



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Posgrado en Ciencias Físicas

Instituto de Física

PERTURBACIONES NO LOCALES EN
SISTEMAS NO LINEALES CON SOLITONES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Doctor en Ciencias (Física)

PRESENTA:

M. en C. Manuel Velasco Juan

TUTOR PRINCIPAL:

Dr. Jorge Fujioka Rojas
Instituto de Física, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

Dr. Rosalío Fernando Rodríguez Zepeda
Instituto de Física, UNAM

Dr. José Ignacio Jiménez Mier y Terán
Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM

México, CDMX, Ciudad Universitaria, abril de 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres y a mis hermanas por apoyarme siempre.

Agradezco a mi prometida y futura esposa por estar al pendiente de mi y apoyarme no solo en lo personal sino también en lo profesional.

También agradezco a mis amigos y a todas las personas que hicieron esto posible

Agradezco al Dr. Jorge Fujioka Rojas por haber dedicado su tiempo y esfuerzo como mi tutor a lo largo de mis estudios de Maestría y Doctorado, así como también a los miembros de mi comité tutor el Dr. Rosalío Fernando Rodríguez Zepeda y el Dr. José Ignacio Jiménez Mier y Terán.

Agradezco a los sinodales por dedicar su tiempo en la revisión de este trabajo.

Agradezco a DGTIC-UNAM (Dirección General de Cómputo y de Tecnologías de Información y Comunicación de la Universidad Nacional Autónoma de México) por permitirme el acceso a la super-computadora Miztli a través del proyecto LANCAD-UNAM-DGTIC-164 con el fin de llevar acabo este trabajo.

Finalmente agradezco el apoyo financiero de CONACYT (CVU 709210)

Antecedentes

La importancia de los problemas no lineales en física ha ido creciendo de manera continua desde que Zabusky y Kruskal encontraron en 1965 que la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) tenía unas soluciones muy interesantes, que bautizaron con el nombre de *solitones*. Este interés creció aún más cuando en 1967 Gardner, Greene, Kruskal y Miura desarrollaron un método sumamente novedoso para resolver de manera analítica el problema de condiciones iniciales para la ecuación KdV. Posteriormente se vio que había otras dos ecuaciones aún más interesantes que tenían solitones: la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) y una versión compleja de ecuación modificada de KdV (cmKdV).

El estudio de los solitones ópticos es un área de gran interés en física y en física-matemática. Los solitones ópticos son pulsos de luz que pueden propagarse por fibras ópticas sin deformarse. Y el estudio de estos solitones ha sido la base de la tecnología de telecomunicaciones por fibra óptica.

Las ecuaciones NLS y cmKdV son especialmente importantes, ya que, además de ser ecuaciones “totalmente integrables”, son también “ecuaciones universales”, porque pueden ser deducidas mediante el método de escalas múltiples, lo cual implica que describirán el comportamiento de cualquier sistema dispersivo no lineal (ya sea éste un cristal líquido, una fibra óptica, un plasma, ondas en el mar, filamentos de vorticidad, ondas en superficies de grafeno, etc. . .).

La ecuación central en este campo es la llamada ecuación no lineal de Schrödinger (NLS):

$$iu_z + u_{tt} + |u|^2u = 0 \tag{1}$$

en la cual z es la distancia a lo largo de la fibra óptica, t es el llamado tiempo retardado ($t = T - z/V$, donde T es el tiempo normal y V es la velocidad de la luz en la fibra), y $u(z, t)$ es una función compleja que se relaciona con el campo eléctrico de la luz de

acuerdo con la ecuación:

$$E(z, t) = u(z, t)e^{i(kz - \omega t)} + c.c. \quad (2)$$

donde k es el número de onda de la luz, ω es su frecuencia, y $c.c.$ indica al complejo conjugado.

También es frecuente encontrar a la ec. NLS escrita en la forma:

$$iu_z + u_{xx} + |u|^2u = 0 \quad (3)$$

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2u = 0 \quad (4)$$

La ec. (3) describe la propagación de un rayo de luz en una película de vidrio delgada, en donde z es la dirección de propagación, y x es la coordenada transversal, y la ec. (4) podría describir ondas en agua o condensados de Bose-Einstein.

Ahora bien, la ec. (1) es adecuada para describir pulsos de luz de unos pocos picosegundos de duración, y unos pocos mili-watts de potencia. Si quisiéramos describir pulsos más cortos sería necesario añadir derivadas temporales de órdenes superiores, si quisiéramos describir pulsos más intensos tendríamos que añadir términos no lineales adicionales. Por esta razón existen muchas variantes de la ecuación NLS que son de interés en el estudio de los solitones ópticos; Una de estas variantes que es de especial interés, es la ecuación:

$$iu_t - i\epsilon u_{xxx} - i\gamma |u|^2 u_x = 0 \quad (5)$$

a la cual frecuentemente se le llama “complex modified Korteweg-de Vries equation” (cmKdV), y aparece en la descripción de pulsos de luz en cristales líquidos [1].

Recientemente se han empezado a estudiar distintas generalizaciones no locales de la ecuación NLS. Una primera generalización no local de la ec. NLS es la ecuación:

$$iu_z + \frac{1}{2}u_{xx} + u \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') |u(x', z)|^2 dx' = 0, \quad (6)$$

en la cual se ha reemplazado el factor usual $|u|^2$ (que viene del efecto Kerr), por la integral que vemos en (6) debido a que en realidad el índice de refracción $n(x)$ no sólo depende de la intensidad de la luz en un punto (el punto x), sino de la intensidad de la luz en todo un entorno del punto x . Naturalmente la luz en puntos que están lejos de x influye menos, por lo cual se introduce la función de peso $R(x - x')$. Y otra generalización no local de la ec. NLS es la ecuación de Ablowitz-Musslimani:

$$iu_t - u_{xx} + 2u^2(x, t)u^*(-x, t) = 0 \quad (7)$$

y en este caso la no-localidad es totalmente distinta. Esta ecuación es interesante, ya que Ablowitz y Musslimani (AM) demostraron que es una ecuación totalmente integrable. Y esta es una propiedad tan importante que justificó que el artículo de AM se publicara en el Physical Review Letters. Sin embargo, la ecuación de AM tiene 2 inconvenientes serios:

- no tiene lagrangiana (i.e., no puede ser deducida mediante el principio de mínima acción),
- no tiene una interpretación física clara.

Objetivo de la tesis

En esta tesis estudiaremos la propagación de ondas solitarias en cuatro generalizaciones no locales de la ecuación cmKdV, en donde las no-localidades son integrales similares a la integral que vemos en (6), y en dos generalizaciones no locales de la ec. NLS, en donde las no-localidades son del tipo de la no-localidad de la ecuación de AM.

Al estudiar las cuatro generalizaciones no locales de la ec. cmKdV encontramos lo siguiente:

- Tres de las ecuaciones estudiadas pueden deducirse a partir de lagrangianas adecuadas, y de ecuaciones de Euler-Lagrange de formas sumamente novedosas.

La que podría considerarse la generalización directa de la ecuación cmKdV, tiene una desventaja importante y es que no parece ser deducible de una lagrangiana. Esta es una característica indeseable, ya que como dice K.H. Anthony [2].

In theoretical physics a theory is often considered to be complete if its variational principle in the sense of Hamilton is known.

Por consiguiente, el hecho de encontrar ecuaciones que no puedan ser deducidas a partir del principio de mínima acción sugiere que nuestra teoría no está completa. Esto mismo motivó a buscar más generalizaciones no locales para la ecuación cmKdV que sí tengan Lagrangiana.

- Una de las cuatro ecuaciones estudiadas permite la propagación de pulsos de alturas y velocidades constantes, similares a los solitones usuales.

Al tener cuatro generalizaciones resultó importante averiguar cuál de ellas es la “buena”, es decir, la que tiene soluciones que se comportan como solitones, ya que son los solitones, los que tienen las aplicaciones.

-
- En tres de las ecuaciones estudiadas los pulsos no avanzan a velocidades constantes, lo cual es un resultado poco común.
 - Se encontraron múltiples **lagrangianas equivalentes, que se relacionan entre sí de maneras totalmente novedosas.**

El estudio de Lagrangianas equivalentes ha sido motivo de múltiples trabajos, y aunque este tema no es tan conocido en el campo de los solitones ópticos, sí es un tema muy importante en Física teórica.

Por otra parte, al estudiar las dos generalizaciones no locales nuevas de la ec. NLS encontramos lo siguiente:

- Las dos ecuaciones propuestas pueden deducirse de lagrangianas adecuadas, utilizando ecuaciones de Euler-Lagrange sumamente originales.

La extraña forma de estas generalizaciones no locales de la ecuación NLS hace que las ecuaciones de Euler-Lagrange (que permiten obtener estas ecuaciones a partir de lagrangianas adecuadas) tengan formas sumamente originales, completamente diferentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange usuales.

- El comportamiento de los pulsos en ambas ecuaciones es diferente.
Aún cuando las generalizaciones de la ecuación NLS están relacionadas, presentan soluciones muy distintas.
- En una de estas ecuaciones, el comportamiento de los pulsos pudo explicarse mediante un procedimiento variacional (gracias a la existencia de una lagrangiana).
- Una de las ecuaciones propuestas **tiene una interpretación física clara e interesante** (a diferencia de la ecuación de AM, que no tiene una interpretación física clara).
- La ecuación con interpretación física clara permite la propagación de **breathers**. Estudiamos las colisiones entre breathers, y encontramos que estos son soluciones robustas, que resisten las colisiones, y recuperan sus velocidades y formas después de la colisión.

Publicaciones

1. “Integral complex modified Korteweg-de Vries (Icm-KdV) equations” [3]
Publicado en Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 134 (2020) 109687.
2. “Lagrangian Nonlocal Nonlinear Schrödinger Equations” [4]
Publicado en Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 156 (2022) 111798.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Generalizaciones de la ecuación NLS	1
1.2. Generalizaciones de la ecuación cmKdV	6
1.3. Generalizaciones de la NLS y cmKdV que incluyen efectos no locales	7
1.4. Estructura de la tesis	12
2. Ecuaciones integrales complejas modificadas de Korteweg-de Vries (Icm-KdV)	13
2.1. Las ecuaciones Icm-KdV-I e Icm-KdV-II	14
2.2. La ecuación Icm-KdV-III	16
2.3. La ecuación Icm-KdV-IV	17
2.4. Teorema de Noether y cantidades conservadas	20
2.5. Soluciones de Onda solitaria	22
2.5.1. Soluciones de las ecuaciones Icm-KdV-I, II y III	22
2.5.2. Comparación entre las ecuaciones Icm-KdV-I, II y III.	34
2.5.3. Soluciones analíticas y análisis variacional	38
3. Ecuaciones Lagrangianas no lineales no locales de Schrödinger	43
3.1. Ecuaciones LN1 y LN2	44
3.2. Interpretación Física de LN2	46
3.3. Soluciones Numéricas	49
3.3.1. Resultados correspondientes a $V_0 = 1$	50
3.3.2. Resultados correspondientes a $V_0 = 2$	53
3.3.3. Comentarios sobre las soluciones numéricas	56
3.4. Análisis Variacional	56
3.4.1. Análisis Variacional de LN2	57
3.4.2. Análisis Variacional de LN1	61
3.5. Colisiones de Breathers	64

4. Discusión y conclusiones	73
4.1. Discusión	73
4.2. Conclusiones	76
Apéndices	83
A. Sobre la interpretación Física de LN2	85
B. Conservación del momento y la energía de la ec. Icm-KdV-I	87
C. Deducción de las ecuaciones de Euler-Lagrange	93
C.1. Ecuación de Euler-Lagrange para la ecuación Icm-KdV-IV	94
C.2. Ecuación de Euler-Lagrange para LN1 y LN2	99
D. Principio de mínima acción	101
D.1. Deducción de la ec. Icm-KdV-II	101
D.2. Deducción de la ec. Icm-KdV-IV	103
D.3. Deducción de la ec. LN1	106
D.4. Deducción de la ec. LN2	108
E. Lagrangianas equivalentes para la ec. Icm-KdV-II	111
F. Teorema de Noether	115
F.1. Cantidades conservadas de la ec. Icm-KdV-IV	115
F.2. Cantidades conservadas de la ec. LN1	131
G. Soluciones numéricas	143
G.1. Solución numérica ec. Icm-KdV-I	143
G.2. Solución numérica ec. Icm-KdV-II	146
G.3. Solución numérica ec. Icm-KdV-III	150
G.4. Solución numérica ec. AM	152
G.5. Solución numérica ec. LN1	156
G.6. Solución numérica ec. LN2	158
H. Aproximación numérica de las integrales de la ec. Icm-KdV-II	161
I. Análisis variacional	165
I.1. Ecuación Icm-KdV-II	165
I.2. Ecuación LN1	191
I.2.1. Solución variacional numérica LN1	195
I.3. Ecuación LN2	199
I.3.1. Solución variacional numérica LN2	200

J. Resultados numéricos ec. Icm-KdV-II función de peso más ancha	203
J.1. Función de peso triangular	203
Referencias	211

Introducción

En el campo de los solitones ópticos, la ecuación fundamental que describe la propagación de pulsos luminosos en fibras ópticas es la “ecuación no lineal de Schrödinger” (NLS, por sus siglas en inglés), y su principal aplicación yace en las telecomunicaciones. Sin embargo, esta ecuación no solo es importante en el campo de los solitones ópticos, sino que es posible encontrarla en otros campos de la física, con aplicaciones diversas. De hecho existen diversas variantes de la ecuación NLS. Y resulta de gran interés estudiar estas variantes, en particular las variantes que son cualitativamente diferentes, entre las cuales podemos mencionar las descritas en la siguiente sección.

1.1. Generalizaciones de la ecuación NLS

Ecuación NLS tradicional

Esta es la ecuación central que describe la propagación de pulsos luminosos en fibras ópticas, y en este caso toma la forma:

$$iu_z + u_{tt} + |u|^2u = 0 \tag{1.1}$$

donde z es la variable de evolución del pulso, el término u_{tt} describe la dispersión del pulso, mientras que la no linealidad $|u|^2u$ es una consecuencia del índice de refracción del vidrio, el cual depende de la intensidad de la luz.

La ecuación NLS también sirve para describir ondas en agua, plasmas, pulsos luminosos en cristales líquidos, e inclusive permite describir el comportamiento de condensados de Bose-Einstein, en cuyo caso toma la forma:

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2u = 0 \tag{1.2}$$

Generalización de la NLS para condensados de Bose-Einstein “densos”

En un artículo reciente de R. Flores-Calderón [5] se estudió la dinámica del solitón de un condensado de Bose Einstein de alta densidad sujeto a un potencial de atrapamiento que oscila en el tiempo.

En este trabajo se comenzó con una ecuación modificada de Gross-Pitaevskii (mG-PE, por sus siglas en ingles) y luego se consideraron las fluctuaciones cuánticas del estado base, para llegar a la ecuación generalizada:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x, t) \psi - |\psi|^2 \psi + g_1 |\psi|^3 \psi + g_2 |\psi|^4 \psi - i \frac{K_3}{2} |\psi|^4 \psi + \frac{i\gamma}{2} \psi \quad (1.3)$$

la cual es una generalización interesante que en comparación con la NLS tradicional, tiene cinco términos adicionales, de los cuales tres de ellos son no linealidades.

Generalizaciones de la NLS con “radiación”

La ecuación 1.1 describe apropiadamente la propagación de pulsos ópticos cuya duración es del orden de 5ps. Sin embargo, en el artículo de A. Espinosa-Cerón [6] se explica que si quisiéramos describir la propagación de pulsos más cortos es necesario introducir términos dispersivos adicionales (derivadas de órdenes superiores), como los siguientes:

$$iu_z + u_{tt} - iu_{ttt} + |u|^2 u = 0 \quad (1.4)$$

$$iu_z + u_{tt} - iu_{ttt} + u_{4t} + |u|^2 u = 0 \quad (1.5)$$

donde el subíndice $4t$ denota la derivada de cuarto orden respecto al tiempo y los términos dispersivos provocan que el pulso emita radiación.

Generalizaciones de la NLS para pulsos intensos

A diferencia de la generalización anterior, si se quieren describir pulsos más intensos en lugar de más cortos, ahora se deben considerar términos no lineales adicionales, como la no linealidad “saturable” que vemos en el artículo de J. Hickmann [7]:

$$iu_z + u_{tt} + \frac{|u|^2}{A + B|u|^2}u = 0 \quad (1.6)$$

o la no linealidad de quinto orden que vemos en el artículo de J. Herrmann [8]:

$$iu_z + u_{tt} + |u|^2u - |u|^4u = 0 \quad (1.7)$$

Generalizaciones “no paraxiales” de la ec. NLS

En el artículo de J. Fujioka [9] podemos ver que cuando no se toma en cuenta la aproximación de “envolventes lentas” (slowly varying envelope approximation), es necesario considerar ecuaciones de la forma:

$$iu_z + u_{zz} + u_{tt} + |u|^2u = 0 \quad (1.8)$$

$$iu_z + c_0u_{zz} + c_2u_{tt} + c_4u_{4t} + \gamma_1|u|^2u - \gamma_2|u|^4u = 0 \quad (1.9)$$

$$iu_z + c_0u_{zz} + c_2u_{tt} - ic_3u_{ttt} + c_4u_{4t} + \gamma_1|u|^2u - \gamma_2|u|^4u = 0 \quad (1.10)$$

$$iu_z + c_0u_{zz} + c_2u_{tt} + c_4u_{4t} + \gamma_1|u|^2u = 0 \quad (1.11)$$

Como podemos ver, estas variantes contienen términos dispersivos de más alto orden y términos no lineales adicionales. Sin embargo, debido a que no se tomó en cuenta la aproximación de envolventes lentas, también es necesario considerar una segunda derivada en la variable de evolución. Estas ecuaciones son particularmente interesantes porque conducen a problemas mal planteados (“ill-posed problems”), que NO son problemas incorrectos, sino que son extremadamente difíciles de resolver.

Generalizaciones de la NLS con solitones embebidos aislados

Por otro lado, en el artículo de A. Espinosa-cerón [10] se puede ver que si se consideran a la vez efectos dispersivos que provocan dispersión y los términos no lineales:

$$iu_z + u_{tt} + u_{4t} + |u|^2u - |u|^4u = 0 \quad (1.12)$$

se observó que estos efectos pueden llegar a contrarrestarse de tal manera que existen soluciones solitónicas exactas, es decir donde la radiación no entra en resonancia con el pulso óptico. A este tipo de solitones se les llamó *solitones embebidos*.

Generalización discreta de la NLS con “embedded lattice solitons” aislados

En 2004 S. González-Pérez [11] en un artículo publicado en el revista Physica D estudió una generalización discreta de una versión generalizada de la ecuación NLS:

$$iu_t + \epsilon_2 u_{xx} + \epsilon_4 u_{4x} + \gamma_1 |u|^2 u - \gamma_2 |u|^4 u = 0 \quad (1.13)$$

donde el subíndice $4x$ denota la cuarta derivada con respecto a x . La generalización discreta estudiada fue:

$$i \frac{\partial r_n}{\partial t} + \epsilon_2 \Delta_2 r_n + \epsilon_4 \Delta_4 r_n + \frac{1}{2} \gamma_1 |r_n|^2 (r_{n+1} + r_{n-1}) - \frac{2}{3} \gamma_2 |r_n|^4 (r_{n+2} + 4\alpha (r_{n+1} + r_{n-1}) + r_{n-2}) = 0 \quad (1.14)$$

con:

$$\Delta_2 r_n = \frac{r_{n+1} - 2r_n + r_{n-1}}{(\Delta x)^2} \quad (1.15)$$

$$\Delta_4 r_n = \frac{r_{n+2} - 4r_{n+1} + 6r_n - 4r_{n-1} + r_{n-2}}{(\Delta x)^4} \quad (1.16)$$

y encontraron solitones exactos, conocidos en inglés como “lattice-solitons”, tanto estándares como embebidos.

Generalizaciones de la NLS con “derivadas fraccionarias”

También existen generalizaciones de la NLS que incluyen derivadas fraccionarias.

Como un primer ejemplo tenemos un artículo de J. Fujioka [12] en donde estudia una ecuación NLS que incluye términos dispersivos fraccionarios y términos no lineales también fraccionarios:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \epsilon(\alpha) D^\alpha u + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + |u|^2 u + \gamma(\alpha) |u|^{2(\alpha-1)} - |u|^4 u = 0 \quad (1.17)$$

siendo D^α una derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov. En este caso se encontró una familia de solitones ópticos fraccionarios estables.

En otro artículo de J. Fujioka [13], se estudio una generalización fraccionaria de la NLS, distinta a la anterior:

$$iu_z + \epsilon(\alpha) D^\alpha u + u_{4t} + |u|^2 u - |u|^4 u = 0 \quad (1.18)$$

ya que en esta ocasión se ha considerado una derivada fraccionaria de Ortigueira, la cual es una derivada fraccionaria completamente distinta a la de Grünwald-Letnikov. En esta generalización también se encontraron soluciones tipo solitón.

Estas generalizaciones de la NLS con derivadas fraccionarias consideran efectos no locales, ya que la definición de la derivada de Grünwald-Letnikov:

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha + 1 - k)} f(x - kh) \quad (1.19)$$

y la definición de la derivada de Ortigueira:

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha/2 + 1 - k) \Gamma(\alpha/2 + 1 + k)} f(x - kh) \quad (1.20)$$

toman en cuenta no solo a los vecinos cercanos alrededor del punto en el cual se quiere obtener la derivada, sino que toman en cuenta a todos los vecinos existentes, pesados por un factor que coincide con el coeficiente binomial en los casos en que α es un entero. Por lo tanto estas generalizaciones que incluyen derivadas fraccionarias en realidad esta considerando un efecto no local, pues para conocer el comportamiento de la función en un punto, este no depende del valor de la función solo en ese punto, sino que depende de todos los puntos que están alrededor de él, aunque ciertamente conforme los puntos se alejan del punto de interés, su factor de peso es cada vez menor.

Estas derivadas fraccionarias se introdujeron para buscar soluciones adicionales, ya que hay generalizaciones de la NLS que incluyen una segunda derivada y tienen soluciones de solitón, pero también hay generalizaciones de la NLS que contienen una tercera derivada con soluciones de solitón. La diferencia entre ambas generalizaciones es que describen pulsos a distintas escalas, y con el uso de las derivadas fraccionarias se pueden obtener soluciones intermedias.

Generalizaciones discretas de la NLS con dos estructuras lagrangianas cualitativamente distintas

En 2019, J. Fujioka [14] estudió una generalización discreta de la ecuación NLS que tiene la característica de que puede ser obtenida utilizando el principio de mínima acción, pero de dos formas completamente diferentes. La ecuación estudiada fue:

$$\begin{aligned}
 iq_{n,t} + \epsilon(q_{n+1} + 2q_n + q_{n-1}) + \gamma|q_n|^2(q_{n+1} + q_{n-1}) \\
 + \frac{\gamma}{2}q_n^2(q_{n+1}^* + q_{n-1}^*) + \frac{\gamma}{2}|q_{n+1}|^2q_{n+1} + \frac{\gamma}{2}|q_{n-1}|^2q_{n-1} = 0 \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

la cual representa un sistema discreto de ecuaciones diferenciales para funciones de una sola variable, por lo cual se puede utilizar el formalismo Lagrangiano tradicional aplicable en este tipo de sistemas. Lamentablemente las ecuaciones que surgen de seguir por este camino son muy complicadas de resolver. Sin embargo, si se utiliza una ecuación equivalente:

$$\begin{aligned}
 iu_{n,t} + \epsilon(u_{n+1} + 2u_n + u_{n-1}) + \gamma|u_n|^2(u_{n+1} + u_{n-1}) \\
 + \frac{\gamma}{2}u_n^2(u_{n+1}^* + u_{n-1}^*) + \frac{\gamma}{2}|u_{n+1}|^2u_{n+1} + \frac{\gamma}{2}|u_{n-1}|^2u_{n-1} = 0 \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

pero que ahora represente *un sistema continuo* en el cual la nueva variable u_n es ahora una función de dos variables continuas, entonces el formalismo Lagrangiano también cambia, y en dicho artículo se observó que en este otro formalismo Lagrangiano es más fácil aplicar el método variacional para obtener soluciones aproximadas y también aplicar el Teorema de Noether para encontrar cantidades conservadas. De esta manera también fue posible encontrar soluciones tipo solitón y los llamados “breathers”.

1.2. Generalizaciones de la ecuación cmKdV

Generalizaciones de la cmKdV con familias continuas de solitones embebidos

En 2003, R. F. Rodríguez [1] en un artículo publicado en la revista *Physical Review* probó la existencia de solitones en fibras nemáticas cilíndricas, de hecho se obtuvo una familia de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que describen la propagación de pulsos ópticos a lo largo de la fibra.

Dentro de esa familia de EDPs estaba la NLS y también otra de las ecuaciones importantes en el campo de los solitones, la llamada ecuación *complex modified Korteweg-de Vries* (cmKdV):

$$iu_z - i\epsilon u_{ttt} - i\gamma|u|^2u_t = 0 \quad (1.23)$$

que es una ecuación totalmente integrable a través del método de “inverse scattering”, al igual que la ec. NLS.

En su artículo R. F. Rodríguez explicó por qué los solitones no radían, aunque su número de onda está contenido en el espectro lineal del sistema. Por lo tanto, explicaron cómo es posible que estos solitones embebidos puedan ser soluciones estables.

Generalización discreta de la cmKdV con familias de “embedded lattice solitons”

Además de estudiar “*lattice solitons*” de forma aislada, también se han estudiado familias de *lattice solitons* embebidos [15], pero esta vez la ecuación generalizada estudiada es una variante de la cmKdV:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_n}{\partial t} = & -2\epsilon_0 (r_{n+1} + r_{n-1}) + \epsilon_0 (r_{n+2} + r_{n-2}) \\ & + \rho |r_n|^2 (r_{n+1} - r_{n-1}) - \delta |r_n|^2 (r_{n+2} + r_{n-2}) \end{aligned} \quad (1.24)$$

esta ecuación es una generalización discreta de la ecuación cmKdV, porque cuando tomamos el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ recuperamos la ecuación:

$$u_t = \epsilon u_{3x} + \frac{1}{6} (\rho - 2\sigma) \gamma |u|^2 u_x \quad (1.25)$$

Los solitones encontrados en esta generalización discreta se pueden mover con velocidades arbitrarias a través de la malla y, además, son soluciones suficientemente robustas como para soportar colisiones

1.3. Generalizaciones de la NLS y cmKdV que incluyen efectos no locales

Así pues, podemos ver que hay muchas generalizaciones de interés de la ec. NLS. Algunas de estas generalizaciones se conocen casi desde el inicio del estudio de los solitones ópticos, y otras generalizaciones son mucho más recientes. Y entre las generalizaciones recientes hay un tipo de ellas muy interesantes, poco estudiadas: las

generalizaciones no locales de la ec. NLS. Esencialmente hay 2 tipos muy diferentes de ecs. NLS no locales, ecuaciones como la ec. de Wang, Wang, Yang, Mao (WWYM) [16]:

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + u \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x')|u(x',t)|^2 dx' = 0, \quad (1.26)$$

o ecuaciones como la ec. de Ablowitz-Musslimani (AM) [17]:

$$iu_t - u_{xx} + 2u^2(x,t)u^*(-x,t) = 0 \quad (1.27)$$

En esta tesis estudiaremos cuatro generalizaciones no locales de la ec. cmKdV que tienen términos no locales semejantes al que aparece en la ec. WWYM, y dos generalizaciones no locales de la ec. AM que tienen la virtud de tener estructuras lagrangianas (a diferencia de la ec. AM, que no tiene lagrangiana auténtica). En este trabajo investigaremos, en particular, si estas seis ecuaciones permiten la propagación de solitones.

Es importante enfatizar que la ec. cmKdV es una ecuación de gran importancia, ya que, además de describir procesos físicos muy interesantes (como pulsos de luz en cristales líquidos), es una de las pocas ecuaciones diferenciales parciales no lineales “totalmente integrables”, es decir, que pueden ser resueltas de manera exacta mediante el famoso método de “inverse scattering”. Por lo tanto, es de gran interés saber si existen generalizaciones no locales de la ec. cmKdV que permitan la propagación de solitones. Por lo tanto, en este trabajo investigaremos si es posible:

- generalizar el principio de mínima acción para que sea aplicable a integrales de acción en las cuales la lagrangiana no sólo dependa de las funciones $u(x,t)$ y $u^*(x,t)$, sino también de integrales similares a la que vemos en la ec. (1.26). Esto implica encontrar la forma de las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a este tipo de lagrangianas.
- resolver numéricamente las distintas generalizaciones de la ecuación cmKdV y comparar las soluciones con la ec. cmKdV tradicional.
- generalizar el teorema de Noether para que sea aplicable a lagrangianas que contengan integrales similares a la que aparece en la ec. (1.26). Si esto es posible, buscar cantidades conservadas asociadas a las simetrías de las lagrangianas de las generalizaciones no locales de la ec.cmKdV.
- aplicar el método variacional introducido por Anderson (muy usado en el estudio de solitones ópticos) para obtener información acerca del comportamiento de las ondas solitarias que obedezcan las versiones no locales de la ec. cmKdV.

Por otro lado, la ec. de Ablowitz-Musslimani (AM) es de interés por otras razones. En primer lugar, porque es también una ecuación totalmente integrable. Pero además

porque es una ecuación sumamente extraña. La “no-localidad” de esta ecuación es un término extraño, para el cual casi no se han encontrado interpretaciones físicas de interés. Esta ecuación, sin embargo, tiene una gran desventaja: no tiene una estructura lagrangiana. Y en este trabajo buscaremos “corregir” estas 2 deficiencias de la ecuación AM, es decir:

- en primer lugar, mostraremos que es posible construir generalizaciones de la ec. AM que sí tienen una estructura lagrangiana,
- y en segundo lugar, mostraremos que una de las generalizaciones de la ec. AM encontradas en este trabajo sí tiene una interpretación física totalmente clara e interesante, que describe un proceso que podría generarse en un laboratorio de óptica.

La ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) y la ecuación compleja modificada Korteweg-de Vries (cmKdV):

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - \gamma |u|^2 u_x = 0 \quad (1.28)$$

son ecuaciones excepcionales porque ellas constituyen el único par de ecuaciones completamente integrables, es decir, ecuaciones diferenciales parciales no lineales (NLPDEs) completamente integrables solubles por el método de dispersión inversa “inverse scattering”, que son también *ecuaciones universales* pues pueden ser obtenidas por el método de escalas múltiples [18]. Este hecho implica que ambas son útiles para describir la propagación de ondas en cualquier medio dispersivo no lineal (pero a diferentes escalas). De hecho la NLS es una de las NLPDEs más importantes en física matemática porque tiene muchas características interesantes. Una de ellas es la existencia de un número significativo de generalizaciones, que describen la propagación de ondas no lineales en muchos sistemas diferentes. Estas generalizaciones incluyen extensiones “simples” que contienen derivadas de más alto orden o bien no linealidades de más alto orden [19]-[23], pero también existen variantes más sofisticadas que incorporan derivadas fraccionarias [24]-[27] o términos no locales [28]-[30]. Por otro lado, la ecuación cmKdV es particularmente interesante porque además de ser útil en cualquier sistema dispersivo no lineal, hereda las soluciones reales de la ecuación modificada Korteweg-de Vries (mKdV):

$$u_t + u_{xxx} + 6u^2 u_x = 0 \quad (1.29)$$

de la que hay nuevas soluciones interesantes [31],[32].

En las pasadas dos décadas han sido ideados diversos métodos para obtener soluciones particulares de ecuaciones, tales como las ecuaciones NLS y cmKdV o bien para otras NLPDEs, como la ecuación de Boussinesq, Ginzburg-Landau, Klein-Gordon,

Camassa-Holm y Kadomtsev-Petviashvili. Entre esos métodos están el método mejorado de la función \tanh [33],[34] la aproximación de mapeo [35], métodos basados en transformación de funciones y ecuaciones auxiliares [36]-[40], el método de expansión de la función elíptica de Jacobi [41] y el método conocido como F-expansión [42]-[44].

En óptica, la inclusión de términos integrales no locales en la ecuación que describe la propagación de la luz en un medio no lineal es debido al hecho de que el cambio de la luz inducida en el índice de refracción de un cierto punto dentro del medio está influenciado por la intensidad de la luz en una vecindad de ese punto. En años recientes, ha habido un incremento interesante de este tipo de procesos (donde los efectos no locales toman lugar) y han llevado al estudio de varias generalizaciones de la ecuación NLS que contiene términos integrales [16],[45].

Debido a que en cualquier sistema, donde la NLS puede describir la propagación de ondas no lineales a una cierta escala, la cmKdV es también útil para describir el comportamiento de ondas pero a escalas más grandes, deberíamos esperar que en los medios no lineales no locales donde la propagación de pulsos de luz pueden ser descritos por ecuaciones generalizadas NLS que contienen términos integrales, versiones no locales de la cmKdV también podrían ser útiles para describir la propagación de ondas en otras escalas. Sin embargo, la incorporación de efectos no locales en la cmKdV no es directa como en el caso de la NLS. Si nosotros intentamos introducir efectos no locales en la cmKdV de la misma manera en que se hizo en el caso de la NLS (reemplazando el factor $|u|^2$ por una integral), la ecuación resultante ya no es obtenible vía el principio de mínima acción y no posee Lagrangiana. Por lo tanto, debemos ser cuidadosos al incorporar la no-localidad en la ecuación cmKdV.

Como mencionamos en los antecedentes, existen dos extensiones no locales interesantes de la famosa ecuación no lineal de Schrödinger (NLS):

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2u = 0 \tag{1.30}$$

En la primera extensión la no linealidad usual $|u|^2u$ es reemplazada por un término integral [16]:

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + u \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x')|u(x',t)|^2 dx' = 0, \tag{1.31}$$

donde $R(x-x')$ es una función de peso que asigna una mayor importancia a los valores $u(x',t)$ en los puntos x' que están más cerca de x , y una menor influencia a los puntos que están más lejos de x . El significado de tal reemplazamiento es muy claro en el estudio de solitones ópticos, donde la ecuación 1.30 es usada para describir el avance de pulsos ópticos a lo largo de fibras ópticas o películas delgadas dieléctricas. En el último caso t , debería ser entendido como la distancia de propagación a lo largo de

la película delgada, y x es la distancia a lo largo de un eje que es perpendicular a la dirección de propagación. En este contexto óptico, el término no lineal en la ecuación NLS es originado por efecto Kerr, que nos dice que el índice de refracción de la fibra, $n(x)$, depende de la intensidad de la luz. Sin embargo, siendo realistas, el valor de $n(x)$ no solo depende del valor de la intensidad de la luz en el punto matemático x , sino que también depende de la intensidad de la luz en una vecindad de x . La integral que aparece en la (1.31) toma en cuenta tal dependencia no local. La estructura de la (1.31) es interesante, porque puede ser obtenida de una densidad Lagrangiana apropiada a través del principio de mínima acción, y con esta Lagrangiana podemos obtener cantidades conservadas usando el Teorema de Noether y aproximar soluciones por medio del método variacional de Anderson [46].

Por otro lado, una extensión no local completamente diferente de la ecuación NLS fue desarrollada por Ablowitz y Musslimani (AM) en 2013 [17]:

$$iu_t - u_{xx} + 2u^2(x, t)u^*(-x, t) = 0 \quad (1.32)$$

En esta ecuación la función cuadrática u^2 , así como las derivadas u_t y u_{xx} , son evaluadas en el punto (x, t) (como es usual), pero el complejo conjugado u^* es evaluado en $(-x, t)$. Por lo tanto, esta ecuación describe un proceso no local: el valor de la derivada u_t en el punto x no está completamente determinado por el comportamiento de la función u y su derivada u_{xx} en ese punto, sino que depende del valor u^* en el punto $-x$, que puede estar muy lejos del punto x . La ecuación (1.32) es un modelo interesante, porque es integrable usando el método de dispersión inversa y posee soluciones de onda solitaria que explotan en un tiempo finito. Deberíamos notar que la ec. (1.32) sólo contiene no-localidades espaciales. Sin embargo, ecuaciones NLS no locales con no-localidades en el tiempo también han sido desarrolladas y estudiadas [47],[48].

Después del descubrimiento de la ec. (1.32), muchas otras ecuaciones diferenciales parciales (PDEs) no lineales y no locales con propiedades interesantes fueron encontradas: una ecuación no local modificada Korteweg-de Vries (mKdV) [49]-[51], una ecuación compleja no local mKdV [52], una ecuación no local de Hirota [53],[54], ecuaciones NLS no locales con potenciales de atrapamiento, soluciones racionales y condiciones de frontera diferentes de cero [55]-[57], ecuaciones superintegrables no locales NLS y mKdV [58], así como varios sistemas de PDEs no locales [59]-[64].

Es interesante observar que las ecuaciones (1.31) y (1.32) son completamente diferentes. Ambas son ecuaciones no locales, pero por razones completamente distintas. Además, hay un importante contraste entre ellas: mientras la ecuación (1.31) no es integrable pero sí tiene Lagrangiana, la ecuación (1.32) es un modelo integrable, pero no posee una estructura Lagrangiana auténtica.

1.4. Estructura de la tesis

Este trabajo está estructurado de la siguiente forma:

En el capítulo 2 presentamos cuatro generalizaciones no locales de la ecuación cmKdV, tres de estas variantes pueden ser obtenidos por el principio de mínima acción y poseen diferentes Lagrangianas equivalentes. De hecho la relación de equivalencia que presentan estas lagrangianas es diferente a la usual y la hemos llamado “F-equivalencia”. Aplicamos el Teorema de Noether a las generalizaciones para obtener cantidades conservadas, y encontramos que una de estas generalizaciones tiene soluciones tipo solitón. Analizamos la estabilidad de estas soluciones a través de pequeñas perturbaciones a la amplitud inicial. Utilizamos el método variacional para tener un mejor entendimiento del comportamiento de estos pulsos.

En el capítulo 3 presentamos dos generalizaciones de la ecuación de AM, con la ventaja de que sí tienen una estructura Lagrangiana y observamos un efecto interesante producido por el tipo de no-localidad presentado en estas ecuaciones, y es que el origen se comporta como un atractor para soluciones que empiezan a moverse a partir de él. Sin embargo, también existen soluciones que logran escapar. Y en los casos en que la solución ya viene moviéndose desde antes de llegar al origen, se observa que el efecto del origen es mínimo. Encontramos, además, que una de las generalizaciones de la ecuación de AM, permite la propagación de breathers, y además estos breathers son soluciones robustas que resisten colisiones.

En el capítulo 4 hacemos una breve discusión acerca del trabajo realizado, y a modo de conclusiones enlistamos de manera puntual los resultados más importantes obtenidos en esta tesis.

Finalmente, en los apéndices podemos encontrar toda la información relacionada con los cálculos involucrados para obtener los resultados presentados en esta tesis. Sin embargo, no están en el orden de aparición en la tesis, sino que más bien tienen un orden lógico en el cual se agruparon teniendo en cuenta las técnicas y modelos matemáticos utilizados en este trabajo.

Ecuaciones integrales complejas modificadas de Korteweg-de Vries (Icm-KdV)

En este capítulo examinamos diferentes formas de introducir efectos no locales en la ecuación compleja modificada Korteweg-de Vries (cmKdV). Se presentan cuatro posibles generalizaciones de la ecuación cmKdV. En estas variantes de la ecuación cmKdV los términos no lineales han sido reemplazados por uno, dos o tres términos integrales. Tres de estas variantes pueden ser obtenidas por el principio de mínima acción y poseen diferentes Lagrangianas equivalentes. **La relación entre estas lagrangianas es enteramente nueva.** Por lo tanto, hemos encontrado un nuevo tipo de equivalencia Lagrangiana. Debido a que el teorema de Fubini es necesario para probar la equivalencia de estas Lagrangianas, le llamamos “F-equivalencia”. Se aplicó el teorema de Noether a estas ecuaciones integrales y se obtuvieron diferentes cantidades conservadas. También se estudió el comportamiento de ondas solitarias en estos modelos. Se encontró que uno de estos modelos tiene soluciones tipo solitón. Las soluciones numéricas muestran que estos solitones son estables, y las amplitudes de los solitones perturbados alcanzan valores constantes después de un corto periodo transitorio. Finalmente fue aplicado el método variacional para tener un mejor entendimiento del comportamiento de estos pulsos durante los periodos transitorios.

Este capítulo está estructurado como sigue: en la sección 2.1 comenzaremos estudiando la ecuación, que puede ser considerada la extensión integral más obvia de la ecuación cmKdV: una en que se reemplaza $|u|^2$ por una integral. Mostraremos que esta ecuación (nos referiremos a ella con el acrónimo Icm-KdV-I) conserva el momento y la energía, pero tiene un inconveniente: no puede ser obtenida utilizando el principio de mínima acción. Entonces introduciremos una segunda extensión integral de la cmKdV que tiene dos términos integrales y sí puede ser obtenida mediante el principio de mínima acción. Mostraremos que esta ecuación (Icm-KdV-II) puede ser obtenida de dos Lagrangianas equivalentes que están relacionadas entre ellas en una forma com-

pletamente nueva. En la sección 2.2 mostraremos que también es posible construir una tercera extensión integral de la ecuación cmKdV (Icm-KdV-III) que tiene un solo término integral y puede ser deducida de dos densidades Lagrangianas equivalentes con diferentes términos integrales. La sección 2.3 muestra que las ecuaciones Icm-KdV-II e Icm-KdV-III pueden ser combinadas en una cuarta extensión no local de la ecuación cmKdV que contiene tres términos integrales. Esta ecuación Icm-KdV-IV es particularmente interesante porque puede ser obtenida de nueve diferentes Lagrangianas equivalentes cuya relación no es la usual. En la sección 2.4 se aplicará el Teorema de Noether a la ecuación Icm-KdV-IV, y se probará la conservación de la energía y de nueve Hamiltonianas diferentes. En la sección 2.5 investigaremos cómo evolucionan condiciones iniciales tipo solitón de acuerdo a las ecuaciones Icm-KdV I,II y III.

2.1. Las ecuaciones Icm-KdV-I e Icm-KdV-II

Cuando lidiamos con sistemas no lineales donde la propagación de ondas puede ser descrita por la ecuación NLS, efectos no locales pueden ser introducidos reemplazando el término no lineal $|u|^2u$ por un término integral de la forma:

$$u \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x')|u(x',t)|^2 dx' \quad (2.1)$$

donde $R(x)$ es una función real simétrica normalizada que podría ser escogida como $\exp(-|x|/\sigma)/(2\sigma)$, o como $\exp(-x^2/\sigma)/(2\sigma)$ o incluso una función escalón simétrica. La ecuación resultante:

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + u \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x')|u(x',t)|^2 dx' = 0, \quad (2.2)$$

es un modelo satisfactorio porque conserva la energía, el momento, la Hamiltoniana y puede ser obtenido de una densidad Lagrangiana adecuada. Esta forma de introducir efectos no locales en la ecuación NLS sugiere que también podríamos introducir estos efectos en la ecuación cmKdV a través de una generalización de la forma:

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - \gamma u_x \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x')|u(x',t)|^2 dx' = 0 \quad (2.3)$$

Un cálculo directo (ver el Apéndice B) muestra que esta ecuación conserva la energía y el momento:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} -2\epsilon|u|^2 dx \quad (2.4)$$

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} i(uu_x^* - u^*u_x)dx \quad (2.5)$$

sin embargo, la ec. (2.3) (que llamaremos Icm-KdV-I) tiene un inconveniente importante, y es que no puede ser deducida a través del principio de mínima acción. Esta desventaja puede ser corregida si introducimos un segundo término integral en la ecuación. En otras palabras, la ecuación Icm-KdV-II:

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - \frac{\gamma}{2}u_x \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x')|u(x',t)|^2 dx' - \frac{\gamma}{2}u \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x')u^*u_x dx' = 0 \quad (2.6)$$

puede ser obtenida (ver el apéndice D.1) de la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_1 = i(u^*u_t - uu_t^*) + i\epsilon(uu_{xxx}^* - u^*u_{xxx}) + i\frac{\gamma}{2}(uu_x^* - u^*u_x) \int R|u|^2 dx' \quad (2.7)$$

y también de la Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_2 = i(u^*u_t - uu_t^*) + i\epsilon(uu_{xxx}^* - u^*u_{xxx}) + i\frac{\gamma}{2}|u|^2 \left(\int Ruu_x^* dx' - \int Ru^*u_x dx' \right) \quad (2.8)$$

para verificar que (2.7) y (2.8) llevan a la ec. (2.6) debemos observar que estas Lagrangianas son de la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_t, u_x, \eta_1, \eta_2, u^*, u_t^*, u_x^*, \eta_1^*, \eta_2^*) \quad (2.9)$$

donde:

$$\eta_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x')|u(x',t)|^2 dx' \quad (2.10)$$

$$\eta_2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x')u(x',t)u_x^*(x',t)dx' \quad (2.11)$$

y para tales Lagrangianas como (2.9) el principio de mínima acción lleva a una ecuación de Euler Lagrange de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) \\ + u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(x', t) R(x' - x) dx' + u_x^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}(x', t) R(x' - x) dx' \\ - u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t) R(x' - x) dx' - u_x^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t) R(x' - x) dx' = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Como (2.7) y (2.8) llevan a la misma ecuación (2.6), son Lagrangianas equivalentes. Sin embargo, la relación entre \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 no es la relación usual entre Lagrangianas equivalentes, pues, podemos ver que:

$$\mathcal{L}_2 \neq \mathcal{L}_1 + \frac{\partial F(u)}{\partial t} + \frac{\partial G(u)}{\partial x} \quad (2.13)$$

para cualesquiera funciones algebraicas $F(u)$ y $G(u)$. \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 están relacionadas en una forma nunca antes observada. Dado que podemos obtener \mathcal{L}_2 a partir de \mathcal{L}_1 introduciendo \mathcal{L}_2 en la integral de acción, e intercambiando el orden de las integrales por medio del Teorema de Fubini, diremos que estas Lagrangianas son F-equivalentes (ver el apéndice E).

Para cerrar esta sección es importante mencionar que las ecuaciones Icm-KdV-I e Icm-KdV-II se reducen a la ecuación cmKdV cuando $R(x - x')$ es una función delta de Dirac. Por lo tanto, esperaríamos que las soluciones de las ecuaciones (2.3) y (2.6) tendieran a las soluciones de la ec. (1.28) si el ancho de la función $R(x - x')$ se reduce lo suficiente.

2.2. La ecuación Icm-KdV-III

Podemos ver que las funciones que aparecen enfrente de las dos integrales en la ecuación Icm-KdV-II son respectivamente, u_x y u , que son dos de los factores que aparecen en el término no lineal uu^*u_x de la ecuación estándar cmKdV. Esta observación sugiere estudiar la ecuación obtenida cuando el tercer factor u^* sale de la integral, es decir, la ecuación:

$$u_t - \epsilon u_{3x} - \gamma u^* \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') u(x', t) u_x(x', t) dx' = 0 \quad (2.14)$$

A esta ecuación la llamaremos Icm-KdV-III, y es un modelo interesante porque se

reduce a la ecuación (1.28) cuando $R(x - x')$ es una función delta de Dirac. Además, conserva la energía y el momento (como veremos en la sección 2.4), y puede ser obtenida de las siguientes dos densidades Lagrangianas:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = i(u^*u_t - uu_t^*) + i\epsilon(uu_{xxx}^* - u^*u_{xxx}) \\ - i\gamma \left((u^*)^2 \int Ruu_x dx' - u^2 \int Ru^*u_x^* dx' \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = i(u^*u_t - uu_t^*) + i\epsilon(uu_{xxx}^* - u^*u_{xxx}) \\ + i\gamma \left(u^*u_x^* \int Ru^2 dx' - uu_x \int R(u^*)^2 dx' \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para verificar que \mathcal{L}_3 y \mathcal{L}_4 llevan a la ecuación (2.14) debemos observar que la aplicación del principio de mínima acción a Lagrangianas de esta forma llevan a la siguiente ecuación de Euler Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) \\ - u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3}(x', t) R(x' - x) dx' + 2u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4}(x', t) R(x' - x) dx' = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde hemos definido:

$$\eta_3 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x')u(x', t)u_x(x', t)dx' \quad (2.18)$$

$$\eta_4 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x')u^2(x', t)dx' \quad (2.19)$$

Podemos verificar que la sustitución de \mathcal{L}_3 o \mathcal{L}_4 en la ecuación (2.17) lleva a la ec. (2.14), y consecuentemente \mathcal{L}_3 y \mathcal{L}_4 son Lagrangianas equivalentes. Sin embargo, debemos observar que la relación entre \mathcal{L}_3 y \mathcal{L}_4 no es la estándar. Como ocurría con \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 , las Lagrangianas \mathcal{L}_3 y \mathcal{L}_4 también son F-equivalentes.

2.3. La ecuación Icm-KdV-IV

Las ecuaciones Icm-KdV-II e Icm-KdV-III tienen, respectivamente, uno y dos términos integrales. Podemos combinar estas dos ecuaciones y formar una nueva generalización integral de la ecuación cmKdV de la forma:

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - \gamma_1 u_x \int_{-\infty}^{\infty} R_1 |u|^2 dx' - \gamma_1 u \int_{-\infty}^{\infty} R_1 u^* u_x dx' - \gamma_2 u^* \int_{-\infty}^{\infty} R_2 u u_x dx' = 0 \quad (2.20)$$

donde los coeficientes γ_n son constantes reales. Deberíamos notar que las funciones $R_1(x - x')$ y $R_2(x - x')$ podrían ser diferentes, pues la función de peso que aparece en las integrales de la ecuación Icm-KdV-II no es necesariamente igual a la función de peso que entra en el término integral de Icm-KdV-III. También deberíamos observar que la ec. (2.20) se reduce a la ec. (1.28) cuando R_1 y R_2 son funciones delta de Dirac, y los coeficientes γ_n satisfacen la condición $2\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$.

La ec. (2.20) que llamaremos Icm-KdV-IV, conserva la energía (como veremos en la siguiente sección), y puede ser obtenida (ver el apéndice D.2) de la siguiente Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & i(u^* u_t - u u_t^*) + i\epsilon(u u_{xxx}^* - u^* u_{xxx}) + i\delta_1(u u_x^* - u^* u_x) \int R |u|^2 dx' \\ & + i\delta_2 |u|^2 \left(\int R u u_x^* dx' - \int R u^* u_x dx' \right) \\ & - i\delta_3 \left((u^*)^2 \int R u u_x dx' - u^2 \int R u^* u_x^* dx' \right) \\ & + i\delta_4 \left(u^* u_x^* \int R u^2 dx' - u u_x \int R (u^*)^2 dx' \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde los coeficientes δ_n son constantes reales que satisfacen las condiciones:

$$\delta_1 + \delta_2 = \gamma_1 \quad (2.22)$$

$$\delta_3 + \delta_4 = \gamma_2 \quad (2.23)$$

Podemos verificar que la ec. (2.20) se obtiene cuando sustituimos la Lagrangiana (2.21) en la ecuación de Euler Lagrange:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) \\
 + u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(x', t) R(x' - x) dx' + u_x^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}(x', t) R(x' - x) dx' \\
 - u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t) R(x' - x) dx' - u_x^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t) R(x' - x) dx' \\
 - u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3}(x', t) R(x' - x) dx' + 2u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4}(x', t) R(x' - x) dx' = 0 \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

y la deducción de esta ecuación de Euler-Lagrange la podemos ver en el apéndice C.1.

Si escogemos los cuatro coeficientes δ_n diferentes de cero, la densidad Lagrangiana contendrá cuatro integrales diferentes ($\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ y sus complejos conjugados). Sin embargo, también podríamos escoger ya sea δ_1 o δ_2 igual a cero (no ambos cero), y \mathcal{L}_5 contendría tres integrales. En forma similar podemos escoger δ_3 o δ_4 igual a cero, y \mathcal{L}_5 también contendría tres integrales diferentes. Tenemos, de hecho, nueve opciones diferentes:

- $\delta_n \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, 4$
- $\delta_1 = 0$ (y las restantes δ_n diferentes de cero)
- $\delta_2 = 0$ (y las restantes δ_n diferentes de cero)
- $\delta_3 = 0$ (y las restantes δ_n diferentes de cero)
- $\delta_4 = 0$ (y las restantes δ_n diferentes de cero)
- $\delta_1 = \delta_3 = 0$ (δ_2 y δ_4 diferentes de cero)
- $\delta_1 = \delta_4 = 0$ (δ_2 y δ_3 diferentes de cero)
- $\delta_2 = \delta_3 = 0$ (δ_1 y δ_4 diferentes de cero)
- $\delta_2 = \delta_4 = 0$ (δ_1 y δ_3 diferentes de cero)

La relación entre las nueve Lagrangianas equivalentes no es la usual, son F-equivalentes, y consecuentemente es interesante la existencia de estas Lagrangianas. Deberíamos notar, en particular, que cada una de ellas conducirá a una Hamiltoniana diferente.

2.4. Teorema de Noether y cantidades conservadas

En esta sección mostraremos los resultados de la aplicación del Teorema de Noether para determinar algunas de las leyes de conservación asociadas a la ec. (2.20). Para ver el procedimiento completo, ver el apéndice F.1. Consecuentemente, investigaremos si la integral de acción correspondiente a la densidad Lagrangiana (2.21) permanece invariante bajo transformaciones infinitesimales. Sólo consideraremos transformaciones infinitesimales simples de la forma:

$$t^\otimes = t + \epsilon \xi_1 \quad (2.25)$$

$$x^\otimes = x + \epsilon \xi_2 \quad (2.26)$$

$$u^\otimes(x^\otimes, t^\otimes) = u(x, t) + \epsilon \varphi_1(u(x, t)) \quad (2.27)$$

$$u^{*\otimes}(x^\otimes, t^\otimes) = u^*(x, t) + \epsilon \varphi_2(u^*(x, t)) \quad (2.28)$$

donde ϵ es un parámetro real que genera un grupo de transformaciones, ξ_1 y ξ_2 son constantes reales, y el símbolo \otimes indica las variables transformadas.

Como es usual, la integral de acción permanecerá invariante bajo la transformación si $\delta \mathcal{L} = 0$, donde:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \delta u_{xxx} \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1} \delta \eta_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2} \delta \eta_2 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3} \delta \eta_3 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4} \delta \eta_4 + c.c. \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde *c.c.* denota el complejo conjugado y:

$$\delta u = \epsilon [\varphi_1(u(x, t)) - u_t \xi_1 - u_x \xi_2] \quad (2.30)$$

$$\delta u^* = \epsilon [\varphi_2(u^*(x, t)) - u_t^* \xi_1 - u_x^* \xi_2] \quad (2.31)$$

y los factores $\delta \eta_n (n = 1, \dots, 4)$ pueden ser expresados en términos de δu y δu^* . Siguiendo un procedimiento estándar, podemos reescribir $\delta \mathcal{L}$ en una forma más conveniente si

tomamos $\partial\mathcal{L}/\partial u$ y $\partial\mathcal{L}/\partial u^*$ de las ecuaciones de Euler Lagrange, y sustituimos estas expresiones en la ec. (2.29). De esta manera la ecuación $\delta\mathcal{L} = 0$ toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_1 + \frac{\partial}{\partial x}Q_2 = Q_3 \quad (2.32)$$

donde:

$$Q_1 = \epsilon\xi_1\mathcal{L} - \delta u \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t} - \delta u^* \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t^*} \quad (2.33)$$

$$Q_2 = \epsilon\xi_2\mathcal{L} - \delta u \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} - \delta u \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} + (\delta u)_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} - (\delta u)_{xx} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} - u\delta u \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \eta_3} R dx' - u(\delta u^*) \int R \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \eta_2} dx' + c.c. \quad (2.34)$$

y

$$Q_3 = \epsilon\xi_2 \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \eta_1} \eta_{1x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \eta_2} \eta_{2x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \eta_3} \eta_{3x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \eta_4} \eta_{4x} \right) + c.c. \quad (2.35)$$

Cuando la densidad Lagrangiana (2.21) se sustituye en la ec. (2.35), se encuentra que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_3 dx = 0 \quad (2.36)$$

y esto implica que la ec. (2.32) es una ley de conservación. Por lo tanto, si $Q_2 = 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, la ec. (2.32) implica que $\int_{-\infty}^{\infty} Q_1 dx$ es una cantidad conservada. Además, según podemos leer en el artículo de Bañados [65] la magnitud asociada con una invarianza bajo una transformación en el tiempo es la Hamiltoniana del sistema, la magnitud asociada con una invarianza bajo una transformación de norma es la energía, y la magnitud asociada con una invarianza bajo una transformación en el espacio es el momento.

En el caso de una traslación temporal ($\xi_2 = \varphi_1(u) = \varphi_2(u^*) = 0$):

$$Q_1 = i\epsilon(uu_{xxx}^* - u^*u_{xxx}) + i\delta_1(uu_x^* - u^*u_x) \int R|u|^2 dx' + i\delta_2|u|^2 \left(\int Ruu_x^* dx' - \int Ru^*u_x dx' \right) - i\delta_3 \left((u^*)^2 \int Ruu_x dx' - u^2 \int Ru^*u_x^* dx' \right) + i\delta_4 \left(u^*u_x^* \int Ru^2 dx' - uu_x \int R(u^*)^2 dx' \right) \quad (2.37)$$

que sería la Hamiltoniana del sistema. En el caso de una transformación de norma ($\xi_1 = \xi_2 = 0$):

$$Q_1 = -2\epsilon|u|^2 \quad (2.38)$$

que sería la energía del sistema.

