx + c$ son simétricos con respecto a la recta $x = -\frac{b}{2}$. Con estos dos hechos, se tiene que las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por la expresión

$$-\frac{b}{2} \pm \frac{\Delta}{4} = -\frac{b}{2} \pm \frac{b^2}{4} - c = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2},$$

que a su vez coincide con la solución por radicales (3.9). Note que cuando $\Delta = b^2 - 4c = 0$ la longitud y profundidad del valle son iguales a cero. En cuanto al caso donde el discriminante $\Delta = b^2 - 4c$ es negativo, como Δ corresponde a la profundidad del valle elevada al cuadrado, entonces la profundidad del valle es negativa y la ecuación no tiene raíces reales, pues no se forma valle alguno.

Mediante este recurso visual es más fácil convencerse del papel de los coeficientes en una ecuación cuadrática. Al sumar el coeficiente c a una parábola $y = x^2 + bx$ se elimina el valle, en caso de que el determinante sea positivo. Mientras que el coeficiente b crea la separación entre las raíces. A modo de conclusión, pueden identificar a los elementos de la expresión

$$-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c},$$

con los elementos de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ de la siguiente manera:

- $-\frac{b}{2}$; $x = -\frac{b}{2}$ es el eje simétrico de $y = x^2 + bx + c$.
- $\pm$; cuando la expresión asume el signo $-$, se encuentra la abscisa al origen de la parábola del lado izquierdo de la parábola $y = x^2 + bx + c$, y cuando se asume el signo $+$ se encuentra la abscisa al origen de la parábola del lado derecho de esta curva.
- $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$; es la mitad de la longitud del valle de $y = x^2 + bx + c$.
- $\frac{b^2}{4}$; es la longitud del valle de $y = x^2 + bx$.
- c; es la cantidad en unidades para elevar la curva $y = x^2 + bx$ y transformarla en $y = x^2 + bx + c$.

3.1.4. Funciones cuadráticas congruentes

Una función $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dirá que es **rígida** si para cualesquiera números $x, y \in \mathbb{R}$, cumple con

$$| T(x) - T(y) | = | x - y | .$$

No es difícil verificar que T es rígida si, y solo si es de la forma $T(x) = x + h$ con h un real fijo o bien de la forma $T(x) = -x + k$ con k un real fijo. Denotamos por T_h a la función $T_h(x) = x + h$ y por S_k a la función $S_k(x) = -x + k$.

Hemos visto que,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

luego si $g(x) = ax^2$ lo anterior se puede escribir como,

$$f(x) = T_{\frac{4ac-b^2}{4a}}\left(g(T_{\frac{b}{2a}}(x))\right) = \left(T_{\frac{4ac-b^2}{4a}} \circ g \circ T_{\frac{b}{2a}}\right)(x).$$

Dos funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ son **congruentes** si existen funciones rígidas T y S tales que $f(x) = (S \circ g \circ T)(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es congruente con $g(x) = ax^2$. El siguiente resultado se sigue de lo anterior.

Teorema 3.1.4 *Las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2+bx+c$ y $g(x) = a'x^2+b'x+c'$ son congruentes si, y solo si $a' = \pm a$.*

3.2. Más sobre las raíces de la cuadrática

3.2.1. El método de los babilonios para aproximar la raíz cuadrada

El método usado por los babilonios para hallar una aproximación a la solución de la ecuación cuadrática $x^2 - 2 = 0$ es un procedimiento de *Regla falsa* (*Regula falsi*). Lo que quiere decir que primero se propone un valor adecuado para x para luego dar una mejor aproximación e ir afinando ésta por medio de un procedimiento algorítmico. Por ejemplo, en este problema se puede intentar primero con $x = \frac{3}{2}$. De tal manera que al remplazar este valor en la ecuación se tiene que

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4}.$$

Por supuesto $x = \frac{3}{2}$ no es una solución de la ecuación. Pero, esto confirma que ciertamente cuando $x = \frac{3}{2}$, se tiene un valor mayor que $\sqrt{2}$. Esto escrito en términos algebraicos quiere decir que se cumple la siguiente desigualdad :

$$\sqrt{2} < \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Esto en lenguaje moderno, significa que $\frac{3}{2}$ es una cota superior. Ahora, se debe encontrar un número menor que $\frac{3}{2}$ tal que al multiplicarlo por $\frac{3}{2}$ se tenga como resultado el número 2. Dicho número es $\frac{4}{3}$, pues éste es el que cumple que

$$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = 2.$$

Llegados a este punto, es importante observar que

$$\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$$

Más aún, $\frac{4}{3} < \sqrt{2}$. Por lo tanto,

$$\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

Ahora, si x es igual al promedio aritmético de la cota inferior y la cota superior se tiene que

$$x = \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{17}{12}$$

En este caso,

$$x^2 - 2 = \frac{289}{144} - 2 = 2.00069.$$

Luego, se repite el procedimiento para encontrar un número que multiplicado por $\frac{17}{12}$ dé como resultado 2. Observe que $\frac{24}{17} < \frac{17}{12}$ y $\frac{17}{12}\frac{24}{17} = 2$. Luego, reduciendo el rango de valores se observa que

$$\frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$$

Así puede obtener la media aritmética, y nuevamente obtener un valor más adecuado para x, a saber:

$$x = \frac{\frac{24}{17} + \frac{17}{12}}{2} = \frac{577}{408}.$$

Ahora, en este caso se tiene que

$$x^2 - 2 = 2.0000006 - 2 = 0.0000006.$$

Lo que indica que se encontró un valor, el cual es una aproximación muy cercana a $\sqrt{2}$ y por lo tanto tenemos una buena aproximación a la solución de la ecuación.

3.2.2. La raíz cuadrada de un número real

Lo siguiente es un método más moderno que el presentado anteriormente. Con éste se puede obtener la raíz cuadrada de cualquier número real positivo a sin la necesidad de adivinar un número antes. Primero, considere $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $0 < \sqrt{a} < x_0$ o de forma equivalente que se cumpla que $a < x_0^2$.

Si $\sqrt{a} < x_0$, al multiplicar ambos lados de esta desigualdad por $\sqrt{a}$ se tiene que: $a < x_0\sqrt{a}$, por lo que:

$$\frac{a}{x_0} < \sqrt{a} < x_0,$$

Como a y x_0 son números positivos, se tiene que $\frac{a}{x_0}$ también es positivo. Ahora, se probará que algunos de los dos números $x_1 = \frac{x_0 + \frac{a}{x_0}}{2}$ y $\frac{a}{x_1}$ estarán mas cercanos a $\sqrt{a}$ que x_0 o $\frac{a}{x_0}$. En efecto, estos números quedan acomodados del modo siguiente:

$$\frac{a}{x_0} < \frac{a}{x_1} < \sqrt{a} < x_1 < x_0 \tag{3.12}$$

Para esto solo hace falta que:

$$\sqrt{a} < x_1 < x_0.$$

Pues el hecho de que se cumpla dicha desigualdad, implica que

$$\frac{a}{x_0} < \frac{a}{x_1} < \sqrt{a}.$$

Como se cumple que $x_1 > \sqrt{a}$ si, y solo si $x_1^2 > a$, será suficiente comprobar esta última. Pero:

$$x_1^2 - a = \left(\frac{x_0 + \frac{a}{x_0}}{2}\right)^2 - a = \frac{x_0^2 + 2a + (\frac{a}{x_0})^2}{4} - \frac{4a}{4} = \frac{x_0 - 2a + (\frac{a}{x_0})^2}{4} = \left(\frac{x_0 - \frac{a}{x_0}}{2}\right)^2 > 0$$

luego $\sqrt{a} < x_1$. De $a < \frac{a+b}{2} < b$ para cualesquiera números reales a y b no negativos, se sigue que $x_1 < x_0$. Además

$$|x_1 - \sqrt{a}| < \frac{1}{2}\left|x_0 - \frac{a}{x_0}\right|. \tag{3.13}$$

Repita el proceso y defina x_2 como:

$$x_2 = \frac{x_1 + \frac{a}{x_1}}{2}$$

En consecuencia,

$$\frac{a}{x_1} < \frac{a}{x_2} < \sqrt{a} < x_2 < x_1 \tag{3.14}$$

y

$$|x_2 - \sqrt{a}| < \frac{1}{2}\left|x_1 - \frac{a}{x_1}\right| < \frac{1}{4}\left|x_0 - \frac{a}{x_0}\right| \tag{3.15}$$

Al repetir n veces este procedimiento, se obtiene la lista de números $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tales que el $j-$ésimo término se expresa como

$$x_j = \frac{x_{j-1} + \frac{a}{x_{j-1}}}{2}. \tag{3.16}$$

De donde se cumple que

$$\frac{a}{x_{j-1}} < \frac{a}{x_j} < \sqrt{a} < x_j < x_{j-1} \tag{3.17}$$

con

$$0 < |x_j - \sqrt{a}| < \frac{1}{2}\left|x_{j-1} - \frac{a}{x_{j-1}}\right| < \frac{1}{2^j}\left|x_0 - \frac{a}{x_0}\right| \tag{3.18}$$

De esta manera puede aproximar a $\sqrt{a}$ con un grado de aproximación que deseé. Pues, bastará tomar j adecuado al grado de aproximación que se busca, lo que se garantiza ya que $\frac{1}{2^j}$ converge a cero.

En cuanto a la raíz de un número real negativo, es posible dar una interpretación geométrica haciendo uso del plano complejo. Suponga que z es una de la raíces de la ecuación $x^2 + a = 0$, con $a > 0$ real. En el anexo, se prueba que al considerar a z como un vector complejo, el resultado de rotar a z su mismo ángulo en sentido positivo y extenderlo el doble de su tamaño da como resultado el vector de entradas $(-a, 0)$. De manera que z debe estar en el eje imaginario, es decir que la parte real de z ha de ser igual a cero. En efecto, $z = \pm i\sqrt{a}$.

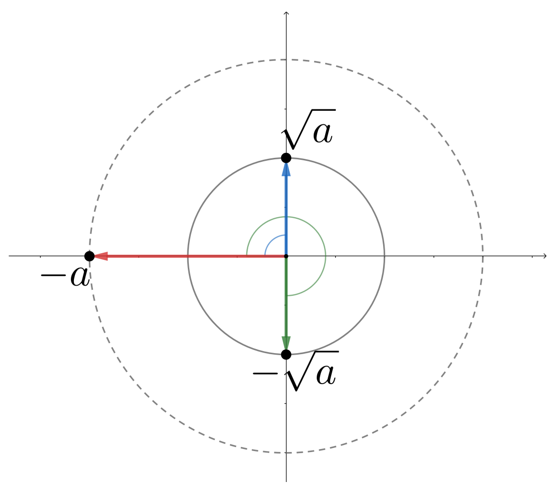


Figura 3.10: Al rotar $z = \pm i\sqrt{a}$, su argumento arg$z$, en sentido positivo y multiplicar su tamaño por $||z||$ da como resultado $(-a, 0)$.

3.2.3. Solución de ecuaciones cuadráticas en la antigüedad

Babilonios

Los problemas más antiguos relacionados a las soluciones de una ecuación de segundo grado, no necesariamente corresponden al caso más elemental. De hecho, los mismos babilonios proponían el siguiente problema: dadas dos cantidades reales s y p, se debe hallar dos números cuya suma sea igual a s y su producto igual a p. En términos geométricos esto equivale a determinar los lados de un rectángulo conociendo el semi-perímetro s y su área dada por p. Así, los números buscados son las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 - sx + p = 0$.

Nosotros sabemos que por las formulas de Vieta, si x_0 es una de las soluciones de la ecuación, entonces la otra solución debe ser $x_1 = s - x_0$. Mientras que el producto de x_0 y x_1 es igual a $p = x_0 x_1$.

Por supuesto, los babilonios no conocían las formulas de Vieta como tal (ni usaban esta notación), pero ellos expresaban su procedimiento de la siguiente manera: "eleve al cuadrado la mitad de la suma, sustraiga el producto y extraiga la raíz cuadrada de la diferencia. Sume al resultado la mitad de la suma. Esto dará el mayor de los buscados. Sustraiga de la suma para obtener el otro número". Lo que en notación moderna quiere decir, que en efecto las soluciones de la ecuación son

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

y

$$s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

Lamentablemente, no queda registro del argumento que los llevó a esta conclusión pero hay indicios de que pudo haber sido algo semejante a lo que se describirá a continuación.

El método que pudieron usar los babilonios consiste en primero suponer que α y β son los números buscados y asumir sin perdida de generalidad que $\alpha \leq \beta$. No era difícil para aquellos matemáticos, probar del mismo modo que hicimos aquí que los números α y β son equidistantes de la media aritmética $\frac{s}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Ahora, siempre que se conoce la diferencia

$$d = \beta - \left(\frac{s}{2}\right) = \left(\frac{s}{2}\right) - \alpha$$

se pueden obtener los dos números $\alpha = \frac{s}{2} - d$ y $\beta = \frac{s}{2} + d$. No obstante, también se cumple que

$$p = \alpha\beta = \left(\frac{s}{2} - d\right)\left(\frac{s}{2} + d\right) = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2,$$

luego $d^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p$ y $d = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$
De ahí que

$$\alpha = \frac{s}{2} - d = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

y

$$\beta = \frac{s}{2} + d = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Es preciso decir que los babilonios no tenían en cuenta los números negativos. Pero nosotros no debemos ignorar los casos en que $\frac{s}{2} < p$, que inevitablemente conducen a los números complejos.

Griegos

En cuanto a la época de los griegos había una construcción para encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 + bx - c^2 = 0$, con b y c números reales positivos. Primero, se construía un triángulo isósceles OPQ con base PQ de longitud b y con altura medida desde O de longitud igual a c. Luego, se traza una circunferencia con centro O que pase por los vértices P y Q del triángulo.

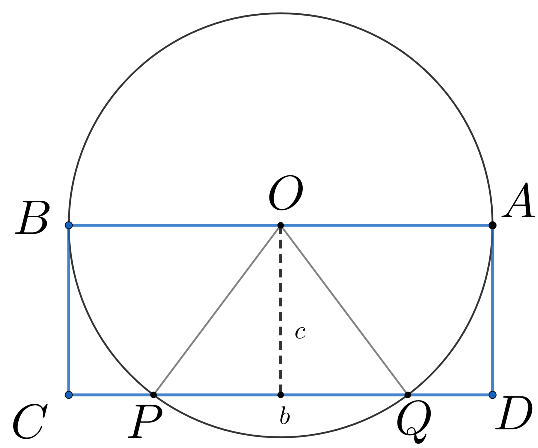
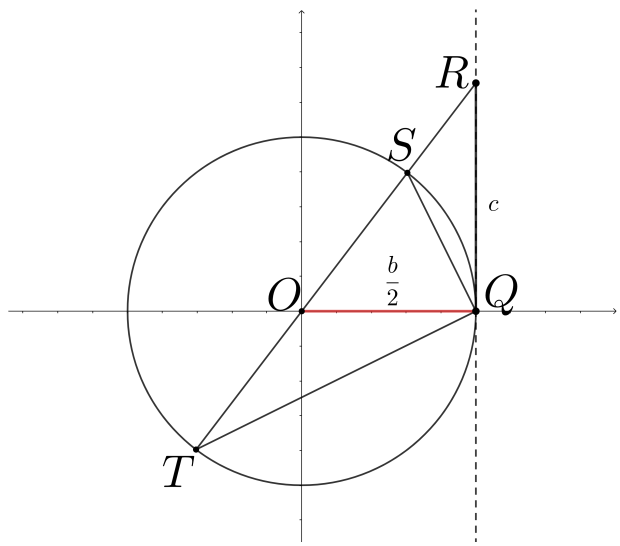


Figura 3.11: La solución geométrica de la cuadrática, dada por los griegos.

Sea AB el diámetro de la circunferencia paralelo a PQ y construya el rectángulo $ABCD$. La raíz positiva de $x^2 + bx - c^2$ es igual a la longitud del segmento CP y la otra raíz (que es negativa) es igual al negativo de la longitud del segmento CQ.

Se puede comprobar esto usando las fórmulas de Vieta, pues si α y β son las raíces del polinomio, entonces por las fórmulas mencionadas $\alpha + \beta = -b$ y $\alpha\beta = -c^2$, por lo que debe de haber una raíz negativa. Ahora, considere los triángulos rectángulos BCP y QCB. Estos son semejantes, ya que $\angle PBC = \angle BQC$. Entonces, se tiene que $CP \cdot CQ = BC^2 = c^2$, luego $CP \cdot (-CQ) = -c^2$. Por otro lado, como $CQ = CP + b$, se tiene que $CP - CQ = -b$. Luego, CP y $-CQ$ cumplen las relaciones de Vieta, por lo tanto estos números son las raíces de la ecuación dada.

No solo los griegos hicieron una construcción geométrica para la ecuación $x^2 + bx - c^2 = 0$, con b y c números reales positivos. Rene Descartes propuso la siguiente solución: trace una circunferencia con centro en O y radio $\frac{b}{2}$. Luego, trace QR, una tangente a la circunferencia en Q, con $QR = c$. Sea S y T los puntos donde la recta por R y O corta a la circunferencia.



El polinomio cuadrático tiene una raíz positiva y otra raíz negativa. En la figura la longitud del segmento RS es igual a la raíz positiva y la raíz negativa es igual al negativo de la longitud del segmento RT.

Nuevamente, por las fórmulas de Vieta, si α y β son las raíces del polinomio, entonces $\alpha + \beta = -b$ y $\alpha\beta = -c^2$, por lo que debe de haber una raíz negativa. Considere los triángulos RQS y RTQ, éstos son semejantes, ya que comparten el ángulo en el vértice R y $\angle RTQ = \angle RQS$. Entonces, se tiene que $RT \cdot RS = RQ^2 = c^2$, luego $RS \cdot (-RT) = -c^2$. Por otro lado, como $RT = RS + b$, se tiene que $RS + (-RT) = -b$. Luego, $-RT$ y RS cumplen las relaciones de Vieta, por lo tanto éstos números son la soluciones de la ecuación dada.

3.3. Propiedades de la función cuadrática

Se dice que una función f definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es una **función cuadrática** si existen tres números reales $a \neq 0$, b y c, tales que para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Antes de caracterizar a este tipo de funciones, mostramos que los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ quedan enteramente determinados por los valores que ésta toma.

Teorema 3.3.1 *Si se tienen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones cuadráticas definidas por $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, $a' \neq 0$, b, b', c y c' números reales tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $a = a'$, $b = b'$ y $c = c'$.*

Demostración. Si $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$, para toda $x \in \mathbb{R}$. Entonces al hacer $x = 0$, se tiene que $c = c'$. Además la igualdad se reduce a $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, es cierta esta identidad para todo número real $x \neq 0$. De donde se sigue que

$$ax + b = a'x + b',$$

para $x \neq 0$, un número real. Ahora, usando esta igualdad con $x = 1$ y $x = -1$, se tienen las siguientes identidades: $a + b = a' + b'$ y $-a + b = -a' + b'$. Resolviendo estas dos igualdades simultáneamente, se concluye que $a = a'$ y $b = b'$. ■

Vamos a encontrar una función cuadrática de manera que su gráfica pase por tres puntos no colineales. Supongamos que los puntos son $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ y $C = (x_3, y_3)$, con x_1, x_2 y x_3 distintos. Buscamos una función cuadrática que pasa por estos mismos, es decir, hace falta mostrar que existen tres números reales a, b y c tales que

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c &= y_3 \end{cases}$$

Restando a la segunda igualdad la primera del sistema de ecuaciones, se tiene que,

$$a\left(x_2^2 - x_1^2\right) + b\left(x_2 - x_1\right) = y_2 - y_1. \tag{3.19}$$

Además, como $x_2 - x_1 \neq 0$ se sigue que,

$$a\left(x_2 + x_1\right) + b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{3.20}$$

De forma análoga, se tiene que

$$a\left(x_3 + x_1\right) + b = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}. \tag{3.21}$$

Luego, restando (3.21) menos (3.20), se obtiene que

$$a\left(x_3 - x_2\right) = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Pero como $x_3 - x_1 \neq 0$, entonces el número real fijo a se expresa en términos de las entradas de los tres puntos dados,

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]. \tag{3.22}$$

Luego, se remplaza a en (3.19) y se obtiene b en términos de las entradas de los tres puntos dados, a saber:

$$b = \frac{1}{x_2 - x_1}\left[(y_2 - y_1) - \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]\right] \tag{3.23}$$

Finalmente, para obtener c en términos de las entradas de los tres puntos dados se remplazan a y b en cualquiera de las ecuaciones del sistema, digamos en la primera ecuación. Entonces,

$$c = \frac{x_1(y_1 - y_2)}{x_2 - x_1} - \left[\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]\left[\frac{x_1}{(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)} - \frac{x_1^2}{x_3 - x_2}\right] \tag{3.24}$$

Hasta aquí se ha probado que dados tres números reales distintos x_1, x_2 y x_3; y otros tres números reales y_1, y_2 y y_3 existe una y solamente una terna de números reales a, b y c tales que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ cumple que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ y $f(x_3) = y_3$. No obstante, aún hace falta probar que $a \neq 0$. De lo contrario, la expresión $ax^2 + bx + c$, en realidad no sería un polinomio de segundo grado. Ahora, por (3.22), se tiene que $a = 0$ si, y solo si

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Por lo visto sobre colinealidad en el capítulo anterior (pag.55), se sabe que esta última igualdad se cumple si, y solamente si $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ y $C = (x_3, y_3)$. son puntos colineales, lo que es una contradicción con lo supuesto desde un inicio. Quedando así probada la siguiente afirmación.

Teorema 3.3.2 *Si x_1, x_2 y x_3 tres números reales distintos, y además y_1, y_2 y y_3 son números reales tales que los puntos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ y $C = (x_3, y_3)$ no son colineales en $\mathbb{R}^2$, entonces existe una, y solo una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ y $f(x_3) = y_3$.*

Más adelante en la sección 5.5 se da una construcción explícita de la función cuadrática del teorema anterior, que es:

$$f(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3,$$

tal función se conoce como la fórmula de interpolación de Lagrange.

Una aplicación en el área de la física

La caída de un cuerpo en el vacío es un tipo de movimiento uniformemente acelerado (M.U.A) que se modela matemáticamente por medio de una función cuadrática.

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c, \tag{3.25}$$

donde $f(t)$ es la posición del objeto en el instante t, la constante a es la aceleración experimentada por el objeto, b es la velocidad inicial, es decir la velocidad en $t = 0$. Mientras que c es la posición inicial del objeto. En general, para cualquier función f que modele algún tipo de movimiento, la expresión

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

es el cociente de espacio recorrido por el objeto entre el tiempo que dura el recorrido. Esta expresión recibe el nombre de velocidad media del objeto en el intervalo $[t, t+h]$. En particular, en el caso de que f sea la función (3.25), la velocidad media del movimiento entre los instantes t y $t + h$ es igual a

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{\frac{1}{2}a(t+h)^2 + b(t+h) + c - \frac{1}{2}at^2 - bt - c}{h} = at + b + \frac{ah}{2}.$$

De modo que para valores de h lo suficientemente pequeños, la velocidad media se aproxima al valor $at + b$. Siendo esta la razón de que $v(t) = at + b$ sea la velocidad en el instante t del objeto en M.U.A. Note que en $t = 0$, sucede que la velocidad inicial es igual a $v(0) = b$. Además, para cualesquiera valores que puedan tomar h y t, el valor de a está dado por

$$a = \frac{v(t+h) - v(t)}{h},$$

lo que en otra palabras quiere decir que la aceleración es constante (a saber el valor a), así la tasa de variación de la velocidad del objeto en M.U.A. es constante. Por eso a este tipo de movimiento se le llama uniformemente acelerado, y la aceleración es el valor constante a.

Ejemplo 2. Son muchas las situaciones en las que puede identificar el movimiento de algún objeto, como una partícula que se mueve en el plano cartesiano. En este caso, suponga que una partícula parte del punto inicial $P_0 = (0, -6)$, con velocidad de 5 metros por segundo, y cuya aceleración corresponde a -2 metros por segundo al cuadrado. Es posible calcular el tiempo que pasa hasta que la trayectoria de la partícula cambia de sentido y regresa al punto de partida P_0. Esto debido a que la función que da la posición de la partícula, en función del tiempo, es

$$f(t) = -t^2 + 5t - 6.$$

De donde, el valor máximo de $f(t)$, y por lo tanto también el valor máximo que puede alcanzar de la partícula en el plano, se alcanza cuando $t = \frac{-5}{-2}$ =2.5 segundos. Lo que coincide al calcular el tiempo t, cuando la velocidad $v(t) = -2t+5$ del objeto es igual a cero.

Justamente, una aplicación común de lo anterior es considerar un proyectil, que por facilidad puede imaginar en el plano. También por facilidad puede despreciar la aceleración de la gravedad así como la resistencia del aire. Teniendo en cuenta que en este caso la velocidad se expresa por un vector, cuya longitud es conocida como velocidad escalar, es decir la velocidad recorrida en una distancia recorrida entre cierto tiempo. Así mismo, la dirección y el sentido del vector indican la naturaleza del movimiento del objeto. Además, puede suponer que origen del plano es el punto de partida del proyectil, donde el eje y es la vertical que pasa por ese punto que es perpendicular al suelo, que corresponde al eje x. Siendo así, la velocidad inicial del proyectil es el vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y la primera coordenada v_1 da la velocidad de la componente horizontal del movimiento, esto es la proyección del proyectil sobre el eje x.

Este es un caso de movimiento uniforme, pues la gravedad es la única fuerza que actúa sobre el proyectil. Y esta última no posee componente horizontal, lo que quiere decir que ninguna fuerza actúa sobre el movimiento horizontal.

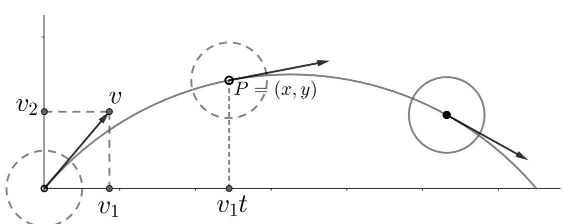


Figura 3.12: El tiro libre de un objeto es una parábola. Aquí el objeto es el punto negro con velocidad v.

