UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Introducción a las funciones elípticas, enfoque de Lipman Bers

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Roberto Manríquez Castillo

TUTOR

Dr. Antonio Lascurain Orive

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2022

Agradecimientos

Probablemente nadie podría alcanzar ninguna meta sin el apoyo y la ayuda de una gran cantidad de personas que de una forma u otra influyen en nuestras vidas. La conclusión de mis estudios de licenciatura no es la excepción, por lo que dedico estas palabras para agradecer a las personas que me permitieron concluir mis estudios.

Agradezco a mis sinodales, los doctores Hugo Arizmendi, Gustavo Cruz, Guillermo Sienra y Raybel García, por su tiempo y por su atenta revisión a esta tesis.

Al Profesor Antonio Lascurain, por todo el tiempo que dedicó, no solo a este trabajo escrito, sino también a mí; por su apoyo, su paciencia y porque él y su pasión por la docencia, fueron una pieza invaluable en mi aprendizaje universitario y profesional.

A Gabriela Cervantes por el apoyo y confianza que ha depositado en mí, y por los cuales me ha dado un gran aprendizaje profesional y humano.

Agradezco a la Facultad de Ciencias, a la UNAM y sobre todo a aquellas personas que directa o indirectamente permiten una educación de calidad a un sinnúmero de personas.

A la familia Sampieri por el apoyo que en ciertos momentos solo ellos me podrían haber dado, especialmente agradezco a Ariadna, por todas sus muestras de ayuda, por su compañía y por su cariño alentador.

De manera especial agradezco al Profesor Juan José Parres y a Diego Fajardo, quienes no solo me enseñaron por primera vez la belleza de las matemáticas, sino que también me enseñaron un camino nuevo y fructífero, y sobre todo porque siempre serán para mí un gran ejemplo a seguir.

A Israel, a Jacqueline, a NaFer y a todos mis grandes amigos y compañeros que se han cruzado por mi vida, gracias por reír conmigo, por hablar conmigo y por crecer conmigo.

Agradezco también a mis profesores; a mis verdaderos profesores, que desde pequeño y hasta fechas recientes me han orientado, enseñado y ayudado a crecer intelectualmente y como persona.

A mi familia, a mis primos, a mis tíos, a mis tías y con especial cariño a mis abuelos, porque de ellos vengo, porque con ellos crecí y porque tengo fe en que con ellos siempre estaré.

A mis hermanos, Jesús y Emmanuel, les agradezco su apoyo y su ayuda inigualables, les agradezco los momentos con los que nos forjamos y les agradezco el amor que me han entregado y el amor que me han recibido.

Con todo mi amor agradezco a mi papá y a mi mamá, quienes han dado todo por verme cumplir mis metas, quienes han dado todo por verme feliz, quienes han dado todo por mí, porque a gracias a su entrega he llegado a ser quien soy hoy.

Finalmente te agradezco a ti, porque sin ti nada soy y nada puedo, porque estás conmigo incluso cuando no estoy contigo y porque has puesto en mi camino a tantas personas a quienes agradecer.

Introducción

Las funciones elípticas o funciones meromorfas en el toro, surgen inicialmente relacionadas con las integrales elípticas. Estas integrales surgieron históricamente, con el propósito de estudiar el problema del cálculo del perímetro de la elipse.

Gauss observó que así como las funciones inversas de funciones como

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2},$$

eran funciones trigonométricas simplemente periódicas, las inversas de algunas integrales como

$$\int_0^z \frac{du}{\sqrt{1-u^4}},$$

eran funciones doblemente periódicas (cf. [3] p. 72).

A partir de este hecho, Abel, Jacobi y posteriormente Weierstrass, desarrollan la teoría de manera espectacular (cf. [8] pp. 155-214). Se trata de una subárea de la variable compleja con múltiples conexiones con muchas otras áreas (teoría de números, geometría algebraica, superficies de Riemann, geometría hiperbólica, entre otras). Su importancia continúa de manera central ahora.

En muy estrecha relación con este tema, está la conjetura de Shimura-Taniyama-Weil, llamada de la modularidad

Toda curva elíptica $(y^2 = x^3 + Ax + B)$ *sobre* $\mathbb{Q}$ *es modular.*

Es decir, la información aritmética de la curva se obtiene de una forma modular que la codifica (cf. [13] pp. vii-xii). La estrecha relación entre las curvas elípticas y las funciones elípticas puede consultarse, por ejemplo, en [3] pp. 161-162. Estas ideas desembocan en la prueba de la conjetura de Fermat por Andrew Wiles en 1995 (Premio Abel 2016).

En este sentido, el estudio de las funciones modulares o automorfas cobra enorme importancia, siendo el gran motor de esta matemática el grupo clásico modular $PSL(2,\mathbb{Z})$ y sus subgrupos de índice finito.

La mayoría de los libros que abordan el tema de funciones elípticas, lo exponen sin incluir muchos detalles, lo cual dificulta su lectura. En este trabajo se desarrollan de manera detallada y formal varios resultados introductorios a la teoría, con el objetivo de que sirvan como fuente de estudio para algún estudiante de la licenciatura en matemáticas que desee introducirse a este tema, como por ejemplo en un curso de Variable Compleja II o III. La principal fuente es una parte de las notas del Doctor Lascurain sobre el curso del Doctor Lipman Bers impartido en la Universidad de Columbia. También se usaron otras fuentes, entre las que destacan el libro de Ahlfors [1] y el de Jones y Singermann [3]. Cabe señalar que el tercer volumen del libro de Markushevich [8] contiene mucha información y ejemplos de las funciones elípticas. Existe un libro de análisis complejo titulado Complex Analysis - In the Spirit of Limpan Bers [12]; sin embargo, en este libro no se trata el tema de funciones elípticas.

El primer capítulo es un estudio de los $\mathbb{Z}$-módulos discretos en el plano complejo, se caracterizan todos los $\mathbb{Z}$-módulos discretos del plano complejo (Teorema 0.3). Este estudio nos lleva a demostrar una relación entre los cambios de base de un $\mathbb{Z}$-módulo discreto doble y los elementos del grupo clásico modular $SL(2,\mathbb{Z})$ (Teorema 0.5), para concluir con una sorprendente relación entre el cociente de los elementos de una base de un $\mathbb{Z}$-módulo discreto y el conjunto fundamental del grupo modular $PSL(2,\mathbb{Z})$ (Teorema 0.6). En el segundo capítulo se estudian las funciones simplemente periódicas, se demuestra la relación entre cualquier función periódica y la familia de funciones exponenciales (Teorema 0.9) y usando esto se da la expansión en series de Fourier de una función periódica (Corolario 0.10).

El tercer capítulo introduce a las funciones elípticas con respecto a un módulo doble Ω y se demuestran sus propiedades más elementales, entre las cuales destaca el hecho de que el conjunto de funciones elípticas respecto a Ω es un campo (Proposición 0.13), que los periodos de una función elíptica y de su derivada coinciden (Proposición 0.14) y que una función elíptica sin polos se reduce a una constante (Teorema 0.15), lo cuál puede entenderse como que las únicas funciones analíticas en el toro, son las constantes. Usando lo anterior se demuestra que si dos funciones elípticas coinciden en sus ceros y sus polos (contando multiplicidades), entonces una es un múltiplo de la otra (Corolario 0.19). Se demuestra que en cualquier región fundamental, la suma de los residuos de una función elíptica es cero (Teorema 0.16), que una función elíptica toma cualquier valor complejo el mismo número de veces (Corolario 0.17). El capítulo concluye probando que la suma de los ceros es congruente a la suma de los polos módulo Ω (Teorema 0.21).

En el capítulo cuatro, se construyen funciones elípticas distintas de las constantes, siguiendo el enfoque de Bers, se construye una función elíptica de orden 3 (Teorema 0.24), para después, integrando, construir la función $\wp$ de Weierstrass asociada a un $\mathbb{Z}$-módulo (Teorema 0.30),también se estudia a detalle el método de Ahlfors para construir la función $\wp$ (Teorema 0.29). Se encuentran los puntos críticos de la función $\wp$ (Teorema 0.34), los cuales se usan para demostrar que la función $\wp$ satisface una ecuación diferencial (Teorema 0.37), la cual nos permite presentar el origen histórico de las funciones elípticas como inversas de integrales elípticas (Corolario 0.38). Finalmente se encuentra la expansión en series de Laurent de la función $\wp$ (Teorema 0.39).

En el último capítulo, se construye una función automorfa, en particular se define la función λ modular como una aplicación de los resultados anteriores de la tesis, se prueba que converge de manera absoluta y normal en el semiplano superior $\mathbb{H}^2$ (Lema 0.45), se demuestra su analiticidad (Teorema 0.46) y se prueban sus propiedades automorfas con relación al grupo principal de congruencias de nivel 2 (Teorema 0.47) y sus relaciones con respecto al grupo clásico modular (Teorema 0.48). Es importante mencionar que existen muchas otras funciones modulares (cf. [8] pp. 336-338, [10] pp. 3-4 y [3] pp. 275-278).

Contenido

Capítulo 1

$\mathbb{Z}$-módulos discretos

Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es un periodo para f si para todo $z \in \mathbb{C}$, donde f está definida, se cumple que

$$f(z+w) = f(z),$$

en caso de que $w \neq 0$, a f se le llama una función periódica.

Por ejemplo, las funciones $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$ son periódicas y 2π es su mínimo periodo.

Si f es una función periódica, denotamos su conjunto de periodos como

$$\Omega_f = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ es un periodo para } f\ \}.$$

Es evidente que si f es una función periódica, entonces $0 \in \Omega_f$. Además el conjunto Ω_f de una función meromorfa satisface dos importantes propiedades, una de carácter algebraico y otra topológica, las cuales enunciamos en las siguientes proposiciones.

Proposición 1.1. *Sea f una función periódica y Ω_f su conjunto de periodos, si $w_1, w_2 \in \Omega_f$, entonces $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ se tiene que $nw_1 + mw_2 \in \Omega_f$.*

Demostración. Tenemos que

$$f(z + w_1 + w_2) = f((z + w_1) + w_2) = f(z + w_1) = f(z),$$

por lo que $w_1 + w_2 \in \Omega_f$. Dado que,

$$f(z - w_1) = f((z - w_1) + w_1) = f(z),$$

podemos concluir que $-w_1$ también es un periodo de f. El resultado general se sigue por inducción. $\square$

Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es tal que para todo $w_1, w_2 \in \Omega$ y cualesquiera $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ se tiene que $n_1 w_1 + n_2 w_2 \in \Omega$, entonces a Ω se le llama **un $\mathbb{Z}$-módulo**. Nótese que el conjunto de periodos de una función f es un $\mathbb{Z}$-módulo.

Proposición 1.2. *Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$, periódica y no constante. Si Ω_f es su conjunto de puntos periodos, entonces Ω_f no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Procedamos por contradicción, supongamos que existe un $w \in \mathbb{C}$ tal que w es de acumulación, entonces existe $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega_f$ tal que $w_n \longrightarrow w$. Notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$f(w_n) = f(0 + w_n) = f(0).$$

Si f es holomorfa en w, entonces f es holomorfa en cada w_n, denotemos $z_0 = f(w_n)$, por la continuidad de f, se tiene que $f(w) = z_0$, entonces la función $f(z) - z_0$ tiene una sucesión convergente de ceros y por lo tanto, es idénticamente cero por el principio de continuación analítica, vease [7] p. 365. Por lo que f es constante, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, si suponemos que f tiene un polo en w, como las singularidades de una función meromorfa son aisladas, f no tiene polos en w_n; sin embargo, cerca de un polo, una función meromorfa tiende a infinito, por lo que la sucesión $\{f(w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, no es constante, lo cuál es una contradicción. $\square$

Un $\mathbb{Z}$-módulo, $\Omega_f \subset \mathbb{C}$, sin puntos de acumulación, se le llama un $\mathbb{Z}$-módulo discreto. Entonces hemos demostrado que si f es una función meromorfa periódica, su conjunto de periodos es un $\mathbb{Z}$-módulo discreto, por lo que es conveniente caracterizar a los $\mathbb{Z}$-módulos discretos de $\mathbb{C}$.

Teorema 1.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un $\mathbb{Z}$-módulo discreto, entonces Ω cumple una de las siguientes:*

a) $\Omega = \{0\}$,

b) *existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $\Omega = \{nw \mid n \in \mathbb{Z}\}$,*

c) *existen $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tal que $\Omega = \{nw_1 + mw_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ y $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$.*

Demostración. Si $\Omega \neq \{0\}$, tomando $w' \in \Omega$, tal que $w' \neq 0$, se tiene que $\overline{D(0,|w'|)} \cap \Omega$, es finito porque $\overline{D(0,|w'|)}$ es compacto y Ω es discreto, por lo que existe $w_1 \in \Omega$ de norma mínima, nótese que todos los múltiplos enteros de w_1 estarán en Ω.

Supongamos ahora que existe algún elemento del módulo que no es múltiplo entero de w_1, entonces repitiendo el mismo proceso que antes, podemos encontrar $w_2 \in \Omega$ de norma mínima entre los elementos que no son múltiplos de w_1. Afirmamos que w_2/w_1 no es un número real, porque si lo fuera, consideremos $w_2/w_1 = \lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que $n < \lambda < n+1$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$|w_2 - nw_1| = |(\lambda - n)w_1| = |\lambda - n||w_1| < |w_1|,$$

pero entonces $w_2 - nw_1 \in \Omega_f$ tendría menor norma que w_1, lo cual contradice las hipótesis de la minimalidad de w_1.

Entonces como $\frac{w_2}{w_1} \notin \mathbb{R}$, se sigue que w_1 y w_2 son linealmente independientes, y por lo tanto todo número complejo es combinación lineal de w_1 y w_2, afirmamos que

$$\Omega = \{nw_1 + mw_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Supongamos que no, entonces existe $w \in \Omega$, que no es una combinación entera de w_1 y w_2. Sin embargo, como $\{w_1, w_2\}$ es una base de $\mathbb{C}$ existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2.$$

Podemos encontrar n_1 y n_2 enteros tales que $|\lambda_1 - n_1| \leq \frac{1}{2}$ y $|\lambda_2 - n_2| \leq \frac{1}{2}$, entonces, como $w \in \Omega$,

$$w' = w - n_1 w_1 - n_2 w_2,$$

también está en Ω. Supongamos que $0 < |\lambda_1 - n_1|$ y que $0 < |\lambda_2 - n_2|$, escribiendo

$$\begin{aligned} |w'| = |w - n_1 w_1 - n_2 w_2| &= |\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 - n_1 w_1 - n_2 w_2| \\ = |(\lambda_1 - n_1)w_1 + (\lambda_2 - n_2)w_2| &< |\lambda_1 - n_1||w_1| + |\lambda_2 - n_2||w_2| \\ &\leq \frac{1}{2}|w_1| + \frac{1}{2}|w_2| \leq |w_2|, \end{aligned}$$

la desigualdad estricta se da porque $(\lambda_1-n_1)w_1$ y $(\lambda_2-n_2)w_2$ son linealmente independientes (cf. [7] p. 23).

En cambio, si $\lambda_1 - n_1 = 0$, tenemos que

$$|w'| = |w - n_2w_2| = |\lambda_2 - n_2||w_2| \leq \frac{1}{2}|w_2| < |w_2|,$$

el caso en que $\lambda_2 - n_2 = 0$, es análogo al anterior. En cualquier caso, siempre concluimos que

$$|w'| < |w_2|,$$

pero esto es imposible porque si no, w' sería un número complejo en Ω de norma menor que w_2 y que no es un múltiplo de w_1, lo que contradice la definición de w_2. Así podemos concluir que Ω es en realidad $\{nw_1 + mw_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, justo como queríamos probar. $\square$

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo discreto, entonces

$$\Omega = \{nw \mid n \in \mathbb{Z},\ w \neq 0\}$$

u

$$\Omega = \{nw_1 + mw_2 \mid n, m \in \mathbb{Z},\ w_2/w_1 \in \mathbb{R}\},$$

en el primer caso diremos que $\{w\}$ es una base de Ω y en el segundo, diremos que $\{w_1, w_2\}$ es una base de Ω. Por lo que podemos catalogar a las funciones periódicas, en dos conjuntos:

a) las simplemente periódicas, cuyo conjunto de periodos tiene una base de cardinalidad 1 y

b) las doblemente periódicas o elípticas, cuyo conjunto de periodos tiene una base de cardinalidad 2.

Los módulos más sencillos son los módulos simples, que consisten en los múltiplos enteros de un solo número complejo w, véase la Figura 1. Es fácil notar que visto como un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$, estos módulos son isomorfos a $\mathbb{Z}$.

En cambio, si el módulo Ω es de la forma $\{nw_1+mw_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ tal que $\frac{w_2}{w_1} \notin \mathbb{R}$, entonces como subgrupo aditivo, Ω es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Respecto a la forma geométrica de Ω enunciamos la siguiente proposición.

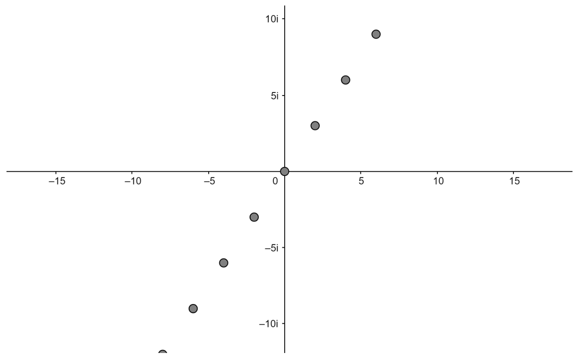


Figura 1.1: Ejemplo de un módulo simple

Proposición 1.4. *Supongamos que* $\Omega \neq \{0\}$ *es un* $\mathbb{Z}$*-módulo discreto, sea* $r = \text{mín}\{|w| \mid w \in \Omega \setminus \{0\}\}$*, entonces existen 2, 4 o 6 puntos en* Ω *de norma igual a* r*.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que siempre existe una cantidad par de puntos que minimizan el módulo, ya que si w cumple esto, evidentemente $-w$ también. Veamos ahora que no puede haber más de seis de estos puntos.