En el caso de una traslación espacial ($\xi_1 = \varphi_1(u) = \varphi_2(u^*) = 0$) tenemos:

$$Q_1 = i(uu_x^* - u^*u_x) \quad (2.39)$$

que sería el momento del sistema.

La cantidad conservada (2.37) asociada a la invarianza de la integral de acción bajo la traslación temporal, es la densidad Hamiltoniana del sistema. Como esta Hamiltoniana involucra constantes arbitrarias δ_n (sólo restringidas por las condiciones (2.22) y (2.23)), pueden ser escritas en distintas formas, incluyendo dos, tres o cuatro integrales diferentes, así como las nueve Lagrangianas diferentes descritas al final de la sección 2.3. Por otro lado, en aplicaciones de óptica la cantidad conservada (2.38) es la densidad de energía. Como la ecuación Icm-KdV-IV contiene las ecuaciones Icm-KdV-II y III como casos particulares, la energía también se conserva en estas dos ecuaciones (como se mencionó en la sección 2.1 y 2.2). La cantidad conservada (2.39) es la llamada densidad de momento, y tiene la misma forma que la densidad de momento de la ecuación cmKdV.

2.5. Soluciones de Onda solitaria

2.5.1. Soluciones de las ecuaciones Icm-KdV-I, II y III

Hemos visto que básicamente son tres diferentes extensiones no locales de la ecuación cmKdV: las ecuaciones Icm-KdV-I, II y III (la ecuación Icm-KdV-IV es una combinación de las ecuaciones Icm-KdV-I, II y III).

En esta sección, exploraremos cómo evolucionan condiciones iniciales tipo solitón de acuerdo a estas ecuaciones.

Comenzaremos estudiando las soluciones de la ecuación Icm-KdV-I con $\epsilon = 1$, $\gamma = 6$, $R(x) = \exp(-|x|/\sigma)/(2\sigma)$ y $\sigma = 0.25$. Consideraremos tres condiciones iniciales que son similares a un solitón exacto de la ecuación cmKdV estándar. En otras palabras, usaremos condiciones iniciales de la forma:

$$u(x, 0) = A \operatorname{sech} \left(\frac{x}{w} \right) e^{irx} \quad (2.40)$$

Si $\epsilon = 1$ y $\gamma = 6$ este pulso inicial generará una solución de solitón exacto de la ecuación (1.28) si usamos los valores:

$$A_0 = \sqrt{\frac{5}{8}}, \quad w_0 = \sqrt{\frac{8}{5}}, \quad r_0 = \frac{1}{\sqrt{24}} \quad (2.41)$$

Ahora obtendremos las soluciones numéricas (ver el apéndice G.1) de la ecuación Icm-KdV-I (con una función de peso exponencial con $\sigma = 0.25$) correspondiente a tres pulsos iniciales de la forma (2.40), todos ellos con $w = w_0$ y $r = r_0$, pero con tres diferentes valores de la amplitud inicial: $A = A_0$, $A = 0.97A_0$ y $A = 1.03A_0$. En los tres casos las ondas solitarias sobreviven, pero sus amplitudes disminuyen lentamente como se muestra en la figura 2.1. Esta figura también muestra una cuarta solución de la ecuación Icm-KdV-I (la línea punteada), que corresponde a la condición inicial (2.40) con los parámetros mostrados en (2.41), pero con $\sigma = 0.5$ (una función de peso más ancha). Las formas de los cuatro pulsos en $t = 100$ se pueden observar en la figura 2.2. Además, las posiciones del punto máximo de los pulsos como funciones del tiempo se muestran en la figura 2.3. Podemos ver en esta figura que las velocidades de los pulsos (las pendientes de las curvas mostradas en la figura 2.3) no son constantes, que no es el comportamiento típico de las soluciones de solitón. Si recordamos que la velocidad de un solitón exacto de la ecuación cmKdV depende de la amplitud del solitón (ecuación (36) de la referencia [1]) y en este caso las amplitudes de los pulsos disminuyen, es comprensible que las velocidades de los pulsos también disminuyan.

Ahora calcularemos las soluciones (ver el apéndice G.2) de la ecuación Icm-KdV-II (con $\sigma = 0.25$) correspondientes a las condiciones iniciales de la forma (2.40) con $w = w_0$, $r = r_0$ y tres diferentes valores de la amplitud inicial: $A = A_0$, $A = 1.03A_0$ y $A = 1.06A_0$. Calcularemos las soluciones correspondientes a la condición inicial (2.40) con los parámetros (2.41), pero con $\sigma = 0.5$. Las amplitudes de las cuatro soluciones como función del tiempo se muestran en la figura 2.4. Podemos ver que las amplitudes de las tres soluciones correspondientes a $\sigma = 0.25$ prácticamente alcanzan valores constantes después de un corto periodo transitorio, y la amplitud de la solución correspondiente a $\sigma = 0.5$ muestra una disminución extremadamente pequeña. Las formas de los cuatro pulsos en $t = 100$ se muestran en la figura 2.5, y las posiciones del punto máximo de los pulsos (como función del tiempo) se muestran en la figura 2.6. En este caso vemos que los pulsos avanzan a velocidad constante, y consecuentemente el comportamiento de las soluciones de onda solitaria de la ecuación Icm-KdV-II es similar al comportamiento de un solitón estándar.

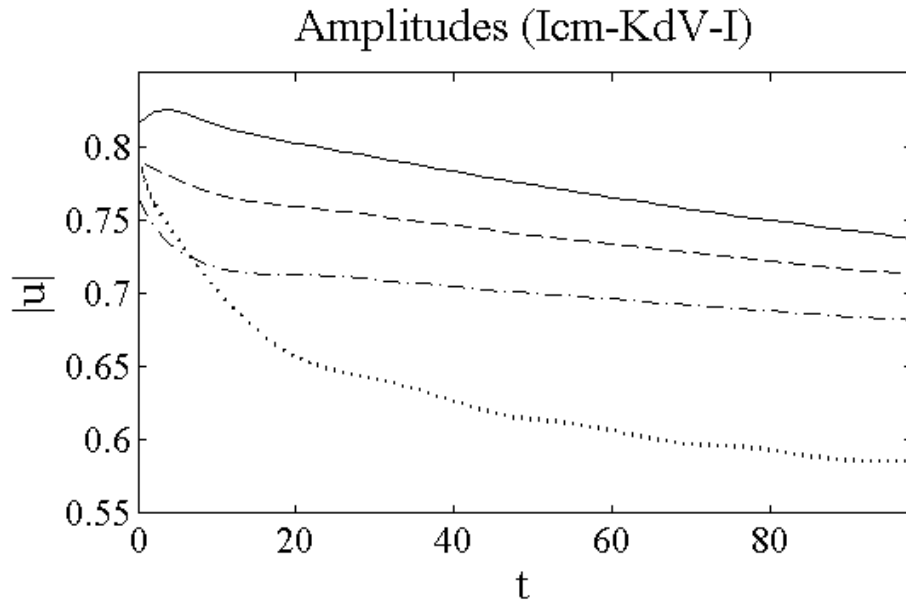


Figura 2.1: Amplitudes (como funciones del tiempo) de las cuatro soluciones de la ecuación Icm-KdV-I (ecuación (2.3) con $\epsilon = 1$ y $\gamma = 6$), correspondientes a las condiciones iniciales de la forma (2.40), con $w = w_0, r = r_0$ y diferentes valores de A : $A = 1.03A_0$ (línea continua), $A = A_0$ (línea de guiones) y $A = 0.97A_0$ (línea de puntos y guiones). Estas tres soluciones fueron obtenidas con $\sigma = 0.25$. La curva punteada corresponde a la condición inicial (2.40) con los parámetros (2.41) pero con $\sigma = 0.5$.

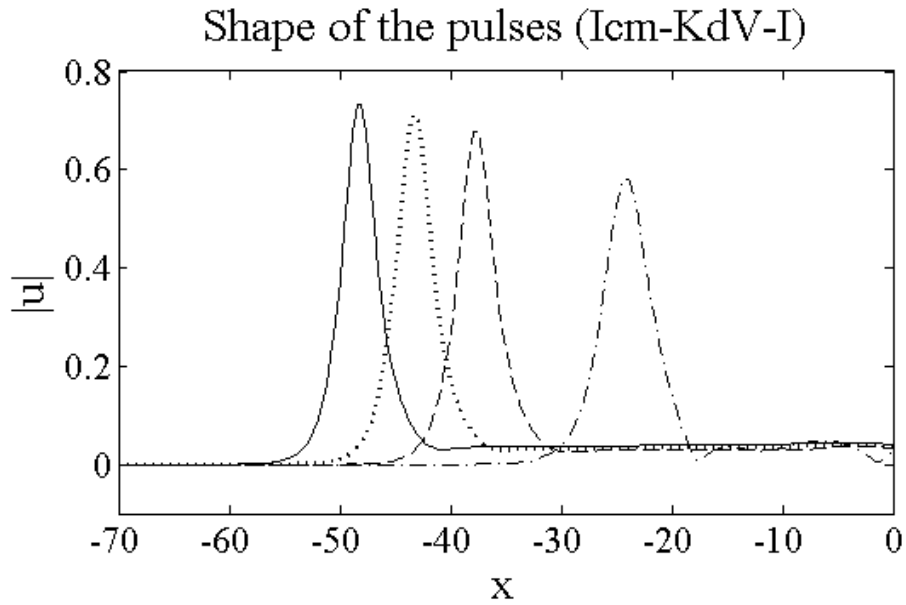


Figura 2.2: Forma de los pulsos $|u(x, t = 100)|$ correspondiente a las cuatro soluciones de la ecuación Icm-KdV-I mencionadas en la figura 2.1. Estas cuatro curvas corresponden a condiciones iniciales de la forma (2.40), con $w = w_0$, $r = r_0$ y diferentes valores de A : $A = 1.03A_0$ (línea continua), $A = A_0$ (línea punteada) y $A = 0.97A_0$ (línea de guiones). Estas tres soluciones fueron obtenidas con $\sigma = 0.25$. La curva de puntos y guiones corresponde a la condición inicial (2.40) con los parámetros (2.41) pero con $\sigma = 0.5$.

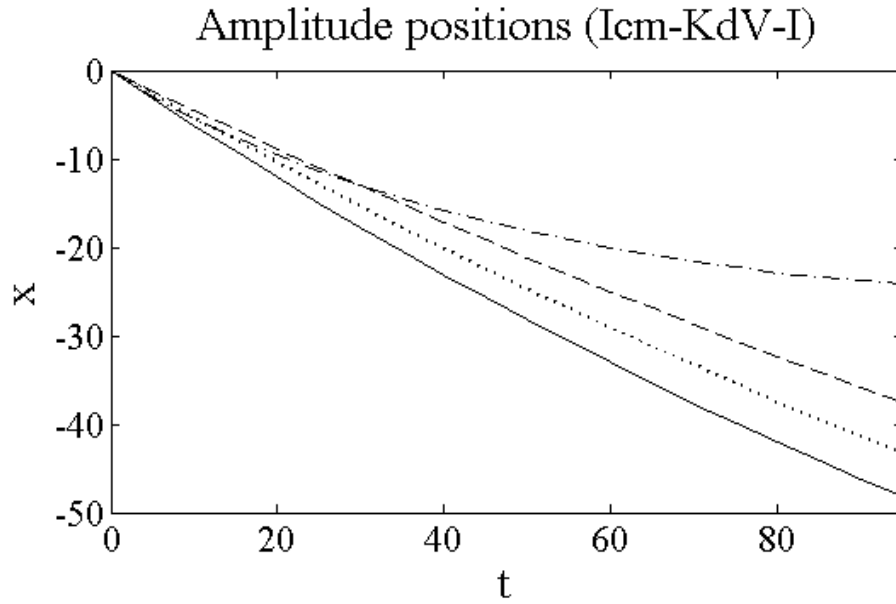


Figura 2.3: Posiciones del punto máximo (como funciones del tiempo) de los cuatro pulsos (de las cuatro soluciones de la ecuación Icm-KdV-I) mencionados en las figuras 2.1 y 2.2. Estas cuatro curvas corresponden a condiciones iniciales de la forma (2.40), con $w = w_0$, $r = r_0$ y diferentes valores de A : $A = 1.03A_0$ (línea continua), $A = A_0$ (línea punteada) y $A = 0.97A_0$ (línea de guiones). Estas tres soluciones fueron obtenidas con $\sigma = 0.25$. La curva de puntos y guiones corresponde a la condición inicial (2.40) con los parámetros (2.41) pero con $\sigma = 0.5$.

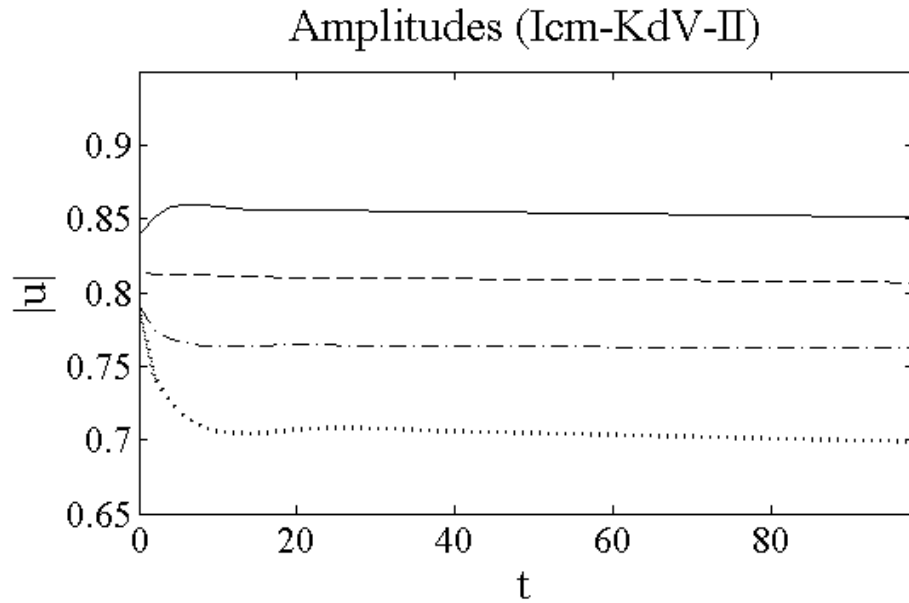


Figura 2.4: Amplitudes (como funciones del tiempo) de las cuatro soluciones de la ecuación Icm-KdV-II (ecuación (2.6) con $\epsilon = 1$ y $\gamma = 6$), correspondientes a las condiciones iniciales de la forma (2.40), con $w = w_0, r = r_0$ y diferentes valores de A : $A = 1.06A_0$ (línea continua), $A = 1.03A_0$ (línea de guiones) y $A = A_0$ (línea de puntos y guiones). Estas tres soluciones fueron obtenidas con $\sigma = 0.25$. La curva punteada corresponde a la condición inicial (2.40) con los parámetros (2.41) pero con $\sigma = 0.5$.

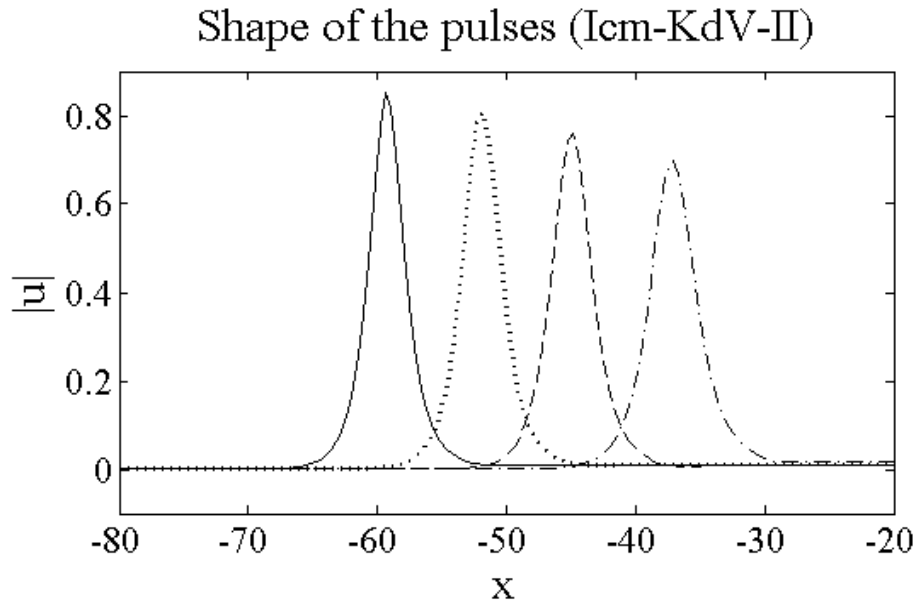


Figura 2.5: Forma de los pulsos $|u(x, t = 100)|$ correspondiente a las cuatro soluciones de la ecuación Icm-KdV-II mencionadas en la figura 2.4. Estas cuatro curvas corresponden a condiciones iniciales de la forma (2.40), con $w = w_0$, $r = r_0$ y diferentes valores de A : $A = 1.06A_0$ (línea continua), $A = 1.03A_0$ (línea punteada) y $A = A_0$ (línea de guiones). Estas tres soluciones fueron obtenidas con $\sigma = 0.25$. La curva de puntos y guiones corresponde a la condición inicial (2.40) con los parámetros (2.41) pero con $\sigma = 0.5$.

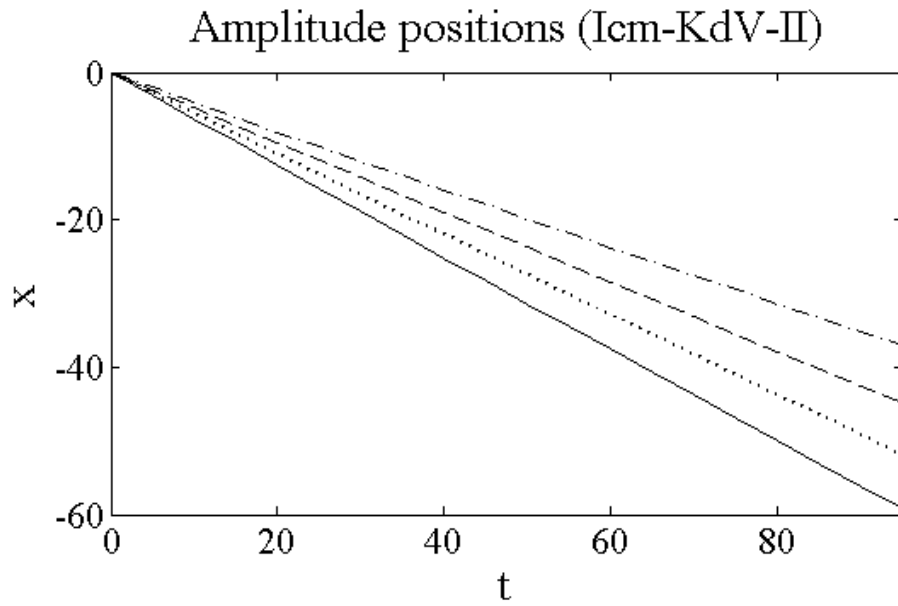


Figura 2.6: Posiciones del punto máximo (como funciones del tiempo) de los cuatro pulsos (de las cuatro soluciones de la ecuación Icm-KdV-II) mencionados en las figuras 2.4 y 2.5. Estas cuatro curvas corresponden a condiciones iniciales de la forma (2.40), con $w = w_0$, $r = r_0$ y diferentes valores de A : $A = 1.06A_0$ (línea continua), $A = 1.03A_0$ (línea punteada) y $A = A_0$ (línea de guiones). Estas tres soluciones fueron obtenidas con $\sigma = 0.25$. La curva de puntos y guiones corresponde a la condición inicial (2.40) con los parámetros (2.41) pero con $\sigma = 0.5$.

También calculamos las soluciones (ver el apéndice G.3) de la ecuación Icm-KdV-III con las mismas condiciones iniciales usadas para obtener la figura 2.1. Las amplitudes de las soluciones se muestran la figura 2.7. La forma de los pulsos (en $t = 100$) se muestra en la figura 2.8, y las posiciones del punto máximo de los pulsos (como función del tiempo) se muestran en la figura 2.9. La figura 2.7 muestra que las amplitudes de los pulsos disminuyen muy lentamente. Además, se observa un comportamiento interesante en el caso en que $\sigma = 0.5$ y es que a diferencia de las otras tres curvas, esta solución oscila. Una posible explicación a este fenómeno la podríamos encontrar si pensamos que en la ec. NLS hay un efecto dispersivo debido a la segunda derivada y un efecto concentrador debido al término no lineal, pero al estar presentes los dos efectos estos se contrarrestan entre sí, dando como resultado el solitón. Sin embargo, cuando el valor de σ aumenta, la contribución no lineal disminuye, de modo que el pulso se dispersa y la altura decae. Ahora bien, como se altera el balance entre el término dispersivo y el no lineal, podrían suceder dos cosas:

1. que el pulso se disperse completamente,
2. que trate de recuperar el balance, generando oscilaciones.

En la figura 2.9 podemos apreciar que las velocidades de los pulsos no son constantes y consecuentemente las soluciones de onda solitaria de esta ecuación no se comportan como solitones estándar.

Las soluciones mostradas en las figuras 2.1 a 2.9 muestran que la ecuación Icm-KdV-II (la ecuación con dos términos integrales) es el mejor modelo, pues sus soluciones de onda solitaria mantienen sus amplitudes y se mueven a velocidades constantes, como los pulsos de luz que avanzan en una fibra óptica.

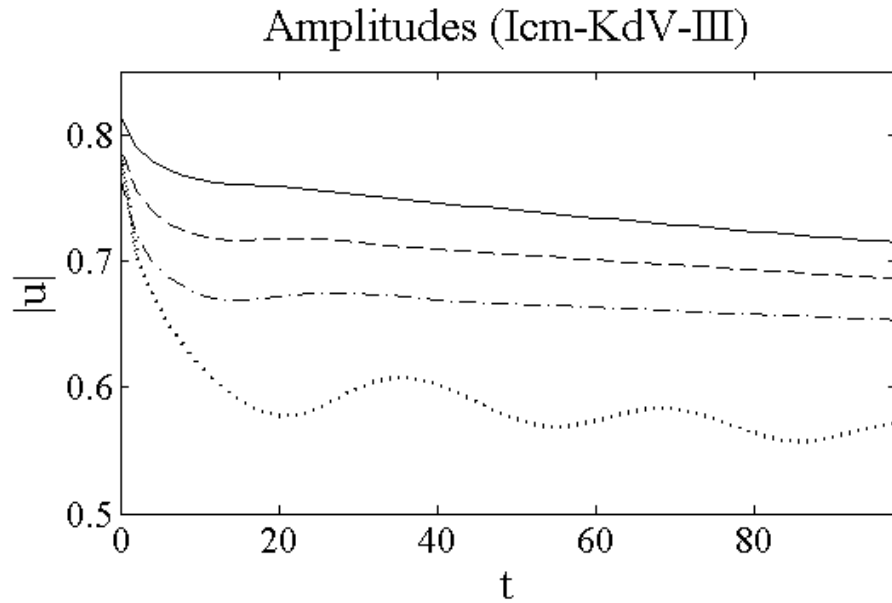


Figura 2.7: Amplitudes (como funciones del tiempo) de las cuatro soluciones de la ecuación Icm-KdV-III (ecuación (2.14) con $\epsilon = 1$ y $\gamma = 6$), correspondientes a las condiciones iniciales de la forma (2.40), con $w = w_0, r = r_0$ y diferentes valores de A : $A = 1.03A_0$ (línea continua), $A = A_0$ (línea de guiones) y $A = 0.97A_0$ (línea de puntos y guiones). Estas tres soluciones fueron obtenidas con $\sigma = 0.25$. La curva punteada corresponde a la condición inicial (2.40) con los parámetros (2.41) pero con $\sigma = 0.5$.

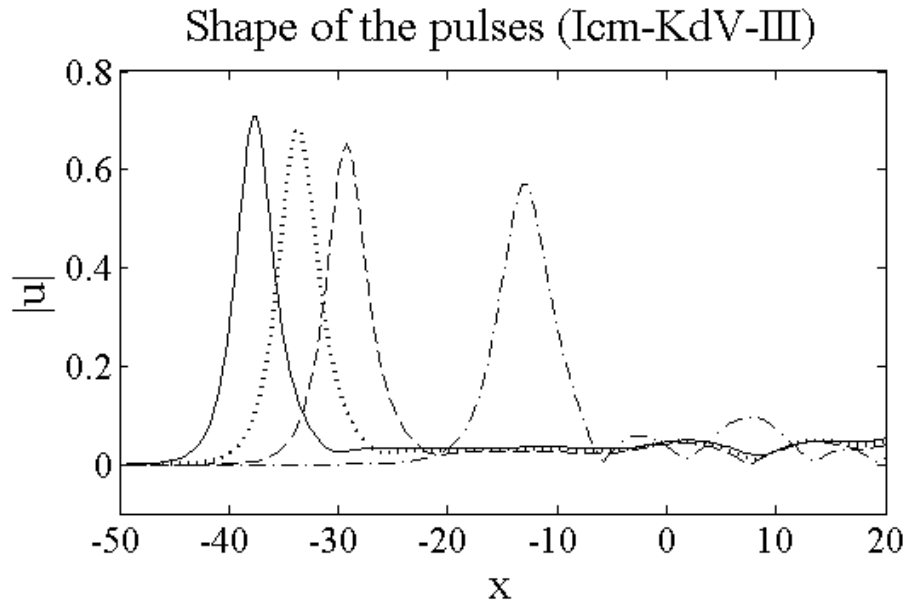


Figura 2.8: Forma de los pulsos $|u(x, t = 100)|$ correspondiente a las cuatro soluciones de la ecuación Icm-KdV-III mencionadas en la figura 2.7. Estas cuatro curvas corresponden a condiciones iniciales de la forma (2.40), con $w = w_0$, $r = r_0$ y diferentes valores de A : $A = 1.03A_0$ (línea continua), $A = A_0$ (línea punteada) y $A = 0.97A_0$ (línea de guiones). Estas tres soluciones fueron obtenidas con $\sigma = 0.25$. La curva de puntos y guiones corresponde a la condición inicial (2.40) con los parámetros (2.41) pero con $\sigma = 0.5$.

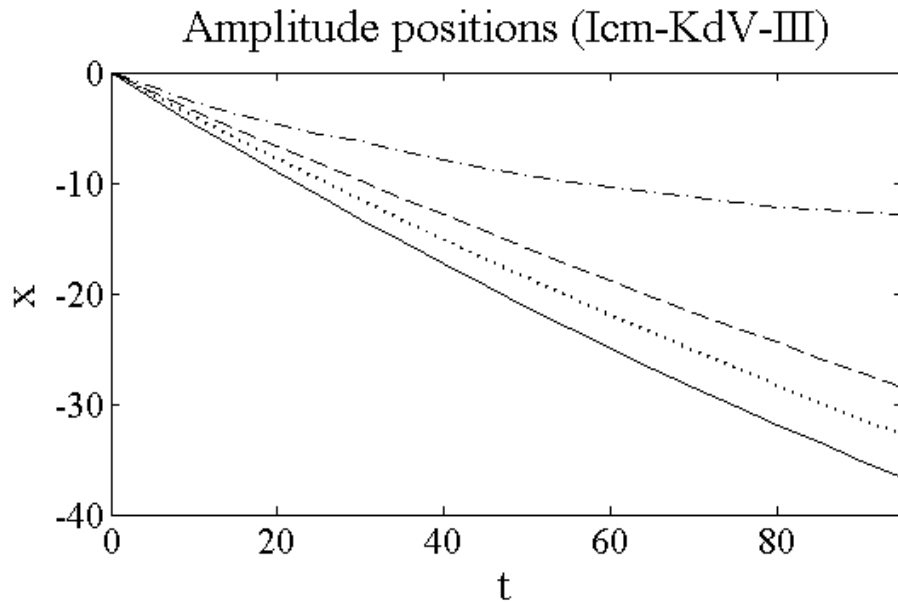


Figura 2.9: Posiciones del punto máximo (como funciones del tiempo) de los cuatro pulsos (de las cuatro soluciones de la ecuación Icm-KdV-III) mencionados en las figuras 2.7 y 2.8. Estas cuatro curvas corresponden a condiciones iniciales de la forma (2.40), con $w = w_0$, $r = r_0$ y diferentes valores de A : $A = 1.03A_0$ (línea continua), $A = A_0$ (línea punteada) y $A = 0.97A_0$ (línea de guiones). Estas tres soluciones fueron obtenidas con $\sigma = 0.25$. La curva de puntos y guiones corresponde a la condición inicial (2.40) con los parámetros (2.41) pero con $\sigma = 0.5$.

2.5.2. Comparación entre las ecuaciones Icm-KdV-I, II y III.

Las velocidades de los pulsos (vistas en las figuras 2.3, 2.6 y 2.9), y la dependencia temporal de sus amplitudes (vistas en las figuras 2.1, 2.4 y 2.7), muestran que los pulsos que obedecen las ecuaciones Icm-KdV-I y III no se comportan como solitones estándar, pero el comportamiento de las soluciones de onda solitaria de la ecuación Icm-KdV-II es muy similar al de un solitón verdadero.

La diferencia cualitativa entre las soluciones de las ecuaciones Icm-KdV-I, II y III se hace más evidente si graficamos estas soluciones como función de (x, t) , y usamos una función de peso exponencial con $\sigma = 0.5$ en todas las integrales que aparecen en las tres ecuaciones. En las figuras 2.10-2.12 podemos ver el módulo $|u(x, t)|$ de estas soluciones, correspondientes a la condición inicial (2.40), con los valores de A, w y r dadas en (2.41). La diferencia entre las superficies mostradas en las figuras 2.10 y 2.12 (las soluciones de las ecuaciones Icm-KdV-I y III), y la superficie mostrada en la figura 2.11 (la solución de la ecuación Icm-KdV-II) es más que evidente.

En las figuras 2.10 y 2.12 observamos que los pulsos generan una serie de ondas de amplitudes pequeñas, pero no significantes. Estas ondas absorben energía de los pulsos, esto provoca que las amplitudes y velocidades de las soluciones de las ecuaciones Icm-KdV-I y III disminuya lentamente.

En el caso de la ecuación Icm-KdV-II el comportamiento de la solución es diferente. La figura 2.11 muestra que al comienzo de su viaje, el pulso también irradia una serie de ondas, pero en este caso esta radiación es similar a los modos de radiación que el solitón exacto de la ecuación cmKdV emite cuando es perturbado [1]. Además, la figura 2.11 también muestra que la emisión de radiación se detiene después de un periodo inicial transitorio y después el pulso avanza sin generar más ondas. Por lo tanto, después de que el periodo transitorio termina, la solución de la ecuación Icm-KdV-II se comporta como un solitón estándar. En la siguiente subsección veremos que los pulsos solitarios que evolucionan de acuerdo a la ecuación Icm-KdV-II de hecho se comportan como un solitón verdadero cuando son perturbados.

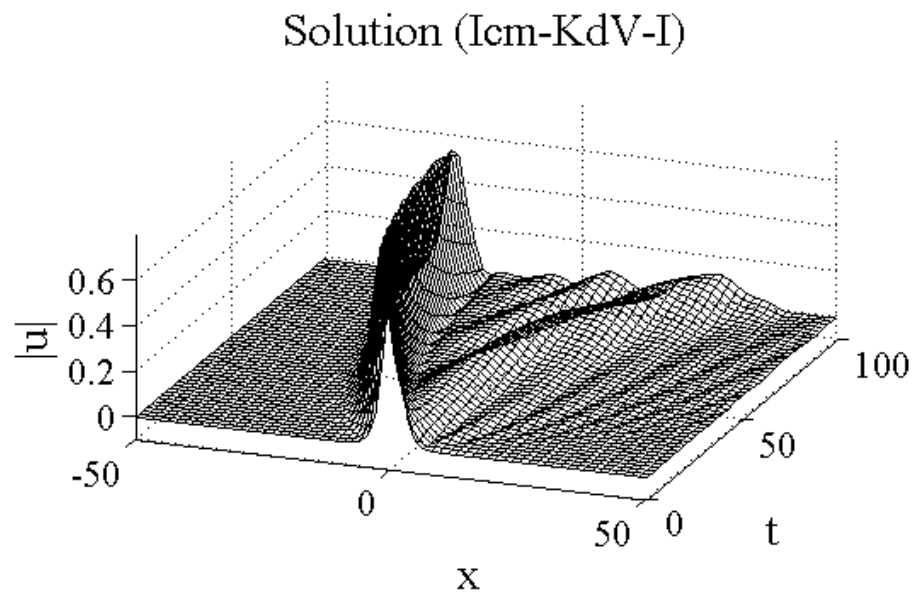


Figura 2.10: Módulo $|u(x, t)|$ de la solución de la ecuación Icm-KdV-I correspondiente a la condición inicial (2.40), con A, w y r dadas en (2.41), y $R(x) = \exp(-|x|/\sigma) / (2\sigma)$ con $\sigma = 0.5$.

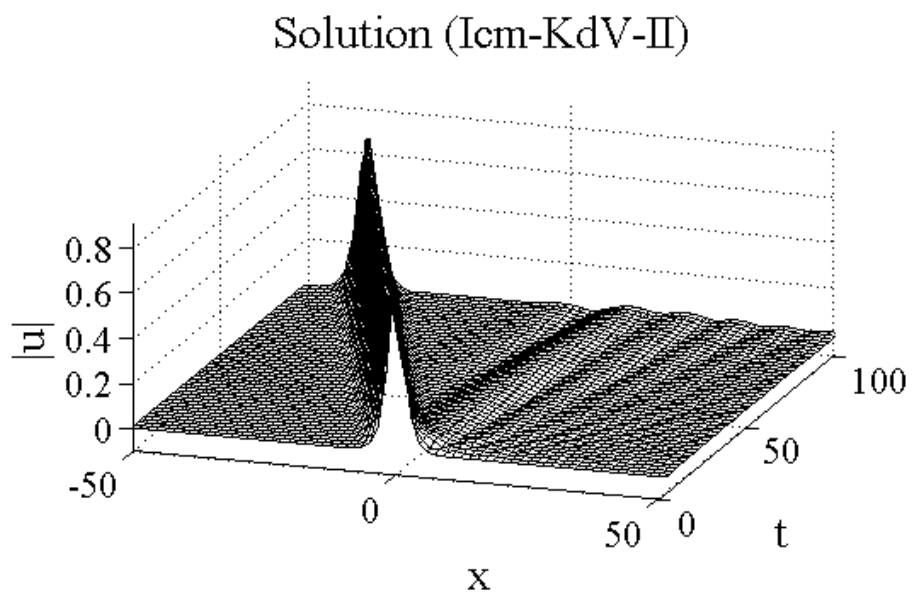


Figura 2.11: Módulo $|u(x, t)|$ de la solución de la ecuación Icm-KdV-II correspondiente a la condición inicial (2.40), con A, w y r dadas en (2.41), y $R(x) = \exp(-|x|/\sigma) / (2\sigma)$ con $\sigma = 0.5$.

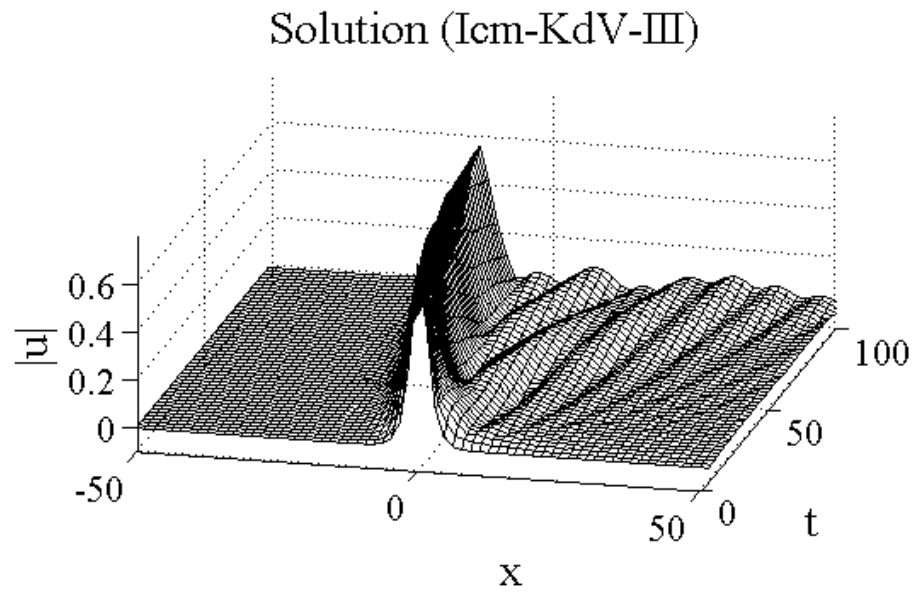


Figura 2.12: Módulo $|u(x, t)|$ de la solución de la ecuación Icm-KdV-III correspondiente a la condición inicial (2.40), con A, w y r dadas en (2.41), y $R(x) = \exp(-|x|/\sigma) / (2\sigma)$ con $\sigma = 0.5$.

2.5.3. Soluciones analíticas y análisis variacional

El comportamiento de las amplitudes de las soluciones de la ecuación Icm-KdV-II mostradas en la figura 2.4 es inesperado. Cuando la amplitud del pulso inicial es más alta que la amplitud de un solitón exacto de la ecuación cmKdV, esperaríamos que la amplitud de los pulsos disminuyera, para ser más cercana a la forma del solitón exacto de la ecuación cmKdV. Sin embargo, ocurre lo contrario: la amplitud de los pulsos aumenta aún más y la amplitud final es más alta que la inicial. Y si la amplitud inicial es más pequeña que la altura del solitón exacto, un proceso similar ocurre. Esperaríamos que la amplitud creciera (como precio de la disminución del ancho), con tal de estar más cercana a la forma del solitón exacto pero ocurre lo contrario: la amplitud de los pulsos disminuye todavía más y la amplitud final es más pequeña que el valor inicial.

Con el fin de entender el comportamiento de los pulsos mencionados arriba, comenzaremos por determinar una expresión analítica aproximada para la solución de solitón de la ecuación Icm-KdV-II. Para llegar a esta expresión debemos observar que si introducimos una función de la forma:

$$u(x, t) = A \operatorname{sech} \left(\frac{x - vt}{w} \right) \exp [i(kx - ht)] \quad (2.42)$$

en la primera integral que aparece en la ecuación Icm-KdV-II, y si la integral se calcula numéricamente para diferentes valores de w (ver el apéndice H), encontramos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') |u(x', t)|^2 dx' \approx A^2 f(w) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - vt}{w} \right) \quad (2.43)$$

donde $f(w)$ es la función:

$$f(w) = 1 - \alpha (w + \gamma)^{-\beta} \quad (2.44)$$

donde $\alpha = 0.05752$, $\beta = 2.00017$ y $\gamma = 0.16$. La función que aparece del lado derecho de la ecuación (2.43) constituye una aproximación excelente para la integral que aparece del lado izquierdo de la ecuación. Si $\sigma = 0.25$ y $w > 0.5$ la diferencia máxima entre ambos lados de la ecuación aproximada (2.43) es menos del 2% del valor máximo de la función definido en la ecuación (2.42) (para cualquier punto $(x, t) \in \mathbb{R}^2$). De manera similar, los resultados numéricos muestran que la segunda integral que aparece en la ecuación Icm-KdV-II se puede aproximar como sigue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') u^* u_x dx' \approx f(w) A^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - vt}{w} \right) \left[\frac{1}{w} \operatorname{tanh} \left(\frac{x - vt}{w} \right) - ik \right] \quad (2.45)$$

Si ahora sustituimos la solución tentativa (2.42) en la ecuación Icm-KdV-II, y tomamos en cuenta las aproximaciones (2.43) y (2.45) encontramos noticias excelentes: la función (2.42), es en efecto una solución aproximada de la ecuación Icm-KdV-II si los parámetros A, w, v, k y h satisfacen las siguientes tres condiciones:

$$6\epsilon - A^2 w^2 \gamma f(w) = 0 \quad (2.46)$$

$$h - \epsilon k^3 + \frac{3\epsilon k}{w^2} = 0 \quad (2.47)$$

$$vw^2 + \epsilon - 3\epsilon k^2 w^2 = 0 \quad (2.48)$$

tenemos cinco parámetros pero sólo tres condiciones, y eso significa que los valores de dos de los parámetros pueden ser escogidos libremente, y en consecuencia las ecuaciones (2.42) y (2.46)-(2.48) definen una familia de soluciones tipo solitón para la ecuación Icm-KdV-II.

Ahora queremos saber qué pasa si consideramos condiciones iniciales para la ecuación Icm-KdV-II que sean similares, pero no iguales, a las soluciones de solitón definidas por las ecuaciones (2.42) y (2.46)-(2.48). Para responder esta pregunta podemos usar el método variacional de Anderson (ver el apéndice I.1), pues sabemos que la ecuación Icm-KdV-II puede ser obtenida de las densidades Lagrangianas (2.7) y (2.8). Por lo tanto, consideraremos una función de prueba de la forma:

$$u(x, t) = A(t) \exp \left[-\frac{(x - v(t)t)^2}{2a(t)^2} \right] \exp [i(h(t) + c(t)x^2)] \quad (2.49)$$

la elección de la función de prueba es muy importante, ya que de ella dependerán los resultados obtenidos con el método variacional. En este caso resulto más fácil realizar los cálculos si utilizamos una gaussiana en lugar de una secante hiperbólica y también observamos un término cuadrático en x el cual nos ayuda a que el método variacional nos arroje resultados, pues si no se incluye, el método colapsa y obtenemos una solución trivial, en el estudio de solitones ópticos el parámetro $c(t)$ se conoce como “chirp”.

Luego, sustituyendo esta función de prueba en la Lagrangiana (2.7), e integrando la expresión resultante sobre x , obtenemos la Lagrangiana promediada:

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} dx \quad (2.50)$$

El resultado de la integración nos da la siguiente Lagrangiana:

$$L(A, a, v, h, c, h_t, c_t) = L_1 + L_2 + L_3 \quad (2.51)$$

donde h_t y c_t son derivadas del tiempo de $h(t)$ y $c(t)$, respectivamente, y:

$$L_1 = -A^2 \{2\sqrt{\pi}ah_t + c_t [a\sqrt{\pi} (a^2 + 2v^2t^2)]\} \quad (2.52)$$

$$L_2 = -\frac{2\epsilon\sqrt{\pi}A^2cvt}{a} (12a^4c^2 + 8a^2c^2t^2 + 3) \quad (2.53)$$

$$L_3 = \frac{2\gamma\pi}{\sigma} A^4 a^2 cvt \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right)\right] \quad (2.54)$$

Con la Lagrangiana (2.51) podemos obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a las “coordenadas generalizadas” (A, a, v, h, c) , y de estas ecuaciones podemos obtener dos ecuaciones algebraicas de la forma:

$$A^2a = A^2(0)a(0) \quad (2.55)$$

$$v = f_1(a, c, t) \quad (2.56)$$

y tres ecuaciones diferenciales de la forma:

$$h_t = f_2(a, c, v, t) \quad (2.57)$$

$$a_t = f_3(a, c, v, t) \quad (2.58)$$

$$c_t = f_4(a, c, v, t) \quad (2.59)$$

donde f_n son funciones complicadas de sus argumentos. En consecuencia, la aproximación variacional implica que la amplitud y el ancho de un pulso Gaussiano que evoluciona de acuerdo a la ecuación Icm-KdV-II obedece una relación de la forma (2.55). Aunque en el método variacional se utilizó una función de prueba con forma de Gaussiana (2.49), si la forma del pulso hubiera sido una secante hiperbólica como la ecuación (2.42), entonces la ecuación (2.55) se reemplazaría por una relación de la forma:

$$A^2w = A^2(0)w(0) \quad (2.60)$$

como en la ecuación (77) de la referencia [1]. Por lo tanto, tenemos dos tipos de curvas

en el plano (w, A) : curvas de la forma (2.60), que definen la relación entre la amplitud $A(t)$ y el ancho $w(t)$ de un pulso que evoluciona en el tiempo, y la curva (2.46), que da la relación entre A y w que existe en las soluciones aproximadas tipo solitón de la ecuación Icm-KdV-II dadas en la ecuación (2.42).

En la figura 2.13 podemos ver tres curvas de la forma (2.60) (la línea punteada, la línea con puntos y guiones y la línea de guiones), y la curva (2.46) (la línea continua) que corresponden a la relación entre A y w en el solitón exacto. Esta figura nos permite entender el comportamiento de las amplitudes del solitón presentados en la figura 2.4. En esta figura estudiamos el efecto de perturbar una solución de solitón exacto de la ecuación Icm-KdV-II. La amplitud y ancho del solitón exacto considerados en la figura 2.4 son los valores de A y w definidos por la intersección de la línea continua y la línea de puntos y guiones en la figura 2.13. Esta intersección es el punto P en la figura 2.13. Ahora incrementaremos el valor inicial de A , y tomaremos como condición inicial para la ecuación Icm-KdV-II el pulso dado en la ecuación (2.40) con $r_0 = \frac{1}{\sqrt{24}}$ (como se muestra en (2.41)), y los valores de A y w correspondientes al punto Q en la figura 2.13 (definidos por la intersección de una línea vertical que pasa a través del punto P , y la línea punteada). Conforme el tiempo avanza, el método variacional nos dice que el punto de coordenadas $(w(t), A(t))$ se moverá a lo largo de la línea punteada, y avanzará hacia el punto R , que es el único punto sobre la curva que corresponde a una solución estacionaria (es decir, un solitón verdadero de la ecuación Icm-KdV-II). En consecuencia, como el pulso se mueve de Q a R , la amplitud de los pulsos incrementará. Este comportamiento es el que vemos en la figura 2.4. Cuando el valor inicial de A incrementó, el pulso evolucionó de tal manera que su amplitud se incrementó aún más. Por otro lado, si la amplitud se disminuye, y tomamos una condición inicial correspondiente al punto S en la figura 2.13, el punto $(w(t), A(t))$ estará restringido a moverse a lo largo de la línea de guiones, y será atraído al punto T , que es el único punto sobre esta curva correspondiente a una solución estacionaria (un solitón verdadero). En consecuencia, la amplitud del pulso disminuirá porque el punto se mueve de S a T . Esto también lo observamos en la figura 2.4. Por lo tanto, ahora podemos entender el comportamiento de los solitones perturbados de la ecuación Icm-KdV-II mostrados en la figura 2.4.

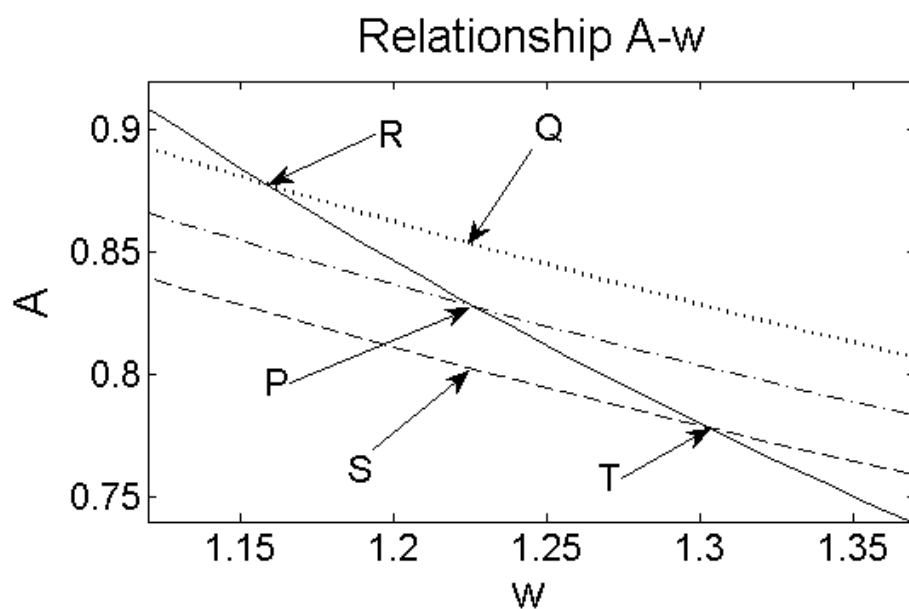


Figura 2.13: La línea continua es la gráfica de la ecuación (2.46) con $\epsilon = 1$. Las otras tres curvas son las gráficas de la ecuación (2.60) con $w(0) = w_0$ y los siguientes valores de $A(0)$: $A(0) = A_0$ (línea de guiones), $A(0) = 1.03A_0$ (puntos y guiones) y $A(0) = 1.06A_0$ (línea punteada).

Ecuaciones Lagrangianas no lineales no locales de Schrödinger

En 2013, Ablowitz y Musslimani (AM) obtuvieron una generalización no local de la ecuación NLS que es integrable [la ec. (1.32)], pero que no tiene una auténtica estructura Lagrangiana. En el apéndice 2 del artículo: M.velasco-Juan et al., Chaos, Solitons and Fractals 156 (2022) 111798 [4] se discute la inexistencia de una lagrangiana auténtica para la ecuación de Ablowitz y Musslimani. El presente capítulo muestra que existen dos nuevas ecuaciones no locales de la ecuación NLS, similares al modelo de AM, que sí poseen estructuras Lagrangianas. En lo siguiente nos referiremos a ellas con los acrónimos LN1 y LN2 para recordar que son generalizaciones Lagrangianas no locales de la ecuación NLS, y llamaremos “AM” a la ec. (1.32). LN1 contiene tres no linealidades y LN2 solo dos. LN1 tiene un gran parecido a AM, pues una de sus tres no linealidades es igual al término no lineal de AM. Por el otro lado, LN2 no es muy similar a AM, pero presenta ciertas ventajas sobre AM y LN1 (como veremos en este capítulo). Mostramos que estos dos modelos (LN1 y LN2) poseen soluciones de onda solitaria que permanecen atrapadas en una vecindad cerca del origen ($x = 0$) y ondas solitarias que pueden escapar del origen. Estos dos tipos de soluciones son obtenidas a través de una resolución numérica directa, y también utilizando un método variacional. En el caso del modelo LN2, la aproximación variacional explica la existencia de estos dos tipos de soluciones. Colisiones de breathers que obedecen la ecuación LN2 son estudiadas numéricamente, y los resultados muestran que estos breathers son soluciones robustas.

Es claro que la soluciones de AM que corresponden a condiciones iniciales simétricas (para las que $u^*(-x, t) = u^*(x, t)$) coincidirán con las soluciones de la ecuación estándar NLS. En la siguiente sección veremos que lo mismo ocurre con las ecuaciones LN1 y LN2. Por lo tanto, con tal de apreciar las diferencias entre estas tres ecuaciones, será necesario estudiar soluciones que correspondan a condiciones iniciales asimétricas.

Veremos que estas soluciones tienen características interesantes y obtendremos un entendimiento más profundo de estas características por medio de un análisis variacional.

El capítulo está estructurado como sigue. En la sección 3.1 presentamos las ecuaciones LN1 y LN2, sus densidades Lagrangianas, y las leyes de conservación que se siguen de las simetrías de estas Lagrangianas. En la sección 3.3 obtendremos soluciones numéricas de las ecuaciones AM, LN1 y LN2, usando condiciones iniciales idénticas en las tres ecuaciones. Estas soluciones revelarán las similitudes y diferencias entre estas ecuaciones. También mostrarán que estos tres modelos tienen soluciones de ondas solitarias que permanecen atrapados cerca del origen, y también soluciones que pueden escapar del origen. En la sección 3.4 veremos que un análisis variacional nos permite entender por qué estos dos tipos de soluciones pueden existir. Finalmente, en la sección 3.5 estudiaremos colisiones de breathers que obedecen la ecuación LN2.

3.1. Ecuaciones LN1 y LN2

Consideremos la siguiente extensión de la ecuación AM que contiene dos no linealidades adicionales:

$$iu_t - u_{xx} - \frac{1}{2}u^2(x, t)u^*(-x, t) - \left(|u|^2 + \frac{1}{2}|u(-x, t)|^2 \right) u(-x, t) = 0 \quad (3.1)$$

Esta ecuación, que será referida con el acrónimo LN1, es interesante porque puede ser obtenida de la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_1 = -Im[u^*u_t] + |u_x|^2 - |u|^2 Re[u(x, t)u^*(-x, t)] \quad (3.2)$$

Deberíamos notar, sin embargo, que la ecuación de Euler Lagrange correspondiente a esta Lagrangiana no tiene la forma usual (ver el apéndice C.2), pero es la siguiente:

$$\frac{\partial L}{\partial u} + \left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} = 0 \quad (3.3)$$

Podemos verificar (ver el apéndice D.3) que si sustituimos la densidad Lagrangiana (3.2) en (3.3) obtenemos la ecuación (3.1). Podemos ver, por lo tanto, que la no linealidad $u^2(x, t)u^*(-x, t)$ de la ecuación estándar AM no es la causa de la no existencia de una Lagrangiana para esta ecuación, pues la ecuación (3.1) contiene este término, y sí tiene una densidad Lagrangiana.

La Lagrangiana (3.2) nos permite usar el Teorema de Noether para obtener las siguientes leyes de conservación (ver el apéndice F.2) de la ecuación (3.1):

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} i (u u_x^* - u^* u_x) dx \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx \right) = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \{ |u_x|^2 - |u|^2 \operatorname{Re} [u(x, t) u^*(-x, t)] \} dx \right) = 0 \quad (3.6)$$

y después veremos que la Lagrangiana (3.2) nos permite obtener soluciones aproximadas de la ecuación (3.1).

Por otro lado, la siguiente ecuación:

$$i u_t - u_{xx} - (|u(-x, t)|^2 + |u(x, t)|^2) u(x, t) = 0 \quad (3.7)$$

es otra ecuación no local similar a las ecuaciones (1.32) y (3.1). Esta ecuación (será referida con el acrónimo LN2) contiene dos términos no lineales y por lo tanto es, en un sentido, un modelo intermedio entre la ecuación (1.32) (que tiene una no linealidad), y la ecuación (3.1) (que tiene tres no linealidades).

La ecuación (3.7) también es una ecuación interesante que puede ser obtenida (ver el apéndice D.4) sustituyendo la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_2 = -\operatorname{Im}(u^* u_t) + |u_x|^2 - \frac{1}{2} |u|^4 - \frac{1}{2} |u|^2 |u(-x, t)|^2 \quad (3.8)$$

en la ecuación de Euler Lagrange (3.3). Esta Lagrangiana implica (usando el Teorema de Noether) que las soluciones de la ecuación (3.7) obedecen las siguientes leyes de conservación:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} i (u u_x^* - u^* u_x) dx \right) = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx \right) = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left[|u_x|^2 - \frac{1}{2} |u|^2 (|u(-x, t)|^2 + |u(x, t)|^2) \right] dx \right) = 0 \quad (3.11)$$

Es claro que las ecuaciones AM, LN1 y LN2 se reducen a la ecuación NLS estándar cuando $u(-x, t) = u(x, t)$, por lo tanto, las soluciones simétricas de la ecuación NLS son heredadas a estas tres ecuaciones. Sin embargo, las soluciones que no son espacialmente

simétricas con respecto al punto $x = 0$ no son soluciones de las ecuaciones AM, LN1 y LN2. Y lo mismo ocurre al revés: soluciones de las ecuaciones AM, LN1 y LN2 que no son espacialmente simétricas alrededor del origen no son soluciones de la ecuación NLS. Por lo tanto, estas soluciones asimétricas son particularmente interesantes, pues son características de estos modelos no locales.

3.2. Interpretación Física de LN2

En esta sección veremos que es posible darle una interpretación física a la ecuación LN2 en el contexto de la óptica que serviría para describir la propagación de luz en fibras ópticas. Ahí la ec. LN2 se vería como:

$$iu_z + \epsilon_1 u_{tt} + \gamma_1 |u|^2 u + \delta |u(z, -t)|^2 u = 0 \quad (3.12)$$

si consideramos el sistema (9.1.3) – (9.1.4) que aparece en la página 279 del libro de Kivshar [66]:

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} + \beta_{11} \frac{\partial A_1}{\partial t} \right) - \frac{\beta_{12}}{2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} + \gamma_1 (|A_1|^2 + \sigma |A_2|^2) A_1 &= 0 \\ i \left(\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta_{21} \frac{\partial A_2}{\partial t} \right) - \frac{\beta_{22}}{2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} + \gamma_1 (|A_2|^2 + \sigma |A_1|^2) A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

el cual describe la propagación de dos pulsos de distinta frecuencia a lo largo de la misma fibra óptica (en este caso $\sigma = 2$).

Supongamos ahora que utilizamos dos láseres idénticos (con la misma frecuencia) para enviar dos pulsos de formas diferentes.

En este caso, en el sistema (3.13) tendremos:

$$\beta_{11} = \beta_{21} \equiv \beta, \quad \beta_{12} = \beta_{22} \equiv \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma \quad (3.14)$$

pues los valores de estos coeficientes dependen de la fibra, y de la frecuencia del láser, de modo que si utilizamos dos láseres idénticos, los coeficientes de ambas ecuaciones serán iguales.

Por lo tanto, como $\beta_{11} = \beta_{21}$, ahora sí es posible introducir un único tiempo retardado que permite desaparecer las primeras derivadas temporales.