Por lo tanto, si $P = (x, y)$ es la posición del proyectil en el instante t se tiene $x = v_1 t$ y al mismo tiempo, la aceleración de la gravedad que actúa sobre el objeto corresponde $-g$. Por lo tanto, la componente vertical del movimiento P es un movimiento uniformemente acelerado sobre el eje y, con aceleración $-g$ y la velocidad inicial es v_2. Teniendo en cuenta esto, la segunda coordenada del punto $P = (x, y)$ es igual a $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t$, en el instante t. Note que y no tiene término constante porque $y = 0$ cuando $t = 0$.

Finalmente, como $x = v_1 t$, $t = \frac{x}{v_1}$, remplazando este valor en y se tiene que

$$y = ax^2 + bx,$$

donde $a = \frac{-g}{2v_1^2}$ y $b = \frac{v_2}{v_1}$. Lo que demuestra que la trayectoria del proyectil es una parábola.

Ejemplo 3. Se sabe que la aceleración de la gravedad es un valor aproximada a la constante $g = 9.8m$ seg^2, que a su vez es la razón de una progresión aritmética formada por las distancias recorridas de cada segundo de un objeto en caída libre. El teorema 3.4.2 asegura que la altura $f(t)$ del cuerpo en caída libre después de t segundos desde inicio de la caída del objeto en cuestión es la función cuadrática $f(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$, donde h es la altura del punto exacto donde inició la caída libre del cuerpo.

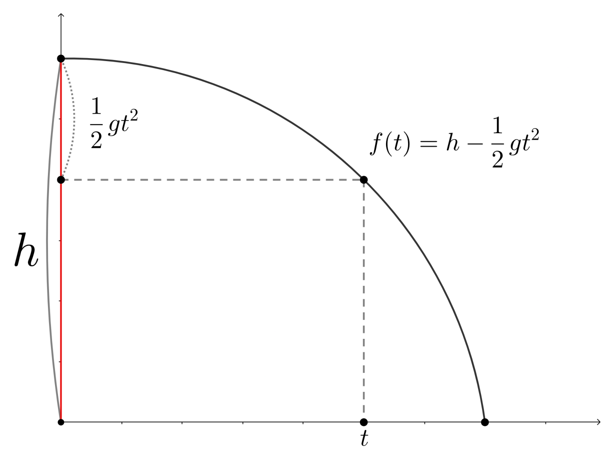


Figura 3.13: La gráfica que representa la caída de un objeto desde la altura h.

3.4. Caracterización de las funciones cuadráticas

Diremos que una sucesión $x_1, x_2, \ldots$ es una **progresión aritmética de segundo orden**, si la sucesión

$$y_1 = x_2 - x_1,\ y_2 = x_3 - x_2,\ y_3 = x_4 - x_3,\ \ldots,$$

es una progresión aritmética. Una progresión aritmética de segundo grado es **no ordinaria** o **no degenerada** si ésta no es una progresión aritmética.

Ejemplo 4. La función $f(x) = x^2$ transforma a la progresión aritmética $1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$ en la sucesión $1, 4, 9, \ldots, n^2, n^2+2n+1, \ldots$, la cual no es una progresión aritmética. Pero, la sucesión que resulta de las diferencias de las imágenes bajo la función f de la progresión aritmética $3, 5, 7, \ldots, 2n+1, \ldots$, es otra progresión aritmética, cuya diferencia es 2. El siguiente lema demuestra que en general si se aplica una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ a cada término de una progresión aritmética $a_1, a_2, \ldots$ con diferencia d. Se genera la sucesión $f(a_1), f(a_2), \ldots,$ que tiene la propiedad de que las diferencias sucesivas $s_1 = f(a_2) - f(a_1)$, $s_2 = f(a_3) - f(a_2)$, $s_3 = f(a_4) - f(a_3)$, $\ldots$, $s_i = f(a_{i+1}) - f(a_i)$ forman una progresión aritmética con diferencia $2ad^2$.

Lema 3.4.1 *Una función polinomial f es cuadrática si, y solo si f transforma a toda progresión aritmética en una progresión aritmética de segundo orden.*

Demostración. Suponga que $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función cuadrática. Si se aplica la función a cada término de una progresión aritmética $a_1, a_2, \ldots$ con diferencia d se genera la sucesión $f(a_1), f(a_2), \ldots,$ que tiene la propiedad de que las diferencias sucesivas $y_1 = f(a_2) - f(a_1)$, $y_2 = f(a_3) - f(a_2)$, $y_3 = f(a_4) - f(a_3)$, $\ldots$, $y_i = f(a_{i+1}) - f(a_i)$ forman una progresión aritmética, con diferencia igual a

$$\begin{aligned}
y_{i+1} - y_i &= (f(a_{i+2}) - f(a_{i+1})) - (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\
&= f(a_{i+2}) - 2f(a_{i+1}) + f(a_i) \\
&= pa_{i+2}^2 + a_{i+2}q + r - 2(pa_{i+1}^2 + a_{i+1}q + r) + (pa_i^2 + a_iq + r) \\
&= p[(a_{i+2}^2 - 2a_{i+1}^2 + a_i^2)] - q[(a_{i+2} - a_{i+1}) - (a_{i+1} - a_i)] \\
&= p[(a_{i+2}^2 - a_{i+1}^2) - (a_{i+1}^2 - a_i^2)] - q[d - d] \\
&= p[(a_{i+2} + a_{i+1})(a_{i+2} - a_{i+1}) - (a_{i+1} + a_i)(a_{i+1} - a_i)] \\
&= p[(a_{i+2} + a_{i+1})d - (a_{i+1} + a_i)d] \\
&= pd[(a_{i+2} - a_{i+1}) + (a_{i+1} - a_i)] \\
&= pd(d + d) \\
&= 2pd^2.
\end{aligned}$$

Pues d es la diferencia de la progresión $a_1, a_2, \ldots,$ es decir $d = a_{i+2} - a_{i+1} = a_{i+1} - a_i$.

Para probar el recíproco suponga que f es una función polinomial que transforma a toda progresión aritmética en una progresión aritmética de segundo orden. Se tiene que probar que f es una función cuadrática es decir de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Recuerde que la función $y(n) = a_0 + nd$ considerada como una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, es la restricción a los números naturales de la función afín $f(x) = dx + a_0$. En este caso y de forma similar, se probará que si la sucesión $y_1, y_2, \ldots$ es una progresión aritmética de segundo orden, entonces existen números reales a, b y c, tales que el $n-$ésimo término es igual a $y_n = an^2 + bn + c$. Siendo así, si se considera a la función $g(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $g(n) = y_n = f(n)$.

En consecuencia, la restricción de g a $\mathbb{N}$ coincide con la función polinomial f en una infinidad de puntos, luego por ser polinomiales coinciden en todo los números reales, por lo que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Veamos como encontrar a, b y c. Las diferencias sucesivas: $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2$, $\ldots$, $y_{n+1} - y_1$, $\ldots$, forman una progresión aritmética (ordinaria), donde el primer termino es $d = y_2 - y_1$ y la diferencia de la progresión es igual a r. Entonces el n-ésimo termino de está sucesión de diferencias es $y_{n+1} - y_n = d + (n-1)r$. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (y_{n+1} - y_n) + (y_n - y_{n-1}) + \cdots + (y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) + (y_1) && (3.26)\\ &= [d + (n-1)r] + [d + (n-2)r] + \cdots + [d + r] + d + y_1 && (3.27)\\ &= nd + \frac{n(n-1)}{2}r + y_1 && (3.28) \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\begin{aligned} y_n &= (n-1)d + \frac{(n-1)(n-2)}{2}r + y_1 && (3.29)\\ &= \frac{r}{2}n^2 + (d - \frac{3r}{2})n + r - d + y_1 && (3.30)\\ &= an^2 + bn + c && (3.31) \end{aligned}$$

donde $a = \frac{r}{2}$, $b = d - \frac{3r}{2}$ y $c = r - d + y_1$. Por lo tanto, queda probado que $y_n = an^2 + bn + c$, por lo dicho se puede concluir que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$\blacksquare$

Observación 7 *El Teorema Fundamental de la Proporcionalidad (pag. 59) dice que una función monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es afín si y solamente si, transforma progresiones aritméticas en progresiones aritméticas. Así mismo, se hizo notar que la condición para f de ser monótona, puede ser remplazada por la condición de ser continua.*

Observación 8 *Una función cuadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, como cualquier función polinomial, es continua. También será necesario considerar el resultado siguiente: dos funciones continuas que coinciden en los racionales, deben coincidir en todos los números reales. Ver (Spivak 2012) página 161.*

Nótese que el lema anterior no asegura con exactitud cuál es la progresión aritmética de segundo orden. Pero, esté mismo lema se puede usar para probar el siguiente resultado que si da más detalles acerca de dicha progresión aritmética.

Teorema 3.4.2 (Teorema de caracterización de las funciones cuadráticas) *Una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cuadrática si, y solo si f transforma a toda progresión aritmética no constante $x_1, x_2, \ldots$ en una progresión aritmética de segundo orden no ordinaria.*

Demostración. Por la demostración del lema anterior, cualquier función cuadrática $f(x)$ transforma a toda progresión aritmética no constante en una progresión aritmética de segundo orden no ordinaria.

Para probar el recíproco suponga que la función continua f transforma a toda progresión aritmética no constante $x_1, x_2, \ldots$ en una progresión aritmética de segundo orden no ordinaria: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\ldots$.

Consideremos a la función $g(x) = f(x) - f(0)$, que al igual que f, es continua y además define la sucesión $y_1 = g(x_1)$, $y_2 = g(x_2)$, $\ldots$, que también es una progresión de segundo orden no ordinaria. Además, es importante tener en cuenta que la función g tiene la propiedad de que $g(0) = 0$.

Ahora, del mismo modo que se hizo al principio de esta sección, se observa que la progresión aritmética $1, 2, 3, \ldots$ es transformada por la función g en la progresión aritmética de segundo orden no degenerada $g(1), g(2), \ldots$. Entonces, por el lema anterior existen a, b y c, tal que $g(n) = an^2 + bn + c$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Pero $c = g(0) = 0$, por lo que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$g(n) = an^2 + bn.$$

De forma análoga se prueba que para la progresión aritmética $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots$, con p un número natural arbitrario, existen a' y b' números reales tales que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n.$$

Veamos que las funciones cuadráticas $(a'p^2)x^2 + (b'p)x$ y $ax^2 + bx$ coinciden en todo el conjunto $\mathbb{N}$, en efecto para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple la igualdad

$$
\begin{aligned}
an^2 + bn &= g(n) \\
&= g\left(\frac{np}{p}\right) \\
&= a'(np)^2 + b'(np) \\
&= (a'p^2)n^2 + (b'p)n.
\end{aligned}
$$

La igualdad de las cuadráticas en una infinidad de puntos, garantiza que son iguales. Luego, se tiene que $a = a'p^2$ y $b = b'p$, en forma equivalente, $a' = \frac{a}{p^2}$ y $b' = \frac{b}{p}$. De lo que se sigue que para todo $n, p \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{n}{p}\right) &= a'n^2 + b'n \\
&= \frac{a}{p^2}n^2 + \frac{b}{p}n \\
&= a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right).
\end{aligned}
$$

En consecuencia, las funciones continuas $g(x)$ y $h(x) = ax^2 + bx$ coinciden en cada número racional positivo $r = \frac{n}{p}$. Finalmente, por la observación 8, $g(x) = ax^2 + bx$ para número real positivo x.

De manera análoga, solamente que partiendo de la progresión aritmética $-1, -2, \ldots$ se concluye, que $g(x) = ax^2 + bx$ para todo número real $x < 0$. Para concluir, haciendo $f(0) = c$, se tiene que $f(x) = g(x) + c = ax^2 + bx + c$, para toda $x \in \mathbb{R}$, como se quería. ■

3.5. Ejercicios del capítulo 3

Ejercicio 1. Sea $P(x)$ es un polinomio cuadrático, se dirá que *"intercambia posiciones de destino para* (s,t)*"*, con $s \neq t$; cuando $P(s) = t$ y $P(t) = s$. ¿Demuestra que si $P(x)$ *intercambia posiciones de destino*, para un par, entonces no intercambia posiciones con algún otro par de números reales distintos?.

Ejercicio 2. Sea $P(x) = x^2 + ax + b$ un polinomio cuadrático donde a es real y $b \neq 2$, es racional. Suponga que $P(0)^2$, $P(1)^2$, $P(2)^2$ son números enteros, muestre que a y b son números enteros.

Ejercicio 3. Si a, b y c son enteros impares, $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones racionales.

Ejercicio 4. Sea $P(x) = (x-a)(x-b) - 1$ un polinomio cuadrático con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b < a$. Muestre que $P(x)$ no es reducible en los enteros.

Ejercicio 5. Consideremos un círculo de radio de longitud r, y un rectángulo cuyos lados miden b y r.
(i) Encuentre el valor t que se le puede restar o sumar a r la longitud del lado del rectángulo, para que el área de ambas figuras sumen exactamente nueve unidades.
(ii) Si r varia, ¿cuál es el valor mínimo de t?

Ejercicio 6. Encuentre la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1,0)$, $(0,1)$ y $D = (d,0)$ con $d \neq 0, 1$.

Ejercicio 7. Si $ac \neq 0$, pruebe que el producto de los polinomios reales $P(x) = ax^2 + bx + c$ y $Q(x) = -ax^2 + bx + c$, tiene al menos dos raíces reales.

Ejercicio 8. Muestre que si $P(x) = ax^2 + bx + c$ no tiene raíces reales entonces $a^2 + 2ca + c^2 - b^2 > 0$.

Ejercicio 9. Sean a y b enteros tales que $a + b$ es una solución de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$. Encuentre el valor máximo de b.

Ejercicio 10. El polinomio con coeficientes enteros positivos $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$ tiene soluciones reales x_1 y x_2 tales que $|x_1| > 1$ y $|x_2| > 1$. Encuentre el valor mínimo de abc y calcule $a + b + c$, cuándo este valor mínimo ocurre.

3.6. Sugerencias a ejercicios del capítulo 3

Sugerencia al Ejercicio 1. Supongamos que el polinomio es $P(x) = ax^2+bx+c$, cumple que $P(s) = t$ y $P(t) = s$. Esto nos lleva a que,

$$P(s) = as^2 + bs + c = t$$
$$P(t) = at^2 + bt + c = s$$

por lo que, $s - t = P(t) - P(s) = -(s - t)(a(s + t) + b)$, y como $s - t \neq 0$, se tiene que $s + t = -\frac{1+b}{a}$. Considere ahora al polinomio cuadrático $Q(x) = P(x) + x + \frac{1+b}{a}$, es claro que t y s son sus raíces. Si el polinomio $P(x)$ intercambia posiciones de destino con otra pareja (m, n), con $m \neq n$, tendremos que m y n son también raíces de $Q(x)$, pero esto contradice el hecho de que $Q(x)$ solamente tiene dos raíces, a menos que $\{s, t\} = \{m, n\}$.

Otra solución. Considere el polinomio de grado cuatro $Q(x) = P(P(x))$. Es claro que si $P(x)$ intercambia posiciones de destino con (s, t) entonces s y t son puntos fijos de $Q(x)$. Además, por el teorema del valor intermedio, existe un punto fijo de $P(x)$ entre s y t, que desde luego será también punto fijo de $Q(x)$. Luego si hay otra pareja de puntos (m, n) que intercambia posiciones de destino, se tendrá que $Q(x)$ tiene 6 puntos fijos, lo que es una contradicción, ya que $Q(x)$ tiene a lo más 4 puntos fijos.

Sugerencia al Ejercicio 2. Como $P(0)^2 = b^2$ es un entero, tenemos que b debe ser entero.
Como $P(1)^2 = (a + b + 1)^2 = a^2 + b^2 + 1 + 2(a + b + 1)$ es un entero y b también es entero, tenemos que $a^2 + 2ab + 2a$ es entero.
Como $P(2)^2 = (4 + 2a + b)^2 = 16 + 4a^2 + b^2 + 4 + 16a + 4ab + 2b$ es un entero y b también es entero, tenemos que $4a^2 + 16a + 4ab$ es entero.
Ahora, es entero también el número $4(a^2+2ab+2a)-(4a^2+16a+4ab) = 4ab-8a = 4a(b - 2)$ y como $b \neq 2$, se tiene que a es racional.
Por otro lado, también es entero el número $(4a^2 + 4ab + 16a) - 2(a^2 + 2ab + 2a) = 2a^2 + 12a$ y entonces también el número $2a^2 + 12a + 18 = 2(a+3)^2$ es entero y como $a + 3$ es racional se debe tener que $a + 3$ es entero y entonces a es entero.

Sugerencia al Ejercicio 3. Supongamos que $\frac{p}{q}$ es una raíz racional con $(p, q) = 1$ de $ax^2 + bx + c = 0$. Al substituir y reducir, se tiene que $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$, como p y q no son divisibles entre si, los dos no pueden ser pares. Luego tenemos que los dos son impares o uno es par y el otro impar, en cualquier caso el lado izquierdo de la última igualdad es impar y el lado derecho es par, lo que es una contradicción.

Sugerencia al Ejercicio 4. Como $P(a) = P(b) = -1 < 0$ y el signo del coeficiente cuadrático es positivo, entonces la curva $y = (x - a)(x - b) - 1$ es una parábola que abre hacia arriba. Tenemos también que $P(b-1) = (b-1-a)(b-1-b)-1 = a-b > 0$ y $P(a+1) = (a+1-a)(a+1-b)-1 = a-b > 0$, por le teorema del valor intermedio, aplicado dos veces nos asegura que $P(x)$ tiene una raíz en el intervalo $(b-1, b)$ y su otra raíz en el intervalo $(a, a+1)$. Luego sus dos raíces no pueden ser enteras. Por lo que $P(x)$ no puede expresarse como producto de términos lineales en $Z[x]$.

Sugerencia al Ejercicio 5. (i) El área del círculo es πr^2 y el área del nuevo rectángulo es $b(r-t)$, con t un número real tal que se cumple la siguiente igualdad $b(r-t)+\pi r^2 = 9$, entonces $t = \frac{\pi r^2+br-9}{b}$.

(ii) En este caso, se busca que la ecuación cuadrática, $\pi r^2+br-(bt+9) = 0$, tenga solución. La ecuación tiene solución si y solo si el determinante $b^2+4\pi(bt+9) \geq 0$. Lo que sucede cuándo $t \geq -\frac{b^2+36\pi}{4\pi b}$. Por lo tanto, el valor más pequeño de t se obtiene cuando $t = -\frac{b^2+36\pi}{4\pi b}$.

Sugerencia al Ejercicio 6. La parábola es de la forma $y = ax^2+bx+c$. Los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $D = (d, 0)$, satisfacen $0 = a+b+c$, $1 = c$ y $0 = ad^2+bd+c$, debemos encontrar a y b que sean solución del sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} d^2a+db+1 &= 0 \\ a+b+1 &= 0. \end{aligned}$$

La solución es $a = \frac{1}{d}$ y $b = -\frac{1+d}{d}$. Por lo que la ecuación de la parábola es, $y = \frac{1}{d}x^2 - \frac{1+d}{d}x+1$.

Sugerencia al Ejercicio 7. El discriminante de $P(x)$ es b^2-4ac y el discriminante de $Q(x)$ es b^2+4ac. Si $ac > 0$, $b^2+4ac > 0$ y $Q(x)$ tiene dos raíces. Si $ac < 0$, $b^2-4ac > 0$ y $P(x)$ tiene dos raíces. En cualquier caso $P(x)Q(x)$ tiene al menos dos raíces reales.

Sugerencia al Ejercicio 8. Es claro que $a^2+2ca+c^2-b^2 = (a+c)^2-b^2 = (a+b+c)(a-b+c) = P(1)P(-1)$. Por lo que basta ver que $P(1)$ y $P(-1)$ tienen el mismo signo. Pero si no fuera el caso, es decir si $P(1)\cdot P(-1) < 0$, se tiene por el teorema del valor intermedio que el polinomio $P(x)$ tiene un cero entre -1 y 1, lo que es una contradicción, la hipótesis nos dice que $P(x)$ no tiene ceros.

Sugerencia al Ejercicio 9. Como $a+b$ es una solución de $x^2+ax+b = 0$, se tiene que $2a^2+3ab+b^2+b = 0$. Por lo tanto a es una solución de la ecuación $2x^2+3xb+b^2+b = 0$. Además, el discriminante $(3b)^2-4(2)(b^2+b)$ debe ser un cuadrado perfecto, pues a es número entero. Es decir, para algún número entero c, se tiene que $b^2 - 8b = c^2$. En consecuencia $(b-4)^2 - c^2 = 16$, por lo que $(b-4-c)(b-4+c) = 16$. De esta manera, los factores $(b-4-c)$ y $(b-4+c)$ solo pueden tomar los siguientes valores, donde para simplificar usamos $\epsilon = 1, -1$:

- $(b-4-c) = \epsilon 1$ y $(b-4+c) = \epsilon 16$
- $(b-4-c) = \epsilon 16$ y $(b-4+c) = \epsilon 1$
- $(b-4-c) = \epsilon 2$ y $(b-4+c) = \epsilon 8$
- $(b-4-c) = \epsilon 8$ y $(b-4+c) = \epsilon 2$
- $(b-4-c) = \epsilon 4$ y $(b-4+c) = \epsilon 4$

Pero para las dos primera posibilidades, c no es un número entero. Para todas las demás los valores que toma b son $b = 0, -1, 8, 9$ y así el valor máximo de b es 9.

Sugerencia al Ejercicio 10. Si las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son positivas entonces $b^2 - 4ac \geq 0$ y $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} > 0$. Luego, $\pm\sqrt{b^2 - 4ac} > b$ y así $b^2 - 4ac > b^2$, lo que significa que $ac < 0$, una contradicción pues a y c son enteros positivos. Por lo tanto $x_1 < 0$ y $x_2 < 0$. Pero como $|x_1| > 1$ y $|x_2| > 1$, se tiene que $x_1 < -1$ y $x_2 < -1$.

Por otro lado, el punto medio de x_1 y x_2 es $-\frac{b}{2a}$, entonces $-\frac{b}{2a} < -1$. En consecuencia, $b > 2a$. También, como la solución más grande de $ax^2 + bx + c = 0$ es menor que -1, al evaluar el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ en $x = -1$, se tiene que $a - b + c > 0$, o de manera equivalente $c > b - a$.

En resumen, se debe encontrar el valor mínimo de abc tal que $b > 2a$, $c > b - a$ y $P(x) = ax^2 + bx + c$ tenga soluciones reales menores que -1.

Observe que si $a \geq 3$, entonces $b > 2a = 2 \cdot 3 = 6$ y $c > 0$. Entonces $abc > 18$. Si $a = 2$, como $b > 2a = 4$ y $c > b - a > 4 - 2 = 2$, se tiene que $b \geq 5$ y $c \geq 3$, esto implica que $abc \geq 30$.

En cambio, si $a = 1$, $b > 2a = 2$ y $c > b - a > 2 - 1 = 1$.
Si $b = 5$, entonces $c > 5 - 1 = 4$, y entonces $abc > 25$.
Si $b = 4$, entonces $c > 4 - 1 = 3$ y entonces $abc \geq 16$, además con $b = c = 4$, se tiene que $abc = 16$, que por ahora es el menor valor de abc. El polinomio es $P(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$, tiene un único cero de orden 2 en $x = -2$.

Si $b = 3$, entonces $c > 3 - 1 = 2$, por lo que c puede ser uno de los números $3, 4, 5$, para tener abc menor o igual a 16. Pero ninguno de los polinomios $x^2 + 3x + 3$, $x^2 + 3x + 4$, $x^2 + 3x + 5$, tiene raíces reales.
Luego el valor mínimo de abc es 16, que se alcanza con $a = 1$, $b = 4$ y $c = 4$, por lo que $a + b + c = 9$.

Capítulo 4

Polinomios cúbicos

4.1. El cubo de Cardano

Los acercamientos más celebres a la solución de la ecuación cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, se deben al matemático italiano Gerolamo Cardano (1501-1576). Antes que nada probó que para cualesquiera números reales h y k, se cumple la identidad:

$$(h + k)^3 = h^3 + 3h^2k + 3hk^2 + k^3. \tag{4.1}$$

Cardano mostró esta identidad recurriendo a argumentos geométricos, los presentamos ya que ayudan a ilustrar procedimientos algebraicos que se estudiarán posteriormente. Es natural relacionar la construcción de Cardano con la construcción geométrica que se usó en el capítulo anterior para ver la identidad del trinomio cuadrado perfecto. Con el detalle de que en la construcción de Cardano se considera un cubo en el espacio tridimensional. Para ser precisos, Cardano resuelve el problema: *dados dos segmentos uno de longitud h y otro de longitud k, pruebe que se cumple la identidad* (4.1) (Branson 2013). La solución usa la construcción geométrica que sigue los pasos siguientes:

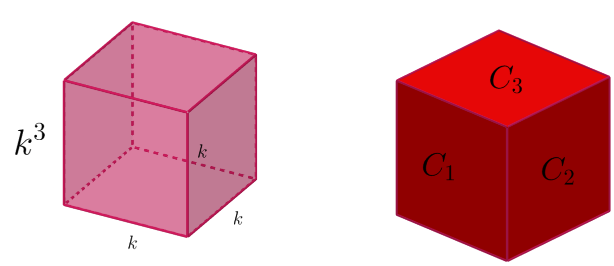


Figura 4.1: Las dimensiones del cubo K_1, cuyas caras frontales son C_1, C_2 y C_3.

PASO 1. Considere un cubo K_1 en el espacio, de aristas de longitud k. El volumen del cubo K_1 es k^3. Luego, considera tres de las caras del cubo K_1, como se ve en la Figura 4.1.

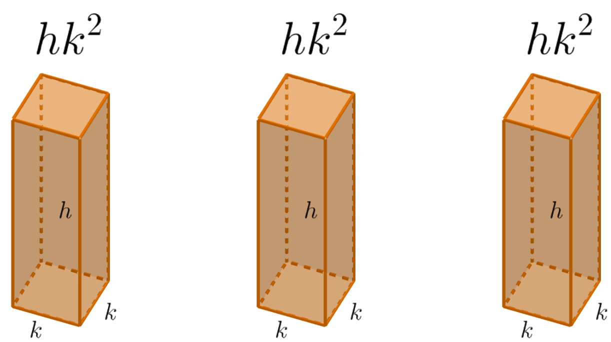


Figura 4.2: Los tres prismas Δ_1, Δ_2 y Δ_3 que tienen las mismas dimensiones.