Sean $re^{i\theta_1}$ y $re^{i\theta_2}$, donde $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$, dos números que minimizan la distancia al orígen. Como $re^{i\theta_2} - re^{i\theta_1} \in \Omega$, tenemos que

$$\begin{aligned} |re^{i\theta_2} - re^{i\theta_1}| &\geq r \\ \Rightarrow |\left(e^{i\theta_2} - e^{i\theta_1}\right)|^2 &\geq 1, \end{aligned}$$

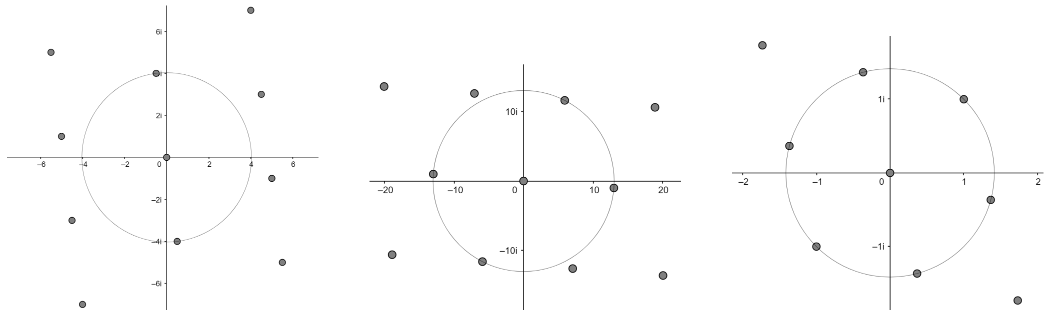
esto es

$$\begin{aligned} \left(e^{i\theta_2} - e^{i\theta_1}\right)\left(e^{-i\theta_2} - e^{-i\theta_1}\right) &\geq 1 \\ \Rightarrow -2Re(e^{i(\theta_2-\theta_1)}) &\geq -1 \\ \Rightarrow \cos(\theta_2 - \theta_1) &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ y $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \cos\frac{5\pi}{3}$, podemos concluir que

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta_2 - \theta_1 \leq \frac{5\pi}{3}.$$

Entonces, entre dos puntos de norma r existe un arco de al menos $\frac{\pi}{3}$, por lo que a lo más pueden existir seis de estos puntos. $\square$



(a) Dos puntos minimizan la norma

(b) Cuatro puntos minimizan la norma

(c) Seis puntos minimizan la norma

Figura 1.2: Ejemplos de módulos dobles

Un ejemplo de un $\mathbb{Z}$-módulo doble, tal que hay seis puntos que minimizan la distancia al origen, es el generado por los números 1 y $e^{\frac{\pi i}{3}}$.

Considerando todas estas observaciones, los módulos discretos podrán verse como en la Figura 2.

Ya que podemos pensar en un módulo Ω, como un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$, y como $\mathbb{C}$ es conmutativo, Ω es un subgrupo normal, por lo que podemos considerar el grupo cociente $\mathbb{C}/\Omega$. Para esto podemos considerar la relación

$$w_1 \equiv w_2 \pmod{\Omega} \iff w_1 - w_2 \in \Omega, \qquad \text{donde } w_1, w_2 \in \mathbb{C}.$$

Evidentemente esta relación es de equivalencia.

Se puede pensar en Ω como un grupo actuando en $\mathbb{C}$ bajo la acción

$$\begin{aligned} &\Phi : \Omega \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ &\Phi(w, z) = w + z \qquad\qquad \forall w \in \Omega,\ \forall z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Denotamos como O_z a la órbita de un punto $z \in \mathbb{C}$. Evidentemente O_z es la clase lateral

$$z + \Omega = \{z + w \mid w \in \Omega\}.$$

Definición 1. *Sea Ω un módulo actuando sobre $\mathbb{C}$ como grupo aditivo, decimos que F es un conjunto fundamental para la acción de Ω en $\mathbb{C}$, si:*

a) *dados* z_1*,* $z_2 \in F$*, entonces* $z_1 \not\equiv z_2 \pmod{\Omega}$ *y*

b) $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists w \in F$ *tal que* $z \equiv w \pmod{\Omega}$.

Es decir que un conjunto fundamental F es un conjunto de representantes de las órbitas.

El concepto de conjunto fundamental es relativamente claro; sin embargo, es más simple trabajar con conjuntos abiertos, por lo que se usa mejor el siguiente concepto.

Definición 2. *Sea* Ω *un módulo actuando sobre* $\mathbb{C}$ *como grupo aditivo, decimos que una región* R *es una región fundamental para la acción de* Ω *en* $\mathbb{C}$*, si:*

a) *dados* z_1*,* $z_2 \in R$*, entonces* $z_1 \not\equiv z_2 \pmod{\Omega}$ *y*

b) $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists w \in \overline{R}$ *tal que* $z \equiv w \pmod{\Omega}$.

Notemos que si Ω es un módulo simple tal que $\{w\}$ es una base, entonces una región fundamental para Ω, será una franja en el plano complejo de anchura $|w|$, justo como en la Figura 3. Mientras que si Ω es un módulo doble y $\{w_1, w_2\}$ una base, entonces, una región fundamental será el paralelogramo determinado por los puntos $0, w_1, w_2, w_1 + w_2$, justo como en la Figura 4.

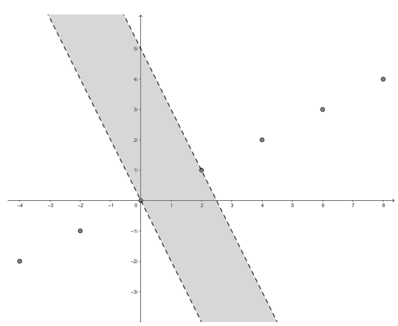


Figura 1.3: Región fundamental para un módulo simple

La importancia de definir conjuntos y regiones fundamentales radica en la sencilla observación de que el comportamiento de una función periódica está totalmente determinado por su comportamiento en alguna región fundamental de su conjunto de periodos, además de que podremos pensar en los espacios cocientes.

Continuando el estudio de los módulos, demostraremos dos importantes teoremas respecto a las bases de un módulo doble.

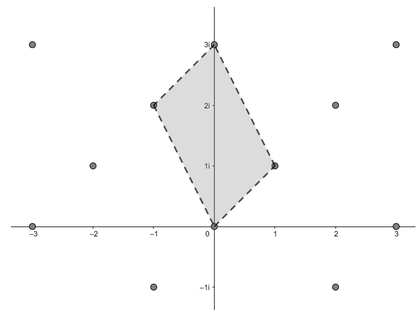


Figura 1.4: Región fundamental para un módulo doble

Teorema 1.5. *Sea $\{w_1, w_2\}$ una base de un $\mathbb{Z}$-módulo discreto Ω, entonces $\{w_1', w_2'\}$ es una base de Ω si y solo si existen a, b, c y d enteros tales que $ad - bc = \pm 1$ y*

$$\begin{pmatrix} w_2' \\ w_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Primero notemos que como $\{w_1, w_2\}$ es una base de Ω, entonces podemos encontrar a, b, c y d enteros, tales que $w_2' = aw_2 + bw_1$ y $w_1' = cw_2 + dw_1$, de donde

$$\begin{pmatrix} w_2' \\ w_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}.$$

Supongamos ahora que $\{w_1', w_2'\}$ es una base de Ω, entonces también existen a', b', c' y d' enteros tales que

$$\begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2' \\ w_1' \end{pmatrix}.$$

Por lo cual, tenemos que

$$\begin{pmatrix} w_2' \\ w_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2' \\ w_1' \end{pmatrix}.$$

Sea

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

entonces podemos concluir que $w_2' = Aw_2' + Bw_1'$ y que $w_1' = Cw_2' + Dw_1'$. Pero como $\{w_2', w_1'\}$, además de ser una base de Ω, es una base de $\mathbb{C}$ visto como $\mathbb{R}$-espacio vectorial; por lo que, por la independencia lineal, podemos concluir que $A = D = 1, B = C = 0$. Se sigue de (1) que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}^{-1}$$

y que

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}^{-1},$$

pero como las entradas de ambas matrices, son enteras, su determinante también es entero. Así que $ad - bc = \pm 1$.

Para la suficiencia, supongamos que existen a, b, c y d enteros tales que $ad - bc = \pm 1$ y que

$$\begin{pmatrix} w_2' \\ w_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \pm Id, \tag{1.3}$$

usando (2) y (3), se sigue que

$$\begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2' \\ w_1' \end{pmatrix}.$$

Sea $w \in \Omega$, entonces como $\{w_1, w_2\}$ es una base, existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tal que $w = nw_2 + mw_1$, o escrito en notación matricial

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} &= \pm \begin{pmatrix} n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2' \\ w_1' \end{pmatrix} \\ &= \pm \begin{pmatrix} nd - mc & ma - nb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2' \\ w_1' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que $\{w_1', w_2'\}$ es en efecto una base de Ω. $\square$

A las matrices con entradas en los enteros y determinante 1 se les conoce como matrices unimodulares, es fácil demostrar que el conjunto de estas matrices forman un grupo bajo la multiplicación matricial, a este se le conoce como el grupo clásico modular, denotado por $SL(2,\mathbb{Z})$. Este grupo es de suma importancia en muchas áreas de la matemática.

Como el determinante de toda matriz de cambio de base tiene determinante ± 1 entonces, el área de los paralelogramos determinados por cualquier base es siempre la misma (véase [4] p. 204).

Ahora probaremos la existencia de una base especial para los módulos dobles, a esta base la llamaremos la base canónica del módulo y aunque no siempre será la base que ocupemos en el estudio de las funciones doblemente periódicas, los números complejos que la conforman, satisfacen una importante relación enlazada a las propiedades de $SL(2,\mathbb{Z})$.

Teorema 1.6. *Sea Ω un $\mathbb{Z}$-módulo discreto, entonces existe una base $\{w_1, w_2\}$ de Ω tal que $\tau = \frac{w_2}{w_1}$ satisface las siguientes condiciones.*

a) $Im(\tau) > 0$,

b) $-\frac{1}{2} < Re(\tau) \leq \frac{1}{2}$ *y*

c) $|\tau| \geq 1$ *y si* $|\tau| = 1 \Rightarrow Re(\tau) \geq 0$.

Si $\{w_1, w_2\}$ satisface las tres condiciones anteriores, le llamaremos una base canónica de Ω. Además, si $\tau' = \frac{w_2'}{w_1'}$, donde $\{w_1', w_2'\}$ es otra base canónica de Ω, se tiene que $\tau = \tau'$.

Notemos que las condiciones que se le piden a τ implican que este número esta en el subconjunto de $\mathbb{C}$ que se muestra en la Figura 5. Si denotamos como $PSL(2,\mathbb{Z})$ al cociente $SL(2,\mathbb{Z})/\pm Id$, se puede probar que este grupo es isomorfo al subgrupo de transformaciones de Möbius de la forma

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc = 1$$

y que este conjunto es un conjunto fundamental para $PSL(2,\mathbb{Z})$ actuando como transformaciones de Möbius en el semiplano superior (vease [6] p.162), por lo que, nos referiremos a este subconjunto como el conjunto modular. Ahora, procedamos a demostrar el Teorema 0.6.

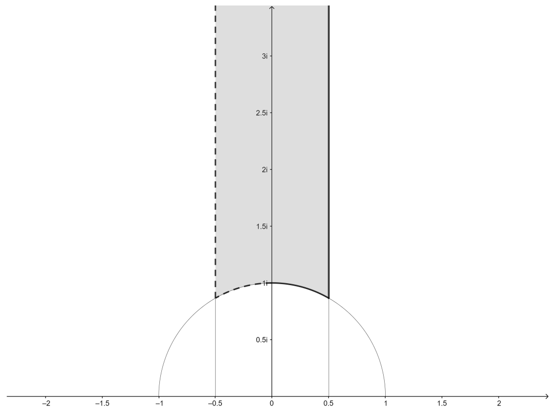


Figura 1.5: Conjunto fundamental de $PSL(2, \mathbb{Z})$

Demostración. Probemos la existencia, consideremos w_1 y w_2 como en la prueba del Teorema 0.3. Como $|w_1| \leq |w_2|$, entonces $1 \leq |\frac{w_2}{w_1}|$, por lo que

$$|\tau| \geq 1. \tag{1.4}$$

Por la minimalidad de w_2, tenemos que $|w_2| \leq |w_1 + w_2|$ de donde

$$\begin{aligned} |w_2|^2 &\leq |w_1 + w_2|^2 \\ &= (w_1 + w_2)(\overline{w_1} + \overline{w_2}) = |w_1|^2 + |w_2|^2 + 2Re\,(w_2\overline{w_1})\,. \end{aligned}$$

Por lo que

$$0 \leq |w_1|^2 + 2Re\,(w_2\overline{w_1})$$

y

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{Re(w_2\overline{w_1})}{|w_1|^2} = Re\left(\frac{w_2\overline{w_1}}{w_1\overline{w_1}}\right) = Re\left(\frac{w_2}{w_1}\right).$$

Análogamente, como $|w_2| \leq |w_1 - w_2|$, concluimos que $Re\left(\frac{w_2}{w_1}\right) \leq \frac{1}{2}$, es decir

$$-\frac{1}{2} \leq Re(\tau) \leq \frac{1}{2}. \tag{1.5}$$

Si $Im\,(\tau) \leq 0$, entonces la base $\{-w_1, w_2\}$, satisface (4) y (5) y además cumple que $Im\,(\tau) > 0$. Por lo que podemos renombrar la base $\{w_1, w_2\}$ y así se cumplirá (a).

Si se tiene el caso $Re\,(\tau) = -\frac{1}{2}$, entonces cambiémosla por $\{w_1, w_1 + w_2\}$, tendremos que $Re\left(\frac{w_1+w_2}{w_1}\right) = Re\left(\frac{w_2}{w_1}\right) + 1 = \frac{1}{2}$. Análogamente vemos que la parte imaginaria se mantiene constante y la norma sigue siendo mayor o igual a 1 por la minimalidad de w_1.

Por último, si nuestra base cumple que $|\tau| = 1$ y $Re\,(\tau) < 0$, entonces la reemplazamos por $\{w_2, -w_1\}$, así $\frac{-w_1}{w_2} = -\overline{\tau}$. Como la transformación $z \mapsto -\overline{z}$ es una reflexión sobre el eje imaginario, esta base cumplirá (a), (b) y con este ajuste, (c).

Para demostrar la unicidad, sea $\tau' = \frac{w_2'}{w_1'}$, donde $\{w_1', w_2'\}$ es otra base canónica, entonces por el Teorema 0.5, tenemos que existen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tal que $w_2' = aw_2 + bw_1$ y $w_1' = cw_2 + dw_1$ y $ad - bc = \pm 1$, por lo que tenemos lo siguiente

$$\tau' = \frac{w_2'}{w_1'} = \frac{aw_2 + bw_1}{cw_2 + dw_1} = \frac{\frac{aw_2+bw_1}{w_1}}{\frac{cw_2+dw_1}{w_1}} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{1.6}$$

$$= \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \cdot \frac{c\overline{\tau} + d}{c\overline{\tau} + d} = \frac{ac|\tau|^2 + ad\tau + bc\overline{\tau} + bd}{|c\tau + d|^2}.$$

Por lo que

$$Im(\tau') = \frac{ad\ Im(\tau) + cb\ Im(\overline{\tau})}{|c\tau + d|^2}$$

$$= \frac{(ad - bc)Im(\tau)}{|c\tau + d|^2} = \frac{Im(\tau)}{|c\tau + d|^2}. \tag{1.7}$$

Resulta que

$$ad - bc = 1, \tag{1.8}$$

ya que $Im(\tau)$ e $Im(\tau')$ tienen el mismo signo. Sin perder generalidad, podemos suponer que $Im(\tau') \geq Im(\tau)$, por lo que $|c\tau + d| \leq 1$, entonces consideremos dos casos.

Caso 1: $c = 0$. Se tiene que $ad = 1$ y $a = d = \pm 1$. Por 6 podemos concluir que $\tau' = \tau \pm b$, y por (b) tenemos que $|b| = |Re(\tau') - Re(\tau)| < 1$, por lo que $b = 0$ y $\tau' = \tau$.

Caso 2: $c \neq 0$. Como $|c\tau + d| \leq 1$

$$\frac{1}{|c|} \geq \left|\frac{d}{c} + \tau\right| \geq \left|Im\left(\tau + \frac{d}{c}\right)\right| = Im(\tau) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2},$$

de donde $c = \pm 1$ y así

$$1 \geq |\tau \pm d| \geq |Re(\tau \pm d)| = |Re(\tau) \pm d| \geq |(|Re(\tau)| - |d|)| \tag{1.9}$$

y por (b), es fácil ver que d debe ser $-1, 0$ o 1. Consideremos estas posibilidades.

Si $d = \pm 1$ tenemos que $|\tau \pm 1| \leq 1$, pero esto solo se pueda satisfacer si $\tau = e^{\frac{\pi i}{3}}$, por lo que $|c\tau + d| = 1$ ($c = \pm 1$) Usando (7) concluimos que $Im(\tau') = Im(\tau) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\tau' = \tau$.