Por lo tanto, si volvemos a usar la misma letra t para el tiempo retardado, las ecuaciones de Kivshar (al usar dos láseres idénticos) toman la forma:

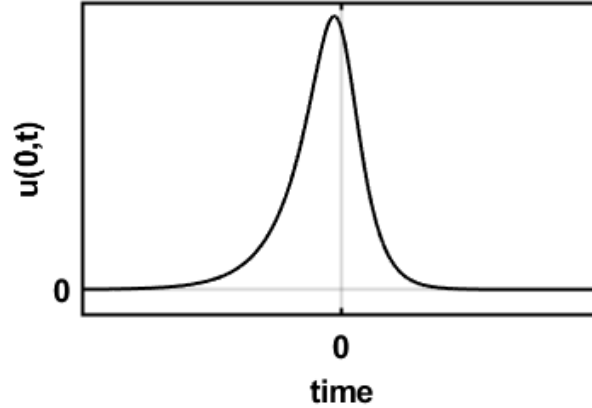


Figura 3.1: Condición inicial de un pulso asimétrico $u(z = 0, t)$.

$$iu_z + \epsilon u_{tt} + \gamma(|u|^2 + \sigma|v|^2)u = 0 \quad (3.15)$$

$$iv_z + \epsilon v_{tt} + \gamma(|v|^2 + \sigma|u|^2)v = 0 \quad (3.16)$$

Ahora bien, si las condiciones (en $z = 0$) fueran idénticas

$$u(z = 0, t) = v(z = 0, t) \quad (3.17)$$

entonces las soluciones $u(z, t)$ y $v(z, t)$ de (3.15) y (3.16) serán iguales y (3.15) se reduciría a la ecuación NLS estandar:

$$iu_z + \epsilon u_{tt} + \gamma(1 + \sigma)|u|^2u = 0 \quad (3.18)$$

y la función $v(z, t)$ sería igual a la solución $u(z, t)$ de la ecuación (3.18) con la condición inicial (3.17).

Hemos visto que la solución $\{u(z, t), v(z, t)\}$ del sistema (3.15)-(3.16) será igual $[u(z, t) = v(z, t)]$ si las condiciones iniciales son iguales: $u(z = 0, t) = v(z = 0, t)$.

Ahora supongamos que $u(z = 0, t) \neq v(z = 0, t)$, pero consideremos una situación muy especial:

Consideremos que la condición inicial para u , es un pulso asimétrico como el de la figura 3.1 y que la condición inicial para v tiene la forma mostrada en la 3.2.

Es decir, consideremos que:

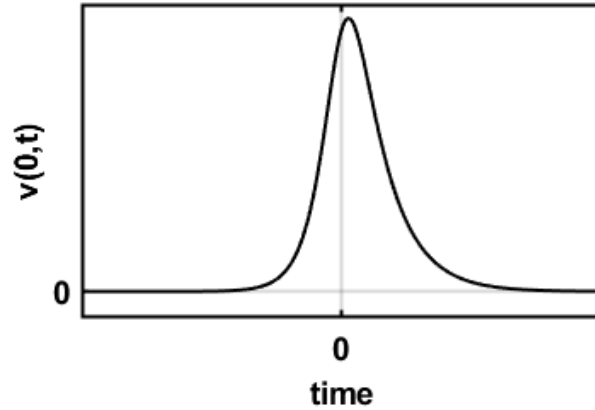


Figura 3.2: Condición inicial $v(z = 0, t)$ con simetría especular con respecto a $u(z = 0, t)$.

$$v(z = 0, t) = u(z = 0, -t) \quad (3.19)$$

lo cual también implica que:

$$u(z = 0, t) = v(z = 0, -t) \quad (3.20)$$

con estas condiciones iniciales las soluciones de (3.15) y (3.16) no serán iguales, pero para toda z tendremos que (ver el apéndice A):

$$v(z, t) = u(z, -t) \quad y \quad u(z, t) = v(z, -t) \quad (3.21)$$

entonces para las condiciones iniciales (3.19)-(3.20), el sistema (3.15)-(3.16) puede reescribirse así:

$$iu_z + \epsilon u_{tt} + \gamma(|u|^2 + \sigma|u(z, -t)|^2)u = 0 \quad (3.22)$$

$$iv_z + \epsilon v_{tt} + \gamma(|v|^2 + \sigma|v(z, -t)|^2)v = 0 \quad (3.23)$$

Notemos que aunque las ecuaciones (3.22)-(3.23) tienen la misma forma, no tendrán soluciones iguales, ya que las ecs. (3.22)-(3.23) sólo se aplican cuando se cumplen las condiciones iniciales (3.19)-(3.20).

Es decir: la ecuación (3.22) se resolverá con una condición inicial como la de la figura 3.1, y la ecuación (3.23) se resolverá con una condición inicial como la de la figura 3.2.

Las soluciones $u(z, t)$ y $v(z, t)$ que obtendremos resolviendo estos dos problemas de valor inicial serán la solución del sistema (3.15)-(3.16) para las condiciones iniciales consideradas (que cumplirán las condiciones (3.21)).

Entonces las soluciones $u(z, t)$ y $v(z, t)$ de las ecuaciones no locales (3.22)-(3.23) (correspondientes a condiciones iniciales como las de las figuras 3.1 y 3.2) coinciden con las soluciones $\{u(z, t), v(z, t)\}$ que satisfacen la condición de “simetría especular” (reflection symmetry) (3.21).

Enfaticemos que las ecs. (3.22) y (3.23), que parecieran describir dos sistemas independientes,

están describiendo la propagación simultanea de dos pulsos de forma distinta (pero cuyas formas iniciales cumplen (3.19)-(3.20)) que se lanzan por la misma fibra óptica con láseres idénticos (es decir con la misma frecuencia).

3.3. Soluciones Numéricas

Una de las características más interesantes de los sistemas no lineales descritos por ecuaciones tipo NLS es la existencia de ondas solitarias, que se pueden propagar en estos sistemas manteniendo una forma constante (solitones), o que exhiben un comportamiento oscilatorio (breathers).

Es importante mencionar que algunas personas (como Kivshar y Agrawal) usan el término “breather” de forma bastante restrictiva, usándolo únicamente para pulsos que además de oscilar a lo largo de z , se parten periódicamente, de modo que presentan un pico, dos picos, un pico,

Sin embargo, la mayoría de las personas usan el término “breather” de forma más general, para referirse, principalmente, a ondas solitarias cuya altura oscila periódicamente (como en el artículo de Serkin y Belyaeva [67]).

En modelos no locales, como AM, LN1 o LN2, parecería que los solitones que se mueven o breathers no pueden existir, porque estas soluciones no son simétricas alrededor del origen. Sin embargo, Rusin et al [68] recientemente han encontrado pulsos que se mueven que se pueden propagar en el modelo AM. En consecuencia, sería interesante revisar si las ecuaciones LN1 y LN2 también permiten la propagación de ondas solitarias. En lo siguiente investigaremos este asunto.

A fin de generar un pulso que se mueve, es útil recordar que los solitones que se mueven de la ecuación NLS:

$$iu_t - u_{xx} - 2|u|^2u = 0 \quad (3.24)$$

tienen la forma:

$$u(x, t) = A_0 \operatorname{sech}(A_0 x - V_0 t) \exp \left\{ i \left[-\frac{V_0}{2} x - \left(A_0^2 - \frac{v_0^2}{4} \right) t \right] \right\} \quad (3.25)$$

donde A_0 y V_0 son constantes arbitrarias. Por lo tanto, esta solución nos lleva a la condición inicial:

$$u(x, 0) = A_0 \operatorname{sech}(A_0 x) \exp \left(-i \frac{V_0}{2} x \right) \quad (3.26)$$

Esta expresión nos dice que si queremos dar una velocidad inicial a una onda solitaria debemos multiplicar la forma del pulso inicial por un factor de la forma $\exp(-iV_0x/2)$, donde V_0 será la velocidad inicial del pulso. Por lo tanto, en lo siguiente presentaremos soluciones numéricas (ver los apéndices G.4-G.6) de las ecuaciones AM, LN1 y LN2 correspondientes a condiciones iniciales de la forma (3.26) con $A_0 = 1$ y dos diferentes valores de la velocidad: $V_0 = 1, 2$.

3.3.1. Resultados correspondientes a $V_0 = 1$

Para comparar las soluciones de las ecuaciones AM, LN1 y LN2 procederemos en dos pasos. Primero compararemos el comportamiento de las alturas de las tres soluciones. En la figura 3.3 podemos ver el comportamiento de estas alturas como funciones del tiempo. Observamos que en los tres casos, las soluciones exhiben un comportamiento oscilatorio amortiguado, a pesar que la frecuencia de las oscilaciones y la razón de amortiguamiento son ligeramente diferentes en los tres casos.

Como segundo paso, pondremos atención a las posiciones del punto máximo de los tres pulsos. En la figura 3.4 podemos ver cómo se comportan estas posiciones cuando el tiempo evoluciona. Ahora los resultados son algo extraños. La primera gráfica (la de arriba) en la figura 3.4 muestra la solución del modelo AM, el pulso inicialmente intenta avanzar en la dirección positiva, pero es jalado de regreso, y luego hace un segundo intento de avanzar, pero es jalado nuevamente, entonces queda atrapado en el origen y no se mueve más. El comportamiento del pulso que obedece la ecuación LN1 es similar: la gráfica de en medio en la figura 3.4 muestra que el pulso comienza a avanzar en la dirección positiva, entonces es jalado de regreso, oscila hacia adelante y hacia atrás, y finalmente queda atrapado en el origen. Finalmente, las soluciones de LN2 son ligeramente diferentes. Los pulsos comienzan a avanzar en la dirección positiva, pero luego su posición oscila, como si fuera atraída al origen por un resorte. Por lo tanto, en las tres ecuaciones el origen se comporta como un atractor. Este comportamiento extraño ya ha sido observado en el modelo AM en [68], pero es muy interesante que el

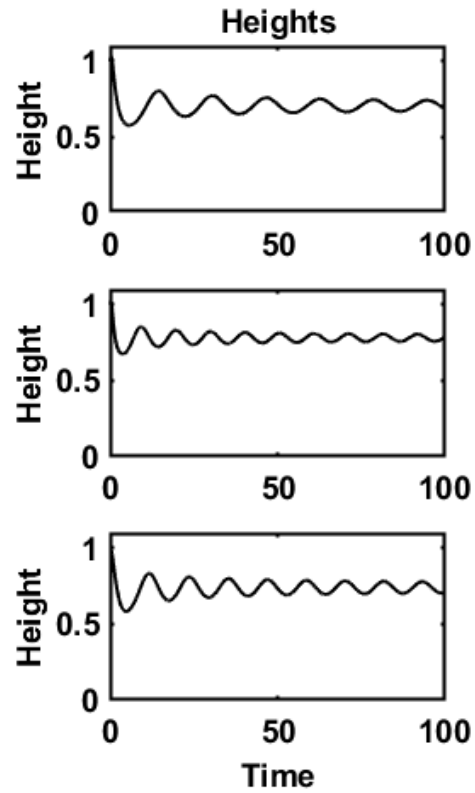


Figura 3.3: Alturas (como funciones del tiempo) de las soluciones de las ecuaciones AM (arriba), LN1 (en medio) y LN2 (abajo), correspondientes a la forma (3.26), con $A_0 = 1$, y $V_0 = 1$.

mismo fenómeno ocurre en los modelos LN1 y LN2. En los tres casos los pulsos no se pueden sobreponer al poder atractor del origen.

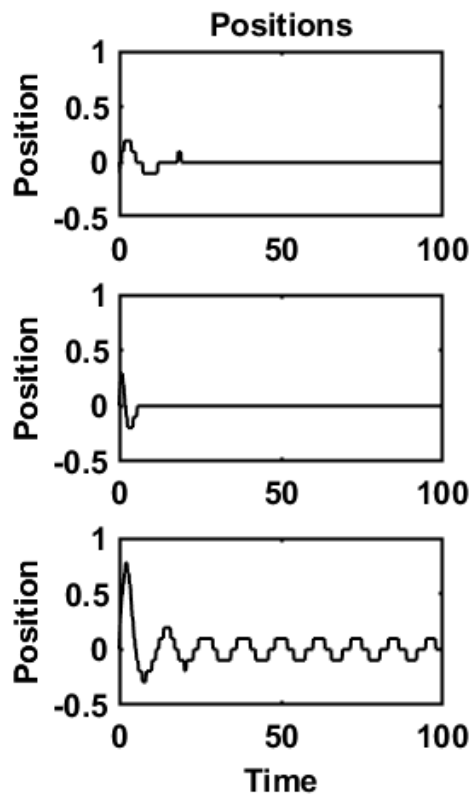


Figura 3.4: Posiciones del punto máximo (como funciones del tiempo) de las soluciones de las ecuaciones AM (arriba), LN1 (en medio) y LN2 (abajo), correspondientes a la forma (3.26), con $A_0 = 1$, y $V_0 = 1$.

3.3.2. Resultados correspondientes a $V_0 = 2$

Como en la subsección previa, comenzamos por observar las alturas de los pulsos como función del tiempo. La figura 3.5 muestra que ahora que el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones AM y LN1 es diferente. Ahora las alturas de estas soluciones disminuyen rápida y monotonamente. Por otro lado, la solución del modelo LN2 aún oscila (como cuando $V_0 = 1$), pero ahora la frecuencia de las oscilaciones es más pequeña.

Como segundo paso en la figura 3.6 se muestran las posiciones del punto máximo de las tres soluciones como función del tiempo, y un resultado sorprendente es observado. Ahora los tres pulsos logran escapar del origen, y se alejan con velocidades constantes. A primera vista podríamos pensar que el origen no ha intentado atrapar estos pulsos. Sin embargo, hay dos evidencias que muestran que el origen ha afectado el movimiento de los pulsos. La primera está relacionada con las velocidades de los pulsos. Las gráficas en la figura 3.6 muestran que los pulsos no avanzan con una velocidad igual a dos, como sugería la condición inicial. Los tres pulsos avanzan con velocidades más pequeñas: en el modelo AM la velocidad es $V = 1.48$ en LN1 tenemos $V = -1.38$ y en LN2 la velocidad es $V = 1.64$. Un resultado intrigante es que las soluciones de los modelos LN1 y LN2 se mueven en direcciones opuestas. Por otro lado, las primeras dos gráficas en la figura 3.5 muestran que en los modelos AM y LN1 sólo porciones pequeñas de estos pulsos logran escapar del origen. Una mayor parte de estos pulsos fue destruida (dispersada en ondas más pequeñas) pues a los pulsos se les dificulta escapar del origen. Sólo en el modelo LN2 los pulsos logran escapar con la mitad de su amplitud inicial.

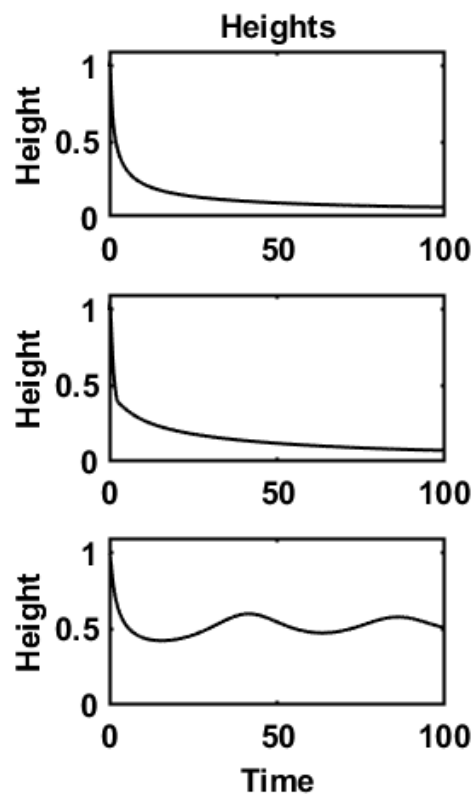


Figura 3.5: Alturas (como funciones del tiempo) de las soluciones de las ecuaciones AM (arriba), LN1 (en medio) y LN2 (abajo), correspondientes a la forma (3.26), con $A_0 = 1$, y $V_0 = 2$.

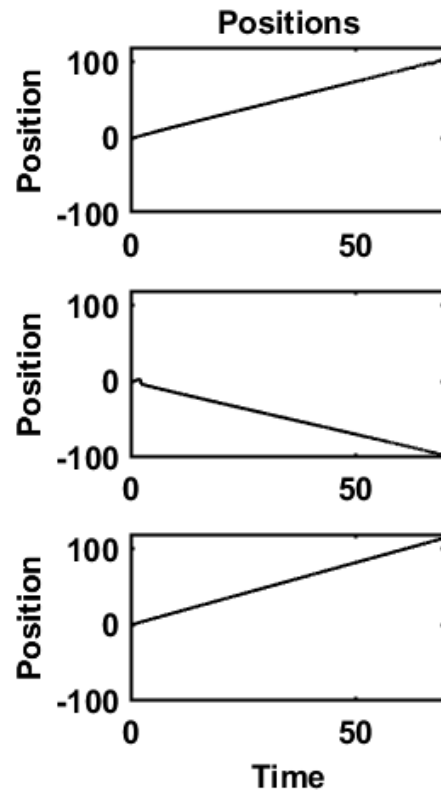


Figura 3.6: Posiciones del punto máximo (como funciones del tiempo) de las soluciones de las ecuaciones AM (arriba), LN1 (en medio) y LN2 (abajo), correspondientes a la forma (3.26), con $A_0 = 1$, y $V_0 = 2$.

3.3.3. Comentarios sobre las soluciones numéricas

De las soluciones numéricas presentadas arriba podemos extraer cuatro resultados importantes concernientes a las ecuaciones AM, LN1 y LN2.

- Primer resultado
Las ecuaciones AM, LN1 y LN2 permiten la existencia de ondas solitarias asimétricas que se mueven. En el caso del modelo AM la existencia de ondas asimétricas fue mostrada en el artículo de Ablowitz y Musslimani [17], y Rusin et al. [68] probaron la existencia de ondas que se mueven. Sin embargo, la existencia de tales ondas en las ecuaciones LN1 y LN2 es un resultado interesante pues la presencia de términos no locales adicionales en estas ecuaciones (diferentes de la no linealidad de AM), podrían sugerir que las ondas solitarias que son asimétricas, o que se alejan del origen, podrían ser destruidas por estos términos no locales.
- Segundo resultado
Como una consecuencia de los términos no locales que aparecen en las ecuaciones AM, LN1 y LN2, el origen se comporta como un atractor de ondas solitarias.
- Tercer resultado
En los tres modelos (AM, LN1 y LN2) existen ondas solitarias que permanecen atrapadas cerca del origen, y pulsos que se mueven que logran escapar del origen.
- Cuarto resultado
La propagación de ondas solitarias es más fácil en el modelo LN2 que en los otros dos modelos. Este resultado es evidente en la figura 3.5, donde podemos apreciar que el pulso que obedece LN2 logra escapar del origen con una fracción considerable de su amplitud inicial, mientras que los pulsos que obedecen AM y LN1 fueron casi destruidos mientras escapaban del origen.

3.4. Análisis Variacional

Quizás el resultado más interesante encontrado en la sección previa es el descubrimiento de que en los tres modelos (AM, LN1 y LN2) existen dos tipos de ondas solitarias que se mueven: ondas que permanecen atrapadas cerca del origen, y pulsos que se mueven que logran escapar del origen. Como los modelos LN1 y LN2 pueden ser obtenidos de Lagrangianas adecuadas, sería interesante investigar si la existencia de estos dos tipos de soluciones (en estos modelos) puede ser predicha (y explicada) utilizando métodos variacionales, ya que estos métodos han resultados muy útiles en el estudio del comportamiento de ondas solitarias en múltiples generalizaciones de la

ecuación NLS [69]-[74]. En consecuencia, en lo siguiente usaremos el método variacional para estudiar el comportamiento de soluciones de ondas solitaria de los modelos LN1 y LN2.

Como las ecuaciones variacionales son más simples en el caso del modelo LN2, comenzaremos estudiando este modelo.

3.4.1. Análisis Variacional de LN2

Vamos a utilizar el método variacional (ver el apéndice I.3) de Anderson [46] para obtener soluciones aproximadas de LN2. A fin de hacer esto consideraremos una función de la forma:

$$u(x, t) = A \exp \left[\frac{-(x-w)^2}{2a^2} \right] \exp \{ i [p + q(x-w) + r(x-w)^2] \} \quad (3.27)$$

donde A , a , w , p , q y r son funciones del tiempo.

Para obtener el sistema de ODEs (ecuaciones diferenciales ordinarias) que gobiernan la evolución de las funciones $\{A, a, w, p, q, r\}$ seguiremos el procedimiento usual: sustituimos la función de prueba (3.27) en la densidad Lagrangiana \mathcal{L}_2 definida en (3.8), luego integramos \mathcal{L}_2 sobre el intervalo para obtener la Lagrangiana promediada L_2 , y finalmente usamos esta L_2 para obtener las ecuaciones de Lagrange para las funciones A , a , w , p , q y r . De esta manera, obtenemos el siguiente sistema:

$$A' = 2Ar \quad (3.28)$$

$$a' = -4ar \quad (3.29)$$

$$w' = -2q \quad (3.30)$$

$$p' = -\frac{5}{4\sqrt{2}}A^2 \left[1 + \exp \left(\frac{-2w^2}{a^2} \right) \right] - q^2 + \frac{\sqrt{2} + A^2 w^2 \exp \left(\frac{-2w^2}{a^2} \right)}{\sqrt{2}a^2} \quad (3.31)$$

$$q' = \frac{\sqrt{2}A^2 w}{a^2} \exp \left(\frac{-2w^2}{a^2} \right) \quad (3.32)$$

$$r' = \frac{1}{4a^4} \left[-4 + \sqrt{2}a^2 A^2 + 16a^4 r^2 + \sqrt{2}A^2 (a^2 - 4w^2) \exp \left(\frac{-2w^2}{a^2} \right) \right] \quad (3.33)$$

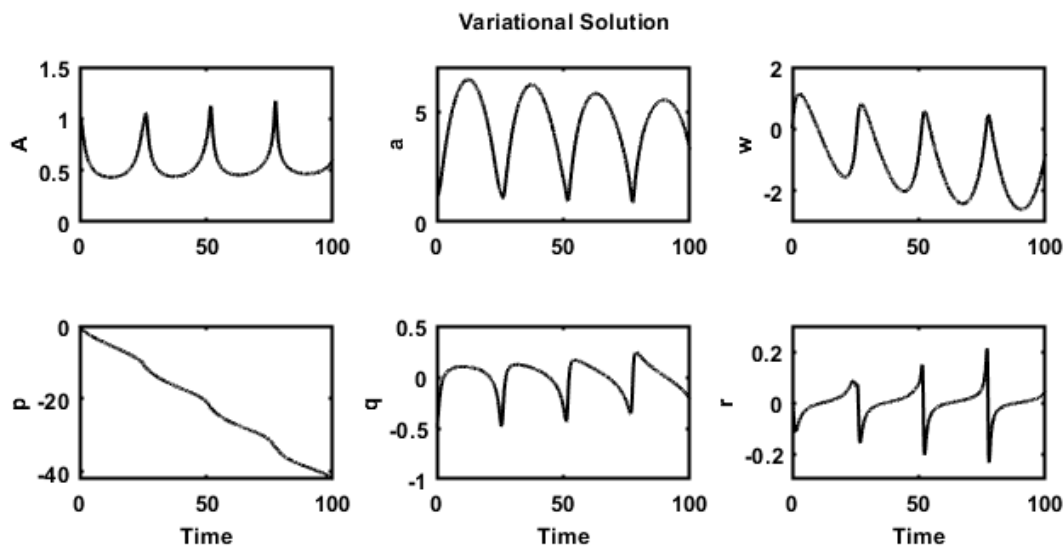


Figura 3.7: Soluciones del sistema (3.28)-(3.33) correspondientes a $V_0 = 1$, $q(0) = -0.5, A(0) = 1, a(0) = 1.2, w(0) = 0, p(0) = 0$ y $r(0) = 0$

que puede ser resuelto numéricamente (ver el apéndice I.3.1).

A fin de tener condiciones iniciales similares a aquellas usadas para obtener las soluciones numéricas presentadas en las figuras 3.3-3.6, consideraremos condiciones iniciales de la forma (3.26), con $A_0 = 1$ y tres diferentes valores de V_0 : 1, 2 y 3.

Si $V_0 = 1$ la solución del sistema (3.28)-(3.33) se muestra en la figura 3.7. En esta figura podemos ver la dependencia temporal de las funciones $\{A, a, w, p, q, r\}$. Las tres gráficas superiores muestran que la altura, el ancho y la posición del pulso oscilan. La cuarta gráfica (segunda fila, a la izquierda), muestra que $p(t)$ se parece mucho a una línea recta y por lo tanto $p'(t)$ (la derivada de $p(t)$) es casi una constante, que define la frecuencia fundamental del pulso. Luego, la quinta y sexta gráficas (al centro y a la derecha de la segunda fila), muestra que el número de onda q y el “chirp” r del pulso oscilan en el tiempo. Deberíamos notar que este comportamiento de $q(t)$ y $r(t)$ es el usual en solitones ópticos. Podemos observar, por ejemplo, que el comportamiento de $q(t)$ y $r(t)$ mostrado en la figura 3.7, es muy similar al comportamiento de las funciones $X_5(z)$ y $X_4(z)$ en las figuras 1-10 de la referencia [75], donde z (la distancia a lo largo de la fibra óptica) juega el rol de la variable de evolución.

En las figuras 3.8 y 3.9 podemos observar el comportamiento de las funciones $\{A, a, w, p, q, r\}$ cuando $V_0 = 2$ y $V_0 = 3$, respectivamente. Ahora el comportamiento $\{A, a, w, q, r\}$ ha cambiado drásticamente. En ambos casos ($V_0 = 2, 3$), la altura del pulso A cae monótonamente, mientras que su ancho incrementa casi linealmente en el

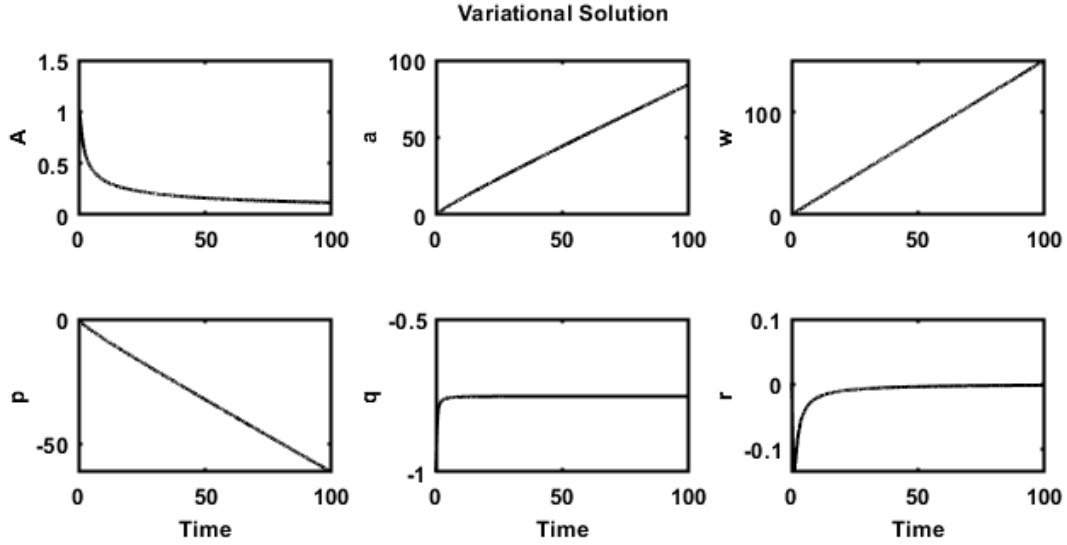


Figura 3.8: Soluciones del sistema (3.28)-(3.33) correspondientes a $V_0 = 2$, $q(0) = -1.0$ y las mismas condiciones iniciales para A, a, w, p y r como en la figura 3.7

tiempo. Y más interesante, la gráfica de $w(t)$ muestra que ahora los pulsos se mueven lejos del origen a una velocidad constante. Por lo tanto, en estos casos ($V_0 = 2, 3$), el pulso ha logrado sobreponerse al poder atractivo del origen, y ha escapado a una velocidad constante. Las gráficas de las funciones $q(t)$ y $r(t)$ también son interesantes. En estos casos ($V_0 = 2, 3$), después de un corto período transitorio, el número de onda del pulso adquiere un valor constante y el “chirp” tiende a cero (este está representado por el parámetro “ r ”, y corresponde a un corrimiento lineal en la frecuencia, es decir, en un pulso con “chirp” la onda portadora no tiene frecuencia constante). Por lo tanto, los pulsos en movimiento que logran escapar del origen no tienen “chirp”.

De esta manera, hemos encontrado que la aproximación variacional predice la existencia de los dos tipos de soluciones de LN2: pulsos que oscilan y permanecen atrapados en una vecindad de $x = 0$ (figura 3.7) y pulsos que se alejan del origen a velocidad constante (figura 3.8 y 3.9). La existencia de estas soluciones variacionales constituye un éxito del método variacional, pero la sola observación de estas soluciones no nos permite entender por qué existen estos dos tipos de soluciones. Sin embargo, de las ecuaciones variacionales (3.29),(3.30) y (3.32),(3.33) podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones de segundo orden para las funciones $a(t)$ y $w(t)$:

$$a'' = a^{-4} \left[a \left(4 - \sqrt{2}\alpha a \right) - \sqrt{2} \exp \left(\frac{-2w^2}{a^2} \right) \alpha \left(a^2 - 4w^2 \right) \right] \quad (3.34)$$

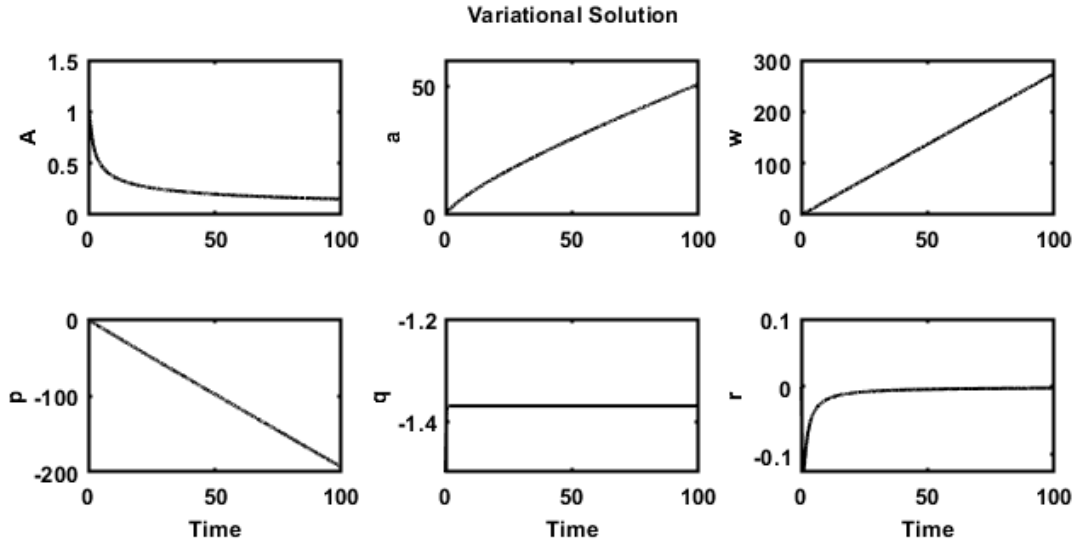


Figura 3.9: Soluciones del sistema (3.28)-(3.33) correspondientes a $V_0 = 3$, $q(0) = -1.5$ y las mismas condiciones iniciales para A, a, w, p y r como en la figura 3.7

$$w'' = -a^{-3} \left[2\sqrt{2} \exp\left(\frac{-2w^2}{a^2}\right) \alpha \right] \quad (3.35)$$

donde $\alpha = A^2 a$ es una constante de movimiento (como se vio en las ecuaciones (3.28) y (3.29)). De las ecuaciones (3.34)-(3.35) es posible entender por qué LN2 ha atrapado a algunas ondas solitarias, y ha dejado escapar a otras. Para ver cómo son generadas estas soluciones, pongamos nuestra atención en soluciones simples del sistema (3.34)-(3.35) donde la función $a(t)$ es igual a una constante. Si a es constante la ecuación (3.34) implica que:

$$\sqrt{2} \exp\left(\frac{-2w^2}{a^2}\right) = \frac{a(4 - \sqrt{2}\alpha a)}{\alpha(a^2 - 4w^2)} \quad (3.36)$$

y sustituyendo esta ecuación en la ec. (3.35) obtenemos la siguiente ecuación para $w(t)$:

$$w'' = -\frac{dU(w)}{dw} \quad (3.37)$$

donde la función $U(w)$, que juega el rol de un “potencial”, es definido como:

$$U(w) = -\frac{U_0}{c} \ln(1 - cw^2) \quad (3.38)$$

y U_0 y c son las siguientes constantes (recordemos que hemos supuesto que a es constante):

$$U_0 = a^{-4} \left(4 - \sqrt{2}\alpha a \right) \quad (3.39)$$

$$c = \frac{4}{a^2} \quad (3.40)$$

y si ahora aproximamos $\ln(1 - cw^2) \approx -cw^2$ llegamos a la ecuación:

$$w'' = -\frac{d}{dw} (U_0 w^2) \quad (3.41)$$

Por lo tanto, el comportamiento de la función $w(t)$ depende del signo de U_0 , que a su vez depende de los valores de $A(0)$ y $a(0)$. Si $U_0 > 0$ la ecuación (3.41) es la ecuación de un oscilador armónico, y $w(t)$ permanecerá oscilando cerca del origen. Por el otro lado, si $U_0 < 0$, el potencial es una parábola invertida, y en consecuencia $|w(t)|$ será una función creciente del tiempo. Por lo tanto, la ecuación (3.41) nos permite entender por qué el sistema (3.34)-(3.35) tiene soluciones que permanecen cerca del origen, y soluciones que escapan del origen. Es importante mencionar, que este análisis es principalmente cualitativo, ya que solo nos muestra que el modelo LN2 admite los dos tipos de comportamiento, pero no nos permite determinar el valor exacto de V_0 para el cual se debería de dar este cambio de comportamiento.

3.4.2. Análisis Variacional de LN1

En el caso de la ecuación LN1 procederemos de manera similar. Sustituyendo la función de prueba (3.27) en la densidad Lagrangiana (3.2), e integrando sobre x , obtenemos una Lagrangiana promedio. Y de esta Lagrangiana podemos obtener (ver el apéndice I.2) el siguiente sistema de ecuaciones de Euler Lagrange $\{A, a, w, p, q, r\}$:

$$A' = 2Ar + \frac{1}{\sqrt{2}a^2} A^3 w (-q + 2rw) (a^2 + w^2) \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (3.42)$$

$$a' = -4ar + \frac{1}{a} \sqrt{2} A^2 w (q - 2rw) (a^2 + w^2) \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (3.43)$$

$$w' = -2q + \frac{1}{\sqrt{2}} A^2 (-q + 2rw) (a^2 + w^2) \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (3.44)$$

$$p' = \frac{1}{a^2} - q^2 - \frac{A^2}{4\sqrt{2}a^2} \left\{ a^4 (q - 2rw) (q + 6rw) + 2a^2 (5 + q^2 w^2 - 4r^2 w^4) \right. \\ \left. + 3w^2 [-2 + w^2 (q - 2rw)^2] \right\} \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (3.45)$$

$$q' = \frac{A^2}{2\sqrt{2}a^2} \\ \left\{ 6w - (q - 2rw) [4a^4 r + 3w^3 (q - 2rw) + a^2 w (q + 2rw)] \right\} \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (3.46)$$

$$r' = \frac{1}{4a^4} \left\{ -4 + 16a^4 r^2 + \sqrt{2}A^2 \left\{ a^4 (q - 2rw)^2 + 3w^2 (-2 + w^2 (q - 2rw)^2) \right. \right. \\ \left. \left. + 2a^2 [1 + w^2 (q - 2rw)^2] \right\} \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \right\} \quad (3.47)$$

la solución numérica de este sistema (ver el apéndice I.2.1) nos permite encontrar la dependencia temporal de estas funciones, como se muestran en las figuras 3.10-3.12. En estas figuras podemos ver la forma de las funciones $\{A, a, w, p, q, r\}$ para $V_0 = 1, 2, 3$. En el caso de $V_0 = 1$, la figura 3.10 muestra que el comportamiento de las funciones $\{A, a, w, p, q, r\}$ es cualitativamente similar a la solución de LN2 mostrada en la figura 3.7, pero la frecuencia de las oscilaciones de $\{A, a, w, q, r\}$ es sustancialmente mayor. En el caso de $V_0 = 2$, la figura 3.11 también muestra una cierta similitud con la solución de LN2 presentada en la figura 3.8, pero el comportamiento de las funciones $w(t)$ y $p(t)$ es diferente. Ahora las derivadas $w'(t)$ y $p'(t)$ ya no son constantes (como ocurría en el caso de LN2). Sin embargo, cuando incrementamos la velocidad a $V_0 = 3$, la similitud entre LN1 y LN2 se recupera: en este caso las gráficas mostradas en las figuras 3.12 y 3.9 son todas similares, con solo una diferencia importante: $w'(t)$ es negativa en la figura 3.12, y positiva en la figura 3.9, y esto implica que los pulsos de LN1 y LN2 se mueven en direcciones opuestas (cuando $V_0 = 3$).

Este resultado es muy interesante, porque está de acuerdo con la velocidad negativa observada en la solución numérica directa de LN1 cuando usamos $V_0 = 2$. Por lo tanto, aunque el valor de la velocidad inicial requerida para producir una solución de LN1 que se mueve con una velocidad negativa no es igual en la aproximación variacional y en la solución numérica directa de LN1, la predicción de que los pulsos de LN1 y LN2 se mueven en direcciones opuestas cuando $V_0 > 1$ es un buen resultado de la aproximación variacional.

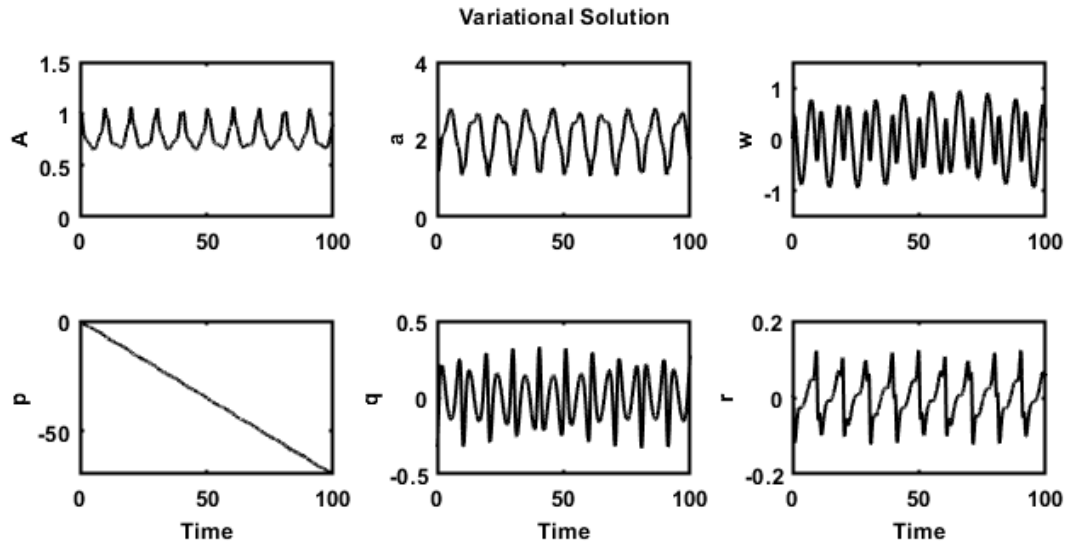


Figura 3.10: Soluciones del sistema (3.42)-(3.47) correspondientes a $V_0 = 1$, $q(0) = -0.33132$ y las mismas condiciones iniciales para A, a, w, p y r como en la figura 3.7

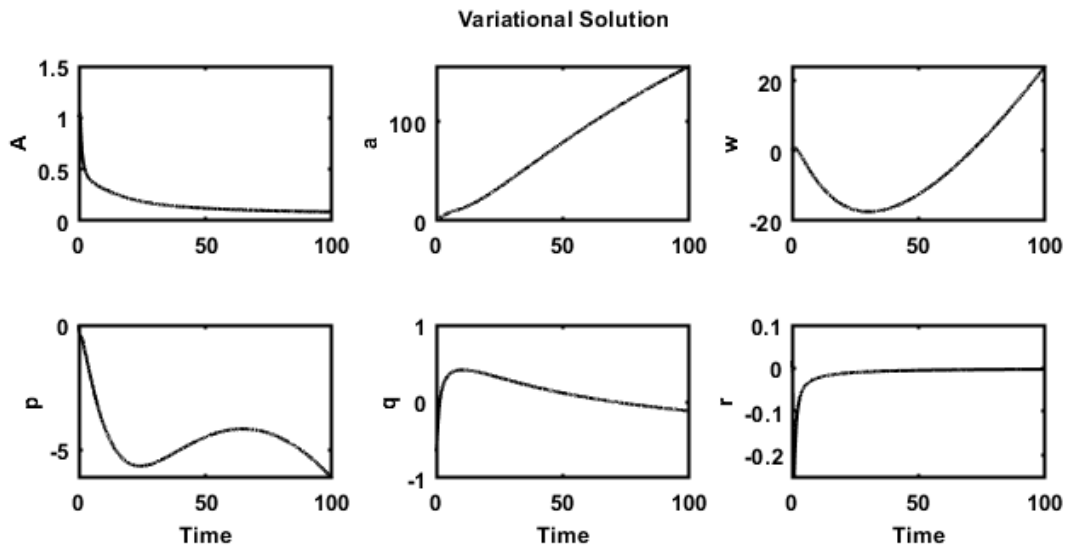


Figura 3.11: Soluciones del sistema (3.42)-(3.47) correspondientes a $V_0 = 2$, $q(0) = -0.662639$ y las mismas condiciones iniciales para A, a, w, p y r como en la figura 3.7

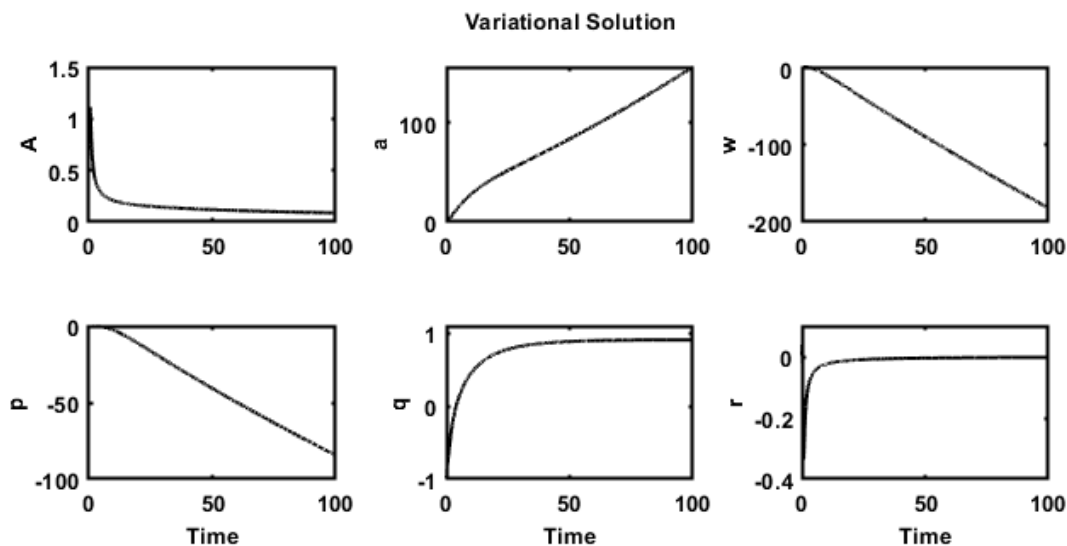


Figura 3.12: Soluciones del sistema (3.42)-(3.47) correspondientes a $V_0 = 3$, $q(0) = -0.993959$ y las mismas condiciones iniciales para A, a, w, p y r como en la figura 3.7

Como el sistema de las ecuaciones de Euler Lagrange (3.42)-(3.47) es más complicado que el sistema (3.28)-(3.33) ya no es posible obtener de las ecuaciones (3.42)-(3.47) unas ecuaciones aproximadas similares a la ecuación (3.37), que puedan proveer una explicación cualitativa para la existencia de soluciones de LN1 de los dos tipos observados: pulsos que permanecen en la vecindad de $x = 0$, y pulsos que se alejan del origen.

3.5. Colisiones de Breathers

En las pruebas numéricas presentadas en la sección 3.3 usamos condiciones iniciales cuyo módulo $|u(x, 0)|$ fueran funciones que son simétricas cerca del origen ($x = 0$). Y vimos que el origen juega un rol especial en las ecuaciones AM, LN1 y LN2: ejerce una influencia atractiva sobre los pulsos que se intentan mover lejos de él. En consecuencia, sería interesante investigar cómo es el comportamiento de los pulsos cuyas posiciones iniciales del punto máximo no están centradas en $x = 0$. En lo siguiente estudiaremos este comportamiento en el caso de la ecuación LN2, que es el caso donde un pulso con $V_0 = 2$ logró escapar del origen con una fracción considerable de su amplitud inicial.

Para comenzar con esto consideraremos tres soluciones de onda solitaria de LN2, correspondientes a condiciones iniciales de la forma:

$$u(x, 0) = A_0 \operatorname{sech} [A_0 (x - x_0)] \exp \left(-i \frac{V_0}{2} (x - x_0) \right) \quad (3.48)$$

donde $A_0 = 1$ y los valores de x_0 y v_0 son los siguientes:

- Pulso 1: $x_0 = 20$, $V_0 = 1$
- Pulso 2: $x_0 = 80$, $V_0 = -1$
- Pulso 3: $x_0 = -20$, $V_0 = 1$

En la figura 3.13 podemos ver que los tres pulsos avanzan a velocidades constantes (velocidad positivas para los pulsos 1 y 3, y velocidad negativa para el pulso 2). Luego, en la figura 3.14 podemos observar cómo se comportan las amplitudes de los tres pulsos. En los tres casos las amplitudes de los pulsos adquieren un comportamiento oscilatorio. Deberíamos notar, sin embargo, que la segunda gráfica (correspondiente al pulso 2) exhibe una pequeña irregularidad en $t = 80$, y la tercera gráfica (correspondiente al pulso 3) muestra una irregularidad similar en $t = 20$. Estas irregularidades son importantes. Aparecen cuando los pulsos 2 y 3 pasan a través del punto $x = 0$. Por lo tanto, estas irregularidades son efectos del origen sobre los pulsos que se mueven. Y las gráficas en la figura 3.14 muestran que estos efectos son insignificantes. Tan pronto como los pulsos hayan cruzado el origen, sus amplitudes recuperan su comportamiento oscilatorio. Además, las gráficas en la figura 3.13 muestran que el origen no tiene ningún efecto sobre el movimiento de los pulsos.

Ahora veremos qué pasa cuando la velocidad de los pulsos se incrementa. Vamos a considerar otra vez el movimiento de tres pulsos cuyas formas iniciales están dadas por la ecuación (3.48), con $A_0 = 1$ y los siguientes valores de x_0 y v_0 :

- Pulso 4: $x_0 = 20$, $V_0 = 2$
- Pulso 5: $x_0 = 80$, $V_0 = -2$
- Pulso 6: $x_0 = -20$, $V_0 = 2$

En la figura 3.15 podemos observar las trayectorias de estos tres pulsos, y la figura 3.16 muestra el comportamiento de las amplitudes de los pulsos. En la segunda y tercera gráficas presentadas en la figura 3.16 podemos observar dos irregularidades casi imperceptibles en $t = 40$ y $t = 10$, respectivamente. Estas irregularidades ocurren cuando los pulsos 5 y 6 pasan a través del punto $x = 0$. Podemos apreciar que estas irregularidades son mucho más pequeñas que las vistas en la figura 3.14, y esto implica que el efecto del origen de los pulsos que se mueven disminuye con la velocidad de los pulsos.

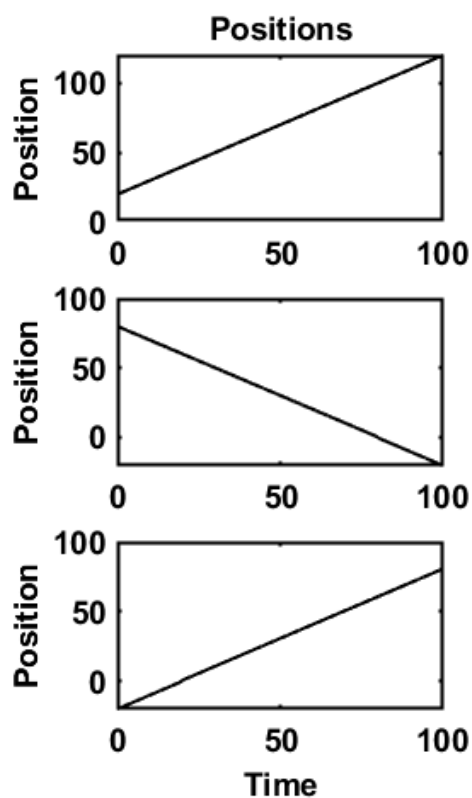


Figura 3.13: Posiciones del punto máximo (como funciones del tiempo) de los tres pulsos que obedecen la ecuación LN2, con condiciones iniciales de la forma mostrada en la ec. (3.48), con $A_0 = 1$ y los siguientes valores de x_0 y V_0 : gráfica superior $x_0 = 20, V_0 = 1$, gráfica de en medio $x_0 = 80, V_0 = -1$, gráfica inferior $x_0 = -20, V_0 = 1$.

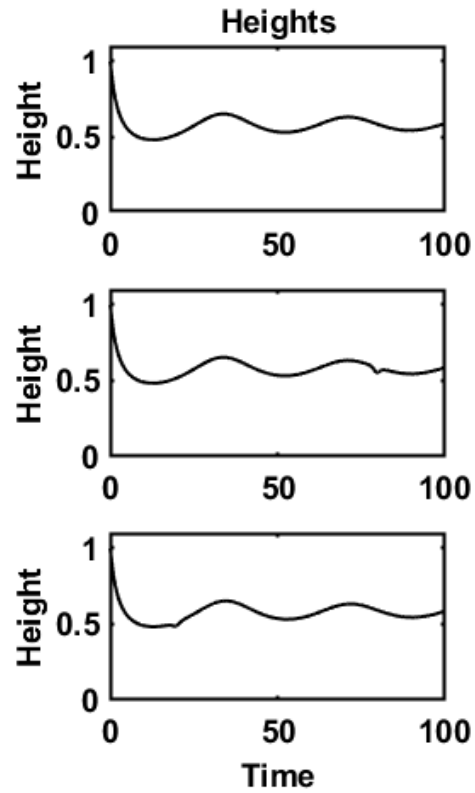


Figura 3.14: Amplitudes (como funciones del tiempo) de los tres pulsos que obedecen la ecuación LN2, con condiciones iniciales de la forma mostrada en la ec. (3.48), con $A_0 = 1$ y los siguientes valores de x_0 y V_0 : gráfica superior $x_0 = 20, V_0 = 1$, gráfica de en medio $x_0 = 80, V_0 = -1$, gráfica inferior $x_0 = -20, V_0 = 1$.

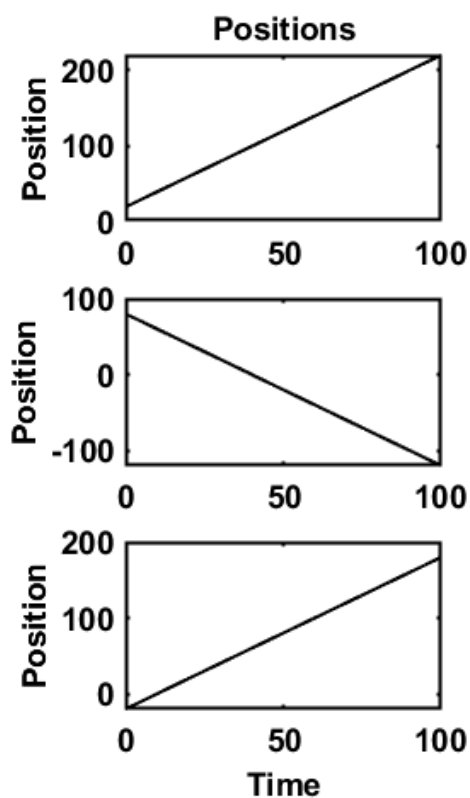


Figura 3.15: Posiciones del punto máximo (como funciones del tiempo) de los tres pulsos que obedecen la ecuación LN2, con condiciones iniciales de la forma mostrada en la ec. (3.48), con $A_0 = 1$ y los siguientes valores de x_0 y V_0 : gráfica superior $x_0 = 20, V_0 = 2$, gráfica de en medio $x_0 = 80, V_0 = -2$, gráfica inferior $x_0 = -20, V_0 = 2$.

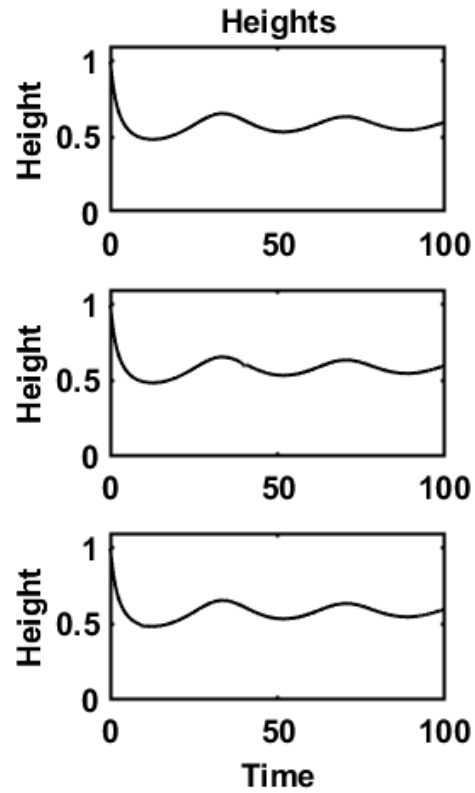


Figura 3.16: Amplitudes (como funciones del tiempo) de los tres pulsos que obedecen la ecuación LN2, con condiciones iniciales de la forma mostrada en la ec. (3.48), con $A_0 = 1$ y los siguientes valores de x_0 y V_0 : gráfica superior $x_0 = 20, V_0 = 2$, gráfica de en medio $x_0 = 80, V_0 = -2$, gráfica inferior $x_0 = -20, V_0 = 2$.

Los resultados mostrados en las figuras 3.13-3.16 muestran que el efecto del origen sobre los pulsos que comienzan sus movimientos en puntos alejados de $x = 0$, pero que pasan a través del origen en un momento posterior, es absolutamente insignificante si $|V_0| \geq 1$. Este resultado es un poco inesperado, los resultados presentados en la sección 3.3 sugieren que el origen ($x = 0$) podría tener un mayor efecto (perjudicial) sobre el movimiento de tales pulsos. Aunque el resultado es inesperado no tenemos dudas de su validez, ya que se ha obtenido de resolver numéricamente la ecuación LN2. Por lo tanto, los resultados mostrados en las figuras 3.13-3.16 prueban que la ecuación LN2 es en efecto un modelo interesante, que permite la propagación de pulsos solitarios a velocidades arbitrarias.

Las figuras 3.13-3.16 también muestran que el modelo LN2 permite la propagación de breathers (ondas solitarias que oscilan) que empiezan su movimiento en puntos diferentes de $x = 0$, y avanzan a velocidades constantes en cualquier dirección. Además la frecuencia de oscilación es pequeña, ya que en el tiempo que ejecutamos la solución numérica ($t = 100$) solo se completan dos oscilaciones. Este resultado sugiere que podríamos estudiar la colisión de dos breathers que se mueven en direcciones opuestas. Por lo tanto, consideremos una condición inicial de la forma:

$$u(x, 0) = A_1 \operatorname{sech} [A_1 (x - x_1)] \exp \left[-i \frac{V_1}{2} (x - x_1) \right] + A_2 \operatorname{sech} [A_2 (x - x_2)] \exp \left[-i \frac{V_2}{2} (x - x_2) \right] \quad (3.49)$$

donde $A_1 = A_2 = 1$ y:

$$x_1 = 20, \quad V_1 = 2, \quad x_2 = 150, \quad V_2 = -2$$

En la figura 3.17 podemos ver el módulo de las solución de la ecuación LN2 correspondiente a esta condición inicial. Esta figura muestra que la colisión no destruye a los breathers. Después de la colisión ambos recuperan sus amplitudes iniciales y velocidades, lo cual revela que estos breathers son soluciones robustas.

