



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Un estudio a los polígonos y poliedros finitos
geoméricamente hereditarios en los espacios euclidianos
 E^2 y E^3

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO(A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
Gasde Augusto Hunedy López

DIRECTORA
Dra. Isabel Alicia Hubard Escalera
Instituto de Matemáticas C.U., UNAM

CIUDAD DE MÉXICO A 28 DE FEBRERO DE 2022



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Agradecimientos	3
Introducción	7
1. Algunos aspectos de las isometrías de \mathbb{E}^n	11
1.1. Las reflexiones: ladrillos de las isometrías	13
1.2. Las isometrías de \mathbb{E}	15
1.3. Las isometrías de \mathbb{E}^2	16
1.4. Las isometrías de \mathbb{E}^3	24
2. Grupos de simetrías de conjuntos finitos	49
2.1. En el espacio \mathbb{E}^2 (el plano ordinario)	49
2.2. En el espacio \mathbb{E}^3 (el espacio ordinario)	54
3. Politopos hereditarios y geoméricamente hereditarios	79
3.1. Politopos abstractos	80
3.2. Politopos hereditarios	105
3.2.1. Un caso particular: Poliedros hereditarios	108
3.3. Politopos geoméricamente hereditarios (n - $\mathcal{P}gh$)	112
3.3.1. Realizaciones en el espacio euclidiano	112
4. Polígonos finitos geoméricamente hereditarios (2-$\mathcal{P}gh$)	119
4.1. Los 2 - $\mathcal{P}gh$ finitos en \mathbb{E}^2 . Un análisis geométrico	124
4.1.1. Unas breves consideraciones previas a los 2 - $\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^2	124
4.1.2. Las simetrías de \mathcal{P} y de sus aristas	126
4.1.3. Las simetrías completas de \mathcal{P}	128
4.1.4. Construcción geométrica de los 2 - $\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^2	130
4.2. Los 2 - $\mathcal{P}gh$ finitos en \mathbb{E}^3 . Un análisis geométrico	145

4.2.1.	Unas breves consideraciones previas a los $2\text{-}\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^3 . . .	145
4.2.2.	Las simetrías de \mathcal{P} y de sus aristas	146
4.2.3.	Las simetrías completas de los $2\text{-}\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^3 . El caso: 2.a) . . .	151
4.2.4.	Construcción geométrica de los $2\text{-}\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^3 . El caso: 2.a) . . .	152
4.2.5.	Las simetrías completas de los $2\text{-}\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^3 . El caso: 4.b) . . .	165
4.2.6.	Construcción geométrica de los $2\text{-}\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^3 . El caso: 4.b) . . .	166
5.	Poliedros finitos geoméricamente hereditarios ($3\text{-}\mathcal{P}gh$). Un acercamiento	183
5.1.	Poliedros regulares finitos	183
5.1.1.	Sólidos platónicos	185
5.1.2.	Poliedros de Kepler-Poinsot	187
5.1.3.	Petriales de poliedros regulares finitos	189
5.2.	Algunos poliedros finitos geoméricamente hereditarios	192
5.2.1.	El medial de los 18 poliedros regulares (finitos) es un $3\text{-}\mathcal{P}gh$	193
6.	Conclusiones y estudios futuros	205
	Bibliografía	206

Agradecimientos

En principio, creo indispensable mencionar que este trabajo es la suma de los esfuerzos de muchas personas y no sólo mío. Con esto en mente, y sin el afán de omitir a tantas personas, quiero expresar mi agradecimiento infinito a Moshiskis por todo su soporte, por su amor, porque es mi persona favorita y mi compañera universal, a mi familia (Belly, Lupita, Gasdee, Omar y Sofi), a Aurorita, a Ernesto por su fraternidad y generoso apoyo, a mis amigos-familia (Tita, Oscar, Hugo, Adriana, Estrella), a mis nuevos amigos (Abraham, Lau, Naila, Bosco, Valdito).

A Isabel Hubard por ser una mentora maravillosa y a mis maestros de la vida (quienes están, estuvieron y estarán).

A mis sinodales por su dedicada revisión, sus comentarios y sus aportaciones para hacer de éste, un mejor proyecto. En particular agradezco a María del Río, Luis Miguel García y Daniel Pellicer por su generoso apoyo.

Agradezco al CCM las oportunidades para realizar este trabajo, en especial a José Zapata y Daniel Pellicer por su confianza y ayuda.

Agradezco a la comunidad, mexicana e internacional, de divulgadores en ciencia y en particular en Matemáticas por su maravillosa y generosa labor. Es un gusto y honor pertenecer a este gremio.

Agradezco a CONACyT la beca otorgada para la realización de mis estudios de maestría.

Gracias a todos, porque somos parte del entramado universal.

Esta investigación fue realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <IN112512> *Poliedros altamente simétricos en espacios de dimensión baja*.

Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Resumen

El estudio de los politopos hereditarios da inicio documental con el artículo "*Hereditary Polytopes*" [36], el cual abre la puerta al análisis de los *politopos geoméricamente hereditarios*, que son aquellos politopos en los cuales el grupo de simetrías de cada faceta se extiende a un subgrupo de simetrías del politopo completo. En este trabajo discutiremos la definición de politopo geoméricamente hereditario n dimensional y algunas de sus restricciones en comparación con su parte combinatoria; en concreto, nos centramos en los polígonos finitos geoméricamente hereditarios en los espacios euclidianos de dimensión 2 y 3, así como en el medial de los poliedros regulares finitos. Para ello, presentamos una clasificación de estos polígonos y demostramos que el medial de un poliedro geoméricamente regular es un poliedro geoméricamente hereditario.

Introducción

Asomarse por la ventana de la naturaleza brinda una enorme cantidad de ejemplos donde percibimos entidades que denominamos simétricas. Vemos esta idea de manera intuitiva en la forma del echinocactus, en una mariposa, en un copo de nieve, en una moneda e incluso en los discos del sol y la luna, sólo por mencionar algunos casos. La palabra *simetría* evoca objetos mentales bien equilibrados: en su etimología *συμ* "con", *μέτρον* "medida" e *ία* "cualidad", aparecen implícitas las ideas de equilibrio, igualdad, equivalencia, correspondencia en la medida. Dichos rasgos se alinean con ciertos ideales de belleza existentes¹.

Desde tiempos remotos, las figuras planas como el triángulo equilátero, el cuadrado y el círculo, o en las figuras espaciales como la pirámide, el cubo y la esfera, han cautivado a la humanidad, este interés se ve en las pirámides aztecas o en las egipcias, en el Partenón o en los cánones de belleza del Renacimiento por mencionar algunos ejemplos. Probablemente el interés que provocan tales objetos tiene una estrecha relación con sus simetrías, pues esto se corresponde con un modelo de belleza formal al cual la mente humana se siente constantemente atraída.

Euclides dentro de sus argumentos en los "Elementos" (s. III a.C.) [18] da por hecho que "cosas que coinciden con alguna otra son iguales entre sí" dando indicio de la esencia geométrica de lo simétrico. De esto surge la intención de "tomar y mover" una figura y superponerla en otra, desarrollando así los criterios de congruencia. La afirmación de Euclides originó en la Matemática el concepto de *isometría* del plano, que nos brinda una de las evidencias matemáticas para identificar, en principio, lo que nuestros sentidos perciben como simétrico y los rasgos que lo componen.

¹El estudio de la simetría como objeto y como propiedad se encuentra ampliamente referida en la literatura, el lector interesado en conocer más sobre los distintas expresiones entorno a este concepto recomendamos las siguientes fuentes bibliográfica: [17] y [56] sólo por citar algunas.

Posteriormente, la esencia de la simetría quedó desvelada gracias al desarrollo de la teoría de grupos. Con esto, la Matemática moderna pudo brindar más bases y herramientas para el estudio de los objetos simétricos. El estudio de los polígonos contribuyó a sentar bases para esta teoría y fue en el estudio de los polígonos regulares donde descansa gran parte de este desarrollo.

El primer estudio sistemático conocido de polígonos no convexos fue realizado por Thomas Bradwardine en el siglo XIV [9]. Mientras que en 1952, Geoffrey Colin Shephard generalizó la idea de los polígonos al plano complejo [54], dando pie al estudio de estos objetos en distintas dimensiones y espacios, lo que motivó distintas investigaciones para extender este estudio, como lo muestra Neumann en su artículo [45]. Fue con la clasificación de Grünbaum en [21] que los polígonos en el espacio y los polígonos infinitos, propagaron nueva luz a la investigación de los objetos altamente simétricos y con ello, un detonante de la investigación en la teoría clásica de los poliedros convexos (como los sólidos platónicos y arquimedianos), en la cual se retomaron los esfuerzos por abordar a esta clase natural de objetos desde las perspectivas algebraicas, geométricas y combinatorias.

La teoría de poliedros comenzó la formación de sus pilares con Coxeter. Muchas de sus aportaciones culminaron en su famoso libro *Regular Polytopes* [9]; una de las más relevantes vino, cuando él y J. F. Petrie descubrieron tres objetos con propiedades de simetría similares a las de los poliedros regulares conocidos hasta ese entonces, pero con la característica de tener una infinidad de caras, expuestos antes en [7].

Después, la teoría de poliedros tomó un nuevo aire en 1977, cuando Branko Grünbaum dio una lista de 47 objetos que tenían propiedades combinatorias similares a los poliedros regulares [21]. Esta lista contenía los sólidos platónicos, los poliedros de Kepler–Poincaré y los de Petrie–Coxeter, pero añadía las teselaciones del plano con cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares entre otros objetos. Sumado a esto, Grünbaum permitió también que las caras no fueran planas e incluso que fueran infinitas.

En la década siguiente, en 1981, A. Dress encontró otro poliedro [15] para extender la lista de Grünbaum a 48; en el año de 1985, por medio de herramientas algebraicas y combinatorias, Dress probó que la lista estaba completa [16]. Por su parte, entre la publicación de los dos artículos de Dress, en 1982 Danzer y Schulte introdujeron el concepto de *politopo abstracto* [13], el cual generaliza a los polígonos y poliedros geométricos, rescatando su estructura combinatoria. Finalmente, Egon Schulte y Peter

McMullen [40], abordaron el problema geométrico partiendo del concepto de poliedro abstracto y prueban, de una forma distinta, que la lista de los 48 poliedros regulares presentada por Dress estaba completa.

Del mismo modo, el posterior avance conceptual de la teoría de politopos presentó nuevos horizontes de investigación; en particular el análisis de ciertas propiedades en estos objetos demostró ser un vasto campo de problemas y resultados. Ejemplo de este tipo de exploración que conjunta de una forma peculiar la simetría y los politopos, se encuentra en el artículo "*Hereditary Polytopes*" [36] donde se estudian aquellos politopos que tienen la propiedad de "heredar" todas las simetrías de cada una de sus facetas a todo el politopo y el artículo "*Symmetry of polytopes and polyhedra*" [52] en el que se muestran propiedades y resultados recientes sobre los poliedros y politopos altamente simétricos.

En la presente tesis, centraremos nuestra atención en dos tópicos: por un lado, en el estudio de los polígonos que tienen la propiedad distintiva de que cada simetría de sus aristas se extienda a una simetría del polígono completo; y, por otro lado, en el estudio de algunos poliedros que tienen la propiedad de que cada simetría de sus caras poligonales se extienda a una simetría del poliedro completo. Esta propiedad "hereditaria" será la guía para este trabajo.

La organización de nuestro texto es la siguiente. En el capítulo 1 introducimos algunos resultados esenciales de las isometrías del espacio euclidiano, principalmente de dimensión dos y tres. Después de ello, en el capítulo 2 exponemos a los grupos finitos de simetrías en los mismos espacios. En el capítulo 3 mostramos las bases combinatorias de los politopos, presentamos a los politopos hereditarios, así como algunas propiedades de estos; además exponemos a los politopos geoméricamente hereditarios junto con el concepto de realización. Posteriormente, en el capítulo 4 desplegamos un análisis de los polígonos finitos geoméricamente hereditarios en el plano y el espacio junto con un gran número de imágenes para apoyar su construcción. Más adelante, en el capítulo 5 probamos que los mediales de los poliedros regulares finitos son poliedros finitos geoméricamente hereditarios e incluimos imágenes de ellos. Finalmente, concluimos con una breve sección que sugiere algunos problemas para el trabajo futuro relacionado con politopos geoméricamente hereditarios.

Capítulo 1

Algunos aspectos de las isometrías de \mathbb{E}^n

En este capítulo exponemos algunas propiedades básicas de las isometrías en el espacio euclidiano \mathbb{E}^n , para después introducirnos en su parte geométrica, principalmente para $n \in \{1, 2, 3\}$. Esto será esencial para el desarrollo de los posteriores capítulos. Cabe señalar, que el material que se expondrá en este capítulo tiene una amplia historia y distintos enfoques para su estudio como por ejemplo en las obras [32] y [47], en nuestro caso, lo abordaremos procurando una exposición geométrica con la finalidad de que la intuición nos acompañe.

Como lo mencionamos en la introducción, Euclides en sus *Elementos*, da por hecho que “cosas que coinciden con alguna otra son iguales entre sí” [18]. De ahí la intención de “tomar y mover” una figura y superponerla en otra, desarrollando así los criterios de congruencia. Esta idea de Euclides, sugiere, el primer paso en las Matemáticas para crear más tarde el concepto de (en el lenguaje actual) *isometría* del plano: “transformar” objetos dentro del plano sin alterar su forma y estructura, sólo su posición.

Dicho concepto tiene una generalización natural en el espacio euclidiano \mathbb{E}^n . Diremos que una función $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ es una *isometría* si y sólo si f preserva distancias; esto es, si $\{P, Q\} \subset \mathbb{E}^n$ entonces, $d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$. Durante este trabajo denotaremos al conjunto de todas las isometrías de \mathbb{E}^n por $\mathbf{Iso}(\mathbb{E}^n)$.

Como ejemplo de isometría, tenemos la siguiente

Definición 1.1. La *traslación* $\tau_{\vec{v}} : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$, es la isometría tal que $\tau_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$,

con \vec{v} un vector de \mathbb{E}^n (como espacio vectorial sobre \mathbb{R}) y $P \in \mathbb{E}^n$.

A lo largo de este trabajo denotaremos la traslación que tiene por dirección (y norma) el vector \vec{v} por $\tau_{\vec{v}}$.

Una primera observación es que las isometrías son una biyección de \mathbb{E}^n en \mathbb{E}^n (por lo que existe su inversa y esta también es isometría). Además, la composición (en el presente trabajo la nombraremos *producto*) es asociativa y la función identidad (ι) es claramente una isometría. De esto tenemos que el conjunto de isometrías de espacio \mathbb{E}^n junto con la composición forman un grupo. Cuando una isometría f , distinta de la identidad, es inversa de sí misma, es decir, si $f^2 = \iota$ diremos que f es una *involución*.

Cabe señalar que desde del punto de vista topológico las isometrías son funciones continuas¹ con inversa continua y biyectivas, por lo que decimos que son *transformaciones* del espacio \mathbb{E}^n .

También es importante mencionar situaciones particulares que tiene una isometría f (cualquier función) sobre sus puntos. Por ejemplo, si $P \in \mathbb{E}^n$, decimos que P es un *punto fijo* bajo f si y sólo si $f(P) = P$. Más aún, si $C \subseteq \mathbb{E}^n$, diremos que C es (un conjunto) *fijo punto a punto* bajo f si y sólo si $f(P) = P$ para todo $P \in C$, por comodidad, diremos solamente que el conjunto C "está fijo" por f . Esto último se da punto a punto para el conjunto, sin embargo, puede suceder que un $S \subseteq \mathbb{E}^2$ aparezca sin cambios aparentes por f , pero no necesariamente queda fijo punto a punto, en ese caso S es *invariante* bajo f , en otras palabras, $f(S) = S$. De esta última noción se desprende una de las definiciones más importantes para este trabajo.

Definición 1.2. Sea $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ una isometría y $S \subseteq \mathbb{E}^n$. Decimos que f es una *simetría* de S si y sólo si S es invariante bajo f .

Denotaremos al conjunto de simetrías de S por $G(S)$. Nuevamente podemos reconocer que $G(S)$ es un grupo bajo la composición.

Comenzaremos dando un preámbulo de las propiedades y características de las isometrías en el espacio \mathbb{E}^n . Observemos lo siguiente. Sea $\{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathbb{E}^n$ un conjunto de $n + 1$ puntos en posición general y sea $\alpha : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ una isometría, veamos que

¹de hecho son uniformemente continuas.

α está *completamente determinada* por la imagen de estos puntos, esto es, los $n + 1$ puntos describen perfectamente el comportamiento de α . Dicho de otra forma, si existiera otra isometría β la cual coincidiera en las imágenes de cada uno de los puntos $\{P_0, \dots, P_n\}$ entonces $\alpha = \beta$. Éste es un resultado fuerte dentro del estudio de las isometrías y lo enunciamos a continuación. Cabe señalar que sólo lo mencionaremos, ya que éste y otros resultados importantes se encuentran detallados en numerosos estudios sobre este tema, invitamos al lector interesado a consultar, por ejemplo, las obras [6], [9, Cap. 3], [47, Part. 1] y [59, §2] mismas que muestran demostraciones de esto.

Teorema 1.1. *Una isometría $\alpha : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ esta completamente determinada por la imagen $\{\alpha(P_0), \alpha(P_1), \dots, \alpha(P_n)\}$ de un conjunto $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ de puntos en posición general de \mathbb{E}^n .*

Otro importante resultado es que los grupos *finitos* de isometrías del espacio euclidiano dejan, al menos, un punto fijo. Éste resultado lo enunciamos a continuación:

Proposición 1.2. *Si G es un grupo finito de isometrías de \mathbb{E}^n , entonces existe un punto fijo.*

Nuevamente, invitamos al lector interesado a consultar, por ejemplo, las obras [4, Cap. 2], [6] y [19], mismas que muestran demostraciones de este enunciado.

Aunque dentro de nuestro trabajo no abordaremos las propiedades de conservación de las isometrías, no está de más mencionar que éstas preservan rectas, segmentos (de ahí, puntos medios) y paralelismo.

Lo que mencionamos en esta sección es un apoyo para identificar a las isometría del espacio euclidiano. En las siguientes secciones describiremos explícitamente a las isometrías de los espacios \mathbb{E}^n con $n \in \{1, 2, 3\}$.

1.1. Las reflexiones: ladrillos de las isometrías

Para nuestro próximo teorema, que será de suma importancia a lo largo de este trabajo, necesitamos de los conceptos siguientes. Un **hiperplano** (Π) de \mathbb{E}^n es un subespacio afín de dimensión $n - 1$. Si P y Q son puntos distintos de \mathbb{E}^n , el conjunto $\Pi := \{X \in \mathbb{E}^n \mid d(X, P) = d(X, Q)\}$ es un hiperplano, denominado el **hiperplano**

mediatriz del segmento \overline{PQ} .

Sea Π un hiperplano. Entonces para cualquier punto $P \notin \Pi$ hay un único punto P' tal que Π es el hiperplano mediatriz de $\overline{PP'}$. Con estos conceptos tenemos la siguiente definición.

Definición 1.3. *Sea Π un hiperplano. La transformación σ tal que $\sigma(P) = P'$ (P' como se definió anteriormente) para $P \notin \Pi$ y $\sigma(P) = P$ para $P \in \Pi$ es la **reflexión** por Π y la denotaremos por σ_{Π} . Una consecuencia directa de la definición de la reflexión es la de ser una involución, es decir, $\sigma_{\Pi} = \sigma_{\Pi}^{-1}$.*

A continuación presentamos el principal resultado de este capítulo. La prueba que aquí presentamos, por su ingeniosa presentación, es un extracto de la expuesta en [33, §11].

Teorema 1.3. *Sea $\alpha : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ una isometría, $A = \{P_1, \dots, P_{n+1}\} \subset \mathbb{E}^n$ puntos en posición general y sea $\{P_1, \dots, P_k\} \subset \mathbb{E}^n$ el conjunto de todos los puntos de A que están fijos bajo α , entonces α es el producto de a lo más $n + 1 - k$ reflexiones.*

Prueba. Procedamos por inducción (reversa) sobre $n + 1 - k$.

Notemos que si cada punto de $\{P_1, \dots, P_{n+1}\}$ es un punto fijo de α , por el Teorema 1.1 tenemos que $\alpha = \iota$ (que es el producto de $n + 1 - (n + 1) = 0$ reflexiones).

Ahora sea $0 \leq k < n + 1$ y supongamos que se cumple nuestra afirmación para $n + 1 - k$, es decir, que si α es una isometría de \mathbb{E}^n , $A = \{P_1, \dots, P_{n+1}\} \subset \mathbb{E}^n$ puntos en posición general y $\{P_1, \dots, P_k\} \subset \mathbb{E}^n$ es el conjunto de todos los puntos de A que están fijos bajo α , entonces α es el producto de a lo más $n + 1 - k$ reflexiones. Ahora supongamos que α una isometría para la que el conjunto $\{P_1, \dots, P_{k-1}\}$ son puntos fijos. Probaremos que α es producto de a lo más $n + 1 - (k - 1) = n - k + 2$ reflexiones. Si $\alpha(P_k) = P_k$, por hipótesis de inducción tenemos que α es producto de a lo más $n + 1 - k < n - k + 2$ reflexiones. Supongamos que $\alpha(P_k) \neq P_k$ y sea Π el hiperplano mediatriz del segmento $\overline{P_k \alpha(P_k)}$. Sea σ_{Π} la reflexión por el plano Π ; entonces $\sigma_{\Pi}(P_k) = \alpha(P_k)$. Como

$$d(P_i, P_k) = d(\alpha(P_i), \alpha(P_k)) = d(P_i, \alpha(P_k)) \quad i \in \{1, \dots, k - 1\},$$

tenemos que $\{P_1, \dots, P_{k-1}\} \subset \Pi$. Por lo que $\sigma_{\Pi}(P_i) = P_i = \alpha(P_i)$ para toda $i \in \{1, \dots, k - 1\}$. Sin embargo, tenemos también que $\sigma_{\Pi}(P_k) = \alpha(P_k)$, de ahí que

$\{P_1, \dots, P_k\}$ son puntos fijos de $\sigma_{\Pi}^{-1}\alpha$. Por nuestra hipótesis de inducción, $\sigma_{\Pi}^{-1}\alpha$ es el producto de a lo más $n + 1 - k$ reflexiones. Por lo tanto $\alpha = \sigma_{\Pi}(\sigma_{\Pi}^{-1}\alpha)$ es el producto de a lo más $n + 1 - k + 1 = n + 1 - (k - 1)$ reflexiones.

□

De este teorema tenemos inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 1.4. *Sea $\alpha : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ una isometría, entonces α es el producto de a lo más $n + 1$ reflexiones.*

Ahora nuestra atención se centrará en la descripción de las isometrías de \mathbb{E} , \mathbb{E}^2 y \mathbb{E}^3 .

1.2. Las isometrías de \mathbb{E}

Por el Corolario 1.4 cualquier isometría de \mathbb{E} es el producto de a lo más dos reflexiones. Comencemos por describir estas y veamos los posibles casos.

La **reflexión** por un punto A es la transformación que manda un punto $P \in \mathbb{E}$ al punto $\sigma_A(P) = 2A - P$ (Figura 1.1).



Figura 1.1: Reflexión en \mathbb{E} .

Ahora tomemos las reflexiones σ_A y σ_B por puntos A y B respectivamente y el punto $P \in \mathbb{E}$. Al componer σ_A y σ_B , lo que obtenemos es la **traslación** $\tau_{\vec{v}}(P)$, donde \vec{v} es un vector cuya norma y dirección están dados por $2(B - A)$ (Figura 1.2).

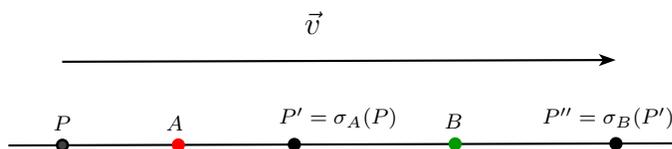


Figura 1.2: Traslación en \mathbb{E} como producto de dos reflexiones.

Por otra parte, notemos que el producto de una traslación con una reflexión (o de una reflexión con una traslación), nos da una reflexión y el producto de dos traslaciones nos da una traslación (o la identidad). Lo anterior se puede resumir en el siguiente:

Teorema 1.5. *Una isometría α de \mathbb{E} puede ser sólo una de las siguientes opciones²:*

1. *Reflexión (por un punto).*
2. *Traslación.*

1.3. Las isometrías de \mathbb{E}^2

Ahora pasemos a describir las reflexiones en el plano \mathbb{E}^2 . Como lo menciona la Definición 1.3, consideremos una recta $l \subset \mathbb{E}^2$. La **reflexión** con eje l , es la transformación $\sigma_l : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ tal que, dado $P \in \mathbb{E}^2$ tenemos $P' = \sigma_l(P)$, donde l es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$. A lo largo este trabajo denotaremos la reflexión que tiene por eje a la recta l por σ_l (Figura 1.3).

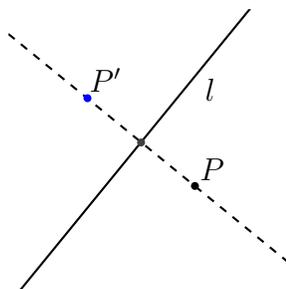


Figura 1.3: Vista geométrica de la reflexión σ_l en \mathbb{E}^2 para el punto P .

La **rotación** con centro $O \in \mathbb{E}^2$ y ángulo θ , es la transformación $\rho_{O,\theta} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ tal que, dado $P \in \mathbb{E}^2$ y $P' = \rho_{O,\theta}(P)$, entonces P' se obtiene de la siguiente manera:

- 1) Si $P = O$ entonces $P' = O$.
- 2) Si $P \neq O$, sea l la recta que contiene a P y O , sea m la recta que contiene a O y forma un ángulo³ con l de medida θ . Elegimos a $P' \in m$ tal que

²En adelante, no mencionaremos a la identidad como parte de la clasificación.

³el ángulo $\theta = \angle l m$ es orientado en sentido levógiro, es decir, contrario a las manecillas del reloj.

$d(O, P') = d(O, P)$ y sobre el mismo sector de apertura del ángulo θ (Figura 1.4).

A lo largo este trabajo denotaremos la rotación que tiene por centro al punto O y ángulo θ por $\rho_{O,\theta}$.

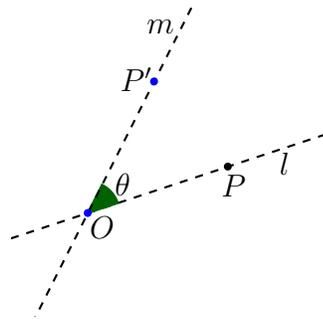


Figura 1.4: Vista geométrica de la reflexión $\rho_{O,\theta}$ en \mathbb{E}^2 para el punto P .

De las rotaciones, podemos distinguir una que jugará un papel importante en este texto y es la que tienen por ángulo $\theta = \pi$, esta se denomina **medio giro** y la denotaremos por ρ_O . De la definición de esta transformación notamos que es una involución.

En paráfraseo a la Definición 1.1 pero ahora en el contexto del espacio \mathbb{E}^2 , tenemos que una **traslación** $\tau_{\vec{v}} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ es la transformación tal que $\tau_{\vec{v}}(P) = P' = P + \vec{v}$, con \vec{v} un vector de \mathbb{E}^2 (Figura 1.5).

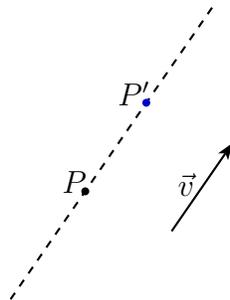


Figura 1.5: Vista geométrica de la traslación $\tau_{\vec{v}}$ en \mathbb{E}^2 para el punto P .

Consideremos $l \subset \mathbb{E}^2$ una recta y \vec{v} un vector de \mathbb{E}^2 paralelo a un vector director de l . Un **deslizamiento** con eje l y vector \vec{v} es la transformación $\delta_{l,\vec{v}} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ tal que, $\delta_{l,\vec{v}}(P) \doteq (\tau_{\vec{v}} \circ \sigma_l)(P)$ (Figura 1.6). En adelante, denotaremos el deslizamiento que tiene por eje a la recta l y vector \vec{v} por $\delta_{l,\vec{v}}$.

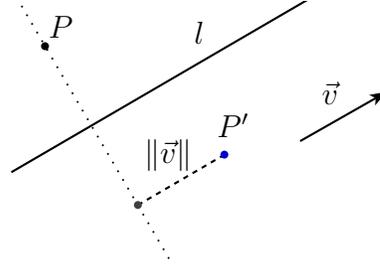


Figura 1.6: Vista geométrica del deslizamiento $\delta_{l,\vec{v}}$ en \mathbb{E}^2 para el punto P .

En esta sección nuestra atención se centrará en la caracterización de las isometrías del plano \mathbb{E}^2 y con base en las definiciones anteriores es un ejercicio cotidiano poder apreciar que las reflexiones, las rotaciones, las traslaciones y los deslizamientos son isometrías de \mathbb{E}^2 . Para dar la clasificación completa de estas, nos apoyaremos en los siguientes resultados; con ellos y el Corolario 1.4 presentaremos la lista completa de las isometrías del plano.

Cabe señalar que en este apartado sólo se mencionarán los resultados, invitamos al lector a consultar, por ejemplo, las obras [3], [14] y [35] mismas que muestran detalladas demostraciones de lo que aquí se utilizará. Así pues, los siguientes dos teoremas son base para el Lema 1.8 y útiles caracterizaciones de las traslaciones y rotaciones en función de producto de reflexiones.

Teorema 1.6. Sean l y m rectas en \mathbb{E}^2 .

- Una isometría α es una traslación sí y sólo si $\alpha = \sigma_l \sigma_m$ para dos rectas paralelas l y m . Más aún, la distancia del desplazamiento de la traslación es el doble de la distancia entre las rectas l y m .
- Si l y m son dos rectas distintas y paralelas entonces, $\sigma_l \sigma_m = \sigma_{l'} \sigma_{m'}$ para otras dos rectas l' y m' sí y sólo si existe una traslación τ tal que $\tau(l) = l'$ y $\tau(m) = m'$.

Teorema 1.7. Sean l y m rectas en \mathbb{E}^2 .

- Una isometría α es una rotación sí y sólo si $\alpha = \sigma_l \sigma_m$ para dos rectas l y m que se intersecan en un punto O . Más aún, el ángulo de rotación es el doble del ángulo entre las rectas l y m .
- Si l y m son dos rectas distintas que se intersecan en un punto O entonces, $\sigma_l \sigma_m = \sigma_{l'} \sigma_{m'}$ para otras dos rectas l' y m' sí y sólo si existe una rotación $\rho_{O,\theta}$ alrededor del punto O tal que $\rho_{O,\theta}(l) = l'$ y $\rho_{O,\theta}(m) = m'$.

Con base en los dos teoremas anteriores tenemos el siguiente lema, el cual es de suma utilidad para el reconocimiento de las isometrías.

Lema 1.8. Sean l y m rectas en \mathbb{E}^2 .

- a) Supongamos que l y m son rectas paralelas. Si trasladamos estas rectas por cualquier traslación fija τ para obtener dos nuevas rectas l' y m' . Entonces $\sigma_l \sigma_m = \sigma_{l'} \sigma_{m'}$.
- b) Supongamos que l y m se intersecan en un punto O . Si rotamos estas rectas alrededor del punto O por cualquier rotación fija ρ para obtener dos nuevas rectas l' y m' . Entonces $\sigma_l \sigma_m = \sigma_{l'} \sigma_{m'}$.

En este punto, nos encontramos con los resultados necesarios para presentar la clasificación de isometrías en el plano \mathbb{E}^2 . Tengamos presente que cualquier isometría (en el plano) es producto de a lo más tres reflexiones. Veamos los siguientes casos:

- i) No hay producto de reflexiones y por lo tanto se tiene la identidad.
- ii) El producto de una sola reflexión es evidentemente una reflexión.
- iii) El producto de dos reflexiones es una traslación o una rotación, ya sea que los ejes de reflexión sean paralelos o no, respectivamente.
- iv) El producto de tres reflexiones, sea $\alpha = \sigma_l \sigma_m \sigma_n$ para algunas rectas l , m y n . Se pueden presentar las siguientes situaciones:
 - Si las rectas $l = m = n$, tenemos una reflexión.

- Si las rectas $l = m$ o $m = n$, tenemos que α es una reflexión. En el caso que $l = n$ pero $l \neq m \neq n$, tenemos que α es una rotación o una traslación, ya sea que las rectas l y m se intersequen o sean paralelas, respectivamente.
- Si las rectas l , m y n son mutuamente paralelas, consideramos la recta n' tal que la traslación $\sigma_l \sigma_{n'} = \sigma_m \sigma_n$. Entonces $\alpha = \sigma_l \sigma_m \sigma_n = \sigma_{n'}$, es una reflexión (Figura 1.7).
- Si las tres rectas l , m y n son concurrentes en un punto, digamos O , consideramos la recta n' tal que la rotación $\sigma_l \sigma_{n'} = \sigma_m \sigma_n$ con centro en O . Por lo tanto, $\alpha = \sigma_l \sigma_m \sigma_n = \sigma_{n'}$, es una reflexión (Figura 1.8).

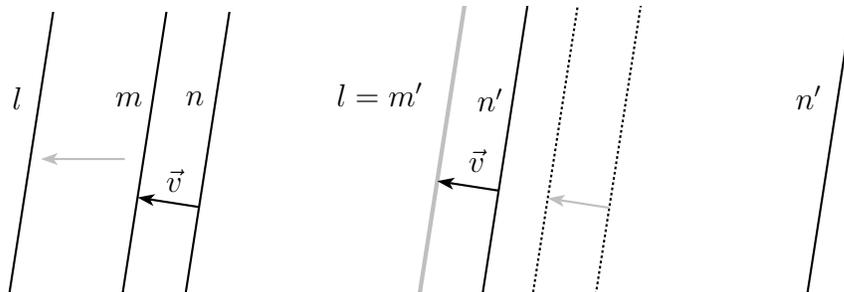


Figura 1.7: Tres rectas paralelas.

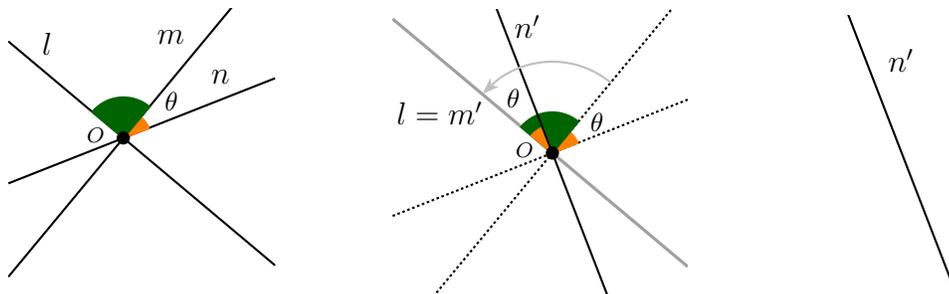


Figura 1.8: Tres rectas concurrentes.

- Si l, m y n están en posición general y supongamos que $l \cap m = \{O\}$ con $O \notin n$, consideramos las rectas l' y m' tal que la rotación $\sigma_{m'}\sigma_{l'} = \sigma_m\sigma_l$ con centro en O de forma que m' sea ortogonal a n (Figura 1.9). Sea $\{Q\} = m' \cap n$. Ahora, tomemos la rotación $\sigma_{m''}\sigma_{n'} = \sigma_{m'}\sigma_n$ con centro en Q de manera que m'' sea ortogonal a l' (Figura 1.10). De aquí tenemos que m'' es ortogonal tanto a l' como a n' , además estas rectas son paralelas.

Así que, $\alpha = \sigma_l\sigma_m\sigma_n = \sigma_{l'}\sigma_{m'}\sigma_n = \sigma_{l'}\sigma_{m''}\sigma_{n'} = (\sigma_{l'}\sigma_{n'})\sigma_{m''}$, tenemos un deslizamiento. Notemos lo dicho en las siguientes imágenes.

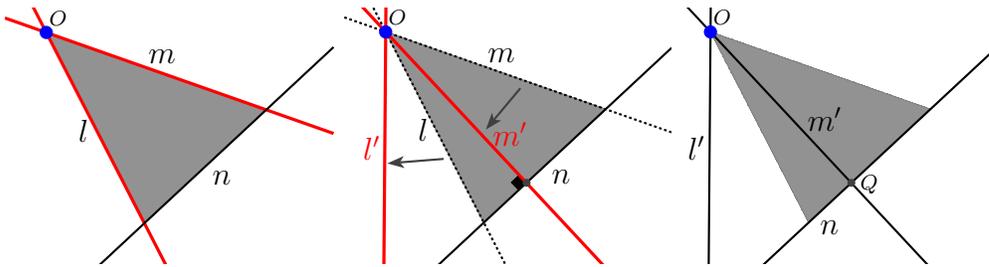


Figura 1.9: La rotación de l y m por el punto O .

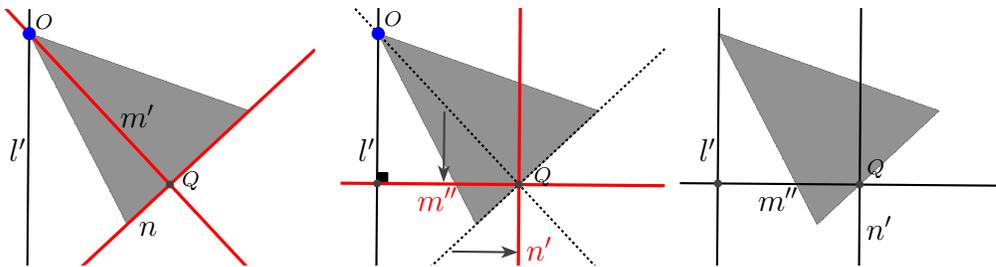


Figura 1.10: La rotación de m' y n por el punto Q .

- Si l y n son rectas distintas, paralelas y $n \cap m = \{Q\}$. Consideramos las rectas n' y m' tal que la rotación $\sigma_{m'}\sigma_{n'} = \sigma_m\sigma_n$ con centro en Q y de forma que m' sea ortogonal a l ; sea $\{P\} = m' \cap l$ (Figura 1.11). Ahora, tomemos la rotación $\sigma_{l'}\sigma_{m''} = \sigma_l\sigma_{m'}$ con centro en P y de manera que

m'' sea ortogonal a n' . De aquí tenemos que m'' es ortogonal a l' y n' , además estas rectas son paralelas.

Esto es, $\alpha = \sigma_l \sigma_m \sigma_n = \sigma_l \sigma_{m'} \sigma_{n'} = \sigma_{l'} \sigma_{m''} \sigma_{n'} = (\sigma_{l'} \sigma_{n'}) \sigma_{m''}$ y tenemos nuevamente un deslizamiento.

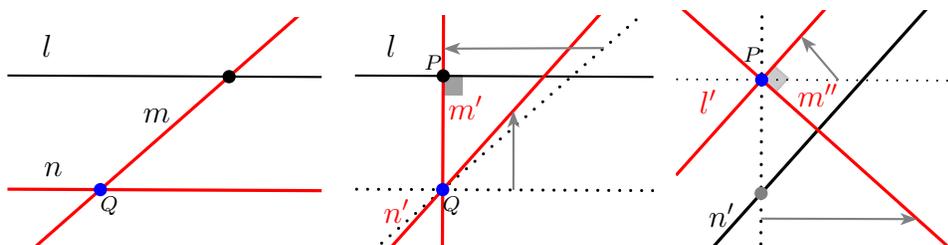


Figura 1.11: Vista geométrica de la construcción del deslizamiento $\sigma_l \sigma_m \sigma_n$.

En vista del análisis anterior, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.9. *Cualquier isometría α de \mathbb{E}^2 puede ser sólo una de las siguientes opciones:*

1. Reflexión.
2. Traslación.
3. Rotación.
4. Deslizamiento.

Con base en lo expuesto anteriormente tenemos también la siguiente observación que nos será de gran utilidad en el estudio de las isometrías.

Sea α una isometría de \mathbb{E}^2 entonces:

- a) α deja por lo menos tres puntos fijos no colineales si y sólo si $\alpha = \iota$.
- b) α deja al menos dos puntos fijos si y sólo si $\alpha = \iota$ o $\alpha = \sigma_l$.
- c) α tiene exactamente un punto fijo si y sólo si $\alpha = \sigma_l \sigma_m$ donde l y m son rectas distintas que se intersecan en el punto O y por lo tanto α es una rotación.
- d) α no tiene puntos fijos tenemos que, $\alpha = \sigma_l \sigma_m$ es una traslación o $\alpha = \sigma_n \sigma_m \sigma_l$ un deslizamiento.

Cabe notar aquí que con argumentos similares a los que se abordaron en este apartado, para analizar distintos productos de reflexiones, obtenemos los siguientes resultados. De igual forma, el lector interesado puede consultar las obras [12] y [14] donde encontrará material complementario para convencernos de lo que aquí enunciamos:

- I) El producto de $\begin{cases} \text{traslación} \\ \text{rotación} \end{cases}$ por $\begin{cases} \text{traslación} \\ \text{rotación} \end{cases}$ es $\begin{cases} \text{identidad} \\ \text{traslación} \\ \text{rotación} \end{cases}$.
- II) El producto de $\begin{cases} \text{traslación} \\ \text{rotación} \end{cases}$ por $\begin{cases} \text{reflexión} \\ \text{deslizamiento} \end{cases}$ es $\begin{cases} \text{reflexión} \\ \text{deslizamiento} \end{cases}$.
- III) El producto de $\begin{cases} \text{reflexión} \\ \text{deslizamiento} \end{cases}$ por $\begin{cases} \text{reflexión} \\ \text{deslizamiento} \end{cases}$ es $\begin{cases} \text{identidad} \\ \text{traslación} \\ \text{rotación} \end{cases}$.

Para concluir con esta sección, daremos el concepto de orientación de una isometría del espacio \mathbb{E}^2 lo cual nos permitirá en futuros resultados la identificación más ágil de las isometrías.

Sea α una isometría de \mathbb{E}^2 . Consideremos el triángulo ABC en el plano \mathbb{E}^2 y sean $\alpha(A) = A'$, $\alpha(B) = B'$ y $\alpha(C) = C'$, entonces el triángulo ABC bajo α es $A'B'C'$. Si uno lee los vértices del triángulo ABC en sentido dextrógiro (o levógiro) y tenemos que los vértices del triángulo $A'B'C'$ se leen en el mismo orden entonces, diremos que α **preserva la orientación**. En caso contrario, diremos que α **invierte la orientación**.

De esta definición de orientación tenemos los siguientes resultados:

- Cualquier isometría del plano que preserve la orientación es la identidad, una rotación o una traslación.
 - Cualquier isometría del espacio que invierte la orientación es una reflexión o un deslizamiento.
 - El producto de dos isometrías que preservan la orientación es una isometría que preserve la orientación. La inversa de una isometría que preserve la orientación es también una isometría que preserve la orientación.
 - El producto de dos isometrías que invierten la orientación es una isometría que preserve la orientación. La inversa de una isometría que invierte la orientación es también una isometría que invierte la orientación.
-

- e) El producto de una isometría que invierte la orientación y una que preserva la orientación es una isometría que invierte la orientación.

Otra forma equivalente de nombrar a las isometrías que preservan orientación o la invierten es la de isometría **directa** y **opuesta**, respectivamente. Si un conjunto S consta únicamente de isometrías directas lo denotaremos por S^+ ; dado un grupo G de isometrías, denotamos por G^+ al subgrupo de G de todas las isometrías directas.

1.4. Las isometrías de \mathbb{E}^3

Comencemos por describir las reflexiones en el espacio, para después analizar los posibles casos según el Corolario 1.4. Nuevamente y tal como se hizo en la Definición 1.3, tenemos nuestra primer y destacable definición:

Sea $\Pi \subset \mathbb{E}^3$ un plano. La **reflexión** con eje el plano Π , es la transformación $\sigma_{\Pi} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ tal que, dado $P \in \mathbb{E}^3$, si $P' = \sigma_{\Pi}(P)$ entonces, Π es el plano mediatriz del segmento PP' (Figura 1.12). A lo largo este trabajo denotaremos la reflexión que tiene por eje al plano Π por σ_{Π} .

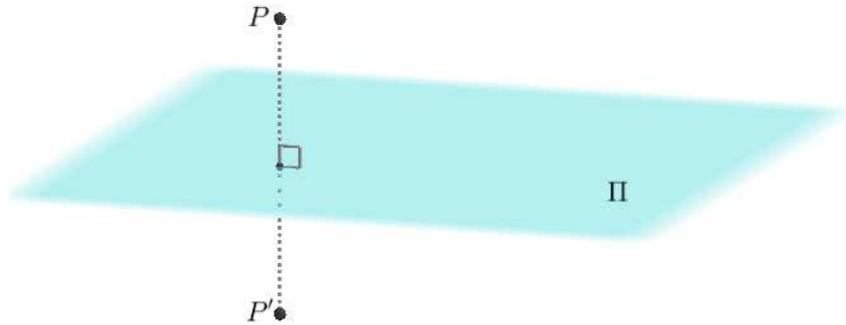


Figura 1.12: Vista geométrica de la reflexión σ_{Π} en \mathbb{E}^3 para el punto P .

Para la isometría que sigue consideremos una recta $l \in \mathbb{E}^3$ y θ un ángulo. La **rotación** con eje l y ángulo θ , es la transformación $\rho_{l,\theta} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ tal que, dado $P \in \mathbb{E}^3$, si $P' = \rho_{l,\theta}(P)$ entonces, P' se obtiene de la siguiente manera: sea Π el plano perpendicular a l que contiene a P . Sean $O = l \cap \Pi$ y $\rho_{O,\theta}$ la rotación en Π (vista

como rotación en \mathbb{E}^2) con centro en O y ángulo θ (Figura 1.13 inciso I)). De esta forma $P' = \rho_{O,\theta}(P) = \rho_{l,\theta}(P)$.

De forma análoga al plano, las rotaciones las podemos expresar como el producto de dos reflexiones en planos que se intersectan (Figura 1.13 inciso II)) y donde el ángulo de rotación será el doble del ángulo entre los planos Π_1 y Π_2 . En el transcurso de este trabajo denotaremos la rotación que tiene por eje a la recta l y ángulo θ por $\rho_{l,\theta}$.

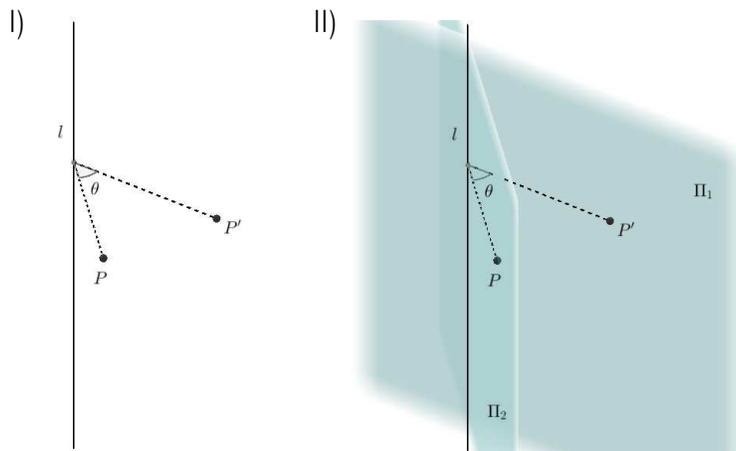


Figura 1.13: I) Vista geométrica de la rotación $\rho_{l,\theta}$ en \mathbb{E}^3 para el punto P . II) Vista como producto de dos reflexiones por los planos Π_1 y Π_2 cuya intersección genera la recta l .

Una rotación de particular interés es la rotación con ángulo $\theta = \pi$; como en el caso del plano, llamaremos este tipo de rotación **medio giro** y lo denotaremos por ρ_l . Dos particularidades de los medios giros son, que los podemos expresar como el producto de dos reflexiones por planos ortogonales y que son involuciones. Una consecuencia directa de la ortogonalidad de los planos es que este producto conmuta.

De nueva cuenta, la **traslación** $\tau_{\vec{v}} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ es la transformación tal que $\tau_{\vec{v}}(P) = P' = P + \vec{v}$, con \vec{v} un vector de \mathbb{E}^3 (como espacio vectorial sobre \mathbb{R}) y $P \in \mathbb{E}^3$ (Figura 1.14 inciso I)). Análogamente como en el plano \mathbb{E}^2 , las traslaciones las podemos ver como el producto de dos reflexiones en planos paralelos (Figura 1.14 inciso II)) y donde la norma del vector de traslación será el doble de la distancia entre los planos Π_1 y Π_2 . Estas isometrías las denotaremos por $\tau_{\vec{v}}$.

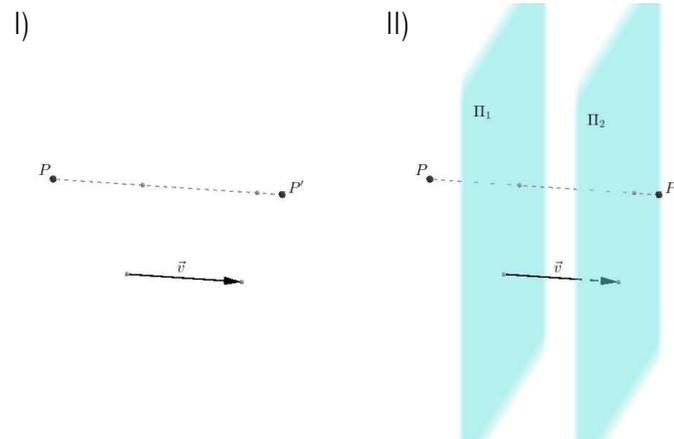


Figura 1.14: I) Vista geométrica de la traslación $\tau_{\vec{v}}$ en \mathbb{E}^3 para el punto P . II) Vista como producto de dos reflexiones por los planos Π_1 y Π_2 paralelos.

Por otra parte, el **deslizamiento** con plano Π y vector \vec{v} *paralelo* a algún vector del plano Π , es la transformación $\delta_{\Pi, \vec{v}} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ tal que, $\delta_{\Pi, \vec{v}} \doteq \sigma_{\Pi} \tau_{\vec{v}}$ (Figura 1.15 inciso I)). Análogamente al estudio que se hizo en el plano respecto a un deslizamiento, este podemos expresarlo como el producto de tres reflexiones por los planos Π_1 , Π_2 y Π_3 , tales que los planos Π_2 y Π_3 son paralelos y el plano Π_1 es ortogonal a ambos (Figura 1.15 inciso II)). Durante el desarrollo de este trabajo los deslizamientos en el espacio \mathbb{E}^3 los denotaremos por $\delta_{\Pi, \vec{v}}$.

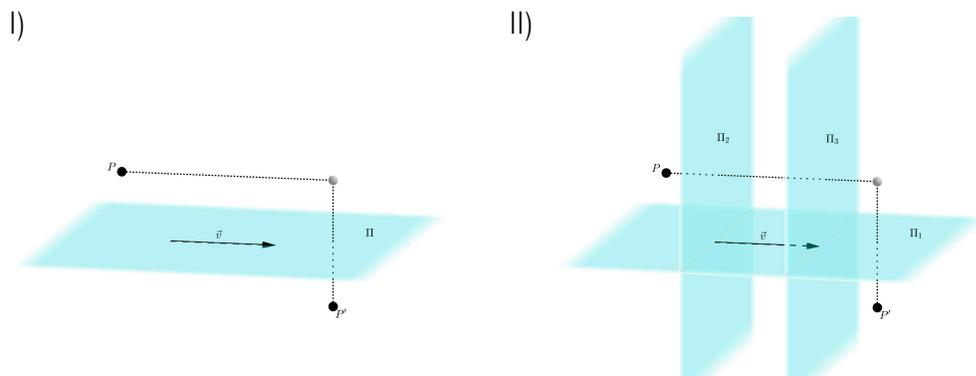


Figura 1.15: I) Vista geométrica del deslizamiento $\delta_{\Pi, \vec{v}}$ en \mathbb{E}^3 para el punto P . II) Vista como producto de tres reflexiones por los planos Π_1 , Π_2 y Π_3 dos de ellos paralelos y el tercero ortogonal a ellos.

Una nueva isometría que aparece en este espacio es la **reflexión con giro** conformada por el plano Π , la recta l y ángulo θ , a la que denotaremos por $\phi_{\Pi,\theta} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ y es tal que, $\phi_{\Pi,\theta} \doteq \sigma_{\Pi} \rho_{l,\theta}$ donde l es perpendicular a Π y θ es el ángulo de rotación sobre el eje l (Figura 1.16 inciso I)). Al punto de intersección de la recta l con el plano Π le llamaremos *centro* (de la reflexión con giro). Esta transformación se puede expresar como el producto de tres reflexiones por planos Π_1 , Π_2 y Π_3 , tales que los planos Π_2 y Π_3 se intersecan en la recta l en un ángulo de $\frac{\theta}{2}$ y el plano Π_1 es ortogonal a ambos (Figura 1.16 inciso II)).

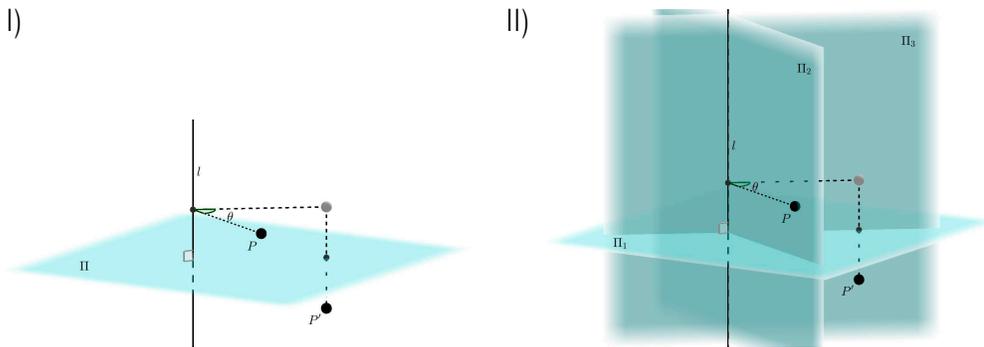


Figura 1.16: I) Vista geométrica de la reflexión con giro $\phi_{\Pi,\theta}$ en \mathbb{E}^3 para el punto P . II) Vista como producto de tres reflexiones por los planos Π_1 , Π_2 y Π_3 dos de ellos se intersecan y el tercero es ortogonal a ellos.

De esta transformación se deriva una de particular interés y es la llamada **reflexión por un punto** o más comunmente **inversión central**, a la cual denotaremos por σ_O . Ésta es un caso particular de la reflexión con giro cuando la rotación es un medio giro o equivalentemente cuando en el producto de tres reflexiones, los tres planos de reflexión son mutuamente ortogonales entre sí y por ende intersecándose en el punto O . Algo que podemos notar es que esta transformación es una involución. Visto de otro modo, la inversión central es la transformación que manda a P a su punto diametralmente opuesto (o antípoda).

Por otro lado, consideremos a σ_O la inversión central por el punto O y sean α una isometría del espacio y $\{P, P'\} \subseteq \mathbb{E}^3$ distintos tales que $\sigma_O(P) = P'$. Podemos notar que P , O y P' son colineales y $PO = OP'$, por lo que $\alpha(P)$, $\alpha(O)$ y $\alpha(P')$ también son colineales y $\alpha(P) \neq \alpha(P')$. Si además $\alpha(O) = O$ entonces, $\alpha(P)$, O y $\alpha(P')$ son colineales y puesto que α es isometría $\alpha(P)O = PO = P'O = \alpha(P')O$, por lo que $\alpha\sigma_O(P) = \alpha(P')$ es un punto en la recta $\alpha(P)O$ diferente a $\alpha(P)$ y tal

que su distancia a O es OP . Notemos que por definición de inversión central, $\alpha(P)$, O y $\sigma_O\alpha(P)$ son colineales y además la distancia de O a $\sigma_O\alpha(P)$ es la misma que de O a $\alpha(P)$, es decir, OP . Por lo tanto, $\sigma_O\alpha(P) = \alpha(P')$ y $\alpha\sigma_O(P) = \alpha(P')$. Lo que acabamos de ver es que la inversión central conmuta con cualquier isometría que fije el centro de la inversión.

Otra nueva isometría de este espacio es el **tornillo** o (traslación con giro) con ángulo θ , que es la transformación $\gamma_{\vec{v},l} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ tal que, $\gamma_{\vec{v},l} \doteq \tau_{\vec{v}} \rho_{l,\theta}$ (Figura 1.17 inciso I)). A estas transformaciones las denotaremos a partir de ahora por $\gamma_{\vec{v},l}$. Notemos que esta transformación es el producto de cuatro reflexiones por los planos Π_1, Π_2, Π_3 y Π_4 , tales que los planos Π_1 y Π_2 son paralelos y los planos Π_3 y Π_4 se intersecan en la recta l ortogonal a Π_1 y Π_2 y hacen un ángulo de $\frac{\theta}{2}$ entre ellos (Figura 1.17 inciso II)).

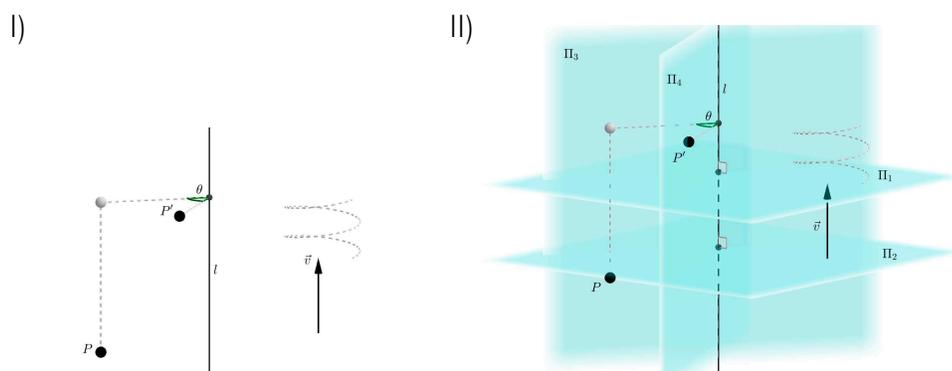


Figura 1.17: I) Vista geométrica del tornillo $\gamma_{\vec{v},l}$ en \mathbb{E}^3 para el punto P . II) Vista como producto de cuatro reflexiones por los planos Π_1, Π_2, Π_3 y Π_4 dos de ellos se intersecan y los otros dos son paralelos y perpendiculares a los primeros.

Análogamente al estudio de las isometrías en el plano \mathbb{E}^2 tenemos resultados importantes, que nos permitirán la clasificación de estas en el espacio \mathbb{E}^3 .

Primero, por el Teorema 1.1 basta analizar el comportamiento de cuatro puntos no coplanares en el espacio para caracterizar una isometría y por el Corolario 1.4 basta estudiar el producto de cuatro reflexiones para convencernos que será alguna de las transformaciones antes mencionadas. Al igual cómo se exploró en la Sección 1.3, el lector notará que se está parafraseando los teoremas 1.6 y 1.7, con algunas adecuaciones, ahora para el espacio \mathbb{E}^3 . Con lo anterior en mente, enunciemos el Lema 1.10 el cual es de suma utilidad para el reconocimiento de las isometrías.

Lema 1.10. Sean Π_1 y Π_2 planos en \mathbb{E}^3 .

- a) Supongamos que Π_1 y Π_2 son planos paralelos. Si trasladamos estos planos por cualquier traslación fija τ para obtener dos nuevos planos Π'_1 y Π'_2 . Entonces $\sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2} = \sigma_{\Pi'_1}\sigma_{\Pi'_2}$.
- b) Supongamos que Π_1 y Π_2 son planos que se intersecan en una recta l . Si rotamos estos planos alrededor de la recta l por cualquier rotación fija ρ para obtener dos nuevos planos Π'_1 y Π'_2 . Entonces $\sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2} = \sigma_{\Pi'_1}\sigma_{\Pi'_2}$.

Como cualquier isometría (en el espacio) es producto de a lo más cuatro reflexiones, tenemos los siguientes casos:

- i) No hay producto de reflexiones y por lo tanto se tiene la identidad.
- ii) El producto de una sola reflexión es evidentemente una reflexión.
- iii) El producto de dos reflexiones es una traslación o una rotación, ya sea que los planos de reflexión sean paralelos o no, respectivamente.
- iv) El producto de tres reflexiones. Procederemos con argumentos similares a los expuestos en el plano. Sea α la isometría $\sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}$ para algunos planos Π_1 , Π_2 y Π_3 .
- iv.1) Si $\Pi_i = \Pi_2$ con $i \in \{1, 3\}$, tenemos que $\alpha = \sigma_{\Pi_k}$ una reflexión, con $k \in \{1, 3\}$ y $k \neq i$. Si $\Pi_1 = \Pi_3$ y $\Pi_i \neq \Pi_2$ con $i \in \{1, 3\}$, consideremos los siguientes dos casos:
- iv.1.1) Supongamos que el plano Π_2 es paralelo a Π_i con $i \in \{1, 3\}$. Sea Π'_2 un plano paralelo a Π_i tal que $\sigma_{\Pi'_2}\sigma_{\Pi_1} = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}$. Por lo que, $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3} = \sigma_{\Pi'_2}\sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_3} = \sigma_{\Pi'_2}$, una reflexión.
- iv.1.2) Supongamos que el plano Π_2 no es paralelo a Π_i con $i \in \{1, 3\}$ y sea $l = \Pi_2 \cap \Pi_i$. Sea Π'_2 un plano tal que $l = \Pi'_2 \cap \Pi_i$ y $\sigma_{\Pi'_2}\sigma_{\Pi_1} = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}$. Por lo que, $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3} = \sigma_{\Pi'_2}\sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_3} = \sigma_{\Pi'_2}$, es una reflexión.
- iv.2) Consideremos $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 \neq \emptyset$, pero no hay dos de ellos iguales.

- iv.2.1) Si $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = l$ una recta, tenemos que existe un plano Π'_3 tal que $\sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi'_3} = \sigma_{\Pi_2} \sigma_{\Pi_3}$ (Figura 1.18 incisos I) y II)).
 Por lo tanto, $\alpha = \sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi_2} \sigma_{\Pi_3} = \sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi'_3} = \sigma_{\Pi'_3}$, es una reflexión.

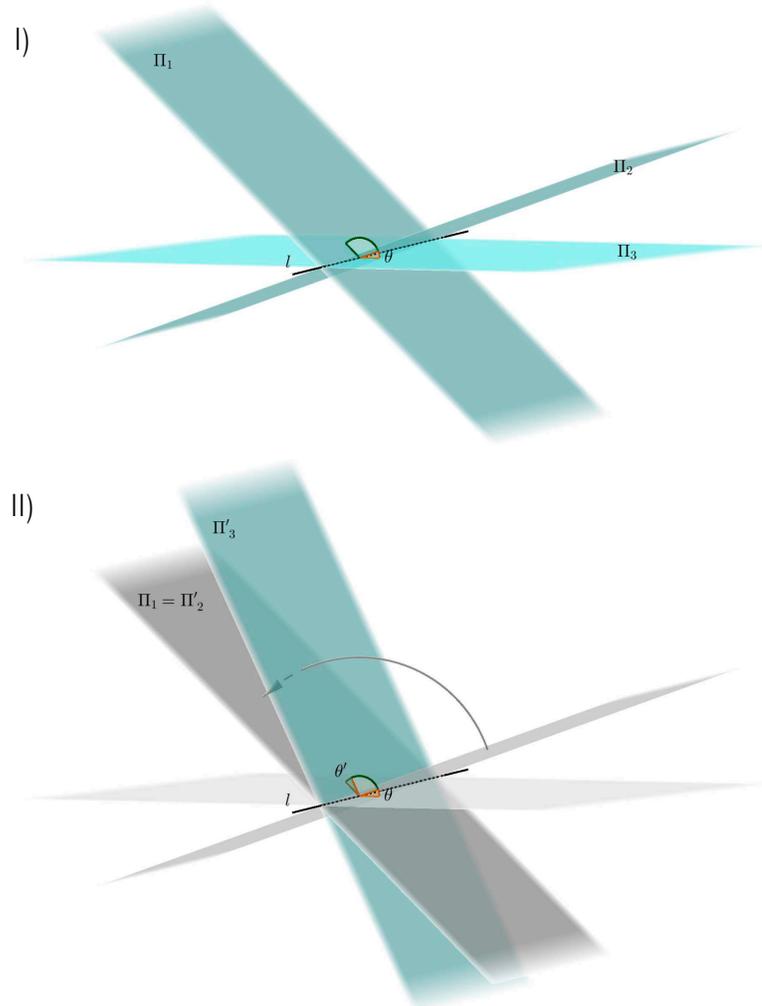


Figura 1.18: I) Tres planos cuya intersección es una recta. II) Adecuación de los planos para obtener una sola reflexión.

- iv.2.2) Supongamos que $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \{O\}$ (Figura 1.19), podemos modificar a la isometría α de la siguiente manera.

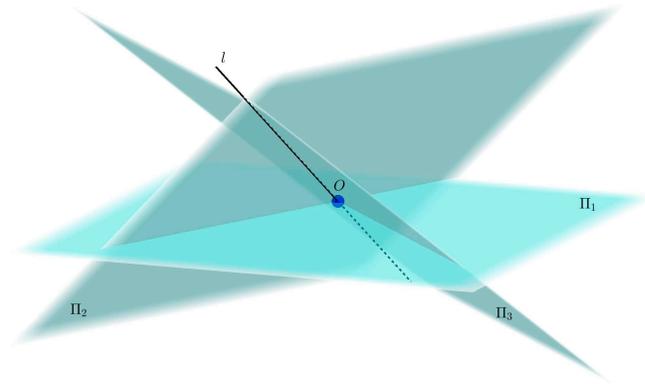


Figura 1.19: Tres planos cuya intersección es un punto.

Consideremos la rotación $\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3} = \sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}$ sobre la línea $l = \Pi_2 \cap \Pi_3$, de manera que Π_2' sea perpendicular a Π_1 , entonces $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2'}\sigma_{\Pi_3}$ (Figura 1.20).