Finalmente, si $d = 0$, tenemos por (9) que $|\tau| = 1$, además $bc = -1$, por lo que

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau} = \frac{b}{c\tau} + \frac{a}{c} = \frac{-1}{\tau} \pm a = -\overline{\tau} \pm a,$$

de donde $\pm a = Re(\tau + \tau')$ y por (b) tenemos que $Re(\tau + \tau')$ es 0 o 1. Si $Re(\tau + \tau') = 0$, entonces $a = 0$ y $\tau' = -\overline{\tau}$ y como ambos números están en el conjunto modular, se tiene que $i = \tau = \tau'$. Si $Re(\tau + \tau') = 1$ tendremos que $Re(\tau) = Re(\tau') = \frac{1}{2}$, por lo que $\tau = \tau' = e^{\frac{\pi i}{3}}$. □

Proposición 1.7. *Sea Ω es un módulo doble, entonces existen 2, 4 o 6 bases canónicas de Ω.*

Antes de demostrar esta proposición, probamos un resultado de la geometría hiperbólica básica.

Lema 1.8. *Si z es un punto fijo de una transformación modular en $PSL(2,\mathbb{Z})$, distinta de la identidad y z pertenece al conjunto modular, entonces z es igual a i o a $e^{\frac{\pi i}{3}}$*

Demostración. Sea z un punto fijo de

$$U(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1$$

en $PSL(2,\mathbb{Z})$, sin perder generalidad podemos suponer que $c>0$. Un cálculo sencillo muestra que

$$z=\frac{a-d\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}.$$

Como $Im(z)>0$ concluimos que $(d+a)^2-4<0$, de donde $|d+a|<2$ y así

$$z=\frac{a-d}{2c}+i\frac{\sqrt{4-(a+d)^2}}{2c}, \tag{1.10}$$

como $\sqrt{4-(a+d)^2}\leq 2$, tenemos que

$$\frac{1}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\leq Im(z)\leq\frac{1}{c},$$

por lo que podemos concluir que $c=1$.

Si suponemos que z está en el conjunto modular, podemos concluir que $-\frac{1}{2}<Re(z)\leq\frac{1}{2}$. Por lo que usando (10), tenemos que $-1<a-d\leq 1$, sin embargo, como a y d son enteros, $a=d+1$ o $a=d$. Como además $|d+a|<2$, (a,d) solo puede ser $(0,0),(0,-1)$ y $(1,0)$.

Estos valores corresponden respectivamente a las transformaciones

$$z\mapsto-\frac{1}{z},\qquad z\mapsto\frac{1}{1-z}\quad\text{y}\qquad z\mapsto\frac{z-1}{z};$$

donde la primer transformación fija a i, mientras que las otras dos fijan a $e^{\frac{\pi i}{3}}$. $\square$

Demostración. (De la Proposición 0.7) Sea $\{w_1,w_2\}$ una base canónica en Ω, notemos que $\{-w_1,-w_2\}$ es otra base canónica, por lo que siempre hay un número par de bases canónicas. Se sigue del Teorema 0.5, y de la demostración de la ecuación 6, que si existe alguna otra base canónica, entonces existe una transformación de Möbius unimodular distinta de la identidad, que fija a τ.

La transformación $z \mapsto -\frac{1}{z}$, vista como transformación homogénea, corresponde a

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ -w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

por lo que $\{-w_2, w_1\}$ es otra base canonica si $\tau = i$, por lo tanto existen cuatro bases canónicas.

Si $\tau = e^{\frac{\pi i}{3}}$, las bases canónicas correspondientes serán

$$\begin{pmatrix} -w_1 \\ w_2 - w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} w_2 - w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

por lo que hay seis bases canónicas.

Para cualquier otro τ en el conjunto modular, solo existen dos bases canónicas □

Una consecuencia del Teorema 0.6 es que podemos dar una relación de equivalencia sobre el conjunto de módulos dobles. Diremos que dos módulos están relacionados, si los cocientes de sus bases canónicas son iguales.

Notemos que esta definición es equivalente a decir que los módulos Ω y Ω' son equivalentes si y sólo si existe $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\Omega' = g(\Omega)$ donde $g(z) = az$, ya que si $\{w_1, w_2\}$ es una base canónica de Ω, entonces $\{aw_1, aw_2\}$ es una base canónica de Ω' y evidentemente,los cocientes de ambas bases coinciden. Recíprocamente, si

$$\frac{w_2}{w_1} = \tau = \frac{w_2'}{w_1'},$$

consideremos

$$a = \frac{w_2'}{w_2} = \frac{w_1'}{w_1},$$

de donde $w \in \Omega'$ si y sólo si,

$$w = nw_1' + mw_2' = naw_1 + maw_2 = a(nw_1 + mw_2) \in g(\Omega).$$

Capítulo 2

Funciones simplemente periódicas

Habiendo dado una descripción precisa de los conjuntos de periodos de las funciones complejas, procedemos a estudiar las funciones simplemente periódicas. Es importante mencionar que en las afirmaciones que se desarrollen en esta sección sólo se ocupa la hipótesis de que la función es periódica en al menos una dirección, por lo que los resultados, también serán válidos para las funciones doblemente periódicas.

La primer función periódica que aparece en el estudio de las funciones de variable compleja, es la función exponencial, recordemos que esta función es $2\pi i$ periódica. Podemos considerar la familia de funciones

$$\begin{aligned} e_w &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\mapsto e^{\frac{2\pi i}{w} z} \qquad\qquad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$e_w(z+w) = e^{\frac{2\pi i}{w}(z+w)} = e^{\frac{2\pi i}{w} z} e^{2\pi i} = e^{\frac{2\pi i}{w} z} = e_w(z),$$

por lo que w es un periodo para e_w.

Estas funciones son muy importantes ya que toda función w-periódica puede ser escrita en términos de e_w. Por ejemplo, $\cos z$ es una función 2π periódica, y tenemos que

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e_{2\pi}(z) + e_{2\pi}^{-1}(z)}{2} = (\phi \circ e_{2\pi})(z),$$

donde $\phi(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. De forma similar, podemos escribir $\operatorname{sen} z = \psi \circ e_{2\pi}(z)$, donde $\psi(z) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$.

Motivados por la observación anterior, enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sea $f : \mathbb{C} \to A$ periódica y meromorfa, tal que w es un periodo de f, entonces existe una única función $\phi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to A$ meromorfa, tal que $\phi \circ e_w = f$. Recíprocamente, si $\phi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to A$ es meromorfa, entonces la función $f = \phi \circ e_w$ es una función w-periódica y meromorfa.*

Demostración. Probemos primero la segunda parte del teorema. Si ϕ es meromorfa, entonces también lo es $f = \phi \circ e_w$, además como e_w es w-periódica, $f(z+w) = \phi(e_w(z+w)) = \phi(e_w(z)) = f(z)$, concluimos que f es w-periódica.

Probemos ahora la primera parte del teorema, como los polos de una función meromorfa son discretos, podemos encontrar una recta

$$L = \{z_0 + itw \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

tal que f no tiene polos en L, en caso contrario, habría una cantidad no numerable de polos de f, uno por cada recta perpendicular a w, y por lo tanto habría una sucesión convergente de polos, ya que en $\mathbb{R}^n$ cualquier conjunto no numerable se acumula (vease, por ejemplo [6], p. 99).

Como $e_w(z) = exp(\frac{2\pi i}{w} z)$, Podemos concluir que $e_w(L)$ es una rayo por el origen, véase la Figura 6. Entonces podemos encontrar una rama del logaritmo analítica en $\mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup e_w(L))$, definimos esta rama de forma tal que también este definida en $e_w(L)$, aunque de esta manera no será continua en $e_w(L)$. Con esta rama del logaritmo definimos

$$g(z) = \frac{w}{2\pi i} log(z).$$

La función buscada es $\phi = f \circ g$, ya que $\phi(e_w(z)) = f(z)$. Esto se sigue ya que

$$\begin{aligned}
(f \circ \; g \circ e_w)(z) &= f\left(\frac{w}{2\pi i} log\left(e^{\frac{2\pi i}{w} z}\right)\right) \\
&= f\left(\frac{w}{2\pi i}\left(\frac{2\pi i}{w} z + 2\pi k i\right)\right) \\
&= f(z + wk) = f(z).
\end{aligned}$$

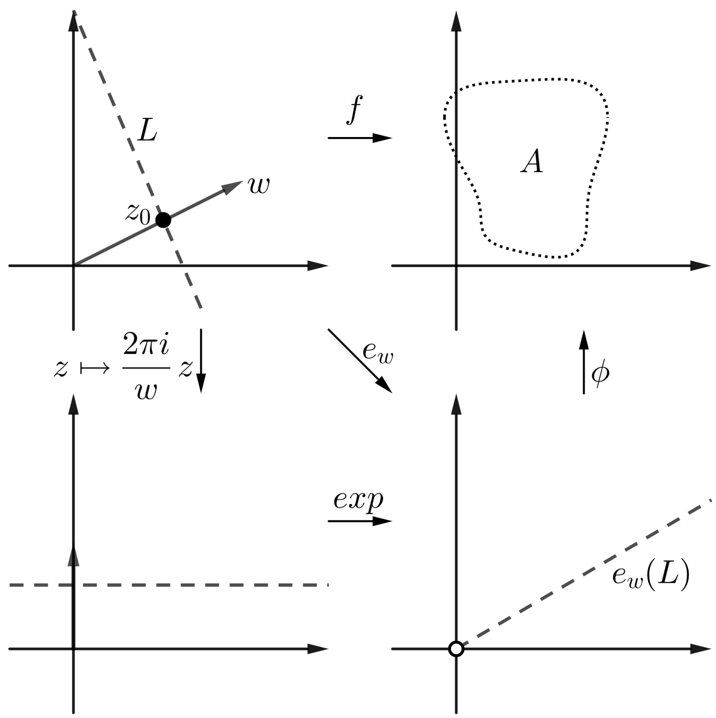


Figura 2.1: Diagrama del Teorema 0.9

Veamos que a pesar de la falta de continuidad de g, ϕ sí es continua en el rayo $e_w(L)$. Sea $z \in e_w(L)$ y U una vecindad de $\phi(z)$, entonces existe $z' \in L$ tal que $e_w(z') = z$, de donde $f(z') = \phi \circ e_w(z') = \phi(z)$. Por la continuidad de f en L, existe V una vecindad de z' tal que $f(V) \subseteq U$, como e_w es analítica, es una función abierta, por lo que $e_w(f(V))$ es también un conjunto abierto.

Como demostramos que $\phi \circ e_w = f$, se tiene que $\phi(e_w(V)) = f(V)) \subseteq U$, de donde existe una vecindad de z tal que su imagen bajo ϕ se queda contenida en U, por lo tanto ϕ es continua en $e_w(L)$.

Usando el teorema de Morera y la prueba del principio de reflexión de Schwarz, podemos concluir que ϕ es analítica en cada punto de $e_w(L)$ (cf. [7], pp. 160-161) y por lo tanto es meromorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Por último demostremos la unicidad de ϕ, supongamos que existe otra función ϕ' tal que $\phi' \circ e_w = f = \phi \circ e_w$. Como e_w es suprayectiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, es cancelable por la derecha, entonces concluimos que $\phi' = \phi$ □

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es la siguiente.

Corolario 2.2. *Si f es una función w-periódica, meromorfa en $\mathbb{C}$ y holomorfa en*

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq Im\left(\frac{z}{w}\right) < r_2 \right\},$$

entonces existe $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que en S se cumple que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n}{w} z}. \tag{2.1}$$

A la expresión (11) se le conoce como el desarrollo en series de Fourier de f.

Demostración. Usando la notación del Teorema 0.9, tenemos que como f es holomorfa en S, entonces ϕ es holomorfa en

$$e_w(S) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\},$$

por el Teorema de Laurent, existen $a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$ tal que en $e_w(S)$

$$\phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Por el Teorema 0.9, tenemos que

$$f(z) = \phi \circ e_w(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(e_w(z)\right)^n.$$

□

Ahora recordemos el siguiente resultado conocido de las funciones racionales.

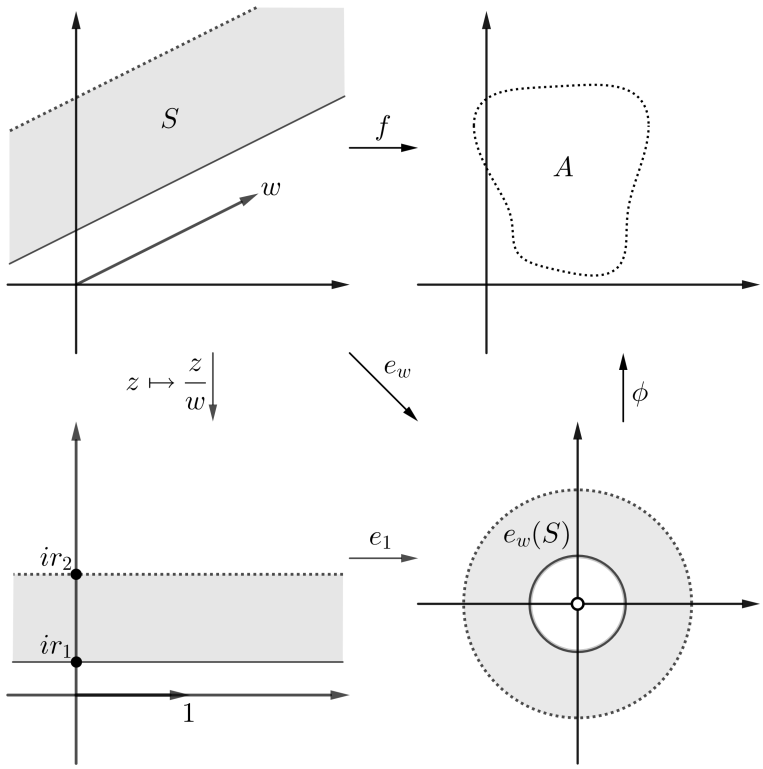


Figura 2.2: Diagrama del Corolario 0.10

Teorema 2.3. *Sea $\phi = p/q$ una función racional, con p y q polinomios sin raíces comunes, si $d = max\{\partial p, \partial q\}$ y $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$, entonces $\phi(z) = z_0$ tiene exactamente d soluciones en $\widehat{\mathbb{C}}$, contadas con multiplicidad.*

Demostración. Supongamos que $z_0 = \infty$. Si $d = \partial q \geq \partial p$, entonces todos los polos de ϕ son finitos; más aún, como los polinomios son funciones analíticas en todo $\mathbb{C}$, $\phi = p/q$ tiene un polo en z si y sólo si $q(z) = 0$. Por el teorema fundamental del álgebra hay exactamente d soluciones a esta ecuación, y por lo tanto ϕ tiene d polos.

Por el contrario, si $\partial p > \partial q$, entonces existen ∂q polos en $\mathbb{C}$, mientras que $z = \infty$ es un polo de multiplicidad $\partial p - \partial q$ de ϕ. Esto se sigue ya que por definición, ∞ es un polo de ϕ de multiplicidad n si 0 es un polo de multiplicidad n para $\phi(1/z)$, usamos también el hecho de que una función f tiene un polo de multiplicidad n en un punto, si y solo si $1/f$ tiene un cero de multiplicidad n en el mismo punto.

Por lo anterior, la multiplicidad de ϕ en ∞ como polo, es la multiplicidad en 0, como cero de la función

$$\frac{1}{\phi(1/z)} = \frac{q(1/z)}{p(1/z)}. \tag{2.2}$$

Como $d = \partial p > \partial q$, escribamos

$$p(z) = a_d z^d + ...a_0$$

y

$$q(z) = b_{\partial q} z^{\partial q} + ...b_d z^d + ... + b_0.$$

Si multiplicamos el numerador y el denominador de (12) por z^d, tendremos que

$$\begin{aligned}
\frac{q(1/z)}{p(1/z)} =& \frac{z^d q(1/z)}{z^d p(1/z)} \\
=& \frac{z^d(b_{\partial q} z^{-\partial q} + ... + b_d z^{-d} + ... + b_0)}{z^d(a_d z^{-d} + ...a_0)} \\
=& z^{(\partial p - \partial q)} \frac{(b_{\partial q} + ...b_d z^{\partial q - \partial p} + ... + b_0 z^{\partial q})}{(a_d + ...a_0 z^d)} \\
=& z^{(\partial p - \partial q)} \frac{q_1(z)}{p_1(z)},
\end{aligned}$$

donde $q_1(z) = b_{\partial q} + ...b_d z^{\partial q - \partial p} + ... + b_0 z^{\partial q}$ y $p_1(z) = a_d + ...a_0 z^d$.

Como a_d y $b_{\partial q}$ son los términos principales de p y q respectivamente, ambos son distintos de 0, por lo que los términos constantes de q_1 y de p_1 también son distintos de 0. Esto implica que q_1/p_1 es holomorfa y no nula en una vecindad de cero, por lo que la multiplicidad de ∞ como polo de ϕ es $\partial p - \partial q$. Por lo tanto el número de polos de ϕ es $d = \partial p$.

Si ahora consideramos $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces $\frac{1}{\phi(z) - z_0}$ es una función racional con la misma cantidad de polos que de soluciones a la ecuación $\phi(z) = z_0$, entonces el resultado se sigue de la exposición anterior. □

En el teorema anterior, a d se le conoce como el grado de la función racional. Existe un resultado análogo para el caso de funciones periódicas, el cuál enunciamos en el siguiente corolario.

Corolario 2.4. *Sea ϕ una función racional de grado d y $f = \phi \circ e_w$, entonces la ecuación $f(z) = z_0$, $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\phi(0), \phi(\infty)\}$ tiene exactamente d soluciones w-incongruentes en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Si $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\phi(0), \phi(\infty)\}$, por el Teorema 0.11, tenemos que $\phi(z) = z_0$ tiene d soluciones y por hipótesis, estas serán distintas de 0 e ∞. Si F es un conjunto fundamental de e_w, sabemos que e_w es una biyección entre F y $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, por lo que para cada solución a $\phi(z) = z_0$, existirá una solución a $\phi(e_w(z)) = z_0$. □

Notemos que la hipótesis de que z_0 sea distinto de $\phi(0)$ y de $\phi(\infty)$ son necesarias, por ejemplo $e^z = 0$ no tiene ninguna solución en $\mathbb{C}$.