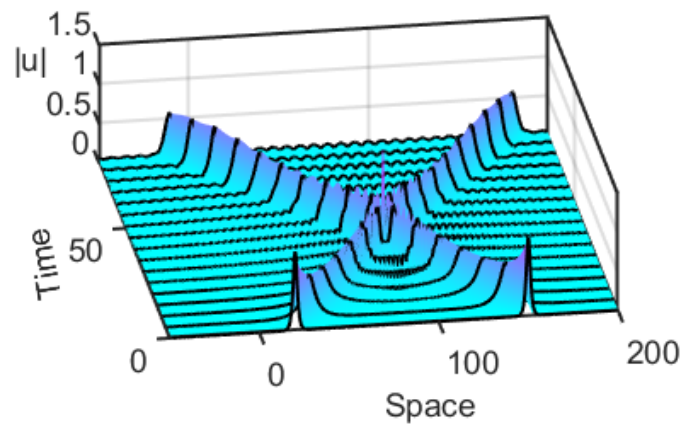


Figura 3.17: Módulo de la solución de la ec. LN2 correspondiente a la condición inicial de la forma (3.49), con $A_1 = A_2 = 1, x_1 = 20, x_2 = 150, V_1 = 2$ y $V_2 = -2$

Discusión y conclusiones

4.1. Discusión

Ecuaciones no locales Icm-KdV

(Integral complex modified Korteweg-de Vries equations)

En el capítulo 2 analizamos diferentes formas de incorporar efectos no locales en la ecuación cmKdV. Presentamos cuatro extensiones de esta ecuación, que contienen términos integrales (no locales) en lugar de la no linealidad usual $|u|^2u_x$. En la extensión más simple (ecuación Icm-KdV-I) el término no lineal $|u|^2u_x$ fue reemplazado por un término integral de la forma:

$$u \int_{-\infty}^{+\infty} R(x - x') |u(x', t)|^2 dx'$$

pero resultó que la ecuación resultante (que llamamos Icm-KdV-I) no es satisfactoria, porque no posee una estructura Lagrangiana. Mostramos que esta desventaja puede ser corregida si agregamos un término adicional, como se mostró en la ecuación (2.6) (también referida como Icm-KdV-II). La ecuación Icm-KdV-II puede ser obtenida de dos Lagrangianas diferentes, presentadas en las ecuaciones (2.7) y (2.8), que no están relacionadas en la forma usual (ver la ecuación (2.13) y las líneas siguientes). Como esta clase de relaciones entre Lagrangianas equivalentes es completamente nueva, sugerimos llamarla “F-equivalencia”, pues el Teorema de Fubini es necesario para probar que este tipo de Lagrangianas son de hecho equivalentes. En la sección 2.2 se presentó una tercera extensión no local de la ecuación cmKdV. Esta ecuación (que llamamos Icm-KdV-III), es un modelo interesante porque contiene un solo término integral (como Icm-KdV-I) y posee una estructura Lagrangiana. Mostramos que Icm-KdV-III puede

ser obtenida de dos diferentes Lagrangianas (ecuaciones (2.15) y (2.16)), y también en este caso las Lagrangianas resultaron ser F-equivalentes. Una cuarta extensión no local de la ecuación cmKdV se presentó en la sección 2.3, la ecuación (2.20), que es una combinación de las ecuaciones Icm-KdV-II y III. Esta ecuación (referida como Icm-KdV-IV) es particularmente interesante ya que puede ser obtenida de nueve diferentes Lagrangianas F-equivalentes y cada una de ellas nos lleva a una Hamiltoniana diferente. En la sección 2.4 usamos el Teorema de Noether para probar que la integral (sobre x) de cualquiera de estas nueve densidades Hamiltonianas es una cantidad conservada. La ecuación Icm-KdV-IV también conserva el momento y la energía, como una consecuencia de la invarianza de la integral de acción bajo traslaciones espaciales y transformaciones de norma. En la sección 2.5.1 se estudió el comportamiento de ondas solitarias que obedecen las ecuaciones Icm-KdV-I, II y III. Se encontró que las ondas solitarias que satisfacen las ecuaciones Icm-KdV-I y III no se comportan como solitones verdaderos pues sus amplitudes disminuyen lentamente y sus velocidades no son constantes. Por otro lado, las ondas solitarias que evolucionan de acuerdo Icm-KdV-II se comportan como solitones: después de un corto periodo transitorio sus amplitudes se vuelven constantes y avanzan con velocidad constante. En la sección 2.5.2 presentamos el módulo $|u(x, t)|$ de las soluciones de las ecuaciones Icm-KdV-I, II y III como función de (x, t) (figuras 2.10-2.12). Estas superficies revelan claramente la diferencia entre el comportamiento de un pulso que obedece la ecuación Icm-KdV-II, y los pulsos que satisfacen las ecuaciones Icm-KdV-I y III. Luego en la sección 2.5.3, probamos que la ecuación Icm-KdV-II en efecto posee soluciones tipo solitón, y una expresión analítica aproximada fue encontrada para estos solitones. Además, usamos el método variacional de Anderson para determinar la relación entre la amplitud y el ancho de un solitón perturbado, y estos resultados (la solución analítica y las ecuaciones variacionales) nos permitieron entender el comportamiento de solitones perturbados durante el período transitorio. Por lo tanto, los resultados presentados en la sección 2.5 muestran que la ecuación Icm-KdV-II es el modelo más satisfactorio de las cuatro variantes no locales de la ecuación cmKdV estudiadas en el capítulo 2.

Las ecuaciones Icm-KdV-I-IV pueden ser útiles para describir la propagación de ondas en cualquier sistema dispersivo no lineal, donde la ecuación cmKdV provea una descripción aproximada de la evolución de las ondas, pero la aproximación no sea lo suficientemente satisfactoria. En tal caso las ecuaciones Icm-KdV pueden ofrecer una mejor descripción del comportamiento de las ondas, pues estas ecuaciones contienen grados de libertad adicionales (diferentes términos integrales y diferentes funciones de peso) que, escogidos adecuadamente pueden reducir las diferencias entre las soluciones modeladas y el comportamiento real de las ondas en el sistema.

Es valioso observar que las cuatro ecuaciones Icm-KdV presentadas en este trabajo se reducen a la ecuación estándar cmKdV cuando las funciones de peso son iguales a la función delta de Dirac. Este hecho implica que las soluciones de estas cuatro

ecuaciones se comportarán de manera similar cuando los anchos de las funciones de peso sean suficientemente pequeñas. En consecuencia, para funciones de peso angostas las soluciones de onda solitaria de estas versiones integrales de la ecuación cmKdV se comportarán como solitones embebidos (ESs) [1],[18],[23],[76] pues las soluciones tipo solitón de la cmKdV son ESs. Sin embargo, si las funciones de peso se hacen más amplias el comportamiento de estas soluciones será cada vez más diferente. Sería interesante analizar en detalle cómo se comportan estas soluciones cuando el ancho de la función de peso incrementa (en el apéndice J mostramos algunos resultados obtenidos para funciones de peso más anchas). Además, también sería interesante analizar cómo interactúan estas ondas solitarias. Los análisis serán presentados en otro estudio.

Como comentario final nos gustaría observar que otras extensiones integrales de la ecuación cmKdV (diferentes de las ecuaciones estudiadas en este artículo) pueden merecer más investigación. Es sabido que soluciones de formación de patrones han sido encontradas en ecuaciones de Ginzburg-Landau locales [36] y no locales [77] y también en extensiones de la ecuación NLS en una y dos dimensiones con no linealidades no locales que compiten entre sí [78]. Estos resultados sugieren que las nuevas variantes integrales de la ecuación cmKdV con términos no locales que compiten también podrían tener soluciones inesperadas e interesantes.

Ecuaciones no locales LN

(Lagrangian Nonlocal Nonlinear Schrodinger Equations)

En el capítulo 3 presentamos dos nuevas ecuaciones no locales NLS que pueden ser obtenidas de densidades Lagrangianas adecuadas. La primera de estas ecuaciones, llamada LN1 en este artículo (ecuación (3.1)), es una extensión de la ecuación Ablowitz y Musslimani (AM), pues contiene su no linealidad más dos no linealidades adicionales. La existencia de una Lagrangiana para LN1 muestra que la no linealidad de AM no es la causa de la imposibilidad de obtener una ecuación de AM a través del principio de mínima acción. En la segunda ecuación, que llamamos LN2 en este artículo (ecuación (3.7)), la no linealidad de AM ha sido reemplazada por dos nuevos términos no lineales. Como explicaremos en lo siguiente, LN2 posee ciertas ventajas sobre AM y LN1.

En la sección 3.1 usamos el Teorema de Noether para obtener las cantidades conservadas de LN1 y LN2, asociadas a la invarianza de la integral de acción bajo traslaciones infinitesimales en el espacio, fase y tiempo. En la sección 3.3 presentamos soluciones numéricas de los tres modelos (AM, LN1 y LN2) que muestran que los tres de ellos tienen soluciones de ondas solitarias que se mueven. En cada uno de estos modelos existen diferentes tipo de pulsos que se mueven:

1. Pulsos que permanecen atrapados por el origen ($x = 0$)
2. Pulsos que logran escapar del origen.

Las soluciones numéricas muestran que en los modelos AM y LN1 la altura de los pulsos que logran escapar del origen disminuye continuamente cuando $V_0 = 2$. Por otro lado, en el caso de LN2 los pulsos que escapan del origen logran sobrevivir, pues sus amplitudes no decaen monótonamente, pero sí adquieren un comportamiento oscilatorio. En la sección 3.4 mostramos que la aproximación variacional también predice que LN1 y LN2 tienen soluciones que permanecen atrapadas cerca del origen, y soluciones que logran escapar de él. Además, en el caso de LN2 las ecuaciones variacionales proveen una clara explicación para la existencia de estos dos tipos de soluciones. En la sección 3.5 mostramos que la ecuación LN2 permite la propagación de breathers que comienzan su movimiento en puntos que están alejados del origen. Se muestra que los pulsos no son afectados de manera significativa si pasan a través del origen en un tiempo posterior. Además, en esta sección estudiamos las colisiones de dos breathers que obedecen la ecuación LN2, y encontramos que estos breathers son soluciones robustas que resisten las colisiones.

De los dos modelos presentados en el capítulo 3, LN2 tiene cuatro características importantes que la hacen preferible a LN1:

- a) LN2 tiene solo dos linealidades, y por lo tanto es más simple que LN1,
- b) las soluciones que se alejan del origen de LN2 logran sobrevivir indefinidamente, y sus soluciones adquieren un comportamiento oscilatorio (por el contrario, las soluciones que se alejan del origen de LN1 están condenadas a desaparecer cuando $V_0 = 2$, y sus amplitudes disminuyen continuamente),
- c) en el caso de LN2 la aproximación variacional permite obtener una clara explicación para la existencia de soluciones atrapadas y soluciones que logran escapar, mientras que en LN1 tales explicaciones no pudieron ser encontradas, y
- d) en LN2 es posible generar soluciones de onda solitaria interesantes que permanecen oscilando en una vecindad del origen mientras que en LN1 tales soluciones no parecen existir. Además, LN2 permite la propagación de breathers que son lo suficientemente robustos para resistir colisiones.

4.2. Conclusiones

Finalmente, hacemos una recopilación de todos los resultados obtenidos en este trabajo:

1. Se generalizó el principio de mínima acción para que sea aplicable a integrales de acción en las cuales la lagrangiana no solo depende de funciones $u(x, t)$ y $u^*(x, t)$ sino también de las siguientes variables integrales:

$$\eta_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x')|u(x', t)|^2 dx' \quad (4.1)$$

$$\eta_2(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x')u(x', t)u_x^*(x', t)dx' \quad (4.2)$$

$$\eta_3(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x')u(x', t)u_x(x', t)dx' \quad (4.3)$$

$$\eta_4(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x')u^2(x', t)dx' \quad (4.4)$$

es decir, para una lagrangiana de la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_t, u_x, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, u^*, u_t^*, u_x^*, \eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*, \eta_4^*) \quad (4.5)$$

Se obtuvo que la forma de las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a este tipo de lagrangianas es la siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) \\ & + u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(x', t)R(x' - x)dx' + u_x^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}(x', t)R(x' - x)dx' \\ & - u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t)R(x' - x)dx' - u_x^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t)R(x' - x)dx' \\ & - u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3}(x', t)R(x' - x)dx' + 2u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4}(x', t)R(x' - x)dx' = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

o bien su compleja conjugada:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x^*} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} \right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}^*} \right) \\ & + u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1^*}(x', t)R(x' - x)dx' + u_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t)R(x' - x)dx' \\ & - u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}(x', t)R(x' - x)dx' - u_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}(x', t)R(x' - x)dx' \\ & - u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3^*}(x', t)R(x' - x)dx' + 2u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4^*}(x', t)R(x' - x)dx' \\ & = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

2. Encontramos y estudiamos una generalización de la ecuación cmKdV, a la que llamamos Icm-KdK-I:

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - \gamma u_x \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') |u(x', t)|^2 dx' = 0 \quad (4.8)$$

que aunque es una generalización directa, tiene la desventaja de que no puede ser deducida de una lagrangiana. Sin embargo, encontramos otras tres generalizaciones que sí se pueden deducir de una lagrangiana utilizando el principio de mínima acción, que son las ecuaciones Icm-KdV-II, III y IV:

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - \frac{\gamma}{2} u_x \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x') |u(x', t)|^2 dx' - \frac{\gamma}{2} u \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x') u^* u_x dx' = 0 \quad (4.9)$$

$$u_t - \epsilon u_{3x} - \gamma u^* \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x') u(x', t) u_x(x', t) dx' = 0 \quad (4.10)$$

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - \gamma_1 u_x \int_{-\infty}^{\infty} R_1 |u|^2 dx' - \gamma_1 u \int_{-\infty}^{\infty} R_1 u^* u_x dx' - \gamma_2 u^* \int_{-\infty}^{\infty} R_2 u u_x dx' = 0 \quad (4.11)$$

respectivamente.

3. Se encontró un nuevo tipo de equivalencia entre lagrangianas, las cuales no se relacionan entre sí en las formas conocidas en el pasado. Debido a que el teorema de Fubini es necesario para probar que este tipo de Lagrangianas son equivalentes, sugerimos llamarla “F-equivalencia”.
4. Se resolvieron numéricamente las distintas generalizaciones de la ecuación cmKdV y se compararon las soluciones con la ecuación cmKdV tradicional. Las soluciones numéricas revelaron las similitudes y diferencias que presentan las generalizaciones de la ec. cmKdV con la ec. cmKdV, dentro de estas similitudes tenemos que una de las ecuaciones tiene pulsos que avanzan con alturas y velocidades constantes (como los solitones verdaderos), y dentro de las diferencias, está el hecho de que las ecs. Icm-KdV-I y III tienen solitones cuyas alturas van cayendo, y las velocidades no son constantes, algo inusual en el estudio de los solitones. Los resultados numéricos, también sugirieron que la ec. Icm-KdV-II es el modelo más satisfactorio de las cuatro variantes no locales estudiadas.
5. Se generalizó el Teorema de Noether para que sea aplicable a lagrangianas de la forma (4.5), y se encontró que todas las ecuaciones, incluida la cmKdV normal, conservan la energía y el momento:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\epsilon |u|^2) dx \quad (4.12)$$

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} [i(uu_x^* - u^*u_x)] dx \quad (4.13)$$

respectivamente. Además, en las ecuaciones Icm-KdV-II a IV se conserva la Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i\epsilon(uu_{xxx}^* - u^*u_{xxx}) + i\delta_1(uu_x^* - u^*u_x) \int R|u|^2 dx' \right. \\ \left. + i\delta_2|u|^2 \left(\int Ruu_x^* dx' - \int Ru^*u_x dx' \right) \right. \\ \left. - i\delta_3 \left((u^*)^2 \int Ruu_x dx' - u^2 \int Ru^*u_x^* dx' \right) \right. \\ \left. + i\delta_4 \left(u^*u_x^* \int Ru^2 dx' - uu_x \int R(u^*)^2 dx' \right) \right\} dx \quad (4.14) \end{aligned}$$

Debido a las lagrangianas equivalentes, como se explico en la sección 2.3, existen nueve Hamiltonianas diferentes, para la ecuación Icm-KdV-IV. Por otro lado, si tomamos $\delta_3 = \delta_4 = 0$ obtendríamos las Hamiltonianas para la ec. Icm-KdV-II, y si tomamos $\delta_3 = \delta_4 = 0$ obtendríamos las Hamiltonianas para la ec. Icm-KdV-III.

6. Encontramos una solución cuasi-analítica de la ec. Icm-Kdv-II:

$$u(x, t) = A \operatorname{sech} \left(\frac{x - vt}{w} \right) e^{i(kx - ht)} \quad (4.15)$$

donde $f(w)$ es la función:

$$f(w) = 1 - \alpha(w + \gamma)^{-\beta} \quad (4.16)$$

siendo $\alpha = 0.05752$, $\beta = 2.00017$ y $\gamma = 0.16$, y los parámetros A, w, v, k y h satisfacen las siguientes tres condiciones:

$$6\epsilon - A^2 w^2 \gamma f(w) = 0 \quad (4.17)$$

$$h - \epsilon k^3 + \frac{3\epsilon k}{w^2} = 0 \quad (4.18)$$

$$vw^2 + \epsilon - 3\epsilon k^2 w^2 = 0 \quad (4.19)$$

Además, como tenemos cinco parámetros pero sólo tres condiciones, dos de los parámetros pueden ser escogidos libremente.

7. Aplicamos el método variacional para obtener información acerca del comportamiento de las ondas solitarias y en conjunto con la solución cuasi-analítica pudimos entender el comportamiento de los solitones perturbados durante el periodo transitorio.
8. Generalizamos el principio de mínima acción para que sea aplicable a integrales de acción en las cuales la lagrangiana no solo depende de funciones $u(x, t)$ y $u^*(x, t)$ sino también de $u(-x, t)$ y $u^*(-x, t)$, es decir, para una lagrangiana de la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u(x, t), u_t, u_x, u(-x, t), u^*(x, t), u_t^*, u_x^*, u^*(-x, t)) \quad (4.20)$$

notemos que las funciones u_t y u_x están evaluadas en el punto (x, t) .

Se obtuvo que la forma de las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a este tipo de lagrangianas es la siguiente:

$$\frac{\partial L}{\partial u} + \left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} = 0 \quad (4.21)$$

o bien su compleja conjugada:

$$\frac{\partial L}{\partial u^*} + \left[\frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} \right]_{x=-x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t^*} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x^*} = 0 \quad (4.22)$$

9. Estudiamos y encontramos dos generalizaciones de la ecuación AM, a las que llamamos LN1 y LN2:

$$iu_t - u_{xx} - \frac{1}{2}u^2(x, t)u^*(-x, t) - \left(|u|^2 + \frac{1}{2}|u(-x, t)|^2 \right) u(-x, t) = 0 \quad (4.23)$$

$$iu_t - u_{xx} - (|u(-x, t)|^2 + |u(x, t)|^2) u(x, t) = 0 \quad (4.24)$$

respectivamente.

10. Encontramos una generalización no local de la ec. NLS (con una no-localidad del tipo de Ablowitz y Musslimani), que sí tiene un significado físico claro e interesante (a diferencia de la ec. AM, que no tiene un significado físico claro).
11. Se resolvió numéricamente la ecuación AM así como sus dos generalizaciones. Las soluciones numéricas revelaron que los tres modelos tienen soluciones de onda solitaria que se mueven, y que en cada uno de estos modelos existen dos tipos de pulsos que se mueven:

- Pulsos que permanecen atrapados en el origen ($x = 0$).

- Pulsos que logran escapar del origen.

Los resultados numéricos también sugirieron que la ecuación LN2 es el modelo más satisfactorio, debido a que en este modelo las soluciones que se alejan del origen logran sobrevivir indefinidamente, y sus soluciones adquieren un comportamiento oscilatorio.

12. Se generalizó el Teorema de Noether para que sea aplicable a lagrangianas de la forma (4.20), y se encontraron las siguientes leyes de conservación para las ecuaciones LN1 y LN2:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} i (u u_x^* - u^* u_x) dx \right) = 0 \quad (4.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx \right) = 0 \quad (4.26)$$

La primera ley de conservación se asocia al momento y la segunda se asocia a la energía, es importante mencionar que estas leyes de conservación coinciden con las encontradas para la NLS. Sin embargo, la ley de conservación que sí cambia es la asociada a la Hamiltoniana que en el caso de LN1 es:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \{ |u_x|^2 - |u|^2 \operatorname{Re} [u(x, t) u^*(-x, t)] \} dx \right) = 0 \quad (4.27)$$

y en el caso de LN2 es:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left[|u_x|^2 - \frac{1}{2} |u|^2 (|u(-x, t)|^2 + |u(x, t)|^2) \right] dx \right) = 0 \quad (4.28)$$

13. Aplicamos el método variacional para obtener información acerca del comportamiento de las ondas solitarias que obedecen la ecuación LN2 y logramos entender la razón de la existencia de los dos tipos de soluciones observadas en las soluciones numéricas.
14. Estudiamos la propagación de breathers que obedecen la ecuación LN2, que comienzan su movimiento en puntos que están alejados del origen y encontramos que los pulsos no son afectados de manera significativa cuando pasan a través del origen en un tiempo posterior.
15. Estudiamos colisiones entre dos breathers que obedecen la ecuación LN2 y encontramos que estos breathers son soluciones robustas que resisten las colisiones.

Apéndices

Sobre la interpretación Física de LN2

Consideremos la ecuación:

$$iu_z + \epsilon u_{tt} + \gamma(|u(z, t)|^2 + \sigma|u(z, -t)|^2)u(z, t) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Ahora definamos $v(z, t)$ así:

$$v(z, t) = u(z, -t) \quad (\text{A.2})$$

con la definición (A.2) la ec. (A.1) se puede escribir así:

$$iu_z + \epsilon v_{tt} + \gamma(|u(z, t)|^2 + \sigma|v(z, t)|^2)u(z, t) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Ahora nos preguntamos: ¿Será posible escribir una EDP que cumpla $v(z, t)$?
 Sí. Primero debemos hacer el cambio de variable $t \rightarrow -t$ en (A.1) y obtenemos:

$$i \frac{\partial}{\partial z} u(z, -t) + \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(z, -t) + \gamma(|u(z, -t)|^2 + \sigma|u(z, t)|^2)u(z, -t) = 0 \quad (\text{A.4})$$

y utilizando (A.2) esta ec. se puede reescribir así:

$$iv_z + \epsilon v_{tt} + \gamma(|v(z, t)|^2 + \sigma|u(z, t)|^2)v(z, t) = 0 \quad (\text{A.5})$$

notemos que en la ecuación (A.5) la variable t es simplemente la variable que aparece en $v(z, t)$. Aunque para obtener (A.5) aplicamos el cambio de variable $t \rightarrow -t$ en (A.1), en la ec. (A.2) podemos “olvidar” que usamos ese cambio de variable para obtener esta ec. (A.5).

Por lo tanto, el sistema (A.1)-(A.2) es equivalente al sistema (A.3)-(A.5)

Sobre las condiciones iniciales

Consideremos nuevamente la ec. (A.1) y elijamos libremente la condición inicial $u(z = 0, t)$, sin embargo, una vez elegida la condición para u , en automático queda definida para $v(z = 0, t)$, pues (A.2) implica que:

$$v(z = 0, t) = u(z = 0, -t) \quad (\text{A.6})$$

Por lo tanto, el problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} iu_z + \epsilon u_{tt} + \gamma(|u|^2 + \sigma|u(z, -t)|^2)u &= 0 \\ u(z = 0, t) &= f(t) \end{aligned} \tag{A.7}$$

es equivalente al problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} iu_z + \epsilon u_{tt} + \gamma(|u|^2 + \sigma|v|^2)u &= 0 \\ iv_z + \epsilon v_{tt} + \gamma(|v|^2 + \sigma|u|^2)v &= 0 \\ u(z = 0, t) &= f(t) \\ v(z = 0, t) &= u(z = 0, -t) = f(-t) \end{aligned} \tag{A.8}$$

de manera que la solución $u(z, t)$ del problema (A.7) será la misma solución $u(z, t)$ que obtendremos al resolver el problema (A.8), y la solución $v(z, t)$ de (A.8) cumplirá (para toda z) que:

$$v(z, t) = u(z, -t) \tag{A.9}$$

pues el sistema (A.3)-(A.5) se obtuvo precisamente definiendo $v(z, t)$ mediante (A.9).

Conservación del momento y la energía de la ec. Icm-KdV-I

Partiendo de la ecuación Icm-KdV-I:

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - \gamma u_x \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x')|u(x',t)|^2 dx' = 0 \quad (\text{B.1})$$

queremos demostrar que la energía y el momento son cantidades conservadas:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} -2\epsilon|u|^2 dx \quad (\text{B.2})$$

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} i(uu_x^* - u^*u_x) dx \quad (\text{B.3})$$

Conservación de la energía

Es decir queremos demostrar que:

$$\frac{d}{dt}E = 0 \quad (\text{B.4})$$

para ello, realizamos un cálculo directo:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} -2\epsilon|u|^2 dx = 0 \quad (\text{B.5})$$

luego intercambiamos la derivada con la integral y usamos que $|u|^2 = uu^*$, además dado que lo que queremos obtener es cero, el factor -2ϵ no es relevante en el cálculo.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (uu^*) dx \quad (\text{B.6})$$

podemos utilizar la regla de derivación para el producto

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (u_t u^* + u u_t^*) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (u_t u^* + c.c.) dx \quad (\text{B.7})$$

donde $c.c.$ denota el complejo conjugado y de la ec. (B.1) podemos despejar u_t , luego sustituimos en (B.7) y obtenemos:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\epsilon u_{xxx} + \gamma u_x \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') |u(x',t)|^2 dx' \right] u^* + c.c. \right\} dx \quad (\text{B.8})$$

separando esta integral en dos integrales:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon u^* u_{xxx} dx + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} u^* u_x \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') |u(x',t)|^2 dx' dx + c.c \quad (\text{B.9})$$

la primera integral que aparece en la ec. (B.9):

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon u^* u_{xxx} dx + c.c \quad (\text{B.10})$$

es el término usual que aparece en la ec. cmKdV y después de integrar por partes dos veces es igual a cero:

$$I_1 = 0 \quad (\text{B.11})$$

entonces nos concentraremos en la segunda integral que aparece en ec. (B.9):

$$I_2 = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} u^* u_x \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') u(x') u^*(x') dx' dx + c.c \quad (\text{B.12})$$

la cual se puede reescribir como:

$$I_2 = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left[u^* \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') u(x') u^*(x') dx' \right] \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left[u \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') u(x') u^*(x') dx' \right] \frac{\partial u^*}{\partial x} dx \quad (\text{B.13})$$

teniendo en cuenta que la función $u(x,t) = 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ y realizando una integración por partes solo al primer término obtenemos:

$$I_2 = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial}{\partial x} \left[u^* \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') u(x') u^*(x') dx' \right] dx \\ + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left[u \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') u(x') u^*(x') dx' \right] \frac{\partial u^*}{\partial x} dx \quad (\text{B.14})$$

resolviendo la derivada y quitando el paréntesis:

$$\begin{aligned}
I_2 = & -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} uu_x^* \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x')u(x')u^*(x')dx' \\
& - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} uu^* \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x')u(x')u^*(x')dx' dx \\
& + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left[u \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x')u(x')u^*(x')dx' \right] \frac{\partial u^*}{\partial x} dx \quad (\text{B.15})
\end{aligned}$$

pero el primer y tercer término son iguales, así que se cancelan, y en el segundo término la parcial se puede intercambiar con la integral, además solo afecta a $R(x-x')$, obtenemos:

$$I_2 = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} uu^* \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(x-x')u(x')u^*(x')dx' dx \quad (\text{B.16})$$

y teniendo en cuenta que R es una función real simétrica se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x} R(x-x') = -\frac{\partial}{\partial x'} R(x-x') \quad (\text{B.17})$$

por lo que podemos reescribir la ec. (B.16) como:

$$I_2 = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} uu^* \int_{-\infty}^{+\infty} u(x')u^*(x') \frac{\partial}{\partial x'} R(x-x') dx' dx \quad (\text{B.18})$$

teniendo en cuenta que la función $u(x, t) = 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ e integrando por partes la integral interior

$$I_2 = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} uu^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x'} [u(x')u^*(x')] R(x-x') dx' dx \quad (\text{B.19})$$

u y u^* son funciones solamente de x entonces pueden entrar a la integral:

$$I_2 = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x'} [u(x')u^*(x')] uu^* R(x-x') dx' dx \quad (\text{B.20})$$

intercambiando el orden de integración

$$I_2 = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x'} [u(x')u^*(x')] uu^* R(x-x') dx dx' \quad (\text{B.21})$$

y sacando de la integral interior lo que no depende de x :

$$I_2 = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x'} [u(x')u^*(x')] \int_{-\infty}^{+\infty} uu^* R(x-x') dx dx' \quad (\text{B.22})$$

dado que la variable de integración es muda podemos intercambiar x por x' :

$$I_2 = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (uu^*) \int_{-\infty}^{+\infty} u(x')u^*(x')R(x-x')dx'dx \quad (\text{B.23})$$

resolviendo la derivada y separando las integrales:

$$I_2 = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} u_x u^* \int_{-\infty}^{+\infty} u(x')u^*(x')R(x-x')dx'dx' - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} uu_x^* \int_{-\infty}^{+\infty} u(x')u^*(x')R(x-x')dx'dx' \quad (\text{B.24})$$

que al compararla con (B.13) nos damos cuenta que es justamente $-I_2$ es decir:

$$I_2 = -I_2 \quad (\text{B.25})$$

por lo que:

$$I_2 = 0 \quad (\text{B.26})$$

con lo cual queda demostrada la ecuación (B.4) y por lo tanto la ec. Icm-KdV-I conserva la energía.

Conservación del momento

Es decir queremos demostrar que:

$$\frac{d}{dt}M = 0 \quad (\text{B.27})$$

para ello, realizamos un cálculo directo:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} i(uu_x^* - u^*u_x)dx = 0 \quad (\text{B.28})$$

luego intercambiamos la derivada con la integral y usamos que $|u|^2 = uu^*$, además dado que lo que queremos obtener es cero, el factor i no es relevante en el cálculo.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}(uu_x^* - u^*u_x)dx \quad (\text{B.29})$$

resolviendo la derivada:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (u_t u_x^* + uu_{xt}^* - u_t^* u_x - u^* u_{xt}) dx \quad (\text{B.30})$$

reescribiendo:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} [u_t u_x^* + u(u_t^*)_x - u_t^* u_x - u^*(u_t)_x] dx \quad (\text{B.31})$$

teniendo en cuenta que la función $u(x, t) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ y realizando una integración por partes al segundo y cuarto término obtenemos:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (u_t u_x^* - u_x u_t^* - u_t^* u_x + u_x^* u_t) dx \quad (\text{B.32})$$

simplificando

$$\frac{I}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} (u_t u_x^* - u_t^* u_x) dx \quad (\text{B.33})$$

de la ec. (B.1) podemos despejar u_t y al conjugarla obtenemos u_t^* , luego sustituimos en (B.33) y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{I}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\epsilon u_{xxx} + \gamma u_x \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') |u(x', t)|^2 dx' \right] u_x^* \right. \\ \left. - \left[\epsilon u_{xxx}^* + \gamma u_x^* \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') |u(x', t)|^2 dx' \right] u_x \right\} dx \quad (\text{B.34}) \end{aligned}$$

la segunda y cuarta integral, son iguales, así que se cancelan:

$$\frac{I}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} [(\epsilon u_{xxx}) u_x^* - (\epsilon u_{xxx}^*) u_x] dx \quad (\text{B.35})$$

pero este es el término usual que aparece en la ec. cmKdV y después de integrar por partes dos veces es igual a cero:

$$I = 0 \quad (\text{B.36})$$

con lo cual queda demostrada la ecuación (B.27) y por lo tanto la ec. Icm-KdV-I conserva el momento.

Deducción de las ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange nos permiten determinar la evolución de algún sistema físico y en mecánica lagrangiana tienen la siguiente forma:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (\text{C.1})$$

donde q es una coordenada generalizada y \dot{q} es la derivada con respecto al tiempo de esa coordenada generalizada, tener una ecuación de Euler-Lagrange es equivalente a tener las ecuaciones de movimiento de cualquier sistema.

La ecuación de Euler-Lagrange se puede deducir a partir del principio variacional o también conocido como el principio de mínima acción, o bien en el libro de Mecánica clásica de Goldstein [79] podemos encontrar lo siguiente:

El movimiento del sistema del tiempo t_1 al tiempo t_2 es tal que la integral de línea (llamada acción o integral de acción),

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

donde L es la lagrangiana del sistema, tiene un valor estacionario para la actual trayectoria del movimiento.

C.1. Ecuación de Euler-Lagrange para la ecuación Icm-KdV-IV

Suponiendo que la densidad lagrangiana es una función de la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_t, u_x, u_{xxx}, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, u^*, u_t^*, u_x^*, u_{xxx}^*, \eta_2^*, \eta_3^*, \eta_4^*) \quad (\text{C.2})$$

donde η_1 y η_2 están definidas por las ecs. (2.10) y (2.11) respectivamente:

$$\eta_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x') |u(x', t)|^2 dx' \quad (\text{C.3})$$

$$\eta_2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x') u(x', t) u_x^*(x', t) dx' \quad (\text{C.4})$$

mientras que η_3 y η_4 están definidas por las ecs. (2.18) y (2.19) respectivamente:

$$\eta_3 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x') u(x', t) u_x(x', t) dx' \quad (\text{C.5})$$

$$\eta_4 = \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x') u^2(x', t) dx' \quad (\text{C.6})$$

lo primero que notamos es que la cantidad η_1 es real.

Si ahora consideramos una función variada, en donde la variación es controlada por el parámetro α :

$$u(x, t, \alpha) = u(x, t) + \alpha \delta u(x, t) \quad (\text{C.7})$$

$$u^*(x, t, \alpha) = u^*(x, t) + \alpha \delta u^*(x, t) \quad (\text{C.8})$$

siendo δu y δu^* variaciones arbitrarias, entonces el principio de mínima acción, establece que si la integral de acción se define como:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} dx dt \quad (\text{C.9})$$

entonces:

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (\text{C.10})$$

Considerando una lagrangiana de la forma (C.2), la derivada con respecto a α de la integral de acción quedaría como:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} dx dt \quad (\text{C.11})$$

utilizando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*} \frac{\partial \eta_2^*}{\partial \alpha} \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3^*} \frac{\partial \eta_3^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4} \frac{\partial \eta_4}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4^*} \frac{\partial \eta_4^*}{\partial \alpha} \right) dxdt \quad (\text{C.12}) \end{aligned}$$

los puntos suspensivos corresponden a la parte usual en la ecuación cmKdV, en esta sección sólo mostraremos la parte que involucra las variables integrales.

Básicamente hay que calcular cuatro integrales:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha} dxdt \quad (\text{C.13})$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*} \frac{\partial \eta_2^*}{\partial \alpha} \right) dxdt \quad (\text{C.14})$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3^*} \frac{\partial \eta_3^*}{\partial \alpha} \right) dxdt \quad (\text{C.15})$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4} \frac{\partial \eta_4}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4^*} \frac{\partial \eta_4^*}{\partial \alpha} \right) dxdt \quad (\text{C.16})$$

comenzamos por calcular:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') \frac{\partial}{\partial \alpha} \{ [u(') + \alpha \delta u(')] [u^*(') + \alpha \delta u^*(')] \} dx' \quad (\text{C.17})$$

aquí se ha usado $u(') = u(x', t)$ como una notación simplificada que indica que la función u está evaluada en (x', t) .

Resolviendo la derivada y evaluando en $\alpha = 0$ en la ec. (C.17) obtenemos:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') [u^*(') \delta u(') + u(') \delta u^*(')] dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') u^*(') \delta u(') dx' + \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') u(') \delta u^*(') dx' \quad (\text{C.18}) \end{aligned}$$

ahora vamos a analizar la integral que contiene al factor correspondiente a $\delta u(')$, ya que de ahí saldrá una de las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL), y la otra ecuación de EL (la compleja conjugada) sale de considerar el término $\delta u^*(')$. Sea I_{11} la parte de I_1 que involucra únicamente a $\delta u(')$:

$$I_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1} \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') u^*(x', t) \delta u(x', t) dx' dxdt \quad (\text{C.19})$$

Debido a que la variable de integración es muda podemos hacer el intercambio $x \leftrightarrow x'$

$$I_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(x', t) \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') u^*(x, t) \delta u(x, t) dx dx' dt \quad (\text{C.20})$$

que se puede reescribir como:

$$I_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(x', t) R(x - x') u^*(x, t) \delta u(x, t) dx dx' dt \quad (\text{C.21})$$

luego intercambiamos el orden de integración primero respecto a x' y luego respecto a x y a t :

$$I_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(x', t) R(x - x') dx' u^*(x, t) \delta u(x, t) dx dt \quad (\text{C.22})$$

es decir, el término que se factoriza con $\delta u(x, t)$ y que aparecerá en la ecuación de EL es:

$$T_{\eta_1} = u^*(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(x', t) R(x - x') dx' \quad (\text{C.23})$$

Ahora realizaremos el mismo procedimiento que aplicamos para η_1 , pero esta vez lo aplicaremos a η_2 comenzamos por:

$$\left. \frac{\partial \eta_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') [u_x^*(x', t) \delta u(x', t) + u^*(x', t) (\delta u)_x(x', t)] dx' \quad (\text{C.24})$$

$$\left. \frac{\partial \eta_2^*}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') [u_x(x', t) (\delta u)^*(x', t) + u^*(x', t) (\delta u)_x(x', t)] dx' \quad (\text{C.25})$$

Recordando que la ec. (C.24) va multiplicada por $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}$ y la ec. (C.25) por $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}$ y conservando unicamente la parte que involucra a δu definimos:

$$I_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2} \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') u_x^*(x', t) \delta u(x', t) dx' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*} \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') u^*(x', t) (\delta u)_x(x', t) dx' \right] dx dt \quad (\text{C.26})$$

luego seguimos el mismo procedimiento utilizado para pasar de la ec. (C.19) a la ec. (C.22), y obtenemos:

$$I_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}(x', t) R(x - x') dx' u_x^*(x, t) \delta u(x, t) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t) R(x - x') dx' u^*(x, t) (\delta u)_x(x, t) dx dt \quad (\text{C.27})$$

en el primer término de la expresión anterior ya está factorizado δu , pero en el segundo término es necesario realizar una integración por partes, teniendo en cuenta que la función $u(x, t) = 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ e integrando por partes obtenemos:

$$I_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}(x', t) R(x - x') dx' u_x^*(x, t) \delta u(x, t) dx dt \\ - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t) R(x - x') dx' u^*(x, t) \right] \delta u(x, t) dx dt \quad (\text{C.28})$$

es decir el término que aparecerá en la ecuación de EL es:

$$T_{\eta_2} = u_x^*(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}(x', t) R(x - x') dx' \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[u^*(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t) R(x - x') dx' \right] \quad (\text{C.29})$$

Ahora realizaremos el mismo procedimiento que aplicamos para η_1 , pero esta vez lo aplicaremos a η_3 comenzamos por:

$$\left. \frac{\partial \eta_3}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') [u_x(') \delta u(') + u(') (\delta u)_x(')] dx' \quad (\text{C.30})$$

$$\left. \frac{\partial \eta_3^*}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') [u_x^*(') \delta u^*(') + u^*(') (\delta u^*)_x(')] dx' \quad (\text{C.31})$$

Recordando que la ec. (C.30) va multiplicada por $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3}$ y conservando unicamente la parte que involucra a δu definimos:

$$I_{31} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3} \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') u_x(x', t) \delta u(x', t) dx' \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3} \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') u(x', t) (\delta u)_x(x', t) dx' \right] dx dt \quad (\text{C.32})$$

luego seguimos el mismo procedimiento utilizado para pasar de la ec. (C.26) a la ec. (C.28), y obtenemos:

$$I_{31} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3}(x', t) R(x - x') dx' u_x(x, t) \delta u(x, t) dx dt \\ - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3}(x', t) R(x - x') dx' u(x, t) \right] \delta u(x, t) dx dt \quad (\text{C.33})$$

resolviendo la derivada, se puede simplificar como:

$$I_{31} = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3}(x', t) R(x - x') \right] dx' u(x, t) \delta u(x, t) dx dt \quad (\text{C.34})$$

es decir el término que aparecerá en la ecuación de EL es:

$$T_{\eta_3} = -u(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3}(x', t) R(x - x') \right] dx' \quad (\text{C.35})$$

Finalmente, realizaremos el mismo procedimiento que aplicamos para η_1 , pero esta vez lo aplicaremos a η_4 comenzamos por:

$$\left. \frac{\partial \eta_4}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') [2u'(t) \delta u'(t)] dx' \quad (\text{C.36})$$

$$\left. \frac{\partial \eta_4^*}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') [2u^*(t) (\delta u)^*(t)] dx' \quad (\text{C.37})$$

Recordando que la ec. (C.36) va multiplicada por $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4}$ y conservando unicamente la parte que involucra a δu definimos:

$$I_{41} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4} \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') 2u(x', t) \delta u(x', t) dx' dx dt \quad (\text{C.38})$$

luego seguimos el mismo procedimiento utilizado para pasar de la ec. (C.19) a la ec. (C.22), y obtenemos:

$$I_{41} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4}(x', t) R(x - x') dx' 2u(x, t) \delta u(x, t) dx dt \quad (\text{C.39})$$

es decir, el término que se factoriza con $\delta u(x, t)$ y que aparecerá en la ecuación de EL es:

$$T_{\eta_4} = 2u(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4}(x', t) R(x - x') dx' \quad (\text{C.40})$$

Juntando los resultados obtenidos en las ecuaciones (C.23), (C.29), (C.35) y (C.40) y agregando la parte usual correspondiente a la ec. cmKdV obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange (2.24):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) \\ & + u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(x', t) R(x' - x) dx' + u_x^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}(x', t) R(x' - x) dx' \\ & - u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t) R(x' - x) dx' - u_x^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t) R(x' - x) dx' \\ & - u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3}(x', t) R(x' - x) dx' + 2u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4}(x', t) R(x' - x) dx' = 0 \quad (\text{C.41}) \end{aligned}$$

C.2. Ecuación de Euler-Lagrange para LN1 y LN2

Suponiendo que la densidad lagrangiana es una función de la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_t, u_x, u(-x, t), u^*, u_t^*, u_x^*, u^*(-x, t)) \quad (\text{C.42})$$

consideramos una función variada, en donde la variación es controlada por el parámetro α :

$$u(x, t, \alpha) = u(x, t) + \alpha \delta u(x, t) \quad (\text{C.43})$$

$$u^*(x, t, \alpha) = u^*(x, t) + \alpha \delta u^*(x, t) \quad (\text{C.44})$$

siendo δu y δu^* variaciones arbitrarias, entonces el principio de mínima acción, establece que si la integral de acción se define como:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} dx dt \quad (\text{C.45})$$

entonces:

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (\text{C.46})$$

Considerando una lagrangiana de la forma (C.42), la derivada con respecto a α de la integral de acción quedaría como:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} dx dt \quad (\text{C.47})$$

utilizando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} & \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \frac{\partial u_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(-x, t)} \frac{\partial u(-x, t)}{\partial \alpha} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} \frac{\partial u^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} \frac{\partial u_t^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x^*} \frac{\partial u_x^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*(-x, t)} \frac{\partial u^*(-x, t)}{\partial \alpha} \right] dx dt \quad (\text{C.48}) \end{aligned}$$

Básicamente hay que calcular cuatro integrales:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} \frac{\partial u^*}{\partial \alpha} \right) dx dt \quad (\text{C.49})$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} \frac{\partial u_t^*}{\partial \alpha} \right) dx dt \quad (\text{C.50})$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \frac{\partial u_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x^*} \frac{\partial u_x^*}{\partial \alpha} \right) dx dt \quad (\text{C.51})$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(-x, t)} \frac{\partial u(-x, t)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(-x, t)^*} \frac{\partial u(-x, t)^*}{\partial \alpha} \right] dx dt \quad (\text{C.52})$$

las primeras tres integrales corresponden a la parte usual en la ecuación NLS, en esta sección sólo mostraremos únicamente la parte nueva que involucra $u(-x, t)$. Así que comenzamos por calcular:

$$\frac{\partial u(-x, t, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} [u(-x, t) + \alpha \delta u(-x, t)] = \delta u(-x, t) \quad (\text{C.53})$$

$$\frac{\partial u^*(-x, t, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} [u^*(-x, t) + \alpha \delta u^*(-x, t)] = \delta u^*(-x, t) \quad (\text{C.54})$$

evaluando en $\alpha = 0$ y sustituyendo en la ec. (C.52), obtenemos:

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(-x, t)} \delta u(-x, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(-x, t)^*} \delta u^*(-x, t) \right] dx dt \quad (\text{C.55})$$

conservando unicamente la parte que involucra a δu definimos:

$$I_{41} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(-x, t)}(x, t) \delta u(-x, t) dx dt \quad (\text{C.56})$$

Sea $y = -x$, entonces $dy = -dx$ y cuando $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow -\infty$, pero cuando $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow \infty$, es decir podemos escribir I_{41} como:

$$I_{41} = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(-x, t)} \Big|_{x=-y} \delta u(y, t) dy dt \quad (\text{C.57})$$

utilizamos el signo menos, para cambiar los limites de integración sobre y y renombramos $y = x$:

$$I_{41} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(-x, t)} \Big|_{x=-x} \delta u(x, t) dx dt \quad (\text{C.58})$$

es decir, el término que se factoriza con $\delta u(x, t)$ y que aparecerá en la ecuación de EL es:

$$T_{u(-x, t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(-x, t)} \Big|_{x=-x} \quad (\text{C.59})$$

Sumando este resultado con la parte usual correspondiente a la ec. NLS obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange (3.3):

$$\frac{\partial L}{\partial u} + \left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} = 0 \quad (\text{C.60})$$

Principio de mínima acción

Sustituyendo la lagrangiana en la ecuación de Euler de Lagrange podemos simplificar y obtener la ecuación de movimiento, dicho de otra manera obtenemos la ecuación que determinará como evoluciona el sistema. En este apéndice veremos que esas ecuaciones son justamente las ecuaciones Icm-Kdv-II, III y IV y las ecuaciones LN1 y LN2.

D.1. Deducción de la ec. Icm-KdV-II

Partiendo de la lagrangiana (2.7):

$$\mathcal{L} = i(u^*u_t - uu_t^*) + i\epsilon(uu_{xxx}^* - u^*u_{xxx}) + i\frac{\gamma}{2}(uu_x^* - u^*u_x) \int R|u|^2 dx' \quad (\text{D.1})$$

utilizando la definición (2.10) podemos reescribirla como:

$$\mathcal{L} = i(u^*u_t - uu_t^*) + i\epsilon(uu_{xxx}^* - u^*u_{xxx}) + i\frac{\gamma}{2}(uu_x^* - u^*u_x)\eta_1 \quad (\text{D.2})$$

y utilizando la ecuación de Euler-Lagrange (2.12) pero considerando que en esta ocasión la lagrangiana solo depende de η_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) \\ + u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(x', t) R(x' - x) dx' = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

o bien su compleja conjugada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x^*} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} \right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}^*} \right) \\ + u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(x', t) R(x' - x) dx' = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

calculamos cada término que aparece en la ecuación conjugada:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} = iu_t - i\epsilon u_{3x} - i\frac{\gamma}{2}u_x\eta_1 \quad (\text{D.5})$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x^*} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(i\frac{\gamma}{2}u\eta_1 \right) = -i\frac{\gamma}{2}(u_x\eta_1 + u\eta_{1x}) \quad (\text{D.6})$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (-iu) = iu_t \quad (\text{D.7})$$

$$-\frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}^*} \right) = -\frac{\partial^3}{\partial x^3} (i\epsilon u) = -i\epsilon u_{xxx} \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(x', t) R(x' - x) dx' = \\ u \int_{-\infty}^{+\infty} i\frac{\gamma}{2} [u(x', t)u_x^*(x', t) - u^*(x', t)u_x(x', t)] R(x' - x) dx' = \\ i\frac{\gamma}{2}u(\eta_2 - \eta_2^*) \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

ahora calculamos el término η_{1x} que aparece en la ec. (D.6):

$$\eta_{1x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x')u(x', t)u^*(x', t)dx' \quad (\text{D.10})$$

$$\eta_{1x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial R(x - x')}{\partial x} u(x', t)u^*(x', t)dx' \quad (\text{D.11})$$

utilizando la ec. (B.17) podemos reescribir esta ecuación como:

$$\eta_{1x} = - \int_{-\infty}^{\infty} u(x', t)u^*(x', t) \frac{\partial R(x - x')}{\partial x'} dx' \quad (\text{D.12})$$

teniendo en cuenta que la función $u(x, t) = 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ e integrando por partes obtenemos:

$$\eta_{1x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x'} [u(x', t)u^*(x', t)] R(x - x') dx' \quad (\text{D.13})$$

resolviendo la derivada:

$$\eta_{1x} = \int_{-\infty}^{\infty} [u_{x'}(x', t)u^*(x', t) + u(x', t)u_{x'}^*(x', t)] R(x - x') dx' \quad (\text{D.14})$$

notemos que:

$$u_{x'}(x', t) = \frac{\partial}{\partial x'} u(x', t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \Big|_{x=x'} = u_x(x', t) \quad (\text{D.15})$$

es decir, realizar un cambio de variable $x = x'$ y luego sacar la derivada parcial es equivalente a sacar primero la derivada parcial y luego evaluar en $x = x'$, y por lo tanto:

$$\eta_{1x} = \eta_2^* + \eta_2 \quad (\text{D.16})$$

Retomando el cálculo realizado para la ec. (D.4) y sumando resultados obtenidos en las ecs. (D.5)-(D.9), teniendo en cuenta el resultado de la ec. (D.16) obtenemos:

$$iu_t - i\epsilon u_{3x} - i\frac{\gamma}{2} u_x \eta_1 - i\frac{\gamma}{2} [u_x \eta_1 + u(\eta_2^* + \eta_2)] + iu_t - i\epsilon u_{xxx} + i\frac{\gamma}{2} u(\eta_2 - \eta_2^*) = 0 \quad (\text{D.17})$$

simplificando:

$$2iu_t - 2i\epsilon u_{3x} - i\gamma u_x \eta_1 - i\gamma u \eta_2^* = 0 \quad (\text{D.18})$$

dividiendo entre dos, multiplicando por $-i$ y sustituyendo los valores de η_1 y η_2 obtenemos justamente la ec. (2.6):

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - \frac{\gamma}{2} u_x \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x') |u(x', t)|^2 dx' - \frac{\gamma}{2} u \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x') u^* u_x dx' = 0 \quad (\text{D.19})$$

D.2. Deducción de la ec. Icm-KdV-IV

Partiendo de la lagrangiana (2.21):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i(u^* u_t - u u_t^*) + i\epsilon(u u_{xxx}^* - u^* u_{xxx}) + i\delta_1(u u_x^* - u^* u_x) \int R|u|^2 dx' \\ & + i\delta_2 |u|^2 \left(\int R u u_x^* dx' - \int R u^* u_x dx' \right) \\ & - i\delta_3 \left[(u^*)^2 \int R u u_x dx' - u^2 \int R u^* u_x^* dx' \right] \\ & + i\delta_4 \left[u^* u_x^* \int R u^2 dx' - u u_x \int R (u^*)^2 dx' \right]. \quad (\text{D.20}) \end{aligned}$$

utilizando las definiciones descritas en las ecs. (2.10), (2.11), (2.18) y (2.19) podemos reescribirla como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i(u^* u_t - u u_t^*) + i\epsilon(u u_{xxx}^* - u^* u_{xxx}) + i\delta_1(u u_x^* - u^* u_x) \eta_1 \\ & + i\delta_2 u u^* (\eta_2 - \eta_2^*) - i\delta_3 [(u^*)^2 \eta_3 - u^2 \eta_3^*] + i\delta_4 (u^* u_x^* \eta_4 - u u_x \eta_4^*). \quad (\text{D.21}) \end{aligned}$$

y utilizando la ecuación de Euler-Lagrange (2.24):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}} \right) \\
 & \quad + u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(x', t) R(x' - x) dx' + u_x^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}(x', t) R(x' - x) dx' \\
 & \quad - u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t) R(x' - x) dx' - u_x^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t) R(x' - x) dx' \\
 & \quad - u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3}(x', t) R(x' - x) dx' + 2u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4}(x', t) R(x' - x) dx' = 0 \quad (\text{D.22})
 \end{aligned}$$

o bien su compleja conjugada:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x^*} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} \right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}^*} \right) \\
 & \quad + u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(x', t) R(x' - x) dx' + u_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t) R(x' - x) dx' \\
 & \quad - u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}(x', t) R(x' - x) dx' - u_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}(x', t) R(x' - x) dx' \\
 & \quad - u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3^*}(x', t) R(x' - x) dx' + 2u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4^*}(x', t) R(x' - x) dx' = 0 \quad (\text{D.23})
 \end{aligned}$$

calculamos cada término que aparece en la ecuación conjugada:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} = iu_t - i\epsilon u_{xxx} - i\delta_1 u_x \eta_1 + i\delta_2 u (\eta_2 - \eta_2^*) - i\delta_3 (2u^* \eta_3) + i\delta_4 (u_x^* \eta_4) \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x^*} \right) &= - \frac{\partial}{\partial x} (i\delta_1 u \eta_1 + i\delta_4 u_x^* \eta_4) \\
 &= -i\delta_1 (u_x \eta_1 + u \eta_{1x}) - i\delta_4 (u_x^* \eta_4 + u^* \eta_{4x}) \quad (\text{D.25})
 \end{aligned}$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} (-iu) = iu_t \quad (\text{D.26})$$

$$- \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxx}^*} \right) = - \frac{\partial^3}{\partial x^3} (i\epsilon u) = -i\epsilon u_{xxx} \quad (\text{D.27})$$

$$\begin{aligned}
 u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_1}(x', t) R(x' - x) dx' &= \\
 i\delta_1 u \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x', t) u_x^*(x', t) - u^*(x', t) u_x(x', t)] R(x' - x) dx' &= \\
 i\delta_1 u (\eta_2 - \eta_2^*) \quad (\text{D.28})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2^*}(x', t) R(x' - x) dx' = \\
 - i\delta_2 u_x \int_{-\infty}^{+\infty} u(x', t) u^*(x', t) R(x' - x) dx' = -i\delta_2 u_x \eta_1 \quad (\text{D.29})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}(x', t) R(x' - x) dx' = \\
 - i\delta_2 u \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u(x', t) u^*(x', t) R(x' - x) dx' \right] = -i\delta_2 u \eta_{1x} \quad (\text{D.30})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - u_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_2}(x', t) R(x' - x) dx' = \\
 - i\delta_2 u_x \int_{-\infty}^{+\infty} u(x', t) u^*(x', t) R(x' - x) dx' = -i\delta_2 u_x \eta_1 \quad (\text{D.31})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_3^*}(x', t) R(x' - x) dx' = \\
 - i\delta_3 u^* \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x', t) R(x' - x) dx' \right] = -i\delta_3 u^* \eta_{4x} \quad (\text{D.32})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + 2u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_4^*}(x', t) R(x' - x) dx' = \\
 - i\delta_4 2u^* \int_{-\infty}^{+\infty} u(x', t) u_x(x', t) R(x' - x) dx' = -i\delta_4 2u^* \eta_3 \quad (\text{D.33})
 \end{aligned}$$

sumando los resultados obtenidos en las ecuaciones (D.24)-(D.33), la ec. de EL (D.23) nos queda como:

$$\begin{aligned}
 iu_t - i\epsilon u_{xxx} - i\delta_1 u_x \eta_1 + i\delta_2 u (\eta_2 - \eta_2^*) - i\delta_3 (2u^* \eta_3) + i\delta_4 (u_x^* \eta_4) \\
 - i\delta_1 (u_x \eta_1 + u \eta_{1x}) - i\delta_4 (u_x^* \eta_4 + u^* \eta_{4x}) + iu_t - i\epsilon u_{xxx} + i\delta_1 u (\eta_2 - \eta_2^*) \\
 - i\delta_2 u_x \eta_1 - i\delta_2 u \eta_{1x} - i\delta_2 u_x \eta_1 - i\delta_3 u^* \eta_{4x} - i\delta_4 2u^* \eta_3 = 0 \quad (\text{D.34})
 \end{aligned}$$

simplificando:

$$\begin{aligned}
 2iu_t - 2i\epsilon u_{xxx} + i\delta_1 (-u_x \eta_1 - u_x \eta_1 - u \eta_{1x} + u \eta_2 - u \eta_2^*) \\
 + i\delta_2 (u \eta_2 - u \eta_2^* - u_x \eta_1 - u \eta_{1x} - u_x \eta_1) + i\delta_3 (-2u^* \eta_3 - u^* \eta_{4x}) \\
 + i\delta_4 (u_x^* \eta_4 - u_x^* \eta_4 - u^* \eta_{4x} - 2u^* \eta_3) = 0 \quad (\text{D.35})
 \end{aligned}$$

utilizando el resultado obtenido en la ec. (D.16):

$$\eta_{1x} = \eta_2^* + \eta_2 \quad (\text{D.36})$$

y realizando un procedimiento similar al utilizado al obtener este resultado, obtenemos que:

$$\eta_{4x} = 2\eta_3 \quad (\text{D.37})$$

es decir la ec. (D.35) se puede simplificar como:

$$\begin{aligned} 2iu_t - 2i\epsilon u_{xxx} + i\delta_1 [-2u_x\eta_1 - u(\eta_2^* + \eta_2) + u\eta_2 - u\eta_2^*] \\ + i\delta_2 [u\eta_2 - u\eta_2^* - 2u_x\eta_1 - u(\eta_2^* + \eta_2)] + i\delta_3 (-2u^*\eta_3 - u^*2\eta_3) \\ + i\delta_4 (-u^*2\eta_3 - 2u^*\eta_3) = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

simplificando, multiplicando por $-i$ y dividiendo entre 2:

$$\begin{aligned} u_t - \epsilon u_{xxx} + \delta_1 (-u_x\eta_1 - u\eta_2^*) + \delta_2 (-u\eta_2^* - u_x\eta_1) \\ + \delta_3 (-2u^*\eta_3) + \delta_4 (-2u^*\eta_3) = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

simplificando:

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - (\delta_1 + \delta_2)(u_x\eta_1 + u\eta_2^*) - 2(\delta_3 + \delta_4)u^*\eta_3 = 0 \quad (\text{D.40})$$

escogiendo $\delta_1 + \delta_2 = \gamma_1$ y $2(\delta_3 + \delta_4) = \gamma_2$ y escribiendo explícitamente los valor de η_1 , η_2 y η_3 obtenemos justamente la ec. (2.20):

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - \gamma_1 u_x \int_{-\infty}^{\infty} R_1 |u|^2 dx' - \gamma_1 u \int_{-\infty}^{\infty} R_1 u^* u_x dx' - \gamma_2 u^* \int_{-\infty}^{\infty} R_2 u u_x dx' = 0 \quad (\text{D.41})$$

D.3. Deducción de la ec. LN1

Cuando la lagrangiana depende explícitamente de $u(-x, t)$, la ecuación de Euler-Lagrange tiene la forma (3.3):

$$\frac{\partial L}{\partial u} + \left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} = 0 \quad (\text{D.42})$$

o bien la ecuación compleja conjugada:

$$\frac{\partial L}{\partial v} + \left[\frac{\partial L}{\partial v(-x, t)} \right]_{x=-x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial v_x} = 0 \quad (\text{D.43})$$

en donde se ha usado v para denotar el complejo conjugado de u .