PASO 2. Considera tres primas rectangulares Δ_1, Δ_2 y Δ_3. Como se muestra en la Figura4.2 cada uno de estos prismas tiene base cuadrada de lado de longitud k y altura h. Por lo tanto, cada una de estas figuras tiene volumen hk^2.

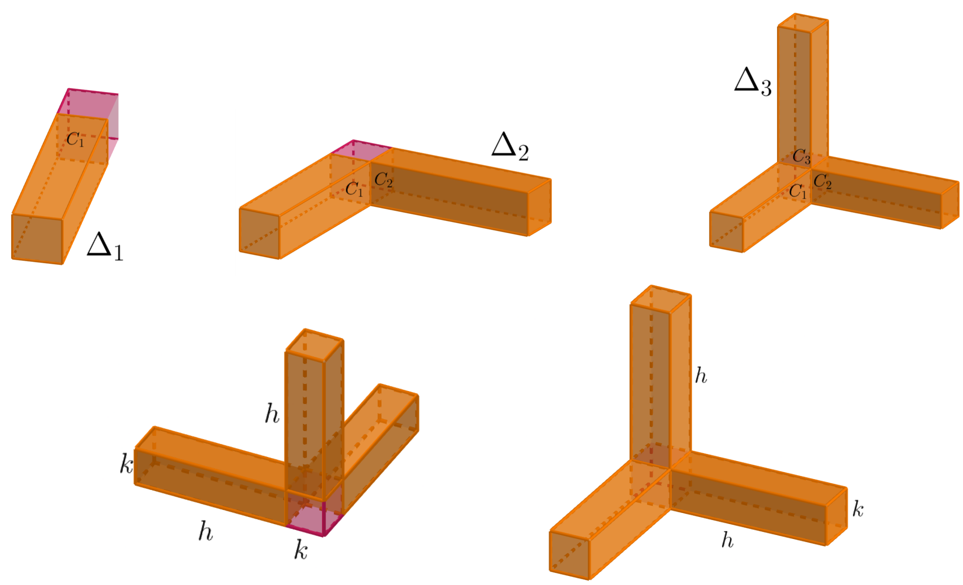


Figura 4.3: Las bases de los prismas Δ_1, Δ_2 y Δ_3 se empalman con las caras C_1, C_2 y C_3 del cubo K_1.

PASO 3. Sobre la cara C_1 se coloca Δ_1, sobre la cara C_2 se coloca Δ_2 y sobre la cara C_3 se coloca Δ_3, como se ve en la Figura 4.3.

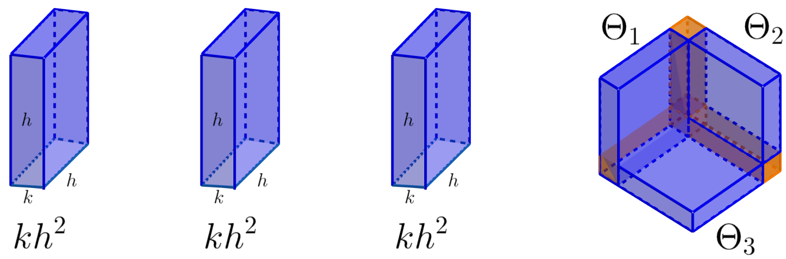


Figura 4.4: La colocación de Θ_1, Θ_2 y Θ_3.

PASO 4. Considere los primas rectangulares: Θ_1, Θ_2 y Θ_3. Cada uno de estos prismas tiene altura k y base cuadrada con lado de longitud h. Por lo tanto, cada uno de los prismas tiene volumen kh^2. Se colocan Θ_3 entre Δ_1 y Δ_2, como se muestra en la Figura 4.4.

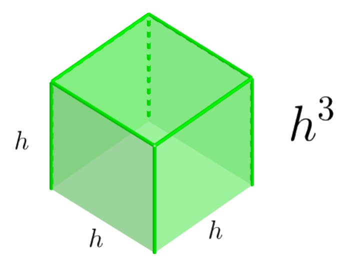


Figura 4.5: Cubo de dimensiones de longitud h.

PASO 5. Después, consideró un cubo K_2 de arista de longitud h y volumen h^3. Además, como se puede observar en la Figura 4.5, sirve para llenar el espacio que queda en la construcción que se logró en el Paso 4.

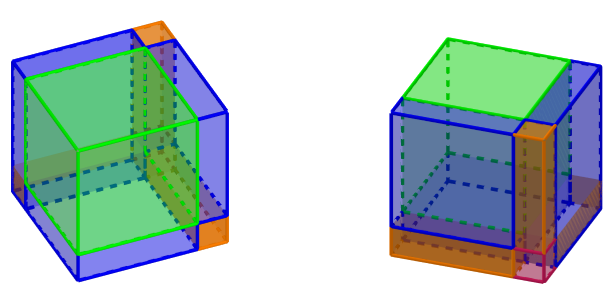


Figura 4.6: La construcción completa

PASO 6. Finalmente, el cubo que se construyó de todos los prismas anteriores tiene aristas de longitud $h + k$, entonces su volumen es $(h + k)^3$.

Por otro lado, la suma de los volúmenes de los prismas K_1, K_2, Θ_1, Θ_2, Θ_3, Δ_1, Δ_2 y Δ_3 da el volumen total del cubo, a saber $(h+k)^3$. De esta manera queda probada la igualdad de Cardano (4.1), ver Figura 4.6.

Lo anterior prueba que si el polinomio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cumple que $a = 1$, $b = 3k$, $c = 3k^2$ y $d = k^3$, su única raíz es $x = -k$ y es de multiplicidad 3. Además, Cardano usó esta misma construcción geométrica para reescribir una ecuación de la forma $x^3 + ax^2 + b = 0$ como una ecuación cúbica de término cuadrático nulo.

Ejemplo 1. Se quiere reescribir la ecuación $x^3 - 6x^2 - 100 = 0$, como una ecuación de la forma $x^3 + cx + d = 0$, con $c, d \in \mathbb{R}$. Para esto, primero, se resuelve el problema para la ecuación $x^3 - 6x^2 = 0$ y se consideran los siguientes prismas:

- El cubo Λ_0; éste es el cubo de aristas de longitud x y volumen x^3. Este cubo se divide de la misma forma que en la figura 4.6 y tanto los solidos como las longitudes quedan nombradas de la misma manera. Por ello, considere a la figura 4.6 como referencia ilustrativa del cubo Λ_0.
- El prisma rectangular Λ_1: que es el prisma de altura 6, base cuadrada de lados de longitud x y volumen $6x^2$. En este caso, la base de Λ_1 es la superficie cuadrada K_0 que se divide en 4 partes como se ve en la figura 4.7. Note que el vértice B, en la superficie K_0, separa el lado $AC = x$ en dos segmentos, a saber, $AB = h$ y $BC = k$. De manera que Λ_1 se compone de los prismas, Θ_4 y Θ_5, ambos de altura 6 y bases los rectángulos $ABDH$ y $DIEG$, respectivamente, por lo que ambos prismas son de volumen $6kh$; el prisma cuadrado Δ_4, de altura 6, base el cuadrado $BCID$ y volumen $6k^2$, y el prisma cuadrado K_3, de base $BGFH$, altura 6 y volumen $6h^2$.

Cardano antes encontró lo que debe cumplir el vértice B para que los prismas Λ_0 y Λ_1 tengan el mismo volumen. Para responder a esto, consideró que en el cubo Λ_0, cada uno de los solidos Θ_1, Θ_2 y Θ_3 tiene volumen kh^2. Por lo que sumados dan $3kh^2$. Por otro lado, en Λ_1, el prisma cuadrado K_3 de altura 6, base cuadrada de lados de magnitud h y volumen $6h^2$.

Observe que para que el punto B cumpla la igualdad $3kh^2 = 6h^2$, se debe cumplir que $BC = k = 2$. Así, Cardano encontró que $BC = 2$ es la condición que hace coincidir la suma de los solidos Θ_1, Θ_2 y Θ_3 del cubo Λ_0 con el solido K_3 del cubo Λ_1.

Una vez determinada la posición de B, se eliminan los solidos con iguales volúmenes que componen Λ_0 y Λ_1. El resultado:

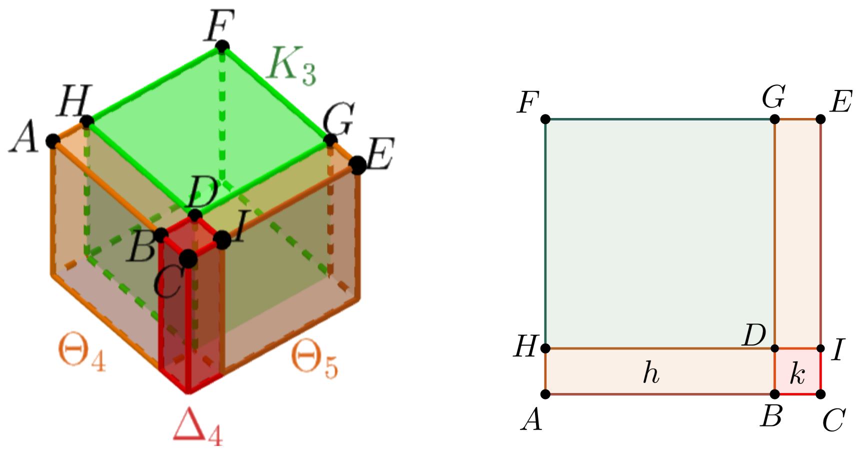


Figura 4.7: El prisma Λ_1 y la superficie K_0.

- Por lo anterior, se eliminan Θ_1, Θ_2 y Θ_3 con K_3.

- La suma de los volúmenes Δ_1, Δ_2 y Δ_3 da como resultado $3hk^2 = 12h$, pues $k = 2$. Pero la suma de los volúmenes de Θ_4 y Θ_5 es $12hk = 24h$, el doble que la suma de los volúmenes de los solidos Δ_1, Δ_2 y Δ_3. Por lo tanto solo queda el prisma Θ_4.

- El volumen del cubo K_2 $k^3 = 8$. Mientras que el volumen de K_3 es $6k^2 = 24$, el triple del volumen de K_2. Por lo tanto queda un prisma de altura 4 y base cuadrada de lados $k = 2$.

- Por lo tanto solo se queda el cubo K_2 de Λ_0, de volumen h^3, el prisma Θ_4 de volumen $12h$ y un prisma de volumen 16. Estos se muestran en la Figura 4.8.

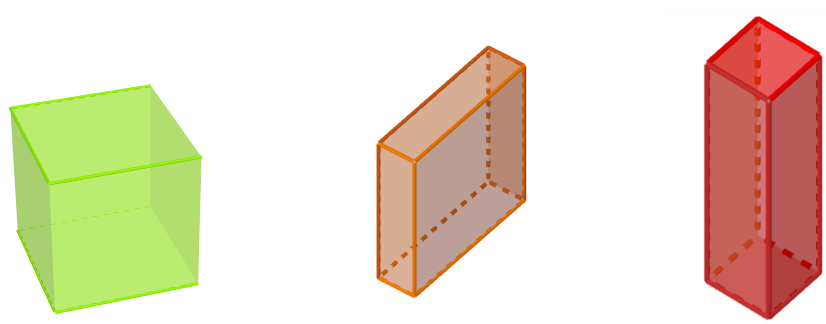


Figura 4.8: De izquierda a derecha se muestran el cubo K_2, el prisma Θ_4 y un prisma de volumen 16.

Teniendo como referencia la figura de arriba, se busca que el volumen del cubo verde K_2 iguale el volumen de la suma de los otros dos solidos, es decir, se quiere que $h^3 = 12h + 16$. Por lo tanto, si se quiere solucionar la ecuación $x^3 - 6x^2 = 0$, bastará hallar las soluciones de está última ecuación y remplazar su valores en $x = AC = h + k = h + 2$. Por lo tanto, regresando al problema original, se suma 100 al lado derecho de la igualdad $h^3 = 12h + 16$ y se tiene que la ecuación cubica sin término cuadrático $h^3 = 12h + 116$ es equivalente a la ecuación original haciendo $h = x - 2$. Por supuesto, el procedimiento puede ser replicado para cualquier ecuación del tipo $x^3 + bx^2 + c = 0$. Más adelante, veremos como resolver cualquier ecuación cúbica de la forma $x^3 + dx + c = 0$.

4.2. Factorización

Para hallar los factores que dividen a un polinomio, es útil advertir con algún criterio para determinar si el polinomio es reducible. Por reducible se entiende que el polinomio se puede escribir como producto de dos polinomios de grado menor al grado del polinomio original. Para los polinomios en $\mathbb{Q}[x]$, por fortuna, se cuenta con el Criterio de Irreducibilidad de Eisenstein, que para polinomios de tercer grado, dice lo siguiente:

Teorema 4.2.1 *Si $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un polinomio en $\mathbb{Q}[x]$, y si existe un número primo p tal que $p|d$, $p|c$, $p|b$, $p \nmid a$ y $p^2 \nmid d$. Entonces $p(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.*

La demostración de este teorema se encuentra en forma más general en el capítulo siguiente ver pag.152. A titulo de ejemplo, el polinomio $P(x) = 7x^3 + 27x^2 + 9x + 18$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$, pues $p = 3$ cumple el criterio de irreducibilidad de Eisenstein. Si bien $P(x) = 7x^3 + 27x^2 + 9x + 18$ no se puede escribir como un producto de polinomios con coeficientes racionales, veremos más adelante que siempre tiene una raíz real y por lo tanto es reducible en $\mathbb{R}[x]$. Para un polinomio de tercer grado, una primera aproximación consiste en intentar encontrar alguna raíz del polinomio y usar el teorema de Bezout 1.2.1 para encontrar los factores del polinomio.

Ejemplo 2. Se quieren hallar los factores del polinomio $P(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 25$. Una inspección simple nos lleva a que $x = 1$ es una raíz del polinomio, por lo que $(x - 1)$ es un factor de $P(x)$. Luego, se divide $P(x)$ entre $(x - 1)$ y se tiene que $P(x) = (x + 1)(x + 5)^2$. Así el otro factor de $P(x)$ es $(x + 5)^2$.

Por supuesto, esto resulta efectivo solo en algunos casos. Si esto fracasa, puede intentar la factorización por agrupación.

Ejemplo 3. Se quiere factorizar linealmente el polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$. Primero, agrupe los términos de $P(x)$; $P(x) = (x^3 - x^2) + (2x - 2) = x^2\,(x - 1) + 2\,(x - 1)$. Luego, se obtienen los factores comunes del polinomio para finalmente agruparlos, de manera que $P(x) = (x - 1)\,(x^2 + 2)$.

Si esta estrategia no lleva a un buen termino, aún queda el método de encontrar una raíz racional. Para lo cuál, antes es necesario presentar el siguiente resultado.

Teorema 4.2.2 ***Teorema de la raíz racional para polinomios de grado 3.*** *Sea $P(x) = ax^3 + bx_2 + cx + d$ un polinomio con coeficientes enteros y suponga p y q enteros distintos de cero y primos relativos; es decir que los únicos divisores en común de p y q son 1 y -1. Si $\frac{p}{q}$ es una raíz de $P(x)$, entonces p divide a d, y q divide a a.*

Demostración. Observe que si $\frac{p}{q}$ es una raíz, se tiene que

$$a \cdot \frac{p^3}{q^3} + b \cdot \frac{p^2}{q^2} + c \cdot \frac{p}{q} + d = 0.$$

Luego, multiplique ambos lados de la igualdad por q^3, tenemos que

$$ap^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3 = 0,$$

Así, despejando dq^3 y factorizando

$$dq^3 = -p(ap^2 + bpq + cq^2).$$

En consecuencia, p divide a dq^3, pero por hipótesis p no divide a q, entonces p debe dividir a d.

Finalmente, se procede de la misma manera, ahora despejando a ap^3

$$ap^3 = -q(bp^2 + cpq + dq^2).$$

así, q divide a ap^3, pero por hipótesis q no divide a p, entonces q divide a a. ■

Ejemplo 4. Para factorizar el polinomio $P(x) = 2x^3 + 19x^2 + 49x + 20$, se hallan los factores (positivos) de 20, a saber: 1,2,4,5 y 10. En cuanto a los factores (positivos) de 2 son solo 1 y 2. De esta manera las posibles raíces del polinomio se hallan en los valores, con signo $+$ y $-$, para $\frac{p}{q}$, con $p = 1, 2, 4, 5, 10$ y $q = 1, 2$. A saber:

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm\frac{5}{2}, \pm 10.$$

Después, el polinomio se evalúa en cada uno de estos valores y se encuentra que $P(-\frac{1}{2}) = P(-4) = P(-5) = 0$, y estos valores corresponden a las raíces del polinomio $P(x)$, es decir $P(x) = 2(x + \frac{1}{2})(x + 5)(x + 4)$.

4.3. Fórmulas de Vieta

Para sentar la relación que existe entre las raíces del polinomio cúbico $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ con sus coeficientes, asuma que a, b y c son las raíces de $P(x)$ y entonces se cumple que

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc.$$

De manera que al comparar los coeficientes se tienen las siguientes igualdades

$$p = -(a+b+c), \quad q = ab+bc+ca, \quad r = -abc. \tag{4.2}$$

Las fórmulas (4.2) se conocen como las **fórmulas de Vieta** para ecuaciones de tercer grado.

Ejemplo 5. (Alemania, 1970) Sean p, q números reales cualesquiera, con $p \neq 0$, considere a, b, c las raíces del polinomio $px^3 - px^2 + qx + q$. Muestre que

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = -1$$

.

Como $px^3 - px^2 + qx + q = p(x^3 - x^2 + \frac{q}{p}x + \frac{q}{p}) = p(x-a)(x-b)(x-c)$, por las fórmulas de Vieta (4.2), se tiene que $-1 = -(a+b+c)$, $\frac{q}{p} = ab+bc+ca$ y $\frac{q}{p} = -abc$,

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = (a+b+c)\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right) = \frac{\frac{q}{p}}{-\frac{q}{p}} = -1.$$

Discriminante de un polinomio de tercer grado

A un polinomio $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, con raíces x_1, x_2, $\ldots$, x_n, no necesariamente distintas, se le asigna la expresión

$$\Delta = a_n^{2n-2}\prod_{i\neq j}^{n}(x_i - x_j)^2, \tag{4.3}$$

llamada **discriminante** del polinomio $Q(x)$.

Con ayuda de las fórmulas de Vieta mostramos a continuación que el discriminante del polinomio cubico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se puede escribir en términos de los coeficientes de $P(x)$. Si x_1, x_2 y x_3 son las raíces de $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, entonces el discriminante de $P(x)$ es igual a:

$$\begin{aligned}\Delta &= a^4(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2\\ &= a^4\left((x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)\right)^2\\ &= a^4\left((x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2)-(x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1)\right)^2\end{aligned}$$

Haciendo $m = x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2$ y $n = x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1$, se tiene que

$$\Delta = a^4\left(m-n\right))^2 = a^4\left[(m+n)^2-4mn\right] = a^4(m+n)^2-4a^4mn, \tag{4.4}$$

Por otro lado, por las fórmulas de Vieta se cumplen las siguientes igualdades:

$$-\frac{b}{a} = x_1+x_2+x_3, \quad \frac{c}{a} = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1, \quad -\frac{d}{a} = x_1x_2x_3. \tag{4.5}$$

En consecuencia, $m+n$ se escribe en términos de a, b y c, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}m+n &= (x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2)+(x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1)\\ &= x_1x_2(x_1+x_2)+x_2x_3(x_2+x_3)+x_1x_3(x_1+x_3)\\ &= (x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-3x_1x_2x_3\\ &= \frac{-bc+3ad}{a^2}.\end{aligned}$$

El producto mn, requieren un par de pasos extra para reescribirla en términos de a, b y c. Primero, notemos que,

$$\begin{aligned}mn &= (x_1x_2^2+x_2x_3^2+x_3x_1^2)(x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1)\\ &= (x_1x_2)^3+(x_2x_3)^3+(x_3x_1)^3+3(x_1x_2x_3)^2+x_1x_2x_3(x_1^3+x_2^3+x_3^3)\end{aligned} \tag{4.6}$$

Faltará escribir $(x_1x_2)^3+(x_2x_3)^3+(x_3x_1)^3$ y $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ en términos de a, b y c. Para esto consideremos la siguiente identidad para $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc.$$

Luego, al hacer $a = x_1x_2$, $b = x_2x_3$ y $c = x_3x_1$ y aplicar lo anterior, junto con (4.5), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}&(x_1x_2)^3+(x_2x_3)^3+(x_3x_1)^3 =\\ &(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^3-3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)(x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^3)\\ &\quad +3x_1^2x_2^2x_3^2\\ &= (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^3-3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)(x_1x_2x_3)(x_1+x_2+x_3)\\ &\quad +3(x_1x_2x_3)^2\\ &= \frac{c^3}{a^3}-\frac{3bcd}{a^3}+\frac{3d^2}{a^2}\end{aligned} \tag{4.7}$$

Similarmente, haciendo $a = x_1$, $b = x_2$ y $c = x_3$, y por (4.5) se prueba lo siguiente

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + 3x_1x_2x_3 \\ &= -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} - \frac{3d}{a} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Remplazando (4.7) y (4.8) en (4.6), se tiene que

$$\begin{aligned} mn &= \frac{c^3}{a^3} - \frac{3bcd}{a^3} + \frac{3d^2}{a^2} + \frac{3d^2}{a^2} - \frac{d}{a}\left[-\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} - \frac{3d}{a}\right] \\ &= \frac{c^3}{a^3} - \frac{3bcd}{a^3} + \frac{6d^2}{a^2} + \frac{b^3d}{a^4} - \frac{3bcd}{a^3} + \frac{3d^2}{a^2} = \frac{ac^3 - 6abcd + 9a^2d^2 + b^3d}{a^4}. \end{aligned}$$

De lo anterior, se sigue que remplazando $m+n$ y mn, de lo obtenido anteriormente, en (4.4), se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta &= a^4\left(\frac{-bc + 3ad}{a^2}\right)^2 - 4a^4\left(\frac{ac^3 - 6abcd + 9a^2d^2 + b^3d}{a^4}\right) \\ &= (-bc + 3ad)^2 - 4\left(ac^3 - 6abcd + 9a^2d^2 + b^3d\right) \\ &= b^2c^2 - 6abcd + 9a^2d^2 - 4ac^3 + 24abcd - 36a^2d^2 - 4b^3d \\ &= b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd. \end{aligned}$$

Luego, el discriminante del polinomio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es igual a

$$\Delta = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd. \tag{4.9}$$

4.4. Identidades de Newton

Observe que las fórmulas de Vieta (4.2) aplicadas al polinomio cúbico de la forma $P(x) = x^3 + px^2 + qz + r$, con raíces a, b y c, son las igualdades:

$$p = -(a + b + c), \qquad q = ab + bc + ca \qquad \text{y} \qquad r = -abc,$$

que resultan funciones simétricas de a, b y c. Éstas no son las únicas funciones simétricas generadas por $P(x)$. También, están por ejemplo, los polinomios (simétricos) de Newton:

$$\begin{aligned} S_1 &= a + b + c, \\ S_2 &= a^2 + b^2 + c^2, \\ S_3 &= a^3 + b^3 + c^3. \end{aligned}$$

Cada una de estas funciones se puede escribir como un polinomio en términos de p, q, r. Esto se puede comprobar aplicando las formulas de Vieta, para obtener:

$$\begin{aligned} S_1 &= -p, \\ S_2 &= p^2 - 2q, \\ S_3 &= -p^3 + 3pq - 3r. \end{aligned}$$

Estas relaciones, así escritas, son conocidas como **identidades de Newton**.

Ejemplo 6. Es posible probar que $S_4 = a^4 + b^4 + c^4 = -pS_3 - qS_2 - rS_1$.
En efecto,

$$\begin{aligned} &-pS_3 - qS_2 - rS_1 = \\ &(a+b+c)(a^3+b^3+c^3) - (ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2) + (abc)(a+b+c) = \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + [(ab^3+ac^3) + (ba^3+bc^3) + (ca^3+cb^3)] - \\ &- [(a^3b + a^2bc + a^3c) + (ab^3 + b^3c + cab^2) + (abc^2 + bc^3 + c^3a)] + \\ &+ (a^2bc + ab^2c + abc^2) \\ &= a^4 + b^4 + c^4 = S_4. \end{aligned}$$

Ejemplo 7. Más aún, si $S_k = a^k + b^k + c^k$ para $k \geq 4$, se prueba de la misma manera que en el ejemplo anterior que, $S_k = -pS_{k-1} - qS_{k-2} - rS_{k-3}$.

4.5. Solución de ecuaciones cúbicas

La ecuación reducida

Deducción de la ecuación reducida

Considere la ecuación cúbica :

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{4.10}$$

Por las fórmulas de Vieta, $-b$ es la suma de las raíces de la ecuación (4.10). Entonces $-\frac{b}{3}$ es la media aritmética de estas raíces. De manera que el cambio de variable $y \to x + \frac{b}{3}$, también llamado **la Transformación de Tschirnhaus**, genera una expresión cubica para la cual las medias aritmética de sus raíces, y su suma, es igual a cero. Por lo cual su término cuadrático será igual a cero. En efecto, con este cambio de variable, la ecuación (4.10) se convierte en

$$\left(y - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d = 0.$$

Teniendo en cuenta la identidad (4.1), ahora solo hace falta desarrollar cada sumando para obtener que

$$
\begin{aligned}
x^3 + bx^2 + cx + d &= \left(y - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d = \\
&= \left[y^3 - by^2 + \frac{b^2}{3}y + \frac{b^3}{27}\right] + \left[by^2 - \frac{2b^2}{3}y + \frac{b^3}{9}\right] + \left[cy - \frac{bc}{3}\right] + d \\
&= y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente, haciendo $p = c - \frac{b^2}{3}$ y $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$, se obtiene la ecuación

$$y^3 + py + q = 0,$$

que se le conoce como **la ecuación reducida** de la ecuación (4.10). El procedimiento que aquí se presenta es análogo al que se usa para deducir las soluciones por radicales de los polinomios cuadráticos; dirigirse a pag.79.