Análogamente al caso de las funciones racionales, a d se le conoce como el grado de f.

Capítulo 3

Propiedades de las funciones elípticas

Recordemos que una función f es elíptica si es meromorfa en $\mathbb{C}$ y tiene dos periodos linealmente independientes. Si f es una función meromorfa elíptica con respecto a un módulo Ω, y $\{w_1, w_2\}$ es una base de Ω, no necesariamente canónica, entonces para cada $a \in \mathbb{C}$, denotaremos por P_a al paralelogramo abierto con vértices en $a,\ a + w_1,\ a + w_2,\ a + w_1 + w_2$.

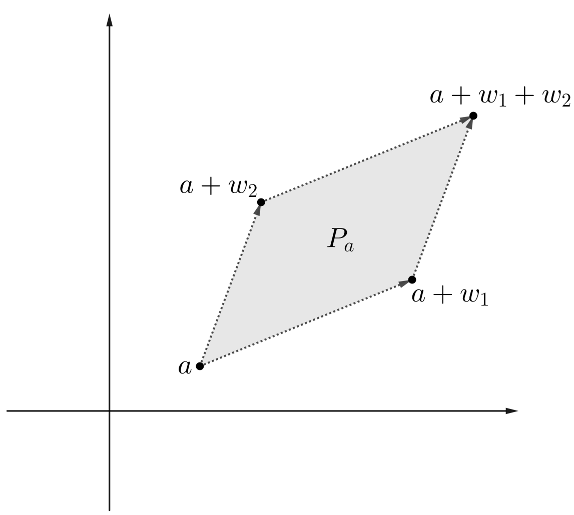


Figura 3.1: Región P_a

Notemos que P_a es una región fundamental para la acción de Ω en $\mathbb{C}$, por lo que el comportamiento de f estará determinado por su comportamiento en P_a. Además, como los polos de f son aislados, se puede usar un argumento similar a la prueba del Teorema 0.9 para encontrar encontrar un $a \in \mathbb{C}$ tal que f no tiene polos en ∂P_a.

Las siguientes proposiciones son consecuencias inmediatas de la definición de una función periódica.

Proposición 3.1. *Si E_Ω denota el conjunto de funciones elípticas con conjunto de periodos Ω, entonces E_Ω es un campo con la suma y el producto de funciones.*

Demostración. Recordemos que z es un cero de orden k de f si y solo si z es un polo de orden k de $1/f$. Además si f es una función meromorfa, sus ceros y sus polos son aislados, de donde se sigue que la función $1/f$ es también una función meromorfa. En consecuencia, el conjunto de las funciones meromorfas forman un campo con la suma y el producto.

Entonces solo hay que mostrar que E_Ω es un subcampo de las funciones meromorfas, es decir que es cerrado bajo la suma, la multiplicación y los inversos. Sin embargo estos hechos son inmediatos de la definición de que un número w sea un periodo de una función. Por ejemplo, si $f \in E_\Omega$ y $w \in \Omega$, tenemos que $\frac{1}{f(z+w)} = \frac{1}{f(z)}$, por lo que $1/f$ también es w-periódica y por lo tanto está en E_Ω □

Proposición 3.2. *Sea f una función elíptica y Ω_f su conjunto de periodos, entonces f' también es elíptica y si $\Omega_{f'}$ es su conjunto de periodos, entonces $\Omega_f = \Omega_{f'}$.*

Demostración. Sea $w \in \Omega$, si f es analítica en z, entonces tendremos que $f(z) = f(z+w)$, de donde, derivando ambos lados de la ecuación, y usando la regla de la cadena, tenemos que $f'(z) = f'(z+w)$, por lo que $w \in \Omega_{f'}$.

Por otro lado, si z es un polo de f, $z+w$ también lo es. Además por el teorema de la primitiva, f' no puede ser analítica en puntos donde f no es analítica, por lo que z y $z+w$ también son polos de f', esto prueba que f' es elíptica.

Para demostrar que $\Omega_{f'} \subseteq \Omega_f$ sea $w \in \Omega_{f'}$, demostremos que existe una $D \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $Dw \in \Omega_f$. Para esto, sean $\{w_1', w_2'\}$ y $\{w_1, w_2\}$ bases de $\Omega_{f'}$ y Ω_f respectivamente. Entonces, como $\Omega_f \subseteq \Omega_{f'}$, existen enteros $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{aligned} w_2 &= aw_2' + bw_1', \\ w_1 &= cw_2' + dw_1'. \end{aligned}$$

No es difícil verificar que estas ecuaciones se pueden expresar como el siguiente producto de matrices de 2×2 con entradas en los reales, es decir

$$\begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2' \\ w_1' \end{pmatrix},$$

donde los vectores $w_i,\ w_i',\ i \in \{1, 2\}$ se toman como renglones.

Como la matriz del miembro izquierdo es no singular, podemos concluir que $ad - bc \neq 0$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} w_2' \\ w_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d/D & -b/D \\ -c/D & a/D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

donde $D = ad - bc$.

Más aún, si $w = nw_2' + mw_2',\ n, m \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$w = n\left(\frac{dw_2}{D} - \frac{bw_1}{D}\right) + m\left(-\frac{cw_2}{D} + \frac{aw_1}{D}\right).$$

En consecuencia $Dw = (\text{entero})w_2 + (\text{entero})w_1 \in \Omega_f$.

Como w es un periodo de f', tenemos que $f'(z + w) = f'(z)$, de donde concluimos que existe $k \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z + w) - f(z) = k. \tag{3.1}$$

Como la ecuación anterior es válida para toda z tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} f(z + w) - f(z) &= k \\ f(z + w + w) - f(z + w) &= k \\ f(z + 2w + w) - f(z + 2w) &= k \\ &\vdots \\ f(z + (D-1)w + w) - f(z + (D-1)w) &= k. \end{aligned}$$

Sumando todas las ecuaciones anteriores obtenemos que

$$f(z+Dw)-f(z)=Dk,$$

sin embargo como $Dw \in \Omega_f$ tenemos que $Dk=0$, por lo que $k=0$, es decir que $w \in \Omega_f$, justo como debíamos probar. □

Teorema 3.3. *Si f es una función elíptica sin polos, entonces f es una función constante.*

Demostración. Como f no tiene polos, entonces f es continua y por lo tanto acotada en el compacto $\overline{P_a}$, de donde es acotada en todo $\mathbb{C}$ y por el teorema de Liouville, f debe ser una constante. □

De aquí en adelante, cuando nos refiramos a los polos de una función elíptica (o a sus ceros), nos referiremos a un conjunto completo de polos (ceros) incongruentes de la función.

Teorema 3.4. *Si f es una función elíptica, la suma de sus residuos es cero*

Demostración. Consideremos P_a una región fundamental para f tal que f no tiene polos en ∂P_a. Si $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ son los residuos de f en P_a, por el teorema del residuo, tenemos que

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i &= \int_{\partial P_a} f(z)dz \\ &= \int_a^{a+w_1} f(z)dz + \int_{a+w_1}^{a+w_1+w_2} f(z)dz + \int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2} f(z)dz + \int_{a+w_2}^{a} f(z)dz. \end{aligned}$$

Como f es w_2 periódica, haciendo la sustitución $u=z+w_2$, tenemos que que

$$\int_a^{a+w_1} f(z)dz = \int_{a+w_2}^{a+w_1+w_2} f(z)dz,$$

donde esta igualdad se da considerando una parametrización $\gamma : [0,s] \longrightarrow \mathbb{C}$ del segmento de recta que une los puntos a y $a+w_1$ y notando que $\gamma(t)+w_2$ es una parametrización del segmento que une los puntos $a+w_2$ con $a+w_1+w_2$, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\int_a^{a+w_1} f(z)dz &= \int_0^s f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_0^s f(\gamma(t)+w_2)\gamma'(t)dt \\ &= \int_{a+w_2}^{a+w_1+w_2} f(z)dz.\end{aligned}$$

Por lo anterior, podemos escribir

$$\int_a^{a+w_1} f(z)dz + \int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2} f(z)dz = 0.$$

Un proceso análogo para las dos integrales restantes nos permiten concluir que en efecto

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0.$$

□

El siguiente resultado nos permitirá definir el orden de una función elíptica de forma análoga a como se hace para el grado en las funciones racionales.

Corolario 3.5. *Si f es una función elíptica, entonces f tiene la misma cantidad de polos que de ceros, contando multiplicidades, en cualquier región fundamental.*

Demostración. La función f'/f es una función elíptica y por el principio del argumento (cf. [7] p. 385), sabemos que

$$\int_{\partial P_a} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \cdot (N_z - N_p),$$

donde N_z y N_p representan el números de ceros y de polos de f. La conclusión se sigue del Teorema 0.16. □

Aplicando el resultado anterior a la función $f(z)-c$, **podemos concluir que f toma cualquier valor complejo el mismo número de veces**. A este número lo llamamos el orden de f, ya que los polos de $f(z)$ son los mismos que los de $f(z)-c$.

Ahora que hemos definido el orden de una función elíptica podemos dar el siguiente coralario del Teorema 0.16.

Corolario 3.6. *No existe ninguna función elíptica de orden* 1*.*

Demostración. Si f fuese elíptica de orden 1, f tendría un único polo simple, por lo que el residuo de f en ese polo sería distinto de 0, contradiciendo el Teorema 0.16. □

Corolario 3.7. *Si f y g son funciones elípticas con respecto a un módulo Ω, tales que tienen los mismos polos y los mismos ceros, con las mismas multiplicidades, entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que*

$$f(z) = cg(z).$$

Demostración. Como f y g son ambas elípticas, entonces f/g también lo es; además, como tienen ceros y polos de la misma multiplicidad en los mismos puntos, la función f/g no tendrá polos. Por ejemplo si z_0 es un polo de multiplicidad k para f y g, entonces en una vecindad de z_0 se tiene que $f(z) = f_1(z)/(z-z_0)^k$ y $g(z) = g_1(z)/(z-z_0)^k$, donde f_1 y g_1 son holomorfas y distintas de cero en una vecindad de z_0, de donde tenemos que

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_1(z)}{(z-z_0)^k}\frac{(z-z_0)^k}{g_1(z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)}.$$

Esto quiere decir que la función f/g es entera, por lo que se reduce a una constante. □

Corolario 3.8. *Si f y g son funciones elípticas con respecto a un módulo Ω, tales que tienen los mismos polos con las mismas partes principales, entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que*

$$f(z) = g(z) + c.$$

Demostración. Considerando la función elíptica $f - g$, como en cada polo, las funciones tienen las mismas partes principales, entonces la parte principal de $f - g$ es 0, por lo que la función no tiene polos, por lo que debe ser una constante. □

Teorema 3.9. *Si f es una función elíptica de orden n con ceros $a_1, ..., a_n$ y polos $b_1, ..., b_n$, contados con multiplicidad, se tiene que*

$$a_1 + ... + a_n \equiv b_1 + ... + b_n \pmod{\Omega}.$$

Demostración. Nuevamente consideremos P_a tal que f no tiene polos en ∂P_a, y consideremos la integral

$$I = \int_{\partial P_a} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz.$$

Por una parte, por el teorema del residuo, tenemos que si P es el conjunto de polos del integrando, entonces

$$I = 2\pi i \left(\sum_{c_i \in P} Res \left(c_i, \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right).$$

Nótese que $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ solo puede tener polos en los ceros o en los polos de $f(z)$. Calculemos los residuos de f en estos puntos.

Supongamos que a es un cero de f con multiplicidad k, entonces existe una función ϕ analítica que no se anula en una vecindad de a, tal que

$$f(z) = (z-a)^k \phi(z),$$

de donde podemos concluir que

$$f'(z) = k(z-a)^{k-1}\phi(z) + (z-a)^k \phi'(z).$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{zf'(z)}{f(z)} &= (a + z - a) \cdot \frac{k(z-a)^{k-1}\phi(z) + (z-a)^k\phi'(z)}{(z-a)^k\phi(z)} \\ &= (a + z - a) \left(\frac{k}{z-a} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} \right) \\ &= \frac{ak}{z-a} + k + a \cdot \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} \cdot (z-a). \end{aligned}$$

Como ϕ no se anula en a, los últimos sumandos de la expresión, representan una función analítica, por lo que podemos concluir que el residuo de la función en un cero, es el cero multiplicado por su multiplicidad.

Consideremos ahora el caso en que b es un polo de orden k de f, entonces existe ϕ analítica y que no se anula en b, tal que

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-b)^k}.$$

Derivando se tiene que

$$f'(z) = \frac{\phi'(z)(z-b)^k - k(z-b)^{k-1}\phi(z)}{(z-b)^{2k}}$$

$$= \frac{\phi'(z)(z-b) - k\phi(z)}{(z-b)^{k+1}}.$$

Procedemos de forma análoga al caso de los ceros. Como

$$\begin{aligned}\frac{zf'(z)}{f(z)} &= (b+z-b)\cdot\frac{(z-b)\phi'(z) - k\phi(z)}{(z-b)\phi(z)}\\ &= (b+z-b)\left(\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} - \frac{k}{z-b}\right)\\ &= -\frac{bk}{z-b} - k + b\cdot\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\cdot(z-b),\end{aligned}$$

deducimos que el residuo en un polo, es el inverso aditivo del polo multiplicado por su multiplicidad. Por lo tanto

$$I = 2\pi i\left(\sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{i=0}^{n} b_i\right). \tag{3.2}$$

Por otro lado, podemos dividir de nuevo la integral en cuatro, una por cada lado del paralelogramo, es decir que

$$\begin{aligned}I = \int_a^{a+w_1}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz + \int_{a+w_1}^{a+w_1+w_2}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz\\ + \int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz + \int_{a+w_2}^{a}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Nuevamente, si hacemos uso de la sustitución $u = z + w_2$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\int_a^{a+w_1} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz &= \int_{a+w_2}^{a+w_1+w_2} \frac{(z-w_2)f'(z)}{f(z)}dz \\ &= -\int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz + w_2\int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Por consiguiente

$$\int_a^{a+w_1} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz + \int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = w_2\int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz. \tag{3.5}$$

Detallamos la igualdad en (16), por la Proposición 0.14 f' es una función elíptica, además si $\gamma : [0, s] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una parametrización del segmento de recta que une a a con $a + w_1$, entonces por definición, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_a^{a+w_1} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz &= \int_0^s \frac{\gamma(t)f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)dt \\ &= \int_0^s \frac{(\gamma(t)+w_2-w_2)f'(\gamma(t)+w_2)}{f(\gamma(t)+w_2)}\gamma'(t)dt \\ &= \int_{a+w_2}^{a+w_1+w_2} \frac{(z-w_2)f'(z)}{f(z)}dz,\end{aligned}$$

ya que $\gamma(t) + w_2$ parametriza el segmento de recta que une los puntos $a + w_2$ y $a + w_1 + w_2$.

Si σ denota el segmento de recta que une los puntos $a + w_1 + w_2$ y $a + w_2$, entonces $f \circ \sigma$ es una curva cerrada por la periodicidad de f, por lo que haciendo uso del segundo principio del argumento (cf. [7], p. 386) y usando (17) podemos concluir que

$$\int_a^{a+w_1} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz + \int_{a+w_1+w_2}^{a+w_2} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = w_2 \cdot 2\pi i \cdot I(f\circ\sigma, 0) = 2w_2k_2\pi i, \tag{3.6}$$

donde $k_2 \in \mathbb{Z}$ e $I(f \circ \sigma, 0)$ denota el índice de $f \circ \sigma$ con respecto al origen.

De forma análoga a la anterior, podemos concluir que existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\int_{a+w_1}^{a+w_1+w_2} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz + \int_{a+w_2}^{a} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = w_1 \cdot 2\pi i \cdot k_1. \tag{3.7}$$

Igualando (14) y (15), y usando (18) y (19) tenemos que

$$2\pi i \left(\sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{i=0}^{n} b_i \right) = w_1 \cdot 2\pi i \cdot k_1 + w_2 \cdot 2\pi i \cdot k_2.$$

Cancelando de ambos lados de la ecuación $2\pi i$, tenemos el resultado esperado $\square$

Capítulo 4

La función $\wp$ de Weierstrass

De aquí en adelante, Ω representará un módulo arbitrario con base $\{w_1, w_2\}$. Nuestro siguiente objetivo es construir funciones elípticas, en virtud del Corolario 0.18, las funciones elípticas no constantes más sencillas son las de orden 2 y dependiendo de sus polos, podemos clasificarlas en dos tipos, las que tienen un único polo doble y las que tienen dos polos simples incongruentes. Seguiremos el enfoque de Weierstrass y nos enfocaremos en construir una función elíptica con un polo doble.

Consideremos Ω un módulo con base $\{w_1, w_2\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto

$$A_n = \{sw_1 + tw_2 \in \mathbb{C} \mid s, t \in \mathbb{R} \text{ y } \max\{|s|, |t|\} = n\},$$

nótese que estos conjuntos son las fronteras de los paralelogramos determinados por los vértices $n(w_1 + w_2)$, $n(w_1 - w_2)$, $n(w_2 - w_1)$ y $n(-w_1 - w_2)$, véase la Figura 9.

Lema 4.1. *Sea Ω un módulo doble tal que $\{w_1, w_2\}$ es una base de Ω, entonces existe $M > 0$ tal que si $z \in A_n$, entonces $|z| \geq nM$.*

Demostración. La prueba del lema es inmediata usando el hecho de que A_n es un compacto al cual no pertenece el 0, y por lo tanto está a una distancia positiva de este, entonces al tomar un disco adecuado centrado en 0 se sigue el resultado.