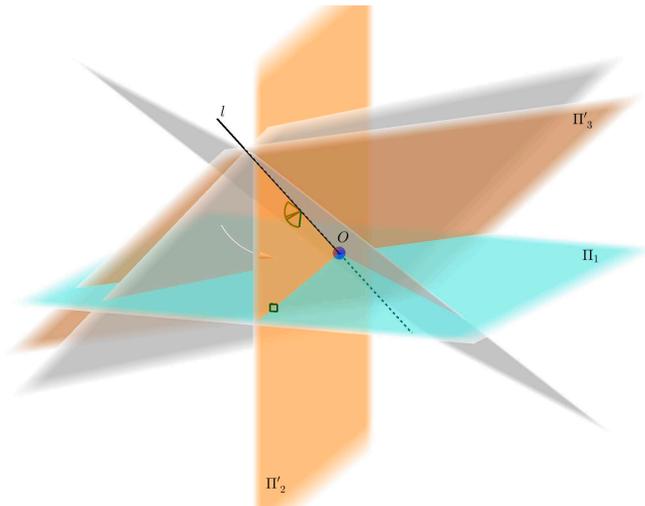


Figura 1.20: Adecuación de dos planos sobre la recta l para obtener un medio giro.

Sea $m = \Pi_1 \cap \Pi_2'$ y elegimos las reflexiones por los planos Π_1' y Π_2'' de modo que $\sigma_{\Pi_1'}\sigma_{\Pi_2''} = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2'}$ sobre la línea m , de tal forma que Π_3' sea ortogonal a Π_1' , así $\alpha = \sigma_{\Pi_1'}\sigma_{\Pi_2''}\sigma_{\Pi_3}$. Notemos que Π_1' y Π_2'' son ortogonales, ya que Π_1 y Π_2' son ortogonales. Es decir, tanto Π_3' como Π_2'' son ortogonales a Π_1' (Figura 1.21).

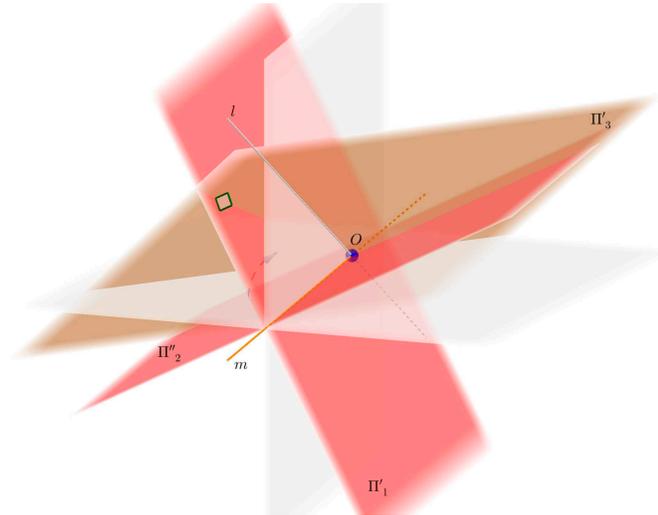


Figura 1.21: Adecuación de los planos que conforman el medio giros sobre la recta m .

Por lo tanto, $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3} = \sigma_{\Pi'_1}\sigma_{\Pi''_2}\sigma_{\Pi'_3}$, donde Π'_3 y Π''_2 se intersecan en una línea l' perpendicular a Π'_1 . De esto obtenemos una reflexión con giro (Figura 1.22 inciso I) y II).

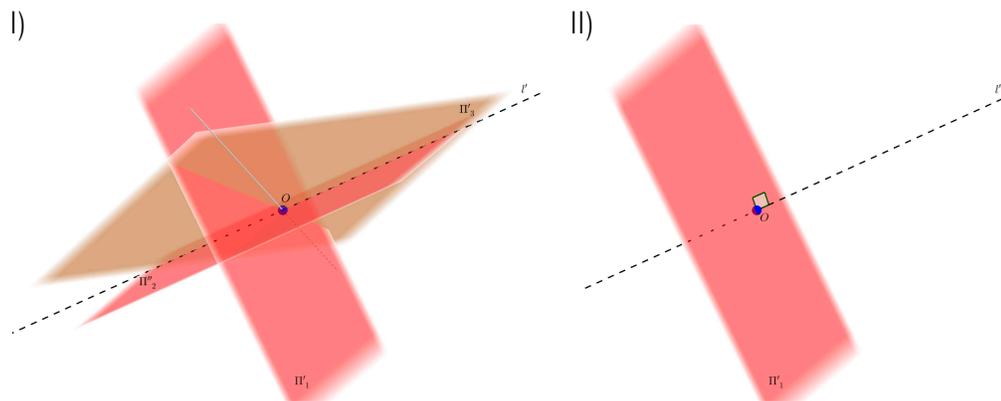


Figura 1.22: I) Tres planos que conforman una reflexión con giro. II) Vista de la reflexión con giro.

iv.3) Consideremos $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \emptyset$.

iv.3.1) Supongamos que $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$ para todo $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. En este caso, $\sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi_2}$ es una traslación entonces, consideramos la traslación $\sigma_{\Pi'_1} \sigma_{\Pi'_2} = \sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi_2}$, de manera que $\Pi'_2 = \Pi_3$ y por lo tanto $\alpha = \sigma_{\Pi'_1}$ una reflexión (Figura 1.23 incisos I) y II)).

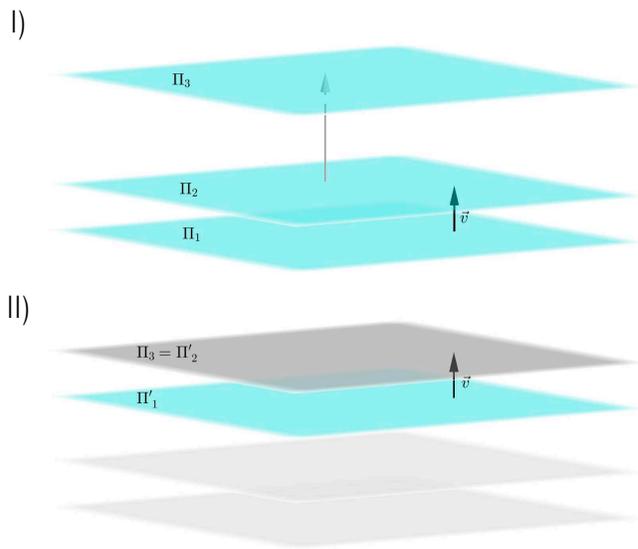


Figura 1.23: I) Tres planos paralelos dos a dos. II) Adecuación de los planos para obtener una sola reflexión.

iv.3.2) Supongamos que $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$, $\Pi_1 \cap \Pi_3 \neq \emptyset \neq \Pi_2 \cap \Pi_3$ (Figura 1.24).

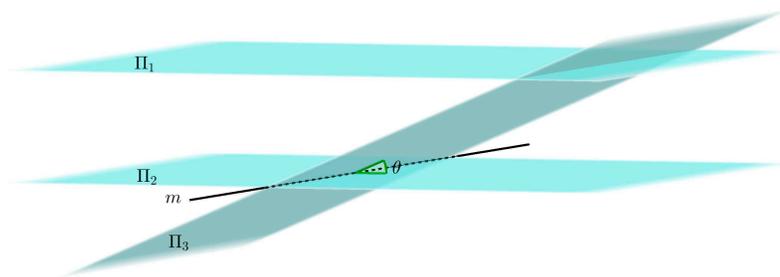


Figura 1.24: Tres planos, dos paralelos y uno transversal.

Sea $m = \Pi_2 \cap \Pi_3$ y consideremos la rotación $\sigma_{\Pi'_2} \sigma_{\Pi'_3} = \sigma_{\Pi_2} \sigma_{\Pi_3}$ sobre la línea m , de manera que Π'_2 sea perpendicular a Π_1 , así $\alpha = \sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi'_2} \sigma_{\Pi'_3}$ (Figura 1.25).

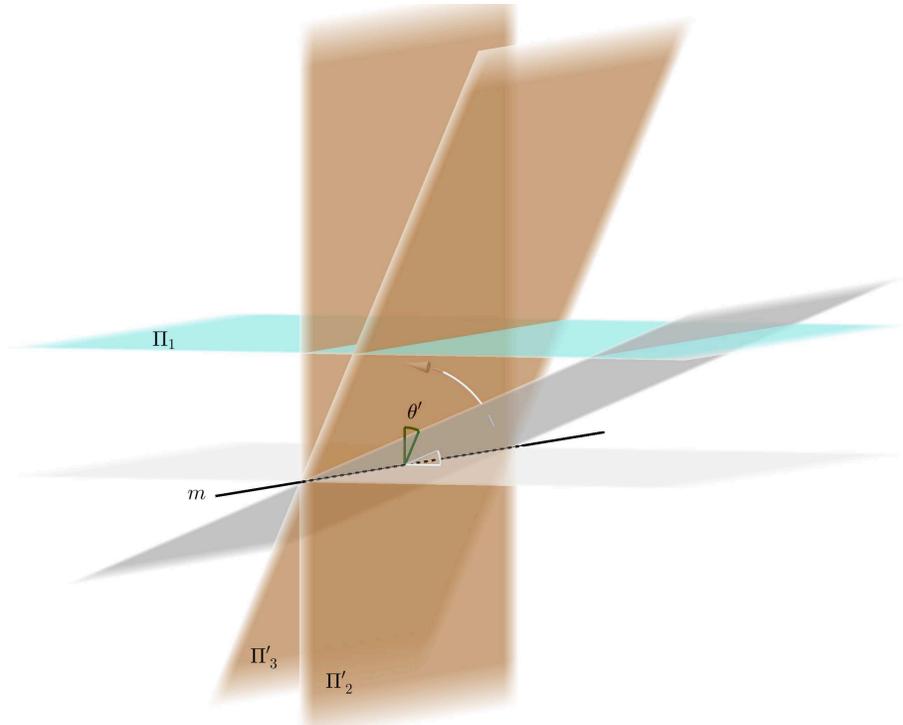


Figura 1.25: Adecuación de dos planos sobre la recta m para obtener un medio giro.

Tomemos a $n = \Pi_1 \cap \Pi'_2$ y elegimos planos Π'_1 y Π''_2 tales que $\sigma_{\Pi'_1} \sigma_{\Pi''_2} = \sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi'_2}$ sobre la línea n , de tal forma que Π''_2 sea ortogonal a Π'_3 . De esto tenemos $\alpha = \sigma_{\Pi'_1} \sigma_{\Pi''_2} \sigma_{\Pi'_3}$. Además notemos que como Π_1 y Π'_2 son perpendiculares, entonces Π'_1 y Π''_2 también lo son. Es decir, Π''_2 es ortogonal tanto a Π'_1 como a Π'_3 (Figura 1.26).

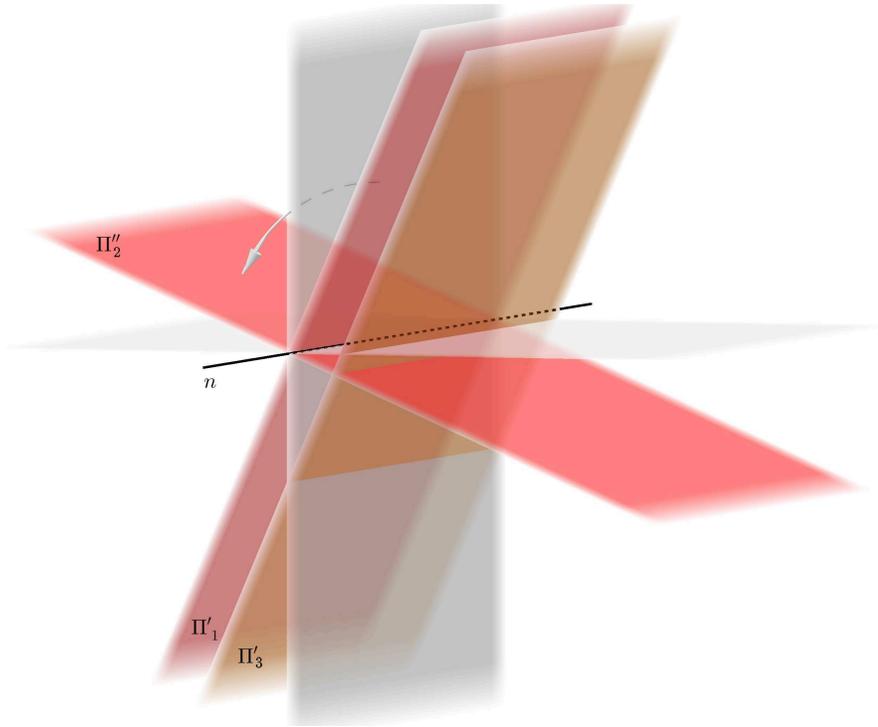


Figura 1.26: Adecuación de los planos que forman el medio giro, sobre la recta n para obtener un deslizamiento.

Por lo tanto, $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3} = \sigma_{\Pi_1'}\sigma_{\Pi_2''}\sigma_{\Pi_3'}$. Como Π_1' y Π_3' son paralelos, tenemos un deslizamiento.

iv.3.3) Supongamos que $\Pi_1 \cap \Pi_3 = \emptyset$, $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset \neq \Pi_2 \cap \Pi_3$. Notemos que $\Pi_1 \parallel \Pi_3$ y por lo tanto $\Pi_1 \cap \Pi_2 \parallel \Pi_2 \cap \Pi_3$. Este caso es análogo al anterior. Sea $m = \Pi_2 \cap \Pi_3$ y consideremos la rotación $\sigma_{\Pi_2'}\sigma_{\Pi_3'} = \sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}$ sobre la línea m , de manera que Π_2' sea perpendicular a Π_1 , así como en el caso iv.3.2), obtenemos un deslizamiento.

iv.3.4) Supongamos que $\Pi_2 \cap \Pi_3 = \emptyset$, $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset \neq \Pi_1 \cap \Pi_3$. Procedemos de manera análoga a las abordadas en los casos iv.3.2) y iv.3.3). De esta forma obtenemos un deslizamiento.

iv.3.5) Supongamos que $\Pi_i \cap \Pi_j \neq \emptyset$, para todo $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Aquí notemos que como $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \emptyset$ entonces, las rectas $m = \Pi_1 \cap \Pi_2$, $l_1 = \Pi_1 \cap \Pi_3$ y $l_2 = \Pi_3 \cap \Pi_2$ son paralelas (Figura 1.27).

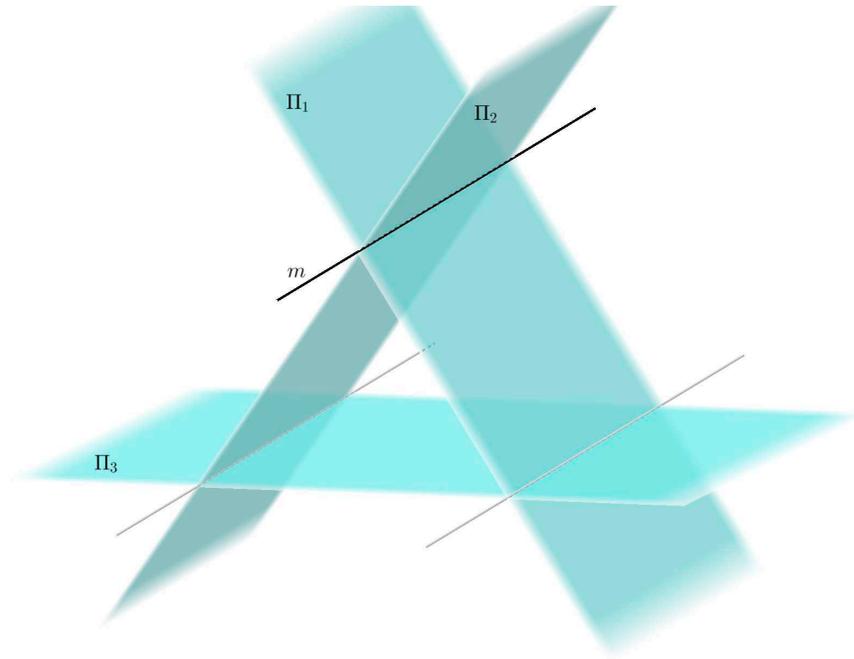


Figura 1.27: Tres planos que se intersecan dos a dos.

Ahora consideremos la rotación $\sigma_{\Pi'_1} \sigma_{\Pi'_2} = \sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi_2}$ sobre la recta m , de manera que Π'_2 sea perpendicular a Π_3 , así $\alpha = \sigma_{\Pi'_1} \sigma_{\Pi'_2} \sigma_{\Pi_3}$ (ver Figura 1.28).⁴

⁴Notemos que esta configuración es equivalente a la de la Figura 1.25 y procederemos de forma análoga como se hizo en ella.

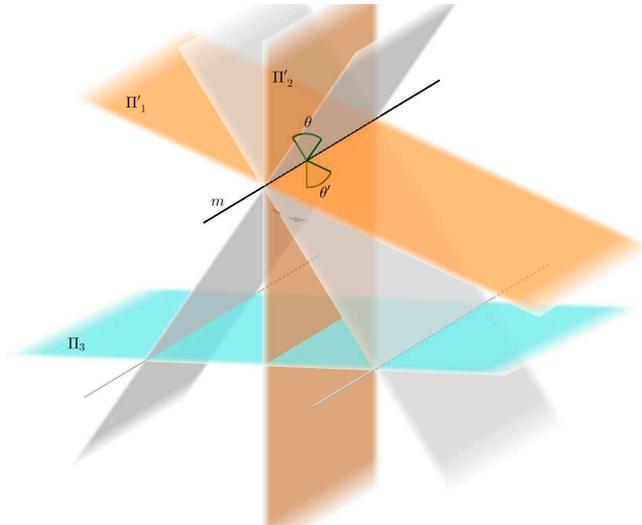


Figura 1.28: Adecuación de dos planos sobre la recta m para obtener un medio giro.

Sea $n = \Pi_3 \cap \Pi_2'$ y realizamos la rotación $\sigma_{\Pi_2''} \sigma_{\Pi_3'} = \sigma_{\Pi_2'} \sigma_{\Pi_3}$ sobre la recta n , de tal forma que Π_2'' sea ortogonal a Π_1' , de esto $\alpha = \sigma_{\Pi_1'} \sigma_{\Pi_2''} \sigma_{\Pi_3'}$. Nuevamente, como Π_2' y Π_3 son ortogonales, entonces Π_2'' y Π_3' también lo son. Así, Π_2'' es ortogonal tanto a Π_1' como a Π_3' (Figura 1.29).

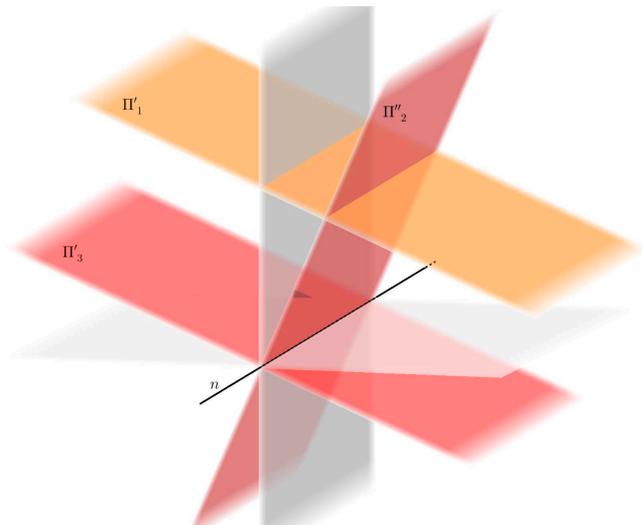


Figura 1.29: Adecuación de dos planos sobre la recta n para obtener un deslizamiento.

Por lo tanto, $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3} = \sigma_{\Pi'_1}\sigma_{\Pi''_2}\sigma_{\Pi'_3}$. Es decir, un deslizamiento.

A partir del análisis anterior, podemos resumir que el producto de tres reflexiones es una reflexión, un deslizamiento o una reflexión con giro.

Por último, analicemos el caso cuando tenemos cuatro reflexiones.

- v) El producto de cuatro reflexiones. Supongamos que la isometría $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_4}$ para algunos planos Π_1, Π_2, Π_3 y Π_4 .

Observemos primero que si $\Pi_i = \Pi_{i+1}$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, tenemos la ι . Si $\Pi_i = \Pi_{i+1}$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$, entonces $\sigma_{\Pi_i}\sigma_{\Pi_{i+1}} = \iota$, por lo que α se puede escribir como el producto de cero o dos reflexiones y por el punto iii) es una rotación o una traslación. Por lo tanto, supongamos que $\Pi_i \neq \Pi_{i+1}$ para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Antes de abordar el análisis correspondiente, mencionaremos un lema que nos será de utilidad.

Lema 1.11. *Si α es una isometría escrita como el producto de dos o cuatro reflexiones, entonces α puede ser escrita como el producto de dos medios giros.*

Prueba. Supongamos primero que $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}$ para algunos planos Π_1 y Π_2 , entonces ya sea que $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ o $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$, sea Π un plano ortogonal a ambos planos. Entonces $\alpha = (\sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi})(\sigma_{\Pi}\sigma_{\Pi_2})$ es el producto de dos medios giros. Esto implica que cualquier rotación y cualquier traslación se puede escribir como el producto de dos medios giros.

Ahora supongamos que $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_4}$ para algunos planos Π_1, Π_2, Π_3 y Π_4 . Si Π_1, Π_2 y Π_3 o $(\Pi_2, \Pi_3$ y $\Pi_4)$ son paralelos o se intersecan en una línea, entonces sabemos que $\sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}$ (respectivamente $\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_4}$) es una reflexión. Por lo tanto, α puede ser escrita como el producto de dos reflexiones y entonces puede ser escrita como el producto de dos medios giros. En el caso que se tuviera el producto de dos traslaciones tenemos una traslación y por los

argumentos anteriores tenemos lo que queríamos probar.

Por otro lado, supongamos que $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ o $(\Pi_3 \parallel \Pi_4)$, pero $\Pi_2 \cap \Pi_3 \neq \emptyset$. Sea $l = \Pi_2 \cap \Pi_3$, notemos que hay una infinidad de planos Π'_2 y Π'_3 tales que $l = \Pi'_2 \cap \Pi'_3$ y $\sigma_{\Pi_2} \sigma_{\Pi_3} = \sigma_{\Pi'_2} \sigma_{\Pi'_3}$, de estos únicamente Π_2 es tal que $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ y existe a lo más un Π'_3 tal que $\Pi'_3 \parallel \Pi_4$. Por lo tanto, existen planos Π'_2 y Π'_3 tales que $\sigma_{\Pi_2} \sigma_{\Pi_3} = \sigma_{\Pi'_2} \sigma_{\Pi'_3}$, $\Pi_1 \cap \Pi'_2 \neq \emptyset$ y $\Pi'_3 \cap \Pi_4 \neq \emptyset$. De esta forma, podemos concluir que α se puede expresar como el producto de dos rotaciones.

Veamos primero qué sucede si las rotaciones son respecto al mismo eje o respecto a ejes paralelos. Si las rotaciones comparten el eje, supongamos que $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 \cap \Pi_4 = l$ es el eje común de las rotaciones. Consideramos la rotación $\sigma_{\Pi'_1} \sigma_{\Pi'_2} = \sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi_2}$ sobre l de forma que $\Pi'_2 = \Pi_3$ y de ahí obtenemos que $\alpha = \sigma_{\Pi'_1} \sigma_{\Pi'_2} \sigma_{\Pi_3} \sigma_{\Pi_4} = \sigma_{\Pi'_1} \sigma_{\Pi_4}$, el producto de dos reflexiones y por lo tanto la podemos escribir como el producto de dos medios giros. Ahora, si los ejes de las rotaciones son paralelos, supongamos que $\Pi_1 \cap \Pi_2 = m$ y $\Pi_3 \cap \Pi_4 = n$. Como $m \parallel n$ existe Π un plano tal que $m \cup n \subset \Pi$. Consideremos la rotación $\sigma_{\Pi} \sigma_{\Pi'_4} = \sigma_{\Pi_3} \sigma_{\Pi_4}$ por los planos Π y Π'_4 sobre la línea n y la rotación $\sigma_{\Pi'_1} \sigma_{\Pi} = \sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi_2}$ por los planos Π_1 y Π_2 sobre la línea m . De aquí tenemos que $\alpha = \sigma_{\Pi'_1} \sigma_{\Pi'_4}$. Lo cual es el producto de dos reflexiones y concluimos nuevamente que la podemos escribir como el producto de dos medios giros.

Por lo anterior, basta analizar el caso del producto de dos rotaciones cuyos ejes se intersecan o sus ejes son oblicuos de intersección vacía. Sea $\alpha = \sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi_2} \sigma_{\Pi_3} \sigma_{\Pi_4}$ el producto de dos rotaciones y nuevamente, sean $m = \Pi_1 \cap \Pi_2$ y $n = \Pi_3 \cap \Pi_4$ los ejes de dichas rotaciones.

Como podemos rotar los planos Π_3 y Π_4 sobre el eje n (conservando su ángulo), podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\Pi_3 \cap m \neq \emptyset$, que los planos Π_2 y Π_3 son ortogonales y que $p = \Pi_2 \cap \Pi_3$ es una recta (Figura 1.30).

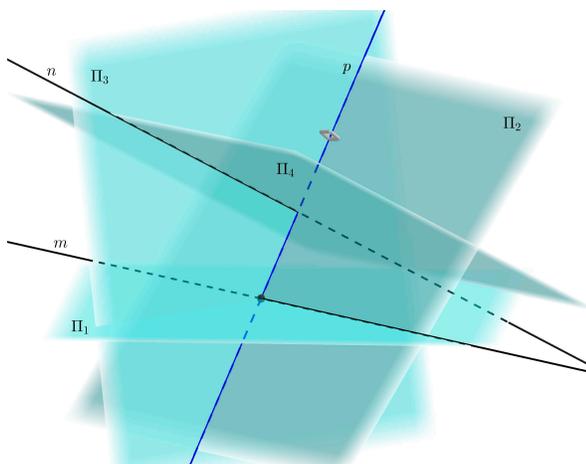


Figura 1.30: Dos rotaciones por ejes no paralelos con intersección vacía junto con la vista de los planos que las conforman.

Consideremos la rotación $\sigma_{\Pi'_2} \sigma_{\Pi'_3} = \sigma_{\Pi_2} \sigma_{\Pi_3}$ a través de la recta p de forma tal que Π'_2 sea ortogonal a Π_1 . Tengamos presente que Π'_2 y Π'_3 son ortogonales.

De lo anterior se sigue que $\alpha = \sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi_2} \sigma_{\Pi_3} \sigma_{\Pi_4} = \sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi'_2} \sigma_{\Pi'_3} \sigma_{\Pi_4} = \sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi'_3} \sigma_{\Pi'_2} \sigma_{\Pi_4}$ (Figura 1.31).

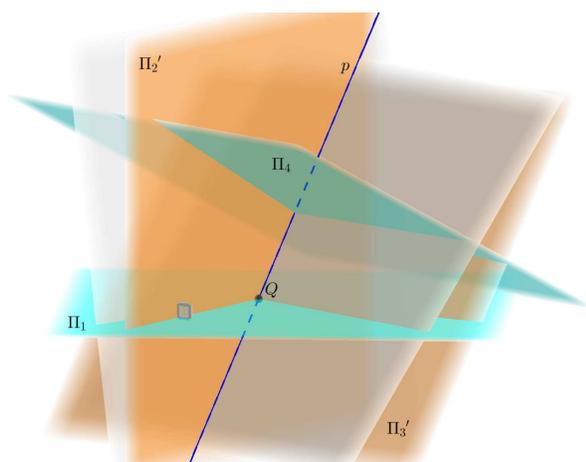


Figura 1.31: Adecuación de dos planos sobre la recta p .

Si denotamos por $\{Q\} = p \cap m$, tenemos que $Q \in \Pi_1 \cap \Pi'_3$ y por lo tanto $\Pi_1 \cap \Pi'_3 \neq \emptyset$. Sea la recta $q = \Pi_1 \cap \Pi'_3$, como los planos Π'_3 y Π_1 son

ortogonales a Π'_2 , entonces q es ortogonal a Π'_2 . Consideremos la rotación $\sigma_{\Pi'_1}\sigma_{\Pi''_3} = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_3}$ a través de la recta q hasta que Π''_3 sea ortogonal a Π_4 . De esta forma Π'_1 y Π''_3 son ortogonales a Π'_2 (ya que q lo es). Por lo que, $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_4} = \sigma_{\Pi'_1}\sigma_{\Pi''_3}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_4} = (\sigma_{\Pi'_1}\sigma_{\Pi_2})(\sigma_{\Pi''_3}\sigma_{\Pi_4})$, el producto de dos medios giros (Figura 1.32 incisos I), II) y III)).

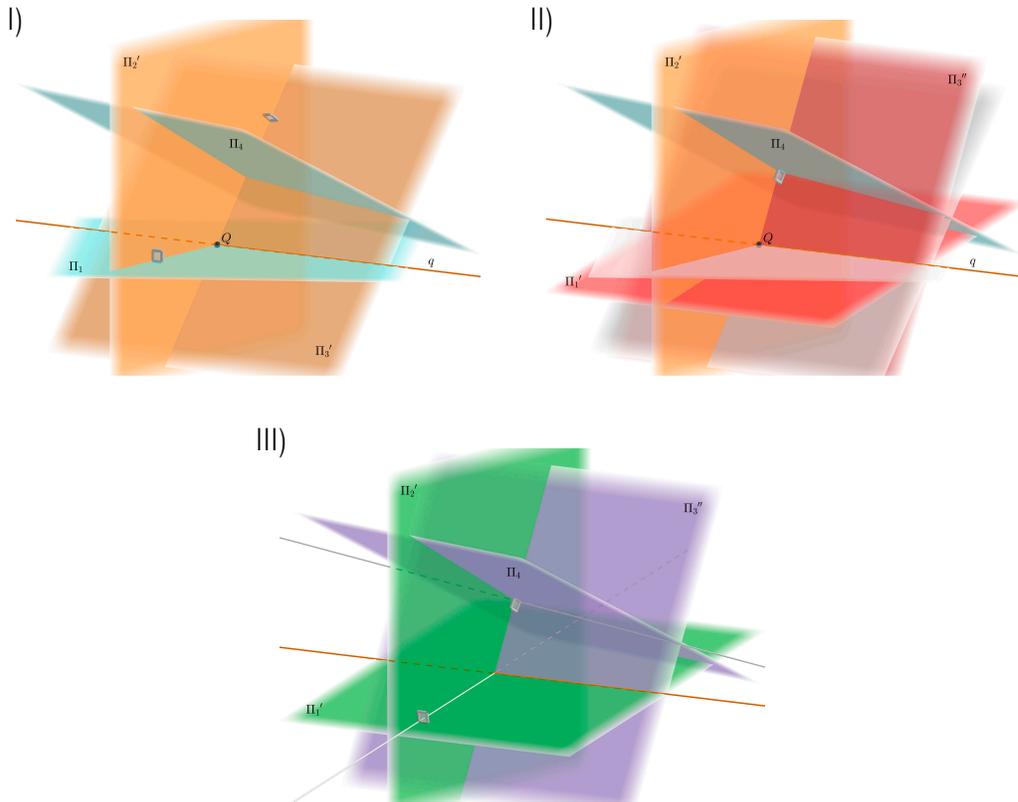


Figura 1.32: Adecuaciones consecuentes de los planos para obtener dos medios giros (morado y verde).

□

Ahora estamos preparados para establecer qué tipo de isometría corresponde a α .

v.1) Sea $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_4} = (\sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2})(\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_4}) = \rho_1\rho_2$.

v.1.1) Supongamos que ρ_1 y ρ_2 son rotaciones sobre el mismo eje.

Tal como se abordó en la prueba del Lema 1.11, tenemos que α es el producto de dos reflexiones, que en este caso se intersecan en la recta l , la cual es su eje de rotación. Es decir, tenemos una rotación (Figura 1.33 incisos I) y II)).

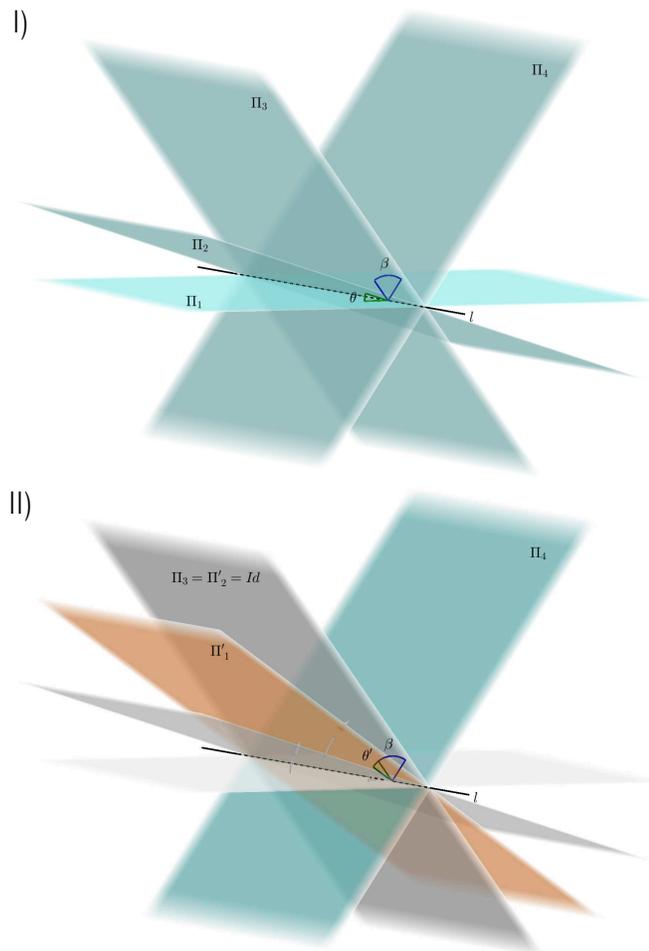


Figura 1.33: Adecuación consecutivas de dos de los planos para obtener una rotación.

v.1.2) Supongamos que ρ_1 , y ρ_2 son rotaciones cuyos ejes se intersecan en un punto.

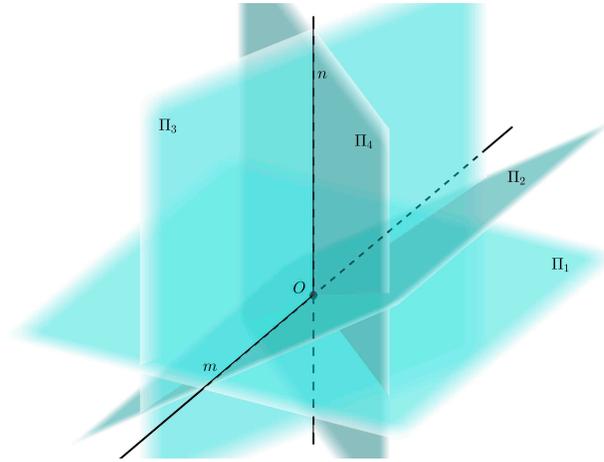


Figura 1.34: Dos rotaciones que se intersectan en un punto, vistas con los planos de reflexión que las conforman.

Sea $\Pi_1 \cap \Pi_2 = m$, $\Pi_3 \cap \Pi_4 = n$ y $m \cap n = \{O\}$. Consideramos la rotación $\sigma_{\Pi'_1} \sigma_{\Pi'_2} = \sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi_2}$, sobre m de forma que $n \subseteq \Pi'_2$ y la rotación $\sigma_{\Pi'_3} \sigma_{\Pi'_4} = \sigma_{\Pi_3} \sigma_{\Pi_4}$, sobre n tal que $m \subseteq \Pi'_3$, así $\Pi'_3 = \Pi'_2$ (Figura 1.35 incisos I) y II)).

Por lo tanto, $\alpha = \sigma_{\Pi'_1} \sigma_{\Pi'_2} \sigma_{\Pi'_3} \sigma_{\Pi'_4} = \sigma_{\Pi'_1} \sigma_{\Pi'_4}$, es una rotación cuyo eje contiene a O .

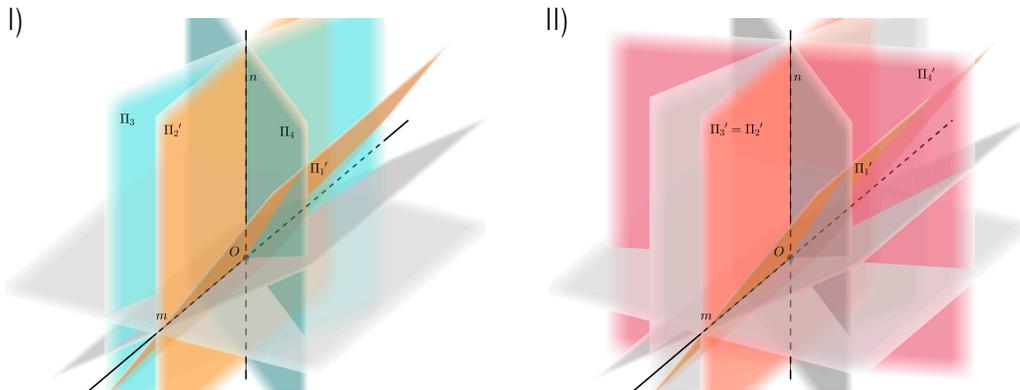


Figura 1.35: Proceso de adecuación por pares de planos para expresar el producto de dos rotaciones que se intersectan en un punto como una sola rotación cuyo eje es la recta $p = \Pi'_4 \cap \Pi'_1$.

v.1.3) Supongamos que ρ_1 y ρ_2 son rotaciones cuyos ejes son paralelos.

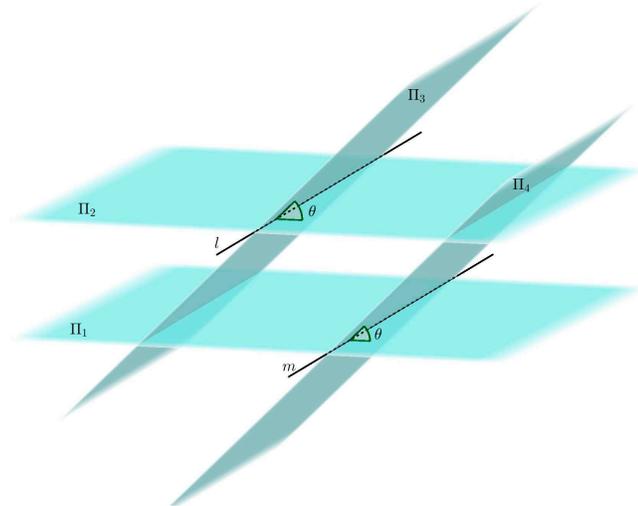


Figura 1.36: Dos rotaciones por ejes paralelos junto con la vista de los planos que las conforman.

Nuevamente como se abordó en la demostración del Lema 1.11, tenemos que α es el producto de dos reflexiones, por lo que es una rotación (Figura 1.37 incisos I) y II)) o una traslación (Figura 1.38 incisos I) y II)).

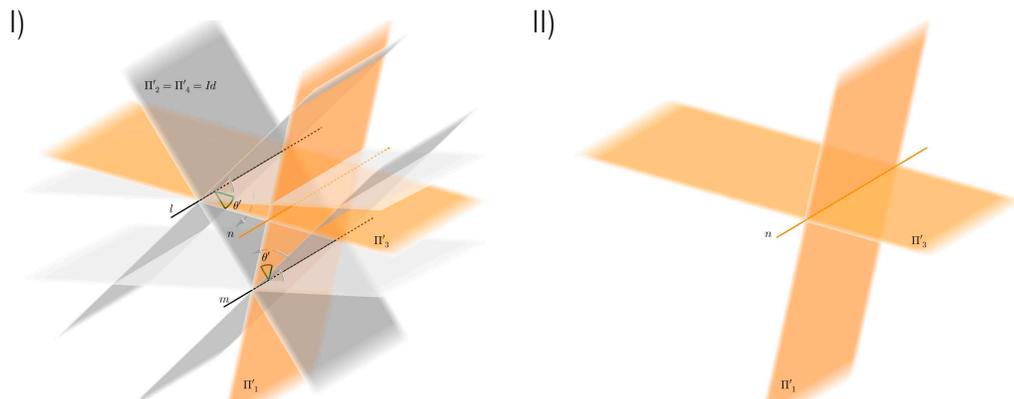


Figura 1.37: Dos rotaciones por ejes paralelos dan una rotación.

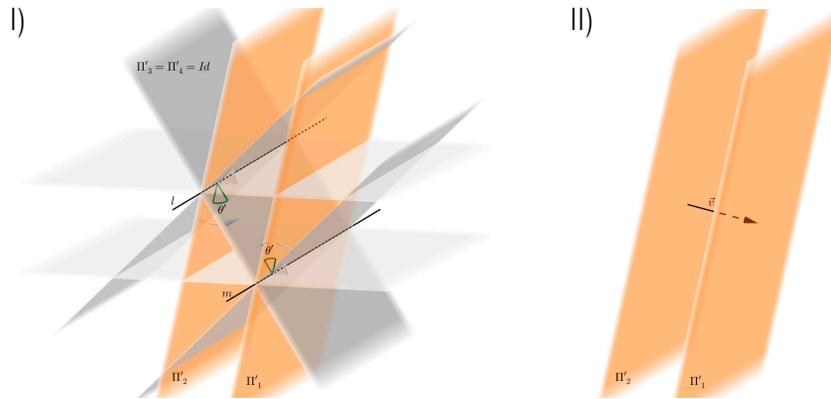


Figura 1.38: Dos rotaciones por ejes paralelos dan una traslación.

v.1.4) Supongamos que ρ_1 y ρ_2 son rotaciones cuyos ejes son rectas oblicuas con intersección vacía.

En vista del Lema 1.11 sólo mostraremos que el producto de dos medios giros por rectas oblicuas con intersección vacía es un tornillo. Tenemos que $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_4} = \rho_m\rho_n$, donde m y n son rectas oblicuas de intersección vacía tales que $\Pi_1 \cap \Pi_2 = m$ y $\Pi_3 \cap \Pi_4 = n$ y los planos Π_1 y Π_2 son ortogonales y los planos Π_3 y Π_4 son ortogonales. También podemos suponer sin pérdida de generalidad que el plano Π_1 es paralelo a la recta n y el plano Π_4 es paralelo a la recta m . Entonces, como $\Pi_1 \perp \Pi_2$, $\Pi_3 \perp \Pi_4$ y $\Pi_1 \parallel \Pi_4$, los planos Π_2 y Π_3 son cada uno ortogonales a los planos Π_1 y Π_4 . Así, $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_4} = \sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_4} = \sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_4}$, un tornillo, ya que los planos Π_1 y Π_4 son paralelos y la recta $l = \Pi_2 \cap \Pi_3$ es ortogonal tanto a Π_1 como a Π_4 .

v.2) Sea $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_4} = \tau_1\tau_2$, el producto de dos traslaciones. Entonces α es una traslación. El análisis es análogo a los casos iv.3.1) y v.1.3).

v.3) Sea $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_4} = \rho_1\tau_1$, el producto de una rotación y una traslación. Sea $\Pi_1 \cap \Pi_2 = m$.

v.3.1) Si m es paralela a los planos que forman a τ_1 .

Consideremos la rotación $\sigma_{\Pi'_1}\sigma_{\Pi'_2} = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}$, sobre m de forma que Π'_2 sea paralelo a Π_3 . Por lo tanto, tenemos una rotación.

v.3.2) Si $m \subseteq \Pi_3$ o $m \subseteq \Pi_4$ (pero no en ambos).

Consideremos la rotación $\sigma_{\Pi'_1}\sigma_{\Pi'_2} = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}$, sobre m de forma que $\Pi'_2 = \Pi_3$. Por lo tanto, tenemos una rotación. En el caso que $m \subseteq \Pi_4$ consideramos la rotación $\sigma_{\Pi'_1}\sigma_{\Pi'_2} = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}$ tal que $\Pi'_2 = \Pi_4$. De esta forma

$$\begin{aligned}\alpha &= \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_4} = \sigma_{\Pi'_1}\sigma_{\Pi'_2}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_4} = \sigma_{\Pi'_1}(\sigma_{\Pi_4}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_4}) \\ &= \sigma_{\Pi'_1}\sigma_{\Pi},\end{aligned}$$

donde (por el caso iv.1)), Π es un plano paralelo a Π_3 y Π_4 , por lo que $\Pi'_1 \cap \Pi \neq \emptyset$. Por lo tanto α es una rotación.

v.3.3) Si $m \cap \Pi_3 = \{O\}$.

Como $m \cap \Pi_3 \neq \emptyset$, entonces $\Pi_2 \cap \Pi_3 \neq \emptyset$ por lo que podemos rotarlos por la recta de intersección de tal forma que α es el producto de dos rotaciones y estamos en el caso v.1).

v.4) Sea $\alpha = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}\sigma_{\Pi_3}\sigma_{\Pi_4} = \tau_1\rho_1$, el producto de una traslación y una rotación. El análisis es análogo al caso v.3).

Notemos que el análisis anterior abarca todas las posibilidades cuando α es producto de cuatro reflexiones. Por lo tanto y a manera de resumen del análisis hecho en consecuencia del Corolario 1.4, tenemos que si α es el producto de:

- Una sola reflexión, α es una reflexión.
- Dos reflexiones, α es la identidad o una traslación o una rotación.
- Tres reflexiones, α es una reflexión o un deslizamiento o una reflexión con giro.
- Cuatro reflexiones, α es la identidad o una rotación o una traslación o un tornillo.

Por estos argumentos concluimos con el siguiente teorema,

Teorema 1.12. *Una isometría α de \mathbb{E}^3 puede ser sólo una de las siguientes opciones:*

1. *Reflexión.*
2. *Traslación.*
3. *Rotación.*
4. *Deslizamiento.*
5. *Tornillo.*
6. *Reflexión con giro.*

Con base en lo expuesto anteriormente, tenemos también la siguiente observación que nos será de gran utilidad en el estudio de las isometrías.

Sea α una isometría de \mathbb{E}^3 , entonces:

- a) α deja por lo menos cuatro puntos, no coplanares, fijos si y sólo si $\alpha = \iota$.
- b) α deja al menos tres puntos, no colineales, fijos si y sólo si $\alpha = \iota$ o $\alpha = \sigma_{\Pi}$ una reflexión.
- c) α deja al menos dos puntos fijos si y sólo si $\alpha = \iota$ o $\alpha = \sigma_{\Pi}$ es una reflexión o $\alpha = \rho_{l,\theta}$ es una rotación.
- d) α tiene exactamente un punto fijo si y sólo si α es una reflexión con giro.
- e) α no tiene puntos fijos, entonces:
 - i) α es una traslación. Deja invariante a todo plano (y recta) paralelo al vector dirección.
 - ii) α es un deslizamiento. Deja invariante al plano de reflexión.
 - iii) α es un tornillo. Deja invariante al eje de rotación.

Para concluir esta sección y con argumentos similares a los que se abordaron en este apartado, para analizar distintos productos de reflexiones, obtenemos los siguientes resultados. De igual forma, el lector interesado puede consultar la obra [14] donde encontrará material complementario para convencernos de lo que aquí enunciamos:

$$l) \text{ El producto de } \begin{cases} \text{traslación} \\ \text{rotación} \\ \text{tornillo} \end{cases} \text{ por } \begin{cases} \text{traslación} \\ \text{rotación} \\ \text{tornillo} \end{cases} \text{ es } \begin{cases} \text{identidad} \\ \text{traslación} \\ \text{rotación} \\ \text{tornillo} \end{cases}.$$

$$\text{II) El producto de } \begin{cases} \text{traslación} \\ \text{rotación} \\ \text{tornillo} \end{cases} \text{ por } \begin{cases} \text{reflexión} \\ \text{deslizamiento} \\ \text{reflexión con giro} \end{cases} \text{ es } \begin{cases} \text{reflexión} \\ \text{deslizamiento} \\ \text{reflexión con giro} \end{cases} .$$

$$\text{III) El producto de } \begin{cases} \text{reflexión} \\ \text{deslizamiento} \\ \text{reflexión con giro} \end{cases} \text{ por } \begin{cases} \text{reflexión} \\ \text{deslizamiento} \\ \text{reflexión con giro} \end{cases} \text{ es } \begin{cases} \text{identidad} \\ \text{traslación} \\ \text{rotación} \\ \text{tornillo} \end{cases} .$$

De las relaciones anteriores, diremos que una isometría en el espacio es **directa** o que **preserva la orientación** si esta puede ser escrita como el producto de cero, dos o cuatro reflexiones; y diremos que es **opuesta** o que **invierte la orientación** si esta puede ser escrita como producto de una o tres reflexiones. Así análogamente a como se hizo en el plano y como consecuencia de la observación anterior de orientación tenemos las siguientes proposiciones.

- a) Cualquier isometría del espacio que preserve la orientación es la identidad, una rotación, una traslación o un tornillo.
 - b) Cualquier isometría del espacio que invierte la orientación es una reflexión, un deslizamiento o una reflexión con giro.
 - c) El producto de dos isometrías que preservan la orientación es una isometría que preserva la orientación. La inversa de una isometría que preserva la orientación es también una isometría que preserva la orientación.
 - d) El producto de dos isometrías que invierten la orientación es una isometría que preserva la orientación. La inversa de una isometría que invierte la orientación es también una isometría que invierte la orientación.
 - e) El producto de una isometría que invierte la orientación y una que preserva la orientación es una isometría que invierte la orientación.
-

Capítulo 2

Grupos de simetrías de conjuntos finitos

En este capítulo abordamos el estudio de simetrías de conjuntos finitos en el plano y en el espacio, ya que estos serán el pilar para el análisis posterior de los polígonos (geoméricamente) hereditarios en los espacios \mathbb{E}^2 y \mathbb{E}^3 . Recordemos que si $S \subset \mathbb{E}^n$ entonces, una simetría de S es una isometría α de \mathbb{E}^n tal que $\alpha(S) = S$. Denotaremos por $G(S)$ el grupo de todas las simetrías de S .

Algo importante de notar es que, si S es un conjunto finito de \mathbb{E}^n tal que $Afn(S) = \mathbb{E}^n$ se tiene entonces que el grupo de simetrías $G(S)$ es finito y con ello todos sus subgrupos.

2.1. En el espacio \mathbb{E}^2 (el plano ordinario)

En el capítulo 1 analizamos las isometrías de \mathbb{E}^2 ; en esta sección centraremos nuestra atención en las simetrías de un conjunto finito del plano. Inicialmente veremos los grupos finitos de isometrías de este espacio y concluiremos con el **Teorema de Leonardo**, el cual nos da la clasificación de estos grupos del plano. Cabe señalar que las traslaciones y los deslizamientos tienen orden infinito, por lo que los grupos finitos de isometrías en \mathbb{E}^2 constan únicamente de reflexiones y rotaciones.

Antes de ver una prueba del Teorema de Leonardo, necesitaremos algunos resultados que presentamos a continuación. Recordemos también, que la Proposición 1.2 nos asegura la existencia de, al menos, un punto fijo en un grupo finito de isometrías de \mathbb{E}^n .

Lema 2.1. Sea G un subgrupo finito de $\mathbf{Iso}(\mathbb{E}^2)$ y $\mathbf{R} \leq G$ tal que consta de las rotaciones con centro en O , un punto de \mathbb{E}^2 . Entonces, si \mathbf{R} tiene n elementos, existe una rotación $\rho_{O, \frac{2\pi}{n}} = \rho$ de ángulo de rotación $\frac{2\pi}{n}$ y centro O , tal que

$$\mathbf{R} = \langle \rho \rangle = \{\iota, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}\}.$$

Más aún, si $n > 1$, para cualquier recta l que pase por O y cualquier punto $P \notin l$, existe $\beta \in \langle \rho \rangle$, tal que l cruza el segmento $\overline{P\beta(P)}$; esto es, P y $\beta(P)$ se encuentran en distintos semiplanos determinados por l .

Prueba. Sea $|\mathbf{R}| = n$ y notemos que si $\mathbf{R} \neq \{\iota\}$, tenemos que O es el único punto fijo por cada elemento de \mathbf{R} . Además, notemos que si $\{\beta, \beta'\} \subset \mathbf{R}$, entonces $\beta\beta' \in \mathbf{R}$. Sean $P \in \mathbb{E}^2$, $P \neq O$ y $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ los elementos de \mathbf{R} y consideremos el conjunto $\{P_i \in \mathbb{E}^2 \mid P_i = \beta_i(P) \text{ con } 1 \leq i \leq n\}$ de las imágenes de P bajo los elementos de \mathbf{R} . Afirmamos que $P_i \neq P_j$ siempre que $i \neq j$.

Supongamos que $P_i = P_j$ para algún $i \neq j$. Entonces, existen $\{\beta_i, \beta_j\} \subseteq \mathbf{R}$, ($\beta_i \neq \beta_j$) tales que $\beta_i(P) = P_i$ y $\beta_j(P) = P_j$. Sea $\alpha = \beta_j^{-1}\beta_i$, es claro que $\alpha \in \mathbf{R}$ y

$$\alpha(P) = \beta_j^{-1}\beta_i(P) = \beta_j^{-1}(P_i) = \beta_j^{-1}(P_j) = P,$$

es decir, $\alpha(P) = P$. Entonces, como α es rotación con dos puntos fijos, tenemos que $\alpha = \iota$, lo que contradice nuestra suposición de que β_i y β_j son distintos. Por lo tanto, $P_i \neq P_j$.

Como todos estos puntos son las imágenes de P bajo las rotaciones con centro en O , existe un círculo con centro en O (y radio $d(O, P)$), tal que $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ están en él. Podemos suponer que los P_i están ordenados en sentido levógiro. Afirmamos que el ángulo entre pares de puntos sucesivos de este conjunto es siempre el mismo.

Supongamos lo contrario. Entonces, existe i tal que $\angle P_i O P_{i+1} < \angle P_{i+1} O P_{i+2}$ (consideramos los subíndices módulo n). Sea $\{\beta, \beta'\} \subset \mathbf{R}$ tales que $P_i = \beta(P)$ y $P_{i+1} = \beta'(P)$. De esto tenemos que,

$$(\beta'\beta^{-1})(P_i) = \beta'(\beta^{-1}(P_i)) = \beta'(P) = P_{i+1}.$$

Por lo que $\beta'\beta^{-1}$ es una rotación con ángulo $\angle P_i O P_{i+1}$. Pero como $\angle P_i O P_{i+1} < \angle P_{i+1} O P_{i+2}$ entonces $(\beta'\beta^{-1})(P_{i+1})$ es un punto P_j entre P_{i+1}

y P_{i+2} lo que contradice nuestra suposición en el orden de los vértices. Por lo tanto, $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ son las imágenes de P bajo las rotaciones con ángulos $\frac{(k)(2\pi)}{n}$ para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Por lo tanto, sea $\rho = \beta'\beta^{-1}$, de esta forma $\mathbf{R} = \langle \rho \rangle = \{\iota, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}\}$.

Para la siguiente afirmación del lema notemos que si no hubieran imágenes de P en el otro semiplano determinado por l entonces, habría un arco de circunferencia con centro en O (pues $O \in l$) de más de π radianes de abertura sin imágenes de P . Sin embargo, en el apartado anterior de esta demostración, probamos que esto no es posible, pues dos imágenes consecutivas están separadas por un arco con ángulo $\frac{2\pi}{n}$, centrado en O .

□

Lema 2.2. Sean G un subgrupo finito de $\mathbf{Iso}(\mathbb{E}^2)$, $\{O_1, O_2\} \subseteq \mathbb{E}^2$ y $\{\theta, \theta'\} \subseteq (0, 2\pi)$ tales que $\{\rho_{O_1, \theta}, \rho_{O_2, \theta'}\} \subset G$. Entonces $O_1 = O_2$.

Prueba. Sea G un subgrupo finito de $\mathbf{Iso}(\mathbb{E}^2)$, por hipótesis existe $\{\rho_1, \dots, \rho_k\}$ el conjunto de todas las rotaciones en G el cual es finito. Sean O_i y θ_i el centro y el ángulo de rotación de ρ_i , respectivamente. Notemos que existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_i^{n_i}$ tiene ángulo menor o igual a π . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\theta_i \in (0, \pi)$ para una i y sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\pi}{3} < a\theta_i \leq \pi$.

Si todos los centros O_i son el mismo punto, el lema se sigue. De otro manera, podemos ordenar los centros de rotación de forma que O_1 y O_2 sean tales que $d(O_i, O_j) \leq d(O_1, O_2)$ para todo $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, k\}$.

Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que si $\rho_{O_1, \theta_i}^r(O_2) \doteq P$, entonces $\angle O_2 O_1 P > \frac{\pi}{3}$. Notemos que r existe siempre que $O_1 \neq O_2$. Consideremos $\alpha = \rho_{O_1, \theta_i}^r \rho_{O_2, \theta'} \rho_{O_1, \theta_i}^{-r}$. Por un lado, vemos que α es una rotación, pues de lo contrario sería una traslación y G no sería finito; y por otro lado, tiene un punto fijo ya que,

$$\alpha(P) = \rho_{O_1, \theta_i}^r \rho_{O_2, \theta'} \rho_{O_1, \theta_i}^{-r}(P) = \rho_{O_1, \theta_i}^r \rho_{O_2, \theta'}(O_2) = \rho_{O_1, \theta_i}^r(O_2) = P.$$

Por lo tanto $\alpha = \rho_l$, para alguna $l \in \{1, \dots, k\}$, lo que implica que $P = O_l$. Sin embargo, $d(O_l, O_2) > d(O_1, O_2)$ por la elección del ángulo, esto contradice el hecho de que $d(O_i, O_j) \leq d(O_1, O_2)$ para todo $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, k\}$, lo que implica que todos los centros O_i son el mismo punto y en particular $O_1 = O_2$.

□

Antes de pasar al teorema más importante de esta sección retomaremos al grupo diédrico y enunciaremos algunas propiedades que son necesarias para el resultado posterior.

Recordemos que se llama **grupo diédrico** de orden $2n$, (D_n) al grupo de simetrías de un polígono regular de n lados.

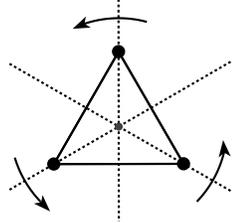


Figura 2.1: Simetrías del triángulo equilátero.

Veamos a continuación cuales son los elementos que forman un grupo diédrico, a partir de un polígono regular \mathcal{P} de n lados. Sea ρ la rotación de ángulo $\frac{2\pi}{n}$ alrededor del centro de \mathcal{P} y sea σ la reflexión con respecto a la recta que pasa por el centro del mismo y por uno cualquiera de sus vértices. Entonces, observemos que

$$\iota, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^{n-1}\sigma,$$

son todas las simetrías de \mathcal{P} .

Numerando los vértices con los n primeros números naturales, la rotación ρ viene determinada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \rho(i) &= i + 1 \quad \text{para todo } 1 \leq i < n, \\ \rho(n) &= 1. \end{aligned}$$

Si elegimos σ como la reflexión con respecto a la recta que pasa por el centro y por el vértice 1, entonces

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= 1, \\ \sigma(i) &= n - i + 2 \quad \text{para todo } 1 < i \leq n. \end{aligned}$$

Veamos que $\rho\sigma$ es también una reflexión con respecto a una recta. En efecto,

$$\begin{aligned}\rho\sigma(1) &= 2, \\ \rho\sigma(2) &= 1, \\ \rho\sigma(i) &= n - i + 3 \quad \text{para todo } 3 \leq i \leq n,\end{aligned}$$

son las ecuaciones de la reflexión con respecto a la recta que pasa por el centro y por el punto medio del lado que determinan los vértices 1 y 2.

Análogamente, puede mostrarse que el resto de los productos de la forma $\rho^k\sigma$ son reflexiones con respecto a rectas como se eligieron anteriormente. Estas, junto con σ , son las n reflexiones con respecto a rectas de simetría de \mathcal{P} .

Además tengamos en mente el siguiente teorema que caracteriza a los grupos diédricos como los grupos generados por dos involuciones (para una demostración de este resultado se puede consultar [4] o [34]).

Teorema 2.3. *Salvo isomorfismo, existe un único grupo D generado por dos involuciones σ_1 y σ_2 tales que su producto $\sigma_1\sigma_2$ tiene orden n . Más aún,*

- a) D es finito y $|D| = 2n$.
- b) Si $\rho = \sigma_1\sigma_2$ entonces el grupo cíclico $R = \langle \rho \rangle$ generado por ρ es un subgrupo normal de D de índice 2.
- c) Cualquier elemento en $D \setminus R$ es una involución.

Con base en los resultados y conceptos hasta aquí mencionados estamos preparados para demostrar el teorema más importante de esta sección, el cual se conoce como el *teorema de Leonardo da Vinci*.

Teorema 2.4 (Leonardo da Vinci). *Cualquier subgrupo finito de $\mathbf{Iso}(\mathbb{E}^2)$ es isomorfo a un cíclico (C_q con $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) o un diédrico (D_q con $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$).*

Prueba. Sea $G \leq \mathbf{Iso}(\mathbb{E}^2)$ finito. Como primera observación tenemos que G no puede contener traslaciones o deslizamientos. Además, por el Lema 2.2, todas las rotaciones en G tienen el mismo centro, digamos O . Sea \mathbf{R} el subgrupo de rotaciones de G . El Lema 2.1 afirma que $\mathbf{R} = \langle \rho \rangle$, donde ρ es una rotación de orden finito, digamos n . Por lo tanto $\mathbf{R} \cong C_n$.

Si G no contiene reflexiones entonces $G = \langle \rho \rangle$ y es un grupo cíclico. Supongamos que G contiene reflexiones. Sea σ_l una reflexión de G .

Afirmamos que $O \in l$. Consideremos la siguiente isometría,

$$\psi = \sigma_l \rho \sigma_l.$$

Notemos que ψ preserva la orientación pues es la composición de cuatro reflexiones, por lo que es una rotación o una traslación. Sin embargo, en G no hay traslaciones, por lo tanto, ψ es una rotación y por el Lema 2.2 tiene centro en O . De esto tenemos que $\psi(O) = O$; esto implica que $\sigma_l(\psi(O)) = \sigma_l(O)$ y también

$$\rho(\sigma_l(O)) = \sigma_l(O).$$

Esto quiere decir que $\sigma_l(O)$ es un punto fijo de ρ pero el único punto fijo de una rotación es su centro, por lo tanto, $\sigma_l(O) = O$ y en consecuencia $O \in l$.

Probemos ahora que hay exactamente n reflexiones en G y que los ejes de reflexión están igualmente espaciados (es decir, dos de los eje de reflexión consecutivos están separados por un ángulo de $\frac{2\pi}{n}$).

Primero notemos que para toda $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, el producto

$$\rho_{O, \frac{(j)(2\pi)}{n}} \sigma_l \rho_{O, \frac{(j)(2\pi)}{n}}^{-1} = \sigma_{l_j}$$

donde $l_j = \rho_{O, \frac{(j)(2\pi)}{n}}(l)$. De esta forma tenemos n reflexiones en G . Veamos que no hay alguna otra. Supongamos que existe una reflexión σ_r , entonces existe un j tal que el ángulo $\angle l_j r$ es menor que $\frac{2\pi}{n}$ y tenemos que el producto $\sigma_{l_j} \sigma_r$ es una rotación de ángulo menor que $\frac{2\pi}{n}$, lo que contradice el hecho de que el subgrupo de rotaciones de G sea \mathbf{R} . Por lo tanto, G es un grupo diédrico y se sigue el teorema.

□

2.2. En el espacio \mathbb{E}^3 (el espacio ordinario)

En esta sección centraremos nuestra atención en las simetrías de un conjunto finito del espacio \mathbb{E}^3 , para ello, describiremos los grupos finitos de isometrías en este espacio. Antes, veamos algunos conceptos que nos serán útiles para el teorema principal de

esta sección. Para un análisis complementario de los resultados que exponemos aquí, vistos desde distintas ópticas, el lector interesado puede consultar las obras [2], [5], [35] y [59] en donde encontrara amplias referencias y distintas pruebas a las que aquí exponemos.

Vimos anteriormente que las únicas isometrías que dejan al menos un punto fijo son la identidad, las reflexiones, las rotaciones y las reflexiones con giro. De hecho, para poder estudiar los grupos finitos de isometrías en el espacio, nuestro estudio se centrará inicialmente en los grupos G que sólo constan de rotaciones cuyos ejes se intersectan en un punto. Como veremos estos grupos son de gran importancia para la clasificación de los grupos finitos de isometrías en el espacio \mathbb{E}^3 .

Para iniciar con este estudio, consideremos un grupo G de isometrías. De él podemos considerar a $G^+ \leq G$, el subgrupo de G que contiene todas las isometrías directas. Como se mencionó en la Sección 1.4 el producto de dos isometrías opuestas es una isometría directa y el producto de una isometría directa con una opuesta es una isometría opuesta, de aquí tenemos que el índice de G^+ en G es a lo más 2. Además, si G es finito, entonces G^+ es un grupo que consta únicamente de rotaciones cuyos ejes concurren. Esto es por los siguientes motivos: como es un grupo finito de isometrías por la Proposición 1.2 existe un punto fijo, por lo que las rotaciones deben compartir el eje de rotación (y el punto fijo debe estar contenido en esta recta) o ser concurrentes (en dicho punto), de lo contrario nuestro grupo tendría traslaciones lo que generaría un grupo infinito. Notemos que la inversión central σ_O es una isometría que invierte la orientación y conmuta con toda isometría que fije O . Esto es clave para mostrar que sólo hay tres posibles relaciones entre el grupo G y el subgrupo G^+ .

Teorema 2.5. *Sea G un subgrupo finito de isometrías de $\mathbf{Iso}(\mathbb{E}^3)$ las cuales dejan un punto fijo O y sea σ_O la inversión central por el punto O . Si G^+ es el grupo de isometrías directas en G entonces, se tiene exactamente una de las siguientes tres posibilidades:*

- a) $G = G^+$
- b) $G = G^+ \cup \sigma_O G^+$
- c) $G \neq G^+$ y $\sigma_O \notin G$.

Más aún, en el tercer caso,

$$G = H]G^+ \doteq G^+ \cup \{\sigma_O h \mid h \in H \setminus G^+\}$$

donde $H = G^+ \cup \sigma_O \rho G^+$ es un grupo de rotaciones y para cualquier $\rho \in G \setminus G^+$.