Partiendo de la Lagrangiana (3.2):

$$L = -Im[vu_t] + |u_x|^2 - |u|^2 Re[uv(-x, t)] \quad (D.44)$$

vamos a expandir las partes reales e imaginarias que aparecen en la expresión.

$$L = -\frac{1}{2i}(vu_t - uv_t) + |u_x|^2 - |u|^2 \frac{1}{2}(uv(-x, t) + vu(-x, t)) \quad (D.45)$$

simplificando:

$$L = i\frac{1}{2}vu_t - i\frac{1}{2}uv_t + u_x v_x - \frac{1}{2}u^2 v v(-x, t) - \frac{1}{2}uv^2 u(-x, t) \quad (D.46)$$

luego, calculamos los términos de la ecuación de Euler compleja conjugada.

$$\frac{\partial L}{\partial v} = i\frac{1}{2}u_t - \frac{1}{2}u^2 v(-x, t) - uvu(-x, t) \quad (D.47)$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial v(-x, t)} \right]_{x=-x} = -\frac{1}{2}u^2(-x, t)v(-x, t) \quad (D.48)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_t} = -i\frac{1}{2}u \quad (D.49)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_t} = i\frac{1}{2}u_t \quad (D.50)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = u_x \quad (D.51)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial v_x} = -u_{xx} \quad (D.52)$$

sumando todos los términos obtenemos, que la ec. de Euler queda como:

$$i\frac{1}{2}u_t - \frac{1}{2}u^2 v(-x, t) - uvu(-x, t) - \frac{1}{2}u^2(-x, t)v(-x, t) + i\frac{1}{2}u_t - u_{xx} = 0 \quad (D.53)$$

simplificando:

$$iu_t - u_{xx} - \frac{1}{2}u^2 v(-x, t) - uvu(-x, t) - \frac{1}{2}u^2(-x, t)v(-x, t) = 0 \quad (D.54)$$

reordenando los términos, obtenemos la ecuación (3.1):

$$iu_t - u_{xx} - \frac{1}{2}u^2(x, t)v(-x, t) - \left(|u|^2 + \frac{1}{2}|u(-x, t)|^2 \right) u(-x, t) = 0 \quad (D.55)$$

D.4. Deducción de la ec. LN2

Partiendo de la Lagrangiana (3.8):

$$\mathcal{L} = -Im(u^*u_t) + |u_x|^2 - \frac{1}{2}|u|^4 - \frac{1}{2}|u|^2|u(-x, t)|^2 \quad (D.56)$$

o en su forma desarrollada:

$$\mathcal{L} = i\frac{1}{2}vu_t - i\frac{1}{2}uv_t + u_xv_x - \frac{1}{2}uu(-x, t)v(-x, t)v - \frac{1}{2}u^2v^2 \quad (D.57)$$

con tal de simplificar los cálculos, podemos multiplicar por 2 y obtenemos:

$$L = 2\mathcal{L} = ivu_t - iuv_t + 2u_xv_x - uu(-x, t)v(-x, t)v - u^2v^2 \quad (D.58)$$

luego utilizamos la ecuación de Euler Lagrange compleja conjugada:

$$\frac{\partial L}{\partial v} + \left[\frac{\partial L}{\partial v(-x, t)} \right]_{x=-x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial v_x} = 0 \quad (D.59)$$

calculamos los términos que aparecen en ella:

$$\frac{\partial L}{\partial v} = iu_t - uu(-x, t)v(-x, t) - 2u^2v \quad (D.60)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v(-x, t)} = -uu(-x, t)v \quad (D.61)$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial v(-x, t)} \right]_{x=-x} = -u(-x, t)uv(-x, t) \quad (D.62)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_t} = -iu \quad (D.63)$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_t} = iu_t \quad (D.64)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = 2u_x \quad (D.65)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial v_x} = -2u_{xx} \quad (D.66)$$

sumando todos los términos e igualando a cero:

$$iu_t - uu(-x, t)v(-x, t) - 2u^2v - u(-x, t)uv(-x, t) + iu_t - 2u_{xx} = 0 \quad (D.67)$$

simplificando:

$$2iu_t - 2u_{xx} - 2uu(-x, t)v(-x, t) - 2u^2v = 0 \quad (\text{D.68})$$

reescribiendo la ecuación, obtenemos la ec. (3.7):

$$iu_t - u_{xx} - (|u(-x, t)|^2 + |u|^2)u = 0 \quad (\text{D.69})$$

Lagrangianas equivalentes para la ec.

Icm-KdV-II

Cuando utilizamos lagrangianas en el estudio de sistemas físicos, sabemos que existe una infinidad de lagrangianas equivalentes las cuales está determinadas por la ecuación:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial F(u)}{\partial t} + \frac{\partial G(u)}{\partial x} \quad (\text{E.1})$$

donde F y G son dos funciones arbitrarias, pero diferenciables. \mathcal{L}' y \mathcal{L} son lagrangianas equivalentes debido a que al sustituir en la ecuación de Euler Lagrange obtenemos la misma ecuación de movimiento. Es importante mencionar que es de gran interés encontrar más lagrangianas que sí sean equivalentes pero que no satisfagan esta relación.

En esta sección mostraremos el procedimiento a través del cual se puede demostrar que las ecuaciones Icm-KdV-II, III y IV tienen lagrangianas equivalentes pero que no satisfacen la relación usual. Mostraremos el procedimiento unicamente para Icm-KdV-II.

Como se puede ver en el apéndice [D.2](#) la lagrangiana (2.21):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i(u^*u_t - uu_t^*) + i\epsilon(uu_{xxx}^* - u^*u_{xxx}) + i\delta_1(uu_x^* - u^*u_x) \int R|u|^2 dx' \\ & + i\delta_2|u|^2 \left(\int Ruu_x^* dx' - \int Ru^*u_x dx' \right) \\ & - i\delta_3 \left[(u^*)^2 \int Ruu_x dx' - u^2 \int Ru^*u_x^* dx' \right] \\ & + i\delta_4 \left[u^*u_x^* \int Ru^2 dx' - uu_x \int R(u^*)^2 dx' \right] \quad (\text{E.2}) \end{aligned}$$

permite deducir la ecuación (D.40):

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - (\delta_1 + \delta_2)(u_x \eta_1 + u \eta_2^*) - 2(\delta_3 + \delta_4)u^* \eta_3 = 0 \quad (\text{E.3})$$

es decir si escogemos $\delta_3 = \delta_4 = 0$, tenemos una familia dada por δ_1 y δ_2 de lagrangianas equivalentes para la ecuación Icm-KdV:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i(u^* u_t - u u_t^*) + i\epsilon(u u_{xxx}^* - u^* u_{xxx}) + i\delta_1(u u_x^* - u^* u_x) \int R|u|^2 dx' \\ & + i\delta_2|u|^2 \left(\int R u u_x^* dx' - \int R u^* u_x dx' \right) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

si en particular, elegimos $\delta_1 = \frac{\gamma}{2}$ y $\delta_2 = 0$ obtenemos la ec. (2.7):

$$\mathcal{L}_1 = i(u^* u_t - u u_t^*) + i\epsilon(u u_{xxx}^* - u^* u_{xxx}) + i\frac{\gamma}{2}(u u_x^* - u^* u_x) \int R|u|^2 dx' \quad (\text{E.5})$$

pero, si elegimos $\delta_1 = 0$ y $\delta_2 = \frac{\gamma}{2}$ obtenemos la ec. (2.8):

$$\mathcal{L}_2 = i(u^* u_t - u u_t^*) + i\epsilon(u u_{xxx}^* - u^* u_{xxx}) + i\frac{\gamma}{2}|u|^2 \left(\int R u u_x^* dx' - \int R u^* u_x dx' \right) \quad (\text{E.6})$$

las cuales son dos lagrangianas que no se relacionan entre sí de la manera usual:

$$\mathcal{L}_2 \neq \mathcal{L}_1 + \frac{\partial F(u)}{\partial t} + \frac{\partial G(u)}{\partial x} \quad (\text{E.7})$$

sin embargo, si consideramos que para aplicar el principio de mínima acción es necesario calcular la acción definida como:

$$S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_1 dx dt \quad (\text{E.8})$$

$$S_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_2 dx dt \quad (\text{E.9})$$

si ponemos atención en el término diferente en las ecs. (E.5) y (E.6):

$$S_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\frac{\gamma}{2}(u u_x^* - u^* u_x) \int_{-\infty}^{\infty} R|u|^2 dx' dx dt \quad (\text{E.10})$$

$$S_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\frac{\gamma}{2}|u|^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} R u u_x^* dx' - \int_{-\infty}^{\infty} R u^* u_x dx' \right) dx dt \quad (\text{E.11})$$

los términos fuera de la integral interior no dependen de (x', t) , pero las de adentro sí, entonces podemos reescribir las dos ecuaciones anteriores como:

$$S_{11} = i\frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u(x, t)u_x^*(x, t) - u^*(x, t)u_x(x, t)] R(x - x')u(x', t)u^*(x', t)dx'dxdt \quad (\text{E.12})$$

$$S_{21} = i\frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)u^*(x, t)R(x - x') [u(x', t)u_x^*(x', t) - u^*(x', t)u_x(x', t)] dx'dxdt \quad (\text{E.13})$$

ahora utilizando el teorema de Fubini, podemos intercambiar el orden de integración en la ecuación anterior:

$$S_{21} = i\frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)u^*(x, t)R(x - x') [u(x', t)u_x^*(x', t) - u^*(x', t)u_x(x', t)] dx dx' dt \quad (\text{E.14})$$

reordenando los términos

$$S_{21} = i\frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u(x', t)u_x^*(x', t) - u^*(x', t)u_x(x', t)] R(x - x')u(x, t)u^*(x, t)dx dx' dt \quad (\text{E.15})$$

teniendo en cuenta que la variable de integración es muda, podemos hacer el intercambio $x \leftrightarrow x'$ y obtenemos:

$$S_{21} = i\frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u(x, t)u_x^*(x, t) - u^*(x, t)u_x(x, t)] R(x' - x)u(x', t)u^*(x', t)dx'dxdt \quad (\text{E.16})$$

teniendo en cuenta que R es una función simétrica la ec. (E.12) y la ec. (E.16) son iguales y por lo tanto:

$$S_1 = S_2 \quad (\text{E.17})$$

esto significa que aplicar las ecs. de EL a \mathcal{L}_1 nos llevará al mismo resultado que aplicar las ecs. de EL a \mathcal{L}_2 , por lo tanto, hemos visto que \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 son equivalentes.

Debido a que fue necesario utilizar el teorema de Fubini, para entender la razón de esta equivalencia, hemos decidido llamarla “F-equivalencia”

Teorema de Noether

El teorema de Noether establece que las propiedades simétricas de la Lagrangiana implican la existencia de cantidades conservadas. Dicho de otra manera, si la lagrangiana no es afectada por una transformación que altere el valor de alguna coordenada (llamada invariante o simétrica bajo la transformación dada) entonces habrá alguna cantidad conservada. La invarianza de la lagrangiana bajo variaciones en el espacio implica que la cantidad conservada es el momento, bajo variaciones en el tiempo implica la conservación de la energía.

Para poder aplicar el teorema de Noether debemos de realizar el siguiente procedimiento:

1. Realizar una transformación en las coordenadas.
2. Obtener la variación de la lagrangiana a partir de las variables transformadas.
3. La magnitud de la integral de acción permanece invariante bajo la transformación.

F.1. Cantidades conservadas de la ec. Icm-KdV-IV

Aquí se muestra la aplicación del teorema de Noether a la ecuación Icm-KdV-IV.

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - \gamma_1 u_x \int_{-\infty}^{\infty} R_1 |u|^2 dx' - \gamma_1 u \int_{-\infty}^{\infty} R_1 u^* u_x dx' - \gamma_2 u^* \int_{-\infty}^{\infty} R_2 u u_x dx' = 0 \quad (\text{F.1})$$

la densidad lagrangiana (2.21) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & i(u^*u_t - uu_t^*) + i\epsilon(uu_{xxx}^* - u^*u_{xxx}) + i\delta_1(uu_x^* - u^*u_x) \int R|u|^2 dx' \\
& + i\delta_2|u|^2 \left(\int Ruu_x^* dx' - \int Ru^*u_x dx' \right) \\
& - i\delta_3 \left[(u^*)^2 \int Ruu_x dx' - u^2 \int Ru^*u_x^* dx' \right] \\
& + i\delta_4 \left[u^*u_x^* \int Ru^2 dx' - uu_x \int R(u^*)^2 dx' \right] \quad (F.2)
\end{aligned}$$

una observación importante, es que los cálculos se pueden simplificar mucho si definimos una de las nueve lagrangianas equivalentes que tenemos disponibles para generar la ecuación Icm-KdV-IV, sin embargo estamos realizando el cálculo completo, para así poder obtener las nueve Hamiltonianas diferentes, además, eligiendo los parámetros adecuadamente, también tenemos las cantidades conservadas para las ecuaciones Icm-KdV-II y III.

Transformaciones

$$\begin{aligned}
x^\otimes &= x + \epsilon\xi_1 \\
t^\otimes &= t + \epsilon\xi_2 \\
u^\otimes(x^\otimes, t^\otimes) &= u(x, t) + \epsilon\phi_1(u(x, t)) \\
u^{*\otimes}(x^\otimes, t^\otimes) &= u^*(x, t) + \epsilon\phi_2(u^*(x, t))
\end{aligned} \quad (F.3)$$

Notamos que las dos últimas ecuaciones de arriba no son una forma funcional, porque los argumentos de las funciones de la izquierda son variables nuevas (x^\otimes, t^\otimes) , mientras que del lado derecho tenemos variables viejas (x, t)

Formas funcionales de las transformaciones

$$\begin{aligned}
u^\otimes(x, t) &= u(x - \epsilon\xi_1, t - \epsilon\xi_2) + \epsilon\phi_1(u(x - \epsilon\xi_1, t - \epsilon\xi_2)) \\
u^{*\otimes}(x, t) &= u^*(x - \epsilon\xi_1, t - \epsilon\xi_2) + \epsilon\phi_2(u^*(x - \epsilon\xi_1, t - \epsilon\xi_2))
\end{aligned} \quad (F.4)$$

Variación de las variables y de las funciones

$$\begin{aligned}
\delta x &= x^\otimes - x = \epsilon \xi_1 \\
\delta t &= t^\otimes - t = \epsilon \xi_2 \\
\delta u &= u^\otimes(x, t) - u(x, t) \\
\delta u^* &= u^{*\otimes}(x, t) - u^*(x, t)
\end{aligned} \tag{F.5}$$

Notamos que en las ultimas dos ecuaciones de arriba, se deben de utilizar las formas funcionales de u y u^* . Haciendo el desarrollo en serie de epsilon, y simplificando es fácil obtener:

$$\begin{aligned}
\delta x &= \epsilon \xi_1 \\
\delta t &= \epsilon \xi_2 \\
\delta u &= \epsilon [\phi_1(u(x, t)) - u_x \xi_1 - u_t \xi_2] \\
\delta u^* &= \epsilon [\phi_2(u^*(x, t)) - u_x^* \xi_1 - u_t^* \xi_2]
\end{aligned} \tag{F.6}$$

Variación de la lagrangiana. Definición

La variación de la lagrangiana es por definición:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \delta u_{3x} \\
&\quad + \text{terminos similares con } u^* \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \delta \eta_1 + \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \delta \eta_2 + \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \delta \eta_3 + \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \delta \eta_4 + \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} \delta \eta_2^* + \frac{\partial L}{\partial \eta_3^*} \delta \eta_3^* + \frac{\partial L}{\partial \eta_4^*} \delta \eta_4^* \tag{F.7}
\end{aligned}$$

para poder simplificar la expresión anterior debemos encontrar la variación de las derivadas u_x, u_t y u_{3x} así como la variación de las η 's.

Variación de las derivadas

$$\begin{aligned}
\delta u_x &= (\delta u)_x \\
\delta u_t &= (\delta u)_t \\
\delta u_{3x} &= (\delta u)_{3x}
\end{aligned} \tag{F.8}$$

Es decir, la variación y la derivada se pueden intercambiar. Además de que esto nos da la pista de que debemos integrar por partes los términos que involucran la variación de estas derivadas.

Variación de las η 's

$$\delta\eta_1 = \delta \int R u u^* dx' = \int \delta(R u u^*) dx' \quad (\text{F.9})$$

Esto debido a que la delta se puede intercambiar con la integral.

$$\delta\eta_1 = \int (\delta R) u u^* dx' + \int R(\delta u) u^* dx' + \int R u (\delta u^*) dx' \quad (\text{F.10})$$

Variación de la R función de respuesta

$$\delta R = -\epsilon \xi_1 R_x \quad (\text{F.11})$$

Variación de las η 's continuación

$$\delta\eta_1 = -\epsilon \xi_1 \int R_x u u^* dx' + \int R(\delta u) u^* dx' + \int R u (\delta u^*) dx' \quad (\text{F.12})$$

Debido a que la u y u^* que están dentro de la integral no dependen de x , el primer término de la expresión anterior no es otra cosa más que η_{1x} , de donde obtenemos:

$$\delta\eta_1 = -\epsilon \xi_1 \eta_{1x} + \int R(\delta u) u^* dx' + \int R u (\delta u^*) dx' \quad (\text{F.13})$$

notemos que a diferencia de cuando dedujimos las ecuaciones de Euler Lagrange, aquí no es necesario sacar el término δu de la integral. así como tampoco fue necesario realizar la integración por partes para las derivadas de las variaciones.

$$\delta\eta_2 = \delta \int R u u_x^* dx' = \int \delta(R u u_x^*) dx' \quad (\text{F.14})$$

de donde obtenemos que

$$\delta\eta_2 = -\epsilon \xi_1 \int R_x u u_x^* dx' + \int R(\delta u) u_x^* dx' + \int R u (\delta u_x^*) dx' \quad (\text{F.15})$$

$$\delta\eta_2 = -\epsilon \xi_1 \eta_{2x} + \int R(\delta u) u_x^* dx' + \int R u (\delta u_x^*) dx' \quad (\text{F.16})$$

$$\delta\eta_3 = \delta \int R u u_x dx' = \int \delta(R u u_x) dx' \quad (\text{F.17})$$

$$\delta\eta_3 = -\epsilon\xi_1\eta_{3x} + \int R(\delta u)u_x dx' + \int Ru(\delta u_x) dx' \quad (\text{F.18})$$

$$\delta\eta_4 = \delta \int Ru^2 dx' = \int \delta(Ru^2) dx' \quad (\text{F.19})$$

$$\delta\eta_4 = -\epsilon\xi_1\eta_{4x} + 2 \int Ru(\delta u) dx' \quad (\text{F.20})$$

Resumen de las η 's

$$\begin{aligned} \delta\eta_1 &= -\epsilon\xi_1\eta_{1x} + \int R(\delta u)u^* dx' + \int Ru(\delta u^*) dx' \\ \delta\eta_2 &= -\epsilon\xi_1\eta_{2x} + \int R(\delta u)u_x^* dx' + \int Ru(\delta u_x^*) dx' \\ \delta\eta_3 &= -\epsilon\xi_1\eta_{3x} + \int R(\delta u)u_x dx' + \int Ru(\delta u_x) dx' \\ \delta\eta_4 &= -\epsilon\xi_1\eta_{4x} + 2 \int Ru(\delta u) dx' \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

Transformaciones específicas

Para que el avance del cálculo de la variación de la lagrangiana sea más sencillo, vamos a simplificar dicha ecuación de 3 formas diferentes, para los 3 posibles casos que normalmente trabajamos, los cuales serían:

- traslación en el tiempo
- traslación en el espacio
- transformación de norma

Traslación en el espacio

La traslación en el espacio, corresponde a los siguientes valores de las transformaciones

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1 \\ \xi_2 = \phi_1(u) = \phi_2(u^*) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.22})$$

lo cual permite establecer las variaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \delta x &= \epsilon \\
 \delta t &= 0 \\
 \delta u &= -\epsilon u_x \\
 \delta u_x &= -\epsilon u_{2x} \\
 \delta u_t &= -\epsilon u_{xt} \\
 \delta u_{3x} &= -\epsilon u_{4x} \\
 \delta \eta_1 &= -\epsilon \eta_{1x} - \epsilon \int Ru_x u^* dx' - \epsilon \int Ru u_x^* dx' \\
 \delta \eta_2 &= -\epsilon \eta_{2x} - \epsilon \int Ru_x u_x^* dx' - \epsilon \int Ru u_{2x}^* dx' \\
 \delta \eta_3 &= -\epsilon \eta_{3x} - \epsilon \int Ru_x u_x dx' - \epsilon \int Ru u_{2x} dx' \\
 \delta \eta_4 &= -\epsilon \eta_{4x} - 2\epsilon \int Ru u_x dx'
 \end{aligned} \tag{F.23}$$

Variación de la lagrangiana. Traslación en el espacio

$$\begin{aligned}
 \delta L &= \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \delta u_{3x} \\
 &\quad + \text{terminos similares con } u^* \\
 &\quad + \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \delta \eta_1 + \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \delta \eta_2 + \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \delta \eta_3 + \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \delta \eta_4 + \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} \delta \eta_2^* + \frac{\partial L}{\partial \eta_3^*} \delta \eta_3^* + \frac{\partial L}{\partial \eta_4^*} \delta \eta_4^* \tag{F.24}
 \end{aligned}$$

La cual al sustituirle los valores de la transformación especifica queda como:

$$\begin{aligned}
 \delta L &= + \frac{\partial L}{\partial x} \epsilon - \frac{\partial L}{\partial u} \epsilon u_x - \frac{\partial L}{\partial u_t} \epsilon u_{xt} - \frac{\partial L}{\partial u_x} \epsilon u_{2x} - \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \epsilon u_{4x} + \text{términos similares con } u^* \\
 &\quad + \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \left(-\epsilon \eta_{1x} - \epsilon \int Ru_x u^* dx' - \epsilon \int Ru u_x^* dx' \right) \\
 &\quad + \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \left(-\epsilon \eta_{2x} - \epsilon \int Ru_x u_x^* dx' - \epsilon \int Ru u_{2x}^* dx' \right) \\
 &\quad + \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \left(-\epsilon \eta_{3x} - \epsilon \int Ru_x u_x dx' - \epsilon \int Ru u_{2x} dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \left(-\epsilon \eta_{4x} - 2\epsilon \int Ru u_x dx' \right) \\
 &\quad \text{términos similares con } u^*, \eta_2^*, \eta_3^* \text{ y } \eta_4^* \tag{F.25}
 \end{aligned}$$

y ahora de la ecuación de Euler Lagrange más general posible, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u} = & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \\ & - u^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' - u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' + u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' \\ & - 2u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_4} dx' + u^* \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' + u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_3} dx' \quad (\text{F.26}) \end{aligned}$$

realizamos la sustitución y cancelamos ϵ :

$$\begin{aligned} \delta L = & - \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \right) u_x \\ & - \left(-u^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' - u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' + u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' \right. \\ & \left. - 2u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_4} dx' + u^* \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' + u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_3} dx' \right) u_x \\ & + \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial u_t} u_{xt} - \frac{\partial L}{\partial u_x} u_{2x} - \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} u_{4x} + \text{términos similares con } u^* \\ & + \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \left(-\eta_{1x} - \int R u_x u^* dx' - \int R u u_x^* dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \left(-\eta_{2x} - \int R u_x u_x^* dx' - \int R u u_{2x}^* dx' \right) \\ & + \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \left(-\eta_{3x} - \int R u_x u_x dx' - \int R u u_{2x} dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \left(-\eta_{4x} - 2 \int R u u_x dx' \right) \\ & + \text{términos similares con } u^*, \eta_2^*, \eta_3^* \text{ y } \eta_4^* \quad (\text{F.27}) \end{aligned}$$

resolvemos los paréntesis que tienen signo negativo:

$$\begin{aligned} \delta L = & -u_x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} - u_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \\ & + u_x u^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' + u_x u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - u_x u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' \\ & + 2u_x u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_4} dx' - u_x u^* \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' - u_x u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_3} dx' \\ & + \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial u_t} u_{xt} - \frac{\partial L}{\partial u_x} u_{2x} - \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} u_{4x} + \text{términos similares con } u^* \\ & + \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \left(-\eta_{1x} - \int R u_x u^* dx' - \int R u u_x^* dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \left(-\eta_{2x} - \int R u_x u_x^* dx' - \int R u u_{2x}^* dx' \right) \\ & + \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \left(-\eta_{3x} - \int R u_x u_x dx' - \int R u u_{2x} dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \left(-\eta_{4x} - 2 \int R u u_x dx' \right) \\ & + \text{términos similares con } u^*, \eta_2^*, \eta_3^* \text{ y } \eta_4^* \quad (\text{F.28}) \end{aligned}$$

agrupamos los valores que pudieran tener relación comenzando por:

$$A1 = -u_x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} - \frac{\partial L}{\partial u_t} u_{xt} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(u_x \frac{\partial L}{\partial u_t} \right) \quad (\text{F.29})$$

$$A2 = -u_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} - \frac{\partial L}{\partial u_x} u_{2x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \frac{\partial L}{\partial u_x} \right) \quad (\text{F.30})$$

$$\begin{aligned} A3 &= -u_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} - \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} u_{4x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \right) + u_{2x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} - \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} u_{4x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u_{2x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \right) - u_{3x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} - \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} u_{4x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u_{2x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(u_{3x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-u_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} + u_{2x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} - u_{3x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.31})$$

$$\begin{aligned} \delta L &= +\frac{\partial L}{\partial x} + A1 + A2 + A3 + A1^* + A2^* + A3^* \\ &\quad + u_x u^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' + u_x u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - u_x u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' \\ &\quad + 2u_x u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_4} dx' - u_x u^* \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' - u_x u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_3} dx' \\ &\quad + \text{términos similares con } u^* \\ &+ \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \left(-\eta_{1x} - \int R u_x u^* dx' - \int R u u_x^* dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \left(-\eta_{2x} - \int R u_x u_x^* dx' - \int R u u_{2x}^* dx' \right) \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \left(-\eta_{3x} - \int R u_x u_x dx' - \int R u u_{2x} dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \left(-\eta_{4x} - 2 \int R u u_x dx' \right) \\ &\quad + \text{términos similares con } u^*, \eta_2^*, \eta_3^* \text{ y } \eta_4^* \end{aligned} \quad (\text{F.32})$$

agrupando más términos que pudieran tener relación entre ellos:

$$\begin{aligned} B4 &= 2u_x u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_4} dx' + \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \left(-\eta_{4x} - 2 \int R u u_x dx' \right) \\ &= 2u_x u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_4} dx' - 2 \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \int R u u_x dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \eta_{4x} \end{aligned} \quad (\text{F.33})$$

teniendo en mente que después vamos a integrar sobre “ x ” de $-\infty$ a ∞ , se puede realizar el cambio x por x' en el segundo término y así cancelarlo con el primer término.

$$B4 = -\frac{\partial L}{\partial \eta_4} \eta_{4x} \quad (\text{F.34})$$

$$\begin{aligned} B3 &= -u_x u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_3} dx' + \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \left(-\eta_{3x} - \int R u_x u_x dx' - \int R u u_{2x} dx' \right) \\ &= -u_x u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_3} dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \int R u_x u_x dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \int R u u_{2x} dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \eta_{3x} \\ &= -u_x u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_3} dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \int R \frac{\partial}{\partial x} (u u_x) dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \eta_{3x} \end{aligned} \quad (\text{F.35})$$

retomando el valor original del primer término, antes de que fuera simplificado.

$$B3 = -u_x u \frac{\partial}{\partial x} \left(\int \frac{\partial L}{\partial \eta_3} R dx' \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \int R \frac{\partial}{\partial x} (u u_x) dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \eta_{3x} \quad (\text{F.36})$$

teniendo en mente que después vamos a integrar sobre “ x ” de $-\infty$ a ∞ , se puede realizar el cambio x por x' en el segundo término.

$$\begin{aligned} B3 &= -u_x u \frac{\partial}{\partial x} \left(\int \frac{\partial L}{\partial \eta_3} R dx' \right) - \frac{\partial}{\partial x} (u u_x) \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_3} dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \eta_{3x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(u u_x \int \frac{\partial L}{\partial \eta_3} R dx' \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \eta_{3x} \end{aligned} \quad (\text{F.37})$$

$$\begin{aligned} B2 &= +u_x u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - u_x u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' - u_x u^* \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \left(-\eta_{2x} - \int R u_x u_x^* dx' - \int R u u_{2x}^* dx' \right) \end{aligned} \quad (\text{F.38})$$

$$\begin{aligned} B2 &= +u_x u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - u_x u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' - u_x u^* \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' \\ &\quad - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \int R u_x u_x^* dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \int R u u_{2x}^* dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \eta_{2x} \end{aligned} \quad (\text{F.39})$$

el primer término y el cuarto término se van a cancelar en el momento que se realice la integral de menos infinito a infinito sobre x y realizar el cambio de orden de integración de x y x'

$$B2 = -u_x u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' - u_x u^* \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \int R u u_{2x}^* dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \eta_{2x} \quad (\text{F.40})$$

Para poder operar los términos que quedan debemos intercambiar un par de términos del otro factor que sería:

$$B2^* = -u_x^* u_x \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - u_x^* u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} \int R u^* u_{2x} dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} \eta_{2x}^* \quad (F.41)$$

de donde hacemos el renombre de tal forma que solo queden agrupadas η_2 en $B2$ y η_2^* en $B2^*$

$$B2 = -u_x^* u_x \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - u_x^* u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \int R u u_{2x}^* dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \eta_{2x} \quad (F.42)$$

reescribiendo el tercer término

$$B2 = -u_x^* u_x \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - u_x^* u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \int R \left[\frac{\partial}{\partial x} (u u_x^*) - u_x u_x^* \right] dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \eta_{2x} \quad (F.43)$$

$$B2 = -u_x^* u_x \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - u_x^* u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \int R \frac{\partial}{\partial x} (u u_x^*) dx' + \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \int R u_x u_x^* dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \eta_{2x} \quad (F.44)$$

una vez más el primero y cuarto término se eliminan al realizar la integral de $-\infty$ a ∞ sobre x

$$B2 = -u_x^* u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \int R \frac{\partial}{\partial x} (u u_x^*) dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \eta_{2x} \quad (F.45)$$

retomando el valor original del primer término, antes de que fuera simplificado.

$$B2 = -u_x^* u \frac{\partial}{\partial x} \left(\int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \int R \frac{\partial}{\partial x} (u u_x^*) dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \eta_{2x} \quad (F.46)$$

teniendo en mente que después vamos a integrar sobre “ x ” de $-\infty$ a ∞ , se puede realizar el cambio de orden de integración de x y x' en el segundo término.

$$\begin{aligned} B2 &= -u_x^* u \frac{\partial}{\partial x} \left(\int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' \right) - \frac{\partial}{\partial x} (u u_x^*) \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \eta_{2x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(u u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \eta_{2x} \end{aligned} \quad (F.47)$$

lo cual queda en nuestra expresión para δL como:

$$\begin{aligned} \delta L = & + \frac{\partial L}{\partial x} + A1 + A2 + A3 + A1^* + A2^* + A3^* + B4 + B3 + B2 + B4^* + B3^* + B2^* \\ & + u_x u^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' + \text{términos similares con } u^* \\ & + \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \left(-\eta_{1x} - \int Ru_x u^* dx' - \int Ru u_x^* dx' \right) \quad (\text{F.48}) \end{aligned}$$

Finalmente tenemos el término B1 el cual dejamos para el final pues al estar relacionado con η_1 no va a tener $B1^*$

$$\begin{aligned} B1 = & + u_x u^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' + u_x^* u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' \\ & + \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \left(-\eta_{1x} - \int Ru_x u^* dx' - \int Ru u_x^* dx' \right) \quad (\text{F.49}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B1 = & + u_x u^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' + u_x^* u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' \\ & - \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \int Ru_x u^* dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \int Ru u_x^* dx' - \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \eta_{1x} \quad (\text{F.50}) \end{aligned}$$

teniendo en mente que después vamos a integrar sobre “ x ” de menos infinito a infinito, se puede realizar el cambio de orden de integración de x y x' . Entonces se cancelan el primer término con el tercero y el segundo con el cuarto.

$$B1 = - \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \eta_{1x} \quad (\text{F.51})$$

con lo cual tenemos:

$$\delta L = + \frac{\partial L}{\partial x} + A1 + A2 + A3 + A1^* + A2^* + A3^* + B4 + B3 + B2 + B4^* + B3^* + B2^* + B1 \quad (\text{F.52})$$

que sustituyendo los valores correspondientes se puede agrupar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta L = & + \frac{\partial}{\partial t} \left(-u_x \frac{\partial L}{\partial u_t} + t.c.b. \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(L - u_x \frac{\partial L}{\partial u_x} - u_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} + u_{2x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \right. \\ & \left. - u_{3x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} - uu_x \int \frac{\partial L}{\partial \eta_3} R dx' - uu_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' + t.c.b. \right) \\ & - \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \eta_{1x} - \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \eta_{2x} - \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \eta_{3x} - \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \eta_{4x} + t.c.b = 0 \quad (\text{F.53}) \end{aligned}$$

en donde t.c.b. significa términos con barra.

NOTA: Los términos que no se pudieron agrupar con ninguna de las parciales, se cancelan al momento de colocar las lagrangianas específicas y hacer el intercambio de orden de integración.

Traslación en el tiempo

La traslación en el tiempo, corresponde a los siguientes valores de las transformaciones

$$\begin{aligned}\xi_2 &= 1 \\ \xi_1 &= \phi_1(u) = \phi_2(u^*) = 0\end{aligned}\tag{F.54}$$

Lo cual permite establecer las variaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\delta x &= 0 \\ \delta t &= \epsilon \\ \delta u &= -\epsilon u_t \\ \delta u_x &= -\epsilon u_{tx} \\ \delta u_t &= -\epsilon u_{2t} \\ \delta u_{3x} &= -\epsilon u_{t3x} \\ \delta \eta_1 &= -\epsilon \int Ru_t u^* dx' - \epsilon \int Ru u_t^* dx' \\ \delta \eta_2 &= -\epsilon \int Ru_t u_x^* dx' - \epsilon \int Ru u_{tx}^* dx' \\ \delta \eta_3 &= -\epsilon \int Ru_t u_x dx' - \epsilon \int Ru u_{tx} dx' \\ \delta \eta_4 &= -2\epsilon \int Ru u_t dx'\end{aligned}\tag{F.55}$$

Variación de la lagrangiana. Traslación en el tiempo

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \delta u_{3x} \\ &\quad + \text{términos similares con } u^* \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \delta \eta_1 + \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \delta \eta_2 + \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \delta \eta_3 + \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \delta \eta_4 + \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} \delta \eta_2^* + \frac{\partial L}{\partial \eta_3^*} \delta \eta_3^* + \frac{\partial L}{\partial \eta_4^*} \delta \eta_4^*\end{aligned}\tag{F.56}$$

la cual al sustituirle los valores de la transformación específica queda como:

$$\begin{aligned}
 \delta L = & + \frac{\partial L}{\partial t} \epsilon - \frac{\partial L}{\partial u} \epsilon u_t - \frac{\partial L}{\partial u_t} \epsilon u_{2t} - \frac{\partial L}{\partial u_x} \epsilon u_{tx} - \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \epsilon u_{t3x} + \text{términos similares con } u^* \\
 & + \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \left(-\epsilon \int R u_t u^* dx' - \epsilon \int R u u_t^* dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \left(-\epsilon \int R u_t u_x^* dx' - \epsilon \int R u u_{tx}^* dx' \right) \\
 & + \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \left(-\epsilon \int R u_t u_x dx' - \epsilon \int R u u_{tx} dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \left(-2\epsilon \int R u u_t dx' \right) \\
 & + \text{términos similares con } u^*, \eta_2^*, \eta_3^* \text{ y } \eta_4^* \quad (\text{F.57})
 \end{aligned}$$

y ahora de la ecuación de Euler Lagrange más general posible, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial u} = & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \\
 & - u^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' - u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' + u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' \\
 & - 2u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_4} dx' + u^* \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' + u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_3} dx' \quad (\text{F.58})
 \end{aligned}$$

realizamos la sustitución y cancelamos ϵ :

$$\begin{aligned}
 \delta L = & - \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \right) u_t \\
 & - \left(-u^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' - u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' + u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' \right. \\
 & \left. - 2u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_4} dx' + u^* \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' + u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_3} dx' \right) u_t \\
 & + \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial u_t} u_{2t} - \frac{\partial L}{\partial u_x} u_{tx} - \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} u_{t3x} + \text{términos similares con } u^* \\
 & + \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \left(- \int R u_t u^* dx' - \int R u u_t^* dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \left(- \int R u_t u_x^* dx' - \int R u u_{tx}^* dx' \right) \\
 & + \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \left(- \int R u_t u_x dx' - \int R u u_{tx} dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \left(-2 \int R u u_t dx' \right) \\
 & + \text{términos similares con } u^*, \eta_2^*, \eta_3^* \text{ y } \eta_4^* \quad (\text{F.59})
 \end{aligned}$$

quitamos los paréntesis que tienen signo negativo:

$$\begin{aligned}
\delta L = & -u_t \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} - u_t \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} - u_t \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \\
& + u_t u^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' + u_t u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - u_t u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' \\
& + 2u_t u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_4} dx' - u_t u^* \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' - u_t u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_3} dx' \\
& + \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial u_t} u_{2t} - \frac{\partial L}{\partial u_x} u_{tx} - \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} u_{t3x} + \text{términos similares con } u^* \\
& + \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \left(- \int R u_t u^* dx' - \int R u u_t^* dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \left(- \int R u_t u_x^* dx' - \int R u u_{tx}^* dx' \right) \\
& + \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \left(- \int R u_t u_x dx' - \int R u u_{tx} dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \left(-2 \int R u u_t dx' \right) \\
& + \text{términos similares con } u^*, \eta_2^*, \eta_3^* \text{ y } \eta_4^* \quad (\text{F.60})
\end{aligned}$$

agrupamos los valores que pudieran tener relación comenzando por:

$$A1 = -u_t \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} - \frac{\partial L}{\partial u_t} u_{2t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(u_t \frac{\partial L}{\partial u_t} \right) \quad (\text{F.61})$$

$$A2 = -u_t \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} - \frac{\partial L}{\partial u_x} u_{tx} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(u_t \frac{\partial L}{\partial u_x} \right) \quad (\text{F.62})$$

$$\begin{aligned}
A3 &= -u_t \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} - \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} u_{t3x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(-u_t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} - u_{t2x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \right) \quad (\text{F.63})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta L = & + \frac{\partial L}{\partial t} + A1 + A2 + A3 + A1^* + A2^* + A3^* \\
 & + u_t u^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' + u_t u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - u_t u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' \\
 & + 2u_t u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_4} dx' - u_t u^* \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' - u_t u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_3} dx' \\
 & + \text{términos similares con } u^* \\
 & + \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \left(- \int R u_t u^* dx' - \int R u u_t^* dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \left(- \int R u_t u_x^* dx' - \int R u u_{tx}^* dx' \right) \\
 & + \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \left(- \int R u_t u_x dx' - \int R u u_{tx} dx' \right) + \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \left(-2 \int R u u_t dx' \right) \\
 & + \text{términos similares con } u^*, \eta_2^*, \eta_3^* \text{ y } \eta_4^* \quad (\text{F.64})
 \end{aligned}$$

agrupando más términos que pudieran tener relación entre ellos:

$$\begin{aligned}
 B4 = & 2u_t u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_4} dx' + \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \left(-2 \int R u u_t dx' \right) \\
 = & 2u_t u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_4} dx' - 2 \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \int R u u_t dx'
 \end{aligned} \quad (\text{F.65})$$

teniendo en mente que después vamos a integrar sobre “ x ” de $-\infty$ a ∞ , se puede realizar el cambio de orden de integración de x y x' en el segundo término y así cancelarlo con el primer término.

$$B4 = 0 \quad (\text{F.66})$$

$$B3 = -u_t u \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_3} dx' + \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \left(- \int R u_t u_x dx' - \int R u u_{tx} dx' \right) \quad (\text{F.67})$$

siguiendo un procedimiento similar a la sección anterior se obtiene:

$$B3 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(u u_t \int \frac{\partial L}{\partial \eta_3} R dx' \right) \quad (\text{F.68})$$

$$\begin{aligned}
 B2 = & + u_t u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' - u_t u_x^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' \\
 & - u_t u^* \int R \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \eta_2^*} dx' + \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \left(- \int R u_t u_x^* dx' - \int R u u_{tx}^* dx' \right) \quad (\text{F.69})
 \end{aligned}$$

siguiendo un procedimiento análogo al anterior de traslación en el espacio:

$$B2 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(uu_t^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' \right) \quad (F.70)$$

lo cual queda en nuestra expresión para δL como:

$$\begin{aligned} \delta L = & +\frac{\partial L}{\partial t} + A1 + A2 + A3 + A1^* + A2^* + A3^* + B4 + B3 + B2 + B4^* + B3^* + B2^* \\ & + uu_t^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' + \text{términos similares con } u^* \\ & + \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \left(- \int Ru_t u^* dx' - \int Ruu_t^* dx' \right) \end{aligned} \quad (F.71)$$

finalmente tenemos el término B1 el cual dejamos para el final pues al estar relacionado con η_1 no va a tener $B1^*$

$$B1 = +uu_t^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' + u_t^* u \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_1} dx' + \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \left(- \int Ru_t u^* dx' - \int Ruu_t^* dx' \right) \quad (F.72)$$

teniendo en mente que después vamos a integrar sobre “x” de $-\infty$ a ∞ , se puede realizar el cambio de orden de integración de x y x' . Entonces se cancelan el primer término con el tercero y el segundo con el cuarto.

$$B1 = 0 \quad (F.73)$$

con lo cual tenemos:

$$\delta L = +\frac{\partial L}{\partial t} + A1 + A2 + A3 + A1^* + A2^* + A3^* + B4 + B3 + B2 + B4^* + B3^* + B2^* + B1 \quad (F.74)$$

que sustituyendo los valores correspondientes se puede agrupar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta L = & +\frac{\partial}{\partial t} \left(L - u_t \frac{\partial L}{\partial u_t} + t.c.b. \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(-u_t \frac{\partial L}{\partial u_x} - u_t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \right. \\ & \left. - u_{t2x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} - uu_t \int \frac{\partial L}{\partial \eta_3} R dx' - uu_t^* \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' + t.c.b. \right) = 0 \end{aligned} \quad (F.75)$$

en donde t.c.b. significa términos con barra. NOTA: Aquí si se pudieron agrupar todos los términos en las dos derivadas.

Resumen

De los 3 casos posibles, observamos que se pueden agrupar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta L = & + \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \xi_2 L - \delta u \frac{\partial L}{\partial u_t} + t.c.b. \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\epsilon \xi_1 L - \delta u \frac{\partial L}{\partial u_x} - \delta u \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} + (\delta u)_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \right. \\ & \left. - (\delta u)_{2x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} - u \delta u \int \frac{\partial L}{\partial \eta_3} R dx' - u (\delta u^*) \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' + t.c.b \right] \\ & + \epsilon \xi_1 \left(- \frac{\partial L}{\partial \eta_2} \eta_{2x} - \frac{\partial L}{\partial \eta_3} \eta_{3x} - \frac{\partial L}{\partial \eta_4} \eta_{4x} + t.c.b \right) - \epsilon \xi_1 \frac{\partial L}{\partial \eta_1} \eta_{1x} = 0 \quad (F.76) \end{aligned}$$

$$Q_1 = \epsilon \xi_2 L - \delta u \frac{\partial L}{\partial u_t} - \delta u^* \frac{\partial L}{\partial u_t} \quad (F.77)$$

$$\begin{aligned} Q_2 = & \epsilon \xi_1 L - \delta u \frac{\partial L}{\partial u_x} - \delta u \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} + (\delta u)_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} \\ & - (\delta u)_{2x} \frac{\partial L}{\partial u_{3x}} - u \delta u \int \frac{\partial L}{\partial \eta_3} R dx' - u (\delta u^*) \int R \frac{\partial L}{\partial \eta_2} dx' + t.c.b \quad (F.78) \end{aligned}$$

F.2. Cantidades conservadas de la ec. LN1

Aquí se muestra la aplicación del teorema de Noether a la ecuación LN1 ((3.1)):

$$i u_t - u_{xx} - \frac{1}{2} u^2(x, t) u^*(-x, t) - \left(|u|^2 + \frac{1}{2} |u(-x, t)|^2 \right) u(-x, t) = 0 \quad (F.79)$$

si escribimos esta ecuación en su forma expandida, tenemos:

$$i u_t - u_{xx} - \frac{1}{2} u^2 u^*(-x, t) - u u^* u(-x, t) - \frac{1}{2} u^2(-x, t) u^*(-x, t) = 0 \quad (F.80)$$

cuya densidad lagrangiana es la ec. (3.2):

$$L = -Im[u^* u_t] + |u_x|^2 - |u|^2 Re[u u^*(-x, t)] \quad (F.81)$$

expandida:

$$L = i \frac{1}{2} u^* u_t - i \frac{1}{2} u u_t^* + u_x u_x^* - \frac{1}{2} u^2 u^* u^*(-x, t) - \frac{1}{2} u (u^*)^2 u(-x, t) \quad (F.82)$$

Transformaciones

$$\begin{aligned}
 x^\otimes &= x + \epsilon\xi_1 \\
 t^\otimes &= t + \epsilon\xi_2 \\
 u^\otimes(x^\otimes, t^\otimes) &= u(x, t) + \epsilon\phi_1(u(x, t)) \\
 u^{*\otimes}(x^\otimes, t^\otimes) &= u^*(x, t) + \epsilon\phi_2(u^*(x, t))
 \end{aligned} \tag{F.83}$$

Notamos que las dos ultimas ecuaciones de arriba no son una forma funcional, porque los argumentos de las funciones de la izquierda son variables nuevas (x^\otimes, t^\otimes) , mientras que del lado derecho tenemos variables viejas (x, t)

Formas funcionales de las transformaciones

$$\begin{aligned}
 u^\otimes(x, t) &= u(x - \epsilon\xi_1, t - \epsilon\xi_2) + \epsilon\phi_1(u(x - \epsilon\xi_1, t - \epsilon\xi_2)) \\
 u^{*\otimes}(x, t) &= u^*(x - \epsilon\xi_1, t - \epsilon\xi_2) + \epsilon\phi_2(u^*(x - \epsilon\xi_1, t - \epsilon\xi_2))
 \end{aligned} \tag{F.84}$$

Variación de las variables y de las funciones

$$\begin{aligned}
 \delta x &= x^\otimes - x = \epsilon\xi_1 \\
 \delta t &= t^\otimes - t = \epsilon\xi_2 \\
 \delta u &= u^\otimes(x, t) - u(x, t) \\
 \delta u^* &= u^{*\otimes}(x, t) - u^*(x, t)
 \end{aligned} \tag{F.85}$$

Notamos que en las ultimas dos ecuaciones, se deben de utilizar las formas funcionales de u y u^* .

Haciendo el desarrollo en serie de epsilon, y simplificando es fácil obtener:

$$\begin{aligned}
 \delta x &= \epsilon\xi_1 \\
 \delta t &= \epsilon\xi_2 \\
 \delta u &= \epsilon [\phi_1(u(x, t)) - u_x\xi_1 - u_t\xi_2] \\
 \delta u^* &= \epsilon [\phi_2(u^*(x, t)) - u_x^*\xi_1 - u_t^*\xi_2]
 \end{aligned} \tag{F.86}$$

Variación de la lagrangiana. Definición

La variación de la lagrangiana es por definición:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \delta u(-x, t) + t.s.c.u^*. \quad (\text{F.87})$$

en donde $t.s.c.u^*$ significa términos similares con u^* . Para poder simplificar la expresión anterior debemos encontrar la variación de las derivadas u_x, u_t

Variación de las derivadas

$$\begin{aligned} \delta u_x &= (\delta u)_x \\ \delta u_t &= (\delta u)_t \\ \delta u(-x, t) &= (\delta u)(-x, t) \end{aligned} \quad (\text{F.88})$$

Es decir la variación y la derivada se pueden intercambiar. Además de que esto nos da la pista de que debemos integrar por partes los términos que involucran la variación de estas derivadas.

Desarrollo de la variación de la lagrangiana

Utilizando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \delta L = \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \left\{ - \left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} \right\} \delta u \\ + \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \delta u(-x, t) + t.s.c.u^* \end{aligned} \quad (\text{F.89})$$

reordenando los términos:

$$\begin{aligned} \delta L = \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x \\ + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u_x \\ + \frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \delta u(-x, t) - \left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} \delta u + t.s.c.u^* \end{aligned} \quad (\text{F.90})$$

agrupando el producto de las derivadas y tomando en cuenta que las variaciones δx y δt son constantes :

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial}{\partial t} (L\delta t) + \frac{\partial}{\partial x} (L\delta x) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u \right) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \delta u(-x, t) - \left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} \delta u + t.s.c.u^*\end{aligned}\tag{F.91}$$

agrupando las derivadas parciales

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial}{\partial t} \left(L\delta t + \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(L\delta x + \frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u \right) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \delta u(-x, t) - \left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} \delta u + t.s.c.u^*\end{aligned}\tag{F.92}$$

sustituyendo de forma explicita $t.s.c.u^*$

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial}{\partial t} \left(L\delta t + \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_t^*} \delta u^* \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(L\delta x + \frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_x^*} \delta u^* \right) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} [\delta u]_{x=-x} - \left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} \delta u \\ &+ \frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} [\delta u^*]_{x=-x} - \left[\frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} \right]_{x=-x} \delta u^*\end{aligned}\tag{F.93}$$

Transformaciones específicas

Para que el avance del cálculo de la variación de la lagrangiana sea más sencillo, vamos simplificar dicha ecuación de 3 formas diferentes, para los 3 posibles casos que normalmente trabajamos, los cuales serían:

- traslación en el tiempo
- traslación en el espacio
- transformación de norma

Traslación en el espacio

La traslación en el espacio, corresponde a los siguientes valores de las transformaciones:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 1 \\ \xi_2 &= \phi_1(u) = \phi_2(u^*) = 0\end{aligned}\tag{F.94}$$

lo cual permite establecer las variaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\delta x &= \epsilon \\ \delta t &= 0 \\ \delta u &= -\epsilon u_x \\ \delta u^* &= -\epsilon u_x^*\end{aligned}\tag{F.95}$$

Variación de la lagrangiana. Traslación en el espacio

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial u_t} (-\epsilon u_x) + \frac{\partial L}{\partial u_t^*} (-\epsilon u_x^*) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\epsilon L + \frac{\partial L}{\partial u_x} (-\epsilon u_x) + \frac{\partial L}{\partial u_x^*} (-\epsilon u_x^*) \right] \\ &+ \frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} (-\epsilon u_x)_{x=-x} - \left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} (-\epsilon u_x) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} (-\epsilon u_x^*)_{x=-x} - \left[\frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} \right]_{x=-x} (-\epsilon u_x^*)\end{aligned}\tag{F.96}$$

Por regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{\partial u(-x, t)}{\partial x} = - (u_x)_{x=-x}\tag{F.97}$$

y de la lagrangiana dada se tiene que:

$$\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} = -\frac{1}{2}u(u^*)^2\tag{F.98}$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} = -\frac{1}{2}u(-x, t)(u^*)^2(-x, t)\tag{F.99}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} = -\frac{1}{2}u^2u^*\tag{F.100}$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} \right]_{x=-x} = -\frac{1}{2}u^2(-x, t)u^*(-x, t) \quad (\text{F.101})$$

sustituyendo en la variación de la lagrangiana.

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial u_t} (-\epsilon u_x) + \frac{\partial L}{\partial u_t^*} (-\epsilon u_x^*) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\epsilon L + \frac{\partial L}{\partial u_x} (-\epsilon u_x) + \frac{\partial L}{\partial u_x^*} (-\epsilon u_x^*) \right] \\ & - \frac{1}{2}u(u^*)^2 \left[\epsilon \frac{\partial u(-x, t)}{\partial x} \right] + \frac{1}{2}u(-x, t)(u^*)^2(-x, t) (-\epsilon u_x) \\ & - \frac{1}{2}u^2 u^* \left[\epsilon \frac{\partial u^*(-x, t)}{\partial x} \right] + \frac{1}{2}u^2(-x, t)u^*(-x, t) (-\epsilon u_x^*) \end{aligned} \quad (\text{F.102})$$

enseguida vamos a demostrar que al tomar la integral sobre todo el espacio, el tercer renglón es cero.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2}u(u^*)^2 \left[\epsilon \frac{\partial u(-x, t)}{\partial x} \right] + \frac{1}{2}u(-x, t)(u^*)^2(-x, t) (-\epsilon u_x) \right. \\ \left. - \frac{1}{2}u^2 u^* \left[\epsilon \frac{\partial u^*(-x, t)}{\partial x} \right] + \frac{1}{2}u^2(-x, t)u^*(-x, t) (-\epsilon u_x^*) \right\} dx = 0 \quad (\text{F.103})$$

el procedimiento se mostrara solo para los primeros dos términos pero es idéntico en los segundos dos.

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2}u(u^*)^2 \left[\epsilon \frac{\partial u(-x, t)}{\partial x} \right] dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}u(-x, t)(u^*)^2(-x, t) (-\epsilon u_x) dx = 0 \quad (\text{F.104})$$

eliminamos ϵ y realizamos el cambio de variable $y = -x$ en la segunda integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2}u(u^*)^2 \left[\frac{\partial u(-x, t)}{\partial x} \right] dx + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{2}u(y, t)(u^*)^2(y, t) \left[-\frac{\partial u(-y, t)}{\partial x} \right] d(-y) = 0 \quad (\text{F.105})$$

utilizando el menos de la diferencial, para cambiar los limites de integración y el menos para cambiar la parcial respecto a x por una parcial respecto a y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2}u(u^*)^2 \left[\frac{\partial u(-x, t)}{\partial x} \right] dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}u(y, t)(u^*)^2(y, t) \left[\frac{\partial u(-y, t)}{\partial y} \right] d(y) = 0 \quad (\text{F.106})$$

con lo que queda demostrado, pues la variable de integración es muda.

Entonces:

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial u_t} (-\epsilon u_x) + \frac{\partial L}{\partial u_t^*} (-\epsilon u_x^*) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\epsilon L + \frac{\partial L}{\partial u_x} (-\epsilon u_x) + \frac{\partial L}{\partial u_x^*} (-\epsilon u_x^*) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.107})$$

dado que:

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{1}{2} i u^* \quad (\text{F.108})$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_t^*} = -\frac{1}{2} i u \quad (\text{F.109})$$

la cantidad conservada sería:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (-i u^* u_x + i u u_x^*) dx \quad (\text{F.110})$$

reordenando los términos obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} i (u u_x^* - u^* u_x) dx \quad (\text{F.111})$$

que corresponde a la densidad de momento contenida en la ec. (3.4).

Traslación en el tiempo

La traslación en el tiempo, corresponde a los siguientes valores de las transformaciones

$$\begin{aligned} \xi_2 &= 1 \\ \xi_1 = \phi_1(u) = \phi_2(u^*) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.112})$$

lo cual permite establecer las variaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta x &= 0 \\ \delta t &= \epsilon \\ \delta u &= -\epsilon u_t \\ \delta u^* &= -\epsilon u_t^* \end{aligned} \quad (\text{F.113})$$

Variación de la lagrangiana. Traslación en el tiempo

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon L + \frac{\partial L}{\partial u_t} (-\epsilon u_t) + \frac{\partial L}{\partial u_t^*} (-\epsilon u_t^*) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} (-\epsilon u_t) + \frac{\partial L}{\partial u_x^*} (-\epsilon u_t^*) \right] \\ &+ \frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} (-\epsilon u_t)_{x=-x} - \left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} (-\epsilon u_t) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} (-\epsilon u_t^*)_{x=-x} - \left[\frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} \right]_{x=-x} (-\epsilon u_t^*) \end{aligned} \quad (\text{F.114})$$

Como t y x son independientes tenemos que:

$$\frac{\partial u(-x, t)}{\partial t} = (u_t)_{x=-x} \quad (\text{F.115})$$

y de la lagrangiana dada se tiene que:

$$\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} = -\frac{1}{2}u(u^*)^2 \quad (\text{F.116})$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} = -\frac{1}{2}u(-x, t)(u^*)^2(-x, t) \quad (\text{F.117})$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} = -\frac{1}{2}u^2u^* \quad (\text{F.118})$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} \right]_{x=-x} = -\frac{1}{2}u^2(-x, t)u^*(-x, t) \quad (\text{F.119})$$

sustituyendo en la variación de la lagrangiana.