Interpretación analítica de la ecuación reducida

La forma general para resolver cualquier ecuación de tercer grado se le atribuye a Nicolo Fontana de Brescia (1499-1557), mejor conocido como Tartaglia en 1526. Aunque, como objeto de polémica, Cardano en el capítulo 6 de su libro *Ars Magna* publica la solución general. Pero antes de estos logros, hubo intentos de otros personajes por resolver estas ecuaciones, tal es el caso del matemático persa Omar Khayyam (1048-1131) que en su libro *Álgebra*, publica las soluciones geométricas de algunas ecuaciones de tercer grado, en las que destaca la solución de la ecuación del tipo

$$x^3 + bx - c = 0, \tag{4.11}$$

con b y c números reales positivos.

Considere la siguiente ecuación que en el plano define una parábola

$$x^2 = \sqrt{b}y, \tag{4.12}$$

y la circunferencia que pasa por el origen, con centro en el eje x y diámetro $h = \frac{c}{b}$ como se ve en la figura 4.9.

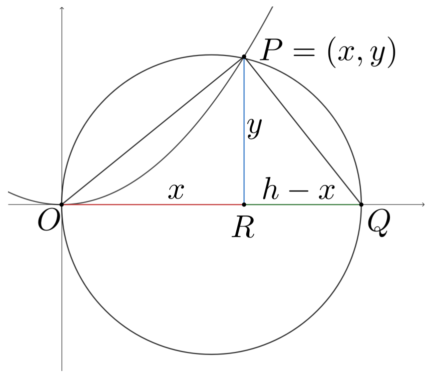


Figura 4.9: Construcción geométrica para ubicar la solución de una ecuación reducida.

Ahora, considere el punto $P=(x,y)$ del primer cuadrante, donde la circunferencia corta a la parábola. De aquí se tiene que los triángulos ΔOPR y ΔPQR son semejantes, lo que implica que $\frac{y}{x}=\frac{h-x}{y}$, así

$$y^2 = xh - x^2. \tag{4.13}$$

Finalmente, si se eleva al cuadrado la igualdad (4.12) y el valor de y (en términos de x) se remplaza en (4.13)s y se obtiene la ecuación

$$\frac{x^4}{b}=\frac{xc}{b}-x^2 \Rightarrow\; x^3=c-bx \Rightarrow\; x^3+bx-c=0.$$

Lo que quiere decir que la longitud del segmento OR es una solución real de la ecuación (4.11).

Solución general de la ecuación cubica

Pongamos en practica lo anterior; la ecuación general de tercer grado, con coeficientes reales $x^3+bx^2+cx+d=0$, puede escribirse de la siguiente manera:

$$y^3+py+q=0, \tag{4.14}$$

bastará considerar $x=y-\frac{b}{3}$, $p=c-\frac{b^2}{3}$, y $q=\frac{2b^3}{27}-\frac{bc}{3}+d$. Pero, notemos de la identidad $(e+f)^3=e^3+3e^2f+3ef^2+f^3$, podemos deducir que $(e+f)^3-3ef(e+f)-(e^3+f^3)=0$. De manera que si encontramos e y f tales que $y=e+f$, $p=-3ef$ y $q=-(e^3+f^3)$ entonces y resolverá la ecuación (4.14). Cuando este es el caso, se cumple la siguiente identidad:

$$y^3-3efy-(e^3+f^3)=0. \tag{4.15}$$

Luego, de la ecuación reducida (4.14) se tiene que f y e deben además cumplir con,

$$3ef = -p \tag{4.16}$$
$$e^3 + f^3 = -q \tag{4.17}$$

En consecuencia, $e^3f^3 = -\frac{p^3}{27}$ y $e^3 + f^3 = -q$. Entonces por las formulas de Viéta para la ecuación cuadrática, $r_1 = e^3$ y $r_2 = f^3$ son las raíces de la ecuación cuadrática

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Por lo tanto, se tienen las siguientes igualdades

$$r_1 = e^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \qquad r_2 = f^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Así, se tienen 3 valores para e y 3 valores para f, y como $y = e + f$, se obtienen 9 soluciones, de las cuales solo algunas satisfacen 4.16 y 4.17. Como $e^3 + f^3 = -q$ siempre se cumple, solo se eligen las soluciones que cumplen la identidad $ef = -\frac{p}{3}$. Con esta restricción se tiene las 3 raíces de la ecuación cubica original, que vienen expresadas por la siguiente fórmula atribuida a Scipione del Fiore;

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{4.18}$$

Note que el **discriminante de la ecuación reducida** es la expresión $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, que cumple uno de los siguientes casos.

- Si $\Delta > 0$;
  Entonces r_1 y r_2 son números reales. Luego α y β son las raíces cubicas de r_1 y r_2, respectivamente. En el Anexo se comprueba que los valores que toma e son: α, $\alpha\omega$, $\alpha\omega^2$ y los valores de f son: β, $\beta\omega$, $\beta\omega^2$, donde ω es la raíz cúbica de la unidad, esto es, $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Pero como se debe cumplir que $y = e + f$ y que $ef = -\frac{p}{3}$ se obtienen las tres soluciones de la ecuación (4.18), a saber

  $$y_1 = \alpha + \beta \qquad y_2 = \alpha\omega + \beta\omega^2 \qquad y_3 = \alpha\omega^2 + \beta\omega$$

  Esto quiere decir, hay una raíz real y dos raíces complejas.

- Si $\Delta = 0$;
  Entonces $e = f$ y las 3 soluciones de la ecuación (4.18) son

$$y_1 = 2\alpha \qquad\qquad y_2 = y_3 = \alpha(\omega + \omega^2) = -\alpha$$

  Esto quiere decir que hay tres raíces reales. Con al menos una de ellas de multiplicidad 2 o 3.

- $\Delta < 0$
  En este caso r_1 y r_2 son complejos conjugados, esto es, toman los valores

$$-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = r\,(\text{cos}t \pm \text{sen}t)\,,$$

  de donde

$$r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \text{ y } \text{cos}t = -\frac{q}{2r},$$

  con $0 \leq t \leq 2\pi$. Luego,

$$A = \sqrt[3]{r}(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) \qquad \text{y} \qquad B = \sqrt[3]{r}(\cos(\theta) - i\text{sen}(\theta))$$

  con $\theta = \frac{t}{3}, \frac{t+2\pi}{3}, \frac{t+4\pi}{3}$.
  Como en el primer caso, teniendo en cuenta que $y = e + f$ y que $ef = -\frac{p}{3}$ se obtiene que las tres soluciones de la ecuación (4.18) son

$$y_1 = 2\sqrt[3]{r}\text{cos}\left(\frac{t}{3}\right) \qquad y_2 = 2\sqrt[3]{r}\text{cos}\left(\frac{t+2\pi}{3}\right) \qquad y_3 = 2\sqrt[3]{r}\text{cos}\left(\frac{t+4\pi}{3}\right)$$

  Esto quiere decir, que en este caso hay tres raíces reales distintas entre sí.

Finalmente, una vez obtenidas las soluciones de (4.18), se remplazan en la ecuación $x = y - \frac{p}{3}$. Los valores de x son las raíces de la ecuación cúbica. Este procedimiento, con está notación moderna, es conocido como el *Método de Tartaglia-Cardano* para obtener las raíces cúbicas de una ecuación de tercer grado.

De lo anterior se concluyen dos afirmaciones relevantes en el estudio de los polinomios de tercer grado.

Teorema 4.5.1 *Una ecuación cúbica (con coeficientes reales) $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, siempre tiene al menos una raíz real.*

Teorema 4.5.2 *Dada cualquier ecuación cubica $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, con discriminante Δ de su ecuación reducida, se cumple que*

- *Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene una raíz real y dos complejas conjugadas.*
- *Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene tres raíces reales y al menos dos de ellas son iguales.*
- *Si $\Delta < 0$ la ecuación tiene tres raíces reales distintas.*

Ejemplo 8. Calcule el discriminante de la ecuación reducida de $x^3+6x^2+11x+6 = 0$ y halle las raíces de está última.

De acuerdo a lo visto anteriormente se siguen los siguientes pasos:

1. Obtener la ecuación reducida: identifique los coeficientes de la ecuación como $b = 6$, $c = 11$ y $d = 6$. Luego, el hacer el cambio de variable

$$x = y - \frac{b}{3} = y - \frac{6}{3} = y - 2, \tag{4.19}$$

nos llevará a la ecuación reducida de la forma $y^3 + py + q = 0$, donde

$$p = c - \frac{b^2}{3} = 11 - \frac{6^2}{3} = -1, q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = \frac{2(6)^3}{27} - \frac{(6)(11)}{3} + 6 = 0, \tag{4.20}$$

esto es la ecuación reducida queda como

$$y^3 - y = 0. \tag{4.21}$$

2. Calcular el discriminante de la ecuación reducida: Por lo visto anteriormente es,

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{0^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27} = -\frac{1}{27}$$

de manera que el discriminante es menor que cero. En otras palabras, la ecuación tiene tres raíces reales.

3. Calcular las soluciones de la ecuación reducida como se ha señalado,

$$r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{(-1)^3}{27}} = -\frac{1}{27} \qquad \text{y} \qquad \cos t = -\frac{q}{2r} = 0,$$

de manera que $t = \frac{1}{2}\pi$. De manera que las soluciones de (4.21) son

$$y_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{t}{3}\right) = 2\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}\cos\left(\frac{\frac{1}{2}\pi}{3}\right) = 1$$
$$y_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{t+2\pi}{3}\right) = 2\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}\cos\left(\frac{\frac{1}{2}\pi+2\pi}{3}\right) = -1$$
$$y_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{t+4\pi}{3}\right) = 2\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}\cos\left(\frac{\frac{1}{2}\pi+4\pi}{3}\right) = 0.$$

4. Calcular las raíces de la ecuación cúbica $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$. Finalmente, se remplazan los valores de las raíces obtenidas de la ecuación reducida en (4.19) $x = y - 2$. Así se tiene que las raíces buscadas son: $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ y $x_3 = -3$. Más aún la ecuación se puede reescribir como $(x+1)(x+2)(x+3) = 0$.

4.6. Propiedades de la función cúbica y su gráfica

Conceptos preliminares

Recuerde que la **recta tangente** a la gráfica de cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ es la recta que pasa por dicho punto y su pendiente es la derivada de la función f evaluada en x_0. Es decir, si $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, entonces la recta tangente tiene por ecuación $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

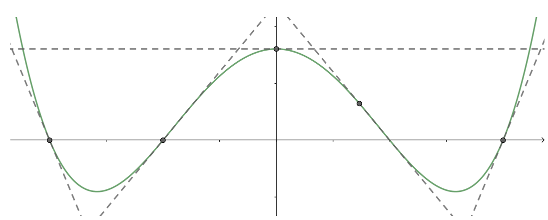


Figura 4.10: Las rectas tangentes a una gráfica de una función en diferente puntos.

Como se puede observar en la figura anterior 4.10, las rectas tangentes que ahí se muestran son de pendiente positiva en los puntos donde la gráfica de la función es creciente y de pendiente negativa en los tramos donde la función es decreciente. Esto es resultado del siguiente teorema, ver (Spivak 2012, 129).

Teorema 4.6.1 *Dada cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para la que esté bien definida su derivada, si $f'(x) > 0$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces f es creciente en dicho intervalo. Si $f'(x) < 0$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces f es decreciente en dicho intervalo*

Ahora, supongamos que la segunda derivada de la función f esta bien definida para algún número real x_0 y que la función $f''(x)$ es continua en x_0, entonces se tiene por definición que

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}.$$

De manera que si $f'(x_0) = 0$, entonces se tiene,

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)}{h}.$$

Luego, si $f''(x_0) > 0$, se tendrá por continuidad de f'' en x_0 que siempre que h sea lo suficientemente pequeño, $\frac{f'(x_0+h)}{h}$ es un número real positivo. Entonces, es este casos se tiene que: $f'(x_0+h) > 0$ o $f'(x_0+h) < 0$, cuando $h > 0$ y $h < 0$, respectivamente. Luego, por Teorema 4.6.1 f es creciente a la derecha de x_0 y decreciente a la izquierda de x_0. Por lo tanto, la función f tiene un mínimo local en x_0. De manera similar se prueba que si $f''(x_0) < 0$, la función f tiene un máximo local en x_0. En general, la segunda derivada ayuda a entender como es que la razón de cambio de la función original se está comportando. Por ejemplo, una función que es creciente y continua puede verse de varias maneras, considere la Figura 4.11, la curva roja corresponde a parte de la gráfica de una función creciente definida en los reales negativos y la curva azul corresponde a parte de la gráfica de una función creciente definida en los reales positivos.

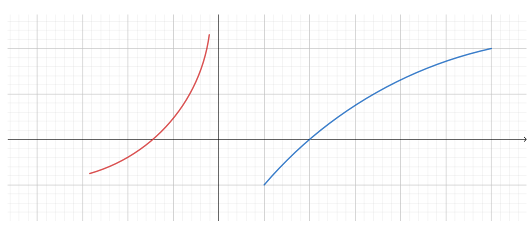


Figura 4.11: Las curvas roja y azul son partes de gráficas de funciones crecientes.

La gráfica de la función cúbica

Veamos como esbozar la gráfica de la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tomando en cuenta que los coeficientes $a \neq 0$, b, c y d son números reales. Primero, observemos que la función se puede reescribir como $f(x) = a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}\right)$. Consideremos al número a como un parámetro que varía en los números reales diferentes de cero y denotemos por $g(x) = x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$. Entonces,

- si $a \geq 1$, para $g(x) > 0$, $f(x) = ag(x) > g(x)$ y para $g(x) < 0$, $f(x) = ag(x) < g(x)$, que podemos ver en la Figura 4.12.

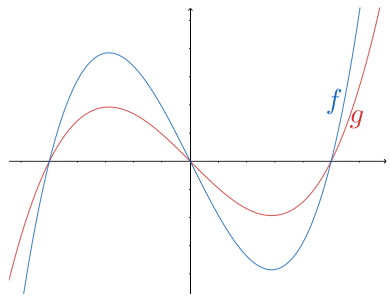


Figura 4.12: La gráfica de la función f y g si $a \geq 1$.

- Al contrario, si $0 < a < 1$, para $g(x) > 0$, $f(x) = ag(x) > g(x)$ y para $g(x) < 0$, $f(x) = ag(x) < g(x)$, ver Figura 4.13.

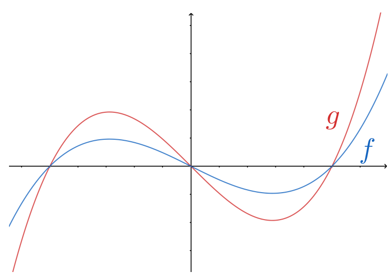


Figura 4.13: La gráfica de la función f y g si $0 < a < 1$.

- Si $a < 0$, entonces $-f(x) = -a(-g(x))$ y se aplican los casos anteriores para $-a$, ver Figura 4.14.

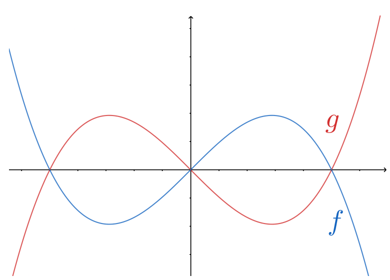


Figura 4.14: La gráfica de la función f y g si $a < 0$.

Por lo anterior, bastará esbozar las gráficas de las cúbicas cuando el coeficiente principal sea 1, es decir, $a = 1$. Supondremos entonces que $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.

Por otro lado, el coeficiente $d = f(0)$ es la ordenada del punto de intersección de la gráfica de la función f con el eje y. La relación entre la gráfica de f y la gráfica de la función $h(x) = x^3 + bx^2 + cx$ es que la función f es el resultado de trasladar d unidades, en sentido vertical, a la gráfica de h. Esto se ejemplifica en la Figura 4.15.

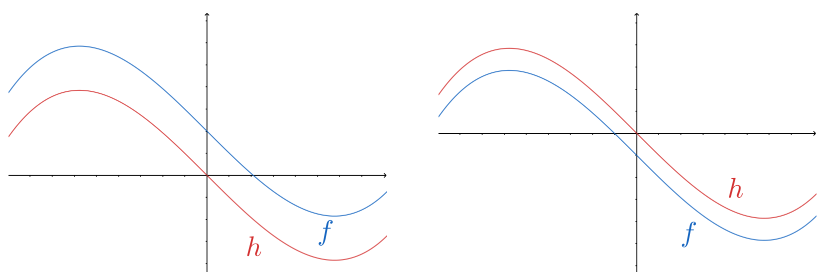


Figura 4.15: Presentamos el ejemplo con $h(x) = x^3 - x$, $f(x) = h(x) + 2$ y $f_1 = h(x) - 1$.

Por lo tanto, bastará considera a la función cúbica

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx = x(x^2 + bx + c).$$

Observación 9 *Si $x \to \infty$, entonces $f(x) \to \infty$, y si $x \to -\infty$, entonces $f(x) \to -\infty$. Luego, se tienen que existen dos números reales u y v tales que $f(u) < 0$ y $f(v) > 0$. En consecuencia por el teorema del valor intermedio, ver (Spivak 2012, 124), se puede asegurar que hay un número real x tal que $f(x) = 0$. Compare este resultado con el teorema 4.5.1.*

Como $f(x) = x^3 + bx^2 + cx = x(x^2 + bx + c)$, tenemos que la gráfica de f intersecta al eje real en el origen. Si $b = c = 0$, entonces $f(x) = x^3$ y el origen del plano cartesiano es el único punto de intersección entre la gráfica de $f(x) = x^3$ y el eje x. En caso contrario, cuando $ab \neq 0$, si el polinomio $x^2 + bx + c$ tiene dos raíces reales distintas, entonces la gráfica de f corta tres veces al eje x; en cambio si el polinomio $x^2 + bx + c$ tiene una sola raíz real de multiplicidad 2, entonces la gráfica de f corta solo dos veces al eje coordenado; por último si el polinomio $x^2 + bx + c$ no tiene raíces reales, la gráfica de f corta una sola vez al eje x. Ver Figura 4.16 donde se esbozan las gráficas de funciones cúbicas.

Continuemos aplicando lo visto desde la sección anterior a la función cúbica $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$.

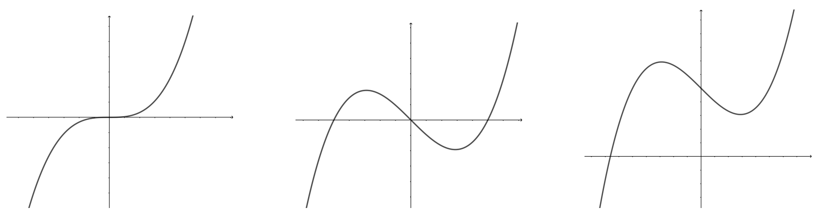


Figura 4.16: Las gráficas de las funciones $f(x) = x^3$, $f(x) = x(x-1)(x+1)$ y $f(x) = x(x-1)(x+1)+1$.

Primero como $f'(x) = 3x^2+2bx+c$, las raíces x_0 y x_1 del polinomio $3x^2+2bx+c$ son $x_0 = -\frac{b}{3}+\frac{\sqrt{b^2-3c}}{3}$ y $x_1 = -\frac{b}{3}-\frac{\sqrt{b^2-3c}}{3}$. Después, como $f''(x) = 6x+2b$, entonces $f''(x) = 0$ si y solo si $x = -\frac{b}{3}$, también $f''(x) < 0$ cuando $x < -\frac{b}{3}$ y $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{b}{3}$. Además, si las raíces son reales, se tendrá que x_0 es un mínimo local de f (ya que $f''(x_0) > 0$), mientras que x_1 es un máximo local (ya que $f''(x_1) < 0$). También en este caso se tendrá que para $x < x_1$, la función f es creciente, para $x > x_1$ y cercana a x_1 la función es decreciente, y para $x < x_0$ y cercana a x_0 la función f es decreciente y para $x > x_0$ la función es creciente.

Como puede observar, las funciones cúbicas tienen dos concavidades, que se pueden ver de distintas maneras, por ejemplo en el caso que x_0 es mínimo, entonces se tendrá una concavidad hacia arriba y en el caso de que x_1 sea máximo se tendrá una concavidad hacia abajo. El cambio de concavidad se dará en el punto $x = -\frac{b}{3}$. Con más precisión, cuando la función tenga en x_0 un mínimo y en x_1 un máximo, la función es cóncava hacia abajo para $x \in (-\infty, -\frac{b}{3})$ y cóncava hacia arriba en $x \in (-\frac{b}{3}, \infty)$, en este sentido, basta estudiar sus puntos máximos y mínimos.

De lo anterior, el punto donde se da el cambio de concavidad de la gráfica de f depende del coeficiente b.
En cuanto al coeficiente lineal c, como $f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = c$, la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(0, f(0) = d)$ tiene como ecuación $y - f(0) = f'(0)(x-0)x$, es decir $y = cx + d$.

Simetría en las funciones cúbicas

Para lo que resta de esta sección bastará con considerar las curvas de la forma $y = x^3+px$. Puede convencerse de esto, observando dada la curva de forma reducida $y = x^3+px+q$, se puede aplicar una traslación horizontal $(x, y) \to (x, y-q) = (z, w)$ a los ejes coordenados. De tal manera que en el nuevo sistema de ejes coordenados (z, w) se tiene la curva

$$w = z^3 + pz.$$

Como se ve en la Figura 4.17 cuando se considera una curva $f(x, y) = 0$, un punto O se le llama **centro de simetría de la curva** si tiene la propiedad de que para cada punto P y si la recta PO corta a la curva en otro punto Q, entonces el punto O, es el punto medio del segmento PQ.

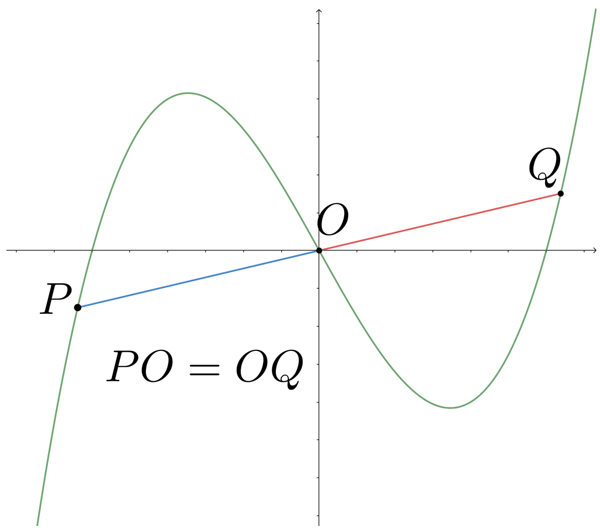


Figura 4.17: El origen es centro de simetría, ya que es el punto medio del segmento con extremos P y Q, puntos de la curva.

En general, para cualquier curva en el plano se tiene es siguiente teorema.

Teorema 4.6.2 *Una curva definida por la ecuación $f(x, y) = 0$ es simétrica con respecto al origen $(0, 0)$ si, y solo si $f(-x, -y) = f(x, y)$, para cualquier punto (x, y) de la curva.*

Demostración. Sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera en la curva $f(x, y) = 0$, si la curva es simétrica con respecto al origen entonces $(-x, -y)$ es un punto de la curva, por lo que, $f(-x, -y) = f(x, y) = 0$.
Recíprocamente si $f(-x, -y) = f(x, y)$, se tendrá que (x, y) está en la curva si, y solo si $(-x, -y)$ es un punto de la curva, luego la curva $f(x, y) = 0$ es simétrica respecto al origen $(0, 0)$.

$\blacksquare$

Por el teorema anterior, cualquier curva $y = x^3 + px$ es simétrica con respecto al origen, pues al sustituir x por $-x$ y y por $-y$, se obtiene $-y = (-x)^3 - px$ que es equivalente a $-y = -x^3 - px = -(x^3 + px)$ y al multiplicar ambos lados de la ecuación -1, se observa que la ecuación original no se altera.

En términos del lenguaje de funciones, si f es una función real tal que $f(-x) = -f(x)$ se dice que es una **función impar**. Estas funciones cumplen que su gráfica es una curva simétrica con respecto al origen. Para comprobar que la gráfica de estas funciones, es una curva simétrica con respecto al origen, basta considerar que dicha curva tiene ecuación $y - f(x) = 0$, y al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ se tiene que $-y - f(-x) = -y - (-f(x)) = -(y - f(x)) = 0$, por el teorema anterior, la curva es simétrica con respecto al origen.
Podemos ahora de otra manera verificar que la curva $y = x^3 + px$ es simétrica con respecto al origen, ya que la función $f(x) = x^3 + px$ es impar.

4.7. Ecuaciones de cuarto grado

El matemático Ludovico Ferrari (1522-1565) publicó un método, similar al de las ecuaciones cúbicas, para encontrar las soluciones de una ecuación de cuarto grado de la forma:

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0. \tag{4.22}$$

Así como en la sección 4.5 el cambio de variable $y \to x + \frac{b}{4}$, es útil para reducir la ecuación cuártica 4.22 a una cuártica con coeficiente cúbico nulo, es decir, a la forma siguiente:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \tag{4.23}$$

donde

$$p = \frac{8c - 3b^2}{8}, \qquad q = \frac{b^3 - 4bc + 8d}{8}, \qquad r = \frac{256e - 64bd + 16bc^2 - 3b^4}{256}.$$

De acuerdo al coeficiente q se distinguen los dos casos siguientes.

Caso 1. Si $q = 0$, se probará que las soluciones de (4.22) son las siguientes:

$$y = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}} - r}. \tag{4.24}$$

Tenga en cuenta que estas son raíces cuadradas complejas, por tanto cada raíz da lugar a dos valores. En efecto, se usa primero el cambio de variable $u = y^2$ en la ecuación (4.22), dando resultado la siguiente ecuación de segundo grado.

$$u^2 + pu + r = 0,$$

la cual se resuelve por la solución de radicales, y por lo tanto:

$$u = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4r}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - r},$$

y como raíz cuadrada de u es la expresión que da las soluciones buscadas de la ecuación original, se obtiene qué esta es (4.24).