Prueba. Observemos que G satisface el primer caso si y sólo si no contiene isometrías que invierten la orientación. Si G contiene isometrías que no invierten la orientación entonces tenemos el segundo o tercer caso dependiendo si σ_O pertenezca a G o no. Estos tres casos son exclusivos. Si $\sigma_O \in G$, entonces $[G : G^+] = 2$ y $\sigma_O \notin G^+$, por lo que $G = G^+ \cup \sigma_O G^+$. Notemos que, si $G \neq G^+$ y $\sigma_O \notin G$, entonces para cualquier $\rho \in G \setminus G^+$, ρ invierte la orientación y por lo tanto $\sigma_O \rho$ es una isometría directa, por lo que $H = G^+ \cup \sigma_O \rho G^+$ es un grupo de isometrías directas. Además como $[G : G^+] = 2$, entonces $G = G^+ \cup \rho G^+$. Veamos entonces que

$$\rho G^+ = \{\sigma_O h \mid h \in H \setminus G^+\}.$$

Si $\rho g \in \rho G^+$, entonces $\rho g = \sigma_O(\sigma_O \rho g)$ y como $g \in G^+$, tenemos a $\sigma_O \rho g \in H \setminus G^+ = \sigma_O \rho G^+$. Por lo tanto, $\rho g \in \{\sigma_O h \mid h \in H \setminus G^+\}$.

Por otra parte, si $\sigma_O h \in \{\sigma_O h \mid h \in H \setminus G^+\}$, como $h \in H \setminus G^+ = \sigma_O \rho G^+$, entonces existe $g \in G^+$ tal que $h = \sigma_O \rho g$, de esto $\sigma_O h = \sigma_O(\sigma_O \rho g) = \rho g \in \rho G^+$.

En vista de lo anterior concluimos que $\rho G^+ = \{\sigma_O h \mid h \in H \setminus G^+\}$ y por lo tanto, $G = G^+ \cup \rho G^+ = G^+ \cup \{\sigma_O h \mid h \in H \setminus G^+\}$.

□

Por este resultado descrito, si deseamos encontrar todos los grupos finitos de isometrías sólo necesitamos encontrar todos los grupos finitos de isometrías directas y ver las posibles formas de extenderlos, acorde al teorema anterior. Para comenzar con nuestra búsqueda tengamos presente la siguiente definición. Sea G un grupo de isometrías directas, las cuales dejan fijo un punto O (por lo tanto, todos los elementos de G son rotaciones cuyos ejes concurren en O). Sea \mathbb{S} una esfera centrada en O , diremos que un punto $P \in \mathbb{S}$ es un **polo** si y sólo si alguna rotación de G , distinta de la identidad, deja fijo a P .

Las isometrías de G permutan los polos en una esfera dada y así el conjunto de polos en esa esfera se divide en una o más órbitas. Por ejemplo, el grupo de simetrías (directas) de un cubo conduce a tres órbitas de polos: la de los ejes a través de los centros de las caras opuestas, la de los vértices opuestos y la de los puntos medios de los lados opuestos. Por su parte, el grupo de simetrías de una pirámide (con una

base regular pero excluyendo un tetraedro regular), conduce a dos órbitas de polos, cada una de las cuales contiene sólo uno de los dos puntos en extremos opuestos del eje de rotación. Esta división en sólo dos o tres órbitas es típica, como se mostrará a continuación.

Lema 2.6. *Sea G un grupo no trivial, finito de isometrías directas en \mathbb{E}^3 las cuales dejan el punto O fijo. Si \mathbb{S} es una esfera centrada en O , entonces el número de órbitas de polos en \mathbb{S} es 2 ó 3.*

Prueba. Sea $\{P_1, \dots, P_k\}$ un subconjunto de polos en \mathbb{S} , uno para cada órbita de polos de \mathbb{S} . Mostraremos que $k = 2$ o 3 . Sea $s_i = |\text{Stab}_G(P_i)|$, es decir, el número de isometrías en G que dejan fijo el polo P_i . Por definición de polo, $s_i \geq 2$ esto es porque, por lo menos, la identidad y la rotación que contiene al polo P_i son isometrías que lo dejan fijo. Sea $r_i = |\mathcal{O}(P_i)|$ el número de polos en la i -ésima órbita y sea $n = |G|$. Por el teorema órbita-estabilizador¹ tenemos que $s_i r_i = n$ para toda $i \in \{1, \dots, k\}$.

Como s_i es el número de isometrías en G que dejan fijo el polo P_i para $i \in \{1, \dots, k\}$, y hay r_i polos en $\mathcal{O}(P_i)$, tenemos que $r_i(s_i - 1)$ es el número (contando repeticiones) de isometrías no triviales en G que dejan al menos un polo fijo en $\mathcal{O}(P_i)$. Si tomamos la suma de este número por cada órbita, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^k r_i(s_i - 1) = \sum_{i=1}^k (n - r_i),$$

es el número total de elementos no triviales de G que dejan por lo menos un polo fijo, nuevamente contando cada isometría una vez por cada polo que deja fijo. Notemos que cada elemento no trivial de G es una rotación la cual deja exactamente dos polos fijos en \mathbb{S} , por lo que

$$2(n - 1) = \sum_{i=1}^k (n - r_i). \quad (2.1)$$

Dividamos ambos lados de la ecuación (2.1) por n y usando nuevamente el hecho de que $n = s_i r_i$, tenemos

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{s_i}\right). \quad (2.2)$$

¹**Teorema órbita-estabilizador:** Sea X un conjunto, G un grupo finito. Sea $x \in X$ y consideremos $\mathcal{O}(x)$ la órbita de x en G y $\text{Stab}_G(x)$ el estabilizador de x en G , entonces $|G| = |\text{Stab}_G(x)| |\mathcal{O}(x)|$.

Como cada $s_i \geq 2$, también tenemos que $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{s_i} < 1$, con $i \in \{1, \dots, k\}$. Consideremos la suma sobre las k órbitas y utilicemos la ecuación (2.2) para obtener

$$\frac{k}{2} \leq 2 - \frac{2}{n} < k. \quad (2.3)$$

Además, puesto que G es no trivial tenemos que $n \geq 2$, así

$$1 \leq 2 - \frac{2}{n} < 2. \quad (2.4)$$

Las desigualdades (2.3) y (2.4) son compatibles si y sólo si $k = 2$ o 3 . Para ver esto, es claro que $k \neq 1$. Ahora, si $k \geq 4$, entonces $\frac{k}{2} \geq 2$ lo que contradice (2.3), así $k = 2$ ó $k = 3$. También es claro que (2.3) se cumple si $k = 2$ (para cualquier $n \geq 2$) y por último si $k = 3$ entonces, tenemos que $\frac{3}{2} \leq 2 - \frac{2}{n} < 3$, la cual se satisface si $n \geq 4$.

□

En vista del lema inmediato anterior tenemos los siguientes resultados.

Lema 2.7. *Sea G un grupo de orden n ($n > 1$), el cual consta sólo de isometrías directas que dejan a una esfera \mathbb{S} invariante. Si hay exactamente dos órbitas de polos en \mathbb{S} , entonces G es un grupo cíclico y es generado por una rotación con ángulo $\frac{2\pi}{n}$.*

Prueba. Sean P_i , s_i y r_i con $i \in \{1, 2\}$ como en el lema anterior. Entonces la ecuación (2.1) se simplifica a $2 = r_1 + r_2$. Como r_1 y r_2 son enteros positivos, cada una de las dos órbitas contiene solamente un polo. Notemos que estos dos polos (distintos) pertenecen a un diámetro de \mathbb{S} y por lo tanto, G consta sólo de rotaciones cuyo eje es este diámetro. Sea Π un plano perpendicular al eje de rotación. Entonces $G|_{\Pi}$ es un grupo finito de rotaciones en el plano y $G \cong G|_{\Pi}$, así la afirmación se sigue del Teorema 2.4.

□

Antes de proceder con el siguiente lema que nos dirá qué grupos tienen tres órbitas en polos, haremos una pequeña exposición de las simetrías de los sólidos platónicos, ya que estas aparecerán en el resultado de dicho lema².

²Para un análisis algebraico de las simetrías directas de estos objetos se puede consultar, por ejemplo, el texto [55].

Otro punto importante de notar para nuestro trabajo, consiste en observar que las simetrías de un poliedro y su dual son las mismas (para ver una prueba generalizada de esta afirmación ver [9]), de esta forma basta analizar las simetrías del octaedro para comprender las del cubo (o viceversa) y las del icosaedro para comprender las del dodecaedro (o viceversa).

Tetraedro:

- Simetrías directas.

I) La identidad.

II) Las rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$ alrededor de los cuatro ejes definidos por el centro de una cara y el vértice opuesto a ésta, lo que nos arroja 8 rotaciones (Figura 2.2 inciso a)).

III) Los medios giros, cuyo eje pasa por los puntos medios de aristas opuestas, nos da 3 rotaciones más (Figura 2.2 inciso b)).

Total: **12** simetrías directas.

Al grupo generado por estas simetrías lo denotaremos por: **T**.

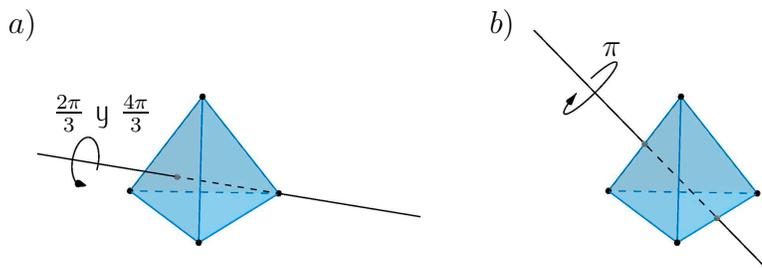


Figura 2.2: Rotaciones en el tetraedro.

- Simetrías opuestas

I) Las 6 reflexiones por planos que contienen una arista y el punto medio de la arista opuesta a la arista contenida (Figura 2.3).

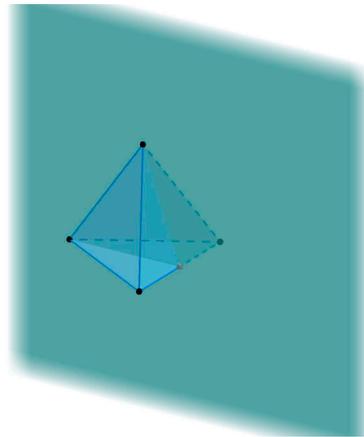


Figura 2.3: Reflexión en el tetraedro.

- II) Las reflexiones con giro de ángulo $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$, donde el eje de rotación contiene los puntos medios de aristas opuestas junto con el plano perpendicular a este eje y pasa por el centro del tetraedro, nos arrojan 6 simetrías más (Figura 2.4).

Total: **12** simetrías opuestas.

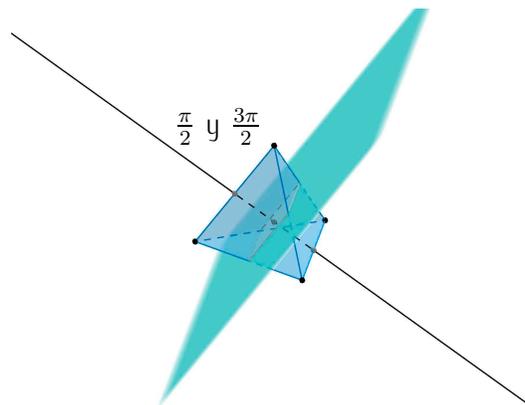


Figura 2.4: Reflexión con giro en el tetraedro.

Octaedro (Cubo):

- Simetrías directas (O)

- I) La identidad.
- II) Las rotaciones de π alrededor de los seis ejes definidos por los puntos medios de aristas opuestas, obtenemos 6 rotaciones (Figura 2.5 inciso a)).
- III) Las rotaciones de $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{2}$ alrededor de los tres ejes definidos por los vértices opuestos. De aquí obtenemos 9 rotaciones (Figura 2.5 inciso b)).
- IV) Las rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$ alrededor de los cuatro ejes definidos por los centros de caras opuestas, nos arroja 8 rotaciones (Figura 2.5 inciso c)).

Total: **24** simetrías directas.

Al grupo generado por estas simetrías lo denotaremos por: **O**.

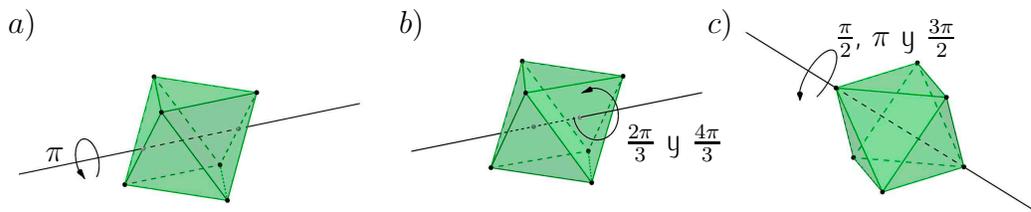


Figura 2.5: Rotaciones en el octaedro.

■ Simetrías opuestas

Son el producto de cada simetría directa con la inversión central, cuyo centro es el centro del octaedro.

- I) La inversión central, cuyo centro es el centro del octaedro.
- II) Las 3 reflexiones por planos que contienen pares de aristas opuestas (Figura 2.6 inciso a)).
- III) Las 6 reflexiones por planos que contienen los pares de vértices opuestos y los puntos medios de dos aristas opuestas (Figura 2.6 inciso b)).

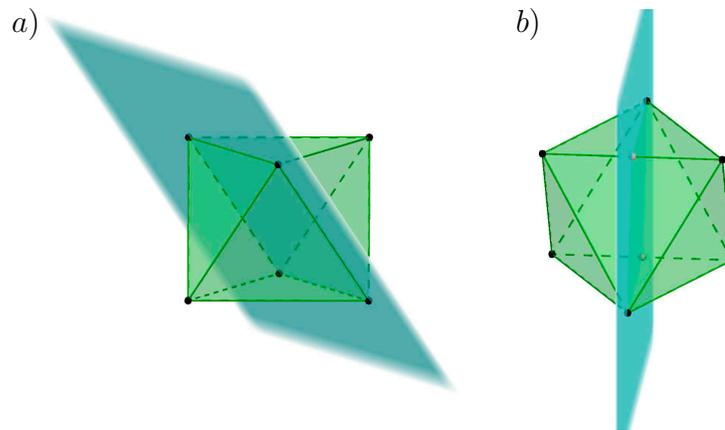


Figura 2.6: Reflexiones en el octaedro.

IV) Las 8 reflexiones con giro alrededor de los cuatro ejes definidos por los centros de caras opuestas cuyo ángulo es $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$ con el plano perpendicular a este eje por el centro del octaedro (Figura 2.7 inciso a)).

V) Las 6 reflexiones con giro cuyo eje de rotación contiene vértices opuestos y ángulos de giro $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ con el plano perpendicular a este eje de rotación y que pasa por el centro del octaedro (Figura 2.7 inciso b)).

Total: **24** simetrías opuestas.

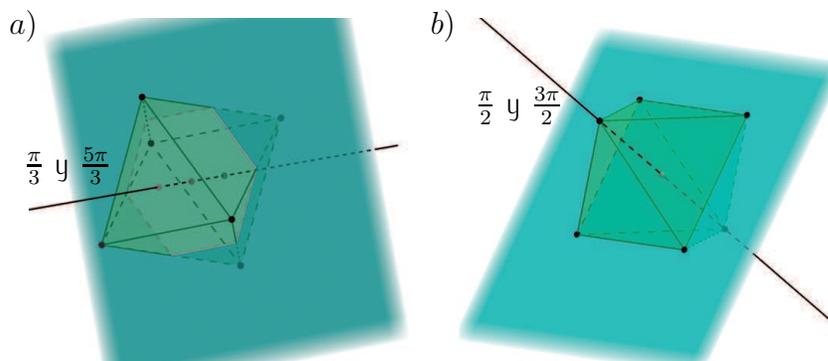


Figura 2.7: Reflexiones con giro en el octaedro.

Con las descripciones mencionadas de las simetrías directas del Tetraedro y del Octaedro podemos observar que $\mathbf{T} \leq \mathbf{O}$. Una forma de convencernos de esto, es que es

posible circunscribir un tetraedro en el octaedro que cumple con que toda simetría de ese tetraedro es una simetría del octaedro (Figura 2.8).

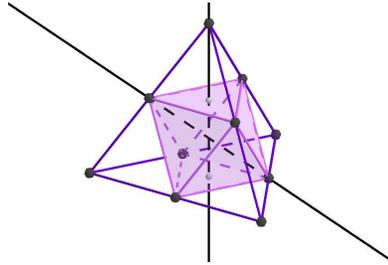


Figura 2.8: Tetraedro circunscrito en el octaedro.

Icosaedro (Dodecaedro):

■ Simetrías directas (I)

- I) La identidad.
- II) Las rotaciones de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$ alrededor de los diez ejes definidos por los centros de caras opuestas, nos arroja 20 rotaciones (Figura 2.9 inciso a)).
- III) Las rotaciones de ángulo $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$ por los ejes definidos por los vértices opuestos del icosaedro (6 pares de vértices). De aquí obtenemos 24 rotaciones (Figura 2.9 inciso b)).
- IV) Las rotaciones de ángulo π alrededor de los quince ejes definidos por los puntos medios de las aristas opuestas, obtenemos 15 rotaciones (Figura 2.9 inciso c)).

Total: **60** simetrías directas.

Al grupo generado por estas simetrías lo denotaremos por: I .

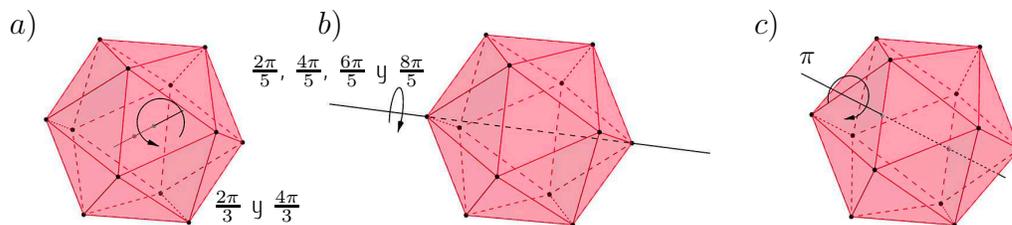


Figura 2.9: Rotaciones del icosaedro.

- Simetrías opuestas

Son el producto de cada simetría directa con la inversión central, cuyo centro es el centro del icosaedro.

I) La inversión central cuyo centro es el centro del dodecaedro.

II) Las 15 reflexiones por planos que contienen los pares de aristas opuestas (Figura 2.10).

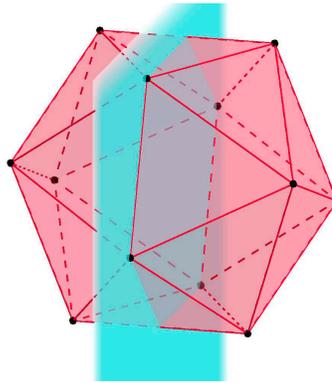


Figura 2.10: Una reflexión en el icosaedro.

III) Las 24 reflexiones con giro alrededor de los seis ejes definidos por los vértices opuestos del icosaedro y ángulo $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{7\pi}{5}$ y $\frac{9\pi}{5}$ con el plano perpendicular a este eje por el centro del icosaedro (Figura 2.11 inciso a)).

IV) Las 20 reflexiones con giro alrededor de los diez ejes definidos por los centros de caras opuestas y ángulo $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$ con el plano perpendicular a este eje por el centro del icosaedro (Figura 2.11 inciso b)).

Total: **60** simetrías opuestas.

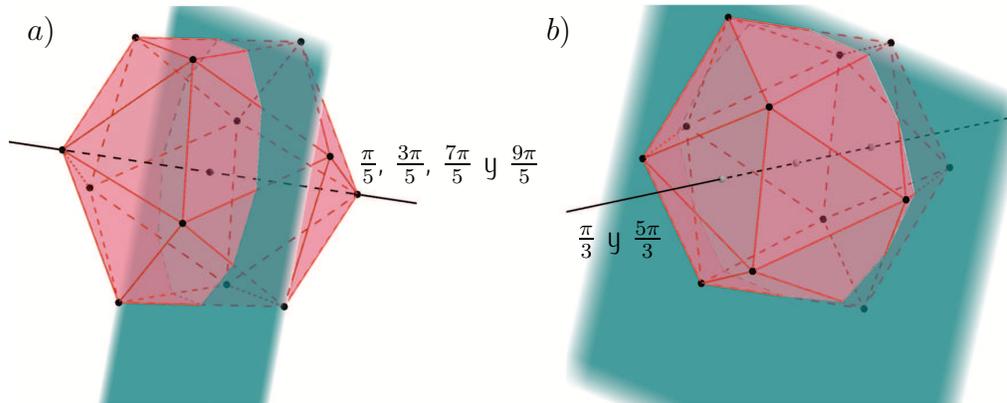


Figura 2.11: Reflexiones con giro en el icosaedro.

Ahora, estamos en posición de ver el siguiente lema, el cual nos brindará elementos necesarios para comprender mejor a los grupos finitos de simetrías en el espacio.

Lema 2.8. *Sea G un grupo de orden n ($n > 1$), el cual consta sólo de isometrías directas que dejan a una esfera \mathbb{S} invariante. Si hay exactamente tres órbitas de polos en \mathbb{S} , entonces G es isomorfo a uno de los siguientes grupos:*

- El grupo diédrico D_q , generado por dos medios giros cuyos ejes se intersecan en un ángulo de $\frac{\pi}{q}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,
- El grupo T .
- El grupo O .
- El grupo I .

Prueba. Sean P_i , s_i y r_i con $i \in \{1, 2, 3\}$ como en la prueba del Lema 2.6, recordemos que $s_i = |Stab_G(P_i)|$, es decir, el número de isometrías en G que dejan fijo el polo P_i , y $r_i = |\mathcal{O}(P_i)|$ el número de polos en la órbita de P_i . Por la definición de polo, $s_i \geq 2$; esto es porque, por lo menos, la identidad y la rotación que contiene al polo P_i son isometrías que lo dejan fijo.

Por otro lado, consideremos $H_i = Stab_G(P_i)$ con $i \in \{1, 2, 3\}$. Entonces $H_i \leq \mathbf{Iso}(\mathbb{E}^3)$ y contiene únicamente rotaciones que dejan invariante a la esfera \mathbb{S} . Analicemos los elementos de H_i en \mathbb{S} . Notemos que P_i es uno de esos polos ya que

todos los elementos de H_i lo fijan. Además, si $\rho \in H_i \setminus \{\iota\}$, entonces ρ es una rotación cuyo eje contiene a P_i y el centro de \mathbb{S} . Por lo tanto, ρ fija al punto diametralmente opuesto de P_i en \mathbb{S} . También vemos que ρ únicamente fija los puntos en su eje, por lo que los únicos elementos no triviales de H_i en \mathbb{S} son P_i y su antípoda, es decir, son los polos de H_i . Dado que H_i fija a P_i , fija a su antípoda. Por lo tanto, hay exactamente dos órbitas de polos bajo la acción de H_i . De esta forma, por el Lema 2.7, como $H_i \leq G$ es finito, tenemos que H_i es un grupo cíclico.

Lo anterior implica que todos los $Stab_G(P_i)$ son grupos cíclicos y son generados por rotaciones de orden s_i , con $i \in \{1, 2, 3\}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $s_1 \leq s_2 \leq s_3$; entonces las ecuaciones (2.1) y (2.2) de la prueba del Lema 2.6 se reducen a:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= n + 2, \\ \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} &= 1 + \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Además $2 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3$ y $s_i r_i = n$. Veamos cuales serían las soluciones enteras de este sistema:

- I) Si $s_1 = 2 = s_2$, entonces $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{s_3} = 1 + \frac{2}{n}$, es decir, $\frac{1}{s_3} = \frac{2}{n}$, lo que implica que n es par y está determinado por el valor de s_3 , por lo que $s_3 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, digamos $s_3 = q$ y por lo tanto $n = 2q$. Por la ecuación $s_i r_i = n$, tenemos entonces $r_1 = q$, $r_2 = q$ y $r_3 = 2$.
- II) Si $s_1 = 2$, $s_2 = 3 = s_3$, entonces $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{6}$, es decir, $\frac{1}{6} = \frac{2}{n}$, lo que implica que $n = 12$. Por la ecuación $s_i r_i = n$, tenemos entonces $r_1 = 6$, $r_2 = 4$ y $r_3 = 4$.
- III) Si $s_1 = 2$, $s_2 = 3$ y $s_3 = 4$, entonces $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{12}$, es decir, $\frac{1}{12} = \frac{2}{n}$, lo que implica que $n = 24$. Por la ecuación $s_i r_i = n$, tenemos entonces $r_1 = 12$, $r_2 = 8$ y $r_3 = 6$.

- IV) Si $s_1 = 2$, $s_2 = 3$ y $s_3 = 5$, entonces $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{30}$, es decir, $\frac{1}{30} = \frac{2}{n}$, lo que implica que $n = 60$. Por la ecuación $s_i r_i = n$, tenemos entonces $r_1 = 30$, $r_2 = 20$ y $r_3 = 12$.
- V) Si $s_1 = 2$, $s_2 = 3$ y $s_3 \geq 6$, entonces $1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{s_3} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, es decir, $\frac{2}{n} \leq 0$, lo que es una contradicción.
- VI) Si $s_1 = 2$, $s_2 \geq 4$ y $s_3 \geq 4$, entonces $1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$, es decir, $\frac{2}{n} \leq 0$, una contradicción.
- VII) Si $s_1 \geq 3$, $s_2 \geq 3$ y $s_3 \geq 3$, entonces $1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, es decir, $\frac{2}{n} \leq 0$, nuevamente una contradicción.

Por lo tanto, las únicas soluciones enteras para las ecuaciones anteriores las podemos resumir en el siguiente cuadro:

	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2	r_3	n
Caso 1	2	2	q	q	q	2	$2q$
Caso 2	2	3	3	6	4	4	12
Caso 3	2	3	4	12	8	6	24
Caso 4	2	3	5	30	20	12	60

Cuadro 2.1: Casos posibles de análisis para la situación de tres órbitas de polos.

Caso 1.

Recordemos que el subgrupo $Stab_G(P_3)$ es un grupo cíclico de orden q . Sea ρ su generador. Recordemos que $s_i = |Stab_G(P_i)|$ y como $s_1 = s_2 = 2$, entonces los estabilizadores de P_1 y P_2 consisten únicamente de un medio giro. En otras palabras, todas las rotaciones en G , menos en $Stab_G(P_3)$, son medios giros. Sea ρ_m uno de los medios giros que no están en $Stab_G(P_3)$, entonces $\rho_m \rho \notin Stab_G(P_3)$. Esto implica que, $\rho_m \rho = \rho_n$ es un medio giro. Además, podemos notar que ρ_m y ρ generan G pues $[G : Stab_G(P_3)] = 2$ (ya que $r_3 = 2$) y como $\rho = \rho_m \rho_n$ es una rotación con ángulo $\frac{2\pi}{q}$, tenemos que los ejes de ρ_m y ρ_n se intersecan en un ángulo $\frac{\pi}{q}$ y estos generan a G . Por lo tanto, $G \cong D_q = \langle \rho_m, \rho_n \rangle$ (Figura 2.12).

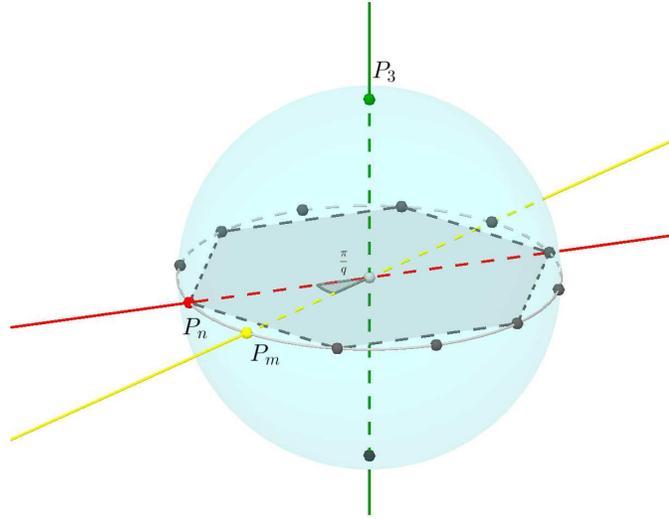
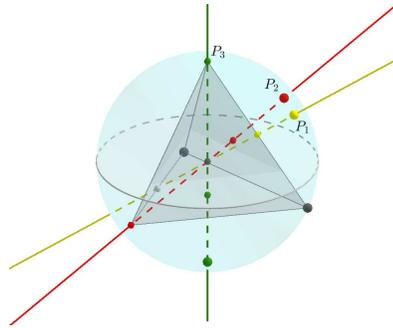


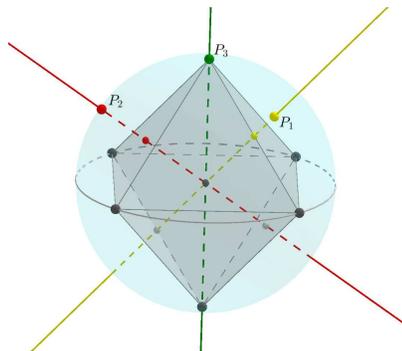
Figura 2.12: Órbitas de polos en el Caso 1.

Caso 2.

Sea $\{Q_1 = P_2, Q_2, Q_3, Q_4\}$ el conjunto de los cuatro polos en la segunda órbita. Las rotaciones en G permutan estos cuatro puntos transitivamente. Como $s_2 = 3$, entonces $Stab_G(P_2) = \langle \rho \rangle$, donde ρ es una rotación de orden 3 cuyo eje contiene a $P_2 = Q_1$. Además, $\rho \in G$ permuta a los elementos de $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$. Si $\rho(Q_i) = Q_i$ para $i \neq 1$, como ρ es una rotación que fija a los más dos polos, tendríamos que $\rho(Q_j) = Q_k$, con $\{j, k\} \subset \{2, 3, 4\}$ y $(i \neq j, i \neq k, j \neq k)$, es decir, ρ intercambia a los otros dos puntos de $\mathcal{O}(P_2)$. Pero ρ tiene orden 3, por lo que no puede intercambiar a Q_j con Q_k , ya que si sucediera, $Q_j = \rho^3(Q_j) = \rho^2(Q_k) = \rho(Q_j) = Q_k$, una contradicción. Por lo que ρ no fija a Q_i si $i \neq 1$. Por lo tanto, los puntos Q_2, Q_3 y Q_4 forman un triángulo equilátero y tenemos que G es transitivo en los segmentos Q_1Q_j . Dado que los puntos Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 están en la misma órbita de G , podemos usar los mismos argumentos para ver que los triángulos $\triangle Q_1Q_3Q_4$, $\triangle Q_1Q_2Q_4$ y $\triangle Q_1Q_2Q_3$ son equiláteros. Entonces, los Q_i son los vértices de un tetraedro regular. Como G permuta los elementos de $\mathcal{O}(P_2) = \{Q_1 = P_2, Q_2, Q_3, Q_4\}$, entonces G es un subgrupo del grupo de rotaciones del tetraedro. Sin embargo, el grupo de rotaciones del tetraedro tiene 12 elementos al igual que G , por lo que G es el grupo de rotaciones del tetraedro (Figura 2.13).

Figura 2.13: Órbitas de polos en el **Caso 2**.**Caso 3.**

Consideremos los seis polos en la tercer órbita y a $\rho \in G$ tal que $Stab_G(P_3) = \langle \rho \rangle$. Como $|\langle \rho \rangle| = 4$, tenemos que si Q es un punto en la órbita de P_3 tal que $\rho(Q) \neq Q$ (el cual existe dado que ρ fija exactamente dos puntos por ser una rotación), entonces $\{Q, \rho(Q), \rho^2(Q), \rho^3(Q)\}$ son puntos distintos y están en la misma órbita de P_3 bajo G . Es decir, ρ debe dejar fijo dos de esos polos y permutar los cuatro restantes en esta órbita cíclicamente. Esto sucede para los otros dos posibles ejes cuyas rotaciones son conjugadas de ρ , así que los doce segmentos que unen polos en distintos ejes todos tienen la misma longitud y los seis polos son los vértices de un octaedro regular. Como G permuta los elementos de $\mathcal{O}(P_3)$, entonces G es un subgrupo del grupo de rotaciones del octaedro. Sin embargo, el grupo de rotaciones del octaedro tiene 24 elementos al igual que G , por lo que G es el grupo de rotaciones del octaedro (Figura 2.14).

Figura 2.14: Órbita de polos en el **Caso 3**.

Caso 4.

Consideremos los 12 polos en la tercer órbita que están en ejes de rotación de orden 5. Elegimos una rotación $\rho \in G$ de orden 5 tal que P_3 es un polo de ρ . Si P es otro polo de $\mathcal{O}(P_3)$, como $|\langle \rho \rangle| = 5$, por el teorema órbita-estabilizador y el teorema de Lagrange³, tenemos que la órbita de P bajo $\langle \rho \rangle$ debe tener 1 o 5 elementos. Dado que $|\mathcal{O}(P_3)| = 12$, $\rho(P_3) = P_3$ y ρ sólo puede tener a lo más dos polos fijos, tenemos que ambos polos de ρ están en $\mathcal{O}(P_3)$ y además los otros 10 puntos se dividen en dos ρ -órbitas de 5 puntos cada una. Sea $Q \in \mathcal{O}(P_3)$ uno de estos 10 puntos. Tenemos que $Stab_G(Q) \cong Stab_G(P_3) \cong C_5$ y está generado por una rotación ρ' . Si hacemos un análisis similar a ρ' como se hizo para ρ , vemos que los 10 puntos de las dos ρ -órbitas no pueden ser coplanares. Así, cada polo de orden 5 debe tener cinco vecinos cercanos, cinco vecinos lejanos y su antípoda. Puesto que los 12 polos están en una órbita, la distancia de un polo a sus 5 vecinos cercanos es invariante y por lo tanto los 12 polos son los vértices de un icosaedro regular. El grupo G deja este conjunto de 12 polos globalmente invariante y por lo tanto, es un subgrupo del grupo de simetrías directas de un icosaedro (Figura 2.15).

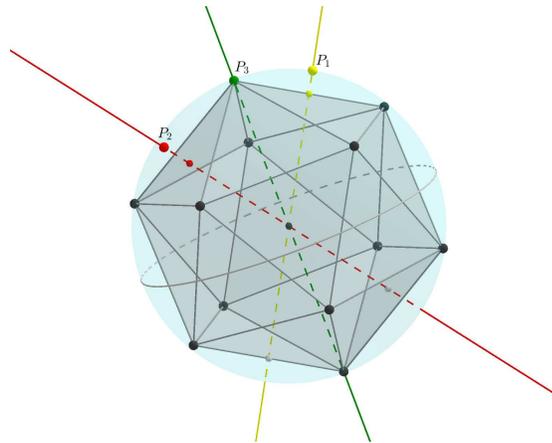


Figura 2.15: Órbita de polos en el **Caso 4**.

□

Tomando en cuenta estos últimos resultados, obtenemos el siguiente corolario.

³**Teorema de Lagrange:** Si G es un grupo finito entonces, el orden de cualquier subgrupo divide el orden del grupo.

Corolario 2.9. *Sea G un grupo finito de isometrías directas en \mathbb{E}^3 , entonces G es isomorfo a alguno de los siguientes grupos:*

- C_q con $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, generado por una rotación ρ con ángulo $\frac{2\pi}{q}$. Es decir, $C_q \cong \langle \rho \rangle$.
- D_q con $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, generado por dos medios giros ρ_m y ρ_n cuyos ejes se intersecan en ángulo $\frac{\pi}{q}$. Es decir, $D_q \cong \langle \rho_m, \rho_n \rangle$.
- El grupo \mathbf{T} de simetrías directas del tetraedro regular, generado por una rotación ρ de orden 3 y un medio giro ρ_m . Es decir, $\mathbf{T} \cong \langle \rho, \rho_m \rangle$ y $|\mathbf{T}| = 12$.
- El grupo \mathbf{O} de simetrías directas del octaedro regular, generado por una rotación ρ de orden 4 y un medio giro ρ_m . Es decir, $\mathbf{O} \cong \langle \rho, \rho_m \rangle$ y $|\mathbf{O}| = 24$.
- El grupo \mathbf{I} de simetrías directas del icosaedro regular, generado por una rotación ρ de orden 5 y una rotación ρ' de orden 3. Es decir, $\mathbf{I} \cong \langle \rho, \rho' \rangle$ y $|\mathbf{I}| = 60$.

Notemos que ninguno de los grupos en la lista anterior son isomorfos. Como consecuencia inmediata de este resultado y el Lema 2.5, podemos ver que cualquier grupo finito de isometrías que contiene una inversión central σ_O , es semejante a exactamente alguno de los siguientes grupos:

- $C_q \cup \sigma_O C_q$ $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, generado por una rotación ρ con ángulo $\frac{2\pi}{q}$ y la inversión central σ_O . Es decir, $C_q \cup \sigma_O C_q \cong \langle \rho, \sigma_O \rangle$.
- $D_q \cup \sigma_O D_q$ $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, generado por dos medios giros ρ_m y ρ_n cuyos ejes se intersecan en ángulo $\frac{\pi}{q}$ y la inversión central. Es decir, $D_q \cup \sigma_O D_q \cong \langle \rho_m, \rho_n, \sigma_O \rangle$.
- $\mathbf{T} \cup \sigma_O \mathbf{T}$, generado por una rotación ρ de orden 3, un medio giro ρ_m y la inversión central. Es decir, $\mathbf{T} \cup \sigma_O \mathbf{T} \cong \langle \rho, \rho_m, \sigma_O \rangle$.
- $\mathbf{O} \cup \sigma_O \mathbf{O}$, generado por una rotación ρ de orden 4, un medio giro ρ_m y la inversión central. Es decir, $\mathbf{O} \cong \langle \rho, \rho_m, \sigma_O \rangle$.
- $\mathbf{I} \cup \sigma_O \mathbf{I}$, generado por una rotación ρ de orden 5, una rotación ρ' de orden 3 y la inversión central. Es decir, $\mathbf{I} \cup \sigma_O \mathbf{I} \cong \langle \rho, \rho', \sigma_O \rangle$.

Los últimos dos grupos son el grupo completo de simetrías del octaedro y el icosaedro regular, respectivamente. Ningún grupo que contiene una inversión central es semejante a un grupo sin una inversión central, por lo que grupos de las listas anteriores no pueden ser isomorfos. Sin embargo, algunos grupos de la lista los podemos reconocer:

- i) $C_q \cup \sigma_O C_q \cong C_{2q}$, $q \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$, generado por la rotación ρ con ángulo $\frac{2\pi}{q}$ y la inversión central σ_O . Sin embargo, como $C_q \cup \sigma_O C_q \cong C_q \times C_2$ y q es impar entonces, $C_q \times C_2 \cong C_{2q} \cong \langle \rho \sigma_O \rangle$.
- ii) $C_2 \cup \sigma_O C_2 \cong D_2$, es el grupo generado por un medio giro y la inversión central. Los elementos de este grupo son $\{\iota, \sigma, \rho_m, \sigma_O\}$, donde σ es una reflexión.
- iii) $D_q \cup \sigma_O D_q \cong D_{2q}$, $q \in \mathbb{N} \setminus (2\mathbb{N} \cup \{1\})$, generado por la rotación ρ' y la inversión central σ_O . Es decir, $D_q \cup \sigma_O D_q \cong D_{2q} \cong \langle \rho', \sigma \rangle$ con $q \in \mathbb{N} \setminus (2\mathbb{N} \cup \{1\})$, donde $\rho' = \rho \sigma_O$ y $D_q \cong \langle \rho, \sigma \rangle$.

Por último, los otros posibles grupos finitos de isometrías deben contener isometrías que invierten la orientación pero no contiene la inversión central. Nuevamente por el Lema 2.5, los únicos candidatos para tales grupos surgen de parejas, G^+ y H , de grupos de isometrías directas en los que G^+ es un subgrupo de índice 2 en H . Si examinamos nuestra lista de grupos finitos de isometrías directas, encontramos que las únicas parejas son:

- $C_{2q}]C_q$, tal que si ρ es la rotación que genera a C_{2q} y σ_O es la inversión central, tenemos que $C_{2q}]C_q \cong \langle \rho^2, \rho \sigma_O \rangle$.
- $D_q]C_q$, tal que si ρ_m y ρ_n son los dos medios giros que generan a D_q y σ_O es la inversión central, entonces $D_q]C_q \cong \langle \rho_m \rho_n, \rho_m \sigma_O \rangle$.
- $D_{2q}]D_q$, tal que si ρ_m y ρ_n son los dos medios giros que generan a D_q y σ_O es la inversión central, $D_{2q}]D_q \cong \langle \rho_m, (\rho_m \rho_n)^2, \rho_n \sigma_O \rangle$.
- $O]T$, generado por la rotación ρ de orden 3, el medio giro ρ_m y $\rho'_m \sigma_O$, donde ρ'_m es el medio giro y σ_O es la inversión central. De esta forma, $O]T \cong \langle \rho, \rho_m, \rho'_m \sigma_O \rangle$. Recordemos que $T \leq O$. También podemos apreciar que este grupo es isomorfo al grupo completo de simetrías del tetraedro regular.

De esta última lista los únicos grupos que podemos reconocer como isomorfos son $D_{2q}]C_{2q}$ y $D_{2q}]D_q$, esto ya que $C_{2q} \cong \langle \rho\sigma_O \rangle$.

Por el Teorema 2.5, el Corolario 2.9 y la discusión anterior tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.10 (Hessel). *Cualquier subgrupo finito de $\mathbf{Iso}(\mathbb{E}^3)$ es isomorfo a uno de los siguientes grupos:*

- C_q con $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- D_q con $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
- El grupo \mathbf{T} .
- El grupo \mathbf{O} .
- El grupo \mathbf{I} .
- $C_q \cup \sigma_O C_q$ con $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- $D_q \cup \sigma_O D_q$ con $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
- $\mathbf{T} \cup \sigma_O \mathbf{T}$.
- $\mathbf{O} \cup \sigma_O \mathbf{O}$.
- $\mathbf{I} \cup \sigma_O \mathbf{I}$.
- $C_{2q}]C_q$.
- $D_q]C_q$.
- $D_{2q}]D_q$.
- $\mathbf{O}] \mathbf{T}$.

Para concluir esta sección presentamos un poliedro para cada grupo finito G que nos proporcionó el Teorema 2.10 y tal que G es o bien el grupo de simetrías directas, o bien el grupo completo de simetrías de la figura. Para esto, será necesario definir algunos tipos especiales de poliedros que necesitaremos para este objetivo.

Definición 2.1. Un q -**prisma** es un poliedro que comprende una base que es un q -ágono regular, una segunda base (superior) que es una copia trasladada ortogonalmente de la primera (sin rotación) cuya altura no es igual a la longitud de cualquiera de los lados del q -ágono y q caras que unen los lados correspondientes de las dos bases, con $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ (Figura 2.16 inciso a)).

Definición 2.2. Una q -**pirámide** es un poliedro formado al unir un q -ágono regular a un punto fuera del plano que contiene al polígono y directamente encima del centroide de este. Consideraremos que la altura no es igual a la longitud de uno de los lados del q -ágono, con $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ (Figura 2.16 inciso b)). Cuando $q = 3$ omitimos el caso del tetraedro regular.

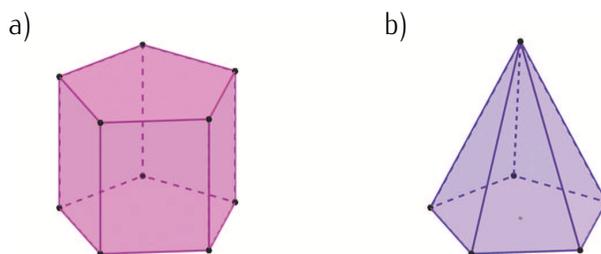


Figura 2.16: a) Un 5-prisma. b) Una 5-pirámide.

Valores de q	Poliedro	Grupo directo de simetrías	Grupo completo de simetrías
$q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$	q -pirámide	C_q	$D_q \rfloor C_q$
$q \in 2\mathbb{N} \setminus \{0, 2\}$	q -prisma	D_q	$D_q \cup \sigma_O D_q$
$q \in \mathbb{N} \setminus (2\mathbb{N} \cup \{1\})$	q -prisma	D_q	$D_{2q} \rfloor D_q$
	Tetraedro	T	$O \rfloor T$
	Cubo	O	$O \cup \sigma_O O$
	Octaedro	O	$O \cup \sigma_O O$
	Dodecaedro	I	$I \cup \sigma_O I$
	Icosaedro	I	$I \cup \sigma_O I$

Cuadro 2.2: Grupo de simetrías de poliedros irregulares, pirámides, prismas y los sólidos platónicos.

Definición 2.3. Un q -**antiprisma** es un poliedro que comprende una base que es un q -ágono regular, una segunda base (superior) que es una copia trasladada ortogonalmente de la primera y girada un ángulo de $\frac{\pi}{q}$ radianes, con $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, cuya

altura no es igual a la longitud de cualquiera de los lados del q -ágono, y $2q$ caras triangulares que unen los lados con los vértices correspondientes de las dos bases (Figura 2.17).

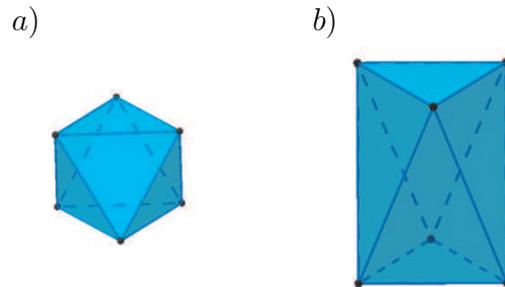


Figura 2.17: Un 3-antiprisma. Vista en proyección ortogonal a su base (inciso a)) y una vista en perspectiva (inciso b)).

Definición 2.4. A un q -prisma tal que se le da una orientación levógira o dextrógira y se "cortan" los vértices de los q -ágonos, con $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, lo denominamos un q -prisma truncado o q -prisma rasurado. Además pedimos la condición de que el objeto resultante no sea invariante bajo las reflexiones sobre planos que contienen al eje de rotación (Figura 2.18).

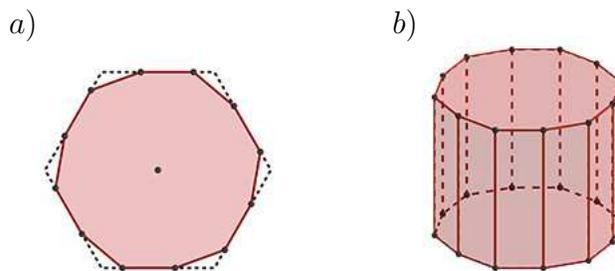


Figura 2.18: Un 6-prisma rasurado. Vista en proyección ortogonal a su base (inciso a)) y una vista en perspectiva (inciso b)).

Definición 2.5. Consideremos un q -prisma formado por dos $2q$ -ágonos, con $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. El q -prisma que se obtiene de "cortar" alternadamente los vértices de la base inferior y superior lo denominamos un $2q$ -prisma alternado. Además pedimos la condición de que el objeto resultante no sea invariante bajo las reflexiones sobre planos que contienen al eje de rotación (Figura 2.19).

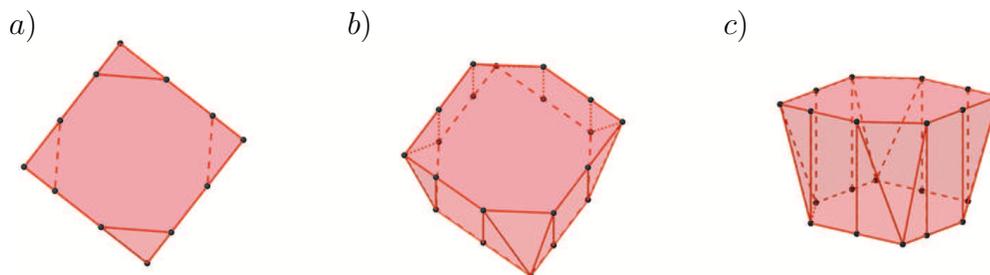


Figura 2.19: Un 4-prisma alternado. Vista en proyección ortogonal a su base (inciso a)) y en dos vistas en perspectiva (incisos b) y c)).

Valores de q	Poliedro	Grupo completo de simetrías
$q \in \mathbb{N} \setminus (2\mathbb{N} \cup \{1\})$	$2q$ -prisma alternado	$C_q \cup \sigma_O C_q$
$q \in 2\mathbb{N} \setminus \{0\}$	$2q$ -prisma alternado	$C_{2q} \wr C_q$
$q \in 2\mathbb{N} \setminus \{0\}$	q -prisma rasurado	$C_q \cup \sigma_O C_q$
$q \in \mathbb{N} \setminus (2\mathbb{N} \cup \{1\})$	q -prisma rasurado	$C_{2q} \wr C_q$
$q \in \mathbb{N} \setminus (2\mathbb{N} \cup \{1\})$	q -antiprisma	$D_q \cup \sigma_O D_q$
$q \in 2\mathbb{N} \setminus \{0\}$	q -antiprisma	$D_{2q} \wr D_q$
	Cubo modificado	$\mathbf{T} \cup \sigma_O \mathbf{T}$

Cuadro 2.3: Grupo de simetrías de prismas modificados y el cubo modificado.

Para comprender mejor al sólido cuyo grupo completo de simetrías es $\mathbf{T} \cup \sigma_O \mathbf{T}$, primero observemos que $\mathbf{T} \leq \mathbf{O}$ y $\sigma_O \mathbf{T} \leq \mathbf{O}$, así que podríamos modificar un cubo para obtener un sólido con este grupo de simetrías. Una forma de hacer esto es la siguiente: consideremos un cubo e inscribamos rectángulos (no cuadrados) en cada una de sus cara de tal forma que rectángulos en caras adyacentes tienen un cuarto de giro (Figura 2.20 inciso a)), y luego eliminamos las porciones del cubo fuera de los planos que unen lados paralelos de rectángulos adyacentes. Para simplificar el dibujo de este sólido, también podemos eliminar aquellas porciones del cubo fuera de los planos que unen los tres vértices más cercanos de los tres rectángulos alrededor de cada vértice del cubo. Así, el sólido que obtenemos lo denominamos *cubo modificado* (Figura 2.20 inciso b)) y podemos notar que tiene medios giros, rotaciones de orden 3, pero no hay rotaciones de orden 4 ni 5 en su grupo de simetrías. Entonces, en vista del Lema 2.8 el grupo de simetrías directas de este sólido es \mathbf{T} . Como la inversión central por el centro del sólido también es una simetría, por el Teorema 2.5 su grupo completo de simetrías es $\mathbf{T} \cup \sigma_O \mathbf{T}$.

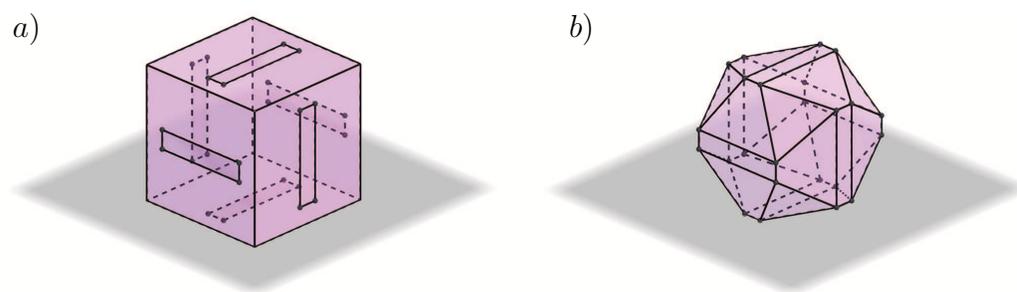


Figura 2.20: Construcción del cubo modificado a partir del cubo. La imagen del inciso b) corresponde al denominado *cubo modificado*.

Capítulo 3

Politopos abstractos: un breve estudio a los politopos hereditarios y geoméricamente hereditarios

No es una tarea fácil rastrear precisamente la historia de la idea de politopo abstracto regular. Si bien es claro que el concepto tiene sus raíces en la teoría clásica, y notablemente en el trabajo de Coxeter [9], más recientemente se han dado desarrollos paralelos que han influido en la teoría de los politopos regulares abstractos.

Desde el punto de vista de la geometría discreta, parece que la regularidad combinatoria se estudió por primera vez en McMullen [38] en el contexto de politopos convexos combinatoriamente regulares. En su generalidad, la noción de un politopo abstracto regular se anticipó en gran medida en el artículo de Grünbaum [20] sobre estructuras a las que llamó “polistromas” regulares. Luego, en 1977, Danzer y Schulte introdujeron el concepto más restrictivo, basado en el trabajo de Grünbaum, de un complejo de incidencia regular [13]; aunque las definiciones adoptadas fueron anticipadas por McMullen (en un contexto geométrico) en [38]. Entre estos complejos de incidencia regulares, los politopos regulares abstractos, o los politopos de incidencia regulares como se llamaron en primer lugar, son particularmente cercanos a los politopos tradicionales, y forman una clase especial de estructuras de tipo politopo con un atractivo geométrico y topológico distintivo. Schulte en los artículos [49], [50] y [51] dio inicio a un estudio más sistemático de estos objetos.

El capítulo está organizado de la siguiente forma. En la Sección 3.1, exponemos los conceptos de: politopo abstracto, regularidad, órbita e introducimos el medial de un

politopo. El estudio de los politopos hereditarios son el tema de la Sección 3.2, donde discutimos algunas de sus propiedades restringiéndonos al estudio de politopos de dimensión 3 (poliedros). Por último, en la Sección 3.3, tratamos brevemente el tema de realizaciones de un politopo y concluimos con la definición de politopo geoméricamente hereditario, así como algunos ejemplos de esto.

3.1. Politopos abstractos

En este apartado daremos un breve recorrido a través de los conceptos de politopo abstracto, polígono abstracto y poliedro abstracto para después abordarlos desde la perspectiva geométrica. Aquí presentamos la notación básica y los conceptos de la teoría de los politopos abstractos cómo se exponen en el libro [41]. Nuestra notación generalmente se modelará según la teoría tradicional y proporcionará un marco conveniente para estudiar estructuras combinatorias regulares que se asemejan a los politopos regulares clásicos. Sin embargo, adoptamos la letra σ como representante de las reflexiones (generadores distinguidos) en lugar de la letra ρ que es la más usual dentro de la literatura al respecto. Esto con el fin de mantener coherencia con el desarrollo del texto, ya que se ha trabajado con la letra σ para denotar las reflexiones y ρ para las rotaciones.

En la definición de politopo (abstracto) en principio pediremos que este sea un conjunto parcialmente ordenado (COPO¹) \mathcal{P} acompañado de una función de rango estrictamente monótona la cual tiene por imagen el conjunto $\{-1, \dots, n\}$ y que satisface 4 propiedades que daremos después de algunas definiciones previas que nos serán de utilidad.

Para $-1 \leq i \leq n$ los elementos de \mathcal{P} de rango i los llamaremos i -**caras**. Así, cuando nos referimos a una j -cara ésta será denotada por una letra latina mayúscula, con un subíndice que indica el rango (por ejemplo F_i). En particular, las caras de rango 0, 1 y $n - 1$ las llamremos **vértices**, **aristas** y **facetas** del politopo, respectivamente. Cuando existen en \mathcal{P} una cara menor (F_{-1}) y una cara mayor (F_n) las denominaremos **caras impropias** de \mathcal{P} . Denotaremos por $\mathcal{F}_i(\mathcal{P})$ al conjunto de todas las i -caras para $i \in \{-1, \dots, n\}$ o si no hay lugar a confusión por \mathcal{F}_i . Dos caras F y G de \mathcal{P} decimos que son **incidentes** si $F \leq G$ o $G \leq F$. Una **cadena** de \mathcal{P} es un subconjunto totalmente ordenado de \mathcal{P} , es decir, en el que cualquiera dos elementos son incidentes. Una cadena tiene **longitud** i ($i \geq 1$) si esta contiene exactamente i caras. Las cadenas

¹Por conveniencia denotaremos por " \leq " al orden parcial.

máximas se denominan **banderas** de \mathcal{P} . Denotaremos al conjunto de banderas de \mathcal{P} por $\mathbf{F}(\mathcal{P})$. Diremos que dos banderas son **adyacentes** si ellas difieren únicamente en una cara.

Si Ω es una cadena de \mathcal{P} , llamamos al conjunto de rangos de sus elementos el **tipo** de Ω . Al tratar con cadenas, y específicamente con banderas, aceptaremos las siguientes convenciones. Si escribimos una cadena Ω en la forma $\Omega = \{F, G, H, \dots\}$, entonces las caras en Ω aparecen en su orden natural; es decir, $F < G < H < \dots$. Además, en la notación $\Omega = \{F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_m}\}$, los índices especificarán los rangos de las caras; es decir, rango $(F_{i_k}) = i_k$ para $k \in \{1, \dots, m\}$. De forma similar, escribiremos el tipo de Ω como $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, y se dará por hecho que $i_1 < i_2 < \dots < i_m$.

Las propiedades que necesitamos que \mathcal{P} cumpla para ser un polítopo abstracto son las siguientes:

- P1: \mathcal{P} tiene una cara mínima F_{-1} y una cara máxima F_n .
- P2: Cada bandera de \mathcal{P} tiene longitud $n + 2$, incluyendo las caras F_{-1} y F_n .
- P3: \mathcal{P} es **fuertemente conexo por banderas**, esto es, para cada $\{\Phi, \Psi\} \subset \mathbf{F}(\mathcal{P})$ existe una sucesión finita de banderas $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi$ tales que Φ_{i-1} y Φ_i son adyacentes para $i \in \{1, \dots, k\}$ y $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$ para cada $i \in \{0, \dots, k\}$.
- P4: Para cada $j \in \{0, \dots, n-1\}$, si $F_{j-1} \leq G_{j+1}$, existen exactamente dos caras $\{H, H'\} \subset \mathcal{F}_j(\mathcal{P})$ tales que $F_{j-1} < H < G_{j+1}$ y $F_{j-1} < H' < G_{j+1}$. Esta propiedad se denomina la **condición diamante** o **propiedad diamante**.

Con la información anterior estamos preparados para la siguiente

Definición 3.1. Un **polítopo** (abstracto) de rango n o un n -**polítopo** es un conjunto parcialmente ordenado (COPO) \mathcal{P} acompañado de una función de rango estrictamente monótona, la cual tiene rango $\{-1, \dots, n\}$ y que satisface las propiedades P1, P2, P3 y P4.

Ejemplo 3.1. A continuación listamos ejemplos de polítopos abstractos.

- 1) Sea $\mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, con la contención como orden parcial y la función de rango $r : \mathcal{P} \rightarrow \{-1, 0, 1, 2\}$ definida de la siguiente forma:

$$r(F) = \begin{cases} -1 & \text{si } F = \emptyset \\ 0 & \text{si } F \in \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\} \\ 1 & \text{si } F \in \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\} \\ 2 & \text{si } F = \{a, b, c\} \end{cases}$$

Un ejemplo de una bandera es $\Phi = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$. Así podemos notar que éste conjunto (\mathcal{P}, \subseteq) cumple las propiedades P1, P2, P3 y P4. Por lo que, \mathcal{P} es un politopo abstracto. Pensamos a este 2-politopo como un triángulo con vértices a , b y c .

- II) Las latices de caras de los sólidos platónicos son 3-politopos abstractos. Es decir, el politopo abstracto es la estructura de incidencia que inducen sus vértices, aristas y caras con la contención. Posteriormente en el desarrollo de este texto, no distinguiremos entre el objeto geométrico y la estructura de incidencia. Por lo que, podemos pensar a los sólidos platónicos como 3-politopos abstractos (Figura 3.1)

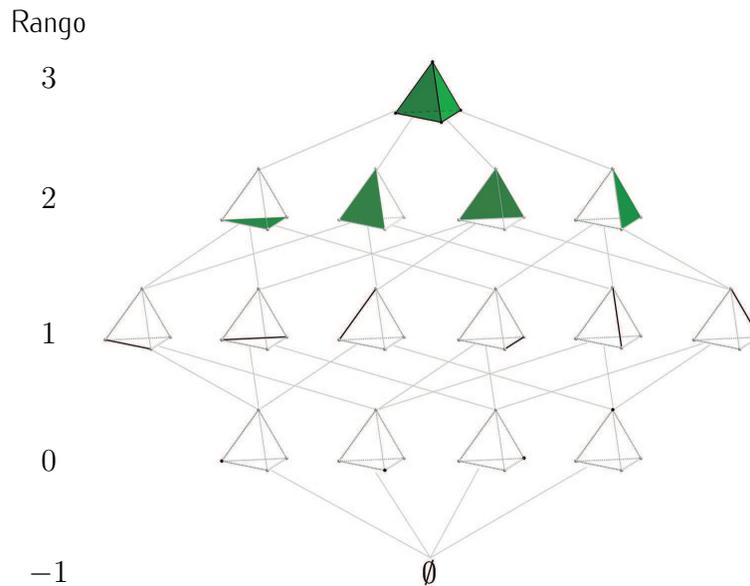


Figura 3.1: La latiz de caras del tetraedro.

- III) Las latices de caras del dígono (Figura 3.2 inciso a)) y el hemicubo (Figura 3.2 inciso b)).



Figura 3.2: Ejemplos de objetos geoméricos cuyas latices de caras son polítopos.

Ejemplo 3.2. A continuación listamos ejemplos de estructuras que no son polítopos abstractos.

a) Sea $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}\}$, con la contención como orden parcial y función de rango análoga a la definida en el Ejemplo 3.1 inciso a). Este conjunto no cumple ninguna de las propiedades P1, P2, P3 y P4.

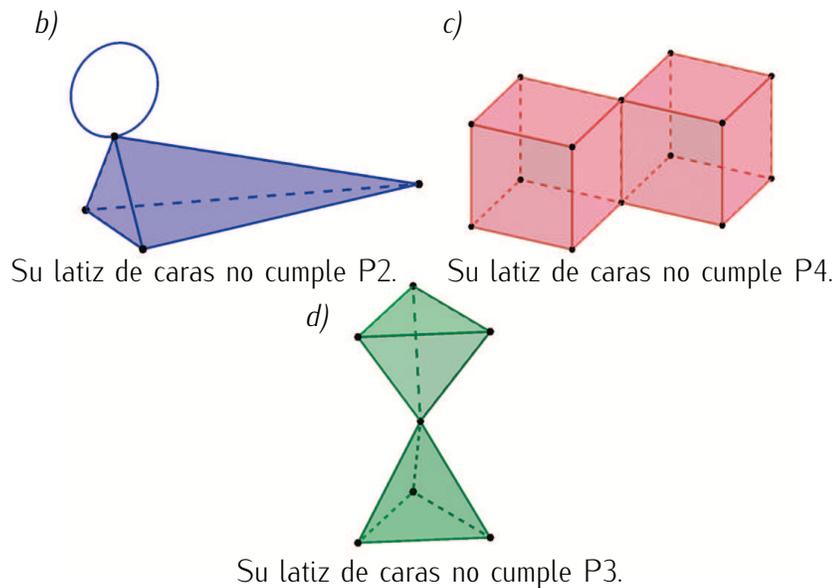


Figura 3.3: Los incisos (b) , c) y d)) muestran ejemplos de objetos geoméricos cuyas latices de caras no son polítopos.

Convenientemente omitiremos las caras impropias de las banderas; por ejemplo, podemos escribirlas de la forma $\{F_0, \dots, F_{n-1}\}$. Además, para una bandera $\Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$ denotamos por $(\Phi)_i$ su i -cara. De esta forma también denotaremos a las banderas como $\Phi = \{(\Phi)_0, (\Phi)_1, \dots, (\Phi)_{n-1}\}$.

Dadas dos caras F y G de \mathcal{P} con $F \leq G$, llamaremos

$$G/F = \{H \mid H \in \mathcal{P}, F \leq H \leq G\}$$

una **sección** de \mathcal{P} . Si F es un vértice, la sección F_n/F se denomina **figura de vértice** de \mathcal{P} en F . Como ejemplo de esto en la Figura 3.4 tenemos la latiz de caras de una figura de vértice del tetraedro como se expuso en la Figura 3.1.

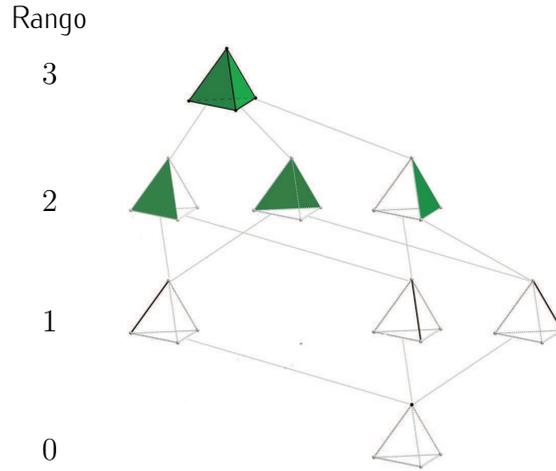


Figura 3.4: Con base en la Figura 3.1, tenemos la latiz de caras de una figura de vértice del tetraedro en el COPO.

Por la propiedad P4, si $n \geq 1$, para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ y cada bandera Φ de \mathcal{P} existe una *única* bandera adyacente diferente de Φ en la i -ésima cara. A dicha bandera la llamaremos la i -**adyacente** y la denotaremos por Φ^i . Recursivamente definimos para $k \geq 2$, $\Phi^{i_1, i_2, \dots, i_k} = (\Phi^{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}})^{i_k}$ siempre que $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{0, \dots, n-1\}$. Por otro lado, diremos que dos i -caras G y G' de \mathcal{P} son adyacentes si existe $\Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$ tal que $(\Phi)_i = G$ y $(\Phi^i)_i = G'$. Ejemplo de esto en el tetraedro lo podemos apreciar en la Figura 3.5.

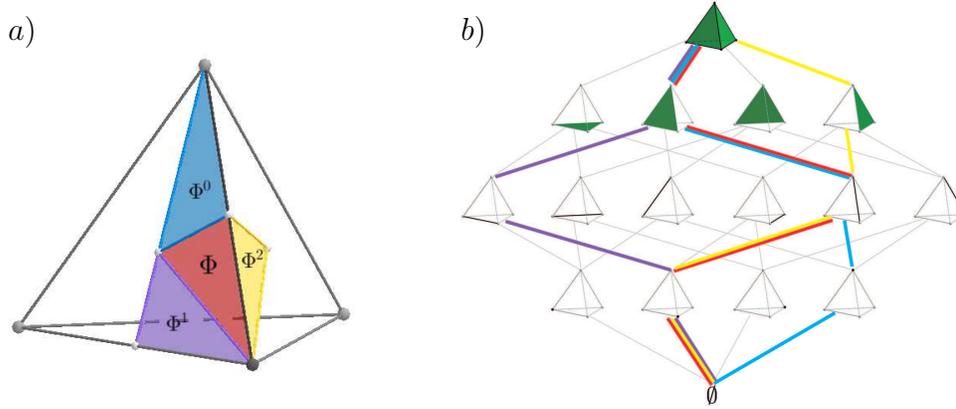


Figura 3.5: Banderas adyacentes a Φ en el tetraedro, (vista geométrica (a) y vista en el COPO (b)).