Damos otra prueba geométrica de este hecho. Primero notemos que si $z \in A_n$, entonces $z/n \in A_1$, por lo que bastará probar el resultado para $n = 1$.

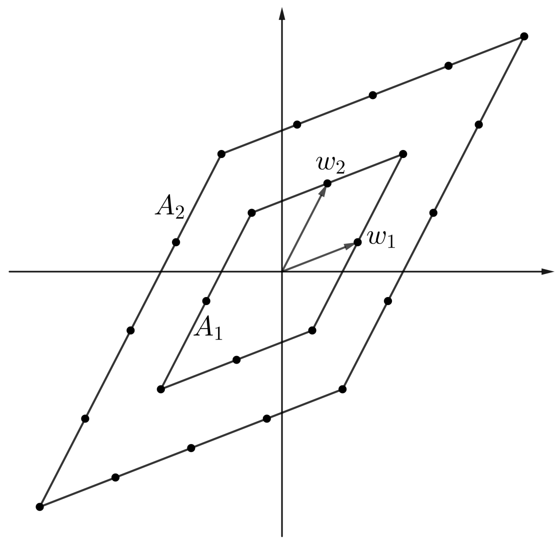


Figura 4.1: En An existen $8n$ puntos

Supongamos que $z = sw_1 + tw_2$, donde $|s| \leq |t| = 1$, dividiendo entre w_1, obtenemos que

$$\frac{z}{w_1} = s \pm \frac{w_2}{w_1},$$

por lo que se sigue fácilmente de la Figura 10 que

$$\left|\frac{z}{w_1}\right| \geq \left|Im\left(\frac{w_2}{w_1}\right)\right|,$$

de donde

$$|z| \geq |w_1|\left|Im\left(\frac{w_2}{w_1}\right)\right|.$$

Por otro lado, si $z = sw_1 + tw_2$ donde $|t| \leq |s| = 1$, un procedimiento análogo, nos permite concluir que

$$|z| \geq |w_2|\left|Im\left(\frac{w_1}{w_2}\right)\right|,$$

en cualquier caso, tenemos que

$$|z| \geq M,$$

donde
$$M = \text{mín}\left\{|w_1|\left|Im\left(\frac{w_2}{w_1}\right)\right|, |w_2|\left|Im\left(\frac{w_1}{w_2}\right)\right|\right\},$$
justo como queríamos probar. □

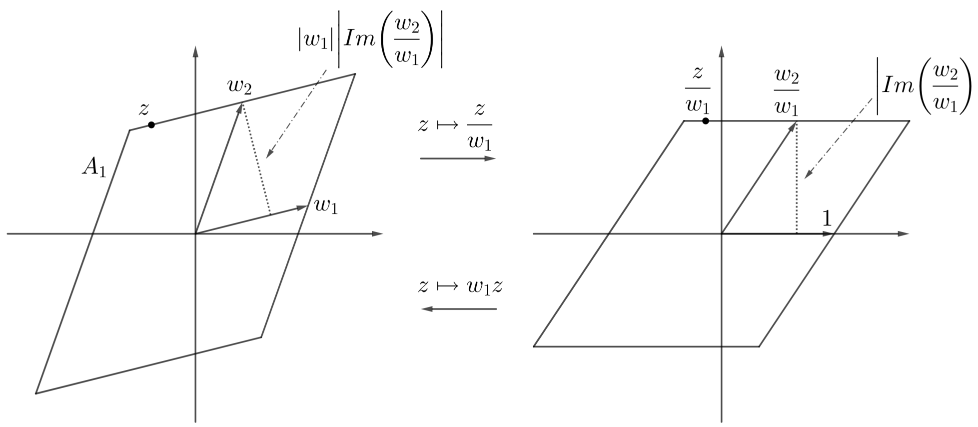


Figura 4.2: Conjunto A_1

Lema 4.2. *Si* Ω *es un módulo doble, la serie*
$$\sum_{w\in\Omega\setminus\{0\}} \frac{1}{|w|^3}$$
es convergente.

Demostración. Denotemos $\Omega_n = A_n \cap \Omega$, demostraremos que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{w\in\Omega_n} \frac{1}{|w|^3},$$
es convergente. Como los términos de esta serie son positivos, la convergencia será absoluta, por lo que la suma de cualquier reordenamiento de los elementos de $\Omega \setminus \{0\}$ será también convergente y tendrá el mismo límite (véase [9], p. 83).

Lo anterior quiere decir que

$$\sum_{w\in\Omega\setminus\{0\}} \frac{1}{|w|^3},$$

tiene sentido para cualquier orden dado.

Notemos que contando los vértices, en cada uno de los lados del paralelogramo A_n existen $2n+1$ puntos de Ω, es decir que en cada Ω_n existen $4(2n+1)-4=8n$ puntos del módulo (véase la Figura 9). Usando el Lema 0.22, podemos encontrar $M\in\mathbb{R}$ tal que si $z\in A_n$, entonces $|z/n|\geq M$, de donde tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{w\in\Omega_n}\frac{1}{|w|^3}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{w\in\Omega_n}\frac{1}{n^3M^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n}{n^3M^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2M^3}<\infty.$$

Donde la convergencia de la última serie se da por la convergencia de las series p con $p>1$. $\square$

De aquí en adelante usaremos la notación

$$\sum_{w\in\Omega}{}' = \sum_{w\in\Omega\setminus\{0\}}$$

Notemos que en la demostración anterior, en virtud del criterio de las series p reales, podemos sustituir 3 por cualquier $\lambda>2$ y demostrar que

$$\sum_{w\in\Omega}{}'\frac{1}{|w|^\lambda}<\infty.$$

Más aún, por la compacidad de A_1 podemos encontrar $N>0$ tal que $A_1\subseteq D(0,N)$. Alternativamente, si $z=sw_1+tw_2\in A_1$, entonces

$$\begin{aligned}|z|&=|sw_1+tw_2|\\&\leq|s||w_1|+|t||w_2|\\&\leq|w_1|+|w_2|.\end{aligned}$$

Usando un argumento similar al del Lema 0.23, para $0<\lambda\leq 2$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{w\in\Omega_n}\frac{1}{|w|^\lambda}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{w\in\Omega_n}\frac{1}{n^\lambda N^\lambda}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n}{n^\lambda N^\lambda}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^{\lambda-1}M'^\lambda}\longrightarrow\infty,$$

por lo que la serie diverge, ya que está acotada inferiormente por una serie p divergente.

Teorema 4.3. *La serie*

$$\sum_{w\in\Omega}\frac{1}{(z-w)^3},$$

converge absoluta y uniformemente en los compactos de $\mathbb{C}\setminus\Omega$.

Demostración. Sea $K\subseteq\mathbb{C}\setminus\Omega$ un compacto, demostraremos que la serie converge uniformemente en K. Como K es un conjunto acotado, podemos encontrar $R>0$ tal que $K\subseteq D(0,R)$.

Notemos que si $2|z|<|w|$, entonces

$$1-\frac{|z|}{|w|}>\frac{1}{2},$$

de donde usando la desigualdad triangular concluimos que

$$\left|1-\frac{z}{w}\right|\geq\left|1-\left|\frac{z}{w}\right|\right|>\frac{1}{2}. \tag{4.1}$$

Sea $z\in K$ arbitraria, entonces tenemos que

$$\sum_{w\in\Omega}\frac{1}{(z-w)^3}=\sum_{\substack{w\in\Omega\\|w|\leq 2R}}\frac{1}{(z-w)^3}+\sum_{\substack{w\in\Omega\\|w|>2R}}\frac{1}{(z-w)^3}. \tag{4.2}$$

Como en K no hay elementos de Ω, los términos de la primer suma son analíticos y finitos, por lo que solo hay que verificar que la segunda suma converge de manera absoluta y normal. Como $z\in K$, tenemos que $|2z|<2R$, por lo que usando (20) tenemos que

$$\sum_{\substack{w\in\Omega\\|w|>2R}}\frac{1}{|z-w|^3}=\sum_{\substack{w\in\Omega\\|w|>2R}}\frac{1}{|w|^3|1-\frac{z}{w}|^3}\leq\sum_{\substack{w\in\Omega\\|w|>2R}}\frac{8}{|w|^3}<\infty,$$

por el criterio M de Weierstrass, concluimos que esta serie converge de manera uniforme y absoluta para $|z|\leq 2R$. En consecuencia

$$\sum_{w\in\Omega}\frac{1}{(z-w)^3},$$

converge en K de manera absoluta y uniforme. De nuevo, como la serie converge de manera absoluta, la serie converge al mismo valor para cualquier reordenamiento. $\square$

Por el teorema de Weierstrass, la función construida en el teorema anterior es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \Omega$, veremos que en realidad es una función elíptica de orden 3 con respecto a Ω.

Proposición 4.4. *La función $f(z) = \sum_{w\in\Omega} \frac{1}{(z-w)^3}$ tiene un un polo de orden 3 con residuo 0 en $z = 0$.*

Demostración. El resultado se sigue del hecho de que

$$f(z) = \sum_{w\in\Omega} \frac{1}{(z-w)^3} = \frac{1}{z^3} + \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{1}{(z-w)^3},$$

y del hecho de que la serie de la derecha representa una función holomorfa en una vecindad del origen. Nótese que para una ϵ suficientemente pequeña

$$\sum_{\substack{w\in\Omega \\ |w|>2\epsilon}} \frac{1}{(z-w)^3} = \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{1}{(z-w)^3}.$$

La misma técnica ocupada en la demostración del Teorema 0.24, prueba que la serie de la izquierda converge uniformemente en $D(0,\epsilon)$. Como los términos de la serie son analíticos en 0, la serie también lo será. Entonces, dada la convergencia normal y el teorema de Weierstrass, tenemos que localmente $f(z) = \frac{1}{z^3} + \phi(z)$ donde ϕ es analítica, lo cual significa que 0 es un polo de orden 3 con residuo 0. $\square$

Proposición 4.5. *Los periodos de la función $f(z) = \sum_{w\in\Omega} \frac{1}{(z-w)^3}$, son exactamente los elementos de Ω.*

Demostración. Primero veamos que si $w' \in \Omega$, entonces w' es un periodo para f. Como

$$f(z+w') = \sum_{w\in\Omega} \frac{1}{(z+w'-w)^3},$$

y la función $\phi(w) = w - w'$ es una biyección de los elementos de Ω, reindexando la serie, tenemos que

$$\sum_{w\in\Omega} \frac{1}{(z+w'-w)^3} = \sum_{u\in\Omega} \frac{1}{(z-u)^3} = f(z),$$

donde $u = \phi(w)$ (aquí usamos el hecho de que Ω es un grupo aditivo). Notemos que por el Teorema 0.24, ambas sumas son idénticas, ya que en virtud de la convergencia absoluta, la convergencia de la serie es independiente de cualquier reordenamiento.

Resta probar que si λ es un periodo para f, entonces $\lambda \in \Omega$. Si λ es un periodo, tomando una sucesión $z_n \longrightarrow 0$, como 0 es un polo, entonces $f(z_n) \longrightarrow \infty$, de donde $f(z_n + \lambda) \longrightarrow \infty$, ya que $f(z_n) = f(z_n + \lambda)$. Por lo que λ es un polo y por lo tanto $\lambda \in \Omega$, ya que f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \Omega$. $\square$

Los polos de f en Ω son todos de orden 3 ya que localmente, en una vecindad suficientemente pequeña de $w_0 \in \Omega$ se tiene que

$$\begin{aligned}
f(z) &= f(z - w_0) \\
&= \frac{1}{(z-w_0)^3} + \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{1}{(z-w_0-w)^3} \\
&= \frac{1}{(z-w_0)^3} + \sum_{u\in\Omega\setminus\{w_0\}} \frac{1}{(z-u)^3} \\
&= \frac{1}{(z-w_0)^3} + \frac{1}{z^3} + \sum_{u\in\Omega\setminus\{w_0,0\}} \frac{1}{(z-u)^3} \\
&= \frac{1}{(z-w_0)^3} + \text{analítica}.
\end{aligned}$$

Donde $u = w + w_0$. La última serie es una función analítica alrededor de w_0 ya que converge absoluta y normalmente en una vecindad w_0. Solo quitamos una cantidad finita de términos a una serie convergente.

Podemos sintetizar las conclusiones de las proposiciones anteriores en el siguiente teorema.

Teorema 4.6. *Sea Ω un módulo doble, entonces la función*

$$f(z) = \sum_{w\in\Omega} \frac{1}{(z-w)^3},$$

es elíptica de orden 3.

Proposición 4.7. *La función $f(z) = \sum_{w\in\Omega} \frac{1}{(z-w)^3}$, es impar*

Demostración. Notemos que

$$f(-z) = \sum_{w\in\Omega} \frac{1}{(-z-w)^3}.$$

Sabemos que Ω es simétrico respecto al origen, por lo que podemos reindexar la suma como

$$\sum_{w\in\Omega} \frac{1}{(-z-w)^3} = \sum_{u\in\Omega} \frac{1}{(-z+u)^3} = -\sum_{u\in\Omega} \frac{1}{(z-u)^3} = -f(z),$$

donde $u = -w$, por lo que efectivamente la función es impar. $\square$

Recordamos el teorema de la independencia de caminos el cual establece que si f es continua en una región $U \subseteq \mathbb{C}$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) Si z_0 y z_1 son puntos de U y γ_0 y γ_1 son curvas C^1 por tramos contenidas en U que unen estos puntos, entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz.$$

b) Si γ es una curva cerrada y C^1 por tramos contenida en U, entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

c) Existe una primitiva global para f, es decir, existe $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $F'(z) = f(z)$. Más aún, se tiene que si $a \in U$ es un punto fijo, entonces

$$F(z) = \int_{\gamma} f(z)dz,$$

en donde γ denota cualquier curva que une a con z. Por ende f es analítica.

La prueba de este resultado puede ser consultada en [7] p. 104 y es similar a la prueba del teorema de la primitiva (véase [5] p. 107).

Sea la función

$$g(z) = -2 \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{1}{(z-w)^3}, \tag{4.3}$$

nótese que

$$\begin{aligned} g(z) &= g(z) - \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^3} \\ &= -2\left(\sum_{w\in\Omega} \frac{1}{(z-w)^3}\right) + \frac{2}{z^3}. \end{aligned}$$

Por la Proposición 0.25 la serie de la ecuación anterior es una función analítica con residuo cero alrededor de cada $w \in \Omega$, y como $2/z^3$ es analítica en una vecindad de cada $w \in \Omega \setminus \{0\}$, se tiene que el residuo de g en sus polos también es 0. Entonces en virtud del teorema del residuo podemos concluir que si γ es una curva cerrada C^1 por tramos, entonces $\int_\gamma g(z)dz = 0$.

Más aun, en la prueba de la Proposición 0.25 demostramos que g es analítica en 0, por lo que usando el teorema de la independencia de caminos, podemos concluir que g tiene una primitiva, la cual puede ser expresada como

$$\int_0^z g(u)du = \int_0^z -2\left(\sum_{w\in\Omega}{}' \frac{1}{(u-w)^3}\right) du, \tag{4.4}$$

donde la integral anterior se refiere a integrar la función a lo largo de cualquier curva C^1 por tramos que conecta 0 con z, $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Definición 3. *Sea Ω un módulo doble, definimos la función $\wp$ de Weierstrass asociada a Ω, como la función*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right). \tag{4.5}$$

Probaremos que la serie anterior, converge normalmente en $\mathbb{C} \setminus (\Omega \setminus \{0\})$. Por lo que $\wp$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \Omega$ y tiene un polo doble en el orígen. Para motivar la definición de la función $\wp$ de Weierstrass, de manera intuitiva intercambiamos el símbolo de la integral y de la suma en (23), en este caso, obtenemos que la primitiva de g, es de la forma

$$\begin{aligned} \int_0^z \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{-2}{(u-w)^3} du &= \sum_{w\in\Omega}{}' \int_0^z \frac{-2}{(u-w)^3} du \\ &= \sum_{w\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

El hecho de poder intercambiar los símbolos de la integral y de la suma, se justificará formalmente en la Proposición 0.30.

Por otra parte, en el siguiente teorema se prueba de otra manera la convergencia normal de la función $\wp$ de Weierstrass, de la forma en que lo hace Ahlfors (cf. [1], p. 272).

Teorema 4.8. *Si Ω es un módulo doble, la serie*

$$\sum_{w\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) \tag{4.7}$$

converge normalmente en $\mathbb{C} \setminus (\Omega \setminus \{0\})$

Demostración. La prueba es análoga al Teorema 0.24. Sea K un compacto en $\mathbb{C} \setminus (\Omega \setminus \{0\})$. Consideremos R lo suficientemente grande como para que $K \subseteq D(0, R)$ y dividamos la suma como

$$\sum_{w\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) = \sum_{\substack{w\in\Omega\setminus\{0\} \\ |w|\leq 2R}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) + \sum_{\substack{w\in\Omega \\ |w|>2R}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).$$

Debemos demostrar que

$$\sum_{\substack{w\in\Omega \\ |w|>2R}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right),$$

converge uniformemente en K. Sea $z \in K$, notemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| &= \left| \frac{w^2 - (z-w)^2}{w^2(z-w)^2} \right| \\ &= \left| \frac{z(2w-z)}{w^2(z-w)^2} \right| \\ &= \left| \frac{zw(2-\frac{z}{w})}{w^4(\frac{z}{w}-1)^2} \right| \\ &= \left| \frac{z}{w^3} \right| \frac{\left|2-\frac{z}{w}\right|}{\left|\frac{z}{w}-1\right|^2}. \end{aligned}$$

Como $z \in K$, sabemos que $|z| \leq R$ y como estamos considerando puntos en el módulo tal que $|w| > 2R$, podemos suponer que $|w| > 2|z|$, esto es $|z|/|w| < 1/2$. De donde se obtiene

$$\left|2 - \frac{z}{w}\right| \leq 2 + \left|\frac{z}{w}\right| \leq \frac{5}{2}.$$

En consecuencia, esta desigualdad junto con (20) implican que

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right| &= \left|\frac{z}{w^3}\right| \frac{\left|2 - \frac{z}{w}\right|}{\left|\frac{z}{w} - 1\right|^2} \\ &\leq \frac{R\left(\frac{5}{2}\right)}{|w^3|\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &\leq \frac{10R}{|w^3|}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por lo que por el criterio M de Weierstrass, concluimos que la serie converge en K de manera uniforme y absoluta, es decir, hemos demostrado lo que queríamos. □

La convergencia absoluta y normal de la función $\wp$ de Weierestrass en $\mathbb{C} \setminus \Omega$, se sigue entonces del Teorema 0.29 y su prueba.