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon L + \frac{\partial L}{\partial u_t} (-\epsilon u_t) + \frac{\partial L}{\partial u_t^*} (-\epsilon u_t^*) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} (-\epsilon u_x) + \frac{\partial L}{\partial u_x^*} (-\epsilon u_x^*) \right] \\ & - \frac{1}{2}u(u^*)^2 \left[-\epsilon \frac{\partial u(-x, t)}{\partial t} \right] + \frac{1}{2}u(-x, t)(u^*)^2(-x, t) (-\epsilon u_t) \\ & - \frac{1}{2}u^2u^* \left[-\epsilon \frac{\partial u^*(-x, t)}{\partial t} \right] + \frac{1}{2}u^2(-x, t)u^*(-x, t) (-\epsilon u_t^*) \end{aligned} \quad (\text{F.120})$$

factorizando los términos $-u^*u^*(-x, t)$ y $-uu(-x, t)$ en el tercer renglón

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon L + \frac{\partial L}{\partial u_t} (-\epsilon u_t) + \frac{\partial L}{\partial u_t^*} (-\epsilon u_t^*) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} (-\epsilon u_x) + \frac{\partial L}{\partial u_x^*} (-\epsilon u_x^*) \right] \\ & - u^*u^*(-x, t) \left\{ u \left[-\epsilon \frac{\partial u(-x, t)}{\partial t} \right] + u(-x, t) (\epsilon u_t) \right\} \\ & - uu(-x, t) \left\{ u^* \left[-\epsilon \frac{\partial u^*(-x, t)}{\partial t} \right] + u^*(-x, t) (\epsilon u_t^*) \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.121})$$

factorizando ϵ y simplificando la notación:

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon L + \frac{\partial L}{\partial u_t} (-\epsilon u_t) + \frac{\partial L}{\partial u_t^*} (-\epsilon u_t^*) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} (-\epsilon u_t) + \frac{\partial L}{\partial u_x^*} (-\epsilon u_t^*) \right] \\ & - \epsilon u^* u^*(-x, t) [-u u_t(-x, t) + u(-x, t) u_t] \\ & - \epsilon u u(-x, t) [-u^* u_t^*(-x, t) + u^*(-x, t) u_t^*] \end{aligned} \quad (\text{F.122})$$

ahora tomamos la integral de menos infinito a infinito del tercer renglón y queremos probar que es igual a cero:

$$\begin{aligned} -\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} u^* u^*(-x, t) [-u u_t(-x, t) + u(-x, t) u_t] dx \\ - \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} u u(-x, t) [-u^* u_t^*(-x, t) + u^*(-x, t) u_t^*] dx = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.123})$$

eliminamos $-\epsilon$ y nos enfocamos en la primera integral (el procedimiento para la otra integral sería exactamente igual), la cual se divide en 2 integrales

$$-\int_{-\infty}^{\infty} u^* u^*(-x, t) u u_t(-x, t) dx + \int_{-\infty}^{\infty} u^* u^*(-x, t) u(-x, t) u_t dx = 0 \quad (\text{F.124})$$

hacemos el cambio de variable $x = -y$

$$-\int_{\infty}^{-\infty} u^*(-y, t) u^*(y, t) u(-y, t) u_t(y, t) d(-y) + \int_{-\infty}^{\infty} u^* u^*(-x, t) u(-x, t) u_t dx = 0 \quad (\text{F.125})$$

usamos el menos en la diferencial para cambiar los límites de integración y dado que la variable de integración en una integral definida es muda, ambas integrales son iguales

$$\begin{aligned} -\int_{-\infty}^{\infty} u^*(-y, t) u^*(y, t) u_t d(y) + \int_{-\infty}^{\infty} u^* u^*(-x, t) u(-x, t) u_t dx = 0 \\ 0 = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.126})$$

entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon L + \frac{\partial L}{\partial u_t} (-\epsilon u_t) + \frac{\partial L}{\partial u_t^*} (-\epsilon u_t^*) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} (-\epsilon u_t) + \frac{\partial L}{\partial u_x^*} (-\epsilon u_t^*) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.127})$$

dado que:

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = i \frac{1}{2} u^* \quad (\text{F.128})$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_t^*} = -i\frac{1}{2}u \quad (\text{F.129})$$

la cantidad conservada es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[i\frac{1}{2}u^*u_t - i\frac{1}{2}uu_t^* + u_xu_x^* - \frac{1}{2}u^2u^*u^*(-x, t) - \frac{1}{2}u(u^*)^2u(-x, t) - i\frac{1}{2}u^*u_t + i\frac{1}{2}uu_t^* \right] dx \quad (\text{F.130})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[+u_xu_x^* - \frac{1}{2}u^2u^*u^*(-x, t) - \frac{1}{2}u(u^*)^2u(-x, t) \right] dx \quad (\text{F.131})$$

reordenando los términos obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ |u_x|^2 - |u|^2 \text{Re} [u(x, t)u^*(-x, t)] \} dx \quad (\text{F.132})$$

que corresponde a la densidad Hamiltoniana contenida en la ec. (3.6).

Transformación de Norma

La transformación de Norma, corresponde a los siguientes valores de las transformaciones

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0 \\ \xi_2 &= 0 \\ \phi_1(u) &= iu \\ \phi_2(u^*) &= -iu^* \end{aligned} \quad (\text{F.133})$$

lo cual permite establecer las variaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta x &= 0 \\ \delta t &= 0 \\ \delta u &= i\epsilon u \\ \delta u^* &= -i\epsilon u^* \end{aligned} \quad (\text{F.134})$$

Variación de la lagrangiana. Transformación de Norma

$$\begin{aligned}
 \delta L = & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial u_t} (i\epsilon u) + \frac{\partial L}{\partial u_t^*} (-i\epsilon u^*) \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} (i\epsilon u) + \frac{\partial L}{\partial u_x^*} (-i\epsilon u^*) \right] \\
 & + \frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} (i\epsilon u)_{x=-x} - \left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} (i\epsilon u) \\
 & + \frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} (-i\epsilon u^*)_{x=-x} - \left[\frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} \right]_{x=-x} (-i\epsilon u^*)
 \end{aligned} \tag{F.135}$$

De la lagrangiana dada se tiene que:

$$\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} = -\frac{1}{2}u(u^*)^2 \tag{F.136}$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial u(-x, t)} \right]_{x=-x} = -\frac{1}{2}u(-x, t)u^*(-x, t)^2 \tag{F.137}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} = -\frac{1}{2}u^2u^* \tag{F.138}$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial u^*(-x, t)} \right]_{x=-x} = -\frac{1}{2}u(-x, t)^2u^*(-x, t) \tag{F.139}$$

$$\begin{aligned}
 \delta L = & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial u_t} (i\epsilon u) + \frac{\partial L}{\partial u_t^*} (-i\epsilon u^*) \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} (i\epsilon u) + \frac{\partial L}{\partial u_x^*} (-i\epsilon u^*) \right] \\
 & - \frac{1}{2}u(u^*)^2 [i\epsilon u(-x, t)] + \frac{1}{2}u(-x, t)u^*(-x, t)^2 (i\epsilon u) \\
 & - \frac{1}{2}u^2u^* [-i\epsilon u^*(-x, t)] + \frac{1}{2}u(-x, t)^2u^*(-x, t) (-i\epsilon u^*)
 \end{aligned} \tag{F.140}$$

ahora probaremos que el tercer renglón es igual a cero, después de tomar la integral sobre todo el espacio. Agrupando el primero y tercer término y el segundo y cuarto, del tercer renglón:

$$-i\epsilon \frac{1}{2}uu^* [u^*u(-x, t) - uu^*(-x, t)] + i\epsilon \frac{1}{2}u(-x, t)u^*(-x, t) [u^*(-x, t)u - u(-x, t)u^*] \tag{F.141}$$

Soluciones numéricas

G.1. Solución numérica ec. Icm-KdV-I

Para resolver numéricamente la ec. Icm-KdV-I:

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - \gamma u_x \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') |u(x', t)|^2 dx' = 0 \quad (\text{G.1})$$

separamos la parte real e imaginaria definiendo:

$$u(x, t) = u_r(x, t) + i u_i(x, t) \quad (\text{G.2})$$

siendo u_r y u_i funciones de variable real, de esta manera podemos reescribir la ec. (G.1) como:

$$(u_r + i u_i)_t - \epsilon (u_r + i u_i)_{xxx} - \gamma (u_r + i u_i)_x \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') (u_r^2 + u_i^2) dx' = 0 \quad (\text{G.3})$$

luego la reescribimos como un sistema de ecuaciones para sus partes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned} (u_r)_t - \epsilon (u_r)_{xxx} - \gamma (u_r)_x \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') (u_r^2 + u_i^2) dx' &= 0 \\ i \left[(u_i)_t - \epsilon (u_i)_{xxx} - \gamma (u_i)_x \int_{-\infty}^{+\infty} R(x-x') (u_r^2 + u_i^2) dx' \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

La primera y tercera derivada con respecto a x , se pueden desarrollar utilizando sus expresiones en diferencias finitas centradas:

$$u_x(x) = \frac{-u_{k-1} + u_{k+1}}{2\Delta x} \quad (\text{G.5})$$

$$u_{xxx}(x) = \frac{-u_{k-2} + 2u_{k-1} - 2u_{k+1} + u_{k+2}}{2(\Delta x)^3} \quad (\text{G.6})$$

siendo $u(x) = u_k$, y debido a que la variable de evolución es el tiempo, del sistema (G.4) despejamos $(u_r)_t, (u_i)_t$

$$(u_r)_t = \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^3} [-(u_r)_{k-2} + 2(u_r)_{k-1} - 2(u_r)_{k+1} + (u_r)_{k+2}] + \frac{\gamma}{2\Delta x} [-(u_r)_{k-1} + (u_r)_{k+1}] \int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') [(u_r)^2 + (u_i)^2] dx' \quad (\text{G.7})$$

$$(u_i)_t = \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^3} [-(u_i)_{k-2} + 2(u_i)_{k-1} - 2(u_i)_{k+1} + (u_i)_{k+2}] + \frac{\gamma}{2\Delta x} [-(u_i)_{k-1} + (u_i)_{k+1}] \int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') [(u_r)^2 + (u_i)^2] dx' \quad (\text{G.8})$$

y la integral la podemos expresar en términos de la regla del trapecio:

$$\int_a^b f(x') dx' \approx \Delta x \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + \frac{1}{2} f(b) \right] \quad (\text{G.9})$$

Debemos notar, que para poder aplicar el método de diferencias finitas, se tuvo que haber tomado un intervalo de solución para x , una cantidad de subintervalos n (par) y un intervalo de avance Δx :

$$x \in [-X, X], \quad n, \quad \Delta x = \frac{2X}{n} \quad (\text{G.10})$$

de tal forma que:

$$k \in \left\{ 1, 2, \dots, \frac{n+2}{2}, \dots, n, n+1 \right\} \quad (\text{G.11})$$

y también notamos que dado que n es el número de subintervalos, entonces $n+1$ será el número de puntos considerados en el intervalo total.

Por otro lado, la integral que aparece en las ecs. (G.7) y (G.8) se puede calcular

como:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} R(x_k - x') [(u_r)^2 + (u_i)^2] dx' \\
& \approx \Delta x \left\{ \frac{1}{2} R(x_k - x_1) [(u_r)_1^2 + (u_i)_1^2] + R(x_k - x_2) [(u_r)_2^2 + (u_i)_2^2] + \cdots \right. \\
& \quad \left. + R(x_k - x_j) [(u_r)_j^2 + (u_i)_j^2] \right. \\
& \quad \left. + \cdots + R(x_k - x_n) [(u_r)_n^2 + (u_i)_n^2] + \frac{1}{2} R(x_k - x_{n+1}) [(u_r)_{n+1}^2 + (u_i)_{n+1}^2] \right\} \\
& = \frac{1}{2} \Delta x (R(x_k - x_1)) [(u_r)_1^2 + (u_i)_1^2] + \Delta x \sum_{j=2}^{j=n} R(x_k - x_j) [(u_r)_j^2 + (u_i)_j^2] \\
& \quad + \frac{1}{2} \Delta x (R(x_k - x_{n+1})) [(u_r)_{n+1}^2 + (u_i)_{n+1}^2] \quad (\text{G.12})
\end{aligned}$$

esta aproximación es válida, ya que la función de peso decae rápidamente conforme x' se aleja de x , y por lo tanto el resultado de la integrar en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es equivalente a integrar sólo en $[-X, X]$, además se toma en cuenta que la función $u(x, t)$ también decae rápidamente cuando x está cerca de $-X$ o X .

Finalmente utilizamos el método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, con $X = 160$, $n = 4096$, $\Delta x = 7.81 \times 10^{-2}$ y $\Delta t = 4 \times 10^{-4}$. Notemos que en cada x_k se debe de realizar una integral que involucra todos los puntos del intervalo que son 4097, y por lo tanto se tienen que realizar por lo menos un total de 16'785'409 operaciones para poder avanzar un tiempo $\Delta t = 4 \times 10^{-4}$, es decir el tiempo de computo necesario para resolver esta ecuación integro-diferencial es muy alto, así que, además de optimizar el código y los valores de Δx y Δt para que los resultados sigan siendo confiables, se requirió el uso de la super computadora Miztli de la UNAM, para poder ejecutar este código en un tiempo razonable.

En las figuras G.1 y G.2 se muestra el sistema (G.7)-(G.8) escrito en lenguaje Fortran.

```

ceps=eps/(2.*h**3)
do k=3,n1-2
  dx(k)=ceps*(-x(k-2)+2*x(k-1)-2*x(k+1)+x(k+2))
  dx(n1+k)=ceps*(-x(n1+k-2)+2*x(n1+k-1)-2*x(n1+k+1)+x(n1+k+2))
end do !parte central de la tercera derivada
dx(1)=ceps*(-x(n1-1)+2*x(n1)-2*x(2)+x(3))
dx(2)=ceps*(-x(n1)+2*x(1)-2*x(3)+x(4))
dx(n1-1)=ceps*(-x(n1-3)+2*x(n1-2)-2*x(n1)+x(1))
dx(n1)=ceps*(-x(n1-2)+2*x(n1-1)-2*x(1)+x(2))
dx(n1+1)=ceps*(-x(n1+n1-1)+2*x(n1+n1)-2*x(n1+2)+x(n1+3))
dx(n1+2)=ceps*(-x(n1+n1)+2*x(n1+1)-2*x(n1+3)+x(n1+4))
dx(n1+n1-1)=ceps*(-x(n1+n1-3)+2*x(n1+n1-2)-2*x(n1+n1)+x(n1+1))
dx(n1+n1)=ceps*(-x(n1+n1-2)+2*x(n1+n1-1)-2*x(n1+1)+x(n1+2))

```

Figura G.1: Parte correspondiente a la tercera derivada del sistema (G.7)-(G.8) escrito en lenguaje Fortran, donde $h = \Delta x$, $n1 = n + 1$ y el vector $\vec{dx} = (u_r, u_i)$. Para los puntos extremos se utilizaron condiciones de frontera espejo

G.2. Solución numérica ec. Icm-KdV-II

Para resolver numéricamente la ec. Icm-KdV-II:

$$u_t - \epsilon u_{xxx} - \frac{\gamma}{2} u_x \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x') |u(x',t)|^2 dx' - \frac{\gamma}{2} u \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x') u^* u_x dx' = 0 \quad (\text{G.13})$$

seguimos un procedimiento similar al descrito en la sección G.1. De tal manera que la ec. (G.13) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
(u_r)_t = & \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^3} [-(u_r)_{k-2} + 2(u_r)_{k-1} - 2(u_r)_{k+1} + (u_r)_{k+2}] \\
& + \frac{\gamma}{4\Delta x} [-(u_r)_{k-1} + (u_r)_{k+1}] \int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') [(u_r)^2 + (u_i)^2] dx' \\
& + \frac{\gamma}{2} (u_r)_k \int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') [u_r(u_r)_x + u_i(u_i)_x] dx' \\
& - \frac{\gamma}{2} (u_i)_k \int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') [u_r(u_i)_x - u_i(u_r)_x] dx' \quad (\text{G.14})
\end{aligned}$$

```

do k=2,n1-1
  xval=-xr+h*(k-1)
  integral=0.5*fr1(xval-(-xr))*(x(1)**2+x(n1+1)**2)
  !extremo izquierdo
do j=2,n1-1
  integral=integral+fr1(xval-(-xr+h*(j-1)))*(x(j)**2+x(n1+j)**2)
end do !parte central de la integral
integral=integral+0.5*fr1(xval-(-xr+h*(n1-1)))*(x(n1)**2+x(n1+n1)**2)
integral=h*integral !extremo derecho + factor h
dx(k)=dx(k)+ g1*(0.5/h)*(-x(k-1)+x(k+1))*integral
dx(n1+k)=dx(n1+k)+g1*(0.5/h)*(-x(n1+k-1)+x(n1+k+1))*integral
end do !parte central de la primera derivada

xval=-xr
integral=0.5*fr1(xval-(-xr))*(x(1)**2+x(n1+1)**2)
do j=2,n1-1
  integral=integral+fr1(xval-(-xr+h*(j-1)))*(x(j)**2+x(n1+j)**2)
end do
integral=integral+0.5*fr1(xval-(-xr+h*(n1-1)))*(x(n1)**2+x(n1+n1)**2)
integral=h*integral
dx(1)=dx(1)+ g1*(0.5/h)*(-x(n1)+x(2))*integral
dx(n1+1)=dx(n1+1)+g1*(0.5/h)*(-x(n1+n1)+x(n1+2))*integral

xval=xr
integral=0.5*fr1(xval-(-xr))*(x(1)**2+x(n1+1)**2)
do j=2,n1-1
  integral=integral+fr1(xval-(-xr+h*(j-1)))*(x(j)**2+x(n1+j)**2)
end do
integral=integral+0.5*fr1(xval-(-xr+h*(n1-1)))*(x(n1)**2+x(n1+n1)**2)
integral=h*integral
dx(n1)=dx(n1)+ g1*(0.5/h)*(-x(n1-1)+x(1))*integral
dx(n1+n1)=dx(n1+n1)+ g1*(0.5/h)*(-x(n1+n1-1)+x(n1+1))*integral

```

Figura G.2: Parte correspondiente a la integral que aparece en el sistema (G.7)-(G.8) escrito en lenguaje Fortran, donde $h = \Delta x$, $n1 = n + 1$, $fr1 = R$ y el vector $\vec{dx} = (u_r, u_i)$. Para los puntos extremos se utilizaron condiciones de frontera espejo

$$\begin{aligned}
 (u_i)_t &= \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^3} [-(u_i)_{k-2} + 2(u_i)_{k-1} - 2(u_i)_{k+1} + (u_i)_{k+2}] \\
 &+ \frac{\gamma}{4\Delta x} [-(u_i)_{k-1} + (u_i)_{k+1}] \int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') [(u_r)_k^2 + (u_i)_k^2] dx' \\
 &+ \frac{\gamma}{2}(u_i)_k \int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') [u_r(u_r)_x + u_i(u_i)_x] dx' \\
 &+ \frac{\gamma}{2}(u_r)_k \int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') [u_r(u_i)_x - u_i(u_r)_x] dx' \quad (\text{G.15})
 \end{aligned}$$

En el sistema (G.14)-(G.15) hay dos integrales adicionales a la que ya aparecía en el sistema (G.7)-(G.8). Las dos nuevas integrales se pueden calcular como:

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') \{u_r(u_r)_x + u_i(u_i)_x\} dx' \approx \\
 &\quad \frac{1}{4}R(x_k - x_1) \{(u_r)_1 [-(u_r)_{n+1} + (u_r)_2] + (u_i)_1 [-(u_i)_{n+1} + (u_i)_2]\} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{j=n} R(x_k - x_j) \{(u_r)_j [-(u_r)_{j-1} + (u_r)_{j+1}] + (u_i)_j [-(u_i)_{j-1} + (u_i)_{j+1}]\} \\
 &\quad \frac{1}{4}R(x_k - x_{n+1}) \{(u_r)_{n+1} [-(u_r)_n + (u_r)_1] + (u_i)_{n+1} [-(u_i)_n + (u_i)_1]\} \quad (\text{G.16})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') \{u_r(u_i)_x - u_i(u_r)_x\} dx' \approx \\
 &\quad \frac{1}{4}R(x_k - x_1) \{(u_r)_1 [-(u_i)_{n+1} + (u_i)_2] - (u_i)_1 [-(u_r)_{n+1} + (u_r)_2]\} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{j=n} R(x_k - x_j) \{(u_r)_j [-(u_i)_{j-1} + (u_i)_{j+1}] - (u_i)_j [-(u_r)_{j-1} + (u_r)_{j+1}]\} \\
 &\quad \frac{1}{4}R(x_k - x_{n+1}) \{(u_r)_{n+1} [-(u_i)_n + (u_i)_1] - (u_i)_{n+1} [-(u_r)_n + (u_r)_1]\} \quad (\text{G.17})
 \end{aligned}$$

El sistema (G.14)-(G.15) se resuelve utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con $X = 160$, $n = 4096$, $\Delta x = 7.81 \times 10^{-2}$ y $\Delta t = 4 \times 10^{-4}$.

En la figura G.3 se muestra el fragmento de código que permite calcular el término del sistema (G.14)-(G.15) que involucra la integral (G.16) escrito en lenguaje Fortran y en la figura G.4 lo correspondiente a la integral (G.17).

```

do k=1,n1
  xval=-xr+h*(k-1)
  integral=0.5*fri(xval-(-xr))*(x(1)*(0.5/h)*(-x(n1)+x(2)) &
+x(n1+1)*(0.5/h)*(-x(n1+n1)+x(n1+2)))
  !extremo izquierdo
  do j=2,n1-1
    integral=integral+fri(xval-(-xr+h*(j-1)))*(x(j)*(0.5/h) &
*(-x(j-1)+x(j+1))+x(n1+j)*(0.5/h)*(-x(n1+j-1)+x(n1+j+1)))
  end do !parte central de la integral
  integral=integral+0.5*fri(xval-(-xr+h*(n1-1)))*(x(n1)*(0.5/h) &
*(-x(n1-1)+x(1))+x(n1+n1)*(0.5/h)*(-x(n1+n1-1)+x(n1+1)))
  integral=h*integral !extremo derecho + factor h
  dx(k)=dx(k)+ g1/2.*x(k)*integral
  dx(n1+k)=dx(n1+k)+g1/2.*x(k+n1)*integral
end do

```

Figura G.3: Término del sistema (G.14)-(G.15) que involucra la integral (G.16) escrito en lenguaje Fortran, donde $n1 = n + 1$ y el vector $\vec{dx} = (u_r, u_i)$. Para los puntos extremos se utilizaron condiciones de frontera espejo

```

do k=1,n1
  xval=-xr+h*(k-1)
  integral=0.5*fri(xval-(-xr))*(-x(n1+1)*(0.5/h)*(-x(n1)+x(2)) &
+x(1)*(0.5/h)*(-x(n1+n1)+x(n1+2)))
  !extremo izquierdo
  do j=2,n1-1
    integral=integral+fri(xval-(-xr+h*(j-1)))*(-x(n1+j)*(0.5/h) &
*(-x(j-1)+x(j+1))+x(j)*(0.5/h)*(-x(n1+j-1)+x(n1+j+1)))
  end do !parte central de la integral
  integral=integral+0.5*fri(xval-(-xr+h*(n1-1)))*(-x(n1+n1)*(0.5/h) &
*(-x(n1-1)+x(1))+x(n1)*(0.5/h)*(-x(n1+n1-1)+x(n1+1)))
  integral=h*integral !extremo derecho + factor h
  dx(k)=dx(k)- g1/2.*x(k+n1)*integral
  dx(n1+k)=dx(n1+k)+g1/2.*x(k)*integral
end do

```

Figura G.4: Término del sistema (G.14)-(G.15) que involucra la integral (G.17) escrito en lenguaje Fortran, donde $n1 = n + 1$ y el vector $\vec{dx} = (u_r, u_i)$. Para los puntos extremos se utilizaron condiciones de frontera espejo

G.3. Solución numérica ec. Icm-KdV-III

Para resolver numéricamente la ec. Icm-KdV-III:

$$u_t - \epsilon u_{3x} - \gamma u^* \int_{-\infty}^{\infty} R(x-x')u(x',t)u_x(x',t)dx' = 0 \quad (\text{G.18})$$

seguimos un procedimiento similar al descrito en la sección G.1. De tal manera que la ec. (G.18) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} (u_r)_t = & \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^3} [-(u_r)_{k-2} + 2(u_r)_{k-1} - 2(u_r)_{k+1} + (u_r)_{k+2}] \\ & + \gamma(u_r)_k \int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') [u_r(u_r)_x - u_i(u_i)_x] dx' \\ & + \gamma(u_i)_k \int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') [u_r(u_i)_x + u_i(u_r)_x] dx' \quad (\text{G.19}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_i)_t = & \frac{\epsilon}{2(\Delta x)^3} [-(u_i)_{k-2} + 2(u_i)_{k-1} - 2(u_i)_{k+1} + (u_i)_{k+2}] \\ & - \gamma(u_i)_k \int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') [u_r(u_r)_x - u_i(u_i)_x] dx' \\ & + \gamma(u_r)_k \int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') [u_r(u_i)_x + u_i(u_r)_x] dx' \quad (\text{G.20}) \end{aligned}$$

Las dos integrales que aparecen en el sistema (G.19)-(G.20) se pueden calcular como:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') [u_r(u_r)_x - u_i(u_i)_x] dx' \\ & \approx \frac{1}{4} R(x_k - x_1) \{ (u_r)_1 [-(u_r)_{n+1} + (u_r)_2] - (u_i)_1 [-(u_i)_{n+1} + (u_i)_2] \} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{j=n} R(x_k - x_j) \{ (u_r)_j [-(u_r)_{j-1} + (u_r)_{j+1}] - (u_i)_j [-(u_i)_{j-1} + (u_i)_{j+1}] \} \\ & \frac{1}{4} R(x_k - x_{n+1}) \{ (u_r)_{n+1} [-(u_r)_n + (u_r)_1] - (u_i)_{n+1} [-(u_i)_n + (u_i)_1] \} \quad (\text{G.21}) \end{aligned}$$

```

do k=1,n1
  xval=-xr+h*(k-1)
  integral=0.5*frrl(xval-(-xr))*(x(1)*(0.5/h)*(-x(n1)+x(2)) &
  -x(n1+1)*(0.5/h)*(-x(n1+n1)+x(n1+2)))
  !extremo izquierdo
do j=2,n1-1
  integral=integral+frrl(xval-(-xr+h*(j-1)))*(x(j)*(0.5/h) &
  *(-x(j-1)+x(j+1))-x(n1+j)*(0.5/h)*(-x(n1+j-1)+x(n1+j+1)))
end do !parte central de la integral
integral=integral+0.5*frrl(xval-(-xr+h*(n1-1)))*(x(n1)*(0.5/h) &
* (-x(n1-1)+x(1))-x(n1+n1)*(0.5/h)*(-x(n1+n1-1)+x(n1+1)))
integral=h*integral !extremo derecho + factor h
dx(k)=dx(k) + g2*x(k)*integral
dx(n1+k)=dx(n1+k) -g2*x(k+n1)*integral
end do

```

Figura G.5: Término del sistema (G.19)-(G.20) que involucra la integral (G.21) escrito en lenguaje Fortran, donde $n1 = n + 1$ y el vector $\vec{dx} = (u_r, u_i)$. Para los puntos extremos se utilizaron condiciones de frontera espejo

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} R(x_k - x') [u_r(u_i)_x + u_i(u_r)_x] dx' \\
& \approx \frac{1}{4} R(x_k - x_1) \{ (u_r)_1 [-(u_i)_{n+1} + (u_i)_2] + (u_i)_1 [-(u_r)_{n+1} + (u_r)_2] \} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{j=n} R(x_k - x_j) \{ (u_r)_j [-(u_i)_{j-1} + (u_i)_{j+1}] + (u_i)_j [-(u_r)_{j-1} + (u_r)_{j+1}] \} \\
& + \frac{1}{4} R(x_k - x_{n+1}) \{ (u_r)_{n+1} [-(u_i)_n + (u_i)_1] + (u_i)_{n+1} [-(u_r)_n + (u_r)_1] \} \quad (G.22)
\end{aligned}$$

El sistema (G.19)-(G.20) se resuelve utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con $X = 160$, $n = 4096$, $\Delta x = 7.81 \times 10^{-2}$ y $\Delta t = 4 \times 10^{-4}$.

En la figura G.5 se muestra el fragmento de código que permite calcular el término del sistema (G.19)-(G.20) que involucra la integral (G.21) escrito en lenguaje Fortran y en la figura G.6 lo correspondiente a la integral (G.22).

```

do k=1,n1
  xval=-xr+h*(k-1)
  integral=0.5*fr1(xval-(-xr))*(x(nl+1)*(0.5/h)*(-x(nl)+x(2)) &
+x(1)*(0.5/h)*(-x(nl+nl)+x(nl+2)))
  !extremo izquierdo
  do j=2,nl-1
    integral=integral+fr1(xval-(-xr+h*(j-1)))*(x(nl+j)*(0.5/h) &
*(-x(j-1)+x(j+1))+x(j)*(0.5/h)*(-x(nl+j-1)+x(nl+j+1)))
  end do !parte central de la integral
  integral=integral+0.5*fr1(xval-(-xr+h*(nl-1)))*(x(nl+nl)*(0.5/h) &
*(-x(nl-1)+x(1))+x(nl)*(0.5/h)*(-x(nl+nl-1)+x(nl+1)))
  integral=h*integral !extremo derecho + factor h
  dx(k)=dx(k)+ g2*x(k+nl)*integral
  dx(nl+k)=dx(nl+k)+g2*x(k)*integral
end do

```

Figura G.6: Término del sistema (G.19)-(G.20) que involucra la integral (G.22) escrito en lenguaje Fortran, donde $n1 = n + 1$ y el vector $\vec{dx} = (u_r, u_i)$. Para los puntos extremos se utilizaron condiciones de frontera espejo

G.4. Solución numérica ec. AM

Para resolver numéricamente la ec. de AM:

$$iu_t - u_{xx} - 2u^2(x, t)u^*(-x, t) = 0 \quad (\text{G.23})$$

separamos la parte real e imaginaria definiendo:

$$u(x, t) = u_r(x, t) + iu_i(x, t) \quad (\text{G.24})$$

siendo u_r y u_i funciones de variable real, de esta manera podemos reescribir la ec. (G.23) como:

$$i(u_r + iu_i)_t - (u_r + iu_i)_{xx} - 2(u_r^2 - u_i^2 + i2u_r u_i) [u_r(-x, t) - iu_i(-x, t)] = 0 \quad (\text{G.25})$$

luego la reescribimos como un sistema de ecuaciones para sus partes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned} -(u_i)_t - (u_r)_{xx} - 2(u_r^2 - u_i^2)u_r(-x, t) - 4u_r u_i u_i(-x, t) &= 0 \\ i[(u_r)_t - (u_i)_{xx} + 2(u_r^2 - u_i^2)u_i(-x, t) - 4u_r u_i u_r(-x, t)] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{G.26})$$

Ahora, lidiamos con la segunda derivada respecto a x , la cual se puede desarrollar utilizando su expresión en diferencias finitas centradas:

$$u_{xx}(x) = \frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{G.27})$$

siendo $u(x) = u_k$, y debido a que la variable de evolución es el tiempo, del sistema (G.26) despejamos $(u_r)_t, (u_i)_t$

$$\begin{aligned} (u_{ik})_t &= - \frac{(u_r)_{k-1} - 2(u_r)_k + (u_r)_{k+1}}{(\Delta x)^2} \\ &\quad - 2 [(u_r)_k^2 - (u_i)_k^2] u_r(-x, t) - 4(u_r)_k (u_i)_k u_i(-x, t) \\ (u_{rk})_t &= \frac{(u_i)_{k-1} - 2(u_i)_k + (u_i)_{k+1}}{(\Delta x)^2} \\ &\quad - 2 [(u_r)_k^2 - (u_i)_k^2] u_i(-x, t) + 4(u_r)_k (u_i)_k u_r(-x, t) \end{aligned} \quad (\text{G.28})$$

En el caso de $u(-x, t)$ debemos notar, que para poder aplicar el método de diferencias finitas, se tuvo que haber tomado un intervalo de solución para x , una cantidad de subintervalos n (par) y un intervalo de avance Δx :

$$x \in [-X, X], \quad n, \quad \Delta x = \frac{2X}{n} \quad (\text{G.29})$$

de tal forma que:

$$k \in \{1, 2, \dots, \frac{n+2}{2}, \dots, n, n+1\} \quad (\text{G.30})$$

y también notamos que, dado que n es el número de subintervalos, entonces $n+1$ será el número de puntos considerados en el intervalo total. Dado que escogimos un intervalo simétrico $[-X, X]$ el punto correspondiente a $x = 0$ es justamente $k = \frac{n+2}{2}$, es decir los puntos:

$$k \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\} \quad (\text{G.31})$$

corresponden a valores negativos de x , y

$$k \in \{\frac{n}{2} + 2, \dots, n, n+1\} \quad (\text{G.32})$$

corresponden a valores positivos de x .

Si quisieramos evaluar la función en “ $-x$ ” en lugar de “ x ” entonces tendríamos:

$$u(-x) = u_{n+2-k} \quad (\text{G.33})$$

de tal manera que al hacer el cambio “ x ” por “ $-x$ ” tenemos que:

$$\begin{aligned} f(-X) &\rightarrow f(X), & k = 1 &\rightarrow k = n+1 \\ &\dots & & \\ f(0) &\rightarrow f(0), & k = \frac{n+2}{2} &\rightarrow k = \frac{n+2}{2} \\ &\dots & & \\ f(X) &\rightarrow f(-X), & k = n+1 &\rightarrow k = 1 \end{aligned} \quad (\text{G.34})$$

entonces el sistema (G.28) quedaría como:

$$\begin{aligned}
 (u_{ik})_t &= - \frac{(u_r)_{k-1} - 2(u_r)_k + (u_r)_{k+1}}{(\Delta x)^2} \\
 &\quad - 2 [(u_r)_k^2 - (u_i)_k^2] (u_r)_{n+2-k} - 4(u_r)_k (u_i)_k (u_i)_{n+2-k} \\
 (u_{rk})_t &= \frac{(u_i)_{k-1} - 2(u_i)_k + (u_i)_{k+1}}{(\Delta x)^2} \\
 &\quad - 2 [(u_r)_k^2 - (u_i)_k^2] (u_i)_{n+2-k} + 4(u_r)_k (u_i)_k (u_r)_{n+2-k}
 \end{aligned} \tag{G.35}$$

reescribiendo el sistema anterior:

$$\begin{aligned}
 (u_{rk})_t &= \frac{1}{(\Delta x)^2} [(u_i)_{k-1} + (u_i)_{k+1}] \\
 &\quad + (u_i)_k \left[-\frac{2}{(\Delta x)^2} + 4(u_r)_k (u_r)_{n+2-k} \right] \\
 &\quad + (u_i)_{n+2-k} [-2(u_r)_k^2 + 2(u_i)_k^2] \\
 (u_{ik})_t &= - \frac{1}{(\Delta x)^2} [(u_r)_{k-1} + (u_r)_{k+1}] \\
 &\quad + (u_r)_k \left[\frac{2}{(\Delta x)^2} - 4(u_i)_k (u_i)_{n+2-k} \right] \\
 &\quad + (u_r)_{n+2-k} [-2(u_r)_k^2 + 2(u_i)_k^2]
 \end{aligned} \tag{G.36}$$

Se reescribió de esta manera para que sea más fácil de escribir el código numérico (ver la figura G.7)

Finalmente utilizamos el método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, con $X = 400$, $n = 8192$, $\Delta x = 9.76 \times 10^{-2}$ y $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

```

do k=2,n1-1
  dx(k)= (1./h**2)*( + x(n1+k+1) + x(n1+k-1) )&
          + x(n1+k)*(-2./h**2)+4.*x(k)*x(n1+1-k)&
          + x(n1+n1+1-k)*(-2.*x(k)**2+2.*x(n1+k)**2)
  dx(k+n1)= -(1./h**2)*( + x(k+1) + x(k-1) )&
             + x(k)*(+2./h**2)-4.*x(n1+k)*x(n1+n1+1-k)&
             + x(n1+1-k)*(-2.*x(k)**2+2.*x(n1+k)**2)
end do !parte central

!k=1
dx(1)= (1./h**2)*( + x(n1+2) + x(n1+n1) )&
        + x(n1+1)*(-2./h**2)+4.*x(1)*x(n1)&
        + x(n1+n1)*(-2.*x(1)**2+2.*x(n1+1)**2)
dx(1+n1)= -(1./h**2)*( + x(2) + x(n1) )&
           + x(1)*(+2./h**2)-4.*x(n1+1)*x(n1+n1)&
           + x(n1)*(-2.*x(1)**2+2.*x(n1+1)**2)

!k=n1
dx(n1)= (1./h**2)*( + x(n1+1) + x(n1+n1-1) )&
        + x(n1+n1)*(-2./h**2)+4.*x(n1)*x(1)&
        + x(n1+1)*(-2.*x(n1)**2+2.*x(n1+n1)**2)
dx(n1+n1)= -(1./h**2)*( + x(1) + x(n1-1) )&
            + x(n1)*(+2./h**2)-4.*x(n1+n1)*x(n1+1)&
            + x(1)*(-2.*x(n1)**2+2.*x(n1+n1)**2)

```

Figura G.7: Sistema (G.36) escrito en lenguaje Fortran, donde $n1 = n + 1$ y el vector $\vec{dx} = (u_r, u_i)$. Para los puntos extremos se utilizaron condiciones de frontera espejo

G.5. Solución numérica ec. LN1

Para resolver numéricamente la ec. LN1:

$$iu_t - u_{xx} - \frac{1}{2}u^2(x, t)u^*(-x, t) - \left(|u|^2 + \frac{1}{2}|u(-x, t)|^2\right)u(-x, t) = 0 \quad (\text{G.37})$$

seguimos un procedimiento similar al descrito en la sección G.4. De tal manera que la ec. (G.37) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} (u_{rk})_t &= \frac{1}{(\Delta x)^2} [(u_i)_{k-1} + (u_i)_{k+1}] \\ &\quad + (u_i)_k \left[-\frac{2}{(\Delta x)^2} + (u_r)_k (u_r)_{n+2-k} \right] \\ &\quad + (u_i)_{n+2-k} \left[\frac{1}{2}(u_r)_k^2 + \frac{3}{2}(u_i)_k^2 + \frac{1}{2}(u_r)_{n+2-k}^2 + \frac{1}{2}(u_i)_{n+2-k}^2 \right] \\ (u_{ik})_t &= -\frac{1}{(\Delta x)^2} [(u_r)_{k-1} + (u_r)_{k+1}] \\ &\quad + (u_r)_k \left[\frac{2}{(\Delta x)^2} - (u_i)_k (u_i)_{n+2-k} \right] \\ &\quad + (u_i)_{n+2-k} \left[-\frac{3}{2}(u_r)_k^2 - \frac{1}{2}(u_i)_k^2 - \frac{1}{2}(u_r)_{n+2-k}^2 - \frac{1}{2}(u_i)_{n+2-k}^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{G.38})$$

Este sistema se resuelve utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con $X = 400$, $n = 8192$, $\Delta x = 9.76 \times 10^{-2}$ y $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

En la figura G.8 se muestra el sistema (G.38) escrito en lenguaje Fortran.

```

do k=2,n1-1
  dx(k)= (1./h**2)*( + x(n1+k+1) + x(n1+k-1) ) &
    + x(n1+k)*(-2./h**2) + x(k)*x(n1+1-k) &
    + x(n1+n1+1-k)*(0.5*x(k)**2+1.5*x(n1+k)**2 &
    +0.5*x(n1+1-k)**2+0.5*x(n1+n1+1-k)**2)
  dx(k+n1)= -(1./h**2)*( + x(k+1) + x(k-1) ) &
    + x(k)*(+(2./h**2) - x(n1+k)*x(n1+n1+1-k)) &
    + x(n1+1-k)*(-0.5*x(n1+k)**2-1.5*x(k)**2 &
    -0.5*x(n1+1-k)**2-0.5*x(n1+n1+1-k)**2)
end do !parte central

!k=1
dx(1)= (1./h**2)*( + x(n1+2) + x(n1+n1) ) &
  + x(n1+1)*(-2./h**2) + x(1)*x(n1) &
  + x(n1+n1)*(0.5*x(1)**2+1.5*x(n1+1)**2 &
  +0.5*x(n1)**2+0.5*x(n1+n1)**2)
dx(1+n1)= -(1./h**2)*( + x(2) + x(n1) ) &
  + x(1)*(+(2./h**2) - x(n1+1)*x(n1+n1)) &
  + x(n1)*(-0.5*x(n1+1)**2-1.5*x(1)**2 &
  -0.5*x(n1)**2-0.5*x(n1+n1)**2)

!k=n1
dx(n1)= (1./h**2)*( + x(n1+1) + x(n1+n1-1) ) &
  + x(n1+n1)*(-2./h**2)+4.*x(n1)*x(1) &
  + x(n1+1)*(-2.*x(n1)**2+2.*x(n1+n1)**2)
dx(n1+n1)= -(1./h**2)*( + x(1) + x(n1-1) ) &
  + x(n1)*(+(2./h**2)-4.*x(n1+n1)*x(n1+1)) &
  + x(1)*(-2.*x(n1)**2+2.*x(n1+n1)**2)

```

Figura G.8: Sistema (G.38) escrito en lenguaje Fortran, donde $n1 = n + 1$ y el vector $\vec{dx} = (u_r, u_i)$. Para los puntos extremos se utilizaron condiciones de frontera espejo

G.6. Solución numérica ec. LN2

Para resolver numéricamente la ec. LN2:

$$iu_t - u_{xx} - (|u(-x, t)|^2 + |u(x, t)|^2) u(x, t) = 0 \quad (\text{G.39})$$

seguimos un procedimiento similar al descrito en la sección G.4. De tal manera que la ec. (G.39) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} (u_{rk})_t &= \frac{1}{(\Delta x)^2} [(u_i)_{k-1} + (u_i)_{k+1}] \\ &\quad + (u_i)_k \left[-\frac{2}{(\Delta x)^2} + (u_r)_{n+2-k}^2 + (u_i)_{n+2-k}^2 + (u_r)_k^2 + (u_i)_k^2 \right] \\ (u_{ik})_t &= -\frac{1}{(\Delta x)^2} [(u_r)_{k-1} + (u_r)_{k+1}] \\ &\quad + (u_r)_k \left[\frac{2}{(\Delta x)^2} + (u_r)_{n+2-k}^2 + (u_i)_{n+2-k}^2 + (u_r)_k^2 + (u_i)_k^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{G.40})$$

Este sistema se resuelve utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, con $X = 400$, $n = 8192$, $\Delta x = 9.76 \times 10^{-2}$ y $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

En la figura G.9 se muestra el sistema (G.40) escrito en lenguaje Fortran.

```

do k=2,n1-1
  dx(k)= (1./h**2)*( + x(n1+k+1) + x(n1+k-1) )&
          + x(n1+k)*(-2./h**2)+ x(n1+1-k)**2 &
          + x(n1+n1+1-k)**2 + x(k)**2+ x(n1+k)**2)
  dx(k+n1)= -(1./h**2)*( + x(k+1) + x(k-1) )&
            - x(k)*(-2./h**2)+ x(n1+1-k)**2 &
            + x(n1+n1+1-k)**2 + x(k)**2+ x(n1+k)**2)
end do !parte central

!k=1
dx(1)= (1./h**2)*( + x(n1+2) + x(n1+n1) )&
        + x(n1+1)*(-2./h**2)+ x(n1+n1)**2 &
        + x(n1)**2 + x(1)**2+ x(n1+1)**2)
dx(1+n1)= -(1./h**2)*( + x(2) + x(n1) )&
          - x(1)*(-2./h**2)+ x(n1+n1)**2 &
          + x(n1)**2 + x(1)**2+ x(n1+1)**2)

!k=n1
dx(n1)= (1./h**2)*( + x(n1+1) + x(n1+n1-1) )&
        + x(n1+n1)*(-2./h**2)+ x(1)**2 &
        + x(n1+1)**2 + x(n1)**2+ x(n1+n1)**2)
dx(n1+n1)= -(1./h**2)*( + x(n1+1) + x(n1-1) )&
          - x(n1)*(-2./h**2)+ x(1)**2 &
          + x(n1+1)**2 + x(n1)**2+ x(n1+n1)**2)

```

Figura G.9: Sistema (G.40) escrito en lenguaje Fortran, donde $n1 = n + 1$ y el vector $\vec{dx} = (u_r, u_i)$. Para los puntos extremos se utilizaron condiciones de frontera espejo

Aproximación numérica de las integrales de la ec. Icm-KdV-II

Considerando una función u de la forma:

$$u(x, t) = A \operatorname{sech} \left(\frac{x - vt}{w} \right) e^{i(kx - ht)} \quad (\text{H.1})$$

y una función de peso R igual a:

$$R(x) = \exp(-|x|/\sigma) / (2\sigma) \quad (\text{H.2})$$

la integral (2.43) se puede escribir como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') |u(x', t)|^2 dx' = \frac{A^2}{2\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-x'|}{\sigma}} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - vt}{w} \right) dx' \quad (\text{H.3})$$

para resolver esta integral se probaron distintos métodos de integración. Se buscó en tablas de integración y se intento resolver en software de cálculo simbólico, como Mathematica, pero la integral no se pudo resolver.

Con tal de darle la vuelta a este problema y considerando la naturaleza de la integral, en especial de la función R , sabemos que cuando $R(x - x') \rightarrow \delta(x - x')$ entonces:

$$\frac{1}{2\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-x'|}{\sigma}} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - vt}{w} \right) dx' \rightarrow \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - vt}{w} \right) \quad (\text{H.4})$$

debido a que el parámetro que controla a R es σ , para que $R(x - x') \rightarrow \delta(x - x')$ es necesario que $\sigma \rightarrow 0$, además de esta forma $R \rightarrow \delta$ de forma continua.

En otras palabras, para σ pequeña se podría aproximar la integral de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-x'|}{\sigma}} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - vt}{w} \right) dx' \approx f(\sigma, w) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - vt}{w} \right) \quad (\text{H.5})$$

siendo f una función que satisface que cuando $\sigma \rightarrow 0$ entonces

$$f(\sigma, w) \rightarrow 1 \quad (\text{H.6})$$

notemos que f solo depende de (σ, w) , pues la dependencia de x , v y t está escrita de manera explícita en la función secante hiperbólica.

Para encontrar el valor de $f(\sigma, w)$ podemos reescribir la ecuación (H.5) como:

$$f(\sigma, w) \approx \frac{\frac{1}{2\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-x'|}{\sigma}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-vt}{w}\right) dx'}{\operatorname{sech}^2\left(\frac{x-vt}{w}\right)} \quad (\text{H.7})$$

resolvemos numéricamente el lado derecho de la expresión anterior para luego hacer un ajuste de mínimos cuadrados al tratar de igualar los resultados con la función (2.44):

$$f(w) = 1 - \alpha(w + \gamma)^{-\beta} \quad (\text{H.8})$$

sin embargo, al ser una f una función de dos variables, lo que se tendría que ajustar sería una superficie, lo cual es también bastante complicado. Pero teniendo en cuenta que σ es en realidad un parámetro y que de hecho en las pruebas numéricas se le asigno el valor de $\sigma = 0.25$, de tal manera que $f(w) = f(0.25, w)$ es la sección que nos interesa y es la única que ajustamos numéricamente, para resolver numéricamente también fue necesario elegir un valor fijo de x y uno de v , los cuales se pueden elegir libremente.

Luego, realizamos un ajuste de mínimos cuadrados con el comando *FindFit* del software Mathematica, y encontramos que en el intervalo $0.5 \leq w \leq 3.0$ los parámetros α , β y γ son:

$$\alpha = 0.05752, \quad \beta = 2.00017 \quad y \quad \gamma = 0.16 \quad (\text{H.9})$$

dicho ajuste se muestra en la figura H.1.

Finalmente, para corroborar que tan bueno es el ajuste realizado, para toda (x, t) comparamos directamente los resultados de ambos lados de la ec. (H.5), y encontramos que la diferencia máxima encontrada entre estas dos funciones es de 0.02 y teniendo en cuenta que el valor máximo de la función $u(x, t)$ es 1, esto representa un error de a lo más el 2% sobre el ajuste realizado.

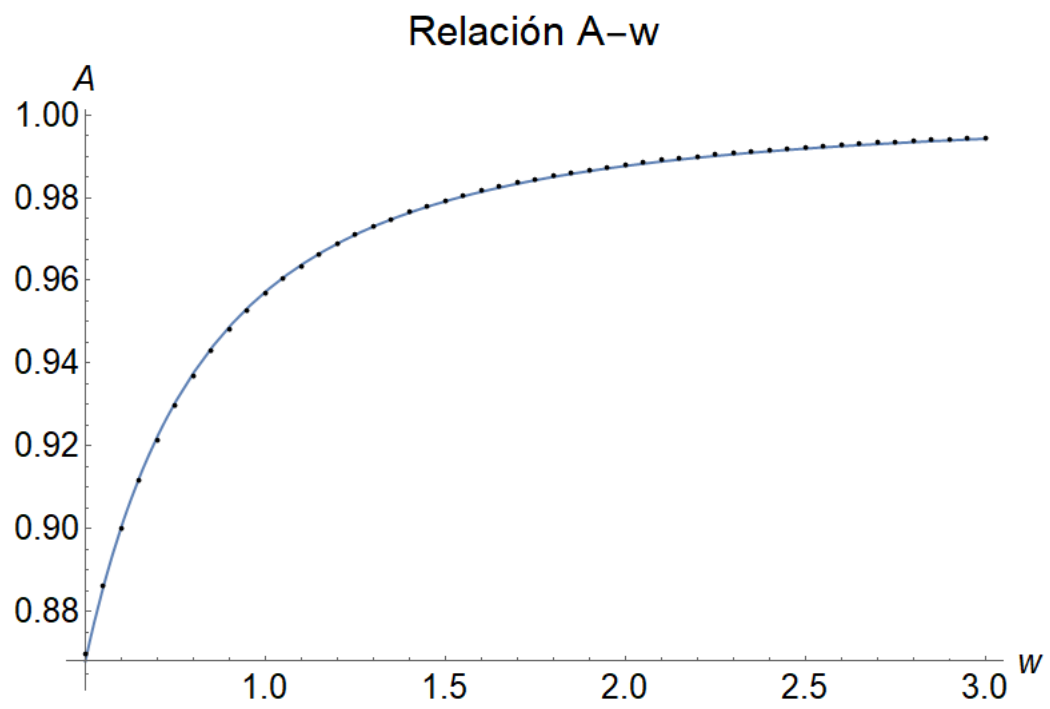


Figura H.1: Ajuste de $f(0.25, w)$

Análisis variacional

En este apéndice utilizaremos el método variacional de Anderson [46] para encontrar soluciones aproximadas de las ecuaciones estudiadas. En este método lo primero que debemos hacer es seleccionar una función de prueba que estará controlada por parámetros que dependen unicamente del tiempo. Posteriormente utilizamos estos parámetros para obtener una lagrangiana que solo dependa de coordenadas que dependen del tiempo, logramos esto, sustituyendo la función de prueba en la densidad lagrangiana. Finalmente, utilizamos las ecuaciones de Euler-Lagrange de una variable para obtener ecuaciones de evolución de los parámetros y de esta manera conocer la evolución de la función de prueba.