Además podemos notar los siguientes hechos sobre banderas adyacentes, dada $\Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$ y $0 \leq i \leq k \leq n - 1$, entonces

- a) $\Phi^{i,i} = \Phi$;
- b) $\Phi^{i,k} = \Phi^{k,i}$ para $k \geq i + 2$.

Para la parte a), sea F una $(i - 1)$ -cara de \mathcal{P} y H una $(i + 1)$ -cara de \mathcal{P} que es incidente a F . Entonces por P4 existen exactamente dos i -caras, G y G' , que son incidentes tanto a F como a H . Sea Φ una bandera que contiene $F \leq G \leq H$, de aquí que Φ^i debe contener $F \leq G' \leq H$. Puesto que G y G' son las únicas i -caras incidentes tanto a F como a H , la bandera i -adyacente de Φ^i debe contener a G . Sin embargo, la única bandera que contiene a G y la j -cara de Φ^i con $j \neq i$ es Φ . Por lo que $\Phi^{i,i} = \Phi$.

Para la parte b), supongamos que $i < k$. Consideremos

$$\Phi := \{F_{-1}, \dots, F_{i-1}, F_i, F_{i+1}, \dots, F_{k-1}, F_k, F_{k+1}, \dots, F_n\}$$

una bandera de \mathcal{P} (donde podemos permitirnos que $i + 1 = k - 1$). Por P4 existe otra única i -cara G , tal que $F_{i-1} \leq G \leq F_{i+1}$ y de manera análoga existe otra única k -cara, H , tal que $F_{k-1} \leq H \leq F_{k+1}$. Entonces por un lado

$$\begin{aligned} \Phi^k &= \{F_{-1}, \dots, F_{i-1}, F_i, F_{i+1}, \dots, F_{k-1}, H, F_{k+1}, \dots, F_n\} \\ \Phi^{k,i} &= (\Phi^k)^i = \{F_{-1}, \dots, F_{i-1}, G, F_{i+1}, \dots, F_{k-1}, H, F_{k+1}, \dots, F_n\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}\Phi^i &= \{F_{-1}, \dots, F_{i-1}, G, F_{i+1}, \dots, F_{k-1}, F_k, F_{k+1}, \dots, F_n\} \\ \Phi^{i,k} &= (\Phi^i)^k = \{F_{-1}, \dots, F_{i-1}, G, F_{i+1}, \dots, F_{k-1}, H, F_{k+1}, \dots, F_n\}.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Así, de 3.1 y 3.2 tenemos que $\Phi^{i,k} = \Phi^{k,i}$.

En el estudio de los politopos abstractos, existe una representación gráfica de los mismos (en sí de los Conjuntos Parcialmente Ordenados en general) denominada **diagramas de Hasse**. En esta representación, las caras de \mathcal{P} del mismo rango son dispuestas por vértices en el mismo nivel del diagrama (gráfica), caras de menor o mayor rango se disponen en renglones inferiores o superiores, respectivamente y dos vértices están unidos por un segmento si y sólo si las caras correspondientes de \mathcal{P} son tales que $F \leq G$ o $G \leq F$ y sus rangos difieren sólo en 1. Así, un politopo de rango -1 consta de una sola cara $F_{-1} = F_n$, es decir, un solo punto, junto con el orden trivial. Un politopo de rango 0 tiene únicamente dos caras (las caras impropias) F_{-1} y $F_0 = F_n$. En el caso de un 1-politopo hay exactamente dos vértices, cada uno de ellos adyacente a las caras impropias F_{-1} y $F_1 = F_n$. Los diagramas de Hasse de estos politopos están ilustrados en la siguiente Figura 3.6.

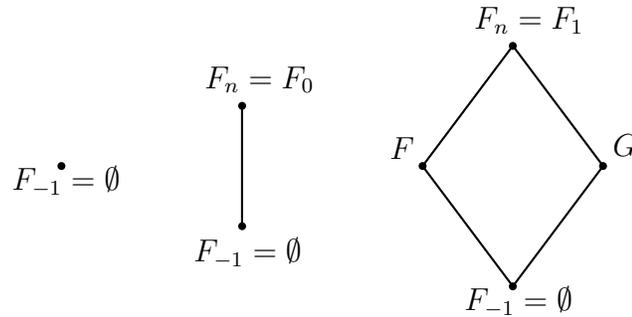


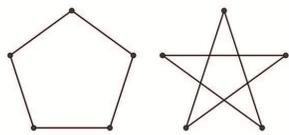
Figura 3.6: Diagramas de Hasse para los politopos de rango -1 , 0 y 1.

Tenemos nombres especiales para politopos de rango pequeño; llamamos a los 2-politopos **polígonos**, y a los 3-politopos **poliedros**. Además, por las propiedades antes descritas podemos notar que en un polígono en cada vértice inciden exactamente dos aristas y en cada arista inciden exactamente dos vértices. En cuanto a los poliedros, tenemos que en cada arista inciden exactamente dos vértices y exactamente dos caras.

Además también, cuando el polígono es finito y tiene p vértices (y por lo tanto también p aristas), se le denomina un p -**ágono**, en el caso cuando el polígono es infinito se le nombra **aperígono** cuando están todos sus vértices y aristas sobre una misma recta ó **zigzag** cuando no. Cuando el polígono en el espacio es infinito y es tal que sus vértices pueden verse limitados en la superficie de un cilindro (no todos colineales) se les llama **hélice**.

Ejemplo 3.3. A continuación listamos ejemplos de objetos geométricos que inducen polígonos abstractos.

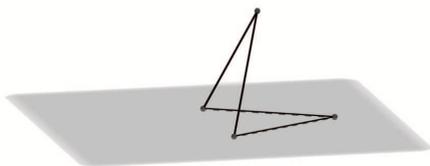
- I) Los polígonos convexos y estrellados inducen polígonos abstractos si se identifica cada uno con el orden parcial determinado por los vértices y aristas del polígonos, ordenado por la contención (Figura 3.7 inciso a)).
- II) Un polígono que no esta contenido en un plano se les conoce como **alabeados**. Por ejemplo, consideremos un tetraedro y elijamos un camino cerrado por aristas de la siguiente forma: tomemos exactamente dos aristas en cada cara pero cualquier tercera debe pertenecer a una cara diferente. De esta forma, obtenemos un polígono alabeado (Figura 3.7 inciso b)).
- III) El aperígono, un polígono zigzag y un polígono hélice inducen 2-politopos infinitos (Figura 3.7 inciso c) y d)).



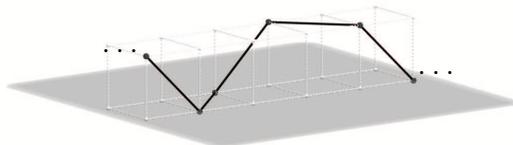
a) Pentágono y pentagrama.



c) Zigzag.



b) Polígono alabeado.



d) Hélice.

Figura 3.7: Ejemplos de polígonos en el plano y espacio euclidianos.

Para convenceremos de la afirmación que en todo polígono el número de vértices es el mismo que el de aristas, mencionaremos la siguiente definición que nos será de utilidad para ello. Sea un n -politopo \mathcal{P} y $0 \leq k \leq n - 1$. El k -*esqueleto* de \mathcal{P} , $\text{Ske}_k(\mathcal{P})$, es el COPO de todas las caras propias de \mathcal{P} de rango a lo más k (junto con el orden parcial inducido). Al $\text{Ske}_1(\mathcal{P})$ se le llama la *gráfica-aristas* de \mathcal{P} , esto porque es la gráfica determinada por los vértices y aristas de \mathcal{P} y en virtud de P3 y P4 es una gráfica (posiblemente con multi aristas). Consideremos un 2-politopo finito \mathcal{P} y su $\text{Ske}_1(\mathcal{P})$. Nuevamente por P4 tenemos que $\text{Ske}_1(\mathcal{P})$ es una gráfica 2-regular, por lo que tenemos un ciclo (por la conexidad de \mathcal{P}). Por lo tanto, si \mathcal{P} es un 2-politopo tenemos que $|\mathcal{F}_0| = |\mathcal{F}_1|$.

De lo que se mencionó con anterioridad, junto con las propiedades P1, P2, P3 y P4 podemos notar que los diagramas de Hasse de los 2-politopo \mathcal{P} son necesariamente uno de los dos tipos ilustrados a continuación, dependiendo de si \mathcal{P} es finito o infinito (Figura 3.8).

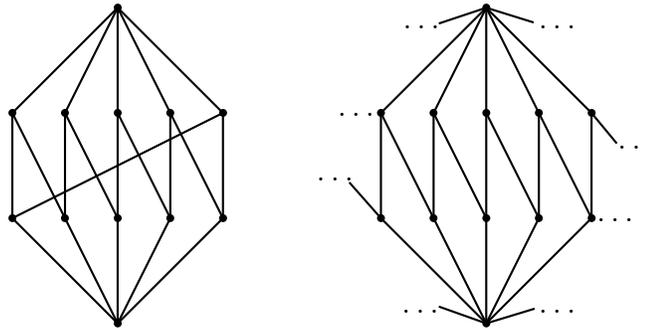


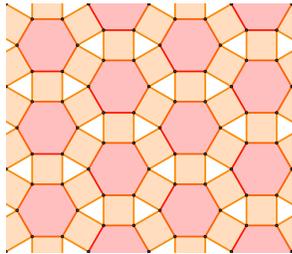
Figura 3.8: Diagramas de Hasse para un 2-politopo finito e infinito.

Ejemplo 3.4. *A continuación listamos ejemplos de objetos geoméricos que inducen poliedros abstractos.*

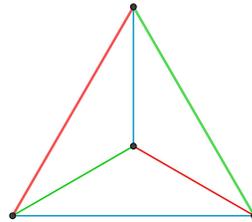
- a) *Los poliedros convexos inducen poliedros abstractos si se identifica cada uno con el orden parcial determinado por los vértices, aristas y caras del poliedro, ordenado por la contención (ver Figura 3.1 para el caso del tetraedro).*
- b) *Las teselaciones del plano inducen poliedros abstractos ordenando los vértices, aristas y teselas por contención. Como ejemplo particular, consideremos la*

teselación arquimediana cuyas teselas son triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares, a la cual denotamos por (3.4.6.4) ya que en cada vértice se encuentran las figuras (triángulo, cuadrado, hexágono, cuadrado) (Figura 3.9 inciso a)).

- c) Toda gráfica cúbica 3-coloreable propiamente por aristas, es el 1-esqueleto de un poliedro abstracto considerando como 2-caras las componentes conexas que resultan al eliminar cualquier clase cromática (ver [1]). En la siguiente figura se muestra una coloración propia de la gráfica completa K_4 que induce un poliedro con tres caras, cada una de las cuales es un cuadrilátero y con tres caras alrededor de cada vértice (Figura 3.9 inciso b)).



a) Teselación (3.4.6.4).



b) Una 3-coloración propia de K_4 .

Figura 3.9: Ejemplos de objetos geométricos cuyas latiz de caras inducen poliedros abstractos.

Otro punto importante dentro de la teoría de estudio de los polítopos, así como de las estructuras combinatorias, es saber cuando dos de ellos son “iguales”. Diremos que dos polítopos \mathcal{P} y \mathcal{Q} son **isomorfos** si existe una biyección $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ tal que, $F \leq G$ en \mathcal{P} si y sólo si $f(F) \leq f(G)$ en \mathcal{Q} . En este caso escribimos $\mathcal{P} \cong \mathcal{Q}$. Más adelante (y abusando de la notación) escribiremos $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$ si los polítopos son isomorfos y congruentes (en el sentido geométrico). Como ejemplos, podemos observar que la figura de vértice del tetraedro (Figura 3.4) y la latiz de caras de un triángulo son 2-polítopos isomorfos y por otro lado, el poliedro descrito en el inciso c) del Ejemplo 3.4 es isomorfo al hemicubo (Figura 3.2 inciso b)).

En este trabajo son de particular importancia los poliedros regulares, que en otras palabras, son aquellos que tienen el mayor grado de simetría, para lo cual es importante introducir el concepto de simetría de manera combinatoria. Para ese fin, presentamos primero algunas definiciones y resultados.

Definición 3.2. Si \mathcal{P} es un n -politopo, un **automorfismo** de \mathcal{P} es un isomorfismo $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$. El **grupo de automorfismos** de \mathcal{P} , denotado por $\Gamma(\mathcal{P})$, es el conjunto

$$\Gamma(\mathcal{P}) = \{\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \mid \alpha \text{ es automorfismo}\}$$

dotado de la composición como operación.

Observemos que para el caso de los poliedros convexos, las simetrías (isometrías del espacio que preservan al poliedro) se traducen en automorfismos del orden parcial correspondiente, de modo que los automorfismos son una generalización combinatoria de las simetrías.

Por otro lado, también notemos que $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa en $\mathbf{F}(\mathcal{P})$ por $\alpha(\{F_0, \dots, F_{n-1}\}) = \{\alpha(F_0), \dots, \alpha(F_{n-1})\}$ para $\{F_0, \dots, F_{n-1}\} \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$ y $\alpha \in \Gamma(\mathcal{P})$. A continuación daremos algunos resultados acerca de esta acción.

Lema 3.1. Si α es un automorfismo de un politopo \mathcal{P} y $\Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$, entonces

$$\alpha(\Phi^i) = (\alpha(\Phi))^i,$$

para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Prueba. Sea $\Phi := \{F_{-1}, F_0, \dots, F_{i-1}, F_i, F_{i+1}, \dots, F_n\}$ una bandera de \mathcal{P} , entonces

$$\alpha(\Phi) = \{\alpha(F_{-1}), \dots, \alpha(F_{i-1}), \alpha(F_i), \alpha(F_{i+1}), \dots, \alpha(F_n)\}.$$

Sea $F'_i \neq F_i$ la i -cara tal que $F_{i-1} < F'_i < F_{i+1}$.

Entonces $\Phi^i = \{F_{-1}, F_0, \dots, F_{i-1}, F'_i, F_{i+1}, \dots, F_n\}$ y

$$\alpha(\Phi^i) = \{\alpha(F_{-1}), \dots, \alpha(F_{i-1}), \alpha(F'_i), \alpha(F_{i+1}), \dots, \alpha(F_n)\}.$$

De esto tenemos que si $\alpha(\Phi)$ y $\alpha(\Phi^i)$ fueran banderas i -adyacentes entonces, como comparten todas las caras de rango distinto a 1, $\alpha(F_i) = \alpha(F'_i)$ y de ahí, $F_i = F'_i$ ya que α es biyección.

Por lo tanto, $\alpha(\Phi^i) = (\alpha(\Phi))^i$.

□

Recordemos que toda acción de un grupo G en un conjunto X induce una representación de G como permutaciones de X , es decir, un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow S_X$. Si φ es inyectivo, la representación es **fiel** (también se dice que G actúa **fielmente** en X); en tal situación, G es isomorfo a un subgrupo del grupo de permutaciones de X . Observe que la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ en $\mathbf{F}(\mathcal{P})$ es fiel, pues si un automorfismo fija a todas las banderas, entonces fija a todos los elementos de \mathcal{P} y por ser biyección, es la identidad. Además, en virtud del Lema 3.1, cada automorfismo α induce una permutación $\bar{\alpha}$ de banderas que preserva adyacencia, no es difícil probar que esto es de hecho una equivalencia, es decir, que toda permutación de banderas que preserve adyacencia induce un automorfismo.

La siguiente proposición nos da una condición más fuerte que fidelidad acerca de la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ en $\mathbf{F}(\mathcal{P})$.

Proposición 3.2. *Si \mathcal{P} es un polítopo, entonces $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa libremente en $\mathbf{F}(\mathcal{P})$, es decir, $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi) = \{\iota\}$ para toda $\Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$, con ι el automorfismo identidad.*

Prueba. Supongamos que α es un automorfismo de \mathcal{P} que fija una bandera Φ . Sea Ψ una bandera arbitraria. Por P3, existe una sucesión de banderas $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi$ tal que Φ_{j-1} y Φ_j son i_j -adyacentes para cada $j \in \{1, \dots, k\}$; probemos que α fija a Ψ por inducción sobre k .

Si $k = 1$ entonces Φ y Ψ son adyacentes y el resultado se sigue del Lema 3.1.

Supongamos el resultado para toda $l < k$. Por hipótesis de inducción $\alpha(\Phi_{k-1}) = \Phi_{k-1}$, luego

$$\alpha(\Psi) = \alpha(\Phi_{k-1}^{i_k}) = (\alpha(\Phi_{k-1}))^{i_k} = \Phi_{k-1}^{i_k} = \Psi.$$

□

De la Proposición 3.2 obtenemos inmediatamente el siguiente resultado:

Corolario 3.3. *Si \mathcal{P} es un polítopo, $\Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$ y $\alpha \in \Gamma(\mathcal{P})$ entonces, α está determinado por la imagen de Φ .*

Los resultados anteriores muestran que los automorfismos en polítopos, generalizan el comportamiento de las simetrías en poliedros convexos y en teselaciones del plano, donde las banderas pueden ser pensadas como triángulos determinados por el vértice,

el punto medio de la arista y el centro de la cara. En el caso de los poliedros convexos, la acción en las banderas es libre pues si una isometría de \mathbb{E}^3 fija una bandera, entonces fija 4 puntos no-coplanares (la bandera y el centro del poliedro), de modo que debe fijar todo punto. Algo similar sucede en las teselaciones del plano, pues si una isometría de \mathbb{E}^2 fija una bandera, entonces fija 3 puntos no colineales.

En virtud del Corolario 3.3, dadas dos banderas Φ y Ψ existe a lo más un automorfismo $\alpha \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\alpha(\Phi) = \Psi$. Intuitivamente, un poliedro es más simétrico entre más automorfismos tiene, lo cual motiva la definición de politopo regular que usaremos en este trabajo.

Definición 3.3. *Un politopo \mathcal{P} es **regular** si $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en $\mathbf{F}(\mathcal{P})$.*

La acción transitiva quiere decir que para cualesquiera dos banderas Φ y Ψ , existe $\alpha \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\alpha(\Phi) = \Psi$. En otras palabras, hay una sola órbita en banderas bajo la acción del grupo $\Gamma(\mathcal{P})$.

Ejemplo 3.5. *Ejemplos clásicos de poliedros regulares abstractos sin argumentar la regularidad.*

- i) *Los sólidos platónicos y los poliedros de Kepler-Poinsot son regulares en el sentido abstracto. (Para ver una imagen de estos objetos geoméricos consultar la Sección 5.1).*
- ii) *Las teselaciones del plano cuyas tesalas son únicamente de cuadrados o de triángulos equiláteros o de hexágonos regulares (Figura 3.11).*
- iii) *El hemicubo (Figura 3.2 b)).*

Es importante mencionar que en el contexto de los poliedros abstractos no es suficiente que las caras y las figuras de vértice de un poliedro \mathcal{P} sean todas congruentes para que \mathcal{P} sea regular, como lo podemos observar en el mapa de tipo $\{4, 4\}_{(2,1)}$ en el toro, en el que sus caras y figuras de vértice son cuadrados y el poliedro no es regular en nuestro sentido. Es posible observar que las banderas Φ y Φ^1 de la Figura 3.10 están en distan órbitas; para ver una prueba de esta afirmación sugerimos consultar [41, §1D].

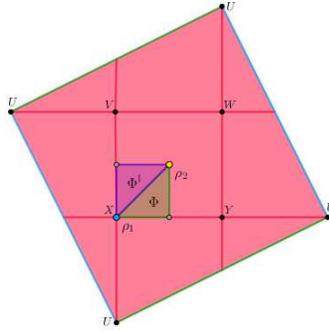


Figura 3.10: Mapa del tipo $\{4, 4\}_{(2,1)}$ en el toro.

La transitividad en banderas del grupo de automorfismo de un polítopo regular \mathcal{P} implica inmediatamente la transitividad de $\Gamma(\mathcal{P})$ en las caras de cada rango. En particular, $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en los vértices y facetas de \mathcal{P} . En general, para cualquier tipo de cadena de \mathcal{P} , el grupo $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en el conjunto de todas las cadenas de este tipo. Sin embargo, la transitividad de cualquier tipo de cadenas de \mathcal{P} , con excepción de las banderas, no implica la regularidad de \mathcal{P} . Por ejemplo, los grupos de mapas quirales en superficies actúan transitivamente sobre las cadenas de cada tipo que no son banderas. Sin embargo, estos mapas no son regulares en nuestro sentido [41, §6G].

Por los argumentos expuestos en el párrafo anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.4. *Sea \mathcal{P} un n -polítopo regular. Entonces, todas las secciones de \mathcal{P} son polítopos regulares y cualesquiera dos secciones que están definidas por caras del mismo rango son isomorfas. En particular, \mathcal{P} tiene facetas isomorfas y figuras de vértice isomorfas.*

A continuación exponemos algunos resultados concernientes al grupo de automorfismos de un polítopo regular.

Teorema 3.5. *Un polítopo \mathcal{P} es regular si y sólo si para alguna bandera Φ y para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$ existe un automorfismo σ_i de \mathcal{P} tal que*

$$\sigma_i(\Phi) = \Phi^i.$$

Además, cada automorfismo σ_i es una involución, es decir, $\sigma_i^2 = \iota$.

Prueba.

\Rightarrow] Supongamos que \mathcal{P} es regular, Φ una bandera de \mathcal{P} y sea $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Dado que $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en $\mathbf{F}(\mathcal{P})$, existe un automorfismo σ_i de tal forma que $\sigma_i(\Phi) = \Phi^i$. Observemos que $\sigma_i^2(\Phi) = \sigma_i(\Phi^i) = (\sigma_i(\Phi))^i = \Phi$ y en virtud de la Proposición 3.2, $\sigma_i^2 = \iota$.

\Leftarrow] Ahora supongamos que para alguna bandera Φ y para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$ existe un automorfismo σ_i de \mathcal{P} tal que $\sigma_i(\Phi) = \Phi^i$. Sea Ψ una bandera de \mathcal{P} , probemos que existe un automorfismo α de tal forma que $\alpha(\Phi) = \Psi$. Por P3, existe una sucesión de banderas adyacentes

$$\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi.$$

Procedamos por inducción sobre k . Si $k = 1$ entonces Φ y Ψ son i -adyacentes para alguna $i \in \{0, \dots, n-1\}$ y entonces $\sigma_i(\Phi) = \Psi$. Supongamos cierto el resultado para toda $j < k$, entonces, por hipótesis de inducción existe un automorfismo β tal que $\beta(\Phi) = \Phi_{k-1}$. Sea $i \in \{0, \dots, n-1\}$ de tal forma que Φ_{k-1} y Ψ son i -adyacentes. Tomemos $\alpha = \beta\sigma_i$ y tenemos

$$\alpha(\Phi) = \beta\sigma_i(\Phi) = \beta(\Phi^i) = (\beta(\Phi))^i = \Phi_{k-1}^i = \Psi.$$

□

El siguiente ejemplo ilustra la regularidad de las teselaciones del plano en virtud del Teorema 3.5.

Ejemplo 3.6. *Las teselaciones del plano con cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares son poliedros abstractos regulares, pues basta considerar los automorfismos inducidos por las reflexiones indicadas en la siguiente Figura 3.11:*

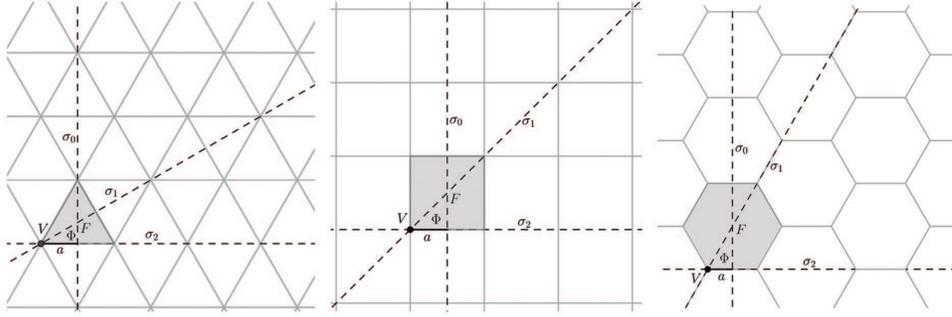


Figura 3.11: Las teselaciones regulares del plano y sus generadores distinguidos con respecto a una bandera Φ .

De la prueba del Teorema 3.5 se puede deducir que los automorfismos (involuciones) $\{\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}\}$ generan a $\Gamma(\mathcal{P})$. Llamaremos a dichos automorfismos **generadores distinguidos** respecto a la **bandera base** Φ .

A continuación observaremos la regularidad de los polígonos con base en el teorema anterior, para ello consideremos un 2-politopo finito \mathcal{P} tal que $\mathcal{F}_0 = \{V_0, V_1, \dots, V_{n-1}\}$ y $\mathcal{F}_1 = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ con la siguiente relación de incidencia:

$$V_{n-1} \leq a_{n-1} \text{ y } V_0 \leq a_{n-1}.$$

$$V_i \leq a_i \text{ y } V_{i+1} \leq a_i \text{ con } i \in \{0, \dots, n-2\}.$$

Tomemos como bandera base $\Phi = (V_0, a_0)$. Sean σ_0 y σ_1 definidas de la siguiente forma sobre \mathcal{F}_0 y \mathcal{F}_1 , respectivamente. Por claridad en la notación, sólo abordaremos los cálculos sobre los índices. También tomaremos en cuenta la paridad de n .

Si n es par:

- σ_0 actuará sobre el conjunto de los índices de los vértices como la siguiente permutación:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j & j+1 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & n-1 & \dots & j+1 & j & \dots & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ con } j = \frac{n}{2}.$$

- σ_0 actuará sobre el conjunto de los índices de las aristas como la siguiente permutación:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & n-1 & n-2 & \dots & j+1 & j & j-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } j = \frac{n}{2}.$$

- σ_1 actuará sobre el conjunto de los índices de los vértices como la siguiente permutación:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & n-1 & n-2 & \dots & j+1 & j & j-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } j = \frac{n}{2}.$$

- σ_1 actuará sobre el conjunto de los índices de las aristas como la siguiente permutación:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j & j+1 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 1 & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & j+1 & j & \dots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } j = \frac{n}{2} - 1.$$

Si n es impar:

- σ_0 actuará sobre el conjunto de los índices de los vértices como la siguiente permutación:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & n-1 & \dots & j+1 & j & j-1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ con } j = \frac{n+1}{2}.$$

- σ_0 actuará sobre el conjunto de los índices de las aristas como la siguiente permutación:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j & j+1 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & n-1 & n-2 & \dots & j+1 & j & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } j = \frac{n-1}{2}.$$

- σ_1 actuará sobre el conjunto de los índices de los vértices como la siguiente permutación:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j & j+1 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & n-1 & n-2 & \dots & j+1 & j & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } j = \frac{n-1}{2}.$$

- σ_1 actuará sobre el conjunto de los índices de las aristas como la siguiente permutación:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & j+1 & j & j-1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } j = \frac{n+1}{2} - 1.$$

Es claro que σ_0 y σ_1 son biyecciones de los conjuntos \mathcal{F}_0 y \mathcal{F}_1 respectivamente. Más aún, la relación de incidencia entre los elementos se preserva bajo estas biyecciones tal como se definió y también podemos notar que son involuciones. Por lo que, $\{\sigma_0, \sigma_1\} \subset \Gamma(\mathcal{P})$ y son tales que $\sigma_0(\Phi) = (V_1, a_0) = \Phi^0$ y $\sigma_1(\Phi) = (V_0, a_{n-1}) = \Phi^1$. Por lo tanto, en virtud del Teorema 3.5 tenemos que todo 2-politopo finito es regular.

Un n -politopo \mathcal{P} , $n \geq 2$, se dice que es **equivelar** si para cada $j \in \{1, \dots, n-1\}$, existe un entero p_j , tal que para cada bandera $\Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$ la sección $(\Phi)_{j+1}/(\Phi)_{j-2}$ es un p_j -ágono. En este caso, decimos que \mathcal{P} tiene **tipo de Schläfli** (o algunas veces solo el tipo) $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$. Inmediatamente de la definición tenemos que todos

los polígonos son equivelares; además, un p -ágono tiene el tipo Schläfli $\{p\}$ y un 3-politopo (poliedro) regular tiene tipo de Schläfli $\{p, q\}$ si todas sus caras son p -ágonos y hay q alrededor de cada vértice. Aunado a ello, extendemos esta notación con fines geométricos con base en la notación introducida por Coxeter en [10] y posteriormente por McMullen y Schulte en [40], de ahí tenemos que el aperígono tiene tipo de Schläfli $\{\infty\}$, un segmento de recta $\{\}$ y un polígono estrellado $\left\{\frac{p}{q}\right\}$ con p y q primos relativos.

Una consecuencia de la Proposición 3.4 es que un poliedro regular es equivelar. Además si \mathcal{P} es un politopo con tipo $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$, entonces los generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{P})$ satisfacen lo siguiente:

$$(\sigma_i \sigma_j)^{p_{ij}} = \iota \text{ para } \{i, j\} \subseteq \{0, \dots, n-1\},$$

$$\text{donde } p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ p_j & \text{si } j = i + 1 \\ 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La definición clásica de poliedro convexo regular siempre ha incluido alguna noción de congruencia y regularidad para las caras, así como para la configuración de caras alrededor de cada vértice. De hecho, en [9, §2.1], Coxeter define un poliedro regular como aquel que tiene caras y figuras de vértice geoméricamente regulares isomorfas. Notemos que por la Proposición 3.4, la Definición 3.3 preserva esta noción clásica de regularidad. Así podemos decir que las caras y las figuras de vértice son regulares (en el sentido de que tienen máxima simetría posible), preservando la noción de regularidad de Coxeter.

Por otro lado, notemos que el tipo de Schläfli determina por completo a los poliedros regulares convexos. Más aún, si \mathcal{P} es un poliedro convexo que tiene tipo de Schläfli, entonces \mathcal{P} es (combinatoriamente) regular (ver [41, §1B]). En virtud de este resultado, normalmente se denota a los poliedros regulares convexos con sus tipos de Schläfli; esta convención será usada más adelante en este trabajo. En general, existen poliedros abstractos equivelares que no son regulares, como el ejemplo de la Figura 3.10 que tiene tipo de Schläfli $\{4, 4\}$ pero no es regular.

Observe que si $\Gamma(\mathcal{P})$ es el grupo de automorfismos de un poliedro regular \mathcal{P} de tipo de Schläfli $\{p, q\}$ y $\Phi = \{V, a, F\}$ es la bandera base, entonces los generadores

distinguidos σ_0 , σ_1 y σ_2 con respecto de Φ satisfacen las relaciones:

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_0\sigma_2)^2 = (\sigma_0\sigma_1)^p = (\sigma_1\sigma_2)^q = \iota. \quad (3.3)$$

Además, se puede probar que

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(F) &= \langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle \cong D_p, \\ \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(a) &= \langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle \cong C_2 \times C_2, \\ \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(V) &= \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \cong D_q, \end{aligned} \quad (3.4)$$

con D_p y D_q los grupos diédricos en p y q puntos, respectivamente, y C_2 el grupo cíclico de orden 2 (para confirmar esto se puede ver [41, §2B]).

Por otro lado, tengamos presente la siguiente definición que será de suma importancia dentro de este trabajo. Un politopo \mathcal{P} se dice que es de k -**órbitas** (en banderas) si hay k órbitas de banderas bajo la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$. En particular, nuestra atención se centrará en el caso de politopos de 2-órbitas, para los cuales vale el siguiente enunciado. Si $I \subseteq \{0, \dots, n-1\}$ es tal que banderas i -adyacentes están en la misma órbita para $i \in I$ y en diferentes órbitas para $i \notin I$, entonces en esta situación decimos que \mathcal{P} es de **clase** 2_I . Veamos que esto está bien definido.

Primero observemos que por la Proposición 3.2, dado un politopo \mathcal{P} con 2 órbitas en banderas, digamos \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 y sea $\Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$ con $\Phi \in \mathcal{O}_1$. Si $\Phi^i \in \mathcal{O}_2$ para alguna $i \in \{0, \dots, n-1\}$, entonces para cualquier bandera $\Psi \in \mathcal{O}_1$ tenemos que $\Psi^i \in \mathcal{O}_2$. Esto se debe a que, si $\Psi \in \mathcal{O}_1$ entonces, existe $\sigma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\sigma(\Phi) = \Psi$. Por lo tanto, $\sigma(\Phi^i) = \sigma(\Phi)^i = \Psi^i$, lo que implica que Φ^i y Ψ^i estén en la misma órbita \mathcal{O}_2 .

Ahora, sea \mathcal{P} un politopo 2-órbitas y sea $\Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$. Si Φ^i está en la misma órbita que Φ para alguna $i \in \{0, \dots, n-1\}$, entonces Ψ y Ψ^i están en la misma órbita, para cualquier bandera Ψ de \mathcal{P} . Esto es debido, por un lado, a que si Ψ esté en la misma órbita que Φ , el resultado se sigue de nuestra observación anterior. Por otro lado, Ψ está en una órbita diferente de Φ , supongamos que Ψ^i está en la misma órbita que Φ . Nuevamente, nuestra observación anterior implica que $\Psi = (\Psi^i)^i$ está en la misma órbita que Φ , lo que es una contradicción. Por lo tanto, Ψ^i debe estar en una órbita diferente a Φ pero como solo hay dos órbitas de banderas entonces, Ψ^i está en la misma órbita que Ψ .

Se dice que un polítopo \mathcal{P} es **quiral** si hay dos órbitas de banderas bajo la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ y las banderas adyacentes están en órbitas diferentes, es decir, \mathcal{P} es de clase 2_\emptyset o simplemente de clase 2. En este caso, dada una bandera $\Phi = \{F_{-1}, \dots, F_n\}$ de \mathcal{P} , existen automorfismos $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$, que también se llaman generadores distinguidos respecto a la bandera Φ , tales que cada γ_i fija todas las caras en $\Phi \setminus \{F_{i-1}, F_i\}$ y permuta cíclicamente las $(i-1)$ - e i -caras de \mathcal{P} en la sección de rango 2 de F_{i+1}/F_{i-2} .

De las observaciones anteriores, si \mathcal{P} es un poliedro de 2-órbitas podemos resumir lo siguiente:

- \mathcal{P} está en clase 2 si banderas adyacentes de \mathcal{P} están en distintas órbitas.
- \mathcal{P} está en clase $2_{\{i\}}$, $i \in \{0, 1, 2\}$ si cualquier bandera de \mathcal{P} y su i -adyacente están en la misma órbita, pero cualquier bandera y su j -adyacente están en distintas órbitas, para $j \neq i$.
- \mathcal{P} está en clase $2_{\{i,j\}}$, $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, 2\}$ e $i \neq j$ si cualquier bandera de \mathcal{P} y sus i - y j -adyacentes están en la misma órbita, pero para $k \neq \{i, j\}$ cualquier bandera y su k -adyacente están en distintas órbitas.

Ejemplo 3.7. A continuación mostramos algunos ejemplos de poliedros pertenecientes a cada una de estas clases. Esta afirmación se deduce de los resultados expuestos en el artículo [30].

- El mapa de tipo $\{4, 4\}_{(2,1)}$ en el toro es quirale (es decir, de clase 2) Figura 3.10.
- La teselación de triángulos equiláteros y hexágonos regulares que denotaremos por $(3.6)^2$ (Figura 3.12) es de clase $2_{\{0,1\}}$.

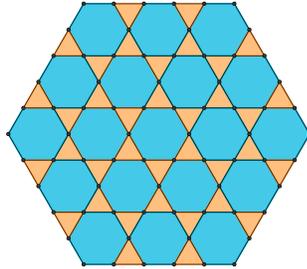


Figura 3.12: Teselación $(3.6)^2$ en el plano.

- El dual de $(3.6)^2$ (Figura 3.13) es de clase $2_{\{1,2\}}$.

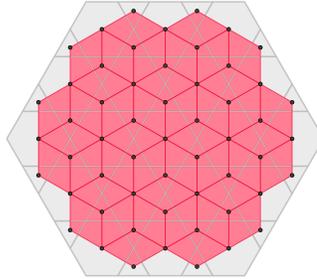


Figura 3.13: Dual de la teselación $(3.6)^2$ en el plano.

- El petrial de $(3.6)^2$ (Figura 3.14) es de clase $2_{\{1\}}$.

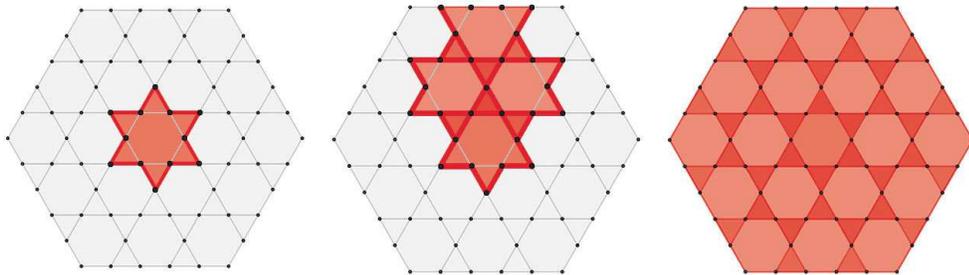


Figura 3.14: Petrie de la teselación $(3.6)^2$ en el plano. De izquierda a derecha tenemos, vista de un polígono de Petrie (un dodecágono en líneas gruesas), su "pegado" alrededor de cada vértice y parte de la teselación.

- El mapa de tipo $\{4, 4\}_{(3,0),(0,2)}$ en el toro (Figura 3.15) es de clase $2_{\{0,2\}}$.

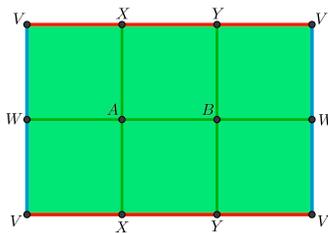


Figura 3.15: Mapa de tipo $\{4, 4\}_{(3,0),(0,2)}$ en el toro.

- *El petrial del mapa en el toro de tipo $\{4, 4\}_{(3,1)}$ (Figura 3.16) es de clase $2_{\{0\}}$.*

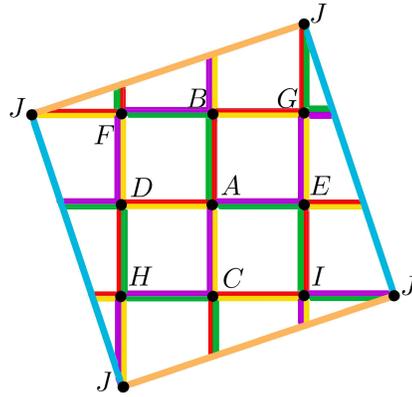


Figura 3.16: Poliedro de tipo $\{10, 4\}$ como mapa en una superficie. Las 2-caras de este poliedro son los zigzags que se muestran en colores.

- *El dual del petrial del mapa en el toro de tipo $\{4, 4\}_{(3,1)}$ (Figura 3.17) es de clase $2_{\{2\}}$.*

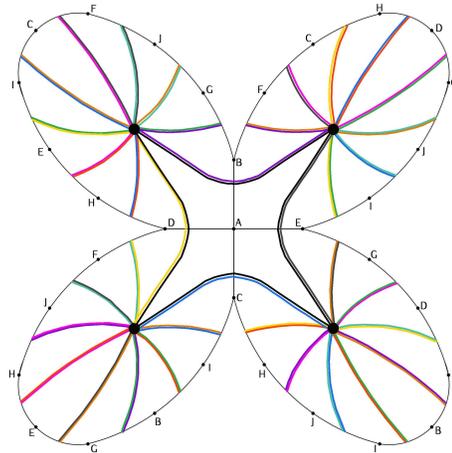


Figura 3.17: Poliedro de tipo $\{4, 10\}$ en una superficie. Las 2-caras de este poliedro son cuadrados que se muestran en colores.

Una operación importante dentro de nuestro estudio será el medial de un poliedro, el cual definiremos de la siguiente manera.

Definición 3.4. Sea \mathcal{P} un poliedro. El **medial** de \mathcal{P} (lo denotaremos $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$), es un COPO con i -caras $\mathcal{F}_i(\mathbf{Med}(\mathcal{P}))$ que se definen a continuación:

$$i) \mathcal{F}_0(\mathbf{Med}(\mathcal{P})) = \mathcal{F}_1(\mathcal{P}).$$

$$ii) \mathcal{F}_1(\mathbf{Med}(\mathcal{P})) = \{ \{(\Phi)_0, (\Phi)_2\} \mid \Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P}) \}.$$

$$iii) \mathcal{F}_2(\mathbf{Med}(\mathcal{P})) = \mathcal{F}_0(\mathcal{P}) \cup \mathcal{F}_2(\mathcal{P}).$$

El orden parcial entre las caras $F_i \in \mathcal{F}_i(\mathbf{Med}(\mathcal{P}))$ esta dado como:

$$F_0 \leq_{\mathbf{Med}(\mathcal{P})} F_1 \iff \{F_0\} \cup F_1 \in \mathbf{F}(\mathcal{P}),$$

$$F_1 \leq_{\mathbf{Med}(\mathcal{P})} F_2 \iff F_2 \in F_1 \text{ y}$$

$$F_0 \leq_{\mathbf{Med}(\mathcal{P})} F_2 \iff F_0 \leq_{\mathcal{P}} F_2 \text{ o } F_2 \leq_{\mathcal{P}} F_0.$$

De la definición tenemos que, cualquier bandera $\Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$ induce exactamente dos banderas adyacentes de $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ relacionadas con Φ :

$$\Psi := \{(\Phi)_1, \{(\Phi)_0, (\Phi)_2\}, (\Phi)_0\} \text{ y } \Psi^2 := \{(\Phi)_1, \{(\Phi)_0, (\Phi)_2\}, (\Phi)_2\}.$$

Recíprocamente, si $\Psi \in \mathbf{F}(\mathbf{Med}(\mathcal{P}))$, entonces $\{(\Psi)_0\} \cup (\Psi)_1 \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$. Denotemos a esta bandera por Φ , así tenemos que $(\Psi)_0 = (\Phi)_1$, $(\Psi)_1 = \{(\Phi)_0, (\Phi)_2\}$ y $(\Psi)_2 = (\Phi)_0$ o $(\Phi)_2$ (Figura 3.18).

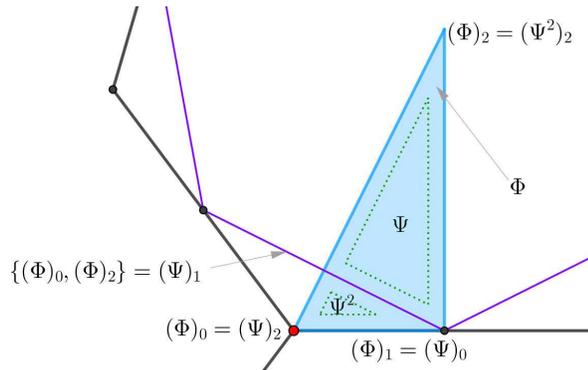


Figura 3.18: Banderas en el medial.

Otro punto a destacar es que el medial de un poliedro también es un poliedro. Las propiedades P1 y P2 son inmediatas de la definición de medial. Para ver la propiedad P4 analizaremos cada una de las secciones F_{i+1}/F_{i-1} con $i \in \{0, 1, 2\}$.

- Sección F_1/F_{-1} . Si F_1 es una 1-cara de $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$, entonces $F_1 = \{(\Phi)_0, (\Phi)_2\}$ para alguna $\Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$. Por P4 en \mathcal{P} , las únicas dos 1-caras de \mathcal{P} que completan a $\{(\Phi)_0, (\Phi)_2\}$ a una bandera son $(\Phi)_1$ y $(\Phi^1)_1$. Además, por definición del orden en $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$, tenemos que $F_0 \leq_{\mathbf{Med}(\mathcal{P})} F_1$ si y sólo si $\{F_0\} \cup F_1 \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$. Por lo tanto, hay exactamente dos elementos de rango 0 en F_1/F_{-1} .

- Sección F_2/F_0 .

Sean F_0 , F_1 y F_2 una 0-cara, una 1-cara y una 2-cara de $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$, respectivamente. Supongamos además que $F_0 \leq_{\mathbf{Med}(\mathcal{P})} F_2$ y por tanto se tiene $\{F_0, F_2\} \subset \Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$, por lo que $F_0 = (\Phi)_1$ y $F_2 = (\Phi)_0$ o $F_2 = (\Phi)_2$.

Supongamos que $F_0 \leq_{\mathbf{Med}(\mathcal{P})} F_1 \leq_{\mathbf{Med}(\mathcal{P})} F_2$ y $F_1 = \{(\Psi)_0, (\Psi)_2\}$ para alguna $\Psi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$, como tenemos que $\{F_0\} \cup F_1 \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$, entonces $\{(\Psi)_0, (\Phi)_1, (\Psi)_2\} \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$. Por otro lado, como $(\Psi)_0 \leq_{\mathcal{P}} (\Phi)_1$ por P4 en \mathcal{P} tenemos $(\Psi)_0 = (\Phi)_0$ o $(\Psi)_0 = (\Phi^0)_0$ y como $(\Phi)_1 \leq_{\mathcal{P}} (\Psi)_2$ por P4 en \mathcal{P} tenemos $(\Psi)_2 = (\Phi)_2$ o $(\Psi)_2 = (\Phi^2)_2$.

Además $\{F_1, F_2\} \subset \mathbf{F}(\mathbf{Med}(\mathcal{P}))$ por lo que:

Si $F_2 = (\Phi)_0$, entonces $(\Psi)_0 = (\Phi)_0$ y $F_1 = \{(\Phi)_0, (\Psi)_2\}$, así $\{(\Psi)_0, (\Phi)_1, (\Psi)_2\}$ debe ser una de las banderas $\{(\Phi)_0, (\Phi)_1, (\Phi)_2\}$ o $\{(\Phi)_0, (\Phi)_1, (\Phi^2)_2\}$ y por lo tanto $F_1 = \{(\Phi)_0, (\Phi)_2\}$ o $F_1 = \{(\Phi)_0, (\Phi^2)_2\}$.

Si $F_2 = (\Phi)_2$, entonces $(\Psi)_2 = (\Phi)_2$ y $F_1 = \{(\Psi)_0, (\Phi)_2\}$, así $\{(\Psi)_0, (\Phi)_1, (\Psi)_2\}$ debe ser una de las banderas $\{(\Phi)_0, (\Phi)_1, (\Phi)_2\}$ o $\{(\Phi^0)_0, (\Phi)_1, (\Phi)_2\}$ y por lo tanto $F_1 = \{(\Phi)_0, (\Phi)_2\}$ o $F_1 = \{(\Phi^0)_0, (\Phi)_2\}$.

- Sección F_3/F_1 . Si F_1 es una 1-cara de $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$, entonces $F_1 = \{(\Phi)_0, (\Phi)_2\}$ para alguna $\Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$. Sea $F_2 \in F_3/F_1$, entonces por definición $F_2 = G \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P}) \cup \mathcal{F}_2(\mathcal{P})$ y por definición del orden en $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$, tenemos que $F_1 \leq_{\mathbf{Med}(\mathcal{P})} F_2$ si y sólo si $F_2 \in F_1$, es decir, $F_2 \in \{(\Phi)_0, (\Phi)_2\}$. De modo que, hay exactamente dos elementos de rango 2 en F_3/F_1 .

Para la propiedad P3 mostraremos que $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ es fuertemente conexo (lo que es equivalente a ser fuertemente conexo por banderas [41, pág. 24]), probando que cada una de sus secciones es conexas. La conexidad de $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ se puede deducir directamente de la conexidad de \mathcal{P} . Las secciones de rango 1 son conexas por definición y las secciones de rango 2 de $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ son sus caras y figuras de vértice. Así, las caras de $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ son conexas. Además, los vértices de $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ son las aristas de \mathcal{P} . Dada una arista F_1 de \mathcal{P} , el conjunto $\{H \in \mathcal{P} \mid H \leq F_1 \text{ o } F_1 \leq H\}$ corresponde a un 4-ágono, por lo que las figuras de vértice de $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ son conexas (Figura 3.19).

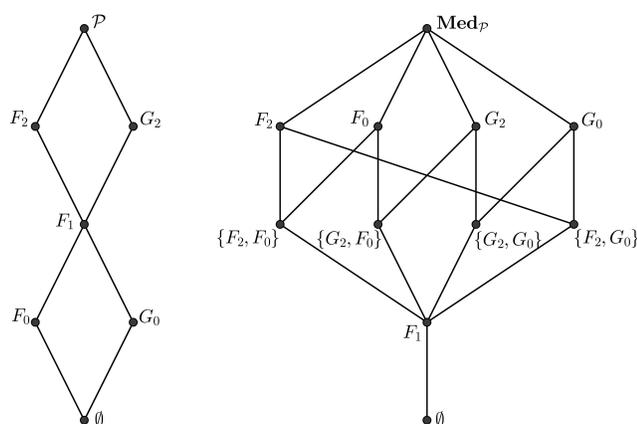


Figura 3.19: Caras incidentes a una arista en el medial.

En los puntos anteriores se dió la construcción del $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ de forma combinatoria, para nuestros propósitos también tomaremos en cuenta la construcción geométrica de este objeto de la siguiente forma.

- i) Los vértices de $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ son los puntos medios de las aristas de \mathcal{P} .
- ii) Las aristas de $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ son los segmentos de recta que unen los puntos medios de aristas consecutivas de cada cara en \mathcal{P} .
- iii) Las caras de $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ son los polígonos delimitados por las aristas del medial en una cara de \mathcal{P} o por las aristas del medial construidas alrededor de un vértice de \mathcal{P} . Notemos que habrá dos tipos de caras, las que provienen de las caras de \mathcal{P} y las que provienen de remover cada vértice de \mathcal{P} .

Veamos un ejemplo de forma gráfica de esta construcción (geométrica) con el tetraedro regular (Figura 3.20) sin justificar ésta.

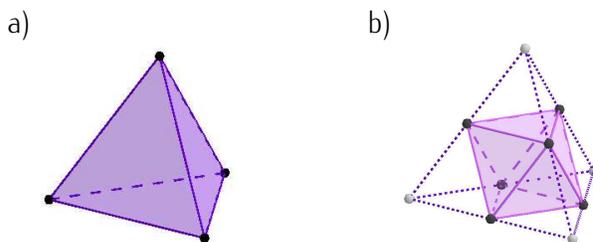
Ejemplo 3.8.

Figura 3.20: El tetraedro \mathcal{P} (inciso a)) y su medial $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ el octaedro (inciso b)), ambos en su forma geométrica.

3.2. Polítopos hereditarios

Como lo mencionamos anteriormente, los sólidos platónicos y arquimedianos forman una clase natural de objetos altamente simétricos. El grupo de simetría de cada uno de estos poliedros actúa de manera transitiva en sus vértices. Si restringimos a aquellos sólidos cuyos grupos de simetría también actúan transitivamente en sus aristas, solo permanecen los poliedros regulares, el cuboctaedro y el icosidodecaedro. Todos estos polítopos tienen la propiedad distintiva de que cada simetría de sus caras se extiende a una simetría del sólido. De hecho, si buscamos poliedros “hereditarios” convexos (aquellos que tienen esta propiedad de heredar todas las simetrías de sus caras) con caras regulares, encontramos que la transitividad de vértices y aristas está implícita (como veremos más adelante).

En esta sección enlistaremos conceptos y propiedades básicas de los polítopos (combinatoriamente) hereditarios para distinguirlos de los geoméricamente hereditarios que estudiaremos más adelante. En el desarrollo de esta sección centraremos gran parte de nuestra atención a los 3-polítopos hereditarios, es decir, a los poliedros hereditarios tomando como referencia el artículo [36].

Antes de proceder a la definición de polítopo hereditario notemos lo siguiente:

Proposición 3.6. *Sea \mathcal{P} un n -polítopo.*

- a) *Si $-1 \leq i < j \leq n$ y $\Omega = \{F_{-1}, F_0, \dots, F_{i-1}, F_i, F_j, F_{j+1}, \dots, F_n\}$ es una cadena de \mathcal{P} , entonces $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Omega)$ es isomorfo a un subgrupo de $\Gamma(F_j/F_i)$.*

b) Si F_0 es un vértice de \mathcal{P} , entonces $Stab_{\Gamma(\mathcal{P})}(F_0)$ es isomorfo a un subgrupo de $\Gamma(F_n/F_0)$. De igual forma, si F es una faceta, entonces $Stab_{\Gamma(\mathcal{P})}(F)$ es isomorfo a un subgrupo de $\Gamma(F/F_{-1})$, que por abuso de notación simplemente lo denotaremos como $\Gamma(F)$.

Prueba. Para a), observemos que $Stab_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Omega)$ actúa fielmente en la sección F_j/F_i . Sea $\Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$ tal que $\Omega \subseteq \Phi$. Si $\alpha \in Stab_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Omega)$ actúa trivialmente en F_j/F_i , entonces α fija a Φ y por la Proposición 3.2, $\alpha = \iota$. Es decir, la acción es fiel. Por lo tanto, $Stab_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Omega)$ es isomorfo a un subgrupo de $\Gamma(F_j/F_i)$.

Para la parte b), notemos que son dos casos particulares del caso a).

□

Con este resultado tenemos soporte para poder definir lo que será un politopo hereditario.

Definición 3.5. Sea \mathcal{P} un n -politopo. Diremos que \mathcal{P} es un **politopo hereditario**, si para cada faceta F de \mathcal{P} y cada $\alpha \in \Gamma(F)$, existe $\beta \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\beta|_F = \alpha$.

Ahora, con base en la Proposición 3.6 tenemos de hecho que $\Gamma(F)$ es isomorfo a $Stab_{\Gamma(\mathcal{P})}(F)$, por lo que la Definición 3.5 también la podemos expresar como:

Definición 3.6. Sea \mathcal{P} un n -politopo. Diremos que \mathcal{P} es un **politopo hereditario**, si para cada faceta F de \mathcal{P} y cada $\alpha \in \Gamma(F)$, existe $\beta \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\beta \in Stab_{\Gamma(\mathcal{P})}[F]$ y $\beta|_F = \alpha$.

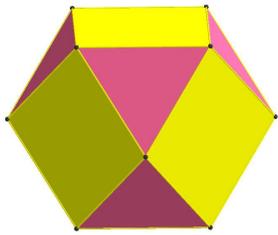
Esta definición, dicha de manera informal, dicta que un politopo \mathcal{P} es hereditario si cualquier automorfismo de cada faceta F se extiende a un automorfismo de \mathcal{P} que fija a F .

En particular, un poliedro \mathcal{P} es hereditario si en cada cara de \mathcal{P} , cualquier elemento de su grupo de automorfismo se extiende a un automorfismo de \mathcal{P} que fija a la cara. Veamos esto en el siguiente ejemplo.

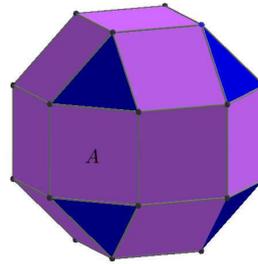
En la siguiente figura mostramos dos poliedros. El cuboctaedro (Figura 3.21 inciso a) y el rombicuboctaedro (Figura 3.21 inciso b)). Ambos sólidos están compuestos por triángulos equiláteros y cuadrados, sin embargo, veremos más adelante (o el lector se puede convencer realizando un análisis exhaustivo de las simetrías de sus caras) que

cualquier automorfismo de las caras del cuboctaedro se extiende a un automorfismo del poliedro, es decir, es hereditario. Por otra parte, observemos que en el rombicuboctaedro el automorfismo de la cara marcada con la letra A que induce la simetría por la diagonal de dicho cuadrado no es posible extenderlo a un automorfismo del mismo. Lo anterior se debe a que de existir tal automorfismo, el automorfismo que induce al plano que contiene a dicha diagonal y la diagonal a la cara opuesta sería un plano de reflexión del poliedro, simetría que no existe en el objeto.

Ejemplo 3.9.



a) Cuboctaedro (hereditario).



b) Rombicuboctaedro (no hereditario).

Figura 3.21: Poliedro hereditario (inciso a)) y no hereditario (inciso b)).

Algo que es preciso notar es que un polítopo hereditario con alguna de sus facetas regular, no necesariamente tendrá todas sus facetas regulares. Como ejemplo, consideremos la teselación semiregular \mathcal{T} del espacio euclidiano por tetraedros regulares y tetraedros regulares truncados (Figura 3.22). Las facetas de \mathcal{T} son de dos tipos, por un lado los tetraedros (regulares) y los tetraedros truncados (semiregulares). Esta teselación es un ejemplo de un 4-politopo hereditario con 4 órbitas en banderas.

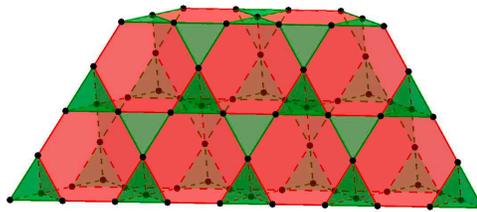


Figura 3.22: Parte de la teselación semiregular \mathcal{T} compuesta por tetraedros regulares (verdes) y tetraedros regulares truncados (rojos).

Por otro lado, observemos que si \mathcal{P} es un n -politopo regular, con caras F_j y F_k tales que $-1 \leq j < k \leq n$ y $F_j \leq F_k$, entonces $\Gamma(F_k/F_j)$ es isomorfo a $Stab_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Omega)$, donde Ω es cualquier cadena de tipo $\{-1, 0, \dots, j-1, j, k, k+1, \dots, n\}$. Por la Proposición 3.6, $Stab_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Omega)$ es isomorfo a un subgrupo de $\Gamma(F_k/F_j)$. Como $Stab_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Omega)$ es transitivo en las banderas de F_k/F_j entonces, los grupos coinciden. Por lo tanto, un politopo regular es automáticamente hereditario y en particular, como cualquier polígono es regular, estos son hereditarios. De todo lo que se mencionó aquí tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.7. *Si \mathcal{P} es un n -politopo regular, entonces \mathcal{P} es hereditario.*

3.2.1. Un caso particular: Poliedros hereditarios

A continuación, mencionaremos propiedades básicas de los poliedros hereditarios con caras regulares. La generalización de estos hechos para n -politopos con facetas altamente simétricas los podemos encontrar en el artículo [36].

Proposición 3.8. *Si \mathcal{P} es un poliedro hereditario, entonces $\Gamma(\mathcal{P})$ es transitivo en arcos².*

Prueba. Sean Φ y Ψ dos cadenas de \mathcal{P} del tipo $\{0, 1\}$ y sean $\widehat{\Phi}$ y $\widehat{\Psi}$ banderas tales que $\Phi \subseteq \widehat{\Phi}$ y $\Psi \subseteq \widehat{\Psi}$. Como \mathcal{P} es fuertemente conexo por banderas, existe una sucesión $\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}_0, \widehat{\Phi}_1, \dots, \widehat{\Phi}_k = \widehat{\Psi}$ de banderas adyacentes. Consideremos la sucesión de cadenas de tipo $\{0, 1\}$ inducida por la sucesión de banderas. Mostraremos que estas se encuentran en la misma órbita por inducción sobre la longitud de la sucesión.

Supongamos que Φ, Ψ es la sucesión de cadenas de tipo $\{0, 1\}$ inducida por la sucesión de banderas. Como la sucesión de banderas consecutivas son i adyacentes, tenemos las siguientes posibilidades:

- Si $\widehat{\Psi} = \widehat{\Phi}^0$, entonces como \mathcal{P} es un poliedro, cada una de sus caras es regular. Consideremos a F la cara de \mathcal{P} contenida simultáneamente en los elementos de $\widehat{\Phi}$ y $\widehat{\Psi}$, entonces existe $\alpha \in \Gamma(F)$ tal que $\alpha(\Phi) = \Psi$; y como \mathcal{P} es hereditario, este automorfismo se extiende a uno de $\Gamma(\mathcal{P})$.
- Si $\widehat{\Psi} = \widehat{\Phi}^1$, el argumento es análogo al anterior.

²Un **arco** es una cadena del tipo $\{0, 1\}$.

- Si $\widehat{\Psi} = \widehat{\Phi}^2$, entonces las cadenas Φ y Ψ son la misma, por lo que la identidad es el automorfismo buscado.

Ahora, supongamos que si la longitud de la sucesión de cadenas de tipo $\{0, 1\}$ es s entonces, Φ y Ψ están en la misma órbita.

Sea $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_s, \Phi_{s+1} = \Psi$ la sucesión de cadenas de tipo $\{0, 1\}$ inducida por la sucesión de banderas. Observemos que, con argumentos similares a los planteados en el punto base de esta prueba, considerando las cadenas Φ_s y Φ_{s+1} , podemos concluir que existe un automorfismo de $\Gamma(\mathcal{P})$ que manda $\widehat{\Phi}_s$ a $\widehat{\Phi}_{s+1}$. Así, por hipótesis de inducción, la sucesión de cadenas está en una sola órbita y por lo tanto $\Gamma(\mathcal{P})$ es transitivo en arcos.

□

Inmediatamente, por el resultado anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.9. *Si \mathcal{P} es un poliedro hereditario, entonces $\Gamma(\mathcal{P})$ es transitivo en vértices y en aristas.*

Antes de continuar con las propiedades de los poliedros hereditarios, el siguiente lema nos ayudará en la prueba de la proposición sucesiva.

Lema 3.10. *Si \mathcal{P} es un poliedro hereditario transitivo en caras, entonces \mathcal{P} es regular.*

Prueba. Sean $\{\Phi, \Psi\} \subset \mathbf{F}(\mathcal{P})$. Consideremos las siguientes situaciones:

- Si Φ y Ψ están en la misma cara F . Como F es regular, existe $\alpha \in \Gamma(F)$ tal que $\alpha(\Phi) = \Psi$ y como \mathcal{P} es hereditario, este automorfismo se extiende a uno de $\Gamma(\mathcal{P})$. Por lo que, Φ y Ψ están en la misma órbita.
- Si Φ y Ψ están en caras distintas, digamos F y G respectivamente. Como \mathcal{P} es transitivo en caras, existe $\alpha \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\alpha(F) = G$. De aquí que estamos en el caso anterior y por lo tanto, Φ y Ψ están en la misma órbita.

Por lo tanto, \mathcal{P} es regular.

□

La siguiente prueba hará uso del hecho que para valores impares q el grupo diédrico D_q tiene únicamente una clase de conjugación de reflexiones. Geométricamente hablando esto significa que la reflexión biseca la arista de un q -ágono convexo regular y el ángulo del vértice opuesto a esta arista. Esto muestra que la clase de conjugación genera D_q .

Proposición 3.11. *Sea \mathcal{P} un poliedro hereditario. Si existe una figura de vértice F_n/F_0 que es un q -ágono con q impar, entonces \mathcal{P} es un poliedro regular de tipo de Schläfli $\{p, q\}$, donde $\{p\}$ es el tipo de Schläfli de cualquier cara de \mathcal{P} .*

Prueba. Sea $F_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ tal que F_n/F_0 es un q -ágono con q impar. Consideremos a $\{G, G'\} \subset \mathcal{F}_2(\mathcal{P})$ que comparten una arista, digamos $a \in \mathcal{F}_1(\mathcal{P})$. Como q es impar si $F_0 \leq a$, $F_0 \leq G$ y $F_0 \leq G'$, entonces existe $H \in \mathcal{F}_2(\mathcal{P})$ tal que $F_0 \leq H$ y en F_n/F_0 se tiene que a y H son opuestos.

Sean $\{a_1, a_2\} \subset \mathcal{F}_1(\mathcal{P})$ tales que $F_0 \leq a_i \leq H$, con $i \in \{1, 2\}$. Como H es regular, sea $\sigma_1 \in \Gamma(H)$ tal que $\sigma_1(F_0) = F_0$, $\sigma_1(a_1) = a_2$ y $\sigma_1(a_2) = a_1$. Por ser \mathcal{P} hereditario tenemos que existe un automorfismo $\hat{\sigma}_1$ de \mathcal{P} que actúa en H como σ_1 . Como q es impar y tanto a como H son opuestas, entonces $\hat{\sigma}_1(a) = a$, $\hat{\sigma}_1(G) = G'$ y $\hat{\sigma}_1(G') = G$ por lo que G y G' están en la misma órbita bajo $\Gamma(\mathcal{P})$. De manera análoga podemos hacer esto para cada arista b que contenga a F_0 , por lo que todas las caras al rededor de F_0 están en la misma órbita. Además, como todas las caras son regulares y \mathcal{P} es hereditario, cualesquiera dos vértices en la misma cara tiene el mismo grado. Por conexidad de \mathcal{P} , todos los vértices tienen grado q . Nuevamente, la conexidad implica que todas las caras de \mathcal{P} están en la misma órbita. De aquí que por el Lema 3.10, \mathcal{P} es regular. Además como cada vértice tiene grado q y cada cara es un p -ágono, \mathcal{P} tiene tipo de Schläfli $\{p, q\}$.

□

El siguiente teorema nos muestra que los poliedros hereditarios pueden pertenecer sólo a dos familias.

Teorema 3.12. *Un poliedro \mathcal{P} es hereditario si y sólo si \mathcal{P} es regular o \mathcal{P} es de 2-órbitas en clase $2_{\{0,1\}}$.*

Prueba.

\Rightarrow] Sea \mathcal{P} un poliedro hereditario. Por el Corolario 3.9 \mathcal{P} es transitivo en vértices. Sea F_0 cualquier vértice de \mathcal{P} . Probaremos que el estabilizador $Stab_{\Gamma(\mathcal{P})}(F_0)$ tiene a lo más dos órbitas en el conjunto de banderas de \mathcal{P} que contienen a F_0 .

Para cada cara H de \mathcal{P} que contiene a F_0 , hay una única involución σ^H en $\Gamma(\mathcal{P})$ la cual fija a F_0 e intercambia las dos aristas de H que contienen a F_0 . Supongamos que la figura de vértice F_n/F_0 es un q -ágono. Por la Proposición 3.11, si q es impar, entonces \mathcal{P} es regular, y concluimos.