Mostramos una manera alternativa de probar la convergencia de la serie (26), esta es la manera en que Lipman Bers lo hace. Motivados por la idea que nos llevó a la ecuación (25) de intercambiar los símbolos de la integral y la suma, probamos el siguiente teorema.

Teorema 4.9. *Sea $\{f_n : U \longrightarrow \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ y holomorfas en una región U, tales que convergen normalmente a f en U. Supóngase también que para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda curva γ cerrada C^1 por tramos, se tiene que $\int_\gamma f_n = 0$. Entonces fijando cualquier $a \in U$, la sucesión de funciones definida como*

$$F_n(z) = \int_a^z f_n(u)du, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{4.9}$$

converge normalmente a la función $\int_a^z f(u)du$. Los límites de la integral representan cualquier curva C^1 por tramos contenida en U con extremos a y z.

Nótese que las funciones F_n son holomorfas en U por el teorema de independencia de caminos y que además son unas primitivas de f_n.

Demostración. Hemos visto que el hecho de que $\int_\gamma f_n(z)dz = 0$ para toda curva γ cerrada y C^1 por tramos, es equivalente al hecho de que $\int_a^z f_n(u)du$ esté bien definida, donde los límites de la integral representan cualquier curva C^1 por tramos que conecte a y z.

Como para cualquier curva cerrada γ, $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en γ (dado que γ es compacto), se puede intercambiar el símbolo del límite y el símbolo de la integral y se tiene que $\int_\gamma f(z)dz = 0$, de donde la función $\int_a^z f(u)du$ también está bien definida.

Sea $K \subseteq U$ un compacto y $R > 0$, suficientemente grande, de tal manera que $K \subseteq D(a, R)$. Si $z \in K$,tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_a^z f_n(u)du - \int_a^z f(u)du\right| &= \left|\int_a^z f_n(u) - f(u)du\right| \\ &\leq \int_a^z |f_n(u) - f(u)||du|.\end{aligned}$$

Como $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en K, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$, para toda n y toda $z \in K$.

Como la curva de integración es independiente del resultado, se puede construir una curva adecuada. Podemos considerar el segmento de recta que une a a con z, si este segmento se queda contenido en U, lo consideramos como la curva de integración.

Por otro lado, si el segmento no se queda contenido en U, entonces pasa por las singularidades; sin embargo, como los polos son discretos y el segmento es compacto, solo puede haber una cantidad finita de polos en el segmento. En este caso consideremos la curva de integración como en la Figura 11, donde las medias circunferencias rodean a los polos y tienen un radio menor a $\frac{1}{\pi n}$, donde n representa el número de polos que hay en el segmento, de esta forma garantizamos que $long(\gamma) < R + 1$.

Entonces tenemos que

$$\left|\int_a^z f_n(u)du - \int_a^z f(u)du\right| \leq \epsilon(R+1),$$

de donde la sucesión, converge uniformemente en K, justo como debíamos probar. $\square$

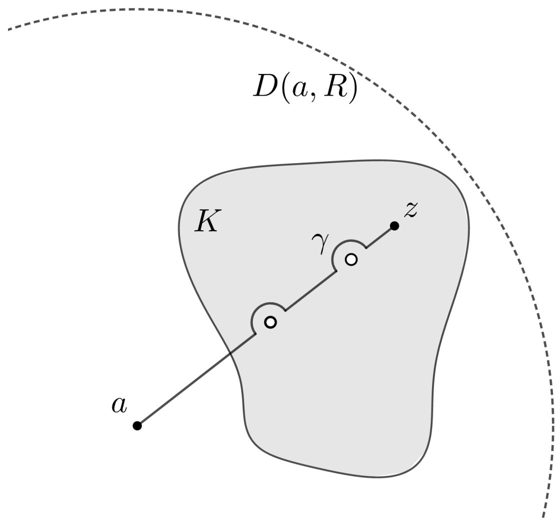


Figura 4.3: Curva γ en la Proposición 0.30

Apliquemos este resultado para demostrar la convergencia de la función $\wp$ de Weierstrass, sin usar el Teorema 0.29.

Denotando

$$g_n(z) = \sum_{w \in \Omega_n} \frac{-2}{(z-w)^3}$$

podemos demostrar que (26) converge normalmente. Recordando que por definición, una serie es el límite de la sucesión de sumas parciales, el Teorema 0.24 afirma que

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(z) \longrightarrow \sum_{w \in \Omega}{}' \frac{-2}{(z-w)^3}$$

donde la convergencia es normal y absoluta. La elección del ordenamiento conforme a las Ω_i se justifica por la convergencia absoluta. Usando el Teorema 0.30 tenemos que

$$\int_0^z \sum_{i=1}^{n} g_i(u) du \longrightarrow \int_0^z \sum_{w \in \Omega}{}' \frac{-2}{(u-w)^3} du,$$

también converge normalmente. Más aún

$$\int_0^z \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{-2}{(u-w)^3}du = \sum_{w\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right).$$

Esto se sigue ya que

$$\begin{aligned}
\int_0^z \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{-2}{(u-w)^3}du &= \int_0^z \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g_i(u)du \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^z \sum_{i=1}^{n} g_i(u)du \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_0^z g_i(u)du \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^z g_i(u)du \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^z \sum_{w\in\Omega_i} \frac{-2}{(u-w)^3}du \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{w\in\Omega_i} \int_0^z \frac{-2}{(u-w)^3}du \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{w\in\Omega_i} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right) \\
&= \sum_{w\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right),
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue del Teorema 0.30.

Nótese que este argumento se aplica para cualquier otro reordenamiento que de la serie.

La convergencia absoluta puede ser demostrada de la misma manera que en (27). En consecuencia, la función $\wp$ de Weierstrass está bien definida y es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Nótese que esta prueba no usa el Teorema 0.29.

El siguiente paso es ver que la función $\wp$ es elíptica de orden 2.

Teorema 4.10. *Si Ω es un módulo doble, la función $\wp$ de Weierstrass asociada, es meromorfa, y tiene un polo de orden 2 en* 0.

Demostración. Hemos demostrado que

$$\sum_{w\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

es analítica alrededor del 0, por lo que

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

tiene un polo de orden 2 y residuo 0 en 0. □

Teorema 4.11. *Dado un módulo doble Ω, la función $\wp$ de Weierstrass asociada es par.*

Demostración. Notemos que

$$\wp(-z) = \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{w\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(-z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).$$

Ocupando nuevamente el hecho de que Ω es simétrico respecto al origen, podemos reindexar la suma haciendo uso de la sustitución $u = -w$ para concluir que

$$\begin{aligned}\wp(-z) &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{u\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(-z+u)^2} - \frac{1}{(-u)^2} \right)\\ &= \frac{1}{(z^2)} + \sum_{u\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2} \right)\\ &= \wp(z).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $\wp$ de Weierstrass es par. □

Antes de demostrar el siguiente teorema, notemos que en virtud del teorema de Weierstrass se tiene que

$$\wp'(z) = \sum_{w\in\Omega} \frac{-2}{(z-w)^3}. \tag{4.10}$$

Teorema 4.12. *Dado un módulo doble Ω, los periodos de su función $\wp$ de Weierstrass asociada, son exactamente los elementos de Ω.*

Demostración. En el Teorema 0.27 demostramos que $\wp'(z)$ es una función elíptica con respecto a Ω. Por lo que si $w \in \Omega$, tenemos que $\wp'(z) = \wp'(z+w)$, es decir,

$$\wp(z) - \wp(z+w) = c, \tag{4.11}$$

para alguna $c \in \mathbb{C}$. Por el Teorema 0.32, $\wp$ es par, entonces evaluando (30) en $-w_1/2$, donde w_1 es un elemento de una base de Ω, obtenemos que

$$0 = \wp\left(-\frac{w_1}{2}\right) - \wp\left(\frac{w_1}{2}\right) = c,$$

de donde $\wp$ es Ω-periódica.

Usando el mismo argumento de la prueba de la Proposición 0.26, se sigue que no hay más periodos. □

Probamos otros resultados de la función $\wp$.

Teorema 4.13. *Sea Ω un módulo doble con base $\{w_1, w_2\}$ y $\wp$ la función $\wp$ de Weierstrass asociada, entonces $\wp'(w_1/2) = \wp'(w_2/2) = \wp'((w_1+w_2)/2) = 0$, es decir, $w_1/2, w_2/2$ y $(w_1+w_2)/2$ son puntos críticos de la función $\wp$.*

Demostración. Probaremos el resultado para $w_1/2$, ya que los demás casos son análogos. Sabemos que $\wp'$ es una función impar y Ω periódica, por lo que

$$\wp'\left(\frac{w_1}{2}\right) = -\wp'\left(-\frac{w_1}{2}\right) = -\wp'\left(-\frac{w_1}{2} + w_1\right) = -\wp'\left(\frac{w_1}{2}\right).$$

Como $w_1/2$ no es un periodo, entonces $\wp'$ es analítica en $w_1/2$, por lo que solo puede suceder que $\wp'(w_1/2) = 0$. □

Es fácil notar que estos puntos $w_1/2$, $w_2/2$, $(w_1+w_2)/2$, son todos Ω incongruentes (véase la Figura 12). Nótese que no hay más puntos críticos ya que $\wp'$ es de orden 3

Definición 4. *Sea Ω un módulo doble con base $\{w_1, w_2\}$ y $\wp$ la función $\wp$ de Weierstrass asociada, definimos las constantes*

$$e_1 = \wp\left(\frac{w_1}{2}\right), \qquad e_2 = \wp\left(\frac{w_2}{2}\right), \qquad e_3 = \wp\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right).$$

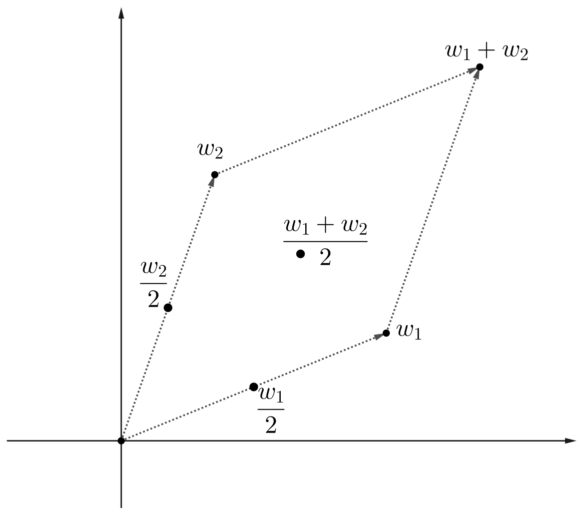


Figura 4.4: Los puntos críticos de la función $\wp$ de Weierstrass, $\frac{w_1}{2}$, $\frac{w_2}{2}$ y $\frac{w_1+w_2}{2}$ son Ω-incongruentes.

Teorema 4.14. *Las constantes e_1, e_2 y e_3 solo dependen del módulo Ω y no de la base elegida. Es decir, si $\{w_1, w_2\}$ y $\{w_1', w_2'\}$ son dos bases de Ω entonces los conjuntos*

$$\left\{\wp\left(\frac{w_1}{2}\right), \wp\left(\frac{w_2}{2}\right), \wp\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)\right\} \;\; y \;\; \left\{\wp\left(\frac{w_1'}{2}\right), \wp\left(\frac{w_2'}{2}\right), \wp\left(\frac{w_1'+w_2'}{2}\right)\right\}$$

son iguales.

Demostración. Por el Teorema 0.5 existen enteros a, b, c y d, $ad-bc = \pm 1$, tales que

$$w_2' = aw_2 + bw_1$$

y

$$w_1' = cw_2 + dw_1.$$

Es claro que (a, b) y (c, d) son primos relativos, también lo son $(a+c, b+d)$, ya que

$$\begin{aligned} \pm 1 &= ad - bc \\ &= ad + cd - cd - bc \\ &= (a + c)d - (b + d)c. \end{aligned}$$

Por lo que los elementos de cualquiera de estas parejas ordenadas no pueden ser ambos pares.

Tomando las clases de equivalencia módulo 2 de estas parejas ordenadas, concluimos que

$$\{(\overline{a},\overline{b}),(\overline{c},\overline{d}),(\overline{a+c},\overline{b+d})\} \subseteq \{(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1})\}. \tag{4.12}$$

Más aún, como la suma de cualesquiera de dos de estas parejas nos da la tercera, concluimos que todas las parejas del miembro izquierdo de (31) son distintas, por lo que ambos conjuntos son iguales (ya que si dos parejas son iguales como elementos de $\mathbb{Z}_2$, su suma será la pareja $(\overline{0},\overline{0})$).

Existen 6 formas posibles de asignarle un valor a las parejas. Probamos primero el caso en que $(\overline{a},\overline{b})=(\overline{1},\overline{0})$, $(\overline{c},\overline{d})=(\overline{0},\overline{1})$ y $(\overline{a+c},\overline{b+d})=(\overline{1},\overline{1})$.

En este caso a es impar y b es par, por lo que $(a-1)/2$ y $b/2$ son ambos números enteros. Esto implica que

$$\left(\frac{a-1}{2}\right)w_2+\frac{b}{2}w_1\in\Omega,$$

equivalentemente, tenemos que

$$\frac{w_2'}{2}=\frac{a}{2}w_2+\frac{b}{2}w_1\equiv\frac{w_2}{2}\pmod{\Omega}.$$

También tenemos que

$$\frac{c}{2}w_2+\left(\frac{d-1}{2}\right)w_1\in\Omega,$$

por lo que

$$\frac{w_1'}{2}=\frac{c}{2}w_2+\frac{d}{2}w_1\equiv\frac{w_1}{2}\pmod{\Omega}.$$

Sumando las congruencias anteriores tenemos que

$$\frac{w_1'+w_2'}{2}=\frac{a+c}{2}w_2+\frac{b+d}{2}w_1\equiv\frac{w_1+w_2}{2}\pmod{\Omega}.$$

Se sigue entonces de la periodicidad de la función ℘, que

$$\wp\left(\frac{w_1'}{2}\right)=\wp\left(\frac{w_1}{2}\right),\quad \wp\left(\frac{w_2'}{2}\right)=\wp\left(\frac{w_2}{2}\right),\quad \wp\left(\frac{w_1'+w_2'}{2}\right)=\wp\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right).$$

El mismo razonamiento nos permite concluir la prueba para las otras 5 posibles asignaciones de las parejas. Basta hacerlo para las parejas correspondientes a $(\overline{0},\overline{1})$ y $(\overline{1},\overline{0})$ y sumar o restar las congruencias adecuadamente.

Por ejemplo, si $(\overline{c},\overline{d})=(\overline{0},\overline{1})$ y $(\overline{a+c},\overline{b+d})=(\overline{1},\overline{0})$, entonces

$$\frac{w_1'}{2}\equiv\frac{w_1}{2}\pmod{\Omega}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{w_2'+w_1'}{2}&\equiv\frac{a}{2}w_2+\frac{b}{2}w_1+\frac{c}{2}w_2+\frac{d}{2}w_1\\&\equiv\frac{w_2}{2}\pmod{\Omega},\end{aligned}$$

por lo cual

$$\frac{w_2'}{2}\equiv\frac{w_2-w_1}{2}\equiv\frac{w_2+w_1}{2}\pmod{\Omega}.$$

□

Para simplificar la notación de las pruebas subsiguientes denotamos

$$w_1+w_2=w_3.$$

Teorema 4.15. *Sea Ω un módulo doble, entonces las constantes e_1,e_2 y e_3 son distintas entre si.*

Demostración. Por el Corolario 0.17 y el Teorema 0.31 sabemos que en un paralelogramo fundamental, la ecuación

$$\wp(z)=e_i,\qquad\qquad i\in\{1,2,3\}$$

tiene exactamente dos soluciones contando multiplicidades. Por definición, $w_i/2$ son soluciones de las ecuaciones anteriores, y por el Teorema 0.34 son soluciones dobles, de donde no puede existir otro punto que resuelva alguna de las ecuaciones $\wp(z)=e_i$. Por consiguiente e_1,e_2 y e_3 son tres puntos distintos. □

La importancia de definir las constantes e_1,e_2,e_3 reside en el hecho de que con ellas podemos establecer una relación entre la función $\wp$ y su derivada.

Teorema 4.16. *La función $\wp$ de Weierstrass satisface la siguiente ecuación*

$$[\wp'(z)]^2=4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_2).\tag{4.13}$$

Antes de demostrar el teorema, recordamos que si f_1 y f_2 son funciones con polos de orden k_1 y k_2 en un punto a, entonces la función $f_1 f_2$ tiene un polo de orden $k_1 + k_2$ en dicho punto, esto debido a que existen ϕ_1 y ϕ_2 funciones analíticas que no se anulan en a tales que localmente

$$f_1(z) = \frac{\phi_1(z)}{(z-a)^{k_1}} \qquad \text{y} \qquad f_2(z) = \frac{\phi_2(z)}{(z-a)^{k_2}},$$

de donde

$$(f_1 f_2)(z) = \frac{\phi_1(z)\phi_2(z)}{(z-a)^{k_1+k_2}}.$$

Demostración. Del Teorema 0.37. Como las funciones constantes son elípticas con respecto a cualquier módulo doble, tenemos que las funciones $\wp(z) - e_i$, $i \in \{1,2,3\}$ son elípticas, por lo que cada uno de los miembros de la ecuación (32) representa a una función elíptica. Recordamos que por el Corolario 0.19 una función elíptica está determinada, salvo multiplicación por escalar, por sus ceros y sus polos.