I.1. Ecuación Icm-KdV-II

Partiendo de la Lagrangiana

$$L = i(u^*u_t - uu_t^*) + i\epsilon(uu_{3x}^* - u^*u_{3x}) + i\gamma(uu_x^* - u^*u_x) \int R|u|^2 dx' \quad (\text{I.1})$$

$$L = -2\text{Im}(u^*u_t) - 2\epsilon\text{Im}(uu_{3x}^*) - 2\gamma\text{Im}(uu_x^*) \int R|u|^2 dx' \quad (\text{I.2})$$

donde

$$R(x - x') = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x-x'|}{\sigma}} \quad (\text{I.3})$$

la cual corresponde a la ecuación:

$$u_t - \epsilon u_{3x} - \frac{\gamma}{2} u_x \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') |u|^2 dx' - \frac{\gamma}{2} u \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x') u^* u_x dx' = 0 \quad (\text{I.4})$$

tomando como función de prueba:

$$u(x, t) = A(t) \exp \left\{ -\frac{[x - v(t)t]^2}{2a(t)^2} \right\} e^{i[h(t) + c(t)x^2]} \quad (\text{I.5})$$

en donde A, a, v, h y c son funciones del tiempo. Las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} u_t = & A_t \exp \left[-\frac{(x - vt)^2}{2a^2} \right] e^{i(h+cx^2)} \\ & + A \left\{ \frac{-2a^2 [2(x - vt)(-vt - v)] + (x - vt)^2(4aa_t)}{4a^4} \right\} \exp \left[-\frac{(x - vt)^2}{2a^2} \right] e^{i(h+cx^2)} \\ & + A \exp \left[-\frac{(x - vt)^2}{2a^2} \right] e^{i(h+cx^2)} [i(h_t + c_t x^2)] \quad (\text{I.6}) \end{aligned}$$

$$u_x = A(t) \left\{ -\frac{2(x - vt)}{2a^2} \exp \left[-\frac{(x - vt)^2}{2a^2} \right] e^{i(h+cx^2)} + ic2x \exp \left[-\frac{(x - vt)^2}{2a^2} \right] e^{i(h+cx^2)} \right\} \quad (\text{I.7})$$

$$u_x = A(t) \left[-\frac{(x - vt)}{a^2} + ic2x \right] \exp \left[-\frac{(x - vt)^2}{2a^2} \right] e^{i(h+cx^2)} \quad (\text{I.8})$$

$$u_x = \left[\left(-\frac{x}{a^2} + \frac{vt}{a^2} \right) + i(c2x) \right] u \quad (\text{I.9})$$

$$\begin{aligned} u_{2x} = & A(t) \left[\left(-\frac{1}{a^2} + ic2 \right) \exp \left[-\frac{(x - vt)^2}{2a^2} \right] e^{i(h+cx^2)} \right. \\ & \left. + \left[-\frac{(x - vt)}{a^2} + ic2x \right]^2 \exp \left[-\frac{(x - vt)^2}{2a^2} \right] e^{i(h+cx^2)} \right] \quad (\text{I.10}) \end{aligned}$$

$$u_{2x} = A(t) \left[\left(-\frac{1}{a^2} + ic2 \right) + \left(-\frac{(x - vt)}{a^2} + ic2x \right)^2 \right] \exp \left[-\frac{(x - vt)^2}{2a^2} \right] e^{i(h+cx^2)} \quad (\text{I.11})$$

$$u_{2x} = \left[\left(\frac{t^2 v^2}{a^4} - \frac{2tvx}{a^4} + \frac{x^2}{a^4} - \frac{1}{a^2} + 4c^2 i^2 x^2 \right) + i \left(\frac{4ctvx}{a^2} - \frac{4cx^2}{a^2} + 2c \right) \right] u \quad (\text{I.12})$$

$$\begin{aligned} u_{3x} = & A(t) \exp \left[-\frac{(x - vt)^2}{2a^2} \right] e^{i(h+cx^2)} \left\{ \left[2 \left(-\frac{(x - vt)}{a^2} + ic2x \right) \left(-\frac{1}{a^2} + ic2 \right) \right] \right. \\ & \left. + \left[\left(-\frac{1}{a^2} + ic2 \right) + \left(-\frac{(x - vt)}{a^2} + ic2x \right)^2 \right] \left(-\frac{(x - vt)}{a^2} + ic2x \right) \right\} \quad (\text{I.13}) \end{aligned}$$

$$u_{3x} = \left[\left(\frac{t^3 v^3}{a^6} - \frac{3t^2 v^2 x}{a^6} + \frac{3t v x^2}{a^6} - \frac{x^3}{a^6} - \frac{3t v}{a^4} + \frac{3x}{a^4} + \frac{12c^2 i^2 t v x^2}{a^2} - \frac{12c^2 i^2 x^3}{a^2} + 12c^2 i^2 x \right) \right. \\ \left. + i \left(\frac{6c t^2 v^2 x}{a^4} - \frac{12c t v x^2}{a^4} + \frac{6c x^3}{a^4} + \frac{6c t v}{a^2} - \frac{12c x}{a^2} + 8c^3 i^2 x^3 \right) \right] u \quad (\text{I.14})$$

$$|u|^2 = A^2 \exp \left[-\frac{(x - vt)^2}{a^2} \right] \quad (\text{I.15})$$

Tercer término

Sustitución en la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x-x'|}{\sigma}} A^2 \exp \left[-\frac{(x' - vt)^2}{a^2} \right] dx' \quad (\text{I.16})$$

$$\frac{A^2}{2\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{|x - x'|}{\sigma} - \frac{(x' - vt)^2}{a^2} \right] dx' \quad (\text{I.17})$$

$$\frac{A^2}{2\sigma} \int_{-\infty}^x \exp \left[-\frac{(x - x')}{\sigma} - \frac{(x' - vt)^2}{a^2} \right] dx' + \frac{A^2}{2\sigma} \int_x^{\infty} \exp \left[\frac{(x - x')}{\sigma} - \frac{(x' - vt)^2}{a^2} \right] dx' \quad (\text{I.18})$$

$$\frac{A^2}{2\sigma} \int_{-\infty}^x \exp \left[-\frac{t^2 v^2}{a^2} + \frac{2t v x'}{a^2} - \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{x'}{\sigma} - \frac{x}{\sigma} \right] dx' \\ + \frac{A^2}{2\sigma} \int_x^{\infty} \exp \left[-\frac{t^2 v^2}{a^2} + \frac{2t v x'}{a^2} - \frac{(x')^2}{a^2} - \frac{x'}{\sigma} + \frac{x}{\sigma} \right] dx' \quad (\text{I.19})$$

$$\frac{A^2}{2\sigma} \exp \left(-\frac{t^2 v^2}{a^2} - \frac{x}{\sigma} \right) \int_{-\infty}^x \exp \left[\frac{2t v x'}{a^2} - \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{x'}{\sigma} \right] dx' \\ + \frac{A^2}{2\sigma} \exp \left(-\frac{t^2 v^2}{a^2} + \frac{x}{\sigma} \right) \int_x^{\infty} \exp \left[\frac{2t v x'}{a^2} - \frac{(x')^2}{a^2} - \frac{x'}{\sigma} \right] dx' \quad (\text{I.20})$$

$$\begin{aligned} & \frac{A^2}{2\sigma} \exp\left(-\frac{t^2 v^2}{a^2} - \frac{x}{\sigma}\right) \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{a^2} (x')^2 + \left(\frac{2tv}{a^2} + \frac{1}{\sigma}\right) x'\right] dx' \\ & + \frac{A^2}{2\sigma} \exp\left(-\frac{t^2 v^2}{a^2} + \frac{x}{\sigma}\right) \int_x^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{a^2} (x')^2 + \left(\frac{2tv}{a^2} - \frac{1}{\sigma}\right) x'\right] dx' \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

usamos la expresión para calcular la integral:

$$\int \exp[-(Ax^2 + 2Bx)] dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(\frac{B^2}{A}\right) \operatorname{erf}\left[\left(\sqrt{A}x + \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right] \quad (\text{I.22})$$

en la primera integral se tiene:

$$A = \frac{1}{a^2} \quad , \quad 2B = -\left(\frac{2tv}{a^2} + \frac{1}{\sigma}\right) \quad , \quad B = \left(-\frac{tv}{a^2} - \frac{1}{2\sigma}\right) \quad (\text{I.23})$$

mientras que en la segunda

$$A = \frac{1}{a^2} \quad , \quad 2B = -\left(\frac{2tv}{a^2} - \frac{1}{\sigma}\right) \quad , \quad B = \left(-\frac{tv}{a^2} + \frac{1}{2\sigma}\right) \quad (\text{I.24})$$

sustituimos y resolvemos la integral

$$\begin{aligned} & \frac{A^2}{2\sigma} \exp\left(-\frac{t^2 v^2}{a^2} - \frac{x}{\sigma}\right) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{a^2}}} \exp\left[\frac{\left(-\frac{tv}{a^2} - \frac{1}{2\sigma}\right)^2}{\frac{1}{a^2}}\right] \operatorname{erf}\left[\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}} x' + \frac{\left(-\frac{tv}{a^2} - \frac{1}{2\sigma}\right)}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}}\right)\right]_{-\infty}^x \\ & + \frac{A^2}{2\sigma} \exp\left(-\frac{t^2 v^2}{a^2} + \frac{x}{\sigma}\right) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{a^2}}} \exp\left[\frac{\left(-\frac{tv}{a^2} + \frac{1}{2\sigma}\right)^2}{\frac{1}{a^2}}\right] \operatorname{erf}\left[\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}} x' + \frac{\left(-\frac{tv}{a^2} + \frac{1}{2\sigma}\right)}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}}\right)\right]_{x}^{\infty} \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

$$\begin{aligned} & \frac{A^2 a \sqrt{\pi}}{4\sigma} \exp\left(-\frac{t^2 v^2}{a^2} - \frac{x}{\sigma}\right) \exp\left[a^2 \left(-\frac{tv}{a^2} - \frac{1}{2\sigma}\right)^2\right] \operatorname{erf}\left\{\left[\frac{1}{a} x' + a \left(-\frac{tv}{a^2} - \frac{1}{2\sigma}\right)\right]\right\}_{-\infty}^x \\ & + \frac{A^2 a \sqrt{\pi}}{4\sigma} \exp\left(-\frac{t^2 v^2}{a^2} + \frac{x}{\sigma}\right) \exp\left[a^2 \left(-\frac{tv}{a^2} + \frac{1}{2\sigma}\right)^2\right] \operatorname{erf}\left\{\left[\frac{1}{a} x' + a \left(-\frac{tv}{a^2} + \frac{1}{2\sigma}\right)\right]\right\}_x^{\infty} \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

con lo cual:

$$\begin{aligned}
 & \int R|u|^2 dx' \\
 &= \frac{A^2 a \sqrt{\pi}}{4\sigma} \exp\left(-\frac{t^2 v^2}{a^2} - \frac{x}{\sigma}\right) \exp\left[a^2 \left(-\frac{tv}{a^2} - \frac{1}{2\sigma}\right)^2\right] \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{1}{a}x + \left(-\frac{tv}{a} - \frac{a}{2\sigma}\right)\right] + 1 \right\} \\
 &+ \frac{A^2 a \sqrt{\pi}}{4\sigma} \exp\left(-\frac{t^2 v^2}{a^2} + \frac{x}{\sigma}\right) \exp\left[a^2 \left(-\frac{tv}{a^2} + \frac{1}{2\sigma}\right)^2\right] \left\{ 1 - \operatorname{erf}\left[\frac{1}{a}x + \left(-\frac{tv}{a} + \frac{a}{2\sigma}\right)\right] \right\}
 \end{aligned} \tag{I.27}$$

término $Im(uu_x^*)$

$$uu_x^* = u \left[\left(-\frac{x}{a^2} + \frac{vt}{a^2} \right) + i(c2x) \right]^* u^* \tag{I.28}$$

$$uu_x^* = \left[\left(-\frac{x}{a^2} + \frac{vt}{a^2} \right) - i(c2x) \right] |u|^2 \tag{I.29}$$

$$uu_x^* = \left[\left(-\frac{x}{a^2} + \frac{vt}{a^2} \right) - i(c2x) \right] A^2 \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right] \tag{I.30}$$

$$-2\gamma Im(uu_x^*) = 2\gamma(c2x) A^2 \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right] \tag{I.31}$$

el tercer término de la lagrangiana es:

$$\begin{aligned}
 L = \dots &+ 2\gamma(c2x) A^2 \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right] \frac{A^2 a \sqrt{\pi}}{4\sigma} \exp\left(-\frac{t^2 v^2}{a^2} - \frac{x}{\sigma}\right) \\
 &\exp\left[a^2 \left(-\frac{tv}{a^2} - \frac{1}{2\sigma}\right)^2\right] \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{1}{a}x + \left(-\frac{tv}{a} - \frac{a}{2\sigma}\right)\right] + 1 \right\} \\
 &+ 2\gamma(c2x) A^2 \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right] \frac{A^2 a \sqrt{\pi}}{4\sigma} \exp\left(-\frac{t^2 v^2}{a^2} + \frac{x}{\sigma}\right) \\
 &\exp\left[a^2 \left(-\frac{tv}{a^2} + \frac{1}{2\sigma}\right)^2\right] \left\{ 1 - \operatorname{erf}\left[\frac{1}{a}x + \left(-\frac{tv}{a} + \frac{a}{2\sigma}\right)\right] \right\}
 \end{aligned} \tag{I.32}$$

$$\begin{aligned}
 L = \dots + x \frac{\gamma A^4 ac \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp \left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2} - \frac{t^2 v^2}{a^2} - \frac{x}{\sigma} + a^2 \left(-\frac{tv}{a^2} - \frac{1}{2\sigma} \right)^2 \right] \\
 \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{1}{a} x + \left(-\frac{tv}{a} - \frac{a}{2\sigma} \right) \right] + 1 \right\} \\
 + x \frac{\gamma A^4 ac \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp \left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2} - \frac{t^2 v^2}{a^2} + \frac{x}{\sigma} + a^2 \left(-\frac{tv}{a^2} + \frac{1}{2\sigma} \right)^2 \right] \\
 \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{1}{a} x + \left(-\frac{tv}{a} + \frac{a}{2\sigma} \right) \right] \right\} \quad (\text{I.33})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L = \dots \\
 + x \frac{\gamma A^4 ac \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp \left[\frac{a^2}{4\sigma^2} - \frac{t^2 v^2}{a^2} + \frac{2tvx}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{tv}{\sigma} - \frac{x}{\sigma} \right] \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{1}{a} x + \left(-\frac{tv}{a} - \frac{a}{2\sigma} \right) \right] + 1 \right\} \\
 + x \frac{\gamma A^4 ac \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp \left[\frac{a^2}{4\sigma^2} - \frac{t^2 v^2}{a^2} + \frac{2tvx}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{tv}{\sigma} + \frac{x}{\sigma} \right] \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{1}{a} x + \left(-\frac{tv}{a} + \frac{a}{2\sigma} \right) \right] \right\} \quad (\text{I.34})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L = \dots + x \frac{\gamma A^4 ac \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp \left(\frac{a^2}{4\sigma^2} - \frac{t^2 v^2}{a^2} + \frac{tv}{\sigma} \right) \exp \left\{ \frac{a^2}{4\sigma^2} + \frac{t^2 v^2}{a^2} - \left[\left(\frac{a}{2\sigma} - \frac{tv}{a} \right) + \frac{x}{a} \right]^2 - \frac{tv}{\sigma} \right\} \\
 \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{1}{a} x + \left(-\frac{tv}{a} - \frac{a}{2\sigma} \right) \right] + 1 \right\} \\
 + x \frac{\gamma A^4 ac \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp \left(\frac{a^2}{4\sigma^2} - \frac{t^2 v^2}{a^2} - \frac{tv}{\sigma} \right) \exp \left\{ \frac{a^2}{4\sigma^2} + \frac{t^2 v^2}{a^2} - \left[\left(-\frac{a}{2\sigma} - \frac{tv}{a} \right) + \frac{x}{a} \right]^2 + \frac{tv}{\sigma} \right\} \\
 \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{1}{a} x + \left(-\frac{tv}{a} + \frac{a}{2\sigma} \right) \right] \right\} \quad (\text{I.35})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L = \dots + x \frac{\gamma A^4 ac \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp \left(\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \exp \left\{ - \left[\left(\frac{a}{2\sigma} - \frac{tv}{a} \right) + \frac{x}{a} \right]^2 \right\} \\
 \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{1}{a} x + \left(-\frac{tv}{a} - \frac{a}{2\sigma} \right) \right] + 1 \right\} \\
 + x \frac{\gamma A^4 ac \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp \left(\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \exp \left\{ - \left[\left(-\frac{a}{2\sigma} - \frac{tv}{a} \right) + \frac{x}{a} \right]^2 \right\} \\
 \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{1}{a} x + \left(-\frac{tv}{a} + \frac{a}{2\sigma} \right) \right] \right\} \quad (\text{I.36})
 \end{aligned}$$

hacemos los siguientes cambios de Variable:

$$y = \frac{x}{a} \quad , \quad Q = \frac{vt}{a} - \frac{a}{2\sigma} \quad , \quad P = \frac{vt}{a} + \frac{a}{2\sigma} \quad (\text{I.37})$$

sustituyendo:

$$\begin{aligned} L = \dots + y \frac{\gamma A^4 a^2 c \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp[-(y-Q)^2] [\operatorname{erf}(y-P) + 1] \\ + y \frac{\gamma A^4 a^2 c \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp[-(y-P)^2] [1 - \operatorname{erf}(y-Q)] \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

ahora vamos a sacar la densidad lagrangiana, entonces integramos respecto a x sobre todo el espacio.

$$\int_{-\infty}^{\infty} L(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} L(y) dy \quad (\text{I.39})$$

para esto tenemos que calcular 4 integrales y en todas ellas se puede sacar el factor común:

$$\frac{\gamma A^4 a^2 c \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{I.40})$$

las dos integrales que no contienen a la función de error se pueden resolver en Mathematica y el resultado es el siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \exp[-(y-Q)^2] dy = aQ\sqrt{\pi} \quad (\text{I.41})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \exp[-(y-P)^2] dy = aP\sqrt{\pi} \quad (\text{I.42})$$

las otras dos integrales no se pueden resolver a través de Mathematica, pero se resuelven de manera numérica y luego se hace un ajuste que parece pegar muy bien a los valores cuando P y Q son pequeñas

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y \exp[-(y-Q)^2] \operatorname{erf}(y-P) - y \exp[-(y-P)^2] \operatorname{erf}(y-Q) dy \approx \\ am(P+Q)\operatorname{erf}[k(Q-P)] \end{aligned} \quad (\text{I.43})$$

con $m \approx \sqrt{\pi}$ y $k \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$

Entonces el término correspondiente a la densidad Lagrangiana es:

$$DL = \frac{\gamma A^4 a^2 c \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \{a\sqrt{\pi}(Q+P) + am(P+Q)\operatorname{erf}[k(Q-P)]\} \quad (\text{I.44})$$

retomando los valores de P y Q queda:

$$DL = \frac{\gamma A^4 a^3 c \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[\sqrt{\pi} \frac{2vt}{a} + \frac{2vt}{a} \operatorname{erf}\left(-k \frac{a}{\sigma}\right) \right] \quad (\text{I.45})$$

$$DL = \frac{\gamma A^4 a^2 c \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[\sqrt{\pi} 2vt + 2vt \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right) \right] \quad (\text{I.46})$$

la forma más simple del tercer término de la densidad Lagrangiana es:

$$DL = \frac{2\gamma A^4 a^2 c v t \pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right) \right] \quad (\text{I.47})$$

Segundo término

$$uu_{3x}^* = u \left[\left(\frac{t^3 v^3}{a^6} - \frac{3t^2 v^2 x}{a^6} + \frac{3tvx^2}{a^6} - \frac{x^3}{a^6} - \frac{3tv}{a^4} + \frac{3x}{a^4} + \frac{12c^2 i^2 tvx^2}{a^2} - \frac{12c^2 i^2 x^3}{a^2} + 12c^2 i^2 x \right) \right. \\ \left. + i \left(\frac{6ct^2 v^2 x}{a^4} - \frac{12ctvx^2}{a^4} + \frac{6cx^3}{a^4} + \frac{6ctv}{a^2} - \frac{12cx}{a^2} + 8c^3 i^2 x^3 \right) \right]^* u^* \quad (\text{I.48})$$

$$\operatorname{Im}(uu_{3x}^*) = - \left(\frac{6ct^2 v^2 x}{a^4} - \frac{12ctvx^2}{a^4} + \frac{6cx^3}{a^4} + \frac{6ctv}{a^2} - \frac{12cx}{a^2} + 8c^3 i^2 x^3 \right) |u|^2 \quad (\text{I.49})$$

$$\operatorname{Im}(uu_{3x}^*) = - \left(\frac{6ct^2 v^2 x}{a^4} - \frac{12ctvx^2}{a^4} + \frac{6cx^3}{a^4} + \frac{6ctv}{a^2} - \frac{12cx}{a^2} + 8c^3 i^2 x^3 \right) \\ A^2 \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right] \quad (\text{I.50})$$

$$-2\epsilon \operatorname{Im}(uu_{3x}^*) = 2\epsilon A^2 \left(\left(\frac{6c}{a^4} - 8c^3 \right) x^3 - \frac{12ctv}{a^4} x^2 + \left(\frac{6ct^2 v^2}{a^4} - \frac{12c}{a^2} \right) x + \frac{6ctv}{a^2} \right) \\ \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right] \quad (\text{I.51})$$

hacemos las integrales en Mathematica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right] dx = \frac{\sqrt{\pi} tv (3a^2 + 2t^2 v^2)}{2\sqrt{\frac{1}{a^2}}} = \frac{a\sqrt{\pi} tv (3a^2 + 2t^2 v^2)}{2} \quad (\text{I.52})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp \left[-\frac{(x-tv)^2}{a^2} \right] dx = \frac{\sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2v^2)}{2\sqrt{\frac{1}{a^2}}} = \frac{a\sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2v^2)}{2} \quad (\text{I.53})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \exp \left[-\frac{(x-tv)^2}{a^2} \right] dx = \frac{\sqrt{\pi}tv}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}} = \frac{2a\sqrt{\pi}tv}{2} \quad (\text{I.54})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-tv)^2}{a^2} \right] dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}} = \frac{2a\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{I.55})$$

entonces la densidad lagrangiana correspondiente al segundo término es:

$$DL = \epsilon A^2 \left[\left(\frac{6c}{a^4} - 8c^3 \right) a\sqrt{\pi}tv (3a^2 + 2t^2v^2) - \frac{12ctv}{a^4} a\sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2v^2) \right. \\ \left. + \left(\frac{6ct^2v^2}{a^4} - \frac{12c}{a^2} \right) 2a\sqrt{\pi}tv + \frac{6ctv}{a^2} 2a\sqrt{\pi} \right] \quad (\text{I.56})$$

$$DL = \epsilon A^2 \left[-\frac{2\sqrt{\pi}ctv (12a^4c^2 + 8a^2c^2t^2v^2 + 3)}{a} \right] \quad (\text{I.57})$$

$$DL = -\frac{2\epsilon A^2 \sqrt{\pi}ctv}{a} (12a^4c^2 + 8a^2c^2t^2v^2 + 3) \quad (\text{I.58})$$

Primer Término

$$u^* u_t = \left\{ A \exp \left[-\frac{(x-vt)^2}{2a^2} \right] e^{-i(h+cx^2)} \right\} \left\{ A_t \exp \left[-\frac{(x-vt)^2}{2a^2} \right] e^{i(h+cx^2)} \right. \\ \left. + A \left[\frac{-2a^2 (2(x-vt)(-v_t t - v)) + (x-vt)^2 (4aa_t)}{4a^4} \right] \exp \left[-\frac{(x-vt)^2}{2a^2} \right] e^{i(h+cx^2)} \right. \\ \left. + A \exp \left[-\frac{(x-vt)^2}{2a^2} \right] e^{i(h+cx^2)} [i(h_t + c_t x^2)] \right\} \quad (\text{I.59})$$

$$u^* u_t = \left\{ A \exp \left[-\frac{(x-vt)^2}{2a^2} \right] \right\} \left\{ A_t \exp \left[-\frac{(x-vt)^2}{2a^2} \right] \right. \\ \left. + A \left[\frac{-2a^2 (2(x-vt)(-v_t t - v)) + (x-vt)^2 (4aa_t)}{4a^4} \right] \exp \left[-\frac{(x-vt)^2}{2a^2} \right] \right. \\ \left. + A \exp \left[-\frac{(x-vt)^2}{2a^2} \right] [i(h_t + c_t x^2)] \right\} \quad (\text{I.60})$$

$$-2Im(u^*u_t) = -2A^2 \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right] (h_t + c_t x^2) \quad (I.61)$$

reutilizamos los resultados de las integrales del segundo término y sacamos la densidad lagrangiana como:

$$DL = -A^2 \{h_t (2a\sqrt{\pi}) + c_t [a\sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2v^2)]\} \quad (I.62)$$

Densidad Lagrangiana

Juntando los tres resultados tenemos:

$$DL = -A^2 \{h_t (2a\sqrt{\pi}) + c_t [a\sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2v^2)]\} - \frac{2\epsilon A^2 \sqrt{\pi} ctv}{a} (12a^4c^2 + 8a^2c^2t^2v^2 + 3) + \frac{2\gamma A^4 a^2 cvt\pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \quad (I.63)$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange para A

$$\frac{\partial DL}{\partial A} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial DL}{\partial A_t}\right) = 0 \quad (I.64)$$

$$-2A \{h_t (2a\sqrt{\pi}) + c_t [a\sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2v^2)]\} - \frac{4\epsilon A \sqrt{\pi} ctv}{a} (12a^4c^2 + 8a^2c^2t^2v^2 + 3) + \frac{8\gamma A^3 a^2 cvt\pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] = 0 \quad (I.65)$$

$$-4Ah_t a\sqrt{\pi} - 2Ac_t a\sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2v^2) - \frac{4\epsilon A \sqrt{\pi} ctv}{a} (12a^4c^2 + 8a^2c^2t^2v^2 + 3) + \frac{8\gamma A^3 a^2 cvt\pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] = 0 \quad (I.66)$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange para a

$$\frac{\partial DL}{\partial a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial DL}{\partial a_t} \right) = 0 \quad (\text{I.67})$$

$$\begin{aligned} & - A^2 [h_t (2\sqrt{\pi}) + c_t \sqrt{\pi} (3a^2 + 2t^2 v^2)] \\ & \quad - 2\epsilon A^2 \sqrt{\pi} c t v \left(36a^2 c^2 + 8c^2 t^2 v^2 - \frac{3}{a^2} \right) \\ & \quad + \frac{4\gamma A^4 a c v t \pi}{\sigma} \exp \left(\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \left[1 + \operatorname{erf} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma} \right) \right] \\ & \quad + \frac{2\gamma A^4 a^2 c v t \pi 2a}{\sigma 2\sigma^2} \exp \left(\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \left[1 + \operatorname{erf} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma} \right) \right] \\ & \quad + \frac{2\gamma A^4 a^2 c v t \pi}{\sigma} \exp \left(\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \left[-\frac{\sqrt{2}}{\sigma \sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \right] = 0 \quad (\text{I.68}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - 2A^2 h_t \sqrt{\pi} - A^2 c_t \sqrt{\pi} (3a^2 + 2t^2 v^2) \\ & \quad - 2\epsilon A^2 \sqrt{\pi} c t v \left(36a^2 c^2 + 8c^2 t^2 v^2 - \frac{3}{a^2} \right) \\ & \quad + \frac{4\gamma A^4 a c v t \pi}{\sigma} \exp \left(\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \left[1 + \operatorname{erf} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma} \right) \right] \\ & \quad + \frac{2\gamma A^4 a^2 c v t \pi 2a}{\sigma 2\sigma^2} \exp \left(\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \left[1 + \operatorname{erf} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma} \right) \right] \\ & \quad + \frac{2\gamma A^4 a^2 c v t \pi}{\sigma} \exp \left(\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \left[-\frac{\sqrt{2}}{\sigma \sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \right] = 0 \quad (\text{I.69}) \end{aligned}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange para v

$$\frac{\partial DL}{\partial v} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial DL}{\partial v_t} \right) = 0 \quad (\text{I.70})$$

$$\begin{aligned} & - A^2 \{c_t [a\sqrt{\pi} (4t^2 v)]\} - \frac{2\epsilon A^2 \sqrt{\pi} c t}{a} (12a^4 c^2 + 24a^2 c^2 t^2 v^2 + 3) \\ & \quad + \frac{2\gamma A^4 a^2 c t \pi}{\sigma} \exp \left(\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \left[1 + \operatorname{erf} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma} \right) \right] = 0 \quad (\text{I.71}) \end{aligned}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange para h

$$\frac{\partial DL}{\partial h} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial DL}{\partial h_t} \right) = 0 \quad (\text{I.72})$$

$$- \frac{d}{dt} (-A^2 2a\sqrt{\pi}) = 0 \quad (\text{I.73})$$

$$\frac{d}{dt} (A^2 a) = 0 \quad (\text{I.74})$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange para c

$$\frac{\partial DL}{\partial c} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial DL}{\partial c_t} \right) = 0 \quad (\text{I.75})$$

$$- \frac{2\epsilon A^2 \sqrt{\pi} t v}{a} (36a^4 c^2 + 24a^2 c^2 t^2 v^2 + 3) + \frac{2\gamma A^4 a^2 v t \pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right) \right] - \frac{d}{dt} [-A^2 a \sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2 v^2)] = 0 \quad (\text{I.76})$$

$$- \frac{2\epsilon A^2 \sqrt{\pi} t v}{a} (36a^4 c^2 + 24a^2 c^2 t^2 v^2 + 3) + \frac{2\gamma A^4 a^2 v t \pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right) \right] + \sqrt{\pi} \frac{d}{dt} (A^2 a^3 + 2A^2 a t^2 v^2) = 0 \quad (\text{I.77})$$

$$- \frac{2\epsilon A^2 \sqrt{\pi} t v}{a} (36a^4 c^2 + 24a^2 c^2 t^2 v^2 + 3) + \frac{2\gamma A^4 a^2 v t \pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right) \right] + \sqrt{\pi} (2AA_t a^3 + A^2 3a^2 a_t + 4AA_t a t^2 v^2 + 2A^2 a_t t^2 v^2 + 4A^2 a t v^2 + 4A^2 a t^2 v v_t) = 0 \quad (\text{I.78})$$

Despeje de las derivadas

Derivada de c; c_t

Con base en las ecuaciones para A y a en especial en los términos:

$$- 4Ah_t a \sqrt{\pi} - 2Ac_t a \sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2 v^2) \quad , \quad - 2A^2 h_t \sqrt{\pi} - A^2 c_t \sqrt{\pi} (3a^2 + 2t^2 v^2) \quad (\text{I.79})$$

multiplicamos a la primera por A y a la segunda por $-2a$ las cuales quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & -4A^2 h_t a \sqrt{\pi} - 2A^2 c_t a \sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2 v^2) - \frac{4\epsilon A^2 \sqrt{\pi} c t v}{a} (12a^4 c^2 + 8a^2 c^2 t^2 v^2 + 3) \\
 & \quad + \frac{8\gamma A^4 a^2 c v t \pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] = 0 \quad (\text{I.80})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4aA^2 h_t \sqrt{\pi} + 2aA^2 c_t \sqrt{\pi} (3a^2 + 2t^2 v^2) + 4a\epsilon A^2 \sqrt{\pi} c t v \left(36a^2 c^2 + 8c^2 t^2 v^2 - \frac{3}{a^2}\right) \\
 & \quad - \frac{8a\gamma A^4 a c v t \pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 & \quad - \frac{4a\gamma A^4 a^2 c v t \pi 2a}{\sigma 2\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 & \quad - \frac{4a\gamma A^4 a^2 c v t \pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[-\frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)\right] = 0 \quad (\text{I.81})
 \end{aligned}$$

ahora sumamos ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 & -2A^2 c_t a \sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2 v^2) + 2aA^2 c_t \sqrt{\pi} (3a^2 + 2t^2 v^2) \\
 & \quad - \frac{4\epsilon A^2 \sqrt{\pi} c t v}{a} (12a^4 c^2 + 8a^2 c^2 t^2 v^2 + 3) + 4a\epsilon A^2 \sqrt{\pi} c t v \left(36a^2 c^2 + 8c^2 t^2 v^2 - \frac{3}{a^2}\right) \\
 & \quad - \frac{4a\gamma A^4 a^2 c v t \pi 2a}{\sigma 2\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 & \quad - \frac{4a\gamma A^4 a^2 c v t \pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[-\frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)\right] = 0 \quad (\text{I.82})
 \end{aligned}$$

y simplificamos un poco:

$$\begin{aligned}
 & c_t (4A^2 a^3 \sqrt{\pi}) - 4a\epsilon A^2 \sqrt{\pi} c t v \left(12a^2 c^2 + 8c^2 t^2 v^2 + \frac{3}{a^2}\right) \\
 & \quad + 4a\epsilon A^2 \sqrt{\pi} c t v \left(36a^2 c^2 + 8c^2 t^2 v^2 - \frac{3}{a^2}\right) \\
 & \quad - \frac{4\gamma A^4 a^4 c v t \pi}{\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 & \quad + \frac{4\sqrt{2}\gamma A^4 a^3 c v t \sqrt{\pi}}{\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) = 0 \quad (\text{I.83})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_t (4A^2 a^3 \sqrt{\pi}) + 4a\epsilon A^2 \sqrt{\pi} c_t v \left(24a^2 c^2 - \frac{6}{a^2} \right) \\
 - \frac{4\gamma A^4 a^4 c v t \pi}{\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right) \right] \\
 + \frac{4\sqrt{2}\gamma A^4 a^3 c v t \sqrt{\pi}}{\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) = 0 \quad (\text{I.84})
 \end{aligned}$$

despejamos c_t

$$\begin{aligned}
 c_t = -\frac{\epsilon c_t v}{a^2} \left(24a^2 c^2 - \frac{6}{a^2} \right) + \frac{\gamma A^2 a c v t \sqrt{\pi}}{\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right) \right] \\
 - \frac{\sqrt{2}\gamma A^2 c v t}{\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{I.85})
 \end{aligned}$$

Derivada de h ; h_t

Con base en las ecuaciones para A y a en especial en los términos:

$$-4Ah_t a \sqrt{\pi} - 2Ac_t a \sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2 v^2) \quad , \quad -2A^2 h_t \sqrt{\pi} - A^2 c_t \sqrt{\pi} (3a^2 + 2t^2 v^2) \quad (\text{I.86})$$

multiplicamos la primera por $A(3a^2 + 2t^2 v^2)$ y la segunda por $-2a(a^2 + 2t^2 v^2)$ las cuales quedan como:

$$\begin{aligned}
 -4A^2 h_t a \sqrt{\pi} (3a^2 + 2t^2 v^2) - 2A^2 c_t a \sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2 v^2) (3a^2 + 2t^2 v^2) \\
 - \frac{4\epsilon A^2 \sqrt{\pi} c_t v}{a} (12a^4 c^2 + 8a^2 c^2 t^2 v^2 + 3) (3a^2 + 2t^2 v^2) \\
 + \frac{8\gamma A^4 a^2 c v t \pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right) \right] (3a^2 + 2t^2 v^2) = 0 \quad (\text{I.87})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + 4aA^2 h_t \sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2 v^2) + 2aA^2 c_t \sqrt{\pi} (3a^2 + 2t^2 v^2) (a^2 + 2t^2 v^2) \\
 + 4a\epsilon A^2 \sqrt{\pi} c_t v \left(36a^2 c^2 + 8c^2 t^2 v^2 - \frac{3}{a^2} \right) (a^2 + 2t^2 v^2) \\
 - \frac{8a\gamma A^4 a c v t \pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right) \right] (a^2 + 2t^2 v^2) \\
 - \frac{4a\gamma A^4 a^2 c v t \pi 2a}{\sigma 2\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right) \right] (a^2 + 2t^2 v^2) \\
 - \frac{4a\gamma A^4 a^2 c v t \pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[-\frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \right] (a^2 + 2t^2 v^2) = 0 \quad (\text{I.88})
 \end{aligned}$$

sumando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 & -4A^2 h_t a \sqrt{\pi} (3a^2 + 2t^2 v^2) + 4aA^2 h_t \sqrt{\pi} (a^2 + 2t^2 v^2) \\
 & \quad - \frac{4\epsilon A^2 \sqrt{\pi} ctv}{a} (12a^4 c^2 + 8a^2 c^2 t^2 v^2 + 3) (3a^2 + 2t^2 v^2) \\
 & \quad + \frac{8\gamma A^4 a^2 cvt\pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] (3a^2 + 2t^2 v^2) \\
 & \quad + 4a\epsilon A^2 \sqrt{\pi} ctv \left(36a^2 c^2 + 8c^2 t^2 v^2 - \frac{3}{a^2}\right) (a^2 + 2t^2 v^2) \\
 & \quad - \frac{8a\gamma A^4 acvt\pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] (a^2 + 2t^2 v^2) \\
 & \quad - \frac{4a\gamma A^4 a^2 cvt\pi 2a}{\sigma 2\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] (a^2 + 2t^2 v^2) \\
 & \quad - \frac{4a\gamma A^4 a^2 cvt\pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[-\frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)\right] (a^2 + 2t^2 v^2) = 0 \quad (\text{I.89})
 \end{aligned}$$

simplificando:

$$\begin{aligned}
 & -8A^2 a^3 \sqrt{\pi} h_t - \frac{4\epsilon A^2 \sqrt{\pi} ctv}{a} (12a^4 c^2 + 8a^2 c^2 t^2 v^2 + 3) (3a^2 + 2t^2 v^2) \\
 & \quad + \frac{4\epsilon A^2 \sqrt{\pi} ctv}{a} (36a^4 c^2 + 8a^2 c^2 t^2 v^2 - 3) (a^2 + 2t^2 v^2) \\
 & \quad + \frac{8\gamma A^4 a^2 cvt\pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] (2a^2) \\
 & \quad - \frac{4\gamma A^4 a^4 cvt\pi}{\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] (a^2 + 2t^2 v^2) \\
 & \quad + \frac{4\sqrt{2}\gamma A^4 a^3 cvt\sqrt{\pi}}{\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) (a^2 + 2t^2 v^2) = 0 \quad (\text{I.90})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -8A^2 a^3 \sqrt{\pi} h_t + \frac{4\epsilon A^2 \sqrt{\pi} ctv}{a} (32a^4 c^2 t^2 v^2 - 12a^2 - 12t^2 v^2) \\
 & \quad + \frac{16\gamma A^4 a^3 cvt\pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 & \quad - \frac{4\gamma A^4 a^4 cvt\pi}{\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] (a^2 + 2t^2 v^2) \\
 & \quad + \frac{4\sqrt{2}\gamma A^4 a^3 cvt\sqrt{\pi}}{\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) (a^2 + 2t^2 v^2) = 0 \quad (\text{I.91})
 \end{aligned}$$

despejamos h_t :

$$\begin{aligned}
 h_t = & + \frac{\epsilon ctv}{2a^4} (32a^4 c^2 t^2 v^2 - 12a^2 - 12t^2 v^2) \\
 & + \frac{2\gamma A^2 cvt \sqrt{\pi}}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 & - \frac{\gamma A^2 acvt \sqrt{\pi}}{2\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] (a^2 + 2t^2 v^2) \\
 & + \frac{\sqrt{2}\gamma A^2 cvt}{2\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) (a^2 + 2t^2 v^2) \quad (\text{I.92})
 \end{aligned}$$

Derivada de c ; c_t

Con base en la ecuación para v (la cual escribimos un poco simplificada) podemos obtener una segunda ecuación para c_t :

$$\begin{aligned}
 -4\sqrt{\pi}A^2 at^2 v c_t - \frac{2\epsilon A^2 \sqrt{\pi} ct}{a} (12a^4 c^2 + 24a^2 c^2 t^2 v^2 + 3) \\
 + \frac{2\gamma A^4 a^2 ct \pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] = 0 \quad (\text{I.93})
 \end{aligned}$$

despejamos c_t

$$c_t = -\frac{\epsilon c}{2a^2 tv} (12a^4 c^2 + 24a^2 c^2 t^2 v^2 + 3) + \frac{\gamma A^2 ac \sqrt{\pi}}{2tv\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \quad (\text{I.94})$$

Reducción de una variable

Con base en la ecuación para h se tiene que:

$$A^2 a = \text{constante} = A_0^2 a_0 = \alpha \quad (\text{I.95})$$

pensando en que para la solución tenga sentido ambas A y a deben ser positivas. Podemos despejar:

$$A^2 = \frac{\alpha}{a} \quad , \quad A = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}} \quad (\text{I.96})$$

con lo cual podemos reescribir las 3 ecuaciones que ya tenemos despejadas como:

$$c_t = -\frac{\epsilon ctv}{a^2} \left(24a^2c^2 - \frac{6}{a^2} \right) + \frac{\gamma\alpha cvt\sqrt{\pi}}{\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha cvt}{a\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{I.97})$$

$$h_t = +\frac{\epsilon ctv}{2a^4} (32a^4c^2t^2v^2 - 12a^2 - 12t^2v^2) + \frac{2\gamma\alpha cvt\sqrt{\pi}}{a\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] - \frac{\gamma\alpha cvt\sqrt{\pi}}{2\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] (a^2 + 2t^2v^2) + \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha cvt}{2a\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) (a^2 + 2t^2v^2) \quad (\text{I.98})$$

$$c_t = -\frac{\epsilon c}{2a^2tv} (12a^4c^2 + 24a^2c^2t^2v^2 + 3) + \frac{\gamma\alpha c\sqrt{\pi}}{2tv\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] \quad (\text{I.99})$$

Ecuación para v

Dado que tenemos 2 ecuaciones para c_t las podemos igualar y tratar de sacar una sola para v

$$\begin{aligned} & -\frac{\epsilon ctv}{a^2} \left(24a^2c^2 - \frac{6}{a^2} \right) + \frac{\gamma\alpha cvt\sqrt{\pi}}{\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] \\ & - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha cvt}{a\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \\ & = -\frac{\epsilon c}{2a^2tv} (12a^4c^2 + 24a^2c^2t^2v^2 + 3) \\ & \quad + \frac{\gamma\alpha c\sqrt{\pi}}{2tv\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] \quad (\text{I.100}) \end{aligned}$$

pasamos lo que tiene v del lado izquierdo y lo que tiene $\frac{1}{v}$ del lado izquierdo:

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{\epsilon ct}{a^2} \left(24a^2c^2 - \frac{6}{a^2} \right) + \frac{\gamma\alpha ct\sqrt{\pi}}{\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha ct}{a\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) + 12\epsilon c^3 t \right\} v \\ & = \frac{1}{v} \left\{ -\frac{\epsilon c}{2a^2t} (12a^4c^2 + 3) + \frac{\gamma\alpha c\sqrt{\pi}}{2t\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] \right\} \quad (\text{I.101}) \end{aligned}$$

que finalmente queda como:

$$v^2 = \frac{-\frac{\epsilon c}{2a^2t} (12a^4c^2 + 3) + \frac{\gamma\alpha c\sqrt{\pi}}{2t\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right]}{-\frac{\epsilon ct}{a^2} \left(12a^2c^2 - \frac{6}{a^2} \right) + \frac{\gamma\alpha ct\sqrt{\pi}}{\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha ct}{a\sigma^2}} \quad (\text{I.102})$$

Despeje de las derivadas

Derivada de a ; a_t

Tomando la ecuación para c y usando la simplificación de que $A^2a = \alpha$ se tiene:

$$\begin{aligned} -\frac{2\alpha\sqrt{\pi}tv}{a^2} (36a^4c^2 + 24a^2c^2t^2v^2 + 3) + \frac{2\gamma\alpha^2vt\pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] \\ + \sqrt{\pi} \frac{d}{dt} (\alpha a^2 + 2\alpha t^2v^2) = 0 \quad (\text{I.103}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{2\alpha\sqrt{\pi}tv}{a^2} (36a^4c^2 + 24a^2c^2t^2v^2 + 3) + \frac{2\gamma\alpha^2vt\pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] \\ + \alpha\sqrt{\pi} (2aa_t + 4tv^2 + 4t^2vv_t) = 0 \quad (\text{I.104}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{2\alpha\sqrt{\pi}tv}{a^2} (36a^4c^2 + 24a^2c^2t^2v^2 + 3) + \frac{2\gamma\alpha^2vt\pi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] \\ 2a\alpha\sqrt{\pi}a_t + 4\alpha\sqrt{\pi}tv^2 + 4\alpha\sqrt{\pi}t^2vv_t = 0 \quad (\text{I.105}) \end{aligned}$$

finalmente:

$$\begin{aligned} a_t = +\frac{tv}{a^3} (36a^4c^2 + 24a^2c^2t^2v^2 + 3) \\ - \frac{\gamma\alpha vt\sqrt{\pi}}{a\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] - \frac{2tv^2}{a} - \frac{2t^2vv_t}{a} \quad (\text{I.106}) \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones diferenciales

Resumiendo el sistema de ecuaciones diferenciales resultante es el siguiente:

$$c_t = -\frac{\epsilon ctv}{a^2} \left(24a^2c^2 - \frac{6}{a^2} \right) + \frac{\gamma\alpha cvt\sqrt{\pi}}{\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha cvt}{a\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{I.107})$$

$$h_t = +\frac{\epsilon ctv}{2a^4} (32a^4c^2t^2v^2 - 12a^2 - 12t^2v^2) + \frac{2\gamma\alpha cvt\sqrt{\pi}}{a\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] - \frac{\gamma\alpha cvt\sqrt{\pi}}{2\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] (a^2 + 2t^2v^2) + \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha cvt}{2a\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) (a^2 + 2t^2v^2) \quad (\text{I.108})$$

$$v^2 = \frac{-\frac{\epsilon c}{2a^2t} (12a^4c^2 + 3) + \frac{\gamma\alpha c\sqrt{\pi}}{2t\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right]}{-\frac{\epsilon ct}{a^2} (12a^2c^2 - \frac{6}{a^2}) + \frac{\gamma\alpha ct\sqrt{\pi}}{\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha ct}{a\sigma^2}} \quad (\text{I.109})$$

$$a_t = +\frac{tv}{a^3} (36a^4c^2 + 24a^2c^2t^2v^2 + 3) - \frac{\gamma\alpha vt\sqrt{\pi}}{a\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] - \frac{2tv^2}{a} - \frac{2t^2vv_t}{a} \quad (\text{I.110})$$

en forma simplificada tenemos que:

$$c_t = f_1(a, c, v, t) \quad (\text{I.111})$$

$$h_t = f_2(a, c, v, v^2, t) \quad (\text{I.112})$$

$$a_t = f_3(a, c, v, v^2, t) - \frac{2t^2vv_t}{a} \quad (\text{I.113})$$

sin embargo, también tenemos una expresión para v como

$$v^2 = g_1(a, c, t) \quad (\text{I.114})$$

de la cual también podríamos sacar funciones

$$v = g_2(a, c, t) \quad (\text{I.115})$$

$$vv_t = g_3(a, a_t, c, c_t, t) \quad (\text{I.116})$$

Derivada de v

partiendo de la ecuación para v^2

$$v^2 = \frac{-6\epsilon \frac{a^2 c^3}{t} - \frac{3\epsilon}{2} \frac{c}{a^2 t} + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{2\sigma} \frac{c}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right]}{-12\epsilon c^3 t + 6\epsilon \frac{ct}{a^4} + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{\sigma^3} c t \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] - \frac{\sqrt{2}\gamma \alpha}{\sigma^2} \frac{ct}{a}} \quad (\text{I.117})$$

$$\begin{aligned} & 2vv_t \left\{ -12\epsilon c^3 t + 6\epsilon \frac{ct}{a^4} + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{\sigma^3} c t \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] - \frac{\sqrt{2}\gamma \alpha}{\sigma^2} \frac{ct}{a} \right\}^2 \\ &= - \left\{ -12\epsilon c^3 - 36\epsilon c^2 c_t t + 6\epsilon \frac{c}{a^4} + 6\epsilon \frac{c_t t}{a^4} - 24\epsilon \frac{ct}{a^5} a_t \right. \\ &+ \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{\sigma^3} c \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{\sigma^3} c_t t \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\ &+ \frac{2aa_t \gamma \alpha \sqrt{\pi}}{2\sigma^2 \sigma^3} c t \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{\sigma^3} c t \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} a_t \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \right] \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{2}\gamma \alpha}{\sigma^2} \frac{c}{a} - \frac{\sqrt{2}\gamma \alpha}{\sigma^2} \frac{c_t t}{a} + \frac{\sqrt{2}\gamma \alpha}{\sigma^2} \frac{ct}{a^2} a_t \right\} \\ &\quad \left\{ -6\epsilon \frac{a^2 c^3}{t} - \frac{3\epsilon}{2} \frac{c}{a^2 t} + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{2\sigma} \frac{c}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \right\} \\ &+ \left\{ -12\epsilon c^3 t + 6\epsilon \frac{ct}{a^4} + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{\sigma^3} c t \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] - \frac{\sqrt{2}\gamma \alpha}{\sigma^2} \frac{ct}{a} \right\} \\ &\quad \left\{ 6\epsilon \frac{a^2 c^3}{t^2} - 6\epsilon \frac{2aa_t c^3}{t} - 6\epsilon \frac{a^2 3c^2 c_t}{t} + \frac{3\epsilon}{2} \frac{c}{a^2 t^2} - \frac{3\epsilon}{2} \frac{c_t}{a^2 t} + 3\epsilon \frac{c}{a^3 t} a_t \right. \\ &- \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{2\sigma} \frac{c}{t^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{2\sigma} \frac{c_t}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\ &\left. + \frac{2aa_t \gamma \alpha \sqrt{\pi}}{2\sigma^2 2\sigma} \frac{c}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{2\sigma} \frac{c}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} a_t \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \right] \right\} \quad (\text{I.118}) \end{aligned}$$

para simplificar un poco la notación definimos las siguientes funciones:
el numerador de v^2

$$f_5 = f_5(a, c, t) = -6\epsilon \frac{a^2 c^3}{t} - \frac{3\epsilon}{2} \frac{c}{a^2 t} + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{2\sigma} \frac{c}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \quad (\text{I.119})$$

el denominador de v^2

$$\begin{aligned}
 f_6 &= f_6(a, c, t) \\
 &= -12\epsilon c^3 t + 6\epsilon \frac{ct}{a^4} + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{\sigma^3} c t \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha}{\sigma^2} \frac{ct}{a} \quad (\text{I.120})
 \end{aligned}$$

con lo cual la ecuación anterior se simplifica un poco como:

$$\begin{aligned}
 2vv_t f_6^2 &= - \left\{ -12\epsilon c^3 - 36\epsilon c^2 c_t t + 6\epsilon \frac{c}{a^4} + 6\epsilon \frac{c_t t}{a^4} - 24\epsilon \frac{ct}{a^5} a_t \right. \\
 &+ \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{\sigma^3} c \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{\sigma^3} c_t t \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 &+ \frac{2aa_t\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{2\sigma^2\sigma^3} c t \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{\sigma^3} c t \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} a_t \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \right] \\
 &\quad \left. - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha}{\sigma^2} \frac{c}{a} - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha}{\sigma^2} \frac{c_t t}{a} + \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha}{\sigma^2} \frac{ct}{a^2} a_t \right\} f_5 \\
 &+ \left\{ 6\epsilon \frac{a^2 c^3}{t^2} - 6\epsilon \frac{2aa_t c^3}{t} - 6\epsilon \frac{a^2 3c^2 c_t}{t} + \frac{3\epsilon}{2} \frac{c}{a^2 t^2} - \frac{3\epsilon}{2} \frac{c_t}{a^2 t} + 3\epsilon \frac{c}{a^3 t} a_t \right. \\
 &- \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{2\sigma} \frac{c}{t^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{2\sigma} \frac{c_t}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 &\quad + \frac{2aa_t\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{2\sigma^2 2\sigma} \frac{c}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 &\quad \left. + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{2\sigma} \frac{c}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} a_t \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \right] \right\} f_6 \quad (\text{I.121})
 \end{aligned}$$

luego agrupamos los términos que contienen a_t

$$\begin{aligned}
 2vv_t f_6^2 = & - \left\{ -24\epsilon \frac{ct}{a^5} a_t + \frac{2aa_t \gamma \alpha \sqrt{\pi}}{2\sigma^2 \sigma^3} ct \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \right. \\
 & \left. + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{\sigma^3} ct \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} a_t\right) + \frac{\sqrt{2}\gamma \alpha}{\sigma^2} \frac{ct}{a^2} a_t \right. \\
 & \left. + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{\sigma^3} c \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{\sigma^3} c_t \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \right. \\
 & \left. - 12\epsilon c^3 - 36\epsilon c^2 c_t t + 6\epsilon \frac{c}{a^4} + 6\epsilon \frac{c_t t}{a^4} - \frac{\sqrt{2}\gamma \alpha}{\sigma^2} \frac{c}{a} - \frac{\sqrt{2}\gamma \alpha}{\sigma^2} \frac{c_t t}{a} \right\} f_5 \\
 & + \left\{ -6\epsilon \frac{2aa_t c^3}{t} + 3\epsilon \frac{c}{a^3 t} a_t + \frac{2aa_t \gamma \alpha \sqrt{\pi} c}{2\sigma^2 2\sigma} \frac{c}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi} c}{2\sigma} \frac{c}{t} \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} a_t\right) \right. \\
 & \left. + 6\epsilon \frac{a^2 c^3}{t^2} - 6\epsilon \frac{a^2 3c^2 c_t}{t} + \frac{3\epsilon}{2} \frac{c}{a^2 t^2} - \frac{3\epsilon}{2} \frac{c_t}{a^2 t} - \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi} c}{2\sigma} \frac{c}{t^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \right. \\
 & \left. + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi} c_t}{2\sigma} \frac{c_t}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \right\} f_6 \quad (\text{I.122})
 \end{aligned}$$

definiendo ahora:

$$\begin{aligned}
 f_7 = f_7(a, c, t) = & -24\epsilon \frac{ct}{a^5} + \frac{2a\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{2\sigma^2 \sigma^3} ct \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 & + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{\sigma^3} ct \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}\right) + \frac{\sqrt{2}\gamma \alpha}{\sigma^2} \frac{ct}{a^2} \quad (\text{I.123})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_8 = f_8(a, c, t) = & -6\epsilon \frac{2ac^3}{t} + 3\epsilon \frac{c}{a^3 t} \\
 & + \frac{2a\gamma \alpha \sqrt{\pi} c}{2\sigma^2 2\sigma} \frac{c}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi} c}{2\sigma} \frac{c}{t} \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}\right) \quad (\text{I.124})
 \end{aligned}$$

se puede simplificar aún más la ecuación de arriba:

$$\begin{aligned}
 2vv_t f_6^2 = & - \left\{ f_7 a_t + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{\sigma^3} c \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \right. \\
 & + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{\sigma^3} c_t t \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 & \left. - 12\epsilon c^3 - 36\epsilon c^2 c_t t + 6\epsilon \frac{c}{a^4} + 6\epsilon \frac{c_t t}{a^4} - \frac{\sqrt{2}\gamma \alpha c}{\sigma^2 a} - \frac{\sqrt{2}\gamma \alpha c_t t}{\sigma^2 a} \right\} f_5 \\
 & + \left\{ f_8 a_t + 6\epsilon \frac{a^2 c^3}{t^2} - 6\epsilon \frac{a^2 3c^2 c_t}{t} + \frac{3\epsilon c}{2 a^2 t^2} - \frac{3\epsilon c_t}{2 a^2 t} \right. \\
 & - \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi} c}{2\sigma} \frac{1}{t^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 & \left. + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi} c_t}{2\sigma} \frac{1}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \right\} f_6 \quad (\text{I.125})
 \end{aligned}$$

luego definimos:

$$\begin{aligned}
 f_9 = f_9(a, c, c_t, t) = & + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{\sigma^3} c \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 & + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi}}{\sigma^3} c_t t \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 & - 12\epsilon c^3 - 36\epsilon c^2 c_t t + 6\epsilon \frac{c}{a^4} + 6\epsilon \frac{c_t t}{a^4} - \frac{\sqrt{2}\gamma \alpha c}{\sigma^2 a} - \frac{\sqrt{2}\gamma \alpha c_t t}{\sigma^2 a} \quad (\text{I.126})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{10} = f_{10}(a, c, c_t, t) = & + 6\epsilon \frac{a^2 c^3}{t^2} - 6\epsilon \frac{a^2 3c^2 c_t}{t} + \frac{3\epsilon c}{2 a^2 t^2} - \frac{3\epsilon c_t}{2 a^2 t} \\
 & - \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi} c}{2\sigma} \frac{1}{t^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \\
 & + \frac{\gamma \alpha \sqrt{\pi} c_t}{2\sigma} \frac{1}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sigma}\right)\right] \quad (\text{I.127})
 \end{aligned}$$

con lo cual queda simplemente:

$$2vv_t f_6^2 = -(f_7 a_t + f_9) f_5 + (f_8 a_t + f_{10}) f_6 \quad (\text{I.128})$$

$$2vv_t f_6^2 = (f_6 f_8 - f_5 f_7) a_t + (f_6 f_{10} - f_5 f_9) \quad (\text{I.129})$$

$$2vv_t = \frac{(f_6 f_8 - f_5 f_7)}{f_6^2} a_t + \frac{(f_6 f_{10} - f_5 f_9)}{f_6^2} \quad (\text{I.130})$$

Derivada de a ; a_t

Entonces la ecuación para a_t queda como:

$$a_t = f_3(a, c, v, v^2, t) - \frac{2t^2vv_t}{a} \quad (\text{I.131})$$

$$a_t = f_3 - \frac{t^2}{a} \left[\frac{(f_6f_8 - f_5f_7)}{f_6^2} a_t + \frac{(f_6f_{10} - f_5f_9)}{f_6^2} \right] \quad (\text{I.132})$$

$$a_t + \frac{t^2}{a} \frac{(f_6f_8 - f_5f_7)}{f_6^2} a_t = f_3 - \frac{t^2}{a} \frac{(f_6f_{10} - f_5f_9)}{f_6^2} \quad (\text{I.133})$$

$$\left[1 + \frac{t^2}{a} \frac{(f_6f_8 - f_5f_7)}{f_6^2} \right] a_t = f_3 - \frac{t^2}{a} \frac{(f_6f_{10} - f_5f_9)}{f_6^2} \quad (\text{I.134})$$

$$a_t = \frac{f_3 - \frac{t^2}{a} \frac{(f_6f_{10} - f_5f_9)}{f_6^2}}{1 + \frac{t^2}{a} \frac{(f_6f_8 - f_5f_7)}{f_6^2}} \quad (\text{I.135})$$

$$a_t = \frac{af_3f_6^2 - t^2(f_6f_{10} - f_5f_9)}{af_6^2 + t^2(f_6f_8 - f_5f_7)} \quad (\text{I.136})$$

con lo cual el sistema de ecuaciones diferenciales está completo.