Ahora supongamos que \mathcal{P} no es regular. Entonces q es par o $q = \infty$. Dado un vértice fijo F_0 , el conjunto de automorfismos de \mathcal{P} $\{\sigma^H \mid F_0 \leq H\}$ genera el grupo diédrico $D_{\frac{q}{2}}$. Por lo tanto, $D_{\frac{q}{2}}$ es isomorfo a un subgrupo de $Stab_{\Gamma(\mathcal{P})}(F_0)$.

Sean $\dots, H_{-2}, H_{-1}, H = H_0, H_1, H_2 \dots$ las caras incidentes a F_0 . Sin pérdida de generalidad, para toda $i \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$, existen las aristas a_i tal que $a_i \in H_i$ y $a_i \in H_{i+1}$. Notemos que $\sigma^H(H_1) = H_{-1}$, $\sigma^H(H_2) = H_{-2}$, etc. En general $\sigma^{H_j}(H_k) = H_{2j-k}$, por lo que todas las caras impares están en una órbita y las pares estarán en una órbita. Por la conexidad de \mathcal{P} , esto implica que hay a lo más 2 órbitas en caras y como las caras son regulares hay a lo más 2 órbitas en banderas. Por lo tanto, \mathcal{P} es regular (si y sólo si hay un automorfismo que intercambie H_1 y H_2) o está en clase $2_{\{0,1\}}$.

\Leftarrow] Sabemos que si \mathcal{P} es regular, entonces \mathcal{P} es hereditario. Ahora, sean \mathcal{P} de clase $2_{\{0,1\}}$, H una cara de \mathcal{P} y $\Phi \in \mathbf{F}(\mathcal{P})$ tal que $H \in \Phi$. Consideremos a $\{\gamma, \beta\} \subset \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\gamma(\Phi) = \Phi^0$ y $\beta(\Phi) = \Phi^1$, que existen pues \mathcal{P} es de clase $2_{\{0,1\}}$. También notemos que $\gamma^2 = \iota = \beta^2$ en H . De esto, $\langle \gamma, \beta \rangle = \Gamma(H)$ y entonces cualquier automorfismo de H se extiende a un automorfismo de \mathcal{P} , lo que implica que \mathcal{P} es hereditario.

□

Por lo analizado en este capítulo, notemos que cualquier poliedro \mathcal{P} con 2 órbitas en banderas de clase $2_{\{0,1\}}$, generalmente tiene dos tipos distintos de caras. En particular, \mathcal{P} tiene símbolo de Schläfli generalizado de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 \\ p_1, q \end{array} \right\},$$

donde tenemos p_0 -ágonos y p_1 -ágonos como caras y el grado de cada vértice es q con q un número par. Esta notación la usaremos en el capítulo 5, donde presentaremos ejemplos de poliedros hereditarios.

3.3. Politopos geoméricamente hereditarios (n - $\mathcal{P}gh$)

3.3.1. Realizaciones en el espacio euclidiano

En nuestro estudio, el análisis de la estructura combinatoria es parte fundamental para entender los automorfismo de los polígonos y poliedros que aquí estudiaremos, sin embargo, también necesitamos que estos sean simetrías de nuestro objeto desde un punto de vista geométrico.

En esta sección revisaremos el concepto de realización euclidiana de un poliedro, el cual sirve para pasar formalmente del concepto abstracto de poliedro a un objeto geométrico. Daremos ejemplos y revisaremos algunas construcciones clásicas. Cabe señalar que tomaremos como texto de consulta a [44], esto por su brevedad y clara exposición. Si el lector está interesado en profundizar en esta parte de la teoría, puede consultar [39], [41, §5A, §7E] y [48].

Definición 3.7. Si \mathcal{P} es un politopo abstracto de rango n y \mathcal{F}_0 es el conjunto de vértices, una **realización** de \mathcal{P} en el espacio euclidiano \mathbb{E}^n es una función $\beta : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathbb{E}^n$.

En la definición anterior no se rescata por completo la estructura de \mathcal{P} pues no considera elementos de \mathcal{P} de rango distinto que 0. Sin embargo, si $\beta_0 = \beta$ es una realización de \mathcal{P} , \mathcal{F}_i es el conjunto de elementos de rango i de \mathcal{P} y definimos V_0 como la imagen de \mathcal{F}_0 bajo β_0 , es posible definir recursivamente, para $i \in \{1, \dots, n\}$, $\beta_i : \mathcal{F}_i \rightarrow V_i$ con $V_i \subseteq 2^{V_{i-1}}$ dado por $\beta_i(F) = \{\beta_{i-1}(G) : G \in \mathcal{F}_{i-1} \text{ y } G \leq F\}$.

En otras palabras, las aristas de \mathcal{P} se realizan como la pareja de vértices incidentes a ellas y las caras como el conjunto de aristas incidentes a ellas, etc.

En las realizaciones de un politopo hay una en particular que nos interesa: aquella en la que cada una de las β_i descritas anteriormente son inyectivas, en esa situación decimos que la realización es **fiel**. Cuando no haya posibilidad de confusión, si β es una realización fiel de \mathcal{P} , nos referiremos indistintamente como los vértices, aristas, caras, etc. de \mathcal{P} tanto a los elementos del orden parcial como a sus imágenes bajo β_i

con $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, respectivamente. Como ejemplo de esto lo podemos ver en la Figura 3.23 para \mathcal{P} un 8-ágono y \mathcal{P} un 4-ágono ambos en el espacio \mathbb{E}^2 .

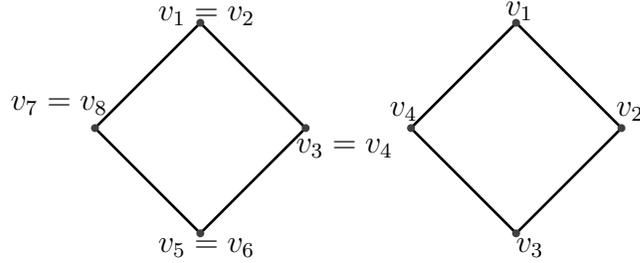


Figura 3.23: Realización de un 8-ágono de forma no fiel y realización de un 4-ágono de forma fiel, ambos en el espacio \mathbb{E}^2 .

Además de la estructura combinatoria de un poliedro, nos interesa hablar de las simetrías geométricas del mismo. Para ello, observemos que si $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$, entonces γ induce una permutación de los vértices de \mathcal{P} y por lo tanto, de $V_0 = \beta(\mathcal{F}_0)$. Así podemos decir que una realización β de un polítopo \mathcal{P} es **simétrica** si toda permutación de V_0 inducida por un automorfismo γ se extiende a una isometría de \mathbb{E}^n . En esta situación, también utilizaremos la notación \mathcal{F}_0 para referirnos a los vértices de \mathcal{P} en su realización.

Si se supone que el casco afín³ $Afín(V_0)$ de V_0 , es todo \mathbb{E}^n entonces la manera de extender estas permutaciones de los vértices a isometrías es única. En tal caso, las isometrías que preservan a \mathcal{P} forman su grupo de simetrías, denotado por $G(\mathcal{P})$. Observemos que si la realización de \mathcal{P} es simétrica, $G(\mathcal{P})$ induce una representación euclidiana de $\Gamma(\mathcal{P})$, es decir, un homomorfismo de $\Gamma(\mathcal{P})$ en $\mathbf{Iso}(\mathbb{E}^n)$. En el caso de que la realización sea fiel, dicho morfismo es inyectivo, es decir, la representación es fiel.

Si $Afín(V_0) \subset \mathbb{E}^n$ se puede pensar que $Afín(V_0)$ está encajado en $\mathbb{E}^k \subseteq \mathbb{E}^n$, donde $k = \dim(Afín(V_0))$ y definir una manera canónica de encajar $\mathbf{Iso}(\mathbb{E}^k)$ en $\mathbf{Iso}(\mathbb{E}^n)$. Es decir, si tenemos un encaje isométrico $\eta : \mathbb{E}^k \rightarrow \mathbb{E}^n$ (en el sentido de que la métrica de \mathbb{E}^n restringida a $\eta(\mathbb{E}^k)$ es la misma que la métrica en \mathbb{E}^k) nos gustaría

³El **casco afín** de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto

$$Afín(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i x_i \mid k > 0, x_i \in S, a_i \in \mathbb{R} \text{ y } \sum_{i=1}^k a_i = 1 \right\}$$

definir un homomorfismo inyectivo de grupos $\bar{\eta} : \mathbf{Iso}(\mathbb{E}^k) \rightarrow \mathbf{Iso}(\mathbb{E}^n)$ tal que si α es una isometría de \mathbb{E}^k , entonces el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^k & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{E}^k \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbb{E}^n & \xrightarrow{\bar{\eta}(\alpha)} & \mathbb{E}^n \end{array}$$

Este homomorfismo se puede encontrar si suponemos, sin pérdida de generalidad, que η manda el origen de \mathbb{E}^k en el origen de \mathbb{E}^n y que la base canónica de \mathbb{E}^k se encaje en la base canónica de \mathbb{E}^n , de modo que $\eta(\mathbb{E}^k)$ está contenido en los hiperplanos $x_j = 0$ para $k < j \leq n$. De esta forma, se define una manera canónica de extender las isometrías de $\mathbf{Afin}(V_0)$ a las isometrías de \mathbb{E}^n fijando los elementos de la base canónica que no estaban en $\eta(\mathbb{E}^k)$ y así $G(\mathcal{P})$ está bien definido para toda realización β .

Por otro lado, en general los automorfismos de un politopo no coincide con su conjunto de simetrías, esto depende del espacio donde se haga la realización. A continuación mostraremos un ejemplo de una realización no simétrica de un polígono \mathcal{P} , por lo que ejemplificaremos que hay realizaciones en donde algunos automorfismos del politopo abstracto no son simetrías del objeto geométrico. Consideremos el siguiente rectángulo \mathcal{P} :

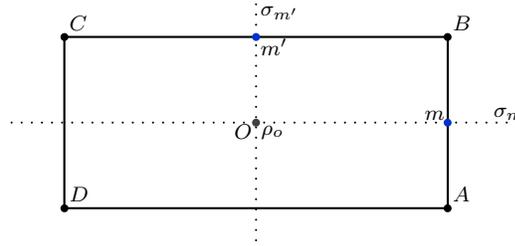


Figura 3.24: Rectángulo \mathcal{P} .

Las posibles simetrías de \mathcal{P} son:

- La identidad, que deja fijo a todo \mathcal{P} .
- La reflexión σ_m por la mediatriz m del segmento AB , es tal que: $\sigma_m(A) = B$, $\sigma_m(B) = A$, $\sigma_m(C) = D$, $\sigma_m(D) = C$. De esta forma $\sigma_m(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.
- La reflexión $\sigma_{m'}$ por la mediatriz m' del segmento BC , es tal que: $\sigma_{m'}(A) = D$, $\sigma_{m'}(B) = C$, $\sigma_{m'}(C) = B$, $\sigma_{m'}(D) = A$. De esta forma $\sigma_{m'}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

- d) El medio giro ρ_o con centro de rotación O , es tal que: $\rho_o(A) = C$, $\rho_o(B) = D$, $\rho_o(D) = B$, $\rho_o(C) = A$. De está forma $\rho_o(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Ahora tomemos el siguiente automorfismo α : $\alpha(A) = B$, $\alpha(B) = C$, $\alpha(C) = D$, $\alpha(D) = A$, por lo que $\alpha(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ y α no coincide con ninguna de las simetrías antes mencionadas de \mathcal{P} .

Lo que acabamos de observar es que *no todo automorfismo del rectángulo \mathcal{P} es una simetría del mismo*. Sin embargo, el recíproco es cierto, es decir, toda simetría de cualquier realización de un polítopo \mathcal{P} induce un automorfismo de \mathcal{P} . Veámoslo a continuación para el caso de un polígono.

Sea f una simetría de una realización β de un polígono \mathcal{P} . Consideremos la función \hat{f} definida de la siguiente manera:

$$\hat{f} \doteq \begin{cases} \hat{f}|_V = f|_V \\ \hat{f}|_A = f|_A \end{cases}$$

Entonces, por definición \hat{f} es una biyección de los vértices y las aristas de \mathcal{P} . Veamos que \hat{f} preserva incidencias. Sea $V \in \mathcal{F}_0$ y $a \in \mathcal{F}_1$ tal que $V \in a$, demostraremos que $\hat{f}(V) \leq \hat{f}(a)$.

Por definición de \hat{f} , $\hat{f}(V) = f(V)$ y $\hat{f}(a) = f(a)$. Por otro lado, si $V \in a$ entonces $f(V) \in f(a)$ pues f es simetría. De está forma $\hat{f}(V) \in \hat{f}(a)$. Es decir, tenemos que $\hat{f} \in \Gamma(\mathcal{P})$.

La definición de esta función (junto con la prueba) la podemos extender análogamente de manera inductiva a cualquier polítopo en el espacio \mathbb{E}^n .

De regreso con las simetrías de los polígonos, notemos que si \mathcal{P} es un polígono plano en \mathbb{E}^n ($n > 2$), entonces diferentes simetrías pueden inducir el mismo automorfismo. Por ejemplo, en el espacio \mathbb{E}^3 si Π es el plano que contiene a \mathcal{P} , entonces la reflexión en Π y la identidad ι inducen el mismo automorfismo de \mathcal{P} , a saber, la identidad.

De manera similar, si a es una arista en \mathbb{E}^2 , observamos que a tiene exactamente dos automorfismos: la identidad y el automorfismo que intercambia los vértices de a y $G(a)$ tiene cuatro elementos:

- ι , la identidad en \mathbb{E}^2 .
- σ_m , la reflexión por la recta m tal que $a \subset m$.
- σ_l , la reflexión por la recta l con l la mediatriz de a .
- ρ_M , el medio giro con centro el punto medio M de a .

Observemos que ι y σ_m inducen al automorfismo identidad de a , mientras que σ_l y ρ_M inducen el automorfismo que intercambia los vértices de a .

En lo que resta de este trabajo, al hablar de un politopo \mathcal{P} en \mathbb{E}^n nos referimos a un politopo abstracto junto con una realización fiel β del mismo (en \mathbb{E}^n) que satisface que $\dim(\text{Afin}(\beta(\mathcal{F}_0))) = n$.

Bajo este contexto estamos listos para definir un politopo geoméricamente hereditario.

Definición 3.8. Sea \mathcal{P} un n -politopo en \mathbb{E}^n . Diremos que \mathcal{P} es un **politopo geoméricamente hereditario** o (n - $\mathcal{P}gh$), si para toda faceta F de \mathcal{P} y cada $\alpha \in G(F)$, existe $\beta \in G(\mathcal{P})$ tal que $\beta \in \text{Stab}_{G(\mathcal{P})}[F]$, y $\beta|_F = \alpha$.

De forma equivalente, un politopo \mathcal{P} es un politopo geoméricamente hereditario, si para toda faceta F de \mathcal{P} y cada $\alpha \in G(F)$, existe $\beta \in G(\mathcal{P})$ tal que α y β actúan igual en todos los elementos de F .

De la definición y de lo expuesto anteriormente es inmediato darnos cuenta de que un politopo geoméricamente hereditario es combinatoriamente hereditario.

En particular, un poliedro es geoméricamente hereditario si para cada una de sus caras y cada simetría α en ella, hay una simetría del poliedro que actúe como α en la cara.

Ejemplo 3.10. A continuación mostramos algunos ejemplos de poliedros que muestran la propiedad de ser combinatoriamente hereditarios o geoméricamente hereditarios o ninguna de las dos propiedades, sin argumentar estas afirmaciones.

- El cuboctaedro (Figura 3.25) es geoméricamente hereditario (sin ser regular) y en consecuencia combinatoriamente hereditario:

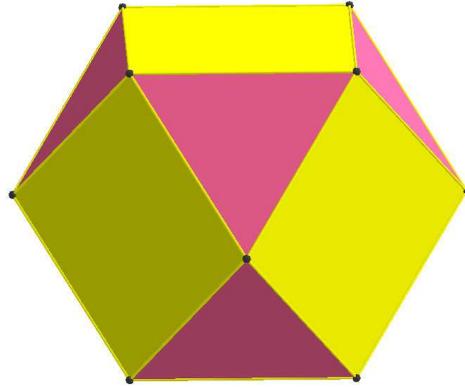


Figura 3.25: Cuboctaedro.

- El prisma torcido (Figura 3.26) no es geoméricamente hereditario pero es combinatoriamente hereditario:



Figura 3.26: Prisma rectangular torcido.

- El tetraedro truncado (Figura 3.27) no es geoméricamente hereditario ni combinatoriamente hereditario:

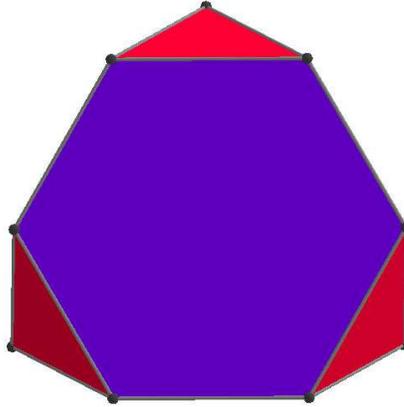


Figura 3.27: Tetraedro truncado.

Capítulo 4

Polígonos finitos geoméricamente hereditarios ($2\text{-}\mathcal{P}gh$)

En este capítulo analizaremos, desde el punto de vista geométrico, a los polígonos finitos geoméricamente hereditarios en el plano y en el espacio euclidiano. Comenzaremos por dar algunos elementos bases para el estudio de estos objetos. Posteriormente, en la Sección 4.1 centraremos nuestra atención en la parte geométrica para llegar a la construcción de los $2\text{-}\mathcal{P}gh$ en el plano. En este punto nos interesará cuando la realización de dicho objeto es fiel, para cerrar este apartado con ejemplos que apoyan la visualización de esta construcción. En las secciones siguientes, nos centraremos en el análisis (análogo) de los $2\text{-}\mathcal{P}gh$ en el espacio \mathbb{E}^3 y de igual forma, concluiremos con ejemplos que apoyan la visualización de las construcciones expuestas.

Con base en la Definición 3.8 podemos hacer la siguiente reformulación. Dado \mathcal{P} un polígono en \mathbb{E}^n , diremos que \mathcal{P} es un **polígono geoméricamente hereditario** ($2\text{-}\mathcal{P}gh$), si para toda arista a de \mathcal{P} y toda $\alpha \in G(a)$, existe $\beta \in G(\mathcal{P})$ tal que $\beta \in \text{Stab}_{G(\mathcal{P})}[a]$ y $\beta|_a = \alpha$.

Dicho de forma más coloquial, un polígono \mathcal{P} es un polígono geoméricamente hereditario si para toda simetría, α , de cualquier de sus arista, digamos a , existe una simetría de \mathcal{P} tal que ésta actúa igual que α en los elementos de a , es decir, sus vértices.

Por otra parte, recordemos que en particular, si \mathcal{P} es un polígono en el plano, $a \in \mathcal{F}_1$ y $\alpha \in G(a)$, tenemos que

$$\alpha = \begin{cases} \iota, & \text{la identidad.} \\ \sigma_l, & \text{la reflexión por la recta mediatriz } l \text{ de la arista } a. \\ \rho_M, & \text{el medio giro con centro el punto medio } M \text{ de la arista } a. \\ \sigma_m, & \text{la reflexión por la recta } m \text{ que contiene a la arista } a. \end{cases}$$

Notemos así que α actúa como la identidad en la arista o α intercambia los vértices de la arista. Motivados por esta observación y dado que podemos generalizar esto, tenemos el siguiente lema.

Lema 4.1. *Un polígono \mathcal{P} en el espacio \mathbb{E}^n es un 2- $\mathcal{P}gh$ si para toda arista a de \mathcal{P} cuyos vértices son V_0 y V_1 , tenemos que existe $\alpha \in G(\mathcal{P})$ tal que $\alpha(a) = a$ con $\alpha(V_0) = V_1$ y $\alpha(V_1) = V_0$.*

Con la información recabada hasta ahora es natural preguntarse ¿cuáles son las características de las simetrías de los polígonos geoméricamente hereditarios? Para responder a esta pregunta, analicemos la acción del grupo de simetrías de un polígono en los elementos del mismo. Iniciemos con el conjunto de sus aristas.

Proposición 4.2. *Sea \mathcal{P} un 2- $\mathcal{P}gh$ y sea $\{a_{i-1}, a_i, a_{i+1}\} \subset \mathcal{F}_1$ un conjunto de tres aristas consecutivas, entonces a_{i-1} y a_{i+1} están en la misma órbita bajo la acción de $G(\mathcal{P})$.*

Prueba. Para ver esto, tomemos $\alpha \in G(a_i)$ tal que α intercambia los vértices de a_i , entonces existe $\beta \in G(\mathcal{P})$ tal que $\beta|_{a_i} = \alpha$. Es decir, β intercambia los vértices de a_i . Como a_{i-1} y a_{i+1} son las únicas aristas que comparten vértices con a_i y β es una simetría de \mathcal{P} , entonces $\beta(a_{i-1}) = a_{i+1}$ y $\beta(a_{i+1}) = a_{i-1}$.

□

La Proposición 4.2 también nos dice que si $\mathcal{F}_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ son las aristas de un 2- $\mathcal{P}gh$ \mathcal{P} , de manera que a_i y a_{i+1} son aristas consecutivas, entonces las aristas $\{a_1, a_3, \dots\}$ están en la misma órbita, mientras que $\{a_2, a_4, \dots\}$ se encuentran en la misma órbita.

Ahora, si k es impar, a_k está en la misma órbita de a_1 . Además a_k y $a_{k+2} = a_2$ están en la misma órbita. Esto implica que $G(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en las aristas de \mathcal{P} (Figura 4.1).

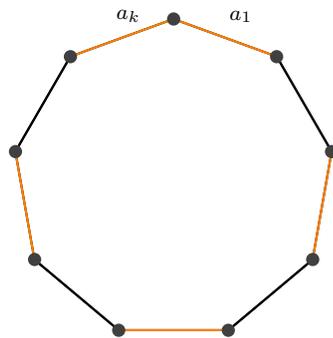


Figura 4.1: Un $2\text{-}\mathcal{P}gh$ con un número impar de aristas. En consecuencia, es un polígono regular.

Si k es par, entonces $G(\mathcal{P})$ tiene a lo más dos órbitas en aristas; llamemos \mathcal{O}_a y $\mathcal{O}_{a'}$ a las órbitas $\{a_2, a_4, \dots\}$ y $\{a_1, a_3, \dots\}$, respectivamente. Notemos además que, en el caso donde k es par, podríamos tener que $\mathcal{O}_a = \mathcal{O}_{a'}$ o que $\mathcal{O}_a \neq \mathcal{O}_{a'}$. Un ejemplo donde $\mathcal{O}_a = \mathcal{O}_{a'}$ es un cuadrado, mientras que un ejemplo donde $\mathcal{O}_a \neq \mathcal{O}_{a'}$ aparece en la Figura 4.2.

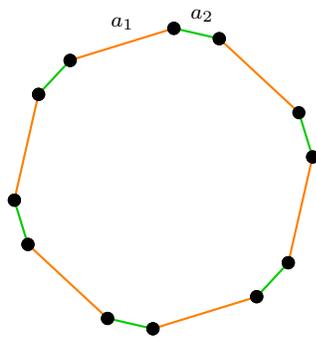


Figura 4.2: Un $2\text{-}\mathcal{P}gh$ no regular con un número par de aristas.

En vista del análisis anterior, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.3. *Si \mathcal{P} es un $2\text{-}\mathcal{P}gh$ entonces, \mathcal{P} tiene a lo más dos órbitas en aristas.*

Una pregunta natural que se desprende del teorema anterior sería ¿si un polígono \mathcal{P} tiene a lo más dos órbitas en aristas entonces es un $2\text{-}\mathcal{P}gh$?

La respuesta nos la brinda la siguiente observación.

Observación 4.1. *El cuadrilátero de la Figura 4.3 no es geoméricamente hereditario.*

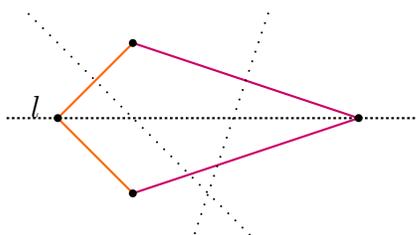


Figura 4.3: Polígono \mathcal{P} con dos órbitas en aristas que no es geoméricamente hereditario.

En la figura previa, σ_l es la única simetría (distinta de la identidad) de \mathcal{P} y las dos órbitas en aristas están marcadas en color naranja y magenta. Sin embargo, las simetrías de cada arista, determinadas por las mediatrices de las aristas que aparecen marcadas con líneas punteadas, no se extienden a la simetría de \mathcal{P} .

Con lo anterior, vemos que no es suficiente pedir que nuestro polígono tenga dos órbitas en aristas para que éste sea geoméricamente hereditario. De aquí se desprende la siguiente pregunta: ¿si el polígono es transitivo en aristas entonces, es geoméricamente hereditario?

La respuesta nuevamente es negativa.

Observación 4.2. *El rombo de la Figura 4.4 es transitivo en aristas pero no es un $2\text{-}\mathcal{P}gh$.*

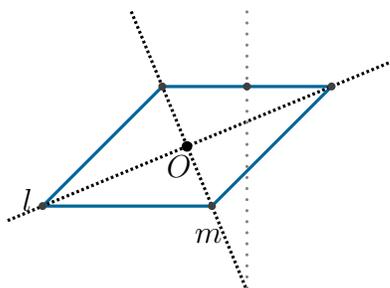


Figura 4.4: Polígono \mathcal{P} transitivo en aristas que no es geoméricamente hereditario.

En la figura anterior σ_l , σ_m y ρ_O son las simetrías (distinta de la identidad) de \mathcal{P} . Sin embargo, las simetrías de cada arista, que en particular es la reflexión en la mediatriz de la arista que aparecen marcadas con líneas punteadas, no se extienden a una simetría de \mathcal{P} . Por lo tanto, no es suficiente pedir que el polígono sea transitivo en aristas. En otras palabras, si \mathcal{P} es un 2- $\mathcal{P}gh$ entonces, \mathcal{P} tiene a lo más 2 órbitas en aristas, pero el converso es falso.

Otro punto importante de analizar con los polígonos geoméricamente hereditarios es el comportamiento de sus vértices bajo su grupo de simetrías.

Tomemos a \mathcal{P} un 2- $\mathcal{P}gh$ y sean $\{V_i, V_j\} \subset \mathcal{F}_0$. Veamos que existe $\delta \in G(\mathcal{P})$ tal que $\delta(V_i) = V_j$. Para ello consideremos $\{a, a'\} \subset \mathcal{F}_1$ tal que $a = V_i V_k$ y $a' = V_j V_l$ con $\{V_k, V_l\} \subset \mathcal{F}_0$. Analicemos las siguientes situaciones:

- Supongamos que a y a' están en la misma órbita y sea $\alpha \in G(\mathcal{P})$ tal que $\alpha(a) = a'$. Entonces, $\alpha(V_i) = V_j$ y $\alpha(V_k) = V_l$ o $\alpha(V_i) = V_l$ y $\alpha(V_k) = V_j$. En el primer caso, la afirmación es inmediata con $\delta = \alpha$. En el segundo caso, consideremos $\gamma \in G(a')$ que intercambie los vértices de a' , como \mathcal{P} es geoméricamente hereditario, existe $\beta \in G(\mathcal{P})$ tal que $\gamma = \beta|_{a'}$ y por lo tanto $\delta(V_i) = \beta\alpha(V_i) = V_j$.
- Supongamos que a y a' están en órbitas distintas. Entonces, sea $\hat{a} \in \mathcal{F}_1$ en la misma órbita de a y adyacente a a' con el vértice V_j . Así, con argumentos análogos al punto anterior tenemos que existe $\delta \in G(\mathcal{P})$ tal que $\delta(V_i) = V_j$.

De lo anterior, concluimos la siguiente proposición.

Proposición 4.4. *Si \mathcal{P} un 2- $\mathcal{P}gh$, entonces $G(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en los vértices de \mathcal{P} .*

Tengamos presente que este trabajo pretende estudiar polígonos geoméricamente hereditarios que no son regulares. La siguiente y última proposición de esta sección nos brindará información sobre cuándo sucede que nuestro polígono es geoméricamente hereditario y consta de una sola órbita en aristas.

Proposición 4.5. *Sea \mathcal{P} un 2- $\mathcal{P}gh$. Si $G(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en las aristas de \mathcal{P} , entonces \mathcal{P} es un polígono regular.*

Prueba. Consideremos dos banderas $\{\Phi_0, \Phi_1\} \subset \mathbf{F}(\mathcal{P})$ con $\Phi_0 = (V_0, a_0)$, $\Phi_1 = (V_1, a_1)$ donde $a_0 = V_0V'_0$ y $a_1 = V_1V'_1$. Veremos que si \mathcal{P} es transitivo en aristas, entonces existe un elemento de $G(\mathcal{P})$ que mande Φ_0 en Φ_1 .

Como \mathcal{P} tiene una sola órbita en aristas, existe $\beta \in G(\mathcal{P})$ tal que $\beta(a_0) = a_1$. De esto último, tenemos dos casos:

- Si $\beta(V_0) = V_1$, entonces $\beta(\Phi_0) = \Phi_1$.
- Si $\beta(V_0) \neq V_1$, entonces $\beta(V_0) = V'_1$ y $\beta(V'_0) = V_1$.

Por el Lema 4.1, existe $\alpha \in G(\mathcal{P})$ tal que $\alpha(V_0) = V'_0$ y $\alpha(V'_0) = V_0$, con lo que $\alpha(a_0) = a_0$. Entonces $\beta\alpha(a_0) = \beta(a_0) = a_1$ y $\beta\alpha(V_0) = \beta(V'_0) = V_1$. Así tenemos $\beta\alpha(\Phi_0) = \Phi_1$.

Por lo tanto, siempre existe $\delta \in G(\mathcal{P})$ tal que $\delta(\Phi_0) = \Phi_1$, lo que implica que $G(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en banderas y por ello \mathcal{P} es geoméricamente regular.

□

Con lo visto hasta aquí tenemos suficiente información para dar inicio con el análisis geométrico de los 2- $\mathcal{P}gh$.

4.1. Los 2- $\mathcal{P}gh$ finitos en \mathbb{E}^2 . Un análisis geométrico

Antes de proceder con el análisis y construcción de los 2- $\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^2 mencionaremos unos puntos que son importante notar para evitar posibles escollos en las secciones posteriores.

4.1.1. Unas breves consideraciones previas a los 2- $\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^2

Para nuestro análisis geométrico de los 2- $\mathcal{P}gh$ en el plano \mathbb{E}^2 , es importante en principio estudiar las isometrías que dejan fija o invariante a una arista. Para ello, consideremos un polígono finito \mathcal{P} en \mathbb{E}^2 y recordemos que si $a \in \mathcal{F}_1(\mathcal{P})$, los elementos de $\mathbf{Iso}(\mathbb{E}^2)$ que dejan fija a la arista a son:

- i) La identidad ι en \mathbb{E}^2 .

- ii) La reflexión σ_m por la mediatriz m de a .
- iii) El medio giro ρ_M por el punto medio M de la arista a .
- iv) La reflexión σ_n respecto a la recta n que contiene a la arista a .

De las cuatro simetrías anteriores, la identidad y σ_n fijan a a punto a punto. Por otro lado, no es posible considerar a una traslación o un deslizamiento como elementos de $G(\mathcal{P})$ pues generarían una infinidad de aristas y \mathcal{P} es finito.

Los incisos ii) y iii) serán considerados en la siguiente sección (4.1.2) con la finalidad de conocer a los candidatos posibles para ser simetrías de un 2- $\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^2 . Por otra parte, es necesario notar que si consideramos la reflexión σ_n como simetría de \mathcal{P} , se presentan dos situaciones:

- a) Las aristas adyacentes a a deben estar en la recta n .
- b) El grado de los vértices incidentes a a es al menos 3.

En el caso a), la transitividad en vértices nos dice que el polígono es infinito (Figura 4.5), mientras que en el caso b) no se cumple la definición de polígono que estamos considerando (Figura 4.6).

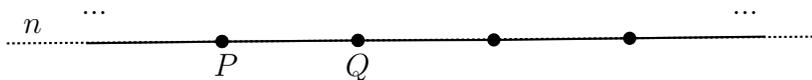


Figura 4.5: Aperígono, $\{\infty\}$, invariante bajo la reflexión σ_n .

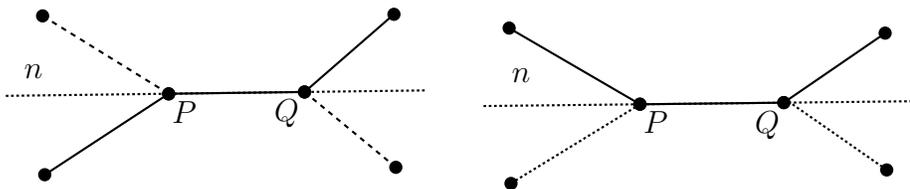


Figura 4.6: Polígono que no es invariante bajo la reflexión σ_n .

Con lo visto en estas consideraciones previas, tenemos a la mano la información necesaria para comenzar con el análisis de las posibles simetrías de las aristas para la construcción de un $2\text{-}\mathcal{P}gh$ en el plano \mathbb{E}^2 .

4.1.2. Las simetrías de \mathcal{P} y de sus aristas

Con base en lo expuesto en la sección anterior (4.1.1), ahora procederemos a analizar las posibles simetrías que dos aristas adyacentes de un $2\text{-}\mathcal{P}gh$ en el plano pueden tener. Tomemos a $\{a, a'\} \subset \mathcal{F}_1$ aristas *adyacentes* (es decir, que tienen un vértice en común, digamos P) y consideremos las siguientes simetrías para estas aristas:

Las reflexiones σ_m y σ_l por las mediatrices m y l de a y a' , respectivamente y los medios giros ρ_M y $\rho_{M'}$ por los puntos medios M y M' de las aristas a y a' , respectivamente.

Para comprender mejor la compatibilidad de las simetrías de las aristas, con las simetrías del polígono, analicemos los posibles productos de estas isometrías del plano.

Tengamos presente que sólo consideramos polígonos finitos, por lo que el grupo generado por estas simetrías tiene que ser finito también. Así, analicemos los casos en que dos de estas isometrías generan un grupo finito. Como ya se discutió en el Capítulo 1 Sección 1.3, necesitamos que los conjuntos de puntos fijos bajo nuestras dos involuciones coincidan en por lo menos un punto, por lo que tenemos:

1. σ_l y σ_m :

- a) Si $l \cap m \neq \emptyset$, tenemos que $\sigma_l \sigma_m$ es una rotación con centro $l \cap m = \{O\}$ y ángulo de rotación 2α , donde $\alpha = \angle(l \wedge m)$. Además, $|\langle \sigma_l, \sigma_m \rangle| < \infty$ si y sólo si $\alpha = \frac{p}{q}\pi$ donde podemos suponer $(p, q) = 1$. Este caso es un candidato para nuestro estudio.
- b) Si $l \cap m = \emptyset$, tenemos que $\sigma_l \sigma_m$ es una traslación. Por ello descartamos este caso.

2. ρ_M y $\rho_{M'}$:

a) Si $M = M'$ entonces, $\rho_M \rho_{M'}$ es la identidad. Además, sabemos que tanto ρ_M como $\rho_{M'}$ son involuciones, por lo que $\rho_{M'} = \rho_M^{-1} = \rho_M$. Si U y V son los vértices de a y V y W son los vértices de a' (recordemos que a y a' son adyacentes), entonces $\rho_M(V) = U$ y $\rho_{M'}(V) = W$, pero $\rho_M(V) = \rho_{M'}(V)$ lo que implica que $U = W$ y $a = a'$ (Figura 4.7). Un polígono en el plano que tenga estas simetrías es un segmento de recta (al que no consideramos un polígono).

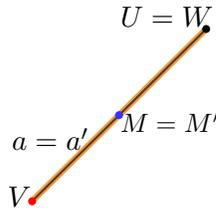


Figura 4.7: Segmento generado por los medios giros ρ_M y $\rho_{M'}$.

b) Si $M \neq M'$, tenemos que $\rho_M \rho_{M'}$ es una traslación. Motivo por el que también descartamos este caso.

3. σ_l y ρ_M (el análisis de σ_m y $\rho_{M'}$ es análogo):

a) Si $M \in l$ entonces, $\rho_M \sigma_l = \sigma_l \rho_M$ es una reflexión por la línea ortogonal a l que pasa por M . Esto implica que $\langle \rho_M, \sigma_l \rangle \cong D_2$ y generan una familia de polígonos como el que se muestra en la Figura 4.8. Para precisar un poco más en este caso, los elementos importantes para que se genere este tipo de polígono son el ángulo β entre las aristas, el cual satisface $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ (o de forma equivalente, el ángulo $\frac{\pi}{2} - \beta$ entre la arista a y la mediatriz l de la arista a') y la longitud de las aristas $\text{long}(a) > \text{long}(a')$. Este caso no se descarta, sin embargo, dado que la familia de polígonos así generados es un caso particular con pocos elementos para profundizar no ahondaremos en éstos durante nuestro estudio.

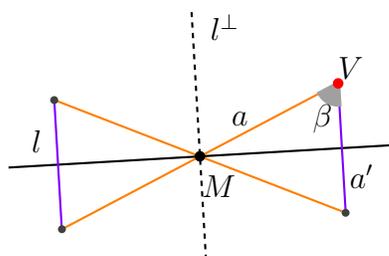


Figura 4.8: Polígono generado por $\langle \rho_M, \sigma_l \rangle$.

- b) Si $M \notin l$, tenemos que $\rho_M \sigma_l$ es un deslizamiento, por lo que descartamos este caso.

En vista de los incisos anteriores, únicamente consideraremos para nuestro estudio el caso del inciso 1.a) (Figura 4.9). Este caso será expuesto en la siguiente sección.

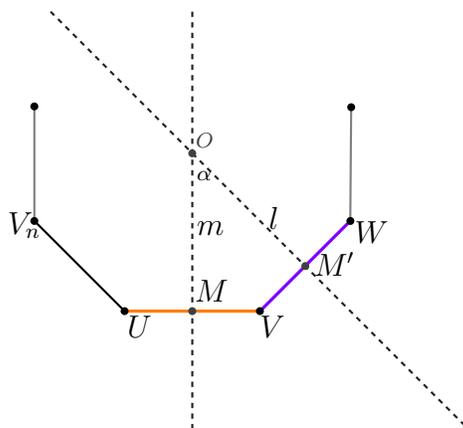


Figura 4.9: Polígono \mathcal{P} .

4.1.3. Las simetrías completas de \mathcal{P}

En este apartado buscamos analizar los $2\text{-}\mathcal{P}gh$ en el plano, a partir del reconocimiento de sus características geométricas. Para ello, estudiaremos los casos que son el resultado del análisis de la sección anterior, es decir, aquellos $2\text{-}\mathcal{P}gh$ en los que

$\langle \sigma_l, \sigma_m \rangle \leq G(\mathcal{P})$, donde m y l son las mediatrices de dos aristas consecutivas de \mathcal{P} .

Demos inicio preguntándonos, ¿cuál es el grupo completo de simetrías de estos 2- $\mathcal{P}gh$? En esta sección todo 2- $\mathcal{P}gh$ será tal que $\langle \sigma_l, \sigma_m \rangle \leq G(\mathcal{P})$.

Tomemos a \mathcal{P} un 2- $\mathcal{P}gh$ no regular y sea $\gamma \in G(\mathcal{P})$. Como $G(\mathcal{P})$ es finito, tenemos dos posibles casos para γ , que sea una rotación (con el mismo centro de rotación O que el formado por $\sigma_l \sigma_m$) o una reflexión (que necesariamente pasa por el punto de intersección de l y m , nuevamente O).

Primero, supongamos que γ es una rotación con centro en O y ángulo de rotación θ . Sea $\mathcal{F}_0 = \{V_0, V_1, \dots, V_{n-1}\}$ (ordenados de forma cíclica con relación al punto O) y tales que $\sigma_m(V_0) = V_1$ y $\sigma_l(V_0) = V_{n-1}$. Por el Teorema 4.3 y como \mathcal{P} es no regular tenemos que hay exactamente dos órbitas en aristas, de manera que $\sigma_l \sigma_m(V_0) = V_2$ y si j es tal que $j \equiv 0$ (módulo 2 entonces, existe r tal que $(\sigma_l \sigma_m)^r(V_0) = V_j$ y $(\sigma_l \sigma_m)^r(V_1) = V_{j+1}$.

Estamos en el supuesto que γ es una simetría de \mathcal{P} , por lo que $\gamma(V_0) = V_i$ para algún i . Además recordemos que γ es una rotación, por lo que tenemos los siguientes casos:

- a) Si i es par, primero notemos que $\gamma(V_0) = (\sigma_l \sigma_m)^r(V_0)$ para algún r . Por otro lado, sea $\delta := \gamma^{-1}(\sigma_l \sigma_m)^r \in G(\mathcal{P})$ y observemos que si $a \in \mathcal{F}_1$ con $V_0 \in a$ tenemos que $\delta(a) = a$. De lo contrario, $\delta(a) = a'$ con $\{a, a'\} \subset \mathcal{F}_1$ aristas adyacentes con V_0 en común. Lo que implica por la Proposición 4.2 que \mathcal{P} tendría una sola órbita en aristas, lo que contradice nuestra suposición. Por lo tanto, sea $\Phi = \{V_0, a\}$ una bandera para \mathcal{P} , por los argumentos anteriores concluimos que $\delta(\Phi) \in \text{Stab}_{G(\mathcal{P})}(\Phi)$ y por la Proposición 3.2 concluimos que $\gamma = (\sigma_l \sigma_m)^r$. Es decir, $\gamma \in \langle \sigma_l, \sigma_m \rangle$.
- b) Si i es impar, entonces
 - $\gamma \notin \langle \sigma_l \sigma_m \rangle$ y
 - existe r tal que $(\sigma_l \sigma_m)^r(V_1) = V_i$.

Primero, como $\gamma(V_0) = V_i$, tenemos $(\sigma_l \sigma_m)^{-r} \gamma(V_0) = V_1$. Por otro lado, sea $\delta := (\sigma_l \sigma_m)^{-r} \gamma \in G(\mathcal{P})$; ésta es una rotación tal que $\delta(V_0) = V_1$. De aquí deducimos que $\delta(V_j) = V_{j+1}$ para toda $j \in \{0, \dots, n\}$ y $\delta(a) = a'$ con

$\{a, a'\} \subset \mathcal{F}_1$ aristas adyacentes. Por lo que \mathcal{P} es transitivo en aristas y por la Proposición 4.5, concluimos que \mathcal{P} es regular, lo que contradice la supuesta no regularidad de \mathcal{P} .

Ahora, supongamos que γ es una reflexión, digamos $\sigma_{l'}$ en la línea l' que contiene a O (Figura 4.10 en línea punteada amarilla). Observemos lo siguiente: en virtud de que $\sigma_{l'}$ y σ_m son reflexiones, entonces $\sigma_{l'}\sigma_m = \rho_{O,\theta} := \rho$ una rotación que es simetría de \mathcal{P} y por lo tanto, regresamos al primer caso (ver Figura 4.10). Es decir, $\rho \in \langle \sigma_l, \sigma_m \rangle$ y por lo tanto $\sigma_{l'} \in \langle \sigma_l, \sigma_m \rangle$.

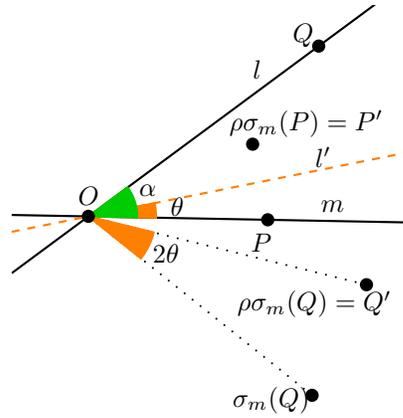


Figura 4.10: Visualización de $\sigma_{l'}\sigma_m = \rho$.

Por lo tanto, hemos demostrado que si \mathcal{P} no es regular, entonces $\gamma \in \langle \sigma_l, \sigma_m \rangle$. Lo que nos brinda la siguiente proposición.

Proposición 4.6. *Sea \mathcal{P} un 2- $\mathcal{P}gh$ en el plano y sean σ_l y σ_m las reflexiones en las mediatrices de aristas adyacentes. Supongamos que \mathcal{P} es finito y no regular, entonces $G(\mathcal{P}) = \langle \sigma_l, \sigma_m \rangle$ o bien \mathcal{P} es de la familia de polígonos que se obtuvieron en el caso 3. a) (Figura 4.8).*

Ahora estamos preparados para la construcción geométrica de los 2- $\mathcal{P}gh$ en el plano \mathbb{E}^2 .

4.1.4. Construcción geométrica de los 2- $\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^2

Para dar inicio a la construcción que haremos, consideremos la tripleta $(P; \sigma_l, \sigma_m)$, donde $\{\sigma_l, \sigma_m\} \subset \mathbf{Iso}(\mathbb{E}^2)$ son reflexiones de \mathbb{E}^2 tales que $l \cap m = \{O\}$ a quienes

denominaremos **generadores** y $P \in \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ al que llamaremos **punto base**. Sea $\rho_O = \sigma_l \sigma_m$ la rotación con centro en O y ángulo 2α , donde $\alpha = \angle(l \wedge m)$. Consideraremos únicamente las tripletas $(P; \sigma_l, \sigma_m)$ para las que $\alpha = \frac{p}{q}\pi$ con $(p; q) = 1$, al que nos referimos por **ángulo base** y el grupo $G(\mathcal{P}) = \langle \sigma_l, \sigma_m \rangle$. En primera instancia permitimos $P \in l \cup m$, y ese caso será abordado cuando se dé la situación de polígonos regulares o cuya realización no es fiel.

Construimos el polígono \mathcal{P} de la siguiente manera:

- 1) Los **vértices** de \mathcal{P} son los elementos de la órbita del punto P bajo el grupo $G(\mathcal{P})$, es decir, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_P$.
- 2) Con el punto P consideramos $\sigma_l(P) = P'$ y $\sigma_m(P) = P''$, de aquí obtenemos los segmentos $a = PP'$ y $a' = PP''$ (Figura 4.11). De esta forma las **aristas** de \mathcal{P} es el conjunto $\mathcal{F}_1 = \mathcal{O}_a \cup \mathcal{O}_{a'}$. Es decir, las aristas en \mathcal{O}_a son la órbita de PP' bajo $G(\mathcal{P})$ y las aristas en $\mathcal{O}_{a'}$ son la órbita de PP'' bajo $G(\mathcal{P})$. Demos cuenta que si $P = P'$ o $P = P''$ uno de los "segmentos base" desaparecerá y \mathcal{F}_1 consistirá únicamente de una órbita, por lo que \mathcal{P} sería regular y no lo consideraríamos en este estudio. Notemos que $P = P'$ si y sólo si $P \in l \cup m$, por lo que podemos suponer que $P \notin l \cup m$.

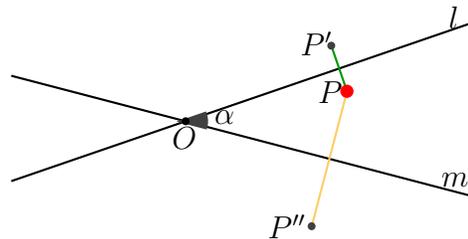


Figura 4.11: Los elementos para generar un 2- $\mathcal{P}gh$.

Como el ángulo de rotación es $2\alpha = \frac{2\pi p}{q}$, con $(p, q) = 1$ el orden del grupo $G(\mathcal{P})$ es $2q$, de hecho $G(\mathcal{P}) = \langle \sigma_l, \sigma_m \rangle = \{\iota, \sigma_l, \sigma_m, \rho_O, \dots, \rho_O^{q-1}, \sigma_m \rho_O, \dots, \sigma_m \rho_O^{q-2}\}$, es decir, $G(\mathcal{P}) \cong D_q$. El valor de p nos indicará la cantidad de vueltas al rededor de O que necesita el polígono para cerrarse; por lo tanto, el tamaño de \mathcal{F}_0 también es $2q$, salvo casos particulares que estudiaremos mas adelante, además el tamaño para cada órbita de aristas es q debido a que cada arista es estabilizada por la reflexión en su mediatriz y ésta es un elemento de $G(\mathcal{P})$. Cabe notar que de esto tenemos un $2q$ -ágono abstracto, del cual en los siguientes párrafos veremos las regiones en el

plano donde el polígono tiene un comportamiento que nos interesa.

El polígono así generado será equiángulo (mas no necesariamente equilátero), pues tiene una única órbita en vértices. Ahora, si a y a' están en la misma órbita bajo $G(\mathcal{P})$, entonces $\text{long}(a) = \text{long}(a')$; pero si a y a' están en distinta órbita bajo $G(\mathcal{P})$, entonces $\text{long}(a) \neq \text{long}(a')$ si y sólo si P no está en la bisectriz de l y m . De otra manera $\text{long}(a) = \text{long}(a')$ y veremos más adelante que en este caso el polígono es regular.

Es importante para nuestro estudio identificar las zonas en el plano que bajo el grupo $G(\mathcal{P})$, el polígono que se obtenga sea regular o cuya realización no sea fiel ya que estos casos no son de interés para este trabajo. A estas regiones las denominaremos **zonas límite** y dentro de esta clasificación conviene presentarlas de la siguiente forma.

Zonas límite regulares:

$$\text{i) } \mathbf{Y}_1 \doteq \{X \in \mathbb{E}^2 \mid X \in l \cup m\}.$$

$$\text{ii) } \mathbf{Z}_1 \doteq \{X \in \mathbb{E}^2 \mid X \in b_{lm} \cup b_{lm}^\perp\}.$$

Donde b_{lm} y b_{lm}^\perp son las bisectrices de los ángulos formados por l y m .

Zonas límite propias:

$$\text{iii) } \mathbf{Y} \doteq \{X \in \gamma(l) \mid \gamma \in \langle \sigma_l, \sigma_m \rangle \setminus \{l\}\} \cup \{X \in \gamma(m) \mid \gamma \in \langle \sigma_l, \sigma_m \rangle \setminus \{l\}\}.$$

Ahora veamos qué es lo que sucede en las regiones límite cuando el punto base pertenece a alguna de ellas.

- Si $P \in \mathbf{Y}_1$ el polígono generado será regular, pues al pertenecer P a uno de los generadores perdemos una órbita en las aristas, por lo que tenemos una sola órbita de estas. Así por la Proposición 4.5 tenemos que el polígono es regular, excepto cuando $\alpha = \frac{1}{2}\pi$; en este caso el polígono resultante será un segmento de recta.

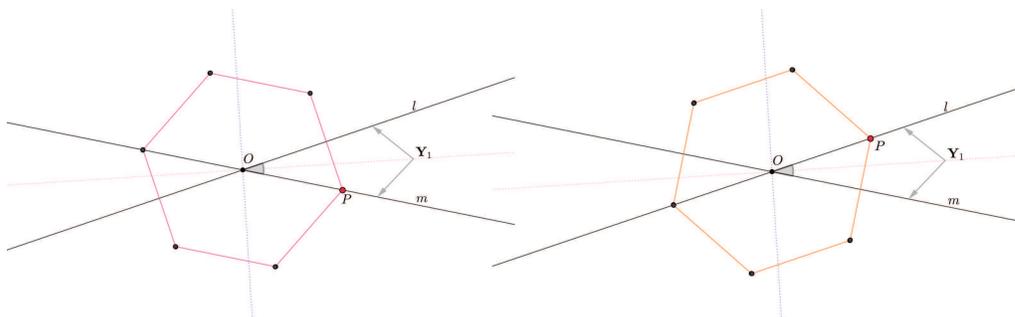


Figura 4.12: Punto base en la zona límite \mathbf{Y}_1 y con ángulo base $\alpha = \frac{1}{6}\pi$.

- Si $P \in \mathbf{Z}_1$ el polígono generado también será regular pues tenemos $d(P, l) = d(P, m)$. Esto implica que $\text{long}(a) = \text{long}(a')$ para a y a' aristas de \mathcal{P} . Notemos además, que σ_{b_m} (la reflexión en b_m) es una simetría de \mathcal{P} , por lo que $G(\mathcal{P}) = \langle \sigma_l, \sigma_m, \sigma_{b_m} \rangle$ y actúa de manera transitiva en las aristas de \mathcal{P} . De esto y por la Proposición 4.5 tenemos que el polígono es regular.

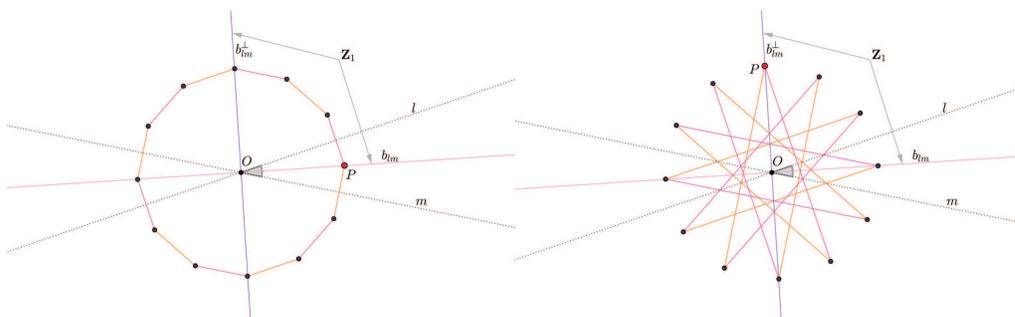


Figura 4.13: Punto base en la zona límite \mathbf{Z}_1 y con ángulo base $\alpha = \frac{1}{6}\pi$.

Es preciso notar que hay dos elecciones del ángulo α que sólo generan zonas límite regulares, $\alpha \in \{\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi\}$, esto sucede pues en el primer caso el ángulo de rotación es π , mientras que en el segundo, el ángulo entre la bisectriz exterior y los generadores es el mismo que el ángulo entre los generadores, por lo que el conjunto \mathbf{Y} consiste en única recta, misma que coincide con la bisectriz exterior de los generadores.

Para el análisis en el caso que intervienen los puntos del conjunto \mathbf{Y} , consideremos r la recta que contiene a P y a O . Entonces existe $\gamma \in \langle \sigma_l, \sigma_m \rangle \setminus \{l\}$ tal que $\gamma(l) = r$ o $\gamma(m) = r$; denotando a la simetría de la manera natural, supongamos que

$\sigma_r = \sigma_{\gamma(l)}$. Notemos que $\sigma_r \in G(\mathcal{P})$ ya que $\sigma_r = \sigma_{\gamma(l)} = \gamma\sigma_l\gamma^{-1} \in G$, por lo que $\sigma_l\sigma_r$ y $\sigma_r\sigma_l$ también son elementos de $G(\mathcal{P})$.

Notemos que como $\sigma_r(P) = P$, el estabilizador de P en $G(\mathcal{P})$ tiene cardinalidad 2 entonces, por el teorema órbita-estabilizador tenemos por un lado, que $|G| = 2q$ y por otro $|G(\mathcal{P})| = 2 \cdot |\mathcal{O}(P)|$, por lo que $|\mathcal{F}_0| = q$ y por lo tanto, no es una realización fiel de un $2q$ -ágono.

A continuación, mostramos algunos ejemplos (Figuras 4.14, 4.15 y 4.16) en los que el punto base se encuentra en esta zona (\mathbf{Y}), con algunos casos respecto del ángulo α , esto con la finalidad de comprender mejor la estructura geométrica del polígono en estas zonas.

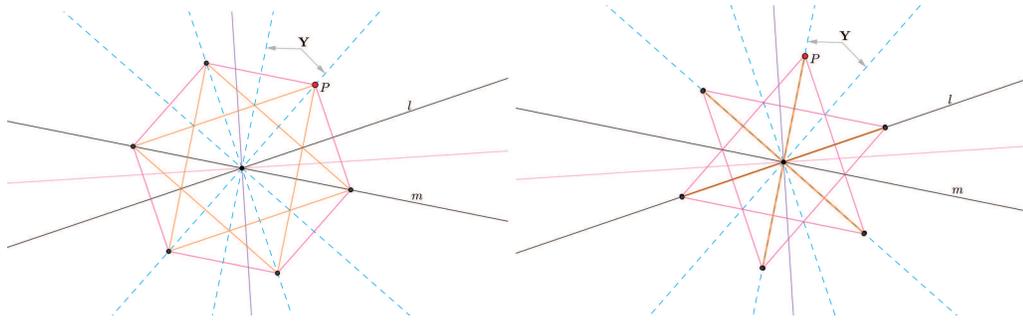


Figura 4.14: Punto base en la zona límite \mathbf{Y} (con líneas punteadas azules) con ángulo base $\alpha = \frac{1}{6}\pi$.

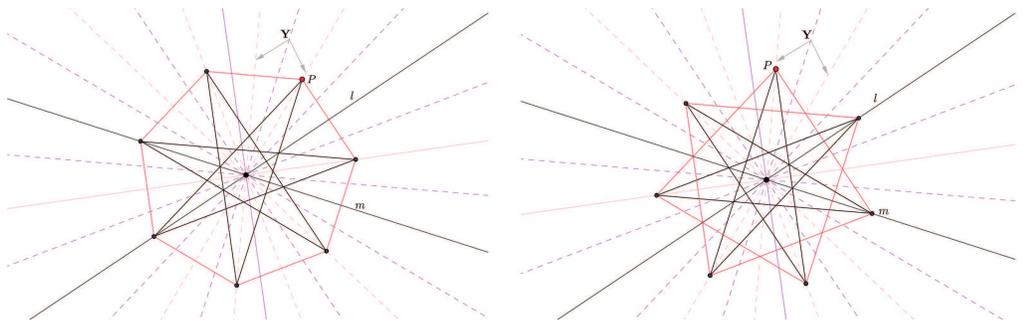


Figura 4.15: Punto base en la zona límite \mathbf{Y} (con líneas punteadas rosas) con ángulo base $\alpha = \frac{2}{7}\pi$.

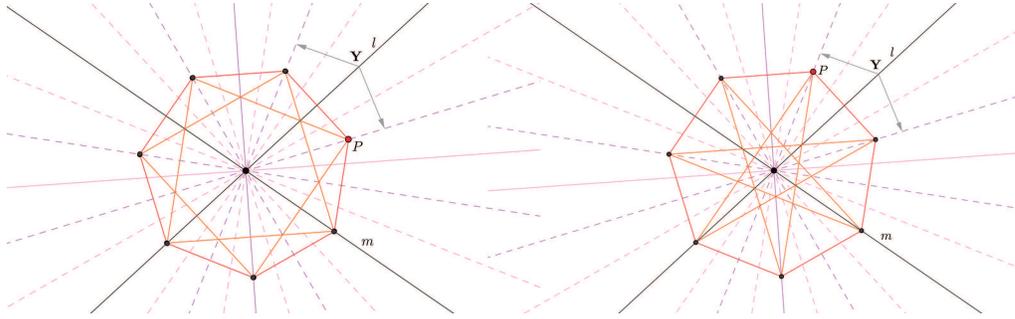


Figura 4.16: Punto base en la zona límite \mathbf{Y} (con líneas punteadas lilas) con ángulo base $\alpha = \frac{3}{7}\pi$.

En vista de este análisis, llamaremos *región natural* aquella región \mathbf{R} del plano tal que $\mathbf{R} \doteq \mathbb{E}^2 \setminus \mathbf{Y} \cup \mathbf{Y}_1 \cup \mathbf{Z}_1$, las zonas límite antes definidas.

Para la construcción geométrica de los 2- $\mathcal{P}gh$, tengamos en mente las siguientes consideraciones. Las bisectrices (interna y externa) al ser ortogonales dividen el plano en cuatro regiones, donde cada uno de estos cuadrantes contiene un rayo que forma parte de los generadores; basta que consideremos al punto base P en uno de estos cuadrantes, ya que cambiar de cuadrante únicamente intercambia el color de las aristas.

Como lo mencionamos anteriormente, estos polígonos son equiangulares, de hecho el ángulo β entre dos aristas consecutivas es $\pi - \alpha$ si P está en la región delimitada por la rectas l y m que forman el ángulo α . Esto lo podemos comprobar ya que: P , O y los pies de las perpendiculares de P a m y l respectivamente, forman un cuadrilátero cíclico. Por un razonamiento análogo, tenemos que si P está en la región delimitada por la rectas l y m cuyo ángulo es el suplementario de α , entonces el ángulo $\beta = \alpha$.

Con el material expuesto en esta sección podemos formular el siguiente teorema:

Teorema 4.7. *Sea \mathcal{P} un polígono finito en el plano \mathbb{E}^2 cuyos vértices equidistan de un punto O (el cual definiremos a continuación). Entonces:*

\mathcal{P} es un 2- $\mathcal{P}gh$ si y solamente si se satisface una y solo una de las siguientes:

i) \mathcal{P} es regular.

ii) \mathcal{P} tiene dos órbitas en aristas bajo la acción del grupo $G = \langle \sigma_l, \sigma_m \rangle$, donde para una elección arbitraria de aristas adyacentes de \mathcal{P} , σ_l y σ_m son las reflexiones cuyos ejes de reflexión son las mediatrices l y m de estas aristas y tales que $l \cap m = \{O\}$.

iii) \mathcal{P} es de la familia de cuadriláteros tipo "moño" que se obtuvieron en el caso 3. a) (Figura 4.8).

Además en el caso ii) si el conjunto de vértices de \mathcal{P} , $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, cumple que $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ esta contenido en la región natural \mathbf{R} (como se definió en la página 135), entonces la realización de \mathcal{P} es fiel y no regular.

Nuestro estudio es acerca de realizaciones geométrica de polígonos. Tengamos presente que como objetos combinatorios estos polígonos tienen símbolo de Schläfli $\{2q\}$. Sin embargo, a continuación introducimos una notación, que si bien no rescata por completo la geometría del objeto, nos brinda intuitivamente la composición de los mismos. Así, dado un 2- $\mathcal{P}gh$ en el plano lo denotaremos por:

$$\left\{ \frac{2q}{a * b} \right\},$$

donde $q > 2$ y tanto a como b son los "brincos" de vértices consecutivos (sin contar el vértice origen) para las arista del polígono, dado un orden levógiro o dextrógiro de ellos. Por ejemplo, $\left\{ \frac{18}{1*1} \right\}$ es el octadecágono convexo que tiene sus aristas consecutivas (Figura 4.17 inciso a)) y $\left\{ \frac{18}{1*15} \right\}$ es el octadecágono tal que, iniciamos en un vértice origen (V_0), la primer arista va al vértice consecutivo (V_1) y luego contamos 15 vértices consecutivos (a partir del vértice en donde estamos para llegar al vértice V_{16}) para la arista siguiente; nuevamente, a partir de aquí contamos 1 y luego 15 y continuamos con este razonamiento. En este ejemplo el orden es dextrógiro (Figura 4.17 inciso b)).

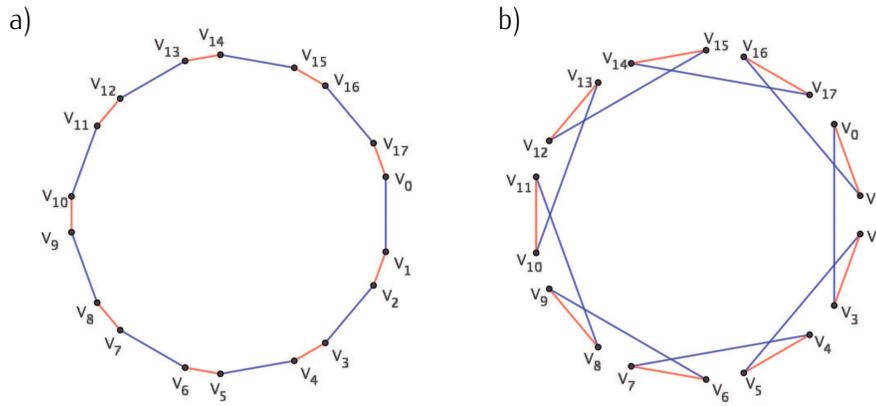


Figura 4.17: a) Ejemplo de un polígono $\left\{\frac{18}{1*1}\right\}$ y b) Ejemplo de un polígono $\left\{\frac{18}{1*15}\right\}$.

Un polígono que será de nuestro interés en este trabajo son los cuadriláteros tipo “moño” que aparecieron en el caso 3. a) (Figura 4.8). Dado que la notación que introdujimos para los 2- $\mathcal{P}gh$ no es adecuada para este caso, denotaremos a este objeto por $\left\{\frac{4}{1(-1)*2}\right\} \doteq 4^*$. De esta forma, cuando aparezca la notación 4^* tengamos presente que se trata de esta familia de cuadriláteros.

Llegando a este punto es preciso mencionar que en el artículo “*Metamorphoses of polygons*” [23] Grünbaum realizó un estudio histórico de los polígonos *isogonales*¹ y polígonos *isotoxales*². En este artículo Grünbaum expuso una caracterización geométrica para los polígonos isogonales en donde presenta las herramientas y análisis que utilizaron Meister, Poincot, Brücker, Hess y Günther.

En su artículo, Grünbaum parte de los polígonos estrellados de tipo $\left\{\frac{n}{d}\right\}$ con $(n, d) = 1$ y $d \leq \frac{n}{2}$ con n par. De esta forma, considera para $j \in \{1, \dots, n\}$, puntos V_j en un círculo \mathbf{C} , que determinan con un radio fijo r de \mathbf{C} un ángulo de $2\pi\frac{d}{n}j$, y se unirá cada V_j con V_{j+1} por un segmento, con lo que obtiene un polígono regular de tipo $\left\{\frac{n}{d}\right\}$. A partir de aquí construye la familia de polígono isogonales, considerando un parámetro real $0 \leq t \leq \frac{n}{4}$ y tomando V_j de tal forma que el ángulo con el radio r sea

¹Un polígono \mathcal{P} se dice que es **isogonal** si el grupo de simetrías de \mathcal{P} es transitivo en el conjunto de vértices de \mathcal{P} .

²Un polígono \mathcal{P} se dice que es **isotoxal** si el grupo de simetrías de \mathcal{P} es transitivo en el conjunto de arista de \mathcal{P} .

$$\frac{2\pi}{n} (j \cdot d + (-1)^j \cdot t).$$

De esta forma, Grünbaum obtiene la familia de polígonos isogonales que parten del polígono regular $\{\frac{n}{d}\}$ y conforme varía el parámetro t se llega al polígono regular $\{\frac{n}{e}\}$ donde $e = \frac{n}{2} - d$.