Caso 2. Si $q \neq 0$, se probará que las soluciones de la ecuación (4.22) son las siguientes:

$$y = \pm\frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(-\frac{\epsilon}{2} - p - \frac{\delta q}{\sqrt{2\epsilon}}\right)}, \tag{4.25}$$

donde $\epsilon \neq 0$ y $\delta = 1, -1$, lo que da lugar a dos expresiones, una cuando δ toma el valor 1 y otra cuando toma el valor -1, en ambos casos cada una de las raíces complejas arrojan dos valores. Por otro lado, ϵ, llamada *resolvente cúbica*, es un número complejo y es una de las raíces de la siguiente ecuación cúbica

$$x^3 + 2px^2 + (p^2 - 4r)x - q^2 = 0, \tag{4.26}$$

así revertiendo las sustituciones se encuentran la soluciones de la ecuación (4.22). Para ver que esta fórmula se cumple, observe que

$$\begin{aligned}\left(y^2 + \frac{p+\epsilon}{2}\right)^2 &= y^4 + (p+\epsilon)y^2 + \left(\frac{p+\epsilon}{2}\right)^2\\ &= y^4 + py^2 + \epsilon y^2 + \frac{1}{4}\left(\epsilon^2 + 2p\epsilon + p^2\right),\end{aligned} \tag{4.27}$$

ahora se sustituye (4.27) en (4.22) y se observa que las siguientes ecuaciones son equivalentes

$$\begin{aligned}&y^4 + py^2 + qy + r = 0 \Leftrightarrow\\ &\left(y^2 + \frac{p+\epsilon}{2}\right)^2 - \epsilon y^2 - \frac{1}{4}\left(\epsilon^2 + 2p\epsilon + p^2\right) + qy + r = 0 \Leftrightarrow\\ &\left(y^2 + \frac{p+\epsilon}{2}\right)^2 - \left[\left(\sqrt{\epsilon}y\right)^2 - \frac{q}{\sqrt{\epsilon}}\left(\sqrt{\epsilon}y\right) + \frac{1}{4}\left(\epsilon^2 + 2p\epsilon + p^2 - 4r\right)\right] = 0 \Leftrightarrow\\ &\left(y^2 + \frac{p+\epsilon}{2}\right)^2 - \left[\left(\sqrt{\epsilon}y - \frac{q}{\sqrt{\epsilon}}(2\sqrt{\epsilon}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\epsilon^2 + 2p\epsilon + p^2 - 4r\right) - \frac{q^2}{4\epsilon}\right] = 0 \Leftrightarrow\\ &\left(y^2 + \frac{p+\epsilon}{2}\right)^2 - \left[\left(\sqrt{\epsilon}y - \frac{q}{\sqrt{\epsilon}}\left(2\sqrt{\epsilon}\right)\right)^2 + \frac{1}{4\epsilon}\left(\epsilon^3 + 2p\epsilon^3 + (p^2 - 4r)\epsilon - q^2\right)\right] = 0,\end{aligned}$$

Note que como ϵ es la solución de la ecuación (4.27), es decir $\epsilon^3 + 2p\epsilon^3 + (p^2 - 4r)\epsilon - q^2 = 0$, se sigue que la última ecuación es equivalente a la siguiente diferencia de cuadrados, y está es a su vez equivalente a las siguientes tres ecuaciones.

$$
\begin{aligned}
&\left(y^2 + \frac{p+\epsilon}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\epsilon}y - \frac{q}{\sqrt{\epsilon}}(2\sqrt{\epsilon}\right)^2 = 0,\\
\Leftrightarrow &\left(y^2 + \frac{p+\epsilon}{2} + \sqrt{\epsilon}y - \frac{q}{2\sqrt{\epsilon}}\right)\left(y^2 + \frac{p+\epsilon}{2} - \sqrt{\epsilon}y + \frac{q}{2\sqrt{\epsilon}}\right) = 0,\\
\Leftrightarrow &\left(y^2 + \sqrt{\epsilon}y + \frac{\epsilon}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2\sqrt{\epsilon}}\right)\left(y^2 - \sqrt{\epsilon}y + \frac{\epsilon}{2} + \frac{p}{2} + \frac{q}{2\sqrt{\epsilon}}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Luego con $\delta = -1, 1$ la última expresión puede escribirse como

$$y^2 - \delta\sqrt{\epsilon}y + \frac{\epsilon}{2} + \frac{p}{2} + \frac{q\delta}{2\sqrt{\epsilon}} = 0.$$

Después, se resuelve esta última ecuación con la formula de segundo grado y se obtiene que

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}\left(\delta\sqrt{\epsilon} \pm \sqrt{\sqrt{\epsilon}^2 - 4\left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{p}{2} + \frac{\delta q}{2\sqrt{\epsilon}}\right)}\right)\\
&= \delta\frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{4} - \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{p}{2} + \frac{\delta q}{2\sqrt{\epsilon}}\right)}\\
&= \delta\frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \pm \sqrt{-\frac{\epsilon}{4} - -\frac{\epsilon}{2} - \frac{p}{2} - \frac{\delta q}{2\sqrt{\epsilon}}}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, se revierten las sustituciones hechas para obtener las soluciones de la ecuación original.

Ejemplo 9. Para resolver la ecuación

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2\sqrt{6}x + 2\sqrt{6} - \frac{3}{2} = 0,$$

basta verificar que es equivalente a

$$(x+1)^4 - 2(x+1)^2 - 2\sqrt{6}(x+1) - \frac{1}{2} = 0,$$

de manera que al efectuar el cambio de variable $y = x + 1$ en la ecuación original se tiene la ecuación reducida

$$y^4 - 2y^2 + 2\sqrt{6}y - \frac{1}{2} = 0,$$

al hacer $p = -2$, $r = -\frac{1}{2}$ y $q = -2\sqrt{6}$ tenemos que la resolvente cúbica, ver (4.26), es la siguiente

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 24 = 0,$$

la cuál se puede resolver de acuerdo al método general para ecuaciones de tercer grado. Pero basta conocer una sola de sus raíces, podemos considerar su única raíz real $\epsilon = 4$ y $\sqrt{\epsilon} = 2$.

Finalmente se usa la formula (4.25) que asegura que

$$y = \delta + \sqrt{\frac{\sqrt{6}\delta}{2}},$$

así las raíces dela ecuación son las siguientes

$$y = -1 \pm \sqrt[4]{\frac{3}{2}}, \qquad\qquad y = 1 \pm i\sqrt[4]{\frac{3}{2}},$$

de manera que al revertir el cambio de variable $y = x + 1$, se tiene que las raíces de la ecuación original son

$$x = -2 - \sqrt[4]{\frac{3}{2}}, \qquad x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} - 2, \qquad x = -i\sqrt[4]{\frac{3}{2}}, \qquad x = i\sqrt[4]{\frac{3}{2}}.$$

Los discutido en este capítulo deja constancia del trabajo de matemáticos como Cardano, Tartaglia y Ferrari, que consiguieron dar métodos para resolver cualquier ecuación de grado menor o igual a cuatro. Los intentos por encontrar una fórmula general para ecuaciones con grado mayor o igual a cinco fracasaron. Sin embargo, Henrik Abel (1802-1829) probaría más tarde, que no hay una fórmula general para estas ecuaciones. Pero, como se verá en el próximo capítulo, hay técnicas que pueden facilitar el estudio de estos polinomios.

4.8. Ejercicios del capítulo 4

Ejercicio 1. Encuentra todos los polinomios no constantes $P(x)$ y $Q(x)$ que satisfagan la identidad, $P(x)^4 = Q(x)^3 + Q(x)^2 + Q(x) + 1$.

Ejercicio 2. Una sucesión de polinomios $P_n(x)$ se definen de la siguiente manera, $P_0(x) = x^3 - 4x$ y para toda $n \geq 0$ como $P_{n+1}(x) = P_n(x+1)P_n(1-x) - 1$. Muestre que 2 es una raíz de $P_{2022}(x)$.

Ejercicio 3. Una sucesión de polinomios $P_n(x)$ se definen de la siguiente manera, $P_0(x) = x^3 - 4x$ y para toda $n \geq 0$ como $P_{n+1}(x) = P_n(x+1)P_n(1-x) - 1$. Muestre que $x^{2022}|P_{2022}(x)$

Ejercicio 4. Determina el residuo que resulta de dividir el polinomio $P(x)$ entre $(x-1)(x-2)(x-3)$, si se conoce que $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ y $P(3) = 5$.

Ejercicio 5. Las raíces r, s, t del polinomio $Q(x) = x^3 - 21x + 35$ son reales y diferentes. Encuentre un polinomio $P(x) = x^3 + ax + b$ tal que $P(r) = s$, $P(s) = t$ y $P(t) = r$, es decir que $P(x)$ permute de una manera particular las raíces de $Q(x)$.

Ejercicio 6. Con $Q(x)$, r, s y t como en el ejercicio anterior, ahora encuentre al polinomio cuadrático $P(x) = x^2 + ax + b$ tal que $P(r) = s$, $P(s) = t$ y $P(t) = r$, es decir que $P(x)$ permuta de una manera particular las raíces de $Q(x)$.

Ejercicio 7. Sean a, b y c los lados de un triángulo ΔABC con ángulos α, β y γ opuestos a los lados a, b y c, respectivamente. Si a, b y c son las raíces de la ecuación con coeficientes reales $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Encuentre el valor de $\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c}$ en términos de p, q y r.

Ejercicio 8. Los números enteros no negativos p, q, r y s son las raíces del polinomio real $P(x) = x^4 - 10x^3 + ax^2 - bx + c$. Calcule el valor máximo de $a+b+c$.

Ejercicio 9. Sean a, b y c raíces del polinomio real $P(x) = x^3 - px^2 + qx - r$. Calcule el producto $(a-b)(b-c)(c-a)$ en términos de p, q y r.

Ejercicio 10. Si $P(x)$ es un polinomio mónico de grado 4 tal que $P(1) = 10$, $P(2) = 10$ y $P(3) = 30$, determina el valor de $P(12) + P(-8)$.

Ejercicio 11. Encuentre las condiciones que deben satisfacer los números reales a, b, c de manera que el polinomio, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, tenga sus tres raíces diferentes y que formen una progresión aritmética.

4.9. Sugerencias a ejercicios del capítulo 4

Sugerencia al Ejercicio 1. Supongamos que los polinomios cumplen que $gradP(x) = n$ y $gradQ(x) = m$. Entonces $4n = gradP(x)^4 = 3m$. Como $(4,3) = 1$ y m y n son números enteros (positivos), $m = 4p$ y $n = 3q$ Más aún, $4(3q) = 3(4p)$, entonces $p = q$. Por lo tanto, $gradP(x) = 3p$ y $gradQ(x) = 4p$ para algún p entero positivo. La segunda observación es que por la igualdad $P(x)^4 = Q(x)^3 + Q(x)^2 + Q(x) + 1$, $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen ninguna raíz en común, en consecuencia no se dividen entre sí. Por otro lado, de esa misma igualdad

$$P(x)^4(Q(x) - 1) = Q(x)^4 - 1,$$

Entonces,

$$P(x)^3(P(x)Q'(x) + 4P'(x)Q(x) - 4P'(x)) = 4Q(x)^3Q'(x),$$

Por lo tanto, $P(x)^3|Q'(x)$, y eso quiere decir que $9|9p = gradP(x)^3|gradQ'(x) = 4p - 1$, lo cual no es posible.

Sugerencia al Ejercicio 2. Primero se observa que los polinomios son pares, es decir que cumplen para toda x, que $P(-x) = P(x)$. Será más fácil probar una afirmación más general: El número 2 es raíz de los polinomios con subíndice par, esto es: $P_{2k}(2) = 0$ para todo entero $k \geq 0$. Para $k = 0$; $P_0(2) = 0$. Para $k = 1$; $P_2(2) = P_1(3)P_1(-1) - 1 = (P_0(4)P_0(2) - 1)(P_0(2)P_0(0) - 1) - 1 = (-1)(-1) - 1 = 1 - 1 = 0$. Ahora usamos inducción. Supongamos por hipótesis de inducción que es válido para $k = 2n$, y veamos que es valido para $k = 2n + 2$;

$$\begin{aligned} P_{2n+2}(2) &= P_{2n+1}(3)P_{2n+1}(-1) - 1 = \\ &= (P_{2n}(4)P_{2n}(2) - 1)(P_{2n}(2)P_{2n}(0) - 1) - 1 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Luego siempre es válido para cualquier $k \geq 0$, en particular para $k = 1011$.

Sugerencia al Ejercicio 3. Mostraremos algo más general: Para todo $k \geq 0$ se cumple que, $x^{2k}|P_{2k}(x)$.

Para $k = 0$; $P_0(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$, luego, $x^0|P_0(x)$, más aún $x|P_0(x)$. Para $k = 1$; se usa el caso anterior y se procede como sigue,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_1(x+1)P_1(1-x)-1 \\ &= (P_0(x+2)P_0(-x)-1)(P_0(2-x)P_0(x)-1)-1 \\ &= P_0(x+2)P_0(-x)P_0(2-x)P_0(x)-P_0(x+2)P_0(-x)-P_0(2-x)P_0(x) \end{aligned}$$

Pero, $x^2|P_0(x+2)P_0(-x)P_0(x)P_0(2-x)$ pues $x|P_0(x)$ y $x|P_0(-x)$. Ahora, falta verificar que $x^2|Q(-x)+Q(x)$ con $Q(x)=P_0(x)P_0(2-x)$, lo que es inmediato ya que $Q(-x)+Q(x)=(x^3-4x)(-2x^3-16x)=x^2(-2x^4-8x^2+64)$.

El procedimiento continuará de manera análoga, probando por inducción matemática, supongamos el resultado cierto para k y veamos su validez para $k+1$, es decir debemos de verificar que, $x^{2k+2}|P_{2k+2}(x)$. Pero,

$$\begin{aligned} &P_{2k+2}(x)=P_{2k+1}(x+1)P_{2k+1}(1-x)-1= \\ &=(P_{2k}(2-x)P_{2k}(x)-1)(P_{2k}(x+2)P_{2k}(-x)-1)-1 \\ &=P_{2k}(x+2)P_{2k}(-x)P_{2k}(x)P_{2k}(2-x)-P_{2k}(2-x)P_{2k}(x)-P_{2k}(x+2)P_{2k}(-x) \end{aligned}$$

Pero, $x^{2k+2}|P_{2k}(x+2)P_{2k}(-x)P_{2k}(x)P_0(2-x)$ pues $x^{2k}|P_{2k}(x)$ y $x^{2k}|P_{2k}(-x)$. Ahora, falta verificar que $x^{2k+2}|Q(x)+Q(-x)$ con $Q(x)=P_{2k}(x)P_{2k}(2-x)$. Note que $Q(x)+Q(-x)=P_{2k}(x)(P_{2k}((2-x)-P_{2k}(2+x))$, como x^{2k} es factor de $P_{2k}(x)$ bastará ver que $x^2|(P_{2k}((2-x)-P_{2k}(2+x))$, pero $P(x)$ es impar, luego $P_{2k}((2-x)-P_{2k}(2+x)$ es par y entonces es divisible entre x^2. Luego, x^{2k+2} divide a $Q(x)+Q(-x)$. Con esto se termina la prueba, concluyendo el problema con el caso donde $k=1011$.

Sugerencia al Ejercicio 4. Por teorema del residuo, existe un polinomio $Q(x)$, tal que $P(x)=Q(x)(x-1)(x-2)(x-3)+(ax^2+bx+c)$. Al evaluar en $x=1,2,3$ se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a+b+c=P(1)=2 \\ 4a+2b+c=P(2)=3 \\ 9a+3b+c=P(3)=5 \end{cases}$$

cuya solución es $a=\frac{1}{2}$, $b=1$ y $c=\frac{1}{2}$. Por lo tanto el residuo es $R(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$.

Sugerencia al Ejercicio 5. Por las fórmulas de Vieta, $r+s+t=0$, $rs+st+tr=21$ y $rst=-35$. Si $P(x)$ permuta las raíces entonces

$$\begin{aligned} r^3+ar+b&=s \\ s^3+as+b&=t \\ t^3+at+b&=r. \end{aligned}$$

Así, sumando las tres igualdades se tiene que $r^3+s^3+t^3=-3b$, pues $r+s+t=0$. Luego, por la identidad de Newton $r^3+s^3+t^3=(r+s+t)^3-3(r+s+t)(rs+st+tr)+3rst=-105$. Por lo tanto, $b=35$. Entonces $P(x)=x^3+ax+35$, ahora al evaluar en $x=r,s,t$, se tiene que

$$\begin{aligned} r^3+ar+35&=s\\ s^3+as+35&=t\\ t^3+at+35&=r \end{aligned}$$

Pero, también se tiene: $r^3-21r+35=0$, $s^3-21s+35=0$ y $t^3-21t+35=0$. Entonces, remplazando estas igualdades en el anterior sistema de ecuaciones y factorizando, se tiene que

$$\begin{aligned} r(a+21)&=s\\ s(a+21)&=t\\ t(a+21)&=r \end{aligned}$$

Entonces, al multiplicar estás tres últimas igualdades se tiene que $rst(a+21)(a+21)(a+21)=rst$, pero por las fórmulas de Vieta $rst=-35\neq 0$, y así $(a+21)^3=1$. Por lo tanto $a=-20$ y el polinomio buscado es $P(x)=x^3-35x-20$.

Sugerencia al Ejercicio 6. Si $P(x)$ permuta las raíces entonces

$$\begin{aligned} r^2+ar+b&=s\\ s^2+as+b&=t\\ t^2+at+b&=r, \end{aligned}$$

entonces $r^2+s^2+t^2=-3b$, pues por las fórmulas de Vieta $r+s+t=0$. Por otro lado, por la identidad de Newton $r^2+s^2+t^2=(r+s+t)^2-2(rs+st+tr)=-2(21)=42$. Por lo tanto, $b=-14$. Entonces $P(x)=x^2+ax-14$. Ahora, multiplicando cada una de las tres ecuaciones del sistema anterior, respectivamente por r, s, t, se tiene que

$$\begin{aligned} r^3+ar^2+rb&=sr\\ s^3+as^2+sb&=ts\\ t^3+at^2+tb&=rt \end{aligned}$$

Entonces al sumar las igualdades anteriores, da que

$$(r^3+s^3+t^3)+a(r^2+s^2+t^2)+b(r+s+t)=sr+ts+rt,$$

las fórmulas de Vieta y de Newton, junto con algunos resultados del ejercicio anterior, ayudan a reducir la identidad a,

$$-105+a(42)+b(0)=-21,$$

entonces $a = 2$ y $P(x) = x^2 + 2x - 14$.

Sugerencia al Ejercicio 7. Por las fórmulas de Vieta se sabe que $a+b+c = p$, $ab+bc+ca = q$ y $abc = r$. Por otro lado, se sabe que en un triángulo ΔABC, como el del enunciado, se cumple la ley de los cosenos,

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \qquad \cos\beta = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \qquad \cos\gamma = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c} &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2abc} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2abc} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2abc} \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc} = \frac{p^2-2q}{2r}.\end{aligned}$$

Sugerencia al Ejercicio 8. Como, $P(x) = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$, entonces

$$P(-1) = (p+1)(q+1)(r+1)(s+1) = 11 + a + b + c.$$

Por lo que bastará calcular el valor máximo de $(p+1)(q+1)(r+1)(s+1) - 11$.

Por otro lado, las fórmulas de Vieta, garantizan que, $(p+1)+(q+1)+(r+1)+(s+1) = 14$. Como p, q, r y s son enteros no negativos, si dos de ellos están separados por al menos dos unidades, por ejemplo que $p \geq q+2$, que es equivalente a $(p+1) \geq (q+1)+2$, entonces $((p+1)-1)((q+1)+1) > (p+1)(q+1)$. Lo que quiere decir que el máximo se alcanza cuando la distancia entre cualesquiera dos de los factores $(p+1), (q+1), (r+1), (s+1)$ es a lo más 1. Los valores, para lograr el máximo no pueden ser todos iguales, pero si cercanos al promedio que es $\frac{14}{4}$, luego pueden ser $p+1 = 4$, $q+1 = 4$, $r+1 = 3$ y $s+1 = 3$, que suman 14. Luego, $p = 3$, $q = 3$, $r = 2$, $s = 2$. Finalmente, $a+b+c = 144-11 = 133$ es el valor buscado.

Sugerencia al Ejercicio 9. Se tiene que $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. Su derivada esta dada por: $P'(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c)$ al mismo tiempo, usando la definición de $P(x)$ se tiene, $P'(x) = 3x^2 - 2px + q$. Por lo que,

$$3x^2 - 2px + q = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c).$$

Por lo tanto, si evaluamos en $x = a$, $x = b$ y $x = c$, tenemos,

- $(a-b)(a-c) = 3a^2 - 2pa + q = 3a(a-\alpha) + q = A + q$.
- $(b-a)(b-c) = 3b^2 - 2pb + q = 3b(b-\alpha) + q = B + q$.
- $(c-a)(c-b) = 3c^2 - 2pc + q = 3c(c-\alpha) + q = C + q$.

con $A = 3a(a-\alpha)$, $B = 3b(b-\alpha)$, $C = 3c(c-\alpha)$ y $\alpha = \frac{2p}{3}$. Observe que

$$\begin{aligned}
&-\left((a-b)(b-c)(c-a)\right)^2 = (A+q)(B+q)(C+q) = \\
&= ABC + (AB+BC+CA)q + (A+B+C)q^2 + q^3.
\end{aligned}$$

Ahora solo falta ver que ABC, $AB+AC+BC$ y $A+B+C$ se pueden expresar en términos $p = a+b+c$, $q = ab+bc+ca$ y $r = abc$. Note que,

$$\begin{aligned}
ABC &= 27abc(a-\alpha)(b-\alpha)(c-\alpha) \\
&= 27abc\left(abc - (ab+bc+ca)\,\alpha + (a+b+c)\,\alpha^2 - abc\,\alpha^3\right) \\
&= 27r^2 - 18pqr + 2rp^3.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
A+B+C &= 3a(a-\alpha) + 3b(b-\alpha) + 3c(c-\alpha) \\
&= 3(a^2+b^2+c^2) - 3\alpha(a+b+c) \\
&= 3(p^2-2q) - 2p^2 = p^2 - 6q.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
AB+AC+BC &= 9ab(a-\alpha)(b-\alpha) + 9ac(a-\alpha)(c-\alpha) + 9bc(b-\alpha)(c-\alpha) \\
&= 9[(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2] \\
&\quad - 9\alpha[(a^2b + a^2c + b^2c) + (ab^2 + ac^2 + bc^2)] \\
&\quad + 9\alpha^2(ab+ac+bc) \\
&= 9(q^2 - 2rp) - 3(2p^2q - 6rp) + 4(qp^2) \\
&= 9q^2 - 2p^2q.
\end{aligned}$$

pues

- $(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) = q^2 - 2rp.$
- $(a+b)(b+c)(c+a) = (ab+bc+ca)(a+b+c) - abc = pq - r.$
- $(a^2b + a^2c + b^2c) + (ab^2 + ac^2 + bc^2) = (a+b)(b+c)(c+a) - 2abc = pq - 3r.$

Sugerencia al Ejercicio 10. Sea $Q(x) = P(x) - 10x$. Se tiene que $Q(1) = P(1) - 10 = 10 - 10 = 0$, por hipótesis. Lo mismo sucede con $Q(2) = P(2) - 20 = 20 - 20 = 0$ y $Q(3) = P(3) - 30 = 30 - 30 = 0$. Por lo tanto 1, 2 y 3 son raíces de $Q(x)$ y así $(x-1)(x-2)(x-3)$ divide a $Q(x) = P(x) - 10x$. Como $P(x)$ es un polinomios de grado 4, también $Q(x)$ lo es, por lo que existe otra raíz de $Q(x)$, que llamaremos α, luego $P(x) - 10x = (x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)$, por lo que,

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha) + 10x \tag{4.28}$$

Ahora, se remplazan $x = 12$ y $x = -8$ en (4.28), y se obtienen las siguientes igualdades, $P(12) = 990(12 - \alpha) + 120$, $P(-8) = 990(8 + \alpha) - 80$. De donde, $P(12)+P(-8) = (990(12-\alpha)+120)+(990(8+\alpha)-80) = 990(12+8)+40 = 19840.$

Sugerencia al Ejercicio 11. Si α_1, α_2, α_3 son las raíces, se sabe que por las fórmulas de Vieta que,

$$a = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \tag{4.29}$$

$$b = -(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1), \tag{4.30}$$

$$c = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3). \tag{4.31}$$

Ahora, si las raíces forman una progresión aritmética, podemos suponer que, $\alpha_1 = \alpha - d$, $\alpha_2 = \alpha$ y $\alpha_3 = \alpha + d$. Así, por (4.29), $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3\alpha = -a$. Por lo que $\alpha = -\frac{a}{3}$, y entonces

$$\alpha_1 + \alpha_3 = -\frac{2}{3}a \tag{4.32}$$

y por (4.31) se tiene que

$$\alpha_1\alpha_3 = -\frac{c}{\alpha_2} = \frac{3c}{a}. \tag{4.33}$$

Luego, por (4.32) y (4.33) se cumple lo siguiente

$$\alpha_1 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^3 - 27c}{a}}, \qquad \alpha_2 = -\frac{a}{3}, \qquad \alpha_3 = -\frac{a}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^3 - 27c}{a}}.$$

donde se debe cumplir $a \neq 0$, y $\frac{a^3-27c}{a} > 0$.

Finalmente, por (4.30), también se debe de cumplir que.

$$\begin{aligned} b =&\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_3\alpha_1 \\ =& -\frac{a}{3}(-\frac{2}{3}a) + 3\frac{c}{a} = \frac{2a^2}{9} + \frac{3c}{a} = \frac{2a^3 + 27c}{9a}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior las condiciones que han de cumplirse para que las raíces del polinomio forman una progresión aritméticas son:

$$a \neq 0, \qquad \frac{a^3 - 27c}{a} > 0 \qquad \text{y} \qquad b = \frac{2a^3 + 27c}{9a}.$$

Más aún, la diferencia de la progresión es,

$$\alpha_1 - \alpha_2 = -\frac{a}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^3 - 27c}{a}} - \left(-\frac{a}{3}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^3 - 27c}{a}}.$$

Capítulo 5

Polinomios de grado superior y de varias variables

El primer resultado en este capitulo es que en general, cualquier polinomio de grado n tiene a los más n raíces distintas.