Sabemos que la función $\wp'(z)$ tiene un polo de orden 3 en el 0 y por el Teorema 0.34, sabemos que $\wp'(z)$ tiene tres ceros simples en los puntos $w_i/2$, $i \in \{1,2,3\}$. Por las observaciones anteriores, se sigue que la función $[\wp'(z)]^2$ tiene un polo de orden 6 en el 0 y ceros dobles en los puntos $w_i/2$. Notemos que no puede haber más ceros, ya que contados con multiplicidades, solo puede haber 6 ceros incongruentes.

Por otro lado, las funciones $\wp(z) - e_i$ tienen polos dobles en el origen, ya que $\wp$ tiene un polo doble en cero. Ahora, cada una de estas funciones tiene un cero de multiplicidad 2 en el puntos $w_i/2$, por lo que el producto de estas 3 funciones tiene un polo de orden 6 en el 0 y ceros de orden 2 en cada $w_i/2$.

Como ambas funciones elípticas tienen los mismos polos y los mismos ceros, usando el Corolario 0.19, podemos concluir que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$[\wp'(z)]^2 = c(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_2). \tag{4.14}$$

Usando (29) y el Teorema 0.31, podemos escribir

$$\begin{aligned} \wp'(z) &= \frac{-2}{z^3} + \phi(z) && \qquad (4.15) \\ \wp(z) - e_i &= \frac{1}{z^2} + \psi_i(z), && \qquad i \in \{1,2,3\}, \end{aligned}$$

donde ϕ y ψ_i son analíticas en una vecindad del 0.

Sustituyendo esto en la expresión encontrada y multiplicando ambos lados de la ecuación (33) por z^6, obtenemos

$$z^6\left[\frac{-2}{z^3}+\phi(z)\right]^2 = cz^6\left(\frac{1}{z^2}+\psi_1(z)\right)\left(\frac{1}{z^2}+\psi_2(z)\right)\left(\frac{1}{z^2}+\psi_3(z)\right),$$

de donde

$$\left[-2+z^3\phi(z)\right]^2 = c\left(1+z^2\psi_1(z)\right)\left(1+z^2\psi_2(z)\right)\left(1+z^2\psi_3(z)\right).$$

Tomando el límite cuando $z \to 0$, concluimos que $c = 4$, de donde tenemos el resultado deseado. □

Corolario 4.17. *Sea z_0 en el dominio de analiticidad de la función $\wp$ de Weierstrass, supongamos que z_0 no es un cero ni un punto crítico de $\wp$, entonces existe $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \Omega$ una vecindad de z_0 tal que para toda $z \in U$ se tiene que*

$$\int_{\wp(z_0)}^{\wp(z)} \frac{1}{\sqrt{4(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}}du = z - z_0.$$

Demostración. Denotando $p(z) = 4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)$, el Teorema 0.37 afirma que la función $\wp$ de Weierstrass satisface la ecuación diferencial

$$\wp'(z) = \sqrt{p(\wp(z))}, \tag{4.16}$$

como z_0 no es un punto crítico de $\wp$, la derivada no se anula, por lo que existe una vecindad de U de z_0 donde podemos definir una rama holomorfa de la raíz cuadrada. Se puede elegir una rama adecuada, para que coincida en algún punto con $\wp'$ (por el principio de continuación analítica, coincide en toda la vecindad). Con esta rama se tiene que $\wp'(z) = \sqrt{p \circ \wp(z)}$.

Como la raíz es analítica en U, el miembro derecho de la ecuación anterior nunca es cero, de donde podemos dividir y concluir que

$$1 = \frac{\wp'(z)}{\sqrt{p(\wp(z))}},$$

(nótese que al ser funciones holomorfas el teorema de independencia de trayectorias se aplica) por lo que integrando ambos lados tenemos que

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \int_{z_0}^{z} du \\ &= \int_{z_0}^{z} \frac{\wp'(u)}{\sqrt{p(\wp(u))}} du \\ &= \int_{\wp(z_0)}^{\wp(z)} \frac{1}{\sqrt{p(u)}} du. \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de tomar una curva que conecta a z con z_0, es decir si $\gamma : [0, s] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una curva C^1 por tramos tal que $\gamma(0) = z$ y $\gamma(s) = z_0$ tenemos que

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\wp'(u)}{\sqrt{p(\wp(u))}} du = \int_{0}^{s} \frac{\wp'(\gamma(t))\gamma'(t)}{\sqrt{p(\wp(\gamma(t)))}} dt.$$

Además como $\wp \circ \gamma$ conecta a $\wp(z)$ con $\wp(z_0)$, tenemos que

$$\int_{\wp(z_0)}^{\wp(z)} \frac{1}{\sqrt{p(u)}} du = \int_{0}^{s} \frac{(\wp \circ \gamma)'(t)}{\sqrt{p(\wp \circ \gamma(t))}} dt,$$

de donde se sigue el resultado. □

Encontramos ahora la expansión de Laurent de la función $\wp$ alrededor del origen.

Teorema 4.18. *Sea Ω un módulo doble y $\wp$ la función de Weierstrass asociada, entonces*

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1) S_{2k} z^{2k-2} \\ &= \frac{1}{z^2} + 3S_4 z^2 + 5S_6 z^4 + ..., \end{aligned}$$

donde $S_j = \sum_{w \in \Omega}{}' \frac{1}{w^j}$.

Demostración. Recordamos que las series $\sum_{w \in \Omega}{}' \frac{1}{w^k}$, donde $k > 2$ convergen ya que convergen absolutamente, véase el Lema 0.23 y la observación subsecuente.

Sabemos que

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{w\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right)\\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{1}{w^2}\left(\frac{1}{(1-\frac{z}{w})^2} - 1\right).\end{aligned}$$

Recordando que localmente, alrededor del origen se tiene que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

podemos concluir ocupando el Teorema de Weierstrass, que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\\ &= 1 + 2z + 3z^3 + ...\end{aligned}$$

Por lo cual, en una vecindad suficientemente pequeña del origen, $|z/w| < 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{1}{w^2}\left(1 + 2\left(\frac{z}{w}\right) + 3\left(\frac{z}{w}\right)^2 ... - 1\right)\\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{1}{w^2}\left(2\left(\frac{z}{w}\right) + 3\left(\frac{z}{w}\right)^2 ...\right)\\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{w\in\Omega}{}' \left(\frac{2z}{w^3} + \frac{3z^2}{w^4} ...\right)\\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{w\in\Omega} \frac{2z}{w^3} + \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{3z^2}{w^4} + ...\\ &= \frac{1}{z^2} + 2z\sum_{w\in\Omega}{}' \frac{1}{w^3} + 3z^2\sum_{w\in\Omega}{}' \frac{1}{w^4} + ...\\ &= \frac{1}{z^2} + 2S_3 z + 3S_4 z^2 + ...\\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)S_{n+2}z^n.\end{aligned}$$

La distribución de la sumatoria hecha en la cuarta igualdad se justifica formalmente usando el teorema de los coeficientes de Taylor, como mostramos a continuación.

Recordando que la función

$$g(z) = \sum_{w\in\Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

es analítica en una vecindad del cero, podemos ocupar el teorema de Weierstrass para concluir que

$$\begin{aligned} g'(z) &= \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{-2}{(z-w)^3} \\ g''(z) &= \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{6}{(z-w)^4} \\ g'''(z) &= \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{-24}{(z-w)^5}, \end{aligned}$$

o más generalmente que

$$g^n(z) = \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{(-1)^n(n+1)!}{(z-w)^{n+2}}.$$

Ahora, si a_n denota el n-ésimo término de la expansión de Taylor de g alrededor de 0, se tiene que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{g^n(0)}{n!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{(-1)^n(n+1)!}{(-w)^{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^n(n+1)!}{(-1)^{n+2}n!} \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{1}{w^{n+2}} \\ &= (n+1) \sum_{w\in\Omega}{}' \frac{1}{w^{n+2}} \\ &= (n+1)S_{n+2}. \end{aligned}$$

Como g es analítica, la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)S_{n+2}z^n,$$

es absoluta y uniforme en una vecindad del 0.

Como Ω es simétrico respecto al origen y $\sum_{w\in\Omega}{}' \frac{1}{w^k}$ converge absolutamente, concluimos que si $k>2$ es impar, entonces $S_k=0$. Esto se sigue ya que podemos reordenar los términos para que

$$S_k = \sum_{w\in\overline{\Omega\setminus\{0\}}} \frac{1}{w^k} + \frac{1}{(-w)^k} = 0,$$

donde $\overline{\Omega\setminus\{0\}}$ es un conjunto de representantes de $\Omega\setminus\{0\}$ bajo la relación $w\sim -w$.

Entonces podemos concluir la prueba, es decir

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty}(2n-1)S_{2n}z^{2n-2}.$$

$\square$

Usando la expansión demostrada en el teorema anterior, podemos usar el teorema de Weierstrass y derivando término a término, concluimos el siguiente resultado.

Corolario 4.19. *Con la notación del teorema anterior se tiene que*

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{n=2}^{\infty}(2n-1)(2n-2)S_{2n}z^{2n-3}.$$

Podemos resumir los dos resultados anteriores en las ecuaciones siguientes

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3S_4z^2 + 5S_6z^4 + p(z), \tag{4.17}$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6S_4z + 20S_6z^3 + q(z), \tag{4.18}$$

donde p y q son funciones analíticas en una vecindad de 0, con ceros de orden 6 y 5 respectivamente.

Multiplicando la ecuación (36) por $60S_4$ obtenemos

$$60S_4\wp(z) = \frac{60S_4}{z^2} + \phi(z), \tag{4.19}$$

donde ϕ es una función analítica en una vecindad del 0 y con un cero de multiplicidad 2.

Nótese que el miembro derecho de la ecuación (36) puede ser escrito como

$$\frac{1}{z^2}(1 + 3S_4z^4 + 5S_6z^6 + ...),$$

podemos elevar al cubo multiplicando las series de Taylor, de donde se obtiene

$$[\wp(z)]^3 = \frac{1}{z^6}(1 + 9S_4z^4 + 15S_6z^6...),$$

y multiplicándola por 4, obtenemos

$$4[\wp(z)]^3 = \frac{4}{z^6} + \frac{36S_4}{z^2} + 60S_6 + p_1(z), \tag{4.20}$$

donde p_1 es analítica alrededor del 0 y tiene un cero de multiplicidad 2.

De la misma forma, elevando al cuadrado la ecuación (37), tenemos que

$$[\wp'(z)]^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24S_4}{z^2} - 80S_6 + q_1(z), \tag{4.21}$$

donde q_1 es también analítica en una vecindad del cero con un cero de multiplicidad 2.

Considerando la ecuación (40), restándole (39) y sumando (38), obtenemos que

$$[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 + 60S_4\wp(z) = -140S_6 + q_1(z) - p_1(z) + \phi(z),$$

o equivalentemente que

$$[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 + 60S_4\wp(z) + 140S_6 = \psi(z), \tag{4.22}$$

donde ψ es analítica en una vecindad del cero y además tiene un cero de multiplicidad 2 en el 0. Notemos que el miembro izquierdo de la ecuación anterior es una función elíptica, y el lado derecho tiene un cero en el 0; más aún, no tiene polos, en virtud del Teorema 0.15 concluimos que

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)]^3 - 60S_4\wp(z) - 140S_6. \tag{4.23}$$

Si denotamos $g_2 = 60S_4$ y $g_3 = 140S_6$, los argumentos anteriores pueden ser resumidos en el siguiente Teorema

Teorema 4.20. *La función ℘ de Weierstrass satisface la siguiente ecuación*

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3. \tag{4.24}$$

Comparando el Teorema 0.41 con el Teorema 0.37, concluimos que

$$4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3) = 4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3,$$

equivalentemente podemos escribir

$$p \circ \wp = q \circ \wp,$$

donde

$$\begin{aligned} p(z) &= 4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3), \\ q(z) &= 4z^3 - g_2 z - g_3. \end{aligned}$$

Como ℘ es suprayectiva (véase la observación subsecuente al Corolario 0.17), tiene inversa derecha, por lo que podemos concluir que

$$p = q,$$

de donde

$$\begin{aligned} 4z^3 - 4(e_1+e_2+e_3)z^2 + 4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)z - 4e_1e_2e_3 \\ = 4z^3 - g_2z - g_3, \end{aligned} \tag{4.25}$$

igualando los coeficientes de ambos polinomios, podemos concluir que

$$\begin{aligned} e_1+e_2+e_3 &= 0 \\ e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1 &= -\frac{g_2}{4} \\ e_1e_2e_3 &= \frac{g_3}{4}. \end{aligned}$$

Las anteriores conclusiones demuestran el siguiente corolario.

Corolario 4.21. *Sean* Ω *es un módulo doble y* ℘ *su función de Weierstrass asociada, entonces se tiene que*

$$\begin{aligned} 0 &= e_1+e_2+e_3 \\ g_2 &= -4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1) \\ g_3 &= 4e_1e_2e_3, \end{aligned}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} -15S_4 &= e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1 \\ 35S_6 &= e_1e_2e_3. \end{aligned}$$

Capítulo 5

La función λ modular

Recordemos que las funciones $\wp$ de Weierstrass dependen del módulo que ocupemos para definirlas, con esto en mente definiremos de forma muy natural la función λ modular y analizaremos su comportamiento con respecto al grupo clásico modular, $PSL(2,\mathbb{Z})$.

De esta manera construimos una función automorfa. Estas son funciones holomorfas invariantes bajo un subgrupo discontinuo de transformaciones de Möbius. Una referencia clásica para el estudio de las funciones automorfas es el libro de Lehner [10].

Para hacer más clara la exposición introducimos las siguientes notaciones. Si $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ son tales que $w_2/w_1 \notin \mathbb{R}$, denotamos por $\Omega(w_1, w_2)$ el $\mathbb{Z}$-módulo generado por w_1 y w_2 y $\wp_{(w_1,w_2)}(z)$ la función de Weierstrass asociada a $\Omega(w_1, w_2)$. Escribimos $w_3 = w_1 + w_2$ y para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ consideremos $e_{i(w_1,w_2)} = \wp_{(w_1,w_2)}(w_i/2)$.

Proposición 5.1. *Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tales que $w_2/w_1 \notin \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces*

$$e_{i(vw_1,vw_2)} = \frac{1}{v^2} e_{i(w_1,w_2)}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
e_{i(vw_1,vw_2)} &= \wp_{(vw_1,vw_2)}\left(\frac{vw_i}{2}\right) \\
&= \frac{1}{(vw_i/2)^2} + \sum_{w\in\Omega(vw_1,vw_2)}{}' \left(\frac{1}{(vw_i/2 - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right) \\
&= \frac{1}{(vw_i/2)^2} + \sum_{u\in\Omega(w_1,w_2)}{}' \left(\frac{1}{(vw_i/2 - vu)^2} - \frac{1}{(vu)^2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{(w_i/2)^2} + \sum_{u\in\Omega(w_1,w_2)}{}'\left(\frac{1}{(w_i/2-u)^2} - \frac{1}{u^2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{v^2}\ e_{i(w_1,w_2)},$$

donde la tercer igualdad es justificada por el cambio de variable $w = vu$. □

Usando la proposición anterior podemos concluir que las cantidades

$$e_{3(w_1,w_2)} - e_{2(w_1,w_2)} \qquad \text{y} \qquad e_{1(w_1,w_2)} - e_{2(w_1,w_2)}$$

se multiplican por un factor v^{-2} cuando ambos elementos de la base son multiplicados por v, en consecuencia, tenemos el siguiente resultado

Corolario 5.2. *El cociente*

$$\frac{e_{3(w_1,w_2)} - e_{2(w_1,w_2)}}{e_{1(w_1,w_2)} - e_{2(w_1,w_2)}}, \quad \textit{o brevemente} \quad \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} \tag{5.1}$$

es invariante cuando multiplicamos ambos elementos de la base por un complejo $v \neq 0$.

Concluimos que la condición anterior es equivalente a decir que la ecuación (0.44) depende únicamente del cociente $\tau = w_2/w_1$.

Nótese que, para cada $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, podemos considerar la base $\{1, \tau\}$, el $\mathbb{Z}$-módulo que genera y el cociente

$$\frac{e_{3(1,\tau)} - e_{2(1,\tau)}}{e_{1(1,\tau)} - e_{2(1,\tau)}}. \tag{5.2}$$

Nótese que si $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, las bases $\{1, \tau\}$ y $\{1, -\tau\}$ generan el mismo módulo Ω, además como

$$-\frac{\tau}{2} \equiv \frac{\tau}{2} \pmod{\Omega}$$

y

$$\frac{1-\tau}{2} \equiv \frac{1+\tau}{2} \pmod{\Omega},$$

se tiene que $e_{i(1,\tau)} = e_{i(1,-\tau)}$, por lo que la expresión 46 no se verá alterada al sustituir τ por $-\tau$. Por la conveniencia de trabajar con dominios cuando se trabaja con funciones analíticas y el hecho de que no podemos hablar de funciones $\wp$ cuando $\tau \in \mathbb{R}$, únicamente consideraremos valores de τ en el semiplano superior $\mathbb{H}^2$.

Definición 5. *Para cada $\tau \in \mathbb{H}^2$, definimos la función λ modular como*

$$\lambda(\tau) = \frac{e_{3(1,\tau)} - e_{2(1,\tau)}}{e_{1(1,\tau)} - e_{2(1,\tau)}}.$$

Antes de demostrar las propiedades más elementales de la función λ modular, es necesario probar el siguiente lema.