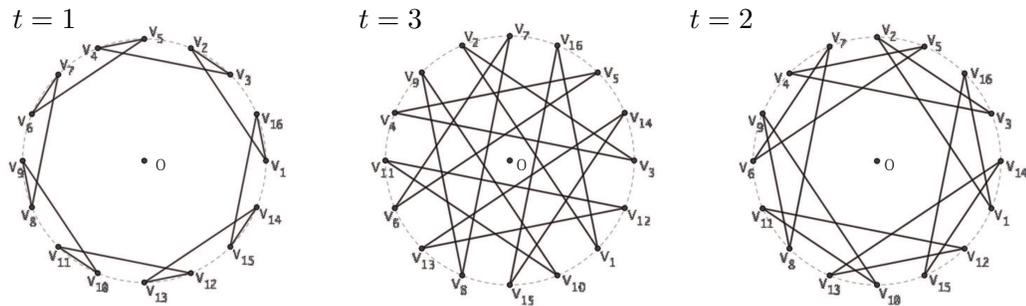


Figura 4.18: Ejemplos de la “metamorfosis” del polígono $\{\frac{16}{1}\}$ para tres valores distintos de t ($0 \leq t \leq \frac{9}{2}$ y $d = 1$).

Por nuestra parte, el análisis que se abordó dentro de este capítulo también brindó, de otra forma, una caracterización de los polígonos isogonales. La equivalencia con el trabajo de Grünbaum se muestra en la construcción que proponemos. Tomamos el punto base P sobre la bisectriz interna b_{lm} y hacemos variar continuamente a P sobre una circunferencia (implícita) de radio fijo r y centro en O hasta la bisectriz externa b_{lm}^\perp , así obtenemos la “metamorfosis” de los polígonos que muestra Grünbaum. Para ver un ejemplo de esto, podemos notar de los polígonos de la Figura 4.18 comparados con los polígonos de las figuras 4.22, 4.23 y 4.24 con $t \in \{1, 2, 3\}$ respectivamente.

Por otro lado, Grünbaum muestra también el concepto de dualidad, expresado como “puntos en rectas y viceversa”, entre los polígonos isogonales y los isotoxales³ (Figura 4.19).

³Para ello, Grünbaum propone por dualidad δ , cambiar el segmento por su punto medio y aristas adyacentes serán vértices adyacentes (y viceversa).

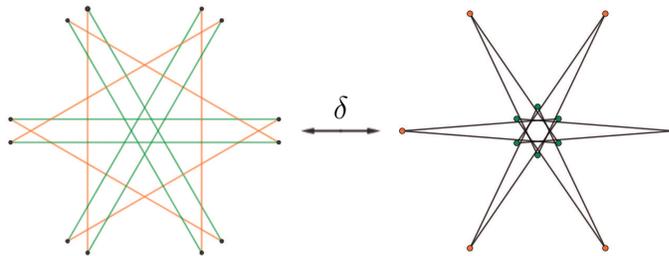


Figura 4.19: Ejemplo de un polígono isogonal e isotoxal bajo la dualidad.

El concepto de dualidad, lo considera con un análisis cuidadoso desde una perspectiva geométrica, esto porque en su análisis, exhibe polígonos isogonales que no tienen como dual a un polígono isotoxal y viceversa (Figura 4.20). Cabe aclarar que la figura que aparece en el inciso b) no es polígono con la definición que estamos utilizando, sin embargo, sí lo es para la definición de polígono que utiliza Grünbaum.

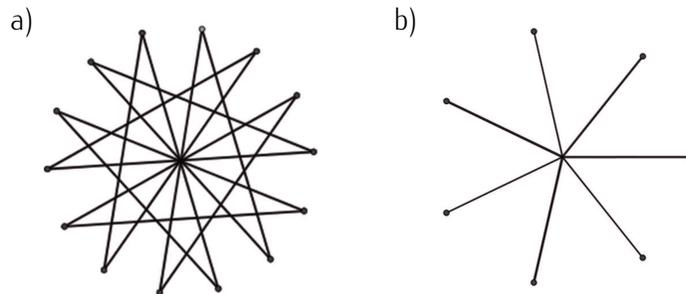


Figura 4.20: a) Ejemplo de un polígono isogonal que no admite un polígono dual isotoxal y b) Ejemplo de un polígono isotoxal que no admite un polígono dual isogonal.

De lo aquí expuesto, si en nuestro análisis consideramos la dualidad propuesta por Grünbaum, tenemos una construcción análoga de polígonos isotoxales, estudio que, por la extensión de este trabajo, se considerará en otro momento.

A continuación, de regreso a nuestro estudio, en cada uno de los ejemplos siguientes mostraremos polígonos donde el punto P se encuentra dentro de las regiones naturales. Sin embargo, son solo casos que seleccionamos entre familias de polígonos que cambian de forma continua. Por otro lado, para cada uno de ellos se especificará el ángulo α entre las líneas l y m , donde tomaremos a $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Podemos hacer esto, puesto que si $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ entonces, lo sustituimos por $\pi - \alpha$ que también es el ángulo entre l y m .

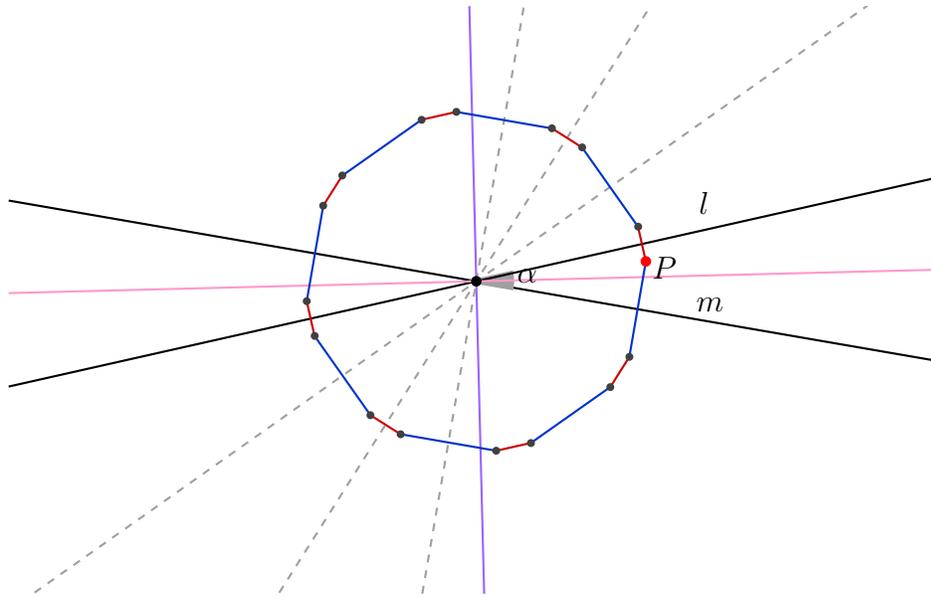


Figura 4.21: Polígono $\left\{\frac{16}{1*1}\right\}$ con $\alpha = \frac{1}{8}\pi$.

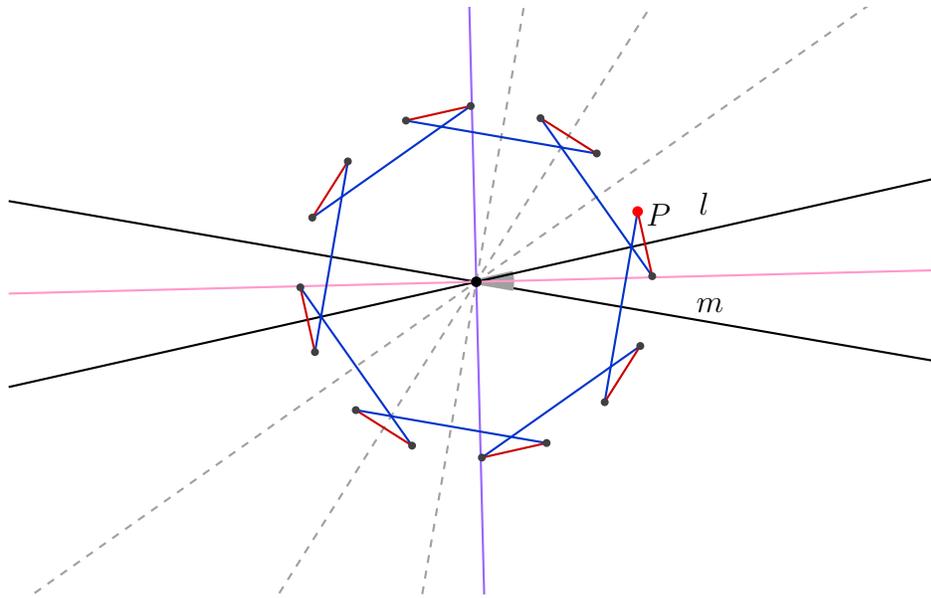


Figura 4.22: Polígono $\left\{\frac{16}{1*13}\right\}$ con $\alpha = \frac{1}{8}\pi$.

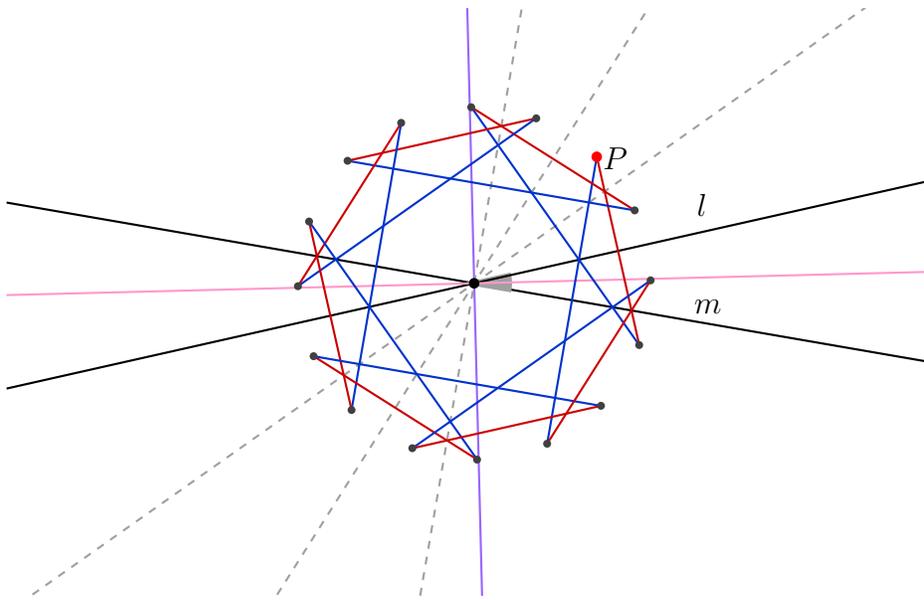


Figura 4.23: Polígono $\left\{ \frac{16}{3*11} \right\}$ con $\alpha = \frac{1}{8}\pi$.

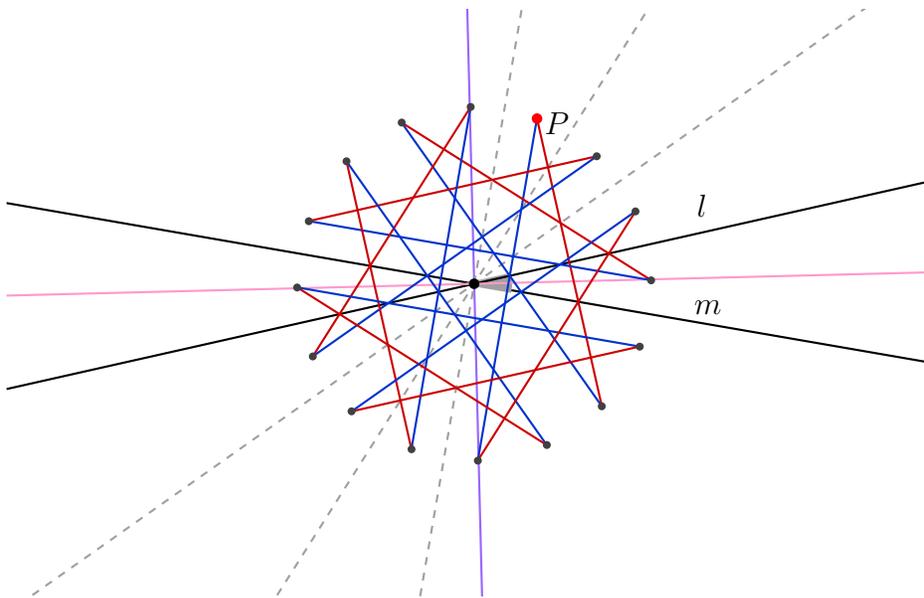


Figura 4.24: Polígono $\left\{ \frac{16}{5*9} \right\}$ con $\alpha = \frac{1}{8}\pi$.

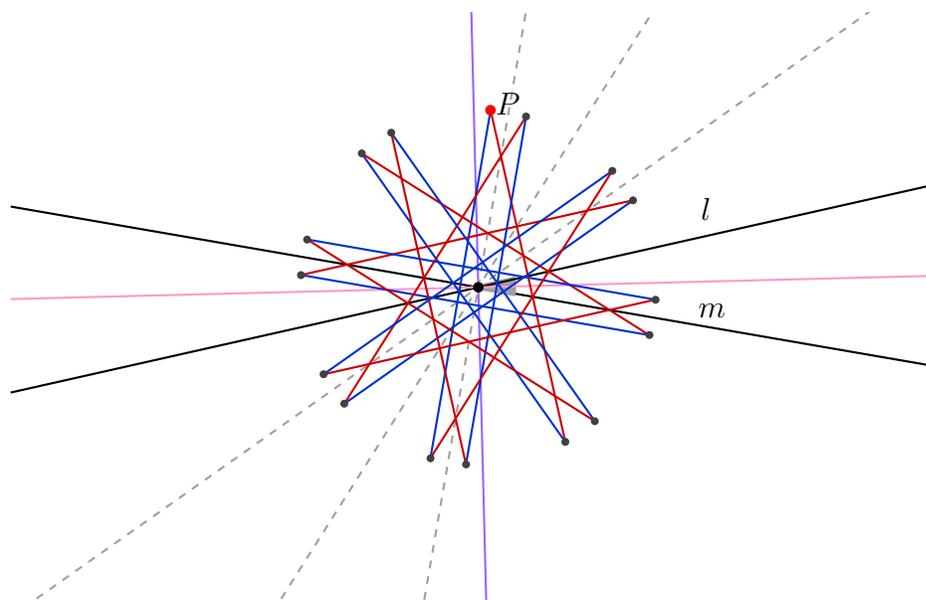


Figura 4.25: Polígono $\left\{\frac{16}{7*7}\right\}$ con $\alpha = \frac{1}{8}\pi$.

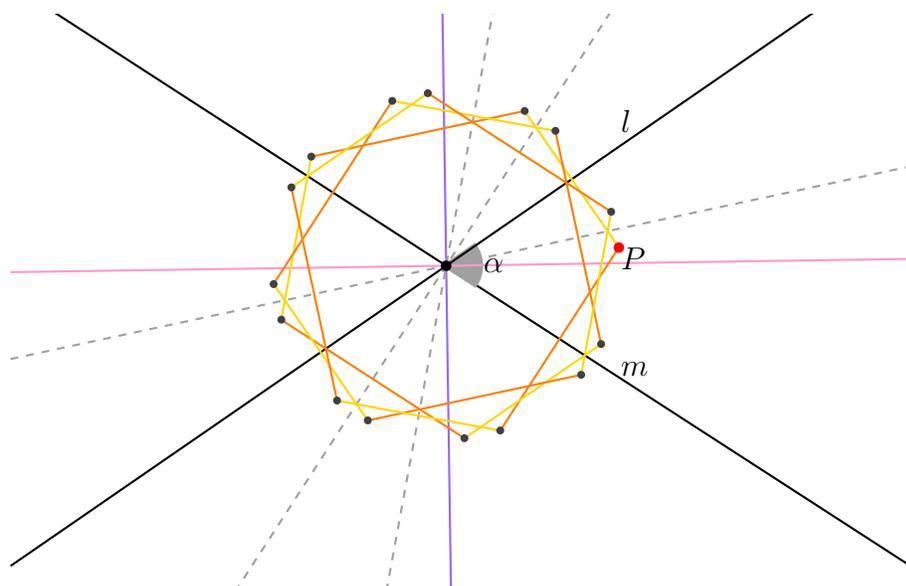


Figura 4.26: Polígono $\left\{\frac{16}{3*3}\right\}$ con $\alpha = \frac{3}{8}\pi$.

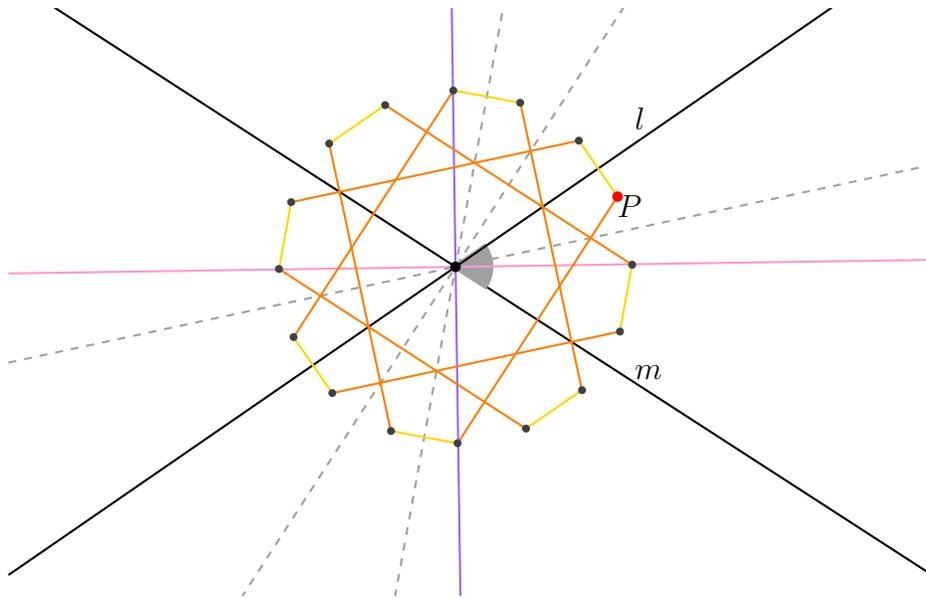


Figura 4.27: Polígono $\left\{ \frac{16}{1*5} \right\}$ con $\alpha = \frac{3}{8}\pi$.

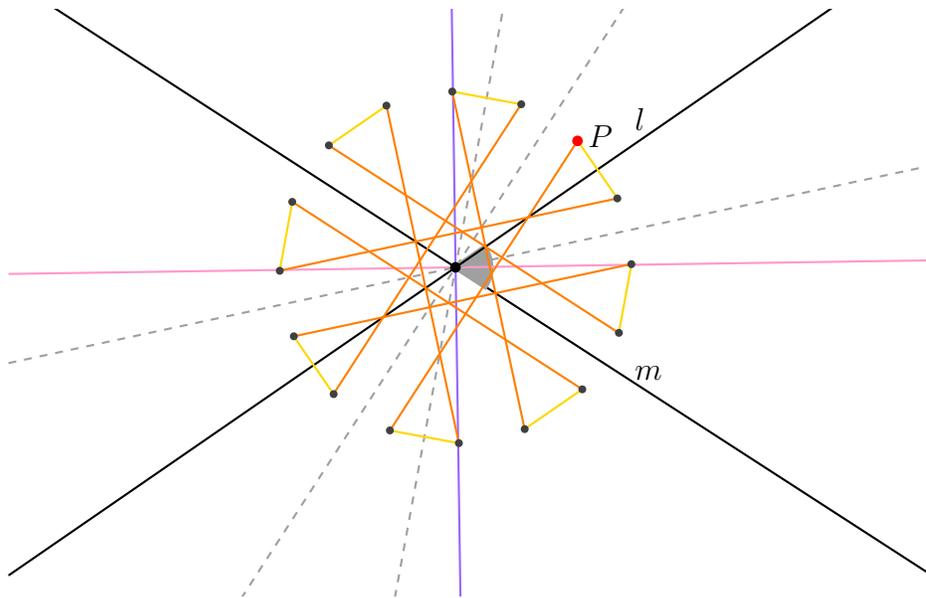


Figura 4.28: Polígono $\left\{ \frac{16}{1*9} \right\}$ con $\alpha = \frac{3}{8}\pi$.

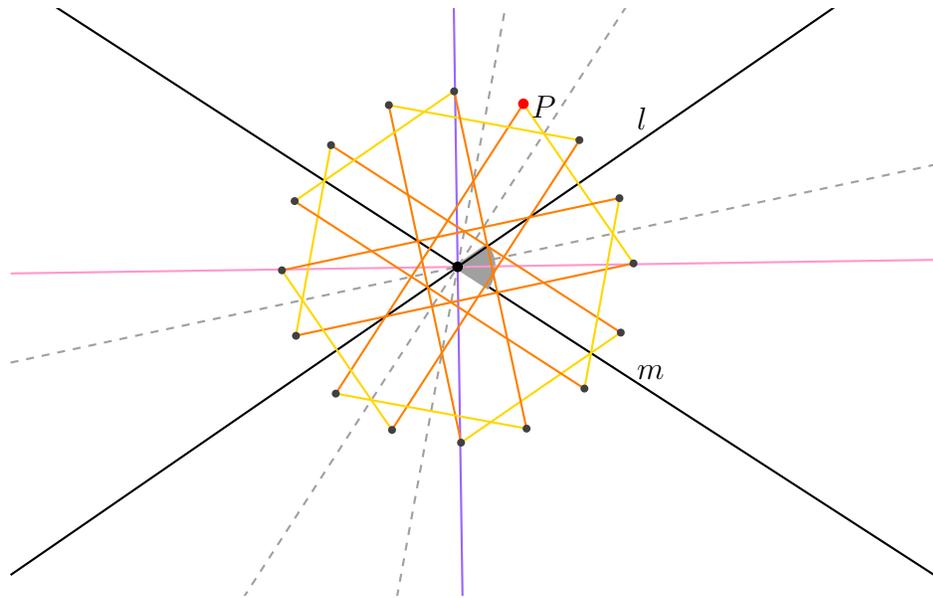


Figura 4.29: Polígono $\left\{\frac{16}{3*7}\right\}$ con $\alpha = \frac{3}{8}\pi$.

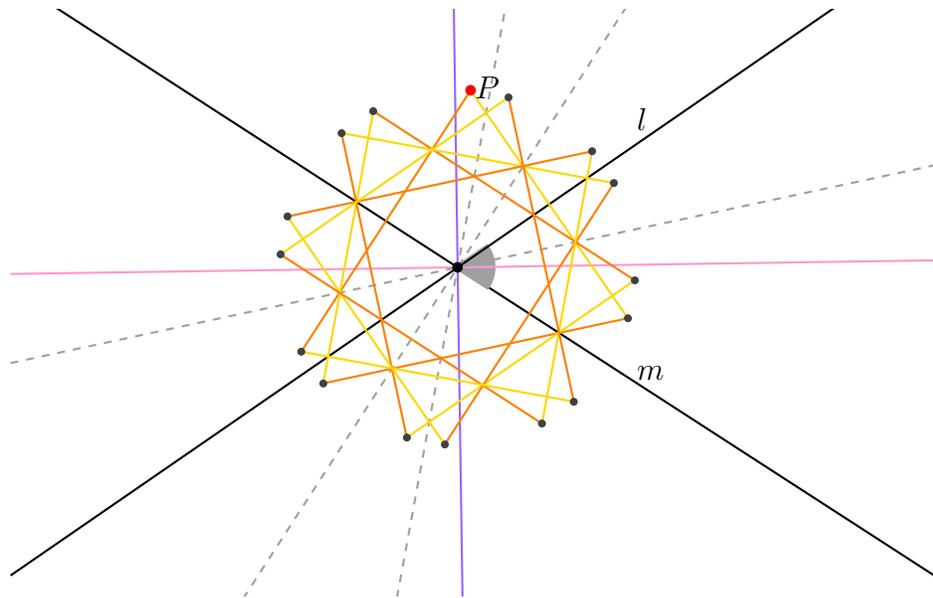


Figura 4.30: Polígono $\left\{\frac{16}{5*5}\right\}$ con $\alpha = \frac{3}{8}\pi$.

4.2. Los 2- $\mathcal{P}gh$ finitos en \mathbb{E}^3 . Un análisis geométrico

En este apartado analizaremos a los 2- $\mathcal{P}gh$ que habitan en el espacio euclidiano de dimensión 3. De forma análoga a como se realizó el estudio en el plano, nos apoyaremos en las isometrías ahora del espacio euclidiano, con la premisa que generen un grupo finito.

4.2.1. Unas breves consideraciones previas a los 2- $\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^3

Para nuestro análisis geométrico de los 2- $\mathcal{P}gh$ en el espacio \mathbb{E}^3 , es importante en principio estudiar las isometrías que dejan fija o invariante a una arista. Para ello, consideremos un polígono finito \mathcal{P} en \mathbb{E}^3 y recordemos que si $a \in \mathcal{F}_1(\mathcal{P})$, los elementos de $\mathbf{Iso}(\mathbb{E}^3)$ que dejan fija a la arista a son:

- i) La identidad ι en \mathbb{E}^3 .
- ii) La reflexión σ_{Π} por el plano mediatriz Π de a .
- iii) Los medios giros ρ_l por las rectas l perpendiculares a a y que contengan el punto medio de esta arista.
- iv) La inversión central σ_O por el punto O que es el punto medio de la arista a .
- v) Cualquier rotación cuyo eje contenga a la arista a . Cuando consideremos a una de estas rotaciones la denotaremos por ρ_s , donde s es el eje de rotación tal que $a \subset s$.
- vi) Cualquier reflexión cuyo plano de reflexión contenga a la arista a . Cuando consideramos a una de estas reflexiones la denotaremos por σ_{Δ} , donde Δ es el plano de reflexión tal que $a \subset \Delta$.

De las simetrías anteriores, la identidad, la rotación ρ_s y la reflexión σ_{Δ} fijan a a punto a punto. Por otro lado, notemos que en este análisis no es posible considerar a una traslación, un deslizamiento o un tornillo como elementos de $G(\mathcal{P})$ pues generarían una infinidad de vértices y aristas en contradicción con el hecho que \mathcal{P} es finito.

Los incisos ii), iii) y iv) serán considerados en la siguiente sección (4.2.2) con la finalidad de conocer a los candidatos posibles para ser simetrías de un 2- $\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^3 .

A continuación se descartarán los casos donde se presenta a la rotación ρ_s o la reflexión σ_Δ (de los incisos v) y vi)) como simetrías de \mathcal{P} .

En la situación de considerar la rotación ρ_s como simetría de la arista a de \mathcal{P} , se presentan los siguientes casos:

- a) Las aristas adyacentes a a deben estar en la recta s .
- b) El grado de alguno de los vértices incidentes a a es al menos 3.

En el caso a) la transitividad en vértices nos dice que el polígono es infinito, mientras que en el caso b) no cumple la definición de polígono que estamos considerando.

Mientras en la situación de tener a la reflexión σ_Δ como simetría de la arista a de \mathcal{P} , se presentan los siguientes casos:

- a) Las aristas adyacentes a a deben estar en el plano Δ y en consecuencia también están en la recta n determinada por los vértices de a o las arista adyacentes a a están en el plano Δ pero no en la recta n .
- b) El grado de alguno de los vértices incidentes a a es al menos 3.

En la primer situación, por la transitividad de los vértices tenemos que es un polígono plano, finito o infinito (como aperígono o un zigzag), contenido completamente en Δ (de lo contrario caemos en el inciso b)), y en ésta, la reflexión actúa como la identidad. En el segundo inciso no se cumple la definición de polígono que estamos considerando.

Con lo visto en estas consideraciones previas, tenemos a la mano la información necesaria para comenzar con el análisis de las posibles simetrías de las aristas para la construcción de un 2- $\mathcal{P}gh$ en el espacio \mathbb{E}^3 .

4.2.2. Las simetrías de \mathcal{P} y de sus aristas

Con base en lo expuesto en la sección anterior (4.2.1), ahora procederemos a analizar las posibles simetrías que dos aristas adyacentes de un 2- $\mathcal{P}gh$ en el plano pueden tener. Tomemos a $\{a, a'\} \subset \mathcal{F}_1$ aristas *adyacentes* (es decir, que tienen un vértice en común, digamos P) y consideremos las siguientes simetrías para estas aristas:

Las reflexiones σ_Π por los planos mediatrices de a y a' , respectivamente, los medios giros ρ_l con ejes de rotación l perpendiculares a cada arista y que contengan el punto

medio de las aristas a y a' , respectivamente y las inversiones centrales σ_O con centro en el punto medio O de las aristas a y a' , respectivamente.

Para comprender mejor la compatibilidad de las simetrías de las aristas, con las simetrías del polígono, analicemos los posibles productos de estas isometrías del plano.

Tengamos presente que sólo consideramos polígonos finitos, por lo que el grupo generado por estas simetrías tiene que ser finito también. Así, analicemos los casos en que dos de estas isometrías generan un grupo finito. Como ya se discutió en el Capítulo 1 Sección 1.3, necesitamos que los conjuntos de puntos fijos bajo nuestras dos involuciones coincidan en por lo menos un punto, por lo que tenemos:

1. σ_{Π_1} y σ_{Π_2} :

- a) Si $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$, tenemos una rotación $\rho_{m,\theta}$ en la recta $m = \Pi_1 \cap \Pi_2$ y ángulo $\theta = 2\angle(\Pi_1 \wedge \Pi_2)$ (Figura 4.31 inciso I)). Éstas generarán un grupo finito si y sólo si $\theta = \frac{2}{q}\pi$ y sin pérdida de generalidad suponemos que $(p, q) = 1$. En este caso, podemos considerar a Π el plano ortogonal a m que contienen al punto base P , entonces el polígono generado por σ_{Π_1} y σ_{Π_2} será un polígono en el plano (Figura 4.31 inciso II)) y el análisis es idéntico al desarrollado en la Sección 4.1.

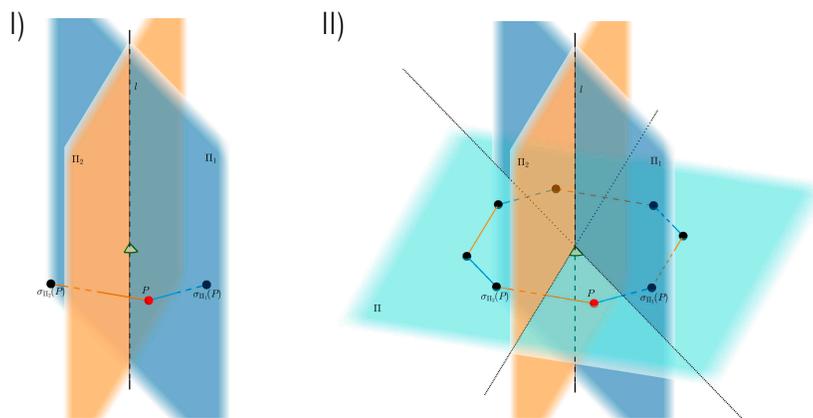


Figura 4.31: a) Punto base P con las aristas dadas por los generadores σ_{Π_1} y σ_{Π_2} . b) Ejemplo de uno de los polígonos planos resultante.

b) Si $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$, tenemos que $\sigma_{\Pi_1} \sigma_{\Pi_2}$ es una traslación τ , motivo por el que descartamos este caso.

2. ρ_l y ρ_m :

a) Si $l \cap m \neq \emptyset$, tenemos una rotación $\rho_{n,\theta}$ donde n es la recta ortogonal al plano que contiene a l y m que pasa por el punto $\{Q\} = l \cap m$ y θ es el doble del ángulo entre las rectas l y m . Este caso será de nuestro interés, ya que a primera vista tenemos una situación análoga al caso 1.a). Sin embargo, este caso presenta un comportamiento distinto en los polígonos cuando el punto base no está en el plano generado por l y m y será estudiado en las secciones 4.2.3 y 4.2.4.

b) Si $l \cap m = \emptyset$, tenemos:

b.1) Si $l \parallel m$, tenemos una traslación τ , por lo que no consideramos este caso.

b.2) Si $l \nparallel m$, tenemos un tornillo γ , por lo que tampoco es de nuestro interés este caso.

3. σ_O y σ_Q :

a) Si $O \neq Q$ tenemos una traslación τ , por lo que no se considerará.

4. σ_{Π} y ρ_l :

a) Si $l \subseteq \Pi$. Tenemos que $\rho_l \sigma_{\Pi} = \sigma_{\Pi} \rho_l$, esto implica que $\langle \rho_l, \sigma_{\Pi} \rangle \cong D_2$ y generan una familia de cuadriláteros de tipo 4^* (Figura 4.32 inciso II)). Además, el producto de ρ_l y σ_{Π} es la reflexión $\sigma_{\Pi'}$ por el plano Π' , perpendicular a Π y que contiene a la recta l .

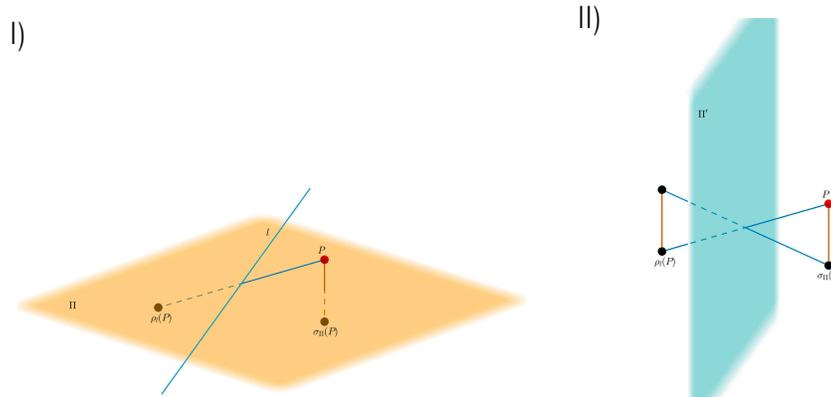


Figura 4.32: I) Punto base P con las aristas dadas por los generadores σ_{Π} y ρ_l . II) Ejemplo de uno de los cuadriláteros resultante tipo 4^* .

b) Si $l \not\subseteq \Pi$, pero $l \cap \Pi = \{O\}$, tenemos una reflexión con giro $\phi_{n,\theta}$, a continuación mencionaremos como se obtiene la recta n y el ángulo θ . Sean Π_1 y Π_2 planos tales que $\rho_l = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}$ y de modo que Π_1 sea ortogonal a Π , entonces $n = \Pi \cap \Pi_2$ y $\theta = 2\angle(\Pi \wedge \Pi_2)$. Además, $|\langle \sigma_{\Pi}, \rho_l \rangle| < \infty$ si y sólo si $\alpha = \frac{p}{q}\pi$, donde podemos suponer $(p, q) = 1$. Este caso es un candidato para nuestro estudio y será expuesto en las secciones 4.2.5 y 4.2.6.

c) Si $l \not\subseteq \Pi$ y $l \cap \Pi = \emptyset$, tenemos un deslizamiento δ por lo que no consideraremos este caso.

5. σ_{Π} y σ_O :

a) Si $O \in \Pi$, como σ_{Π} fija O , tenemos que $\sigma_O\sigma_{\Pi} = \sigma_{\Pi}\sigma_O$. Esto implica que $\langle \sigma_O, \sigma_{\Pi} \rangle \cong D_2$ y generan una familia de cuadriláteros de tipo 4^* (Figura 4.33 inciso II)). El producto de σ_O y σ_{Π} es un medio giro ρ_l por la recta l que es perpendicular al plano Π por el punto O .

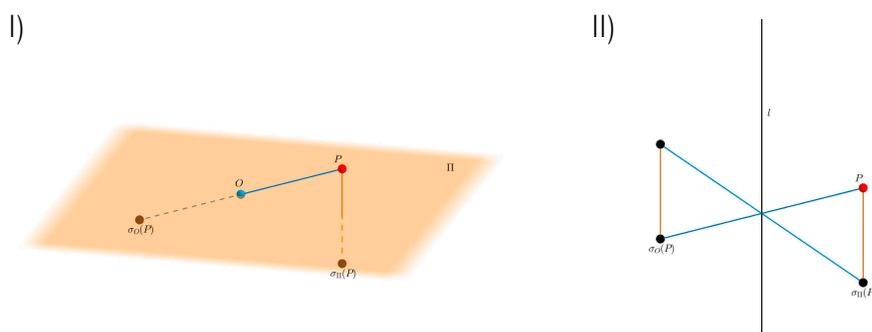


Figura 4.33: I) Punto base P con las aristas dadas por los generadores ρ_l y σ_O . II) Ejemplo de uno de los cuadriláteros resultante tipo 4^* .

b) $O \notin \Pi$, tenemos un tornillo γ , por lo que descartamos esta situación.

6. ρ_l y σ_O :

a) Si $O \in l$. Como ρ_l fija O , tenemos que $\rho_l \sigma_O = \sigma_O \rho_l$, esto implica que $\langle \rho_l, \sigma_O \rangle \cong D_2$ y generan una familia de cuadriláteros de tipo 4^* (Figura 4.34 inciso II)). El producto de ρ_l y σ_O es una reflexión σ_Π , donde Π es uno de los planos que forman la inversión central σ_O y $l \perp \Pi$.

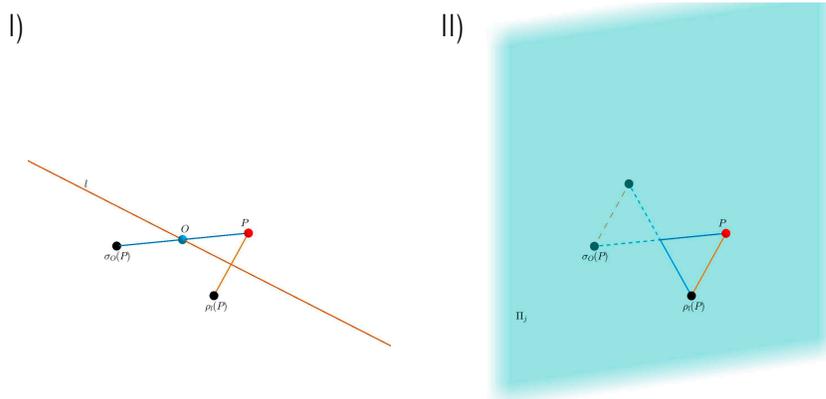


Figura 4.34: I) Punto base P con las aristas dadas por los generadores σ_Π y σ_O . II) Ejemplo de uno de los cuadriláteros resultante tipo 4^* .

b) Si $O \notin l$, tenemos un deslizamiento δ , por lo que no es de interés este caso.

Con base en el estudio que realizamos en esta sección, centraremos nuestra atención en los casos 2.a) y 4.b).

En el siguiente apartado analizaremos los 2- $\mathcal{P}gh$ en el espacio \mathbb{E}^3 , a partir del reconocimiento de sus características geométricas. Para ello, estudiaremos los casos 2.a) y 4.b). que son el resultado del análisis de la sección anterior.

4.2.3. Las simetrías completas de los 2- $\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^3 . El caso: 2.a)

Consideremos un 2- $\mathcal{P}gh$ en el que $\langle \rho_l, \rho_m \rangle \leq G(\mathcal{P})$, donde ρ_l y ρ_m son los medios giros cuyos ejes de rotación son las rectas l y m y son tales que $l \cap m = \{O\}$ y pasan por los puntos medios de aristas consecutivas de \mathcal{P} . Además consideremos los siguientes objetos: Π el plano que contiene a l y m (el cual existe ya que l y m concurren) y n la recta ortogonal a Π por el punto O .

De manera análoga a como se abordó el análisis en la Sección 4.1.3 podemos encontrar el grupo completo de simetrías del polígono \mathcal{P} en el caso con dos medios giros como generadores (y las condiciones citadas).

Basta que tomemos a \mathcal{P} un 2- $\mathcal{P}gh$ no regular en \mathbb{E}^3 y sea $\gamma \in G(\mathcal{P})$. Como $G(\mathcal{P})$ es finito, tenemos tres posibles casos para γ , que sea una rotación (cuyo eje de rotación contenga a O), una reflexión (que necesariamente pasa por el punto O) o una reflexión con giro (cuyo centro coincide con O). De esto y como $\langle \rho_l, \rho_m \rangle \leq G(\mathcal{P})$, podemos convencernos que γ deja fijo o invariante al plano Π y la recta n .

En el caso que γ es una rotación, esta tiene a n como eje; y si es una reflexión entonces debe o bien ser la reflexión por Π , o bien una reflexión por un plano que contenga a n ; y en el caso que γ sea una reflexión con giro debe o bien ser la que tiene a Π como plano de reflexión y eje a la recta n o bien la inversión central por el punto O . Con esto en mente y con argumentos análogos a los expuestos en la Proposición 4.6 tenemos que el conjunto de centros de aristas de \mathcal{P} queda invariante bajo γ , lo que obliga a que $\gamma \in \langle \rho_l, \rho_m \rangle$. Cabe señalarse aquí, que la cantidad de casos a tratar se amplifica en comparación al estudio en el plano, sin embrago, la técnica para abordar cada uno de ellos es semejante al que exigía el plano, por tal motivo podemos omitir esos argumentos. Por lo tanto, con lo dicho hasta aquí, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.8. Sea \mathcal{P} un 2- $\mathcal{P}gh$ en el espacio \mathbb{E}^3 y sean ρ_l y ρ_m los medios giros cuyas ejes de rotación son las rectas l y m tales que $l \cap m = \{O\}$ y pasan por los puntos medios de aristas adyacentes. Supongamos que \mathcal{P} es finito y no regular, entonces $G(\mathcal{P}) = \langle \rho_l, \rho_m \rangle$.

Ahora estamos preparados para la construcción de los 2- $\mathcal{P}gh$ bajo estas condiciones.

4.2.4. Construcción geométrica de los 2- $\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^3 . El caso 2.a)

El caso 2.a): ρ_l y ρ_m con $l \cap m \neq \emptyset$

Consideremos la tripleta $(P; \rho_l, \rho_m)$, donde $P \in \mathbb{E}^3$ es el punto base y $\{\rho_l, \rho_m\} \subset \mathbf{Iso}(\mathbb{E}^3)$ son medios giros con $l \cap m = \{O\}$. El producto de estos dos medios giros es una rotación $\rho_{n, 2\theta}$, donde n es la recta ortogonal al plano que contiene a l y m , digamos Π , y θ es el ángulo entre las rectas l y m (Figura 4.35). Además para que el polígono generado de esta forma sea finito, pedimos que el ángulo $\theta = \frac{p}{q}\pi$ y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(p, q) = 1$.

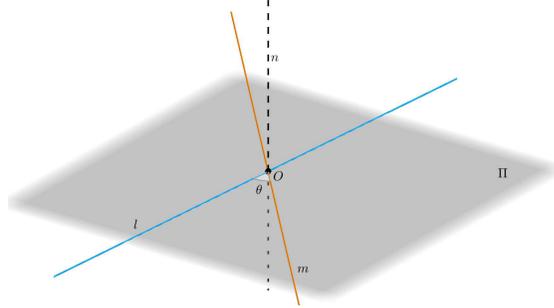


Figura 4.35: Los medios giros ρ_l y ρ_m (color azul y naranja, respectivamente) y la recta n (líneas punteadas).

Sea $G(\mathcal{P}) = \langle \rho_l, \rho_m \rangle$. Dado $P \in \mathbb{E}^3$ construimos el polígono \mathcal{P} de la siguiente manera:

- 1) El conjunto \mathcal{F}_0 de vértices de \mathcal{P} es la órbita del punto P bajo la acción del grupo $G(\mathcal{P})$.
- 2) Con el punto P consideramos $\rho_l(P) = P'$ y $\rho_m(P) = P''$, de aquí obtenemos las aristas $\overline{PP'}$ y $\overline{PP''}$. El conjunto de aristas de \mathcal{P} es $\mathcal{F}_1 = \mathcal{O}_0 \cup \mathcal{O}_1$, y están

definidas de la siguiente manera. Las aristas en \mathcal{O}_0 son los elementos de la órbita de $\overline{PP'}$ bajo $G(\mathcal{P})$ y las aristas en \mathcal{O}_1 son los elementos la órbita de $\overline{PP''}$ bajo $G(\mathcal{P})$. Notemos que si $P \in l \cup m$ entonces, $P = P'$ o $P = P''$ (o ambas) por lo que sólo tendríamos una órbita de aristas (o un solo punto) y el polígono será regular.

Como el ángulo de rotación es $2\theta = \frac{2p}{q}\pi$ con $(p, q) = 1$, el orden de $G(\mathcal{P})$ es $2q$, de hecho $G(\mathcal{P}) \cong D_q$, de donde el orden para cada órbita de aristas es q . El valor de p nos indicará la cantidad de vueltas al rededor de O que necesita el polígono para cerrarse. El tamaño de \mathcal{F}_0 es también $2q$, salvo en las regiones límite que analizaremos en los siguientes apartados que corresponden a las regiones donde el estabilizador de P bajo $G(\mathcal{P})$ no es trivial.

De manera similar que en el caso del plano, el polígono así generado será equiángulo (más no necesariamente equilátero), pues tiene una única órbita en vértices. Además, si $\{a, a'\} \subset \mathcal{O}_i$ (con $i \in \{0, 1\}$), entonces $\text{long}(a) = \text{long}(a')$; pero si $a \in \mathcal{O}_i$ y $a' \in \mathcal{O}_j$ (con $i \neq j$, $\{i, j\} \subset \{0, 1\}$), entonces $\text{long}(a) \neq \text{long}(a')$ si y sólo si P no está en los planos bisectriz de l y m .

Al igual que en análisis de los polígonos en el plano, pedimos que el punto base no se encuentre en determinadas zonas del espacio, pues tenemos la situación en que se genere un polígono regular o uno cuya realización no sea fiel. A continuación describimos a este tipo de zonas, a las que denominaremos **zonas límite**.

Zonas límite propias:

- i) Si P está en el plano Π generado por las rectas l y m , nuestro estudio será en este plano en el que tenemos una rotación con centro en O y el análisis de los polígonos resultantes se sigue de la Sección 4.1 ya que estos serán planos.
- ii) Si $P \in n$, al ser concurrentes las rectas l , m y n y como n es ortogonal al plano Π , tenemos que la realización del polígono no será fiel, ya que este será un segmento de recta.

Zonas límite regulares:

- iii) Sea $\mathbf{Z}_1 = \{X \in \mathbb{E}^3 \mid X \in \Pi_{b_{lm}} \cup \Pi_{b_{lm}^\perp}\}$, donde $\Pi_{b_{lm}}$ y $\Pi_{b_{lm}^\perp}$ son los planos ortogonales a Π por las bisectrices de l y m . Notemos que $n \subset \mathbf{Z}_1$, de hecho $n = \Pi_{b_{lm}} \cap \Pi_{b_{lm}^\perp}$. Si $P \in \mathbf{Z}_1 \setminus \{n\}$, tenemos un polígono regular del tipo

$2q$ -ágono antiprismático o $2q$ -ágono prismático (según [21]). Esto pasa porque $d(P, l) = d(P, m)$ aunado a la definición de medio giro por una recta, lo que implica que $\text{long}(a) = \text{long}(a')$ para a y a' aristas de \mathcal{P} . Además $G(\mathcal{P})$ actúa de manera transitiva en las aristas de \mathcal{P} , ya que la reflexión en el plano $\Pi_{b_{lm}}$ o $\Pi_{b_{lm}^\perp}$ (dependiendo en cual este P) es una simetría de \mathcal{P} que intercambia las aristas incidentes a P . De esto y por la Proposición 4.5 tenemos que el polígono es regular (Figuras 4.36 y 4.37).

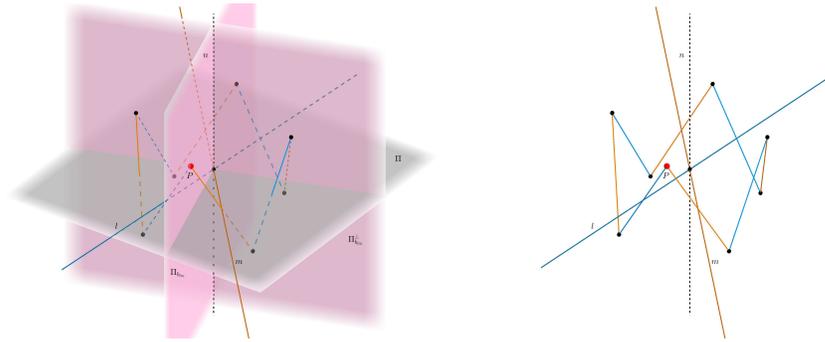


Figura 4.36: Punto base $P \in \Pi_{b_{lm}}$ y ángulo $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

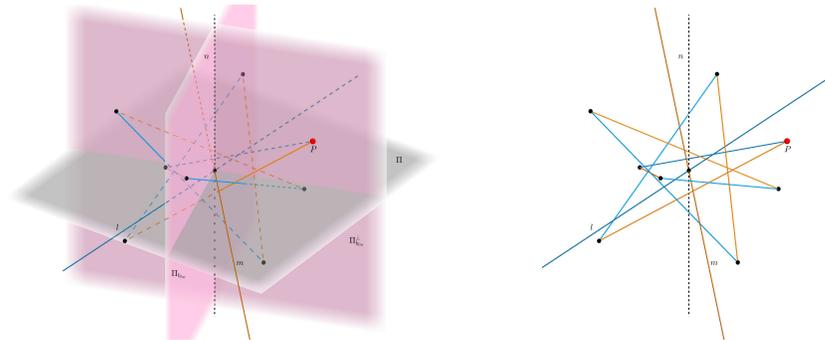


Figura 4.37: Punto base $P \in \Pi_{b_{lm}^\perp}$ y ángulo $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

El complemento de las zonas límite antes mencionadas la nombraremos como la **región natural**, es decir, es el conjunto $\mathbf{R} \doteq \mathbb{E}^3 \setminus \mathbf{Z}_1$.

Podemos darnos cuenta que las regiones formadas por las rectas determinadas por la acción del grupo $G(\mathcal{P})$ sobre los generadores y los planos ortogonales a estas,

proporcionan polígonos cuya realización es fiel. De hecho, si $P \in \Pi_l \setminus l$, donde Π_l es el plano que contiene a l y es ortogonal a Π , se genera una arista que será ortogonal a l y contenida en Π_l , análogamente con m . Así que la proyección ortogonal de este polígono sobre el plano Π muestra un polígono cuya realización no es fiel, sin embargo, como polígono del espacio sí es fiel ya que la longitud de la arista ortogonal a Π es distinta de cero.

Nuevamente, para la construcción geométrica de los 2- $\mathcal{P}gh$ tengamos en mente las siguientes consideraciones que serán de utilidad para hacer más clara su realización.

Observemos que al igual que en el análisis en el plano, podemos suponer que θ el ángulo entre l y m , cumple $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Recordemos que las bisectrices (interna y externa) son ortogonales y consideremos los planos ortogonales al plano Π por cada una de las bisectrices, el espacio queda dividido en ocho regiones (octantes), basta que consideremos al punto base P en uno de estos octantes, ya que cambiar de octante únicamente intercambia el color de las aristas.

Notemos que los polígonos que estamos construyendo tienen símbolo de Schläfli $\{2q\}$, con base en ello, a continuación introducimos una notación, que si bien no rescata por completo la geometría del objeto, nos brinda intuitivamente la composición de los mismos, ésta es motivada por la notación introducida en [40]. De esta forma, dado un polígono geoméricamente hereditario en el espacio con las condiciones que hasta ahora se expusieron, lo denotaremos por:

$$\left\{ \frac{2q}{a * b} \right\} \# \{ \}^\beta.$$

Aquí β es el ángulo entre los planos Λ_1 y Λ_2 donde, el primero es plano que contiene a las aristas $\overline{PP'}$ y $\overline{PP''}$ y el segundo es el plano que contiene a las aristas $\overline{PP'}$ y $\overline{P'P''}$, con $P' = \rho_l(P)$, $P'' = \rho_m(P)$ y $P''' = \rho_l \rho_m(P')$. Con esto, retomamos nuevamente la notación $\left\{ \frac{2q}{a * b} \right\}$ de la Sección 4.1.4 considerando la proyección ortogonal sobre el plano Π . Asimismo, agregamos una característica a esta notación, cuando la proyección del polígono \mathcal{P} sobre el plano Π pierde alguna de sus aristas lo denotaremos por $\left\{ \frac{2q}{a(0) * b} \right\}$ ó $\left\{ \frac{2q}{a * b(0)} \right\}$ para indicar la pérdida de esa arista en esa proyección, las Figuras 4.40 y 4.42 ejemplifican esta notación. Por otro lado, se puede presentar la situación en la que la proyección ortogonal del polígono $\left\{ \frac{2q}{a * b} \right\}$ sea no fiel, si bien esta situación no presenta ningún inconveniente para realización de los 2- $\mathcal{P}gh$ para

este caso incluimos una variante dentro de las notaciones ya establecidas para dar pie a esta situación y es $\left\{ \frac{2q/2}{a*b} \right\}$. Ejemplo de esto lo podemos apreciar en las Figuras 4.38 y 4.39.

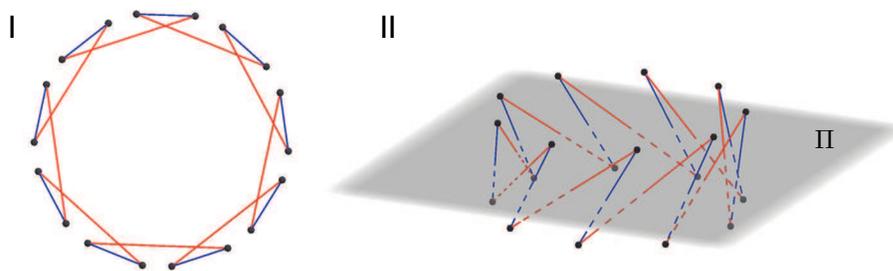


Figura 4.38: Polígono $\left\{ \frac{18}{1*15} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{11}{18}\pi$. En I tenemos una vista del polígono en proyección ortogonal sobre el plano Π y en II una vista en perspectiva.

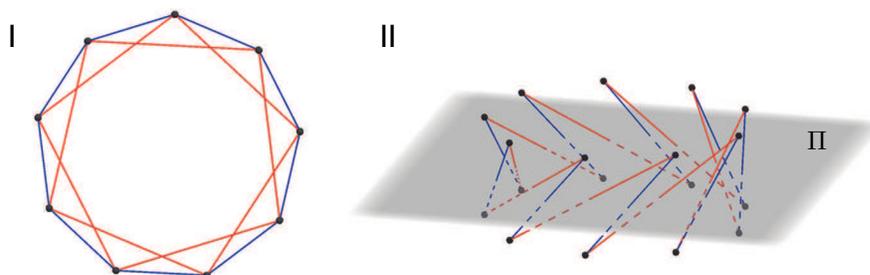


Figura 4.39: Polígono $\left\{ \frac{18/2}{1*15} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{1}{2}\pi$. En I tenemos una vista del polígono en proyección ortogonal sobre el plano Π y en II una vista en perspectiva. Notemos que la proyección sobre el plano Π nos da un polígono cuya realización no es fiel, sin embargo, el polígono en el espacio si lo es.

Para cada uno de los siguientes ejemplos, se muestran diversas proyecciones del polígono \mathcal{P} . En la parte marcada con I, se muestra la proyección ortogonal sobre el plano $z = 0$ (o en *planta*) que coincide con el plano Π , en la parte marcada con II se muestra la proyección ortogonal sobre el plano $x = 0$ (o en *frontal*) y la parte marcada con III se da una vista de \mathcal{P} desde una perspectiva. Además recordemos que θ es el ángulo entre las rectas l y m .

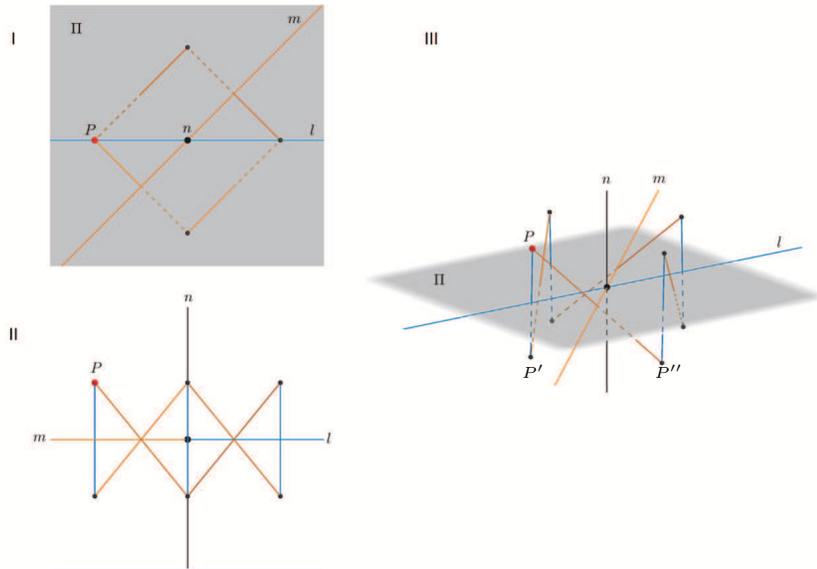


Figura 4.40: Polígono $\left\{ \frac{8/2}{1*1(0)} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{1}{2}\pi$ y ángulo $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

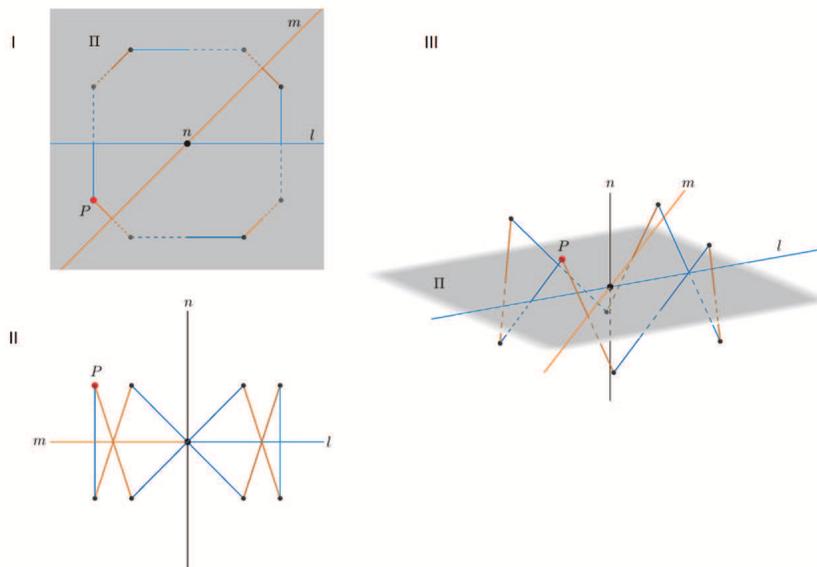


Figura 4.41: Polígono $\left\{ \frac{8}{1*1} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{7}{18}\pi$ y ángulo $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

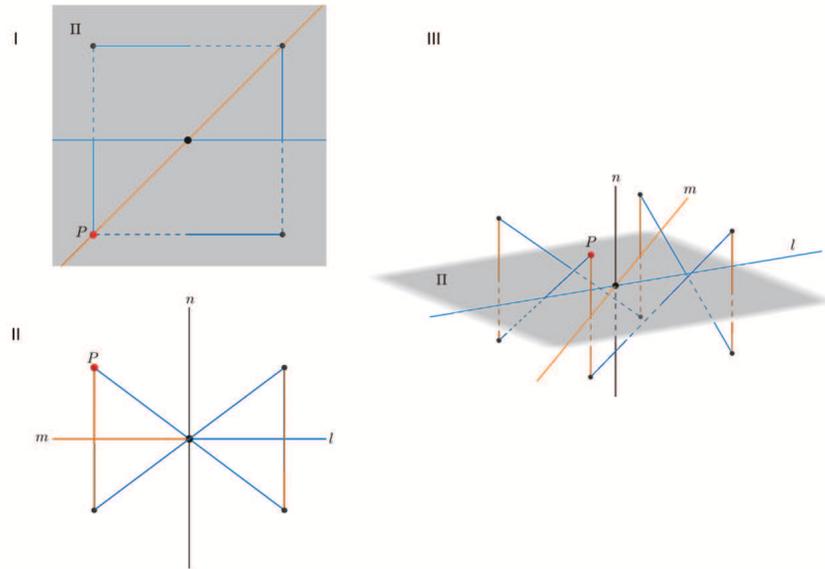


Figura 4.42: Polígono $\left\{ \frac{8/2}{1(0)*1} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{1}{2}\pi$ y ángulo $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

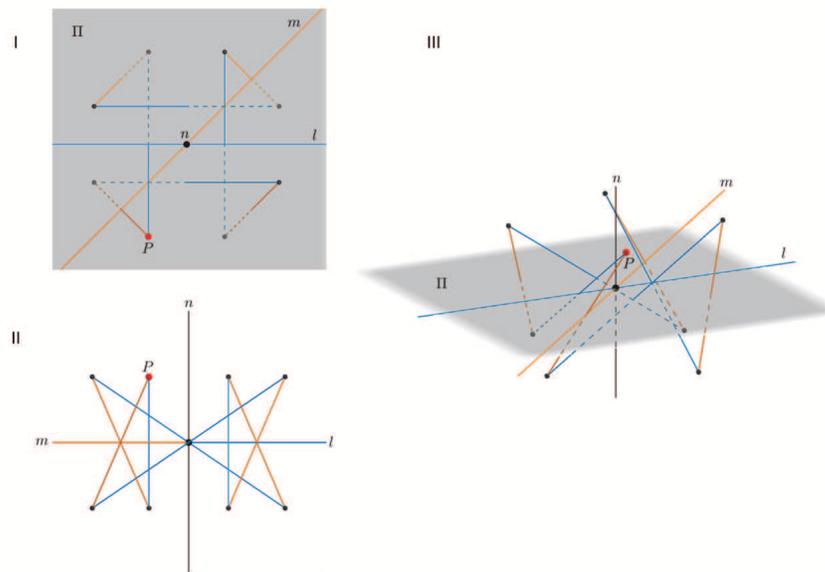


Figura 4.43: Polígono $\left\{ \frac{8}{1*5} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{13}{18}\pi$ y ángulo $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

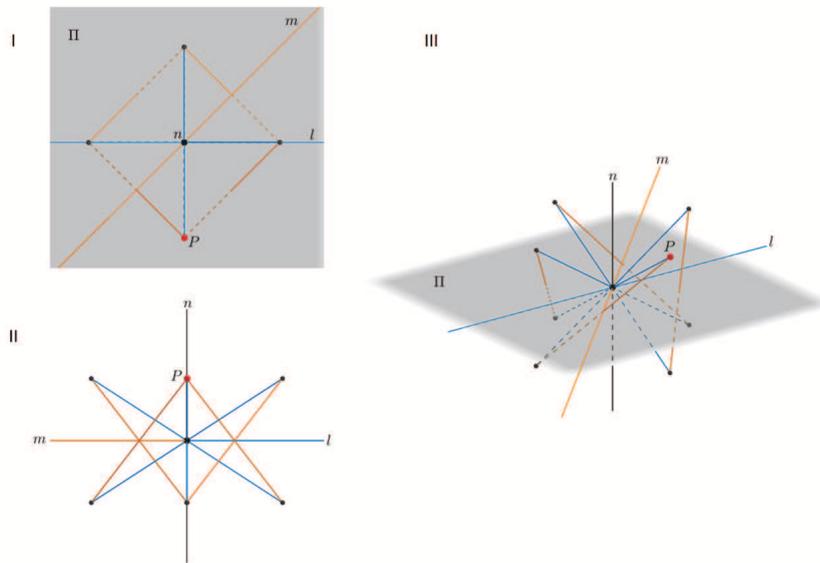


Figura 4.44: Polígono $\left\{ \frac{8/2}{1(0)*1} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \pi$ y ángulo $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

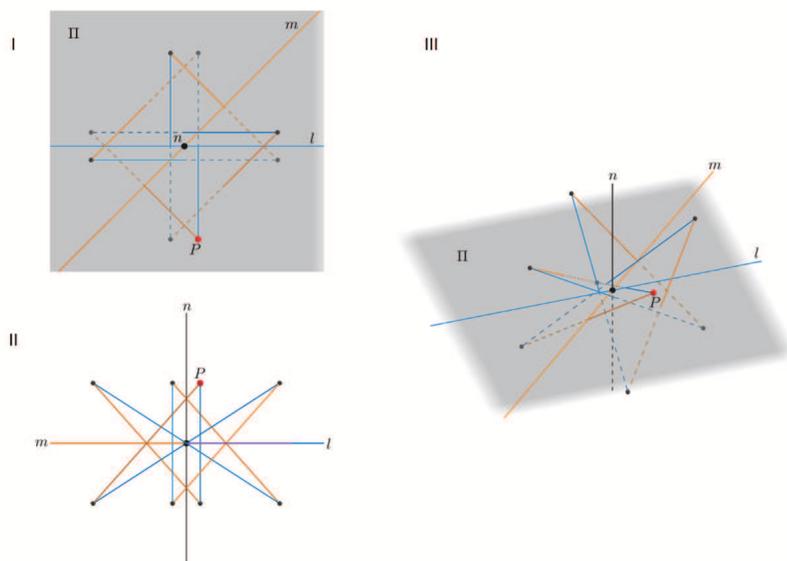


Figura 4.45: Polígono $\left\{ \frac{8}{3*3} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{17}{18}\pi$ y ángulo $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