Teorema 5.0.1 *Si el polinomio $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tiene $n + 1$ raíces distintas, entonces el polinomio es idénticamente cero. De lo que se concluye que un polinomio de grado n puede tener a lo más n raíces distintas*

Demostración. Es claro cuando $n = 1$. Para $n = 2$, suponga que $P(x)$ tiene más de 2 raíces de las cuáles consideramos 3 de ellas: r_1, r_2 y r_3 entonces por teorema del factor $P(x) = (x-r_3)Q(x)$ para algún polinomio $Q(x)$. Como el grado del polinomio $Q(x)$ debe ser 1, y tiene dos raíces (r_1 y r_2) y como se mencionó anteriormente es claro que $Q(x)$ debe ser el polinomio cero, en consecuencia $P(x)$ también lo es. Ahora usemos el principio de inducción matemática para terminar. Supongamos que el resultado es valido para $n - 1$ y tomemos un polinomio $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ que tiene raíces $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$, entonces $P(x) = (x - r_{n+1})Q(x)$ para algún polinomio $Q(x) = x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0$ con raíces r_1, $r_2, \dots, r_n$. Entonces $Q(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$, que tiene n raíces que por hipótesis de inducción debe ser el polinomio idénticamente cero, por lo que $P(x)$ también es idénticamente cero.

■

En la demostración del teorema anterior se uso el teorema del factor para garantizar que si a es el cero de un polinomio $P(x)$ es posible hallar un polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = (x - a)Q(x)$. Si $Q(a) \neq 0$, diremos que a es un **cero de orden 1**, pero si $Q(a) = 0$ diremos que a es un **cero de orden mayor que 1**. Si existe un número natural m y un polinomio $Q(x)$ tal que, $P(x) = (x - a)^m Q(x)$, pero $Q(a) \neq 0$, diremos que a es **un cero de orden m o o una raíz de multiplicidad m** de $P(x)$.

5.1. Fórmulas de Vieta

Sí el polinomio mónico

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

tiene n raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces

$$\begin{aligned}
&x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n) \\
&= x^n - (x_1 + \cdots + x_n)x^{n-1} + (x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} + \\
&+ \cdots + (-1)^n x_1 \cdots x_n,
\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -(x_1 + \cdots + x_n), \\
a_{n-2} &= x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\
&\vdots \\
a_{n-j} &= (-1)^j(x_1x_2 \ldots x_j + \cdots + x_1x_{j+1} \ldots x_n + x_2x_3 \ldots x_{j+1} + \cdots + x_{n+1-j}x_{n-j} \cdots x_n), \\
&\vdots \\
a_0 &= (-1)^n x_1 \ldots . x_n.
\end{aligned}$$

Estas identidades son conocidas como **las Fórmulas de Vieta**.

Ejemplo 1. Por las fórmulas de Vieta las raíces de cualquier polinomio cuadrático de la forma $x^2 - (a + b)x + ab$, son a y b.

Ejemplo 2. Si $P(x) = x^2 + bx + c$ es un polinomio cuadrático monico, con p y q sus dos raíces, entonces los coeficientes y las raíces cumplen las siguientes relaciones: $-b = p + q$, $c = pq$ y $b^2 - 2c = p^2 + q^2$.

Ejemplo 3. Para el polinomio $P(x) = x^n - (x - 1)^n$, donde n es un entero positivo impar, encontremos el valor de la suma de sus raíces y el valor del producto de sus raíces.
Observe que el polinomio $P(x)$, se puede escribir como

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^n - \left(x^n - nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} - \cdots + (-1)^n\right) \\
&= x^n - \left(x^n - nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} - \cdots - 1\right) \\
&= nx^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \cdots + 1 \\
&= n\left(x^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2n}x^{n-2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Luego, la suma de sus raíces es $\frac{n(n-1)}{2n} = \frac{n-1}{2}$ y el producto de sus raíces $\frac{1}{n}$.

5.2. Polinomios con coeficientes enteros

Considere un polinomio $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con coeficientes enteros. La diferencia $P(x) - P(y)$ se escribe como

$$a_n(x^n - y^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - y^{n-1}) + \cdots + a_2(x^2 - y^2) + a_1(x - y),$$

al considerar cada uno de los sumandos, nos damos cuenta que tales sumandos son divisibles entre $(x - y)$ (esto es fácil de mostrar, ver el ejercicio 8 (a) del capítulo 1).

Teorema 5.2.1 *Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros, entonces para cualesquiera enteros distintos a y b se cumple que $P(a) - P(b)$ es divisible entre $a - b$. Más aún, cada raíz enteras de $P(x)$ divide a $P(0)$.*

■

El siguiente teorema es una generalización, para el caso de polinomios de grado n, del teorema 4.2.2 .

Teorema 5.2.2 ***(Teorema de la raíz racional)*** *Consideremos un polinomio con coeficientes enteros $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Si $\alpha = \frac{p}{q}$ es una raíz racional de $P(x)$ con $(p, q) = 1$, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.*

Demostración. Observe que si $\alpha = \frac{p}{q}$ es una raíz, se tiene que

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Luego, multiplicando ambos lados de la igualdad por q^n, tenemos que

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0,$$

Así, despejando a_0q^n y factorizando p, tenemos que

$$a_0q^n = -p(a_np^{n-1} + \cdots + a_1q^{n-1}).$$

Ahora como p divide al lado derecho de la identidad, se tiene que p divide a a_0q^n, pero como por hipótesis $(p, q) = 1$, debe suceder que p divide a a_0.

Finalmente, se procede de la misma manera con a_np^n, este término se despeja para tener,

$$a_np^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}).$$

así, q divide a a_np^n, pero como por hipótesis $(p, q) = 1$, entonces q divide a a_n.

■

Corolario 5.2.1 *$\sqrt{2}$ es irracional.*

Demostración. Primero, note que $\sqrt{2}$ es raíz del polinomio $x^2 - 2$. Si $\sqrt{2}$ es racional, se puede suponer que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, con p y q enteros positivos tales que $(p, q) = 1$. Se tiene por el Teorema anterior que $p \mid -2$ y $q \mid 1$. Luego $p = 1$ o $p = 2$, mientras que forzosamente $q = 1$. Pero esto es contradictorio con el hecho de que $1 < \sqrt{2} = \frac{p}{q} < 2$. Por lo tanto $\sqrt{2}$ debe ser irracional.

■

5.3. Polinomios irreducibles

Recuerde que se dice que un polinomio en un anillo R es irreducible si no se puede escribir como un producto de dos polinomios no constantes con coeficientes en R. En general es deseable descomponer cualquier polinomio $P(x)$ en $R[x]$ en un producto de polinomios de la forma $(x - a)$ en $R[x]$, a estos polinomios se les llama **factores lineales** del polinomio.

El siguiente lema afirma que ser reducible sobre $\mathbb{Q}$ es equivalente a ser reducible sobre $\mathbb{Z}$. Más aún, es posible probar que cualquier polinomio con coeficientes reales siempre puede expresarse como un producto de factores lineales y de polinomios cuadráticos irreducibles. Así mismo, cualquier polinomio con coeficientes complejos siempre es reducible sobre factores lineales complejos (ver el Anexo de números complejos).

Lema 5.3.1 ***(Lema de Gauss)*** *Si $P(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ es un polinomio con coeficientes enteros y $P(x)$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$, entonces $P(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.*

Demostración. Supongamos que $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros y que $P(x) = Q(x)R(x)$, donde $Q(x)$ y $R(x)$ son polinomios no contantes, con coeficientes racionales. Sean q y r los números naturales más pequeños tales que $qQ(x)$ y $rR(x)$ tienen coeficientes enteros. Entonces, si $d = qr$ tenemos que $P_1(x) = dP(x) = qQ(x) \cdot rR(x) = Q_1(x)R_1(x)$ es una factorización del polinomio $P_1(x)$ en dos polinomios con coeficientes enteros $Q_1(x) = q_k x^k + \cdots + q_0$ y $R_1(x) = r_m x^m + \cdots + r_0$. Sean a'_j, con $0 \leq j \leq n$, los coeficientes de $P_1(x)$. Basados en esto, se construye la factorización de $P(x)$ que se busca.

Sea p un divisor primo de d, entonces todo los coeficientes de $P_1(x)$ son divisibles entre p. Ahora, se debe de mostrar que p divide a todos los coeficientes de $Q_1(x)$ o a todos los coeficientes de $R_1(x)$.

Si p divide a todos los coeficientes de $Q_1(x)$, la prueba se termina. En caso contrario, sea i tal que $p|q_0, q_1, \ldots, q_{i-1}$, pero $p \nmid q_i$. Se tiene que $p|a'_i$, $a'_i = q_0 r_i + \cdots + q_i r_1 + q_{i+1} r_0$ y $p|q_i r_1 - a'_i$, entonces $p|r_1$. Continuando de esta manera, podemos deducir que $p|r_j$, para toda j. Entonces $\frac{R_1(x)}{p}$ tiene coeficientes enteros. Se obtiene entonces entonces una factorización de $\frac{d}{p}P(x)$ en dos polinomios coeficientes enteros. Continuando con este procedimiento, tomando todos los divisores primos de d, se va a terminar eventualmente con una factorización del polinomio $P(x)$ en dos polinomios con coeficientes enteros. ∎

Ejemplo 4. El polinomio real

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$$

es irreducible, si a_1, a_2, $\ldots$, a_n son enteros.

Suponga que no es así, entonces $P(x)$ se podría escribir como el producto de dos polinomio $Q(x)$ y $R(x)$, polinomios no constantes con coeficientes enteros y de grado menor a n.

Así, evaluando en a_i, para cualquier i entero positivo menor o igual a n, se tiene que $P(a_i) = Q(a_i)R(a_i) = -1$. Entonces $Q(a_i) = 1$ y $R(a_i) = -1$ o $Q(a_i) = -1$ y $R(a_i) = 1$; en cualquier caso $Q(a_i) + R(a_i) = 0$, para cualquier $i \leq n$ entero positivo.

Por otro lado, observe que $Q(x) + R(x)$ no puede ser el polinomio cero, pues en ese caso $R(x) = -Q(x)$ y así $P(x) = -Q(x)^2$. Lo que quiere decir que para toda $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = -Q(x)^2$ es un número negativo o cero. Esto es imposible; sea $a = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|)$, entonces $(a+1) - a_i > a+1 > 0$ y así $P(a) > 0$. En otras palabras, al evaluar en un número real x lo suficientemente grande es imposible que $P(x)$ sea cero o un número negativo.

Otras manera de argumentar por contradicción, es observar que $Q(x) + R(x)$ tiene al menos n ceros, a saber: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pero, el grado de $Q(x) + R(x)$ es estrictamente menor que n, pues tanto $Q(x)$ como $R(x)$ son de grado menor que n, una contradicción.

Un polinomio con coeficientes enteros es un **polinomio primitivo**, si su coeficiente principal es positivo y no existe un número entero que divida a todos los coeficientes del polinomio.

Teorema 5.3.2 ***(Criterio de Irreducibilidad de Eisenstein)*** *Consideremos un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ con coeficientes enteros. Sea p un número primo tal que: (a) p no divide a a_n. (b) p divide a cada uno de los coeficientes a_0, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. (c) p^2 no divide a a_0. Entonces $P(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}[x]$. Si además, $P(x)$ es primitivo, entonces es irreducible sobre $\mathbb{Z}[x]$.*

Demostración. Suponga que $P(x)$ es reducible sobre $\mathbb{Q}[x]$, por el lema de Gauss, $P(x) = Q(x)R(x)$, donde $Q(x) = q_k x^k + q_{k-1}x^{k-1} + \cdots + q_0$ y $R(x) = r_m x^m + r_{m-1}x^{m-1} + \cdots + r_0$ son polinomios con coeficientes enteros. Como $a_0 = q_0 r_0$ es divisible entre p y no entre p^2, exactamente uno de q_0 o r_0 es múltiplo de p. Luego, suponga que p divide a q_0 pero no a r_0. Más aún, como p divide a $a_1 = q_0 r_1 + q_1 r_0$ se tiene que p divide a $q_1 r_0$ por lo que p divide a q_1, y así mismo se prueba que todos los coeficientes $q_0, q_1, \ldots, q_k$ son divisibles entre p, pero así p divide a a_n pues $a_n = q_k r_m$, una contradicción.
■

Ejemplo 5. Considere el polinomio $P(x) = 21x^5 + 84x^4 + 161x^3 + 518x^2 + 1554x + 623$. Para aplicar el resultado anterior se tienen en cuenta los números primos que dividen al coeficiente principal, en este caso son 3 y 7. Al probar con cada uno de estos, se observa que $p = 7$ cumple (a), (b) y (c) del teorema anterior, por lo tanto, $P(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}[x]$.

Con el resultado anterior se puede probar que cualquier **polinomio ciclotómico**, esto es un polinomio de la forma $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$, con p un número primo, son irreducibles.

Considere el polinomio ciclotómico $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$. Observe que $(x-1)P(x) = x^p - 1$. Con la sustitución $x = y + 1$, en el producto anterior, se obtiene

$$yP(y+1) = (y+1)^p - 1 = y^p + \binom{p}{1}y^{p-1} + \binom{p}{2}y^{p-1} \cdots + \binom{p}{p-1}y,$$

donde la notación $\binom{n}{k}$ que se conoce como **coeficiente binomial** de $n, k \in \mathbb{N}$, con $k < n$, corresponde al número de formas de escoger k elementos de un conjunto con n elementos y $\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$. Entonces como el primo p no es factor de $i!$, es claro que $i!$ divide al producto $(p-1)\cdots(p-i+1)$. Esto implica que $\binom{p}{i}$ es divisible entre p. Luego, al dividir $yP(y+1)$ entre y, se tiene que $P(y+1)$ satisface las condiciones del criterio de Eisenstein, por lo que es un polinomio irreducible, de donde se sigue que también $P(x)$ es irreducible.

Las raíces de este polinomio son las raíces p-ésimas de la unidad (diferentes de 1, es decir, las raíces son los números complejos $e^{\frac{2k\pi i}{p}} = cos(\frac{2k\pi}{p}) + isen(\frac{2k\pi}{p})$, con $1 \leq k < p$.

5.4. La derivada y raíces múltiples

En el capitulo anterior se definió la derivada de un polinomio de grado n, ver pag.129. También, es fácil demostrar que si $P(x) = (x-a)Q(x)$, entonces

$$P'(x) = Q(x) + (x-a)Q'(x). \tag{5.1}$$

De hecho existe una relación entre las raíces múltiples de un polinomio y las raíces de su derivada. Por ejemplo, si un polinomio $P(x)$ es divisible entre $(x-a)^2$, es decir tiene una raíz en a de multiplicidad 2, entonces como $P(x) = (x-a)Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio divisible entre $(x-a)$, tenemos que $P'(x) = Q(x)+(x-a)Q'(x)$ es divisible entre $(x-a)$.

Podemos continuar, si ahora $P(x)$ es divisible entre $(x-a)^3$, entonces como $P(x) = (x-a)Q(x)$, tenemos que $Q(x)$ es divisible entre $(x-a)^2$, pero por lo anterior, sucede que $Q'(x)$ es divisible entre $(x-a)$, luego $P'(x) = Q(x) + (x-a)Q'(x)$ es divisible entre $(x-a)^2$. Podemos seguir este procedimiento (usando el principio de inducción matemática) hasta llegar al resultado del siguiente teorema

Teorema 5.4.1 *Si para algún entero positivo m el polinomio $P(x)$ es divisible entre $(x-a)^{m+1}$, entonces el polinomio $P'(x)$ es divisible entre $(x-a)^m$. Es decir, si a es un cero de multiplicidad $m+1$ de $P(x)$, entonces a es un cero de multiplicidad m para $P'(x)$.* ■

La n-ésima derivada de un polinomio $P(x)$ con $n > 3$, se denota por $P^{(n)}(x)$.

Por último, observemos que si se te tiene un polinomio $P(x)$ tal que

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0,$$

y $P^m(a) \neq 0$, tenemos primero, por ser $P(a) = 0$, que $P(x) = (x-a)Q_1(x)$, para algún $Q_1(x)$. Pero como $P'(x) = Q_1(x) + (x-a)Q_1'(x)$, entonces $P'(a) = Q_1(a) = 0$, luego $Q_1(x) = (x-a)Q_2(x)$, para algún $Q_2(x)$. Por lo que $P(x) = (x-a)^2Q_2(x)$. Continuando de esta manera se llega a que $P(x) = (x-a)^m Q_m(x)$, y nos detenemos en el momento en que $Q_m(a) \neq 0$. Esto se resume en el siguiente resultado.

Proposición 5.4.2 *Si $P(x)$ es un polinomio con $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ y $P^{(m)} \neq 0$, entonces a es un cero de $P(x)$ de multiplicidad m. Es decir, $P(x) = (x-a)^m Q(x)$ para algún polinomio $Q(x)$, con $Q(a) \neq 0$.* ■

5.5. La fórmula de interpolación

Se sabe que dados dos puntos en el plano cartesiano, existe una única recta que los une. Esto es, para dos parejas de números reales (α_0, β_0), (α_1, β_1), con $\alpha_0 \neq \alpha_1$, existe un único polinomio $P(x)$ de grado 1, tal que $P(\alpha_0) = \beta_0$ y $P(\alpha_1) = \beta_1$. Lo anterior puede ser generalizado de la siguiente manera.

Teorema 5.5.1 ***(Fórmula de interpolación de Lagrange)*** *Sean α_0, α_1, $\ldots$, α_n números reales diferentes y sean β_0, β_1, $\ldots$, β_n otros $n+1$ números reales. Entonces existe un único polinomio $P(x)$ de grado a lo más n, tal que $P(\alpha_i) = \beta_i$, para $0 \leq i \leq n$.*

Demostración. Consideremos los polinomios de la forma

$$D_k(x) = \frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_{k+1})\cdots(x-\alpha_n)}{(\alpha_k-\alpha_0)(\alpha_k-\alpha_1)\cdots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\cdots(\alpha_k-\alpha_n)},$$

con $0 \leq k \leq n$, donde el numerador y el denominador tienen n factores. Es claro que $D_k(x)$ tiene grado n, que $D_k(\alpha_k) = 1$ y que $D_k(\alpha_i) = 0$, si $i \neq k$. Entonces el polinomio que satisface las condiciones buscadas es

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k D_k(x).$$

Para mostrar la unicidad el polinomio, suponga que existen dos polinomios $P_1(x)$ y $P_2(x)$ cada uno de grado a lo más n, tales que

$$P_j(\alpha_i) = \beta i,$$

para $0 \leq i \leq n$, $j = 1, 2$. Entonces el polinomio $P(x) = P_1(x) - P_2(x)$ es de grado a lo más n y tiene $n+1$ raíces distintas α_0,α_1, $\ldots$, α_n. Por el teorema 5.0.1, se tiene que $P(x)$ es el polinomio cero, entonces $P_1(x) = P_2(x)$. ■

5.6. Más formas de encontrar raíces

Parámetros

Para estudiar raíces de un polinomio de grado mayor que dos, algunas veces es útil considerar los términos independientes como variables. A estos términos independientes les llamamos parámetros. Para ilustrar lo anterior se muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6. Se quieren encontrar la soluciones de la ecuación

$$x^3(x+1) = 2(x+a)(x+2a),$$

donde a es un parámetro real. Para esto, primero note que la ecuación es equivalente a resolver la ecuación

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 6ax - 4a^2 = 0.$$

Ahora, se considera al número a como variable y a x como parámetro constante. Entonces se tiene la siguiente ecuación cuadrática

$$4a^2 + 6ax - x^4 - x^3 + 2x^2 = 0,$$

que se resuelve utilizando la fórmula cuadrática donde se obtienen las soluciones $a_1 = -\frac{1}{2}x^2 - x$ y $a_2 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$. Luego la ecuación se puede factorizar como

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - 2x^2 - 6ax - 4a^2 &= -4(a + \frac{1}{2}x^2 + x)(a - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x) \\ &= (x^2 + 2x + 2a)(x^2 - x - 2a), \end{aligned}$$

Finalmente, se resuelven estas ecuaciones de segundo grado se obtienen las soluciones $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2a}$, $x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+8a}$, que son reales si $-\frac{1}{8} \leq a \leq \frac{1}{2}$.

Conjugados

Esta es una técnica común al resolver una ecuación algebraica donde aparece una raíz en algún denominador de una fracción y para facilitar el procedimiento se multiplica por algún factor que elimine la raíz.

Ejemplo 7. Para resolver la ecuación

$$\sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx} = x,$$

donde m es un parámetro real. Se multiplica por el conjugado de $\sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx}$, es decir $\sqrt{1+mx} + \sqrt{1-mx}$, y se obtiene

$$\frac{2mx}{\sqrt{1+mx}-\sqrt{1-mx}} = x,$$

Una solución es $x = 0$, así que se puede suponer que $x \neq 0$, y así se procede a resolver $2m = \sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx}$, luego m es positiva. Se eleva al cuadrado y se obtiene

$$2m^2 - 1 = \sqrt{1 - m^2x^2},$$

de donde $2m^2 - 1 \geq 0$. Elevando al cuadrado nuevamente y despejando x resulta que $x = \pm 2\sqrt{1-m^2}$ y, como es necesario que $1 - m^2 \geq 0$, debe cumplirse que $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq m \leq 1$, para garantizar que la soluciones sean números reales.

Regla de los signos de Descartes

Para esta sección es necesario considerar los siguientes dos teoremas básicos de Cálculo, ambos se encuentran en el libro de Spivak, [8].

Teorema 5.6.1 ***(Teorema del Valor Intermedio)*** *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función real y continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, y u un número real que se encuentre entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número real c en (a,b) tal que $f(c) = u$.*

Teorema 5.6.2 ***(Teorema de Rolle)*** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a,b) y además $f(a) = f(b)$, entonces existe un número real c en (a,b) tal que $f'(c) = 0$.*

Es posible estimar el número de raíces de un polinomio con coeficientes reales contando el número de **cambios de signo** en la sucesión de los coeficientes no nulos del polinomio, *este número se denota por C(P).*

Ejemplo 8. El polinomio $P(x) = 4x^{10} - x^8 + 5x^7 + 4x^3 - x^2 - x$, tiene tres cambios de signos, es decir, $C(P) = 3$. Note que no se toman en cuenta los coeficientes cero.

El siguiente teorema indica como se relaciona le número de raíces de un polinomio con sus cambios de signo.

Teorema 5.6.3 ***(Regla de los signos de Descartes)*** *El número de raíces reales positivas de un polinomio $P(x)$, con coeficientes reales es menor o igual al número de cambios de signo, $C(P)$, que se producen entres sus coeficientes (obviando los coeficientes ceros y contando multiplicidades de las raíces). Análogamente, el número de raíces reales negativas del polinomio es menor o igual al número de cambios de signo que se producen entre los coeficientes de $P(-x)$. Además, si el número de raíces positivas es menor que el número de cambios de signo, entonces el número de raíces positivas difiere del número de cambios de signo por un múltiplo de dos.*

Demostración. La prueba de este teorema se sostiene por un argumento inductivo; se considera $P(x)$ un polinomio de grado n mónico con término independiente no es cero, es decir, $P(0) \neq 0$,[1] se debe mostrar primero que el número de cambios de signo y el número de raíces positivas tienen la misma paridad, de este modo se hace ver que para el caso donde para $n = k + 1$ se cumple usando el hecho de que se prueba para $n = k$, y así sucesivamente.

Para $n = 1$, el polinomio es de grado 1. Si $P(x) = x - a$, con $a > 0$ el polinomio tiene un solo cambio de signo y una única raíz $x = a$. En cambio si $P(x) = x + a$, no hay cambio de signo y su única raíz $x = -a$ que es negativa.

Ahora, si el polinomio mónico $P(x)$ es de grado $n > 1$, con $P(0) \neq 0$, y hay dos casos a tomar en cuenta:

Caso 1. Si $P(0) < 0$, entonces el número de cambios de signo debe ser impar, pues el primer número es positivo debido a que $P(x)$ es mónico, y se termina con $P(0)$ que es un número negativo. Ahora se debe probar que el número de raíces positivas del polinomio también es impar. Como el grado de $P(x)$ es n, se tiene tiene que el término x^n es el que domina para valores grandes de x. Entonces para algún valor grande y positivo de x, llámese x_0, se tiene que $P(x_0)$ es positivo, por 5.6.1, $P(x)$ debe tener raíz en el intervalo $(0, x_0)$, que claramente es positiva. Sea k tal raíz. Se tiene que $P(x) = (x - k)Q(x)$, con $Q(x)$ un polinomio de grado $n - 1$ y $Q(0) = \frac{P(0)}{-k}$ es positivo. Por lo que, aplicando la hipótesis de inducción a $Q(x)$, se obtiene que este polinomio tiene un número par de raíces positivas, por lo que $P(x)$ debe tiene un número impar de ceros positivos, los ceros de $Q(x)$ y k.
Caso 2. Si $P(0) > 0$ y la ecuación no tiene soluciones reales positivas, la prueba se termina. En caso de que la ecuación tenga alguna solución positiva, basta considerar una de ellas, digamos k. De forma semejante se tiene que $P(x) = (x - k)Q(x)$, con $Q(x)$ un polinomio de grado $n-1$ y $Q(0) = \frac{P(0)}{-k}$ es negativo. Entonces $Q(x)$ tiene una cantidad impar de cambios de signo. Aplicando la hipótesis de inducción a $Q(x)$, se obtiene que $Q(x)$ tiene un número impar de raíces positivas. En consecuencia, $P(x)$ tiene un número par de raíces positivas.

Hasta ahora se ha mostrado que el número de cambios de signo y el número de raíces positivas de un polinomio tiene la misma paridad que el de raíces positivas, es decir, el número de cambios de signo es una cota superior del número de raíces positivas. Resta mostrar que el número de cambios de signo es mayor o igual que el de raíces positivas.

[1] En caso contrario, es posible factorizar un término de la forma x^k, que no contribuye con raíces positivas

Si hubiera más raíces positivas que cambios de signo en los coeficientes de $P(x)$, entonces debería haber al menos dos raíces positivas más que el número de cambios de signo, es decir, debería haber al menos $C(P)+2$ raíces positivas. Por otro lado, $P'(x)$ tiene al menos un cambio de signo (por 5.6.2) entre cada dos raíces de $P(x)$, por lo que habría al menos $C(P)+1$ raíces de $P'(x)$. Pero $P'(x)$ tiene a lo más tantos cambios de signo como $P(x)$, es decir, hay $C(P)$ y además su grado es $n-1$. Luego la hipótesis de inducción asegura que dicho polinomio cumple la regla de los signos, es decir tiene más cambios de signo que raíces positivas, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, hay más cambios de signo que raíces positivas. ■

Ejemplo 9. *Polonia, 2001* Sea $n \geq 3$ un número entero. Muestre que un polinomio de la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_{n-1} = a_{n-2} = 0$ y al menos un $a_k \neq 0$, no puede tener todas sus raíces reales.