Lema 5.3. *Sea $\rho \in \{1/2, \tau/2, (1+\tau)/2\}$, entonces la serie*

$$\sum_{w \in \Omega(1,\tau)}{}' \left(\frac{1}{(\rho - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right), \tag{5.3}$$

converge absoluta y normalmente para $\tau \in \mathbb{H}^2$.

Demostración. Nótese que en los tres casos, ρ depende únicamente de τ y que cualquier $w \in \Omega(1,\tau)$ puede ser escrita como $n + m\tau$, por lo que la serie es una función de τ. Se puede fijar un valor para ρ y los otros dos casos son análogos.

Sea $K \subseteq \mathbb{H}^2$ un compacto, demostraremos que (47) converge absoluta y uniformemente en K. Nótese que si $R > 0$ es suficientemente grande, $K \subseteq B(0,R)$. También si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño, se tiene que $K \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > \epsilon\}$.

Dada $\tau \in K$, entonces $Im(\tau) \geq \epsilon$ por lo que

$$|n + m\tau| \geq |mIm(\tau)| \geq |m|\epsilon,$$

por lo tanto existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $|m| > M$ se tiene que $|m\epsilon| \geq 2R$, de donde $|n + m\tau| \geq 2R$.

Además, si $|m| < M$ y n es suficientemente grande, digamos $|n| > N \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} |n + m\tau| &\geq |n| - |m\tau| \\ &\geq |n| - MR \\ &> 2R. \end{aligned}$$

En consecuencia, si $|n| \geq N$ o $|m| \geq M$, se sigue que $|n + m\tau| > 2R$. Definamos

$$A = \{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |m| \leq M,\ |n| \leq N\} \setminus \{(0,0)\}.$$

Podemos reescribir la serie (47), como

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{}' f_{n,m}(\tau), \tag{5.4}$$

donde

$$f_{n,m}(\tau) = \frac{1}{(\rho - w)^2} - \frac{1}{w^2}, \qquad\qquad w = n + m\tau,$$

nótese que las funciones $f_{n,m}$ son analíticas en $\mathbb{H}^2$.

De forma análoga a la demostración del Teorema 0.29 dividamos la suma (48) en dos, obtenemos

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{}' f_{n,m}(\tau) = \sum_{(n,m)\in A} f_{n,m}(\tau) + \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus A}{}' f_{n,m}(\tau).$$

Como la primer suma del miembro izquierdo de la ecuación es una suma finita, basta probar la convergencia absoluta y uniforme de la segunda suma.

Ocuparemos el criterio M de Weierstrass, por la definición de K y de A, tenemos que $|\rho| \leq R$ y que $|w| \geq 2R$, por la demostración del Teorema 0.29, y las ecuaciones (27), tenemos que

$$\left|\frac{1}{(\rho - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right| \leq \frac{10R}{|w|^3}.$$

A diferencia del Teorema 0.29, no podemos afirmar que los términos $1/|w|^3$ acotan a los términos de la suma, ya que estos dependen de τ, sin embargo podemos acotar estos términos de la forma siguiente.

Sea $\tau = u + iv$, tenemos que

$$\begin{aligned} |w| &= |m + n\tau| \\ &= |m + nu + inv| \\ &\geq |m + nu + in\epsilon|. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Recordamos que si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal, entonces existe $k > 0$ tal que $|T(x)| \leq k|x|$. Esto se cumple ya que si $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$, tenemos que

$$\begin{aligned}|T(x)| &= |T(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n)| \\ &= |\lambda_1 T(e_1) + ... + \lambda_n T(e_n)| \\ &\leq |\lambda_1||T(e_1)| + ... + |\lambda_n||T(e_n)| \\ &\leq |x||T(e_1)| + ... + |x||T(e_n)| \\ &= (|T(e_1)| + ... + |T(e_n)|)|x| \\ &\leq k|x|.\end{aligned}$$

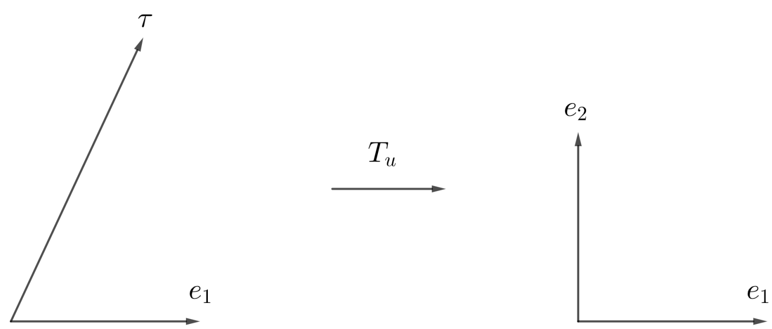


Figura 5.1: T_u fija e_1 y manda τ en e_2

Es natural construir la función lineal T_u que fije e_1 y manda $\tau = u + i\epsilon$ en e_2, donde $|u| \leq R$.

La matriz correspondiente es la inversa de la función lineal determinada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix},$$

la cual fija e_1 y manda e_2 en τ. Es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & -u/\epsilon \\ 0 & 1/\epsilon \end{pmatrix}$$

es la matriz buscada.

Como los puntos $(-u/\epsilon, 1/\epsilon)$ están acotados para $u \in [-R, R]$,

$$|T_u(x)| \leq k|x|,$$

para toda u y alguna k que no depende de u.

Por lo tanto, para toda $x \neq 0$ y toda $u \in [-R, R]$ se tiene que

$$\frac{1}{k|x|} \leq \frac{1}{T_u(x)},$$

en particular para $x = m + n\tau$ se tiene que

$$\frac{1}{|m + n\tau|} \leq \frac{k}{|m + in|},$$

ya que $T_u(m + n\tau) = m + in$.

El caso general en el cual $\tau = u + iv$, donde $v \geq \epsilon$, se sigue de (49). Por lo que

$$\left| \frac{1}{(\rho - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| \leq \frac{10Rk}{|m + in|^3}.$$

Y ahora sí podemos ocupar el Teorema de Weierstrass y concluir. $\square$

Como consecuencia casi inmediata tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.4. *La función λ modular es analítica en $\mathbb{H}^2$, además $\lambda(\tau)$ es distinto de* 0 *y de* 1 *para todo $\tau \in \mathbb{H}^2$.*

Demostración. Como para cada $\rho \in \{1/2, \tau/2, (1 + \tau)/2\}$ y para cada $w \in \Omega \setminus \{0\}$, se tiene que $\rho - w \neq 0$, se concluye del Lema 0.45 que las funciones $\tau \mapsto e_{i(1,\tau)}$ son analíticas en $\mathbb{H}^2$.

Entonces es inmediato de la definición, que λ es el cociente de dos funciones analíticas, por lo que es meromorfa. Sin embargo por el Teorema 0.36 se concluye que $e_{1(1,\tau)} - e_{2(1,\tau)} \neq 0$, de donde λ es analítica en todo $\mathbb{H}^2$.

Más aún, como $e_{3(1,\tau)} - e_{2(1,\tau)} \neq 0$ y $e_{3(1,\tau)} \neq e_{1(1,\tau)}$ se tiene respectivamente que λ no se anula ni se hace 1. $\square$

El grupo principal de congruencias de nivel 2, denotado por $\Gamma(2)$, consiste en las transformaciones determinadas por las matrices en $SL(2, \mathbb{Z})$ tales que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2},$$

no es difícil probar que $\Gamma(2)$ es un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{Z})$ (cf. [6] p. 96).

Teorema 5.5. *Sea*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \begin{aligned} &a \equiv d \equiv 1 \pmod 2, \\ &b \equiv c \equiv 1 \pmod 2, \\ &ad - bc = 1 \end{aligned}$$

una transformación en $\Gamma(2)$, *entonces*

$$\lambda\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \lambda(\tau).$$

Es decir, λ *es automorfa respecto al grupo principal de congruencias de nivel dos.*

Demostración. Se tiene que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}),$$

tal que $ad - bc = 1$. Por lo usando el Teorema 0.5, podemos concluir que si $\tau \in \mathbb{H}^2$, entonces $\{c\tau + d, a\tau + b\}$ es otra base del módulo generado por $\{1, \tau\}$, ya que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\tau + d \\ c\tau + d \end{pmatrix}.$$

Denotemos

$$\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d},$$

usando el Corolario 0.44, multiplicando ambos elementos de la base $\{1, \tau'\}$ por $c\tau + d$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \lambda(\tau') &= \frac{e_{3(1,\tau')} - e_{2(1,\tau')}}{e_{1(1,\tau')} - e_{2(1,\tau')}} \\ &= \frac{e_{3(c\tau+d,a\tau+b)} - e_{2(c\tau+d,a\tau+b)}}{e_{1(c\tau+d,a\tau+b)} - e_{2(c\tau+d,a\tau+b)}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

En el Teorema 0.35 se demostró que las constantes e_i asociadas a dos bases distintas de un mismo $\mathbb{Z}$-módulo son iguales salvo orden. Más aún, en la prueba del Teorema 0.35 se demuestra que la permutación de estas constantes depende únicamente de los representantes en $\mathbb{Z}_2$ de a, b, c y d.

En nuestro caso, $a \equiv d \equiv 1 \pmod{2}$ y $b \equiv c \equiv 0 \pmod{2}$. Considerando las bases $\{1, \tau\}$ y $\{c\tau + d, a\tau + b\}$, en la prueba del Teorema 0.35 se detalla este caso mostrando que

$$e_{i(1,\tau)} = e_{i(c\tau+d,a\tau+b)}, \qquad i \in \{1, 2, 3\},$$

por lo que

$$\frac{e_{3(c\tau+d,a\tau+b)} - e_{2(c\tau+d,a\tau+b)}}{e_{1(c\tau+d,a\tau+b)} - e_{2(c\tau+d,a\tau+b)}} = \frac{e_{3(1,\tau)} - e_{2(1,\tau)}}{e_{1(1,\tau)} - e_{2(1,\tau)}}.$$

Finalmente, usando la ecuación (50), concluimos que $\lambda\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \lambda(\tau)$. □

Analizamos ahora el comportamiento de la función λ modular en relación al grupo clásico modular. Es un hecho conocido de la geometría hiperbólica básica que $PSL(2, \mathbb{Z})$ está generado por las transformaciones

$$z \mapsto \frac{-1}{z} \qquad \text{y} \qquad z \mapsto z + 1,$$

(cf. [2], pp. 220-221 y [6], pp.162-164)

Teorema 5.6. *La función λ modular, satisface las siguientes ecuaciones*

$$\lambda(\tau + 1) = \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau) + 1} \qquad \lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) = 1 - \lambda(\tau).$$

Demostración. La demostración es análoga al Teorema 0.47, basta ver cómo es que las constantes e_i son permutadas con los cambios de base asociados a las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

los cuales corresponden respectivamente a las transformaciones $\tau \mapsto \tau + 1$ y $\tau \mapsto -1/\tau$.

En la demostración del Teorema 0.35 se detalla el primer caso y se concluye que

$$\begin{aligned} e_{1(1,\tau)} &= e_{1(1,\tau+1)} \\ e_{2(1,\tau)} &= e_{3(1,\tau+1)} \\ e_{3(1,\tau)} &= e_{2(1,\tau+1)}, \end{aligned}$$

de donde tenemos que

$$\begin{aligned}\lambda(\tau+1) &= \frac{e_{3(1,\tau+1)}-e_{2(1,\tau+1)}}{e_{1(1,\tau+1)}-e_{3(1,\tau+1)}}\\ &= \frac{e_{2(1,\tau)}-e_{3(1,\tau)}}{e_{1(1,\tau)}-e_{3(1,\tau)}}\\ &= \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1},\end{aligned}$$

La última igualdad se cumple ya que

$$\begin{aligned}\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1} &= \frac{\left(\frac{e_{3(1,\tau)}-e_{2(1,\tau)}}{e_{1(1,\tau)}-e_{2(1,\tau)}}\right)}{\left(\frac{e_{3(1,\tau)}-e_{2(1,\tau)}}{e_{1(1,\tau)}-e_{2(1,\tau)}}\right)-1}\\ \\ &= \frac{e_{3(1,\tau)}-e_{2(1,\tau)}}{e_{3(1,\tau)}-e_{2(1,\tau)}-e_{1(1,\tau)}+e_{2(1,\tau)}}\\ &= \frac{e_{3(1,\tau)}-e_{2(1,\tau)}}{e_{3(1,\tau)}-e_{1(1,\tau)}}\\ &= \frac{e_{2(1,\tau)}-e_{3(1,\tau)}}{e_{1(1,\tau)}-e_{3(1,\tau)}}.\end{aligned}$$

Para probar la identidad $\lambda(-1/\tau) = 1-\lambda(\tau)$, recordamos que como se vio en el Teorema 0.35, la permutación de las constantes e_i depende únicamente de los representantes en $\mathbb{Z}_2$ de las entradas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

esto es la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando esta matriz a la base $\{1,\tau\}$, obtenemos la base $\{\tau,1\}$, y se sigue fácilmente que usando las técnicas del Teorema 0.35 se tiene

$$\begin{aligned}e_{1(1,\tau)} &= e_{2(1,-1/\tau)}\\ e_{2(1,\tau)} &= e_{1(1,-1/\tau)}\\ e_{3(1,\tau)} &= e_{3(1,-1/\tau)}.\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\frac{-1}{\tau}\right) &= \frac{e_{3(1,-1/\tau)} - e_{2(1,-1/\tau)}}{e_{1(1,-1/\tau)} - e_{3(1,-1/\tau)}} \\
&= \frac{e_{3(1,\tau)} - e_{1(1,\tau)}}{e_{2(1,\tau)} - e_{1(1,\tau)}} \\
&= 1 - \lambda(\tau).
\end{aligned}$$

La última igualdad se cumple ya que

$$\begin{aligned}
1 - \lambda(\tau) = 1 - \frac{e_{3(1,\tau)} - e_{2(1,\tau)}}{e_{1(1,\tau)} - e_{2(1,\tau)}} &= \frac{e_{1(1,\tau)} - e_{2(1,\tau)} - e_{3(1,\tau)} + e_{2(1,\tau)}}{e_{1(1,\tau)} - e_{2(1,\tau)}} \\
&= \frac{e_{1(1,\tau)} - e_{3(1,\tau)}}{e_{1(1,\tau)} - e_{2(1,\tau)}} \\
&= \frac{e_{3(1,\tau)} - e_{1(1,\tau)}}{e_{2(1,\tau)} - e_{1(1,\tau)}}.
\end{aligned}$$

□

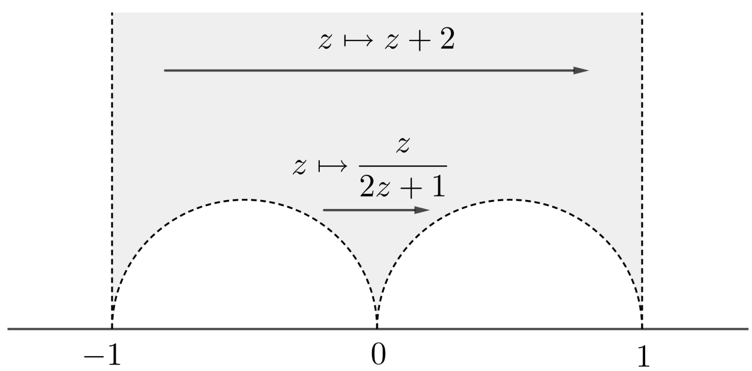


Figura 5.2: Región fundamental para $\Gamma(2)$

Una región fundamental para la acción de $\Gamma(2)$ en $\mathbb{H}^2$, consiste del cuadrilátero hiperbólico delimitado por $-1, 0, 1$ e ∞ (véase Figura 14). Esto se puede derivar de un análisis de los círculos isométricos, de hecho, este es el polígono de Ford (cf. [6] pp. 155-165). Los apareamientos están dados por

$$z \mapsto z+2 \qquad \text{y} \qquad z \mapsto \frac{z}{2z+1}.$$

Se puede probar que el triángulo hiperbólico determinado por $0, 1$ e ∞ se transforma de manera conforme y biyectiva en $\mathbb{H}^2$ y el triángulo hiperbólico $0, -1, \infty$ lo hace en el semiplano inferior. Además λ transforma conforme y biyectivamente la región fundamental en $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ (cf [1] p. 281).

Terminamos mencionando que hay un océano de bellos, interesantes e importantes resultados delante de estas ideas, los cuales pueden consultarse en la bibliografía y en otras fuentes.

Bibliografía

[1] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis,* Mc Graw-Hill Book Company, 1966.

[2] Beardon, A. F., *The Geometry of Discrete Groups,* Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1995.

[3] Jones, G. A. y Singermann, D., *Complex Functions,* Cambridge University Press, 1987.

[4] Friedberg, S. et al. *Linear Algebra,* Pearson Education, 2003.

[5] Lascurain Orive, A., *Curso básico de variable compleja*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2020.

[6] Lascurain Orive, A., *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.

[7] Hoffman, M. y Marsden J. E. *Basic Complex Analysis,* Freeman and Company, 1966.

[8] Markushevich, A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable,* volume III, Prentice Hall, 1967.

[9] Rudin, W., *Principios de Análisis Matemático,* McGraw-Hill, 1980.

[10] Lehner, J., *Discontinuous Groups and Automorphic Functions,* American Mathematical Society, 1964.

[11] McKean, H., *Elliptic Curves,* Cambridge, 1997.

[12] Gilman, J., Kra, I., Rodríguez, Rubí., *Complex Analysis in the Spirit of Lipman Bers* Springer-Verlag New York, 1990.

[13] DIAMOND, FRED., Y SHURMAN, J., *A First Course in Modular Forms,* Springer-Verlag New York, 2005.