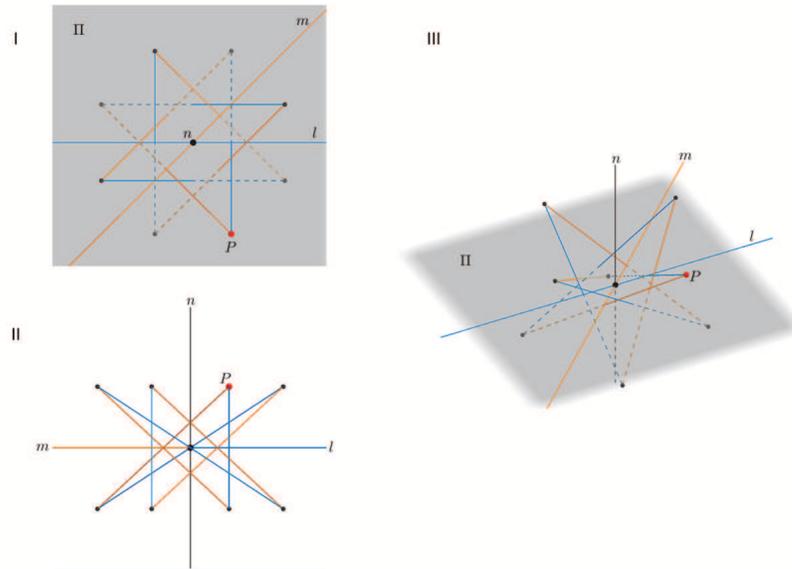


Figura 4.46: Polígono $\left\{ \frac{8}{3*3} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{8}{9}\pi$ y ángulo $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

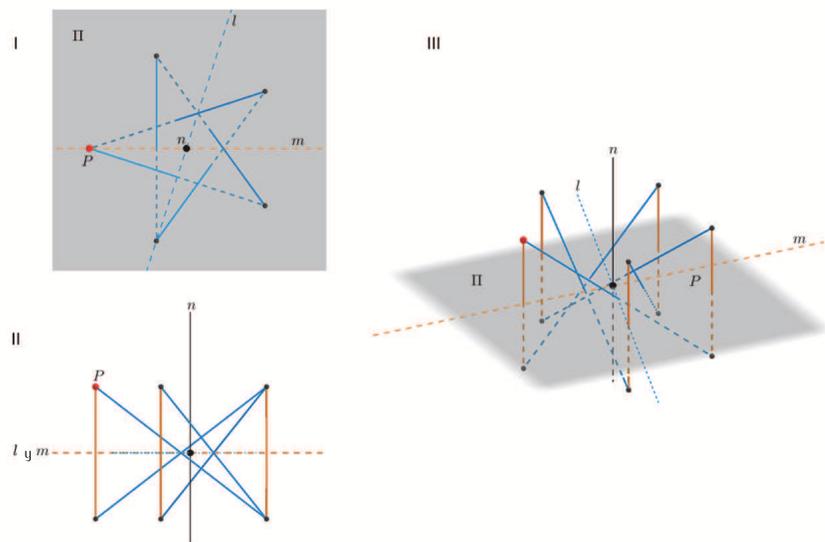


Figura 4.47: Polígono $\left\{ \frac{10/2}{1(0)*2} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{7}{36}\pi$ y ángulo $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

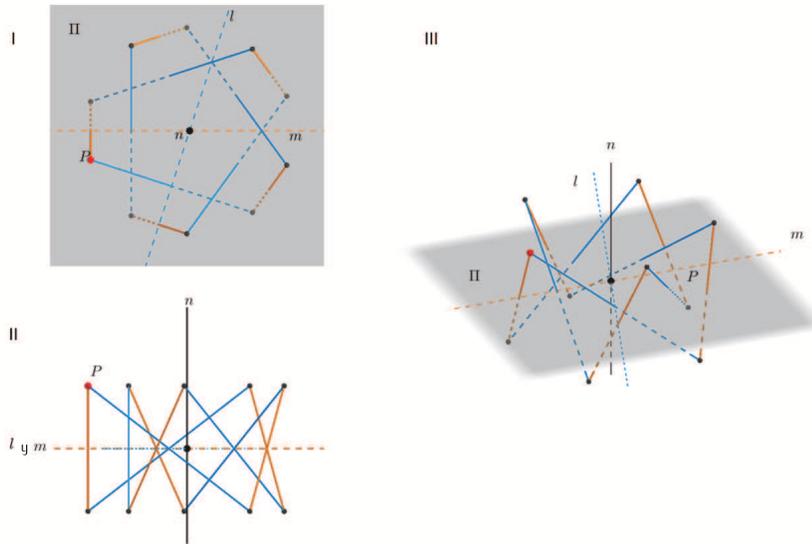


Figura 4.48: Polígono $\left\{ \frac{10}{1*3} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{2}{3}\pi$ y ángulo $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

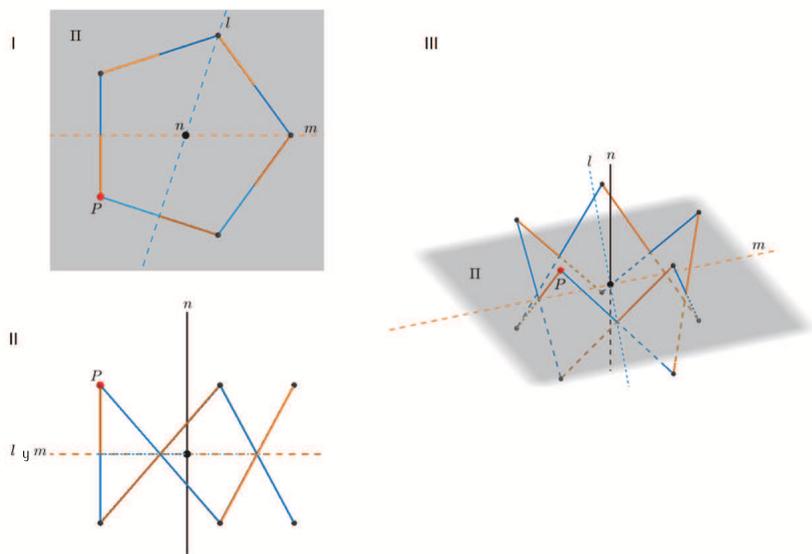


Figura 4.49: Polígono $\left\{ \frac{10/2}{1*1} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{1}{2}\pi$ y ángulo $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

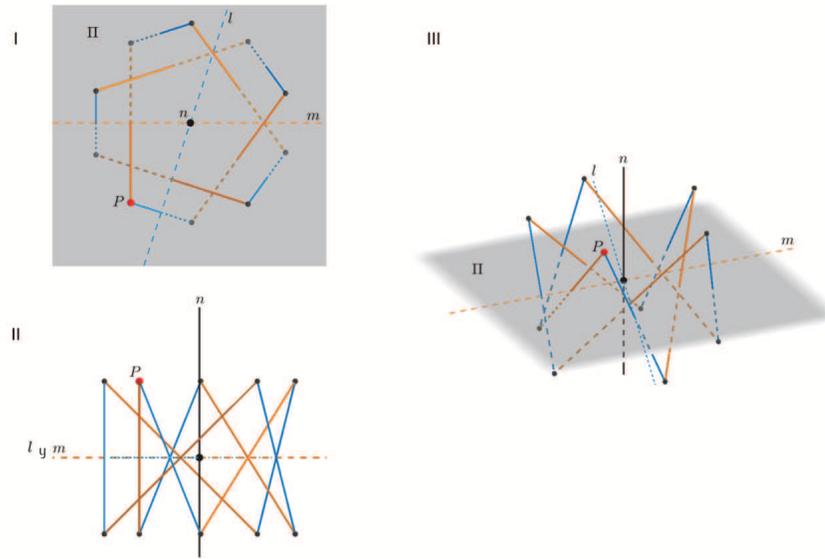


Figura 4.50: Polígono $\left\{ \frac{10}{1(0)*1} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{1}{3}\pi$ y ángulo $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

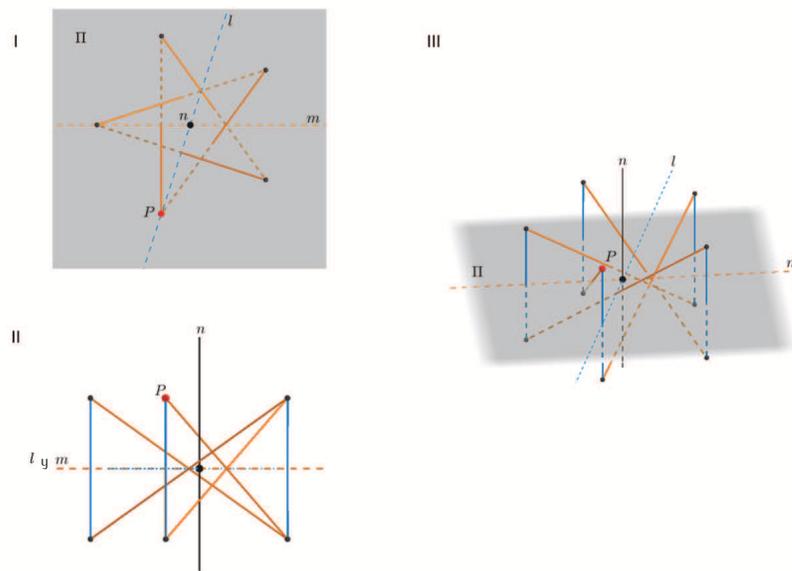


Figura 4.51: Polígono $\left\{ \frac{10/2}{2*1(0)} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = 0$ y ángulo $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

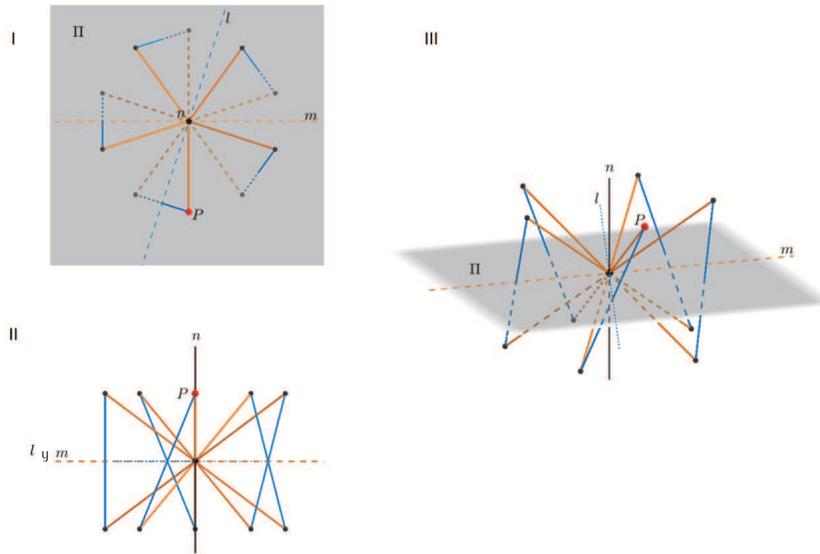


Figura 4.52: Polígono $\left\{ \frac{10}{1(0)*1} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{17}{36}\pi$ y ángulo $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

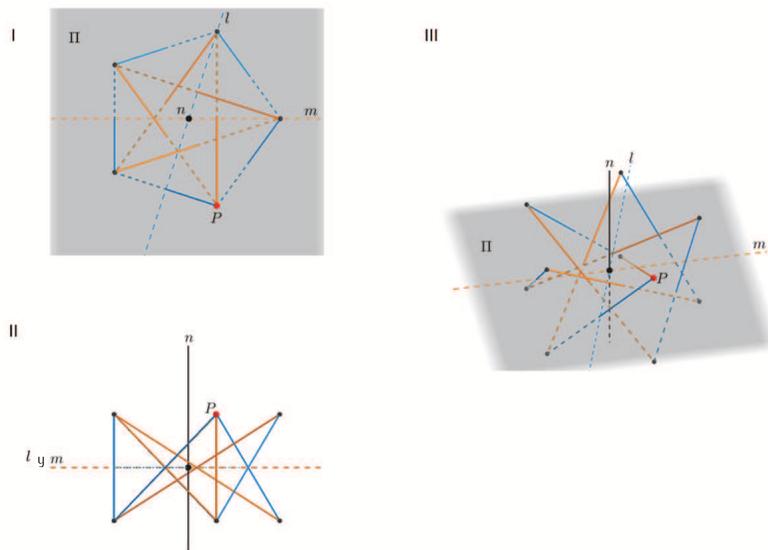


Figura 4.53: Polígono $\left\{ \frac{10/2}{1(0)*1} \right\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{5}{9}\pi$ y ángulo $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

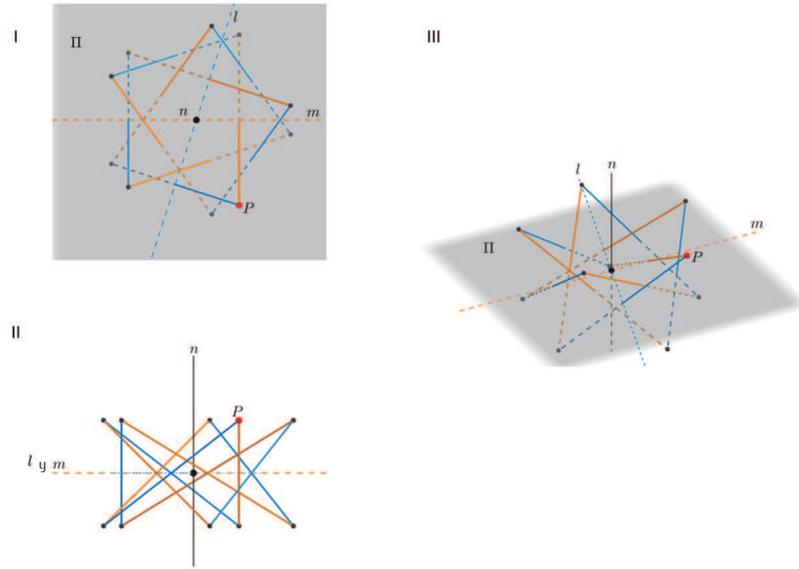


Figura 4.54: Polígono $\{\frac{10}{3*3}\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{23}{36}\pi$ y ángulo $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

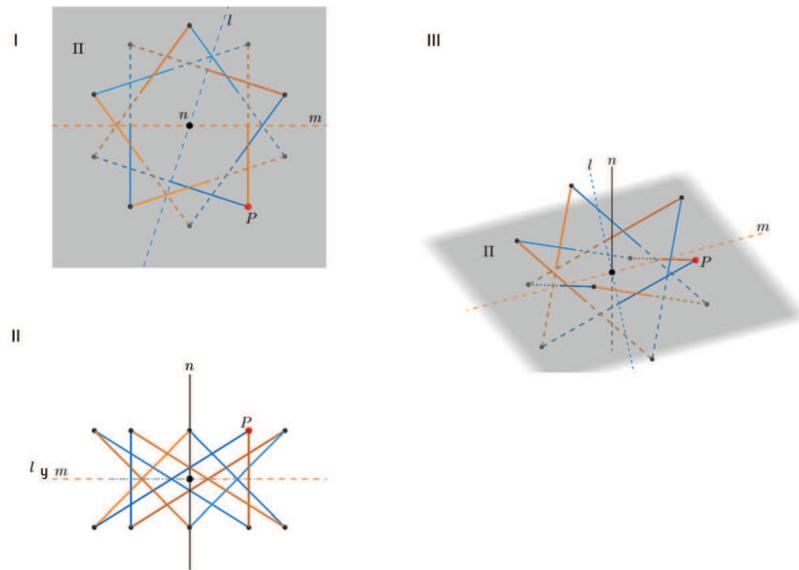


Figura 4.55: Polígono $\{\frac{10}{3*3}\} \# \{ \}^\beta$ con $\beta = \frac{13}{18}\pi$ y ángulo $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

4.2.5. Las simetrías completas de los 2- $\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^3 . El caso: 4.b)

En este apartado continuamos con el análisis de los 2- $\mathcal{P}gh$ en el espacio \mathbb{E}^3 , a partir del reconocimiento de sus características geométricas. Ahora toca el turno a aquellos 2- $\mathcal{P}gh$ en los que $\langle \rho_l, \sigma_\Pi \rangle \leq G(\mathcal{P})$, donde ρ_l y σ_Π son el medio giro con eje de rotación en la recta l y la reflexión por el plano Π , respectivamente y son tales que $l \cap \Pi = \{O\}$ y $\theta = \angle(l \wedge \Pi)$ (con $\theta = \frac{p}{q}\pi$ y $(p; q) = 1$). Además, cada uno de ellos pasa por los puntos medios de aristas adyacentes de \mathcal{P} , respectivamente. En suma a lo anterior, consideremos los siguientes objetos: sea Π_1 el plano perpendicular a Π que contiene a l (el cual existe ya que ρ_l es un medio giro) y sea n la recta ortogonal a Π_1 por el punto O .

De manera análoga a como se abordó el análisis en la Sección 4.1.3 podemos encontrar el grupo completo de simetrías de polígono \mathcal{P} en el caso con dos medios giros como generados (y las condiciones citadas).

Basta que tomemos a \mathcal{P} un 2- $\mathcal{P}gh$ no regular en \mathbb{E}^3 y sea $\gamma \in G(\mathcal{P})$. Como $G(\mathcal{P})$ es finito, tenemos tres posibles casos para γ , que sea una rotación (cuyo eje de rotación contenga a O), una reflexión (que necesariamente fija el punto O) o una reflexión con giro (cuyo centro coincide con O). De esto y como $\langle \rho_l, \sigma_\Pi \rangle \leq G(\mathcal{P})$, podemos convencernos que γ deja fijo o invariante al plano Π_1 y la recta n .

En el caso que γ es una rotación, esta tiene a n como eje; y si es una reflexión entonces debe o bien ser la reflexión por Π_1 , o bien una reflexión por un plano que contenga a n ; y en el caso que γ sea una reflexión con giro debe o bien ser la que tiene a Π_1 como plano de reflexión y eje a la recta n o bien la inversión central por el punto O . Con esto en mente y con argumentos análogos a los expuestos en la Proposición 4.6 tenemos que el conjunto de puntos medios de aristas de \mathcal{P} generadas por ρ_l queda invariante bajo γ , ya que éstos están contenidos en el plano Π_1 . Mientras que los puntos medio de las aristas generadas por σ_Π se permutan cíclica y alternadamente entre ellos, ya que estos están en rectas perpendiculares a Π_1 espaciadas $\frac{\theta}{q}$ (o $\frac{\theta}{2q}$ dependiendo de la paridad de q) al rededor del punto O , qué dicho de otra forma, éstas están en un cilindro circular perpendicular a Π_1 cuyo eje es n . Por lo que, se obliga a que $\gamma \in \langle \rho_l, \sigma_\Pi \rangle$. Cabe señalarse aquí, que la cantidad de casos a tratar se amplifica en comparación al estudio en el plano, sin embargo, la técnica para abordar cada uno de ellos es semejante al que exigía el plano, por tal motivo podemos omitir esos argumentos. Por lo tanto, con lo dicho hasta aquí, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.9. Sea \mathcal{P} un 2- $\mathcal{P}gh$ en el espacio \mathbb{E}^3 y sean ρ_l y σ_Π el medio giro cuyo eje de rotación es la recta l y la reflexión cuyo plano de reflexión es Π ($l \not\subseteq \Pi$) y para los cuales la intersección de la recta l y el plano Π es el punto O y que pasan por los puntos medios de aristas adyacentes, respectivamente. Supongamos que \mathcal{P} es finito y no regular, entonces $G(\mathcal{P}) = \langle \rho_l, \sigma_\Pi \rangle$ o bien \mathcal{P} es de la familia de polígonos que se obtuvieron en el caso 4.a) (Figura 4.32) o bien \mathcal{P} es un rectángulo plano.

Ahora estamos preparados para la construcción de los 2- $\mathcal{P}gh$ bajo estas condiciones.

4.2.6. Construcción geométrica de los 2- $\mathcal{P}gh$ en \mathbb{E}^3 . El caso 4.b)

El caso 4.b): σ_Π y ρ_l con $l \not\subseteq \Pi$, pero $l \cap \Pi = \{O\}$

Consideremos la tripleta $(P; \rho_l, \sigma_\Pi)$, en la que $P \in \mathbb{E}^3$ al que denominaremos como el punto base y $\{\rho_l, \sigma_\Pi\} \subset \mathbf{Iso}(\mathbb{E}^3)$ donde ρ_l es el medio giro con eje la recta l y σ_Π es la reflexión en el plano Π con $l \cap \Pi = \{O\}$ (Figura 4.56).

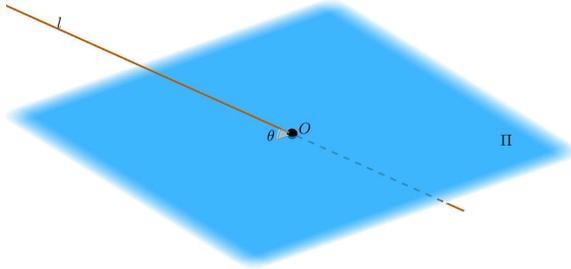


Figura 4.56: El medio giro ρ_l , la reflexión σ_Π y su intersección en el punto O .

El producto de las isometrías ρ_l y σ_Π es una reflexión con giro $\phi_{n,\theta}$ (Figura 4.57 inciso II)) con las siguientes características: sean Π_1 y Π_2 tales que $\rho_l = \sigma_{\Pi_1}\sigma_{\Pi_2}$ y tales que Π_1 es ortogonal Π (Figura 4.57 inciso I)). Sea $n = \Pi \cap \Pi_2$ y el ángulo de rotación es $\theta = \angle(l \wedge \Pi) = \angle(\Pi \wedge \Pi_2)$, tal como se hizo en la Sección 4.2. Además, notemos que para que el polígono generado de esta forma sea finito, el ángulo debe ser de la forma $2\theta = \frac{2p}{q}\pi$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(p, q) = 1$.

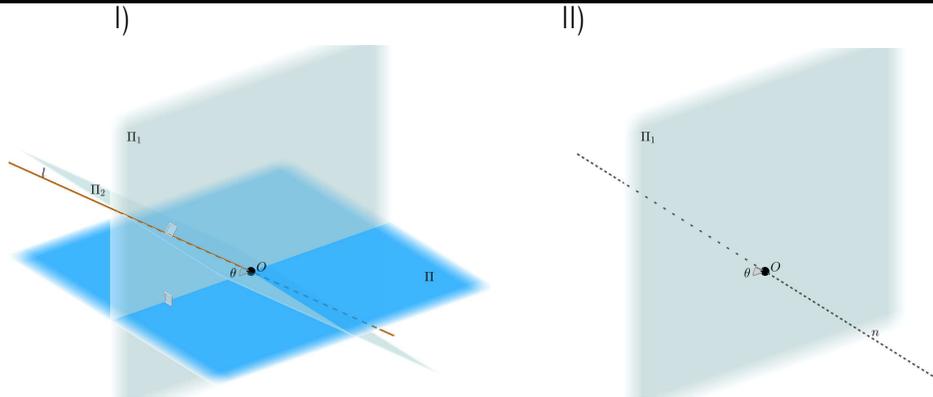


Figura 4.57: I) Vista de los planos que conforman al medio giro ρ_l . II) La reflexión con giro $\phi_{n,\theta}$ como el producto del medio giro ρ_l y la reflexión σ_{Π} .

Sea $G(\mathcal{P}) = \langle \rho_l, \sigma_{\Pi} \rangle$. Si $P \in \mathbb{E}^3$, construimos el polígono \mathcal{P} de la siguiente manera:

- 1) El conjunto \mathcal{F}_0 de vértices de \mathcal{P} es la órbita del punto P bajo el grupo $G(\mathcal{P})$.
- 2) Con el punto P consideramos $\rho_l(P) = P'$ y $\sigma_{\Pi}(P) = P''$, de aquí obtenemos los segmentos $a = \overline{PP'}$ y $a' = \overline{PP''}$. Por lo que, el conjunto de aristas de \mathcal{P} es $\mathcal{F}_1 = \mathcal{O}_a \cup \mathcal{O}_{a'}$. De manera similar a los casos anteriores, si $P \in l \cup \Pi$ entonces \mathcal{P} es regular o es un solo punto y no lo consideraremos para nuestro estudio.

Como en los casos anteriores, el ángulo de rotación es $2\theta = \frac{2p}{q}\pi$ con $(p, q) = 1$, sin embargo, en esta situación el orden del grupo $G(\mathcal{P})$ depende de la paridad de q . Así, si q es par entonces, el orden de $G(\mathcal{P})$ es $2q$ y tenemos que $G(\mathcal{P}) = \langle \rho_l, \sigma_{\Pi} \rangle \cong D_q$; mientras que si q es impar entonces, el orden de $G(\mathcal{P})$ es $2 \cdot 2q$ y tenemos que $G(\mathcal{P}) = \langle \rho_l, \sigma_{\Pi} \rangle \cong D_q \times C_2$. El valor de p nos indicará la cantidad de vueltas alrededor de la recta n que necesita un vértice para llegar al inicial.

De forma similar a los análisis anteriores, salvo regiones que consideraremos posteriormente en nuestro estudio, el orden de \mathcal{F}_0 es $2q$ en el caso par de q y $4q$ en el caso impar de q . El tamaño para cada órbita de arista es q o $2q$ en el caso par o impar de q , respectivamente. Esto sucede ya que la reflexión con giro $\phi_{n,\theta} = \rho_l \sigma_{\Pi}$ alterna dos a dos los vértices entre los semiespacios determinados por Π_1 , de este modo cuando q es par, el primero y el $2q$ -ésimo vértice coinciden y cuando q es impar, el primer y el $2q$ -ésimo vértice se encuentran en semiespacios distintos.

De nueva cuenta, pedimos que el punto base no se encuentre en determinadas zonas del espacio, donde se dé la situación en que se genere un polígono regular o uno cuya realización no sea fiel. A continuación describimos a este tipo de zonas, a las que denominaremos *zonas límite*.

Zonas límite propias

- i) Si $P \in \Pi_1 \setminus \{O\}$, donde Π_1 es el plano ortogonal a Π y contiene a l , el polígono es plano y su análisis se sigue de la Sección 4.1.4 (Figura 4.58).

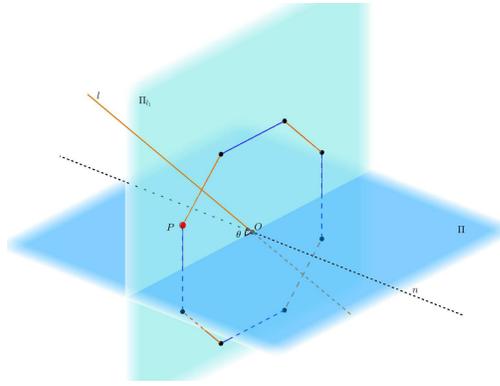


Figura 4.58: Punto base $P \in \Pi_1 \setminus \{O\}$ junto con los generadores ρ_l y σ_{Π} .

- ii) Si $P \in n$, notemos que como $n = \Pi \cap \Pi_2$, entonces n es la recta perpendicular a Π_1 por O . Dado que las rectas l y n son concurrentes, tenemos que la realización del polígono no será fiel, ya que será un segmento de recta.

Zonas límite mixta

- iii) Sea $\mathbf{Y} \doteq \{X \in \gamma(\Pi) \mid \gamma \in G(\mathcal{P}) \setminus \{\iota\}\}$.

Primero tengamos presente que $\sigma_{\Pi}(\Pi_1) = \Pi_1$ y $\rho_l \sigma_{\Pi}(\Pi_1) = \Pi_1$, esto implica que Π_1 queda invariante por los elementos de $G(\mathcal{P})$. Ahora, observemos que $\angle(l \wedge n) = \frac{\pi}{2}$, y entonces $\rho_l(n) = n$ y $\rho_l \sigma_{\Pi}(n) = n$ por como se eligió n , por lo que n queda invariante para todos los elemento de $G(\mathcal{P})$.

Dado que $n \in \Pi$, $\Pi \perp \Pi_1$ y γ es isometría sucede que $\gamma(n) \subset \gamma(\Pi)$ y $\gamma(\Pi) \perp \gamma(\Pi_1)$. Sin embargo, $\gamma \in G(\mathcal{P})$ por lo que $\gamma(n) = n$ y $\gamma(\Pi_1) = \Pi_1$.

Por lo tanto, $n \subset \gamma(\Pi)$ y $\gamma(\Pi) \perp \Pi_1$.

Además notemos que si $P \in \mathbf{Y}$, entonces tenemos que él pertenece a un plano que es imagen de Π bajo el grupo $G(\mathcal{P})$, por lo que el estabilizador de P en $G(\mathcal{P})$ tiene cardinalidad 2 o cardinalidad 1, dependiendo si q es par o impar, respectivamente. Entonces, por el teorema órbita-estabilizador $|\mathcal{F}_0| = q$ o $|\mathcal{F}_0| = 2q$ de nueva cuenta si q es par o impar, respectivamente.

Por otra parte, veamos lo que sucede con las aristas incidentes a P .

Sea $P \in \mathbf{Y}$. Entonces existe $\gamma \in G(\mathcal{P})$ tal que $P \in \gamma(\Pi)$. Sea $\Pi' := \gamma(\Pi)$. Como vimos antes $n \subset \Pi'$ y $\Pi_1 \perp \Pi'$. Notemos que si $\sigma_{\Pi'}$, es la reflexión en Π' entonces, $\sigma_{\Pi'} = \gamma\sigma_{\Pi}\gamma^{-1} \in G(\mathcal{P})$.

Sean $a := \overline{PP'} = \overline{P\rho_l(P)}$ y $a' := \overline{PP''} = \overline{P\sigma_{\Pi}(P)}$ las dos aristas bases de \mathcal{P} . Observemos que $a = a'$ si y sólo si $P' = P''$, si y sólo si $\rho_l(P) = \sigma_{\Pi}(P)$, si y sólo si $P = \rho_l\sigma_{\Pi}(P)$, si y sólo si $P = O$. Es decir, si $P \neq O$ entonces, las aristas a y a' son distintas.

Ahora, como $\sigma_{\Pi'} \in G(\mathcal{P})$ entonces, $\sigma_{\Pi'}(a)$ y $\sigma_{\Pi'}(a')$ también son aristas de \mathcal{P} . Mas aun, como $\sigma_{\Pi'}(P) = P$ y debe tener grado 2, entonces el conjunto $\{a, a', \sigma_{\Pi'}(a), \sigma_{\Pi'}(a')\}$ tiene cardinalidad 2 y dado que $a \neq a'$, tenemos que $\sigma_{\Pi'}(a) \neq \sigma_{\Pi'}(a')$. Por lo tanto, para que \mathcal{P} sea fiel se tiene que cumplir alguno de los siguientes casos.

a) Supongamos que $a = \sigma_{\Pi'}(a)$ y $a' = \sigma_{\Pi'}(a')$.

Dado que $\sigma_{\Pi'}(a) = \sigma_{\Pi'}(\overline{PP'}) = \overline{\sigma_{\Pi'}(P)\sigma_{\Pi'}(P')} = \overline{P\sigma_{\Pi'}(P')}$, tenemos que $P' = \sigma_{\Pi'}(P')$. Es decir, $\rho_l(P) = P' \in \Pi'$. Esto implica que $\Pi' = \Pi_2$ o $\Pi' \perp \Pi_2$ (y recordemos que $O \in \Pi'$ y $\Pi' \perp \Pi_1$). Análogamente $a' = \sigma_{\Pi'}(a') = \sigma_{\Pi'}(\overline{PP''}) = \overline{\sigma_{\Pi'}(P)\sigma_{\Pi'}(P'')}$ y por lo tanto $P'' = \sigma_{\Pi'}(P'')$ y $\sigma_{\Pi}(P) = P'' \in \Pi'$. Es decir, $\Pi' = \Pi$ ó $\Pi' \perp \Pi$ (y de nuevo, $O \in \Pi'$ y $\Pi' \perp \Pi$).

De lo anterior tenemos cuatro posibles casos:

- a.1) Consideremos que $\Pi' = \Pi_2$ y $\Pi' = \Pi$. En este caso $l \subset \Pi_2 = \Pi$, lo cual contradice que $l \cap \Pi = \{O\}$.
- a.2) Consideremos que $\Pi' = \Pi_2$ y $\Pi' \perp \Pi$. En este caso $\angle(\Pi \wedge \Pi_2) = \frac{\pi}{2}$, por lo que \mathcal{P} es un rectángulo plano (Figura 4.59).

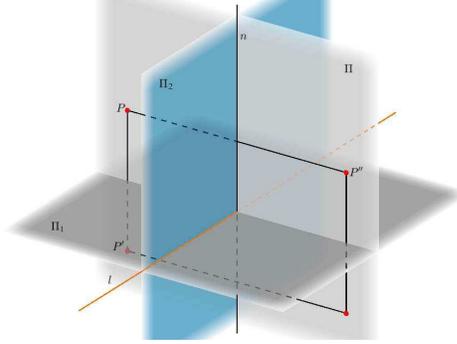


Figura 4.59: Rectángulo plano \mathcal{P} del caso a.2).

- a.3) Consideremos que $\Pi' \perp \Pi_2$ y $\Pi' = \Pi$. De nuevo $\angle(\Pi \wedge \Pi_2) = \frac{\pi}{2}$, pero $P \in \Pi' = \Pi$ lo que implica (como ya habíamos visto) que la arista a no existe y \mathcal{P} será regular.
- a.4) Consideremos que $\Pi' \perp \Pi_2$ y $\Pi' \perp \Pi$. Dado que $O \in \Pi'$ y $\Pi' \perp \Pi_1$, la única opción es de nuevo que $\Pi_2 = \Pi$, lo que contradice que $l \cap \Pi = \{O\}$.
- b) Supongamos que $a = \sigma_{\Pi'}(a')$ y $a' = \sigma_{\Pi'}(a)$.

De manera similar al caso anterior, tenemos que $a = \overline{PP'}$ y $a' = \sigma_{\Pi'}(a') = \sigma_{\Pi'}(\overline{PP''}) = \overline{\sigma_{\Pi'}(P)\sigma_{\Pi'}(P'')} = \overline{P\sigma_{\Pi'}(P'')}$, por lo que $P' = \sigma_{\Pi'}(P'')$ (y por lo tanto $P'' = \sigma_{\Pi'}(P')$). Notemos que $a' = \sigma_{\Pi'}(a)$ nos arroja el mismo resultado.

Ahora, $P' = \rho_l(P)$ y $P'' = \sigma_{\Pi}(P)$, por lo tanto tenemos que $\rho_l(P) = \sigma_{\Pi'}\sigma_{\Pi}(P)$. Como $n \subset \Pi \cap \Pi'$, tenemos que $n = \Pi \cap \Pi'$ y entonces $\sigma_{\Pi'}\sigma_{\Pi}$ es una rotación $\rho_{n,\beta}$, con eje n y ángulo 2β , donde $\beta = \angle(\Pi \wedge \Pi')$. Observemos que como ρ_l es un medio giro en la

recta $l \subset \Pi_1$, entonces ρ_l intercambia los dos semiespacios determinados por Π_1 . Por otra parte, al ser $\rho_{n,\beta}$ una rotación en n , con $n \perp \Pi_1$, entonces $\rho_{n,\beta}$ preserva los semiespacios determinados por Π_1 . Dado que $\rho_l(P) = \rho_{n,\beta}(P)$ concluimos que $P \in \Pi_1$. Sin embargo, en este caso el polígono sería plano, y su estudio se sigue de la Sección 4.1.4.

Análogo a cómo se mencionó en la Sección 4.1.4, el complemento de las zonas límite antes mencionadas la nombraremos como la **región natural**, es decir, es el conjunto $\mathbf{R} \doteq \mathbb{E}^3 \setminus \mathbf{Y} \cup \Pi \cup \Pi_1$ (y la recta $n \subset \Pi$).

A continuación, mostramos algunos ejemplos en los que el punto base se encuentra dentro de las zonas límite. Para cada uno de estos, se muestran diversas proyecciones del polígono \mathcal{P} . En la parte marcada con **I**, se muestra la proyección ortogonal sobre el plano $z = 0$ que coincide con el plano Π , en la parte marcada con **II** se muestra la proyección ortogonal sobre el plano $y = 0$ que coincide con el plano Π_1 , será nuestra vista base para la notación $\left\{ \frac{2q}{a*b} \right\}$, en la parte marcada con **III** se muestra la proyección ortogonal sobre el plano $x = 0$ y la parte marcada con **IV** se da una vista de \mathcal{P} desde una perspectiva.

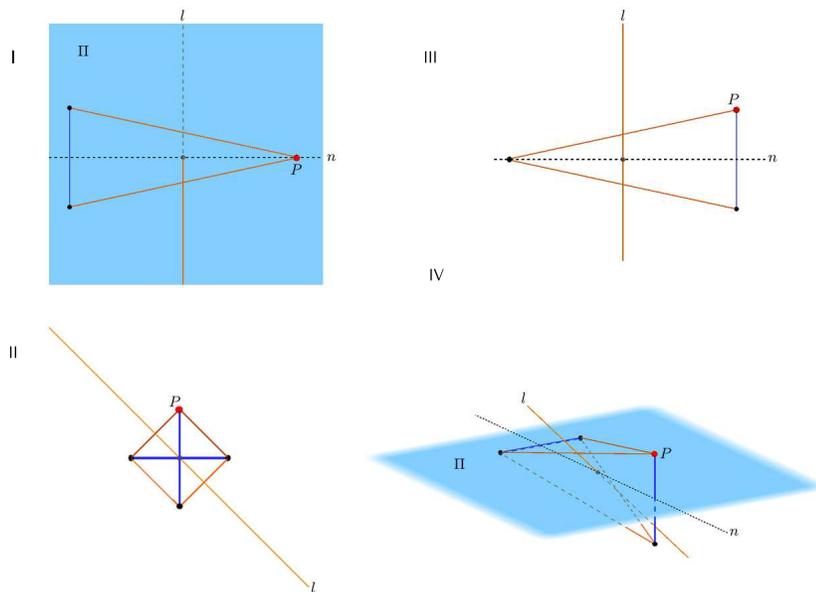


Figura 4.60: Polígono \mathcal{P} con $\theta = \frac{1}{4}\pi$ con el punto base sobre \mathbf{Y} , no es fiel.

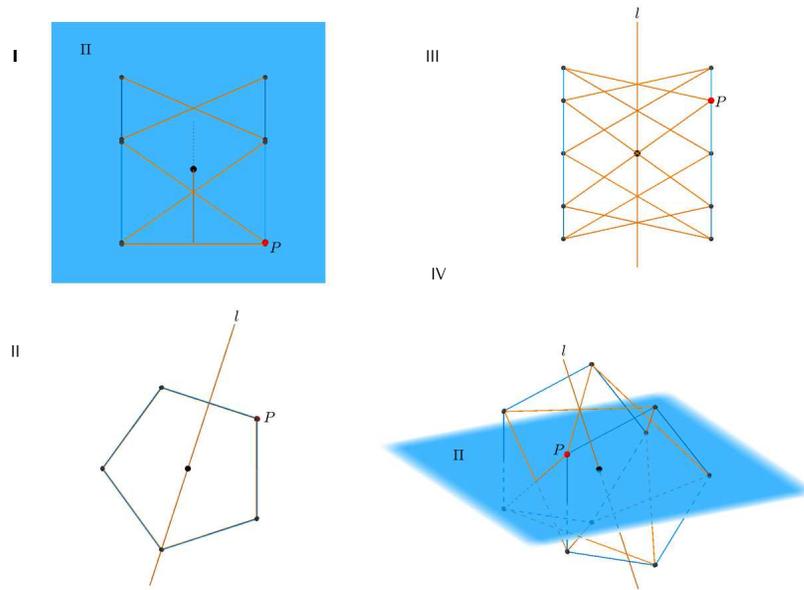


Figura 4.61: Polígono \mathcal{P} con $\theta = \frac{2}{5}\pi$ con el punto base sobre \mathbf{Y} , no es fiel.

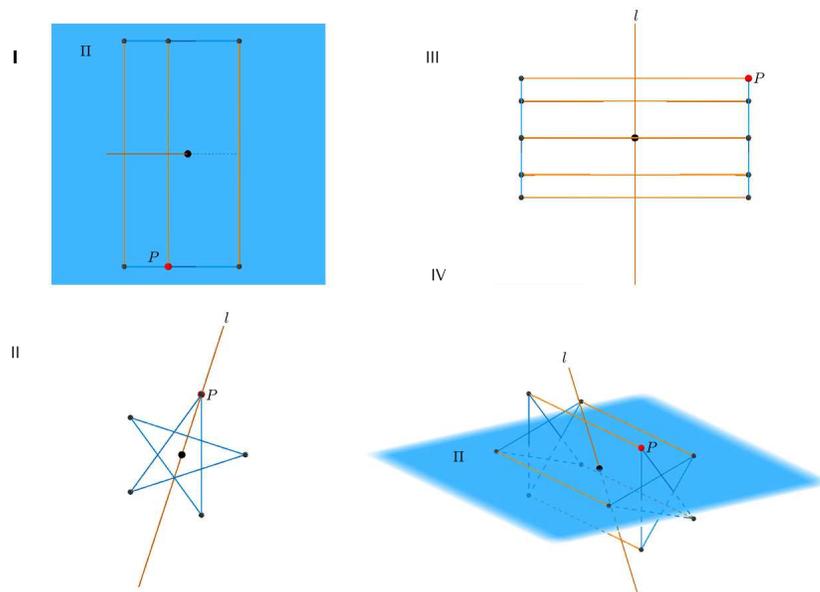


Figura 4.62: Polígono \mathcal{P} con $\theta = \frac{2}{5}\pi$ con el punto base sobre \mathbf{Y} , no es fiel.

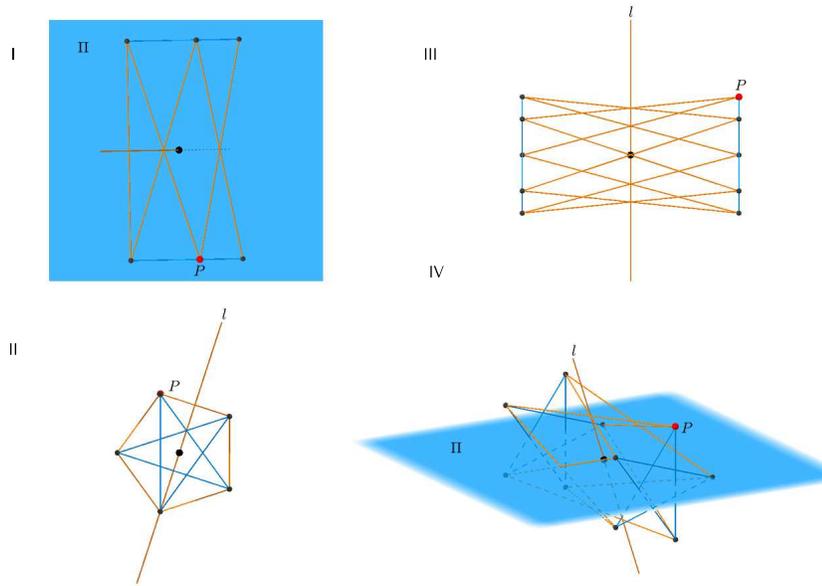


Figura 4.63: Polígono \mathcal{P} con $\theta = \frac{2}{5}\pi$ con el punto base sobre \mathbf{Y} , no es fiel.

De manera similar a lo analizado en el plano, notemos que hay una elección del ángulo θ que sólo generan zonas límite regulares, $\theta = \frac{1}{2}\pi$, esto sucede ya que el ángulo de rotación es π .

En otro orden de ideas, dentro de la región natural se presenta una situación de consideración por el tipo de polígonos que se generan. Tomemos el conjunto \mathbf{C}^4 como el lugar geométrico de los puntos en el espacio equidistantes de la recta l y del plano Π . Este conjunto es un cono elíptico inclinado con vértice en O . Si $P \in \mathbf{C}$, el polígono es equilátero y equiangular, sin embargo, tienen dos órbitas en banderas (por lo que no es regular en nuestro sentido). A este tipo de polígonos algunos autores los consideran *cuasiregulares* [58]. Como ejemplo, en la Figura 4.64 mostramos algunos polígonos.

⁴Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el plano Π coincide con el plano $z = 0$, la recta l esta en el plano $y = 0$ y O coincide con el origen. De esta forma, tenemos que $l = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid (x, y, z) = (a, 0, a \tan(\theta)) \wedge a \in \mathbb{R}\}$. Por otro lado, también podemos suponer que $a = 1$, esto para facilitar el cálculo (salvo el caso $\theta = \frac{1}{2}\pi$ en el cual podemos elegir $a = 0$) y por lo tanto, el cono \mathbf{C} tendrá ecuación:

$$(\tan^2(\theta))x^2 + (1 + \tan^2(\theta))y^2 - (\tan^2(\theta))z^2 - (2 \tan(\theta))xz = 0,$$

$$\text{con } -\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi.$$

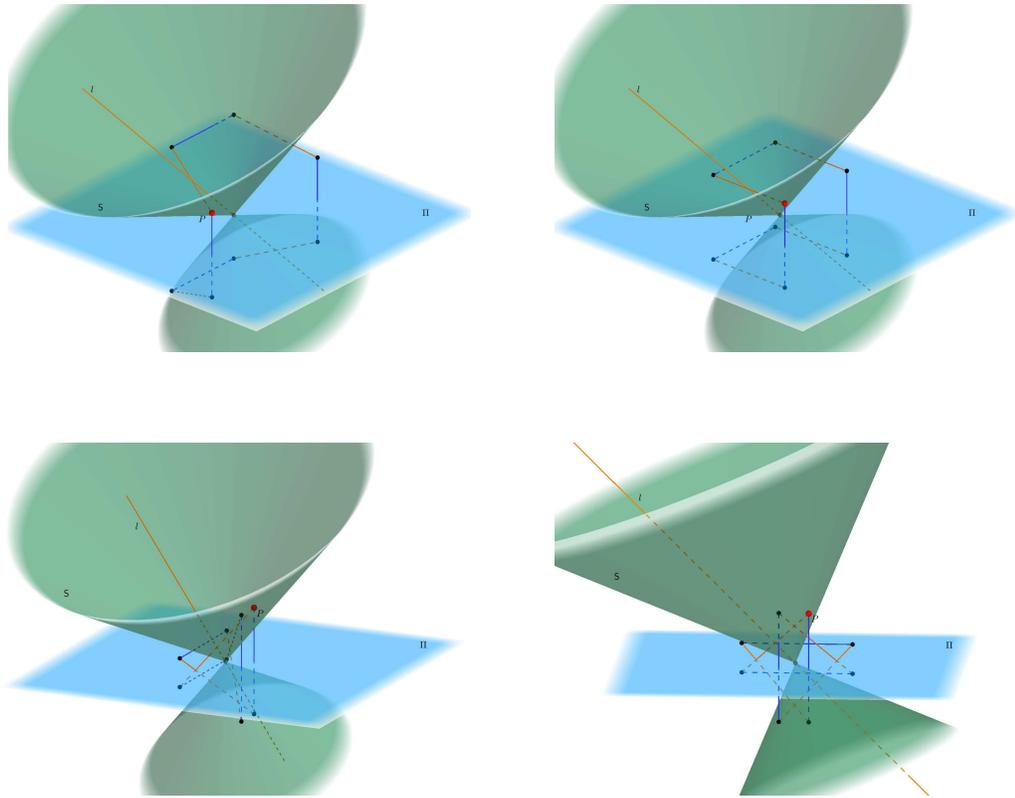


Figura 4.64: Distintos polígonos generados con el punto base P en el cono C .

Cabe señalar también, que en la literatura como en [28] y [58, §2.2], denominan a los polígonos que se han construido en esta sección y en la anterior como *polígonos alabeados isogonales*, los cuales son un tipo de polígono alabeado transitivo en vértices con dos tipos de aristas.

De regreso a nuestro estudio, para la construcción geométrica de los $2\text{-}\mathcal{P}gh$ tengamos en mente las siguientes consideraciones que serán de utilidad para hacer más clara su realización.

Como los planos Π y Π_1 son perpendiculares, el espacio queda dividido en cuatro regiones (cuadrantes), donde cada uno de estos contiene a (parte de) los generadores. Por ello, basta que consideremos al punto base P en uno de estos cuadrantes para reconocer el comportamiento del polígono.

Este tipo de polígonos con dos órbitas en aristas en el espacio los denotaremos por

$$\left\{ \frac{2q}{a * b} \right\} \# \{ \}^{*,\beta}$$

o

$$\left\{ \frac{2 \cdot 2q}{a * b} \right\} \# \{ \}^{*,\beta},$$

si q es par o impar respectivamente. Por otro lado, consideremos β el ángulo formado por los planos Λ_1 y Λ_2 , donde Λ_1 es el plano que contiene a las aristas $\overline{PP'}$ y $\overline{PP''}$ y Λ_2 es el plano que contiene a las aristas $\overline{PP'}$ y $\overline{P'P''''}$, con $P' = \rho_l(P)$, $P'' = \sigma_{\Pi}(P)$ y $P'''' = \rho_l \sigma_{\Pi}(P')$. Nuevamente la notación $\left\{ \frac{2q}{a * b} \right\}$ (y análogamente con la notación $\left\{ \frac{2 \cdot 2q}{a * b} \right\}$), es la empleada en la Sección 4.1.4 considerando la proyección ortogonal sobre el plano Π_1 .

Cabe señalar que la notación que usamos en cada uno de los siguientes ejemplos, muestra diversas proyecciones del polígono \mathcal{P} . En la parte marcada con **I**, se muestra la proyección ortogonal sobre el plano $z = 0$ (o en *planta*) que coincide con el plano Π , en la parte marcada con **II** se muestra la proyección ortogonal sobre el plano $y = 0$ (o en *frontal*) que coincide con el plano Π_1 , será nuestra vista base para la notación $\left\{ \frac{2q}{a * b} \right\}$ (o $\left\{ \frac{2 \cdot 2q}{a * b} \right\}$), en la parte marcada con **III** se muestra la proyección ortogonal sobre el plano $x = 0$ (o en *lateral*) y la parte marcada con **IV** se da una vista de \mathcal{P} desde una perspectiva.

Ejemplos de 2- $\mathcal{P}gh$ en el espacio \mathbb{E}^3 generados por un medio giro y una reflexión, σ_{Π} y ρ_l con $l \not\subseteq \Pi$, pero $l \cap \Pi = \{O\}$ y donde el punto base P se encuentra en la región natural.

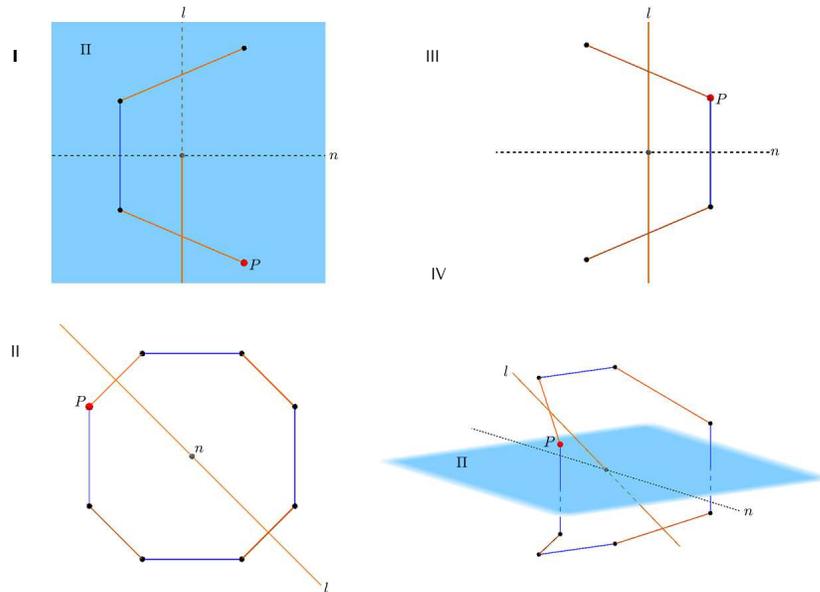


Figura 4.65: Polígono $\left\{ \frac{8}{1*1} \right\} \# \{ \}^{*,\beta}$ con $\beta = \frac{17}{36}\pi$ y $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

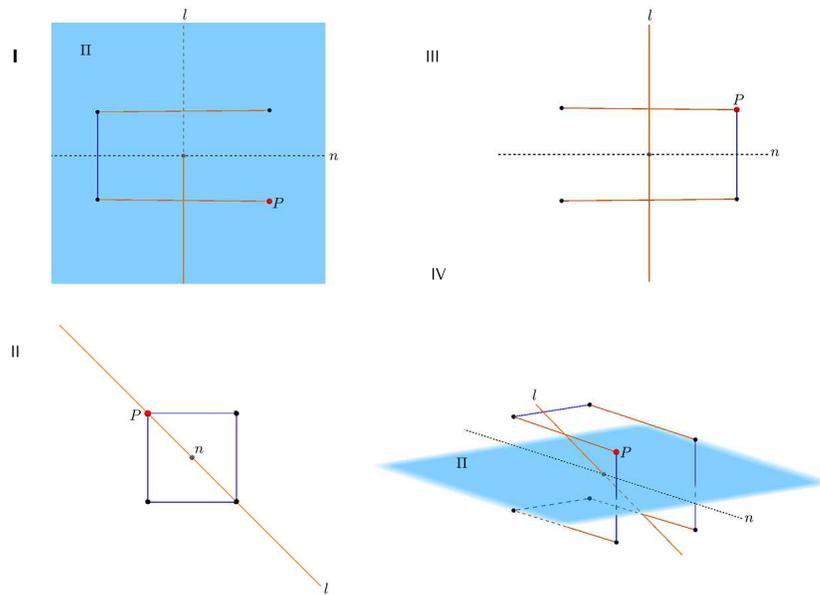


Figura 4.66: Polígono $\left\{ \frac{8}{1*1(0)} \right\} \# \{ \}^{*,\beta}$ con $\beta = \pi$ y $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

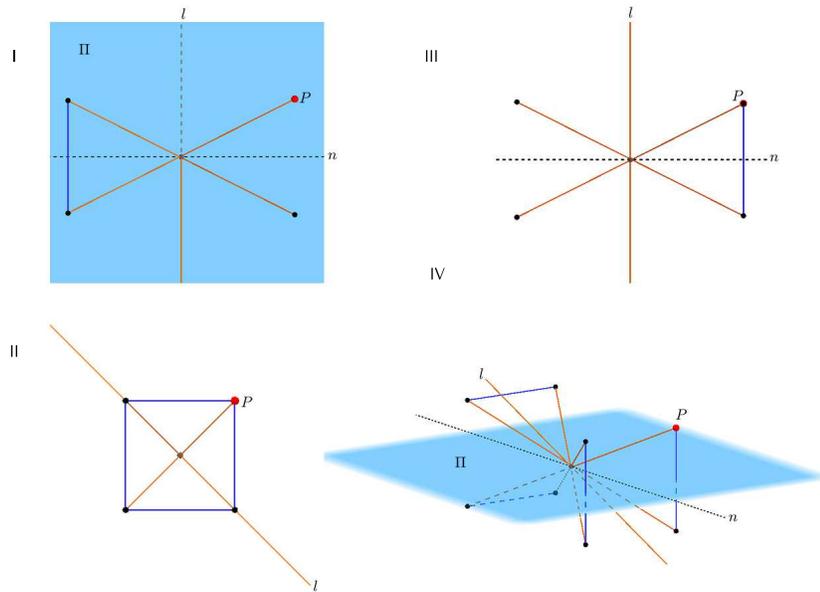


Figura 4.67: Polígono $\left\{\frac{8}{1*6}\right\} \# \{ \}^{*,\beta}$ con $\beta = \frac{1}{2}\pi$ y $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

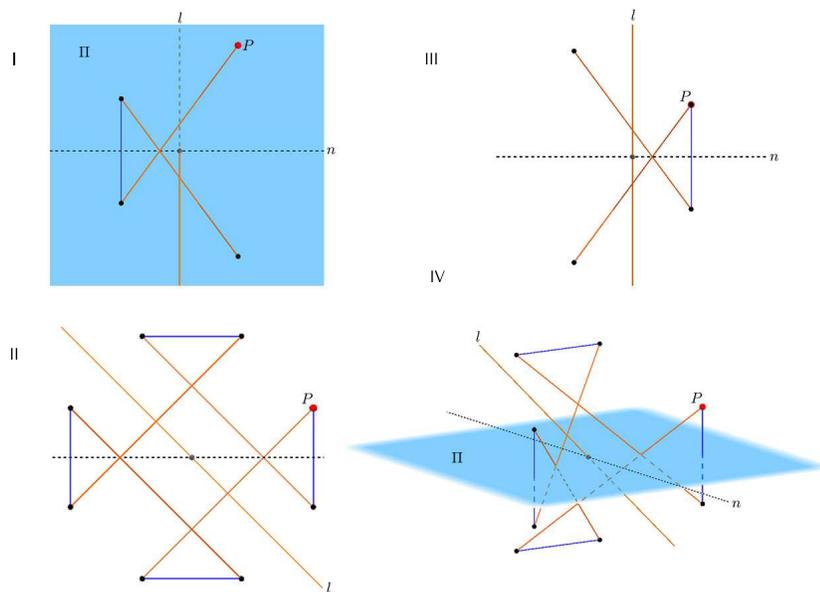


Figura 4.68: Polígono $\left\{\frac{8}{1*5}\right\} \# \{ \}^{*,\beta}$ con $\beta = \frac{5}{7}\pi$ y $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

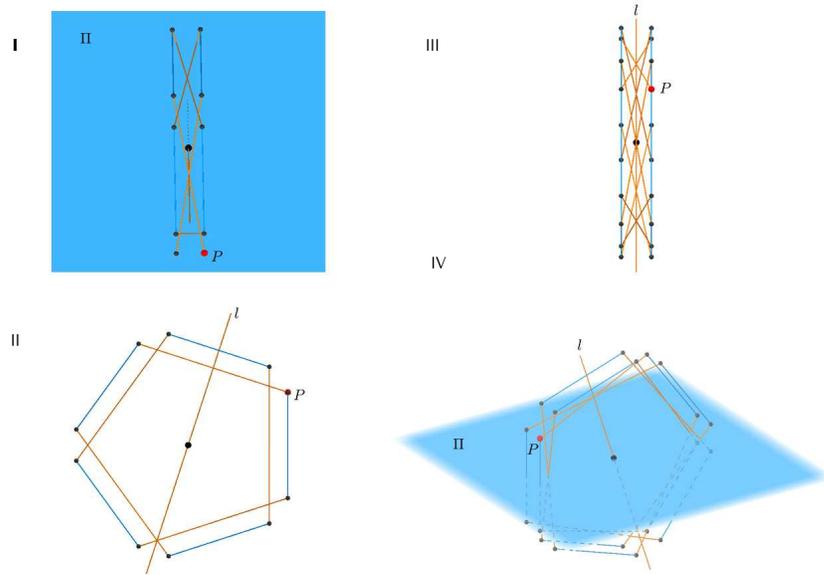


Figura 4.69: Polígono $\left\{ \frac{2 \cdot 10}{1 \cdot 1} \right\} \# \{ \}^{*,\beta}$ con $\beta = \frac{6}{11}\pi$ y $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

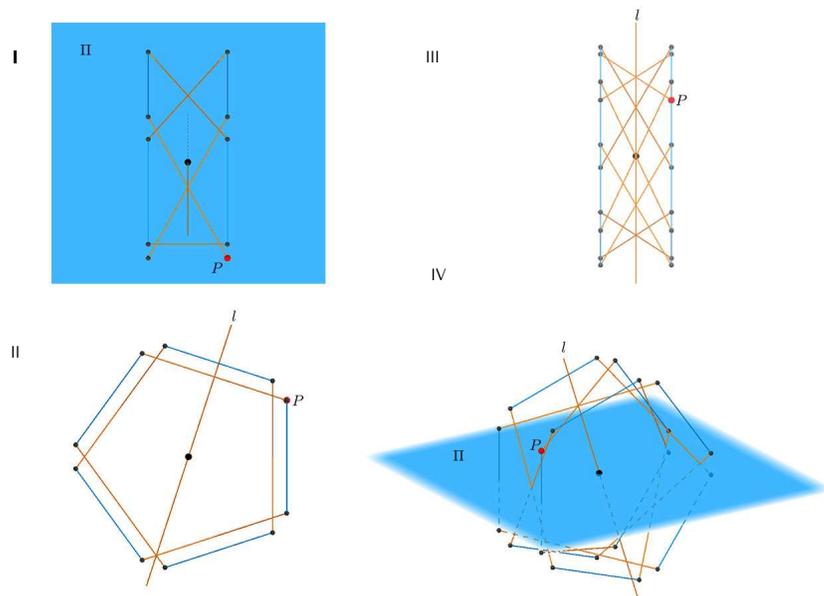


Figura 4.70: Polígono $\left\{ \frac{2 \cdot 10}{1 \cdot 1} \right\} \# \{ \}^{*,\beta}$ con $\beta = \frac{8}{11}\pi$ y $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

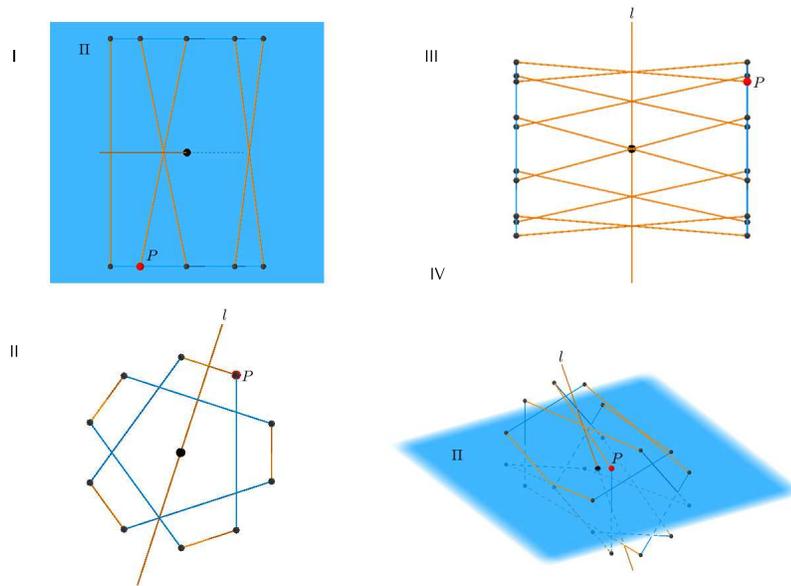


Figura 4.71: Polígono $\left\{ \frac{2 \cdot 10}{1 * 3} \right\} \# \{ \}^{*, \beta}$ con $\beta = \frac{2}{7}\pi$ y $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

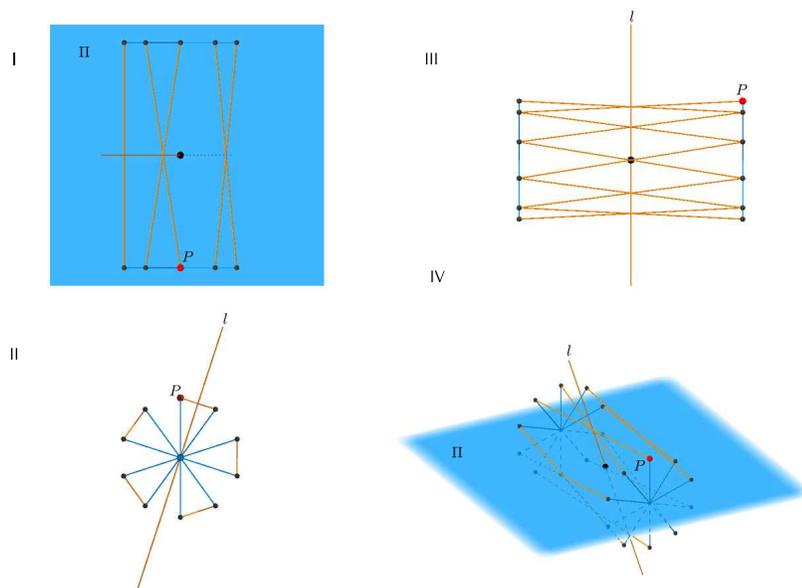


Figura 4.72: Polígono $\left\{ \frac{2 \cdot 10}{1 * 5} \right\} \# \{ \}^{*, \beta}$ con $\beta = \frac{4}{9}\pi$ y $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

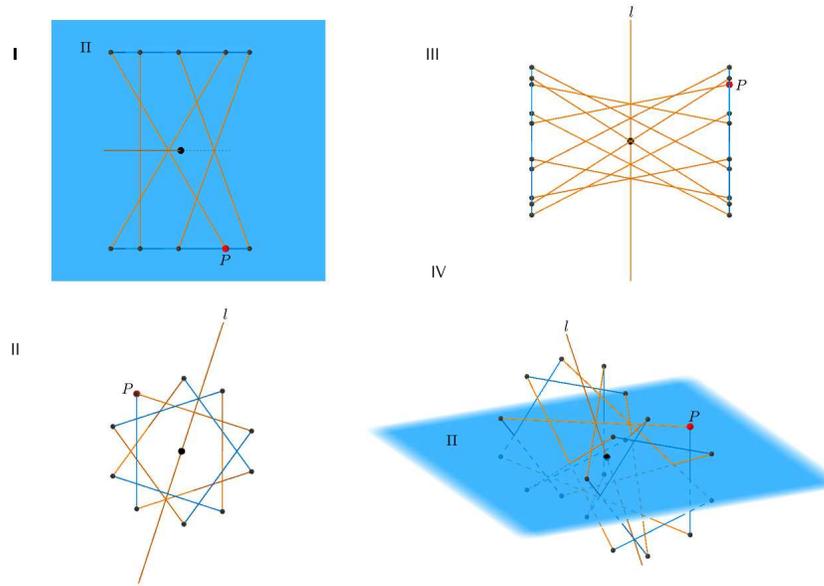


Figura 4.73: Polígono $\left\{ \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 3} \right\} \# \{ \}^{*,\beta}$ con $\beta = \frac{10}{17}\pi$ y $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

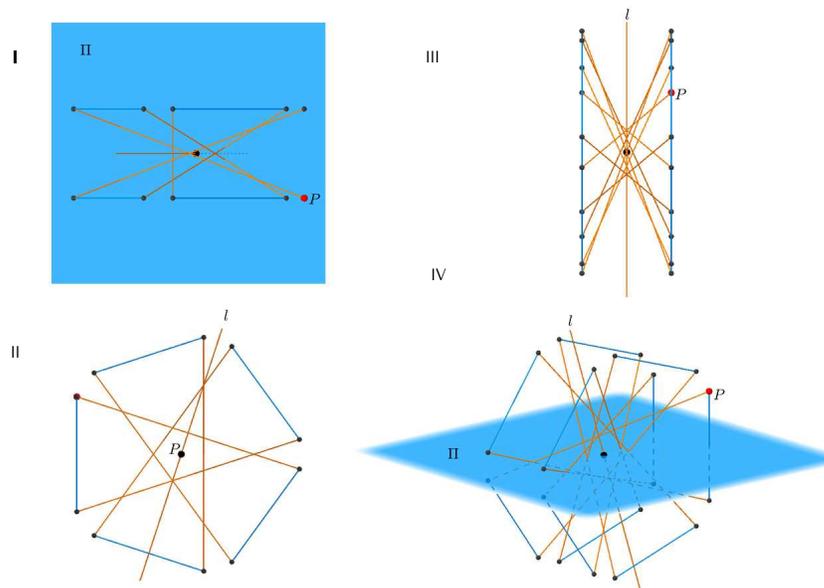


Figura 4.74: Polígono $\left\{ \frac{2 \cdot 10}{1 \cdot 5} \right\} \# \{ \}^{*,\beta}$ con $\beta = \frac{3}{16}\pi$ y $\theta = \frac{2}{5}\pi$.