Suponga que el polinomio cumple que $a_0 \neq 0$, lo cual nos permite asegurar que sí tiene una raíz real, ésta será positiva o negativa. Aplicando la regla de los signos de Descartes se deduce que la cantidad de raíces reales del polinomio es a lo más $n-1$, por lo que debe haber al menos una raíz compleja.
Si $a_0 = 0$, se puede factorizar la máxima potencia de x que divide al polinomio y en este caso trabajar con el polinomio resultante como en el caso anterior.

5.7. Polinomios con dos y tres variables

Un polinomio en varias variables es **simétrico** si queda invariante cuando se permutan las variables, por ejemplo para polinomios de dos variables, deberá suceder que $P(x,y) = P(y,x)$; y para polinomios de tres variables, se debe cumplir que, $P(x,y,z) = P(x,z,y) = P(y,x,z) = P(y,z,x) = P(z,x,y) = P(z,y,x)$.

Ejemplo 10. (i) Para polinomios de dos variables, tenemos que son simétricos:

$$x^2 + y^2,\ xy, \qquad x^3 + xy + y^3.$$

(ii) Para polinomios de tres variables, tenemos que son simétricos:

$$x + y + z,\ xy + yz + zx,\ xyz.$$

Un polinomio de varias variables es **cíclico** si al cambiar sus variables cíclicamente no cambia el polinomio. Por ejemplo con tres variables deberá suceder que, $P(x,y,z) = P(y,z,x) = P(z,x,y)$

Ejemplo 11. Los siguiente son polinomios cíclicos,

$$(x+y)(y+z)(z+x),\ x^2y + y^2z + z^2x.$$

Ejemplo 12. Un polinomio simétrico siempre es cíclico. Pero no recíprocamente, por ejemplo el polinomio $x^2y + y^2z + z^2x$ es cíclico pero no es simétrico.

Ejemplo 13. Factorice el polinomio de tres variables

$$Q(x, y, z) = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$$

.

Solución. Fije y y z reales cualesquiera. Luego, considere a

$$P(x) = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3,$$

como un polinomio en una variable, la x. Es claro que $P(-y) = (z)^3 - (-y)^3 - y^3 - z^3 = 0$, luego $(x + y)$ es factor de $P(x)$ y entonces de $Q(x, y, z)$. Análogamente $(y + z)$ y $(z + x)$ son factores de $Q(x, y, z)$. Por lo que

$$Q(x, y, z) = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = A(x + y)(y + z)(z + x).$$

De este modo, si $x = y = z = 1$, entonces $24 = 3^3 - 1 - 1 - 1 = A \cdot 2^3$, entonces $A = 3$. Por lo tanto,

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x).$$

Ejemplo 14. Factorice la expresión

$$Q(a, b, c) = (b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$$

Solución. Se toman fijos a b y c reales y se considera el polinomio en variable a,

$$P(a) = (b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3.$$

Resulta que, b es una raíz pues $P(b) = (b - c)^3 + (c - b)^3 = 0$. Entonces, por Teorema del factor, $(a - b)$ divide a Q. Análogamente $(b - c)$ y $(c - a)$ son divisores de Q. Por lo tanto,

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = A(a - b)(b - c)(c - a).$$

Ahora, si $a = 3$, $b = 2$ y $c = 1$, se tiene que $1^3 + (-2)^3 + 1^3 = A(1)(1)(-2)$. Así, $A = 3$ y

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a).$$

Ejemplo 15. Factorice la expresión

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b).$$

Solución.

Como siempre se toman fijos a los números reales b y c reales y se considera el polinomio de variable a siguiente,

$$P(a)=a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b).$$

Resulta que b es una raíz de $P(a)$, ya que

$$P(b)=b^3(b-c)+b^3(c-b)+c^3(b-b)=0.$$

Entonces, por Teorema del factor $(a-b)$ divide a la expresión. Análogamente $(b-c)$, $(c-a)$ y $(a+b+c)$ (esto último puede verificarse viendo que $-(b+c)$ es una raíz del polinomio $P(a)$), también son sus divisores. Por lo tanto,

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=A(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Ahora, si $a=2$, $b=1$ y $c=0$, se tiene que $8(1)+1^3(-2)+0=A(1)(1)(-2)(3)$, por lo que, $A=-1$. Finalmente,

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

5.8. Ejercicios del capítulo 5

Ejercicio 1. Encuentre la suma de todas las raíces del siguiente polinomio $P(x) = x^7 + (\frac{1}{2} - x)^7$, sin necesidad de calcular cada una de las raíces.

Ejercicio 2. Considere números primos (distintos) p_1, p_2, ..., p_n, y sean a_1, a_2, ..., a_n los números enteros definidos por $a_k = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$ para $1 \leq k \leq n$. Use el criterio de irreductibilidad de Eiseintein para mostrar que si n es mayor a 2, el polinomio mónico $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ no tiene raíces enteras.

Ejercicio 3. Si $p \neq 0$ y $q \neq 0$ son números reales, que son solución del polinomio de dos variables reales

$$P(x, y) = (20x + 21y)^{2021} + 22(20x + 22y) + y^{2021}.$$

Use el hecho de que x y x^n tienen el mismo signo, si n es un número entero impar, para probar que son iguales las siguientes expresiones

- $A = \left(20 + \frac{21q}{p}\right)^{2021} + \left(\frac{q}{p}\right)^{2021}$.
- $B = \left(20 + \frac{21q}{p}\right) + \frac{q}{p}$.

Calcule explícitamente $\frac{q}{p}$.

Ejercicio 4. Sea k un número entero positivo, con la propiedad de no ser un cuadrado perfecto. Considere a_0 y b_0 números enteros positivo, tales que a_0 es una solución de la ecuación

$$x^2 - kb_0x + (b_0^2 - k) = 0.$$

Muestre que su otra raíz es $a_1 = \frac{b_0^2 - k}{a_0}$, y que está raíz es un número entero positivo.

Ejercicio 5. (IMO 1988/6) Sean a y b números enteros positivos. Muestre que si $ab + 1$ divide a $a^2 + b^2$, entonces es cuadrado perfecto el cociente:

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}.$$

Ejercicio 6. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que el polinomio $Q(x) = P(x) + 12$ tiene al menos 6 raíces enteras distintas. Muestre que $P(x)$ no tiene raíces enteras.

Ejercicio 7. Sean $P(x) = c_5x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ un polinomio real de grado 5 y a_1, a_2 y a_3 números reales distintos de cero .

(a) Si b es un número real b, tal que

$$P(a_1x + b) + P(a_2x + b) = P(a_3x + b)$$

para toda x, muestre que b mismo es una raíz del polinomio $P(x)$.

(b) Sean b_1, b_2 y b_3 números reales distintos, tales que para toda $x \neq 0$,

$$P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3).$$

Muestre que $a_1^5 + a_2^5 = a_3^5$ y concluya que $P(x)$ tiene al menos una raíz real.

Ejercicio 8. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Muestre que si para algún entero a la n-ésima iterada cumple que: $P(P(\ldots P(a)\ldots)) = a$, entonces $P(P(a)) = a$.

Ejercicio 9. Muestre que el polinomio $P(x) = x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 10x + 9$, es irreducible sobre $\mathbb{Q}[x]$.

Ejercicio 10. Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ números reales distintos entre si, $P(x)$ un polinomio con $grad(P(x)) \leq n - 2$, y

$$A(k) = (a_k - a_2)(a_k - a_3)\cdots(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})\cdots(a_k - a_n)$$

Muestre que

$$\frac{P(a_1)}{A(1)} + \frac{P(a_2)}{A(2)} + \cdots + \frac{P(a_n)}{A(n)} = 0.$$

Ejercicio 11. Considere el polinomio en dos variables $P(x, y) = (x - y)^k(x + y)^l$ con k, l enteros positivos.

(i) Muestre que, $P(a, b)P(c, d) = P(ac + bd, ad + bc)$, para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(ii) Considere el polinomio $Q(x, y) = P\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$. Muestre que, $Q(x, y)Q(z, w) = Q(xz, yw)$ para todo $x, y, z, w \in \mathbb{R}$.

Sugerencia. Use el inciso anterior y el hecho de que para $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tales que $x = a + b$, $y = a - b$, $z = c + d$ y $w = c - d$;

Ejercicio 12. Considere al polinomio en dos variables $Q(x, y)$, que satisface,

$$Q(x, y)Q(z, w) = Q(xz, yw) \text{ para todo } x, y, z, w \in \mathbb{R}.$$

Muestre que para $x, y \in \mathbb{R}$, los polinomios $Q_1(x) = Q(x, 1)$ y $Q_2(x) = Q(1, x)$ cumplen que:

- $Q_1(xy) = Q_1(x)Q_1(y)$ y $Q_2(xy) = Q_2(x)Q_2(y)$,
- $Q(x,y) = Q_1(x)Q_2(y)$.
- $Q_1^2(x) = Q_1(x^2)$ y $Q_2^2(x) = Q_2(x^2)$

Por lo tanto, para $i = 1, 2$ se tiene que $Q_i(x)$ es el polinomio cero o $Q_i(x) = x^n$, para algún n un número entero no negativo.

Ejercicio 13. Use el ejercicio anterior para demostrar que los polinomios de dos variables $P(x,y)$ que satisfacen

$$P(a,b)P(c,d) = P(ac+bd, ad+bc), \text{ para todo } a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

son de la forma $P(x,y) = (x-y)^k(x+y)^l$ con k,l números enteros.

Ejercicio 14. Sea $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ un polinomio con coeficientes complejos y raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$ y sea $Q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$ un polinomio con coeficientes complejos y raíces $r_1^2, r_2^2, \ldots, r_n^2$. Demuestra que si $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots$ y $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots$ son números reales, entonces $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ también es un número real.

5.9. Sugerencias a ejercicios del capítulo 5

Sugerencia al Ejercicio 1. Observe que el coeficiente de $P(x)$ que multiplica a x^7 es igual a cero. Más aún, el polinomio se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^7 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^7 \\
&= x^7 - \left(x^7 - \binom{7}{1}x^6\frac{1}{2} + \binom{7}{2}x^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \cdots - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right) \\
&= \binom{7}{1}x^6\frac{1}{2} - \binom{7}{2}x^5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^7 \\
&= a_6x^6 + a_5x^5 + \cdots + a_0.
\end{aligned}$$

Luego, por las fórmulas de Vieta, la suma de las raíces es

$$-\frac{a_5}{a_6} = -\frac{-\binom{7}{2}(1/2)^2}{\binom{7}{1}(1/2)} = \frac{\frac{7\cdot 6}{8}}{\frac{7}{2}} = \frac{3}{2}.$$

Sugerencia al Ejercicio 2. Suponga que $n = \text{grad} P(x) > 2$ y que $P(x)$ tiene al menos una raíz entera. Pero, como $P(x)$ tiene coeficientes enteros, se tiene que $P(x)$ es reducible en $\mathbb{Z}[x]$, y por supuesto reducible en $\mathbb{Q}[x]$.
Por otro lado, $p_1 | a_i$ para toda $i \leq n$ y es claro que $p_1 \nmid 1$, por ser p_1 un número primo. Pero, $p_1^2 \nmid a_n = p_1 p_2 \cdots p_n$, pues $p_1 \nmid p_2 p_3 \cdots p_n$, por ser los primos diferentes. Entonces, por el criterio de irreducibilidad de Eisentein 5.3.2, $P(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$, una contradicción.

Sugerencia al Ejercicio 3. Como (p, q) es una solución del polinomio, se tiene que

$$P(p,q) = (20p + 21q)^{2021} + 22(20p + 22q) + q^{2021} = 0,$$

entonces

$$(20p + 21q)^{2021} + q^{2021} = -22(20p + 22q). \tag{5.2}$$

Ahora, observe que el lado izquierdo de la ecuación anterior (5.2) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\left(p\left(20 + \frac{21q}{p}\right)\right)^{2021} + q^{2021} &= p^{2021}\left(20 + \frac{21q}{p}\right)^{2021} + q^{2021} \\
&= p^{2021}\left(20 + \frac{21q}{p}\right)^{2021} + \frac{p^{2021}q^{2021}}{p^{2021}} \\
&= p^{2021}\left(\left(20 + \frac{21q}{p}\right)^{2021} + \frac{q^{2021}}{p^{2021}}\right).
\end{aligned}$$

De modo similar, el lado derecho de la ecuación (5.2) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
-22(20p + 22q) &= -22p\left(20 + \frac{22q}{p}\right) \\
&= -22p\left(\left(20 + \frac{21q}{p}\right) + \frac{q}{p}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p^{2020}\left(\left(\frac{21q}{p} + 20\right)^{2021} + \left(\frac{q}{p}\right)^{2021}\right) = -22\left(\left(\frac{21q}{p} + 20\right) + \frac{q}{p}\right) \tag{5.3}$$

Por otro lado, para n un número entero impar, se sabe que para cualquier número real x, se tiene que x^n tiene el mismo signo que x. Más aún, se sabe que para cualesquiera x y y reales con $x < y$, entonces $x^n < y^n$. De este modo, bajo el supuesto que n un número entero impar, $x^n + y^n$ y $x + y$ tiene el mismo signo. De esto, se sigue que las expresiones

- $A = \left(\frac{21q}{p} + 20\right)^{2021} + \left(\frac{q}{p}\right)^{2021}$
- $B = \left(\frac{21q}{p} + 20\right) + \frac{q}{p}$

deben tener el mismo signo. Es decir, o bien $A > 0$ y $B > 0$, o bien $A < 0$ y $B < 0$ o bien $A = B = 0$. Pero, como $p^{2020} > 0$; si $A > 0$ y $B > 0$, entonces $Ap^{2020} > 0$ y $-22B < 0$, una contradicción con (5.3). Del mismo modo; si $A < 0$ y $B < 0$, entonces $Ap^{2020} < 0$ y $-22B > 0$, nuevamente una contradicción con (5.3). Por lo tanto, $A = B = (\frac{21q}{p} + 20) + \frac{q}{p}) = 0$. Y finalmente se tiene que $\frac{q}{p} = -\frac{10}{11}$.

Sugerencia al Ejercicio 4. Por las fórmulas de Vieta, la otra raíz de la ecuación es

$$a_1 = kb_0 - a_0 = \frac{b_0^2 - k}{a_0},$$

y como $kb_0 - a_0$ es un número entero, entonces a_1 lo es.
Ahora, por una parte, como $a_0 + a_1 = kb_0$, se tiene que

$$a_0^2 - kb_0a_0 + b_0^2 - k = a_0^2 - kb_0a_0 + a_0a_1 = a_0(a_0 - kb_0 + a_1) = 0.$$

Por otro lado, observe que $a_1 \neq 0$, pues de lo contrario $k = b_0^2$, una contradicción con el hecho de que k no es un cuadrado perfecto. Más aún $a_1 \geq 0$, si no es el caso, es decir si $a_1 < 0$, como $kb_0 \geq k$ pues, por hipótesis $b_0 \geq 1$ y $k \geq 1$, entonces al multiplicar por $-a_1$, se tiene que $-ka_1b_0 \geq a_1k \geq k$. Entonces, se sigue que

$$0 = a_1^2 - kb_0a_1 + b_0^2 - k \geq a_1^2 + b_0^2 > 0,$$

una contradicción. Por lo tanto, $a_1 > 0$.

Sugerencia al Ejercicio 5. Primero, suponga que

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = k \tag{5.4}$$

donde k es un entero positivo que no es un cuadrado perfecto.
Ahora, sea (a_0, b_0) una solución de (5.4), donde $b_0 \leq a_0$ y tal que $a_0 + b_0$ es la suma

mínima de cualquier pareja de soluciones de (5.4).
De la suposición, se tiene que $x = a_0$ es una solución de la ecuación

$$x^2 - kb_0x + (b_0^2 - k) = 0$$

y por el ejercicio anterior, la otra solución a_1 de la ecuación anterior es un entero positivo. Entonces, como $a_0 + b_0$ es la suma mínima, se tiene que $a_0 \leq a_1$. De lo contrario, si $a_1 < a_0$, entonces $a_1 + b_0 < a_0 + b_0$, una contradicción.
De este modo, como $b_0 \leq a_0$, se tiene que $b_0^2 \leq a_0b_0 \leq a_0^2$. Y como $b_0 \leq a_0 \leq a_1$, entonces al multiplicar por a_0, se tiene que

$$b_0^2 \leq a_0b_0 \leq a_0^2 \leq a_0a_1 = b_0^2 - k,$$

entonces $k \leq 0$, lo cuál es una contradicción, pues k es un entero positivo. Por lo tanto, k es cuadrado perfecto.

Sugerencia al Ejercicio 6. Suponga que $P(x)$ tiene una raíz entera a. Como los coeficientes de $P(x)$ son enteros, también lo son los de $Q(x)$.
Supongamos que $Q(x)$ tiene por raíces enteras distintas a $x_1, \ldots, x_6$, si consideramos a $G(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_6)$, entonces se tiene que $Q(x) = G(x)H(x)$ para algún $H(x)$. De este modo, $P(x) = G(x)H(x) - 12$ y como $G(x)$ es un polinomio mónico con coeficientes enteros, $H(x)$ también tiene coeficientes enteros.

Finalmente, como $P(a) = 0$, se tiene que

$$H(a)G(a) = H(a)(a - x_1) \cdots (a - x_6) = 12,$$

luego $H(a)$ es igual a uno de los enteros $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$. Como los factores $(a - x_1), \ldots, (a - x_6)$ son enteros distintos, entonces es imposible descomponer a 12 como producto de 7 enteros, como se requiere en la identidad $H(a)(a - x_1) \cdots (a - x_6) = 12$.

Sugerencia al Ejercicio 7. (a) Note que usando $x = 0$ en la identidad, se tiene que $P(b) + P(b) = P(b)$. Por lo tanto, $P(b) = 0$.
(b) Observe que para $i = 1, 2, 3$

$$P(a_ix + b_i) = c_5(a_ix + b_i)^5 + c_4(a_ix + b_i)^4 + \cdots + c_1(a_ix + b_i) + c_0 = c_5a_i^5x^5 + \cdots,$$

y así el coeficiente que multiplica a x^5 en la expresión $P(a_ix + b_i)$ es igual a $c_5a_i^5$, para toda $i = 1, 2, 3$. Luego, como $P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3)$ se tiene que al igualar los coeficientes principales, se cumple que $c_5a_1^5 + c_5a_2^5 = c_5a_3^5$, entonces

$$a_1^5 + a_2^5 = a_3^5.$$

Ahora, note que $a_1 \neq a_3$ o $a_2 \neq a_3$. Pues, en caso contrario, si $a_1 = a_2 = a_3$, como $a_1^5 + a_2^5 = a_3^5$, se tiene que $2a_1^n = a_1^n$. Lo cual solo puede suceder si $a_1^n = 0$, entonces $a_1 = 0$, una contradicción.

Por lo tanto, $a_1 \neq a_3$ o $a_2 \neq a_3$. Suponga que $a_1 \neq a_3$. Sea $x = \frac{b_3-b_1}{a_1-a_3}$, entonces como $x \neq 0$, pues $b_3 - b_1 \neq 0$, por hipótesis se tiene que $a_1x + b_1 = a_3x + b_3$. Lo que implica que $P(a_1x + b_1) = P(a_3x + b_3)$ y así se tiene que

$$P(a_2x + b_2) = -P(a_1x + b_1) + P(a_3x + b_3) = 0.$$

Lo que implica que el número real $a_2x + b_2$ es una raíz de $P(x)$.
Del mismo modo, si $a_2 \neq a_3$, se considera $x = \frac{b_3-b_2}{a_2-a_3}$, entonces como $x \neq 0$, pues $b_3 - b_2 \neq 0$, por hipótesis se tiene que $a_2x + b_2 = a_3x + b_3$. Lo que implica que $P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3)$ y así se tiene que

$$P(a_1x + b_1) = -P(a_2x + b_2) + P(a_3x + b_3) = 0.$$

Lo que implica que el número real $a_1x + b_1$ es una raíz de $P(x)$.

Sugerencia al Ejercicio 8. Considere la sucesión $x_0 = a$, $x_1 = P(x_0)$, $x_2 = P(x_1) = P(P(x_0))$, $\ldots$, $x_{n+1} = P(x_n)$. Luego, para algún n entero

$$x_n = P(P_{n-1}(x_0)) = P(P(\ldots P(x_0)\ldots)) = x_0.$$

Por otro lado, se sabe que

$$\alpha_i = x_{i+1} - x_i | P(x_{i+1}) - P(x_i) = x_{i+2} - x_{i+1} = \alpha_{i+1}$$

para cualquier i entero no negativo. Es decir, $\alpha_0|\alpha_1$, $\alpha_1|\alpha_2$, $\ldots$, $\alpha_{n-1}|\alpha_n = \alpha_0$.

Por lo anterior, $\alpha_n = x_{n+1} - x_n = x_1 - x_0 = \alpha_0$ y así

$$|\alpha_0| = |\alpha_1| = \cdots = |\alpha_n|.$$

Suponga que $\alpha_1 = \alpha_0 \neq 0$. Entonces $\alpha_2 = \alpha_0$, de otra manera se tiene que $x_3 = x_1$ y así $x_0 = a$ no vuelve a aparecer en la sucesión $x_1, x_2, x_3 = x_1, x_4 = x_2, x_5 = x_3 = x_1, \ldots x_n \neq x_0$. Análogamente $\alpha_3 = \alpha_0$, $\alpha_4 = \alpha_0$, $\ldots$, $\alpha_{n-1} = \alpha_0$. Por tanto,

$$x_n - x_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = n\alpha 0,$$

y despejando se tiene que $x_n = x_0 + n\alpha_0 \neq x_0$, una contradicción. Por lo tanto, $\alpha_1 = -\alpha_0$ y así $x_2 = x_0$. Es decir, se cumple que $P(P(a)) = a$.

Sugerencia al Ejercicio 9. Suponga que $P(x)$ no es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$. Se debe llegar a una contradicción.

Como $P(x)$ tiene coeficientes enteros, aplicando el Lema de Gauss 5.3.1, se cumple que la irreducibilidad de $P(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$ es equivalente a su irreducibilidad. en $\mathbb{Z}[x]$.

Supongamos entonces que el polinomio $P(x)$ se descompone como producto de polinomios con coeficientes enteros. Ahora, recordemos que la suma de los grados de estos factores debe ser igual a $\text{grad}P(x) = 4$. De donde se debe cumplir alguno de los casos siguientes.

Caso 1. La descomposición tiene un factor lineal. Supongamos que el factor es $Q(x) = x + a$, con a un número entero. En consecuencia, a es una raíz de $P(x)$. Más aún como $a|P(0) = 9$, a debe ser un factor de 9. Así, a puede tomar los valores $\pm1, \pm3, \pm3, \pm9$. Pero ninguno de estos números es una raíz de $P(x)$. Por lo tanto, este caso no es posible.

Caso 2. Los factores de $P(x)$ en $\mathbb{Z}[x]$ son dos polinomios de grado dos. Suponga que dichos factores son $Q(x) = x^2 + ax + b$ y $R(x) = x^2 + cx + d$, con a, b, c y d números enteros. Como

$$P(x) = Q(x)R(x) = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd,$$

por cómo se definió $P(x)$ se debe cumplir que

- $a + c = 4$
- $b + d + ac = 11$
- $ad + bc = 10$
- $bd = 9$

Como $bd = 9$, entonces la pareja (b, c) con entradas los números enteros b y d debe ser alguna de las siguientes seis:

$$(b, d) = (\pm1, \pm9), (\pm3, \pm3), (\pm9, \pm1).$$

Note que las entradas de cada pareja han de tener el mismo signo. De este modo $b + d = \pm10, \pm6$. Ahora, como $b + d + ac = 11$, de lo anterior se cumple alguna de las siguientes igualdades

$$10 + ac = 11, \qquad -10 + ac = 11, \qquad 6 + ac = 11, \qquad -6 + ac = 11.$$

De este modo $ac = 1, 21, 5, 17$. Observe que si ac es 5 o 17, entonces como los números 5 y 17 son primos se cumple que $a + c \neq 4$, una contradicción. Luego, $ac = 1$ o $ac = 21$.

Si $ac = 1$, entonces $a = c = 1$ o $a = c = -1$, luego $a + c \neq 4$, una contradicción.
Si $ac = 21$, como $a + c = 4$, se debe encontrar solución entera de este sistema, pero no hay solución en los enteros.
Por lo tanto, no hay solución para el sistema de ecuaciones y los factores $Q(x)$ y $R(x)$ son imposibles.
Luego, $P(x)$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$, por lo que también en $\mathbb{Q}[x]$.

Sugerencia al Ejercicio 10. De acuerdo a la formula de interpolación de Lagrange (5.5.1) se puede escribir a $P(x)$ en forma única como:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} P(a_k)D_k(x)$$

donde

$$D_k(x) = \frac{1}{A(k)}(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_{k+1})\cdots(x-\alpha_n).$$

con

$$A(k) = (a_k - a_2)(a_k - a_3)\cdots(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})\cdots(a_k - a_n)$$

Como $grad(P(x)) \leq n-2$, el coeficiente que multiplica x^{n-1} en $P(x)$ es igual a cero. Por otro lado el coeficiente que multiplica a x^{n-1} en $\sum_{k=1}^{n} P(a_k)D_k(x)$ es,

$$S = \frac{P(a_1)}{A_1} + \frac{P(a_2)}{A_2} + \cdots + \frac{P(a_n)}{A_n}$$

luego el resultado.

Sugerencia al Ejercicio 11. (i) Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} P(a,b)P(c,d) &= (a-b)^k(a+b)^l(c-d)^k(c+d)^l \\ &= [(a-b)(c-d)]^k[(a+b)(c+d)]^l \\ &= [(ac+bd)-(ad+bc)]^k[(ac+bd)+(ad+bc)]^l \\ &= P(ac+bd, ad+bc). \end{aligned}$$

(ii) Sean $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, entonces existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tales que $x = a + b$, $y = a-b$, $z = c+d$ y $w = c-d$. No es complicado comprobar que $P(a, b) = Q(a+b, a-b)$, para $a, b \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
Q(x,y)Q(z,w) &= Q(a+b,a-b)Q(c+d,c-d)\\
&= P(a,b)P(c,d)\\
&= P(ac+bd,ad+bc)\\
&= Q((ac+bd)+(ad+bc),(ac+bd)-(ad+bc))\\
&= Q((a+b)(c+d),(a-b)(c-d))\\
&= Q(xz,yw).
\end{aligned}$$

Sugerencia al Ejercicio 12. Es inmediato por el ejercicio anterior que,

- $Q_1(xy) = Q(xy,1) = Q(x,1)Q(y,1)$.
- $Q_2(xy) = Q(1,xy) = Q(1,x)Q(1,y)$.
- $Q(x,y) = Q(x,1)Q(1,y) = Q_1(x)Q_2(y)$.