Resumen

$$\begin{aligned} f_1(a, c, v, t) = & -\frac{\epsilon ctv}{a^2} \left(24a^2c^2 - \frac{6}{a^2} \right) \\ & + \frac{\gamma\alpha cvt\sqrt{\pi}}{\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha cvt}{a\sigma^2} \end{aligned} \quad (\text{I.137})$$

$$\begin{aligned} f_2(a, c, v, v^2, t) = & +\frac{\epsilon ctv}{2a^4} (32a^4c^2t^2v^2 - 12a^2 - 12t^2v^2) \\ & + \frac{2\gamma\alpha cvt\sqrt{\pi}}{a\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] \\ & - \frac{\gamma\alpha cvt\sqrt{\pi}}{2\sigma^3} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right) \right] (a^2 + 2t^2v^2) \\ & + \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha cvt}{2a\sigma^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) (a^2 + 2t^2v^2) \end{aligned} \quad (\text{I.138})$$

$$f_3(a, c, v, v^2, t) = +\frac{tv}{a^3} (36a^4c^2 + 24a^2c^2t^2v^2 + 3) - \frac{\gamma\alpha vt\sqrt{\pi}}{a\sigma} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right)\right] - \frac{2tv^2}{a} \quad (\text{I.139})$$

$$f_5 = f_5(a, c, t) = -6\epsilon \frac{a^2c^3}{t} - \frac{3\epsilon}{2} \frac{c}{a^2t} + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}c}{2\sigma} \frac{c}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right)\right] \quad (\text{I.140})$$

$$f_6 = f_6(a, c, t) = -12\epsilon c^3t + 6\epsilon \frac{ct}{a^4} + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{\sigma^3} ct \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right)\right] - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha}{\sigma^2} \frac{ct}{a} \quad (\text{I.141})$$

$$f_7 = f_7(a, c, t) = -24\epsilon \frac{ct}{a^5} + \frac{2a\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{2\sigma^2\sigma^3} ct \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{\sigma^3} ct \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}\right) + \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha}{\sigma^2} \frac{ct}{a^2} \quad (\text{I.142})$$

$$f_8 = f_8(a, c, t) = -6\epsilon \frac{2ac^3}{t} + 3\epsilon \frac{c}{a^3t} + \frac{2a\gamma\alpha\sqrt{\pi}c}{2\sigma^22\sigma} \frac{c}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}c}{2\sigma} \frac{c}{t} \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}\right) \quad (\text{I.143})$$

$$f_9 = f_9(a, c, c_t, t) = +\frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{\sigma^3} c \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{\sigma^3} c_t t \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right)\right] - 12\epsilon c^3 - 36\epsilon c^2 c_t t + 6\epsilon \frac{c}{a^4} + 6\epsilon \frac{c_t t}{a^4} - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha}{\sigma^2} \frac{c}{a} - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha}{\sigma^2} \frac{c_t t}{a} \quad (\text{I.144})$$

$$f_{10} = f_{10}(a, c, c_t, t) = +6\epsilon \frac{a^2c^3}{t^2} - 6\epsilon \frac{a^23c^2c_t}{t} + \frac{3\epsilon}{2} \frac{c}{a^2t^2} - \frac{3\epsilon}{2} \frac{c_t}{a^2t} - \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}c}{2\sigma} \frac{c}{t^2} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right)\right] + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}c_t}{2\sigma} \frac{c_t}{t} \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right)\right] \quad (\text{I.145})$$

luego:

$$v^2 = \frac{f_5}{f_6} \quad (\text{I.146})$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{f_5}{f_6}} \quad (\text{I.147})$$

$$c_t = f_1 \quad (\text{I.148})$$

$$h_t = f_2 \quad (\text{I.149})$$

$$a_t = \frac{af_3f_6^2 - t^2(f_6f_{10} - f_5f_9)}{af_6^2 + t^2(f_6f_8 - f_5f_7)} \quad (\text{I.150})$$

también parece conveniente definir:

$$f_{11}(a) = \exp\left(\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sigma}\right)\right] \quad (\text{I.151})$$

y entonces tenemos:

$$f_1 = -\frac{\epsilon ctv}{a^2} \left(24a^2c^2 - \frac{6}{a^2}\right) + \frac{\gamma\alpha cvt\sqrt{\pi}}{\sigma^3} f_{11} - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha cvt}{a\sigma^2} \quad (\text{I.152})$$

$$\begin{aligned} f_2 = & +\frac{\epsilon ctv}{2a^4} (32a^4c^2t^2v^2 - 12a^2 - 12t^2v^2) \\ & + \left[\frac{2\gamma\alpha cvt\sqrt{\pi}}{a\sigma} - \frac{\gamma\alpha cvt\sqrt{\pi}}{2\sigma^3} (a^2 + 2t^2v^2) \right] f_{11} + \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha cvt}{2a\sigma^2} (a^2 + 2t^2v^2) \end{aligned} \quad (\text{I.153})$$

$$f_3 = +\frac{tv}{a^3} (36a^4c^2 + 24a^2c^2t^2v^2 + 3) - \frac{\gamma\alpha vt\sqrt{\pi}}{a\sigma} f_{11} - \frac{2tv^2}{a} \quad (\text{I.154})$$

$$f_5 = -6\epsilon \frac{a^2c^3}{t} - \frac{3\epsilon}{2} \frac{c}{a^2t} + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}c}{2\sigma} \frac{c}{t} f_{11} \quad (\text{I.155})$$

$$f_6 = -12\epsilon c^3t + 6\epsilon \frac{ct}{a^4} + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{\sigma^3} ct f_{11} - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha ct}{\sigma^2} \frac{ct}{a} \quad (\text{I.156})$$

$$f_7 = -24\epsilon \frac{ct}{a^5} + \frac{2a\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{2\sigma^2\sigma^3} ct f_{11} + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{\sigma^3} ct \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma}\right) + \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha ct}{\sigma^2} \frac{ct}{a^2} \quad (\text{I.157})$$

$$f_8 = -6\epsilon \frac{2ac^3}{t} + 3\epsilon \frac{c}{a^3t} + \frac{2a\gamma\alpha\sqrt{\pi}c}{2\sigma^2 2\sigma} \frac{c}{t} f_{11} - \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}c}{2\sigma} \frac{c}{t} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} \right) \quad (\text{I.158})$$

$$f_9 = +\frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{\sigma^3} c f_{11} + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}}{\sigma^3} f_1 t f_{11} - 12\epsilon c^3 - 36\epsilon c^2 f_1 t + 6\epsilon \frac{c}{a^4} + 6\epsilon \frac{f_1 t}{a^4} - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha c}{\sigma^2} \frac{c}{a} - \frac{\sqrt{2}\gamma\alpha f_1 t}{\sigma^2} \frac{f_1}{a} \quad (\text{I.159})$$

$$f_{10} = +6\epsilon \frac{a^2 c^3}{t^2} - 6\epsilon \frac{a^2 3c^2 f_1}{t} + \frac{3\epsilon c}{2 a^2 t^2} - \frac{3\epsilon f_1}{2 a^2 t} - \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}c}{2\sigma} \frac{c}{t^2} f_{11} + \frac{\gamma\alpha\sqrt{\pi}f_1}{2\sigma} \frac{f_1}{t} f_{11} \quad (\text{I.160})$$

I.2. Ecuación LN1

Para empezar a aplicar el método variacional, comenzamos por sustituir la función de prueba (3.27):

$$u(x, t) = A \exp \left[\frac{-(x-w)^2}{2a^2} \right] \exp \{ i [p + q(x-w) + r(x-w)^2] \} \quad (\text{I.161})$$

en la densidad Lagrangiana (3.2):

$$\mathcal{L} = -Im[u^* u_t] + |u_x|^2 - |u|^2 Re[u(x, t) u^*(-x, t)] \quad (\text{I.162})$$

estamos considerando que A , a , w , p , q y r son funciones del tiempo, al sustituir la función de prueba (I.161) en la densidad lagrangiana (I.162) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & -A^2 p' \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] - xA^2 q' \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] + A^2 w q' \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] \\
 & - A^4 \exp \left[-\frac{2(-xw + w^2 + x^2)}{a^2} \right] \cos [2x(q - 2rw)] \\
 & + 4xA^2 q r \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] - 4A^2 q r w \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] + A^2 q w' \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] \\
 & + A^2 q^2 \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] - x^2 A^2 r' \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] - A^2 w^2 r' \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] \\
 & + 2xA^2 w r' \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] + 2xA^2 r w' \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] \\
 & - 2A^2 r w w' \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] + 4x^2 A^2 r^2 \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] + 4A^2 r^2 w^2 \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] \\
 & - 8xA^2 r^2 w \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] + \frac{x^2 A^2 \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right]}{a^4} \\
 & + \frac{A^2 w^2 \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right]}{a^4} - \frac{2xA^2 w \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right]}{a^4} \quad (I.163)
 \end{aligned}$$

aquí, la prima denota la derivada con respecto al tiempo.

Ahora debemos integrar con respecto a x , para obtener la lagrangiana promediada L . En la ecuación (I.163) podemos observar que las integrales que necesitaremos calcular son:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} a (a^2 + 2w^2) \quad (I.164)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] dx = \sqrt{\pi} a w \quad (I.165)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] dx = \sqrt{\pi} a \quad (I.166)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2(w^2 - wx + x^2)}{a^2} \right] \cos [2x(q - 2rw)] dx \quad (I.167)$$

en esta última integral no se puede resolver exactamente, sin embargo, el factor dominante es la función exponencial decreciente, por lo cual podemos tomar una aproximación en serie de Taylor de la función coseno:

$$\cos [2x(q - 2rw)] \approx 1 - \frac{1}{2} [2x(q - 2rw)]^2 \quad (I.168)$$

con lo cual la integral (I.167) se puede calcular de manera aproximada como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2(w^2 - wx + x^2)}{a^2} \right] \left\{ 1 - \frac{1}{2} [2x(q - 2rw)]^2 \right\} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} a [2 - (a^2 + w^2)(q - 2rw)^2] \exp \left(-\frac{3w^2}{2a^2} \right) \quad (\text{I.169})$$

entonces, la lagrangiana promediada queda como:

$$\begin{aligned} L(A, a, w, w', p', q, q', r, r') = & -\frac{1}{2} A^4 \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} a [2 - (a^2 + w^2)(q - 2rw)^2] \right\} \exp \left(-\frac{3w^2}{2a^2} \right) \\ & + \frac{4}{2} A^2 r^2 [\sqrt{\pi} a (a^2 + 2w^2)] - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} a A^2 r' (a^2 + 2w^2) + \frac{A^2 [\sqrt{\pi} a (a^2 + 2w^2)]}{2a^4} \\ & + \frac{(\sqrt{\pi} a) A^2 w^2}{a^4} - \frac{2A^2 w (\sqrt{\pi} a w)}{a^4} - (\sqrt{\pi} a) A^2 p' + (\sqrt{\pi} a) A^2 q^2 \\ & - 4 (\sqrt{\pi} a) A^2 q r w + 4A^2 q r (\sqrt{\pi} a w) + (\sqrt{\pi} a) A^2 q w' - A^2 q' (\sqrt{\pi} a w) \\ & + (\sqrt{\pi} a) A^2 q' w + 4 (\sqrt{\pi} a) A^2 r^2 w^2 - 8A^2 r^2 w (\sqrt{\pi} a w) - 2 (\sqrt{\pi} a) A^2 r w w' \\ & + 2A^2 r w' (\sqrt{\pi} a w) - (\sqrt{\pi} a) A^2 r' w^2 + 2A^2 r' w (\sqrt{\pi} a w) \quad (\text{I.170}) \end{aligned}$$

Con esta lagrangiana promediada, podemos sacar las ecuaciones de movimiento para las variables A , a , w , p , q y r , utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange de una sola variable:

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right) = 0 \quad (\text{I.171})$$

siendo f una coordenada generalizada que en este caso corresponde a cualquiera de las variables A , a , w , p , q y r , por lo tanto, obtendremos un sistema de seis ecuaciones diferenciales.

De la ecuación de Euler-Lagrange para A , obtenemos:

$$\begin{aligned} a^2 \left\{ \sqrt{2} A^2 (q^2 w^2 - 4q r w^3 + 4r^2 w^4 - 2) - 2 [p' - q(q + w')] \exp \left(\frac{3w^2}{2a^2} \right) \right\} \\ + a^4 \left[(4r^2 - r') \exp \left(\frac{3w^2}{2a^2} \right) + \sqrt{2} A^2 (q - 2rw)^2 \right] + \exp \left(\frac{3w^2}{2a^2} \right) = 0 \quad (\text{I.172}) \end{aligned}$$

de la ecuación de Euler-Lagrange para a , obtenemos:

$$\begin{aligned} 2a^2 \left\{ \sqrt{2} A^2 (2q^2 w^2 - 8q r w^3 + 8r^2 w^4 - 1) - 2 [p' - q(q + w')] \exp \left(\frac{3w^2}{2a^2} \right) \right\} \\ + 3a^4 \left(2 (4r^2 - r') \exp \left(\frac{3w^2}{2a^2} \right) + \sqrt{2} A^2 (q - 2rw)^2 \right) - 2 \exp \left(\frac{3w^2}{2a^2} \right) \\ + 3\sqrt{2} A^2 w^2 (q^2 w^2 - 4q r w^3 + 4r^2 w^4 - 2) = 0 \quad (\text{I.173}) \end{aligned}$$

de la ecuación de Euler-Lagrange para q , obtenemos:

$$\sqrt{2}a^2 A^3(q - 2rw) + 2A(2q + w') \exp\left(\frac{3w^2}{2a^2}\right) + \sqrt{2}A^3w^2(q - 2rw) = 0 \quad (\text{I.174})$$

de la ecuación de Euler-Lagrange para w , obtenemos:

$$\begin{aligned} a^2 \left[4Aq' \exp\left(\frac{3w^2}{2a^2}\right) + 8A'q \exp\left(\frac{3w^2}{2a^2}\right) + \sqrt{2}A^3w(q^2 - 4r^2w^2) \right] \\ + 4\sqrt{2}a^4 A^3r(q - 2rw) + 4aAa'q \exp\left(\frac{3w^2}{2a^2}\right) \\ + 3\sqrt{2}A^3w(q^2w^2 - 4qrw^3 + 4r^2w^4 - 2) = 0 \quad (\text{I.175}) \end{aligned}$$

de la ecuación de Euler-Lagrange para r , obtenemos:

$$\begin{aligned} 2a^2 \left[4Ar \exp\left(\frac{3w^2}{2a^2}\right) + A' \exp\left(\frac{3w^2}{2a^2}\right) + \sqrt{2}A^3w(2rw - q) \right] \\ + 3aAa' \exp\left(\frac{3w^2}{2a^2}\right) + 2\sqrt{2}A^3w^3(2rw - q) = 0 \quad (\text{I.176}) \end{aligned}$$

de la ecuación de Euler-Lagrange para r , obtenemos:

$$2aA' + Aa' = 0 \quad (\text{I.177})$$

De la ec. (I.174) podemos despejar w' :

$$w' = -2q + \frac{1}{\sqrt{2}}A^2(-q + 2rw)(a^2 + w^2) \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (\text{I.178})$$

que es justamente la ec. (3.44), si ahora combinamos las ecuaciones (I.172) e (I.178) obtenemos:

$$\begin{aligned} 2a^2 \left[(p' + q^2) \exp\left(\frac{3w^2}{2a^2}\right) + \sqrt{2}A^2(qrw^3 - 2r^2w^4 + 1) \right] \\ + a^4 \left[(r' - 4r^2) \exp\left(\frac{3w^2}{2a^2}\right) + 2\sqrt{2}A^2rw(q - 2rw) \right] - \exp\left(\frac{3w^2}{2a^2}\right) = 0 \quad (\text{I.179}) \end{aligned}$$

pero si combinamos las ecuaciones (I.173) e (I.178) obtenemos:

$$\begin{aligned} 2a^2 \left[\sqrt{2}A^2(q^2w^2 - 6qrw^3 + 8r^2w^4 - 1) - 2(p' + q^2) \exp\left(\frac{3w^2}{2a^2}\right) \right] \\ + a^4 \left[6(4r^2 - r') \exp\left(\frac{3w^2}{2a^2}\right) + \sqrt{2}A^2(q^2 - 8qrw + 12r^2w^2) \right] \\ - 2 \exp\left(\frac{3w^2}{2a^2}\right) + 3\sqrt{2}A^2w^2(q^2w^2 - 4qrw^3 + 4r^2w^4 - 2) = 0 \quad (\text{I.180}) \end{aligned}$$

combinando ahora las ecuaciones (I.179) e (I.180) podemos obtener una ecuación para p' y otra para r' :

$$p' = \frac{1}{a^2} - q^2 - \frac{A^2}{4\sqrt{2}a^2} [a^4 (q - 2rw)(q + 6rw) + 2a^2 (5 + q^2w^2 - 4r^2w^4) + 3w^2 (-2 + w^2 (q - 2rw)^2)] \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (\text{I.181})$$

$$r' = \frac{1}{4a^4} \left\{ -4 + 16a^4r^2 + \sqrt{2}A^2 \{a^4 (q - 2rw)^2 + 3w^2 (-2 + w^2 (q - 2rw)^2) + 2a^2 [1 + w^2 (q - 2rw)^2]\} \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \right\} \quad (\text{I.182})$$

que son las ecuaciones (3.45) y (3.47) respectivamente.

De igual manera, al combinar las ecuaciones (I.176) e (I.177) podemos obtener una ecuación para A' y otra para a' :

$$A' = 2Ar + \frac{1}{\sqrt{2}a^2} A^3 w (-q + 2rw) (a^2 + w^2) \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (\text{I.183})$$

$$a' = -4ar + \frac{1}{a} \sqrt{2} A^2 w (q - 2rw) (a^2 + w^2) \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (\text{I.184})$$

que son las ecuaciones (3.42) y (3.43) respectivamente.

Finalmente si sustituimos las ecuaciones (I.183) e (I.184) en la ec. (I.175) podemos obtener una ecuación para q' :

$$q' = \frac{A^2}{2\sqrt{2}a^2} \{6w - (q - 2rw) [4a^4r + 3w^3 (q - 2rw) + a^2w (q + 2rw)]\} \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (\text{I.185})$$

que es justamente la ec. (3.46)

I.2.1. Solución variacional numérica LN1

Aquí, presentamos la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales (3.42)-(3.47), para ello utilizamos el software Wolfram Mathematica 12.1 y la instrucción NDSolve.

Para poder usar NDSolve, necesitamos el sistema de ecuaciones diferenciales(3.42)-(3.47):

$$A' = 2Ar + \frac{1}{\sqrt{2}a^2} A^3 w (-q + 2rw) (a^2 + w^2) \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (\text{I.186})$$

$$a' = -4ar + \frac{1}{a} \sqrt{2} A^2 w (q - 2rw) (a^2 + w^2) \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (\text{I.187})$$

$$w' = -2q + \frac{1}{\sqrt{2}} A^2 (-q + 2rw) (a^2 + w^2) \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (\text{I.188})$$

$$p' = \frac{1}{a^2} - q^2 - \frac{A^2}{4\sqrt{2}a^2} \left\{ a^4 (q - 2rw) (q + 6rw) + 2a^2 (5 + q^2 w^2 - 4r^2 w^4) + 3w^2 [-2 + w^2 (q - 2rw)^2] \right\} \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (\text{I.189})$$

$$q' = \frac{A^2}{2\sqrt{2}a^2} \left\{ 6w - (q - 2rw) [4a^4 r + 3w^3 (q - 2rw) + a^2 w (q + 2rw)] \right\} \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \quad (\text{I.190})$$

$$r' = \frac{1}{4a^4} \left\{ -4 + 16a^4 r^2 + \sqrt{2} A^2 \left\{ a^4 (q - 2rw)^2 + 3w^2 (-2 + w^2 (q - 2rw)^2) + 2a^2 [1 + w^2 (q - 2rw)^2] \right\} \exp\left(\frac{-3w^2}{2a^2}\right) \right\} \quad (\text{I.191})$$

las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} q(0) &= -0.33132, & A(0) &= 1, & a(0) &= 1.2, \\ w(0) &= 0, & p(0) &= 0 & y & r(0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.192})$$

y el dominio de las funciones:

$$t \in [0, 100] \quad (\text{I.193})$$

Para elegir el valor de $q(0)$ mostrado en (I.192), se tomó en cuenta que la ecuación (I.188) representa la velocidad del pulso, por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} V_0 = w'(0) &= -2q(0) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} A(0)^2 [-q(0) + 2r(0)w(0)] [a(0)^2 + w(0)^2] \exp\left(\frac{-3w(0)^2}{2a(0)^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{I.194})$$

tomando en cuenta el resto de condiciones iniciales mostrados en (I.192) y simplificando los términos que valen uno o cero.

$$V_0 = -2q(0) - \frac{q(0)}{\sqrt{2}}(1.2)^2 \quad (\text{I.195})$$

factorizando $q(0)$ queda:

$$V_0 = q(0) \left[-2 - \frac{(1.2)^2}{\sqrt{2}} \right] \quad (\text{I.196})$$

finalmente obtenemos:

$$q(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + (1.2)^2} V_0 \quad (\text{I.197})$$

escrito en notación decimal:

$$q(0) = -0.33132V_0 \quad (\text{I.198})$$

En la figura I.1 mostramos el código utilizado para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales (3.42)-(3.47).

```

s = NDSolve[ {A'[t] == 2 A[t] × r[t] +  $\frac{A[t]^3 e^{-\frac{3w[t]^2}{2a[t]^2}} w[t] (-q[t] + 2 r[t] \times w[t]) (a[t]^2 + w[t]^2)}{\sqrt{2} a[t]^2}$ ,
|resolvedor diferencial numérico
a'[t] == -4 a[t] × r[t] +  $\frac{\sqrt{2} A[t]^2 e^{-\frac{3w[t]^2}{2a[t]^2}} w[t] (q[t] - 2 r[t] \times w[t]) (a[t]^2 + w[t]^2)}{a[t]}$ ,
w'[t] == -2 q[t] +  $\frac{A[t]^2 e^{-\frac{3w[t]^2}{2a[t]^2}} (-q[t] + 2 r[t] \times w[t]) (a[t]^2 + w[t]^2)}{\sqrt{2}}$ ,
q'[t] ==  $\frac{1}{2 \sqrt{2} a[t]^2} A[t]^2 e^{-\frac{3w[t]^2}{2a[t]^2}} (6w[t] - (q[t] - 2 r[t] \times w[t])$ 
(4 a[t]^4 r[t] + 3 w[t]^3 (q[t] - 2 r[t] × w[t]) + a[t]^2 w[t] (q[t] + 2 r[t] × w[t]))),
r'[t] ==  $\frac{1}{4 a[t]^4} (-4 + 16 a[t]^4 r[t]^2 + \sqrt{2} A[t]^2 e^{-\frac{3w[t]^2}{2a[t]^2}} (a[t]^4 (q[t] - 2 r[t] \times w[t])^2 + 3 w[t]^2$ 
(-2 + w[t]^2 (q[t] - 2 r[t] × w[t])^2) + 2 a[t]^2 (1 + w[t]^2 (q[t] - 2 r[t] × w[t])^2))),
p'[t] ==  $\frac{1}{a[t]^2} - q[t]^2 - \frac{1}{4 \sqrt{2} a[t]^2} A[t]^2 e^{-\frac{3w[t]^2}{2a[t]^2}} (a[t]^4 (q[t] - 2 r[t] \times w[t])$ 
(q[t] + 6 r[t] × w[t]) + 2 a[t]^2 (5 + q[t]^2 w[t]^2 - 4 r[t]^2 w[t]^4) +
3 w[t]^2 (-2 + w[t]^2 (q[t] - 2 r[t] × w[t])^2)), A[0] == 1, a[0] == 1.2,
w[0] == 0, p[0] == 0, q[0] == -0.33132, r[0] == 0}, {A, a, w, p, q, r}, {t, tmax}]

```

Figura I.1: Código de Wolfram Mathematica 12.1 utilizado para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales (3.42)-(3.47).

I.3. Ecuación LN2

El procedimiento utilizado para aplicar el método variacional es muy similar al mostrado en el apéndice I.2, así que, aquí solo mencionaremos los detalles importantes en los que hubo diferencia al momento de realizar los cálculos.

Primero que nada utilizamos la función de prueba (3.27):

$$u(x, t) = A \exp \left[\frac{-(x-w)^2}{2a^2} \right] \exp \left\{ i [p + q(x-w) + r(x-w)^2] \right\} \quad (\text{I.199})$$

y la densidad Lagrangiana (3.8):

$$\mathcal{L} = -\text{Im}(u^* u_t) + |u_x|^2 - \frac{1}{2}|u|^4 - \frac{1}{2}|u|^2 |u(-x, t)|^2 \quad (\text{I.200})$$

pero ahora las integrales que necesitaremos calcular son:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} a (a^2 + 2w^2) \quad (\text{I.201})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] dx = \sqrt{\pi} a w \quad (\text{I.202})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-w)^2}{a^2} \right] dx = \sqrt{\pi} a \quad (\text{I.203})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2(w^2 + x^2)}{a^2} \right] dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a \exp \left(-\frac{2w^2}{a^2} \right) \quad (\text{I.204})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{2(x-w)^2}{a^2} \right] dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a \quad (\text{I.205})$$

un punto importante a mencionar es que ahora no fue necesario utilizar ninguna aproximación, como en el caso de la ecuación LN1.

Entonces, la Lagrangiana promediada queda como:

$$\begin{aligned} L(A, a, w, w', p', q, r, r') = & \\ & 2\sqrt{\pi} a^3 A^2 r^2 - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} a^3 A^2 r' - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} a A^4 \exp \left(-\frac{2w^2}{a^2} \right) - \sqrt{\pi} a A^2 p' \\ & + \sqrt{\pi} a A^2 q^2 + \sqrt{\pi} a A^2 q w' - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} a A^4 + \frac{\sqrt{\pi} A^2}{2a} \quad (\text{I.206}) \end{aligned}$$

deberíamos notar que esta ecuación es mucho más sencilla que la ec. (I.170).

El sistema de ecuaciones diferenciales que se obtiene después de aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange (I.171) es:

$$a^2 \left\{ \sqrt{2}A^2 \left[-\exp\left(-\frac{2w^2}{a^2}\right) - 1 \right] - 2p' + 2q(q + w') \right\} + a^4 (4r^2 - r') + 1 = 0 \quad (\text{I.207})$$

$$a^2 \left\{ \sqrt{2}A^2 \left[\exp\left(\frac{2w^2}{a^2}\right) + 1 \right] + 4[p' - q(q + w')] \exp\left(\frac{2w^2}{a^2}\right) \right\} + 2 \left[\exp\left(\frac{2w^2}{a^2}\right) + 2\sqrt{2}A^2w^2 \right] - 6a^4 (4r^2 - r') \exp\left(\frac{2w^2}{a^2}\right) = 0 \quad (\text{I.208})$$

$$2q + w' = 0 \quad (\text{I.209})$$

$$\frac{\sqrt{2}A^3w}{a} \exp\left(-\frac{2w^2}{a^2}\right) - A(aq' + a'q) - 2aA'q = 0 \quad (\text{I.210})$$

$$8aAr + 2aA' + 3Aa' = 0 \quad (\text{I.211})$$

$$2aA' + Aa' = 0 \quad (\text{I.212})$$

combinando estas ecuaciones de manera apropiada es fácil obtener el sistema (3.28)-(3.33).

I.3.1. Solución variacional numérica LN2

El procedimiento utilizado para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales (3.28)-(3.33), es muy similar al mostrado en el apéndice I.2.1, así que, aquí solo mencionaremos los detalles importantes en los que hubo diferencia al momento de realizar los cálculos.

La única diferencia importante en comparación con la ecuación LN1 es el cálculo de $q(0)$, ya que ahora la ec. (3.30) implica que:

$$V_0 = w'(0) = -2q(0) \quad (\text{I.213})$$

por lo que $q(0)$ queda como:

$$q(0) = -\frac{V_0}{2} \quad (\text{I.214})$$

En la figura I.2 mostramos el código utilizado para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales (3.28)-(3.33).

```

s = NDSolve[{A'[t] == 2 A[t] × r[t],
[resolvedor diferencial numérico
a'[t] == -4 a[t] × r[t], w'[t] == -2 q[t], q'[t] ==  $\frac{\sqrt{2} A[t]^2 e^{-\frac{2w[t]^2}{a[t]^2}} w[t]}{a[t]^2}$ ,
r'[t] ==  $\frac{1}{4 a[t]^4} \left( -4 + \sqrt{2} a[t]^2 A[t]^2 + 16 a[t]^4 r[t]^2 + \sqrt{2} A[t]^2 e^{-\frac{2w[t]^2}{a[t]^2}} (a[t]^2 - 4 w[t]^2) \right)$ ,
p'[t] ==  $-\frac{5 A[t]^2 \left( 1 + e^{-\frac{2w[t]^2}{a[t]^2}} \right)}{4 \sqrt{2}} - q[t]^2 + \frac{1 + \frac{A[t]^2 e^{-\frac{2w[t]^2}{a[t]^2}} w[t]^2}{\sqrt{2}}}{a[t]^2}$ , A[0] == 1, a[0] == 1.2,
w[0] == 0, p[0] == 0, q[0] == -0.5, r[0] == 0}, {A, a, w, p, q, r}, {t, tmax}]

```

Figura I.2: Código de Wolfram Mathematica 12.1 utilizado para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales (3.28)-(3.33).

Resultados numéricos ec. Icm-KdV-II

función de peso más ancha

En este apéndice, mostramos algunos resultados adicionales para funciones de peso más anchas. Sin embargo, dado que las funciones de peso exponencial o gaussiana involucran realizar una integral sobre todo el espacio, utilizaremos una función de peso más sencilla que también cumple las condiciones estar normalizada y ser simétrica con respecto al origen, además de que al realizar pruebas numéricas y comparar los resultados obtenidos con las funciones de peso exponencial y gaussiana, se obtiene que los efectos producidos por la no localidad cualitativamente son los mismos.

J.1. Función de peso triangular

Una de las funciones más sencillas a la cual se puede aproximar la función de peso exponencial es una línea recta, y aunque la primer idea que surge podría ser realizar un desarrollo en serie de Taylor a primer orden, esto no es una opción viable ya que si hiciéramos eso la aproximación resultante ya no estaría normalizada. Sin embargo, si partimos de la condición de normalización y de la condición de simetría respecto al origen, obtenemos la siguiente función de respuesta:

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{2\sigma}{a} \\ \frac{a^2}{4\sigma^2} \left(x + \frac{2\sigma}{a}\right) & \text{si } -\frac{2\sigma}{a} < x \leq 0 \\ -\frac{a^2}{4\sigma^2} \left(x - \frac{2\sigma}{a}\right) & \text{si } 0 < x < \frac{2\sigma}{a} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{2\sigma}{a} \end{cases} \quad (\text{J.1})$$

en donde el parámetro σ es una medida del ancho de la función de respuesta, y a es un parámetro que nos permitirá mover la altura del triángulo.

Al comparar la función de respuesta exponencial:

$$R(x) = \frac{\exp(-|x|/\sigma)}{2\sigma} \quad (\text{J.2})$$

con la función de respuesta triangular nos permite elegir el valor de $a = 4/5$. En la figura J.1 podemos ver gráficamente ambas funciones de respuesta

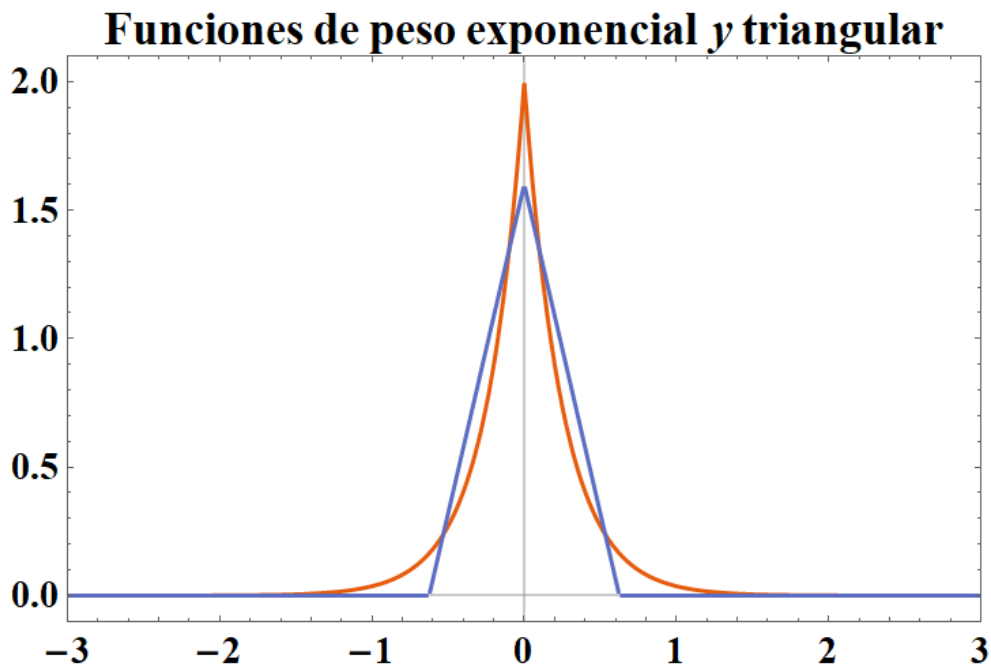


Figura J.1: Comparación entre las funciones de respuesta exponencial y triangular, con $a = 0.8$ y $\sigma = 0.25$

En la ecuación IcmKdV-II aparecen integrales de la forma:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x - x')g(x')dx' \quad (\text{J.3})$$

utilizando la función de respuesta triangular se simplifica como:

$$I = - \int_{x-\frac{2\sigma}{a}}^x \frac{a^2}{4\sigma^2} \left(x - x' - \frac{2\sigma}{a} \right) g(x')dx' + \int_x^{x+\frac{2\sigma}{a}} \frac{a^2}{4\sigma^2} \left(x - x' + \frac{2\sigma}{a} \right) g(x')dx' \quad (\text{J.4})$$

aplicando el cambio de variable $y' = x' + \frac{2\sigma}{a}$ a la primera integral obtenemos:

$$I = - \int_x^{x+\frac{2\sigma}{a}} \frac{a^2}{4\sigma^2} (x - y') g(y' - \frac{2\sigma}{a}) dy' + \int_x^{x+\frac{2\sigma}{a}} \frac{a^2}{4\sigma^2} \left[x - \left(x' - \frac{2\sigma}{a} \right) \right] g(x') dx' \quad (\text{J.5})$$

que se puede simplificar como:

$$I = \frac{a^2}{4\sigma^2} \int_x^{x+\frac{2\sigma}{a}} \left\{ - (x - x') g(x' - \frac{2\sigma}{a}) + \left[x - \left(x' - \frac{2\sigma}{a} \right) \right] g(x') \right\} dx' \quad (\text{J.6})$$

Esta es una integral que se va realizar numéricamente y para poder realizarla de manera correcta, lo único que requerimos es que el intervalo de integración sea un múltiplo entero de la partición en x , Δx , es decir:

$$\frac{\sigma}{a} = N\Delta x \quad (\text{J.7})$$

De tal manera que la integral J.6 se puede calcular como:

$$I = \frac{a^2}{4\sigma^2} \sum_{j=0}^{j=2N} \left\{ - [x_k - (x_k + j\Delta x)] g[(x_k + j\Delta x) - 2N\Delta x] + [x_k - (x_k + j\Delta x - 2N\Delta x)] g(x_k + j\Delta x) \right\} \quad (\text{J.8})$$

$$I = \frac{a^2}{4\sigma^2} \sum_{j=0}^{j=2N} \left\{ (j\Delta x) g[x_k + (j - 2N)\Delta x] + [-(j - 2N)\Delta x] g(x_k + j\Delta x) \right\} \quad (\text{J.9})$$

Resultados numéricos

Resolvimos numéricamente la ecuación Icm-KdV-II para diferentes valores de σ utilizando una función de peso triangular. En la figura J.2 podemos observar las alturas como funciones del tiempo. En ellas podemos ver que conforme el valor de σ aumenta, la amplitud del pulso decae, sin embargo, es importante mencionar que el pulso no se destruye. Esta sería una de las consecuencias de la no localidad que está controlada a través del parámetro σ .

En la figura J.3 podemos observar como evoluciona la posición del punto máximo como función del tiempo, para los mismo valores de sigma de la fig. J.2. En esta figura podemos ver que conforme aumenta el valor de σ la velocidad de pulso va disminuyendo. Este fenómeno también corresponde a un efecto no local, y es algo muy interesante, ya que la no localidad de alguna manera está “frenando” el avance del pulso.

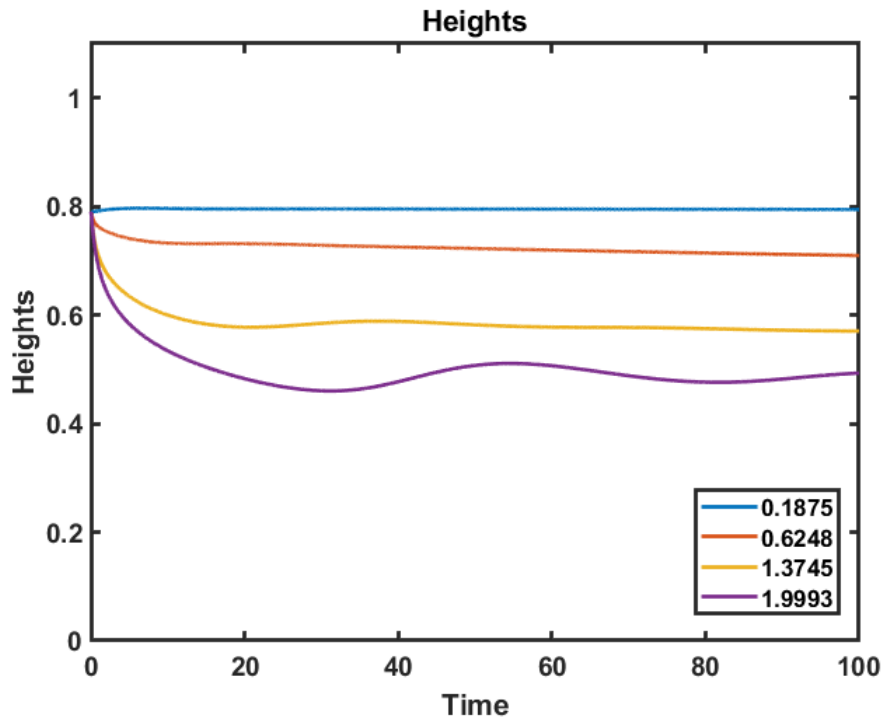


Figura J.2: Alturas como funciones del tiempo utilizando una función de peso triangular y distintos valores de σ . (Color en el archivo digital)

En la figura J.4 podemos ver la gráfica de la superficie de la evolución de un pulso que obedece la ecuación Icm-KdV-II, con una una función de peso triangular y con $\sigma = 1.3745$, mientras que la figura J.5 corresponde a un valor de $\sigma = 1.9993$.

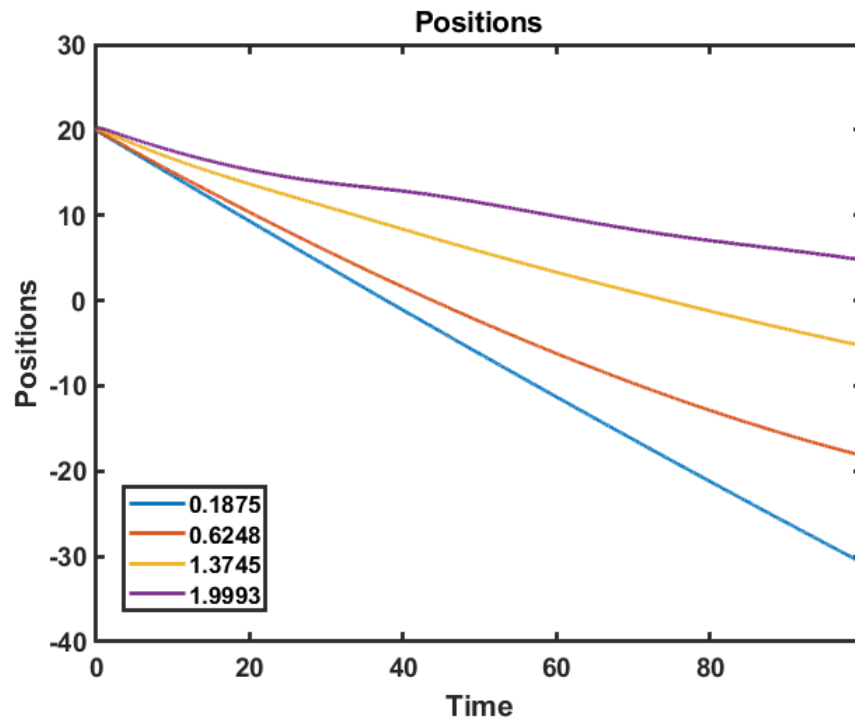


Figura J.3: Posiciones del punto máximo como funciones del tiempo utilizando una función de peso triangular y distintos valores de σ . (Color en el archivo digital)

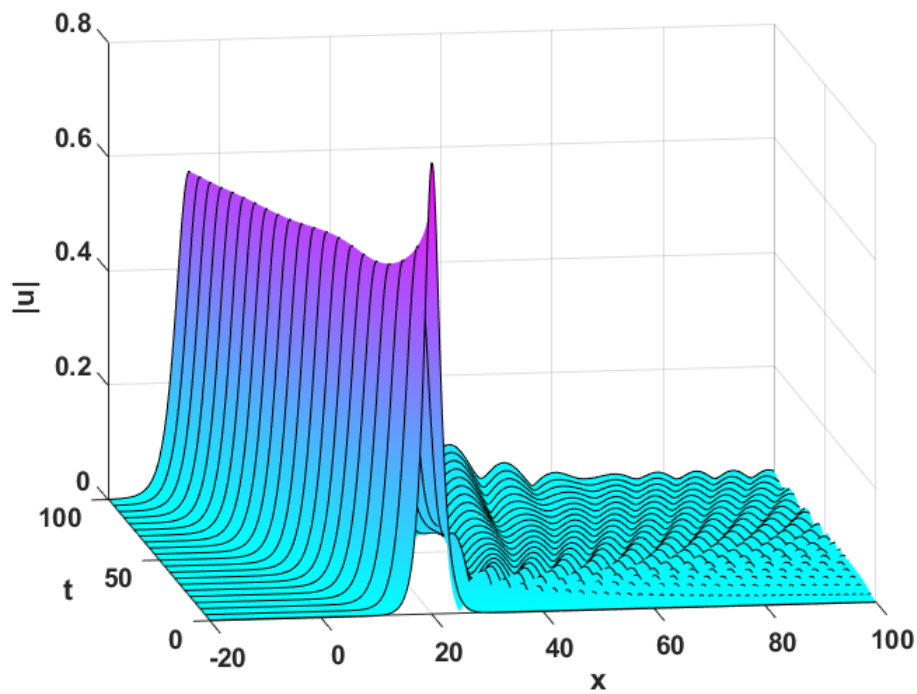


Figura J.4: Superficie de la solución de la ecuación Icm-KdV-II con una función de peso triangular y un valor de $\sigma = 1.3745$

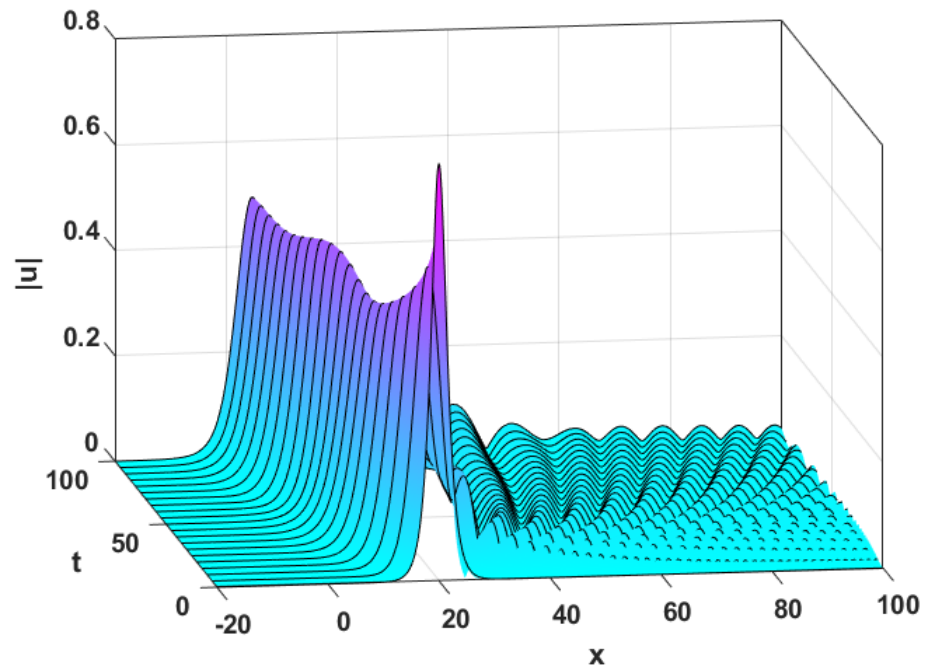


Figura J.5: Superficie de la solución de la ecuación Icm-KdV-II con una función de peso triangular y un valor de $\sigma = 1.9993$

Referencias

- [1] Rodríguez RF , Reyes JA , Espinosa-Cerón A , Fujioka J , Malomed BA . Standard and embedded solitons in nematic optical fibers. *Phys Rev E* 2003; 68 : 036606. [iv](#), [6](#), [23](#), [34](#), [40](#), [75](#)
- [2] Anthony, K-H. A new approach to thermodynamics of irreversible processes by means of Lagrange-formalism. *Disequilibrium and self-organisation*. Springer, Dordrecht, 1986.75 – 92. [v](#)
- [3] Velasco-Juan, M., and J. Fujioka. Integral complex modified Korteweg-de Vries (Icm-KdV) equations. *Chaos, Solitons and Fractals* 1342020 : 109687. [vi](#)
- [4] Velasco-Juan, M., and J. Fujioka. Lagrangian nonlocal nonlinear Schrödinger equations. *Chaos, Solitons and Fractals* 1562022 : 111798. [vi](#), [43](#)
- [5] Flores-Calderón, R., J. Fujioka, and A. Espinosa-Cerón. Soliton dynamics of a high-density Bose-Einstein condensate subject to a time varying anharmonic trap. *Chaos, Solitons Fractals* 143 2021: 110580. [2](#)
- [6] Espinosa-Cerón, A., J. Fujioka, and A. Gómez-Rodríguez. Embedded solitons: four-frequency radiation, front propagation and radiation inhibition. *Physica Scripta* 67.4 2003: 314. [2](#)
- [7] Hickmann, J. Miguel, et al. Modulational instability in semiconductor-doped glass fibers with saturable nonlinearity. *Optics letters* 18.3 1993: 182-184. [2](#)
- [8] Herrmann, Joachim. Bistable bright solitons in dispersive media with a linear and quadratic intensity-dependent refraction index change. *Optics communications* 87.4 1992: 161-165. [3](#)
- [9] Fujioka, J., A. Gómez-Rodríguez, and A. Espinosa-Cerón. Pulse Propagation Models with Bands of Forbidden Frequencies or Forbidden Wavenumbers: A Consequence of Abandoning the Slowly Varying Envelope Approximation and Taking into Account Higher-Order Dispersion. *Applied Sciences* 7.4 2017: 340. [3](#)

- [10] Espinosa-Cerón, A., J. Fujioka, and A. Gómez-Rodríguez. Existencia y perturbación de solitones “embebidos”, gobernados por una extensión de la ecuación NLS. *Revista mexicana de física* 49.6 2003: 493-505. [3](#)
- [11] González-Pérez-Sandi, S., J. Fujioka, and B. A. Malomed. “Embedded solitons in dynamical lattices.” *Physica D: Nonlinear Phenomena* 197.1-2 (2004): 86-100. [4](#)
- [12] Fujioka, J., A. Espinosa, and R. F. Rodríguez. Fractional optical solitons. *Physics Letters A* 374.9 2010: 1126-1134. [4](#)
- [13] Fujioka, J., Velasco M., and Ramírez A.. Fractional optical solitons and fractional Noether’s theorem with ortigueira’s centered derivatives. *Applied Mathematics* 7.12 2016: 1340-1352. [5](#)
- [14] Fujioka, J., and A. Espinosa. Generalized Ablowitz-Ladik equation with a dual Lagrangian structure. *Physics Letters A* 383.27 2019: 125849. [5](#)
- [15] Malomed, B. A., et al. Moving embedded lattice solitons. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 16.1 2006: 013112. [7](#)
- [16] Wang X , Wang Q , Yang J , Mao J . Scalar and vector Hermite–Gaussian soliton in strong nonlocal media with exponential-decay response. *Opt Commun* 2017; 402 : 20–5. [8](#), [10](#)
- [17] Ablowitz, Mark J., and Ziad H. Musslimani. Integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation. *Physical review letters* 110.6(2013) : 064105. [8](#), [11](#), [56](#)
- [18] Rodríguez RF , Fujioka J , Espinosa A , González S . Embedded solitons in liquid crystals and other optical systems. *Recent Res Dev Phys* 2009; 8 : 145–210. [9](#), [75](#)
- [19] Seadawy AR , Lu D . Bright and dark solitary wave soliton solutions for the generalized higher order nonlinear Schrödinger equation and its stability. *Results Phys* 2017; 7 : 43–8. [9](#)
- [20] Wang L , Zhang JH , Wang ZQ , Liu C , Li M , Qi FH , Guo R . Breather-to-soliton transitions, nonlinear wave interactions, and modulational instability in a higher-order generalized nonlinear Schrödinger equation. *Phys Rev E* 2016; 93 : 012214.
- [21] Seadawy AR . Modulation instability analysis for the generalized derivative higher order nonlinear Schrödinger equation and its bright and dark soliton solutions. *J Electromag Waves Appl* 2017; 31 : 1353–62.
- [22] Fujioka J , Espinosa A . Diversity of solitons in a generalized nonlinear Schrödinger equation with self-steepening and higher-order dispersive and nonlinear terms. *Chaos* 2015; 25 : 113–14.

-
- [23] Fujioka J , Espinosa A . Radiationless higher-order embedded solitons. *J Phys Soc Jpn* 2013; 82 : 034007. [9](#), [75](#)
- [24] Rida SZ , El-Sherbiny HM , Arafa AAM . On the solution of the fractional nonlinear Schrödinger equation. *Phys Lett A* 2008; 372 : 553–8. [9](#)
- [25] Yildirim A . An algorithm for solving the fractional nonlinear Schrödinger equation by means of the homotopy perturbation method. *Int J Nonlinear Sci Numer Simul* 2009; 10 : 445–50.
- [26] Hong B , Lu D . Modified fractional variational iteration method for solving the generalized time-space fractional Schrödinger equation. *Sci World J* 2014; 2014 : 964643.
- [27] Fujioka J , Espinosa A , Rodríguez RF . Fractional optical solitons. *Phys Lett A* 2010; 374 : 1126–34. [9](#)
- [28] Krolkowski W , Bang O , Rasmussen JJ , Wyller J . Modulational instability in nonlocal nonlinear Kerr media. *Phys Rev E* 2001; 64 : 016612. [9](#)
- [29] Skupin S , Bang O , Edmundson D , Krolkowski W . Stability of two-dimensional spatial solitons in nonlocal nonlinear media. *Phys Rev E* 2006; 73 : 066603.
- [30] Dai CQ , Wang Y , Liu J . Spatiotemporal Hermite–Gaussian solitons of a $(3 + 1)$ -dimensional partially nonlocal nonlinear Schrödinger equation. *Nonlinear Dyn* 2016; 84 : 1157–61. [9](#)
- [31] Ankiewicz A , Soto-Crespo JM , Akhmediev N . Rogue waves and rational solutions of the Hirota equation. *Phys Rev E* 2010; 81 : 046602. [9](#)
- [32] Grimshaw R , Pelinovsky E , Talipova T , Ruderman M , Erdelyi R . Short-Lived large-amplitude pulses in the nonlinear long-wave model described by the modified Korteweg–de Vries equation. *Stud Appl Math* 2005; 114 : 189–210. [9](#)
- [33] Uğurlu Y , Kaya D . Analytic method for solitary solutions of some partial differential equations. *Phys Lett A* 2007; 370 : 251–9. [10](#)
- [34] Lü Z , Zhang H . Soliton like and multi-soliton like solutions for the Boiti-Leon-Pempinelli equation. *Chaos Soliton Fract* 2004; 19 : 527–31. [10](#)
- [35] Zheng C-L , Fang J-P , Chen L-Q . New variable separation excitations of $(2 + 1)$ -dimensional dispersive long-water wave system obtained by an extended mapping approach. *Chaos Soliton Fract* 2005; 23 : 1741–8. [10](#)
-

- [36] Khater AH , Callebaut DK , Seadawy AR . General soliton solutions for nonlinear dispersive waves in convective type instabilities. *Phys Scr* 2006; 74 : 384–93. [10](#), [75](#)
- [37] Sirendaoreji JS . Auxiliary equation method for solving nonlinear partial differential equations. *Phys Lett A* 2003; 309 : 387–96.
- [38] Yomba E . A generalized auxiliary equation method and its applications to nonlinear Klein-Gordon and generalized nonlinear Camassa-Holm equations. *Phys Lett A* 2008; 372 : 1048–60.
- [39] Yan Z . An improved algebra method and its applications in nonlinear wave equations. *Chaos Soliton Fract* 2004; 21 : 1013–21.
- [40] Fan E . Multiple travelling wave solutions of nonlinear evolution equations using a unified algebraic method. *J Phys A* 2002; 35 : 6853–72. [10](#)
- [41] Liu S , Fu Z , Liu S , Zhao Q . Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. *Phys Lett A* 2001; 289 : 69–74. [10](#)
- [42] Abdou MA . The extended F-expansion method and its application for a class of nonlinear evolution equations. *Chaos Soliton Fract* 2007; 31 : 95–104. [10](#)
- [43] Zhou Y , Wang M , Wang Y . Periodic wave solutions to a coupled Kdv equations with variable coefficients. *Phys Lett A* 2003; 308 : 31–6.
- [44] Seadawy AR , El-Rashidy K . Nonlinear Rayleigh-Taylor instability of the cylindrical fluid flow with mass and heat transfer. *Pramana* 2016; 87 : 20. [10](#)
- [45] Chen W , Wang Q , Shi J , Shen M . Analytical theory of two-dimensional ring dark soliton in nonlocal nonlinear media. *Opt Commun* 2017; 403 : 22–6. [10](#)
- [46] Anderson, Dan. Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers. *Physical review A* 27.6(1983) : 3135. [11](#), [57](#), [165](#)
- [47] M.J. Ablowitz and Z.H. Musslimani, *Stud. Appl. Math.* 139(2016)7. [11](#)
- [48] Yang, Jianke. General N-solitons and their dynamics in several nonlocal nonlinear Schrödinger equations. *Physics Letters A* 383.4(2019) : 328 – 337. [11](#)
- [49] Ablowitz, Mark J., and Ziad H. Musslimani. Inverse scattering transform for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation. *Nonlinearity* 29.3(2016) : 915. [11](#)

-
- [50] Peng, Linyu. Symmetries and reductions of integrable nonlocal partial differential equations. *Symmetry* 11.7(2019) : 884.
- [51] Gürses, Metin, and Asli Pekcan. Nonlocal modified KdV equations and their soliton solutions by Hirota method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 67(2019) : 427 – 448. [11](#)
- [52] Chen, Kui, et al. Solutions of nonlocal equations reduced from the AKNS hierarchy. *Studies in Applied Mathematics* 141.1(2018) : 113 – 141. [11](#)
- [53] Cen, Julia, Francisco Correa, and Andreas Fring. Integrable nonlocal Hirota equations. *Journal of Mathematical Physics* 60.8(2019) : 081508. [11](#)
- [54] An L, Li C, Zhang L. Darboux transformations and solutions of nonlocal Hirota and Maxwell–Bloch equations. *Stud Appl Math.* 2021;147 : 60–83. [11](#)
- [55] Liu, Shimin, Wu Hua, and Da-jun Zhang. New dynamics of the classical and nonlocal Gross-Pitaevskii equation with a parabolic potential. *Reports on Mathematical Physics* 86.3(2020) : 271 – 292. [11](#)
- [56] Chen, Jian. Generalized Darboux transformation and rational solutions for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation with the self-induced parity-time symmetric potential. *Journal of Applied Mathematics and Physics* 3.05(2015) : 530.
- [57] Feng, Bao-Feng, et al. General soliton solution to a nonlocal nonlinear Schrödinger equation with zero and nonzero boundary conditions. *Nonlinearity* 31.12(2018) : 5385. [11](#)
- [58] Gurses, Metin. Nonlocal super integrable equations. arXiv preprint arXiv:1704.01273(2017). [11](#)
- [59] Sinha, Debdeep, and Pijush K. Ghosh. Integrable nonlocal vector nonlinear Schrödinger equation with self-induced parity-time-symmetric potential. *Physics Letters A* 381.3(2017) : 124 – 128. [11](#)
- [60] Vinayagam, P. S., et al. Collisional dynamics of solitons in the coupled PT symmetric nonlocal nonlinear Schrödinger equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 52(2017) : 1 – 10.
- [61] Rao, Jiguang, Yi Cheng, and Jingsong He. Rational and semirational solutions of the nonlocal Davey–Stewartson equations. *Studies in Applied Mathematics* 139.4(2017) : 568 – 598.
- [62] I. Mukherjee and P. Guha, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics* 15(2019)293.

- [63] Gürses, Metin. Nonlocal Fordy–Kulish equations on symmetric spaces. *Physics Letters A* 381.21(2017) : 1791 – 1794.
- [64] Lou, S.Y., Huang, F. Alice-Bob Physics: Coherent Solutions of Nonlocal KdV Systems. *Sci Rep* 7, 869(2017). [11](#)
- [65] Bañados, M., and I. Reyes. A short review on Noether’s theorems, gauge symmetries and boundary terms. *International Journal of Modern Physics D* 25.10(2016) : 1630021. [21](#)
- [66] Kivshar, Yuri S., and Govind Agrawal. *Optical solitons: from fibers to photonic crystals*. Academic press, 2003. pag 279. [46](#)
- [67] Serkin, V. N., and T. L. Belyaeva. Optimal control for soliton breathers of the Lakshmanan–Porsezian–Daniel, Hirota, and cmKdV models. *Optik* 1752018 : 17 – 27. [49](#)
- [68] Rusin, Rahmi, Rudy Kusdiantara, and Hadi Susanto. Variational approximations of soliton dynamics in the Ablowitz-Musslimani nonlinear Schrödinger equation. *Physics Letters A* 383.17(2019) : 2039 – 2045. [49](#), [50](#), [56](#)
- [69] Flores-Calderón, R., J. Fujioka, and A. Espinosa-Cerón. Soliton dynamics of a high-density Bose-Einstein condensate subject to a time varying anharmonic trap. *Chaos, Solitons & Fractals* 143(2021) : 110580. [57](#)
- [70] Fujioka, Jorge, and Áurea Espinosa. Generalized Ablowitz-Ladik equation with a dual Lagrangian structure. *Physics Letters A* 383.27(2019) : 125849.
- [71] Rossi, J., R. Carretero-González, and P. G. Kevrekidis. Non-conservative variational approximation for nonlinear Schrödinger equations. arXiv preprint arXiv:1508.07040(2015).
- [72] Fujioka, Jorge, and Áurea Espinosa. Radiationless higher-order embedded solitons. *Journal of the Physical Society of Japan* 82.3(2013) : 034007.
- [73] Adhikari, Sadhan K. Stabilization of bright solitons and vortex solitons in a trapless three-dimensional Bose-Einstein condensate by temporal modulation of the scattering length. *Physical Review A* 69.6(2004) : 063613.
- [74] Malomed, Boris A. Variational methods in nonlinear fiber optics and related fields. *Progress in optics* 43(2002) : 71 – 194. [57](#)
- [75] Ayela, Amour Marc, et al. Chirped super–Gaussian and super–sech pulse perturbation of nonlinear Schrödinger’s equation with quadratic–cubic nonlinearity by variational principle. *Physics Letters A* 396(2021) : 127231. [58](#)

- [76] Fujioka J , Espinosa-Cerón A , Rodríguez RF . A survey of embedded solitons. *Rev Mex Fis* 2006; 52 : 6–14. [75](#)
- [77] BressloffPC , Kilpatrick ZP . Nonlocal Ginzburg-Landau equation for cortical pattern formation. *Phys Rev E* 2008; 78 : 041916. [75](#)
- [78] Maucher F , Pohl T , Krolkowski W , Skupin S . Pattern formation in the nonlinear Schrödinger equation with competing nonlocal nonlinearities. *Opt Data Process Storage* 2017; 3 : 13–19. [75](#)
- [79] Goldstein, Herbert. *Classical mechanics*. Pearson Education India, 2011. [93](#)