Con el material expuesto en las secciones 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5 y 4.2.6 podemos formular el siguiente teorema, en el que excluimos los casos planos que ya fueron expuestos en la Sección 4.1 y los casos cuando \mathcal{P} es de la familia de cuadriláteros tipo 4^* que se obtuvieron en los casos 4.a) (Figura 4.32, página 149), 5.a) (Figura 4.33, página 150) y caso 6.a) (Figura 4.34, página 150) o el caso del rectángulo (Figura 4.59, página 170).

Teorema 4.10. *Sea \mathcal{P} un polígono finito en el espacio \mathbb{E}^3 cuyos vértices equidistan de un punto O (el cual definiremos a continuación). Entonces:*

\mathcal{P} es un 2- $\mathcal{P}gh$ si y solamente si se satisface una y sólo una de las siguientes:

- i) \mathcal{P} es regular.
- ii) \mathcal{P} tiene dos órbitas en aristas bajo la acción del grupo $G = \langle \rho_l, \rho_m \rangle$, donde para una elección arbitraria de aristas adyacentes de \mathcal{P} , ρ_l y ρ_m son los medio giros por las rectas l y m tales que $l \cap m = \{O\}$ y contienen los puntos medios de estas aristas. Además en este caso, si el conjunto de vértices de \mathcal{P} , $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, cumple que $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ está contenido en la región natural \mathbf{R} (como se definió en la página 154) entonces la realización de \mathcal{P} es fiel y no regular.
- iii) \mathcal{P} tiene dos órbitas en aristas bajo la acción del grupo $G = \langle \rho_l, \sigma_\Pi \rangle$, para una elección arbitraria de aristas adyacentes de \mathcal{P} , ρ_l es el medio giro por la recta l y σ_Π es la reflexión por el plano Π ($l \not\subseteq \Pi$) y tales que la intersección de la recta l y el plano Π es el punto O y para los cuales tanto l como Π contienen los puntos medios de estas aristas, respectivamente. Además en este caso, si el conjunto de vértices de \mathcal{P} , $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, cumple que $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ está contenido en la región natural \mathbf{R} (como se definió en la página 171) entonces la realización de \mathcal{P} es fiel y no regular.

Capítulo 5

Poliedros finitos geoméricamente hereditarios ($3\text{-}\mathcal{P}gh$). Un acercamiento

En este capítulo acercaremos al lector a algunas propiedades básicas de la teoría de los $3\text{-}\mathcal{P}gh$ finitos. Inicialmente, mencionaremos dos construcciones clásicas para los poliedros: la dualidad y el petrial. Éstas nos apoyarán para reconocer con mayor claridad a los poliedros regulares finitos. Posteriormente, analizaremos el medial de un poliedro regular finito, con el fin de probar que éste es un $3\text{-}\mathcal{P}gh$ finito. Concluiremos este capítulo con la exposición gráfica de los mediales de los 18 poliedros regulares finitos.

5.1. Poliedros regulares finitos

El problema de clasificar los poliedros regulares ha sido abordado desde la antigüedad y los resultados se han ido ampliando en función de la definición de poliedro regular que se use. En este trabajo sólo mencionaremos a poliedros regulares finitos en \mathbb{E}^3 , guiándonos del trabajo de B. Grünbaum [21] y A. Dress [15] y [16], sin mostrar explícitamente la prueba de su regularidad que se sigue de que estos poliedros tienen las simetrías requeridas en el Teorema 3.5 para ser regulares. Cabe recordar que los poliedros regulares (incluyendo infinitos) son geoméricamente hereditarios en vista de la Proposición 3.7.

Antes de proceder con la lista de los poliedros regulares finitos, recordaremos dos construcciones clásicas: la *dualidad* y el *petrial*. Estas (y otras) construcciones están descritas algebraicamente y a detalle en [41, §7B], sin embargo, en este trabajo nos

enfocaremos en su descripción combinatoria.

Dualidad (δ). En términos del orden parcial ésta es una construcción muy sencilla, los elementos de \mathcal{P}^δ son los mismos que los de \mathcal{P} , solo resta invertir el orden, es decir, $F \leq_\delta G$ en \mathcal{P}^δ si y sólo si $G \leq F$ en \mathcal{P} . De esta manera los vértices de \mathcal{P}^δ corresponden a las caras de \mathcal{P} , las aristas de \mathcal{P}^δ y las de \mathcal{P} son las mismas y las caras de \mathcal{P}^δ corresponden a los vértices de \mathcal{P} . Observe que si \mathcal{P} es regular y $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$ son los generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{P})$ con respecto a la bandera $\Phi = (V, a, F)$ entonces, \mathcal{P}^δ es regular y $(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_0)$ son los generadores de $\Gamma(\mathcal{P}^\delta)$ con respecto a la bandera $\Psi = (F, a, V)$ y por lo tanto $\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{P}^\delta)$. Cabe señalar en este punto que el medial (Definición 3.4) de un poliedro y el medial de su dual coinciden; esto es claro de la definición de medial y la relación de incidencia que brinda la dualidad.

Petrial (π). El petrial de un poliedro \mathcal{P} , denotado \mathcal{P}^π se puede describir de la siguiente manera. Los vértices y las aristas de \mathcal{P}^π coinciden con los vértices y las aristas de \mathcal{P} , sin embargo, las caras de \mathcal{P}^π son los caminos de Petrie de \mathcal{P} y muchas veces estos son polígonos, aunque hay situaciones como en el prisma triangular en que no lo son. Así, estos caminos de aristas están determinados por la propiedad de que cualesquiera dos pero no tres aristas consecutivas pertenecen a la misma cara de \mathcal{P} bajo la suposición adicional que el grado de cada vértice es al menos 3. Es importante mencionar que \mathcal{P}^π no siempre es un poliedro abstracto. Cuando \mathcal{P} es un poliedro regular y $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$ son los generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{P})$ con respecto a la bandera $\Phi = (V, a, F)$, entonces \mathcal{P}^π es regular y $(\sigma_0\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2)$ actúan como generadores de $\Gamma(\mathcal{P}^\pi)$ con respecto a la bandera $\widehat{\Phi} = (V, a, \mathbf{p})$, donde \mathbf{p} es el polígono de Petrie de \mathcal{P} que contiene a a y a la arista adyacente a ella e incidente a V y a F en \mathcal{P} . Por lo tanto, $\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{P}^\pi)$.

Observemos que el petrial es una construcción no solo combinatoria, sino geométrica. Es decir, si \mathcal{P} es un poliedro tal que \mathcal{P}^π es un poliedro, toda realización fiel y discreta de \mathcal{P} induce una realización fiel y discreta de \mathcal{P}^π . En cambio, la dualidad ofrece muy poco en el ámbito geométrico para poliedros no convexos. Para detalles acerca del comportamiento geométrico de la dualidad en poliedros convexos ver ([26], §3.4).

Mencionemos ahora los poliedros regulares finitos en \mathbb{E}^3 . La notación que usaremos para nombrar a cada uno, es una generalización al tipo de Schläfli y fue usada por McMullen y Schulte en [40] para algunos de los poliedros descritos en este trabajo. Por ejemplo, si los polígonos de Petrie de un poliedro regular con tipo $\{p, q\}$ son r -ágonos, denotaremos al petrial $\{p, q\}^\pi$ como $\{r, q\}_p$. Notemos que $\{p, q\}^\pi$ tiene

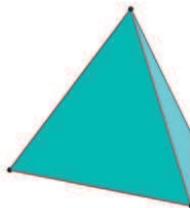
r -ágonos como caras, q de ellos en cada vértice y sus polígonos de Petrie son las caras del poliedro original, por lo que son p -ágonos. Si el lector está interesado en una descripción detallada de los símbolos, le sugerimos revisar [40].

De los poliedros clasificados en [40], 18 de ellos son finitos. De estos, 9 están descritos ampliamente en la literatura y el lector interesado puede consultar por ejemplo [10]. Naturalmente, los sólidos platónicos forman parte de la familia de poliedros regulares finitos. Además de estos, en la lista de poliedros regulares finitos están los poliedros de Kepler-Poinsot (o sólidos de Kepler-Poinsot): el *gran icosaedro* $\{3, \frac{5}{2}\}$, el *gran dodecaedro* $\{5, \frac{5}{2}\}$ y sus duales, respectivamente, el *gran dodecaedro estrellado* $\{\frac{5}{2}, 3\}$ y el *pequeño dodecaedro estrellado* $\{\frac{5}{2}, 5\}$. Para detalles acerca de la construcción de estos poliedros ver [9, §6.2, §6.3]. Además, todos estos poliedros tienen como grupo de simetrías un grupo isomorfo al grupo I , el grupo de simetrías del icosaedro regular.

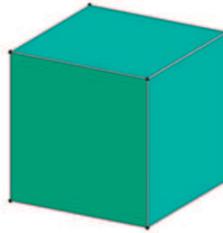
Con los sólidos platónicos y los poliedros de Kepler-Poinsot se han listado 9 poliedros regulares finitos. Durante buena parte del siglo XX estos fueron considerados todos los poliedros regulares finitos en \mathbb{E}^3 [9]. Fue hasta hasta que Grünbaum en [21] permitió que las caras de un poliedro no fueran planas e introdujo los petriales, que aparecieron los restantes 9 poliedros regulares finitos, que son precisamente los petriales de los 9 descritos anteriormente. A continuación mostramos gráficamente a los 18 poliedros mencionados en estos párrafos. Además, invitamos al lector a consultar la obra [11] donde se describe de forma detallada la construcción en físico de la mayoría de los poliedros aquí descritos.

5.1.1. Sólidos platónicos

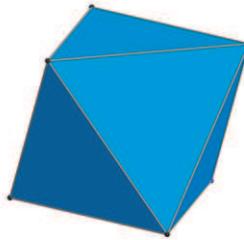
- 1) Tetraedro $\{3, 3\}$:



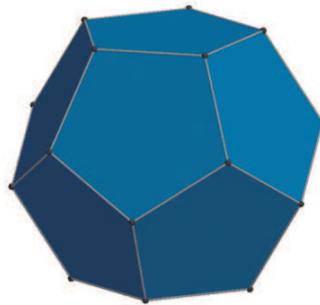
2) Hexaedro $\{4, 3\}$:



3) Octaedro $\{3, 4\}$:



4) Dodecaedro $\{5, 3\}$:

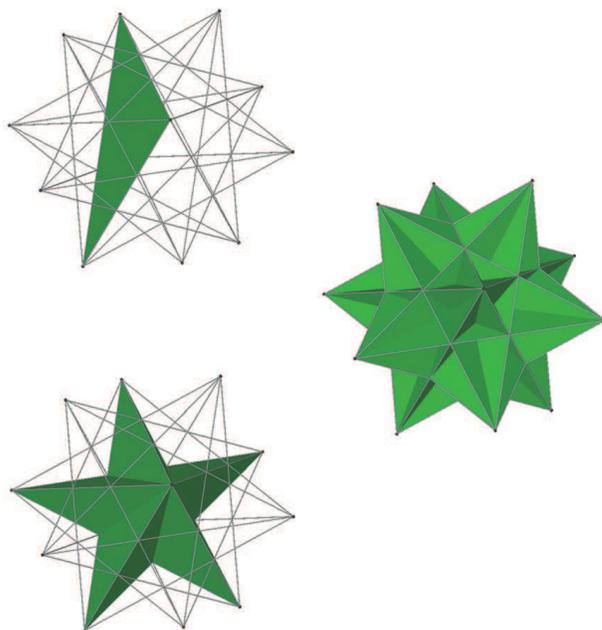


5) Icosaedro $\{3, 5\}$:

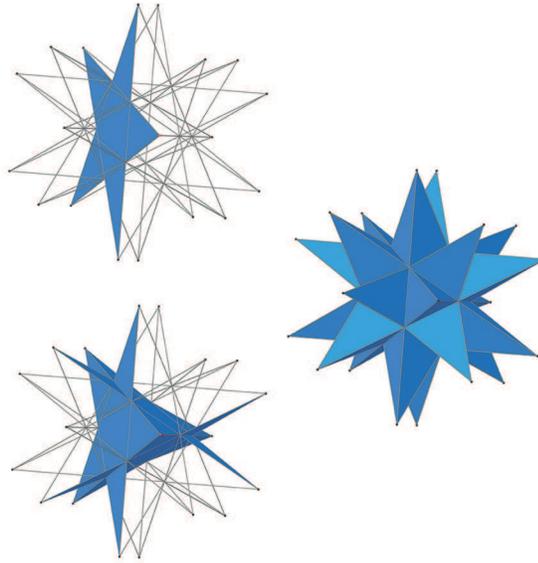


5.1.2. Poliedros de Kepler-Poinsot

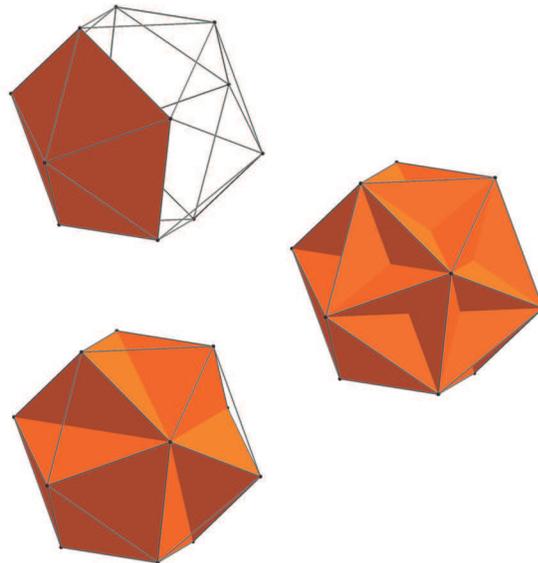
6) Gran icosaedro $\{3, \frac{5}{2}\}$:



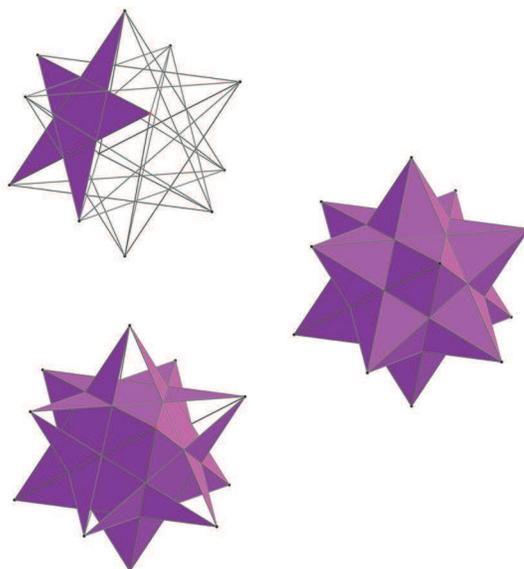
7) Gran dodecaedro estrellado $\{\frac{5}{2}, 3\}$:



8) Gran dodecaedro $\{5, \frac{5}{2}\}$:



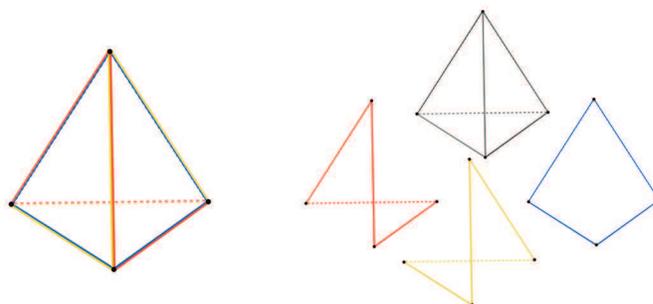
9) Pequeño dodecaedro estrellado $\{\frac{5}{2}, 5\}$:

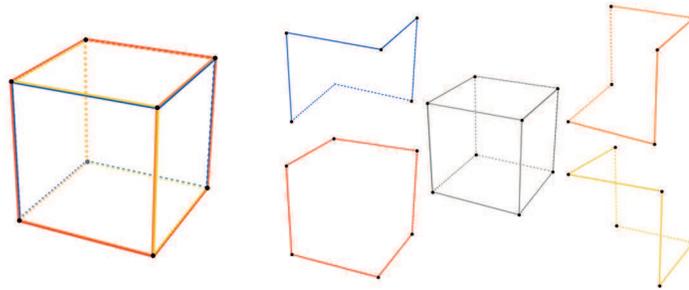
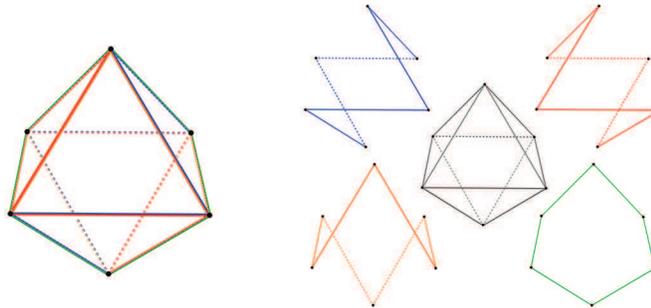
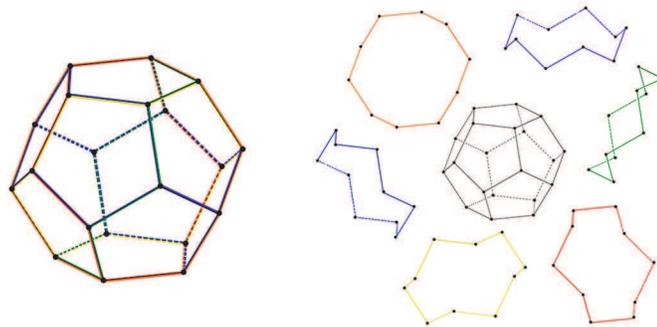


5.1.3. Petriales de poliedros regulares finitos

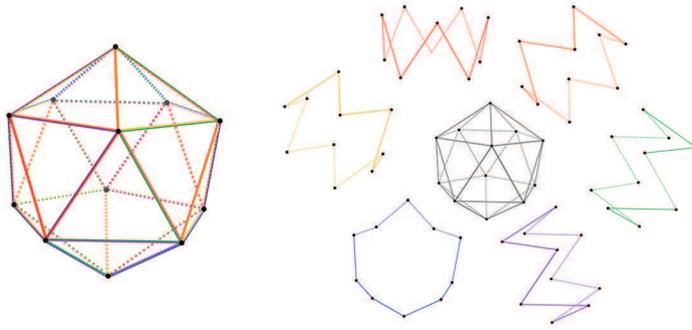
Petries de los sólidos platónicos y de los poliedros de Kepler-Poinsot

10) PetrieTetraedro $\{3, 3\}^\pi = \{4, 3\}_3$

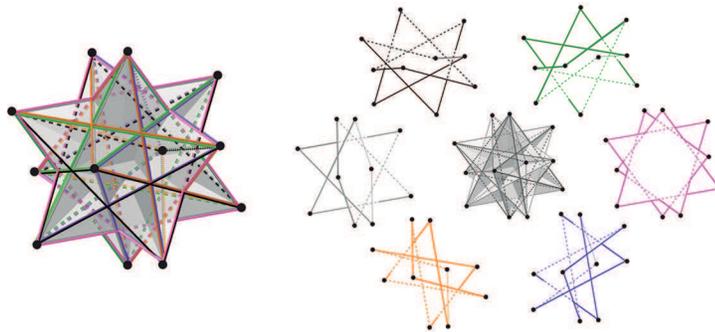


11) Petrie Hexaedro $\{4, 3\}^\pi = \{6, 3\}_4$ 12) Petrie Octaedro $\{3, 4\}^\pi = \{6, 4\}_3$ 13) Petrie Dodecaedro $\{5, 3\}^\pi = \{10, 3\}_5$ 

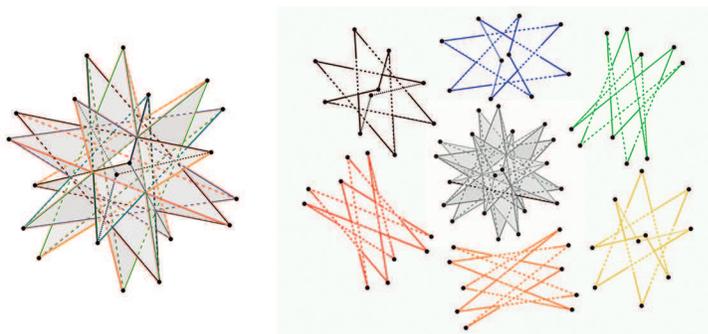
14) Petrie Icosaedro $\{3, 5\}^\pi = \{10, 5\}_3$



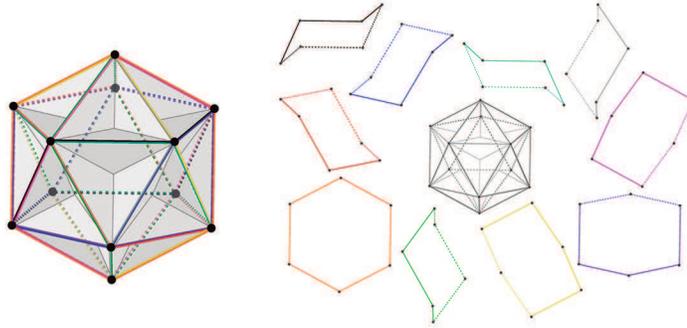
15) Petrie Gran icosaedro $\{3, \frac{5}{2}\}^\pi = \{\frac{10}{3}, \frac{5}{2}\}_3$



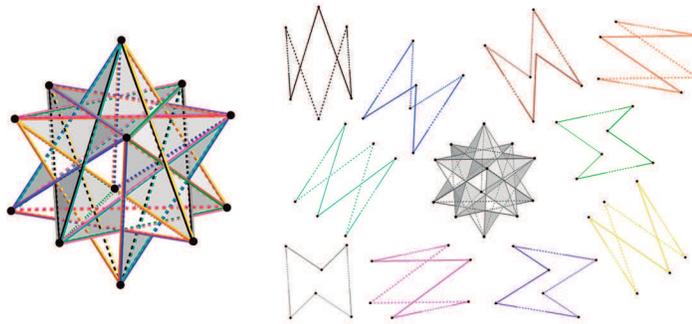
16) Petrie Gran dodecaedro estrellado $\{\frac{5}{2}, 3\}^\pi = \{\frac{10}{3}, 3\}_{\frac{5}{2}}$



17) Petrie Gran dodecaedro $\{5, \frac{5}{2}\}^\pi = \{6, \frac{5}{2}\}_5$



18) Petrie Pequeño dodecaedro estrellado $\{\frac{5}{2}, 5\}^\pi = \{6, 5\}_{\frac{5}{2}}$



Por último, para el lector interesado, enunciamos el teorema de clasificación de poliedros regulares finitos en \mathbb{E}^3 el cual aparece en [40] donde encontrará una prueba al mismo.

Teorema 5.1. *La lista de 18 poliedros regulares finitos mencionados anteriormente es completa.*

5.2. Algunos poliedros finitos geoméricamente hereditarios

Sabemos por la Sección 3.2 que los poliedros hereditarios son poliedros regulares o poliedros de dos órbitas en banderas de clase $2_{\{0,1\}}$ y recordemos, como se hizo en

el Capítulo 4 y en la Definición 3.8, que podemos hacer la siguiente reformulación. Dado \mathcal{P} un poliedro en \mathbb{E}^n , diremos que \mathcal{P} es un **poliedro geoméricamente hereditario** ($3\text{-}\mathcal{P}gh$), si para toda cara F de \mathcal{P} y toda $\alpha \in G(F)$, existe $\beta \in G(\mathcal{P})$ tal que $\beta \in \text{Stab}_{G(\mathcal{P})}[F]$ y $\beta|_F = \alpha$.

Además, como tenemos a lo más dos órbitas de caras, tenemos:

- 1 órbita en banderas, implica que \mathcal{P} es regular. Este caso es combinatoriamente hereditario y geoméricamente hereditario si la realización en \mathbb{E}^3 es simétrica, es decir, si toda permutación de \mathcal{F}_0 inducida por un automorfismo γ se extiende a una isometría de \mathbb{E}^3 .
- 2 órbitas en banderas, será el caso de estudio.

Sin embargo, no clasificaremos todos los poliedros geoméricamente hereditarios con caras regulares, ya que el análisis por su tamaño sale, por el momento, de nuestro objetivo. Aun así, veremos una familia de ejemplos con el *medial* de un poliedro \mathcal{P} , el cual ya se definió en la Sección 3.1. Por otro lado, notemos que un poliedro y su dual tienen el mismo medial. Nos podemos convencer de este hecho observando que en los diagramas de Hasse del poliedro \mathcal{P} y su dual \mathcal{P}^δ sólo intercambiamos vértices por caras, algo así como “voltear” el diagrama. Por otro lado, es preciso notar que el Petrie de un poliedro no coincide, en general, con el Petrie de su dual como se vió en los ejemplos de poliedro regulares.

5.2.1. El medial de los 18 poliedros regulares (finitos) es un $3\text{-}\mathcal{P}gh$

En este apartado veremos que el medial de cada uno de los 18 poliedros regulares finitos expuestos en el capítulo anterior son poliedros geoméricamente hereditarios. De hecho, si el poliedro \mathcal{P} es combinatoriamente regular, entonces $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ es combinatoriamente hereditario. Notemos porqué.

Tomemos \mathcal{P} un poliedro regular con símbolo de Schläfli $\{p, q\}$ y $\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \rangle$, donde σ_0 , σ_1 y σ_2 son los generadores distinguidos con respecto a la bandera base $\Phi = (V, a, F)$. Además consideremos a $\{V, V'\} \subset \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, $\{a, a'\} \subset \mathcal{F}_1(\mathcal{P})$ y $\{F, F'\} \subset \mathcal{F}_2(\mathcal{P})$, donde V' es adyacente a V e incidente a la arista a , a es adyacente a la arista a' con el vértice V en común y F' adyacente a F con a la arista en común. Por otro lado, consideremos a $\Psi = (U, b, G)$ y $\Psi^2 = (U, b, G_V)$ las banderas inducidas en el $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$, con $\{U, U'\} \subset \mathcal{F}_0(\mathbf{Med}(\mathcal{P}))$, $\{b, b'\} \subset \mathcal{F}_1(\mathbf{Med}(\mathcal{P}))$ y

$\{G, G_V\} \subset \mathcal{F}_2(\mathbf{Med}(\mathcal{P}))$, donde $\{U, U'\}$, vistas de forma geométrica, son los puntos medios de las aristas a y a' respectivamente, G es la cara inducida por F y G_V es la cara inducida por el vértice V de \mathcal{P} (Figura 5.1). Por comodidad en el manejo del lenguaje, diremos que la cara G es de *tipo 1*, mientras que la cara G_V es de *tipo 2*.

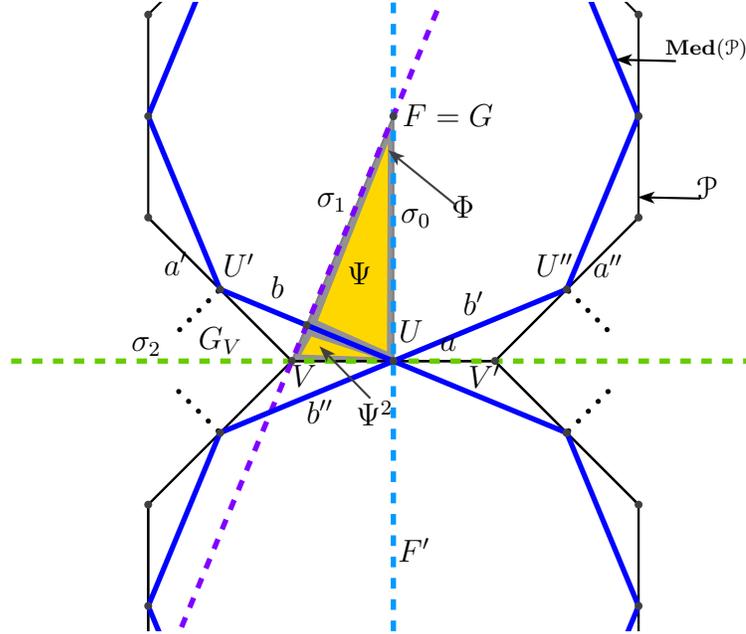


Figura 5.1: La bandera Ψ en $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$.

Primero notemos que σ_0 y σ_1 actúan intercambiando la arista y el vértice de Ψ , respectivamente. De esto se tiene que, $\Gamma(G) = \langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle = \Gamma(F)$. Por otro lado, σ_2 y σ_1 actúan intercambiando la arista y el vértice de Ψ^2 , respectivamente. Por lo que, $\Gamma(G_V) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$. De la transitividad en banderas de $G(\mathcal{P})$ tenemos que el $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ es transitivo en caras del mismo tipo pero no de un tipo a otro a menos de que \mathcal{P} sea autodual. Veamos el porque.

Puesto que \mathcal{P} tiene símbolo de Schläfli $\{p, q\}$, las caras de *tipo 1* son p -ágonos en tanto que las caras de *tipo 2* son q -ágonos. De aquí que si $p \neq q$ no existe un automorfismo de \mathcal{P} que intercambie caras de distinto tipo. Sin embargo, si $p = q$ y \mathcal{P} es un poliedro regular finito de \mathbb{E}^3 , entonces $p = 3 = q$, es decir, \mathcal{P} es un tetraedro y $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ es regular (es el octaedro regular). Como este es el único caso para los

poliedros regulares finitos, concluimos que si \mathcal{P} es regular finito en \mathbb{E}^3 , pero no es el tetraedro, entonces $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ es de clase $2_{\{0,1\}}$ y por el Teorema 3.12 $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ es hereditario. De esta exposición, observemos que podemos sustituir $\Gamma(\mathcal{P})$ por $G(\mathcal{P})$ en los argumentos anteriores y unido con la definición de $3\text{-}\mathcal{P}gh$ tenemos la siguiente:

Proposición 5.2. *Si \mathcal{P} es un poliedro regular finito en \mathbb{E}^3 entonces, $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ es un $3\text{-}\mathcal{P}gh$.*

Hacemos notar que combinatoriamente si \mathcal{P} es un poliedro regular entonces, $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ es combinatoriamente regular si y sólo si \mathcal{P} es autodual¹ [46, Teorema 4.1].

A modo de resumen, cuando \mathcal{P} no es auto-dual, generalmente hay dos tipos de caras de $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$, p -ágonos que corresponden al subgrupo $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle \subset \Gamma(\mathcal{P})$ y q -ágonos correspondientes al subgrupo $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \subset \Gamma(\mathcal{P})$. Por otro lado, cuando $q = p$ todas las caras de $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ son p -ágonos, por lo que $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ tiene caras de un solo tipo. En particular esto es cierto cuando \mathcal{P} es autodual. Sin embargo, si \mathcal{P} no es autodual entonces el $\mathbf{Med}(\mathcal{P})$ no es regular aún cuando $p = q$.

A continuación mostramos imágenes de los 14 mediales de los 18 poliedros regulares finitos (esto sucede por la dualidad), mismos que mostramos como ejemplos de poliedros geoméricamente hereditarios con caras planas regulares². Para facilitar la visión e interpretación de estos poliedros, a partir de la Figura 5.4, las figuras están ensambladas de la siguiente forma. De izquierda a derecha, las primeras dos imágenes muestran las caras, por separado, que componen al poliedro junto con un vértice distinguido en rojo (basta esto por la transitividad en arcos), la siguiente imagen muestra las caras que comparten el vértice distinguido y como se unen. Por último, se muestra el ensamble total del poliedro.

Cabe destacar, como se muestra a continuación, que el símbolo de Schläfli generalizado $\left\{ \begin{matrix} p_0 \\ p_1 \end{matrix}, q \right\}$ (definido en la página 112) lo usaremos para denotar el medial de los siguientes poliedros teniendo presente que éste símbolo sólo rescata la información combinatoria del objeto. Aunado a esto, describimos sus caras y figura de vértice de forma geométrica.

¹Un n -politopo \mathcal{P} que es dual de sí mismo lo denominamos **autodual**. Así, el tetraedro $\{3, 3\}$ y la teselación $\{4, 3, 4\}$ son ejemplos de un 3 -politopo y un 4 -politopo autoduales, respectivamente.

²Omitimos al tetraedro por tratarse de un caso donde el medial es un poliedro regular (el octaedro).

Por otro lado, los nombres que aquí acompañan a cada figura son tomados de la página web: [Lista de Poliedros Uniformes](#) y el acrónimo dentro de paréntesis tiene como referencia la página web: [Acrónimos según Bowers](#).

- 1) $\mathcal{P} = \{4, 3\}$ y $\mathcal{P}^\delta = \{3, 4\}$ - $\mathbf{Med}(\mathcal{P}) = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4, 4 \end{matrix} \right\}$. Tiene por caras triángulos y cuadrados y por figura de vértice rectángulos (Figura 5.2).

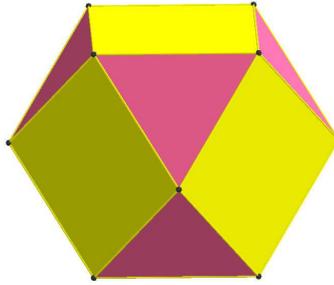


Figura 5.2: Cuboctaedro (Co)

- 2) $\mathcal{P} = \{5, 3\}$ y $\mathcal{P}^\delta = \{3, 5\}$ - $\mathbf{Med}(\mathcal{P}) = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 5, 4 \end{matrix} \right\}$. Tiene por caras triángulos y pentágonos y por figura de vértice rectángulos (Figura 5.3).

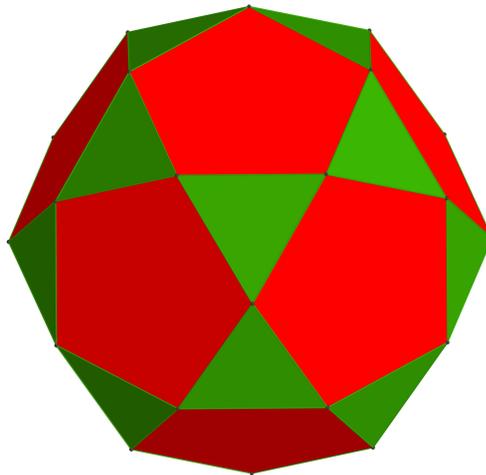


Figura 5.3: Icosidodecaedro (Id)

- 3) $\mathcal{P} = \{\frac{5}{2}, 5\}$ y $\mathcal{P}^\delta = \{5, \frac{5}{2}\}$ - $\mathbf{Med}(\mathcal{P}) = \left\{\frac{5}{2}, 4\right\}$. Tiene por caras pentágonos y pentágonos estrellados $\{\frac{5}{2}\}$ y por figura de vértice rectángulos (Figura 5.4).

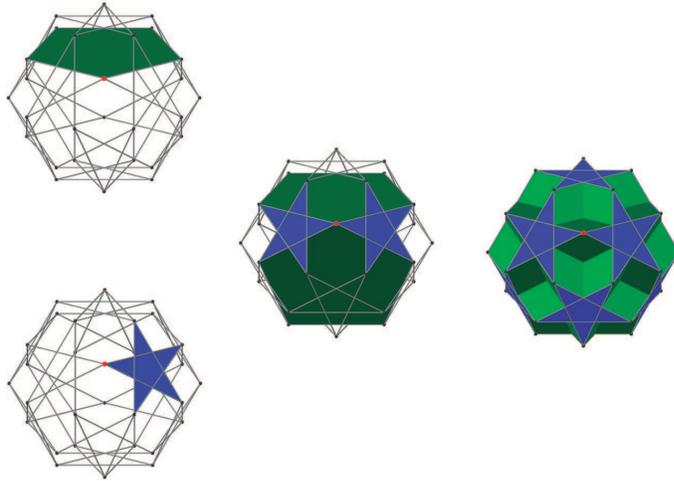


Figura 5.4: Dodecadodecaedro (Dod)

- 4) $\mathcal{P} = \{\frac{5}{2}, 3\}$ y $\mathcal{P}^\delta = \{3, \frac{5}{2}\}$ - $\mathbf{Med}(\mathcal{P}) = \left\{\frac{5}{2}, 4\right\}$. Tiene por caras triángulos y pentágonos estrellados $\{\frac{5}{2}\}$ y por figura de vértice rectángulos (Figura 5.5).

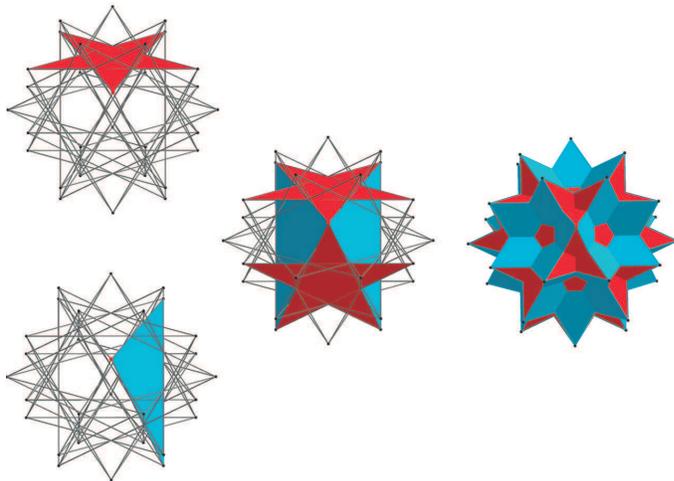


Figura 5.5: Gran icosidodecaedro (Gicod)

- 5) $\mathcal{P} = \{4, 3\}_3 - \mathbf{Med}(\mathcal{P}) = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4, 4 \end{matrix} \right\}$. Tiene por caras triángulos y cuadrados y por figura de vértice cuadriláteros de tipo 4^* (Figura 5.6).

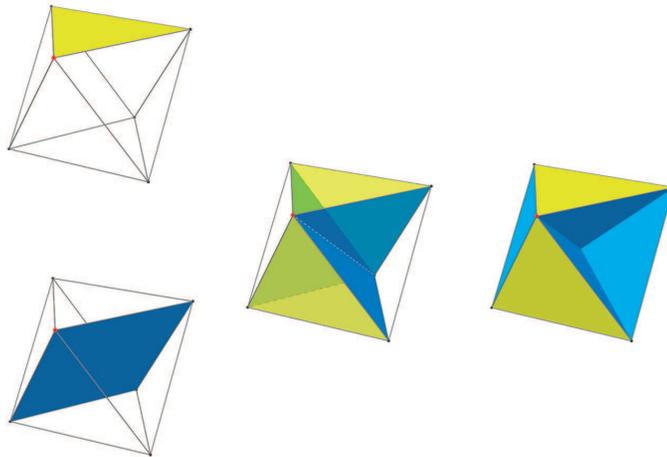


Figura 5.6: Tetrahemihexaedro (Thah)

- 6) $\mathcal{P} = \{6, 3\}_4 - \mathbf{Med}(\mathcal{P}) = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 6, 4 \end{matrix} \right\}$. Tiene por caras triángulos y hexágonos y por figura de vértice cuadriláteros de tipo 4^* (Figura 5.7).

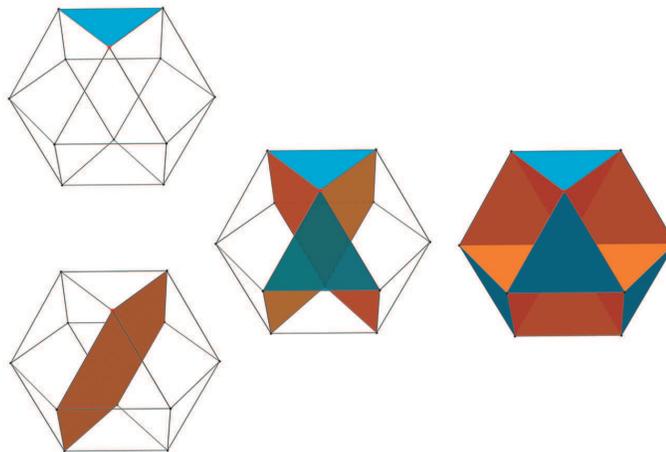


Figura 5.7: Octahemioctaedro (Oho)

- 7) $\mathcal{P} = \{6, 4\}_3 - \mathbf{Med}(\mathcal{P}) = \left\{ \frac{4}{6}, 4 \right\}$. Tiene por caras cuadrados y hexágonos y por figura de vértice cuadriláteros de tipo 4^* (Figura 5.8).

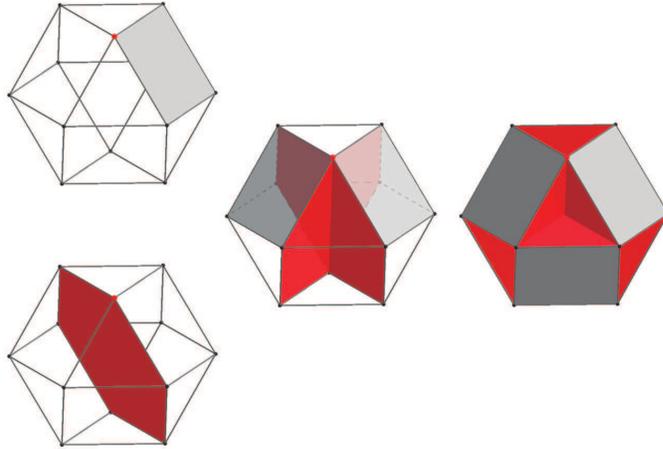


Figura 5.8: Cubohemioctaedro (Cho)

- 8) $\mathcal{P} = \{10, 3\}_5 - \mathbf{Med}(\mathcal{P}) = \left\{ \frac{3}{10}, 4 \right\}$. Tiene por caras triángulos y decágonos y por figura de vértice cuadriláteros de tipo 4^* (Figura 5.9).

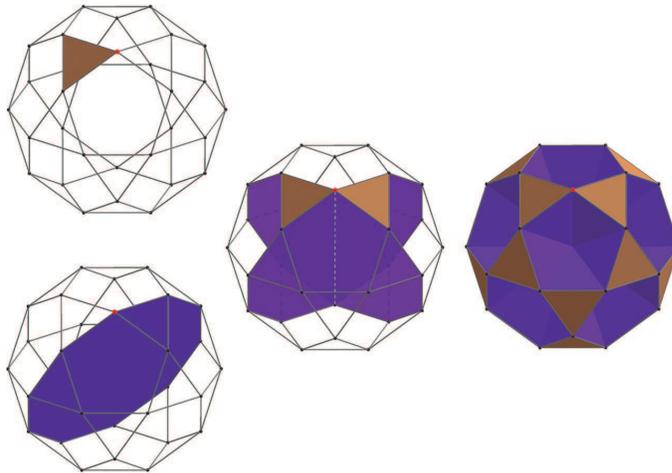


Figura 5.9: Pequeño icosahemidodecaedro (Seihid)

- 9) $\mathcal{P} = \{10, 5\}_3 - \mathbf{Med}(\mathcal{P}) = \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 10, 4 \end{matrix} \right\}$. Tiene por caras pentágonos y decágonos y por figura de vértice cuadriláteros de tipo 4^* (Figura 5.10).

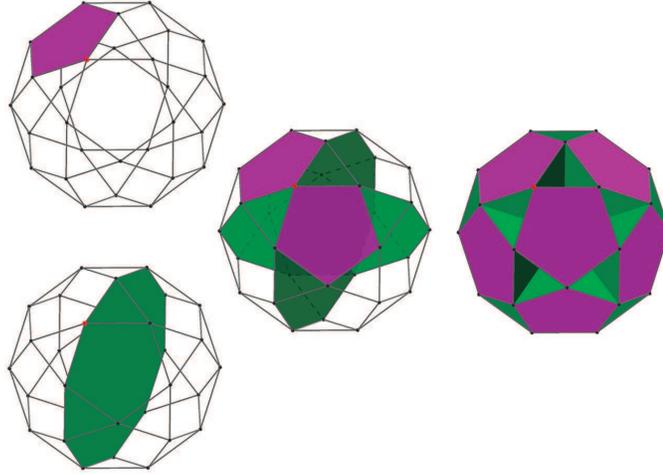


Figura 5.10: Pequeño dodecahemidodecaedro (Sidhid)

- 10) $\mathcal{P} = \{6, \frac{5}{2}\}_5 - \mathbf{Med}(\mathcal{P}) = \left\{ \begin{matrix} \frac{5}{2} \\ 6, 4 \end{matrix} \right\}$ tiene por caras pentágonos estrellados $\{\frac{5}{2}\}$ y hexágonos y por figura de vértice cuadriláteros de tipo 4^* (Figura 5.11).

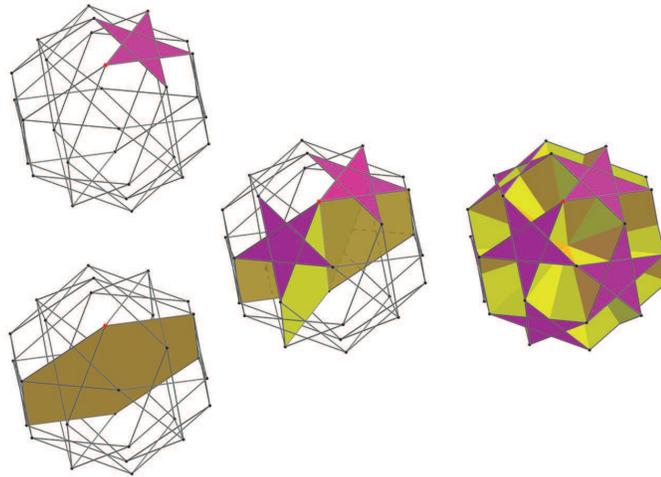


Figura 5.11: Pequeño dodecahemicosaedro (Sidhei)

- 11) $\mathcal{P} = \{6, 5\}_{\frac{5}{2}}$ - $\mathbf{Med}(\mathcal{P}) = \left\{ \frac{5}{6}, 4 \right\}$. Tiene por caras pentágonos y hexágonos y por figura de vértice cuadriláteros de tipo 4^* (Figura 5.12).

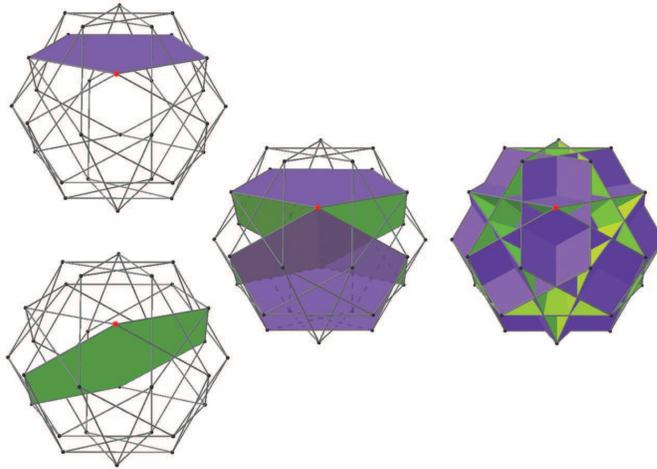


Figura 5.12: Gran dodecahemicosaedro (Gidhei)

- 12) $\mathcal{P} = \left\{ \frac{10}{3}, \frac{5}{2} \right\}_3$ - $\mathbf{Med}(\mathcal{P}) = \left\{ \frac{5}{\frac{2}{10}}, 4 \right\}$. Tiene por caras pentágonos estrellados $\left\{ \frac{5}{2} \right\}$ y decágonos estrellados $\left\{ \frac{10}{3} \right\}$ y por figura de vértice cuadriláteros 4^* .

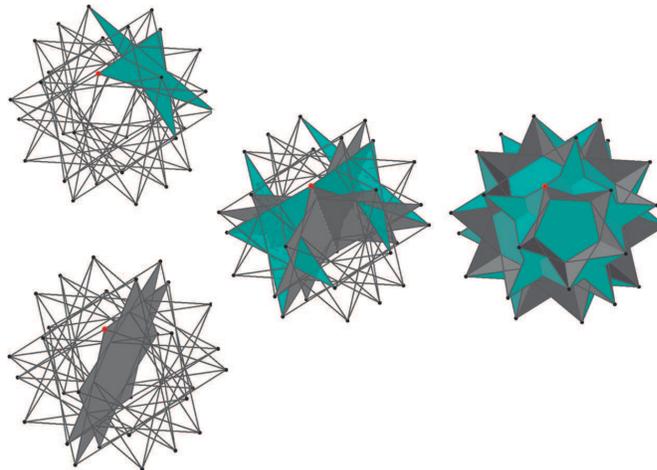


Figura 5.13: Gran dodecahemidodecaedro (Gidhid)

- 13) $\mathcal{P} = \left\{ \frac{10}{3}, 3 \right\}_{\frac{5}{2}} - \mathbf{Med}(\mathcal{P}) = \left\{ \frac{3}{\frac{10}{3}}, 4 \right\}$. Tiene por caras triángulos y decágonos estrellados $\left\{ \frac{10}{3} \right\}$ y por figura de vértice cuadriláteros de tipo 4^* (Figura 5.14).

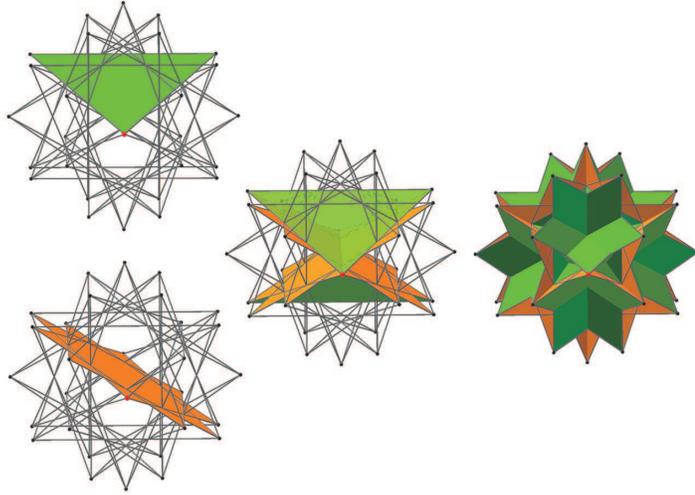


Figura 5.14: Gran icosahemidodecaedro (Geihid)

Para concluir este capítulo, mostramos una tabla donde se exponen algunos elementos como son: número de vértices, número de aristas, número de caras, tipo de cada cara y el grupo de simetrías directas de cada uno de los poliedros mencionados.

Poliedro base \mathcal{P}	Nombre de Med(\mathcal{P})	$ \mathcal{F}_0(\text{Med}(\mathcal{P})) $	$ \mathcal{F}_1(\text{Med}(\mathcal{P})) $	$ \mathcal{F}_2(\text{Med}(\mathcal{P})) $	Tipo de caras	$G(\text{Med}(\mathcal{P}))$
Tetraedro	Octaedro regular	6	12	8	$8\{3\}$	O
Hexaedro - Octaedro	Cuboctaedro	12	24	14	$8\{3\} + 6\{4\}$	O
Dodecaedro - Icosaedro	Icosidodecaedro	30	60	32	$20\{3\} + 12\{5\}$	I
Gran Dodecaedro - Pequeño Dodecaedro Estrellado	Dodecadodecaedro	30	60	24	$12\{5\} + 12\{\frac{5}{2}\}$	I
Gran Icosaedro - Gran Dodecaedro Estrellado	Gran Icosidodecaedro	30	60	32	$20\{3\} + 12\{\frac{5}{2}\}$	I
Petrie Tetraedro	Tetrahemihexaedro	6	12	7	$4\{3\} + 3\{4\}$	T
Petrie Hexaedro	Octahemioctaedro	12	24	12	$8\{3\} + 4\{6\}$	O
Petrie Octaedro	Cubohemioctaedro	12	24	10	$6\{4\} + 4\{6\}$	O
Petrie Dodecaedro	Pequeño Icosahemidodecaedro	30	60	26	$20\{3\} + 6\{10\}$	I
Petrie Icosaedro	Pequeño Dodecahemidodecaedro	30	60	18	$12\{5\} + 6\{10\}$	I
Petrie Gran Dodecaedro	Pequeño Dodecahemicosaedro	30	60	22	$12\{\frac{5}{2}\} + 10\{6\}$	I
Petrie Pequeño Dodecaedro Estrellado	Gran Dodecahemicosaedro	30	60	22	$12\{5\} + 10\{6\}$	I
Petrie Gran Icosaedro	Gran Dodecahemidodecaedro	30	60	18	$12\{\frac{5}{2}\} + 6\{\frac{10}{3}\}$	I
Petrie Gran Dodecaedro Estrellado	Gran Icosahemidodecaedro	30	60	26	$20\{3\} + 6\{\frac{10}{3}\}$	I

Capítulo 6

Conclusiones y estudios futuros

El desarrollo de este estudio brindó una construcción geométrica-combinatoria para los polígonos geoméricamente hereditarios ($2\text{-}\mathcal{P}gh$) en los espacios euclidianos de dimensión 2 y 3; con ello, se desprendió un estudio alterno a los polígonos isogonales, al que mostró Grünbaum y que mencionamos en la Sección 4.1.4. Además, proporcionó respuesta parcial a una de las preguntas abiertas que plantean Asia Weiss, Mark Mixer y Egon Schulte en [36] respecto al estudio de los politopos geoméricamente hereditarios ($n\text{-}\mathcal{P}gh$). Asimismo, consecuencia de este trabajo, se desprende de forma natural el estudio de los polígonos isotoxales en los espacios euclidianos de dimensión 2 y 3.

Por otro lado, también se deja una puerta abierta para el análisis de los $2\text{-}\mathcal{P}gh$ en espacios euclidianos de dimensión mayor o igual a cuatro y el estudio de $2\text{-}\mathcal{P}gh$ en las geometrías proyectiva, esférica o hiperbólica, junto con su "dualidad", es decir, desde el estudio con los polígonos con dos órbitas en vértices. Aunado a ello, el estudio de los $n\text{-}\mathcal{P}gh$ realizables en espacios euclidianos mayores o iguales a 3 y en geometrías distintas a la euclidiana.

A su vez, con base en los $2\text{-}\mathcal{P}gh$ podemos cuestionarnos ¿cuáles son los poliedros combinatorios y geoméricos cuyas caras son los $2\text{-}\mathcal{P}gh$ no regulares? ¿Cuáles son los $3\text{-}\mathcal{P}gh$ que tienen por caras a los $2\text{-}\mathcal{P}gh$ no regulares? Estas preguntas están estrechamente relacionadas con algunas expuestas en [25], [27], [37] y [57] y su análisis vislumbra un campo rico de estudio.

También, se abre camino para examinar la existencia de $n\text{-}\mathcal{P}gh$ cuyas i caras son $n\text{-}\mathcal{P}gh$ no regulares ($i \geq 3$). Una pregunta estrechamente relacionada a esto es

si, dado un n - $\mathcal{P}gh$ \mathcal{P} , es posible construir otro n - $\mathcal{P}gh$ que tenga a \mathcal{P} como sus facetas.

Por otra parte, ¿cómo clasificar a los 3 - $\mathcal{P}gh$, no regulares, transitivos en sus i -caras, para alguna $i \in \{0, 1, 2\}$? El dodecaedro rómbico es un ejemplo de un poliedro geoméricamente hereditario transitivo en sus 2 -caras. Ahora bien, en general, ¿cuáles son los n - $\mathcal{P}gh$, no regulares, transitivos en sus i -caras, para alguna $i \in \{0, \dots, n - 1\}$?

Finalmente, dentro de este trabajo se expuso que el medial de un poliedro regular finito es un 3 - $\mathcal{P}gh$. A partir de ello las preguntas que surgen son: ¿el medial de los 30 poliedros regulares infinitos es un 3 - $\mathcal{P}gh$?, ¿cuáles son los 2 - $\mathcal{P}gh$ infinitos en el espacio euclidiano? ¿cuáles son los "duals" de estos polígonos? ¿cuándo y de qué forma el medial de un poliedro no regular, es un 3 - $\mathcal{P}gh$?, ¿qué otras operaciones como truncamiento, amalgamación, etc. de 3 - $\mathcal{P}gh$ proporcionan 3 - $\mathcal{P}gh$? Preguntas que tienen cercana relación con la exposición en [43] como material de análisis.

Bibliografía

- [1] Araujo, G., Hubbard, I., Oliveros, D. & Schulte, E. (2013). *Colorful polytopes and graphs*. Israel Journal of Mathematics, 195 (2), pp. 647–675.
- [2] Armstrong, M. (1988). *Groups and symmetry*. New York, E.U.A.: Springer-Verlag.
- [3] Barker, W. & Howe, R. (2007). *Continuous symmetry. From Euclid to Klein*. Rhode Island, E.U.A: American Mathematical Society.
- [4] Borovik, A. & Borovik, A. (2000). *Mirrors and reflections. The geometry of finite reflection groups*. En *Universitex*. New York, E.U.A.: Springer.
- [5] Climenhaga, V. & Katok, A. (2010). *From groups to geometry and back*. En *Student Mathematical Library. Series* (Vol. 81). Rhode Island, E.U.A: American Mathematical Society.
- [6] Conrad, K. (2016). *Isometries of \mathbb{R}^n* . En *Notas de curso*. University of Connecticut. Recuperado de <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/isometryRn.pdf>
- [7] Coxeter, H. (1938). *Regular Skew Polyhedra in Three and Four Dimension and their Topological Analogues*. Oxford, R.U: Proceedings of the London Mathematical Society, (Vol. s2-43, Issue 1), pp. 33–62.
- [8] Coxeter, H. (1969). *Introduction to geometry*. New York, E.U.A: Wiley & Sons.
- [9] Coxeter, H. (1973). *Regular polytopes*. New York, E.U.A: Dover Publications, Inc.
- [10] Coxeter, H. (1991). *Regular complex polytopes*. Cambridge, R.U.: Cambridge University Press.
- [11] Cromwell, P. (1997). *Polyhedra*. Cambridge, R. U.: Cambridge University Press.

-
- [12] Cucker, F. (2013). *Manifold mirrors: the crossing paths of the arts and mathematics*. Cambridge, R. U.: Cambridge University Press.
- [13] Danzer, L. & Schulte, E. (1982). *Reguläre Inzidenzkomplexe I*. *Geometriae Dedicata*, 13 (3), pp. 295–308.
- [14] Dodge, C. (2004). *Euclidean geometry and transformations*. New York, E.U.A.: Dover Publications, Inc.
- [15] Dress, A. (1981). *A combinatorial theory of Grünbaum's new regular polyhedra. I. Grünbaum's new regular polyhedra and their automorphism group*. *Aequationes Mathematicae*, 23 (2-3), pp. 252–265.
- [16] Dress, A. (1985). *A combinatorial theory of Grünbaum's new regular polyhedra. II. Complete enumeration*. *Aequationes Mathematicae*, 29, pp. 111–124.
- [17] Du Sautoy, M. (2008). *Symmetry. A journey into the patterns of nature*. New York, E.U.A.: HarperCollins Publisher, Inc.
- [18] Euclid. (2002). *Euclid's Elements* (Traductor Heath, T.). En *All thirteen books complete in one volume*. Nuevo México, E.U.A.: Green Lion Press. (III a. C).
- [19] Grove, L. & Benson, C. (1985). *Finite reflection groups*. En *Graduate Texts in Mathematics. Series* (Vol. 99). New York, E.U.A.: Springer-Verlag.
- [20] Grünbaum, B. (1977). *Regularity of graphs, complexes and designs*. En *Problèmes combinatoires et théorie des graphes*, Coll. Int. C.N.R.S., 260, pp. 191–197.
- [21] Grünbaum, B. (1977). *Regular polyhedra: old and new*. *Aequationes Mathematicae*, 16 (1-2), pp. 1–20.
- [22] Grünbaum, B. & Shephard G. (1984). *Polyhedra with transitivity properties*. *Mathematical Reports of the Academy of Science*. The Royal Society of Canada, 6, pp. 61–66.
- [23] Grünbaum, B. (1994). *Metamorphoses of polygons*. En *The Lighter Side of Mathematics*. Washigton, E.U.A.: The Mathematical Association of America. pp. 35–48.
- [24] Grünbaum, B. (1994). *Polyhedra with hollow faces*. En *Polytopes: Abstract, Convex and Computational. NATO ASI Series*. (Vol. 440). Washigton, E.U.A.: Springer-Dordrecht.
-

-
- [25] Grünbaum, B. & Shephard G. (1998). *Isohedra with nonconvex faces*. Journal of Geometry, 63, pp. 76–96.
- [26] Grünbaum, B. (2003). *Convex polytopes*. En *Graduate Texts in Mathematics. Series* (Vol. 221). New York, E.U.A.: Springer-Verlag.
- [27] Grünbaum, B. (2003). *Are Your Polyhedra the Same as My Polyhedra?*. En *Discrete and Computational Geometry. Algorithms and Combinatorics* (Vol. 25). Berlin, Heidelberg: Springer.
- [28] Holden, A. (1991). *Shapes, space and symmetry*. New York, E.U.A: Dover Publications, Inc.
- [29] Hubbard, I. (2007). *From geometry to groups and back: the study of highly symmetric polytopes* (Tesis de grado, doctorado). York University, Toronto, Canadá.
- [30] Hubbard, I. (2010). *Two-orbit polyhedra from groups*. European Journal of Combinatorics, 31, pp. 943–960.
- [31] Isaacs, R. (2004). *Grupos de isometrías de polígonos y poliedros regulares* (Tesis de licenciatura). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- [32] Johnson, N. (2017). *Geometries and transformations*. Cambridge, R.U.: Cambridge University Press.
- [33] Laczkovich, M. (2001). *Conjecture and proof*. Washigton, E.U.A.: The Mathematical Association of America.
- [34] Lyndon, R. (2011). *Groups and geometry*. Cambridge, R.U.: Cambridge University Press (London Mathematical Society. Lecture Note Serie 101).
- [35] Martin, G. (1987). *Transformation geometry. An introduction to symmetry*. En *Undergraduate Texts in Mathematics. Series*. New York, E.U.A.: Springer-Verlag.
- [36] Mixer M., Schulte E. & Weiss A. (2014). *Hereditary Polytopes*. En *Rigidity and Symmetry. Fields Institute Communications* (Vol. 70). New York, E.U.A.: Springer.
- [37] Matteo, N. (2016). *Two-orbit convex polytopes and tilings*. Discrete and Computational Geometry, 55, pp. 662–680.
- [38] McMullen, P. (1967). *Combinatorially regular polytopes*. Mathematika. 14 , pp. 142–150.
-

-
- [39] McMullen, P. (1989). *Realization of regular polytopes*. *Aequationes Mathematicae*, 37, pp. 38–56.
- [40] McMullen, P. & Schulte, E. (1997). *Regular polytopes in ordinary space*. *Discrete and Computational Geometry*, 17 (4), pp. 449–478.
- [41] McMullen, P. & Schulte, E. (2002). *Abstract regular polytopes*. En *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* (Vol. 92). Cambridge, R.U.: Cambridge University Press.
- [42] McMullen, P. & Schulte, E. (2006). *Regular and chiral polytopes in low dimensions*. En *The Coxeter Legacy: Reflections and Projections*. Rhode Island, E.U.A.: American Mathematical Society.
- [43] McMullen, P. (2020). *Geometric regular polytopes*. En *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* (Vol. 172). Cambridge, R.U.: Cambridge University Press.
- [44] Montero, A. (2015). *Realización de poliedros regulares en el 3-toro* (Tesis de grado, maestría). Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH, Michoacán, México.
- [45] Neumann, B. (1941). *Some remarks on polygons*. Cambridge, R.U.: Cambridge University Press (London Mathematical Society. Compositio Mathematica).
- [46] Orbanić, A., Pellicer, D. & Weiss, A. (2010). *Map operations and k -orbit maps*. *Journal of Combinatorial Theory*, 117 (A), pp. 411–429.
- [47] Rees, E. (2004). *Notes on geometry*. En *Universitext*. New York, E.U.A.: Springer.
- [48] Richter, J. (1996). *Realization space of polytopes*. Berlín, Alemania: Technische Universität Berlin Press.
- [49] Schulte, E. (1980). *Reguläre inzidenzkomplexe*. (Tesis de grado, doctorado). University of Dortmund, Renania del Norte–Westfalia, Alemania.
- [50] Schulte, E. (1983). *Reguläre inzidenzkomplexe II*. *Geometriae Dedicata*, 14, pp. 33–56.
- [51] Schulte, E. (1983). *Reguläre inzidenzkomplexe III*. *Geometriae Dedicata*, 14, pp. 57–79.
-

-
- [52] Schulte, E. (2017). *Symmetry of polytopes and polyhedra*. Handbook of Discrete and Computational Geometry. New York, E.U.A.: Chapman and Hall/CRC. pp. 311–330.
- [53] Senechal, M. (Editor). (2013). *Shaping space. Exploring polyhedra in nature, art and the geometrical imagination*. New York, E.U.A.: Springer.
- [54] Shephard, G. (1952). *Regular complex polytopes*. Proceedings of the London Mathematical Society, 3 (2), pp. 82–97.
- [55] Siegel, A. & Papantonopoulou, A. (2016, diciembre 8). *Regular solids and their rotational groups*.
Recuperado de <https://mathstat.tcnj.edu/wp-content/uploads/sites/200/2011/08/CapstonePaperS07.pdf>
- [56] Tapp, K. (2010). *Symmetry. A mathematical exploration*. New York, E.U.A.: Springer.
- [57] Williams, A. (2015). *Wythoffian skeletal polyhedra* (Tesis de grado, doctorado). Northeastern University, Massachusetts, E.U.A.
- [58] Williams, R. (1979). *The geometrical foundation of natural structure: A source book of design*. New York, E.U.A.: Dover Publications, Inc.
- [59] Yale, P. (1988). *Geometry and symmetry*. New York, E.U.A.: Dover Publications, Inc.
-