En consecuencia,

$$Q_1^2(x) = Q_1(x)Q_1(x) = Q(x,1)Q(x,1) = Q(x^2,1) = Q_1(x^2)$$

y

$$Q_2^2(x) = Q_2(x)Q_2(x) = Q(1,x)Q(1,x) = Q(1,x^2) = Q_2(x^2)$$

Ahora, se mostrará que si $R(x)$ es un polinomio que cumple que $R^2(x) = R(x^2)$ para toda x, entonces $R(x)$ es el polinomio constante $R(x) = 0$ o el polinomio constante $R(x) = 1$ o $R(x) = x^n$ para alguna n.
Si $R(x)$, un polinomio que cumple que $R^2(x) = R(x^2)$ para toda x y es constante digamos igual a c, entonces $c^2 = c$, por lo que $R(x) = 0$ o $R(x) = 1$.
Si $R(x)$ es un polinomio no constante y α es una raíz distinta de cero, se tiene que $R^2(\sqrt{\alpha}) = R(\alpha) = 0$, entonces $\beta = \sqrt{\alpha}$ es también una raíz de $R(x)$, que puede ser compleja. Por la misma razón $\alpha^{\frac{1}{4}}$, $\alpha^{\frac{1}{8}}$, $\ldots$ son raíces distintas de $R(x)$.

Lo anterior es imposible, ya que $R(x)$ no puede tener una infinidad de raíces, a menos que $\alpha = 0$. Luego $R(x) = ax^n$, para algún n entero positivo, con a un número real. Pero, para que se de la propiedad $R^2(x) = R(x^2)$ para toda x, se debe cumplir que $a = 1$. Por lo que $R(x) = x^n$.

Sugerencia al Ejercicio 13. Sea $Q(x,y) = P\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$. Se puede mostrar que $Q(x,y)Q(z,w) = Q(xz,yw)$, para $x,y,z,w \in \mathbb{R}$, y que $Q(x,y) = Q_1(x)Q_2(y)$, donde $Q_1(x) = Q(x,1)$ y $Q_2(x) = Q(1,x)$. Por el ejercicio anterior, $Q_1^2(x) = Q_1(x^2)$ y

$Q_2^2(x) = Q_2(x^2)$, además existen enteros $k, l \geq 0$, tales que $Q_1(x) = x^k$ y $Q_2(x) = x^l$, (o $Q_1(x) = 0$ y $Q_2(x) = 0$, en el caso de que $P(x, y) = 0$). Luego

$$Q(x, y) = Q_1(x)Q_2(y) = x^k y^l.$$

Por lo tanto, $P(x, y) = Q(x + y, x - y) = (x + y)^k (x - y)^l$.

Sugerencia al Ejercicio 14. Por hipótesis y por el Teorema Fundamental del álgebra se tiene que

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n), && (5.5)\\ Q(x) &= (x - r_1^2)(x - r_2^2) \cdots (x - r_n^2), && (5.6) \end{aligned}$$

De este modo si se evalúa (5.6) en x^2 se tiene que

$$\begin{aligned} Q(x^2) &= (x^2 - r_1^2)(x^2 - r_2^2) \cdots (x^2 - r_n^2)\\ &= [(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)][(x + r_1)(x + r_2) \cdots (x + r_n)]\\ &= P(x)[(x + r_1)(x + r_2) \cdots (x + r_n)],\\ &= P(x)[(-1)^n(-x - r_1)(-x - r_2) \cdots (-x - r_n)]\\ &= (-1)^n P(x)P(-x). \end{aligned}$$

Ahora, si

$$\alpha = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots \qquad \text{y} \qquad \beta = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots .$$

Entonces,

$$P(1) = 1^n + a_1 + \cdots + a_n = 1 + (\alpha + \beta). \tag{5.7}$$

Luego, si n es par se tiene que

$$\begin{aligned} P(-1) &= 1 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{2k} - a_{2k+1} + \cdots + a_n\\ &= 1 + (\beta - \alpha)\\ &= (-1)^n[1 - (\alpha - \beta)]. && (5.8) \end{aligned}$$

Luego, si n es impar se tiene que

$$\begin{aligned} P(-1) &= -1 + a_1 - a_2 + \cdots - a_{2k} + a_{2k+1} + \cdots - a_n\\ &= -1 + (\alpha - \beta)\\ &= (-1)^n[1 - (\alpha - \beta)]. && (5.9) \end{aligned}$$

Note como (5.8) y (5.9) coinciden, por lo que $P(-1) = (-1)^n[1-(\alpha-\beta)]$. Ahora, evaluando $Q(x^2) = (-1)^n P(x)P(-x)$ en 1 se tiene que $Q(1) = (-1)^n P(1)P(-1)$. Luego, remplazando (5.7) y (5.8) en esta expresión se tiene que

$$\begin{aligned}
Q(1) &= (-1)^n P(1)P(-1) \\
&= (-1)^n[1+(\alpha+\beta)](-1)^n[1+(\alpha-\beta)] \\
&= (-1)^{2n}[1+(\alpha+\beta))[1+(\alpha-\beta))] \\
&= (-1)^{2n}[1+(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)] \\
&= (-1)^{2n}[1+(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)^2].
\end{aligned}$$

Pero como por hipótesis α y β son reales $(\alpha+\beta)$, $(\alpha-\beta)$ y $(\alpha-\beta)^2$ son reales y así $Q(1)$ es real. Teniendo en cuenta que por otro lado $Q(1) = 1 + b_1 + \cdots + b_n$, se tiene que $b_1 + \cdots + b_n$ es un real.

Anexo. Números complejos

Por un **número complejo** se entenderá una pareja $z=(x,y)$ en $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$. Tenemos que dos números complejos $z_1=(x_1,y_1)$ y $z_2=(x_2,y_2)$ son iguales si, y sólo si $x_1=x_2$ y $y_1=y_2$. El conjunto de números complejos $\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ es un campo con las operaciones de suma y de producto, definidas para dos números complejos cualesquiera, $z_1=(x_1,y_1)$ y $z_2=(x_2,y_2)$, como

$$z_1+z_2=(x_1+x_2,y_1+y_2),$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1),$$

El neutro aditivo es $(0,0)$ y el neutro multiplicativo $(1,0)$. El inverso aditivo de $z=(x,y)$ es $-z=(-x,-y)$ y el inverso multiplicativo de $z=(x,y)\neq(0,0)$ es $z^{-1}=(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2})$.

El campo de los números reales $\mathbb{R}$ se identifica con el subcampo $\{(x,0)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$ de los números complejos $\mathbb{C}$, para abreviar se identifica cada número real x con $(x,0)$. Por ejemplo, $1=(1,0)$. Luego se tiene que $\mathbb{R}$ es un subcampo de los números complejos $\mathbb{C}$.

Un número complejo especial es $i=(0,1)$, es fácil ver que se cumple con $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$.

Observe que cualquier pareja (x,y) en $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ cumple que

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)=x+iy.$$

De esta manera se puede afirmar lo siguiente

Proposición 1. *Todo número complejo $z=(x,y)$ se representa de forma única como $z=x+iy$.*

■

Anexo. Números complejos

Siempre tenga en cuenta que los números complejos son parejas de número reales (x, y), por lo que estos pueden ubicarse en el plano cartesiano. El eje x es también llamado **eje real**, y el eje y es conocido como el **eje imaginario**.

Por esta razón diremos para un número complejo dado $z = x + iy$, que la **parte real de** z es x y se denota como $\Re z$, y que **la parte imaginaria de** z es y y se escribe como $\Im z$.

El **conjugado complejo** de $z = x + iy$, es el número complejo $\bar{z} = x - iy$.

Para $z = x + iy$ se define el **módulo** o **norma** de z, como el número real no negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$, que corresponde a la longitud del segmento que va del origen al punto (x, y), ver Figura 5.1.

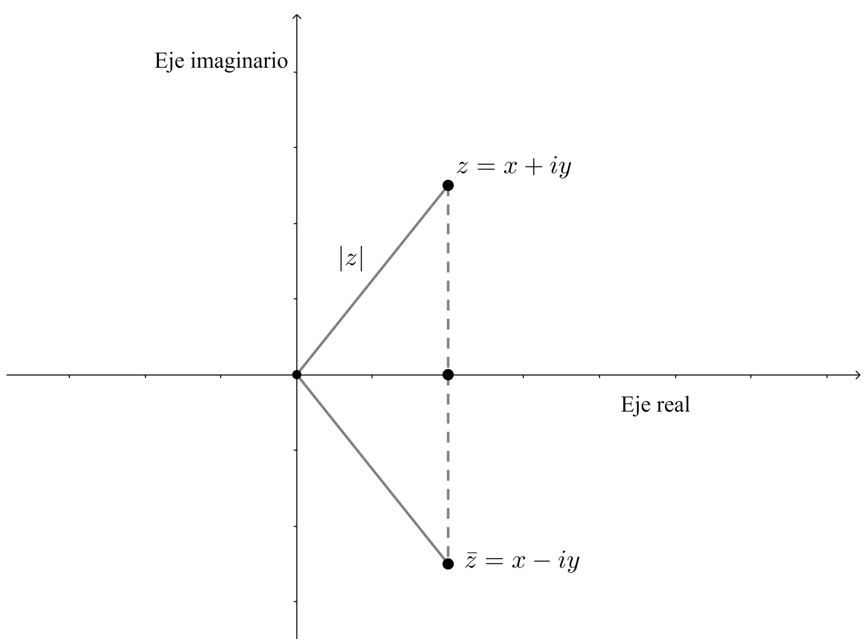


Figura 5.1: El número complejo $z = (x, y) = x + iy$, su módulo $|z|$ y su conjugado $\bar{z}$.

Por otro lado la medida del ángulo formado entre la parte positiva del eje x y el segmento que une 0 con z, girado en el sentido contrario a las manecillas del reloj, se le llama **el argumento de** z, usualmente se denota por $argz$ y por lo general se le asigna un valor entre 0 y 2π.

Lo anterior motiva otra forma de escribir a un número complejo $z = x + iy$, conocida como la **forma polar** del complejo z.

Si se denota como r a la norma de z, esto es $r = |z|$, y $\theta = arg\, z$ entonces $z = r\, cos\theta + ir\, sen\theta$ es la representación polar de z, a la pareja (r, θ) se le llama las coordenadas polares de z.

Por medio de la representación polar de los números complejos es posible obtener el significado geométrico de la multiplicación compleja. Considere dos números complejos en su representación polar $z = r_1\, cos\theta_1 + ir_1\, sen\theta_1$ y $w = r_2\, cos\theta_2 + ir_2\, sen\theta_2$. Al tomar su producto se tiene que

$$
\begin{aligned}
z \cdot w &= r_1(\cos\, \theta_1 + i\text{sen}\, \theta_1) \cdot r_2(\cos\, \theta_2 + i\text{sen}\theta_2) \\
&= r_1 r_2(\cos\, \theta_1 \cos\, \theta_2 - \text{sen}\, \theta_1 \text{sen}\, \theta_2 - i(\cos\, \theta_1 \text{sen}\, \theta_2 + \text{sen}\, \theta_1 \cos\, \theta_2)) \\
&= r_1 r_2(\cos\, (\theta_1 + \theta_2) + i(\text{sen}\, (\theta_1 + \theta_2))).
\end{aligned}
$$

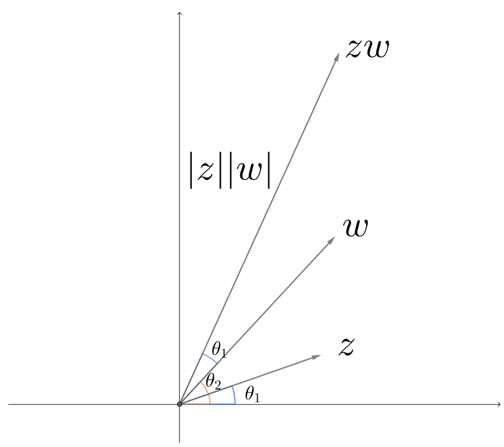


Figura 5.2: Al multiplicar dos números complejos z y w se obtiene un nuevo número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos de z y w y su argumento es la suma de los argumentos de z y w.

Lo que garantiza que arg$(z \cdot w)$ =arg$z$ + arg$w$, donde sólo se están considerando los valores entre 0 y 2π. Además $|z \cdot w| = |z||w|$, ver Figura 5.2.

Existencia de la raíz cuadrada

De manera breve mostramos que: *Todo número complejo tiene una raíz compleja.* Es decir para todo $z \in \mathbb{C}$ existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z$.

Para números reales $r \geq 0$ es cierto el resultado, y se denota por $\sqrt{r}$ a la raíz cuadrada de r (de hecho hay dos raíces, la otra es $-\sqrt{r}$).

Anexo. Números complejos

Para números complejos en general, nos auxiliamos de sus coordenadas, si $z = rcos\theta + irsen\theta$, con $r = |z|$ y $\theta = \arg\, z$. Buscamos $w = s\, cos\omega + is\, sen\omega$ tal que $w^2 = z$, esto obliga a que, $s^2 = r$ y $2\omega = \theta$, que nos lleva a que $s = \sqrt{|z|}$ y $\omega = \frac{1}{2}arg(z)$. Luego $w = \sqrt{|z|}\, cos(\frac{1}{2}arg(z)) + i\sqrt{|z|}\, sen(\frac{1}{2}arg(z))$ es una raíz cuadrada de z, la otra es $-w$. Resaltamos que siempre hay dos raíces complejas, salvo el caso en que $z = 0$, donde $w = 0$ es la única raíz compleja, pero es una raíz doble.

Fórmula de De Moivre

Para cualquier entero n se obtiene la expresión conocida como **fórmula de De Moivre**

$$(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\mathrm{sen} n\theta$$

Usando la fórmula anterior, es inmediato ver que los polinomios $z^n - 1 = 0$ tiene como raíces a 1, w, w^2,. . . , w^{n-1} donde $w =\cos\dfrac{2\pi}{n} + i\ \mathrm{sen}\dfrac{2\pi}{n}$. Esta raíces son las llamadas raíces n-ésimas de la unidad y en el plano complejo se identifican como los vértices de un n-ágono regular inscrito en la circunferencia unitaria con centro en el origen, con un vértice en 1. En la Figura 5.3 se muestra el caso para $n = 8$.

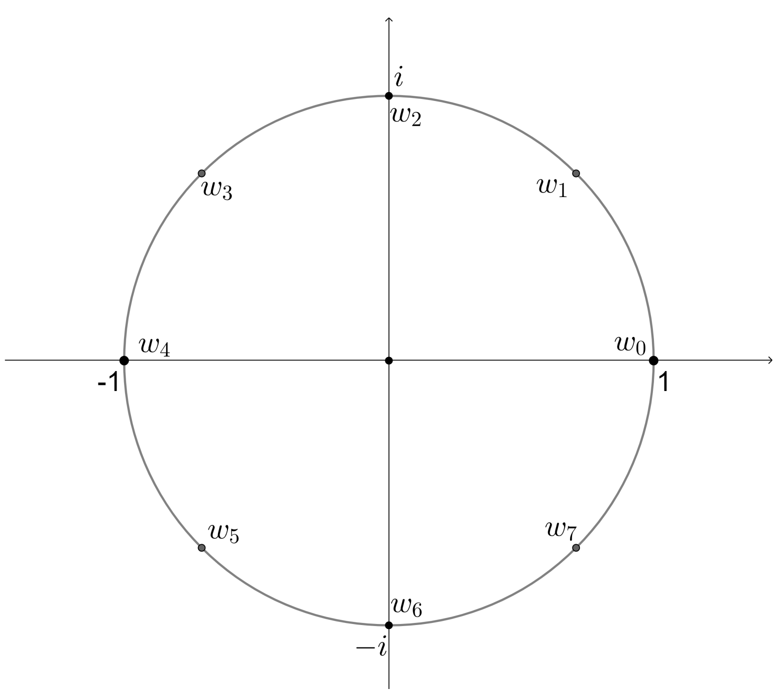


Figura 5.3: Las ocho raíces de la unidad.

Las siguientes son propiedades válidas para números complejos z y w:

- $z\bar{z} = |z|^2$.
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$
- $\bar{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \bar{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \bar{\bar{z}} = z.$
- $|\bar{z}| = |z|$, $|zw| = |z||w|$, $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$.
- $\mathrm{Re}\ z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \leq |z|$.
- $\mathrm{Im}\ z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \leq |z|$.
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $||z| - |w|| \leq |z - w|$
- $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$
- $|1 - \bar{z}w|^2 - |z - w|^2 = (1 + |zw|)^2 - (|z| + |w|)^2$
- $|1 + \bar{z}w|^2 - |z + w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$.

Tengamos en cuenta que una motivación de presentar los números complejos es la discusión del Teorema Fundamental del Álgebra, que asegura lo siguiente,

Teorema 1. *(**Teorema Fundamental del Álgebra**) Cualquier polinomio*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

de grado $n > 0$, con coeficientes $a_i \in \mathbb{C}$ y $a_n \neq 0$, tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Recuerde que según el teorema del factor, que si a es raíz de un polinomio $P(z)$, entonces $z - a$ debe ser un factor de $P(z)$. Naturalmente, se sigue el siguiente,

Corolario 1. *Cualquier polinomio $P(z)$ de grado $n > 0$ con coeficientes en $\mathbb{C}$, tiene n raíces z_1, z_2, ..., z_n (tal vez algunas repetidas). Además puede se escrito en la forma*

$$p(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

donde c es un número complejo.

Anexo. Números complejos

Cualquier demostración del Teorema Fundamental del Álgebra no puede ser deducida en términos elementales, no obstante la demostración que aquí se presenta sólo requiere conocimientos en cálculo.

Tengamos en cuenta los siguientes conceptos en $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

- Una **vecindad** o **entorno** o **disco abierto** de un punto P en $\mathbb{C}$ es un conjunto $N(P,r) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - P| < r\}$. Al número r se le llama **radio** de $N(P,r)$.
- Un punto P es un **punto límite** de un conjunto $E \subset \mathbb{C}$, si toda vecindad de P contiene un punto $Q \in E$ tal que $Q \neq P$.
- Se dice $E \subset \mathbb{C}$ es **conjunto cerrado** si todos su puntos límites le pertenecen.
- Se dice $E \subset \mathbb{C}$ es **conjunto acotado** si hay un número real M tal que $|z| < M$ para todo z en E.

Sólo el primero de los lemas presentados a continuación se da por hecho, pero puede encontrar su demostración en (Rudin 1976) ya que requiere algunas nociones de cálculo avanzado. Sin embargo, encontrará que este lema está motivado por un resultado bien conocido.

Lema 1. *Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en D, un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^2$, entonces f alcanza su valor mínimo y su valor máximo en puntos de D.*

Este resultado es la versión en dos dimensiones del **Teorema del valor extremo** del cálculo en una sola dimensión, el cual establece que cualquier función continua de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ tiene mínimo y máximo en $[a,b]$.

Antes de presentar la prueba del Teorema Fundamental del Álgebra se probarán los siguientes tres lemas.

Lema 2. ***Lema del crecimiento*** *Para cada polinomio de grado $n \geq 1$ y con coeficientes complejos, $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, existe un número real $R > 0$ tal que si $|z| \geq R$ se tiene*

$$\frac{1}{2}|a_n||z^n| \leq |p(z)| \leq 2|a_n||z^n|.$$

Demostración. Sea $R(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k$. Por la desigualdad del triángulo se tiene, que para todo número complejo z,

$$|a_n||z|^n - r(z) \leq p(z) \leq |a_n||z^n| + r(z).$$

Ahora si $|z| \geq 1$ y $m < n$, se tiene que $|z|^m \leq |z|^{n-1}$, entonces $r(z) \leq M|z|^{n-1}$, donde $M = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. Tomando $R = \text{máx}\{1, 2M|a_n|^{-1}\}$, para $|z| \geq R$, sucede que

$$
\begin{aligned}
|P(z)| &\leq |a_n||z|^n + r(z) \leq |a_n||z|^n + M|z|^{n-1} \\
&= |z|^{n-1}(|a_n||z| + M) \leq |z|^{n-1}(|a_n||z| + |a_n||z|) \\
&= 2|a_n||z|^n,
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho de que $|z| \geq R \geq \frac{2M}{|a_n|} > \frac{M}{|a_n|}$. Nuevamente, para $|z| \geq R$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|p(z)| &\geq |a_n||z|^n - r(z) \geq |a_n||z|^n - |z|^{n-1} \\
&\geq |a_n||z|^n - \frac{1}{2}|a_n||z|^n = \frac{1}{2}|a_n||z|^n,
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad se sigue si y sólo si $\frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq M|z|^{n-1}$, la cual es cierta si y sólo si $|z| \geq \frac{2M}{a_n|}$, de donde la demostración está completa. ■

Lema 3. *Sea $P(z)$ un polinomio con coeficientes complejos. Entonces $|P(z)|$ alcanza su valor mínimo en algún punto $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $s = |P(0)| = |a_0|$ y $R_1 = \text{máx}\{R, \sqrt[n]{2s|a_n|^{-1}}\}$, donde el número R es el garantizado por el lema del crecimiento. Si $|z| > R_1$, entonces se tiene que

$$
|P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z^n| > \frac{1}{2}|a_n||R_1^n| \geq \frac{1}{2}|a_n|\frac{2s}{|a_n|} = s.
$$

Por lo tanto, para todo z tal que $|z| > R_1$, se tiene que $|P(z)| > |P(0)|$. En particular, si $R_2 > R_1$, entonces para toda z tal que $|z| \geq R_2$, se tiene la misma desigualdad. De esta forma se ha encontrado un disco cerrado D de radio R_2 con centro en el origen tal que $|P(z)| > |P(0)|$, para toda $|z| > R_2$. Como $P(z)$ es una función continua con valores reales, se sigue que por el lema 5.9, que $|P(z)|$ alcanza su valor mínimo en D. ■

Lema 4. *Sea $P(z)$ un polinomio no constante con coeficientes complejos. Si $P(z_0) \neq 0$, entonces $|P(z_0)|$ no es el valor mínimo de $|P(z)|$.*

Demostración. Sea $P(z)$ un polinomio no constante con coeficientes complejos y sea z_0 un punto tal que $P(z_0) \neq 0$. Haciendo el cambio de variable $z + z_0$ por z, esto mueve z_0 al origen, de modo que se puede suponer $P(0) \neq 0$.

A continuación se debe mostrar que 1 no es el valor mínimo de $|P(z)|$.

Sea k la menor potencia distinta de cero de z en $P(z)$. Entonces se puede suponer que $P(z)$ tiene la forma $P(z) = 1+az^k+g(z)$, con $g(z)$ un polinomio de grado mayor a k.

Sea α una raíz k-ésima de $-a^{-1}$. Entonces haciendo un último cambio de variable, αz por z, se obtiene que $P(z)$ tiene la forma $P(z) = 1 - z^k + z^{k+1}g(z)$, para algún polinomio $g(z)$. Para valores reales positivos de z, obtenemos usando la desigualdad del triángulo que $|P(z)| \leq |1 - z^k| + zk + 1|g(z)|$. Como $zk < 1$, para $|z| < 1$, entonces

$$|p(z)| \leq 1 - z^k + z^{k+1}|g(z)| = 1 - z^k(1 - z|g(z)|).$$

Para z pequeño, $z|g(z)|$ es pequeño también, por lo que se puede escoger z_1 de tal forma que $z_1|g(z_1)| < 1$. Se sigue entonces que $z_1^k(1 - z_1|(z_1)|) > 0$, por lo que $|p(z_1)| < 1 = |P(0)|$, lo que completa la demostración. ■

Demostración del Teorema Fundamental del Álgebra. Considere $P(z)$ un polinomio no constante con coeficientes complejos. Por Lema 3, $|P(z)|$ tiene un valor mínimo en algún punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, por Lema 4, se sigue que $|P(z_0)| = 0$. Por lo tanto, $P(z)$ tiene una raíz compleja. ■

Referencias

[1] Branson, W. (2013, Oct). Solving the cubic with Cardano. Descargado de `https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/solving-the-cubic-with-cardano-references`

[2] Bulajich, R., Gómez Ortgea, J. A., y Valdez Delgado, R. (2017). *Álgebra*. Sociedad Matemática Mexicana.

[3] Cardano, G., y Witmer, T. R. (1993). *Ars magna, or, the rules of algebra*. Dover.

[4] Contreras, J., y del Pino, C. (2004). Sobre la ecuación cúbica. *Revista del Instituto de Matemática y Física, Universidad de Chile, Portal Matemático*, *11*, 13-23. Descargado de `http://www.matesup.cl/portal/revista/2004/2.pdf`

[5] Lehman, C. H. (2012). *Geometría analítica*. Limusa.

[6] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., y Morgado, A. C. (2000a). *La matemática de la enseñanza media. volumen 1*. IMCA.

[7] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., y Morgado, A. C. (2000b). *La matemática de la enseñanza media. volumen 2*. IMCA.

[8] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., y Morgado, A. C. (2000c). *La matemática de la enseñanza media. volumen 3*. IMCA.

[9] Marcén, A. M. O., y Sallán, J. M. G. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa (2013)*. Descargado de `http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362013000300003`

[10] Oostra, A. (2008). Sobre la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado. *Revista Tumbaga (2008), 3, 174-186*. Descargado de `https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3994517.pdf`

[11] Rudin, W. (1976). *Principles of mathmatical analysis*. McGraw-Hill.

[12] Spivak, M. (2012). *Calculus*. Editorial Reverté.

Referencias

[13] Zhang, C. (2020, Ene). A geometric interpretation of the quadratic formula. Descargado de https://www.researchgate.net/publication/338500063_A_Geometric_Interpretation_of_the_Quadratic_Formula